

03 - 17 ноября 2025 г.

## Задача А1. Задача трёх кругов

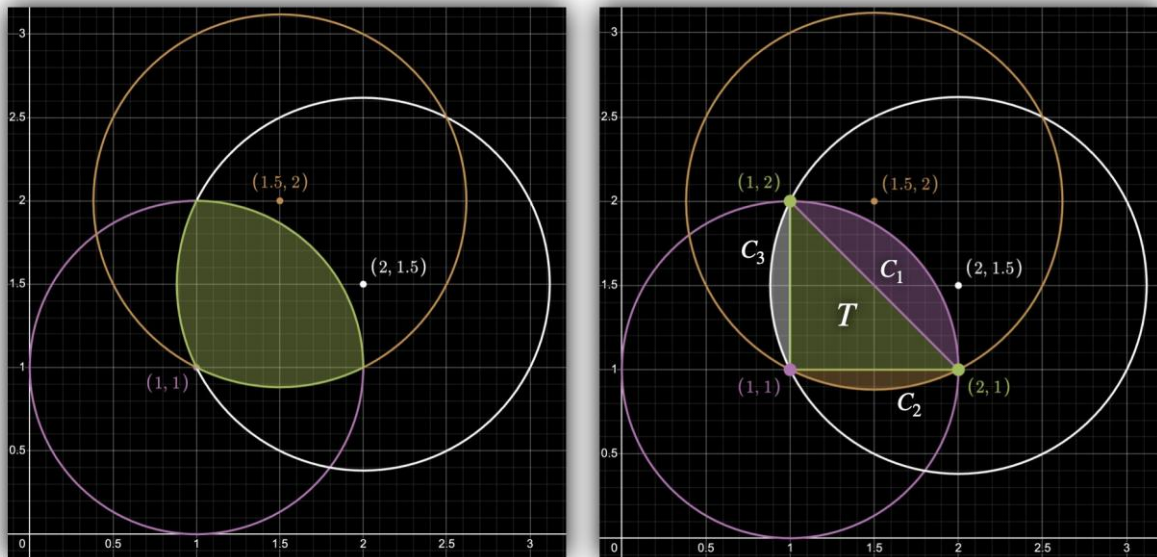
Среди множества возможных применений стохастического метода Монте-Карло особенно выделяется приближенная оценка площадей самых разных геометрических фигур, к которым в том числе относятся фигуры, образуемые пересечением кругов.

### Постановка задачи

Нам даны три окружности:

- с центром в точке  $(1, 1)$  и радиусом  $1$ ,
- с центром в точке  $(1.5, 2)$  и радиусом  $\frac{5}{2}$  и
- с центром в точке  $(2, 1.5)$  и радиусом  $\frac{5}{2}$ .

В рамках этой задачи требуется вычислить приближенное значение площади фигуры, образованной в результате пересечения соответствующих кругов (см. зеленую область на левом рисунке ниже). Кроме того, необходимо оценить, насколько приближенная оценка площади *отклоняется* от ее точного значения в зависимости от параметров работы алгоритма Монте-Карло.



### Точное вычисление площади пересечения кругов

Вывод общей формулы для вычисления площади пересечения кругов — весьма сложная задача, поэтому для удобства вычислений мы разобьем целевую фигуру на прямоугольный треугольник и три круговых *сегмента*, как показано выше на правом рисунке, а именно на:

- прямоугольный треугольник  $T$  с вершинами в точках  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$ ;
- сегмент  $C_1$ , ограниченный гипотенузой  $T$  и кругом с центром в  $(1, 1)$ ;
- сегменты  $C_2$  и  $C_3$ , ограниченные катетами  $T$  и кругами с центрами в  $(1.5, 2)$  и  $(2, 1.5)$ .

Площадь кругового сегмента равна  $\frac{\theta - \sin(\theta)}{2} \cdot r^2$ , где  $r$  — радиус, а  $\theta$  — величина соответствующего центрального угла (в радианах).

03 - 17 ноября 2025 г.

Нетрудно заметить, что площади круговых сегментов  $C_2$  и  $C_3$  совпадают. Поэтому общая площадь фигуры, образованной пересечением заданных кругов, составит

$S = S_T + S_{C1} + 2S_{C2} = S_T + S_{C1} + 2S_{C3}$ . Рассмотрим вычисление площади каждого компонента  $S$  в отдельности:

1. Площадь прямоугольного треугольника  $T$  с единичными катетами равна 0.5.
2. Центральный угол, который образует сегмент  $C_1$ , составляет  $90^\circ - \pi/2$  радиан. Тогда:

$$S_{C1} = \frac{\pi/2 - \sin(\pi/2)}{2} \cdot 1^2 = 0.25 \cdot \pi - 0.5$$

3. Синус центрального угла, который образует сегмент  $C_2$  ( $C_3$ ), составляет 0.8. Его можно найти по теореме косинусов для треугольника с вершинами (1, 1), (1.5, 2) и (2, 1). Тогда:

$$2 \cdot S_{C2} = 2 \cdot S_{C3} = 2 \cdot \frac{\arcsin(0.8) - 0.8}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1$$

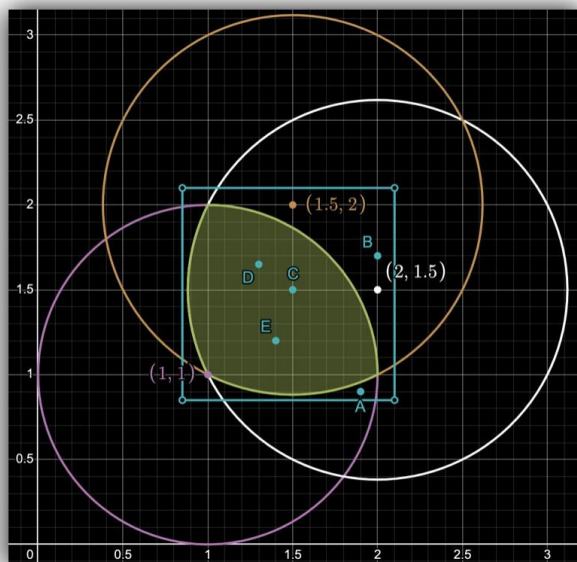
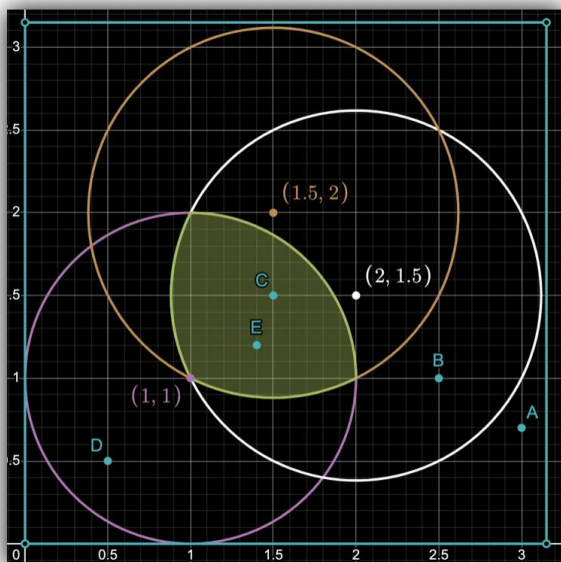
Итак, точная площадь фигуры пересечения трех заданных окружностей составляет:

$$S = S_T + S_{C1} + 2S_{C2} = 0.5 + 0.25 \cdot \pi - 0.5 + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1 = 0.25 \cdot \pi + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1$$

#### Приближенное вычисление площади пересечения кругов

Вычислить оценку площади фигуры, образованной пересечением трех заданных кругов, с помощью метода Монте-Карло можно как минимум двумя способами:

- путем случайной генерации точек в *широкой* прямоугольной области, которая охватывает все три круга полностью (см. на левом рисунке ниже) и
- путем случайной генерации точек в *узкой* прямоугольной области, которая более «плотно» ограничивает пересечение трех кругов (см. на правом рисунке ниже).



В обоих случаях, приближенная оценка отношения площади  $S$  целевой фигуры пересечения трех кругов к площади  $S_{rec}$  прямоугольной области составит  $S/S_{rec} \approx M/N$ , где  $N$  — общее число сгенерированных точек в рассматриваемой прямоугольной области, а  $M$  — число точек, которые попадают внутрь и на границу фигуры пересечения трех кругов. Таким образом, приближенная оценка площади пересечения трех кругов составит  $S_e = (M/N) \cdot S_{rec}$ .

03 - 17 ноября 2025 г.

1. Реализуйте алгоритм Монте-Карло на основе случайной генерации точек в заданной прямоугольной области для приближенного вычисления площади пересечения трех кругов, заданных координатами центров и радиусами.
2. Проведите экспериментальные замеры точности вычисления площади фигуры, *рассмотренной в постановке задачи*, в зависимости от масштаба прямоугольной области (*широкой и узкой*) для случайной генерации точек, а также от количества случайно сгенерированных точек  $N$ , которое изменяется от 100 до 100000 с шагом 500. Представьте результаты проведенных экспериментов в следующем виде:
  - график(-и) первого типа, которые отображают, как меняется приближенное значение площади в зависимости от указанных параметров алгоритма;
  - график(-и) второго типа, которые отображают, как меняется величина относительного отклонения приближенного значения площади от ее точной оценки в зависимости от указанных параметров алгоритма.
3. Опишите полученные вами результаты и сформулируйте содержательные выводы.

Язык программирования, который должен использоваться при реализации алгоритмов, — C++. Ограничений на используемые средства обработки и визуализации эмпирических данных нет. Помимо графиков и пояснений, приложите:

1. ID своей отправки по задаче A1i в системе CodeForces с реализацией алгоритма Монте-Карло.
2. Ссылку на публичный репозиторий с исходными данными, полученными в результате экспериментальных замеров.

## Система оценки

1. 5 баллов Реализация алгоритма Монте-Карло для приближенного вычисления площади фигуры, образованной пересечением трех кругов.
2. 6 баллов Представление экспериментальных результатов работы алгоритма в зависимости от параметров его работы.
3. 4 балла Сравнительный анализ полученных эмпирических данных.

Обратите внимание, что загрузка реализации алгоритма в задачу A1i является *необходимым* условием для получения оценки по другим критериям. Решения без загрузки реализации алгоритма в задачу A1i не проверяются и не оцениваются. Отдельная оценка только за реализацию алгоритма и прохождение тестов в системе Codeforces не выставляется.

## Задача A1i. Задача трех кругов — реализация

Имя входного файла:	стандартный ввод
Имя выходного файла:	стандартный вывод
Ограничение по времени:	1 секунда
Ограничение по памяти:	256 мегабайт

Эта подзадача *сопутствует* основной задаче A1.

Загрузите реализацию алгоритма Монте-Карло оценки площади фигуры, образованной пересечением трех кругов, которые заданы координатами центров и радиусами соответствующих окружностей.

## Формат входных данных

Три строки, каждая содержит по три вещественных числа  $x_i, y_i, r_i$ , где  $0 \leq x_i \leq 1$  и  $0 \leq y_i \leq 1$  — координаты центра окружности, а  $r_i$  — ее радиус.

03 - 17 ноября 2025 г.

## Формат выходных данных

Выведите одно число — приближенную оценку площади пересечения трех заданных кругов с абсолютной погрешностью, не превышающей 0.01.

## Примеры

стандартный ввод	стандартный вывод
0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 1.0 0.0 1.0 1.0	0.44380799999999998029
0.3 0.3 1 0.3 0.3 0.8 0.3 0.3 0.9	2.014632000000000020040

## Замечание

В этой задаче вам нужно внимательно подойти к выбору общего числа генерируемых точек, ориентируясь на значения, приведенные в примере, и требуемую погрешность. Отдельная оценка только за решение задачи A1i без проведения экспериментального анализа (отчета по задаче A1) не выставляется.