

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ЧЕРНОВИК ДИПЛОМА

**Численное моделирование  
воздействия вибрационной  
нагрузки на образец в  
трёхмерном случае.**

# 1 Постановка задачи

Есть пластина, она занимает объем  $\bar{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$ ,  $h$  - толщина пластины.  $\Omega$  - срединная плоскость Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_f \quad (1)$$

где  $\Gamma_c$  - закрепленный конец,  $\Gamma_f$  - свободный конец

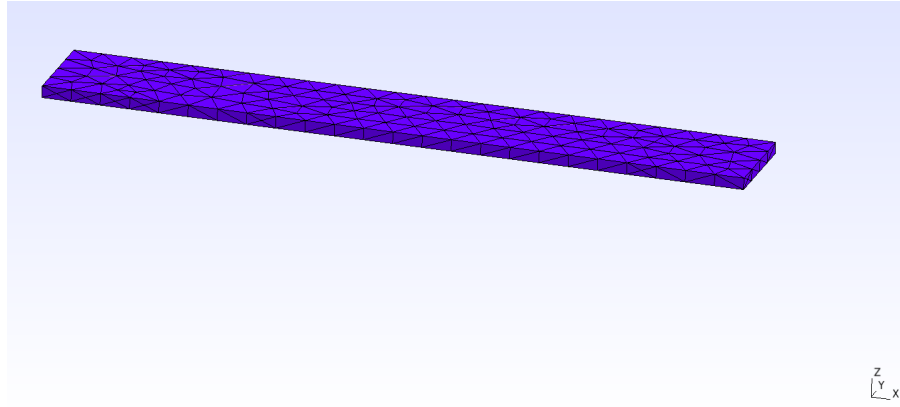


Рис. 1: Модель пластины в 3D

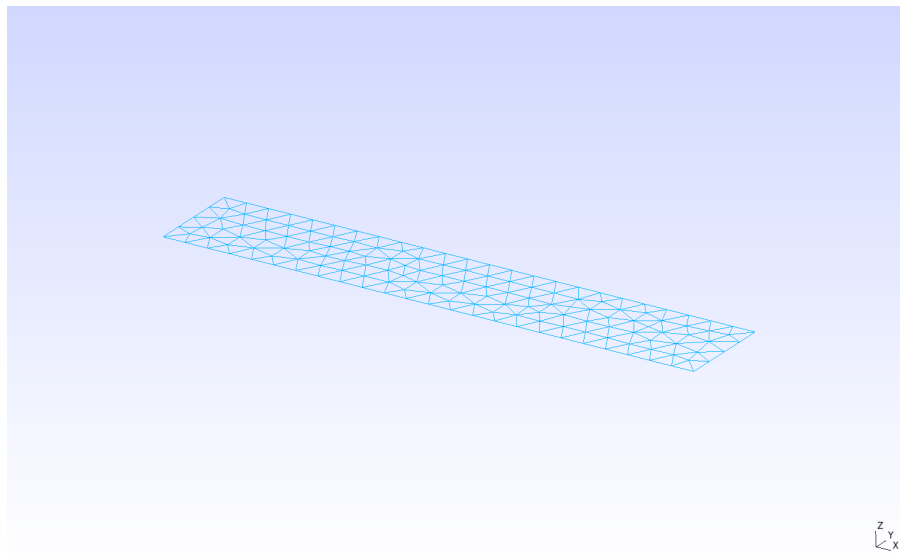


Рис. 2: Модель пластины в 2D

Пока техал заметил, что gmsh считает 2d поверхностью только 1 плоскость, ту, которой дана 2D physical group, надеюсь это норм

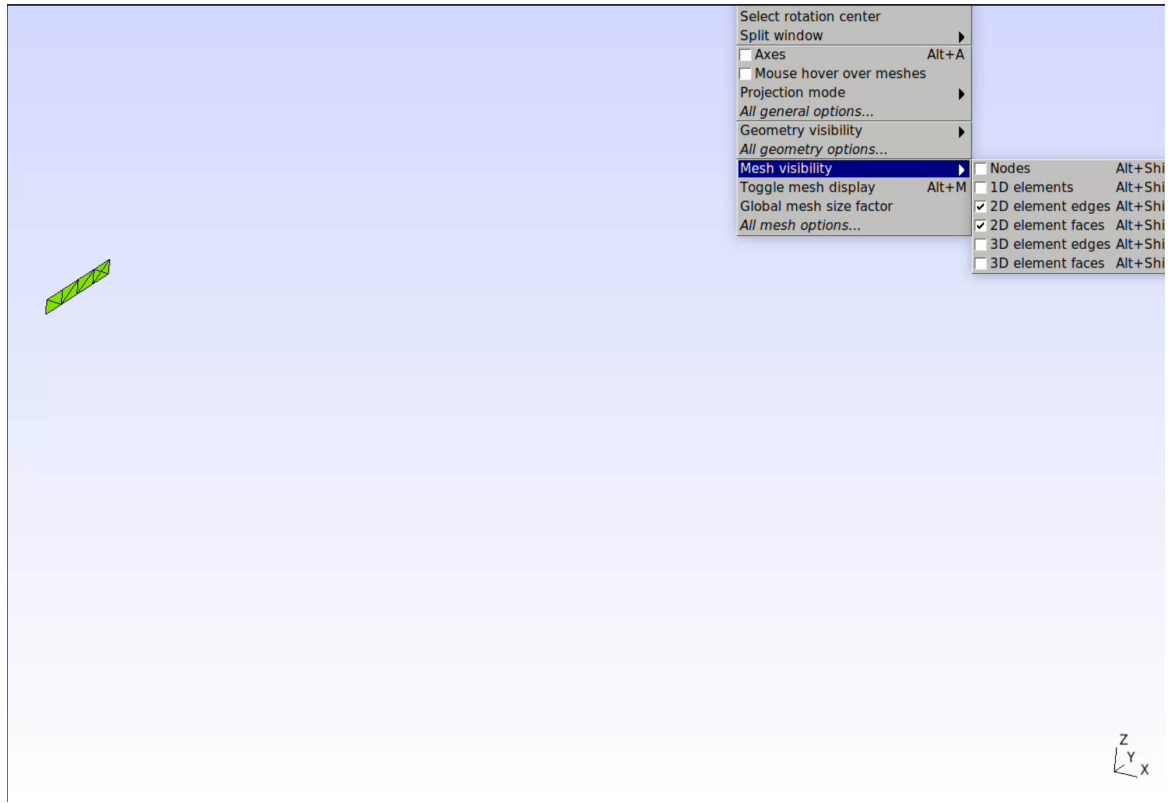


Рис. 3: Модель пластины в 3D issue

уравнение динамики для пластины:

$$2e\rho\ddot{\omega}^0 - \frac{2e^3}{3}\rho\Delta\ddot{\omega}^0 - \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M} = f, \quad (2)$$

где  $e = \frac{1}{2}h$ ,  $\rho$  - плотность материала,  $f$  - внешняя нагрузка,  $\mathbf{M}$  - тензор моментов:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{pmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} z^2 \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} dz \quad (3)$$

Компоненты тензора моментов можно выразить, используя закон Гука:

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \frac{2e^3}{3} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Задачу можно сформулировать в следующем виде:

$$\rho\ddot{\omega}^0 - \frac{1}{3}\rho e^2\Delta\ddot{\omega}^0 - \frac{1}{2e}\operatorname{div} \operatorname{div} \mathcal{D}\nabla\nabla\omega^0 = \frac{1}{2e}f, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \omega^0 = g & \text{на } \Gamma_c \\ \frac{\partial\omega^0}{\partial n} = 0 & \text{на } \Gamma_c \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}e^3\rho\frac{\partial}{\partial n}\ddot{\omega}^0 + \operatorname{div} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial \tau}(\mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) & \text{на } \Gamma_f \\ \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{на } \Gamma_f \end{cases} \quad (7)$$

где  $\mathcal{D}$  - тензор четвертого ранга:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & \frac{1}{2}D_{16} & 0 & D_{16} & \frac{1}{2}D_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}D_{16} & D_{12} & 0 & \frac{1}{2}D_{66} & D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{16} & \frac{1}{2}D_{66} & 0 & D_{12} & \frac{1}{2}D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}D_{66} & D_{26} & 0 & \frac{1}{2}D_{26} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Для 2D - зачернуть все нули

Пользуясь теоремой о дивергенции  $\int_{\Omega}(\operatorname{div} \bar{p})v + \int_{\Omega} \bar{p}v = \int_{\partial\Omega}(\bar{p} \cdot \bar{n})v$

$$\int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu + \frac{1}{3}e^2\Delta u\nu) + \frac{1}{2e}\operatorname{div} \operatorname{div} \hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu - f\nu)d\Omega = \quad (9)$$

$$= \int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}\operatorname{div} \operatorname{div} \hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu - f\nu)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \bar{n}\nu = \quad (10)$$

$$= \int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) - \frac{1}{2e}\operatorname{div} \hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nabla\nu - f\nu)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2e}\bar{n} \operatorname{div} \hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu = \quad (11)$$

$$= \int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) - \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2e}\bar{n} \hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nabla\nu = \quad (12)$$

$$= \int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega = 0 \quad (13)$$

Будем считать, что закрепленная граница колеблется с известной частотой и амплитудой

$$g(x, y, z, t) = g_{\omega}(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (14)$$

Задача линейная, следовательно решение можно представить в виде

$$\omega^0 = \omega_{part}^0 + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \omega_i^0 \quad (15)$$

Т.к присутствует потеря энергии, считаем, что вторым слагаемым по прошествии достаточно долгого времени можно пренебречь.

Частное решение будем искать в виде

$$\omega_{part} = u(x, y, z, \omega) \cdot e^{i\omega t} \quad (16)$$

Модель демпфирования заключается в представлении тензора  $\mathcal{D}$ :

$$\hat{\mathcal{D}}_{\alpha} = \mathcal{D}(1 + i\beta_{\alpha}) \quad (17)$$

где  $\beta_{\alpha}$  - коэффициент потерь,  $\alpha \in \{11, 12, 16, 22, 26, 66\}$ . Будем считать для численного расчета, что  $g \equiv 1$ . Слабая формулировка проблемы может быть сформулирована следующим образом: Найти  $u \in H_2^2(\Omega)$  такое что  $u|_{\Gamma_c} = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_c} = 0$  и для всех  $\nu \in H_2^2(\Omega)$  удовлетворяющих  $\nu|_{\Gamma_c} = \frac{\partial \nu}{\partial n}|_{\Gamma_c} = 0$  выполнено

$$\int_{\Omega}(\rho\omega^2(u\nu + \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega = 0 \quad (18)$$

Решение Аппроксимируется как линейная комбинация базисных функций  $h_i$

$$u = \sum_{i \in I} u_i h_i + \sum_{k \in D} g_k h_k \quad (19)$$

$I$  - подмножество индексов базисных функций, которые равны 0 на  $\Gamma_c$ .  $D$  - множество индексов базисных функций, которые аппроксимируют граничное условие Дирихле. **И тут я понял, что с граничными условиями что-то не так...**

## 2 ГУ. Попытка натянуть сову на глобус

1. Граничное условие Дирихле на закрепленном конце (44-45):

```
u_D = np.array([1], dtype=default_scalar_type)
bc = fem.dirichletbc(u_D,
                    fem.locate_dofs_topological(V, fdim, ft.find(1)), V)
```

2. Граничное условие Неймана на закрепленном конце (второе уравнение системы (6)): в коде не отражается т.к. условия Неймана в фениксе задаются интегралом в линейной форме (правой части) -> интеграл от 0 ни на что не влияет

3. Равенство нулю тангенсального напряжения на свободном конце (система (7)):

$$\mathbf{Mn} \cdot \boldsymbol{\tau} = D \nabla \nabla u \cdot \mathbf{n} \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (20)$$

Аналогично п.2

**Выглядят, конечно, п.2 и п.3 неправдоподобно, но  $\pm$  согласуете с тем, что я вычитал на формулах. А вот как занулить  $\nabla \nu$  на границе... Даже если это сработало в п.3 и п.2, то сейчас кажется что интеграл по границе в (12) точно не поможет, проблема в том, что других механизмов как задать условие Неймана я не нашел.**

## 3 Тем не менее, что-то посчиталось

В коде слабая формулировка задается следующим образом (106-110):

```
#Bilinear form
a = 2*e*(-rho * omega ** 2 * ( ufl.inner(u, v) ) \
+ 1 / 3 * e ** 2 * ufl.inner(grad(u)[0,:], grad(v)[0,:]) ) \
- 1/(2*e)*ufl.inner(D_2d, ufl.outer(grad(grad(u)[0,:]),
grad(grad(v)[0,:])))*ufl.dx
# Linear form
L = ufl.inner(f, v[0])*ufl.dx
```

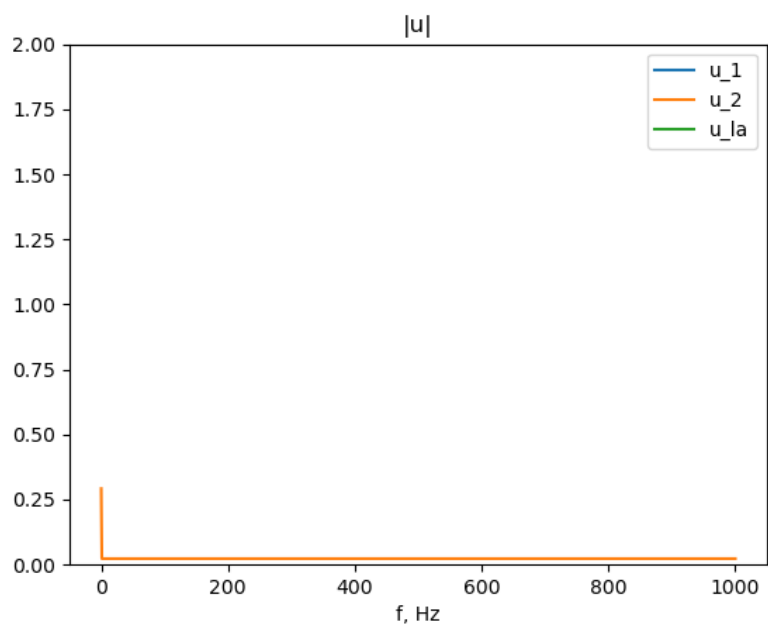


Рис. 4: АЧХ на РЗ в 2D

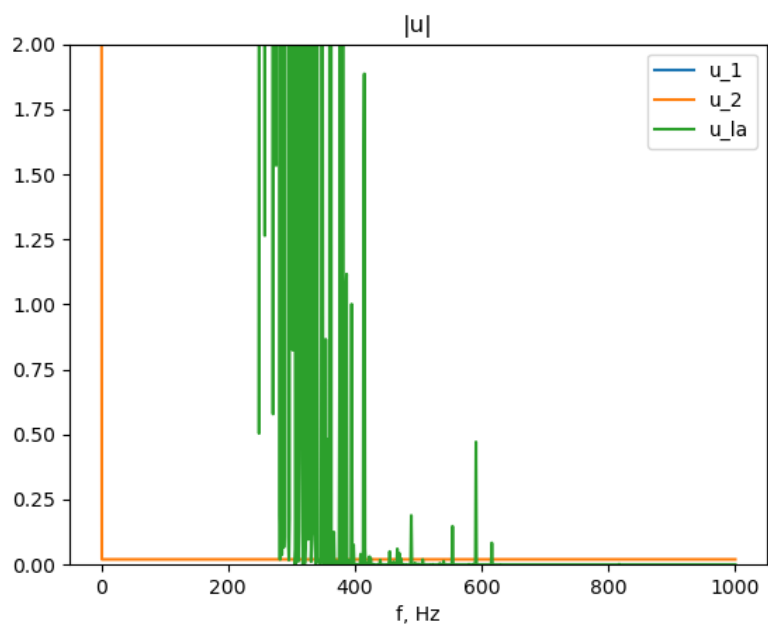


Рис. 5: АЧХ на РЗ в 3D

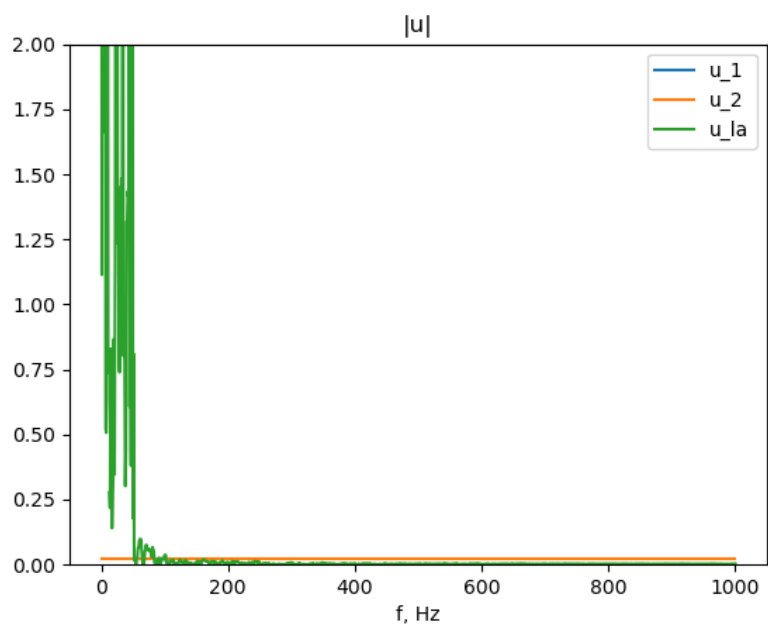


Рис. 6: АЧХ на P2 в 2D