Московский физико-технический институт

Черновик диплома

Численное моделирование воздействия вибрационной нагрузки на образец в трёхмерном случае.

Долгопрудный, 2021 г.

1 Постановка задачи

todo: 1. Написать объяснения преобразований тензоров

Есть пластина, она занимает объем $\overline{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{c} \cup \Gamma_\mathrm{f} \tag{1}$$

где Γ_c - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

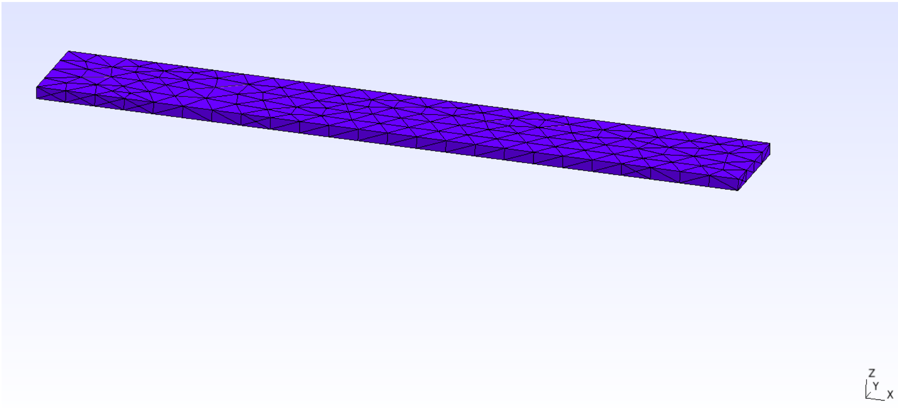

Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho\ddot{\overline{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{C}{:}\mathbf{e}) - \overline{Q} = 0, \tag{2}$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q = 0$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где $\nabla\cdot$ - дивергенция ($\nabla\otimes$ - градиент), ρ - плотность материала, $\overline{Q}$ - внешняя нагрузка, $\mathbf{C}$ - тензор уругих модулей: Не уверен, что он верно записан

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \tag{3}$$

где $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mathbf{e}$ - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{4}$$

2 Метод

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \overline{u}, \nabla \otimes \overline{u}) dxdydz \to min \Longleftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = 0 \tag{5}$$

Наверное, $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = \nabla_{\overline{u}} \otimes f$ Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = \frac{1}{2}\mathbf{C} : (\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{6}$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2}\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T - \overline{Q} \cdot \overline{u} \tag{8}$$

Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1. $\partial \leftrightarrow d$. 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича я выписываю интуитивно ожидаемый результат Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\overline{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{9}$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\overline{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \tag{10}$$

Отсюда можно записать

$$\begin{aligned} \overline{u} = \frac{1}{6V}[&(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)\overline{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)\overline{u}_j \\ &+(a_m + b_m x + c_m y + d_m z)\overline{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)\overline{u}_p] \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$V = det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{12}$$

коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются как

$$a_i = det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = -det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad c_i = -det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\overline{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \overline{u}^e = [\mathbf{N}]\overline{u}^e \tag{14}$$

где $N_i = \frac{a_i+b_ix+c_iy+d_iz}{6V}$, $\mathbb{I}-$ единичная матрица, $\overline{u}^e = (u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2 ... \omega_4)$ - вектор размера (12,1) неизвестных перемещений для элемента.

Рассмотрим данный функционал на элементе е: $\chi \to \chi^e$:

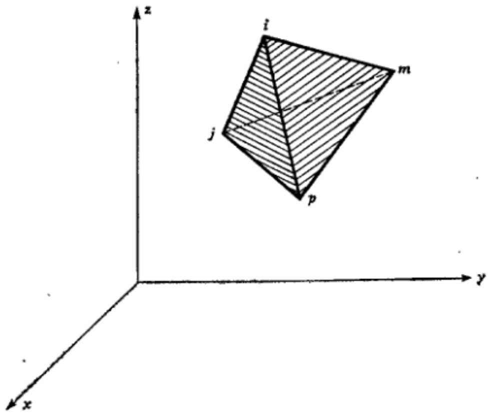

Рис. 3: Тетраэдральный элемент

И возьмем производную по $\overline{u}_i$ - вектору перемещения в узле i:

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} : (\nabla \otimes \overline{u}^T : \mathbf{C}) + (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u})^T : (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u}) - \right. \tag{15}$$

$$\left. - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \right) dV \tag{16}$$

Учтем, что

$$\begin{gathered} \nabla \otimes \overline{u} = (\nabla \otimes [\mathbf{N}]) \cdot \overline{u}^e, \\ \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} = (\nabla \otimes [\mathbf{N}]) \cdot (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}^e)^T \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда (15) можно записать как

$$\begin{gathered} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e)^T : \mathbf{C}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \right) dV = \\ = \int_{V^e} \left(\left\{ \frac{1}{2} \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}])^T : \mathbf{C})^T + \right. \right. \\ \left. \left. + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \right\} \cdot \overline{u}^e - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \right) dV \end{gathered} \tag{18}$$

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi_j^e = \int_{V^e} \Bigg(\frac{1}{2} \Big\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + \\ +(\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \cdot \Big\} \overline{u}_j^e - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \Bigg) dV \tag{19}$$

Выражение в фигурных скобках - **матрица 3x3**. Здесь, возможно, не очевидный момент - i,j = 1,2,3,4 - нумеруют узел в тетраэдральном элементе, это никак не связано с тем, что в скобках матрица. Дело в том, что $\overline{u}$ - 3x1 вектор, поэтому связь между i-м и j-м узлами теперь задается матрицей 3x3. Поэтому в разделе пояснений к коду, (и пояснений к преобразованиям тензоров, (когда они появятся))при переходе к индексной записи тензоров я использую греческие буквы, чтобы они не пересекались с i и j Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi_j^e = h^e \cdot \overline{u}^e + \overline{F}^e \tag{20}$$

, где

$$h_{ij}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \Big\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \Big\} dV \tag{21}$$

$$\overline{F}_i^e = - \int_{V^e} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \tag{22}$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\overline{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \overline{u} + \overline{F} \tag{23}$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e \qquad F_i = \sum F_i^e \tag{24}$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2): Ее я не выводил руками, а написал по аналогии

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}]_i^T \rho [\mathbf{N}]_j dV \tag{25}$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H]\overline{u} + [M]\ddot{\overline{u}} + \overline{F} = 0 \tag{26}$$

3 Пояснения к коду plate3d.py

Вернемся к страшной формуле для h_{ij} чтобы показать как она выражается в коде.

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{0\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \tag{27}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Для $\nabla\otimes[\mathbf{N}]_{1\alpha\beta}$ и $\nabla\otimes[\mathbf{N}]_{2\alpha\beta}$ соответственно $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, в матрице c_i и d_i.

$$\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial u_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_4\\ \frac{\partial}{\partial v_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_4\\ \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_4\end{pmatrix}^T \tag{29}$$

$$=[0,\ldots\mathbb{I}_i,..0] \tag{30}$$

Поэтому удобнее их воспринимать вместе:

$$\nabla\otimes[\mathbf{N}]\cdot(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T=\nabla\otimes[\mathbf{N}]_{\alpha\beta\gamma}\cdot(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T_{\gamma\zeta}=\mathbf{B}_{\alpha\beta\zeta} \tag{31}$$

Здесь сидит индекс i - т.к. эта матрица это расписанный $\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\nabla\otimes\overline{u}$

$$\mathbf{B}_{0\beta\zeta}=\begin{pmatrix}b_i & 0 & 0\\ 0 & b_i & 0\\ 0 & 0 & b_i\end{pmatrix},\mathbf{B}_{1\beta\zeta}=\begin{pmatrix}c_i & 0 & 0\\ 0 & c_i & 0\\ 0 & 0 & c_i\end{pmatrix},\mathbf{B}_{2\beta\zeta}=\begin{pmatrix}d_i & 0 & 0\\ 0 & d_i & 0\\ 0 & 0 & d_i\end{pmatrix} \tag{32}$$

Аналогично для

$$(\nabla\otimes[\mathbf{N}]_j)^T_{\alpha\beta\gamma}:\mathbf{C}_{\beta\gamma\phi\zeta})=\mathbf{A}_{\alpha\phi\zeta} \tag{33}$$

Здесь сидит индекс j т.к мы рассмотрели крокодила (15) на узле j Для матрицы масс:

$$N_iN_j=\frac{a_i+b_ix+c_iy+d_iz}{6V}\cdot\frac{a_j+b_jx+c_jy+d_jz}{6V}= \tag{34}$$

$$\frac{a_i+b_i(x_b+\tilde{x})+c_i(y_b+\tilde{y})+d_i(z_b+\tilde{z})}{6V}\cdot\frac{a_j+b_j(x_b+\tilde{x})+c_j(y_b+\tilde{y})+d_j(z_b+\tilde{z})}{6V} \tag{35}$$

где x_b, y_b, z_b -координаты барицентра В системе барицентра

$$\int dxdydz=V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_m & y_m & z_m\\ 1 & x_p & y_p & z_p\end{vmatrix} \tag{36}$$

В этот момент понял, что возможно ошибся в коэффициентах при вычислении матрицы масс

$$\int xdxdydz=\int ydxdydz=0 \tag{37}$$

$$\int x^2dxdydz=\frac{V}{10}(\sum_i x_i^2+\sum_{ij,i<j}x_ix_j) \tag{38}$$

$$\int xydxdydz=\frac{V}{20}(\sum_i x_iy_i+\sum_{ij,i<j}(x_iy_j+x_jy_i)) \tag{39}$$

Формулы выше расходятся с Зинкевичем из-за перекрестных слагаемых, deepseek утверждает что у Зинкевича формулы для интегрирования по равностороннему треугольнику, я ему верю, закодить эти формулы мне показалось легче, чем закодить преобразование треугольника

4 Что получилось

Ищем собственные значения:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \tag{40}$$

Тут я заходил с двух сторон:

1.Как в Зинкевиче рассмотреть эту систему как задачу на собственные значения и вычислить ω из уравнения $det([H] - \omega^2[M]) = 0$

2. Задать ω и решить систему $([H] - \omega^2[M])\overline{u} + \overline{F} = 0$.

В обоих случаях пока осмысленного ничего не получил, код пока сильно не дебажил

Проблема, как мне кажется, в том, что в **C** огромные значения - из-за этого со СЛАУ возникают проблемы.