

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЧЕРНОВИК ДИПЛОМА

**Численное моделирование воздействия
вибрационной нагрузки на образец в
трёхмерном случае.**

Долгопрудный, 2021 г.

1 Постановка задачи

todo: 1. Написать объяснения преобразований тензоров

Есть пластина, она занимает объем $\bar{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_f \quad (1)$$

где Γ_c - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

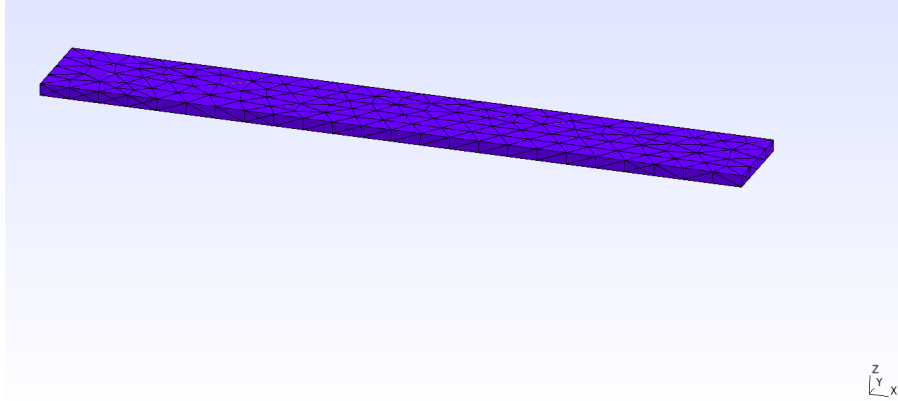


Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho \ddot{u} - \nabla \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{e}) - \bar{Q} = 0, \quad (2)$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q = 0$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где $\nabla \cdot$ - дивергенция ($\nabla \otimes$ - градиент), ρ - плотность материала, \bar{Q} - внешняя нагрузка, \mathbf{C} - тензор уругих модулей: **Не уверен, что он верно записан**

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \quad (3)$$

где $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, \mathbf{e} - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \bar{u} + \nabla \otimes \bar{u}^T) \quad (4)$$

2 Метод

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \bar{u}, \nabla \otimes \bar{u}) dx dy dz \rightarrow \min \iff -\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \bar{u})} = 0 \quad (5)$$

Наверное, $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla_{\bar{u}} \otimes f$ Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \bar{u})} = \frac{1}{2} \mathbf{C} : (\nabla \otimes \bar{u} + \nabla \otimes \bar{u}^T) \quad (6)$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \nabla \otimes \bar{u} : \nabla \otimes \bar{u}^T - \bar{Q} \cdot \bar{u} \quad (8)$$

Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1. $\partial \leftrightarrow d$. 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича я выписываю интуитивно ожидаемый результат Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (9)$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\bar{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (10)$$

Отсюда можно записать

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{1}{6V} [& (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \bar{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) \bar{u}_j \\ & + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) \bar{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) \bar{u}_p] \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (12)$$

коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются как

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad c_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\bar{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \bar{u}^e = [\mathbf{N}] \bar{u}^e \quad (14)$$

где $N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$, \mathbb{I} – единичная матрица, $\bar{u}^e = (u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2 \dots \omega_4)$ – вектор размера (12,1) неизвестных перемещений для элемента.

Рассмотрим данный функционал на элементе e : $\chi \rightarrow \chi^e$:

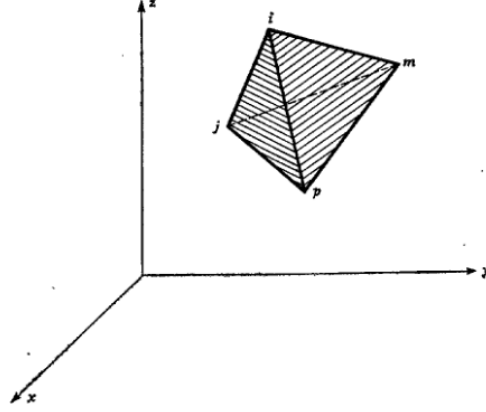


Рис. 3: Тетраэдральный элемент

И возьмем производную по \bar{u}_i – вектору перемещения в узле i :

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u} : (\nabla \otimes \bar{u}^T : \mathbf{C}) + (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u})^T : (\mathbf{C} : \nabla \otimes \bar{u}) - \right. \quad (15)$$

$$\left. - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \right) dV \quad (16)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \bar{u} &= (\nabla \otimes [\mathbf{N}]) \cdot \bar{u}^e, \\ \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u} &= (\nabla \otimes [\mathbf{N}]) \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда (15) можно записать как

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi^e &= \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \bar{u}^e)^T : \mathbf{C}) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \bar{u}^e - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \Big) dV = \\ &= \int_{V^e} \left(\left\{ \frac{1}{2} \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}])^T : \mathbf{C})^T + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \right\} \cdot \bar{u}^e - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \right) dV \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi_j^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + \right. \right. \\ \left. \left. + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \cdot \right\} \bar{u}_j^e - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}_j \cdot \bar{Q}_j \right) dV \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение в фигурных скобках - **матрица 3x3**. Здесь, возможно, не очевидный момент - i, j = 1,2,3,4 - нумеруют узел в тетраэдральном элементе, это никак не связано с тем, что в скобках матрица. Дело в том, что \bar{u} - 3x1 вектор, поэтому связь между i-м и j-м узлами теперь задается матрицей 3x3. Поэтому в разделе пояснений к коду, (и пояснений к преобразованиям тензоров, (когда они появятся)) при переходе к индексной записи тензоров я использую греческие буквы, чтобы они не пересекались с i и j Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi_j^e = h^e \cdot \bar{u}^e + \bar{F}^e \quad (20)$$

, где

$$h_{ij}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \right\} dV \quad (21)$$

$$\bar{F}_i^e = - \int_{V^e} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}_j \cdot \bar{Q}_j \quad (22)$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\bar{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \bar{u} + \bar{F} \quad (23)$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e \quad F_i = \sum F_i^e \quad (24)$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2): **Ее я не выводил руками, а написал по аналогии**

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}]_i^T \rho [\mathbf{N}]_j dV \quad (25)$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H] \bar{u} + [M] \ddot{\bar{u}} + \bar{F} = 0 \quad (26)$$

3 Пояснения к коду plate3d.py

Вернемся к страшной формуле для h_{ij} чтобы показать как она выражается в коде.

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{0\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \quad (27)$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Для $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{1\alpha\beta}$ и $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{2\alpha\beta}$ соответственно $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, в матрице c_i и d_i .

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial v_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_4 \end{pmatrix}^T \quad (29)$$

$$=[0, \dots \mathbb{I}_i, \dots 0] \quad (30)$$

Поэтому удобнее их воспринимать вместе:

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T = \nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta\gamma} \cdot (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)_{\gamma\zeta}^T = \mathbf{B}_{\alpha\beta\zeta} \quad (31)$$

Здесь сидит индекс i - т.к. эта матрица это расписанный $\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u}$

$$\mathbf{B}_{0\beta\zeta} = \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & b_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{1\beta\zeta} = \begin{pmatrix} c_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{2\beta\zeta} = \begin{pmatrix} d_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \quad (32)$$

Аналогично для

$$(\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)_{\alpha\beta\gamma}^T : \mathbf{C}_{\beta\gamma\phi\zeta} = \mathbf{A}_{\alpha\phi\zeta} \quad (33)$$

Здесь сидит индекс j т.к мы рассмотрели крокодила (15) на узле j Для матрицы масс:

$$N_i N_j = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} = \quad (34)$$

$$\frac{a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z})}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})}{6V} \quad (35)$$

где x_b, y_b, z_b - координаты барицентра В системе барицентра

$$\int dx dy dz = V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (36)$$

В этот момент понял, что возможно ошибся в коэффициентах при вычислении матрицы масс

$$\int x dx dy dz = \int y dx dy dz = 0 \quad (37)$$

$$\int x^2 dx dy dz = \frac{V}{10} \left(\sum_i x_i^2 + \sum_{ij, i < j} x_i x_j \right) \quad (38)$$

$$\int xy dx dy dz = \frac{V}{20} \left(\sum_i x_i y_i + \sum_{ij, i < j} (x_i y_j + x_j y_i) \right) \quad (39)$$

Формулы выше расходятся с Зинкевичем из-за перекрестных слагаемых, deepseek утверждает что у Зинкевича формулы для интегрирования по равностороннему треугольнику, я ему верю, закодить эти формулы мне показалось легче, чем закодить преобразование треугольника to be continued