

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЧЕРНОВИК ДИПЛОМА

**Численное моделирование воздействия  
вибрационной нагрузки на образец в  
трёхмерном случае.**

Долгопрудный, 2021 г.

# 1 Постановка задачи

Есть пластина, она занимает объем  $\bar{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$ ,  $h$  - толщина пластины.  $\Omega$  - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_c \cup \Gamma_f \quad (1)$$

где  $\Gamma_c$  - закрепленный конец,  $\Gamma_f$  - свободный конец

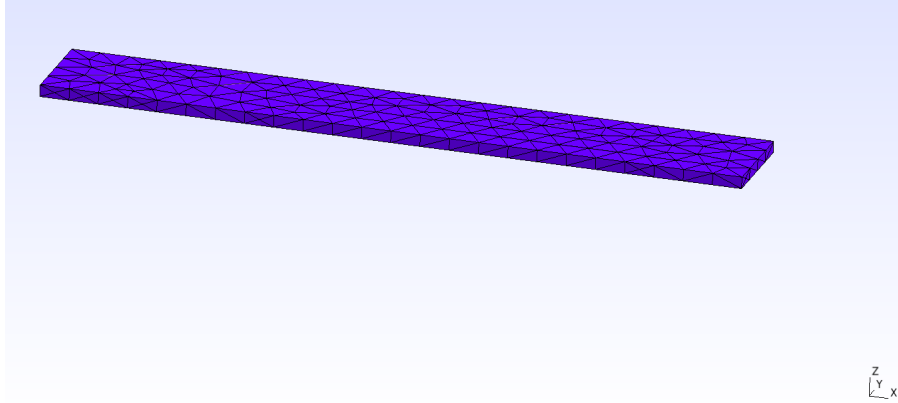


Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho \ddot{u} - \nabla \cdot (\mathbf{C} : \mathbf{e}) - \bar{Q} = 0, \quad (2)$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \left( \bar{Q} - \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) =$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где  $\nabla \cdot$  - дивергенция ( $\nabla \otimes$  - градиент),  $\rho$  - плотность материала,  $\bar{Q}$  - внешняя нагрузка,

$\mathbf{C}$  - тензор уругих модулей: **Не уверен, что он верно записан**

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \quad (3)$$

где  $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $\mathbf{e}$  - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \bar{u} + \nabla \otimes \bar{u}^T) \quad (4)$$

## 2 Метод

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \bar{u}, \nabla \otimes \bar{u}) dx dy dz \rightarrow \min \iff -\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \bar{u})} = 0 \quad (5)$$

**Наверное,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} = \nabla_{\bar{u}} \otimes f$**  Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \bar{u})} = \frac{1}{2} \mathbf{C} : (\nabla \otimes \bar{u} + \nabla \otimes \bar{u}^T) \quad (6)$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \quad (7)$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \nabla \otimes \bar{u} : \nabla \otimes \bar{u}^T - \bar{Q} \cdot \bar{u} \quad (8)$$

**Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1.  $\partial \leftrightarrow d$ . 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича я выписываю интуитивно ожидаемый результат** Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (9)$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\bar{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \quad (10)$$

Отсюда можно записать

$$\begin{aligned} \bar{u} = \frac{1}{6V} [ & (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) \bar{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) \bar{u}_j \\ & + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) \bar{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) \bar{u}_p ] \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (12)$$

коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, d_i$  определяются как

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad c_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\bar{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \bar{u}^e = [\mathbf{N}] \bar{u}^e \quad (14)$$

где  $N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$ ,  $\mathbb{I}$  — единичная матрица,  $\bar{u}^e = (u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2, \dots, \omega_4)$  — вектор размера (12,1) неизвестных перемещений для элемента.

Рассмотрим данный функционал на элементе  $e: \chi \rightarrow \chi^e$ :

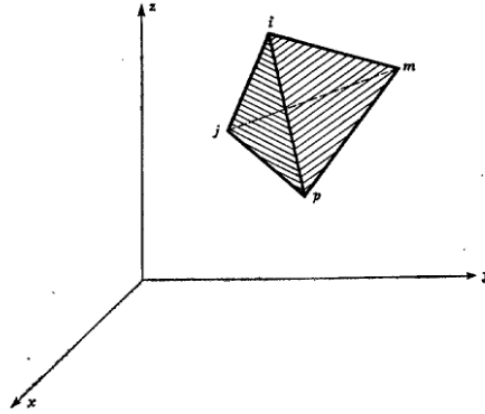


Рис. 3: Тетраэдральный элемент

**Заметка на полях:**

$$\nabla \otimes \bar{u} = \nabla \otimes \bar{u}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (15)$$

$$\nabla \otimes \nabla \otimes \bar{u} = \nabla \otimes \bar{u}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (16)$$

Эти две "формулы" показывают куда и в каком порядке расставлять индексы. **Я не до конца уверен, что последняя формула верна.**

Возьмем производную по  $\bar{u}_i$  — вектору перемещения в узле  $i$ :  $i$  — номер узла тетраэдра, просто обозначение, никак не соотносится с индексами  $\alpha, \beta \dots$  Подробнее описано ниже

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes (\mathbf{C} : \nabla \otimes \bar{u} : \nabla \otimes \bar{u}^T) &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i\alpha}} \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right)^T = \\ &= \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right) \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right)^T + \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i\alpha}} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right)^T \right) = \\ &= \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right)^T \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right) + \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_{i\alpha}} \left( \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma} \right)^T \right) = \\ &= (\nabla \otimes \bar{u}^T : \mathbf{C}) : \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u} + (\mathbf{C} : \nabla \otimes \bar{u}) : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u})^T \end{aligned} \quad (17)$$

В предпоследней строке странная вещь - с точки зрения индексной записи можно поменять в последнем слагаемом умножаемые местами, тогда в последней формуле второй градиент от  $u$  будет стоять спереди, но с точки зрения тензорной алгебры я не уверен что двойное скалярное произведение тензоров второго и третьего ранга ассоциативно

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} (\nabla \otimes \bar{u})^T : \mathbf{C} : \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u} + \frac{1}{2} \nabla \otimes \bar{u} : \mathbf{C} : \nabla_{\bar{u}_i} \otimes (\nabla \otimes \bar{u})^T - \right. \\ \left. - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \right) dV \quad (18)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \bar{u} &= \nabla \otimes ([\mathbf{N}] \cdot \bar{u}^e) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (N_{\beta\gamma} \bar{u}_\gamma^e) = \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma} \right) \bar{u}_\gamma^e = \bar{u}_\gamma^e \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma} \right) = \bar{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T, \\ \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u} &= \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes ([\mathbf{N}] \cdot \bar{u}^e) = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} (\bar{u}_\gamma^e \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma} \right)) = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} \bar{u}_\gamma^e \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma} \right) = (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T, \\ \nabla_{\bar{u}_i} \otimes (\nabla \otimes \bar{u})^T &= \nabla_{\bar{u}_i} \otimes (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \bar{u}^e)^T = \nabla_{\bar{u}_i} \otimes (\bar{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^T = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} (\bar{u}_\gamma^e \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma} \right))^T = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} (\bar{u}_\gamma^e \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\gamma\beta}^T \right))^{(132)} = \left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} \bar{u}_\gamma^e \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\gamma\beta} \right)^{(132)} \end{aligned} \quad (19)$$

Выше индекс (132) обозначение изомера тензора третьего ранга. У матрицы, которая соответствует данному тензору, поменяны местами вторая и третья оси. Тогда (18) можно записать как

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi^e &= \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} (\bar{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \bar{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \left. \right) dV = \\ &= \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} \bar{u}^e \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \bar{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} - \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} \left. \right) dV = \\ &= \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T \right\}^T + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} \right\}^T \left. \right) \bar{u}^e - \int_{V^e} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u} \cdot \bar{Q} dV \end{aligned} \quad (20)$$

Пояснение к (20): В третьей строке первое слагаемое можно представить так

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} : \mathbf{C} &= \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T \big|_{\alpha\beta\gamma}^{(132)} : \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} = \mathbb{A}_{\alpha\nu\mu} \\ (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T &= (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)_{\nu\beta}^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\beta\mu\phi}^T = \mathbb{B}_{\nu\mu\phi} \\ \bar{u}_\alpha^e \cdot \mathbb{A}_{\alpha\nu\mu} : \mathbb{B}_{\nu\mu\phi} &= \bar{u}_\alpha^e \cdot \mathbb{D}_{\alpha\phi} = \mathbb{D}_{\phi\alpha}^T \cdot \bar{u}_\alpha \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично для второго слагаемого

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi_j^e = \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T)^{(132)} : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T + \right. \right. \\ \left. \left. + \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} \right\}^T \right) \bar{u}^e - \int_{V^e} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}_j \cdot \bar{Q}_j dV \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение в фигурных скобках - **матрица 3x3**. Здесь, возможно, не очевидный момент - i, j = 1,2,3,4 - нумеруют узел в тетраэдральном элементе, это никак не связано с тем, что в скобках матрица. Дело в том, что  $\bar{u}$  - 3x1 вектор, поэтому связь между i-м и j-м узлами теперь задается матрицей 3x3. Поэтому в разделе пояснений к коду, (и пояснений к преобразованиям тензоров, (когда они появятся) ) при переходе к индексной записи тензоров я использую греческие буквы, чтобы они не пересекались с i и j Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \chi_j^e = h^e \cdot \bar{u}^e + \bar{F}^e \quad (23)$$

, где

$$h_{ij}^e = \int_{V^e} \left( \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T)^{(132)} : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T + \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} \right\}^T \right) \bar{u}^e \quad (24)$$

$$\bar{F}_i^e = - \int_{V^e} \nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}_j \cdot \bar{Q}_j \quad (25)$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\bar{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \bar{u} + \bar{F} \quad (26)$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e \quad F_i = \sum F_i^e \quad (27)$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2): **Ее я не выводил руками, а написал по аналогии**

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}]_i^T \rho [\mathbf{N}]_j dV \quad (28)$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H]\bar{u} + [M]\ddot{\bar{u}} + \bar{F} = 0 \quad (29)$$

## 2.1 Граничные условия

Если следовать Зинкевичу то для того чтобы учесть границу Дирихле можно:

- Подставить в матрицы соответствующие значения и исключить ненужные уравнения, из вектора F - соответствующие компоненты.
- Или умножить диагональные элементы матриц соответствующие узлам Дирихле на очень большое число а правую часть заменить этим же числом, умноженным на значение перемещения.

Я попробовал первый подход - число обусловленности матрицы  $M$  порядка  $10^8$  - расчет падает из-за сингулярной матрицы. Попробовал второй подход - числа обусловленности порядка  $10^5$  и расчет разваливается. Поэтому я решил попробовать подход как в исходной статье:

$$\bar{u} = [N \cdot \bar{u}_e + N \cdot \bar{u}_e^D] \quad (30)$$

где  $\bar{u}_e^D$  - перемещение в узлах Дирихле. Тогда к вектору  $F$  добавляются матрицы  $[H], [M]$ , умноженные на значение в граничных узлах. Тут числа обусловленности близки ко второму подходу, но что-то уже считается. На этом подходе пока остановился, что-то даже насчиталось, графики ниже.

### 3 Пояснения к коду plate3d.py

Вернемся к страшной формуле для  $h_{ij}$  чтобы показать как она выражается в коде.

$$\nabla \otimes [N]_{\alpha\beta 0} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \quad (31)$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \quad (32)$$

Для  $\nabla \otimes [N]_{\alpha\beta 1}$  и  $\nabla \otimes [N]_{\alpha\beta 2}$  соответственно  $\frac{\partial}{\partial y}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$ , в матрице  $c_i$  и  $d_i$ .

$$\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial u_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial u_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial u_i} \omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial v_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial v_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial v_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial v_i} \omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} u_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} v_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i} \omega_4 \end{pmatrix}^T \quad (33)$$

$$= [0, \dots, \mathbb{I}_i, \dots, 0]^T \quad (34)$$

Надеюсь определение градиента как Якобиана, а не его транспонированного не портит соответствия МСС  $\leftrightarrow$  тензорная алгебра

Поэтому удобнее их воспринимать вместе:

$$(\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [N]^T = (\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \bar{u}^e)_{\alpha\beta}^T \cdot \nabla \otimes [N]_{\beta\gamma\zeta}^T = B_{\alpha\beta\zeta} \quad (35)$$

Здесь сидит индекс  $i$  - т.к. эта матрица это расписанный  $\nabla_{\bar{u}_i} \otimes \nabla \otimes \bar{u}$

$$B_{\beta\zeta 0} = \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & b_i \end{pmatrix}, B_{\beta\zeta 1} = \begin{pmatrix} c_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \end{pmatrix}, B_{\beta\zeta 2} = \begin{pmatrix} d_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \quad (36)$$

Это очень похоже на  $\nabla \otimes [N]_j^T$  если  $i$ -е коэффициенты заменить  $j$ -ми

Для **данной** формулы при собирании матрицы  $B$  для элемента  $B_i$  должен быть `vstack` потому что  $[N]^T$  -  $12 \times 3$ . Но правильно было бы `hstack` - иначе  $A \cdot B$  не даст матрицу  $12 \times 12$ . Видимо здесь есть ошибка. Аналогично для

$$(\nabla \otimes [N]_j)_{\alpha\beta\gamma}^T : C_{\beta\gamma\phi\zeta} = A_{\alpha\phi\zeta} \quad (37)$$

Здесь сидит индекс  $j$  т.к мы рассмотрели крокодила (18) на узле  $j$  Для матрицы масс:

$$N_i N_j = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} = \quad (38)$$

$$\frac{a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z})}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})}{6V} \quad (39)$$

где  $x_b, y_b, z_b$  - координаты барицентра В системе барицентра

$$\int dx dy dz = V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad (40)$$

В этот момент понял, что возможно ошибся в коэффициентах при вычислении матрицы масс

$$\int x dx dy dz = \int y dx dy dz = 0 \quad (41)$$

$$\int x^2 dx dy dz = \frac{V}{10} \left( \sum_i x_i^2 + \sum_{ij, i < j} x_i x_j \right) \quad (42)$$

$$\int xy dx dy dz = \frac{V}{20} \left( \sum_i x_i y_i + \sum_{ij, i < j} (x_i y_j + x_j y_i) \right) \quad (43)$$

Формулы выше расходятся с Зинкевичем из-за перекрестных слагаемых, deepseek утверждает что у Зинкевича формулы для интегрирования по равностороннему треугольнику, я ему верю, закодить эти формулы мне показалось легче, чем закодить преобразование треугольника

Итого

$$\begin{aligned} \int_{V^e} N_i N_j dx dy dz &= \frac{1}{36V^2} \int_{V^e} (a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z})) \cdot \\ &\cdot (a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})) = \\ &= \frac{1}{36V^2} \int_{V^e} \left( (a_i + b_i x_b + c_i y_b + d_i z_b) \cdot (a_j + b_j x_b + c_j y_b + d_j z_b) + b_i b_j x^2 + \right. \\ &\left. + c_i c_j y^2 + d_i d_j z^2 + xy(b_i c_j + c_i b_j) + xz(b_i d_j + b_j d_i) + yz(c_i d_j + c_j d_i) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

Чем дальше элемент тем больше интеграл??? Этого как будто быть не должно Интеграл можно взять в референсном элементе (тетраэдр к единичным координатами):

$$\int_{V^e} N_i N_j dV = \det F \int_{\hat{V}} \hat{N}_i \hat{N}_j d\hat{V} = V \cdot \hat{K}_0 = V \cdot \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (45)$$

где  $\det F = V(6V???)$  - преобразование к исходного элемента



## 4 Что получилось

Ищем собственные значения:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (46)$$

Тут я заходил с двух сторон:

1. Как в Зинкевиче рассмотреть эту систему как задачу на собственные значения и вычислить  $\omega$  из уравнения  $\det([H] - \omega^2[M]) = 0$

2. Задать  $\omega$  и решить систему  $([H] - \omega^2[M])\bar{u} + \bar{F} = 0$ .

Остановился на втором подходе, вот что насчиталось: при  $\omega = 0$  логично ожидать амплитуду 1 - т.к такое смещение задается условием Дирихле, пока этого не получается... После исправления многочисленных ошибок АЧХ выглядят как-то так...

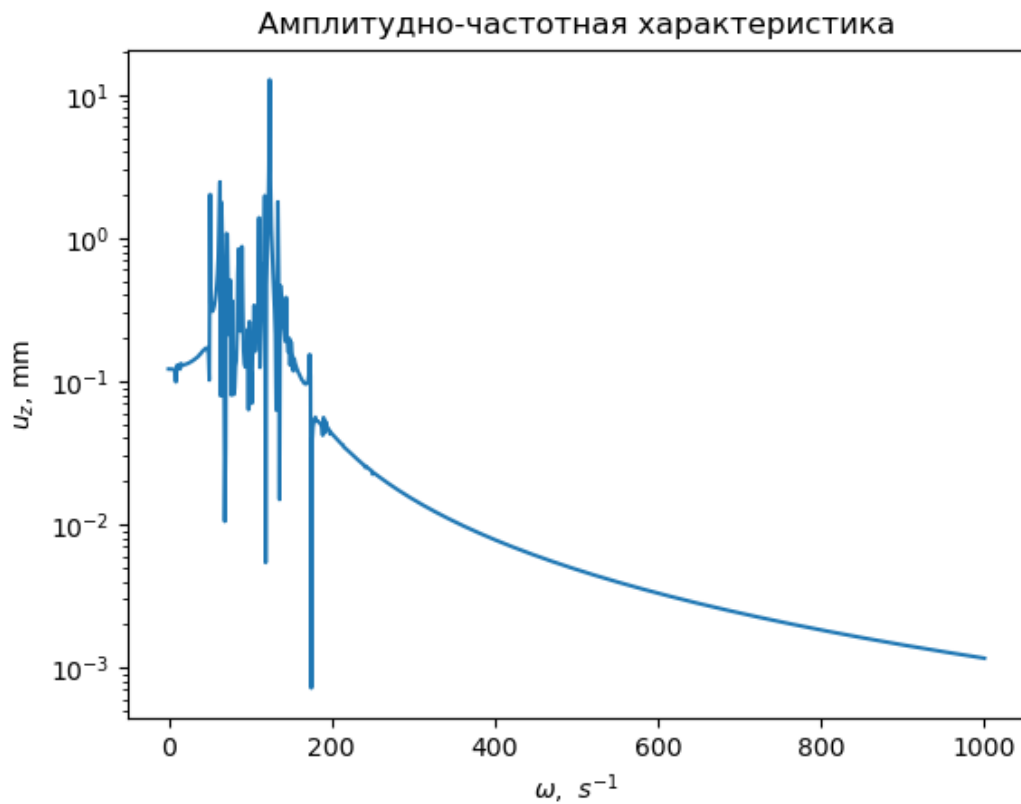


Рис. 4: dev

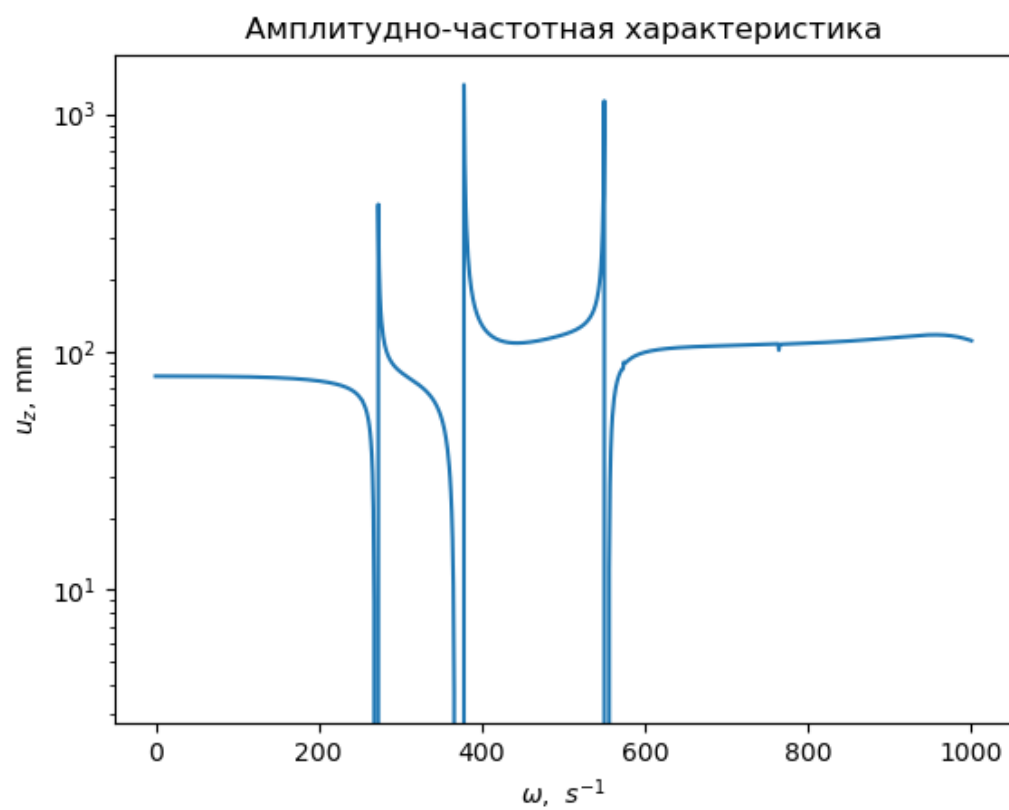


Рис. 5: Самая красивая АЧХ

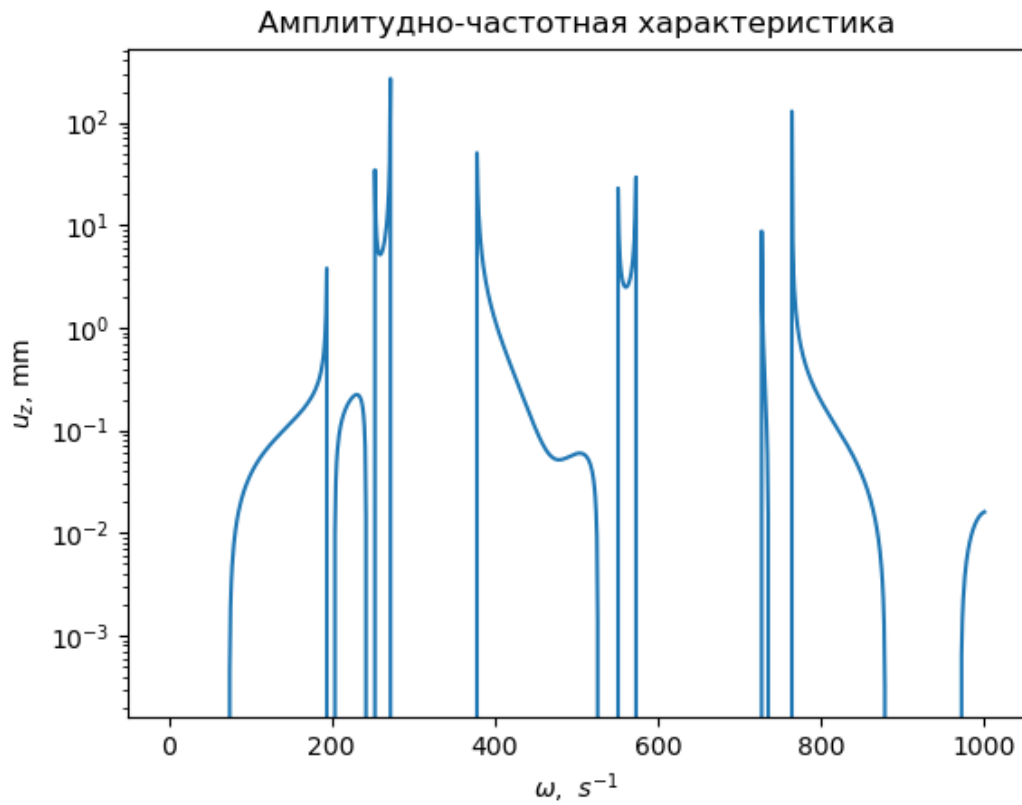


Рис. 6: test point на конце, противоположном от закрепленного конца, в остальных случаях она рядом с границей Дирихле

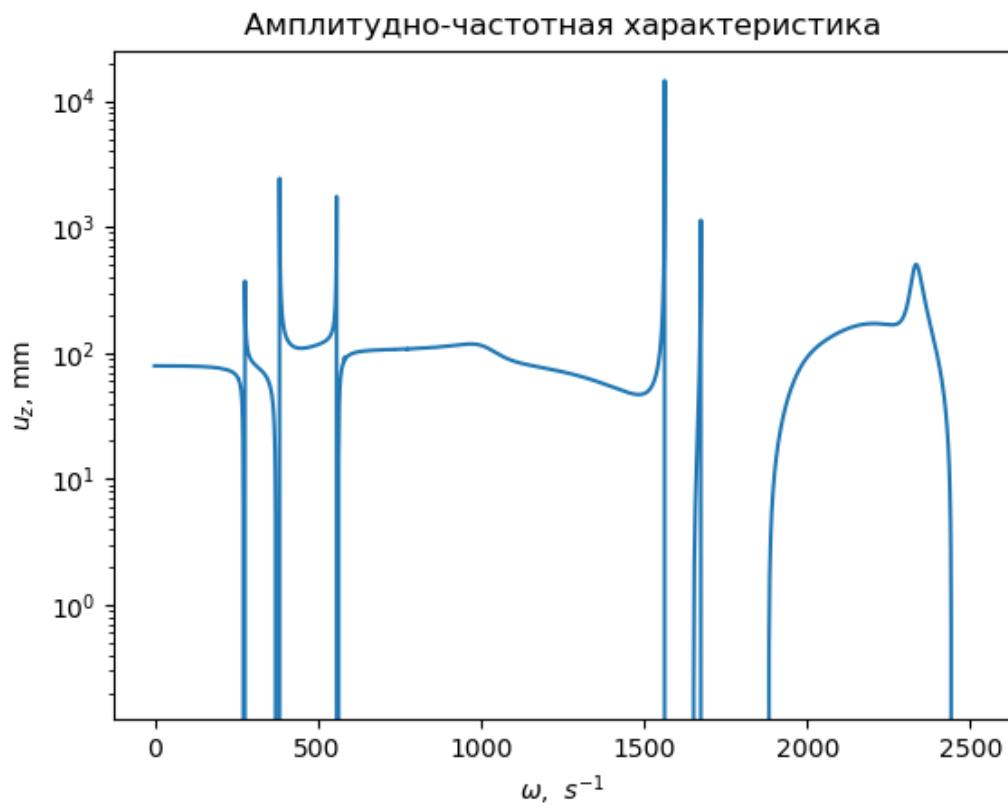


Рис. 7: Большая АЧХ