Московский физико-технический
институт

Черновик диплома

Численное моделирование воздействия вибрационной нагрузки на образец в трёхмерном случае.

1 Постановка задачи

todo: 1. Дописать теорию - показать как градиент от $[N]_i$ выражается через $b_i, c_i d_i$, Выписать выражения для интегралов по тетраэдру в матрице масс. 2. Написать объяснения преобразований тензоров

Есть пластина, она занимает объем $\overline{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{c} \cup \Gamma_\mathrm{f} \tag{1}$$

где Γ_c - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

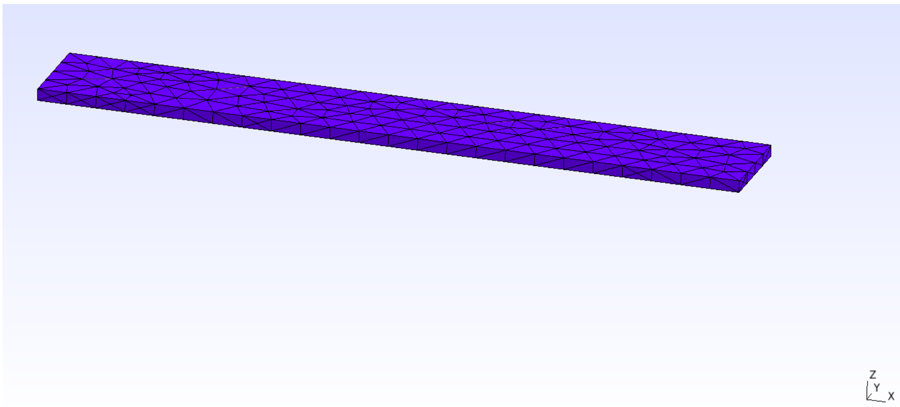

Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho\ddot{\overline{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{C}{:}\mathbf{e}) - \overline{Q} = 0, \tag{2}$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + Q = 0$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где $\nabla\cdot$ - дивергенция ($\nabla\otimes$ - градиент), ρ - плотность материала, $\overline{Q}$ - внешняя нагрузка,

$\mathbf{C}$ - тензор уругих модулей: Не уверен, что это верно

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \tag{3}$$

где $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mathbf{e}$ - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{4}$$

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \overline{u}, \nabla \otimes \overline{u}) dxdydz \to min \Longleftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial(\nabla \otimes \overline{u})} = 0 \tag{5}$$

Наверное, $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = \nabla_{\overline{u}} \otimes f$ Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial(\nabla \otimes \overline{u})} = \frac{1}{2}\mathbf{C} : (\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{6}$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2}\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T - \overline{Q} \cdot \overline{u} \tag{8}$$

Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1. $\partial \leftrightarrow d$. 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича и интуицию, я машу руками Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\overline{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{9}$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\overline{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \tag{10}$$

Отсюда можно записать

$$\begin{gathered} \overline{u} = \frac{1}{6V}[(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)\overline{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)\overline{u}_j \\ +(a_m + b_m x + c_m y + d_m z)\overline{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)\overline{u}_p] \end{gathered} \tag{11}$$

где

$$V = det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{12}$$

коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются как

$$a_i = det\begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix},\ b_i = -det\begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}\ c_i = -det\begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix},\ d_i = -det\begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\overline{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \overline{u}^e = [\mathbf{N}]\overline{u}^e \tag{14}$$

где $N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$, $\mathbb{I}-$ единичная матрица.

Рассмотрим данный функционал на элементе e: $\chi \to \chi^e$:

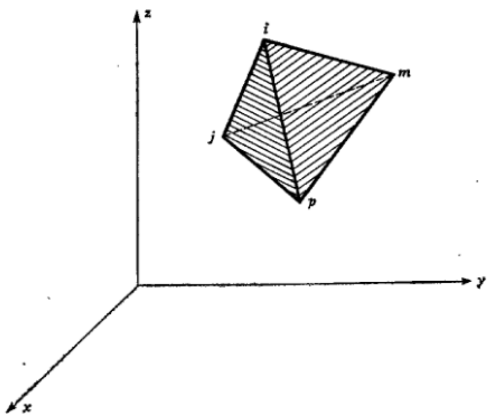

Рис. 3: Тетраэдральный элемент

И возьмем производную по $\overline{u}_i$ - вектору перемещения в узле i:

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \frac{1}{2}\left(\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} : (\nabla \otimes \overline{u}^T : \mathbf{C}) + (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u})^T : (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u})\right) dV - \tag{15}$$

$$-\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \tag{16}$$

Учтем, что

$$\begin{gathered} \nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e, \\ \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}^e)^T \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда (15) можно записать как

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \frac{1}{2}\int_{V^e} \Bigg(& \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e)^T : \mathbf{C}) + \\ & +(\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e \Bigg) dV - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} = \\ = \frac{1}{2}\int_{V^e} \Bigg(& \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}])^T : \mathbf{C})^T + \\ & +(\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \Bigg) \overline{u}^e dV - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi_j^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \Big(\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + \\ + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \cdot \Big) \overline{u}_j^e dV - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \tag{19}$$

Выражение в больших скобках - матрица 3x3. Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi_j^e = h^e \cdot \overline{u}^e + \overline{F}^e \tag{20}$$

, где

$$h_{ij}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \Big(\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T : ((\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T : \mathbf{C})^T + + (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j \Big) dV \tag{21}$$

$$\overline{F}_i^e = -\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \tag{22}$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\overline{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \overline{u} + \overline{F} \tag{23}$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e \qquad F_i = \sum F_i^e \tag{24}$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2):

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}]^T \rho [\mathbf{N}] dV \tag{25}$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H]\overline{u} + [M]\ddot{\overline{u}} + \overline{F} = 0 \tag{26}$$

Ищем собственные значения:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \tag{27}$$