Московский физико-технический институт

Черновик диплома

Численное моделирование воздействия вибрационной нагрузки на образец в трёхмерном случае.

1 Постановка задачи

Есть пластина, она занимает объем $\overline{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_\mathrm{c} \cup \Gamma_\mathrm{f} \tag{1}$$

Это неправда в 3D: граница $\neq \partial\Omega$ где Γ_c - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

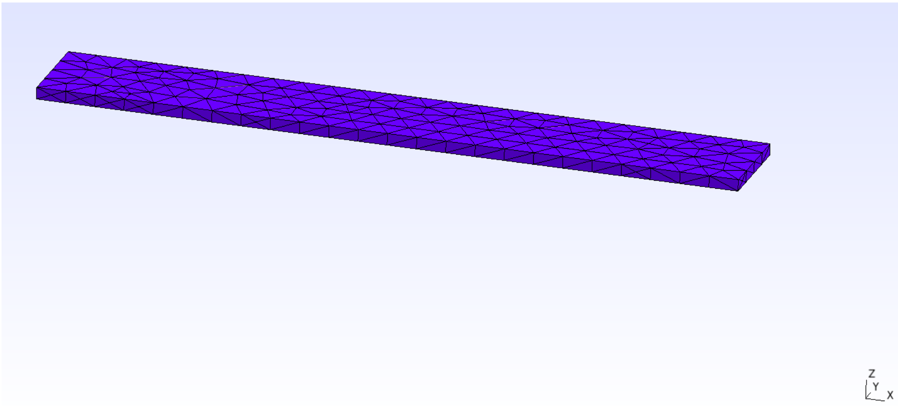

Рис. 1: Модель пластины в 3D

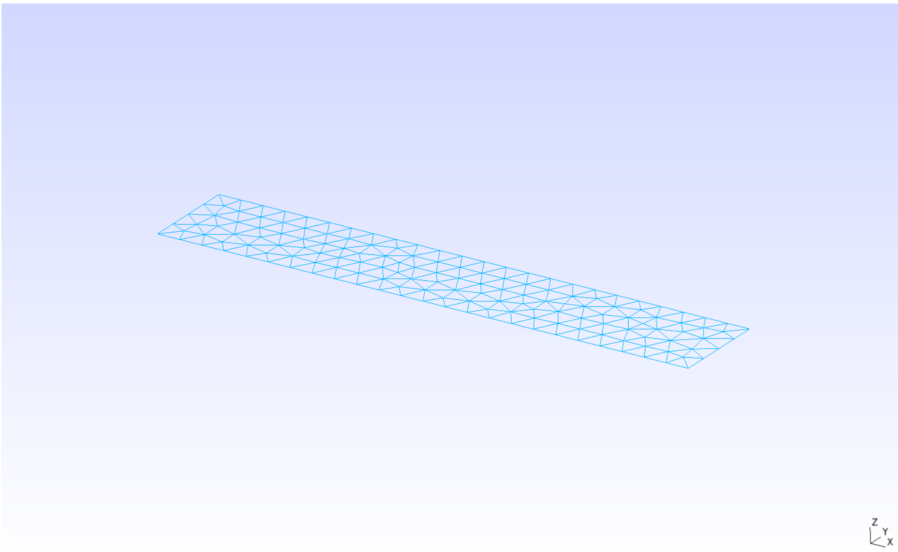

Рис. 2: Модель пластины в 2D

Пока техал заметил, что gmsh считает 2d поверхностью только 1 плоскость, ту, которой дана 2D physical group, надеюсь это норм

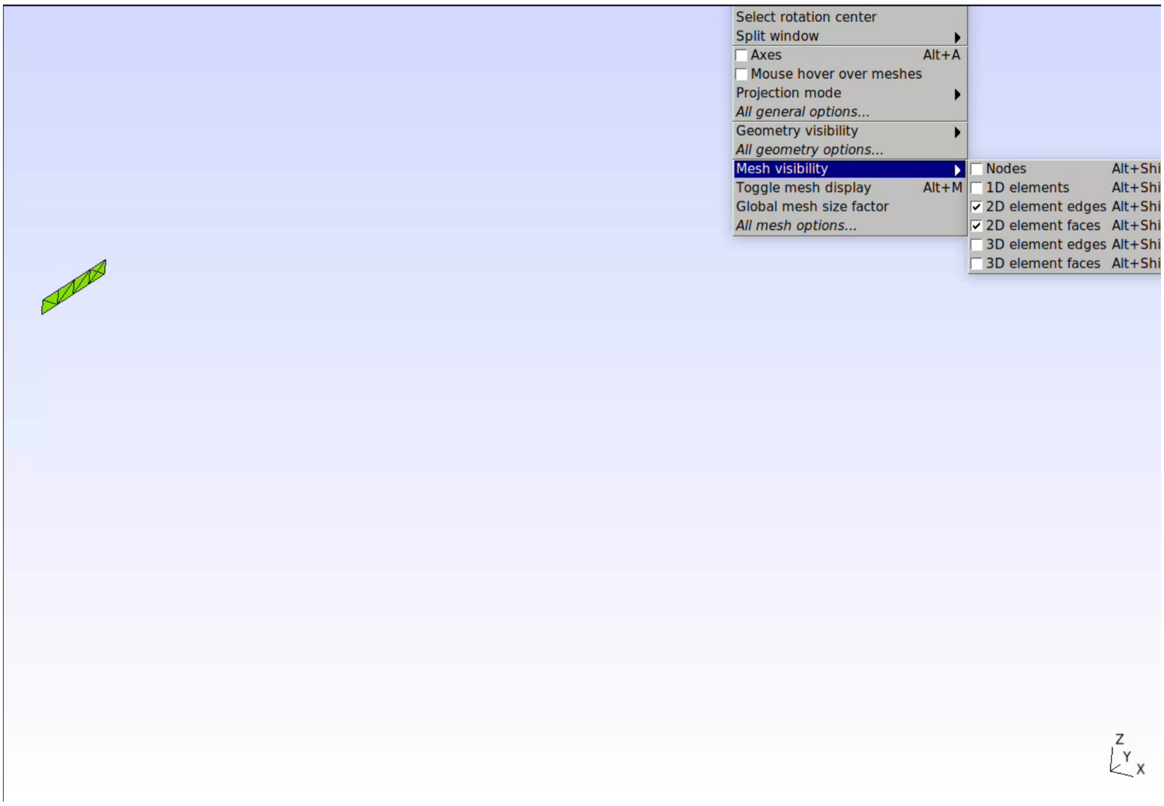

Рис. 3: Модель пластины в 3D issue

уравнение динамики для пластины:

$$2e\rho\ddot{\omega}^0 - \frac{2e^3}{3}\rho\Delta\ddot{\omega}^0 - div\, div\, \mathbf{M} = f, \tag{2}$$

где $e = \frac{1}{2}h$, ρ - плотность материала, f - внешняя нагрузка, $\mathbf{M}$ - тензор моментов:

$$M = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{pmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} z^2 \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} dz \tag{3}$$

Компоненты тензора моментов можно выразить, используя закон Гука:

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \frac{2e^3}{3} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Задачу можно сформулировать в следующем виде:

$$\rho\ddot{\omega}^0 - \frac{1}{3}\rho e^2\Delta\ddot{\omega}^0 - \frac{1}{2e} div\, div\, \mathcal{D}\nabla\nabla\omega^0 = \frac{1}{2e} f, \tag{5}$$

$$\begin{cases} \omega^0 = g & \text{на } \Gamma_c \\ \frac{\partial \omega^0}{\partial n} = 0 & \text{на } \Gamma_c \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} e^3 \rho \frac{\partial}{\partial n}\ddot{\omega}^0 + div\, \mathbf{M}\cdot\mathbf{n} + \frac{\partial}{\partial\tau}(\mathbf{Mn}\cdot\tau) & \text{на } \Gamma_f \\ \mathbf{Mn}\cdot\tau = 0 & \text{на } \Gamma_f \end{cases} \tag{7}$$

где $\mathcal{D}$ - тензор четвертого ранга:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & \frac{1}{2}D_{16} & 0 & D_{16} & \frac{1}{2}D_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}D_{16} & D_{12} & 0 & \frac{1}{2}D_{66} & D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{16} & \frac{1}{2}D_{66} & 0 & D_{12} & \frac{1}{2}D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}D_{66} & D_{26} & 0 & \frac{1}{2}D_{26} & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Для 2D - зачернуть все нули

Пользуясь теоремой о дивергенции $\int_\Omega (div\,\overline{p})v) + \int_\Omega \overline{p}v = \int_{\partial\Omega} (\overline{p}\cdot\overline{n})v$

$$\int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu + \frac{1}{3}e^2\Delta u\nu) + \frac{1}{2e}div\,div\,\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu - f\nu)d\Omega = \tag{9}$$

$$= \int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}div\,div\,\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu - f\nu)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot\mathbf{\overline{n}}\nu = \tag{10}$$

$$= \int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) - \frac{1}{2e}div\,\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nabla\nu - f\nu)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2e}\mathbf{\overline{n}}\,div\,\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nu = \tag{11}$$

$$= \int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) - \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2e}\mathbf{\overline{n}}\,\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u\nabla\nu = \tag{12}$$

$$= \int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu - \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega = 0 \tag{13}$$

Будем считать, что закрепленная граница колеблется с известной частотой и амлитудой

$$g(x,y,z,t) = g_\omega(x,y,z)\cdot e^{i\omega t} \tag{14}$$

Задача линейная, следовательно решение можно представить в виде

$$\omega^0 = \omega^0_{part} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i\omega^0_i \tag{15}$$

Т.к присутствует потеря энергии, считаем, что вторым слагаемым по прошествии достаточно долгого времени можно пренебречь.

Частное решение будем искать в виде

$$\omega_{part} = u(x,y,z,\omega)\cdot e^{i\omega t} \tag{16}$$

Модель демпфирования заключается в представлении тензора D:

$$\hat{\mathcal{D}}_\alpha = \mathcal{D}(1 + i\beta_\alpha) \tag{17}$$

где β_α - коэффициент потерь, $\alpha \in \{11, 12, 16, 22, 26, 66\}$. Будем считать для численного расчета, что $g \equiv 1$. Слабая формулировка проблемы может быть сформулирована следующим образом: Найти $u \in H^2_2(\Omega)$ такое что $u|_{\Gamma_c} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_c} = 0$ и для всех $\nu \in H^2_2(\Omega)$ удовлетворяющих $\nu|_{\Gamma_c} = \frac{\partial \nu}{\partial n}|_{\Gamma_c} = 0$ выполнено

$$\int_\Omega (\rho\omega^2(u\nu + \frac{1}{3}e^2\nabla u\nabla\nu) + \frac{1}{2e}\hat{\mathcal{D}}\nabla\nabla u : \nabla\nabla\nu - f\nu)d\Omega = 0 \tag{18}$$

Решение Аппроксимируется как линейная комбинация базисных функций h_i

$$u = \sum_{i \in I} u_i h_i + \sum_{k \in D} g_k h_k \tag{19}$$

I - подмножество индексов базисных функций, которые равны 0 на Γ_c. D - множество индексов базисных функций, которые аппроксимируют граничное условие Дирихле. И тут я понял, что с граничными условиями что-то не так...

2 ГУ. Попытка натянуть сову на глобус

1. Граничное условике Дирихле на закрепленном конце (44-45):

```
u_D = np.array([1], dtype=default_scalar_type)
bc = fem.dirichletbc(u_D,
         fem.locate_dofs_topological(V, fdim, ft.find(1)), V)
```

2. Граничное условие Неймана на закрепленном конце (второе уравнение системы (6)): в коде не отражается т.к. условия Неймана в фениксе задаются интегралом в линейной форме (правой части) -> интеграл от 0 ни на что не влияет

3. Равенство нулю тангенсального напряжения на свободном конце (система (7)):

$$\mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \tau = D\nabla\nabla u \cdot \mathbf{n}\tau = 0 \tag{20}$$

Аналогично п.2

Выглядят, конечно, п.2 и п.3 неправдоподобно, но $\pm$ согласутеся с тем, что я вычитал на формумах. А вот как занулить $\nabla\nu$ на границе... Даже если это сработало в п.3 и п.2, то сейчас кажется что интеграл по границе в (12) точно не поможет, проблема в том, что других механизмов как задать условие Неймана я не нашел.

3 Тем не менее, что-то посчиталось

В коде слабая формулировка задается следующим образом (106-110):

```
#Bilinear form
a = 2*e*(-rho * omega ** 2 * ( (ufl.inner(u, v) ) \
+ 1 / 3 * e ** 2 * ufl.inner(grad(u)[0,:], grad(v)[0,:]) ) \
- 1/(2*e)*ufl.inner(D_2d, ufl.outer(grad(grad(u)[0,:]),
grad(grad(v)[0,:]))))*ufl.dx
# Linear form
L = ufl.inner(f,v[0])*ufl.dx
```

Пояснение:

$$\mathcal{D} : \nabla \otimes \nabla \otimes u : \nabla \otimes \nabla \otimes \nu = \mathcal{D} \vdots \nabla \otimes \nabla \otimes u \otimes \nabla \otimes \nabla \otimes \nu \tag{21}$$

где $\nabla \otimes f$ - градиент тензорного поля f (при верстке формул соблюдался стиль исходной статьи, но в рамках тензорной алгебры мне так удобнее)

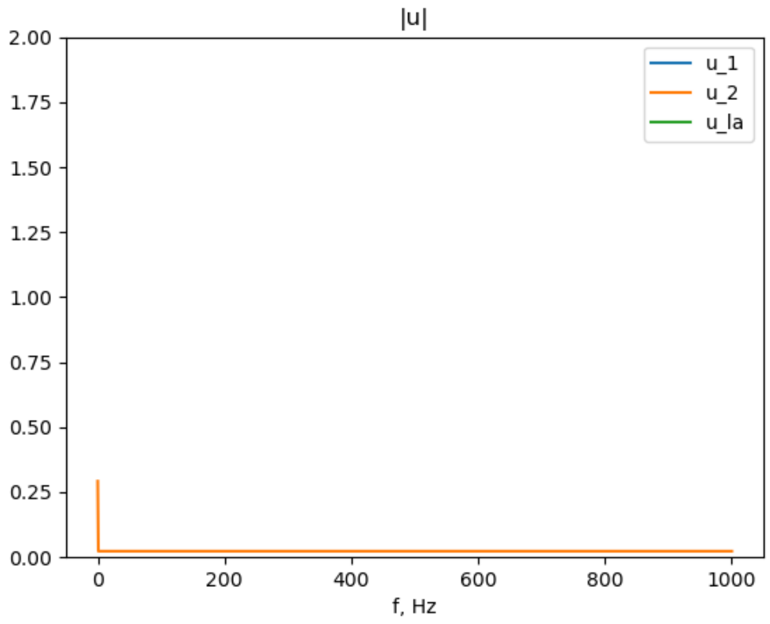

Рис. 4: АЧХ на Р3 в 2D

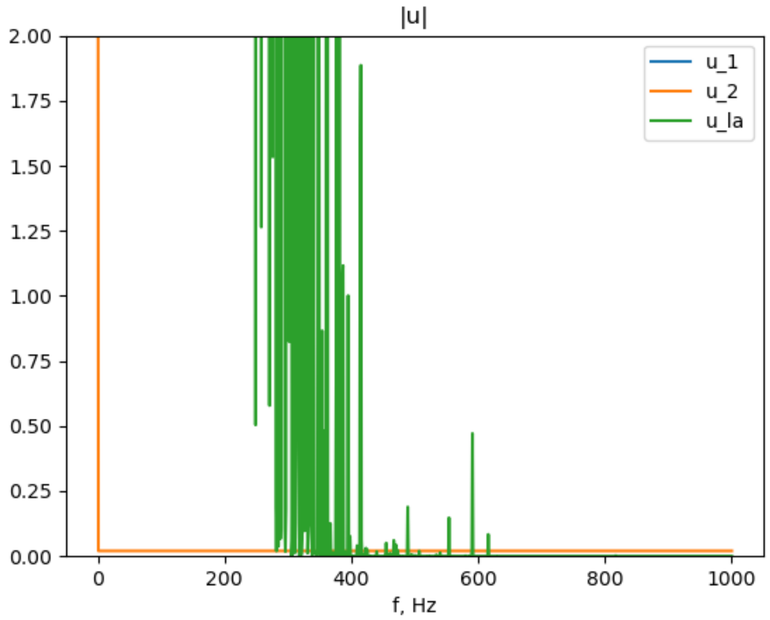

Рис. 5: АЧХ на Р3 в 3D

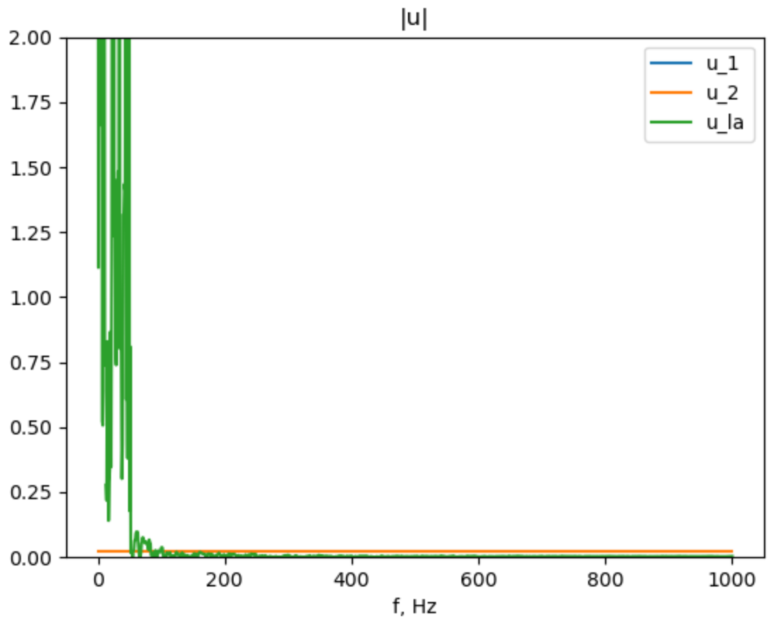

Рис. 6: АЧХ на P2 в 2D

Продолжение следует... Я пока попытаюсь починить ГУ

Идеи: 1. Попробовать базисное простанство H(div) H(curl) 2. Попробовать кастомные элементы через basix.ufl, попробовать интерполяцию (https://fenicsproject.discourse.group/t/gradients-and-divergences-in-fenicsx/9911) 3. Добавить метки на границы чтобы интегрировать не по всей границе, а по Γf и Γc