Московский физико-технический институт

Черновик диплома

Численное моделирование воздействия вибрационной нагрузки на образец в трёхмерном случае.

Долгопрудный, 2021 г.

1 Постановка задачи

Есть пластина, она занимает объем $\overline{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_{\rm c} \cup \Gamma_{\rm f} \tag{1}$$

где Γ_c - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

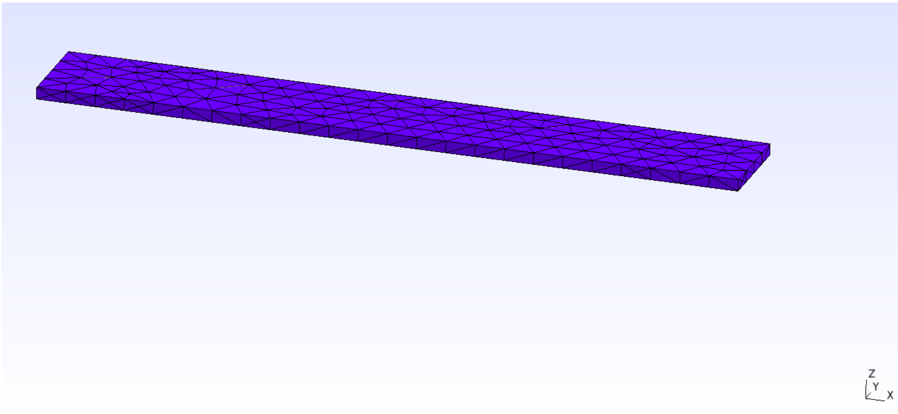

Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho\ddot{\vec{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{C}{:}\mathbf{e}) - \overline{Q} = 0, \tag{2}$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \left(\bar{Q} - \mu\frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) =$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где $\nabla\cdot$ - дивергенция ($\nabla\otimes$ - градиент), ρ - плотность материала, $\overline{Q}$ - внешняя нагрузка, $\mathbf{C}$ - тензор уругих модулей: Не уверен, что он верно записан

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 1+\nu \end{pmatrix} \tag{3}$$

где $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mathbf{e}$ - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{4}$$

2 Метод

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \overline{u}, \nabla \otimes \overline{u}) dxdydz \to min \Longleftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = 0 \tag{5}$$

Наверное, $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = \nabla_{\overline{u}} \otimes f$ Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = \frac{1}{2}\mathbf{C} : (\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{6}$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2}\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T - \overline{Q} \cdot \overline{u} \tag{8}$$

Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1. $\partial \leftrightarrow d$. 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича я выписываю интуитивно ожидаемый результат Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\overline{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{9}$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\overline{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \tag{10}$$

Отсюда можно записать

$$\begin{gathered}\overline{u} = \frac{1}{6V}[(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)\overline{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)\overline{u}_j \\ +(a_m + b_m x + c_m y + d_m z)\overline{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)\overline{u}_p]\end{gathered} \tag{11}$$

где

$$V = det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{12}$$

коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются как

$$a_i = det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix}, \quad b_i = -det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix} \quad c_i = -det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix}, \quad d_i = -det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\overline{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \overline{u}^e = [\mathbf{N}]\overline{u}^e \tag{14}$$

где $N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$, $\mathbb{I}-$ единичная матрица, $\overline{u}^e = (u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2 ... \omega_4)$ - вектор размера (12,1) неизвестных перемещений для элемента.

Рассмотрим данный функционал на элементе e: $\chi \to \chi^e$:

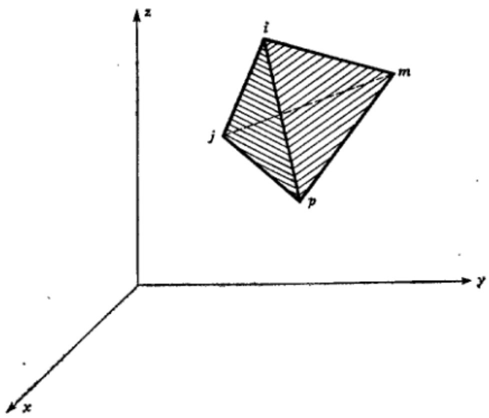

Рис. 3: Тетраэдральный элемент

Заметка на полях:

$$\nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes \overline{u}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{15}$$

$$\nabla \otimes \nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes \overline{u}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{16}$$

Эти две "формулы"показывают куда и в каком порядке расставлять индексы. Я не до конца уверен, что последняя формула верна.

Возьмем производную по $\overline{u}_i$ - вектору перемещения в узле i: i - номер узла тетраэдра, просто обозначение, никак не соотносится с индексами α, β ... Подробнее описано ниже

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{u_i}} \otimes (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T) &= \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T = \\ = \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu})(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T &+ \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T) = \\ = (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}) &+ \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T) = \\ = (\nabla \otimes \overline{u}^T : \mathbf{C}) : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} &+ (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u}) : (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u})^T \end{aligned} \tag{17}$$

В предпоследней строке странная вещь - с точки зрения индексной записи можно поменять в последнем слагаемом умножаемые местами, тогда в последней формуле второй градиент от u будет стоять спереди, но с точки зрения тензорной алгебры я не уверен что двойное скалярное произведение тензоров второго и третьего ранга ассоциативно

$$\begin{aligned} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \Bigg(\frac{1}{2} (\nabla \otimes \overline{u})^T : \mathbf{C} : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} + \frac{1}{2} \nabla \otimes \overline{u} : \mathbf{C} : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes (\nabla \otimes \overline{u})^T - \\ - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \Bigg) dV \end{aligned} \tag{18}$$

Учтем, что

$$
\begin{aligned}
&\nabla\otimes\overline{u}=\nabla\otimes([\mathbf{N}]\cdot\overline{u}^e)=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(N_{\beta\gamma}\overline{u}^e_\gamma)=(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\beta\gamma})\overline{u}^e_\gamma=\overline{u}^e_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\beta\gamma})=\overline{u}^e\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T,\\
&\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\nabla\otimes\overline{u}=\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\nabla\otimes([\mathbf{N}]\cdot\overline{u}^e)=\frac{\partial}{\partial\overline{u}_i}(\overline{u}^e_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\beta\gamma}))=(\frac{\partial}{\partial\overline{u}_i}\overline{u}^e_\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\beta\gamma})=(\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T,\\
&\nabla_{\overline{u}_i}\otimes(\nabla\otimes\overline{u})^T=\nabla_{\overline{u}_i}\otimes(\nabla\otimes[\mathbf{N}]\cdot\overline{u}^e)^T=\nabla_{\overline{u}_i}\otimes(\overline{u}^e\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^T=\\
&=\frac{\partial}{\partial\overline{u}_i}(\overline{u}^e_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\beta\gamma}))^T=\frac{\partial}{\partial\overline{u}_i}(\overline{u}^e_\gamma(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N^T_{\gamma\beta})^{(132)})=(\frac{\partial}{\partial\overline{u}_i}\overline{u}^e_\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}N_{\gamma\beta})^{(132)}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Выше индекс (132) обозначение изомера тензора третьего ранга. У матрицы, которая соответствует данному тензору, поменяны местами вторая и третья оси. Тогда (18) можно записать как

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\chi^e=\int_{V^e}\Bigg(\frac{1}{2}(\overline{u}^e\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^T:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T+\\
+\frac{1}{2}\overline{u}^e\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}-\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\overline{u}\cdot\overline{Q}\Bigg)dV=\\
=\int_{V^e}\Bigg(\frac{1}{2}\overline{u}^e\cdot(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T+\\
+\frac{1}{2}\overline{u}^e\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}-\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\overline{u}\cdot\overline{Q}\Bigg)dV=\\
=\int_{V^e}\Bigg(\frac{1}{2}\Big\{(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T\Big\}^T+\\
+\frac{1}{2}\Big\{\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}\Big\}^T\Bigg)\overline{u}^e-\int_{V^e}\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\overline{u}\cdot\overline{Q}dV
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Пояснение к (20): В третьей строке первое слагаемое можно представить так

$$
\begin{aligned}
&(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}:\mathbf{C}=\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}_{\alpha\beta\gamma}:\mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu}=\mathbb{A}_{\alpha\nu\mu}\\
&(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T=(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T_{\nu\beta}\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T_{\beta\mu\phi}=\mathbb{B}_{\nu\mu\phi}\\
&\overline{u}^e_\alpha\cdot\mathbb{A}_{\alpha\nu\mu}:\mathbb{B}_{\nu\mu\phi}=\overline{u}^e_\alpha\cdot\mathbb{D}_{\alpha\phi}=\mathbb{D}^T_{\phi\alpha}\cdot\overline{u}_\alpha
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Аналогично для второго слагаемого

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\chi^e_j=\int_{V^e}\Bigg(\frac{1}{2}\Big\{(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T_j)^{(132)}:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T+\\
+\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T_j:\mathbf{C}:(\nabla_{\overline{u_i}}\otimes\overline{u}^e)^T\cdot(\nabla\otimes[\mathbf{N}]^T)^{(132)}\Big\}^T\Bigg)\overline{u}^e-\int_{V^e}\nabla_{\overline{u}_i}\otimes\overline{u_j}\cdot\overline{Q_j}dV
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Выражение в фигурных скобках - **матрица 3x3**. Здесь, возможно, не очевидный момент - i,j = 1,2,3,4 - нумеруют узел в тетраэдральном элементе, это никак не связано с тем, что в скобках матрица. Дело в том, что $\overline{u}$ - 3x1 вектор, поэтому связь между i-м и j-м узлами теперь задается матрицей 3x3. Поэтому в разделе пояснений к коду, (и пояснений к преобразованиям тензоров, (когда они появятся))при переходе к индексной записи тензоров я использую греческие буквы, чтобы они не пересекались с i и j Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi_j^e = h^e \cdot \overline{u}^e + \overline{F}^e \tag{23}$$

, где

$$h_{ij}^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T)^{(132)} : \mathbf{C} : (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T + \nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T : \mathbf{C} : (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T \cdot (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(132)} \right\}^T \right) \overline{u}^e \tag{24}$$

$$\overline{F}_i^e = - \int_{V^e} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \tag{25}$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\overline{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \overline{u} + \overline{F} \tag{26}$$

где

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e \qquad F_i = \sum F_i^e \tag{27}$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2): Ее я не выводил руками, а написал по аналогии

$$M_{ij}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}]_i^T \rho [\mathbf{N}]_j dV \tag{28}$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H]\overline{u} + [M]\ddot{\overline{u}} + \overline{F} = 0 \tag{29}$$

2.1 Граничные условия

Если следовать Зинкевичу то для того чтобы учесть границу Дирихле можно:

- Подставить в матрицы соотвествующие значения и исключить ненужные уравнения, из вектора F - соответствующие компоненты.
- Или умножить диагональные элементы матриц соотвествующие узлам Дирихле на очень большое число а правую часть заменить этим же числом, умноженным на значение перемещения.

Я попробовал второй подход - особо ничего не вышло. Поэтому я решил попробовать подход как в исходной статье:

$$\overline{u} = [\mathbf{N} \cdot \overline{u}_e + \mathbf{N} \cdot \overline{u}_e^D] \tag{30}$$

где $\overline{u}_e^D$ - перемещение в узлах Дирихле. Тогда к вектору F добавляются матрицы $[H], [M]$, умноженные на значение в граничных узлах. На этом подходе пока остановился, что-то даже насчиталось, графики ниже.

3 Пояснения к коду plate3d.py

Вернемся к страшной формуле для h_{ij} чтобы показать как она выражается в коде.

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 0} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \tag{31}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \tag{32}$$

Для $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 1}$ и $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 2}$ соответственно $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, в матрице c_i и d_i.

$$\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial v_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_4 \end{pmatrix}^T \tag{33}$$

$$=[0, \ldots \mathbb{I}_i, ..0] \tag{34}$$

Поэтому удобнее их воспринимать вместе:

$$(\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T = (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)^T_{\alpha\beta} \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T_{\beta\gamma\zeta} = \mathbf{B}_{\alpha\beta\zeta} \tag{35}$$

Здесь сидит индекс i - т.к. эта матрица это расписанный $\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u}$

$$\mathbf{B}_{\beta\zeta 0} = \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & b_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{\beta\zeta 1} = \begin{pmatrix} c_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{\beta\zeta 2} = \begin{pmatrix} d_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \tag{36}$$

Это совпадает с $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T$ если i-е коэффициенты заменить j-ми!

Аналогично для

$$(\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^T_{\alpha\beta\gamma} : \mathbf{C}_{\beta\gamma\phi\zeta}) = \mathbf{A}_{\alpha\phi\zeta} \tag{37}$$

Здесь сидит индекс j т.к мы рассмотрели крокодила (18) на узле j Для матрицы масс:

$$N_i N_j = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} = \tag{38}$$

$$\frac{a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z})}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})}{6V} \tag{39}$$

где x_b, y_b, z_b -координаты барицентра В системе барицентра

$$\int dxdydz = V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{40}$$

В этот момент понял, что возможно ошибся в коэффициентах при вычислении матрицы масс

$$\int xdxdydz = \int ydxdydz = 0 \tag{41}$$

$$\int x^2 dxdydz = \frac{V}{10}(\sum_i x_i^2 + \sum_{ij,i<j} x_i x_j) \quad (42)$$

$$\int xydxdydz = \frac{V}{20}(\sum_i x_i y_i + \sum_{ij,i<j} (x_i y_j + x_j y_i)) \quad (43)$$

Формулы выше расходятся с Зинкевичем из-за перекрестных слагаемых, deepseek утверждает что у Зинкевича формулы для интегрирования по равностороннему треугольнику, я ему верю, закодить эти формулы мне показалось легче, чем закодить преобразование треугольника

4 Что получилось

Ищем собственные значения:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad (44)$$

Тут я заходил с двух сторон:

1.Как в Зинкевиче рассмотреть эту систему как задачу на собственные значения и вычислить ω из уравнения $det([H] - \omega^2[M]) = 0$

2. Задать ω и решить систему $([H] - \omega^2[M])\overline{u} + \overline{F} = 0$.

Остановился на втором подходе, вот что насчиталось:

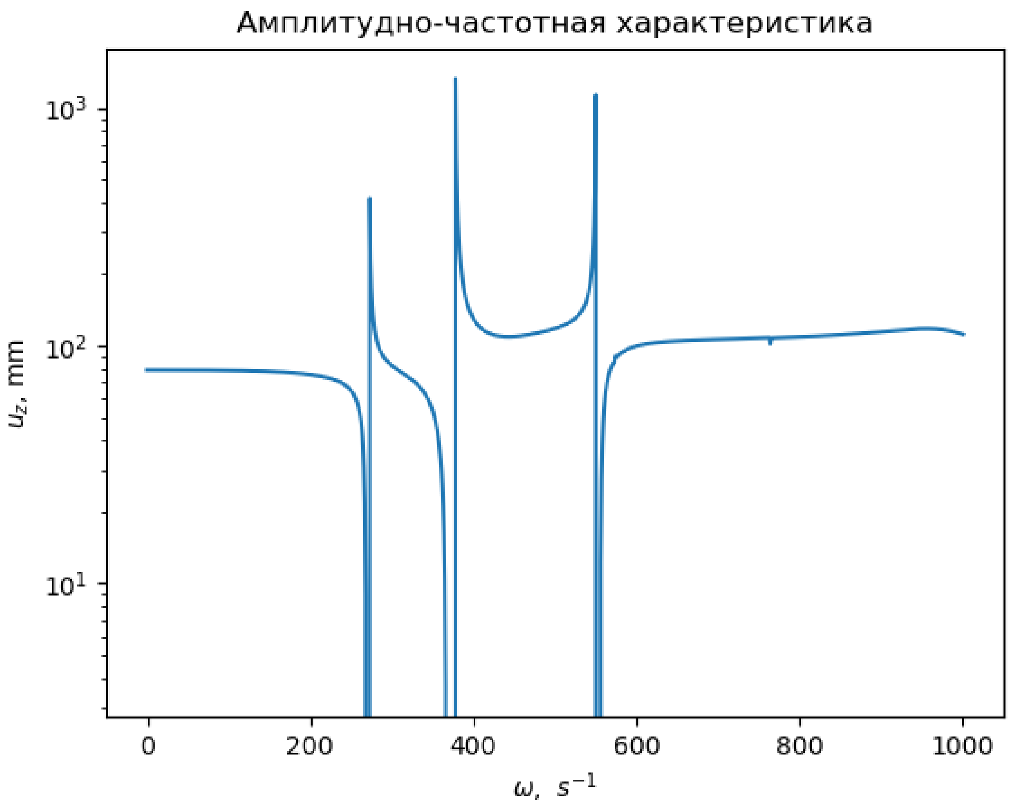

Рис. 4: Самая красивая АЧХ

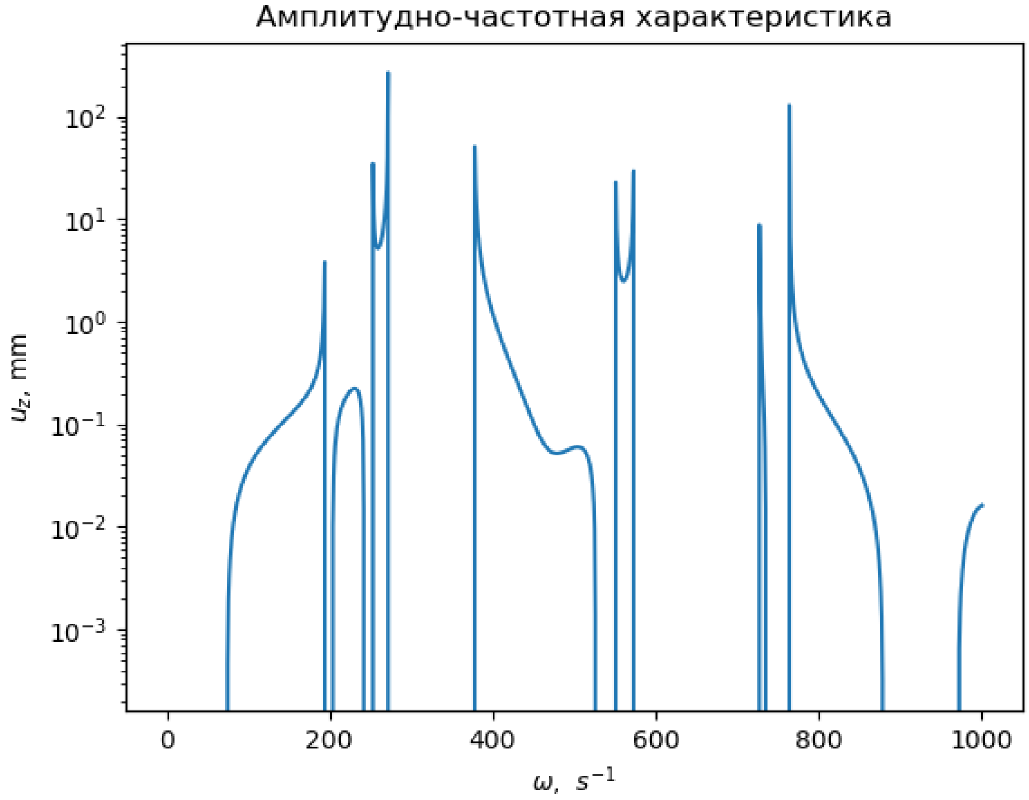

Рис. 5: test point на конце, противоположном от закрепленного конца, в остальных случаях она рядом с границей Дирихле

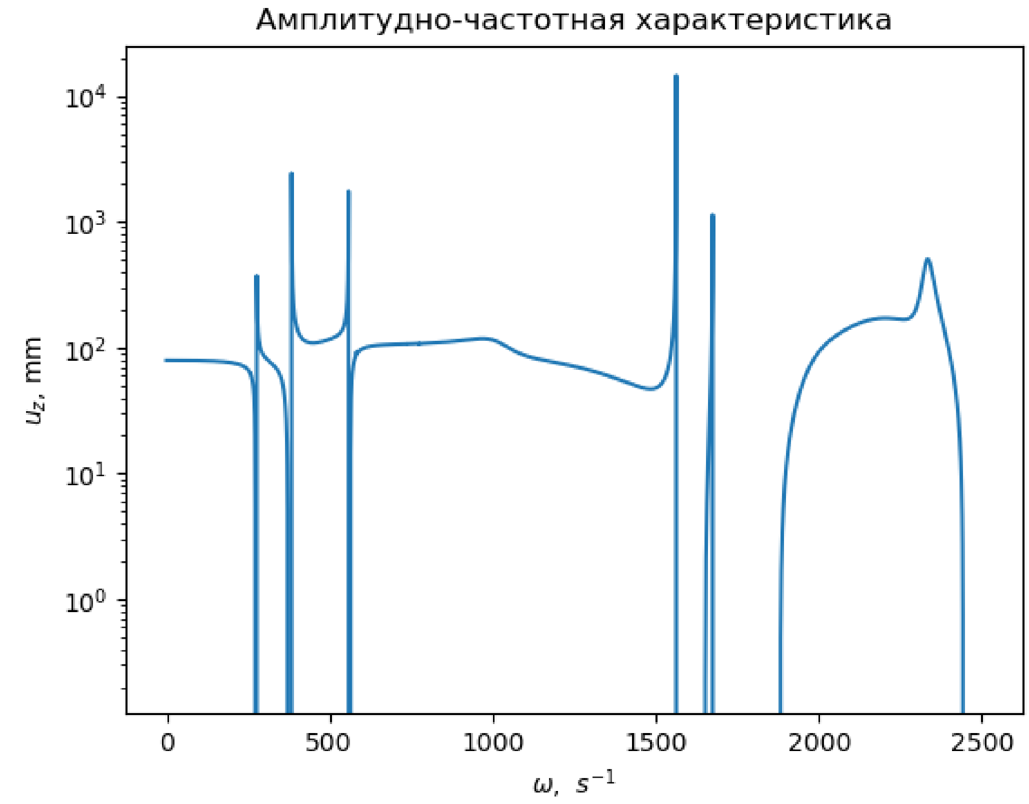

Рис. 6: Большая АЧХ