Московский физико-технический институт

Черновик диплома

Численное моделирование воздействия вибрационной нагрузки на образец в трёхмерном случае.

Долгопрудный, 2021 г.

Ветка dev

1 Постановка задачи

Есть пластина, она занимает объем $\overline{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h] \subset \mathbb{R}^3$, h - толщина пластины. Ω - срединная плоскость. Граница пластины состоит из двух частей:

$$\partial\Omega = \Gamma_{\mathrm{c}} \cup \Gamma_{\mathrm{f}} \tag{1}$$

где Γ_{c} - закрепленный конец, Γ_f - свободный конец

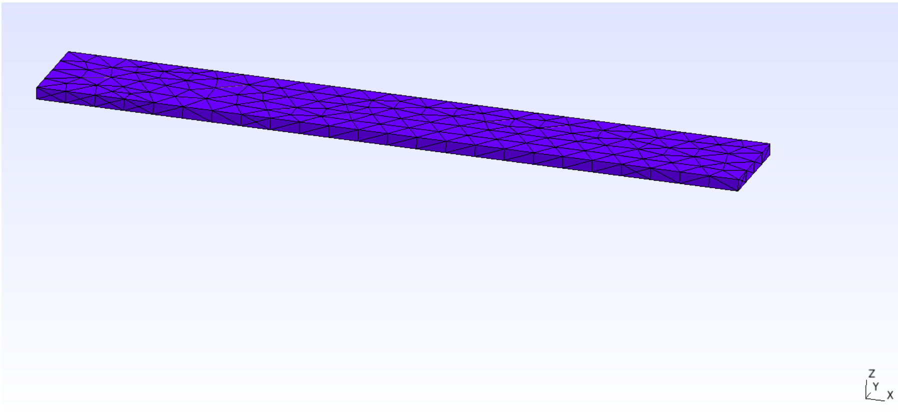

Рис. 1: Модель пластины в 3D

уравнение динамики для пластины:

$$\rho\ddot{\vec{u}} - \nabla \cdot (\mathbf{C}\mathbf{:}\mathbf{e}) - \overline{Q} = 0, \tag{2}$$

В Зинкевиче сделано примерно все то же самое но в скалярном случае (стр. 141, стр.469)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \left(\bar{Q} - \mu\frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) =$$

Рис. 2: Аналог в Зинкевиче

Как это перенести для этого векторного уравнения - мне не очевидно, поэтому я вывел уравнения в тензорном виде

где $\nabla\cdot$ - дивергенция ($\nabla\otimes$ - градиент), ρ - плотность материала, $\overline{Q}$ - внешняя нагрузка,

$\mathbf{C}$ - тензор уругих модулей: Не уверен, что он верно записан

$$\mathbf{C} = \Lambda \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

где $\Lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mathbf{e}$ - тензор малых деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{4}$$

2 Метод

Задачу можно свести к задаче о минимизации функционала:

$$\chi = \int_V f(x, y, z, \overline{u}, \nabla \otimes \overline{u}) dxdydz \rightarrow min \Longleftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} + \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = 0 \tag{5}$$

Наверное, $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}} = \nabla_{\overline{u}} \otimes f$ Последнее уравнение - уравнение Эйлера-Лагранжа.

Рассмотрим сначала уравнение (2) без первого слагаемого. Внимательно посмотрев на это уравнение, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial (\nabla \otimes \overline{u})} = \frac{1}{2}\mathbf{C} : (\nabla \otimes \overline{u} + \nabla \otimes \overline{u}^T) \tag{6}$$

Заметим, что

$$\frac{d(\mathbf{A} : \mathbf{A}^T)}{d\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \tag{7}$$

Отсюда следует, что

$$f = \frac{1}{2}\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T - \overline{Q} \cdot \overline{u} \tag{8}$$

Я не слишком глубоко проникся тензорным анализом (возникают два вопроса: 1. $\partial \leftrightarrow d$. 2. что с константой интегрирования), поэтому выше, ориентируясь на Зинкевича я выписываю интуитивно ожидаемый результат Рассмотрим тетраэдральный элемент. Поле перемещений аппроксимируем линейной функцией координат:

$$\overline{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{9}$$

Тогда для вектора перемещений в узле i:

$$\overline{u}_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i \tag{10}$$

Отсюда можно записать

$$\begin{aligned} \overline{u} = \frac{1}{6V}[(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)\overline{u}_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)\overline{u}_j \\ +(a_m + b_m x + c_m y + d_m z)\overline{u}_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)\overline{u}_p] \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$V = det\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\1 & x_j & y_j & z_j\\1 & x_m & y_m & z_m\\1 & x_p & y_p & z_p\end{vmatrix} \tag{12}$$

коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i определяются как

$$a_i = det\begin{vmatrix}x_j & y_j & z_j\\x_m & y_m & z_m\\x_p & y_p & z_p\end{vmatrix},\ b_i = -det\begin{vmatrix}1 & y_j & z_j\\1 & y_m & z_m\\1 & y_p & z_p\end{vmatrix}\ c_i = -det\begin{vmatrix}x_j & 1 & z_j\\x_m & 1 & z_m\\x_p & 1 & z_p\end{vmatrix},\ d_i = -det\begin{vmatrix}x_j & y_j & 1\\x_m & y_m & 1\\x_p & y_p & 1\end{vmatrix} \tag{13}$$

Перемещение произвольной точки можно записать в виде

$$\overline{u} = [\mathbb{I}N_i, \mathbb{I}N_j, \mathbb{I}N_m, \mathbb{I}N_p] \cdot \overline{u}^e = [\mathbf{N}]\overline{u}^e \tag{14}$$

где $N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}$, $\mathbb{I}-$ единичная матрица, $\overline{u}^e = (u_1, v_1, \omega_1, u_2, v_2, \omega_2 ... \omega_4)$ - вектор размера (12,1) неизвестных перемещений для элемента.

Рассмотрим данный функционал на элементе e: $\chi \to \chi^e$:

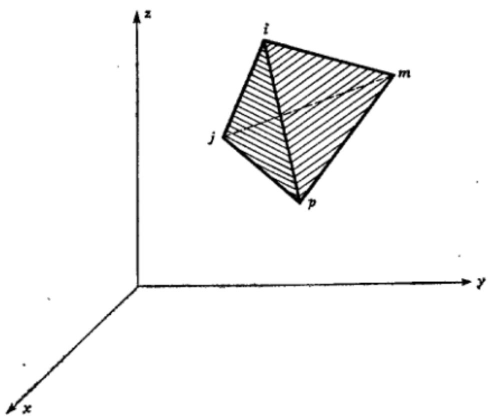

Рис. 3: Тетраэдральный элемент

Заметка на полях:

$$\nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes \overline{u}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{15}$$

$$\nabla \otimes \nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes \overline{u}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x_\gamma}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{16}$$

Эти две "формулы"показывают куда и в каком порядке расставлять индексы. Я на 99 % уверен, что последняя формула верна.

Возьмем производную по $\overline{u}_i$ - вектору перемещения в узле i: i - номер узла тетраэдра, просто обозначение, никак не соотносится с индексами α, β ... Подробнее описано ниже

$$\begin{aligned}\nabla_{\overline{u_i}} \otimes (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u} : \nabla \otimes \overline{u}^T) = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T = \\ = \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu})(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T + \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T) = \\ = (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}) + \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_{i\alpha}} (\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\gamma})^T) = \\ = (\nabla \otimes \overline{u}^T : \mathbf{C}) : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} + (\mathbf{C} : \nabla \otimes \overline{u}) : (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u})^T\end{aligned} \tag{17}$$

В предпоследней строке странная вещь - с точки зрения индексной записи можно поменять в последнем слагаемом умножаемые местами, тогда в последней формуле второй градиент от u будет стоять спереди, но с точки зрения тензорной алгебры вроде бы двойное скалярное произведение тензоров второго и третьего ранга не ассоциативно

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} (\nabla \otimes \overline{u})^T : \mathbf{C} : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} + \frac{1}{2} \nabla \otimes \overline{u} : \mathbf{C} : \nabla_{\overline{u}_i} \otimes (\nabla \otimes \overline{u})^T - \right. \\ \left. - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \right) dV \tag{18}$$

Учтем, что

$$\nabla \otimes \overline{u} = \nabla \otimes ([\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (N_{\beta\gamma} \overline{u}^e_\gamma) = (\frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma}) \overline{u}^e_\gamma = \overline{u}^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma}) = \overline{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T,$$
$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u} = \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes ([\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e) = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} (\overline{u}^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma})) =$$
$$= (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} \overline{u}^e_\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma}) = (\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(132)} (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}^e),$$
$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes (\nabla \otimes \overline{u})^T = \nabla_{\overline{u}_i} \otimes (\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot \overline{u}^e)^T = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} (\overline{u}^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma}))^T =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} (\overline{u}^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\alpha\gamma})^{(321)}) = (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} \overline{u}^e_\gamma)(\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\alpha\gamma})^{(321)} = (\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\alpha\gamma})^{(321)(132)} (\frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} \overline{u}^e_\gamma) = (\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(312)} (\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}^e) \tag{19}$$

Выше индекс (132) и (321) обозначение изомера тензора третьего ранга.Изомеры появляются для того чтобы индексы оказались рядом у сомножителей и выражение свернулось в произведение. У матрицы, которая соответствует данному тензору, поменяны местами соответствующие оси: $(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)^{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1} \otimes a_{i_2} \otimes a_{i_3}$.

В ходе написания кода были разные версии, насчет того какая именно должна быть перестановка. В итоге я пришел к тому, что индекс '2' у матрицы N (главный, который проходит значения от 1 до 12 см.(14)) должен у первого сомножителя в слагаемых в (20) быть самым левым, а у правого сомножителя - правым. Это связано с матрицами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$. В коде матрицы собираются в цикле по узлам элемента, потом две эти матрицы перемножаются и получается h^e - поэтому чтобы при их произведении матрица h^e имела правильный размер 12x12 при итерации $\mathbb{A}$ должна заполняться вниз (vstack), а $\mathbb{B}$ - вправо (hstack) Тогда (18) можно записать как

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} (\overline{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^T : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{132} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \overline{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T : \mathbf{C} : (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(312)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) - \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} \right) dV = \\ = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(231)} : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{132} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\}^T + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{213} : \mathbf{C} : (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(312)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\}^T \right) \overline{u}^e - \int_{V^e} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} dV \tag{20}$$

Пояснения к (20): В первой строчке первое слагаемое можно представить так

$$(\overline{u}^e \cdot \nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^T : \mathbf{C} = (u^e_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\alpha} N_{\beta\gamma})^T : C_{\alpha\beta\nu\mu} = [\textit{Аналогично третьему уравнению в 20}\ ] =$$
$$= u^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\alpha\gamma})^{(321)} : C_{\alpha\beta\nu\mu} = u^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\gamma\alpha})^{(321)(213)} : C_{\alpha\beta\nu\mu} = u^e_\gamma (\frac{\partial}{\partial x_\beta} N_{\alpha\gamma})^{(231)} : C_{\alpha\beta\nu\mu} \tag{21}$$

В третьей строке первое слагаемое можно представить так

$$\begin{aligned}
&(\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(231)} : \mathbf{C} = \nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(231)}_{\alpha\beta\gamma} : \mathbf{C}_{\beta\gamma\nu\mu} = \mathbb{A}_{\alpha\nu\mu} \\
&(\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(132)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) = (\nabla \otimes [\mathbf{N}])^{(132)}_{\nu\mu\gamma} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)_{\gamma\phi} = \mathbb{B}_{\nu\mu\phi} \\
&\overline{u}^e_\alpha \cdot \mathbb{A}_{\alpha\nu\mu} : \mathbb{B}_{\nu\mu\phi} = \overline{u}^e_\alpha \cdot \mathbb{D}_{\alpha\phi} = \mathbb{D}^T_{\phi\alpha} \cdot \overline{u}_\alpha
\end{aligned} \tag{22}$$

Аналогично для второго слагаемого

Рассмотрим это выражение для узла j:

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e_j = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^{(231)} : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{(132)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\}^T + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{(213)}_j : \mathbf{C} : (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(312)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\}^T \right) \overline{u}^e - \int_{V^e} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u} \cdot \overline{Q} dV \tag{23}$$

Выражение в фигурных скобках - **матрица 3x3**. Здесь, возможно, не очевидный момент - i,j = 1,2,3,4 - нумеруют узел в тетраэдральном элементе, это никак не связано с тем, что в скобках матрица. Дело в том, что $\overline{u}$ - 3x1 вектор, поэтому связь между i-м и j-м узлами теперь задается матрицей 3x3. Поэтому в разделе пояснений к коду, (и пояснений к преобразованиям тензоров, (когда они появятся))при переходе к индексной записи тензоров я использую греческие буквы, чтобы они не пересекались с i и j Тогда для всего элемента

$$\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \chi^e_j = h^e \cdot \overline{u}^e + \overline{F}^e \tag{24}$$

, где

$$h^e_{ij} = \int_{V^e} \left(\frac{1}{2} \left\{ (\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)^{(231)} : \mathbf{C} : \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{(132)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\}^T + \frac{1}{2} \left\{ \nabla \otimes [\mathbf{N}]^{(213)}_j : \mathbf{C} : (\nabla \otimes [\mathbf{N}]^T)^{(312)} \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) \right\} \right. \tag{25}$$

$$\overline{F}^e_i = - \int_{V^e} \nabla_{\overline{u}_i} \otimes \overline{u}_j \cdot \overline{Q}_j \tag{26}$$

Минимизирующая система для всех элементов:

$$\nabla_{\overline{u}} \otimes \chi = 0 = [H] \cdot \overline{u} + \overline{F} \tag{27}$$

где

$$H_{ij} = \sum h^e_{ij} \qquad F_i = \sum F^e_i \tag{28}$$

Аналогично получается матрица масс для первого слагаемого в уравнении (2):

$$M^e_{ij} = \int_{V^e} [\mathbf{N}]^T_i \rho [\mathbf{N}]_j dV \tag{29}$$

Тогда итоговое уравнение выглядит следующим образом:

$$[H]\overline{u} + [M]\ddot{\overline{u}} + \overline{F} = 0 \tag{30}$$

2.1 Граничные условия

Если следовать Зинкевичу то для того чтобы учесть границу Дирихле можно:

- Подставить в матрицы соотвествующие значения и исключить ненужные уравнения, из вектора F - соответствующие компоненты.
- Или умножить диагональные элементы матриц соотвествующие узлам Дирихле на очень большое число а правую часть заменить этим же числом, умноженным на значение перемещения.

Я попробовал первый подход - число обусловленности матрицы M порядка 10^8 - расчет падает из-за сингулярной матрицы. Попробовал второй подход - числа обусловленности порядка 10^5 и расчет разваливается. Поэтому я решил попробовать подход как в исходной статье:

$$\overline{u} = [\mathbf{N} \cdot \overline{u}_e + \mathbf{N} \cdot \overline{u}_e^D] \tag{31}$$

где $\overline{u}_e^D$ - перемещение в узлах Дирихле. Тогда к вектору F добавляются матрицы $[H], [M]$, умноженные на значение в граничных узлах. На этом подходе пока остановился, что-то даже насчиталось, графики ниже.

3 Пояснения к коду plate3d.py

Вернемся к страшной формуле для h_{ij} чтобы показать как она выражается в коде.

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 0} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{pmatrix} = \tag{32}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_4 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Для $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 1}$ и $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta 2}$ соответственно $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$, в матрице c_i и d_i.

$$\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial u_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial u_i}\omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial v_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial v_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial v_i}\omega_4 \\ \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_1 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_2 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_3 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}u_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}v_4 & \frac{\partial}{\partial \omega_i}\omega_4 \end{pmatrix}^T \tag{34}$$

$$=[0, \ldots \mathbb{I}_i, ..0]^T \tag{35}$$

Надеюсь определение градиента как Якобиана, а не его транспонированного не портит соответствия МСС $\leftrightarrow$ тензорная алгебра

Поэтому удобнее их воспринимать вместе:

$$\nabla \otimes [\mathbf{N}] \cdot (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e) = \nabla \otimes [\mathbf{N}]_{\alpha\beta\zeta} (\nabla_{\overline{u_i}} \otimes \overline{u}^e)_{\zeta\gamma} = \mathbf{B}_{\alpha\beta\gamma} \tag{36}$$

Здесь сидит индекс i - т.к. эта матрица это расписанный $\nabla_{\overline{u}_i} \otimes \nabla \otimes \overline{u}$

$$\mathbf{B}_{\beta\zeta 0} = \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & b_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{\beta\zeta 1} = \begin{pmatrix} c_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{\beta\zeta 2} = \begin{pmatrix} d_i & 0 & 0 \\ 0 & d_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \end{pmatrix} \tag{37}$$

Это очень похоже на $\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j^T$ если i-е коэффициенты заменить j-ми

Аналогично для

$$(\nabla \otimes [\mathbf{N}]_j)_{\alpha\beta\gamma} : \mathbf{C}_{\beta\gamma\phi\zeta}) = \mathbf{A}_{\alpha\phi\zeta} \tag{38}$$

Здесь сидит индекс j т.к мы рассмотрели крокодила (18) на узле j Для матрицы масс:

$$N_i N_j = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j x + c_j y + d_j z}{6V} = \tag{39}$$

$$\frac{a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z})}{6V} \cdot \frac{a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})}{6V} \tag{40}$$

где x_b, y_b, z_b -координаты барицентра В системе барицентра

$$\int dxdydz = V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{41}$$

$$\int xdxdydz = \int ydxdydz = 0 \tag{42}$$

$$\int x^2 dxdydz = \frac{V}{10}(\sum_i x_i^2 + \sum_{ij,i<j} x_i x_j) \tag{43}$$

$$\int xydxdydz = \frac{V}{20}(\sum_i x_i y_i + \sum_{ij,i<j}(x_i y_j + x_j y_i)) \tag{44}$$

Формулы выше расходятся с Зинкевичем из-за перекрестных слагаемых, deepseek утверждает что у Зинкевича формулы для интегрирования по равностороннему треугольнику

Итого

$$\begin{aligned} &\int_{V^e} N_i N_j dxdydz = \frac{1}{36V^2}\int_{V^e}(a_i + b_i(x_b + \tilde{x}) + c_i(y_b + \tilde{y}) + d_i(z_b + \tilde{z}))\cdot \\ &\cdot (a_j + b_j(x_b + \tilde{x}) + c_j(y_b + \tilde{y}) + d_j(z_b + \tilde{z})) = \\ &= \frac{1}{36V^2}\int_{V^e}\Big((a_i + b_i x_b + c_i y_b + d_i z_b)\cdot(a_j + b_j x_b + c_j y_b + d_j z_b) + b_i b_j x^2 + \\ &+ c_i c_j y^2 + d_i d_j z^2 + xy(b_i c_j + c_i b_j) + xz(b_i d_j + b_j d_i) + yz(c_i d_j + c_j d_i)\Big) \end{aligned} \tag{45}$$

Чем дальше элемент тем больше интеграл??? Этого как будто быть не должно. Интеграл можно взять в референсном элементе (тетраэдр к единичными координатами) - в последней реализации так и делается:

$$\begin{aligned} &\hat{N}_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \\ &\hat{N}_2 = \xi, \\ &\hat{N}_3 = \eta, \\ &\hat{N}_4 = \zeta, \\ &\int_{V^e} N_i N_j dV = detF \int_{\hat{V}} \hat{N}_i \hat{N}_j d\hat{V} = V \cdot \hat{K}_0 = V \cdot \frac{1}{120}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{46}$$

где $detF = 6V$ - преобразование к исходного элемента

$$F = \begin{pmatrix} x_2 - x_1, x_3 - x_1, x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1, y_3 - y_1, y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1, z_3 - z_1, z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Для матрицы жесткости и ингралов от градиента аналогичная ситуация:

$$\int_{V^e} \nabla \otimes N_i \cdot \nabla \otimes N_j dV = detF \int_{\hat{V}} (F^{-1^T} \cdot \nabla \otimes \hat{N}_i) \cdot (F^{-1^T} \cdot \nabla \otimes \hat{N}_j) d\hat{V} \tag{48}$$

Функции - P1 поэтому можно было также считать и в глобальной системе, но поскольку оно особо не считается переписал для референсного

4 Что получилось

Из того, что я выловил в процессе дебага - нужно как то уменьшить значения в матрице жесткости на 4-6 порядков, тогда появляются какие-то артефакты похожие на ачх Ищем собственные значения:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \tag{49}$$

Тут я заходил с двух сторон:

1.Как в Зинкевиче рассмотреть эту систему как задачу на собственные значения и вычислить ω из уравнения $det([H] - \omega^2[M]) = 0$

2. Задать ω и решить систему $([H] - \omega^2[M])\overline{u} + \overline{F} = 0$.

Остановился на втором подходе, вот что насчиталось:

После исправления многочисленных ошибок АЧХ выглядят как-то так...

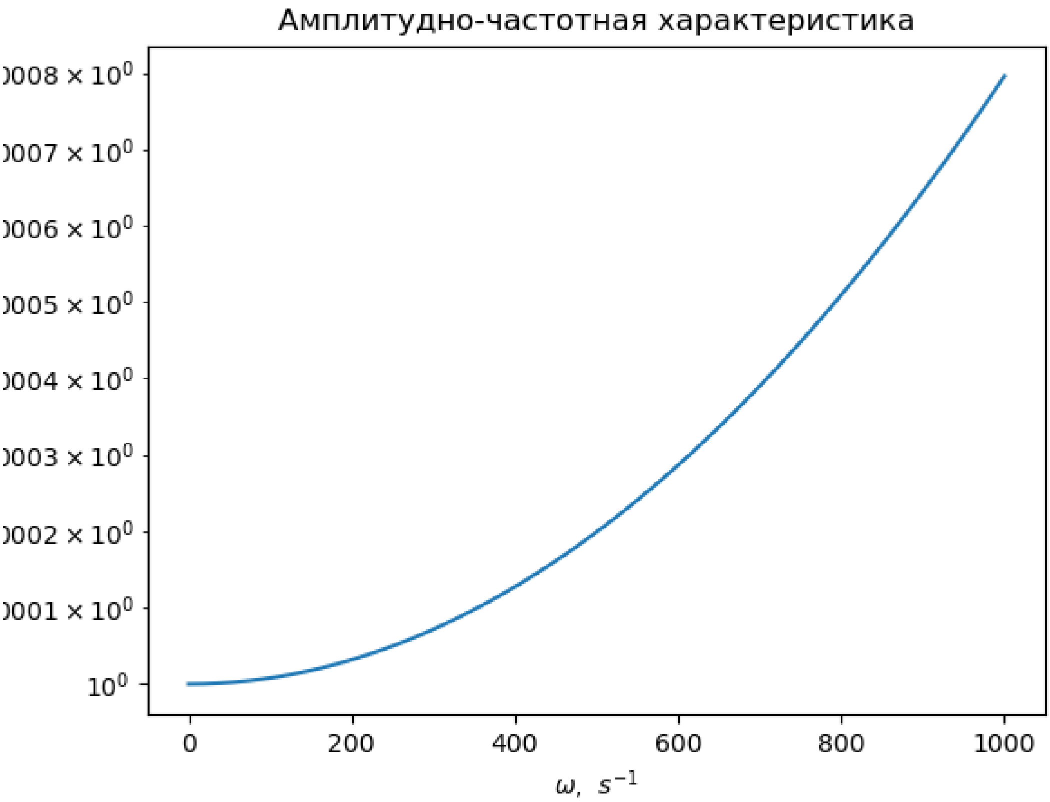
Амплитудно-частотная характеристика
)008 × 10^0
)007 × 10^0
)006 × 10^0
)005 × 10^0
)004 × 10^0
)003 × 10^0
)002 × 10^0
)001 × 10^0
10^0
0
200
400
600
800
1000
ω, s^-1

Рис. 4: dev