Математика 2 курс 1 семестр

Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії

Рис. 32.1

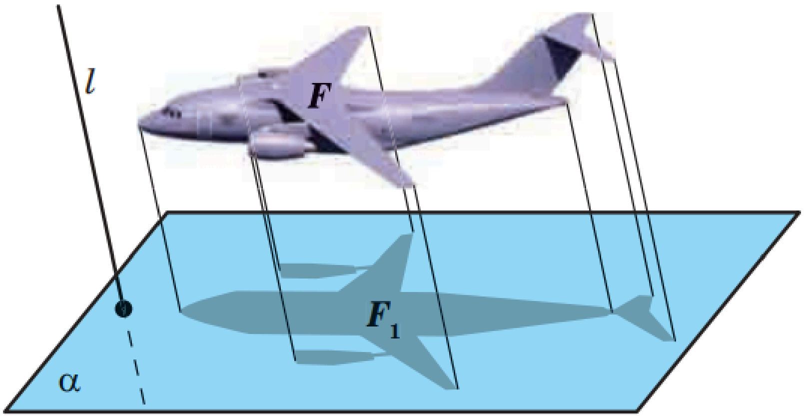


Рис. 32.2

Багато рисунків вашого підручника, на яких зображено просторові фігури, можна розглядати як тіні, що відкидають на площину сторінки предмети, освітлені паралельними променями.

Ознайомимося докладніше з паралельним проектуванням.

Нехай дано площину α, пряму l, що перетинає цю площину, і фігуру F (рис. 32.2). Через кожну точку фігури F проведемо пряму, паралельну прямій l (якщо точка фігури F належить прямій l, то розглядатимемо саму пряму l). Точки перетину всіх проведених прямих із площиною α утворюють деяку фігуру F_1. Описане перетворення фігури F називають паралельним проектуванням. Фігуру F_1 називають **паралельною проекцією фігури F на площину α в напрямі прямої l**. Фігуру F_1 називають також **зображенням фігури F на площині α в напрямі прямої l**.

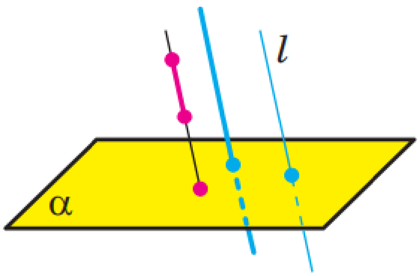


Рис. 32.3

Якщо пряма паралельна прямій l, то її проекцією на площину α є точка (рис. 32.3). Проекцією прямої l також є точка.

Якщо відрізок паралельний прямій l або лежить на прямій l, то його проекцією на площину α є точка (рис. 32.3).

У наведених нижче теоремах розглядатимемо прямі та відрізки, які не паралельні прямій l і не лежать на ній.

Теорема 32.1. ***Паралельною проекцією прямої є пряма; паралельною проекцією відрізка є відрізок*** (рис. 32.4).

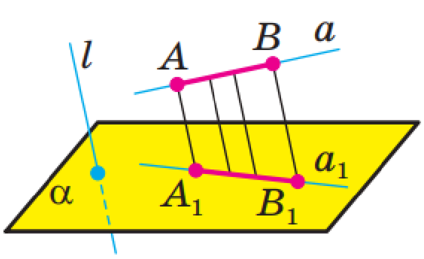


Рис. 32.4

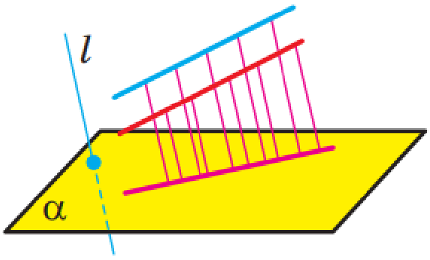


Рис. 32.5

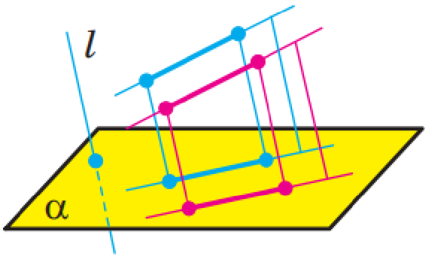
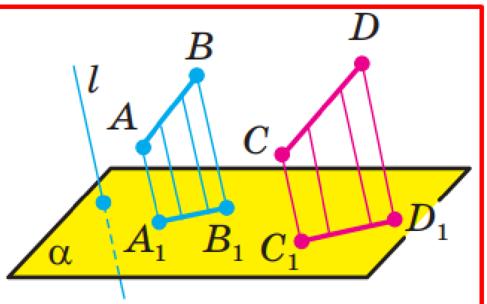


Рис. 32.6

Теорема 32.2. ***Паралельною проекцією двох паралельних прямих є або пряма*** (рис. 32.5), ***або дві паралельні прямі*** (рис. 32.6). ***Паралельні проекції двох паралельних відрізків лежать на одній прямій або на паралельних прямих*** (рис. 32.6).

Теорема 32.3. ***Відношення паралельних проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню самих відрізків*** (рис. 32.7).



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Рис. 32.7

Розглянемо зображення деяких многокутників на площині α в напрямі прямої l.

Якщо пряма l паралельна площині многокутника або належить цій площині, то зображенням многокутника є відрізок.

Тепер розглянемо випадок, коли пряма l перетинає площину многокутника.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проекцією трикутника є трикутник (рис. 32.8).

Оскільки при паралельному проектуванні зберігається паралельність відрізків, то зображенням паралелограма (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) є паралелограм (рис. 32.9).

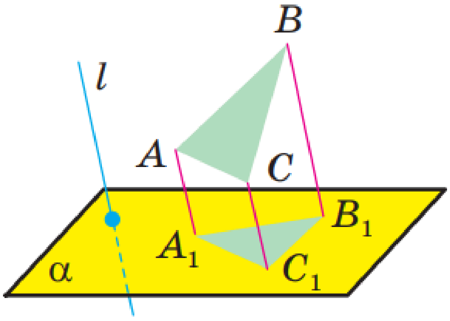


Рис. 32.8

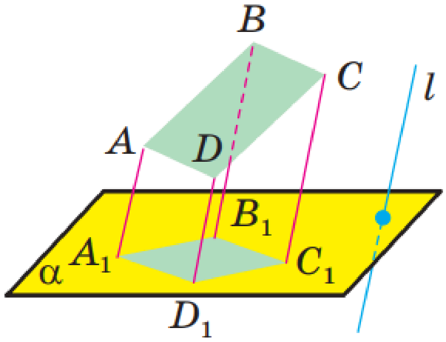


Рис. 32.9

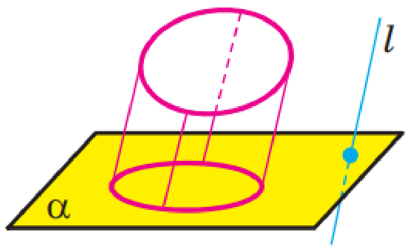


Рис. 32.10

33. Кут між прямими в просторі

Оскільки дві будь-які прямі простору, що перетинаються, лежать в одній площині, то кут між ними означимо так само, як і в планіметрії.

Означення. Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за 90° (рис. 33.1).

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює 0°. Отже, якщо φ — кут між двома прямими, які лежать в одній площині, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Введемо поняття кута між мимобіжними прямими.

Означення. Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

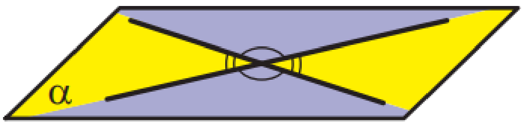


Рис. 33.1

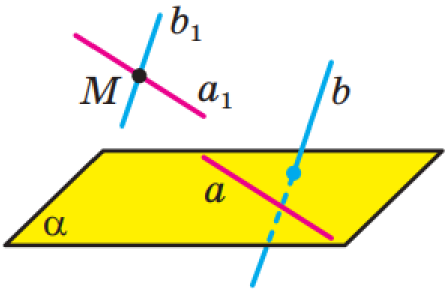


Рис. 33.2

Нехай прямі a і b мимобіжні. Через точку M простору проведемо прямі a_1 і b_1 так, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 33.2). За означенням кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1, що перетинаються.

Виникає природне запитання: чи залежить кут між даними мимобіжними прямими a і b від вибору точки M? Дати відповідь на це запитання допомагає така теорема.

Теорема 33.1. ***Кут між двома прямими, що перетинаються, дорівнює куту між двома іншими прямими, що перетинаються та відповідно паралельні даним.***

Скориставшись теоремою 33.1, можна показати, що *кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a і b_1, що перетинаються, де* $b_1 \parallel b$.

Наприклад, на рисунку 33.3 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Кут між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює куту між прямими BB_1 і BC, що перетинаються.

Означення. Дві прямі в просторі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Зауважимо, що перпендикулярні прямі можуть як перетинатися, так і бути мимобіжними.

Якщо прямі a і b перпендикулярні, то записують: $a \perp b$.

Два відрізки в просторі називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Задача. На рисунку 33.5 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими A_1D і D_1C.

Розв'язання. Сполучимо точки A_1 і B. Оскільки $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C і B лежать в одній площині. Ця площина перетинає паралельні площини AA_1B і DD_1C по паралельних прямих A_1B і D_1C. Отже, кут між прямими A_1D і D_1C дорівнює куту DA_1B.

Сполучимо точки B і D. Відрізки A_1D, A_1B і BD є рівними як діагоналі рівних квадратів. Отже, трикутник A_1BD рівносторонній. Тоді $\angle DA_1B = 60°$.

Відповідь: 60°. ◀

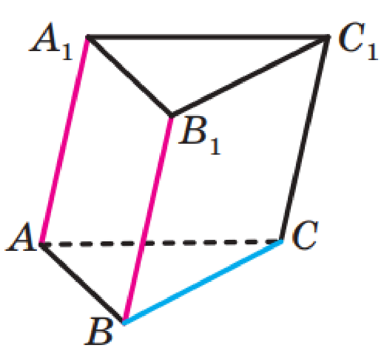


Рис. 33.3

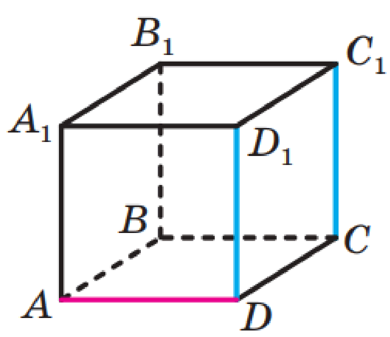


Рис. 33.4

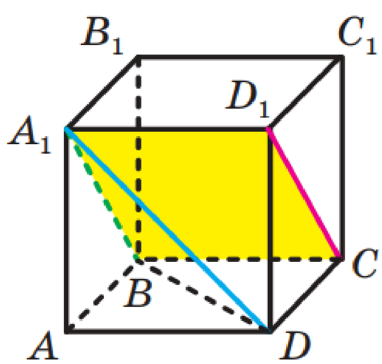


Рис. 33.5

Перпендикулярність прямої та площини

Означення. **Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині** (рис. 34.4).

Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то записують: $a \perp \alpha$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до прямої a або пряма a та площина α перпендикулярні.

З означення випливає, що коли пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перетинає цю площину.

Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він належить прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Наприклад, інтуїтивно зрозуміло, що ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 34.5). Довести цей факт нескладно, скориставшись такою теоремою.

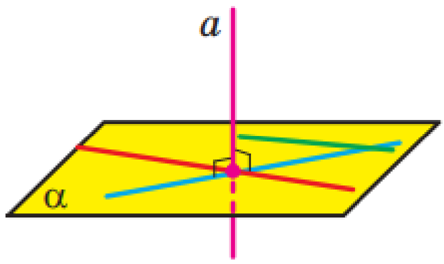


Рис. 34.4

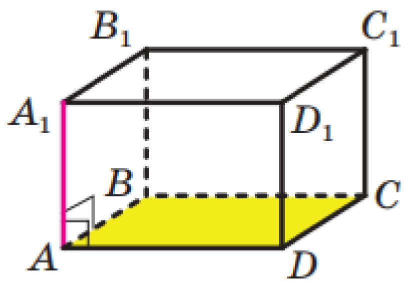
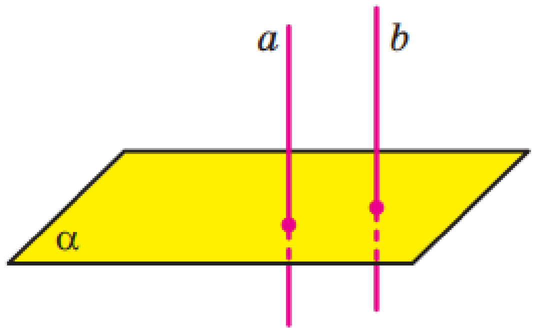


Рис. 34.5

Теорема 34.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). ***Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.***

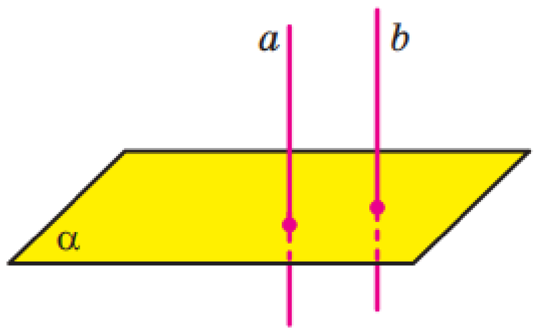
Теорема 34.2. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини*** (рис. 34.7).

Наприклад, на рисунку 34.5 пряма AA_1 перпендикулярна до площини ABC, а пряма CC_1 паралельна прямій AA_1. Отже, за теоремою 34.2 пряма CC_1 також є перпендикулярною до площини ABC.



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

Рис. 34.7



Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

Рис. 34.8

Сформулюємо теорему, що є ознакою паралельності двох прямих.

Теорема 34.3. ***Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні*** (рис. 34.8).

Справедлива й така теорема.

Теорема 34.4. ***Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.***

Задача. Площина α, перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC, перетинає катет AC у точці E, а гіпотенузу AB — у точці F (рис. 34.9). Знайдіть відрізок EF, якщо $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ см.

Розв'язання. Оскільки пряма AC перпендикулярна до площини α, то пряма AC перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, зокрема до прямої EF. Прямі EF і BC лежать в одній площині та перпендикулярні до прямої AC, тому $EF \parallel BC$. Із цього випливає, що трикутники AEF і ACB подібні. Отже, можна записати: $EF : CB = AE : AC$. Звідси $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ см.

Відповідь: 9 см. ◄

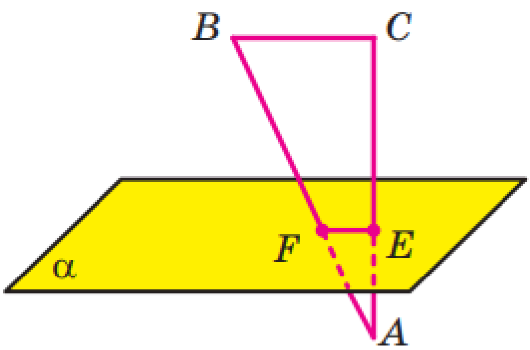


Рис. 34.9