Математика 2 курс 1 семестр

Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 27.2) або інших обмежених частин площини (рис. 27.3).

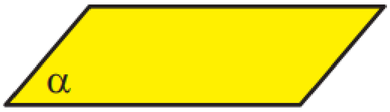


Рис. 27.2

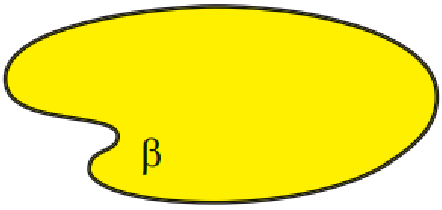


Рис. 27.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

На рисунку 27.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині* α або *площина* α *проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$.

На рисунку 27.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

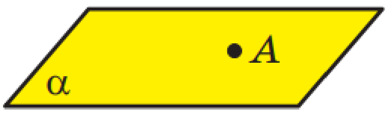


Рис. 27.4

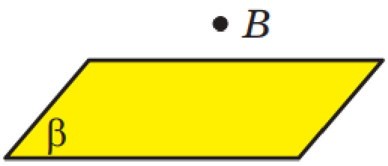


Рис. 27.5

Рис. 27.6

На рисунку 27.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині* α або *площина* α *проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$.

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 27.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують: $a \cap \alpha = A$.

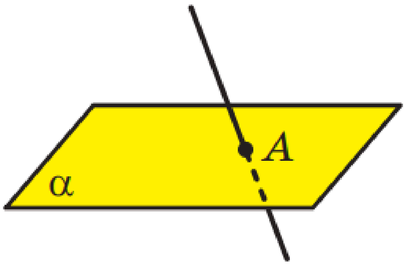


Рис. 27.7

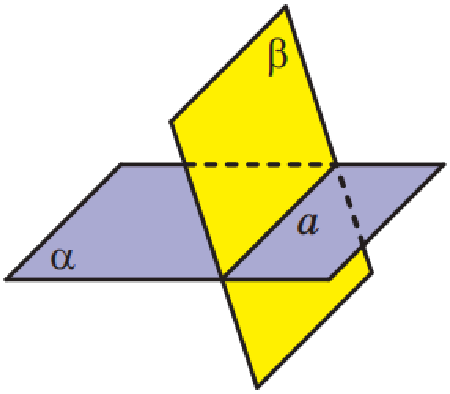
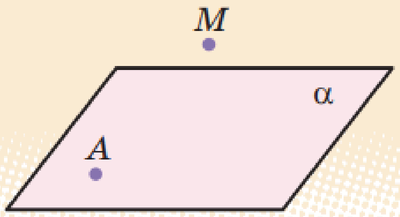
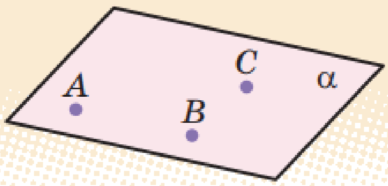
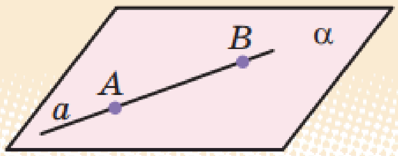
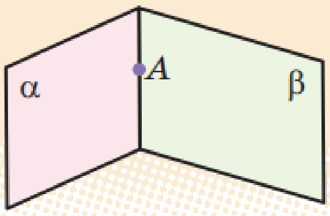
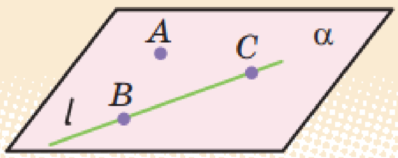
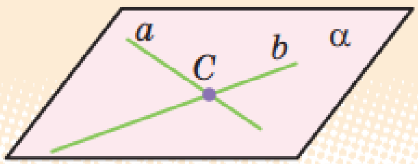


Рис. 27.8

Якщо дві площини мають спільну точку, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

На рисунку 27.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

Таблиця 1

1. Аксіоми стереометрії	
	Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй. $A \in \alpha$; $M \notin \alpha$
	Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині. Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.
	Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
	Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.
2. Наслідки з аксіом стереометрії	
	Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Аксіома 5. **Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.**

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 27.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 27.12).

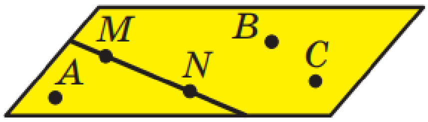


Рис. 27.12

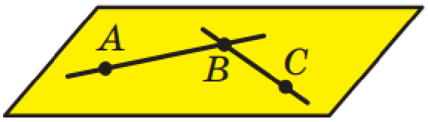


Рис. 27.13

Аксіома А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 27.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Теорема 27.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.17).

Теорема 27.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.18).

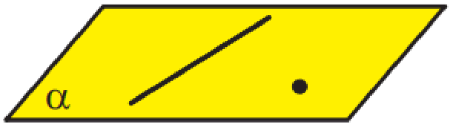


Рис. 27.17

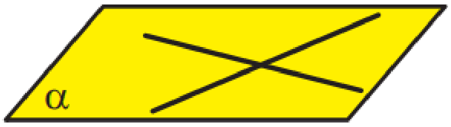


Рис. 27.18

З аксіоми А2 і теорем 27.1 і 27.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій*;
3) *двома прямими, що перетинаються.*

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин

Звернемося до рисунка 29.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

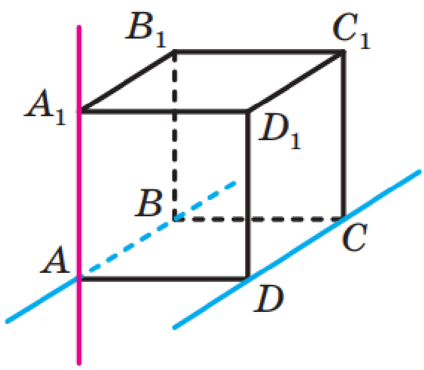


Рис. 29.1

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. **Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.**

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. **Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.**

Наприклад, на рисунку 29.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

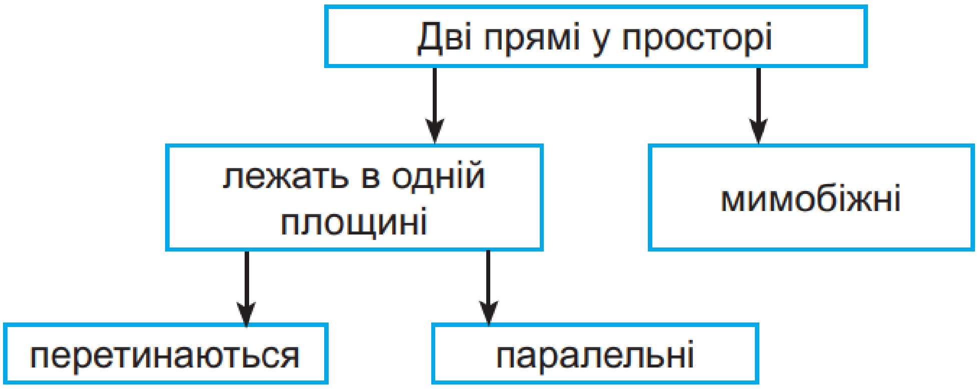


Рис. 29.4

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

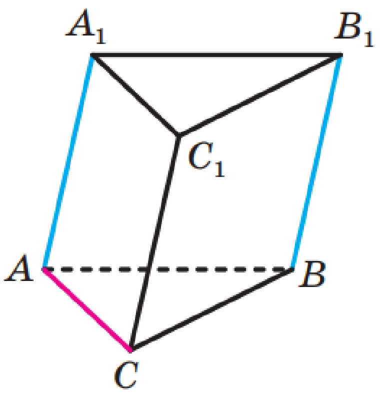


Рис. 29.5

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 29.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

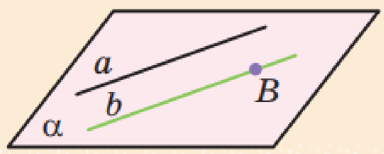
Теорема 29.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Теорема 4.2. Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай точка B не належить прямій a. Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 4.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назвемо її b, яка паралельна прямій a. Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ■

Рис. 4.4



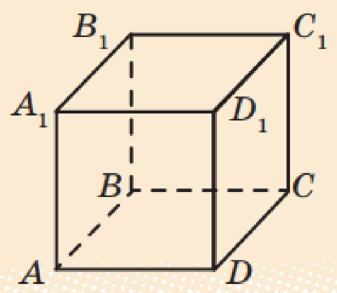
прямих. Для паралельності прямих транзитивність означає: **«Якщо пряма *a* паралельна прямій *b*, а пряма *b* паралельна прямій *c*, то пряма *a* паралельна прямій *c*».**

Теорема 4.3. **Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.**

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.5) ребра AB і D_1C_1 паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC.

Рис. 4.5



Теорема 29.2 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі є мимобіжними*** (рис. 29.6).

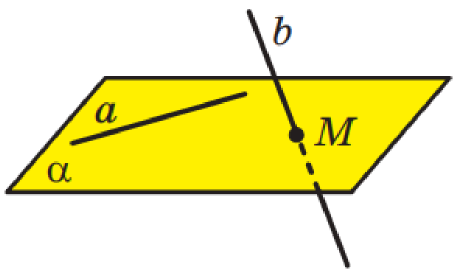


Рис. 29.6

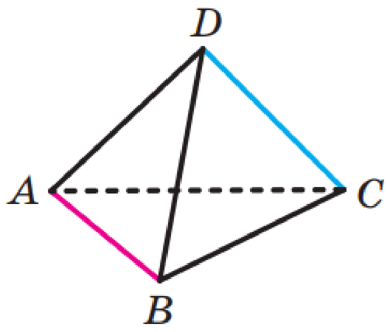


Рис. 29.7

Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії