Математика 2 курс 1 семестр

Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки з них

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 27.2) або інших обмежених частин площини (рис. 27.3).

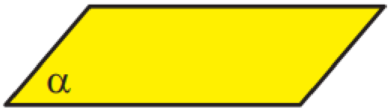


Рис. 27.2

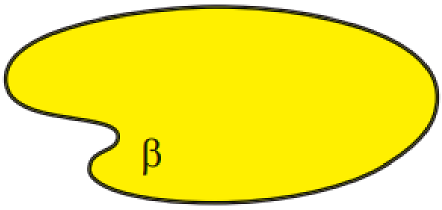


Рис. 27.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

На рисунку 27.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині* α або *площина* α *проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$.

На рисунку 27.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

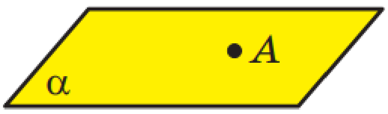


Рис. 27.4

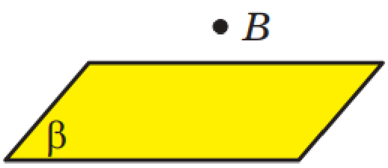


Рис. 27.5

Рис. 27.6

На рисунку 27.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині* α або *площина* α *проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$.

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 27.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують: $a \cap \alpha = A$.

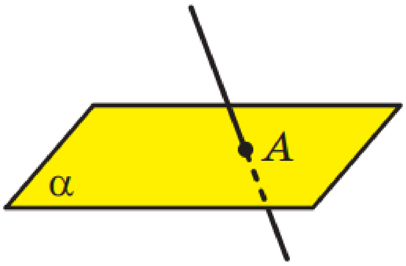


Рис. 27.7

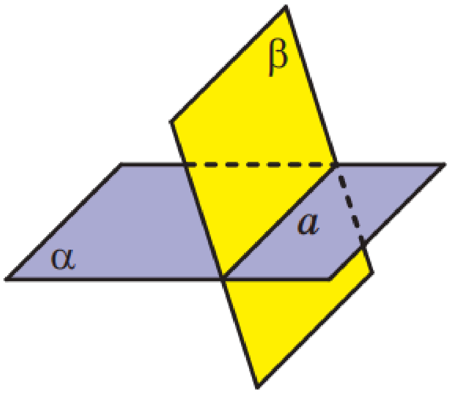


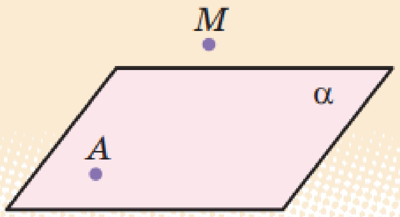
Рис. 27.8

Якщо дві площини мають спільну точку, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

На рисунку 27.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

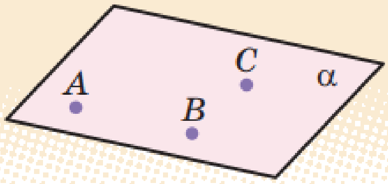
Таблиця 1

1. Аксіоми стереометрії

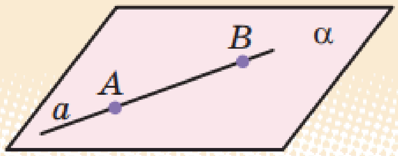


Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

$A \in \alpha$; $M \notin \alpha$

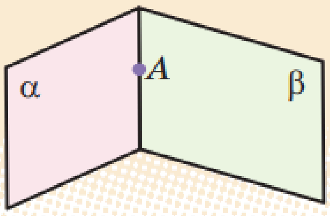


Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Якщо дві різні точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

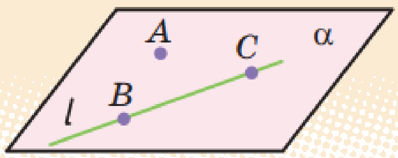
Якщо $A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, то $AB \subset \alpha$.



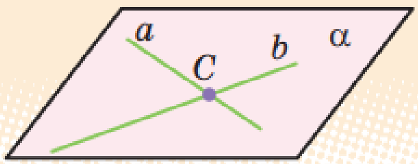
Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

2. Наслідки з аксіом стереометрії



Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Аксіома 5. Відстань між будь-якими двома точками простору одна і та сама на всіх площинах, що містять ці точки.

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 27.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 27.12).

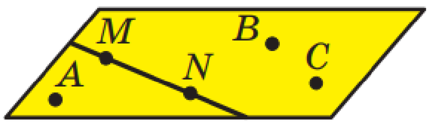


Рис. 27.12

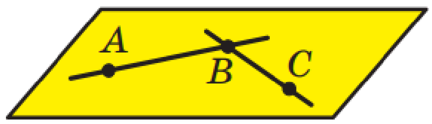


Рис. 27.13

Аксіома А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 27.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Теорема 27.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.17).

Теорема 27.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.18).

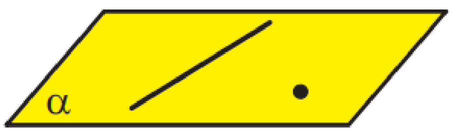


Рис. 27.17

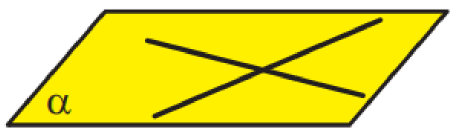


Рис. 27.18

З аксіоми А2 і теорем 27.1 і 27.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій*;
3) *двома прямими, що перетинаються*.

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

Взаємне розміщення прямих у просторі. Паралельність прямої та площини. Паралельність площин

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

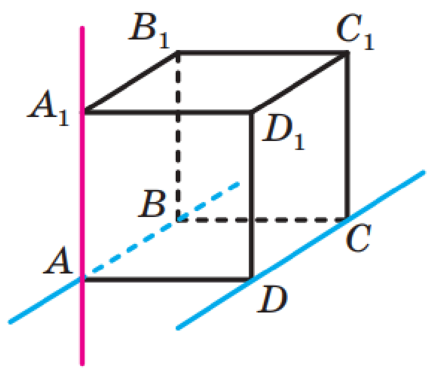


Рис. 29.1

Звернемося до рисунка 29.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.

Наприклад, на рисунку 29.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

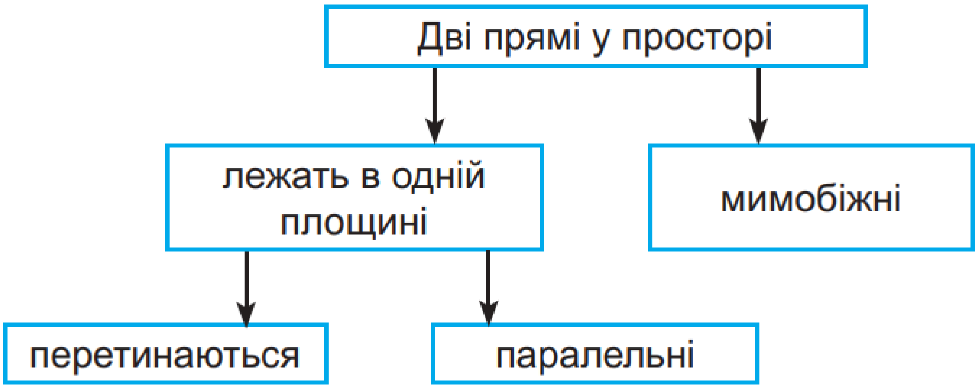


Рис. 29.4

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

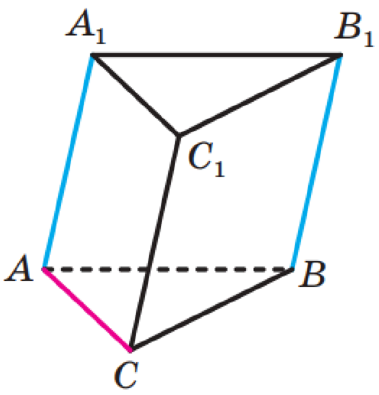


Рис. 29.5

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 29.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

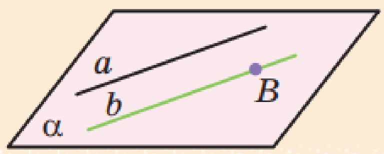
Теорема 29.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Теорема 4.2. Через точку в просторі, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай точка B не належить прямій a. Проведемо через цю пряму і точку B площину α (рис. 4.4). Ця площина — єдина. У площині α через точку B проходить єдина пряма, назвемо її b, яка паралельна прямій a. Вона і буде єдиною шуканою прямою, яка паралельна даній. ■

Рис. 4.4



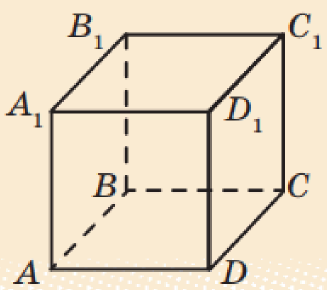
прямих. Для паралельності прямих транзитивність означає: **«Якщо пряма *a* паралельна прямій *b*, а пряма *b* паралельна прямій *c*, то пряма *a* паралельна прямій *c*».**

Теорема 4.3. **Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні.**

Із доведенням теореми можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Наприклад, у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.5) ребра AB і D_1C_1 паралельні, оскільки кожне з них паралельне ребру DC.

Рис. 4.5



Теорема 29.2 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі є мимобіжними*** (рис. 29.6).

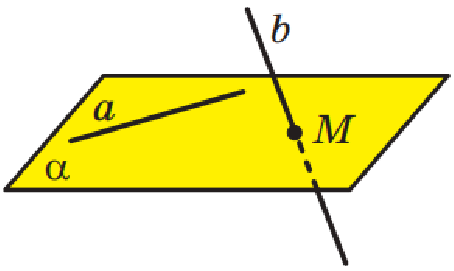


Рис. 29.6

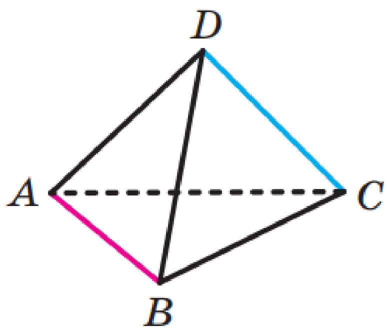


Рис. 29.7

Задача 2. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 6$ см.

Розв'язання

Оскільки паралельні прямі AA_1, BB_1, MM_1, які перетинають пряму AB, лежать в одній площині, то точки A_1, M_1 і B_1 лежать на одній прямій (рис. 4.7, *б*), і ми одержуємо плоский чотирикутник ABB_1A_1, який є трапецією $(AA_1 \parallel BB_1)$.

За умовою точка M — середина відрізка AB і $MM_1 \parallel AA_1$. Тоді за теоремою Фалеса точка M_1 — середина A_1B_1. Отже, MM_1 — середня лінія трапеції і

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ (см)}.$$

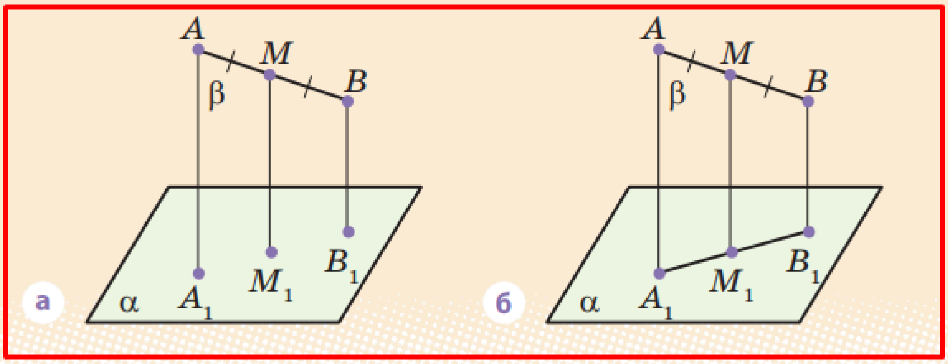
Відповідь: 7 см.

Коментар

Для побудови рисунка до задачі потрібно використати результат задачі 1. Оскільки пряма AA_1 перетинає пряму AB, а прямі MM_1 і BB_1 паралельні прямій AA_1, то всі вони лежать в одній площині β (рис. 4.7, *а*). Тоді площина β перетинає дану площину α по прямій A_1B_1, на якій лежать усі спільні точки цих площин, зокрема і точка M_1.

Отже, на рисунку точки A_1, M_1 і B_1 повинні лежати на одній прямій (рис. 4.7, *б*). Фактично після побудови правильного рисунка одержуємо планіметричну задачу в площині β.

Рис. 4.7



Паралельність прямої та площини

Означення. **Пряму та площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.**

Якщо пряма a та площина α паралельні, то записують: $a \parallel \alpha$. Також прийнято говорити, що пряма a паралельна площині α, а площина α паралельна прямій a.

Теорема 30.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Наприклад, на рисунку 30.1 прямі A_1B_1 і AB містять протилежні сторони квадрата ABB_1A_1. Ці прямі паралельні. Оскільки $AB \subset ABC$, то за ознакою паралельності прямої та площини $A_1B_1 \parallel ABC$.

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він належить прямій, паралельній цій площині. Наприклад, ребро AB куба паралельне площині CDD_1 (рис. 30.1).

Ви вмієте встановлювати паралельність двох прямих за допомогою теорем-ознак, відомих із планіметрії. Розглянемо теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 30.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

На рисунку 30.4 пряма a паралельна площині α. Площина β проходить через пряму a і перетинає площину α по прямій b. Тоді $b \parallel a$.

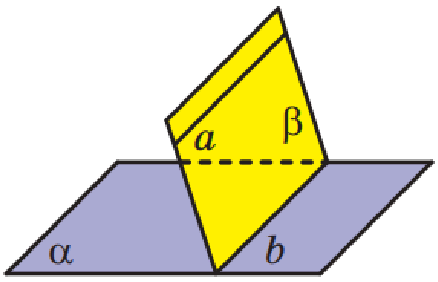


Рис. 30.4

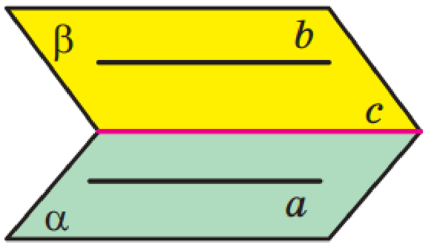


Рис. 30.5

Теорема 30.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то пряма перетину площин паралельна кожній із двох даних прямих.***

На рисунку 30.5 прямі a і b паралельні, площина α проходить через пряму a, а площина β — через пряму b, $\alpha \cap \beta = c$. Тоді $c \parallel a$ і $c \parallel b$.

Теорема 30.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Паралельність площин

спільних точок. Наприклад, площини ABC і $A_1B_1C_1$, які містять основи призми, не мають спільних точок (рис. 31.1).

Означення. Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Також прийнято говорити, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

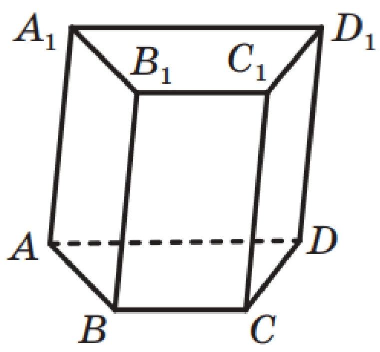


Рис. 31.1

З означення паралельних площин випливає, що *будь-яка пряма, яка лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині*.

У тих випадках, коли треба з'ясувати, чи є дві площини паралельними, зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 31.1 (ознака паралельності двох площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

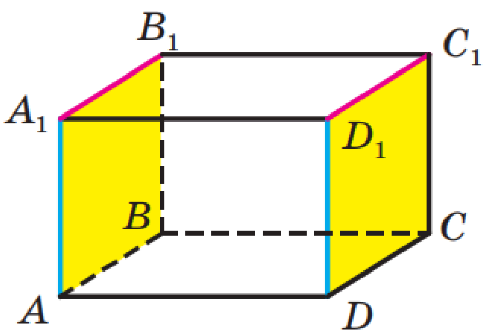


Рис. 31.3

Наприклад, на рисунку 31.3 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності двох площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Теорема 31.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна*** (рис. 31.4).

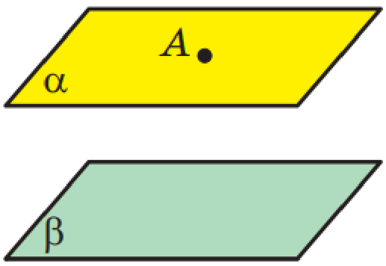


Рис. 31.4

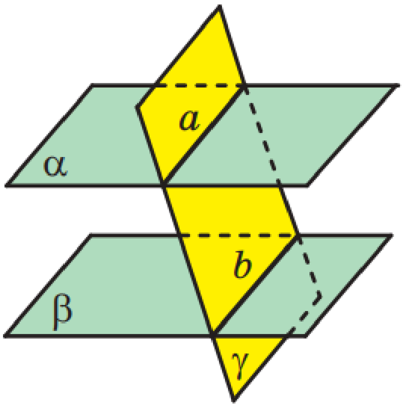


Рис. 31.5

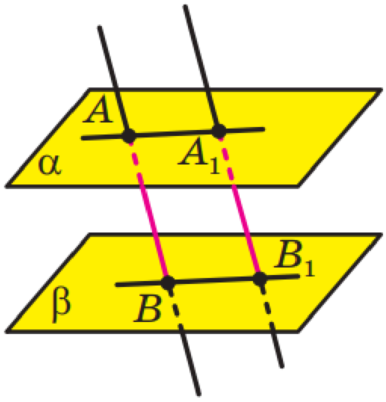


Рис. 31.6

Теорема 31.3. ***Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні*** (рис. 31.5).

Задача. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

Розв'язання. Нехай дано паралельні площини α і β та паралельні прямі AB і A_1B_1 такі, що $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (рис. 31.6). Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

Паралельні прямі AB і A_1B_1 задають деяку площину γ, причому $\alpha \cap \gamma = AA_1$ і $\beta \cap \gamma = BB_1$.

За теоремою 31.3 отримуємо, що $AA_1 \parallel BB_1$. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Звідси $AB = A_1B_1$. ◀

Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії