

Математика 2 курс 1 семестр

Паралельне проектування і його властивості. Зображення фігур у стереометрії



Рис. 32.1

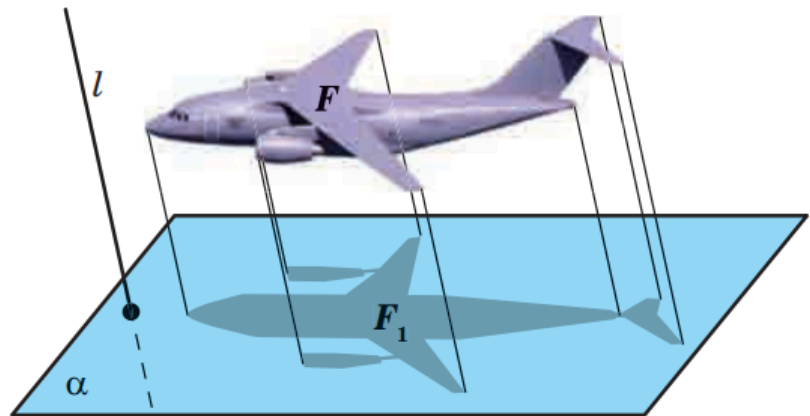


Рис. 32.2

Багато рисунків вашого підручника, на яких зображено просторові фігури, можна розглядати як тіні, що відкидають на площину сторінки предмети, освітлені паралельними променями.

Ознайомимось докладніше з паралельним проектуванням.

Нехай дано площину α , пряму l , що перетинає цю площину, і фігуру F (рис. 32.2). Через кожну точку фігури F проведемо пряму, паралельну прямій l (якщо точка фігури F належить прямій l , то розглядатимемо саму пряму l). Точки перетину всіх проведених прямих із площиною α утворюють деяку фігуру F_1 . Описане перетворення фігури F називають паралельним проектуванням. Фігуру F_1 називають паралельною проекцією фігури F на площину α в напрямі прямої l . Фігуру F_1 називають також зображенням фігури F на площині α в напрямі прямої l .

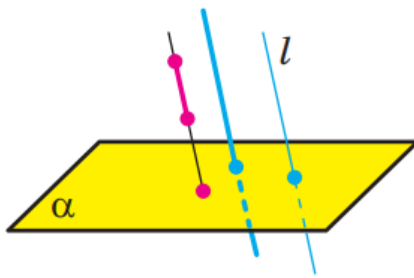


Рис. 32.3

Якщо пряма паралельна прямій l , то її проекцією на площину α є точка (рис. 32.3). Проекцією прямої l також є точка.

Якщо відрізок паралельний прямій l або лежить на прямій l , то його проекцією на площину α є точка (рис. 32.3).

У наведених нижче теоремах розглядатимемо прямі та відрізки, які не паралельні прямій l і не лежать на ній.

Теорема 32.1. Паралельною проекцією прямої є пряма; паралельною проекцією відрізка є відрізок (рис. 32.4).

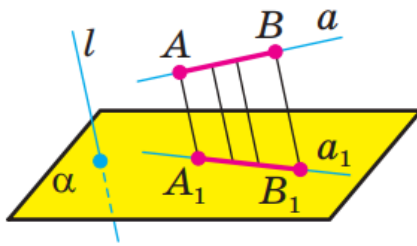


Рис. 32.4

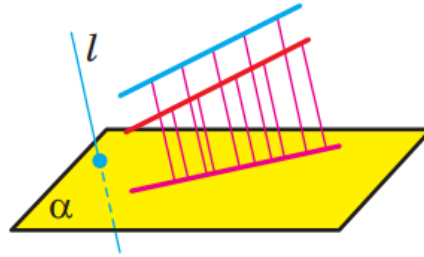


Рис. 32.5

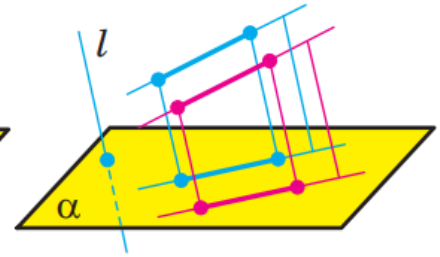


Рис. 32.6

Теорема 32.2. Паралельною проекцією двох паралельних прямих є або пряма (рис. 32.5), або дві паралельні прямі (рис. 32.6). Паралельні проєкції двох паралельних відрізків лежать на одній прямій або на паралельних прямих (рис. 32.6).

Теорема 32.3. Відношення паралельних проєкцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню самих відрізків (рис. 32.7).

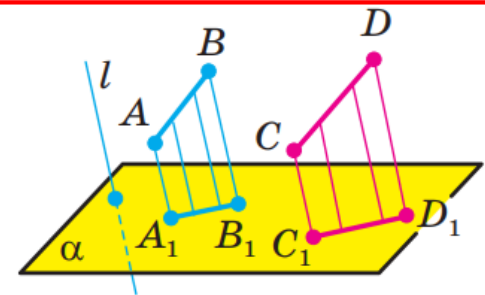
Розглянемо зображення деяких багатокутників на площині α в напрямі прямої l .

Якщо пряма l паралельна площині багатокутника або належить цій площині, то зображенням багатокутника є відрізок.

Тепер розглянемо випадок, коли пряма l перетинає площину багатокутника.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проєкцією трикутника є трикутник (рис. 32.8).

Оскільки при паралельному проектуванні зберігається паралельність відрізків, то зображенням паралелограма (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) є паралелограм (рис. 32.9).



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Рис. 32.7

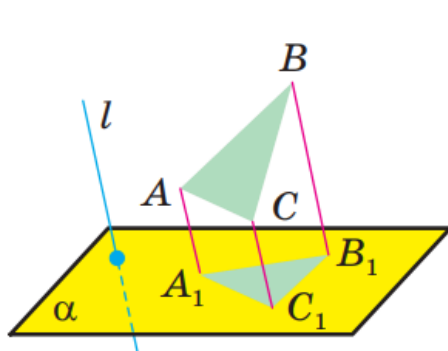


Рис. 32.8

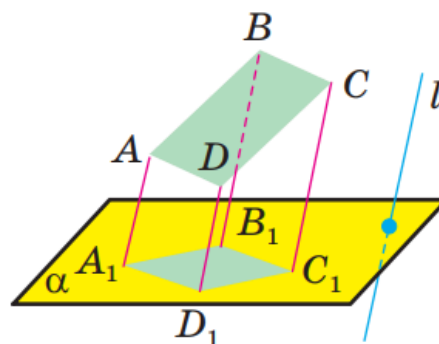


Рис. 32.9

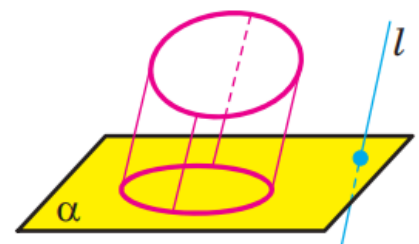


Рис. 32.10

Перпендикулярність прямих у просторі

33. Кут між прямими в просторі

Оскільки дві будь-які прямі простору, що перетинаються, лежать в одній площині, то кут між ними означимо так само, як і в планіметрії.

Означення. Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за 90° (рис. 33.1).

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює 0° . Отже, якщо φ — кут між двома прямими, які лежать в одній площині, то $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

Введемо поняття кута між мимобіжними прямими.

Означення. Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

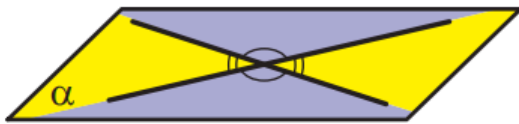


Рис. 33.1

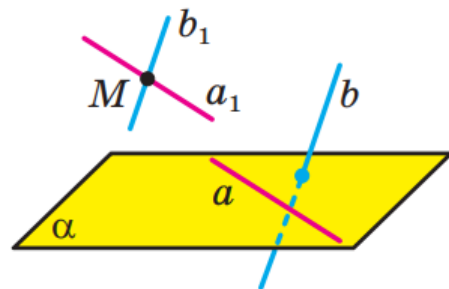


Рис. 33.2

Нехай прямі a і b мимобіжні. Через точку M простору проведемо прямі a_1 і b_1 так, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 33.2). За означенням кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1 , що перетинаються.

Виникає природне запитання: чи залежить кут між даними мимобіжними прямими a і b від вибору точки M ? Дати відповідь на це запитання допомагає така теорема.

Теорема 33.1. Кут між двома прямими, що перетинаються, дорівнює куту між двома іншими прямими, що перетинаються та відповідно паралельні даним.

Скориставшись теоремою 33.1, можна показати, що кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a і b_1 , що перетинаються, де $b_1 \parallel b$.

Наприклад, на рисунку 33.3 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Кут між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює куту між прямими BB_1 і BC , що перетинаються.

Означення. Дві прямі в просторі називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90° .

Зауважимо, що перпендикулярні прямі можуть як перетинатися, так і бути мимобіжними.

Якщо прямі a і b перпендикулярні, то записують: $a \perp b$.

Два відрізки в просторі називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Задача. На рисунку 33.5 зображено куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими A_1D і D_1C .

Розв'язання. Сполучимо точки A_1 і B . Оскільки $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C і B лежать в одній площині. Ця площина перетинає паралельні площини AA_1B і DD_1C по паралельних прямим A_1B і D_1C . Отже, кут між прямими A_1D і D_1C дорівнює куту DA_1B .

Сполучимо точки B і D . Відрізки A_1D , A_1B і BD є рівними як діагоналі рівних квадратів. Отже, трикутник A_1BD рівносторонній. Тоді $\angle DA_1B = 60^\circ$.

Відповідь: 60° . ◀

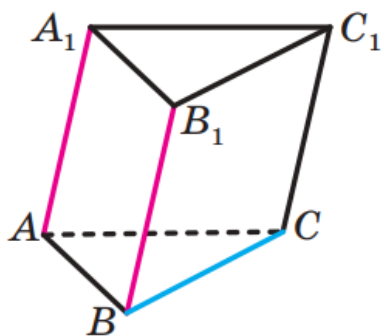


Рис. 33.3

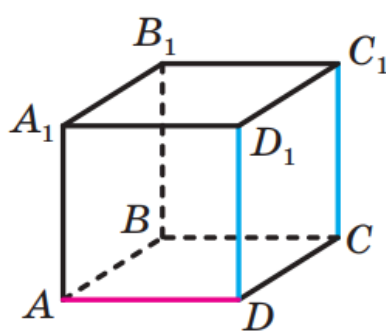


Рис. 33.4

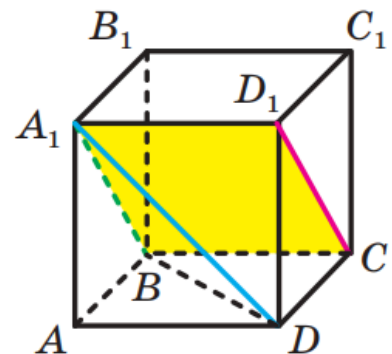


Рис. 33.5