Лекція 4 (продовження).

Перевірка статистичних гіпотез

4.3.3. Перевірка гіпотези про про рівність середніх двох сукупностей нормально розподіленої генеральної сукупності при відомих дисперсіях

Нехай є дві незалежні генеральні сукупності X та Y, які мають нормальний розподіл. Потрібно перевірити гіпотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$.

Розглянемо три випадки:

1) Обсяг вибірки великий $(n > 40)$ і відомі значення D_x і D_y генеральних сукупностей.

З кожної генеральної сукупності роблять вибірку обсягами n_1 і n_2 відповідно. Статистичні розподіли:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_{1i}	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1k}

y_j	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
n_{2j}	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2m}

$$\overline{x}_B = \frac{1}{n_1}\sum x_i \cdot n_{1i}\,; \quad \overline{y}_B = \frac{1}{n_2}\sum y_j \cdot n_{2j}\,.$$

За статистичний критерій візьмемо випадкову величину $Z=\dfrac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D_x}{n_1}+\dfrac{D_y}{n_2}}}$,

яка має розподіл $Z\to N(0;1)$. Якщо дисперсії рівні $D_x=D_y=\sigma^2$, то

$$Z=\frac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}.$$

В залежності від формулювання альтернативної гіпотези H_1 будується відповідно правостороння, лівостороння або двостороння критичні області. Спостережуване значення критерію відповідно обчислюється за формулами:

$$Z_{спост}=\frac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{D_x}{n_1}+\dfrac{D_y}{n_2}}};\ Z_{спост}=\frac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}.$$

Приклад 4.4. Спостерігають за роботою двох автоматів, які мають виготовляти однакові втулки. Для першого автомата зробили вибірку $n_1=50$ втулок і отримали середній діаметр $\bar{x}_B=20{,}1$мм. Для другого автомата зробили таку саму вибірку $n_2=50$ і отримали середній діаметр $\bar{y}_B=19{,}8$мм. Генеральні дисперсії відомі: $D_x=1{,}75$мм^2 і $D_y=1{,}375$мм^2. На рівні значущості $\alpha=0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0:M(X)=M(Y)$ при альтернативній $H_1:M(X)\neq M(Y)$.

Розв'язання. Маємо двосторонню критичну область. $z_{1кр}=-z_{2кр}$.

$\Phi\left(z_{2кр}\right)=\frac{1-\alpha}{2}=\frac{1-0,05}{2}=0,475$. За таблицею значень функції Лапласа $z_{2кр}=1,96$, тоді $-z_{1кр}=-1,96$. Спостережене значення критерію: $Z_{спост}=\frac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sqrt{\frac{D_x+D_y}{n}}}=\frac{20,1-19,8}{\sqrt{\frac{1,75+1,375}{50}}}=1,2$.

Оскільки $Z_{спост}\in\left[-1,96;1,96\right]$, то нульова гіпотеза не відхиляється. Це означає, що середні вибіркові відрізняються неістотно.

2) Якщо обсяг вибірки великий $\left(n_1>40;\ n_2>40\right)$, але невідомі значення генеральних дисперсій, то застосовують їх точкові незміщені оцінки s_x^2 і s_y^2**.** Припустимо, що генеральні дисперсії рівні. Тоді критерій перевірки нульової гіпотези можна записати так:

$$T=\frac{\bar{x}_B-\bar{y}_B}{\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s_x^2+\left(n_2-1\right)s_y^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}};\ T\to N\left(0;1\right).$$

Критична область будується в залежності від виду альтернативної гіпотези.

Схема перевірки нульової гіпотези:

1. Нульова гіпотеза $H_0: M\left(X\right)=M\left(Y\right)$.
2. Альтернативна гіпотеза:

   а) $H_1: M\left(X\right)\neq M\left(Y\right)$;

   б) $H_1: M\left(X\right)>M\left(Y\right)$;

   в) $H_1: M\left(X\right)<M\left(Y\right)$.

3. При великих обсягах вибірок $(n_1 > 40;\ n_2 > 40)$, $T \to N(0;1)$ і за тосовують таблицю для розподілу Стьюдента:

4. Критичні точки:

а) Двостороння критична область: критичні точки симетричні $t_{1кр} = -t_{2кр}$ і знаходяться з формули: $\Phi(t_{2кр}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ за таблицею Лапласа.

б) Правостороння критична область: $\Phi(t_{кр}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$.

в) Лівостороння критична область: $\Phi(t_{кр}) = -\dfrac{1-2\alpha}{2}$.

5. Обчислюємо $T_{спост} = \dfrac{\bar{x}_B - \bar{y}_B}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)s_x^2 + (n_2-1)s_y^2}{n_1+n_2-2}}}\sqrt{\dfrac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$.

6. Правило прийняття рішень: гіпотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$ відхиляється:

а) $|T_{спост}| \geq t_{кр}$;

б) $T_{спост} > t_{кр}$;

в) $T_{спост} < -t_{кр}$.

Приклад 4.5. Досліджувався прибуток програмістів на двох типових фірмах ІТ галузі. Одержали наступні статистичні розподіли:

x_i	140,8	160,8	180,8	200,8	220,8
n_{1i}	2	6	32	8	2

y_j	150,6	160,6	170,6	180,6	190,6
n_{2j}	12	28	40	18	2

Ознаки є незалежними і мають нормальний розподіл. Для рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези $H_0 : M(X) = M(Y)$ при альтернативній $H_1 : M(X) < M(Y)$.

Розв'язання. За даними обчислюємо вибіркові середні і вибіркові дисперсії: $\overline{x}_B = 181{,}6$; $\overline{y}_B = 167{,}6$; $D_x = 239{,}36$; $D_y = 93{,}0$. Оскільки дисперсії невідомі, знаходимо незміщені оцінки: $n_1 = 50$; $n_2 = 100$;

$$s_x^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} D_x = 244{,}24; \; s_y^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} D_y = 93{,}94.$$

1. Нульова гіпотеза: $H_0 : M(X) = M(Y)$.

2. Альтернативна: $H_1 : M(X) < M(Y)$.

3. Критична область: лівостороння.

4. Критичні точки: $\Phi\left(t_{кр}\right) = -\frac{1 - 2\alpha}{2} = -0{,}49$; $t_{кр} = -2{,}33$.

5. Спостережене значення критерію:

$$T_{спост} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 6{,}74;$$

$$T_{спост} = 6{,}74 > t_{кр} = -2{,}33.$$

Висновок: нульова гіпотеза приймається.

Приклад 4.6. Проведено дві вибірки завантаженості серверів: вдень і вночі. В першому випадку при спостереженні 8 серверів вибіркова середня завантаженість склала 16,2 годин на добу , а середнє квадратичне відхилення — 3,2 год/доба; у другому випадку при спостереженні 9 серверів ті ж характеристики дорівнювали відповідно 13,9 год/доба і 2,1 год/доба. На рівні значущості α=0,05 визначити вплив часу доби на завантаженість серверів.

Розв'язання. Гіпотеза, яка перевіряється, $H_0: \ \overline{x}_0 = \overline{y}_0$, тобто середні значення завантаженості сервера вдень і вночі рівні. В якості конкуруючої гіпотези беремо гіпотезу $H_1 : \overline{x}_0 > \overline{y}_0$, прийняття якої означає значний вплив часу доби на завантаженість сервера. Значення статистики критерію, який фактично спостерігається

$$T = \frac{16{,}2 - 13{,}9}{\sqrt{\dfrac{8 \cdot 3{,}2^2 + 9 \cdot 2{,}1^2}{8 + 9 - 2}\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9}\right)}} = 1{,}62$$

Критичне значення статистики для односторонньої області визначається при числі ступенів свободи $k = n_1 + n_2 - 2 = 9 + 8 - 2 = 15$ із умови $\theta(t,k) = 1 - 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}9$, звідки за таблицею II додатків підручника [1] $t_{0,9;15} = 1{,}75$. Оскільки $t = 1{,}62 < t_{0,9;15} = 1{,}75$, то гіпотеза H_0 приймається. Це означає, що вибіркові дані на 5%-вому рівні значущості не дозволяють вважати, що час доби суттєво впливає на завантаженість серверів. ►

4.4. Перевірка гіпотез про числові значення параметрів

Гіпотези про числові значення зустрічаються в області ІТ технологій найчастіше. В загальному випадку гіпотези такого типу мають вигляд H_0: $\theta = \Delta_0$, де θ — деякий параметр розподілу, який досліджується, а Δ_0 — область його конкретних значень, яка в частинному випадку складається із одного значення. Під час перевірки гіпотези вказаного типу можна використовувати той самий підхід, що і раніше. Відповідні критерії перевірки гіпотез про числові значення параметрів нормального закону надані в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Гіпотези про числові значення параметрів у відповідності до критеріїв перевірки

Нульова гіпотеза	Припущення	Статистика критерію	Альтернативна гіпотеза	Критерій відхилення гіпотези
$a = a_0$	σ^2 відома	$t = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\left.\begin{array}{l} a = a_1 > a_0 \\ a = a_1 < a_0 \end{array}\right\}$ $a = a_1 \neq a_0$	$\lvert t \rvert > t_{1-2\alpha}$ $\lvert t \rvert > t_{1-\alpha}$
	σ^2 невідома	$t = \dfrac{\bar{x} - a_0}{s/\sqrt{n-1}}$	$\left.\begin{array}{l} a = a_1 > a_0 \\ a = a_1 < a_0 \end{array}\right\}$ $a = a_1 \neq a_0$	$\lvert t \rvert > t_{1-2\alpha;n-1}$ $\lvert t \rvert > t_{1-\alpha;n-1}$
$\sigma_0^2 = \sigma^2$	a невідомо	$\chi^2 = \dfrac{ns^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 = \sigma_1^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_1^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 = \sigma_1^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{\alpha;n-1}$ $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha;n-1}$ або $\left\{\begin{array}{l} \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-1} \\ \chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2;n-1} \end{array}\right.$

$p=p_0$	n достатньо велике	$t=\dfrac{w-p_0}{\sqrt{p_0 q_0/n}}$	$\left.\begin{array}{l} p=p_1>p_0 \\ p=p_1<p_0 \end{array}\right\}$ $p=p_1\neq p_0$	$\|t\|>t_{1-2\alpha}$ $\|t\|>t_{1-\alpha}$

Приклад 4.7. В ідеалі середній час відгуку сервера даного виробника складає $a_0=120$ мілісекунд. Вибіркова перевірка 10 серверів дала середнє значення відгуку x = 135 мілісек., а середнє квадратичне відхилення відгуку s = 20 мілісек. На рівні значущості 0,05: а) визначити, чи можна прийняти за істину ідеальний відгук; б) знайти потужність критерію, використаного в п.а); в) знайти мінімальне число серверів, яке варто перевірити, щоб забезпечити потужність критерію 0,975.

Розв'язання. а) Гіпотеза, яка перевіряється, H_0: $\overline{x_0}=a_0=120$. Альтернативна - гіпотеза H_1: $\overline{x_0}=a_1=135$. Оскільки генеральна дисперсія σ^2 невідома, то використаємо t-критерій Стьюдента. Статистика критерію у відповідності до табл. 6.2 дорівнює $t=\dfrac{\overline{x}-a_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{135-120}{20/\sqrt{10-1}}=2{,}25$. Критичне значення статистики $t_{1-2\cdot 0{,}05;10-1}=t_{0{,}9;9}=1{,}83$. Оскільки $|t|>t_{0{,}9;9}$ (2,25 > 1,83), то гіпотеза H_0 відкидається, тобто на 5%-вому рівні значущості зроблений прогноз повинен бути відкинутий.

б) Оскільки $a_1=135>a_0=120$, то критична область правостороння і критичне значення вибіркового середнього

$$\overline{x}_{\text{кр.}}=\overline{x}_0+t_{1-2\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}}=a+t_{0{,}9;9}\frac{s}{\sqrt{n-1}}=120+1{,}83\frac{20}{\sqrt{10-1}}=132{,}2$$

(мілісекунд). Тобто критична область значень для x — інтервал (132,2;+∞).

Потужність критерію дорівнює

$$P = P(132{,}2 < \bar{x} < +\infty) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta(t, n-1),$$

де $\theta(t, n-1)$ — функція, яка виражає ймовірність попадання випадкової величини, яка має *t*-розподіл Стьюдента, на відрізок *(-t, t)*

$$t = \frac{\bar{x} - a_1}{s/\sqrt{n-1}} = t = \frac{132{,}2 - 135}{20/\sqrt{10-1}} = -0{,}42.$$

За таблицею III додатків підручника [1]:

$$\theta(-0{,}42; 9) = -\theta(0{,}42; 9) \approx -0{,}31.$$

Отже, $P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta(-0{,}42; 9) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}31) \approx 0{,}66.$

в) Скористаємось розв'язком прикладу 6.1 б). Оскільки у нас σ^2 невідома, а відома лише її вибіркова оцінка s^2, то статистика критерію $t = \frac{\bar{x} - a_0}{s/\sqrt{n-1}}$ має *t*-розподіл Стьюдента (див. табл. 4.2), і відповідна скорегована формула для n прийме вигляд:

$$n = \frac{\left(t_{1-2\alpha; n-1} + t_{1-2\beta; n-1}\right)^2 s^2}{(a_1 - a_0)^2}.$$

При $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}025$ (тому що за умовою потужність критерію $1 - \beta = 0{,}975$), $a_0 = 120$, $a_1 = 135$, $s = 20$ отримаємо:

$$n = \frac{16}{9}\left(t_{0{,}9; n-1} + t_{0{,}95; n-1}\right)^2.$$

Оскільки права частина рівності сама залежить від невідомого значення n, то n знаходиться наближено підбором. Так, при $n = 20$ і при $n = 30$, рівність не виконується (наприклад, при *n*=20

$20 \neq \frac{16}{9}\left(t_{0,9;19} + t_{0,95;19}\right)^2 = \frac{16}{9}\left(1{,}73 + 2{,}09\right)^2 = 24{,}7$), а при n=25

$25 \approx \frac{16}{9}\left(t_{0,9;24} + t_{0,95;24}\right)^2 = \frac{16}{9}\left(1{,}71 + 2{,}06\right)^2 = 25{,}3.$

Таким чином, необхідно перевірити 25 серверів.►

Аналогічно перевіряються і інші гіпотези про числові значення параметрів у відповідності до критеріїв перевірки, наведених у табл. 6.2.

4.5. Побудова теоретичного закону розподілу за дослідними даними. Перевірка гіпотез про закон розподілу

Однією з найважливіших задач математичної статистики є **встановлення теоретичного закону розподілу випадкової величини**, яка характеризує ознаку, яка вивчається, за дослідним (емпіричним) розподілом, представленим варіаційним рядом. Для розв’язання цієї задачі необхідно визначити вид та параметри закону розподілу. Припущення про **вид закону розподілу** може бути висунуте виходячи з теоретичних міркувань. **Параметри розподілу**, як правило, невідомі, тому їх заміняють найкращими оцінками за вибіркою.

Критерії узгодження: нехай необхідно перевірити нульову гіпотезу H_0 про те, що досліджувана випадкова величина X підпорядковується певному закону розподілу. Для перевірки гіпотези H_0 обирають деяку випадкову величину U, яка характеризує ступінь розходження теоретичного та емпіричного розподілів. Закон розподілу U при достатньо великих n відомий та практично не залежить від закону розподілу випадкової величини X.

Якщо відомий закон розподілу U, то можна знайти ймовірність того, що U прийняла значення не менше, ніж u, яке фактично спостерігається у досліді, тобто $U \geq u$. Якщо $P(U \geq u) = \alpha$ мала, то це означає (у відповідності з принципом практичної впевненості), що такі, як в досліді, та більші відхилення практично неможливі. В цьому випадку гіпотезу H_0 відкидають. Якщо ж ймовірність $P(U \geq u) = \alpha$ не мала, розходження між емпіричним та теоретичним розподілами не істотне та гіпотезу H_0 можна вважати правдоподібною чи такою, що не суперечить дослідним даним.

χ^2-критерій Пірсона

В **критерії χ^2-Пірсона**, який найчастіше використовується на практиці, в якості міри розходження U береться величина χ^2, яка дорівнює сумі квадратів відхилень частостей (статистичних ймовірностей) w_i від гіпотетичних p_i, розрахованих за передбачуваним розподілом, взятих з деякими вагами c_i:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i (w_i - p_i)^2.$$

Ваги c_i вводяться таким чином, щоб при одних і тих самих відхиленнях $(w_i - p_i)^2$ більшу вагу мали відхилення, при яких p_i мала, та меншу вагу – при яких p_i велика. Цього вдається досягнути, якщо взяти c_i обернено пропорційним ймовірностям p_i. Якщо взяти в якості ваг $c_i = \frac{n}{p_i}$, можна довести, що при $n \to \infty$ статистика $U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i}(w_i - p_i)^2$, або $U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ має χ^2-розподіл з $k = m - r - 1$ ступенями свободи, де m – число інтервалів емпіричного розподілу (варіаційного ряду); r – число параметрів теоретичного розподілу, обчислених за експериментальними даними.

Числа $n_i = nw_i$ та np_i називають відповідно **емпіричними** та **теоретичними частотами**.

Схема застосування критерію χ^2 для перевірки гіпотези H_0:

1. Визначається міра розходження емпіричних та теоретичних частот χ^2 за формулою $U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.
2. Для обраного рівня значущості α за таблицею χ^2-розподілу знаходять критичне значення $\chi^2_{\alpha;k}$ при числі ступенів свободи $k = m - r - 1$.
3. Якщо значення χ^2, яке фактично спостерігається, більше критичного, $\chi^2 > \chi^2_{\alpha;k}$, то гіпотеза H_0 відкидається; якщо $\chi^2 \le \chi^2_{\alpha;k}$, то гіпотеза H_0 не суперечить експериментальним даним.

Зауваження. Статистика $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ має χ^2-розподіл лише при $n \to \infty$, тому необхідно, щоб в кожному інтервалі була достатня кількість спостережень, якнайменше 5 спостережень. Якщо в будь-якому інтервалі кількість спостережень менше за 5, доцільно об’єднати сусідні інтервали, щоб в об’єднаних інтервалах n_i було не менше 5.

Приклад 4.8. Тестується нова програма для розпізнавання прихованих зображень. Було протестовано 100 картинок із прихованим зображенням. За даними перших двох граф табл. 1.1 в прикладі 1.1 підібрати відповідний теоретичний розподіл та на рівні значущості α=0,05 перевірити гіпотезу про узгодженість двох розподілів за допомогою критерію χ^2.

Розв'язання. За видом гістограми розподілу часу роботи програми (рис. 1.2) можна передбачити нормальний закон розподілу ознаки. Параметри нормального закону a та σ^2, які є відповідно математичним сподіванням та дисперсією випадкової величини X, невідомі, тому заміняємо їх «найкращими» оцінками за вибіркою — незміщеними та грунтовними оцінками відповідно вибірковим середнім $\bar{x}$ та «виправленою» вибірковою дисперсією $\hat{s}^2$. Оскільки число спостережень $n = 100$ достатньо велике, то замість «виправленої» $\hat{s}^2$ можна взяти «звичайну» вибіркову дисперсію s^2. У прикладі 1.1 обчислені $\bar{x} = 119{,}2(хв), s^2 = 87{,}48, s = 9{,}35(хв)$.

Таким чином, висунута гіпотеза H_0: випадкова величина X – час дешифрування зображення – розподілена нормально з параметрами $a = 119{,}2; \sigma^2 = 87{,}48$, тобто $X \to N(119{,}2; 87{,}48)$.

Для обчислення ймовірностей p_i попадання випадкової величини X в інтервал $[x_i, x_{i+1}]$ використовуємо функцію Лапласа у відповідності з властивістю нормального розподілу:

$$p_i(x_i \le X \le x_{i+1}) = \left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right)\right] \approx$$
$$\approx \left[\Phi\left(\frac{x_{i+1}-119{,}2}{9{,}35}\right) - \Phi\left(\frac{94-119{,}2}{9{,}35}\right)\right] =$$
$$= \left[\Phi(-2{,}05) - \Phi(-2{,}69)\right] = (-0{,}4798 + 0{,}4964) = 0{,}0166$$

Для визначення статистики χ^2 зручно скласти таблицю 6.3.

Враховуючи, що в емпіричному розподілі частоти першого та останнього інтервалів $\left(n_1 = 3, n_8 = 2\right)$ менші за 5, при використанні критерію χ^2-Пірсона у відповідності із зауваженням, доцільно об'єднати вказані інтервали із сусідніми (див. табл. 4.3). Таким чином, значення статистики, яке фактично спостерігається, $\chi^2 = 2{,}27$. Оскільки нова кількість інтервалів (враховуючи об'єднання крайніх) $m = 6$, а нормальний закон розподілу визначається $r = 2$ параметрами, то кількість ступенів свободи $k = m - r - 1 = 3$. Відповідне критичне значення статистики χ^2 за таблицею $\chi^2_{0,05;3} = 7{,}82$. Оскільки $\chi^2 < \chi^2_{0,05;3}$, то гіпотеза про обраний теоретично нормальний закон N(119,2; 87,48) узгоджується з експериментальними даними.

Таблиця 4.3.

i	Інтервал $[x_i, x_{i+1}]$	Емпіричні частоти n_i	Ймовірності p_i	Теоретичні частоти np_i	$\left(n_i - np_i\right)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	94–100	$\left.\begin{matrix}3\\7\end{matrix}\right\}10$	0,017	$\left.\begin{matrix}1{,}7\\5{,}9\end{matrix}\right\}7{,}6$	5,76	0,758
2	100–106		0,059			
3	106–112	11	0,141	14,1	9,61	0,682
4	112–118	20	0,228	22,8	7,84	0,344

<table>
<tr><td>5</td><td>118–124</td><td>28</td><td>0,247</td><td>24,7</td><td>10,89</td><td>0,441</td></tr>
<tr><td>6</td><td>124–130</td><td>19</td><td>0,182</td><td>18,2</td><td>0,64</td><td>0,035</td></tr>
<tr><td>7</td><td>130–136</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}10\\2\end{matrix}\right\}12$</td><td>0,087</td><td rowspan="2">$\left.\begin{matrix}8,7\\2,9\end{matrix}\right\}11,6$</td><td rowspan="2">0,16</td><td rowspan="2">0,014</td></tr>
<tr><td>8</td><td>136–142</td><td>0,029</td></tr>
<tr><td></td><td>Σ</td><td>100</td><td>0,990</td><td>99,0</td><td>–</td><td>$\chi^2 = 2,27$</td></tr>
</table>