Лекція 4

ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

4.1. Принцип практичної впевненості

Принцип практичної впевненості: якщо ймовірність події A в даному випробуванні дуже мала, то при однократному виконанні випробування можна бути впевненим у тому, що подія A не відбудеться, і в практичній діяльності вести себе так, начебто подія A взагалі неможлива. Цей принцип підтверджується всім практичним досвідом людської діяльності. При багатократному повторенні випробувань ми вже не можемо вважати малоймовірну подію A практично неймовірною.

4.2. Статистична гіпотеза і загальна схема її перевірки

Статистичною гіпотезою називається будь-яке припущення про вигляд або параметри невідомого закону розподілу.

Розрізняють просту і складну статистичні гіпотези. Проста гіпотеза, на відміну від складної, повністю визначає теоретичну функцію розподілу випадкової величини. Наприклад, гіпотези «ймовірність появи події у схемі Бернуллі дорівнює 1/2», «закон розподілу випадкової величини нормальний з параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$» є простими, а гіпотези «ймовірність появи події у схемі Бернуллі знаходиться між 0,3 і 0,6», «закон розподілу не є нормальним» — складними.

Гіпотезу, яка перевіряється, зазвичай називають **нульовою** (або основною) і позначають H_0. Разом з нульовою гіпотезою H_0 розглядають **альтернативну**, або конкуруючу, гіпотезу H_1, яка є логічним запереченням H_0. Нульова та альтернативна гіпотези представляють собою дві можливості вибору, який здійснюється в задачах перевірки статистичних гіпотез.

Суть перевірки статистичної гіпотези полягає у тому, що використовується спеціально складена вибіркова функція (**статистика**) $\tilde{\theta}_n\left(x_1,...,x_n\right)$, отримана по вибірці $x_1,x_2,...,x_n$, точний або приблизний розподіл якої відомий.

Залежно від виду перевіпюваної гіпотези, використовують спеціально розроблені критерії, серед яких найчастіше застосовують t-критерій нормального розподілу, t-критерій розподілу Стьюдента, F-критерій Фішера-Снедекора, критерій χ^2 Пірсона, критерій Колмогорова $\left(\lambda\right)$, критерій Вілкоксона тощо.

По вибірковому розподілу визначається **критичне значення** $\theta_{кр.}$ — таке що, якщо гіпотеза H_0 вірна, то ймовірність $P(\tilde{\theta}_n>\theta_{кр})=\alpha$ мала. Таким чином, у відповідності до принципа практичної впевненості в умовах даного дослідження подію $\tilde{\theta}_n>\theta_{кр}$ можна (з певним ризиком) вважати практично неможливою. Тому, якщо в даному конкретному випадку має місце нерівність $\tilde{\theta}_n>\theta_{кр}$, то гіпотеза H_0 відкидається, в той час як поява події $\tilde{\theta}_n\le\theta_{кр}$ вважається сумісною з гіпотезою H_0. В цьому випадку гіпотеза H_0 приймається (точніше, не відкидається).

Правило, за яким гіпотеза H_0 відкидається або приймається, називається **статистичним критерієм** або **статистичним тестом**.

Таким чином, множина можливих значень статистики критерію (**критичної статистики**) $\tilde{\theta}_n$ розбивається на дві підмножини, які не перетинаються: **критичну область** (область відкидання гіпотези) W і область допустимих значень (область прийняття гіпотези) $\overline{W}$. Якщо значення статистики критерію $\tilde{\theta}_n$, яке фактично спостерігається, потрапляє в критичну область W, то гіпотезу H_0 відкидають. При цьому можливі чотири випадки (табл. 6.1).

Таблиця 4.1

Гіпотеза H_0	**Приймається**	**Відкидається**
Вірна	Правильне рішення	Помилка 1-го роду
Невірна	Помилка 2-го роду	Правильне рішення

Ймовірність α допустити помилку 1-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона вірна, називається **рівнем значущості,** або **розміром критерію.** Ймовірність $(1 - \alpha)$ не допустити помилку 1-го роду, тобто прийняти гіпотезу H_0, коли вона вірна, інколи називають **оперативною характеристикою критерію.**

Ймовірність допустити помилку 2-го роду, тобто прийняти гіпотезу H_0, коли вона невірна, зазвичай позначають β.

Ймовірність $(1 - \beta)$ не допустити помилку 2-го роду, тобто відкинути гіпотезу H_0, коли вона невірна, називається **потужністю** (або **функцією потужності) критерію.**

Ймовірності помилок 1-го і 2-го роду (α і β) однозначно визначаються вибором **критичної області**. Бажано зробити як завгодно малими α і β. Проте це суперечливі вимоги: при фіксованому обсязі вибірки можна зробити як завгодно малою лише одну із величин — або α, або β. Це пов'язано з неминучим зростанням іншої. Лише за рахунок збільшення обсягу вибірки можливе о д н о ч а с н е зменшення ймовірностей α і β.

Припустимо, що використана для перевірки (тестування) нульової гіпотези H_0 статистика критерію $\tilde{\theta}_n$ має нормальний закон розподілу $N(a_0;\sigma^2)$. В якості критичної області, яка відповідає рівню значущості α = 0,05, можна взяти множину областей — таких, що площа відповідних їм криволінійних трапецій дорівнюватиме 5/100 від загальної площі під кривою розподілу. Наприклад (рис. 4.1): [I] — область великих додатних відхилень (при $\tilde{\theta}_n > \theta_{\text{кр.1}}$); [II] — область великих від'ємних відхилень (при $\tilde{\theta}_n < \theta_{\text{кр.2}}$); [III] — область великих за абсолютною величиною відхилень (при $\tilde{\theta}_n < \theta'_{\text{кр.3}}$, $\tilde{\theta}_n > \tilde{\theta}''_{\text{кр.3}}$); [IV] — область малих за абсолютною величиною відхилень (при $\theta'_{\text{кр.4}} < \tilde{\theta}_n < \theta''_{\text{кр.4}}$) і т.д.

Якій із цих областей віддати перевагу в якості критичної? Нехай із гіпотезою H_0, яка перевіряється, конкурує інша, альтернативна, гіпотеза H_1, при якій розподіл статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ нормальний: $N(a_1;\sigma^2)$, де $a_1 > a_0$ (рис. 6.2). Очевидно, варто віддати перевагу тій критичній області, при якій потужність критерію буде найбільшою. Якщо, наприклад, критична область типу [I], то у випадку $\tilde{\theta}_n > \theta_{\text{кр.1}}$ гіпотеза H_0 приймається. Але у цьому випадку може бути вірна конкуруюча гіпотеза

H_1 із ймовірністю помилки 2-го роду β. Ймовірність β інтерпретується площею під кривою розподілу $\varphi_1(\tilde{\theta}_n)$ зліва $\theta_{кр.1}$, а потужність критерію (1 - β) — площею P_I справа $\theta_{кр.1}$. Аналогічно P_{II}, P_{III}, P_{IV} інтерпретують потужність критерію при критичних областях відповідно II, III і IV типів (на рис. 4.2 площі $P_I - P_{IV}$ заштриховані). Очевидно, що в даному випадку є сенс вибрати в якості критичної область [I], тобто правосторонню критичну область, оскільки такий вибір гарантує максимальну потужність критерію.

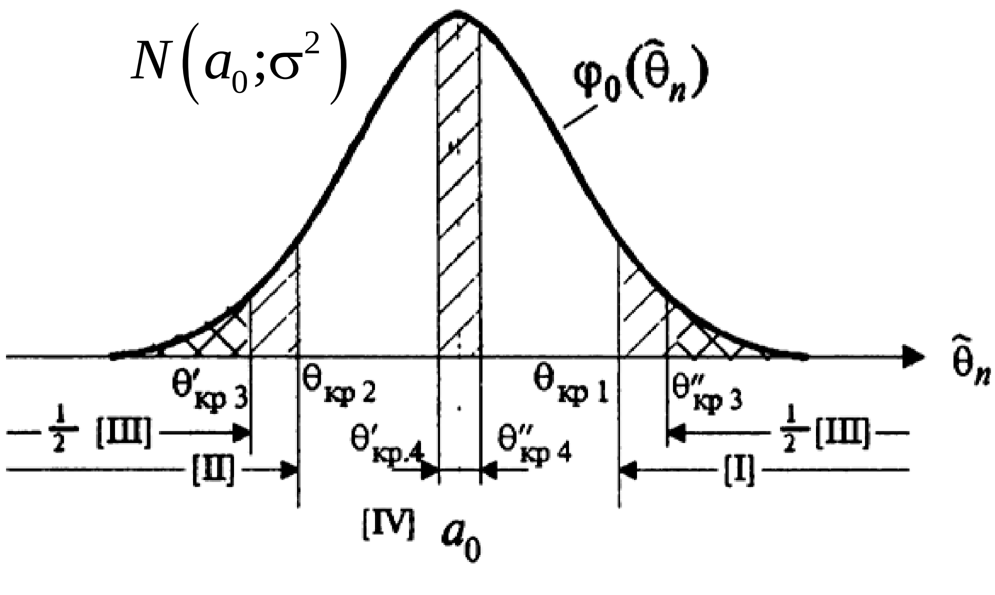


Рис. 4.1. Вибір критичної області для H_0.

Вимоги до критичної області аналітично можна записати так:

$$\begin{aligned} &P(\tilde{\theta}_n \in W / H_0) = \alpha \\ &P(\tilde{\theta}_n \in W / H_1) = max \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Тобто, критичну область *W* варто обирати так, щоб ймовірність потрапляння в неї статистики критерію $\tilde{\theta}_n$ була мінімальною і дорівнювала α,

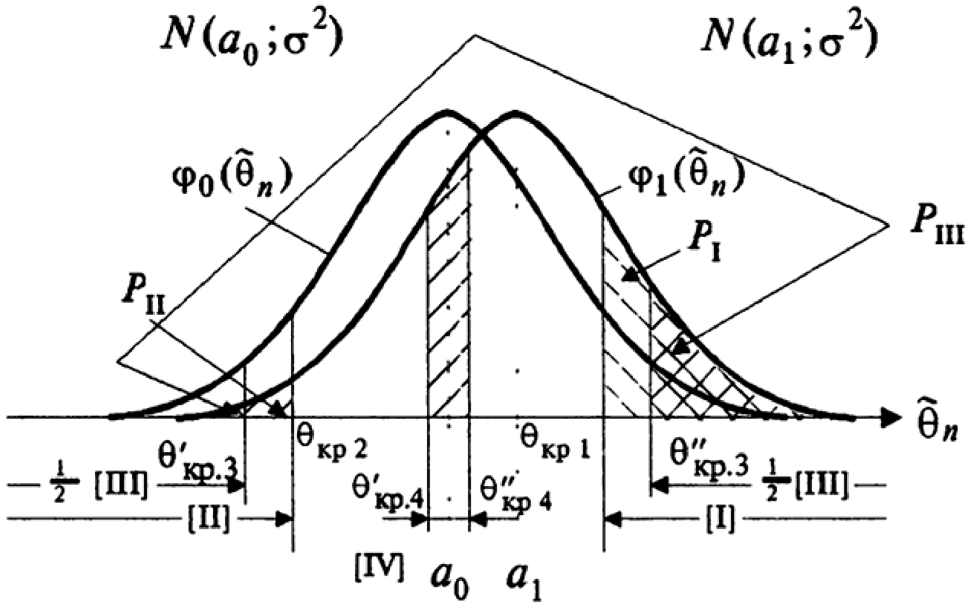


Рис. 4.2. Вибір критичної області для H_1

якщо нульова гіпотеза H_0 вірна, і максимальною в протилежному випадку. Критична область повинна бути такою, щоб при заданому рівні значущості α потужність критерію $(1-\beta)$ була максимальною. Задача побудови такої критичної області *W* для простих гіпотез розв'язується за допомогою наступної теореми.

Теорема (лема) Неймана-Пірсона

Серед усіх критеріїв заданого рівня значущості α, які перевіряють просту гіпотезу H_0 проти альтернативної гіпотези H_1, критерій відношення правдоподібності є найбільш потужним.

Доведення. Якщо вірна проста гіпотеза H_0, то щільність ймовірностей $\varphi(x)$ визначається однозначно, і функція правдоподібності $L_0(x)$, яка виражає щільність ймовірностей сумісної появи результатів вибірки

$(x_1, x_2, ..., x_n)$, має вигляд: $L_0\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \varphi_0(x_1)\varphi_0(x_2)...\varphi_0(x_n)$. Аналогічно, якщо вірна проста гіпотеза H_1, то функція правдоподібності $L_1(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)...\varphi_1(x_n)$. В теоремі Неймана-Пірсона розглядається відношення правдоподібності L_1 / L_0 (при $L_0 \neq 0$); чим правдоподібніша вибірка в умовах гіпотези H_1, тим більше відношення L_1 / L_0 або його логарифм $ln(L_1 / L_0)$. А критерій цього відношення, виходячи із теореми, і є найбільш потужним серед інших можливих критеріїв. Використовуючи даний критерій, можна знайти таку константу C (або $ln C = c$), що

$$P\left(\frac{L_1(x_1, x_2, ..., x_n)}{L_0(x_1, x_2, ..., x_n)} > C \right) = P\left(ln \frac{L_1(x_1, x_2, ..., x_n)}{L_0(x_1, x_2, ..., x_n)} > c \right) = \alpha .$$

За допомогою отриманої константи C (або c) визначається критична область W критерію та його потужність.

Приклад 4.1. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу $N(a_0 ; \sigma^2)$, де $a_0 = M\left(X\right)$ не відомо, а σ^2=*D(X)* відомо. Побудувати найбільш потужний критерій перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ проти альтернативної H_1: $a = a_1 > a_0$. Знайти: а) потужність критерію; б) мінімальний обсяг вибірки, який забезпечує заданий рівень значущості α і потужність критерію $(1-\beta)$.

Розв'язання. Якщо гіпотеза H_0 вірна, тобто $X \to N(a_0 ; \sigma^2)$, то функція правдоподібності має вигляд:

$$L_0(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Аналогічно, якщо вірна гіпотеза H_1, тобто $X\to N(a_1;\sigma^2)$, то

$$L_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}}.$$

Відповідно до теореми Неймана-Пірсона найбільш потужний критерій базується на відношенні правдоподібності L_1/L_0. Знайдемо його логарифм; отримаємо: $ln(L_1/L_0)=-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_1)^2}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_0)^2}{2\sigma^2}=$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(2x_i(a_1-a_0)-(a_1^2-a_0^2)\Big)=\frac{1}{2\sigma^2}(a_1-a_0)\sum_{i=1}^{n}(2x_i-a_1-a_0)=$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}(a_1-a_0)(2\overline{x}-a_1-a_0)n,\ \text{бо}\ \overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n.$$

Для побудови критерію знайдемо таку константу *C* (або *ln C* = *c*), що

$$P\left(\frac{L_1}{L_0}>C\right)=P\left(ln\frac{L_1}{L_0}>c\right)=\alpha.$$

Отриманий вираз для рівня значущості α можна замінити на рівносильний (враховуючи монотонність функції $ln(L_1/L_0)$ відносно $\overline{x}$): $P(\overline{x}>c')=\alpha$. Для визначення c' варто врахувати, що якщо випадкова величина X розподілена нормально, тобто $X\to N(a_0;\sigma^2)$, то її середнє $\overline{x}$ також розподілене нормально з параметрами a_0 і σ^2/n, тобто

$\overline{x} \sim N(a_0; \sigma^2 / n)$. Використовуючи вираз функції розподілу нормального закону через функцію Лапласа, отримаємо

$$P(\overline{x} > c') = 1 - P(\overline{x} \le c') = 1 - \left[\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) = \alpha, \quad \text{звідки } \Phi\left(\frac{c' - a_0}{\sigma} \sqrt{n} \right) = 1 - 2\alpha \text{ або}$$

$\dfrac{c' - a_0}{\sigma} \sqrt{n} = t_{1-2\alpha}$, і значення c', яке визначає границю критичної області W : $c' = a_0 + t_{1-2\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Отже, найбільш потужним критерієм перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ проти альтернативної H_1: $a = a_1 > a_0$ є наступний: гіпотеза H_0 відкидається, якщо $\overline{x} > a_0 + t_{1-2\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$; H_0 не відкидається, якщо $\overline{x} \le a_0 + t_{1-2\alpha} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

а) Для знаходження потужності критерію визначимо спочатку ймовірність β допустити помилку 2-го роду — прийняти гіпотезу H_0 коли вона не вірна, а вірна альтернативна гіпотеза H_1, тобто $X \sim N(a_1; \sigma^2)$ або $\overline{x} \sim N(a_1; \sigma^2 / n)$:

$$\beta = P\left(\overline{x} \le a_0 + t_{1-2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{a_0 + t_{1-2\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - a_1}{\sigma} \sqrt{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a_1 - a_0}{\sigma} \sqrt{n} - t_{1-2\alpha} \right).$$

Таким чином, потужність критерію: $1-\beta=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{a_1-a_0}{\sigma}\sqrt{n}-t_{1-2\alpha}\right).$

б) При заданих ймовірностях помилок 1-го і 2-го роду α і β із виразу для β не важко знайти відповідний обсяг вибірки за формулою:

$$n=\frac{\left(t_{1-2\alpha}+t_{1-2\beta}\right)^2\sigma^2}{\left(a_1-a_0\right)^2}.\blacktriangleright$$

В залежності від вигляду конкуруючої гіпотези H_1 вибирають правосторонню, лівосторонню або двосторонню критичну область. Так, в розглянутому прикладі ми впевнились, що при конкуруючій гіпотезі H_1: $a_1>a_0$, варто було використовувати правосторонню критичну область [I] (рис. 4.1, 4.2). Аналогічно, можна показати, що у випадку H_1: $a_1<a_0$ варто використовувати лівосторонню критичну область [II], а при гіпотезі $H_1: a_1\neq a_0$ — двосторонню критичну область [III].

Принцип перевірки статистичної гіпотези не дає логічного доведення її вірності або невірності. Прийняття гіпотези H_0 варто розцінювати не як раз і назавжди визначений, абсолютно вірний факт, а лише як достатньо правдоподібне твердження, яке не суперечить життєвому досвіду.

В описаній вище схемі перевірка гіпотез базується на припущенні про відомий закон розподілу генеральної сукупності, із якого випливає певний розподіл критерію. Критерії перевірки таких гіпотез називаються **параметричними.** Якщо закон розподілу генеральної сукупності невідомий, то відповідні критерії називаються **непараметричними.**

За своїм прикладним змістом статистичні гіпотези можна поділити на декілька основних типів:

- про рівність числових характеристик генеральних сукупностей;
- про числові значення параметрів;
- про закон розподілу;
- про однорідність вибірок (тобто належності їх одній і тій же генеральній сукупності);
- про стохастичну незалежність елементів вибірки.

Розглянемо лише ті, що найчастіше зустрічаються в ІТ технологіях.

Схема перевірки статистичних гіпотез.

1. Формулюються нульова H_0 і альтернативна H_1 гіпотези.
2. Вибирається рівень значущості α .
3. Вибирається статистика критерію $\tilde{\theta}_n$ для перевірки гіпотези H_0.
4. Визначається критична область і область прийняття гіпотези.
5. Формулюються правила перевірки гіпотези.
6. Приймається рішення: якщо $\tilde{\theta}_n \in W_0$, то гіпотеза H_0 приймається при заданій альтернативній, якщо $\tilde{\theta}_n \in W_{кр}$, H_0 - відхиляється.

4.3. Перевірка гіпотез

4.3.1. Перевірка гіпотези про значення генеральної середньої нормально розподіленої сукупності при відомій генеральній дисперсії

Якщо зі значень нормально розподіленої випадкової величини відняти її середню арифметичну і результат розділити на середнє квадратичне відхилення, то отримаємо нормовану випадкову величину $Z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ і $Z \to N(0;1);\ M(x) = a$.

Нехай справедлива нульова гіпотеза $H_0 : \overline{x}_B = a_0$. Оскільки $\sigma\left(\overline{x}_0\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

то розглянемо випадкову величину $Z = \frac{\overline{x}_B - a}{\sigma}\sqrt{n}$. При великому обсязі вибірки $Z \to N\left(0;1\right)$.

Критична область будується в залежності від альтернативної гіпотези:

1) $H_1 : \overline{x}_B \neq a_0$ - будується двостороння критична область.
2) $H_1 : \overline{x}_B = a_1 > a_0$ - будується правостороння критична область.
3) $H_1 : \overline{x}_B = a_1 < a_0$ - будується лівостороння критична область.

Нехай рівень значущості $\alpha = 0,05$. Обчислюємо спостережені значення критеріїв за формулою $Z_{спост} = \frac{\overline{x}_B - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$, де σ - відоме. Тоді,

1) Межі $\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}$ відокремлюють двосторонню критичну область від області прийняття гіпотези H_0. Критичні точки знаходимо за таблицею значень функції Лапласа за формулою

   $$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

   При $\alpha = 0,05$:

   $$Z_{\frac{\alpha}{2}} = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5 - 0,025\right) = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,475\right).$$

   За таблицею значень функції Лапласа за значенням 0,475 знаходимо значення аргумента $Z_{кр} = Z_{0,025} = 1,96$.

2) Межа $Z_{кр}$ відокремлює критичну область від області прийняття гіпотези H_0. Критична точка

$Z_{кр} = Z_{\alpha} = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5-\alpha\right) = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5-0,05\right) = \Phi_0^{-1} \cdot \left(0,45\right)$ і за таблицею значень функції Лапласа за значенням 0,45 знаходимо значення аргумента $Z_{кр} = Z_{0,05} = 1,645$.

3) Межа $Z_{кр}$ відокремлює критичну область від області прийняття гіпотези H_0. Критична точка

$$-Z_{кр} = -Z_{\alpha} = -\Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5-\alpha\right) = -\Phi_0^{-1} \cdot \left(0,5-0,05\right) = -\Phi_0^{-1} \cdot \left(0,45\right)$$

 і за таблицею значень функції Лапласа за значенням 0,45 знаходимо значення аргумента $-Z_{0,05} = -1,645$.

Підставляючи у формулу $Z_{спост} = \dfrac{\overline{x}_B - a_0}{\sigma}\sqrt{n}$ значення a ,σ і n , що задані в задачі, а також $\overline{x}_B$ обчислене за даними вибірки, обчислюємо значення $Z_{спост}$.

Правило прийняття рішення: гіпотеза H_0 відхиляється:

1. якщо $\left|Z_{спост}\right| \geq Z_{кр,\frac{\alpha}{2}}$;
2. якщо $Z_{спост} \geq Z_{кр,\alpha}$;
3. якщо $Z_{спост} \leq -Z_{кр,\alpha}$.

Потужність критерію:

1. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B = a_1 > a_0$ (правостороння критична область), то ймовірність помилки другого роду:

$$\beta = 0,5 - \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$, а потужність критерію

$$1 - \beta = 0,5 + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right).$$

2. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B = a_1 < a_0$ (лівостороння критична область), то потужність критерію

$$1-\beta = 0{,}5 + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right).$$

3. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B = a_1;\ a_1 \neq a_0$ (двостороння критична область), то потужність критерію

$$1-\beta = 0{,}5 + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right) + 0{,}5 + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right) =$$
$$= 1 + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right) + \Phi\left(z_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right).$$

Приклад 4.2. За паспортними даними автомобільного двигуна витрачається 8,2 л палива на 100 км пробігу. Конструкцію двигуна удосконалили і сподіваються на зменшення витрат палива. Для перевірки проводиться випробування 25 випадково відібраних автомобілей на яких встановлено вдосконалений двигун. Обчислене середнє вибіркове витрат палива $\overline{x}_B = 7{,}6$ л. Припустимо, що вибірка витрат пального одержана із нормально розподіленої генеральної сукупності із середнім a і дисперсією $\sigma^2 = 3{,}7\ л^2$. 1) Користуючись критерієм значущості, перевірити гіпотезу «вдосконалення не вплинуло на витрати палива». 2) Який мінімальний обсяг вибірки потрібно зробити, щоб при перевірці гіпотези $H_0 : a = 8{,}2$ л проти альтернативної $H_1 : a = 7{,}6$ л помилка першого роду $\alpha = 0{,}01$, а помилка другого роду не перевищувала 0,1? Знайти критичну область для цього випадку.

Розв'язання. 1) За схемою перевірки гіпотези:

1. $H_0 : a = 8{,}2; \quad H_1 : a < 8{,}2.$
2. $\alpha = 0{,}05;\ n = 25$.

3. В якості статистики критерію використаємо оцінку математичного сподівання – вибіркове середнє $\overline{x}_B = 7,6$.
4. Оскільки вибірку одержали з нормально розподіленої генеральної сукупності, то $\overline{x}_B$ також має нормальний розподіл із дисперсією $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{3,7}{25}$. Нормована статистика критерію $Z = \frac{\overline{x}_B - 8,2}{\sqrt{3,7}}\sqrt{25} = \frac{\overline{x}_B - 8,2}{0,385}$ має розподіл $N(0;1)$.
5. Альтернативна гіпотеза $H_1 : a < 8,2$ передбачає зменьшення витрат пального, тому маємо лівосторонню критичну область. Знаходимо відповідну межу:
   $-Z_{кр} = -Z_\alpha = -\Phi_0^{-1} \cdot (0,5 - 0,05) = -\Phi_0^{-1} \cdot (0,45) = -1,645$.
   Тоді критична область: $(-\infty; -1,645)$. Область прийняття гіпотези $H_0 : [-1,645; \infty)$.
6. За вибірковими даними знаходимо $Z_{спост} = \frac{7,6 - 8,2}{0,385} = -1,558$.
   Оскільки $Z_{спост} = -1,558 > z_{кр,0,05} = -1,645$, то гіпотеза H_0 приймається.

Висновок: вдосконалення двигуна не вплинуло на витрати палива. Цей висновок може бути неправильним менш ніж у 5% всіх випадків.

2) Оскільки в альтернативній гіпотезі пропонується менше значення параметра a, то критична область визначається нерівністю $\overline{x}_B < x_к$.

За умовою:

$$\begin{cases} P\left(\bar{x}_B < x_к \middle| H_0 : a = 8,2\right) = \Phi\left(\dfrac{x_{кр} - 8,2}{\sqrt{3,7/n}}\right) = 0,01 \\ P\left(\bar{x}_B \geq x_к \middle| H_1 : a = 7,6\right) = 0,5 - \Phi\left(\dfrac{x_{кр} - 7,6}{\sqrt{3,7/n}}\right) \leq 0,1 \end{cases}.$$

Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{x_к - 8,2}{1,92}\sqrt{n} = -z_{0,01} = -2,325 \\ \dfrac{x_к - 7,6}{1,92}\sqrt{n} \geq z_{0,5-0,1} = z_{0,4} = 1,284 \end{cases}.$$

Із першої рівності виражаємо $x_к = \dfrac{8,2\sqrt{n} - 2,325 \cdot 1,92}{\sqrt{n}}$.

Підставимо це значення в другу нерівність:

$$\frac{8,2\sqrt{n} - 2,325 \cdot 1,92}{\sqrt{n}}\sqrt{n} - 7,6\sqrt{n} \geq 0,254 \cdot 1,92$$

$\sqrt{n} \geq \dfrac{4,952}{0,6} = 8,25;\quad n \geq 68,1$. Отже, мінімальний обсяг вибірки $n = 69$ автомобілей з удосконаленим двигуном. Підставивши мінімальне значення в формулу для $x_к$ отримаємо критичну область:

$x_к = \dfrac{8,2 \cdot 8,25 - 2,325 \cdot 1,92}{8,25} \approx 7,66$. Отже, критична область визначається нерівністю $\bar{x}_B < 7,66$.

4.3.2. Перевірка гіпотези про значення генеральної середньої нормально розподіленої генеральної сукупності при невідомій генеральній дисперсії

Нехай деяка генеральна сукупність має нормальний розподіл: $X \to N\left(a,\sigma^2\right)$. Параметри a,σ^2 невідомі. За результатами випадкової вибірки обсягу n отримали точкові оцінки невідомих параметрів $\overline{x}_B, s^2$.

Перевіримо гіпотезу $H_0 : a = a_0$.

В якості критерію перевірки нульової гіпотези візьмемо випадкову величину $T = \dfrac{\overline{x}_B - a_0}{s}\sqrt{n-1}$. Якщо гіпотеза справедлива, то випадкова величина T має розподіл Стьюдента із n-1 ступенями свободи.

Правило перевірки гіпотези $H_0 : a = a_0$.

1) $H_0 : \overline{x}_B = a_0$;

$$H_1 : \left[\begin{array}{ll} \overline{x}_B \neq a_0 & (1) \\ \overline{x}_B = a_1 > a_0 & (2) \\ \overline{x}_B = a_1 < a_0 & (3) \end{array}\right.$$

2) Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$.

3) Критерій $T = \dfrac{\overline{x}_B - a_0}{s}\sqrt{n-1}$, σ - невідоме. Якщо обсяг вибірки достатньо великий, то $\sigma = s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}$.

4) Критичні точки залежать від α:
   1. Межі $\pm t_{кр(\alpha,n-1)}$ визначаються за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числом n-1 ступенів свободи.

2. Межа $t_{кр(\alpha,n-1)}$ визначаються за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числом n-1 ступенів свободи в рядку, який розміщено у нижньому рядку таблиці. Ця межа відокремлює правосторонню критичну область.
3. Межа $-t_{кр(\alpha,n-1)}$ відокремлює лівосторонню критичну область Спочатку визначають $t_{кр(\alpha,n-1)}$, а потім змінюють знак на протилежний.

5) **Правило прийняття рішення**: гіпотеза H_0 відхиляється:

1. якщо $\left|T_{спост}\right| \geq t_{кр}$;
2. якщо $T_{спост} \geq t_{кр,\alpha}$ $(правостороння)$;
3. якщо $T_{спост} \leq -t_{кр}$ $(лівостороння)$.

6) **Потужності критерію**:

1. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B = a_1 > a_0$ (правостороння критична область), то ймовірність помилки другого роду:

$\beta = 0{,}5 - \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma} \sqrt{n-1} \right)$, а потужність критерію

$1 - \beta = 0{,}5 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma} \sqrt{n-1} \right)$.

2. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B \neq a_1, a_1 < a_0$ (лівостороння критична область), то потужність критерію

$1 - \beta = 0{,}5 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma} \sqrt{n-1} \right)$.

3. Якщо $H_0 : \overline{x}_B = a_0$, а $H_1 : \overline{x}_B = a_1;\ a_1 \neq a_0$ (двостороння критична область), то потужність критерію

$$1-\beta = 0,5 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n-1}\right) + 0,5 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n-1}\right) =$$
$$= 1 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n-1}\right) + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_1 - a_0}{\sigma}\sqrt{n-1}\right)$$

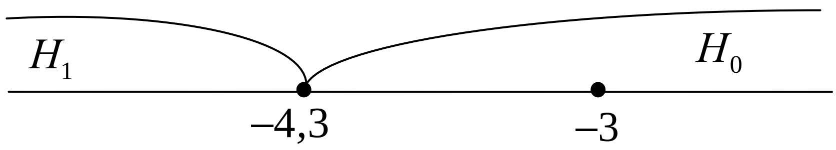
Приклад 4.3. У молочному відділі супермаркету проведене контрольне зважування десяти 200-грамових пачок сиру і одержано, що $\overline{x}_B = 196$ г і $s = 4$ г. Менеджер відділу висуває припущення про несумлінність постачальника. Перевірити справедливість цієї гіпотези на рівні значущості $\alpha = 0{,}001$. Обчислити потужність критерію при $\overline{x}_B = 195$г.

Розв'язання. За умовою: $n = 10$, $\overline{x}_B = 196$, $s = 4$, σ - невідоме.

За схемою перевірки гіпотези:

1) $H_0 : \overline{x}_B = a_0 = 200$г (немає порушень);

   $H_1 : \overline{x}_B < 200$(лівостороння критична область)
2) Рівень значущості $\alpha = 0{,}001$.
3) Критерій для перевірки нульової гіпотези $T = \dfrac{\overline{x}_B - a}{s}\sqrt{n-1}$.
4) За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за рівнем значущості $\alpha = 0{,}001$, який розміщено у нижньому рядку таблиці, число ступенів свободи 9, знаходимо $t_{кр(0,001,9)} = 4{,}30$.Оскільки критична область лівостороння, то $-t_{кр(0,001,9)} = -4{,}30$.



5) За критерієм T визначаємо $T_{спост} = -3 > t_{кр} = -4,3$. Це означає, що причин для відхилення нульової гіпотези немає.

6) Обчислимо потужність критерію при $\overline{x}_B = 195$. За формулою

$$1-\beta = 0,5 + \Phi\left(t_{кр} - \frac{a_0 - a_1}{\sigma}\sqrt{n-1} \right)$$ маємо:

$$1-\beta = 0,5 + \Phi\left(-4,3 - \frac{195-200}{4}\sqrt{9} \right) = 0,5 + \Phi(-0,55) =$$

$$= 0,5 - 9,2088 = 0,29$$.