

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	2
1 Введение.....	3
2 Математическая модель геоцентрического движения космического аппарата	4
2.1 Постановка задачи	4
2.2 Математическая модель задачи.....	5
2.3 Применение принципа максимума для решения задачи об оптимизации геоцентрического движения космического аппарата	7
2.4 Методика решения краевой задачи модифицированным методом Ньютона	12
2.5 Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений, применяемый в решении поставленной задачи	15
3 Программная реализация моделирования геоцентрического движения космического аппарата	17
3.1 Описание программного комплекса	17
3.1.1 Назначение и состав программного комплекса	17
3.1.2 Описание основных блоков программы	18
3.2 Руководство по работе с программным комплексом	19
3.2.1 Вкладка «Интегрирование».....	22
3.2.2 Вкладка «Результаты»	23
3.3 Моделирование геоцентрического движения КА	25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

АБ – аккумуляторная батарея

АМС – автоматическая межпланетная станция

ГСО – геостационарная орбита

ДЗЗ – дистанционное зондирование Земли

ДУ – двигательная установка

КА – космический аппарат

КПД – коэффициент полезного действия

СБ – солнечная батарея

СОСБ – система ориентации солнечной батареи

СПД – стационарный плазменный двигатель

ТХ – технические характеристики

ТЭМ – транспортно-энергетический модуль

ФЭП – фотоэлектронный преобразователь

ЭРД – электрореактивный двигатель

ЯЭУ – ядерная энергетическая установка

1 Введение

Одним из значительных направлений в области космического машиностроения является создание космических аппаратов с двигателями малой тяги. Такие аппараты играют важную роль в исследовании космоса и расширении наших знаний о космическом пространстве.

Важность продолжения развития аппаратов с малой тягой заключается в их универсальности и доступности. Такие космические аппараты могут использоваться для различных целей, начиная от исследования космического пространства до выполнения задач в области обеспечения связи, картографии и мониторинга Земли. Они обеспечивают эффективные и долговечные способы передвижения в космосе, что позволяет нам достигать отдалённых точек космического пространства.

Кроме того, аппараты с малой тягой становятся ключевыми элементами в разработке малых космических аппаратов и кубсатов, что открывает новые горизонты для научных исследований, обеспечивая доступ к космосу для более широкого круга исследователей и компаний. Продолжение исследований и разработок в области космических аппаратов с малой тягой имеет стратегическое значение для научного и технологического прогресса в области космической деятельности.

Целью работы было создание программного комплекса, позволяющего моделировать геоцентрические компланарные перелёты для космических аппаратов с двигателем малой тяги. Важно отметить, что в программном комплексе также планировалось реализовать метод оптимизации начальных параметров для рассчитываемого перелёта. При дальнейшей модификации такого программного комплекса, его можно будет использовать для расчёта перелётов проектирующихся или существующих космических аппаратов с малой тягой.

2 Математическая модель геоцентрического движения космического аппарата

2.1 Постановка задачи

Рассматривается геоцентрический перелёт. Будем предполагать, что космический аппарат совершает перелёт с низкой круговой орбиты на эллиптическую. При этом, рассматривается плоская задача, т.е. стартовая и целевая орбиты компланарны.

Будем рассматривать задачу об оптимальном по расходу рабочего тела движении КА

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = opt \\ \delta(t) = opt \\ T = fixe \\ m \rightarrow min \end{cases}, \quad (2.1)$$

где $\lambda_1(t)$ – угол между проекцией вектора тяги на мгновенную плоскость орбиты и радиус-вектором гравитационный центр – КА;

$\delta(t)$ – функция включения/выключения двигателя;

T – длительность манёвра;

m – относительный расход рабочего тела.

В качестве фазовых координат выберем следующие параметры

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ V_r \\ V_\varphi \\ m \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где r – текущее расстояние от КА до притягивающего центра;

φ – текущая угловая дальность КА;

V_r – проекция скорости КА на радиус вектор;

V_φ – проекция скорости КА на трансверсальное направление.

На задачу накладываются следующие ограничения:

- 1) Рассматривается плоская задача;

2) Величина тяги двигателей является постоянной величиной, двигатель может только включаться и выключаться.

2.2 Математическая модель задачи

Для описания планетоцентрического движения КА с солнечной или ядерной энергоустановкой и для КА с солнечным парусом в рамках задачи двух тел без учёта возмущений использовалась плоская полярная система координат (Рисунок 2.1)

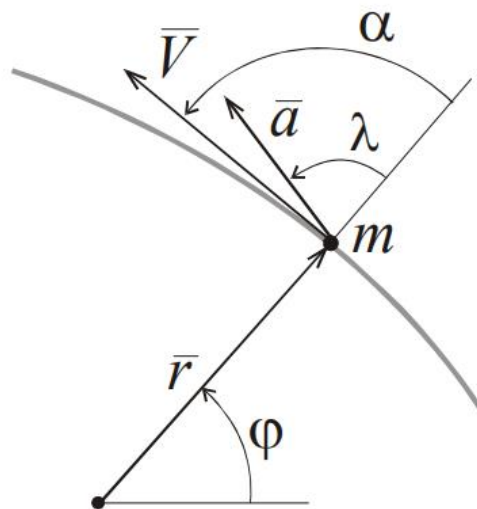


Рисунок 2.1 – Плоская полярная система координат

Движение КА с двигательной установкой малой тяги описывается системой дифференциальных уравнений в поле притяжения материальной точки под действием постоянной тяги двигателей с включениями - выключениями двигательной установки.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = V_r \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_\varphi}{r} \\ \frac{dV_r}{dt} = \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \cos \lambda \cdot a \\ \frac{dV_\varphi}{dt} = -\frac{V_r \cdot V_\varphi}{r} + \sin \lambda \cdot a \\ \frac{dm}{dt} = \beta \end{array} \right. \quad (2.3)$$

В приведённой системе компоненты скорости и координаты аппарата – безразмерные и отнесены к круговой скорости, центростремительному ускорению и радиусу характерной геоцентрической орбиты. Распишем формулы получения безразмерных фазовых координат.

$$r = r^* \frac{1}{r_0}; V_r = \frac{V_r^*}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}}; V_\varphi = \frac{V_\varphi^*}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}}; t = t^* \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}; a = a^* \frac{r_0^2}{\mu}; c = \frac{c^*}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}}, \quad (2.4)$$

где $r^*, V_r^*, V_\varphi^*, t^*, a^*$ – размерные величины;

r_0 – радиус характерной круговой геоцентрической орбиты;

$\mu = 3,24859 \cdot 10^5 \text{ км}^3 \text{с}^{-2}$ – гравитационный параметр Земли.

Величина управляющего ускорения a и относительный секундный расход рабочего тела β описывается по следующим зависимостям:

- для КА с солнечным парусом

$$a = P_a \frac{S}{M} \delta \cdot \chi(\bar{x}) \cos^2 \vartheta, \quad \beta \equiv 0, \quad (2.5)$$

- для КА с солнечной энергоустановкой

$$a = \frac{a_0}{1 - m} \delta \cdot \chi(\bar{x}), \quad \beta = \frac{a_0 \delta}{c_0} \chi(\bar{x}), \quad (2.6)$$

- для КА с ядерной энергоустановкой

$$a = \frac{a_0}{1 - m} \delta, \quad \beta = \frac{a_0 \delta}{c_0}, \quad (2.7)$$

где a_0 – номинальное управляющее ускорение;

δ – функция включения-выключения двигателей (0 – двигатель выключен, 1 – включён);

c_0 – номинальная скорость истечения рабочего тела;

S – площадь паруса;

M – масса КА;

P_a – сила светового давления на один квадратный метр поверхности паруса на орбите Земли.

2.3 Применение принципа максимума для решения задачи об оптимизации геоцентрического движения космического аппарата

В рамках выбранной нами модели движения КА (формулы 2.3-2.4, 2.7) рассматривается оптимальный по расходу рабочего тела перелёт между компланарными орбитами КА с двигателем малой тяги и конечной скоростью истечения рабочего тела. Вектор фазовых координат в этой задаче имеет вид $\bar{X} = (r, \varphi, V_r, V_\varphi, m)^T$

Соответственно, вектор сопряжённых множителей имеет следующий вид

$$\bar{P} = (P_r, P_\varphi, P_{V_r}, P_{V_\varphi}, P_m)^T \quad (2.8)$$

Распишем Гамильтониан

$$H = \left(\frac{d\bar{X}}{dt} \right)^T \cdot \bar{P} = P_r V_r + P_\varphi \frac{V_\varphi}{r} + P_{V_r} \left(\frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{1}{r^2} + \frac{a_0 \delta}{1-m} \cos \lambda \right) + P_{V_\varphi} \left(-\frac{V_r V_\varphi}{r} + \frac{a_0 \delta}{1-m} \sin \lambda \right) + P_m \left(\frac{a_0 \delta}{c_0} \right), \quad (2.9)$$

где δ – функция включения-выключения двигателей ($\delta = 0$ – двигатель выключен, $\delta = 1$ – номинальная тяга).

Из условия максимума Гамильтониана определяется оптимальное направление вектора ускорения $\lambda_{opt}(t)$

$$\sin \lambda_{opt} = \frac{P_{V_\varphi}}{\sqrt{P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2}}, \quad \cos \lambda_{opt} = \frac{P_{V_r}}{\sqrt{P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2}} \quad (2.10)$$

Функция включения-выключения двигателей δ определяется из условия максимума Гамильтониана

$$\delta = \begin{cases} 0, & \Delta < 0 \\ 1, & \Delta > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

где $\Delta = \frac{P_m}{c} + \frac{\sqrt{P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2}}{1-m}$ – функция определяющая включения-выключения двигательной установки.

Соответствующие сопряжённые уравнения для этой модели имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_r}{dt} = \frac{P_\varphi V_\varphi}{r^2} + P_{V_r} \left(\frac{V_\varphi^2}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - P_{V_\varphi} \frac{V_r V_\varphi}{r^2} \\ \frac{dP_\varphi}{dt} = 0 \Rightarrow P_\varphi(t) \equiv \text{const} \\ \frac{dP_{V_r}}{dt} = -P_r + P_{V_\varphi} \frac{V_\varphi}{r} \\ \frac{dP_{V_\varphi}}{dt} = \frac{P_{V_\varphi} V_r - 2P_{V_r} V_\varphi - P_\varphi}{r} \\ \frac{dP_m}{dt} = -\frac{a_0 \delta \sqrt{P_{V_r}^2 + P_{V_\varphi}^2}}{(1-m)^2} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Относительная масса израсходованного рабочего тела начальный момент времени ($t_0 = 0$). В конечный момент времени соответствующая сопряжённая переменная должна быть меньше нуля

$$m(t_0) = 0; \quad P_m(t_k) < 0.$$

Поскольку сопряжённая переменная $P_m(t)$ является невозрастающей функцией, то для удобства моделирования будем использовать нормировку $P_m(t_0) = -1$. Таким образом, граничные условия примут следующий вид

$$\bar{x}(t_0) = \left(\begin{array}{c} r_0 = 1 \\ \varphi_0 = 0 \\ V_{r_0} = 0 \\ V_{\varphi_0} = 1 \\ m(t_0) = 0 \\ P_\varphi \equiv 0 \\ P_{V_r} = B_0 \cdot \sin \lambda_0 \\ P_{V_\varphi} = B_0 \cdot \cos \lambda_0 \\ P_m(t_0) = -1 \\ e_0 = 0 \\ a_0 = r_0 \end{array} \right) \quad (2.13)$$

Из условия максимума Гамильтониана оптимальное управление определяется зависимостями (2.10, 2.11). Порядок краевой задачи равен трём

– подбираются начальные значения $B = \sqrt{P_{V_r}(t_0)^2 + P_{V_\varphi}(t_0)^2}$, $P_r(t_0)$,

$\lambda_0 = \arctg \frac{P_{Vr}(t_0)}{P_{V\varphi}(t_0)}$ так, чтобы выполнялись граничные условия выхода на целевую орбиту. То есть задача об оптимальном управлении сводится к трёхпараметрической краевой задаче:

$$\begin{cases} x_1 = B(t_0) \\ x_2 = P_r(t_0). \\ x_3 = \lambda(t_0) \end{cases} \quad (2.14)$$

Отметим, что так как мы имеем геоцентрический перелёт между круговой и эллиптической орбитами, параметры фазовых координат будут меняться быстро. Поэтому будем использовать оскулирующие элементы – большую полуось и эксцентриситет. В этом случае граничные условия на правом конце траектории должны обеспечивать выполнение условий:

$$a(t_k) = \frac{r^2 V_\varphi^2}{1 - (r V_\varphi^2 - 1)^2 - (r V_r V_\varphi)^2} = a_k, \quad (2.15)$$

$$e(t_k) = \sqrt{(r V_\varphi^2 - 1)^2 + (r V_r V_\varphi)^2} = e_k, \quad (2.16)$$

где t_k – время завершения перелёта (конечное время);

$a(t_k)$ и a_k – большая полуось орбиты, полученная при выполнении манёвра и требуемая;

$e(t_k)$ и e_k – эксцентриситет орбиты, полученный при выполнении манёвра и требуемый.

Формулы (2.15) и (2.16) определяют многообразие решений (множество S), заданное двумя условиями, зависящими от трёх переменных. Таким образом, для определения наилучшего положения КА на целевой эллиптической орбите необходимо записать одно условие трансверсальности, связывающее сопряжённые $P_r, P_{Vr}, P_{V\varphi}$ в момент времени завершения перелёта t_k .

Получим это условие. Множество S – одномерное, т.е. является кривой. Найдём направляющий вектор касательной к этой кривой, для чего

преобразуем условия (2.15) и (2.16) к удобному для определения производных виду:

$$f_1(r, V_r, V_\varphi) = r^2 V_\varphi^2 - a_k \left(1 - (r V_\varphi^2 - 1)^2 - (r V_r V_\varphi)^2 \right) = 0, \quad (2.17)$$

$$f_2(r, V_r, V_\varphi) = (r V_\varphi^2 - 1)^2 + (r V_r V_\varphi)^2 - e_k^2 = 0. \quad (2.18)$$

Определим вектора нормалей \bar{N}_1 и \bar{N}_2 к поверхностям, заданным уравнениями (2.17) и (2.18).

$$\bar{N}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} \\ \frac{\partial f_1}{\partial V_r} \\ \frac{\partial f_1}{\partial V_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r V_\varphi^2 + a_k [2V_\varphi^2 (r V_\varphi^2 - 1) + 2r V_r^2 V_\varphi^2] \\ 2r^2 V_r V_\varphi^2 a_k \\ 2r^2 V_\varphi + a_k [4V_\varphi r (r V_\varphi^2 - 1) + 2r^2 V_r^2 V_\varphi] \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\bar{N}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2V_\varphi^2 (r V_\varphi^2 - 1) + 2r V_r^2 V_\varphi^2 \\ 2r^2 V_r V_\varphi^2 \\ 4V_\varphi r (r V_\varphi^2 - 1) + 2r^2 V_r^2 V_\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Направляющий вектор касательной к пересечению поверхностей (2.19) и (2.20) можно определить, как векторное произведение нормалей \bar{N}_1 и \bar{N}_2 . После вычисления векторного произведения и приведения подобных слагаемых получаем следующее выражение

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} -V_r r^2 \\ 1 - r V_\varphi^2 \\ r V_r V_\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Условие трансверсальности в этом случае будет иметь следующий вид

$$\bar{P} \cdot (\bar{N}_1 \times \bar{N}_2) = -P_r r^2 V_r + P_{V_r} (1 - r V_\varphi^2) + P_{V_\varphi} r V_r V_\varphi = 0 \quad (2.22)$$

Полученное условие трансверсальности позволяет определить оптимальный момент подлёта к целевой орбите, решая трёхпараметрическую краевую задачу.

Так как условия (2.17), (2.18) и (2.22) описываются оскулирующими (Кеплеровыми) элементами (Рисунок 2.2), то запишем конечные граничные условия тоже в оскулирующих элементах.

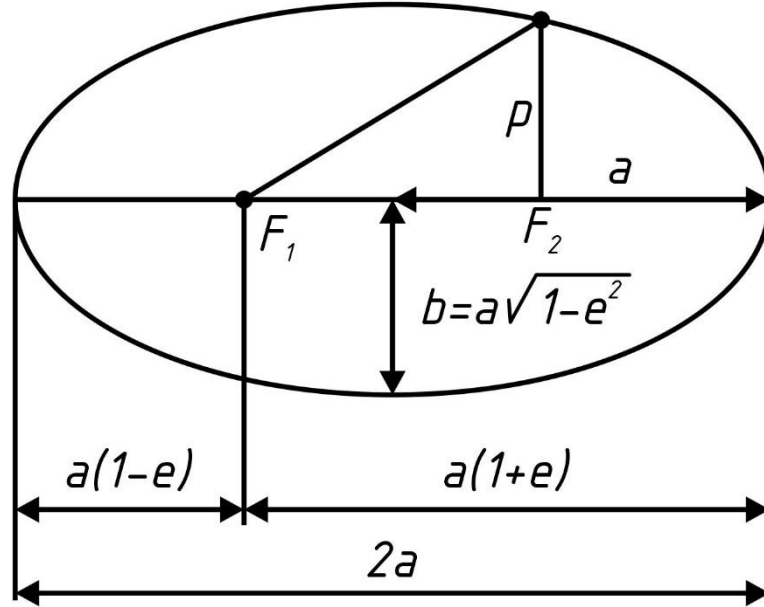


Рисунок 2.2 – Кеплеровы элементы орбиты

Для начала запишем формулы перевода оскулирующих параметров в полярные координаты и скорость КА

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(u - \omega)} \\ V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cdot \sin(u - \omega) \\ V_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cdot \cos(u - \omega)) \end{array} \right. , \quad (2.23)$$

где p – фокальный параметр орбиты;

$u = \varphi$ – аргумент широты орбиты;

ω – аргумент перицентра орбиты.

Запишем конечные граничные условия решаемой задачи. Пусть КА совершает перелёт с орбиты с большой полуосью $a_0 = 6871$ км, на орбиту с

большой полуосью $a_k = 6921$ км и эксцентриситетом $e = 0,05$. Таким образом получим следующие условия:

$$\bar{x}(t_k) = \begin{pmatrix} a_k = \frac{a_k^*}{a_0^*} = \frac{6921}{6871} = 1,0073 \\ e_k = 0,05 \\ u_k = 270 \\ \omega_k = \text{не задано} \\ m(t_k) \rightarrow \min \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Остальные параметры конечной орбиты являются нефиксированными, и определяются по оптимальным значениям из расчётов.

2.4 Методика решения краевой задачи модифицированным методом Ньютона

В рамках рассматриваемой модели миссии оптимальное управление на различных участках движения определяется в соответствии с принципом максимума Понтрягина и начальными значениями сопряжённых переменных.

Для отыскания программы оптимального управления и соответствующих ему траекторий компланарного геоцентрического движения решается ряд двухточечных краевых задач для системы дифференциальных уравнений, которые описывают движение КА на определённом участке в рамках выбранной модели.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина оптимальное управляемое движение на одном участке описывается сопряжённой системой дифференциальных уравнений [13]

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_{xi}(t, \bar{x}, \bar{u}), \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= f_{\psi i}(t, \bar{x}, \bar{u}), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $\bar{\psi}(\bar{z}^n)$ – вектор подбираемых параметров управления для n -ой модели движения.

Как было сказано в п. 2.3 фазовые координаты в начале участка полёта являются определёнными. Однако начальные условия сопряжённых множителей остаются неизвестными

$$t = t_0, \bar{x}(t_0) = x_0, \bar{\psi}(t_0) - \text{не определено.} \quad (2.26)$$

В конце участка требуется выполнение некоторых условий, определяемых целью перелёта

$$t = t_K, \quad \varphi_j(t_K, \bar{x}(t_K), \bar{\psi}(t_K)) = 0. \quad (2.27)$$

Значения переменных $\bar{x}(t_K)$, $\bar{\psi}(t_K)$ при $t = t_K$ можно рассматривать, как функции незадаанных начальных значений сопряжённых переменных $\bar{\psi}(t_0)$. Решение краевой задачи (2.25-2.27) сводится к отысканию корней системы уравнений

$$\varphi_j(t_K, \bar{\psi}(t_0)) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.28)$$

где $\varphi_j(t_K, \bar{\psi}(t_0))$ – векторная функция невязок, зависящая от значений сопряжённых множителей $\bar{\psi}^n(t_0)$ в начальный момент времени.

Распишем функцию невязок следующей линейной зависимостью

$$\varphi_j(t_K, \bar{\psi}(t_0)) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t_K) - \bar{x}_K \\ \bar{\psi}(t_K) - \bar{\psi}_K \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Таким образом, задача баллистической оптимизации считается решённой, если определено начальное значение вектора $\bar{\psi}(t_0)$, удовлетворяющее уравнению (2.28) с заданной погрешностью.

Для решения системы (2.28) будем использовать модифицированный метод Ньютона с оценкой сходимости и изменением шага вычисления производных и ограничений на приращения.

Применение этого метода будем производить по следующему итерационному процессу (далее s – номер итерации)

$$\bar{\psi}^{(s+1)}(t_0) = \bar{\psi}^{(s)}(t_0) + k^{(s)} \Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0), \quad (2.30)$$

где $k^{(s)}$ – коэффициент приращения, итерационный процесс начинается с значения $k = 1$.

Само приращение $\Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0)$ находится путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial \psi_i} \Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0) = -\varphi_j, \quad j = 1 \dots m, \quad (2.31)$$

Здесь значения функции $\varphi_j(t_K, \bar{\psi}(t_0))$ и её частных производных вычисляются в точке $\Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0)$ численно.

Близость значений $\Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0)$ к решению будем описывать следующей величиной

$$\Delta^{(s)} = \sum_{j=1}^m |\varphi_j(t_K, \bar{\psi}^{(s)}(t_0))| \quad (2.32)$$

Таким образом, если величина $\Delta^{(s)}$ стала меньше заранее заданной погрешности ε , краевая задача считается решённой. В случае, если значения производных (2.31) больше единицы, итерационный процесс может не сойтись. В этом случае, сходимость процесса можно обеспечить, уменьшая величины приращения $\Delta \bar{\psi}^{(s)}(t_0)$, найденные в (2.31). Это реализуется в том случае, если величина погрешности на следующей итерации окажется больше, чем на предыдущей

$$\Delta^{(s+1)} > \Delta^{(s)}. \quad (2.33)$$

Для этого меняем коэффициент приращения в соотношении (2.30) следующим образом

$$k^{(s)} = k^{(s)}/2. \quad (2.34)$$

Далее снова вычисляем значения $\bar{\psi}^{(s+1)}(t_0)$ и $\Delta^{(s+1)}$ по формулам (2.30) и (2.32). В случае, если условие (2.33) вновь выполняется, выполняем уменьшение коэффициента $k^{(s)}$ по формуле (2.34) до тех пор, пока не получим необходимое уменьшение величины погрешности $\Delta^{(s+1)}$. При этом на каждом шаге итерационный процесс начинается с $k = 1$, чтобы не вызывать замедление сходимости процесса в окрестности решения.

Важно отметить, что при использовании данного модифицированного метода Ньютона, существуют ситуации, когда при бесконечном уменьшении параметра k не происходит уменьшения величины погрешности $\Delta^{(s+1)}$.

Поэтому в реализации метода предусмотрен «аварийный» выход при некотором числе обращений к (2.34). В программной реализации решения выбрано значение 20.

При осуществлении данного «аварийного» выхода предлагается изменить величину приращений следующим образом

$$\Delta\bar{\psi}_i^{(s)} = \Delta\bar{\psi}_i^{(s)} / 10. \quad (2.35)$$

Аналогично в случае с коэффициентом $k^{(s)}$, после n обращений к формуле (2.35), величина приращения $\Delta\bar{\psi}_i^{(s)}$ восстанавливается до начального по следующей формуле

$$\Delta\bar{\psi}_i^{(s)} = \Delta\bar{\psi}_i^{(s)} \cdot 10^n. \quad (2.36)$$

Также, для того, чтобы итерационный процесс не «заклинивал», он должен останавливаться при конечном обращении к формулам (2.35-2.36)

2.5 Метод численного интегрирования дифференциальных уравнений, применяемый в решении поставленной задачи

В рамках решения поставленной задачи необходимо прибегать к методам численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (2.3, 2.12, 2.31). С учётом обеспечиваемой точности решения различных методов [14], будем использовать классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (далее $y, f, k_i \in \mathbb{R}^n$, а $x, h \in \mathbb{R}^1$) [15]

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.37)$$

Приближенное значение в последующих точках вычисляется по следующей итерационной формуле

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.38)$$

где h – величина шага по x ;

k_i – коэффициенты, определяемые следующими формулами

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (2.39)$$

Чтобы обеспечить необходимую точность расчётов, модифицируем этот метод следующим образом. При расчёте крайнего значения параметра y_n , сравниваем его со значением y_{n-1} на предпоследнем шаге. В случае, если эта разница больше заданной точности расчётов ε , то есть $\Delta = y_n - y_{n-1} > \varepsilon$, в этой точке мы дробим шаг интегрирования $h = \frac{h}{2}$ и производим расчёт в n -ой точке ещё раз. Производим это дробление до тех пор, пока величина Δ не станет меньше заданной точности интегрирования ε .

3 Программная реализация моделирования геоцентрического движения космического аппарата

3.1 Описание программного комплекса

Моделирование поставленной в п. 2 задачи проводилось на языке программирования Python. Для создания графического интерфейса программного модуля использовалась библиотека tkinter [16].

3.1.1 Назначение и состав программного комплекса

Разработанный программный комплекс решает задачу оптимизации геоцентрического компланарного межорбитального перелёта КА с двигателем малой тяги.

Проводится моделирование геоцентрического компланарного перелёта КА с двигателем малой тяги оптимального по критерию расхода рабочего тела с фиксированным временем перелёта.

Программный комплекс можно условно разделить на два основных блока:

- 1) Блок баллистического моделирования;
- 2) Блок оптимизации перелёта.

Рассмотрим назначение каждого блока подробнее.

Блок баллистического моделирования реализует моделирование полёта КА с учётом выбранных параметров начальной и конечной орбиты, а также выбранных параметров КА. Блок позволяет построить зависимости изменения различных параметров орбиты от времени, а также построить трассу полёта КА.

Блок оптимизации перелёта реализует алгоритм оптимизации решаемой задачи моделирования геоцентрического перелёта КА по заданному критерию оптимальности (оптимальный расход рабочего тела). Данный блок также легко подвергается модификации, что позволяет применять и другие критерии оптимальности, в зависимости от решаемой задачи. Блок позволяет оценить точность решения на этапе проектно-баллистической оптимизации.

Схема работы программного комплекса представлена на рисунке 3.1.

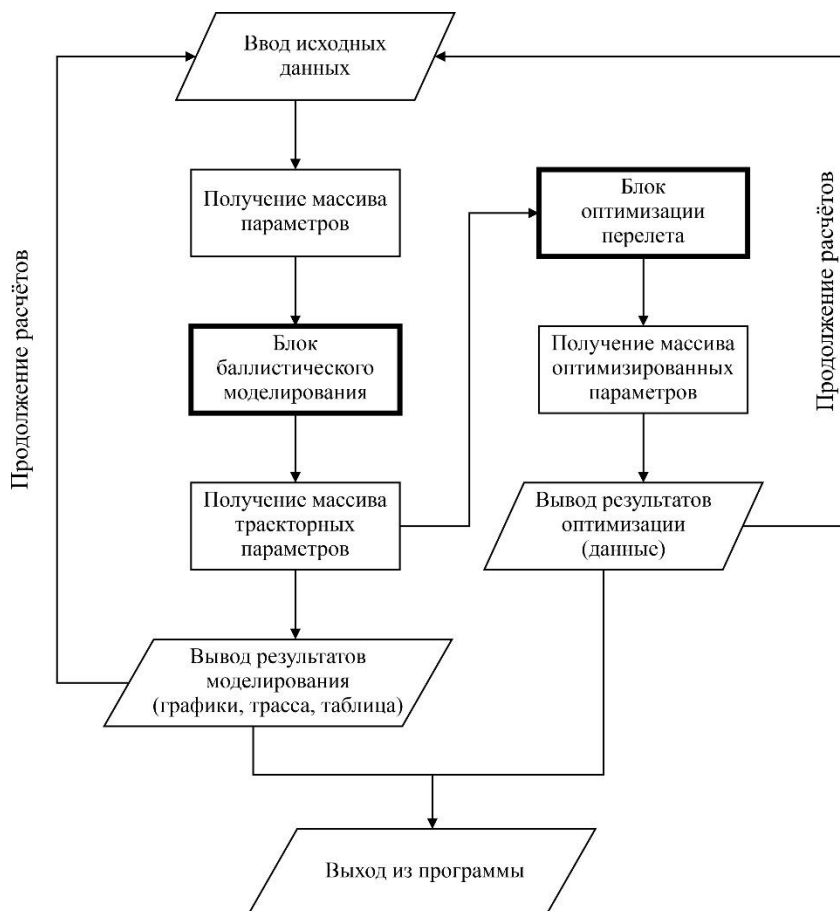


Рисунок 3.1 – Схема работы программного комплекса

3.1.2 Описание основных блоков программы

В блоке моделирования осуществляется моделирование движения центра масс КА с двигателем малой тяги (ЭРД с ЯЭУ).

Моделирование движения осуществляется подпрограммой интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.3) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматизированным изменением шага для обеспечения заданной точности (см. п. 2.5). В качестве исходных данных в блок передаются параметры начальной и конечной орбиты, время полёта, параметры КА (начальная масса КА и параметры двигателя малой тяги) и параметры расчёта (шаг интегрирования и точность расчёта).

В состав блока также входит подпрограмма вывода результатов моделирования, которая включает:

- запись траекторных параметров во внешние файлы;

- вывод результатов в виде таблицы параметров;
- построение графиков траекторных параметров и трассы перелёта КА.

Анализируя полученные в ходе моделирования результаты, можно оценить точность решения задачи. Если точность полученного решения недостаточна, то далее производится оптимизация решаемой задачи.

В блок оптимизации перелёта передаются все входные параметры из блока моделирования движения, параметры расчёта (весовые коэффициенты невязок, приращения для численного определения производных, точность решения и ограничения на приращения), а также выбранные начальные значения оптимизируемых параметров. В качестве оптимизируемых параметров выступают начальные значения сопряжённых B , P_r и угол λ (см. п. 2.3).

Результат работы подпрограммы оптимизации перелёта может быть трёх видов:

- задача решена и получены оптимальные значения параметров;
- задача не решена полностью, но получены более оптимальные значения параметров;
- задача не решена и параметры не оптимизированы.

Далее все виды результатов работы подпрограммы будут рассмотрены более подробно.

3.2 Руководство по работе с программным комплексом

При запуске программного комплекса, сразу открывается рабочая форма программы (Рисунок 3.2) (заставка и экран приветствия отсутствует за ненадобностью).

Расчет перелета КА.

Интегрирование | Результаты | Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 100

Тяга двигателей КА, Н.: 0.5

Скорость истечения двигателей, с.: 20000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.01

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.05

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_r: 1.2

Сопряженная переменная B: 0.45

Начальный угол λ , град.: 120

Введите время полета:

Время полета, сут.: 5

Выход

Интегрирование

Рисунок 3.2 – Окно программы при запуске. Вкладка «Интегрирование»

Интерфейс программы состоит из трёх основных вкладок:

- 1) Вкладка «Интегрирование» (Рисунок 3.2). На этой вкладке осуществляется ввод исходных данных в соответствующие поля и расчёт баллистических параметров моделирования перелёта КА (интегрирование);
- 2) Вкладка «Результаты» (Рисунок 3.3). На этой вкладке осуществляется вывод результатов моделирования перелёта (интегрирования) в виде таблицы данных и графиков траекторных параметров;
- 3) Вкладка «Оптимизация» (Рисунок 3.4). На этой вкладке осуществляется ввод исходных данных для алгоритма оптимизации перелёта, а также вывод результатов оптимизации.

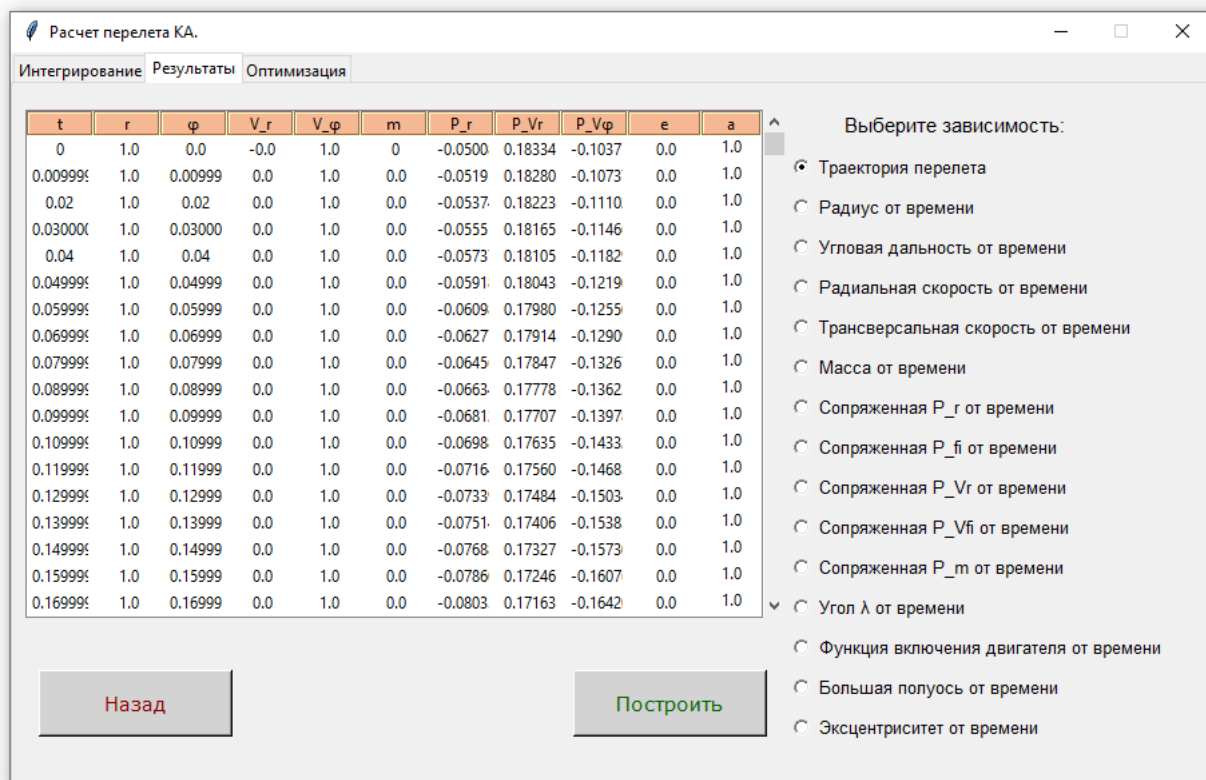


Рисунок 3.3 – Вкладка «Результаты»

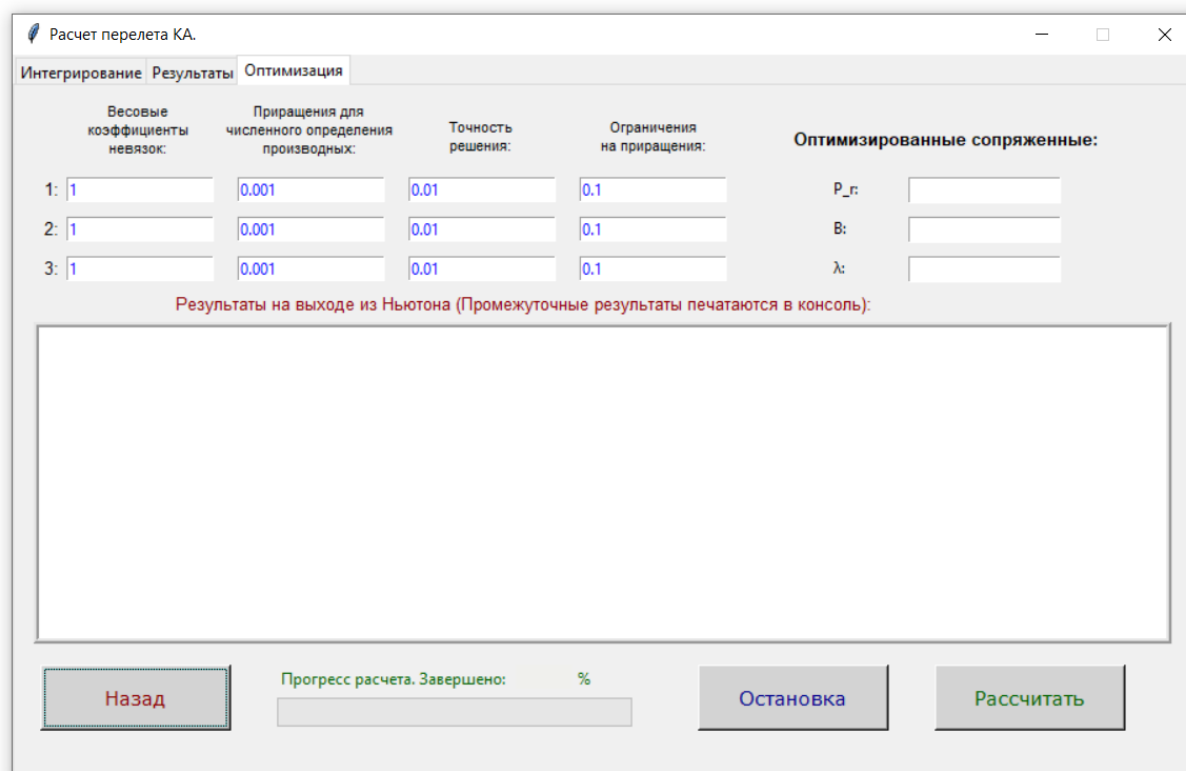


Рисунок 3.4 – Вкладка «Оптимизация»

Переход между вкладками осуществляется, как с помощью ручного выбора вкладок (нажатием на виджет соответствующей вкладки), так и автоматически с помощью встроенных для этого кнопок, которые мы рассмотрим далее.

3.2.1 Вкладка «Интегрирование»

Ввод исходных данных в этой вкладке осуществляется в несколько основных блоков. По умолчанию все поля исходных данных уже заполнены, но при необходимости их можно изменить.

В качестве исходных данных начальной и конечной орбиты выбраны следующие оскулирующие элементы:

- аргумент перицентра ω , град;
- эксцентриситет e ;
- большая полуось орбиты a , км;
- аргумент широты u , град.

Важно понимать, что в полях ввода шага и погрешности интегрирования параметры являются безразмерными, когда как время полёта вводится размерным. Таким образом, для времени полёта $T = 1$ сут. при шаге интегрирования $h = 0,01$ для параметров орбиты по умолчанию на выходе мы получим более 9 500 точек на примерно 14 витках орбиты.

Кроме блоков ввода исходных данных на первой вкладке располагаются две кнопки:

- кнопка «Выход», реализующая безопасное закрытие программы и «разрушение» интерфейса;
- кнопка «Интегрирование», которая запускает работу алгоритма баллистического моделирования перелёта КА. После того, как программный комплекс заканчивает интегрирование, у пользователя на экран выводится соответствующее этому сообщение и при нажатии кнопки «ОК», программа автоматически переносит пользователя на вкладку «Результаты».

3.2.2 Вкладка «Результаты»

После того, как программа перенесла пользователя на вкладку «Результаты», перед пользователем открывается интерфейс, представленный на рисунке 3.3. Важно отметить, что, при переходе на эту вкладку без предварительного интегрирования, таблица данных, полученная в результате расчётов, будет пустая (Рисунок 3.5), однако графики зависимостей траекторных параметров построить пользователь сможет. Это связано с тем, что данные для графиков берутся из предыдущего расчёта пользователя и сохраняются даже при закрытии программного комплекса. Однако для таблицы параметров используется отдельный файл с данными, который при выходе из программы очищается. Это сделано для того, чтобы оптимизировать работу программы и исключить возможность её зависания при открытии (так как в предыдущий раз мы могли неудачно подобрать время полёта и шаг интегрирования, тем самым получить очень большое количество данных). Например, для времени полёта $T = 5 \text{ сут.}$ при шаге интегрирования $h = 0,001$ для параметров орбиты по умолчанию на выходе мы получим около 480 000 точек (т.е. строк данных, которые считывала бы программа при открытии).

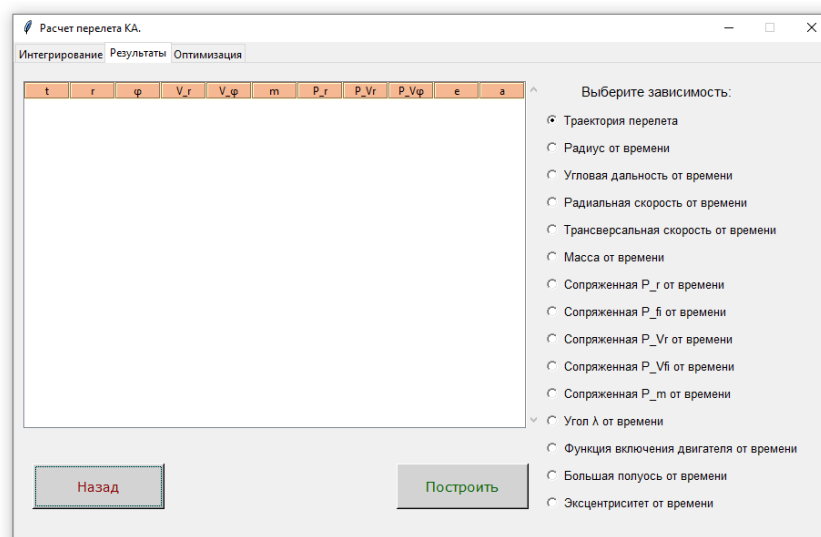


Рисунок 3.5 – Интерфейс вкладки «Результаты» без предварительного расчёта

На вкладке «Результаты» располагаются следующие элементы: таблица траекторных параметров с ползунком прокрутки; переключатели графиков, кнопка «Назад» и кнопка «Построить».

Таблица траекторных параметров (Рисунок 3.6) выводит данные результатов расчёта (интегрирования), а ползунок прокрутки позволяет быстро перейти к необходимым пользователю данным.

t	r	φ	V_r	V_φ	m	P_r	P_{Vr}	$P_{V\varphi}$	e	a
29.1199	1.00264	28.7013	0.00475	1.00709	0.00647	3.96607	0.25367	5.46819	0.01759	1.01930
29.1299	1.00269	28.7113	0.00492	1.00705	0.00647	3.96326	0.26892	5.46321	0.01760	1.01931
29.1399	1.00274	28.7214	0.00508	1.00700	0.00647	3.96029	0.28414	5.45792	0.01761	1.01932
29.1499	1.00279	28.7314	0.00525	1.00696	0.00647	3.95716	0.29933	5.45235	0.01762	1.01933
29.1599	1.00285	28.7415	0.00542	1.00691	0.00647	3.95388	0.31450	5.44647	0.01764	1.01935
29.1699	1.00290	28.7515	0.00559	1.00686	0.00648	3.95044	0.32963	5.44030	0.01765	1.01936
29.1799	1.00296	28.7615	0.00575	1.00681	0.00648	3.94684	0.34472	5.43384	0.01766	1.01937
29.1899	1.00302	28.7716	0.00592	1.00676	0.00648	3.94309	0.35978	5.42709	0.01767	1.01938
29.1999	1.00308	28.7816	0.00608	1.00670	0.00648	3.93919	0.37481	5.42004	0.01768	1.01939
29.2099	1.00314	28.7916	0.00625	1.00665	0.00649	3.93513	0.38979	5.41270	0.01769	1.01940
29.2199	1.00320	28.8017	0.00641	1.00659	0.00649	3.93092	0.40474	5.40507	0.01770	1.01942
29.2299	1.00327	28.8117	0.00658	1.00653	0.00649	3.92655	0.41964	5.39715	0.01772	1.01943
29.2399	1.00333	28.8217	0.00674	1.00647	0.00649	3.92203	0.43450	5.38893	0.01773	1.01944
29.2499	1.00340	28.8318	0.00690	1.00641	0.00649	3.91736	0.44931	5.38044	0.01774	1.01945
29.2599	1.00347	28.8418	0.00707	1.00634	0.00650	3.91254	0.46408	5.37165	0.01775	1.01946
29.2699	1.00354	28.8518	0.00723	1.00628	0.00650	3.90756	0.47880	5.36258	0.01776	1.01947
29.2799	1.00362	28.8619	0.00739	1.00621	0.00650	3.90244	0.49347	5.35322	0.01777	1.01948
29.2899	1.00369	28.8719	0.00755	1.00614	0.00650	3.89717	0.50809	5.34358	0.01778	1.01950

Рисунок 3.6 – Таблица результатов интегрирования

Переключатели графиков реализуют выбор необходимой для вывода на экран зависимости.

На переключателях реализованы следующие зависимости:

- траектория перелёта – график зависимости $r = f(\varphi)$;
- радиус от времени – график зависимости $r = f(t)$;
- угловая дальность от времени – график зависимости $\varphi = f(t)$;
- радиальная скорость от времени – график зависимости $V_r = f(t)$;

- трансверсальная скорость от времени – график зависимости $V_\varphi = f(t)$;
- масса (массовый расход) от времени – график зависимости $m = f(t)$;
- сопряжённая P_r от времени – график зависимости $P_r = f(t)$;
- сопряжённая P_{fi} от времени – график зависимости $P_\varphi = f(t)$;
- сопряжённая P_{Vr} от времени – график зависимости $P_{Vr} = f(t)$;
- сопряжённая P_{Vfi} от времени – график зависимости $P_{V\varphi} = f(t)$;
- сопряжённая P_m от времени – график зависимости $P_m = f(t)$;
- угол λ от времени – график зависимости $\lambda = f(t)$;
- функция включения двигателей от времени – график зависимости $\delta = f(t)$;
- большая полуось от времени – график зависимости $a = f(t)$;
- эксцентриситет от времени – график зависимости $e = f(t)$.

3.3 Моделирование геоцентрического движения КА

Перед началом моделирования поставленной в разделе 2 задачи, проведём расчёт начального приближения. Предположим, что КА со следующими параметрами: $m_{КА} = 100 \text{ кг}$, $P_{дв} = 0,2 \text{ Н}$, $c_0 = 20000 \text{ с}$, совершает перелёт с круговой орбиты высотой $H_0 = 500 \text{ км}$ на близкую к круговой орбиту высотой $H_k = 550 \text{ км}$.

Таким образом, необходимо смоделировать перелёт КА с орбиты $a_0 = 6371 + 500 = 6871 \text{ км}$ на орбиту $a_k = 6371 + 500 = 6921 \text{ км} = \frac{6921}{6871} \approx 1,0073$.

Расчётное время на перелёт зададим $T = 6 \text{ сут}$. В качестве начальных сопряжённых выберем следующие параметры:

$$P_r = 0,5;$$

$$B = 0,5;$$

$$\lambda = 120 \text{ град.}$$

На рисунке 3.7 представлена форма с исходными данными для первого расчёта.

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 100

Тяга двигателей КА, Н.: 0.2

Скорость истечения двигателей, с.: 20000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.01

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_г: 0.5

Сопряженная переменная B: 0.5

Начальный угол λ, град.: 120

Введите время полета:

Время полета, сут.: 6

Выход Интегрирование

Рисунок 3.7 – Исходные данные

Результат интегрирования представлен на рисунке 3.8.

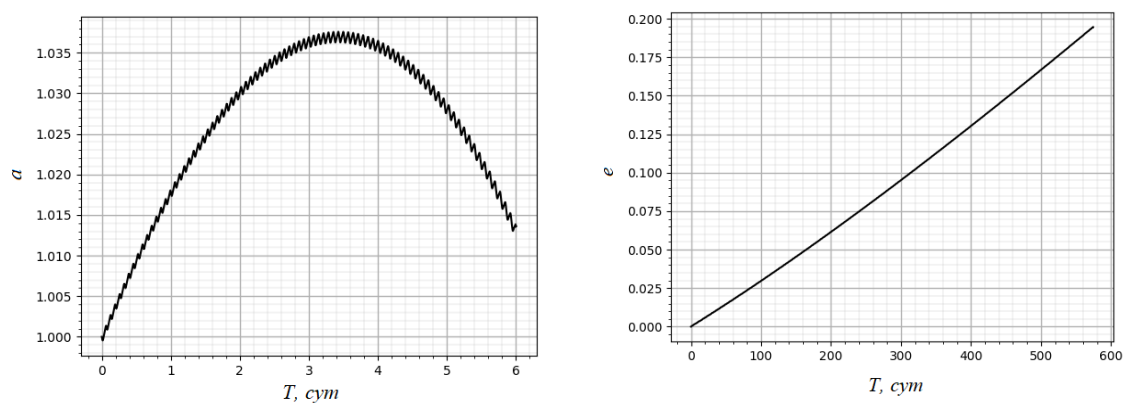


Рисунок 3.8 – Графики зависимостей $a = f(t)$ и $e = f(t)$

Из анализа результатов видно, что КА «промахнулся» от целевой орбиты. Величины невязок составляют

$$f_1 = a(T) - a_k = 1,0136 - 1,0073 = 0,0063;$$

$$f_2 = e(T) - e_k = 0,1946 - 0,0000 = 0,1946.$$

Будем оптимизировать расчёт описанным ранее методом. При этом, для того, чтобы обеспечить на каждом шаге сходимость метода, зададим эксцентриситет конечной орбиты больше предыдущего (начнём со значения $e_k = 0,2$) и постепенно будем его уменьшать.

В результате оптимизации перелёта получаем следующие параметры

$$P_{r_{opt}} = -0,05008447471397579;$$

$$B_{opt} = 0,2106475575142818;$$

$$\lambda_{opt} = 119,49549768174323;$$

$$e_k = 0,02.$$

Промежуточные результаты работы подпрограммы оптимизации представлены на рисунках 3.9 – 3.12 (на рисунках показаны полученные оптимальные значения сопряжённых и изменённое значение эксцентриситета).

Рис. 3.9 – Интерфейс программы расчета перелета КА. Вкладка "Оптимизация".

Введите параметры начальной орбиты:	Введите параметры целевой орбиты:
Начальный аргумент перицентра, град.: 100	Аргумент перицентра, град.: 0
Начальный эксцентриситет: 0	Эксцентриситет: 0.09
Начальная большая полуось орбиты, км: 6871	Большая полуось орбиты, км: 6921
Начальный аргумент широты, град.: 0	Аргумент широты, град.: 270

Введите параметры КА:	Введите сопряженные вектор функции:
Начальная масса КА, кг.: 100	Сопряженная переменная P: -0.0451947
Тяга двигателей КА, Н.: 0.2	Сопряженная переменная B: 0.2395674919
Скорость истечения двигателей, с.: 20000	Начальный угол λ , град.: 124

Параметры расчета:	Введите время полета:
Шаг интегрирования: 0.01	Время полета, сут.: 6
Погрешность интегрирования: 1e-8	

Кнопки: Выход, Интегрирование

Рисунок 3.9 – Оптимальное решения (первая итерация). Уменьшаем эксцентриситет до $e_k = 0,09$

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 100

Тяга двигателей КА, Н.: 0.2

Скорость истечения двигателей, с.: 20000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.01

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.04

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_г: -0.043719588

Сопряженная переменная B: 0.2160518123

Начальный угол λ, град.: 118.3

Введите время полета:

Время полета, сут.: 6

Выход

Интегрирование

Рисунок 3.10 – Оптимальное решения (вторая итерация). Уменьшаем эксцентриситет до $e_k = 0,04$

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 100

Тяга двигателей КА, Н.: 0.2

Скорость истечения двигателей, с.: 20000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.01

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.01

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_г: -0.047571874075408506

Сопряженная переменная B: 0.21046161196485616

Начальный угол λ, град.: 119.18361481635176

Введите время полета:

Время полета, сут.: 6

Выход

Интегрирование

Рисунок 3.11 – Оптимальное решения (третья итерация). Уменьшаем эксцентриситет до $e_k = 0,01$.

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 100

Тяга двигателей КА, Н.: 0.2

Скорость истечения двигателей, с.: 20000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.01

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.02

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_г: -0.05008447471397579

Сопряженная переменная B: 0.2106475575142818

Начальный угол λ, град.: 119.49549768174323

Введите время полета:

Время полета, сут.: 6

Выход

Интегрирование

Рисунок 3.12 – Оптимальное решения (четвёртая итерация). Оптимальный эксцентриситет $e_k = 0,02$

Графики зависимостей для данного перелёта представлены на рисунках 3.13 – 3.22.

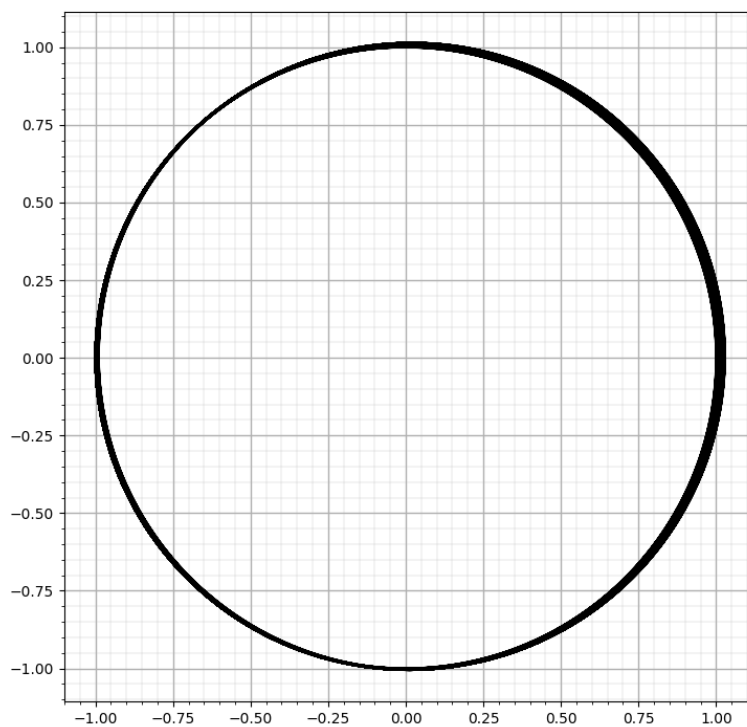


Рисунок 3.13 – Траектория перелёта $r = f(\phi)$

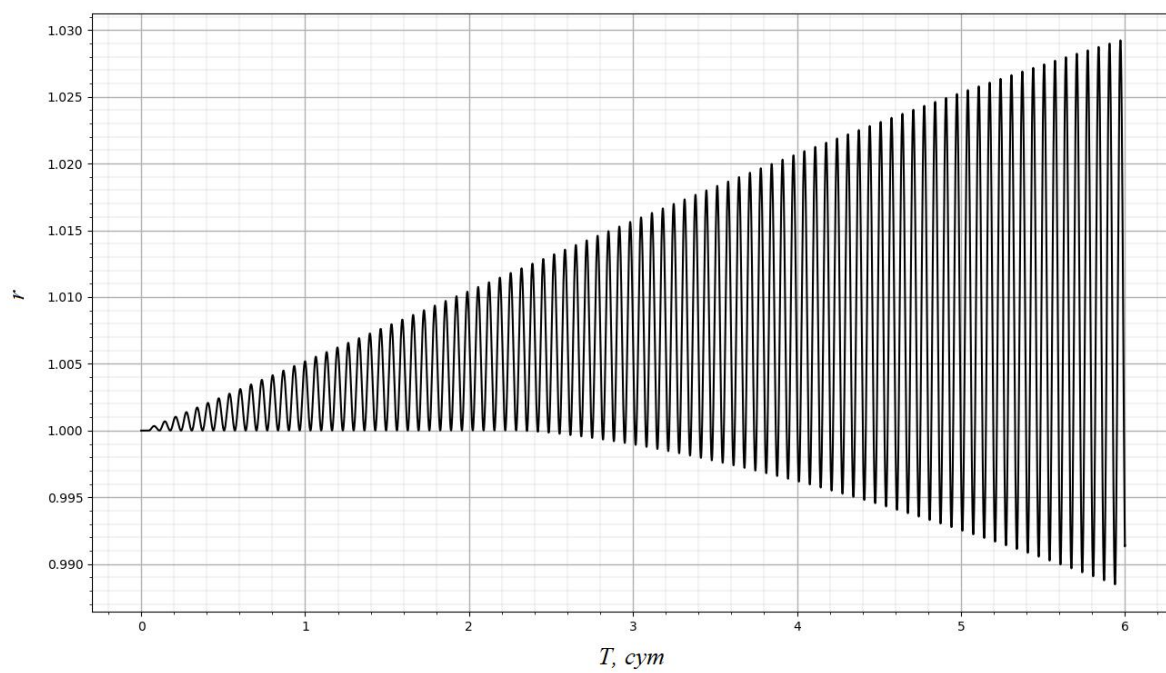


Рисунок 3.14 – График зависимости $r = f(t)$

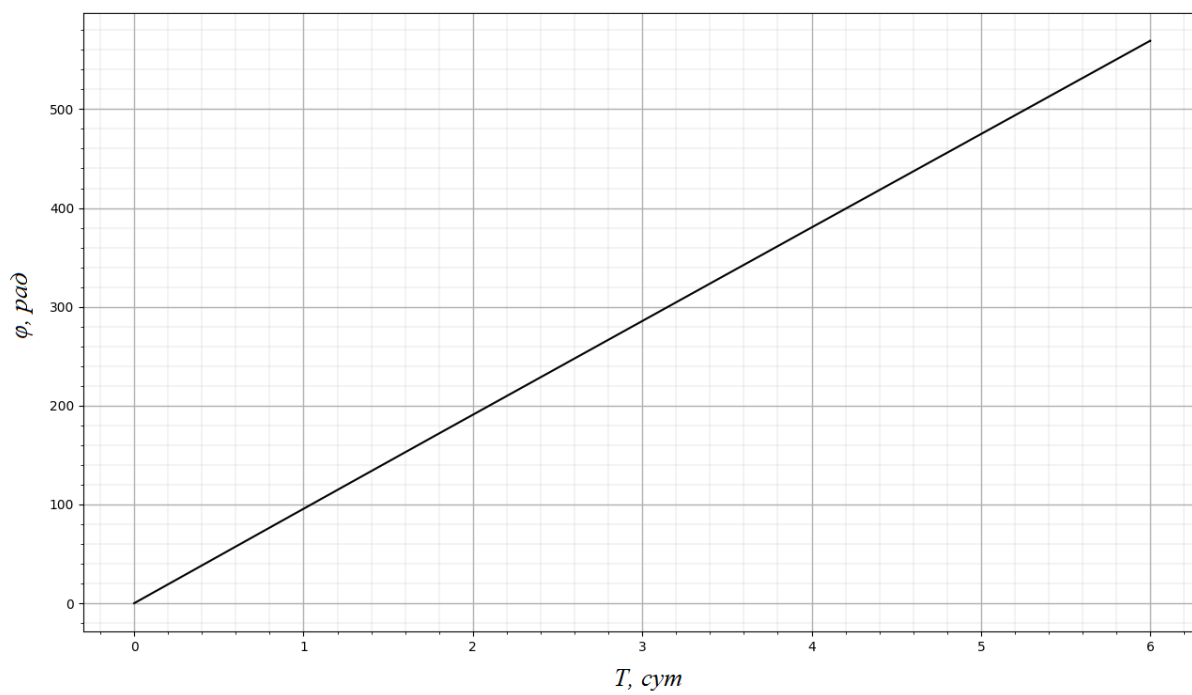


Рисунок 3.15 – График зависимости $\varphi = f(t)$

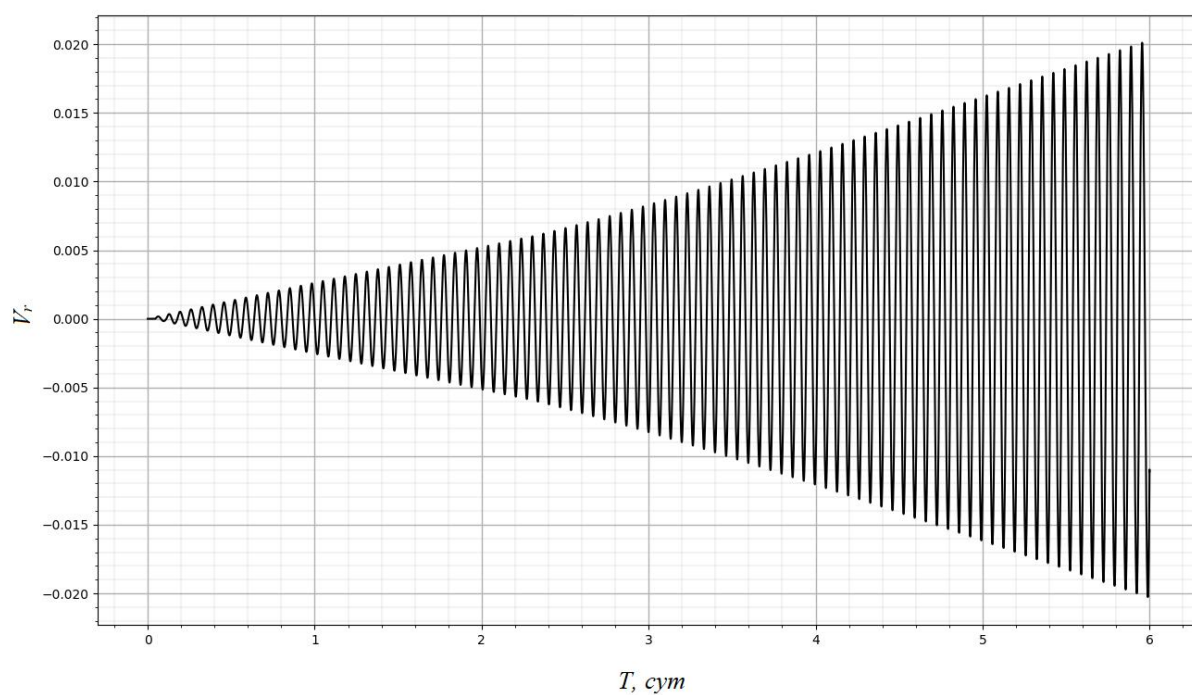


Рисунок 3.16 – График зависимости $V_r = f(t)$

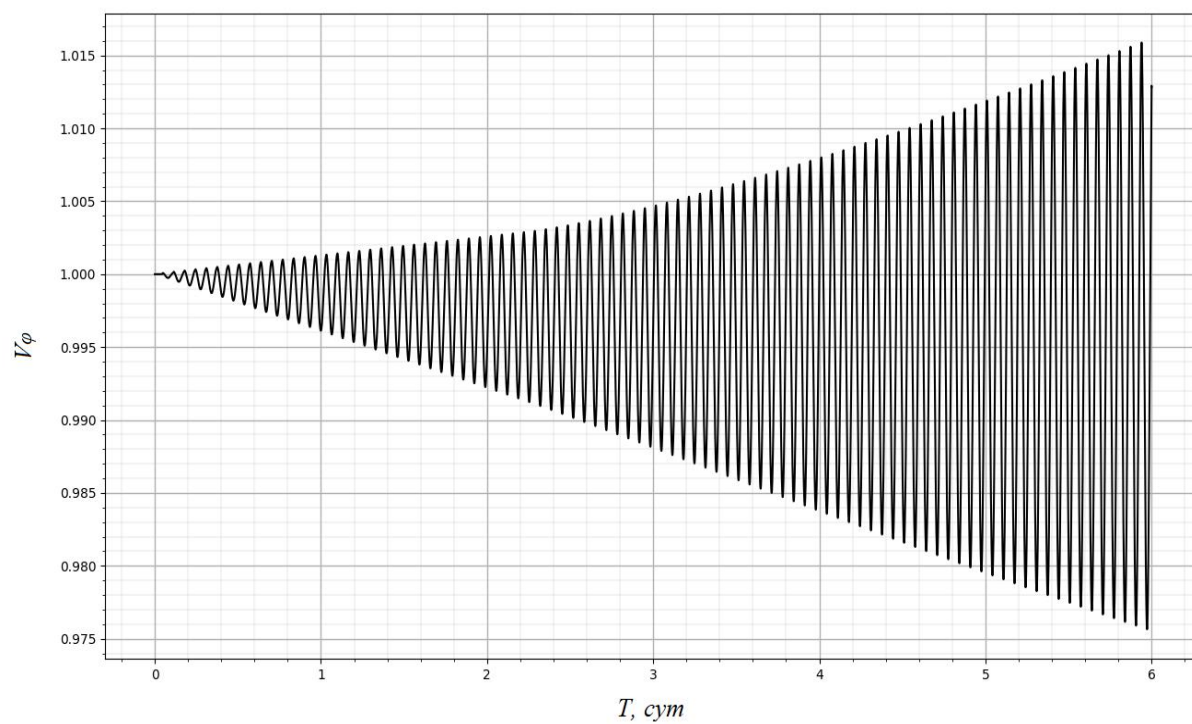


Рисунок 3.17 – График зависимости $V_\phi = f(t)$

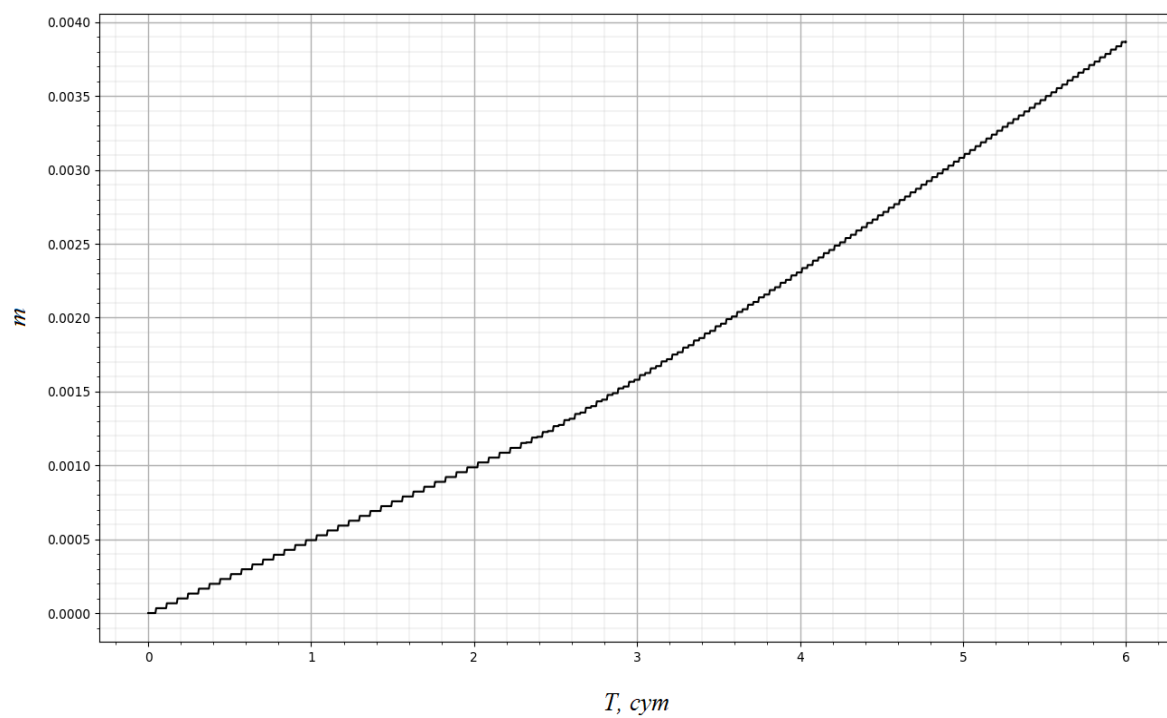


Рисунок 3.18 – График зависимости $m = f(t)$

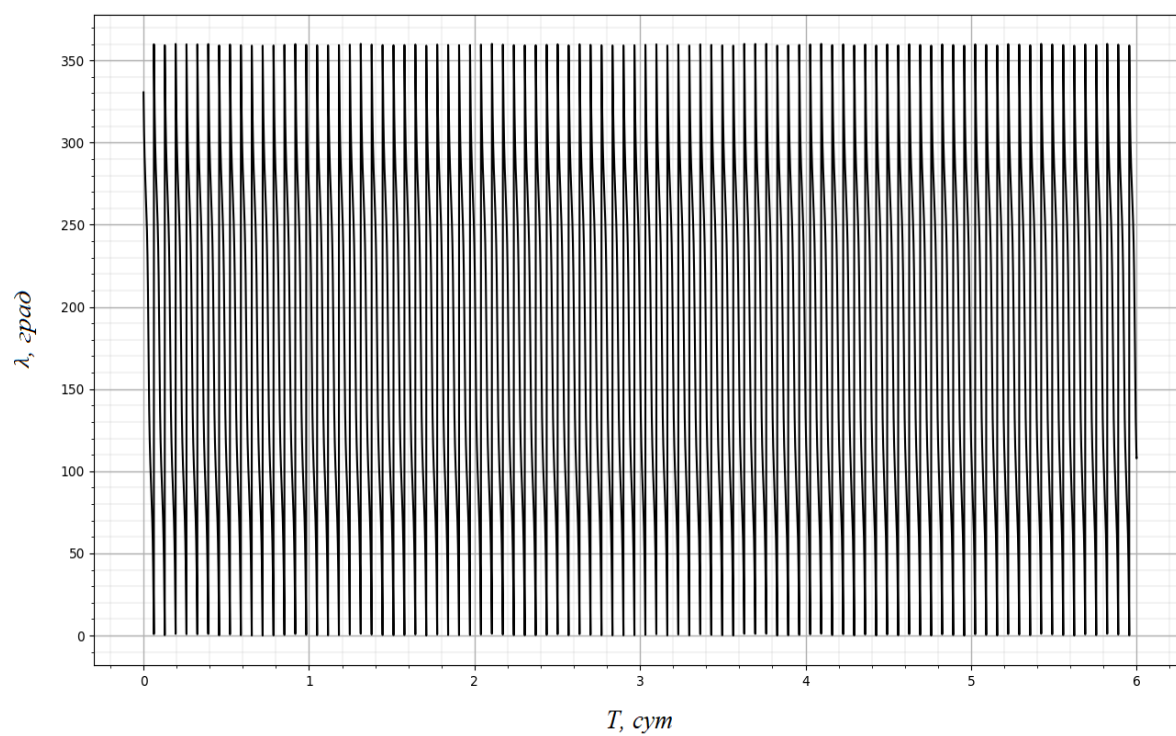


Рисунок 3.19 – График зависимости $\lambda = f(t)$

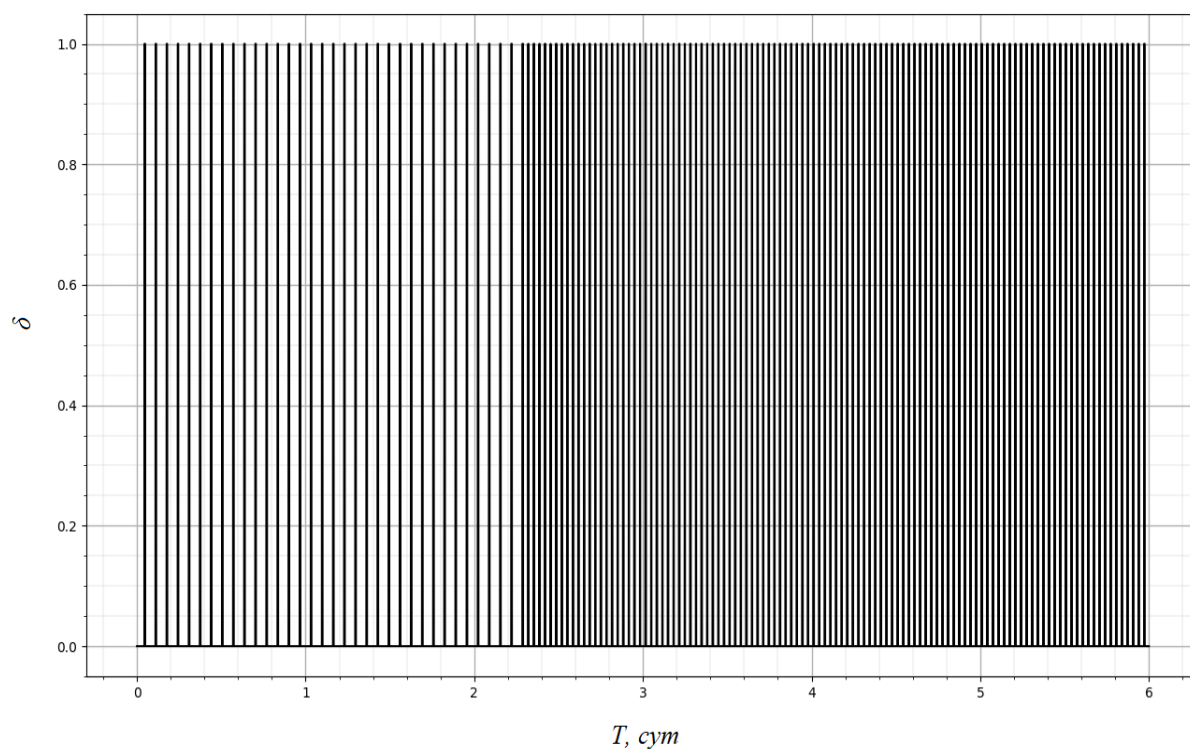


Рисунок 3.20 – График зависимости $\delta = f(t)$

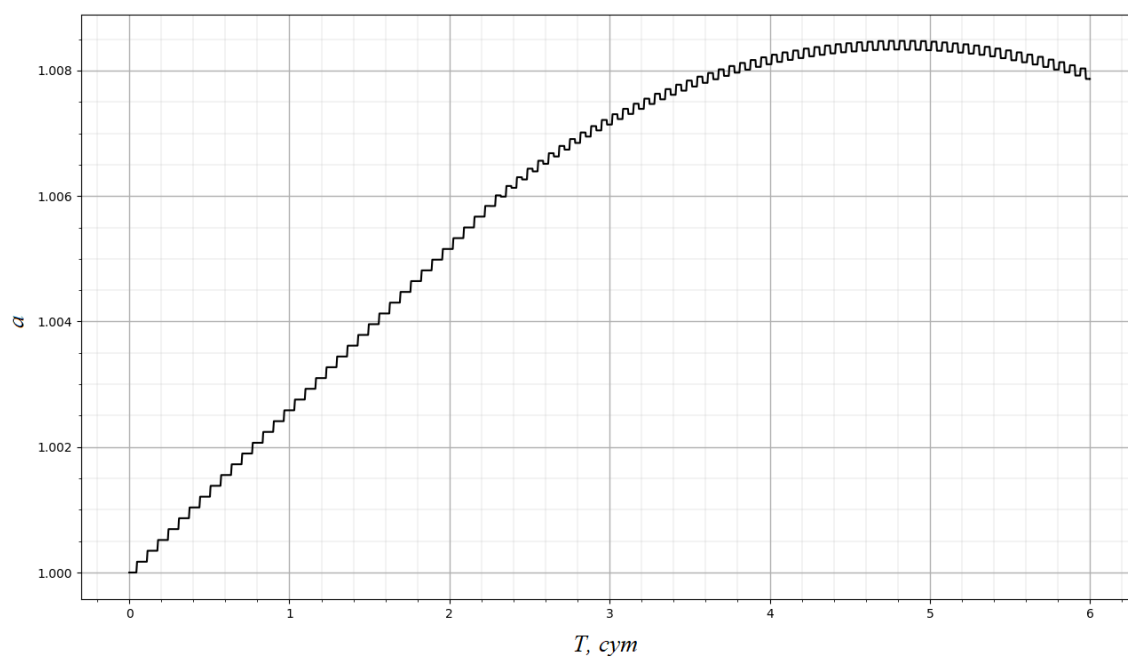


Рисунок 3.21 – График зависимости $a = f(t)$

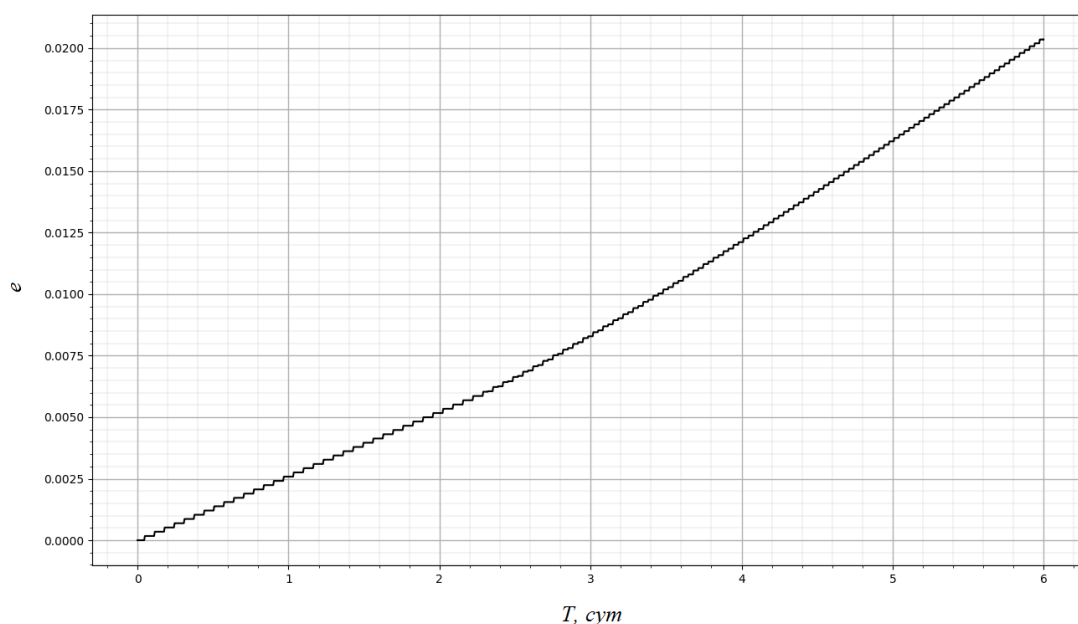


Рисунок 3.22 – График зависимости $e = f(t)$

В результате моделирования, был получен перелёт КА с круговой орбиты высотой $H_0 = 500$ км на орбиту, близкую к круговой, с большой полуосью $a_k = 6921$ км и эксцентриситетом $e = 0,02$. Анализируя полученные результаты, можно условно разделить участок перелёта на 2 части:

1) На первом участке производится управление направленное на увеличение высоты орбиты: увеличивается большая полуось и эксцентриситет. Включение двигателя на данном участке происходит кратковременно примерно 1 раз за виток;

2) На втором участке производится управление по уменьшению большой полуоси орбиты. Включение ДУ на данном участке происходит также кратковременно, но теперь двигатель включается дважды за виток. Эксцентриситет при этом растёт, и для его уменьшения необходимо либо увеличить продолжительность полёта, либо увеличить тягу двигательной установки.

Важно отметить, что в процессе расчётов, может получиться такая ситуация, что оптимизировать перелёт для выбранных пользователем данных не получается. В этом случае можно:

- изменить время полёта. Анализируя полученные в ходе интегрирования результаты (например, графики зависимостей $a = f(t)$ и $e = f(t)$), можно сделать вывод о том, совершил ли КА «перелёт» или «недолёт». В результате этого анализа принимается решение по увеличению или уменьшению времени перелёта;

- изменить один из параметров целевой орбиты, после чего постепенно приближаться к его исходному значению (использовать метод продолжения по параметру). Данный метод был рассмотрен выше;

- изменить параметры КА. Анализируя полученные в ходе интегрирования и оптимизации результаты, можно сделать вывод о том, что КА не хватает тяги для совершения данного перелёта. Например, если после увеличения времени, КА всё ещё «не долетает» до целевой орбиты, при этом израсходовав всё топливо. Или же увеличение времени полёта не способствует приближению КА к целевой орбите. В этом случае следует увеличить тягу двигателей КА (поменять двигатель на более мощный, или же изменить их количество).

Отметим также, что оптимизировать моделирование можно с использованием известных заранее начальных приближений подбираемых пользователем параметров: P_r, B, λ . Это облегчает сходимость алгоритма оптимизации, но требует разработки дополнительных методик получения начального приближения.

Проведём расчёт перелёта поставленной в п. 2 задачи для времени перелёта $T = 21$ сут. Параметры КА выберем следующими: $m_{КА} = 520$ кг, $P_{дв} = 0,083$ Н, $c_0 = 15000$ с. За начальные приближения сопряжённых выберем следующие значения:

$$P_r = 0,5;$$

$$B = 0,5;$$

$$\lambda = 120 \text{ град.}$$

На рисунке 3.23 представлены исходные данные интегрирования.

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.05

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите параметры КА:

Начальная масса КА, кг.: 520

Тяга двигателей КА, Н.: 0.083

Скорость истечения двигателей, с.: 15000

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P_г: 0.5

Сопряженная переменная B: 0.5

Начальный угол λ , град.: 120

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.1

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите время полета:

Время полета, сут.: 21

Выход

Интегрирование

Рисунок 3.23 – Начальные параметры расчёта

Результаты интегрирования представлены на рисунке 3.24.

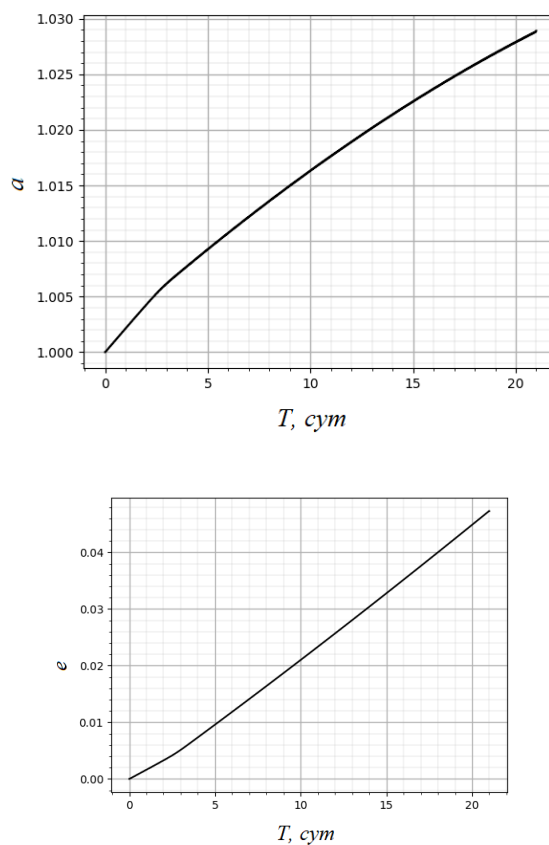


Рисунок 3.24 – Графики зависимостей $a = f(t)$ и $e = f(t)$

Из анализа результатов видно, что КА «промахнулся» от целевой орбиты. Величины невязок составляют

$$f_1 = a(T) - a_k = 1,0289 - 1,0073 = 0,0216;$$

$$f_2 = e(T) - e_k = 0,0473 - 0,05 = 0,0027.$$

Задача требует оптимизации. В этот раз зададим точность метода оптимизации $\varepsilon = 10^{-5}$ по каждому из параметров.

В результате оптимизации перелёта получили следующие значения параметров:

$$P_{opt} = 0,0601545330469698;$$

$$B_{opt} = 0,4467131074498631;$$

$$\lambda_{opt} = 105,53901741852246.$$

На рисунках 3.25-3.34 представлена вкладка с исходными данными полученного оптимизированного перелёта и графики зависимостей для данного перелёта.

Расчет перелета КА

Интегрирование Результаты Оптимизация

Введите параметры начальной орбиты:

Начальный аргумент перицентра, град.: 100

Начальный эксцентриситет: 0

Начальная большая полуось орбиты, км: 6871

Начальный аргумент широты, град.: 0

Введите параметры КА:

Начальный масса КА, кг.: 520

Тяга двигателей КА, Н.: 0.083

Скорость истечения двигателей, с.: 15000

Параметры расчета:

Шаг интегрирования: 0.1

Погрешность интегрирования: 1e-8

Введите параметры целевой орбиты:

Аргумент перицентра, град.: 0

Эксцентриситет: 0.05

Большая полуось орбиты, км: 6921

Аргумент широты, град.: 270

Введите сопряженные вектор функции:

Сопряженная переменная P, г: 0.0601545330469698

Сопряженная переменная B: 0.4467131074498631

Начальный угол λ , град.: 105.53901741852246

Введите время полета:

Время полета, сут.: 21

Выход Интегрирование

Рисунок 3.25 – Оптимизированные параметры перелёта. Вкладка ввода исходных данных

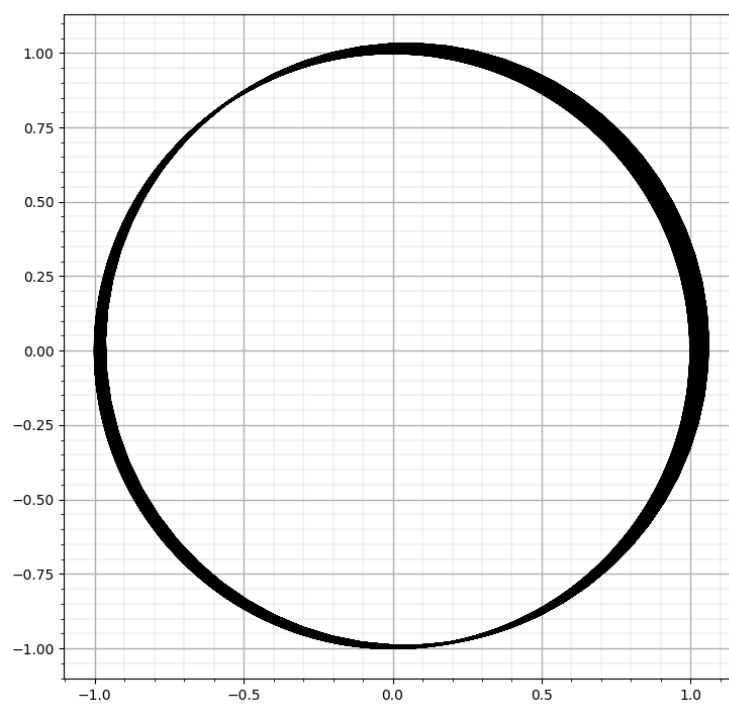


Рисунок 3.26 – Траектория перелёта $r = f(\varphi)$

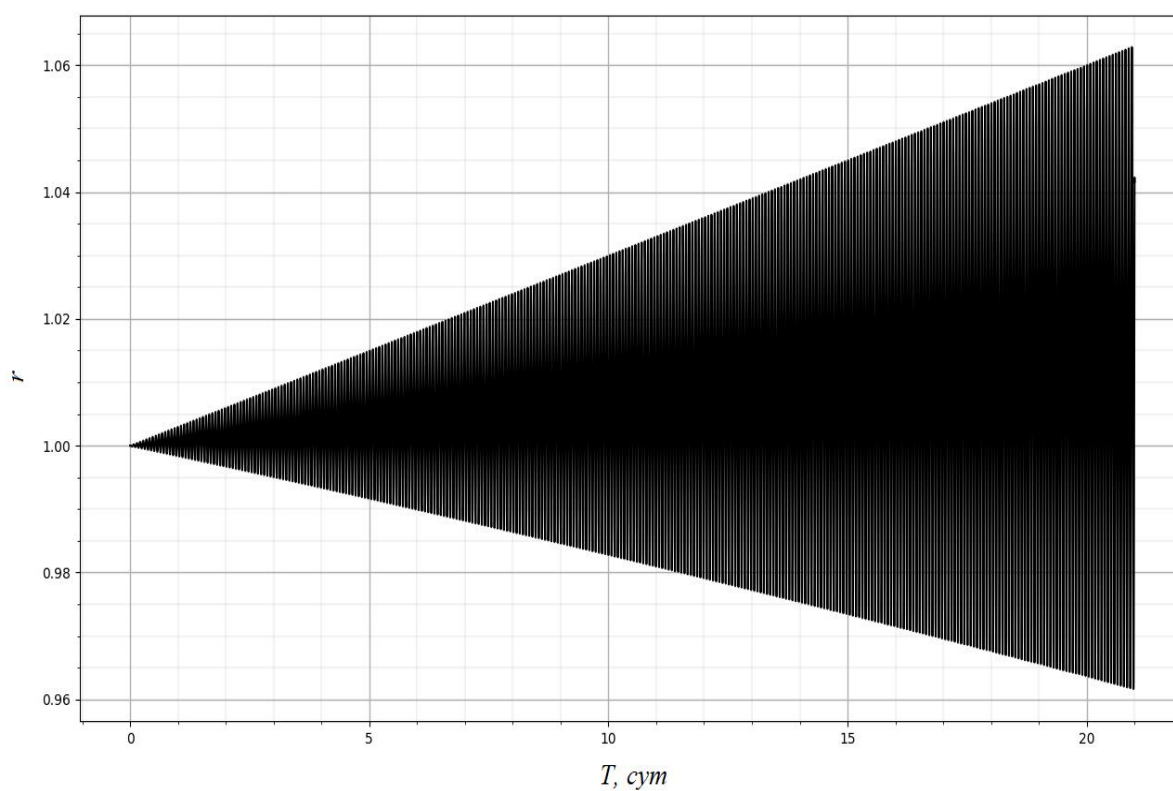


Рисунок 3.27 – График зависимости $r = f(t)$

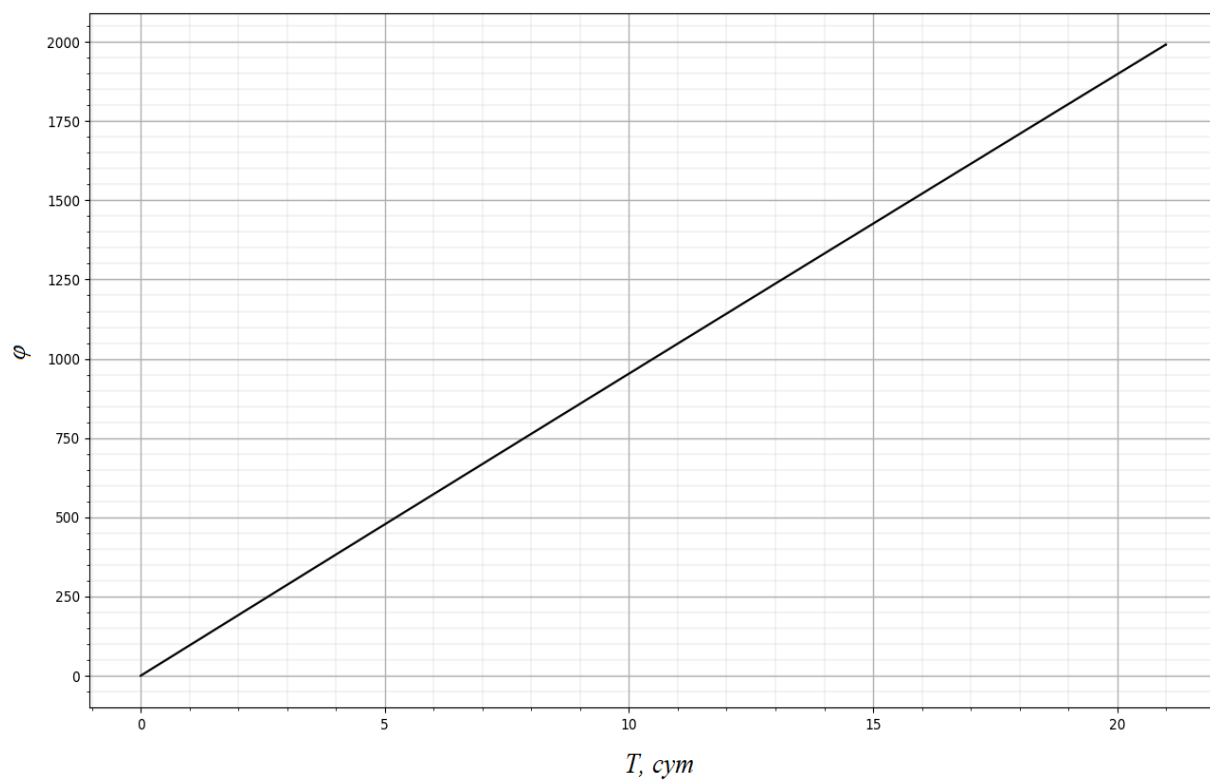


Рисунок 3.28 – График зависимости $\varphi = f(t)$

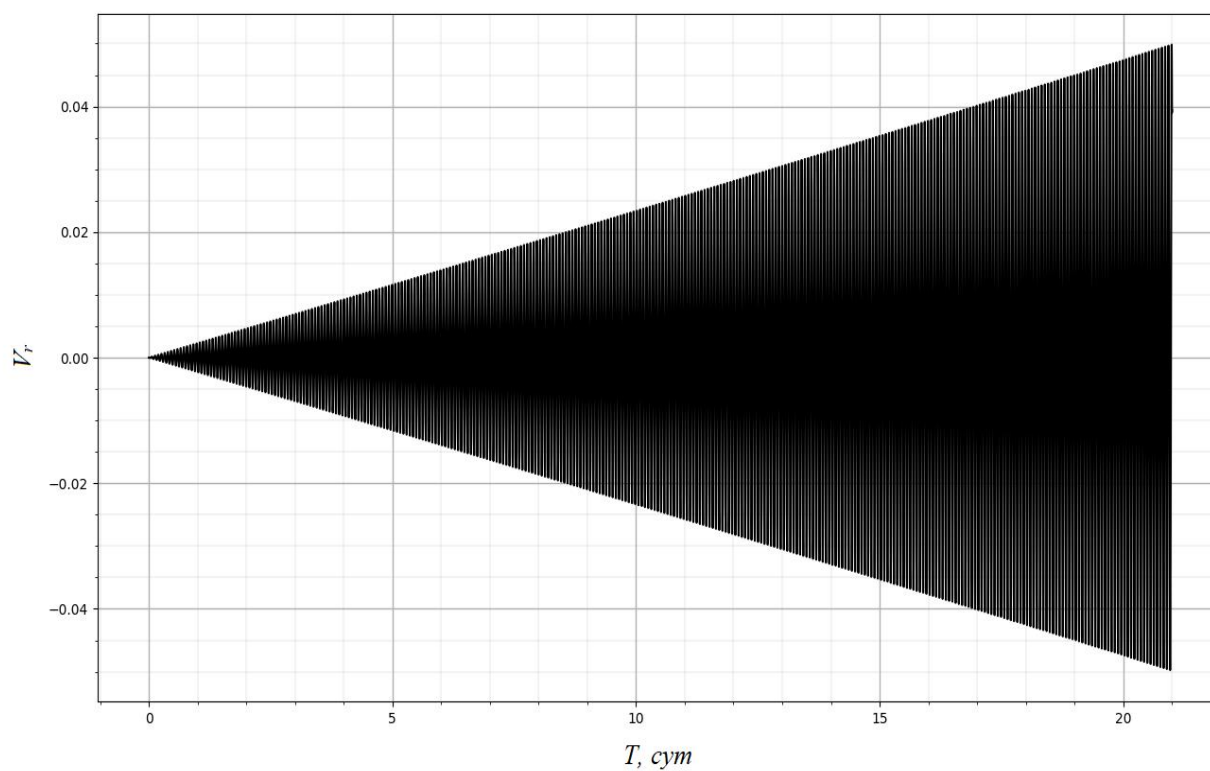


Рисунок 3.29 – График зависимости $V_r = f(t)$

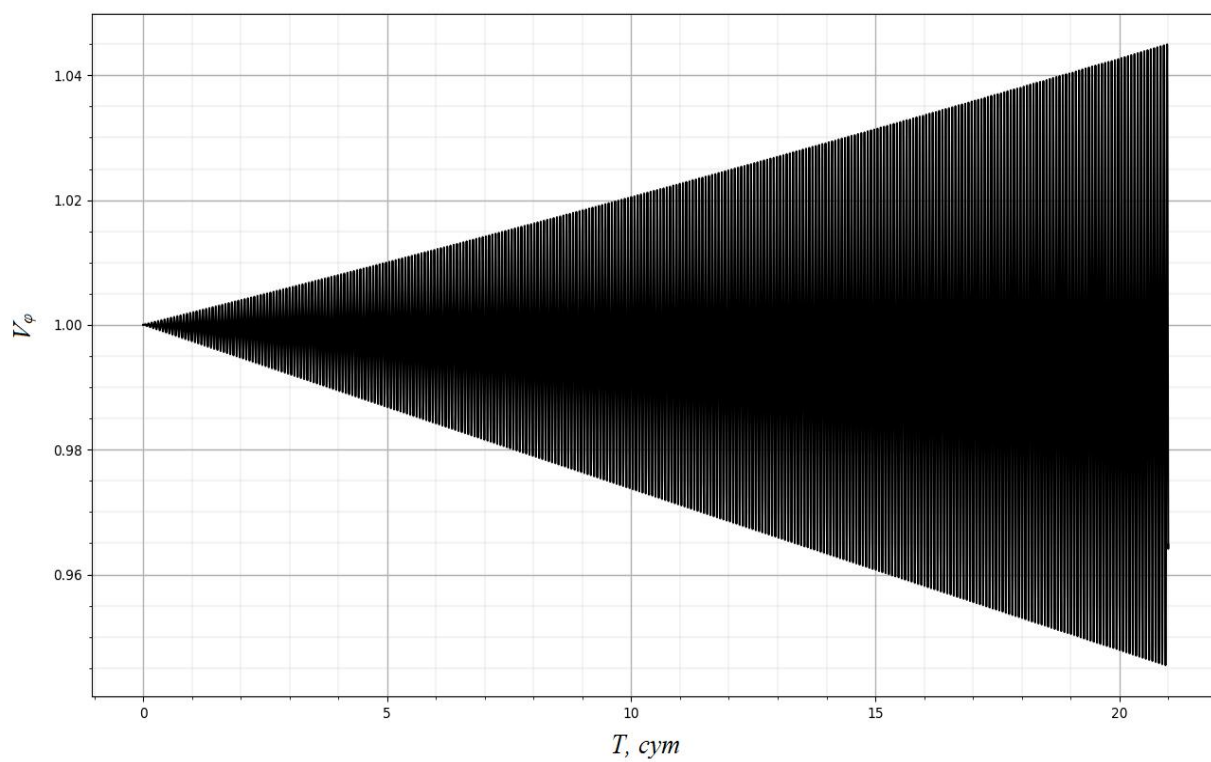


Рисунок 3.30 – График зависимости $V_\varphi = f(t)$

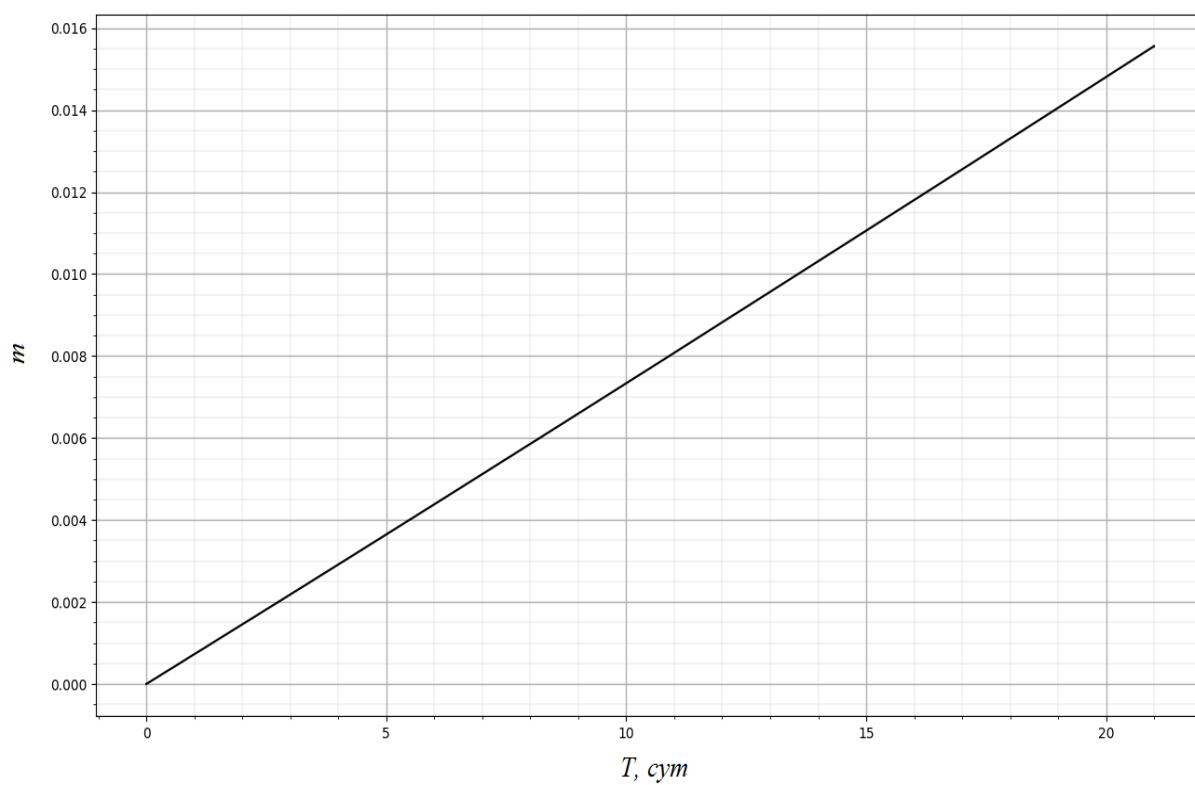


Рисунок 3.31 – График зависимости $m = f(t)$

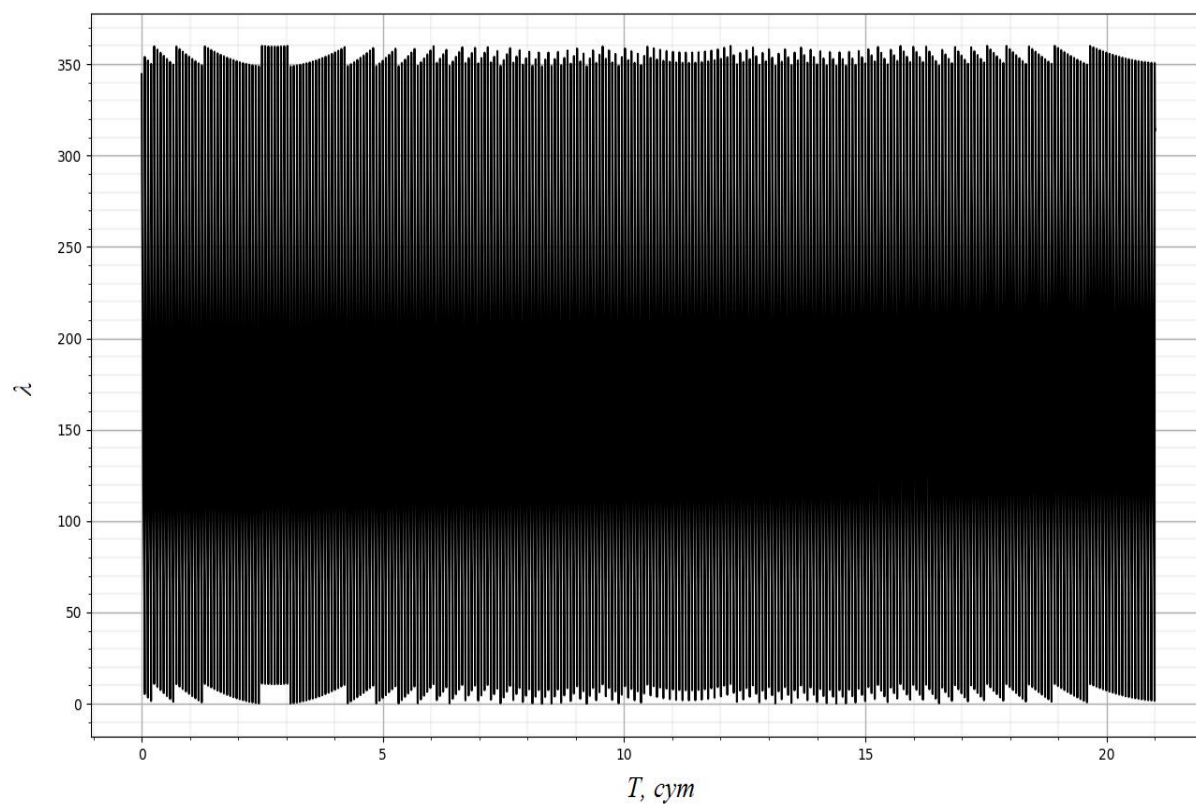


Рисунок 3.32 – График зависимости $\lambda = f(t)$

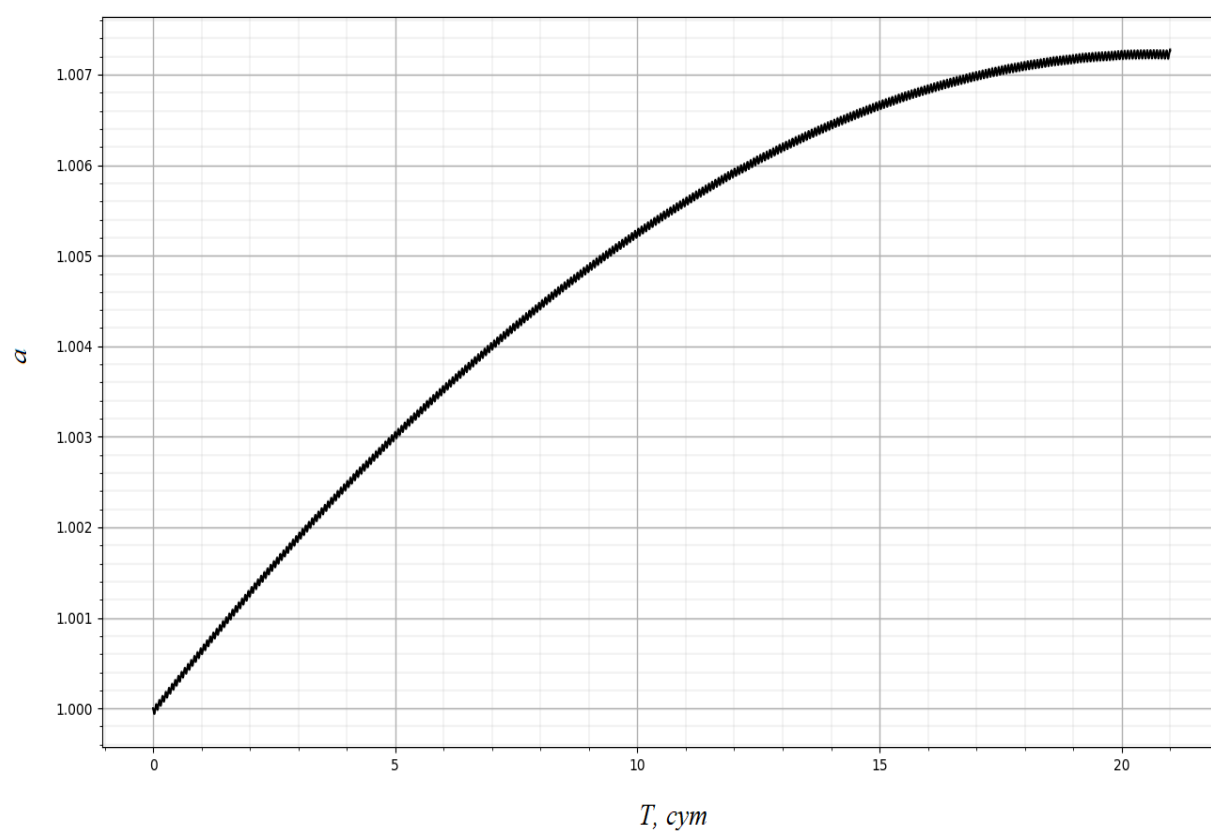


Рисунок 3.33 – График зависимости $a = f(t)$

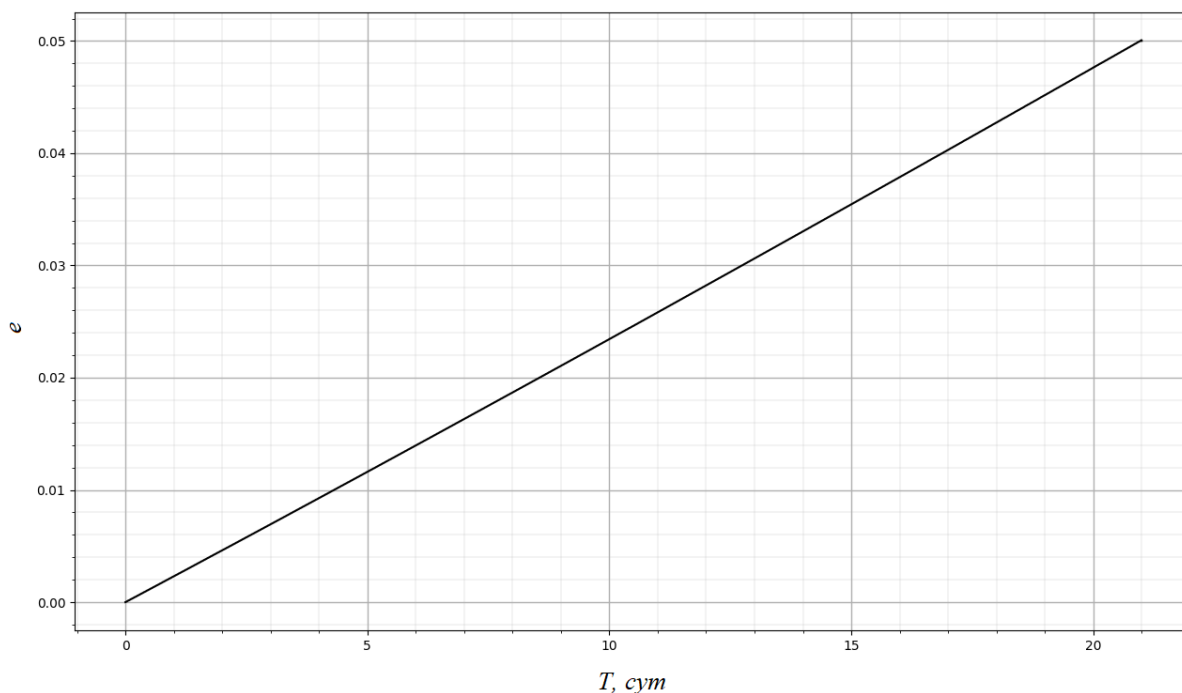


Рисунок 3.34 – График зависимости $e = f(t)$

Анализируя полученные результаты, перелёт можно разделить на 2 участка:

1) На первом участке происходит управление, направленное на удаление КА от начальной орбиты. Происходит увеличение большой полуоси и увеличение эксцентриситета;

2) На втором участке происходит управление по погашению набранной на первом участке скорости. Происходит увеличение эксцентриситета и плавное увеличение большой полуоси с торможением до необходимого значения.

Важно отметить, что в этот раз на обоих участках включение двигателя происходит примерно 2 раза за виток.

Таким образом, в результате моделирования, был получен перелёт КА с круговой орбиты высотой $H_0 = 500 \text{ км}$ ($a_0 = 6871 \text{ км}$) на орбиту, с большой полуосью $a_k = 6921 \text{ км}$ и эксцентриситетом $e = 0,05$. Расход рабочего тела составил $m_T = 8,09 \text{ кг}$. Расчёт проведён с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

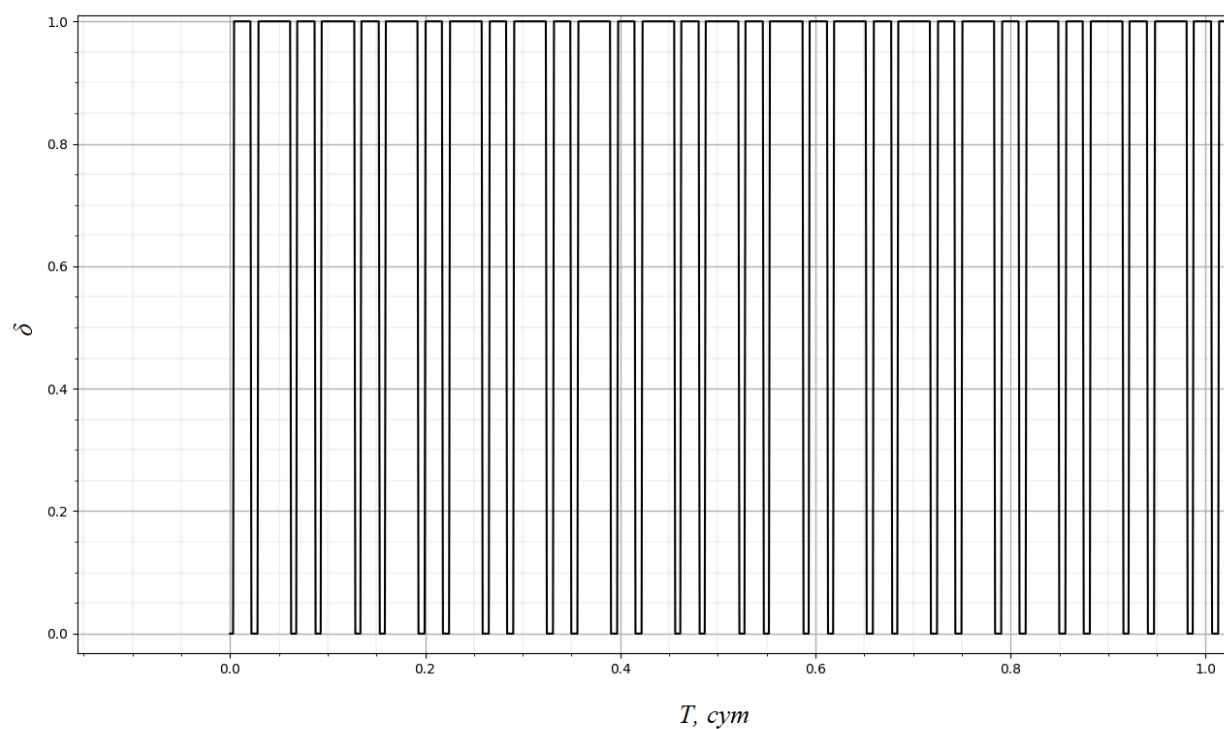


Рисунок 3.35 – График зависимости $\delta = f(t)$ на участке времени $T = 1$ сут

Расчет перелета КА.

Интегрирование Результаты Оптимизация

t	r	φ	V _r	V _φ	m	P _r	P _{Vr}	P _{Vφ}	e	a
2009.69	0.97108	1990.45	0.03015	1.03479	0.01555	0.59747	0.28953	0.94175	0.05004	1.00724
2009.79	0.97430	1990.56	0.03418	1.03137	0.01555	0.56195	0.32830	0.87908	0.05005	1.00724
2009.89	0.97790	1990.66	0.03780	1.02757	0.01555	0.52274	0.36314	0.80920	0.05005	1.00724
2009.99	0.98185	1990.77	0.04099	1.02345	0.01555	0.48046	0.39372	0.73301	0.05005	1.00725
2010.09	0.98609	1990.87	0.04370	1.01905	0.01555	0.43575	0.41979	0.65148	0.05006	1.00725
2010.19	0.99057	1990.97	0.04593	1.01443	0.01555	0.38924	0.44117	0.56559	0.05006	1.00725
2010.29	0.99526	1991.07	0.04765	1.00966	0.01555	0.34156	0.45776	0.47634	0.05006	1.00725
2010.39	1.00009	1991.18	0.04888	1.00479	0.01556	0.29329	0.46950	0.38473	0.05006	1.00726
2010.49	1.00502	1991.28	0.04960	0.99986	0.01556	0.24500	0.47642	0.29174	0.05006	1.00726
2010.59	1.00999	1991.37	0.04982	0.99494	0.01556	0.19717	0.47858	0.19833	0.05007	1.00726
2010.69	1.01497	1991.47	0.04956	0.99006	0.01556	0.15029	0.47610	0.10542	0.05007	1.00726
2010.79	1.01989	1991.57	0.04884	0.98528	0.01556	0.10477	0.46915	0.01387	0.05007	1.00726
2010.89	1.02472	1991.67	0.04767	0.98064	0.01556	0.06096	0.45790	-0.0754	0.05007	1.00726
2010.99	1.02941	1991.76	0.04607	0.97617	0.01556	0.01918	0.44259	-0.1618	0.05007	1.00726
2011.09	1.03392	1991.86	0.04408	0.97191	0.01556	-0.0202	0.42345	-0.2445	0.05007	1.00726
2011.19	1.03821	1991.95	0.04172	0.96789	0.01556	-0.0571	0.40075	-0.3229	0.05007	1.00726
2011.29	1.04225	1992.04	0.03901	0.96414	0.01556	-0.0913	0.37477	-0.3964	0.05001	1.00726
2011.28	1.04158	1992.03	0.03942	0.96476	0.01556	-0.0856	0.37872	-0.3842	0.05000	1.00727

Выберите зависимость:

- ☒ Траектория перелета
- ☐ Радиус от времени
- ☐ Угловая дальность от времени
- ☐ Радиальная скорость от времени
- ☐ Трансверсальная скорость от времени
- ☐ Масса от времени
- ☐ Сопряженная P_r от времени
- ☐ Сопряженная P_φ от времени
- ☐ Сопряженная P_{Vr} от времени
- ☐ Сопряженная P_{Vφ} от времени
- ☐ Сопряженная P_m от времени
- ☐ Угол λ от времени
- ☐ Функция включения двигателя от времени
- ☐ Большая полуось от времени
- ☐ Эксцентриситет от времени

Назад Построить

Рисунок 3.36 – Таблица параметров перелёта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описана математическая модель геоцентрического движения космического аппарата с двигателем малой тяги. Рассмотрено применение принципа максимума для задачи геоцентрического движения, а также методика решения краевой задачи модифицированным методом Ньютона. Описан метод численного интегрирования в решаемой задаче.

Разработан специализированный программный комплекс с пользовательским интерфейсом на языке программирования Python, реализующий баллистическое моделирование геоцентрического перелёта космического аппарата с двигателем малой тяги и решение задачи оптимизации геоцентрического перелёта.

- проведено моделирование перелёта КА с круговой орбиты ($r_0 = 6871$ км) на орбиту близкую к круговой ($a_k = 6921$ км, $e = 0,02$). В результате оптимизации перелёта получены оптимальные значения начальных параметров: $P_{r_{opt}} = -0,05008447471397579$; $B_{opt} = 0,2106475575142818$; $\lambda_{opt} = 119,49549768174323$.

- проведено моделирование перелёта КА с круговой орбиты ($r_0 = 6871$ км) на эллиптическую орбиту ($a_k = 6921$ км, $e = 0,05$). В результате оптимизации перелёта получены оптимальные значения начальных параметров: $P_{r_{opt}} = 0,0601545330469698$; $B_{opt} = 0,4467131074498631$; $\lambda_{opt} = 105,53901741852246$. Расход рабочего тела составил $m_T = 8,09$ кг.

- проведён анализ каждого моделирования, на котором выделены свои особенности на всём участке управления полётом.

СПИСОК ИСПЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Солнечный парус. Википедия [Электронный ресурс] / URL: ru.wikipedia.org/wiki/Солнечный_парус (дата первого обращения: 24 сентября 2023 г.)
- 2 На всех парусах. N+1 [Электронный ресурс] / URL: <https://nplus1.ru/material/2015/05/22/Solar-sail> (дата первого обращения: 24 сентября 2023 г.)
- 3 Старинова, О. Л. Расчёт межпланетных перелётов космических аппаратов [Текст]: О. Л. Старинова. – Самара: Издательство СНЦ РАН, 2007. – 194 с.
- 4 Электрический ракетный двигатель. Википедия [Электронный ресурс] / URL: ru.wikipedia.org/wiki/Электрический_ракетный_двигатель (дата первого обращения: 12 октября 2023 г.)
- 5 Ионный двигатель. Википедия [Электронный ресурс] / URL: ru.wikipedia.org/wiki/Ионный_двигатель (дата первого обращения: 12 октября 2023 г.)
- 6 Стационарный плазменный двигатель. Википедия [Электронный ресурс] / URL: ru.wikipedia.org/wiki/Стационарный_плазменный_двигатель (дата первого обращения: 12 октября 2023 г.)
- 7 Салмин В.В., Четвериков А.С., Гоголев М.Ю. Расчёт проектно-баллистических характеристик и формирование проектного облика межорбитальных транспортных аппаратов с электрореактивной двигательной установкой с использованием информационных технологий [Текст]: учеб. пособие / В.В. Салмин, А.С. Четвериков, М.Ю. Гоголев. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2019. – 199 с.: ил.
- 8 Куренков, В. И. Основы проектирования космических аппаратов оптико-электронного наблюдения поверхности Земли. Расчёт основных характеристик и формирование проектного облика [Текст]: учебное пособие /

В. И. Куренков. – Самара: Издательство Самарского университета, 2020. - 461 с.

9 Deep Space 1 [Электронный ресурс] / URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Deep_Space_1 (дата первого обращения 25 октября 2023 г.)

10 Смарт-1 [Электронный ресурс] / URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Смарт-1> (дата первого обращения 25 октября 2023 г.)

11 КА «Плазма-А» [Электронный ресурс] / URL: <https://kbarsenal.ru/index.php/istoriya/istoriya-kosmos/plazma-a> (дата первого обращения 3 ноября 2023 г.)

12 Транспортно-энергетический модуль [Электронный ресурс] / URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Транспортно-энергетический_модуль (дата первого обращения 7 ноября 2023 г.)

13 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов [Текст]: Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, изд. 3-е, 1976. – 392 с.

14 Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., Численные методы [Текст]: Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 630 с.

15 Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г., Дифференциальные уравнения [Текст]: учебник для ВУЗов / Курс высшей математики и математической физики. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 4-е изд. – 256 с.

16 tkinter – Python interface to Tcl/Tk [Электронный ресурс] / URL: <https://docs.python.org/3/library/tkinter.html> (дата первого обращения 22 сентября 2023 г.)