НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу

До захисту допущено
завідувач кафедри
__________ О.Л. Тимощук
«____» _____________ 2022 р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок»

Виконав:
студент IV курсу, групи КА-81
Галганов Олексій Андрійович

Керівник:
доцент, к.ф-м.н. Ільєнко Андрій Борисович

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н. Рощина Надія Василівна

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н. Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:
???

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Галганов Олексій Андрійович

Київ – 2022 року

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 Попередні відомості ... 3
1.1. Відомості з алгебри ... 3
1.2. Відомості з теорії міри ... 3
1.3. Відомості про точкові випадкові процеси ... 5
РОЗДІЛ 2 Перестановки Юенса ... 8
2.1. Граничний розподіл нерухомих точок ... 8
2.2. Статистичні властивості нерухомих точок ... 13
2.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки ... 13
2.2.2 Сума нерухомих точок ... 15
2.2.3 Найменші і найбільші спейсинги ... 18
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ ... 21

РОЗДІЛ 1
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Відомості з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114). *Перестановкою* π на скінченній множині A називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \to A$.

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118). *Циклом довжини* k називають перестановку π, що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \ldots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \ldots, n$.

Означення 1.1.3 ([1], ст. 116). *Групою перестановок (симетричною групою) степеня* n називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

1.2. Відомості з теорії міри

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{R}$ називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): $\mathcal{R}$ непорожня та $(A, B \in \mathcal{R}) \Rightarrow$ $(A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R})$.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{S}$ називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з $\mathcal{S}$ представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з $\mathcal{S}$, тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{A}$ називається *σ-алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

1. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \big(A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}\big)$;
2. $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$;
3. $(A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара $(X, \mathcal{A})$ називається *вимірним простором*.

Означення 1.2.4 ([4], ст. 146). Нехай $(X, \mathcal{A}_X)$ та $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — два вимірних простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить $\mathcal{A}_X$.

Означення 1.2.5 ([4], ст. 147)**.** Нехай X — метричний простір, $\mathcal{O}$ — сім'я всіх відкритих підмножин X. Мінімальна σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить $\mathcal{O}$, називається *борелевою σ-алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами.*

Означення 1.2.6 ([2], ст. 24)**.** Сім'я підмножин $\mathcal{S}$ сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Кожну відкриту підмножину X можна представити у вигляді зліченного об'єднання множин з $\mathcal{S}$;
2. Кожну підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{S}$.

Означення 1.2.7 ([3], ст. 8)**.** Нехай $\mathcal{A}$ — σ-алгебра у просторі X. Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Невід'ємність: $\forall\ A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
2. σ-адитивність: довільних множин $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.8 ([2], ст. 22)**.** Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на вимірному просторі$(X, \mathcal{A})$, якщо $\mu\left(\{x\}\right) > 0$.

Означення 1.2.9 ([2], ст. 22; [5], ст. 123)**.** *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}\left\{x \in A\right\} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Означення 1.2.10 ([5], ст. 123)**.** *Точкова міра* — це міра μ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — зліченний набір точок X, не обов'язково різних. Точкова міра називається *радоновою*, якщо міра компактних множин з $\mathcal{A}$ завжди є скінченною.

Означення 1.2.11 ([5], ст. 140)**.** Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо $\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

Теорема 1.2.1 ([5], ст. 144). *Нехай* $(\mu_n, n \geq 1)$ *та* μ *— міри на вимірному просторі* $(X, \mathcal{A})$ *і* $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. *Для кожної компактної множини* $K \subset X$ *з* $\mu(\partial K)$ *існує номер* $N = N(K)$ *такий, що при* $n \geq N$ *існує нумерація атомів* μ_n *та* μ *такі, що*

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i^{(n)}}(A), \ \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i}(A)$$

для всіх $A \in \mathcal{A}$ *і* $x_i^{(n)} \to x_i$ *для всіх* $1 \leq i \leq p$.

1.3. Відомості про точкові випадкові процеси

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, E — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева σ-алгебра підмножин E. Для точкової міри μ позначимо $S_\mu = \{x \in E : \mu(\{x\}) \neq$ — множину атомів.

Означення 1.3.1 ([5], ст. 124). Точкова міра μ називається *простою*, якщо $\mu(\{x\}) \leq 1$ для всіх $x \in E$.

Позначимо $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на E, а $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу σ-алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu($ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P}$ — міра на цьому просторі, що додатково задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення 1.3.2. *Точковий випадковий процес* N — вимірне відображення з ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес N задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P} \circ N^{-1} = \mathbb{P}[N \in \cdot\,]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

Теорема 1.3.1 ([5], ст. 124). N *є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного* $F \in \mathcal{E}$ *відображення* $\omega \mapsto N(\omega, F)$ *з* $(\Omega, \mathcal{A})$ *в* $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ *є вимірним.*

Теорема 1.3.2 ([5], ст. 126). *Нехай N — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а сім'я передкомпактних множин $\mathcal{F}$ задовольняє наступні умови:*

1. $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$*;*
2. $\mathcal{E}$ *є мінімальною* σ*-алгеброю, що містить* $\mathcal{F}$*;*
3. *Існує послідовність множин* $E_n \in \mathcal{F}$*, для якої* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *і* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1,\ldots,I_k}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}\left(N(I_j) = n_j, 1 \le j \le k\right)$$

для $I_i \in \mathcal{F}$ та цілих $n_i \ge 0$, $1 \le i \le k$.

Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1,\ldots,I_k}, k = 1, 2, \ldots, I_j \in \mathcal{F}\}$ однозначно визначає розподіл P_N.

Означення незалежності процесів — чи потрібно?

Означення функціоналу Лапласа — чи потрібно?

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

Означення 1.3.3 ([2], ст. 127). *Мірою інтенсивності* або *середньою мірою* точкового процесу N називається міра μ, що для $F \in \mathcal{E}$ визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_{\Omega} N(\omega, F) d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} m(F) dP_N$$

.

Наведемо приклад точкового процесу.

Означення 1.3.4 ([6], ст. 11). Нехай P — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$, а $X_1, \ldots, X_m$ — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ δ_{X_i} — це точковий процес, для якого $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_i \in F\right)$, $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_i \notin F\right)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \cdots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальний процесом* з розміром вибірки m та розподілом P. Для нього

$$\mathbb{P}\left(X(F) = k\right) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \; k = 0, \ldots, m, \; F \in \mathcal{E}$$

.

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

Означення 1.3.5 ([5], ст. 130)**.** Нехай μ — радонова міра на $\mathcal{E}$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\left(N(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty; \end{cases}$$

2. Для будь-якого натурального k, якщо $F_1, \ldots, F_k$ з $\mathcal{E}$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \leq i \leq k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Як і для невипадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

Означення 1.3.6 ([2], ст. 109)**.** Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \geq 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

Теорема 1.3.3 ([2], ст. 121)**.** *Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. *$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ для $U \in \mathcal{U}$;*
2. *$\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \leq \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ для $I \in \mathcal{I}$.*

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

Теорема 1.3.4 ([7], ст. 42)**.** *Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу ξ, а відображення $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$ таке, що $\mathbb{P}\left(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi\right.$ не є непере*
0.

Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \geq 1)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$, тобто $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$.

РОЗДІЛ 2
ПЕРЕСТАНОВКИ ЮЕНСА

2.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n, заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)},\ \pi \in S_n, \tag{2.1}$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $c(\pi)$ позначає кількість циклів у π. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса*.

Зауваження. *Якщо* $\theta = 1$*,* (2.1) *задає рівномірний розподіл, тобто* $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ *для всіх* $\pi \in S_n$*.*

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 2.1.1. *Нехай* σ *— випадкова перестановка на множині* $\{1, \dots, n\}$*, що задана розподілом* (2.1)*. Для* $a \in \mathbb{R}$ *позначимо* $\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$*. Нехай* $\gamma \in [0, 1]$*, а* $X_n = \operatorname{card}\{i \in \{1, \dots, \lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ *— кількість нерухомих точок* σ *серед перших* $\lceil \gamma n \rceil$ *натуральних чисел. Тоді* X_n *за розподілом збігається до* $\operatorname{Poiss}(\gamma\theta)$*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}\right) =$$
$$= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}\right).$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C^2_{\lceil \gamma n \rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π, то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2, \dots, n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини $\{3, \ldots, n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \ldots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \sum_{\pi = (1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}\left(\{\pi\}\right) =$$

$$= \sum_{\pi = (1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{\mathsf{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} = [\mathsf{c}(\pi) \geq i] =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\pi = (1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{\mathsf{c}(\pi)-i} =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{\mathsf{c}(\tilde{\pi})}.$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.1) на S_{n-i}, але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \ldots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil} (-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil} \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\left(X_n = k\right)$ для $k > 0$ можна отримати аналогічно: існує $C^k_{\lceil\gamma n\rceil}$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = C^k_{\lceil\gamma n\rceil} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil - k} (-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil - k} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) =$$

$$= \frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil - k} (-1)^i \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)} =$$

$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil - k} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k - i + 1)\ldots(\lceil\gamma n\rceil - 2)(\lceil\gamma n\rceil - 1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Нехай N достатньо велике і $\lceil \gamma n \rceil - k > N$, тоді $\mathbb{P}\left(X_n = k\right)$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil \gamma n \rceil - k$.

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{\theta + n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k} \leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma \in [0,1)$, $\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \leq C = C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \leq C^k \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} C^i \leq C^k \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} C^i \to 0, \ N \to \infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{(n - k - i + 1) \dots (n-2)(n-1)n}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \leq$$
$$\leq \frac{(n - k - i + 1) \dots (n-2)(n-1)n}{(n - i - k) \dots (n - 1)} = \frac{n}{n - i - k} \to 1, \ n \to \infty,$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1, то для фіксованого N

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \ N \to \infty.$$

□

Користуючись позначеннями з леми 2.1.1, визначимо для $n \in \mathbb{N}$ точкові процеси P_n на $(E, \mathcal{E}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ за правилом

$$P_n(F) = \text{card} \left\{ i \in \{1, ..., n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F \right\}, \ F \in \mathcal{E}. \qquad (2.3)$$

Тобто, P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса σ, нормованих n, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n\left([0,\gamma]\right)=k\right)=\mathbb{P}\left(N\left([0,\gamma]\right)=k\right),\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 2.1.2. *Послідовність точкових процесів P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n\to\infty$).*

Теорема 1.3.3 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів:

Теорема. *Нехай $(\xi_n, n\geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E,\mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U}\subset\hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B)=0$, а $\mathcal{I}\subset\mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U)=0\right)=\mathbb{P}\left(\xi(U)=0\right)$ *для* $U\in\mathcal{U}$;
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I)>1\right)\leq\mathbb{P}\left(\xi(I)>1\right)$ *для* $I\in\mathcal{I}$.

Розглянемо сім'ю множин $\mathcal{X}$, що складається зі скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a,b\rangle\subset[0,1]$, де $\langle a,b\rangle$ позначає одне з $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ чи $(a,b]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda=\theta\cdot\text{Leb}$ на $[0,1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B)=\Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B\subset\mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B)=0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{E}}_N=\mathcal{X}$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 2.1.2, можна використати теорему 1.3.3 для $\xi_n=P_n$, $\xi=N$ та $\hat{\mathcal{E}}_N=\mathcal{U}=\mathcal{I}=\mathcal{X}$.

Доведення теореми 2.1.2. Нехай $\langle\gamma_1,\delta_1\rangle,...,\langle\gamma_m,\delta_m\rangle$, де $\gamma_1<\delta_1<\gamma_2<...<\gamma_m<\delta_m$, — набір інтервалів в $[0,1]$, що попарно не перетинаються, $\lfloor a\rfloor$ позначає $\max\{k\in\mathbb{Z}:k\leq a\}$, $I_j=\langle\gamma_j,\delta_j\rangle$ і $I=\bigvee_{j=1}^m I_j\in\mathcal{X}$. Позначимо $Y_n=P_n(I)$, де $P_n(I)$ визначено формулою (2.3). Нехай $M_n=\text{card}\left\{i\in\{1,...,n\}:\frac{i}{n}\in I\right\}$ і тоді, аналогічно лемі 2.1.1,

$$\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)=C_{M_n}^k\sum_{i=0}^{M_n-k}(-1)^i C_{M_n-k}^i\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Оскільки card $\left\{i \in \{1, ..., n\} : \frac{i}{n} \in I_j\right\} = \lceil \delta_j n \rceil - \lfloor \gamma_j n \rfloor$ ($\lceil \cdot \rceil$ може змінюватися на $\lfloor \cdot \rfloor$ і навпаки в залежності від n та включення кінцевих точок до інтервалу), а $\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \sum_{j=1}^{m} (\delta_j - \gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 2.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n = k\right) = \frac{1}{k!} \left(\theta \sum_{j=1}^{m} (\delta_j - \gamma_j)\right)^k \exp\left\{-\theta \sum_{j=1}^{m} (\delta_j - \gamma_j)\right\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \mathrm{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^{m} (\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) = \mathbb{P}\left(N(I) = 0\right), I \in \mathcal{X}.$$

Так як $\mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) + \mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right)\right)$ і $\mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right) \to \mathbb{P}\left(N(I) = 1\right)$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = \mathbb{P}\left(N(I) > 1\right), I \in \mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.3.3 справджуються, що і доводить $P_n \xrightarrow{vd} N$ при $n \to \infty$. □

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 2.1.2, для $\gamma = 1$ виконується $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \to e^{-\theta}, n \to \infty$. Введемо ще один точковий процес P'_n, що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left(P'_n(F) = k\right) = \mathbb{P}\left(P_n(F) = k \mid P_n([0,1]) > 0\right) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k > 0; \\ \frac{1-\mathbb{P}\left(P_n\left(F^C\right)=0\right)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Повторенням доведення 2.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 2.1.3. *Точковий процес P'_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу N' на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left(N'(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ \frac{1-e^{-(\theta-\Lambda(F))}}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0,1])$ та $k \in \mathbb{N}$.

Зокрема, для $F = [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(N'([0,1]) = k\right) = \begin{cases} \frac{\theta^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

2.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 2.1.2 та 2.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення з [7]. В термінах грубої збіжності точкових процесів, її можна сформулювати наступним чином:

Теорема 2.2.1 (теорема про неперервне відображення)**.** *Нехай φ є неперервним відображенням з простору $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$ точкових мір на $[0,1]$ з грубою топологією в $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Якщо ξ_n — послідовність точкових процесів, що грубо збігається за розподілом до ξ, $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$, тоді $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$, тобто послідовність випадкових величин $\varphi(\xi_n)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$.*

Зауваження. *За означенням збіжності за розподілом, якщо φ є обмеженою, то також має місце $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$.*

Перед дослідженням граничних розподілів для деяких відображень, варто навести твердження 3.13 з [5], яке можна сформулювати наступним чином:

Лема 2.2.2. *Нехай μ_n — грубо збіжна послідовність точкових мір в $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$, тобто $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Тоді*

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i^{(n)}}, \ \mu = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$$

де δ_x є мірою Дірака, зосередженою в x, а $x_i^{(n)} \to x_i, n \to \infty$ для $i = 1, \ldots, k$.

Це означає, що будь-яка неперервна функція з $\mathbb{R}^k$ (або принаймні $[0,1]^k$) в $\mathbb{R}$ задає неперервне відносно грубої топології відображення.

2.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ відображення можна визначити два відображення $\min(\mu) = \sup\{x \in [0,1] : \mu([0,x]) = 0\}$ та $\max(\mu) = \inf\{x \in [0,1] : \mu([x,1]) = 0\}$, що ставлять у відповідність цій міри її найменший та найбільший атом, де для порожньої множини за домовленістю $\sup\varnothing = 0$ та $\inf\varnothing = 1$. Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки

$\min\{x_1,\dots,x_k\}$ та $\max\{x_1,\dots,x_k\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з леми 2.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 2.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, ніж $\min(N')$ та $\max(N')$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}\left(N(F)=k \mid N([0,1])\right)$ є відомим (твердження 3.8, [6]) — це біноміальний процес з розміром m та розподілом Unif $(0,1)$. Іншим корисним фактом є такий: нехай $U_1,U_2,\dots,U_m$ є тоді розподіли $U_{(1)}$ та $U_{(m)}$ задаються

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}\le x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-x)^m, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases},\quad \mathbb{P}\left(U_{(m)}\le x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^m, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ задаються

$$\mathbb{P}\left(\min(N)\le x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\min(N)\le x \mid N([0,1])=m\right)\mathbb{P}\left(N([0,1])=m\right)= \tag{2.7}$$

$$=\mathbb{1}\left\{x\ge 1\right\}\cdot e^{-\theta}+\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\min(N)\le x\mid N([0,1])=m\right)\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}=$$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(1-(1-x)^m\right)\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}=1-e^{-\theta x}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N)\le x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\max(N)\le x\mid N([0,1])=m\right)\mathbb{P}\left(N([0,1])=m\right)= \tag{2.8}$$

$$=\mathbb{1}\left\{x\ge 0\right\}\cdot e^{-\theta}+\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\max(N)\le x\mid N([0,1])=m\right)\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}=$$

$$=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-\theta}+\sum_{m=1}^{\infty}x^m\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}=e^{\theta(x-1)}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\left(N([0,1])=0\right)=e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\left(\min(N)=1\right)=$

$\mathbb{P}(\max(N) = 0) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (2.9) та (2.10) задають безумовні розподіли $\min(N')$ та $\max(N')$.

Для P'_n $\min(P'_n) = \sup\{x \in [0,1] : \operatorname{card}\{i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\} : Z(i) = i\} = 0\}$ означає супремум значень x, для яких усі $i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\}$ під дією перестановки опиняються не на своїх місцях, аналогічно $\max(P'_n)$ означає інфімум x, для $i \in \{\lfloor xn \rfloor + 1, \ldots, n\}$ опиняються не на своїх місцях. Легко побачити, що такі x можуть набувати лише значень, що є пропорційними $\frac{1}{n}$.

`-- CDF plot --`

Обчислення $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \min(N') \leq \frac{k}{n}\right)$ та $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \max(N') \leq \frac{k}{n}\right)$ дає приблизну частку перестановок, для яких k є відповідно найменшою та найбільшою нерухомою точкою.

`-- comparison table --`

Також, $\mathbb{E}\min(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\mathbb{E}\max(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}\right) dx$ $1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$, тому $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min(P'_n) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max(P'_n) = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$.

2.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. З [7], для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, цей функціонал задається

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^1 f(x)dN\right\} = \exp\left\{-\theta\int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) dx\right\} \tag{2.11}$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0, 1]$.

Позначатимемо $\text{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N. Для будь-якої точкової міри μ, $\text{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (2.11), можна побачити, що перетворення Лапласа $\text{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) = \exp\left\{-\theta\left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right)\right\} \tag{2.12}$$

Оскільки розподіл $\text{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(N')$.

$$\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) = 0) + \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N')} \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) > 0) =$$
$$= e^{-\theta} + \mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta}) \Rightarrow \mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}(p) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) - e\right.$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\}$$

Оскільки $\text{sum}(N')$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(N')$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\text{sum}(N')}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \frac{1}{p} \exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} \tag{2.13}$$

Знаходження оберненого перетворення для (2.13) є доволі складним.

Хоча, існує інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x)$:

$$\mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0, 1]) = m)\, \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) =$$
$$= \mathbb{1}\{x \ge 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0, 1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta}$$

Умовні розподіли $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0, 1]) = m)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\text{Unif}(0, 1)$. Їх функція розподілу наступна:

$$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0 \le x < m \\ 1, & x \ge m \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right)$ може бути виражена через $I_\nu(z), \nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

Наприклад:

$$x \in [0,1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m\right) = e^{-\theta} \cdot I_0(2\sqrt{\theta x})$$

$$x \in [1,2),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m\right)$$

$$= e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)})\right)$$

$$x \in [2,3),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1\right.$$

$$\left. + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-2)!m!}(x-2)^m\right) = e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\theta(x-2) I_2(2\sqrt{\theta(x-2)})\right)$$

В загальному випадку:

$$x \in [n, n+1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)$$

Отже, функція розподілу $\mathrm{sum}(N)$ задається

$$F_{\mathrm{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \ge 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Таким чином, функція розподіу $\mathrm{sum}(N')$ може бути виражена через $F_{\mathrm{sum}(N)}(x)$ наступним чином:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N') \le x\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid \mathrm{sum}(N) > 0\right) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(F_{\mathrm{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}\right) \tag{2.15}$$

```
-- CDF plot --
```

При цьому, $\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\mathrm{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

2.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподілу найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *and* $1 - \max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1, \ldots, n\}$ *це означатиме вважати* 0 *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — незалежні випадкові величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \cdots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (тут і далі, $S_{(i)}$ позначає i-ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n]}$ — те ж саме, але з вказанням n як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [8], [9]). Зокрема, для $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n \tag{2.16}$$

$$\mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}C_{n+1}^{j}\left((1-jx)_+\right)^n \tag{2.17}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого s-min(N) та найбільшого s-max(N) спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S^1_{(1)} = 1$)

$$\mathbb{P}\left(\text{s-min}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(1)} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.18}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{s-max}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(n+1)} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.19}$$

Хоча явні вирази для (2.18) та (2.19), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Добре відомо (наприклад, [8]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.20}$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \ldots, S_{(n)}\right)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.21}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \tag{2.22}$$

Виявляється, (2.21) та (2.22) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

Лема 2.2.3. *Для порядкових статистик спейсингів між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *та та незалежних величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце*

$$S^{[n]}_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \ldots, n \tag{2.23}$$

Доведення. Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \ldots, n$. З [10] відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \cdots + (\Delta_1 + \cdots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+1)\Delta_i$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$.

В термінах Y_i, верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^{n} Y_j}$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (2.23). $\square$

Окремими випадками леми 2.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{X_1}{n\sum_{i=1}^{n} X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Разом з (2.18) та (2.19) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \overset{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},\ \text{s-max}(N) \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \tag{2.24}$$

де ν має розподіл Poiss (θ), а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл Exp (1).

$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N)$ можна знайти з (2.24). Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \cdots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}\left(\nu = n\right) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt$$
$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n$$

де $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ — n-те гармонічне число Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) \approx 0.48483$ and $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спекторський Ігор Якович. Дискретна математика. Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004.
2. Olav Kallenberg. Random Measures, Theory and Applications. Springer International Publishing, 2017.
3. Y. M. Berezansky; Z. G. Sheftel; G. F. Us. Functional analysis, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1996.
4. Богданський Юрій Вікторович. Інтеграл в курсі аналізу. Видавництво «Політехніка», Київ, 2013.
5. Sidney I. Resnick. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. Springer New York, 1987.
6. Günter Last and Mathew Penrose. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.
7. Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In Heavy-Tail Phenomena, pages 39–69. Springer New York, 2007.
8. Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. Journal of Applied Probability, 17(3):623–634, 1980.
9. Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.
10. Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.