

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено
завідувач кафедри
_____ О.Л. Тимошук
« ____ » _____ 2022 р.

Дипломна робота

**на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок»**

Виконав:
студент IV курсу, групи КА-81
Галганов Олексій Андрійович

Керівник:
доцент, к.ф.-м.н. Ільєнко Андрій Борисович

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н. Рощина Надія Василівна

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н. Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:
???

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Галганов Олексій Андрійович

Київ – 2022 року

ЗМІСТ

СКРОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧКИ.....	3
РОЗДІЛ 1 Теоретичні основи	5
1.1. Поняття з алгебри.....	5
1.2. Поняття з теорії міри та функціонального аналізу.....	5
1.3. Поняття з теорії випадкових процесів.....	8
РОЗДІЛ 2 Попередні відомості	13
2.1. Поняття про перестановки Юенса	13
2.2. Огляд наявних результатів	15
РОЗДІЛ 3 Граничні теореми	16
3.1. Граничний розподіл нерухомих точок.....	16
3.2. Статистичні властивості нерухомих точок.....	21
3.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки.....	21
3.2.2 Сума нерухомих точок	25
3.2.3 Найменші і найбільші спейсинги	30
РОЗДІЛ 4 Чисельне моделювання та дослідження збіжності.....	33
4.1. Алгоритми для генерування перестановок	33
4.1.1 Процес китайського ресторану.....	33
4.1.2 Каплінг Феллера	34
4.2. Перевірка отриманих результатів	35
4.2.1 Розподіл кількості нерухомих точок.....	35
4.2.2 Розподіл найменшої та найбільшої нерухомих точок	37
4.2.3 Розподіл суми нерухомих точок.....	40
4.2.4 Розподіл найменшого і найбільшого спейсингів.....	41
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	45
ДОДАТОК А. ПРОГРАМНИЙ КОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ.....	47

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

$\mathbb{1}\{\cdot\}$ — індикаторна функція, що дорівнює 1 у випадку, коли умова в дужках справджується, і 0 у іншому випадку.

$\text{card } X$ — потужність множини X .

$\lceil x \rceil$ — найменше ціле число, яке більше або дорівнює дійсному числу x .

$\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле число, яке менше або дорівнює дійсному числу x .

\mathbb{N}_0 — множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

S_n — група перестановок (симетрична група) степеня n .

$c(\pi)$ — кількість циклів у розкладі перестановки π в композицію незалежних циклів.

$C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм.

$\mathcal{B}(X)$ — борелева σ -алгебра на множині X .

$M_p(E)$ — множина усіх точкових мір, визначених на просторі E .

$\langle a, b \rangle$ — інтервал, позначає одне з $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ чи $(a, b]$.

δ_x — міра Дірака, зосереджена в точці x .

Leb — міра Лебега.

$\mathcal{L}\{f\}$ — перетворення Лапласа функції f .

ψ_N — функціонал Лапласа точкового випадкового процесу N .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ — верхня границя послідовності a_n .

$a_n \rightarrow a$ — числова послідовність a_n збігається до a .

$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ — послідовність мір μ_n грубо збігається до міри μ .

$\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ — послідовність точкових випадкових процесів ξ_n грубо збігається за розподілом до точкового випадкового процесу ξ .

$X_n \xrightarrow{Sd} X$ — послідовність випадкових процесів X_n збігається за розподілом у топології Скорохода до випадкового процесу X .

$X_n \xrightarrow{d} X$ — послідовність випадкових величин X_n збігається за розподілом до випадкової величини X .

$X \stackrel{d}{=} Y$ — випадкові величини X та Y рівні за розподілом.

$X_{(k)}$ — k -та порядкова статистика, тобто k -та за номером випадкова величина серед відсортованих у порядку зростання неперервних випадкових величин X_1, \dots, X_n .

$X_{(k)}^{[n]}$ — k -та порядкова статистика для n випадкових величин.

$\mathbb{E}X$ — математичне сподівання випадкової величини X .

$X \sim P$ — випадкова величина X має розподіл P .

$\text{Pois}(a)$ — дискретний розподіл Пуассона з параметром $a > 0$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$ для $n \in \mathbb{N}_0$.

$U(a, b)$ — абсолютно неперервний рівномірний розподіл на інтервалі $\langle a, b \rangle$ зі щільністю $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{x \in \langle a, b \rangle\}$.

$\text{Exp}(\lambda)$ — абсолютно неперервний експоненційний розподіл з параметром $\lambda > 0$ зі щільністю $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$.

$\text{ESF}(n, \theta)$ — розподіл Юенса на S_n з параметрами $n \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$.

$I_\nu(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду, $\nu \in \mathbb{R}$.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1.1. Поняття з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114). *Перестановкою π на множині $A = \{1, \dots, n\}$ називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \rightarrow A$.*

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118). *Циклом довжини k (i_1, \dots, i_k) називають перестановку π , що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \dots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \dots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \dots, n$.*

Означення 1.1.3. Цикли (i_1, \dots, i_{k_1}) та (j_1, \dots, j_{k_2}) на $\{1, \dots, n\}$ називають незалежними, якщо вони зсувають різні елементи, тобто $i_{m_1} \neq j_{m_2}$ для всіх $m_1 = 1, \dots, k_1$, $m_2 = 1, \dots, k_2$. Незалежні цикли комутують за операцією композиції.

Теорема 1.1.1 ([1], ст. 119). *Кожну перестановку можна зобразити як композицію незалежних циклів. Це зображення є єдиним з точністю до порядку циклів.*

Означення 1.1.4 ([1], ст. 116). *Групою перестановок (симетричною групою) степеня n називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \dots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).*

1.2. Поняття з теорії міри та функціонального аналізу

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{R} називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): сім'я \mathcal{R} непорожня та замкнена відносно скінченних об'єднань та різниць.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{S} називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з \mathcal{S} представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з \mathcal{S} , тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{A} називається *σ -алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

- а) $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A^C = X \setminus A \in \mathcal{A})$;
- б) $(A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара (X, \mathcal{A}) називається *вимірним простором*.

Означення 1.2.4 ([4], ст. 146). Нехай (X, \mathcal{A}_X) та (Y, \mathcal{A}_Y) — два вимірних простори. Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить \mathcal{A}_X .

Означення 1.2.5 ([4], ст. 147). Нехай X — метричний простір, \mathcal{O} — сім'я всіх відкритих підмножин X . Мінімальна σ -алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить \mathcal{O} , називається *борелевою σ -алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами*.

Означення 1.2.6 ([2], ст. 24). Сім'я підмножин \mathcal{S} сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

- а) Кожну відкриту підмножину X можна зобразити як зліченне об'єднання множин з \mathcal{S} ;
- б) Кожну обмежену підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з \mathcal{S} .

Для простору \mathbb{R}^n прикладом розсікаючої сім'ї множин є сім'я куль з раціональними радіусами та центрами в точках з раціональними координатами.

Означення 1.2.7 ([3], ст. 8). Нехай \mathcal{A} — σ -алгебра у просторі X . Функція $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , якщо виконуються наступні дві умови:

- а) Невід'ємність: $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
- б) σ -адитивність: для довільних множин $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.8. Міра μ на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) називається *ймовірнісною*, якщо $\mu(X) = 1$.

Означення 1.2.9 ([2], ст. 22). Нехай (X, \mathcal{A}) — вимірний простір, для якого $\{x\} \in \mathcal{A}$ для всіх $x \in X$. Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на (X, \mathcal{A}) , якщо $\mu(\{x\}) > 0$.

Означення 1.2.10 ([2], ст. 22; [5], ст. 123). *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

Означення 1.2.11 ([5], ст. 123). *Точкова міра* — це міра μ на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — злічений набір точок X , не обов'язково різних. У випадку, коли X — метричний простір, точкова міра називається *радоноювою*, якщо міра компактних множин з \mathcal{A} завжди є скінченною.

Означення 1.2.12 ([5], ст. 124). Точкова міра μ на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) називається *простою*, якщо для всіх $x \in X$ $\mu(\{x\}) \leq 1$.

Теорема 1.2.1. Нехай $(f_n, n \geq 1)$ — послідовність функцій $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i)| < \infty$. Якщо існують такі $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, що для всіх i $f_n(i) \rightarrow f(i)$, $|f_n(i)| \leq g(i)$ і $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) < \infty$, то

- а) $\sum_{i=0}^{\infty} |f(i)| < \infty$;
- б) $\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i)$;
- в) $\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Теорема 1.2.1 є окремим випадком теореми Лебега про мажоровану збіжність ([4], ст. 164) для міри μ на $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$, визначеної за правилом $\mu(A) = \text{card}(A)$.

Означення 1.2.13 ([5], ст. 140). Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , де X є метричним простором, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо виконується $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Надалі вважатимемо, що якщо мова йде про грубу збіжність послідовності мір, то простір, на якому вони задані, є метричним. Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

Теорема 1.2.2 ([5], ст. 144). Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ та μ — міри на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) і $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Для кожної компактної множини $K \subset X$ з $\mu(\partial K) = 0$ існує номер $N = N(K)$ такий, що при $n \geq N$ існують нумерації атомів μ_n та μ , $x_i^{(n)}, 1 \leq i \leq p$ та $x_i, 1 \leq i \leq p$ відповідно, такі, що

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^p \delta_{x_i^{(n)}}(A), \quad \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^p \delta_{x_i}(A)$$

для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ для всіх $1 \leq i \leq p$.

Означення 1.2.14 ([6], ст.121-124). *Простором càdlàg-функцій* на $[0, 1]$ називається простір $\mathcal{D}_{[0,1]}$ функцій $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, які неперервні справа і мають границі зліва.

Означення 1.2.15. *Метрикою Скорохода* на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ називається метрика, визначена за формулою

$$d(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left(\sup_{x \in [0,1]} |\lambda(x) - x|, \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \right),$$

де Λ — множина строго зростаючих неперервних відображень $[0, 1]$ в себе.

Послідовність функцій $f_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ збігається за метрикою Скорохода до $f \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність функцій $\lambda_n \in \Lambda$ таких, що рівномірно відносно x $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda_n(x)) = f(x)$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = x$, тобто виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(\lambda_n(x)) - f(x)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_n(x) - x| = 0.$$

1.3. Поняття з теорії випадкових процесів

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, E — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева σ -алгебра підмножин E .

Позначимо через $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на E , а через $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу σ -алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, \mathcal{A} — σ -алгебра підмножин Ω , а \mathbb{P} — ймовірнісна міра на цьому просторі, тобто задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення 1.3.1. *Точковий випадковий процес* N — вимірне відображення з простору (Ω, \mathcal{A}) в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес N задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P}[N \in \cdot]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

Теорема 1.3.1 ([5], ст. 124). N є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного $F \in \mathcal{E}$ відображення $\omega \mapsto N(\omega, F)$ з (Ω, \mathcal{A}) в $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ є вимірним.

Означення 1.3.2 ([7], ст. 49). Точковий процес N на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) називається *простим*, якщо $\mathbb{P}(\forall x \in E : N(\{x\}) \leq 1) = 1$.

Теорема 1.3.2 ([5], ст. 126). Нехай N — точковий процес на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) , а сім'я передкомпактних множин \mathcal{F} задовольняє наступні умови:

а) $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$;

б) \mathcal{E} є мінімальною σ -алгеброю, що містить \mathcal{F} ;

в) Існує послідовність множин $E_n \in \mathcal{F}$, для якої $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1, \dots, I_k}(n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \leq j \leq k)$$

для $I_i \in \mathcal{F}$ та цілих $n_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$.

Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1, \dots, I_k}, k = 1, 2, \dots, I_j \in \mathcal{F}\}$ однозначно визначає розподіл P_N .

Теорема 1.3.3 ([7], ст. 50). Нехай N та N' — прості точкові процеси на (E, \mathcal{E}) і

$$\mathbb{P}(N(F) = 0) = \mathbb{P}(N'(F) = 0), \quad F \in \mathcal{E}.$$

Тоді N та N' мають однакові розподіли.

Означення 1.3.3 ([5], ст. 129). Нехай N — точковий процес на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) . Функціоналом Лапласа для N називається відображення ψ_N , що переводить невід'ємні вимірні функції на (E, \mathcal{E}) у $[0, +\infty)$ за правилом

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)} = \int_{\Omega} e^{-N(\omega, f)} d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \exp \left\{ - \int_E f(x) d\nu \right\} dP_N(\nu)$$

Наслідком теореми 1.3.2 є наступне твердження:

Теорема 1.3.4 ([5], ст. 129). Функціонал Лапласа ψ_N однозначно визначає точковий процес N .

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

Означення 1.3.4 ([2], ст. 127). Мірою інтенсивності або середньою мірою точкового процесу N називається міра μ на \mathcal{E} , визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_{\Omega} N(\omega, F) d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \nu(F) dP_N(\nu).$$

Наведемо приклад точкового процесу.

Означення 1.3.5 ([7], ст. 11). Нехай P — деяка ймовірнісна міра на (E, \mathcal{E}) , а X_1, \dots, X_m — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \dots, m$ визначено δ_{X_i} — точковий процес, для якого $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 1) = \mathbb{P}(X_i \in F)$, $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 0) = \mathbb{P}(X_i \notin F)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \dots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальним процесом* з розміром вибірки m та розподілом P . Для нього

$$\mathbb{P}(X(F) = k) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \quad k = 0, \dots, m, \quad F \in \mathcal{E}.$$

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

Означення 1.3.6 ([5], ст. 130). Нехай μ — радонова міра на \mathcal{E} . Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ , якщо N задовольняє наступні умови:

а) Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід’ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}(N(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty. \end{cases}$$

У випадку $\mu(F) = \infty$ покладаємо $N(F) = \infty$ з ймовірністю 1.

б) Для будь-якого натурального k , якщо F_1, \dots, F_k з \mathcal{E} попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \leq i \leq k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Функціонал Лапласа точкового процесу Пуассона визначено формулою

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-f(x)}) d\mu \right\}$$

Як і для не випадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

Означення 1.3.7 ([2], ст. 109). Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) . Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції $\varphi : M_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \geq 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

Теорема 1.3.5 ([2], ст. 121). Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) , а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E , для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — розсікаюче напівкільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n(U) = 0) = \mathbb{P}(\xi(U) = 0)$ для $U \in \mathcal{U}$;
- б) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n(I) > 1) \leq \mathbb{P}(\xi(I) > 1)$ для $I \in \mathcal{I}$.

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

Теорема 1.3.6 ([8], ст. 42). Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) , яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу ξ , а відображення $\varphi : M_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$ таке, що

$$\mathbb{P}(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперервною в } \mu\}) = 0.$$

Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \geq 1)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$, тобто $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$.

Розглянемо також поняття звичайних випадкових процесів.

Означення 1.3.8 ([9], ст. 83). Нехай (E, \mathcal{E}) — вимірний простір, $T \subset \mathbb{R}$ — множина індексів. Відображення $X : \Omega \rightarrow U \subset E^T$ називається *випадковим процесом* на T зі значеннями в E та траєкторіями в U , якщо відображення $X_t : \Omega \rightarrow E$ вимірні для кожного $t \in T$.

Означення 1.3.9. Нехай X — випадковий процес на $[0, 1]$ зі значеннями в \mathbb{R} . Якщо траєкторії $X(t)$ з ймовірністю 1 належать простору $\mathcal{D}_{[0,1]}$, то X називається *càdlàg-процесом*.

Означення 1.3.10 ([9], ст. 512). Нехай $(X_n, n \geq 1)$ — послідовність випадкових càdlàg-процесів. Якщо $\mathbb{E}\varphi(X_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(X)$ для кожного обмеженого функціонала $\varphi : \mathcal{D}_{[0,1]} \rightarrow \mathbb{R}$, неперервного на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ відносно метрики Скорохода, то послідовність $(X_n, n \geq 1)$ збігається за розподілом у топології Скорохода, що позначається $X_n \xrightarrow{Sd} X$.

Наведемо ще один тип збіжності точкових процесів та його зв'язок з грубою збіжністю за розподілом.

Означення 1.3.11 ([2], ст. 127). Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) , де $E = [0, 1]$. Якщо для $X_n(t) = \xi_n([0, t])$ та $X(t) = \xi([0, t])$ виконується $X_n \xrightarrow{Sd} X$, то послідовність $(\xi_n, n \geq 1)$ збігається за розподілом у топології Скорохода, що позначається $\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi$.

Теорема 1.3.7 ([2], ст. 127). Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі (E, \mathcal{E}) , де $E = [0, 1]$. Тоді $(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi) \Rightarrow (\xi_n \xrightarrow{vd} \xi)$. Якщо ж додатково ξ — простий і $\xi(\{0\}) = 0$, то $(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi) \Leftrightarrow (\xi_n \xrightarrow{vd} \xi)$.

РОЗДІЛ 2

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Поняття про перестановки Юенса

Перестановки — бієктивні відображення на множині $\{1, \dots, n\}$ — є одним з найважливіших об'єктів, що досліджує комбінаторика. Добре відомими є їх властивості, як-от утворення групи S_n за операцією композиції, можливість розкладу на композицію циклів або транспозицій, поняття інверсій та парності ([1], ст. 113-132).

Перестановки можна розглядати і з імовірнісної точки зору, задавши деякий розподіл (ймовірнісну міру) \mathbb{P} на множині всіх перестановок S_n для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ і розглядаючи розподіл випадкових величин, пов'язаних з ними. Прикладом такої величини є кількість нерухомих точок — таких $i \in \{1, \dots, n\}$, які перестановка переводить в себе ж. Розподіл на S_n , як і будь-яку міру на скінченній множині, можна задати, поставивши у відповідність кожній з $n!$ перестановок невід'ємне дійсне число таким чином, щоб їх сума дорівнювала 1. Найпростішим прикладом є рівномірний розподіл, для якого $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in S_n$.

У даній роботі розглядається однопараметричний розподіл Юенса, названий на честь Воррена Юенса — австрало-американського математика, який працював з математичною теорією генетики популяцій та у 1972 році опублікував у статті «The sampling theory of selectively alleles» [10] дослідження розподілу кількості алелів у вибірці генів з великої популяції. У біології алелі — це парні гени, що визначають взаємовиключні варіанти однієї генетичної ознаки (наприклад, високий чи низький зріст, темне або світле волосся тощо).

Юенсом було отримано сумісний розподіл величин $(C_j(n), 1 \leq j \leq n)$ — кількості алелів, що зустрінуться у вибірці з n генів j разів:

$$\mathbb{P}(C_1(n) = c_1, C_2(n) = c_2, \dots, C_n(n) = c_n) = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}, \quad (2.1)$$

де $\sum_{j=1}^n j c_j = n$, $\theta_{(n)} = \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)$, а параметр $\theta > 0$ пов'язаний зі швидкістю появи нових типів алелів у популяції. Історію появи формули (2.1), що відіграла значну роль не тільки в генетиці популяцій, а й теорії випадкових відображень та перестановок, детально викладено у статті Саймона Таваре «The magical Ewens sampling formula» [11], виданої на честь 50-тої річниці написання відповідної статті Юенса.

Розглянемо однопараметричний розподіл на S_n , для якого $\mathbb{P}(\{\pi\}) = C(\theta) \cdot \theta^{c(\pi)}$, тобто ймовірність вибору перестановки пропорційна $\theta^{c(\pi)}$, де $\theta > 0$ і $c(\pi)$ позначає кількість циклів у розкладі перестановки π в композицію незалежних циклів, єдиність якої гарантується теоремою 1.1.1. Відомо ([12], ст. 824), що кількість перестановок в S_n з k циклами дорівнює $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ — модулю числа Стірлінга першого роду. Щоб знайти константу нормування $C(\theta)$, скористаємося тим, що $\mathbb{P}(S_n) = 1$:

$$\mathbb{P}(S_n) = \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) = C(\theta) \sum_{\pi \in S_n} \theta^{c(\pi)} = C(\theta) \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \theta^k = 1$$

З властивостей чисел Стірлінга першого роду $\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \theta^k = \theta_{(n)}$, тому $C(\theta) = \frac{1}{\theta_{(n)}}$.

Означення 2.1.1. Розподілом Юенса на групі перестановок S_n з параметром $\theta > 0$ називається розподіл, для якого

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \quad \pi \in S_n, \quad (2.2)$$

де $c(\pi)$ позначає кількість циклів у π .

Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса* і, за потреби, для позначення такої перестановки σ на S_n застосовуватимемо позначення $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$. Якщо $\theta = 1$, то формула (2.2) задає рівномірний розподіл на S_n .

Встановимо відповідність між (2.1) та (2.2). Нехай $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$, а $c_j(\sigma)$ позначає кількість циклів довжини j у розкладі σ в композицію незалежних циклів. Знайдемо $\mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n)$, де $\sum_{j=1}^n j c_j = n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n) &= \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{\theta_{(n)}} \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \theta^{c(\pi)} = \\ &= \frac{1}{\theta_{(n)}} \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \theta^{c_1 + \dots + c_n} = \frac{\theta^{c_1 + \dots + c_n}}{\theta_{(n)}} \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{1}_{\{\forall j=1, \dots, n: c_j(\pi) = c_j\}}. \end{aligned}$$

З [13], ст. 11, відомо, що кількість перестановок π , для яких $c_j(\pi) = c_j, j = 1, \dots, n$, дорівнює $n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}$, тому

$$\mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n) = \frac{\theta^{c_1 + \dots + c_n}}{\theta_{(n)}} \cdot n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!} = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}.$$

Отже, розподіл кількості циклів різної довжини у перестановці з розподілом (2.2) збігається з розподілом кількості алелів у вибірці з n генів, заданим (2.1).

2.2. Огляд наявних результатів

РОЗДІЛ 3

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

3.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Як вже було згадано, для нерухомих точок перестановки σ з рівномірним розподілом на S_n (він же $\text{ESF}(1, \theta)$) кількість нерухомих точок при $n \rightarrow \infty$ збігається до $\text{Pois}(1)$.

У [7] на ст. 8 пропонується довести, що у випадку рівномірного розподілу перестановки розподіл нерухомих точок серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел, де $\gamma \in [0, 1]$, збігається до $\text{Pois}(\gamma)$. Виявляється, що ця задача узагальнюється на випадок перестановок з розподілом Юенса (2.2). Розглянемо та доведемо відповідну лему.

Лема 3.1.1. *Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1, \dots, n\}$, що задана розподілом (2.2), тобто, $\sigma \in \text{перестановкою Юенса з } S_n$. Нехай $\gamma \in [0, 1]$, а $X_n = \text{card} \{i \in \{1, \dots, \lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до $\text{Pois}(\gamma\theta)$, тобто*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для ймовірностей $\mathbb{P}(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= \mathbb{P}(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C) = 1 - \mathbb{P}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}) = \\ &= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i < j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}). \end{aligned}$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C_{\lceil \gamma n \rceil}^2$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π , то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою на множині $\{2, \dots, n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π , то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою на множині $\{3, \dots, n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}(1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma) = \sum_{\pi = (1)(2)\dots(i) \circ \tilde{\pi} \in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = [c(\pi) \geq i] = \\
&= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{c(\pi)-i} = \\
&= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{c(\tilde{\pi})}.
\end{aligned}$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.2) на S_{n-i} , але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}(1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil}^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}(X_n = k)$ для $k > 0$ можна отримати аналогічно: існує $C_{\lceil \gamma n \rceil}^k$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil \gamma n \rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}(X_n = 0)$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_{\lceil \gamma n \rceil}^k \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil - k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$ за допомогою теореми 1.2.1.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_n = k) = \\
&= \frac{(\lceil \gamma n \rceil)!}{k!(\lceil \gamma n \rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k)!}{i!(\lceil \gamma n \rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)} = \\
&= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \underbrace{(-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1)\dots(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-2)(\theta+n-1)}}_{f_n(i)} = \\
&= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} f_n(i) = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) \mathbb{1}_{\{i \leq \lceil \gamma n \rceil - k\}} = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}_n(i).
\end{aligned}$$

Знайдемо поточкову границю $\tilde{f}_n(i)$ при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(i) = (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{i \leq \lceil \gamma n \rceil - k\}}}_{=1}.$$

Оскільки $\gamma n \leq \lceil \gamma n \rceil \leq \gamma n + 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} = \gamma^{i+k}$. Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(i) = (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \cdot \gamma^{i+k} = f(i).$$

Знайдемо тепер функцію g , для якої $|\tilde{f}_n(i)| \leq g(i)$ для всіх i та n і $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) < \infty$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} = \gamma^{i+k} \leq \gamma^k$, то ця послідовність з якогось номеру n обмежена константою C , що не залежить від i , тому з цього ж номера

$$|\tilde{f}_n(i)| \leq \frac{\theta^i}{i!} \cdot C = g(i).$$

Оскільки $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) = C \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} = C \cdot e^{\theta} < \infty$, то g є шуканою функцією.

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{\theta^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}_n(i) = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \\ &= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Користуючись позначеннями з леми 3.1.1, визначимо для $n \in \mathbb{N}$ точкові процеси P_n на $(E, \mathcal{E}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ за правилом

$$P_n(F) = \text{card} \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F \right\}, \quad F \in \mathcal{E}. \quad (3.1)$$

Отже, P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса σ , нормованих n , тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n([0, \gamma]) = k) = \mathbb{P}(N([0, \gamma]) = k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb on } [0, 1]$. Ви-являється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 3.1.2. *Послідовність точкових процесів P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n \rightarrow \infty$).*

Теорема 1.3.5 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів, скористаємось позначеннями з неї.

Розглянемо сім'ю множин \mathcal{X} , що складається зі скінченних диз'юнктивних об'єднань інтервалів $\langle a, b \rangle \subset [0, 1]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\mathcal{X} \subset \hat{\mathcal{E}}_N$. Також, \mathcal{X} є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 3.1.2, можна використати теорему 1.3.5 для $\xi_n = P_n, \xi = N$ та $\mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

Доведення теореми 3.1.2. Нехай $\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \delta_m \rangle$, де $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \delta_m$, — набір інтервалів в $[0, 1]$, що попарно не перетинаються, $I_j = \langle \gamma_j, \delta_j \rangle$ і $I = \bigcup_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$. Позначимо $Y_n = P_n(I)$, де $P_n(I)$ визначено формулою (3.1). Нехай $M_n = \text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{i}{n} \in I\}$ і тоді, аналогічно лемі 3.1.1,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = C_{M_n}^k \sum_{i=0}^{M_n-k} (-1)^i C_{M_n-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)}.$$

Оскільки $\text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{i}{n} \in I_j\} = \lceil \delta_j n \rceil - \lfloor \gamma_j n \rfloor$ ($\lceil \cdot \rceil$ може змінюватися на $\lfloor \cdot \rfloor$ і навпаки в залежності від n та включення кінцевих точок до інтервалу), а $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 3.1.1, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{k!} \left(\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right)^k \exp \left\{ -\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \text{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n(I) = 0) = \mathbb{P}(N(I) = 0), I \in \mathcal{X}.$$

Так як $\mathbb{P}(P_n(I) > 1) = 1 - (\mathbb{P}(P_n(I) = 0) + \mathbb{P}(P_n(I) = 1))$ і $\mathbb{P}(P_n(I) = 1) \rightarrow$

$\mathbb{P}(N(I) = 1)$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n(I) > 1) = \mathbb{P}(N(I) > 1), I \in \mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.3.5 справджуються, що і доводить $P_n \xrightarrow{vd} N$ при $n \rightarrow \infty$. \square

Варто також зауважити важливий наслідок теореми 3.1.2.

Наслідок 3.1.2. *Оскільки граничний процес Пуассона N простий і $N(\{0\}) = 0$ з ймовірністю 1, то в силу теореми 1.3.7 має місце збіжність $P_n \xrightarrow{Sd} N$.*

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 3.1.2 для $\gamma = 1$ виконується $\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow e^{-\theta}, n \rightarrow \infty$. Введемо ще один точковий процес \hat{P}_n , що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0, 1])$ як

$$\mathbb{P}(\hat{P}_n(F) = k) = \mathbb{P}(P_n(F) = k \mid P_n([0, 1]) > 0) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k > 0; \\ \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=0, P_n(F^C)>0)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k = 0. \end{cases}$$

В силу теореми 1.3.3 достатньо визначити лише одновимірні розподіли. Повторенням доведення 3.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 3.1.3. *Точковий процес \hat{P}_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу \hat{N} на $[0, 1]$, для якого*

$$\mathbb{P}(\hat{N}(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ \frac{\mathbb{P}(N(F)=0, N(F^C)>0)}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0, 1])$ та $k \in \mathbb{N}$.

За властивістю 2 у означенні 1.3.6 маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(F) = 0, N(F^C) > 0) &= \mathbb{P}(N(F) = 0) \cdot \mathbb{P}(N(F^C) > 0) = \\ &= \mathbb{P}(N(F) = 0) \cdot (1 - \mathbb{P}(N(F^C) = 0)) = e^{-\Lambda(F)} \cdot (1 - e^{-\Lambda(F^C)}) = \\ &= e^{-\Lambda(F)} \cdot (1 - e^{-\theta} e^{\Lambda(F)}) = e^{-\Lambda(F)} - e^{-\theta}, \end{aligned}$$

тому можна записати

$$\mathbb{P}(\widehat{N}(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ \frac{e^{-\Lambda(F)} - e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases}$$

Зокрема, для $F = [0, 1]$:

$$\mathbb{P}(\widehat{N}([0, 1]) = k) = \begin{cases} \frac{\theta^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

3.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 3.1.2 та 3.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення 1.3.6. Корисною також є теорема 1.2.2, згідно з якою для послідовності точкових мір μ_n , що грубо збігається до точкової міри μ , для будь-якої компактної множини існує номер, починаючи з якого усі елементи послідовності містять стільки ж атомів з цієї множини, скільки й гранична міра. Це означає, що будь-яка неперервна функція багатьох змінних утворює на просторі точкових мір неперервне відносно грубої топології відображення. У нашому випадку достатньо обмежитись функціями з $[0, 1]^p$.

3.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ на $[0, 1]$ визначимо відображення $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$, що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атоми за формулами

$$\begin{aligned} \min(\mu) &= \sup \{x \in [0, 1] : \mu([0, x]) = 0\}, \\ \max(\mu) &= \inf \{x \in [0, 1] : \mu([x, 1]) = 0\}, \end{aligned}$$

де для порожньої множини покладаємо $\sup \emptyset = 0$ та $\inf \emptyset = 1$. Якщо $\{x_1, \dots, x_k\}$ — множина атомів μ , то $\min(\mu) = \min \{x_1, \dots, x_k\}$ і $\max(\mu) = \max \{x_1, \dots, x_k\}$.

Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min \{x_1, \dots, x_k\}$ та $\max \{x_1, \dots, x_k\}$ є неперервними функціями з \mathbb{R}^k в \mathbb{R} , з теореми 1.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 3.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}(N(F) = k \mid N([0, 1]) = m)$ є відомим (твердження 3.8, ст. 23, [7]) — це одновимірний розподіл біноміального процесу з

розміром вибірки m та розподілом $U(0, 1)$. Це означає, що за умови $N([0, 1]) = m$ сумісний розподіл положень всіх m атомів збігається з розподілом випадкового вектора з m незалежних випадкових величин з розподілом $U(0, 1)$. Також, корисним є такий факт: нехай U_1, U_2, \dots, U_m є незалежними випадковими величинами з розподілом $U(0, 1)$; тоді розподіли $U_{(1)}^{[m]} = \min\{U_1, \dots, U_m\}$ та $U_{(m)}^{[m]} = \max\{U_1, \dots, U_m\}$ задаються формулами

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1 - x)^m, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^m, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

оскільки

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \leq x\right) &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(U_1 > x, \dots, U_m > x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(U_m > x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(U_1 \leq x)) \cdot \dots \cdot (1 - \mathbb{P}(U_m \leq x)), \\ \mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \leq x\right) &= \mathbb{P}(U_1 \leq x, \dots, U_m \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(U_m \leq x). \end{aligned}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} (1 - (1 - x)^m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1; \end{cases} \\ \mathbb{P}(\max(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}(N([0, 1]) = 0) = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}(\min(N) = 1) = \mathbb{P}(\max(N) = 0) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0, 1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (3.3) та (3.4) задають безумовні розподіли $\min(\hat{N})$ та $\max(\hat{N})$.

З формул (3.1) та (3.2) випливає, що $n \cdot \min(\hat{P}_n)$ — найменша нерухома точка перестановки Юенса на S_n , а $n \cdot \max(\hat{P}_n)$ — найбільша, за умови, що нерухомі точки взагалі існують.

Також, можна обчислити відповідні математичні сподівання:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \min(\hat{N}) &= \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}(\min(\hat{N}) \leq x)\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - e^{-\theta}}\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta x} - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} - e^{-\theta}\right) = \frac{1}{\theta} - \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, \\ \mathbb{E} \max(\hat{N}) &= \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}(\max(\hat{N}) \leq x)\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x} - 1}{e^{\theta} - 1}\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta x}}{e^{\theta} - 1}\right) dx = \frac{1}{e^{\theta} - 1} \cdot \left(e^{\theta} - \frac{e^{\theta} - 1}{\theta}\right) = \frac{e^{\theta}}{e^{\theta} - 1} - \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \min(\hat{P}_n) = \mathbb{E} \min(\hat{N})$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \max(\hat{P}_n) = \mathbb{E} \max(\hat{N})$, то, наприклад, для $\theta = 1$ при великих значеннях n маємо $\mathbb{E} \min(\hat{P}_n) \approx \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \cdot n \approx 0.418 \cdot n$, $\mathbb{E} \max(\hat{P}_n) \approx \frac{1}{e-1} \cdot n \approx 0.582 \cdot n$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.1. Нехай $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$, а $m_n = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ та $M_n = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ — відповідно, найменша на найбільша нерухомі точки σ , де за домовленістю $\min \emptyset = n$, $\max \emptyset = 1$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ виконуються граничні співвідношення $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{d} m$, $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} M$, де функції розподілу

випадкових величин m та M дорівнюють, відповідно,

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Якщо позначити \hat{m}_n та \hat{M}_n найменшу та найбільшу нерухомі точки за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничні співвідношення $\frac{\hat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{m}$ і $\frac{\hat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{M}$, де \hat{m} та \hat{M} є абсолютно неперервними випадковими величинами з функціями та щільностями розподілу

$$F_{\hat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad f_{\hat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_{\hat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad f_{\hat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{\theta x}}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

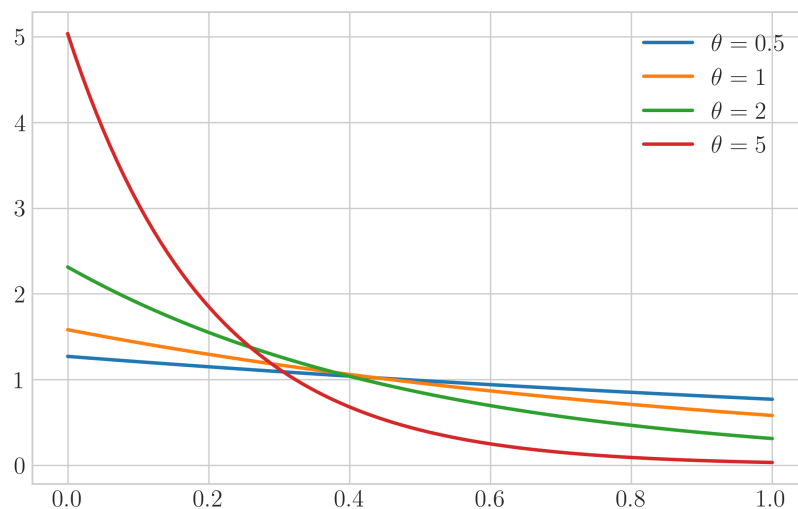


Рисунок 3.1 – Графіки щільності $f_{\hat{m}}(x)$ для різних значень θ .

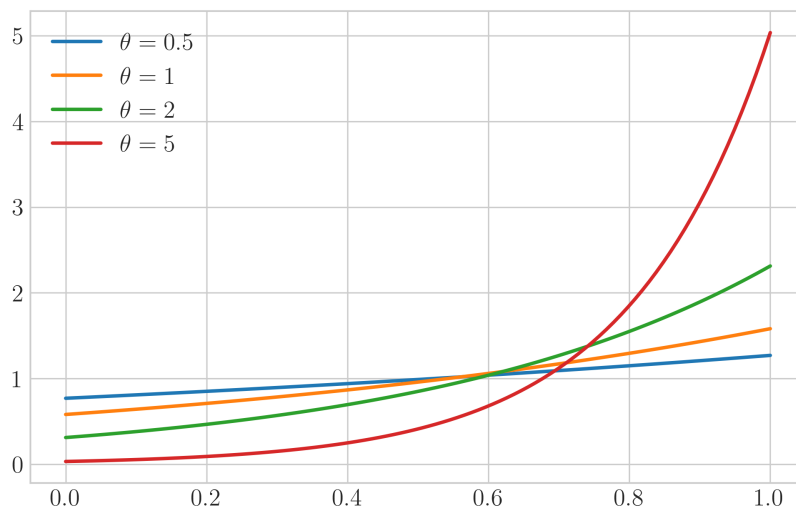


Рисунок 3.2 – Графіки щільності $f_{\hat{M}}(x)$ для різних значень θ .

3.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. Згідно з означенням 1.3.6, для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$ цей функціонал задається як

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ -\theta \int_0^1 (1 - e^{-f(x)}) dx \right\} \quad (3.5)$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0, 1]$.

Позначатимемо $\text{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N . Для будь-якої точкової міри μ , $\text{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (3.5), можна побачити, що перетворення Лапласа $\text{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) = \exp \left\{ -\theta \left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1) \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Оскільки розподіл $\text{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(\hat{N})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) &= \mathbb{E}e^{-p \cdot \text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) = 0) + \\ &+ \mathbb{E}e^{-p \cdot \text{sum}(\hat{N})} \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) > 0) = e^{-\theta} + \mathcal{L}\{\text{sum}(\hat{N})\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta}) \\ \mathcal{L}\{\text{sum}(\hat{N})\}(p) &= \frac{1}{1 - e^{-\theta}} (\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) - e^{-\theta}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\exp \left\{ -\frac{\theta}{p} (e^{-p} - 1) \right\} - 1 \right) \quad (3.7)$$

$\text{sum}(\hat{N})$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L} \left\{ \text{sum}(\hat{N}) \right\} (p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(\hat{N})$ задається

$$\mathcal{L} \left\{ F_{\text{sum}(\hat{N})}(x) \right\} (p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\exp \left\{ -\frac{\theta}{p} (e^{-p} - 1) \right\} - 1 \right) \quad (3.8)$$

Знаходження оберненого перетворення для (3.8) є доволі складним.

Розглянемо інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} \end{aligned}$$

Згідно з [14] (ст. 296), умовні розподіли $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $U(0, 1)$. Їх функція розподілу має вигляд

$$F_s^{[m]}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k C_m^k (x - k)^m, & 0 \leq x < m, \\ 1, & x \geq m. \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x)$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду ([12], ст. 375):

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2} z \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} z^2 \right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Отримаємо відповідну формулу. Нехай $x \in [n, n + 1)$,

$$\begin{aligned} e^\theta \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^n 1 \cdot \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_m^k (x - k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(m-k)!} (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!(m-k)!} (x-k)^m \theta^m \right) = [m-k=l] = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{l+k} \theta^{l+k} \right) = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left(\sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l \right) = \\
&= \left[\frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l = a_{k,l} \right] = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} - \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \\
&+ \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{k+l} \theta^{k+l}
\end{aligned}$$

Позначимо $R(n) = \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!}$, $L(n) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{k+l} \theta^{k+l}$. Покажемо, що $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
R(n) - R(n-1) &= \frac{\theta^n}{n!}, \\
L(n) - L(n-1) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} s_{k,l} = \sum_{i=0}^n s_{i,n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!n!} (x-i)^n \theta^n = \frac{\theta^n}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (x-i)^n.
\end{aligned}$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^n$. Ліва скінченна різниця першого порядку для f з кроком $h = 1$ — це $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$, другого порядку — $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1) = f(x) - 2f(x-1) + f(x-2)$, аналогічно рекурентно визначаються скінченні різниці вищих порядків. Загальною формулою для різниці k -того порядку буде $\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(x-i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (x-i)^n$, тому вираз $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (x-i)^n$ — це ліва скінченна різниця n -того порядку для x^n . Оскільки кожна скінченна різниця є поліномом порядку на 1 менше, ніж попередня,

то різниця n -того порядку вже буде константою. Виявляється, що

$$\frac{1}{n!} \Delta^n f(n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (n-i)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1,$$

де $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ позначає число Стірлінга другого роду ([12], ст. 824-825). Отже, $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $R(0) = L(0) = 1$, то $R(n) = L(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, отримуємо

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right), \quad x \in [n, n+1).$$

Зауважимо, що $F_{\text{sum}(N)}(0) = e^{-\theta} I_0 \left(2\sqrt{\theta x} \right) \Big|_{x=0} = e^{-\theta} = \mathbb{P}(\text{sum}(N) = 0)$.

В свою чергу, функція розподілу $\text{sum}(\hat{N})$ може бути виражена через $F_{\text{sum}(N)}(x)$ наступним чином:

$$\mathbb{P}(\text{sum}(\hat{N}) \leq x) = \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid \text{sum}(N) > 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки $\text{sum}(\hat{N})$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, можна також знайти її щільність розподілу. Зробимо це для $x \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Оскільки $I'_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} I_\nu(z)$ ([12], ст. 376), то для $z = z(x) = \sqrt{\theta(x-k)}$ і $g_k(x) = g_k(z(x)) = (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) = z^k I_k(2z)$ маємо

$$\begin{aligned} g'_k(x) &= \left(k z^{k-1} I_k(2z) + 2z^k \left(I_{k+1}(2z) + \frac{k}{2z} I_k(2z) \right) \right) z'(x) = \\ &= 2z^{k-1} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) \cdot z'(x) = 2z^{k-1} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) \cdot \frac{\theta}{2z} = \\ &= \theta z^{k-2} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) = \\ &= \theta (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}-1} \left(k I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1} \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) \right) \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$f_{\text{sum}(\hat{N})}(x) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} g'_k(x), \quad x \in [n, n+1).$$

При цьому, $\mathbb{E} \text{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}(\text{sum}(N) \mid N([0, 1]) = m) = \frac{m}{2}$ як матема-

тичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $U(0, 1)$:

$$\mathbb{E} \text{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}(N([0, 1]) = 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \theta^m}{2 m!} e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.2. Нехай $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$, а $S_n = \sum_{i:\sigma(i)=i} i = \sum_{i=1}^n i \cdot \mathbb{1}\{\sigma(i) = i\}$ — сума нерухомих точок σ . Тоді при $n \rightarrow \infty$ виконується граничне співвідношення $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} S$, де функція розподілу випадкової величини S дорівнює

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right), & x \geq 0, \end{cases}$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.6).

Якщо позначити \hat{S}_n суму нерухомих точок за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничне співвідношення $\frac{\hat{S}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{S}$, де \hat{S} є абсолютно неперервною випадковою величиною з функцією та щільністю розподілу

$$F_{\hat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_S(x) - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, & x \geq 0, \end{cases}, \quad f_{\hat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} f_k(x), & x \geq 0, \end{cases},$$

де $f_k(x)$ визначено як

$$f_k(x) = (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}-1} \left(k I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1} \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) \right),$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.7).

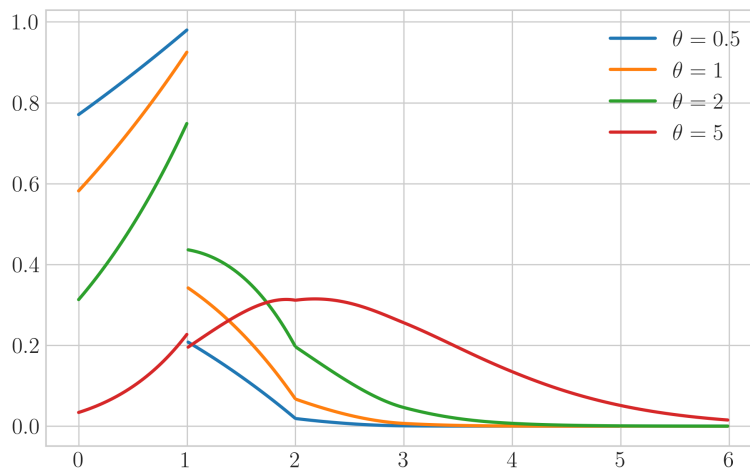


Рисунок 3.3 – Графіки щільності розподілу $f_{\hat{S}}(x)$ для різних значень θ .

3.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподіли найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між сусідніми нерухомими точками.

Зауваження. Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати $\min(N)$ і $1 - \max(N)$ спейсингами. Для випадкової перестановки $\{1, \dots, n\}$ це означатиме вважати 0 та $n + 1$ «штучними» нерухомими точками.

Нехай U_1, U_2, \dots, U_n — незалежні випадкові величини з розподілом $U(0, 1)$, що розділяють відрізок $[0, 1]$ на $n + 1$ інтервалів з довжинами S_1, S_2, \dots, S_{n+1} , або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \dots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (нагадаємо, $S_{(i)}$ позначає i -ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n+1]}$ — те ж саме, але з вказанням $n + 1$ як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [15], [16]). Зокрема, для $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) &= ((1 - (n + 1)x)_+)^n, \\ \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^j ((1 - jx)_+)^n,\end{aligned}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого $s\text{-}\min(N)$ та найбільшого $s\text{-}\max(N)$ спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S_{(1)}^1 = 1$)

$$\mathbb{P}(s\text{-}\min(N) > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}(N([0, 1]) = n) \quad (3.9)$$

$$\mathbb{P}(s\text{-}\max(N) > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}(N([0, 1]) = n) \quad (3.10)$$

Хоча явні вирази для (3.9) та (3.10), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Відомо (наприклад, [15]), що для незалежних величин X_1, X_2, \dots, X_{n+1} з розподілом $\text{Exp}(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \dots, S_{n+1})^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \dots, \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right)^T,$$

$$(S_{(1)}, S_{(1)}, \dots, S_{(n+1)})^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \dots, \frac{X_{(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right)^T, \quad (3.11)$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \dots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}. \quad (3.12)$$

Рівності (3.11) та (3.12) можна доповнити наступною рівністю:

Лема 3.2.3. Для порядкових статистик спейсингів $S_{(1)}^{[n+1]}, \dots, S_{(n+1)}^{[n+1]}$ між незалежними величинами з розподілом $U(0, 1)$ та незалежних величин X_1, X_2, \dots, X_{n+1} з розподілом $\text{Exp}(1)$ має місце рівність

$$S_{(i)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \dots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (3.13)$$

Доведення. Позначимо спейсинги між X_1, X_2, \dots, X_{n+1} через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $i = 2, \dots, n+1$. З [17], ст. 72, відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\text{Exp}(n-i+2)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \dots + (\Delta_1 + \dots + \Delta_{n+1})}.$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+2)\Delta_i$ з розподілом $\text{Exp}(1)$. В термінах Y_i верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} Y_j}.$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (3.13). \square

Окремими випадками леми 3.2.3 є рівності для мінімального і максимального спейсингів $S_{(1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i}$ та $S_{(n+1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{n-i+2}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}$. Разом з (3.9) та (3.10) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_{\nu+1}}{(\nu+1) \sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad (3.14)$$

де ν має розподіл $\text{Pois}(\theta)$, а $(X_i, i \geq 1)$ незалежні між собою та від ν і мають розподіл $\text{Exp}(1)$.

Відповідні математичні сподівання $\mathbb{E} \text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E} \text{s-max}(N)$ можна знайти з (3.14). Нехай $n \in \mathbb{N}_0$, тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{X_{n+1}}{(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} \\ \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \text{s-min}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\theta} t^{n-1} dt = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \right) dt = \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{1}{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt, \\ \mathbb{E} \text{s-max}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \int_0^1 (1 + s + \dots + s^{n-1}) ds = \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \int_0^1 \frac{1 - s^n}{1 - s} ds = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^1 \frac{1}{1 - s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - s^n) \theta^n}{n!} \right) ds = \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^1 \frac{e^{\theta} - e^{s\theta}}{1 - s} ds = [t = \theta(1 - s)] = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^{\theta} - e^{\theta-t}}{t} dt = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

де $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ — n -те гармонічне число. Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E} \text{s-min}(N) \approx 0.48483$ і $\mathbb{E} \text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.4. Нехай $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$, а δ_n та Δ_n — відповідно, найменша та найбільша відстані між нерухомими точками σ . Тоді при $n \rightarrow \infty$ виконуються граничні співвідношення $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$ і $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$, де

$$\delta \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1) \sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \Delta \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},$$

для незалежних між собою $(X_i, i \geq 1)$ з розподілом $\text{Exp}(1)$ та $\nu \sim \text{Pois}(\theta)$, незалежної від $(X_i, i \geq 1)$.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ

4.1. Алгоритми для генерування перестановок

Для чисельних перевірок доведених граничних теорем та демонстрації збіжності необхідно користуватися якимось алгоритмом для отримання вибірок з розподілу (2.2). У [18] наводиться два підходи, засновані на понятті каплінгу: побудові такого випадкового вектора $(X_1, \dots, X_n)^T$ зі значенням в $\{1, \dots, n\}^n$, координати якого певним чином будуть утворювати незалежні цикли, з яких утвориться перестановка з потрібним розподілом (нагадаємо, в силу теореми 1.1.1 кожна перестановка однозначно представляється композицією циклів з точністю до їх порядку).

4.1.1. Процес китайського ресторану

Розглянемо випадкові величини A_1, A_2, \dots з розподілами

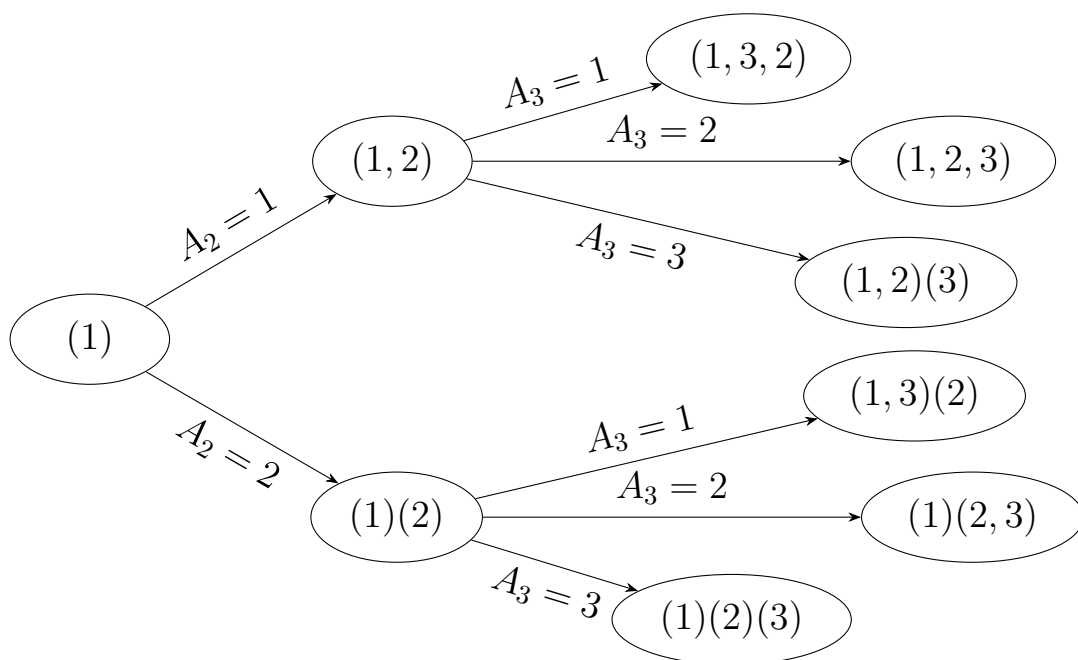
$$\mathbb{P}(A_i = j) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta+i-1}, & j = i, \\ \frac{1}{\theta+i-1}, & j = 1, 2, \dots, i-1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Перший незалежний цикл починається з 1. 2 додається до цього циклу справа (і він стає циклом $(1, 2)$) з ймовірністю $\frac{1}{\theta+1}$, або ж починає новий цикл з ймовірністю $\frac{\theta}{\theta+1}$. Нехай перші $k-1$ натуральних чисел вже розставлені в цикли. Тоді k або починає новий цикл з ймовірністю $\mathbb{P}(A_k = k) = \frac{\theta}{\theta+k-1}$, або додається справа від j у вже наявний цикл з ймовірністю $\mathbb{P}(A_k = j) = \frac{1}{\theta+k-1}$, $j = 1, \dots, k-1$. З алгоритму побудови отримуємо, що ймовірність отримати перестановку на $\{1, \dots, n\}$ з k циклами дорівнює $\frac{\theta^{k-1}}{(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}$, як і в формулі (2.2).

Цикли, отримані за цим алгоритмом, впорядковані наступним чином: перший містить 1, другий — найменше число, яке не ввійшло в перший, і так далі.

Варто також зауважити, що цей алгоритм дозволяє отримати не просто випадкову перестановку з розподілом $\text{ESF}(n, \theta)$, а послідовність перестановок з розподілами $\text{ESF}(1, \theta), \dots, \text{ESF}(n, \theta)$, причому два числа, що в якийсь момент опинилися в одному циклі, завжди залишаються в ньому ж.

Розглянемо приклад для $n = 3$, який можна проілюструвати наступною діаграмою:



З цієї діаграми видно, що ймовірність отримати перестановку $(1)(2, 3)$ обчислюється як $\mathbb{P}(A_3 = 2) \cdot \mathbb{P}(A_2 = 2) = \frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$. Аналогічно можна перевірити, що ймовірність отримати інші перестановки з двома циклами теж дорівнює $\frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$, перестановку $(1, 2, 3)$ з одним циклом — $\frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{1}{\theta+1}$, а тотожну перестановку $(1)(2)(3)$ з трьома циклами — $\frac{\theta}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$.

4.1.2. Каплінг Феллера

Розглянемо незалежні випадкові величини B_1, B_2, \dots з розподілами

$$\mathbb{P}(B_i = j) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta+i-1}, & j = 1, \\ \frac{i-1}{\theta+i-1}, & j = 0. \end{cases}$$

Знову почнемо перший незалежний цикл з 1. Якщо $B_n = 1$, то цей цикл закінчується, а новий починається з 2, а інакше — довільно (з рівними ймовірностями) обирається одне з $n - 1$ чисел, що залишились, і додається до цього циклу справа від 1. На наступному кроці, якщо $B_{n-1} = 1$, то поточний цикл закінчується, а новий починається з найменшого натурального числа, що ще не потрапило до циклів, а інакше — довільно обирається одне з $n - 2$ чисел і додається до поточного циклу справа. Цей процес повторюється, доки не утвориться перестановка, що буде реалізацією $\text{ESF}(n, \theta)$.

Якщо порівнювати цей каплінг з процесом китайського ресторану, то можна помітити, що $B_i = \mathbb{1}\{A_i = 1\}$, де A_i визначено (4.1). Різницею є те, що каплінг Феллера використовує A_1, \dots, A_n в зворотному порядку, а отже — за допомогою

нього можна отримувати перестановки лише для наперед заданого n . Зауважимо, що кількість циклів у отриманій перестановці рівна $\sum_{i=1}^n B_i$.

Розглянемо приклад для $n = 5$. Нехай реалізацією величин $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ є $(0, 1, 1, 0, 0)$. $B_5 = 0$, тому до першого циклу (1) додається довільно вибране число з $\{2, 3, 4, 5\}$ — наприклад, 3. Оскільки $B_4 = 0$, то до циклу (1, 3) додається довільно вибране число з $\{2, 4, 5\}$ — наприклад, 4. Оскільки $B_3 = 1$, то поточний цикл (1, 3, 4) закінчується, а наступний починається з 2. Нарешті, оскільки $B_2 = 1$, то 5 утворює новий цикл, і отримуємо перестановку $(1, 3, 4)(2)(5)$.

4.2. Перевірка отриманих результатів

Для перевірки результатів леми 3.1.1 та теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4 скористаємося процесом китайського ресторану для отримання вибірок з $\text{ESF}(n, \theta)$. Розмір вибірки m в усіх випадках буде рівний 3000.

4.2.1. Розподіл кількості нерухомих точок

Для демонстрації збіжностей $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$, де $X \sim \text{Pois}(\theta)$, а X_n визначено в лемі 3.1.1 при $\gamma = 1$, порівняємо полігони розподілу для X_n при $n = 50, 100, 500$ для різних значень θ . Ймовірності $\mathbb{P}(X_n = k)$ отримуватимемо наближено за допомогою закону великих чисел:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1} \{ \text{card} \{ j \in \{1, \dots, n\} : \sigma_i(j) = j \} = k \},$$

де $\sigma_i \sim \text{ESF}(n, \theta)$ і незалежні.

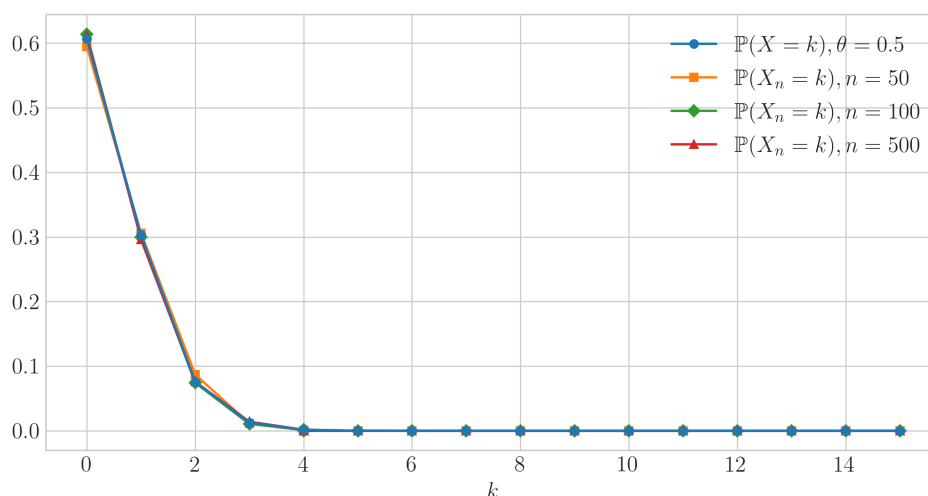


Рисунок 4.1 – Полігони розподілу X_n та X для $\theta = 0.5$.

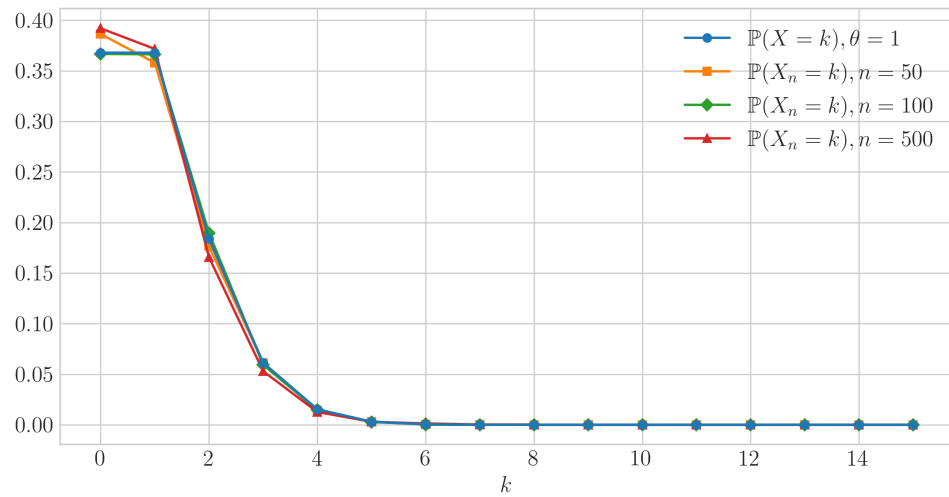


Рисунок 4.2 – Полігони розподілу X_n та X для $\theta = 1$.

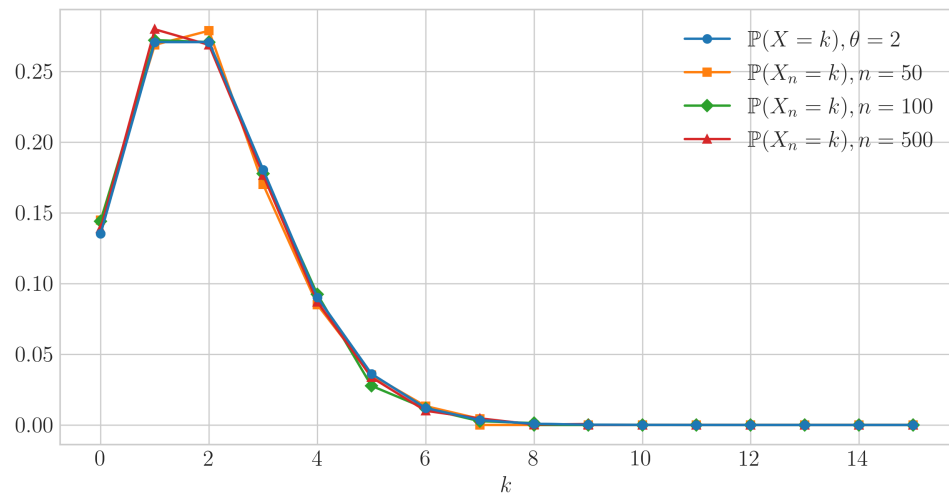


Рисунок 4.3 – Полігони розподілу X_n та X для $\theta = 2$.

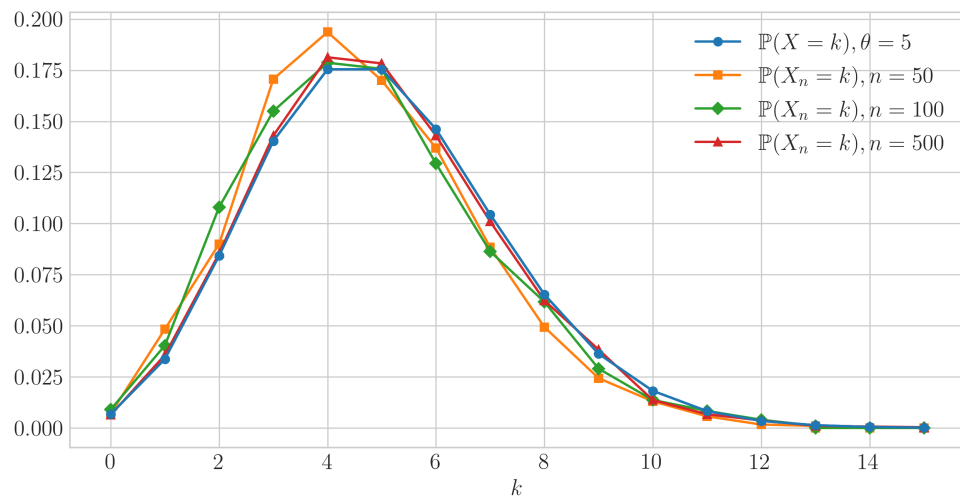


Рисунок 4.4 – Полігони розподілу X_n та X для $\theta = 5$.

Видно, що збіжність ймовірностей дійсно присутня, але для більших значень θ вона є повільнішою.

4.2.2. Розподіл найменшої та найбільшої нерухомих точок

Для демонстрації збіжностей $\frac{\hat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{m}$ і $\frac{\hat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{M}$, доведених в теоремі 3.2.1, порівняємо гістограми $\frac{\hat{m}_n}{n}$ та $\frac{\hat{M}_n}{n}$ для $n = 500$ з щільностями розподілу \hat{m} та \hat{M} для різних значень θ .

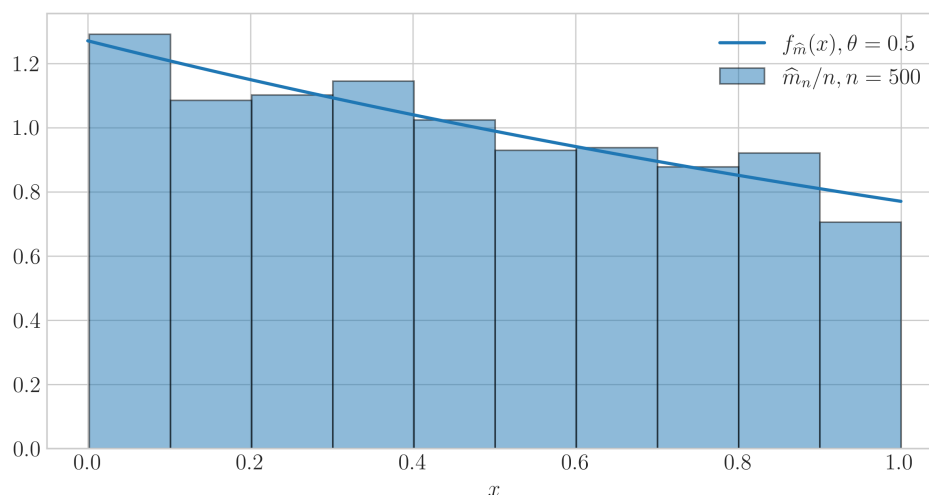


Рисунок 4.5 – Гістограма $\frac{\hat{m}_n}{n}$ та щільність \hat{m} для $\theta = 0.5$.

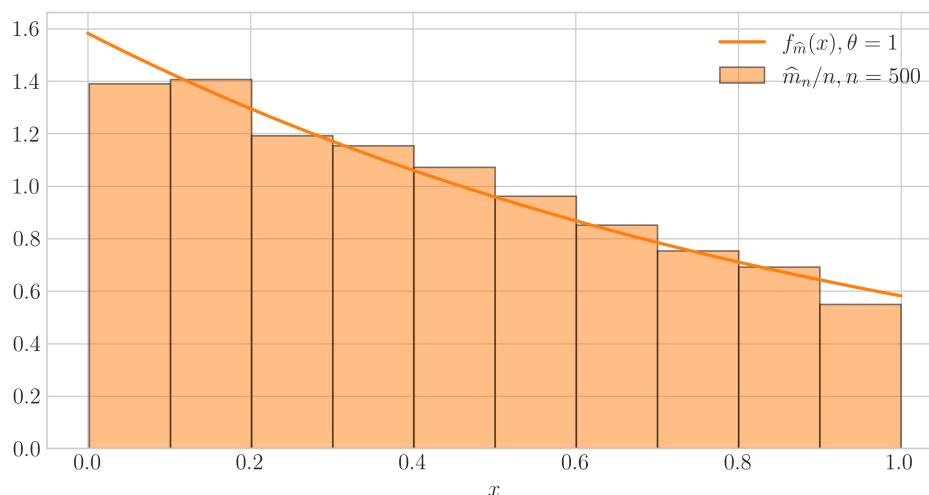


Рисунок 4.6 – Гістограма $\frac{\hat{m}_n}{n}$ та щільність \hat{m} для $\theta = 1$.

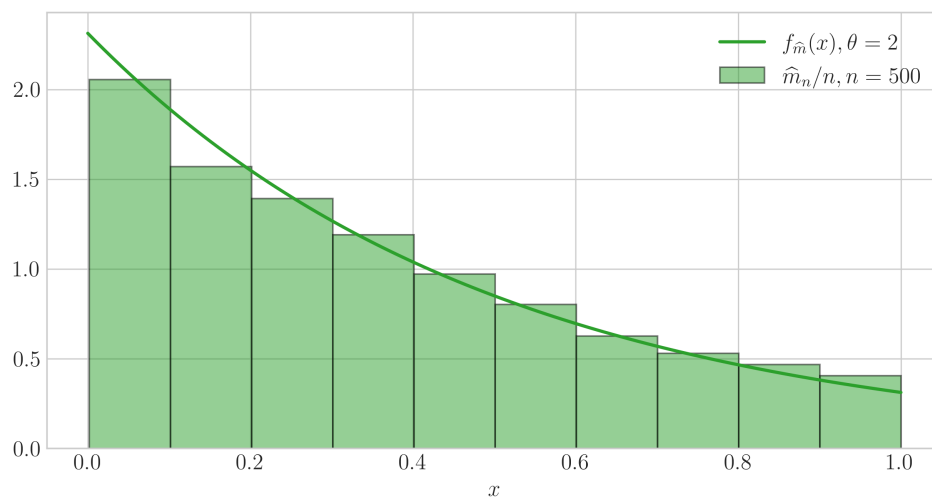


Рисунок 4.7 – Гістограма $\frac{\hat{m}_n}{n}$ та щільність \hat{m} для $\theta = 2$.

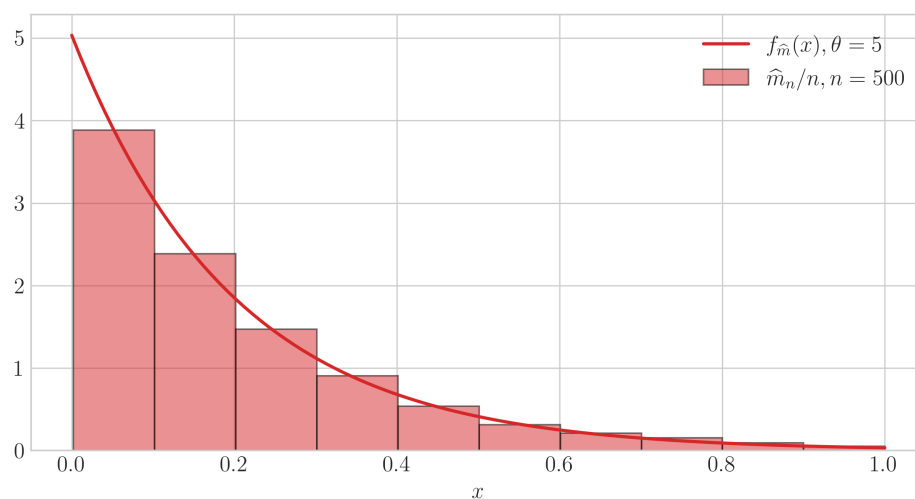


Рисунок 4.8 – Гістограма $\frac{\hat{m}_n}{n}$ та щільність \hat{m} для $\theta = 5$.

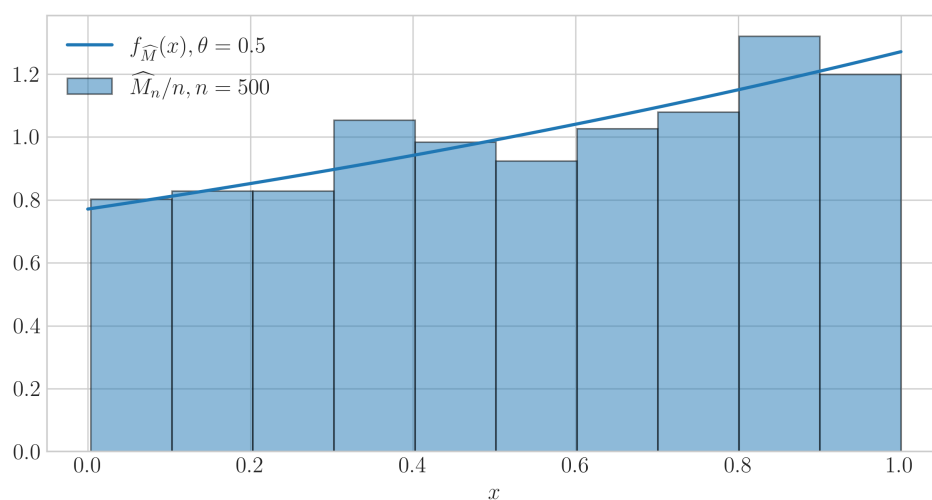


Рисунок 4.9 – Гістограма $\frac{\hat{M}_n}{n}$ та щільність \hat{M} для $\theta = 0.5$.

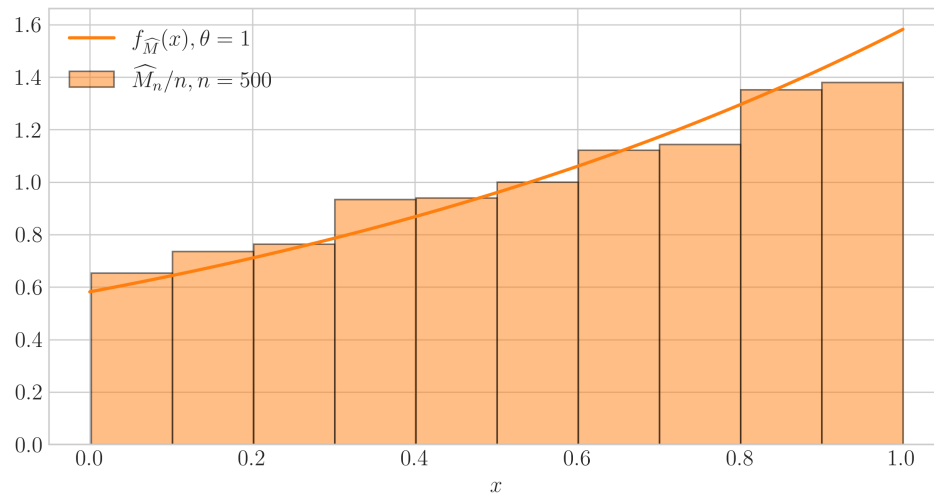


Рисунок 4.10 – Гістограма $\frac{\widehat{M}_n}{n}$ та щільність \widehat{M} для $\theta = 1$.

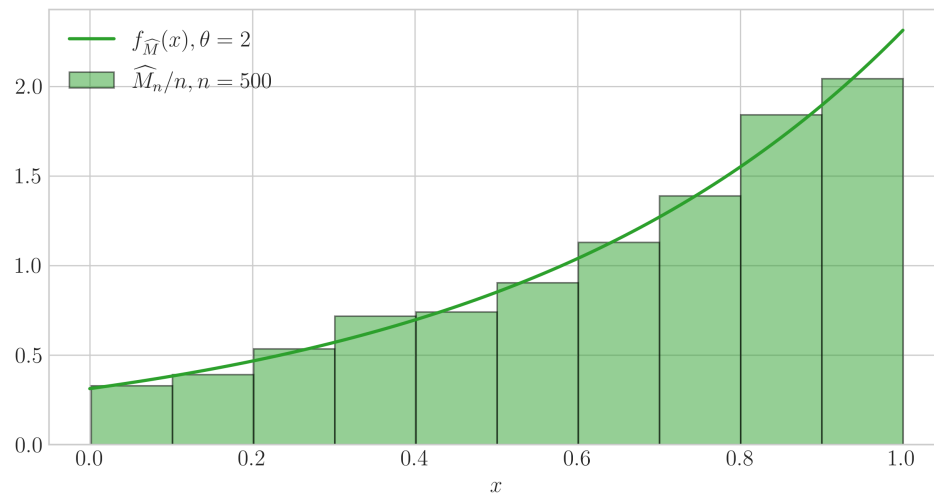


Рисунок 4.11 – Гістограма $\frac{\widehat{M}_n}{n}$ та щільність \widehat{M} для $\theta = 2$.

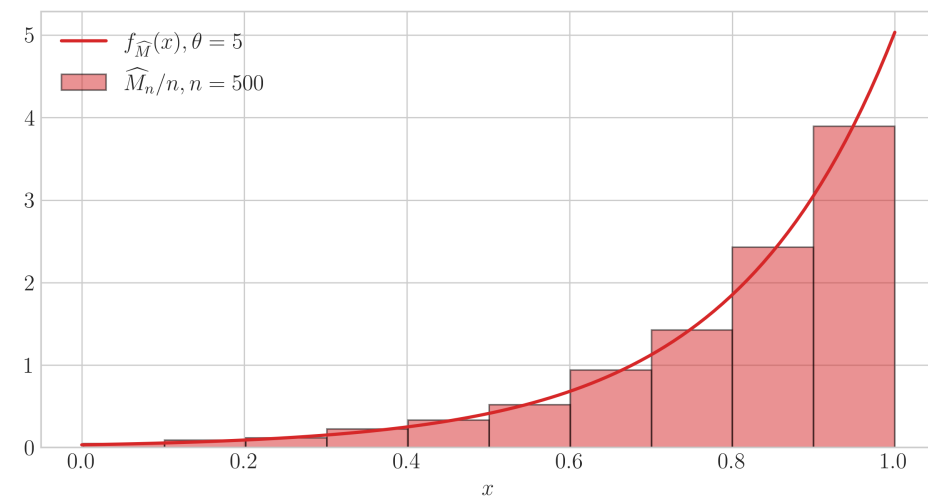


Рисунок 4.12 – Гістограма $\frac{\widehat{M}_n}{n}$ та щільність \widehat{M} для $\theta = 5$.

4.2.3. Розподіл суми нерухомих точок

Для демонстрації збіжності $\frac{\hat{S}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{S}$ доведеної в теоремі 3.2.2, порівняємо гістограми $\frac{\hat{S}_n}{n}$ для $n = 500$ з щільностями розподілу \hat{S} для різних значень θ .

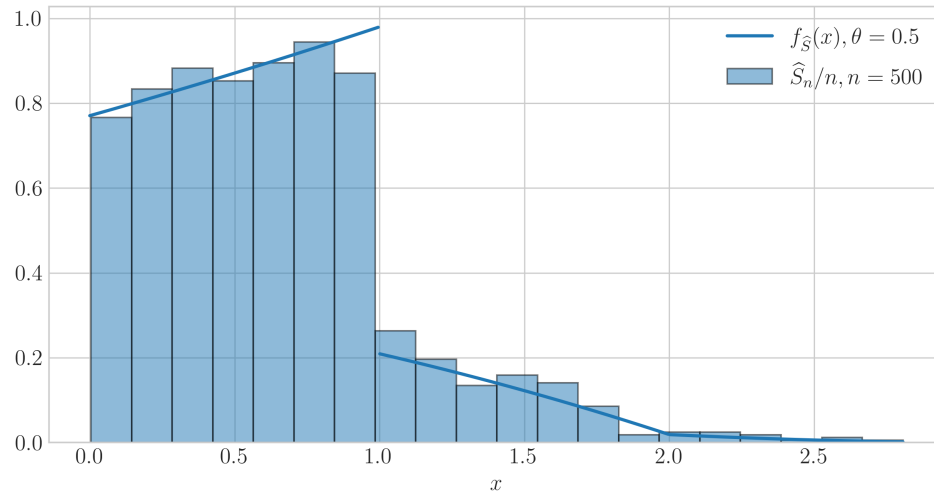


Рисунок 4.13 – Гістограма $\frac{\hat{S}_n}{n}$ та щільність \hat{S} для $\theta = 0.5$.

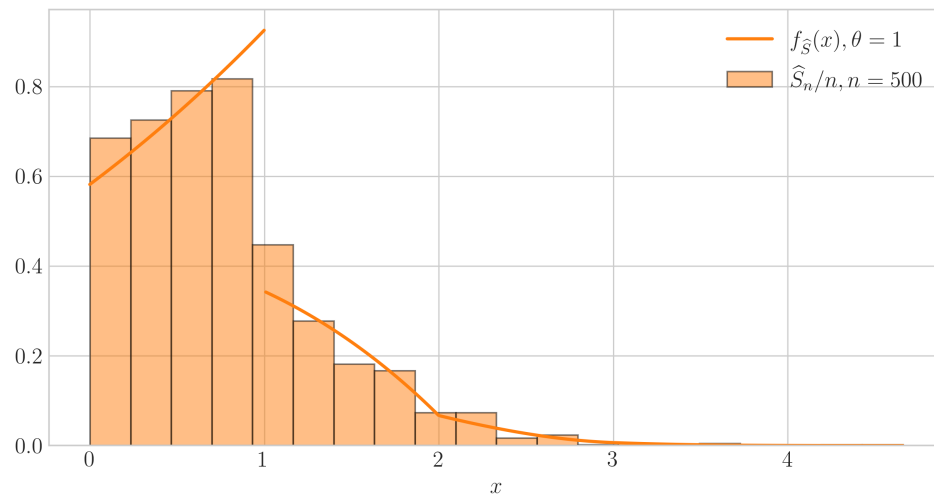


Рисунок 4.14 – Гістограма $\frac{\hat{S}_n}{n}$ та щільність \hat{S} для $\theta = 1$.

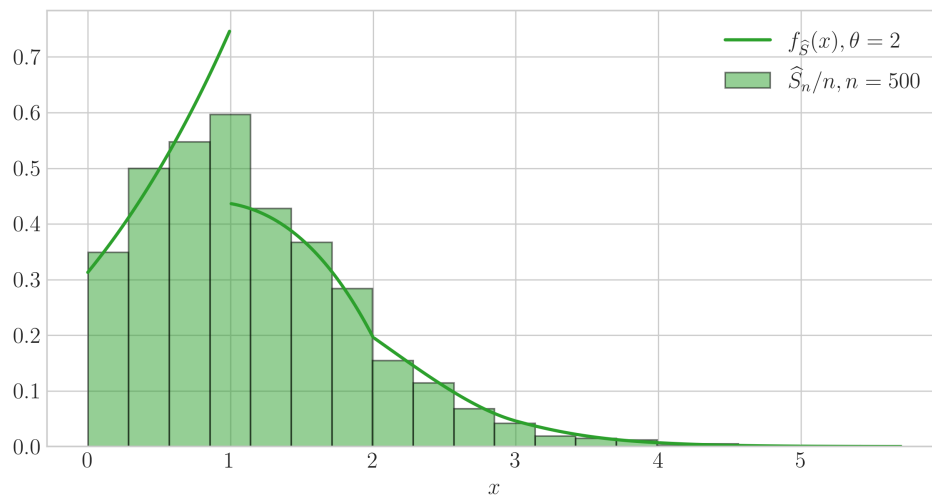


Рисунок 4.15 – Гістограма $\frac{\hat{S}_n}{n}$ та щільність \hat{S} для $\theta = 2$.

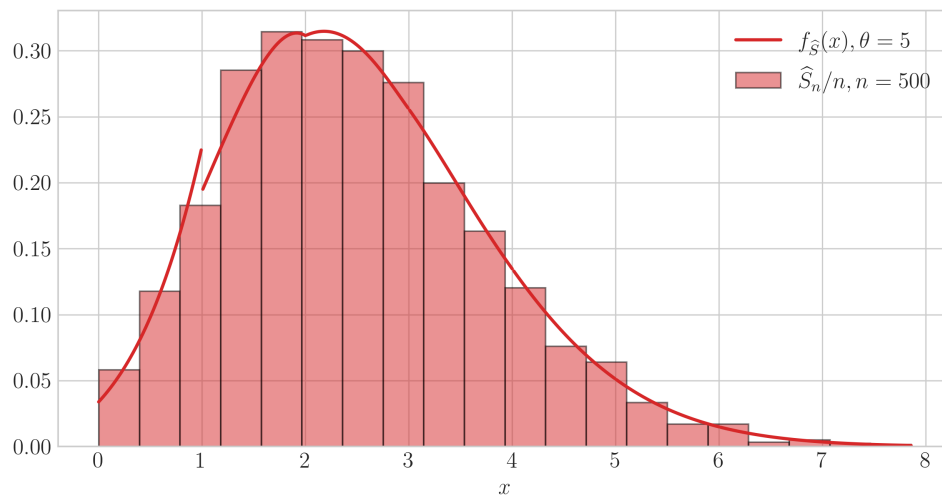


Рисунок 4.16 – Гістограма $\frac{\hat{S}_n}{n}$ та щільність \hat{S} для $\theta = 5$.

4.2.4. Розподіл найменшого і найбільшого спейсингів

Для демонстрації збіжностей $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$ і $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$, доведених в теоремі 3.2.4, порівняємо емпіричні функції розподілу $\frac{\delta_n}{n}$ та $\frac{\Delta_n}{n}$ при $n = 50, 100, 500$ з емпіричними функціями δ та Δ для різних значень θ .

Емпіричну функцію розподілу випадкової величини X за вибіркою X_1, \dots, X_N тут визначено як $F_X^*(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m \mathbb{1} \{X_i \leq x\}$.

Оскільки для $x \geq 1$ $\mathbb{P} \left(\frac{\delta_n}{n} \leq x \right) = \mathbb{P} \left(\frac{\Delta_n}{n} \leq x \right) = \mathbb{P}(\delta \leq x) = \mathbb{P}(\delta \leq x) = 1$, то на всіх рисунках емпіричні функції розподілу зображено лише для $x \in [0, 1)$.

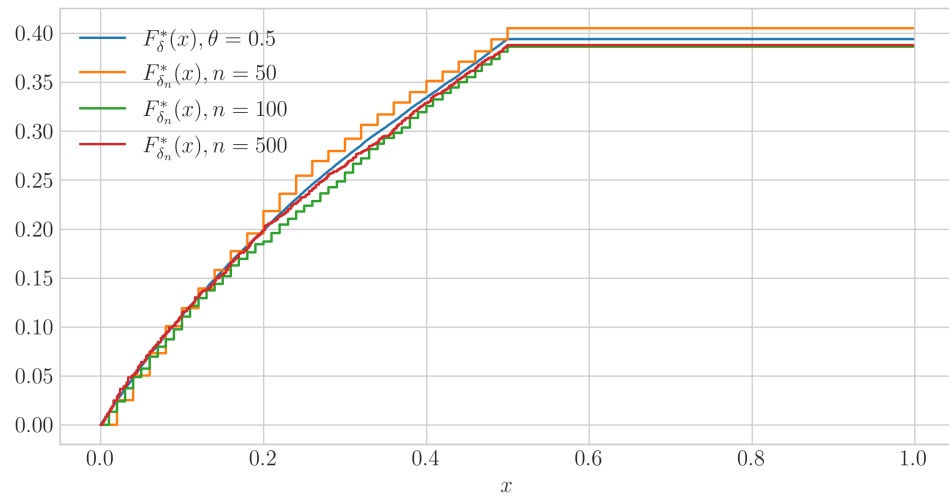


Рисунок 4.17 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\delta_n}{n}$ та δ для $\theta = 0.5$.

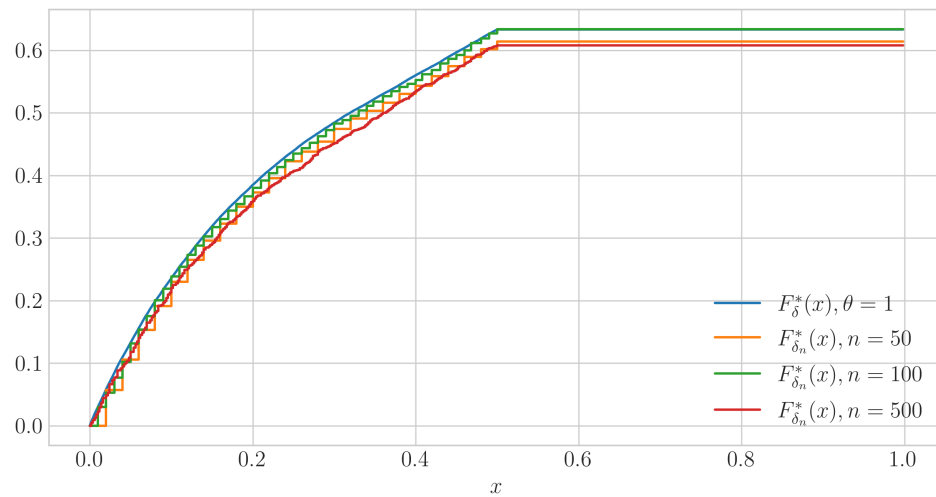


Рисунок 4.18 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\delta_n}{n}$ та δ для $\theta = 1$.

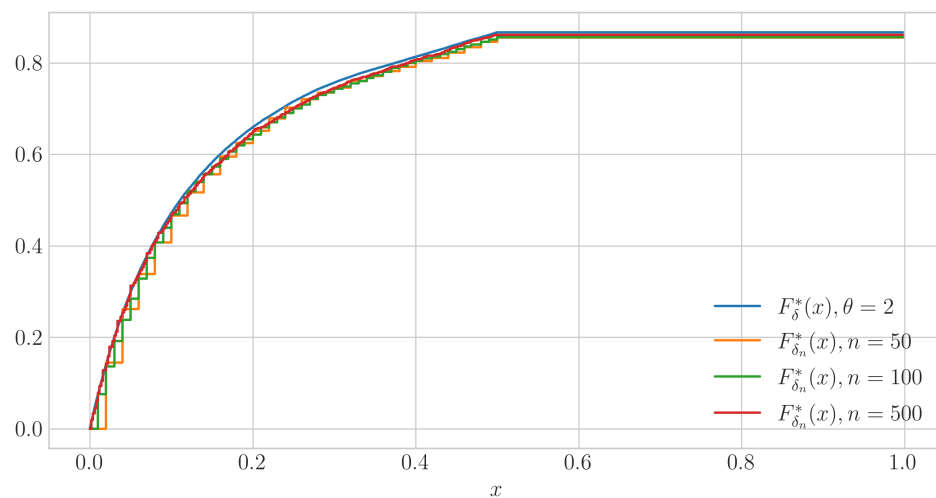


Рисунок 4.19 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\delta_n}{n}$ та δ для $\theta = 2$.

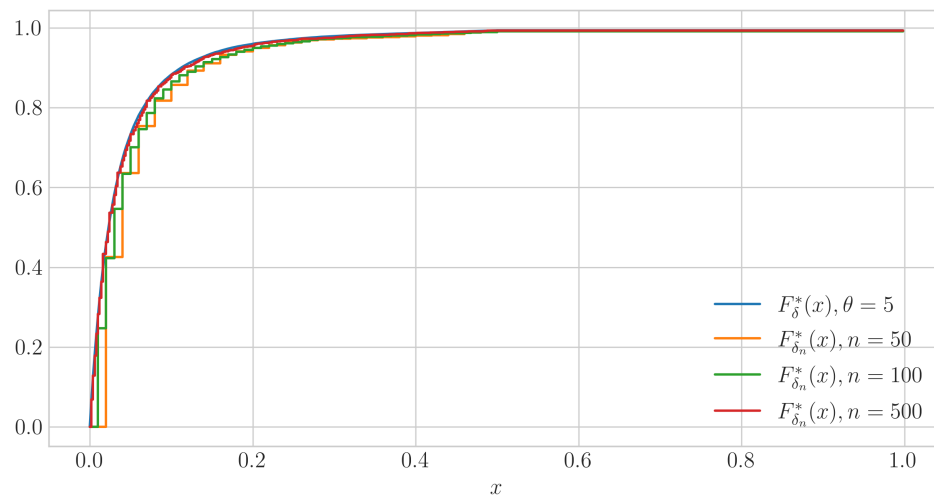


Рисунок 4.20 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\delta_n}{n}$ та δ для $\theta = 5$.

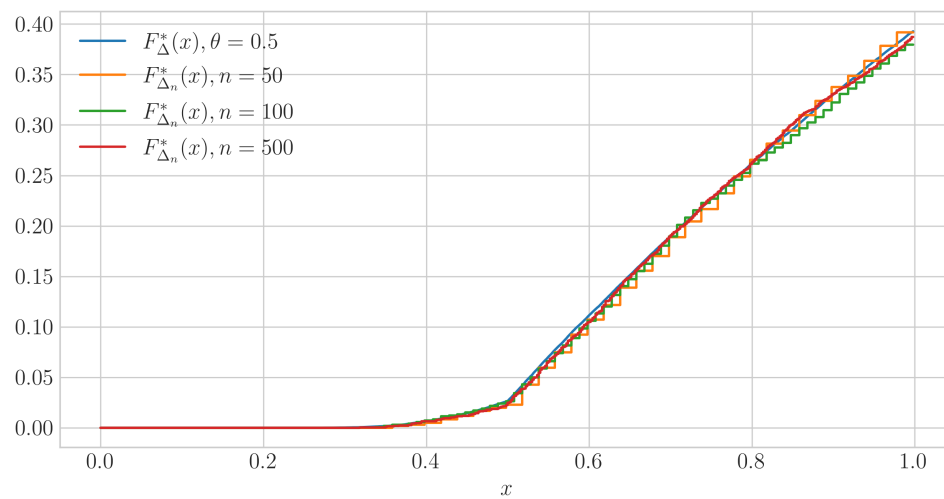


Рисунок 4.21 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\Delta_n}{n}$ та Δ для $\theta = 0.5$.

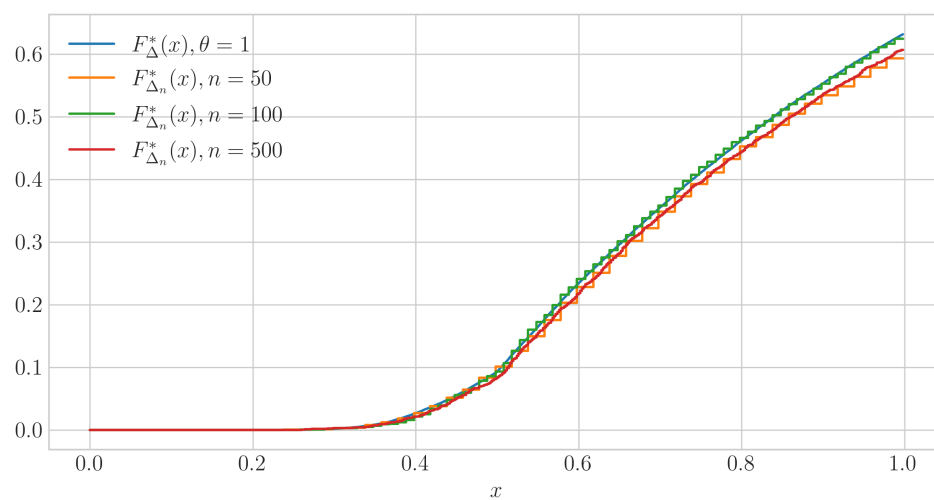


Рисунок 4.22 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\Delta_n}{n}$ та Δ для $\theta = 1$.

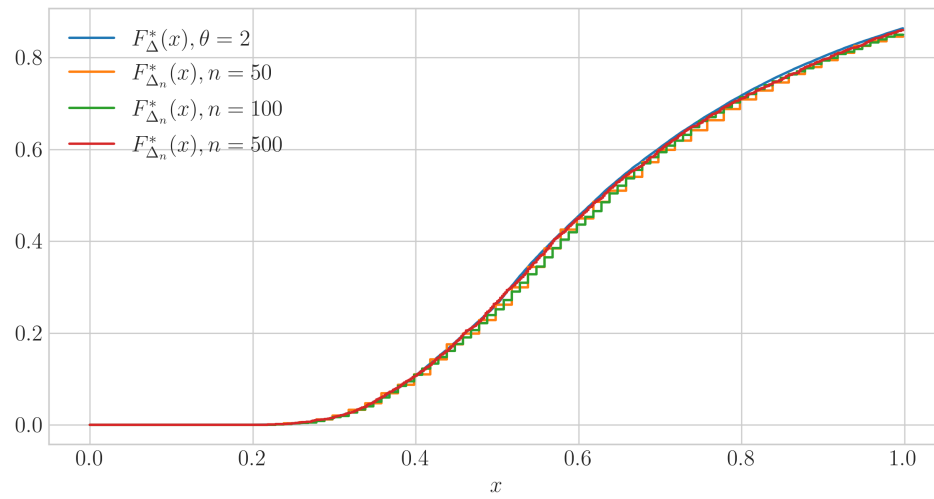


Рисунок 4.23 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\Delta_n}{n}$ та Δ для $\theta = 2$.

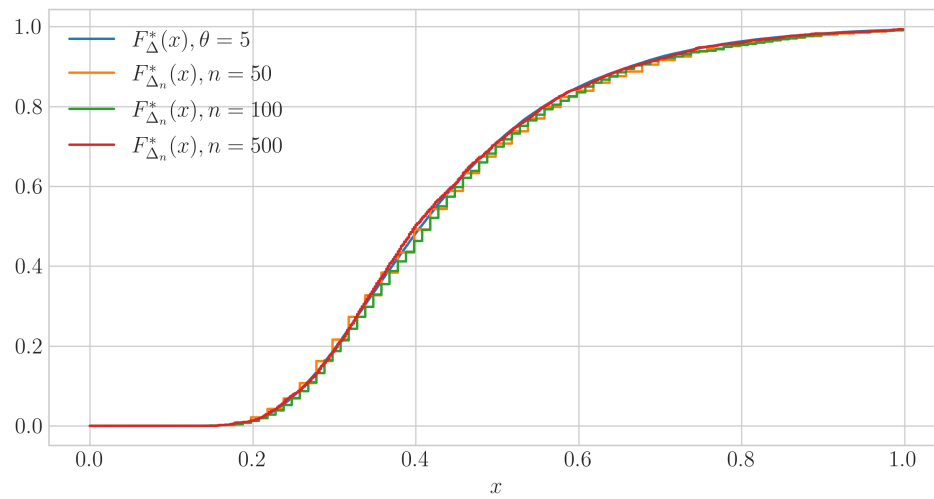


Рисунок 4.24 – Емпіричні функції розподілу $\frac{\Delta_n}{n}$ та Δ для $\theta = 5$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спекторський І. Я. Дискретна математика. — Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004. — 120 с.
2. Kallenberg O. Random Measures, Theory and Applications. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Springer International Publishing Switzerland, 2017. — 694 p. — ISBN: 978-3-319-41598-7.
3. Berezansky Y. M., Sheftel Z. G., Us G. F. Functional Analysis. — Birkhäuser Verlag, 1996. — Vol. 1. — 423 p. — ISBN: 978-3-0348-9185-1.
4. Богданський Ю. В. Інтеграл в курсі аналізу. — Київ : Видавництво «Політехніка», 2013. — 180 с.
5. Resnick S.I. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. — Springer Science+Business Media New York, 2008. — 320 p. — ISBN: 978-0-387-75952-4.
6. Billingsley P. Con vergence of probability measures. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. — Second ed. — New York : John Wiley & Sons Inc., 1999. — 277 p. — ISBN: 0-471-19745-9. — A Wiley-Interscience Publication.
7. Last G., Penrose M. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. — Cambridge University Press, 2017. — 293 p. — ISBN: 978-1-107-08801-6.
8. Resnick S.I. Crash Course II: Weak Convergence; Implications for Heavy-Tail Analysis // Heavy-Tail Phenomena. — Springer Science+Business Media New York, 2007. — P. 39–69.
9. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Third ed. — Springer Nature Switzerland, 2021. — 946 p. — ISBN: 978-3-030-61871-1.
10. W.J. Ewens. The sampling theory of selectively neutral alleles // Theoretical Population Biology. — 1972. — Vol. 3, no. 1. — P. 87–112.
11. S. Tavaré. The magical Ewens sampling formula // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2021. — Vol. 53, no. 6. — P. 1563–1582.
12. Abramowitz A., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — USA : Dover Publications, Inc., 1972. — 1046 p. — ISBN: 0-486-61272-4.
13. R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré. Logarithmic combinatorial structures: A probabilistic approach. EMS Monogr. Math. — Zürich: European Mathematical

- Society (EMS), 2003. — ISBN: 3-03719-000-0.
14. J. Norman L., K. Samuel, N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions. — New York : John Wiley & Sons, 1995. — Vol. 2 of Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. — 717 p. — ISBN: 0-471-58494-0.
 15. Holst L. On the Lengths of the Pieces of a Stick Broken at Random // Journal of Applied Probability. — 1980. — Vol. 17, no. 3. — P. 623–634.
 16. Pinelis I. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution // arXiv. — 2019. — Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1909.06406.pdf>.
 17. C. Arnold B., N. Balakrishnan, N. Nagaraja H. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). — USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. — 305 p. — ISBN: 978-0-89871-906-2.
 18. R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré. Poisson process approximations for the Ewens sampling formula // The Annals of Applied Probability. — 1992. — Vol. 2. — P. 519–535.

ДОДАТОК А. ПРОГРАМНИЙ КОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ

```
# In[1]:
import numpy as np
import pickle
from scipy.stats import poisson, expon
from scipy.special import iv, factorial
from tqdm import tqdm
from joblib import Parallel, delayed
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
matplotlib.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True
matplotlib.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsfonts}'
matplotlib.rcParams['font.size'] = '14'
plt.style.use('seaborn-whitegrid')

# In[2]:
IMAGE_DIR = '../plots/'

# In[3]:
def f_m_hat(x, t=1):
    return t * np.exp(-t*x) / (1 - np.exp(-t)) * (0 <= x) * (x <= 1)

def f_M_hat(x, t=1):
    return t * np.exp(t*x) / (np.exp(t) - 1) * (0 <= x) * (x <= 1)

def F_S(x, t=1):
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        dom = [x]
    dom = np.array(x).copy()
    dom[dom < 0] = 0

    n = int(np.floor(dom.max()))
    min_x = int(np.floor(dom.min()))
    ar = np.arange(min_x, n+1)
    k = np.tile(np.arange(n+1), (n+1, 1))
    k[:min_x] = -1
    k = k[np.tril_indices(n+1)]
    k = np.expand_dims(k[k >= 0], axis=1)

    mask = (dom >= ar.reshape(len(ar), 1)) * (dom < (ar.reshape(len(ar), 1) + 1))
    dom = np.repeat(dom * mask, ar + 1, axis=0)
    dom = dom - k
    dom = np.sqrt(t * dom * (dom >= 0))

    res = (dom != 0) * np.power(-dom, k) * iv(k, 2 * dom) / factorial(k)
```

```

res = np.exp(-t) * res.sum(axis=0)
res[x == 0] = np.exp(-t)
if not hasattr(x, '__iter__'):
    return res[0]
else:
    return res

def F_S_hat(x, t=1):
    res = (F_S(x, t) - np.exp(-t)) / (1 - np.exp(-t))
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        return res * (x >= 0)
    else:
        return res * (np.array(x) >= 0)

def f_S_hat(x, t=1):
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        dom = [x]
    dom = np.array(x).copy()
    dom[dom < 0] = 0

    n = int(np.floor(dom.max()))
    min_x = int(np.floor(dom.min()))
    ar = np.arange(min_x, n+1)
    k = np.tile(np.arange(n+1), (n+1, 1))
    k[:min_x] = -1
    k = k[np.tril_indices(n+1)]
    k = np.expand_dims(k[k >= 0], axis=1)

    mask = (dom >= ar.reshape(len(ar), 1)) * (dom < (ar.reshape(len(ar), 1) + 1))
    dom = np.repeat(dom * mask, ar + 1, axis=0)
    dom = dom - k
    dom = np.sqrt(t * dom * (dom >= 0))

    res = (dom != 0) * np.nan_to_num(np.power(-dom, k-2), posinf=0, neginf=0) * (k
    * iv(k, 2 * dom) + dom * iv(k+1, 2*dom)) / factorial(k)
    res = np.exp(-t) * t * res.sum(axis=0) / (1 - np.exp(-t))
    res[x == 0] = np.exp(-t) * t / (1 - np.exp(-t))
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        return res[0]
    else:
        return res

# In[4]:
# min pdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

domain = np.linspace(0, 1, 100)

```



```

for theta in [0.5, 1, 2, 5]:
    plt.plot(domain, f_m_hat(domain, theta), label=f'$\\theta = {theta}$',
             linewidth=2)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_min_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# max pdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

for theta in [0.5, 1, 2, 5]:
    plt.plot(domain, f_M_hat(domain, theta), label=f'$\\theta = {theta}$',
             linewidth=2)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_max_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# sum cdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

domain = np.linspace(0, 6, 500)
domain_floor = np.floor(domain)
n_val = np.sort(np.unique(domain_floor))

for theta, color in zip([0.5, 1, 2, 5], ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', '
    tab:red']):
    f_val = f_S_hat(domain, theta)

    for n in n_val:
        label=f'$\\theta = {theta}$' if n == n_val.max() else ''
        plt.plot(domain[domain_floor == n], f_val[domain_floor == n], label=label,
                 linewidth=2, color=color)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_sum_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# In[5]:
class ChineseRestaurantProcess:
    def __init__(self, theta, n):
        assert theta > 0, 'theta must be > 0'
        self.theta = theta
        self.n = n

```

```

def _sample_A(self, i, rng):
    p = [1 / (self.theta + i - 1) for j in range(i)]
    p[-1] = p[-1] * self.theta
    A = rng.choice(range(1, i+1), p=p)
    return A

def _sample_cycles(self, random_state):
    rng = np.random.default_rng(random_state)
    cycles = [[1]]
    for i in range(2, self.n+1):
        A = self._sample_A(i, rng)
        if A == i:
            cycles.append([i])
        else:
            for cycle_ind, cycle in enumerate(cycles):
                if A in cycle:
                    ind = cycle.index(A)
                    break
            cycles[cycle_ind].insert(ind+1, i)

    return cycles

def sample_permutation(self, random_state=None):
    cycles = self._sample_cycles(random_state=random_state)

    perm = [0] * self.n
    for cycle in cycles:
        cycle.append(cycle[0])
        for ind in range(len(cycle)-1):
            perm[cycle[ind]-1] = cycle[ind+1]

    return perm

def sample_fixed_points(self, random_state=None):
    cycles = self._sample_cycles(random_state=random_state)

    perm = [0] * self.n
    for cycle in cycles:
        if len(cycle) == 1:
            perm[cycle[0] - 1] = cycle[0]

    return perm

# In[6]:
def FixedPointsSample(n, size=1, theta=1, random_state=None, verbose=True):
    rng = np.random.default_rng(random_state)
    sampler = ChineseRestaurantProcess(theta, n)

```

```

if verbose:
    fixed_points = Parallel(n_jobs=-1)(delayed(sampler.sample_fixed_points)(
random_state=rng.integers(size**2)) for _ in tqdm(range(size)))
else:
    fixed_points = Parallel(n_jobs=-1)(delayed(sampler.sample_fixed_points)(
random_state=rng.integers(size**2)) for _ in range(size))

return fixed_points

def FixedPointsCount(fixed_points_sample, n, gamma=1):
    fixed_points_mask = fixed_points_sample <= np.ceil(gamma * n)
    fixed_points = fixed_points_sample * fixed_points_mask
    fixed_points_count = (fixed_points > 0).sum(axis=1)
    unique, counts = np.unique(fixed_points_count, axis=0, return_counts=True)
    return unique, counts / counts.sum()

def MinFixedPoint(fixed_points_sample, n):
    min_fixed_point = np.array(fixed_points_sample).copy()
    min_fixed_point[min_fixed_point == 0] = n + 1
    min_fixed_point = min_fixed_point.min(axis=1)
    return min_fixed_point[min_fixed_point <= n] / n

def MaxFixedPoint(fixed_points_sample, n):
    max_fixed_point = np.array(fixed_points_sample).max(axis=1)
    return max_fixed_point[max_fixed_point > 0] / n

def FixedPointsSum(fixed_points_sample, n):
    fixed_points_sum = np.array(fixed_points_sample).sum(axis=1)
    return fixed_points_sum[fixed_points_sum > 0] / n

def MinSpacing(fixed_points_sample, n):
    fixed_points = np.array(fixed_points_sample)
    spacings = np.diff(np.maximum.accumulate(fixed_points, axis=1), axis=1)
    fixed_points_min = fixed_points.copy()
    fixed_points_min[fixed_points_min == 0] = n + 1
    spacings = np.c_[fixed_points_min.min(axis=1), spacings, n-fixed_points.max(
axis=1)+1]
    spacings[spacings == 0] = n + 1
    min_spacings = spacings.min(axis=1)
    min_spacings[min_spacings == n + 1] = n
    return min_spacings / n

def MaxSpacing(fixed_points_sample, n):
    fixed_points = np.array(fixed_points_sample)
    spacings = np.diff(np.maximum.accumulate(fixed_points, axis=1), axis=1)
    fixed_points_min = fixed_points.copy()
    fixed_points_min[fixed_points_min == 0] = n + 1
    spacings = np.c_[fixed_points_min.min(axis=1), spacings, n-fixed_points.max(

```

```

axis=1)+1]
max_spacings = spacings.max(axis=1)
max_spacings[max_spacings == n + 1] = n
return max_spacings / n

# In[7]:
theta_range = [0.5, 1, 2, 5]
n_range = [50, 100, 500]
sample_size = 3000

# In[8]:
fixed_points_samples = {
    theta: {
        n: FixedPointsSample(n, size=sample_size, theta=theta, verbose=True) for n
        in n_range
    } for theta in theta_range
}

with open('fixed_points_samples.pkl', 'wb') as fout:
    pickle.dump(fixed_points_samples, fout)

# In[9]:
with open('fixed_points_samples.pkl', 'rb') as fin:
    fixed_points_samples = pickle.load(fin)

# In[10]:
markers = ['s', 'D', '^', 'X', '*']

for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    plt.plot(
        range(16),
        [poisson.pmf(k, mu=theta) for k in range(16)],
        marker='.', markersize=10,
        label=fr'$\mathbb{P}\{X = k\}, \theta = \{theta\}$'
    )

    for ind, n in enumerate(n_range):
        fixed_points_sample = fixed_points_samples[theta][n]
        unique, freq = FixedPointsCount(fixed_points_sample, n=n)
        freq = np.append(freq, np.zeros(16-unique.max()))
        unique = np.append(unique, np.arange(unique.max(), 16))
        plt.plot(

```

```

        unique, freq, markersize=5,
        marker=markers[ind],
        label=fr'$\mathbb{P}(X_n = k), n = \{n\}$'
    )

plt.plot(
    range(16),
    [poisson.pmf(k, mu=theta) for k in range(16)],
    marker='.', markersize=10, color='tab:blue'
)

plt.xlabel('$k$')

plt.legend()
plt.grid(visible=True)
plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_prob_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
plt.show()

# In[11]:
colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 100)
    plt.plot(
        domain,
        f_m_hat(domain, theta),
        label=fr'$f_{\widehat{m}}(x), \theta = \{\theta\}$',
        linewidth=2, color=color
    )

    n = max(n_range)
    plt.hist(
        MinFixedPoint(fixed_points_samples[theta][n], n=n), bins=10,
        density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
        label=fr'$\widehat{m}_n / n, n = \{n\}$'
    )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_min_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')

```

```

plt.show()

# In[12]:
colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 100)
    plt.plot(
        domain,
        f_M_hat(domain, theta),
        label=fr'$f_{\widehat{\{M\}}}(x)$, \theta = {theta}$',
        linewidth=2, color=color
    )

    n = max(n_range)
    plt.hist(
        MaxFixedPoint(fixed_points_samples[theta][n], n=n), bins=10,
        density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
        label=fr'$\widehat{\{M\}}_n / n$, n = {n}$'
    )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_max_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
    plt.show()

# In[13]:

colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)
    n = max(n_range)

    fp_sum = FixedPointsSum(fixed_points_samples[theta][n], n=n)
    domain = np.linspace(0, fp_sum.max(), 500)
    domain_floor = np.floor(domain)
    n_val = np.sort(np.unique(domain_floor))
    f_val = f_S_hat(domain, theta)

    for _n in n_val:
        label=fr'$f_{\widehat{\{S\}}}(x)$, \theta = {theta}$' if _n == n_val.max()

```

```

else ''
    plt.plot(domain[domain_floor == _n], f_val[domain_floor == _n], label=
label, linewidth=2, color=color)

plt.hist(
    fp_sum, bins=20,
    density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
    label=f'$\widehat{{S}}_n / n, n = {n}$'
)

plt.xlabel('$x$')

plt.legend()
plt.grid(visible=True)
plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_sum_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
plt.show()
# In[14]:
def sample_delta(theta, size):
    nu = poisson(mu=theta).rvs(size=size)
    res = []
    for n in nu:
        X = expon.rvs(size=n+1)
        res.append(
            X[0] / ((n + 1) * X.sum())
        )
    return np.array(res)

def sample_Delta(theta, size):
    nu = poisson(mu=theta).rvs(size=size)
    res = []
    for n in nu:
        X = expon.rvs(size=n+1)
        res.append(
            (X / np.arange(1, n+2)).sum() / X.sum()
        )
    return np.array(res)

# In[15]:
for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 500, endpoint=False)

    delta_val = sample_delta(theta, 20*sample_size)

    plt.plot(

```

```

        domain, [(delta_val <= x).mean() for x in domain],
        label=fr'$F^*_{\{\delta\}}(x)$, \theta = {\theta}$'
    )

    for n in n_range:
        delta_n_val = np.sort(MinSpacing(fixed_points_samples[theta][n], n=n))
        f_val = np.array([(delta_n_val < x).mean() for x in domain])
        plt.step(
            domain, f_val,
            label=fr'$F^*_{\{\delta_n\}}(x)$, n = {n}$'
        )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_spacing_min_theta_{theta}.png', dpi=300,
        bbox_inches='tight')
    plt.show()

# In[16]:
for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 500, endpoint=False)

    Delta_val = sample_Delta(theta, 20*sample_size)

    plt.plot(
        domain, [(Delta_val <= x).mean() for x in domain],
        label=fr'$F^*_{\{\Delta\}}(x)$, \theta = {\theta}$'
    )

    for n in n_range:
        Delta_n_val = MaxSpacing(fixed_points_samples[theta][n], n=n)
        plt.step(
            domain, [(Delta_n_val <= x).mean() for x in domain],
            label=fr'$F^*_{\{\Delta_n\}}(x)$, n = {n}$'
        )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_spacing_max_theta_{theta}.png', dpi=300,
        bbox_inches='tight')
    plt.show()

```