ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1

ПЕРЕСТАНОВКИ ЮЕНСА

1.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n, заданий наступним чином:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \pi \in S_n \tag{1.1}$$

де $\theta > 0$, а $\mathrm{c}(\pi)$ позначає кількість циклів у π. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі, відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса*.

Зауваження. *Якщо $\theta = 1$,* (1.1) *задає рівномірний розподіл, тобто $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in S_n$.*

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 1.1.1. *Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1,\dots,n\}$, що задана розподілом* (1.1) *(тобто, σ є перестановкою Юенса з S_n). Для $a \in \mathbb{R}$ позначимо $\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$. Нехай $\gamma \in [0,1]$, а $X_n = \mathrm{card}\{i \in \{1,\dots,\lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до* $\mathrm{Poiss}(\gamma\theta)$*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta}, k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}\{X_n = k\}$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_n = 0\} &= \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}\right) = \\ &= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil}\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}\right)\end{aligned}$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C^2_{\lceil \gamma n \rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π, то вона має містити «тотожній» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2,\dots,n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$. Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{1,2,\dots,i \text{ are the fixed points of } \sigma\} &= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) = \\ = \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} &= [\mathrm{c}(\pi) > i] = \\ = \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} &\sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{\mathrm{c}(\pi)-i}\end{aligned}$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (1.1) на S_{n-i}, але без константи нормалізації, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left\{1,2,\dots,i \text{ are the fixed points of } \sigma\right\} = \frac{\theta^i}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i)}$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left\{X_n=0\right\} = \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil}(-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil}\frac{\theta^i}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i)}$$

$\mathbb{P}\left\{X_n=k\right\}$ для $k>0$ можна отримати аналогічно: існує $C^k_{\lceil\gamma n\rceil}$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left\{X_n=0\right\}$:

$$\mathbb{P}\left\{X_n=k\right\} = C^k_{\lceil\gamma n\rceil}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)}$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{X_n=k\right\} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left\{X_n=k\right\} = \frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil-k)!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{(\lceil\gamma n\rceil-k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil-k-i)!}\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)}$$

Нехай N достатньо велике і $N<\lceil\gamma n\rceil-k$, тоді $\mathbb{P}\left\{X_n=k\right\}$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil\gamma n\rceil-k$.

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2| \le \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} \le$$
$$\le \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{\theta+n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k} \le \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma\in[0,1)$, $\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\le C = C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2| \le C^k\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}C^i \le C^k\sum_{i=N}^{\infty}\frac{\theta^i}{i!}C^i \to 0, N\to\infty$$

Якщо $\gamma=1$,

$$\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} \le$$
$$\le \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-i+1)}{(n-1)\dots(n-i-k)} = \frac{n}{n-i-k} \to 1, n\to\infty$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty}S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1, то для фіксованого N

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta}, N\to\infty$$

$\square$

Користуючись позначеннями з леми 1.1.1, X_n можна інтерпретувати як $P_n\left([0,\gamma]\right)$, де P_n є деякою випадковою точковою мірою, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{P_n\left([0,\gamma]\right)=k\right\}=\mathbb{P}\left\{N\left([0,\gamma]\right)=k\right\}, k\in\mathbb{N}_0$$

де N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta\cdot\text{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 1.1.2. *Точковий процес P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda=\theta\cdot\text{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n\to\infty$).*

Як сказано в [1], *груба збіжність за розподілом* $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ послідовності випадкових мір ξ_n на деякому просторі S до деякої випадкової міри ξ означає, зо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n)\to\mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ, неперервної відносно *грубої топології* на просторі (невипадкових) мір на S. У цій грубій топології, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ означає $\int_S f d\mu_n \to \int_S f d\mu$ для всіх обмежених неперервних функцій f на S з обмеженим носієм. Оскільки $S=[0,1]$, усі функції на S мають обмежений носій, а їх власна обмеженість випливає з неперервності.

Наведемо визначення точкового процесу Пуассона (з [2]). Нехай μ — міра Радона (радонова міра?) на σ-алгебрі борелевих підмножин множини S — $\mathcal{B}(S)$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F\in\mathcal{B}(S)$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\left\{N(F)=k\right\}=\begin{cases}\frac{(\mu(F))^k}{k!}\exp\left\{-\mu(F)\right\}, & \mu(F)<\infty\\ 0, & \mu(F)=\infty\end{cases}$$

2. Для будь-якого натурального k, якщо $F_1,\dots,F_k$ з $\mathcal{B}(S)$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1\le i$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Теорема 4.15 з [1] формулює критерій грубої збіжності точкових процесів:

Теорема (збіжність точкових процесів, Калленберг). *Нехай $\xi,\xi_1,\xi_2,\dots$ — точкові процеси на S, де ξ простий, $\mathcal{U}\subset\hat{\mathcal{S}}_\xi$ — фіксоване (dissecting ring), а $\mathcal{I}\subset\mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\xi_n(U)=0\right\}=\mathbb{P}\left\{\xi(U)=0\right\}, U\in\mathcal{U}$,

2. $\limsup\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\xi_n(I)>1\right\}\le\mathbb{P}\left\{\xi(I)>1\right\}, I\in\mathcal{I}$.

Формулювання цієї теореми потребує додаткових пояснень. Для невипадкової міри μ $\hat{\mathcal{S}}_\mu$ означає клас борелевих множин $B \subset S$ з $\mu(\partial B) = 0$, а для випадкової міри ξ $\hat{\mathcal{S}}_\xi$ позначає $\hat{\mathcal{S}}_{\mathbb{E}\xi}$. Клас $\mathcal{C}$ обмежених борелевих підмножин S називається dissecting, якщо кожна відкрита множина $G \subset S$ представляється у вигляді зліченного об'єднання множин з $\mathcal{C}$, а кона обмежена борелева множина $B \subset S$ покривається скінченною кількістю множин з $\mathcal{C}$.

Розглянемо клас $\mathcal{X}$ of скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a, b\rangle \subset [0, 1]$, де $\langle a, b\rangle$ позначає одне з $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ чи $(a, b]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0, 1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{X}$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і dissecting класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 1.1.2, можна використати теорему Калленберга про збіжність для $\xi_n = P_n$, $\xi = N$ та $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

Доведення теореми 1.1.2. Нехай $\langle\gamma_1, \delta_1\rangle, \ldots, \langle\gamma_m, \delta_m\rangle$ ($\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \delta_m$) — набір інтервалів в $[0, 1]$, що попарно не перетинаються, $\lfloor a\rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le a\}$, $I_j = \{\lfloor\gamma_j n\rfloor + 1, \lceil\delta_j n\rceil\}$ і $I = \bigvee_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$. Позначимо $Y_n = \mathrm{card}\{i \in I : Z_n(i) = i\}$, тоді $P_n(I) = Y_n$. Як у і лемі 1.1.1, позначимо F_i множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою, тоді

$$\mathbb{P}\{Y_n = 0\} = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)$$

Нехай $\mathcal{M} = \mathrm{card}\, I = \sum_{j=1}^m (\lceil\delta_j n\rceil - \lfloor\gamma_j n\rfloor)$ і, аналогічно лемі 1.1.1,

$$\mathbb{P}\{Y_n = k\} = C_{\mathcal{M}}^k \sum_{i=0}^{\mathcal{M}-k} (-1)^i C_{\mathcal{M}-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i-k)}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{M}}{n} = \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 1.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y_n = k\} = \frac{1}{k!}\left(\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j - \gamma_j)\right)^k \exp\left\{-\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j - \gamma_j)\right\}, k \in \mathbb{N}_0$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \mathrm{Leb}(I) = \theta\sum_{j=1}^m(\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{P_n(I) = 0\} = \mathbb{P}\{N(I) = 0\}, I \in \mathcal{X}$$

Так як $\mathbb{P}\{P_n(I) > 1\} = 1 - (\mathbb{P}\{P_n(I) = 0\} + \mathbb{P}\{P_n(I) = 1\})$ і $\mathbb{P}\{P_n(I) = 1\} \to \mathbb{P}\{N(I) = 1\}$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо навіть більше, ніж треба:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{P_n(I) > 1\} = \mathbb{P}\{N(I) > 1\}, I \in \mathcal{X}$$

Значення цих двох границь доводять $P_n \xrightarrow{vd} N, n \to \infty$. $\square$

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З 1.1.2, для $\gamma = 1$ $\mathbb{P}\{X_n = 0\} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i)} \to e^{-\theta}, n \to \infty$. Введемо ще один точковий процес P'_n, що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left\{P'_n(F) = k\right\} = \mathbb{P}\left\{P_n(F) = k \mid P_n(F) > 0\right\} = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}\{P_n(F)=k\}}{1-\mathbb{P}\{P_n(F)=0\}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Повторенням доведення 1.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 1.1.3. *Точковий процес P'_n грубо збігається за розподілом до «обумовленого» точкового процесу Пуассона N' з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left\{N'(F) = k\right\} = \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \frac{\exp\left\{-\Lambda(F)\right\}}{1 - \exp\left\{-\Lambda(F)\right\}}$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0,1])$ ьта $k \in \mathbb{N}$.

Точковий процес N' можна назвати обумовленим процесом Пуассона, бо

$$\mathbb{P}\left\{N(F) = k \mid N(F) > 0\right\} = \frac{\mathbb{P}\left\{N(F) = k, N(F) > 0\right\}}{\mathbb{P}\left\{N(F) > 0\right\}} = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}\{N(F)=k\}}{1-\exp\{-\Lambda(F)\}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

тому $\mathbb{P}\left\{N(F) = k \mid N(F) > 0\right\} = \mathbb{P}\left\{N'(F) = k\right\}$ для $k \in \mathbb{N}$.

1.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 1.1.2 та 1.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення з [3]. В термінах грубої збіжності точкових процесів, її можна сформулювати наступним чином:

Теорема 1.2.1 (теорема про неперервне відображення)**.** *Нехай φ є неперервним відображенням з простору $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$ точкових мір на $[0,1]$ з грубою топологією в $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Якщо ξ_n — послідовність точкових процесів, що грубо збігається за розподілом до ξ, $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$, тоді $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$, тобто послідовність випадкових величин $\varphi(\xi_n)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$.*

Зауваження. *За означенням збіжності за розподілом, якщо φ є обмеженою, то також має місце $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$.*

Перед дослідженням граничних розподілів для деяких відображень, варто навести твердження 3.13 з [2], яке можна сформулювати наступним чином:

Лема 1.2.2. *Нехай μ_n — грубо збіжна послідовність точкових мір в $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$, тобто $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Тоді*

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i^{(n)}},\ \mu = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$$

де δ_x є мірою Дірака, зосередженою в x, а $x_i^{(n)} \to x_i, n \to \infty$ для $i = 1, \ldots, k$.

Це означає, що будь-яка неперервна функція з $\mathbb{R}^k$ (або принаймні $[0,1]^k$) в $\mathbb{R}$ задає неперервне відносно грубої топології відображення.

1.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ відображення можна визначити два відображення $\min(\mu) = \sup\{x \in [0,1] : \mu([0,$
та $\max(\mu) = \inf\{x \in [0,1] : \mu([x,1]) = 0\}$, що ставлять у відповідність цій міри її найменший та найбільший атом, де для порожньої множини за домовленістю $\sup\varnothing = 0$ та $\inf\varnothing = 1$. Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min\{x_1,\ldots,x_k\}$ та $\max\{x_1,\ldots,x_k\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з леми 1.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 1.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, ніж $\min(N')$ та $\max(N')$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}\{N(F) = k \mid N([0,1]) = m\}$ є відомим (твердження 3.8, [4]) — це біноміальний процес з розміром m та розподілом $\mathrm{Unif}(0,1)$. Іншим корисним фактом є такий: нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є тоді розподіли $U_{(1)}$ та $U_{(m)}$ задаються

$$\mathbb{P}\left\{U_{(1)} \le x\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^m, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}, \quad \mathbb{P}\left\{U_{(m)} \le x\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^m, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ задаються

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\min(N) \le x\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\}\, \mathbb{P}\{N([0,1]) = m\} = \\ &= \mathbb{1}\{x \ge 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(1-(1-x)^m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\max(N) \le x\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\}\, \mathbb{P}\{N([0,1]) = m\} = \\ &= \mathbb{1}\{x \ge 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\{N([0,1]) = 0\} = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\{\min(N) = 1\} = \mathbb{P}\{\max(N) = 0\} =$

$e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}\left\{\min(N) \le x \mid \min(N) < 1\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\mathbb{P}\left\{\max(N) \le x \mid \max(N) > 0\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (1.6) та (1.7) задають безумовні розподіли $\min(N')$ та $\max(N')$.

Для P_n' $\min(P_n') = \sup\{x \in [0,1] : \operatorname{card}\{i \in \{1, \dots, \lceil xn \rceil\} : Z(i) = i\} = 0\}$ означає супремум значень x, для яких усі $i \in \{1, \dots, \lceil xn \rceil\}$ під дією перестановки опиняються не на своїх місцях, аналогічно $\max(P_n')$ означає інфімум x, для $i \in \{\lfloor xn \rfloor + 1, \dots, n\}$ опиняються не на своїх місцях. Легко побачити, що такі x можуть набувати лише значень, що є пропорційними $\frac{1}{n}$.

```
-- CDF plot --
```

Обчислення $\mathbb{P}\left\{\frac{k-1}{n} < \min(N') \le \frac{k}{n}\right\}$ та $\mathbb{P}\left\{\frac{k-1}{n} < \max(N') \le \frac{k}{n}\right\}$ дає приблизну частку перестановок, для яких k є відповідно найменшою та найбільшою нерухомою точкою.

```
-- comparison table --
```

Також, $\mathbb{E}\min(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\mathbb{E}\max(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}\right) dx = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$, тому $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min(P_n') = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max(P_n') = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$.

1.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. З [3], для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, цей функціонал задається

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^1 f(x) dN\right\} = \exp\left\{-\,\theta \int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) dx\right\} \tag{1.8}$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0,1]$.

Позначатимемо $\mathrm{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N. Для будь-якої точкової міри μ, $\mathrm{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (1.8), можна побачити, що перетворення Лапласа $\mathrm{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N)\}(p) = \exp\left\{-\theta\left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right)\right\} \tag{1.9}$$

Оскільки розподіл $\text{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(N')$.

$$\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N)} = 1\cdot\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)=0\right\} + \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N')}\cdot\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)>0\right\} =$$
$$= e^{-\theta} + \mathcal{L}\left\{\text{sum}(N')\right\}(p)\cdot(1-e^{-\theta}) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\text{sum}(N')\right\}(p) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) - e^{-\theta}\right) =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p}-1)\right\}$$

Оскільки $\text{sum}(N')$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N')\right\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(N')$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\text{sum}(N')}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p}-1)\right\} \tag{1.10}$$

Знаходження оберненого перетворення для (1.10) є доволі складним.

Хоча, існує інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x)$:

$$\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)\le x\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)\le x \mid N([0,1])=m\right\}\mathbb{P}\left\{N([0,1])=m\right\} =$$
$$= \mathbb{1}\left\{x\ge 0\right\}\cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)\le x \mid N([0,1])=m\right\}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}$$

Умовні розподіли $\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)\le x \mid N([0,1])=m\right\}$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\text{Unif}\,(0,1)$. Їх функція розподілу наступна:

$$\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0\le x<m \\ 1, & x\ge m \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N)\le x\right\}$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu\in\mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

Наприклад:

$$x \in [0,1),\ \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x\right\} = e^{-\theta}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m\right) = e^{-\theta}\cdot I_0(2\sqrt{\theta x})$$

$$x \in [1,2),\ \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x\right\} = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m\right) =$$
$$= e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)}\cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)})\right)$$

$$x \in [2,3),\ \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x\right\} = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m - \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-2)!m!}(x-2)^m\right) = e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)}\cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!}\theta(x-2)I_2(2\sqrt{\theta(x-2)})\right)$$

В загальному випадку:

$$x \in [n, n+1),\ \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x\right\} = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)$$

Отже, функція розподілу $\text{sum}(N)$ задається

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x\right\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta}\sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \ge 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Таким чином, функція розподіу $\text{sum}(N')$ може бути виражена через $F_{\text{sum}(N)}(x)$ настуним чином:

$$\mathbb{P}\left\{\text{sum}(N') \le x\right\} = \mathbb{P}\left\{\text{sum}(N) \le x \mid \text{sum}(N) > 0\right\} = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}\right) \tag{1.12}$$

`-- CDF plot --`

При цьому, $\mathbb{E}\,\text{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\text{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\text{Unif}\,(0,1)$:

$$\mathbb{E}\,\text{sum}(N) = 0\cdot\mathbb{P}\left\{N([0,1]) = 0\right\} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{2}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

1.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподілу найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *and* $1-\max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1,\ldots,n\}$ *це означатиме вважати* 0 *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — незалежні випадкові величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \cdots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (тут і далі, $S_{(i)}$ позначає i-ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n]}$ — те ж саме, але з вказанням n як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [5], [6]). Зокрема, для $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left\{S_{(1)}^{[n+1]} > x\right\} = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n \tag{1.13}$$

$$\mathbb{P}\left\{S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right\} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^j \left((1-jx)_+\right)^n \tag{1.14}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого s-min(N) та найбільшого s-max(N) спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S_{(1)}^1 = 1$)

$$\mathbb{P}\left\{\text{s-min}(N) > x\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{S_{(1)}^{[n+1]} > x\right\} \mathbb{P}\left\{N([0,1]) = n\right\} \tag{1.15}$$

$$\mathbb{P}\left\{\text{s-max}(N) > x\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right\} \mathbb{P}\left\{N([0,1]) = n\right\} \tag{1.16}$$

Хоча явні вирази для (1.15) та (1.16), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Добре відомо (наприклад, [5]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n)^T \overset{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{1.17}$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \ldots, S_{(n)}\right)^T \overset{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{1.18}$$

$$X_{(i)} \overset{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \tag{1.19}$$

Виявляється, (1.18) та (1.19) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

Лема 1.2.3. *Для порядкових статистик спейсингів між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *та та незалежних величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце*

$$S_{(i)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \ldots, n \tag{1.20}$$

Доведення. Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \ldots, n$. З [7] відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \overset{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \cdots + (\Delta_1 + \cdots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n - i + 1)\Delta_i$ з розподілом Exp (1). В термінах Y_i, верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^{n} Y_j}$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (1.20). $\square$

Окремими випадками леми 1.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{n\sum_{i=1}^{n} X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Разом з (1.15) та (1.16) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \ \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \tag{1.21}$$

де ν має розподіл Poiss (θ), а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл Exp (1).

$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N)$ можна знайти з (1.21). Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \cdots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}\{\nu = n\} = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt$$

$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n$$

де $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ — n-те гармонічне число Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) \approx 0.48483$ and $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Olav Kallenberg. Random Measures, Theory and Applications. Springer International Publishing, 2017.
2. Sidney I. Resnick. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. Springer New York, 1987.
3. Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In Heavy-Tail Phenomena, pages 39–69. Springer New York, 2007.
4. Günter Last and Mathew Penrose. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.
5. Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. Journal of Applied Probability, 17(3):623–634, 1980.
6. Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.
7. Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.