**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Інститут прикладного системного аналізу
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено
завідувач кафедри
__________ О.Л. Тимощук
«____» _____________ 2022 р.

Дипломна робота

**на здобуття ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»
спеціальності 124 «Системний аналіз»
на тему: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок»**

Виконав:
студент IV курсу, групи КА-81
Галганов Олексій Андрійович

Керівник:
доцент, к.ф-м.н. Ільєнко Андрій Борисович

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н. Рощина Надія Василівна

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н. Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:
???

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Галганов Олексій Андрійович

Київ – 2022 року

ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

$\mathbb{1}\{\,\cdot\,\}$ — індикаторна функція, що дорівнює 1 у випадку, коли умова в дужках справджується, і 0 у іншому випадку.

$\operatorname{card} X$ — потужність множини X.

$\lceil x \rceil$ — найменше ціле число, яке більше або дорівнює дійсному числу x.

$\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле число, яке менше або дорівнює дійсному числу x.

$\mathbb{N}_0$ — множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

S_n — група перестановок (симетрична група) степеня n.

$C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм.

$\mathcal{B}(X)$ — борелева σ-алгебра на множині X.

$M_p(E)$ — множина усіх точкових мір, визначених на просторі E.

$\langle a, b\rangle$ — інтервал, позначає одне з $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$ чи $(a, b]$.

δ_x — міра Дірака, зосереджена в точці x.

Leb — міра Лебега.

$\mathcal{L}\{f\}$ — перетворення Лапласа функції f.

ψ_N — функціонал Лапласа точкового випадкового процесу N.

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ — верхня границя послідовності a_n.

$a_n \to a$ — числова послідовність a_n збігається до a.

$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ — послідовність мір μ_n грубо збігається до міри μ.

$\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ — послідовність точкових випадкових процесів ξ_n грубо збігається за розподілом до точкового випадкового процесу ξ.

$X_n \xrightarrow{Sd} X$ — послідовність випадкових процесів X_n збігається за розподілом у топології Скорохода до випадкового процесу X.

$X_n \xrightarrow{d} X$ — послідовність випадкових величин X_n збігається за розподілом до випадкової величини X.

$X \stackrel{d}{=} Y$ — випадкові величини X та Y рівні за розподілом.

$X_{(k)}$ — k-та порядкова статистика, тобто k-та за номером випадкова величина серед відсортованих у порядку зростання неперервних випадкових величин $X_1, ..., X_n$.

$X_{(k)}^{[n]}$ — k-та порядкова статистика для n випадкових величин.

$\mathbb{E}X$ — математичне сподівання випадкової величини X.

$X \sim P$ — випадкова величина X має розподіл P.

$\mathrm{Pois}\,(a)$ — дискретний розподіл Пуассона з параметром $a > 0$, $\mathbb{P}\,(X = n) =$

$\frac{a^n}{n!}e^{-a}$ для $n \in \mathbb{N}_0$.

$\mathrm{U}\left(a, b\right)$ — абсолютно неперервний рівномірний розподіл на інтервалі $\langle a, b\rangle$ зі щільністю $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in \langle a, b\rangle\right\}$.

$\mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$ — абсолютно неперервний експоненційний розподіл з параметром $\lambda > 0$ зі щільністю $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\}$.

$\mathrm{ESF}\left(n, \theta\right)$ — розподіл Юенса на S_n з параметрами $n \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$.

$I_\nu(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду, $\nu \in \mathbb{R}$.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1.1. Поняття з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114)**.** *Перестановкою* π на множині $A = \{1, \ldots, n\}$ називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \to A$.

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118)**.** *Циклом довжини* k називають перестановку π, що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \ldots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \ldots, n$.

Означення 1.1.3 ([1], ст. 116)**.** *Групою перестановок (симетричною групою) степеня* n називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

1.2. Поняття з теорії міри та функціонального аналізу

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{R}$ називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): сім'я $\mathcal{R}$ непорожня та замкнена відносно скінченних об'єднань та різниць.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{S}$ називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з $\mathcal{S}$ представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з $\mathcal{S}$, тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{A}$ називається *σ-алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

а) $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \big(A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}\big)$;

б) $(A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара $(X, \mathcal{A})$ називається *вимірним простором*.

Означення 1.2.4 ([4], ст. 146)**.** Нехай $(X, \mathcal{A}_X)$ та $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — два вимірних простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить $\mathcal{A}_X$.

Означення 1.2.5 ([4], ст. 147)**.** Нехай X — метричний простір, $\mathcal{O}$ — сім'я всіх відкритих підмножин X. Мінімальна σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить $\mathcal{O}$, називається *борелевою σ-алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами.*

Означення 1.2.6 ([2], ст. 24)**.** Сім'я підмножин $\mathcal{S}$ сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

а) Кожну відкриту підмножину X можна зобразити як зліченне об'єднання множин з $\mathcal{S}$;

б) Кожну обмежену підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{S}$.

Для простору $\mathbb{R}^n$ прикладом розсікаючої сім'ї множин є сім'я куль з раціональними радіусами та центрами в точках з раціональними координатами.

Означення 1.2.7 ([3], ст. 8)**.** Нехай $\mathcal{A}$ — σ-алгебра у просторі X. Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, якщо виконуються наступні дві умови:

а) Невід'ємність: $\forall\ A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;

б) σ-адитивність: для довільних множин $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.8 ([2], ст. 22)**.** Нехай $(X, \mathcal{A})$ — вимірний простір, для якого $\{x\} \in \mathcal{A}$ для всіх $x \in X$. Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на $(X, \mathcal{A})$, якщо $\mu\left(\{x\}\right) > 0$.

Означення 1.2.9 ([2], ст. 22; [5], ст. 123)**.** *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}\left\{x \in A\right\} = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

Означення 1.2.10 ([5], ст. 123)**.** *Точкова міра* — це міра μ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — зліченний набір точок X, не обов'язково різних. У випадку, коли X — метричний простір, точкова міра називається *радоновою*, якщо міра компактних множин з $\mathcal{A}$ завжди є скінченною.

Означення 1.2.11 ([5], ст. 124)**.** Точкова міра μ називається *простою*, якщо для всіх $x \in E$ $\mu\left(\{x\}\right) \leq 1$.

Означення 1.2.12 ([5], ст. 140)**.** Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, де X є метричним простором, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо виконується $\int_X f \mathrm{d}\mu_n \to \int_X f \mathrm{d}\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Надалі вважатимемо, що якщо мова йде про грубу збіжність послідовності мір, то простір, на якому вони задані, є метричним. Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

Теорема 1.2.1 ([5], ст. 144)**.** *Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ та μ — міри на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$ і $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Для кожної компактної множини $K \subset X$ з $\mu(\partial K) = 0$ існує номер $N = N(K)$ такий, що при $n \geq N$ існують нумерації атомів μ_n та μ, $x_i^{(n)}, 1 \leq i \leq p$ та $x_i, 1 \leq i \leq p$ відповідно, такі, що*

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i^{(n)}}(A),\ \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i}(A)$$

для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $x_i^{(n)} \to x_i$ для всіх $1 \leq i \leq p$.

Означення 1.2.13 ([6], ст.121-124)**.** *Простором càdlàg-функцій* на $[0,1]$ називається простір $\mathcal{D}_{[0,1]}$ функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, які неперервні справа і мають границі зліва.

Означення 1.2.14. *Метрикою Скорохода* на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ називається метрика, визначена за формулою

$$d(f,g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left(\sup_{x \in [0,1]} |\lambda(x) - x|, \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \right),$$

де Λ — множина строго зростаючих неперервних відображень $[0,1]$ в себе.

Послідовність функцій $f_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ збігається за метрикою Скорохода до $f \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність функцій $\lambda_n \in \Lambda$ таких, що рівномірно відносно x $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n(x)) = f(x)$ та $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = x$, тобто виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(\lambda_n(x)) - f(x)| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_n(x) - x| = 0.$$

1.3. Поняття про випадкові процеси

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, E — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева σ-алгебра підмножин E.

Позначимо через $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на E, а через $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу σ-алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P}$ — міра на цьому просторі, що додатково задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення 1.3.1. *Точковий випадковий процес* N — вимірне відображення з простору $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес N задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P}[N \in \cdot\,]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

Теорема 1.3.1 ([5], ст. 124)**.** *N є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного $F \in \mathcal{E}$ відображення $\omega \mapsto N(\omega, F)$ з $(\Omega, \mathcal{A})$ в $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ є вимірним.*

Означення 1.3.2 ([7], ст. 49)**.** Точковий процес N на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$ називається *простим*, якщо $\mathbb{P}(\forall x \in E : N(\{x\}) \leq 1) = 1$.

Теорема 1.3.2 ([5], ст. 126)**.** *Нехай N — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а сім'я передкомпактних множин $\mathcal{F}$ задовольняє наступні умови:*

а) $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$;

б) $\mathcal{E}$ є мінімальною σ-алгеброю, що містить $\mathcal{F}$;

в) Існує послідовність множин $E_n \in \mathcal{F}$, для якої $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1,\ldots,I_k}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \leq j \leq k)$$

для $I_i \in \mathcal{F}$ *та цілих* $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1,...,I_k}, k = 1, 2, ..., I_j \in \mathcal{F}\}$ *однозначно визначає розподіл* P_N.

Теорема 1.3.3 ([7], ст. 50)**.** *Нехай* N *та* N' *— прості точкові процеси на* $(E, \mathcal{E})$ *і*

$$\mathbb{P}\left(N(F) = 0\right) = \mathbb{P}\left(N'(F) = 0\right), \ F \in \mathcal{E}.$$

Тоді N *та* N' *мають однакові розподіли.*

Означення 1.3.3 ([5], ст. 129)**.** Нехай N — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. *Функціоналом Лапласа* для N називається відображення ψ_N, що переводить невід'ємні вимірні функції на $(E, \mathcal{E})$ у $[0, +\infty)$ за правилом

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)} = \int_\Omega e^{-N(\omega,f)} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \exp\left\{-\int_E f(x)\mathrm{d}\nu\right\} \mathrm{d}P_N(\nu)$$

Наслідком теореми 1.3.2 є наступне твердження:

Теорема 1.3.4 ([5], ст. 129)**.** *Функціонал Лапласа* ψ_N *однозначно визначає точковий процес* N.

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

Означення 1.3.4 ([2], ст. 127)**.** *Мірою інтенсивності* або *середньою мірою* точкового процесу N називається міра μ на $\mathcal{E}$, визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_\Omega N(\omega, F)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \nu(F)\mathrm{d}P_N(\nu).$$

Наведемо приклад точкового процесу.

Означення 1.3.5 ([7], ст. 11)**.** Нехай P — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$, а $X_1, \ldots, X_m$ — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ визначено δ_{X_i} — точковий процес, для якого $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_i \in F\right)$, $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_i \notin F\right)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \cdots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальним процесом* з розміром вибірки m та розподілом P. Для нього

$$\mathbb{P}\left(X(F) = k\right) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \ k = 0, \ldots, m, \ F \in \mathcal{E}.$$

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

Означення 1.3.6 ([5], ст. 130)**.** Нехай μ — радонова міра на $\mathcal{E}$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

а) Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\left(N(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty. \end{cases}$$

У випадку $\mu(F) = \infty$ покладаємо $N(F) = \infty$ з ймовірністю 1.

б) Для будь-якого натурального k, якщо $F_1, \ldots, F_k$ з $\mathcal{E}$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \le i \le k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Функціонал Лапласа точкового процесу Пуассона визначено формулою

$$\psi_N(f) = \exp\left\{ -\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mathrm{d}\mu \right\}$$

Як і для невипадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

Означення 1.3.7 ([2], ст. 109)**.** Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \ge 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

Теорема 1.3.5 ([2], ст. 121)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — розсікаюче напівкільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ *для* $U \in \mathcal{U}$*;*

б) $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \le \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ *для* $I \in \mathcal{I}$*.*

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

Теорема 1.3.6 ([8], ст. 42)**.** *Нехай* $(\xi_n, n \geq 1)$ *— послідовність точкових процесів на вимірному просторі* $(E, \mathcal{E})$*, яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу* ξ*, а відображення* $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$ *таке, що*

$$\mathbb{P}\left(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперевною в } \mu\}\right) = 0.$$

Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \geq 1)$ *збігається за розподілом до* $\varphi(\xi)$*, тобто* $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$*.*

Розглянемо також поняття звичайних випадкових процесів.

Означення 1.3.8 ([9], ст. 83)**.** Нехай $(E, \mathcal{E})$ — вимірний простір, $T \subset \mathbb{R}$ — множина індексів. Відображення $X : \Omega \to U \subset E^T$ називається *випадковим процесом* на T зі значеннями в E та траєкторіями в U, якщо відображення $X_t : \Omega \to E$ вимірні для кожного $t \in T$.

Означення 1.3.9. Нехай X — випадковий процес на $[0, 1]$ зі значеннями в $\mathbb{R}$. Якщо траєкторії $X(t)$ з ймовірністю 1 належать простору $\mathcal{D}_{[0,1]}$, то X називається *càdlàg-процесом*.

Означення 1.3.10 ([9], ст. 512)**.** Нехай $(X_n, n \geq 1)$ — послідовність випадкових càdlàg-процесів. Якщо $\mathbb{E}\varphi\left(X_n\right) \to \mathbb{E}\varphi\left(X\right)$ для кожного обмеженого функціонала $\varphi : \mathcal{D}_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, неперервного на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ відносно метрики Скорохода, то послідовність $(X_n, n \geq 1)$ *збігається за розподілом у топології Скорохода*, що позначається $X_n \xrightarrow{Sd} X$.

Наведемо ще один тип збіжності точкових процесів та його зв'язок з грубою збіжністю за розподілом.

Означення 1.3.11 ([2], ст. 127)**.** Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, де $E = [0, 1]$. Якщо для $X_n(t) = \xi_n\left([0, t]\right)$ та $X(t) = \xi\left([0, t]\right)$ виконується $X_n \xrightarrow{Sd} X$, то то послідовність $(\xi_n, n \geq 1)$ *збігається за розподілом у топології Скорохода*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi$.

Теорема 1.3.7 ([2], ст. 127)**.** *Нехай* $(\xi_n, n \geq 1)$ *— послідовність точкових процесів на вимірному просторі* $(E, \mathcal{E})$*, де* $E = [0, 1]$*. Тоді* $\left(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{vd} \xi\right)$*. Якщо ж додатково* ξ *— простий і* $\xi\left(\{0\}\right) = 0$*, то* $\left(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi\right) \Leftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{vd} \xi\right)$*.*

РОЗДІЛ 2

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Поняття про перестановки Юенса

2.2. Огляд наявних результатів

РОЗДІЛ 3
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

3.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n, заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)},\ \pi \in \mathrm{S}_n, \tag{3.1}$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $\mathrm{c}(\pi)$ позначає кількість циклів у π. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса* [10]. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса* і, за потреби, для позначення такої перестановки σ на S_n застосовуватимемо позначення $\sigma \sim \mathrm{ESF}\,(n,\theta)$.

Зауваження. *Якщо $\theta = 1$, то формула* (3.1) *задає рівномірний розподіл, тобто $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in \mathrm{S}_n$.*

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 3.1.1. *Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1,\dots,n\}$, що задана розподілом* (3.1)*, тобто, σ є перестановкою Юенса з S_n. Нехай $\gamma \in [0,1]$, а $X_n = \mathrm{card}\,\{i \in \{1,\dots,\lceil\gamma n\rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil\gamma n\rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до $\mathrm{Pois}\,(\gamma\theta)$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}\,(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\mathbb{P}\,(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil\gamma n\rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil\gamma n\rceil}\right) =$$
$$= 1 - \sum_i \mathbb{P}\,(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}\,(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil\gamma n\rceil} \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil\gamma n\rceil}\right).$$

У цьому виразі $\lceil\gamma n\rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}\,(F_i)$, $C^2_{\lceil\gamma n\rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}\,(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π, то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2,\dots,n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини $\{3, \ldots, n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \ldots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}\left(\{\pi\}\right) =$$

$$= \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} = [\mathrm{c}(\pi) \geq i] =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{\mathrm{c}(\pi)-i} =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{\mathrm{c}(\tilde{\pi})}.$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (3.1) на S_{n-i}, але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \ldots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil} (-1)^i C_{\lceil\gamma n\rceil}^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\left(X_n = k\right)$ для $k > 0$ можна отримати аналогічно: існує $C_{\lceil\gamma n\rceil}^k$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = C_{\lceil\gamma n\rceil}^k \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i C_{\lceil\gamma n\rceil-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) =$$

$$= \frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)} =$$

$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k - i + 1)\ldots(\lceil\gamma n\rceil - 2)(\lceil\gamma n\rceil - 1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Нехай N достатньо велике і $\lceil \gamma n \rceil - k > N$, тоді $\mathbb{P}(X_n = k)$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil \gamma n \rceil - k$.

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \le \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \ldots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \ldots (\theta + n - 1)} \le$$
$$\le \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{\theta + n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k} \le \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma \in [0,1)$, $\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \le C = C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \le C^k \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} C^i \le C^k \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} C^i \to 0, \ N \to \infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \ldots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \ldots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{(n - k - i + 1) \ldots (n-2)(n-1)n}{(\theta + n - i - k) \ldots (\theta + n - 1)} \le$$
$$\le \frac{(n - k - i + 1) \ldots (n-2)(n-1)n}{(n - i - k) \ldots (n - 1)} = \frac{n}{n - i - k} \to 1, \ n \to \infty,$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1, то для фіксованого N

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \ldots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \ldots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \ N \to \infty.$$

□

Користуючись позначеннями з леми 3.1.1, визначимо для $n \in \mathbb{N}$ точкові процеси P_n на $(E, \mathcal{E}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ за правилом

$$P_n(F) = \text{card} \left\{ i \in \{1, ..., n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F \right\}, \ F \in \mathcal{E}. \tag{3.2}$$

Отже, P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса σ, нормованих n, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n\left([0,\gamma]\right)=k\right)=\mathbb{P}\left(N\left([0,\gamma]\right)=k\right),\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 3.1.2. *Послідовність точкових процесів P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda=\theta\cdot\mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n\to\infty$).*

Теорема 1.3.5 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів, скористаємось позначеннями з неї.

Розглянемо сім'ю множин $\mathcal{X}$, що складається зі скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a,b\rangle\subset[0,1]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda=\theta\cdot\mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B)=\Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B\subset\mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B)=0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\mathcal{X}\subset\hat{\mathcal{E}}_N$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 3.1.2, можна використати теорему 1.3.5 для $\xi_n=P_n$, $\xi=N$ та $\mathcal{U}=\mathcal{I}=\mathcal{X}$.

Доведення теореми 3.1.2. Нехай $\langle\gamma_1,\delta_1\rangle,...,\langle\gamma_m,\delta_m\rangle$, де $\gamma_1<\delta_1<\gamma_2<...<\gamma_m<\delta_m$, — набір інтервалів в $[0,1]$, що попарно не перетинаються, $I_j=\langle\gamma_j,\delta_j\rangle$ і $I=\bigcup_{j=1}^m I_j\in\mathcal{X}$. Позначимо $Y_n=P_n(I)$, де $P_n(I)$ визначено формулою (3.2). Нехай $M_n=\mathrm{card}\left\{i\in\{1,...,n\}:\frac{i}{n}\in I\right\}$ і тоді, аналогічно лемі 3.1.1,

$$\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)=C_{M_n}^k\sum_{i=0}^{M_n-k}(-1)^i C_{M_n-k}^i\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Оскільки $\mathrm{card}\left\{i\in\{1,...,n\}:\frac{i}{n}\in I_j\right\}=\lceil\delta_j n\rceil-\lfloor\gamma_j n\rfloor$ ($\lceil\cdot\rceil$ може змінюватися на $\lfloor\cdot\rfloor$ і навпаки в залежності від n та включення кінцевих точок до інтервалу), а $\lfloor x\rfloor\le x\le\lceil x\rceil$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 3.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)=\frac{1}{k!}\left(\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right)^k\exp\left\{-\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right\},k\in\mathbb{N}_0.$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \mathrm{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^{m}(\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) = \mathbb{P}\left(N(I) = 0\right), I \in \mathcal{X}.$$

Так як $\mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) + \mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right)\right)$ і $\mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right) \to \mathbb{P}\left(N(I) = 1\right)$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = \mathbb{P}\left(N(I) > 1\right), I \in \mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.3.5 справджуються, що і доводить $P_n \xrightarrow{vd} N$ при $n \to \infty$. $\square$

Варто також зауважити важливий наслідок теореми 3.1.2.

Наслідок 3.1.2. *Оскільки граничний процес Пуассона N простий і $N\left(\{0\}\right) = 0$ з ймовірністю 1, то в силу теореми 1.3.7 має місце збіжність $P_n \xrightarrow{Sd} N$.*

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 3.1.2 для $\gamma = 1$ виконується $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \to e^{-\theta}, n \to \infty$. Введемо ще один точковий процес $\widehat{P}_n$, що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left(\widehat{P}_n(F) = k\right) = \mathbb{P}\left(P_n(F) = k \mid P_n([0,1]) > 0\right) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k > 0; \\ \frac{\mathbb{P}\left(P_n(F)=0, P_n(F^C)>0\right)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k = 0. \end{cases}$$

В силу теореми 1.3.3 достатньо визначити лише одновимірні розподіли. Повторенням доведення 3.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 3.1.3. *Точковий процес $\widehat{P}_n$ грубо збігається за розподілом до точкового процесу $\widehat{N}$ на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ \frac{\mathbb{P}\left(N(F)=0, N(F^C)>0\right)}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0,1])$ та $k \in \mathbb{N}$.

За властивістю 2 у означенні 1.3.6 маємо

$$\mathbb{P}\left(N(F)=0, N(F^C)>0\right) = \mathbb{P}\left(N(F)=0\right)\cdot\mathbb{P}\left(N(F^C)>0\right) =$$
$$= \mathbb{P}\left(N(F)=0\right)\cdot\left(1-\mathbb{P}\left(N(F^C)=0\right)\right) = e^{-\Lambda(F)}\cdot\left(1-e^{-\Lambda(F^C)}\right) =$$
$$= e^{-\Lambda(F)}\cdot\left(1-e^{-\theta}e^{\Lambda(F)}\right) = e^{-\Lambda(F)} - e^{-\theta},$$

тому можна записати

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}(F)=k\right) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k>0 \\ \frac{e^{-\Lambda(F)}-e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k=0. \end{cases}$$

Зокрема, для $F=[0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}([0,1])=k\right) = \begin{cases} \frac{\theta^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k>0 \\ 0, & k=0. \end{cases}$$

3.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 3.1.2 та 3.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення 1.3.6. Корисною також є теорема 1.2.1, згідно з якою для послідовності точкових мір μ_n, що грубо збігається до точкової міри μ, для будь-якої компактної множини існує номер, починаючи з якого усі елементи послідовності містять стільки ж атомів з цієї множини, скільки й гранична міра. Це означає, що будь-яка неперервна функція багатьох змінних утворює на просторі точкових мір неперервне відносно грубої топології відображення. У нашому випадку достатньо обмежитись функціями з $[0,1]^p$.

3.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ на $[0,1]$ визначимо відображення $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$, що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атоми за формулами

$$\min(\mu) = \sup\left\{x\in[0,1] : \mu([0,x])=0\right\},$$
$$\max(\mu) = \inf\left\{x\in[0,1] : \mu([x,1])=0\right\},$$

де для порожньої множини покладаємо $\sup\varnothing=0$ та $\inf\varnothing=1$. Якщо $\{x_1,\ldots,x_k\}$ — множина атомів μ, то $\min(\mu)=\min\{x_1,\ldots,x_k\}$ і $\max(\mu)=\max\{x_1,\ldots,x_k\}$.

Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки min $\{x_1, \ldots, x_k\}$ та max $\{x_1, \ldots, x_k\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з теореми 1.2.1 випливає, що min(μ) та max(μ) є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 3.1.3, простіше отримати розподіл min(N) та max(N), оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}\left(N(F) = k \mid N([0,1]) = m\right)$ є відомим (твердження 3.8, ст. 23, [7]) — це одновимірний розподіл біноміального процесу з розміром вибірки m та розподілом U $(0,1)$. Це означає, що за умови $N([0,1]) = m$ сумісний розподіл положень всіх m атомів збігається з розподілом випадкового вектора з m незалежних випадкових величин з розподілом U $(0,1)$. Також, корисним є такий факт: нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є незалежними випадковими величинами з розподілом U $(0,1)$; тоді розподіли $U_{(1)}^{[m]} = \min\{U_1, \ldots, U_m\}$ та $U_{(m)}^{[m]} = \max\{U_1, \ldots, U_m\}$ задаються формулами

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1-x)^m, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^m, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

оскільки

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \le x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U_1 > x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(U_1 > x, ..., U_m > x\right) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(U_1 > x\right) \cdot ... \cdot \mathbb{P}\left(U_m > x\right) = 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(U_1 \le x\right)\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \mathbb{P}\left(U_m \le x\right)\right),$$
$$\mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \le x\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \le x, ..., U_m \le x\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \le x\right) \cdot ... \cdot \mathbb{P}\left(U_m \le x\right).$$

Отже, розподіли min(N) та max(N) мають вигляд

$$\mathbb{P}\left(\min(N) \le x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$
$$= \mathbb{1}\{x \ge 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - (1-x)^m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1; \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N) \le x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$

$$= \mathbb{1}\left\{x \ge 0\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\left(\min(N) = 1\right) = \mathbb{P}\left(\max(N) = 0\right) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid \min(N) < 1\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid \max(N) > 0\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (3.4) та (3.5) задають безумовні розподіли $\min(\widehat{N})$ та $\max(\widehat{N})$.

З формул (3.2) та (3.3) випливає, що $n \cdot \min(\widehat{P}_n)$ — найменша нерухома точка перестановки Юенса на S_n, а $n \cdot \max(\widehat{P}_n)$ — найбільша, за умови, що нерухомі точки взагалі існують.

Також, можна обчислити відповідні математичні сподівання:

$$\mathbb{E} \min(\widehat{N}) = \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}\left(\min(\widehat{N}) \le x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - e^{-\theta}}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta x} - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} - e^{-\theta} \right) = \frac{1}{\theta} - \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$\mathbb{E} \max(\widehat{N}) = \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}\left(\max(\widehat{N}) \le x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x} - 1}{e^{\theta} - 1}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta x}}{e^{\theta} - 1} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{e^{\theta} - 1} \cdot \left(e^{\theta} - \frac{e^{\theta} - 1}{\theta} \right) = \frac{e^{\theta}}{e^{\theta} - 1} - \frac{1}{\theta}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \min(\widehat{P}_n) = \mathbb{E} \min(\widehat{N})$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \max(\widehat{P}_n) = \mathbb{E} \max(\widehat{N})$, то, наприклад, для $\theta = 1$ при великих значеннях n маємо $\mathbb{E} \min(\widehat{P}_n) \approx \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \cdot n \approx 0.418 \cdot n$, $\mathbb{E} \max(\widehat{P}_n) \approx \frac{1}{e-1} \cdot n \approx 0.582 \cdot n$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $\sigma \sim \mathrm{ESF}\,(n, \theta)$*, а* $m_n = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ *та* $M_n = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ *— відповідно, найменша на найбільша нерухомі точки* σ*, де за домовленістю* $\min \varnothing = n$*,* $\max \varnothing = 1$*. Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються граничні співвідношення* $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{d} m$*,* $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} M$*, де функції розподілу випадкових величин* m *та* M *дорівнюють, відповідно,*

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{\theta(x-1)}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Якщо позначити $\widehat{m}_n$ *та* $\widehat{M_n}$ *найменшу та найбільшу нерухомі точки за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничні співвідношення* $\frac{\widehat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \widehat{m}$ *і* $\frac{\widehat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \widehat{M}$*, де* $\widehat{m}$ *та* $\widehat{M}$ *є абсолютно неперервними випадковими величинами з функціями та щільностями розподілу*

$$F_{\widehat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \quad f_{\widehat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$$

$$F_{\widehat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \quad f_{\widehat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{\theta x}}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x \ge 1, \end{cases}$$

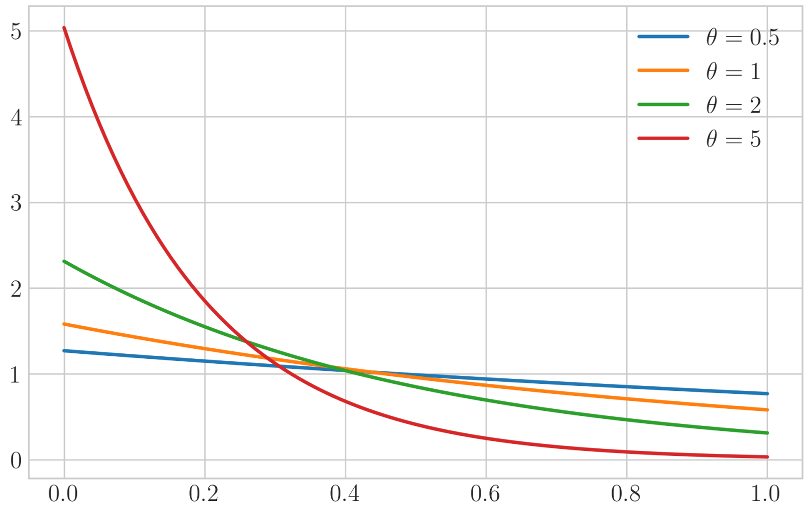

Рисунок 3.1 – Графіки щільності $f_{\widehat{m}}(x)$ для різних значень θ.

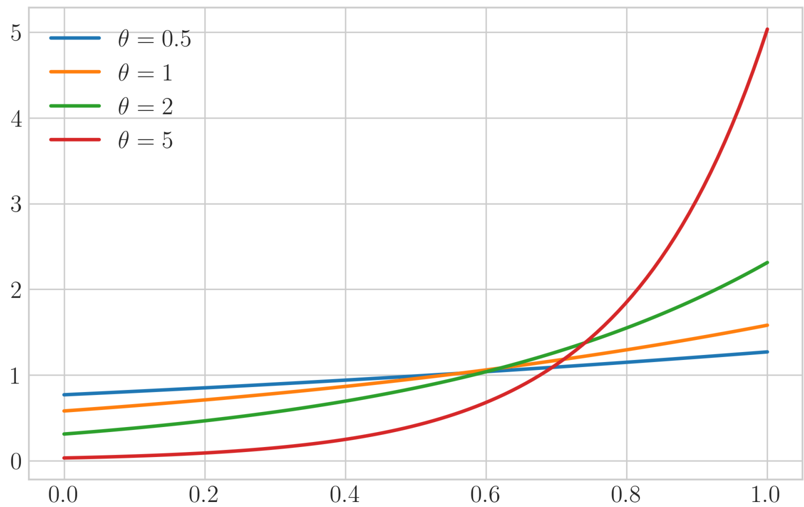

Рисунок 3.2 – Графіки щільності $f_{\widehat{M}}(x)$ для різних значень θ.

3.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. Згідно з означенням 1.3.6, для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb}$ на $[0,1]$ цей функціонал задається як

$$\psi_N(f) = \exp\left\{ -\, \theta \int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) \mathrm{d}x \right\} \tag{3.6}$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0,1]$.

Позначатимемо $\text{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N. Для будь-якої точкової міри μ, $\text{sum}(\mu) = \int_0^1 x \mathrm{d}\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\left\{X\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (3.6), можна побачити, що перетворення Лапласа $\text{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) = \exp\left\{ -\theta \left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right)\right\}. \tag{3.7}$$

Оскільки розподіл $\text{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(\widehat{N})$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) = 0\right) + \\
+\mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(\widehat{N})} \cdot \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) > 0\right) = e^{-\theta} + \mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta}) \\
\mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) - e^{-\theta}\right) = \\
= \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} \cdot \left(\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} - 1\right)
\end{gathered} \tag{3.8}$$

$\text{sum}(\widehat{N})$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(\widehat{N})$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\text{sum}(\widehat{N})}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} - 1\right) \tag{3.9}$$

Знаходження оберненого перетворення для (3.9) є доволі складним.

Розглянемо інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x)$:

$$\mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m)\, \mathbb{P}(N([0,1]) = m) =$$

$$= \mathbb{1}\{x \ge 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta}$$

Згідно з [11] (ст. 296), умовні розподіли $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{U}(0,1)$. Їх функція розподілу має вигляд

$$F_s^{[m]}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0 \le x < m, \\ 1, & x \ge m. \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x)$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду ([12], ст. 375):

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2} z\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} z^2\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Отримаємо відповідну формулу. Нехай $x \in [n, n+1)$,

$$e^{\theta} \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} 1 \cdot \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_m^k (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(m-k)!} (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!(m-k)!} (x-k)^m \theta^m \right) = [m - k = l] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{l+k} \theta^{l+k} \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left(\sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{l!(l+k)!}(x-k)^l \theta^l = a_{k,l} \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}(x-k)^k \theta^k \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} - \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)} \right) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!}(x-k)^{k+l}\theta^{k+l}$$

Позначимо $R(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!}$, $L(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!}(x-k)^{k+l}\theta^{k+l}$. Покажемо, що $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$R(n) - R(n-1) = \frac{\theta^n}{n!},$$

$$L(n) - L(n-1) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} s_{k,l} = \sum_{i=0}^{n} s_{i,n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!n!}(x-i)^n \theta^n = \frac{\theta^n}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (x-i)^n.$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^n$. Ліва скінченна різниця першого порядку для f з кроком $h = 1$ — це $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$, другого порядку — $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1) = f(x) - 2f(x-1) + f(x-2)$, аналогічно рекурентно визначаються скінченні різниці вищих порядків. Загальною формулою для різниці k-того порядку буде $\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i f(x-i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i (x-i)^n$, тому вираз $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (x-i)^n$ — це ліва скінченна різниця n-того порядку для x^n. Оскільки кожна скінченна різниця є поліном порядку на 1 менше, ніж попередня, то різниця n-того порядку вже буде константою. Виявляється, що

$$\frac{1}{n!} \Delta^n f(n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^n = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1,$$

де $\left\{ {n \atop m} \right\}$ позначає число Стірлінґа другого роду ([12], ст. 824-825). Отже, $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $R(0) = L(0) = 1$, то

$R(n) = L(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, отримуємо

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), \ x \in [n, n+1).$$

Зауважимо, що $F_{\text{sum}(N)}(0) = e^{-\theta} I_0\left(2\sqrt{\theta x}\right)\Big|_{x=0} = e^{-\theta} = \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) = 0\right)$.

В свою чергу, функція розподілу $\text{sum}(\widehat{N})$ може бути виражена через $F_{\text{sum}(N)}(x)$ наступним чином:

$$\mathbb{P}\left(\text{sum}(\widehat{N}) \le x\right) = \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \le x \mid \text{sum}(N) > 0\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Оскільки $\text{sum}(\widehat{N})$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, можна також знайти її щільність розподілу. Зробимо це для $x \in [n, n+1), n \in \mathbb{N}_0$. Оскільки $I'_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} I_\nu(z)$ ([12], ст. 376), то для $z = z(x) = \sqrt{\theta(x-k)}$ і $g_k(x) = g_k(z(x)) = \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right) = z^k I_k(2z)$ маємо

$$g'_k(x) = \left(k z^{k-1} I_k(2z) + 2z^k \left(I_{k+1}(2z) + \frac{k}{2z} I_k(2z)\right)\right) z'(x) =$$
$$= 2z^{k-1}\left(k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)\right) \cdot z'(x) = 2z^{k-1}\left(k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)\right) \cdot \frac{\theta}{2z} =$$
$$= \theta z^{k-2}\left(k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)\right) =$$
$$= \theta\left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(k I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1}\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)\right)$$

Таким чином, отримуємо

$$f_{\text{sum}(\widehat{N})}(x) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} g'_k(x), \ x \in [n, n+1).$$

При цьому, значення $\mathbb{E}\,\text{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\text{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{U}\left(0, 1\right)$:

$$\mathbb{E}\,\text{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.2. *Нехай* $\sigma \sim \mathrm{ESF}(n, \theta)$, *а* $S_n = \sum_{i:\sigma(i)=i} i = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \mathbb{1}\{\sigma(i) = i\}$ — *сума нерухомих точок* σ. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконується граничне співвідношення* $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} S$, *де функція розподілу випадкової величини* S *дорівнює*

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \geq 0, \end{cases}$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.7).

Якщо позначити $\widehat{S}_n$ *суму нерухомих точок за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничне співвідношення* $\frac{\widehat{S}_n}{n} \xrightarrow{d} \widehat{S}$, *де* $\widehat{S}$ *є абсолютно неперервною випадковою величиною з функцією та щільністю розподілу*

$$F_{\widehat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_S(x) - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, & x \geq 0, \end{cases}, \quad f_{\widehat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} f_k(x), & x \geq 0, \end{cases},$$

де $f_k(x)$ *визначено як*

$$f_k(x) = \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}-1} \left(k I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1}\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)\right),$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.8).

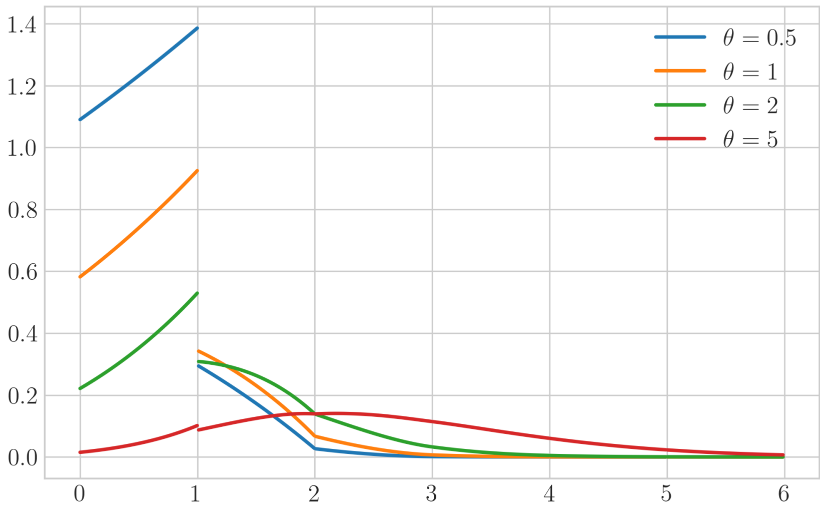

Рисунок 3.3 – Графіки щільності розподілу $f_{\widehat{S}}(x)$ для різних значень θ.

3.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподіли найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *і* $1-\max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1,\ldots,n\}$ *це означатиме вважати* 0 *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — незалежні випадкові величини з розподілом $\mathrm{U}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \cdots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (нагадаємо, $S_{(i)}$ позначає i-ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n+1]}$ — те ж саме, але з вказанням $n+1$ як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [13], [14]). Зокрема, для $x \in [0,1]$

$$\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n,$$

$$\mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^{j} \left((1-jx)_+\right)^n,$$

де $x_+ = \max(x,0)$.

Отже, розподіли найменшого s-min(N) та найбільшого s-max(N) спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S_{(1)}^{1} = 1$)

$$\mathbb{P}\left(\text{s-min}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{3.10}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{s-max}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{3.11}$$

Хоча явні вирази для (3.10) та (3.11), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Відомо (наприклад, [13]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})^T \overset{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \ldots, \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right)^T,$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \ldots, S_{(n+1)}\right)^T \overset{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \ldots, \frac{X_{(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right)^T, \tag{3.12}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \cdots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}. \quad (3.13)$$

Рівності (3.12) та (3.13) можна доповнити наступною рівністю:

Лема 3.2.3. *Для порядкових статистик спейсингів* $S_{(1)}^{[n+1]}, ..., S_{(n+1)}^{[n+1]}$ *між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{U}\,(0,1)$ *та незалежних величин* $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце рівність*

$$S_{(i)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \cdots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j},\ i = 1, \ldots, n+1. \quad (3.14)$$

Доведення. Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \ldots, n+1$. З [15], ст. 72, відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+2)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \cdots + (\Delta_1 + \cdots + \Delta_{n+1})}.$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+2)\Delta_i$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$. В термінах Y_i верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^{i} \frac{Y_j}{n-j+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} Y_j}.$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (3.14). □

Окремими випадками леми 3.2.3 є рівності для мінімального і максимального спейсингів $S_{(1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}$ та $S_{(n+1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{n-i+2}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}$. Разом з (3.10) та (3.11) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_{\nu+1}}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},\ \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad (3.15)$$

де ν має розподіл $\mathrm{Pois}\,(\theta)$, а $(X_i, i \geq 1)$ незалежні між собою та від ν і мають розподіл $\mathrm{Exp}\,(1)$.

Відповідні математичні сподівання $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N)$ можна знайти з

(3.15). Нехай $n \in \mathbb{N}_0$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_{n+1}}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}\cdot\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!}e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^n}{n\cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{\theta} t^{n-1}\mathrm{d}t = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^{\theta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^{\theta}\frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^{\theta}\frac{e^t-1}{t}\mathrm{d}t,$$

$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n!}\theta^n = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\int_0^1\left(1+s+\dots+s^{n-1}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!}\int_0^1\frac{1-s^n}{1-s}\mathrm{d}s = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^1\frac{1}{1-s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-s^n)\theta^n}{n!}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^1\frac{e^{\theta}-e^{s\theta}}{1-s}\mathrm{d}s = [t = \theta(1-s)] = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\int_0^{\theta}\frac{e^{\theta}-e^{\theta-t}}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\frac{1-e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

де $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ — n-те гармонічне число. Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) \approx 0.48483$ і $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 3.2.4. *Нехай* $\sigma \sim \mathrm{ESF}(n,\theta)$, *а* δ_n *та* Δ_n *— відповідно, найменша та найбільша відстані між нерухомими точками* σ. *Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються граничні співвідношення* $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$ *і* $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$, *де*

$$\delta \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},\quad \Delta \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1}\frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},$$

для незалежних між собою $(X_i, i \geq 1)$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}(1)$ *та* $\nu \sim \mathrm{Pois}(\theta)$, *незалежної від* $(X_i, i \geq 1)$.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ

4.1. Алгоритм для генерування перестановок

4.2. Перевірка отриманих результатів

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спекторський І. Я. Дискретна математика. — Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004. — 120 с.
2. Kallenberg O. Random Measures, Theory and Applications. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Springer International Publishing Switzerland, 2017. — 694 p. — ISBN: 978-3-319-41598-7.
3. Berezansky Y. M., Sheftel Z. G., Us G. F. Functional Analysis. — Birkhäuser Verlag, 1996. — Vol. 1. — 423 p. — ISBN: 978-3-0348-9185-1.
4. Богданський Ю. В. Інтеграл в курсі аналізу. — Київ : Видавництво «Політехніка», 2013. — 180 с.
5. Resnick S.I. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. — Springer Science+Business Media New York, 2008. — 320 p. — ISBN: 978-0-387-75952-4.
6. Billingsley P. Convergence of probability measures. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. — Second ed. — New York : John Wiley & Sons Inc., 1999. — 277 p. — ISBN: 0-471-19745-9. — A Wiley-Interscience Publication.
7. Last G., Penrose M. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. — Cambridge University Press, 2017. — 293 p. — ISBN: 978-1-107-08801-6.
8. Resnick S.I. Crash Course II: Weak Convergence; Implications for Heavy-Tail Analysis // Heavy-Tail Phenomena. — Springer Science+Business Media New York, 2007. — P. 39–69.
9. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Third ed. — Springer Nature Switzerland, 2021. — 946 p. — ISBN: 978-3-030-61871-1.
10. T. Bakšajeva, E. Manstavičius. On statistics of permutations chosen from the Ewens distribution // Combinatorics, Probability and Computing. — 2014. — Vol. 23. — P. 889–913.
11. J. Norman L., K. Samuel, N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions. — New York : John Wiley & Sons, 1995. — Vol. 2 of Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. — 717 p. — ISBN: 0-471-58494-0.
12. Abramowitz A., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — USA : Dover Publications, Inc., 1972. —

1046 p. — ISBN: 0-486-61272-4.

13. Holst L. On the Lengths of the Pieces of a Stick Broken at Random // Journal of Applied Probability. — 1980. — Vol. 17, no. 3. — P. 623–634.
14. Pinelis I. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution // arXiv. — 2019. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1909.06406.pdf.
15. C. Arnold B., N. Balakrishnan, N. Nagaraja H. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). — USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. — 305 p. — ISBN: 978-0-89871-906-2.