

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу  
Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено  
завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ О.Л. Тимошук  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

**Дипломна робота**

**на здобуття ступеня бакалавра  
за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»  
спеціальності 124 «Системний аналіз»  
на тему: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок»**

Виконав:  
студент IV курсу, групи КА-81  
Галганов Олексій Андрійович

Керівник:  
доцент, к.ф-м.н. Ільєнко Андрій Борисович

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент: Галганов Олексій Андрійович

Київ – 2022 року

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Інститут прикладного системного аналізу  
Кафедра математичних методів системного аналізу**

Рівень вищої освіти — перший (бакалаврський).

Спеціальність — 124 «Системний аналіз».

Освітньо-професійна програма «Системний аналіз і управління».

ЗАТВЕРДЖУЮ  
завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ О.Л. Тимощук  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2022 р.

**ЗАВДАННЯ  
на дипломну роботу студенту  
Галганову Олексію Андрійовичу**

1. Тема роботи: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок». Керівник роботи: Ільєнко Андрій Борисович.
2. Термін подання студентом роботи: 6 червня 2022 року.
3. Зміст роботи: аналіз предметної області дослідження, огляд теоретичних матеріалів та наявних результатів, формулювання та доведення відповідних теорем.
4. Дата видачі завдання: 27 травня 2021 року.

**Календарний план**

№ з/п	Назва етапу виконання дипломної роботи	Термін виконання етапу роботи	Примітка
1.	Огляд літератури за темою	12.01.2022	
2.	Підготовка першого розділу	16.02.2022	
3.	Підготовка другого розділу	18.03.2022	
4.	Підготовка третього розділу	22.04.2022	
5.	Чисельне моделювання	06.05.2022	
6.	Підготовка четвертого розділу	20.05.2022	
7.	Оформлення дипломної роботи	03.06.2022	

Студент  
Керівник

Олексій ГАЛГАНОВ  
Андрій ІЛЬЄНКО

## РЕФЕРАТ

Дипломна робота: 63 сторінки, 27 рисунків, 1 додаток, 18 джерел.

ПЕРЕСТАНОВКИ ЮЕНСА, НЕРУХОМІ ТОЧКИ, ТОЧКОВІ ПРОЦЕСИ, ПРОЦЕС ПУАССОНА, ГРУБА ЗБІЖНІСТЬ ЗА РОЗПОДІЛОМ, ЗБІЖНІСТЬ У ТОПОЛОГІЇ СКОРОХОДА

Об'єкт дослідження — перестановки Юенса на симетричній групі  $S_n$ .

Мета роботи — дослідження граничного розподілу нерухомих точок перестановок Юенса та їх статистик при  $n \rightarrow \infty$ .

Методи дослідження — застосування теорії міри, функціонального аналізу та теорії випадкових процесів для формулювання та доведення відповідних граничних теорем.

Результат роботи — доведено грубу збіжність за розподілом та збіжність в топології Скорохода для послідовності точкових процесів, породжених нерухомими точками перестановок Юенса, до однорідного точкового процесу Пуассона. Як наслідок, доведено збіжність за розподілом деяких статистик, пов'язаних з нерухомими точками, отримано явний вигляд відповідних граничних розподілів. Проведено чисельні перевірки отриманих теорем за допомогою мови програмування Python.

## ABSTRACT

Thesis work: 63 pages, 27 figures, 1 appendix, 18 references.

EWENS PERMUTATIONS, FIXED POINTS, POINT PROCESSES, POISSON PROCESS, VAGUE CONVERGENCE IN DISTRIBUTION, CONVERGENCE IN SKOROKHOD TOPOLOGY

The object of the research is Ewens sampling formula for permutations on symmetric group  $S_n$ .

The purpose of the work is to study limiting distributions of fixed points of Ewens permutations and their statistics as  $n \rightarrow \infty$ .

Research methods are based on measure theory, functional analysis, and theory of stochastic processes.

As a result, vague convergence in distribution and convergence in Skorokhod topology to homogeneous Poisson process is proven for point processes generated by fixed points of Ewens permutations. As a consequence, limit theorems for some statistics of fixed points are also proven with limiting distributions given explicitly. Obtained theorems were checked by numerical modelling using Python programming language.

## ЗМІСТ

СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧКИ.....	6
ВСТУП .....	8
РОЗДІЛ 1 Теоретичні основи .....	9
1.1. Поняття з алгебри.....	9
1.2. Поняття з теорії міри та функціонального аналізу.....	9
1.3. Поняття з теорії випадкових процесів.....	12
Висновки .....	16
РОЗДІЛ 2 Попередні відомості .....	17
2.1. Поняття про перестановки Юенса .....	17
2.2. Огляд наявних результатів .....	19
Висновки .....	20
РОЗДІЛ 3 Граничні теореми .....	21
3.1. Граничний розподіл нерухомих точок.....	21
3.2. Статистичні властивості нерухомих точок.....	26
3.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки .....	26
3.2.2. Сума нерухомих точок .....	30
3.2.3. Найменші і найбільші спейсинги .....	35
Висновки .....	38
РОЗДІЛ 4 Чисельне моделювання та дослідження збіжності.....	39
4.1. Алгоритми для генерування перестановок .....	39
4.1.1. Процес китайського ресторану .....	39
4.1.2. Каплінг Феллера .....	40
4.2. Перевірка отриманих результатів .....	41
4.2.1. Розподіл кількості нерухомих точок .....	41
4.2.2. Розподіл найменшої та найбільшої нерухомих точок .....	43
4.2.3. Розподіл суми нерухомих точок .....	46
4.2.4. Розподіл найменшого і найбільшого спейсингів .....	47
Висновки .....	50
ВИСНОВКИ .....	51
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	52
ДОДАТОК А. ПРОГРАМНИЙ КОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ.....	54

## СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

$\mathbb{1}\{\cdot\}$  — індикаторна функція, що дорівнює 1 у випадку, коли умова в дужках справджується, і 0 у іншому випадку.

$\text{card } X$  — потужність множини  $X$ .

$\lceil x \rceil$  — найменше ціле число, яке більше або дорівнює дійсному числу  $x$ .

$\lfloor x \rfloor$  — найбільше ціле число, яке менше або дорівнює дійсному числу  $x$ .

$\mathbb{N}_0$  — множина цілих невід'ємних чисел,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

$S_n$  — група перестановок (симетрична група) степеня  $n$ .

$c(\pi)$  — кількість циклів у розкладі перестановки  $\pi$  в композицію незалежних циклів.

$c_j(\pi)$  — кількість циклів довжини  $j$  у розкладі перестановки  $\pi$  в композицію незалежних циклів.

$C_K^+(X)$  — множина неперервних невід'ємних функцій  $X \rightarrow \mathbb{R}$  з компактним носієм.

$\mathcal{B}(X)$  — борелева  $\sigma$ -алгебра на множині  $X$ .

$M_p(E)$  — множина усіх точкових мір, визначених на просторі  $E$ .

$\langle a, b \rangle$  — інтервал, позначає одне з  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$  чи  $(a, b]$ .

$\delta_x$  — міра Дірака, зосереджена в точці  $x$ .

$\text{Leb}$  — міра Лебега.

$\mathcal{L}\{f\}$  — перетворення Лапласа функції  $f$ .

$\psi_N$  — функціонал Лапласа точкового випадкового процесу  $N$ .

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  — верхня границя послідовності  $a_n$ .

$a_n \rightarrow a$  — числова послідовність  $a_n$  збігається до  $a$ .

$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$  — послідовність мір  $\mu_n$  грубо збігається до міри  $\mu$ .

$\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$  — послідовність точкових випадкових процесів  $\xi_n$  грубо збігається за розподілом до точкового випадкового процесу  $\xi$ .

$X_n \xrightarrow{Sd} X$  — послідовність випадкових процесів  $X_n$  збігається за розподілом у топології Скорохода до випадкового процесу  $X$ .

$X_n \xrightarrow{d} X$  — послідовність випадкових величин  $X_n$  збігається за розподілом до випадкової величини  $X$ .

$X \stackrel{d}{=} Y$  — випадкові величини  $X$  та  $Y$  рівні за розподілом.

$X_{(k)}$  —  $k$ -та порядкова статистика, тобто  $k$ -та за номером випадкова величина серед відсортованих у порядку зростання неперервних випадкових величин  $X_1, \dots, X_n$ .

$X_{(k)}^{[n]}$  —  $k$ -та порядкова статистика для  $n$  випадкових величин.

$\mathbb{E}X$  — математичне сподівання випадкової величини  $X$ .

$X \sim P$  — випадкова величина  $X$  має розподіл  $P$ .

$\text{Pois}(a)$  — дискретний розподіл Пуассона з параметром  $a > 0$ ,  $\mathbb{P}(X = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$  для  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$U(a, b)$  — абсолютно неперервний рівномірний розподіл на інтервалі  $\langle a, b \rangle$  зі щільністю  $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\{x \in \langle a, b \rangle\}$ .

$\text{Exp}(\lambda)$  — абсолютно неперервний експоненційний розподіл з параметром  $\lambda > 0$  зі щільністю  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}\{x \geq 0\}$ .

$\text{ESF}(n, \theta)$  — розподіл Юенса на  $S_n$  з параметрами  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\theta > 0$ .

$I_\nu(z)$  — модифікована функція Бесселя першого роду,  $\nu \in \mathbb{R}$ .

## ВСТУП

В даній роботі розглядаються граничні теореми для випадкових перестановок на симетричній групі  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , що мають однопараметричний розподіл Юенса, згідно з яким ймовірність отримати перестановку  $\pi$  пропорційна  $\theta^{c(\pi)}$ , де  $c(\pi)$  позначає кількість незалежних циклів у розкладі  $\pi$ , а  $\theta > 0$  є параметром розподілу. Хоча означення таких перестановок вперше виникло в контексті генетики, робота присвячена їх дослідженню з математичної точки зору.

Мета роботи полягає у формулюванні та доведенні низки граничних теорем, що стосуються розподілу нерухомих точок — тобто таких, які перестановка залишає на своєму місці.

Методи дослідження ґрунтуються на поняттях та теoreмах алгебри, теорії міри, функціонального аналізу та теорії випадкових процесів.

Перший розділ присвячено огляду всіх необхідних для роботи теоретичних відомостей з вищезгаданих дисциплін.

Другий розділ висвітлює історію виникнення поняття перестановок Юенса, їхнє практичне застосування та наявні результати, що стосуються їхньої граничної поведінки.

Третій розділ містить власні результати автора з дослідження граничної поведінки перестановок Юенса і є найцікавішим та найскладнішим з математичної точки зору.

Четвертий розділ присвячено огляду методів моделювання перестановок Юенса та дослідженню збіжностей, доведених в граничних теoreмах третього розділу, шляхом порівняння полігонів розподілу, гістограм та емпіричних функцій розподілу вибірок, отриманих внаслідок моделювання, з полігонами розподілу, щільностями та функціями розподілу граничних випадкових величин.



## РОЗДІЛ 1

### ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

#### 1.1. Поняття з алгебри

**Означення 1.1.1** ([1], ст. 114). *Перестановкою  $\pi$  на множині  $A = \{1, \dots, n\}$  називають довільне бієктивне відображення  $\sigma : A \rightarrow A$ .*

**Означення 1.1.2** ([1], ст. 118). *Циклом довжини  $k$  ( $i_1, \dots, i_k$ ) називають перестановку  $\pi$ , що змінює (зсуває за циклом) елементи  $i_1, i_2, \dots, i_k \in A$ , залишаючи інші на місці, тобто  $\pi(i_j) = i_{j+1}$  для  $j = 1, \dots, k-1$ ,  $\pi(i_k) = i_1$ ,  $\pi(i_j) = i_j$  для  $j = k+1, \dots, n$ .*

**Означення 1.1.3.** Цикли  $(i_1, \dots, i_{k_1})$  та  $(j_1, \dots, j_{k_2})$  на  $\{1, \dots, n\}$  називають незалежними, якщо вони зсувають різні елементи, тобто  $i_{m_1} \neq j_{m_2}$  для всіх  $m_1 = 1, \dots, k_1$ ,  $m_2 = 1, \dots, k_2$ . Незалежні цикли комутують за операцією композиції.

**Теорема 1.1.1** ([1], ст. 119). *Кожну перестановку можна зобразити як композицію незалежних циклів. Це зображення є єдиним з точністю до порядку циклів.*

**Означення 1.1.4** ([1], ст. 116). *Групою перестановок (симетричною групою) степеня  $n$  називають групу, утворену множиною перестановок множини  $\{1, \dots, n\}$  за операцією композиції. Група  $S_n$  містить  $n!$  різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).*

#### 1.2. Поняття з теорії міри та функціонального аналізу

**Означення 1.2.1** ([2], ст. 19). Для будь-якого простору  $X$  непорожня сім'я підмножин  $\mathcal{R}$  називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): сім'я  $\mathcal{R}$  непорожня та замкнена відносно скінченних об'єднань та різниць.

**Означення 1.2.2** ([2], ст. 19). Для будь-якого простору  $X$  непорожня сім'я підмножин  $\mathcal{S}$  називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з  $\mathcal{S}$  представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з  $\mathcal{S}$ , тобто для будь-яких  $A, B \in \mathcal{S}$  існують множини  $K_i \in \mathcal{S}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , що попарно не перетинаються і  $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n K_i$ .

**Означення 1.2.3** ([4], ст. 139). Для будь-якого простору  $X$  непорожня сім'я підмножин  $\mathcal{A}$  називається  *$\sigma$ -алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

- а)  $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A^C = X \setminus A \in \mathcal{A})$ ;
- б)  $(A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$ .

Пара  $(X, \mathcal{A})$  називається *вимірним простором*.

**Означення 1.2.4** ([4], ст. 146). Нехай  $(X, \mathcal{A}_X)$  та  $(Y, \mathcal{A}_Y)$  — два вимірних простори. Відображення  $f : X \rightarrow Y$  називається *вимірним*, якщо для кожної множини  $A \in \mathcal{A}_Y$  її повний прообраз  $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$  належить  $\mathcal{A}_X$ .

**Означення 1.2.5** ([4], ст. 147). Нехай  $X$  — метричний простір,  $\mathcal{O}$  — сім'я всіх відкритих підмножин  $X$ . Мінімальна  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(X)$ , що містить  $\mathcal{O}$ , називається *борелевою  $\sigma$ -алгеброю*, а множини  $A \in \mathcal{B}(X)$  — *борелевими множинами*.

**Означення 1.2.6** ([2], ст. 24). Сім'я підмножин  $\mathcal{S}$  сепарабельного метричного простору  $X$  називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

- а) Кожну відкриту підмножину  $X$  можна зобразити як зліченне об'єднання множин з  $\mathcal{S}$ ;
- б) Кожну обмежену підмножину  $X$  можна покрити скінченною кількістю множин з  $\mathcal{S}$ .

Для простору  $\mathbb{R}^n$  прикладом розсікаючої сім'ї множин є сім'я куль з раціональними радіусами та центрами в точках з раціональними координатами.

**Означення 1.2.7** ([3], ст. 8). Нехай  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра у просторі  $X$ . Функція  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  називається *мірою* на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$ , якщо виконуються наступні дві умови:

- а) Невід'ємність:  $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$ ;
- б)  $\sigma$ -адитивність: для довільних множин  $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$ , що попарно не перетинаються,  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

**Означення 1.2.8.** Міра  $\mu$  на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$  називається *ймовірнісною*, якщо  $\mu(X) = 1$ .

**Означення 1.2.9** ([2], ст. 22). Нехай  $(X, \mathcal{A})$  — вимірний простір, для якого  $\{x\} \in \mathcal{A}$  для всіх  $x \in X$ . Точка  $x \in X$  називається *атомом* міри  $\mu$  на  $(X, \mathcal{A})$ , якщо  $\mu(\{x\}) > 0$ .

**Означення 1.2.10** ([2], ст. 22; [5], ст. 123). *Міра Дірака*, зосереджена в точці  $x \in X$  — це міра  $\delta_x$  на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$ , для якої  $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

**Означення 1.2.11** ([5], ст. 123). *Точкова міра* — це міра  $\mu$  на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$ , для якої  $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$ , де  $(x_i, i \geq 1)$  — злічений набір точок  $X$ , не обов'язково різних. У випадку, коли  $X$  — метричний простір, точкова міра називається *радоноювою*, якщо міра компактних множин з  $\mathcal{A}$  завжди є скінченною.

**Означення 1.2.12** ([5], ст. 124). Точкова міра  $\mu$  на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$  називається *простою*, якщо для всіх  $x \in X$   $\mu(\{x\}) \leq 1$ .

**Теорема 1.2.1.** Нехай  $(f_n, n \geq 1)$  — послідовність функцій  $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких  $\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i)| < \infty$ . Якщо існують такі  $f, g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , що для всіх  $i$   $f_n(i) \rightarrow f(i)$ ,  $|f_n(i)| \leq g(i)$  і  $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) < \infty$ , то

- а)  $\sum_{i=0}^{\infty} |f(i)| < \infty$ ;
- б)  $\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i)$ ;
- в)  $\sum_{i=0}^{\infty} |f_n(i) - f(i)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

Теорема 1.2.1 є окремим випадком теореми Лебега про мажоровану збіжність ([4], ст. 164) для міри  $\mu$  на  $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ , визначеної за правилом  $\mu(A) = \text{card}(A)$ .

**Означення 1.2.13** ([5], ст. 140). Нехай  $(\mu_n, n \geq 1)$  — послідовність мір на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$ , де  $X$  є метричним простором, а  $C_K^+(X)$  — множина неперервних невід'ємних функцій  $X \rightarrow \mathbb{R}$  з компактним носієм. Послідовність  $(\mu_n, n \geq 1)$  *грубо збігається* до міри  $\mu$  на тому ж вимірному просторі, якщо виконується  $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$  для всіх  $f \in C_K^+(X)$ . Ця збіжність позначається  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ .

Надалі вважатимемо, що якщо мова йде про грубу збіжність послідовності мір, то простір, на якому вони задані, є метричним. Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

**Теорема 1.2.2** ([5], ст. 144). Нехай  $(\mu_n, n \geq 1)$  та  $\mu$  — міри на вимірному просторі  $(X, \mathcal{A})$  і  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ . Для кожної компактної множини  $K \subset X$  з  $\mu(\partial K) = 0$  існує номер  $N = N(K)$  такий, що при  $n \geq N$  існують нумерації атомів  $\mu_n$  та  $\mu$ ,  $x_i^{(n)}, 1 \leq i \leq p$  та  $x_i, 1 \leq i \leq p$  відповідно, такі, що

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^p \delta_{x_i^{(n)}}(A), \quad \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^p \delta_{x_i}(A)$$

для всіх  $A \in \mathcal{A}$  і  $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$  для всіх  $1 \leq i \leq p$ .

**Означення 1.2.14** ([6], ст.121-124). *Простором càdlàg-функцій на  $[0, 1]$  називається простір  $\mathcal{D}_{[0,1]}$  функцій  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , які неперервні справа і мають границі зліва.*

**Означення 1.2.15.** *Метрикою Скорохода на  $\mathcal{D}_{[0,1]}$  називається метрика, визначена за формулою*

$$d(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left( \sup_{x \in [0,1]} |\lambda(x) - x|, \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \right),$$

де  $\Lambda$  — множина строго зростаючих неперервних відображень  $[0, 1]$  в себе.

Послідовність функцій  $f_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$  збігається за метрикою Скорохода до  $f \in \mathcal{D}_{[0,1]}$  тоді і тільки тоді, коли існує послідовність функцій  $\lambda_n \in \Lambda$  таких, що рівномірно відносно  $x$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda_n(x)) = f(x)$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x) = x$ , тобто виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_n(\lambda_n(x)) - f(x)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |\lambda_n(x) - x| = 0.$$

### 1.3. Поняття з теорії випадкових процесів

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше,  $E$  — підмножина скінченновимірної евклідової простору,  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$  — борелева  $\sigma$ -алгебра підмножин  $E$ .

Позначимо через  $M_p(E)$  множину усіх точкових мір, визначених на  $E$ , а через  $\mathcal{M}_p(E)$  — найменшу  $\sigma$ -алгебру підмножин  $M_p(E)$ , що містить усі множини виду  $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$  для всіх  $F \in \mathcal{E}$  і  $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$ . Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , де  $\Omega$  — простір елементарних подій,  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра підмножин  $\Omega$ , а  $\mathbb{P}$  — ймовірнісна міра на цьому просторі, тобто задовольняє умову  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

**Означення 1.3.1.** *Точковий випадковий процес  $N$  — вимірне відображення з простору  $(\Omega, \mathcal{A})$  в  $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$ .*

Якщо зафіксувати  $\omega \in \Omega$ , то  $N(\omega, \cdot)$  буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати  $F \in \mathcal{E}$ , то  $N(F)$  буде випадковою величиною зі значеннями в  $[0, +\infty]$ . Також, точковий процес  $N$  задає ймовірнісну міру  $P_N = \mathbb{P}[N \in \cdot]$  на  $\mathcal{M}_p(E)$ .

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

**Теорема 1.3.1** ([5], ст. 124).  $N$  є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного  $F \in \mathcal{E}$  відображення  $\omega \mapsto N(\omega, F)$  з  $(\Omega, \mathcal{A})$  в  $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$  є вимірним.

**Означення 1.3.2** ([7], ст. 49). Точковий процес  $N$  на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$  називається *простим*, якщо  $\mathbb{P}(\forall x \in E : N(\{x\}) \leq 1) = 1$ .

**Теорема 1.3.2** ([5], ст. 126). Нехай  $N$  — точковий процес на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ , а сім'я передкомпактних множин  $\mathcal{F}$  задовольняє наступні умови:

а)  $(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$ ;

б)  $\mathcal{E}$  є мінімальною  $\sigma$ -алгеброю, що містить  $\mathcal{F}$ ;

в) Існує послідовність множин  $E_n \in \mathcal{F}$ , для якої  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  і  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ .

Для  $k \in \mathbb{N}$  визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1, \dots, I_k}(n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \leq j \leq k)$$

для  $I_i \in \mathcal{F}$  та цілих  $n_i \geq 0, 1 \leq i \leq k$ .

Тоді система скінченновимірних розподілів  $\{P_{I_1, \dots, I_k}, k = 1, 2, \dots, I_j \in \mathcal{F}\}$  однозначно визначає розподіл  $P_N$ .

**Теорема 1.3.3** ([7], ст. 50). Нехай  $N$  та  $N'$  — прості точкові процеси на  $(E, \mathcal{E})$  і

$$\mathbb{P}(N(F) = 0) = \mathbb{P}(N'(F) = 0), \quad F \in \mathcal{E}.$$

Тоді  $N$  та  $N'$  мають однакові розподіли.

**Означення 1.3.3** ([5], ст. 129). Нехай  $N$  — точковий процес на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ . Функціоналом Лапласа для  $N$  називається відображення  $\psi_N$ , що переводить невід'ємні вимірні функції на  $(E, \mathcal{E})$  у  $[0, +\infty)$  за правилом

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)} = \int_{\Omega} e^{-N(\omega, f)} d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \exp \left\{ - \int_E f(x) d\nu \right\} dP_N(\nu).$$

Наслідком теореми 1.3.2 є наступне твердження:

**Теорема 1.3.4** ([5], ст. 129). Функціонал Лапласа  $\psi_N$  однозначно визначає точковий процес  $N$ .

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

**Означення 1.3.4** ([2], ст. 127). Мірою інтенсивності або середньою мірою точкового процесу  $N$  називається міра  $\mu$  на  $\mathcal{E}$ , визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_{\Omega} N(\omega, F) d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \nu(F) dP_N(\nu).$$

Наведемо приклад точкового процесу.

**Означення 1.3.5** ([7], ст. 11). Нехай  $P$  — деяка ймовірнісна міра на  $(E, \mathcal{E})$ , а  $X_1, \dots, X_m$  — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного  $i = 1, \dots, m$  визначено  $\delta_{X_i}$  — точковий процес, для якого  $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 1) = \mathbb{P}(X_i \in F)$ ,  $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 0) = \mathbb{P}(X_i \notin F)$  для  $F \in \mathcal{E}$ . Точковий процес  $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \dots + \delta_{X_m}$  називається *біноміальним процесом* з розміром вибірки  $m$  та розподілом  $P$ . Для нього

$$\mathbb{P}(X(F) = k) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \quad k = 0, \dots, m, \quad F \in \mathcal{E}.$$

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

**Означення 1.3.6** ([5], ст. 130). Нехай  $\mu$  — радонова міра на  $\mathcal{E}$ . Точковий процес  $N$  називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності  $\mu$ , якщо  $N$  задовольняє наступні умови:

а) Для будь-якої  $F \in \mathcal{E}$  та будь-якого невід'ємного цілого числа  $k$

$$\mathbb{P}(N(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty. \end{cases}$$

У випадку  $\mu(F) = \infty$  покладаємо  $N(F) = \infty$  з ймовірністю 1.

б) Для будь-якого натурального  $k$ , якщо  $F_1, \dots, F_k$  з  $\mathcal{E}$  попарно не перетинаються, то  $(N(F_i), 1 \leq i \leq k)$  є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Функціонал Лапласа точкового процесу Пуассона визначено формулою

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ - \int_E (1 - e^{-f(x)}) d\mu \right\}.$$

**Означення 1.3.7.** Процес Пуассона на  $E \subset \mathbb{R}^n$  з мірою інтенсивністю  $\lambda \cdot \text{Leb}$ , де  $\text{Leb}$  — міра Лебега, називатимемо *однорідним процесом Пуассона з інтенсивністю  $\lambda$* .

Як і для не випадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

**Означення 1.3.8** ([2], ст. 109). Нехай  $(\xi_n, n \geq 1)$  — послідовність точкових процесів на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ . Якщо  $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(\xi)$  для кожної обмеженої функції  $\varphi : M_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на  $M_p(E)$  відносно грубої збіжності мір, то послідовність  $(\xi_n, n \geq 1)$  *грубо збігається за розподілом*, що позначається  $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ .

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

**Теорема 1.3.5** ([2], ст. 121). Нехай  $(\xi_n, n \geq 1)$  — послідовність точкових процесів на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ , а точковий процес  $\xi$  — простий. Нехай також  $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$  — фіксоване розсікаюче кільце, де  $\hat{\mathcal{E}}_\xi$  позначає сім'ю борелевих підмножин  $E$ , для яких  $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$ , а  $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$  — розсікаюче напівкільце. Тоді  $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$  тоді і тільки тоді, коли

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n(U) = 0) = \mathbb{P}(\xi(U) = 0)$  для  $U \in \mathcal{U}$ ;
- б)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\xi_n(I) > 1) \leq \mathbb{P}(\xi(I) > 1)$  для  $I \in \mathcal{I}$ .

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

**Теорема 1.3.6** ([8], ст. 42). Нехай  $(\xi_n, n \geq 1)$  — послідовність точкових процесів на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ , яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу  $\xi$ , а відображення  $\varphi : M_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$  таке, що

$$\mathbb{P}(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперервною в } \mu\}) = 0.$$

Тоді послідовність випадкових величин  $(\varphi(\xi_n), n \geq 1)$  збігається за розподілом до  $\varphi(\xi)$ , тобто  $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$ .

Розглянемо також поняття звичайних випадкових процесів.

**Означення 1.3.9** ([9], ст. 83). Нехай  $(E, \mathcal{E})$  — вимірний простір,  $T \subset \mathbb{R}$  — множина індексів. Відображення  $X : \Omega \rightarrow U \subset E^T$  називається *випадковим процесом* на

$T$  зі значеннями в  $E$  та траєкторіями в  $U$ , якщо відображення  $X_t : \Omega \rightarrow E$  вимірні для кожного  $t \in T$ .

**Означення 1.3.10.** Нехай  $X$  — випадковий процес на  $[0, 1]$  зі значеннями в  $\mathbb{R}$ . Якщо траєкторії  $X(t)$  з ймовірністю 1 належать простору  $\mathcal{D}_{[0,1]}$ , то  $X$  називається *càdlàg-процесом*.

**Означення 1.3.11** ([9], ст. 512). Нехай  $(X_n, n \geq 1)$  — послідовність випадкових càdlàg-процесів. Якщо  $\mathbb{E}\varphi(X_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(X)$  для кожного обмеженого функціонала  $\varphi : \mathcal{D}_{[0,1]} \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервного на  $\mathcal{D}_{[0,1]}$  відносно метрики Скорохода, то послідовність  $(X_n, n \geq 1)$  збігається за розподілом у топології Скорохода, що позначається  $X_n \xrightarrow{Sd} X$ .

Наведемо ще один тип збіжності точкових процесів та його зв'язок з грубою збіжністю за розподілом.

**Означення 1.3.12** ([2], ст. 127). Нехай  $(\xi_n, n \geq 1)$  — послідовність точкових процесів на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ , де  $E = [0, 1]$ . Якщо для  $X_n(t) = \xi_n([0, t])$  та  $X(t) = \xi([0, t])$  виконується  $X_n \xrightarrow{Sd} X$ , то то послідовність  $(\xi_n, n \geq 1)$  збігається за розподілом у топології Скорохода, що позначається  $\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi$ .

**Теорема 1.3.7** ([2], ст. 127). Нехай  $(\xi_n, n \geq 1)$  — послідовність точкових процесів на вимірному просторі  $(E, \mathcal{E})$ , де  $E = [0, 1]$ . Тоді  $(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi) \Rightarrow (\xi_n \xrightarrow{vd} \xi)$ . Якщо ж додатково  $\xi$  — простий і  $\xi(\{0\}) = 0$ , то  $(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi) \Leftrightarrow (\xi_n \xrightarrow{vd} \xi)$ .

## Висновки

В цьому розділі було розглянуто деякі попередні теоретичні відомості (означення та теореми) з алгебри, теорії міри, функціонального аналізу та теорії випадкових процесів, які будуть використані надалі. Теореми наведено без доведень, оскільки для них може бути необхідно вводити означення, які не використовуються безпосередньо в роботі.



## РОЗДІЛ 2

### ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

#### 2.1. Поняття про перестановки Юенса

Перестановки — бієктивні відображення на множині  $\{1, \dots, n\}$  — є одним з найважливіших об'єктів, що досліджує комбінаторика. Добре відомими є їх властивості, як-от утворення групи  $S_n$  за операцією композиції, можливість розкладу на композицію циклів або транспозицій, поняття інверсій та парності ([1], ст. 113-132).

Перестановки можна розглядати і з імовірнісної точки зору, задавши деякий розподіл (ймовірнісну міру)  $\mathbb{P}$  на множині всіх перестановок  $S_n$  для фіксованого  $n \in \mathbb{N}$  і розглядаючи розподіл випадкових величин, пов'язаних з ними. Прикладом такої величини є кількість нерухомих точок — таких  $i \in \{1, \dots, n\}$ , які перестановка переводить в себе ж. Розподіл на  $S_n$ , як і будь-яку міру на скінченній множині, можна задати, поставивши у відповідність кожній з  $n!$  перестановок невід'ємне дійсне число таким чином, щоб їх сума дорівнювала 1. Найпростішим прикладом є рівномірний розподіл, для якого  $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$  для всіх  $\pi \in S_n$ .

У даній роботі розглядається однопараметричний розподіл Юенса, названий на честь Воррена Юенса — австрало-американського математика, який працював з математичною теорією генетики популяцій та у 1972 році опублікував у статті «The sampling theory of selectively alleles» [10] дослідження розподілу кількості алелів у вибірці генів з великої популяції. У біології алелі — це парні гени, що визначають взаємовиключні варіанти однієї генетичної ознаки (наприклад, високий чи низький зріст, темне або світле волосся тощо).

Юенсом було отримано сумісний розподіл величин  $(C_j(n), 1 \leq j \leq n)$  — кількості алелів, що зустрінуться у вибірці з  $n$  генів  $j$  разів:

$$\mathbb{P}(C_1(n) = c_1, C_2(n) = c_2, \dots, C_n(n) = c_n) = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}, \quad (2.1)$$

де  $\sum_{j=1}^n j c_j = n$ ,  $\theta_{(n)} = \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)$ , а параметр  $\theta > 0$  пов'язаний зі швидкістю появи нових типів алелів у популяції. Історію появи формули (2.1), що відіграла значну роль не тільки в генетиці популяцій, а й теорії випадкових відображень та перестановок, детально викладено у статті Саймона Таваре «The magical Ewens sampling formula» [11], виданої на честь 50-тої річниці написання відповідної статті Юенса.

Розглянемо однопараметричний розподіл на  $S_n$ , для якого  $\mathbb{P}(\{\pi\}) = C(\theta) \cdot \theta^{c(\pi)}$ ,

тобто ймовірність вибору перестановки пропорційна  $\theta^{c(\pi)}$ , де  $\theta > 0$  і  $c(\pi)$  позначає кількість циклів у розкладі перестановки  $\pi$  в композицію незалежних циклів, єдиність якої гарантується теоремою 1.1.1. Відомо ([12], ст. 824), що кількість перестановок в  $S_n$  з  $k$  циклами дорівнює  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  — модулю числа Стірлінга першого роду. Щоб знайти константу нормування  $C(\theta)$ , скористаємося тим, що  $\mathbb{P}(S_n) = 1$ :

$$\mathbb{P}(S_n) = \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) = C(\theta) \sum_{\pi \in S_n} \theta^{c(\pi)} = C(\theta) \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \theta^k = 1$$

З властивостей чисел Стірлінга першого роду  $\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \theta^k = \theta_{(n)}$ , тому  $C(\theta) = \frac{1}{\theta_{(n)}}$ .

**Означення 2.1.1.** Розподілом Юенса на групі перестановок  $S_n$  з параметром  $\theta > 0$  називається розподіл, для якого

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \quad \pi \in S_n, \quad (2.2)$$

де  $c(\pi)$  позначає кількість циклів у  $\pi$ .

Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса* і, за потреби, для позначення такої перестановки  $\sigma$  на  $S_n$  застосовуватимемо позначення  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ . Якщо  $\theta = 1$ , то формула (2.2) задає рівномірний розподіл на  $S_n$ .

Встановимо відповідність між (2.1) та (2.2). Нехай  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ , а  $c_j(\sigma)$  позначає кількість циклів довжини  $j$  у розкладі  $\sigma$  в композицію незалежних циклів. Знайдемо  $\mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n)$ , де  $\sum_{j=1}^n j c_j = n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n) &= \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{\theta_{(n)}} \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \theta^{c(\pi)} = \\ &= \frac{1}{\theta_{(n)}} \sum_{\substack{\pi \in S_n: \forall j=1, \dots, n \\ c_j(\pi) = c_j}} \theta^{c_1 + \dots + c_n} = \frac{\theta^{c_1 + \dots + c_n}}{\theta_{(n)}} \sum_{\pi \in S_n} \mathbb{1}_{\{\forall j = 1, \dots, n : c_j(\pi) = c_j\}}. \end{aligned}$$

З [13], ст. 11, відомо, що кількість перестановок  $\pi$ , для яких  $c_j(\pi) = c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , дорівнює  $n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}$ , тому

$$\mathbb{P}(c_1(\sigma) = c_1, \dots, c_n(\sigma) = c_n) = \frac{\theta^{c_1 + \dots + c_n}}{\theta_{(n)}} \cdot n! \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!} = \frac{n!}{\theta_{(n)}} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\theta}{j}\right)^{c_j} \frac{1}{c_j!}.$$

Отже, розподіл кількості циклів різної довжини у перестановці з розподілом (2.2) збігається з розподілом кількості алелів у вибірці з  $n$  генів, заданим (2.1).

## 2.2. Огляд наявних результатів

Як було сказано раніше, формула (2.1) виникла під час дослідження вибірок генів. В реальних задачах  $n$  може бути досить великим, тому постає питання наближеного обчислення відповідних ймовірностей. Так, добре дослідженими є граничні розподіли кількості циклів у випадкових перестановках з розподілом (2.2). Зауважимо, що кількість нерухомих точок — це кількість циклів довжини 1.

Оскільки найпростішим випадком формули (2.2) є випадок рівномірного розподілу при  $\theta = 1$ , почнемо огляд наявних результатів з нього. Найвідомішим є так звана «задача про неуважну секретарку», в якій необхідно знайти ймовірність того, що з  $n$  листів з навімання написаними адресами  $k$  надійдуть за призначенням. В термінах випадкової перестановки з розподілом  $\text{ESF}(n, 1)$  йдеться саме про кількість нерухомих точок. Хоча відповідні ймовірності дуже просто записати у явному вигляді, перейдемо одразу до більш складного результату:

**Теорема 2.2.1** ([13], ст. 12). Для  $\sigma_n \sim \text{ESF}(n, 1)$  та  $j = 1, \dots, n$

$$\mathbb{P}(c_j(\sigma_n) = k) = \frac{j^{-k}}{k!} \sum_{i=0}^{\lfloor n/j \rfloor - k} (-1)^i \frac{j^{-i}}{i!}, \quad (2.3)$$

де  $c_j(\sigma_n)$  позначає кількість циклів довжини  $j$  у  $\sigma_n$ .

З формули (2.3) видно, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(c_j(\sigma_n) = k) = \frac{j^{-k}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{j^{-i}}{i!} = \frac{j^{-k}}{k!} e^{-1/j}, \quad (2.4)$$

тобто граничним розподілом кількості циклів довжини  $j$  у рівномірно випадковій перестановці на  $S_n$  є  $\text{Pois}(1/j)$ . Зокрема, в задачі про неуважну секретарку при великих  $n$  ймовірність того, що за призначенням надійде  $k$  листів, приблизно дорівнює  $\frac{1}{k!} e^{-1}$ .

Виявляється, що випадкові величини  $X_j \sim \text{Pois}(1/j)$ , які в силу (2.4) є граничними для  $c_j(\sigma_n)$  при  $n \rightarrow \infty$ , є незалежними:

**Теорема 2.2.2** ([13], ст. 14). Нехай  $\sigma_n \sim \text{ESF}(n, 1)$ . Тоді для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$  випадковий вектор  $(c_1(\sigma_n), \dots, c_k(\sigma_n))^T$  збігається за розподілом до  $(X_1, \dots, X_k)^T$ ,

де  $X_j \sim \text{Pois}(1/j)$  і всі  $X_1, \dots, X_k$  є незалежними.

Теорема 2.2.2 узагальнюється на випадок  $\sigma_n \sim \text{ESF}(n, \theta)$  для довільних  $\theta > 0$ .

**Теорема 2.2.3** ([14], ст. 520). Нехай  $\sigma_n \sim \text{ESF}(n, \theta)$ . Тоді для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$  випадковий вектор  $(c_1(\sigma_n), \dots, c_k(\sigma_n))^T$  збігається за розподілом до  $(X_1, \dots, X_k)^T$ , де  $X_j \sim \text{Pois}(\theta/j)$  і всі  $X_1, \dots, X_k$  є незалежними.

Також варто навести рівність ([13], ст. 59), яка пов'язує розподіли випадкових векторів  $(c_1(\sigma_n), \dots, c_n(\sigma_n))^T$  та  $(X_1, \dots, X_n)^T$  з теореми 2.2.3:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(c_1(\sigma_n) = c_1, c_2(\sigma_n) = c_2, \dots, c_n(\sigma_n) = c_n) = \\ & = \mathbb{P}\left(X_1 = c_1, X_2 = c_2, \dots, X_n = c_n \mid \sum_{j=1}^n jX_j = n\right), \end{aligned}$$

де  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}_0$  і  $\sum_{j=1}^n jc_j = n$ .

## Висновки

В цьому розділі було розглянуто означення перестановок Юенса, історію появи цього поняття та застосування в генетиці. Також наведено деякі наявні результати, що стосуються граничних розподілів кількості нерухомих точок та циклів різної довжини у випадкової перестановки  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$  при  $n \rightarrow \infty$  — вони є пуассонівськими. Однак для нерухомих точок теорема 2.2.3 досліджує лише розподіл їх кількості, не зважаючи на положення цих точок. Дослідженню граничного розміщення нерухомих точок буде присвячено наступний розділ роботи.

## РОЗДІЛ 3

### ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

#### 3.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Як вже було згадано, для нерухомих точок перестановки  $\sigma$  з рівномірним розподілом на  $S_n$  (він же  $\text{ESF}(1, \theta)$ ) кількість нерухомих точок при  $n \rightarrow \infty$  збігається до  $\text{Pois}(1)$ .

У [7] на ст. 8 пропонується довести, що у випадку рівномірного розподілу перестановки розподіл нерухомих точок серед перших  $\lceil \gamma n \rceil$  натуральних чисел, де  $\gamma \in [0, 1]$ , збігається до  $\text{Pois}(\gamma)$ . Виявляється, що ця задача узагальнюється на випадок перестановок з розподілом Юенса (2.2). Розглянемо та доведемо відповідну лему.

**Лема 3.1.1.** *Нехай  $\sigma_n$  — випадкова перестановка на множині  $\{1, \dots, n\}$ , що задана розподілом (2.2), тобто,  $\sigma_n$  є перестановкою Юенса з  $S_n$ . Нехай  $\gamma \in [0, 1]$ , а  $X_n = \text{card} \{i \in \{1, \dots, \lceil \gamma n \rceil\} : \sigma_n(i) = i\}$  — кількість нерухомих точок  $\sigma_n$  серед перших  $\lceil \gamma n \rceil$  натуральних чисел. Тоді  $X_n$  за розподілом збігається до  $\text{Pois}(\gamma\theta)$ , тобто*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

*Доведення.* Отримаємо явну формулу для ймовірностей  $\mathbb{P}(X_n = k)$ , починаючи з випадку  $k = 0$ . Нехай  $F_i$  позначає множину перестановок, для яких  $i$  є нерухомою точкою. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 0) &= \mathbb{P}(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C) = 1 - \mathbb{P}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}) = \\ &= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i < j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}). \end{aligned}$$

У цьому виразі  $\lceil \gamma n \rceil$  однакових доданків виду  $\mathbb{P}(F_i)$ ,  $C_{\lceil \gamma n \rceil}^2$  однакових доданків виду  $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$  і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки  $\pi$ , то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто  $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$ , де  $\tilde{\pi}$  є перестановкою на множині  $\{2, \dots, n\}$ . Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками  $\pi$ , то  $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$ , де  $\tilde{\pi}$  вже є перестановкою на множині  $\{3, \dots, n\}$ .

Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(1, 2, \dots, i \in \text{нерухомими точками } \sigma) &= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) = \\
&= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = [c(\pi) \geq i] = \\
&= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{c(\pi)-i} = \\
&= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{c(\tilde{\pi})}.
\end{aligned}$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.2) на  $S_{n-i}$ , але без константи нормування, тому дорівнює  $\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-i-1)$ , отже

$$\mathbb{P}(1, 2, \dots, i \in \text{нерухомими точками } \sigma) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil}^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}(X_n = k)$  для  $k > 0$  можна отримати аналогічно: існує  $C_{\lceil \gamma n \rceil}^k$  способів вибрати  $k$  натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших  $\lceil \gamma n \rceil - k$  застосувати формулу, аналогічну до  $\mathbb{P}(X_n = 0)$ :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_{\lceil \gamma n \rceil}^k \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil - k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$  за допомогою теореми 1.2.1.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_n = k) = \\
&= \frac{(\lceil \gamma n \rceil)!}{k!(\lceil \gamma n \rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k)!}{i!(\lceil \gamma n \rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)} = \\
&= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \underbrace{(-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1)\dots(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-2)(\theta+n-1)}}_{f_n(i)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} f_n(i) = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} f_n(i) \mathbb{1}_{\{i \leq \lceil \gamma n \rceil - k\}} = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}_n(i).$$

Знайдемо поточкову границю  $\tilde{f}_n(i)$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(i) = (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{i \leq \lceil \gamma n \rceil - k\}}}_{=1}.$$

Оскільки  $\gamma n \leq \lceil \gamma n \rceil \leq \gamma n + 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} = \gamma^{i+k}$ . Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(i) = (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \cdot \gamma^{i+k} = f(i).$$

Знайдемо тепер функцію  $g$ , для якої  $|\tilde{f}_n(i)| \leq g(i)$  для всіх  $i$  та  $n$  і  $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) < \infty$ . Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots \lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} = \gamma^{i+k} \leq \gamma^k$ , то ця послідовність з якогось номеру  $n$  обмежена константою  $C$ , що не залежить від  $i$ , тому з цього ж номера

$$|\tilde{f}_n(i)| \leq \frac{\theta^i}{i!} \cdot C = g(i).$$

Оскільки  $\sum_{i=0}^{\infty} g(i) = C \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} = C \cdot e^{\theta} < \infty$ , то  $g$  є шуканою функцією.

Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{\theta^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{f}_n(i) = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} f(i) = \\ &= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Користуючись позначеннями з леми 3.1.1, визначимо для  $n \in \mathbb{N}$  точкові процеси  $P_n$  на  $(E, \mathcal{E}) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$  за правилом

$$P_n(F) = \text{card} \left\{ i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F \right\}, \quad F \in \mathcal{E}. \quad (3.1)$$

Отже,  $P_n$  є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса  $\sigma$ , нормованих  $n$ , тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n([0, \gamma]) = k) = \mathbb{P}(N([0, \gamma]) = k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тут  $N$  є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності  $\theta \cdot \text{Leb}$  on  $[0, 1]$ . Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

**Теорема 3.1.2.** *Послідовність точкових процесів  $P_n$  грубо збігається за розподілом до однорідного точкового процесу Пуассона  $N$  з інтенсивністю  $\theta$  на  $[0, 1]$ , тобто  $P_n \xrightarrow{vd} N, n \rightarrow \infty$ .*

Теорема 1.3.5 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів, скористаємось позначеннями з неї.

Розглянемо сім'ю множин  $\mathcal{X}$ , що складається зі скінченних диз'юнктивних об'єднань інтервалів  $\langle a, b \rangle \subset [0, 1]$ . Для точкового процесу Пуассона  $N$  з мірою інтенсивності  $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$  на  $[0, 1]$  (який є простим),  $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$ , тому для всіх  $B \subset \mathcal{X}$   $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$ , бо  $\partial B$  складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що  $\mathcal{X} \subset \hat{\mathcal{E}}_N$ . Також,  $\mathcal{X}$  є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 3.1.2, можна використати теорему 1.3.5 для  $\xi_n = P_n, \xi = N$  та  $\mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$ .

*Доведення теореми 3.1.2.* Нехай  $\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \delta_m \rangle$ , де  $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \delta_m$ , — набір інтервалів в  $[0, 1]$ , що попарно не перетинаються,  $I_j = \langle \gamma_j, \delta_j \rangle$  і  $I = \bigcup_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$ . Позначимо  $Y_n = P_n(I)$ , де  $P_n(I)$  визначено формулою (3.1). Нехай  $M_n = \text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{i}{n} \in I\}$  і тоді, аналогічно лемі 3.1.1,

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = C_{M_n}^k \sum_{i=0}^{M_n-k} (-1)^i C_{M_n-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)}.$$

Оскільки  $\text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{i}{n} \in I_j\} = \lceil \delta_j n \rceil - \lfloor \gamma_j n \rfloor$  ( $\lceil \cdot \rceil$  може змінюватися на  $\lfloor \cdot \rfloor$  і навпаки в залежності від  $n$  та включення кінцевих точок до інтервалу), а  $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$ , повторенням доведення збіжності у лемі 3.1.1, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{k!} \left( \theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right)^k \exp \left\{ -\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки  $\Lambda(I) = \theta \cdot \text{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n(I) = 0) = \mathbb{P}(N(I) = 0), I \in \mathcal{X}.$$



Так як  $\mathbb{P}(P_n(I) > 1) = 1 - (\mathbb{P}(P_n(I) = 0) + \mathbb{P}(P_n(I) = 1))$  і  $\mathbb{P}(P_n(I) = 1) \rightarrow \mathbb{P}(N(I) = 1)$  для  $I \in \mathcal{X}$ , отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(P_n(I) > 1) = \mathbb{P}(N(I) > 1), I \in \mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.3.5 справджуються, що і доводить  $P_n \xrightarrow{vd} N$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Варто також зауважити важливий наслідок теореми 3.1.2.

**Наслідок 3.1.2.** *Оскільки граничний процес Пуассона  $N$  простий і  $N(\{0\}) = 0$  з ймовірністю 1, то в силу теореми 1.3.7 має місце збіжність  $P_n \xrightarrow{Sd} N$ .*

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 3.1.2 для  $\gamma = 1$  виконується  $\mathbb{P}(X_n = 0) \rightarrow e^{-\theta}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Введемо ще один точковий процес  $\hat{P}_n$ , що визначений для борелевих множин  $F \in \mathcal{B}([0, 1])$  як

$$\mathbb{P}(\hat{P}_n(F) = k) = \mathbb{P}(P_n(F) = k \mid P_n([0, 1]) > 0) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k > 0, \\ \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=0, P_n(F^C)>0)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k = 0. \end{cases}$$

В силу теореми 1.3.3 достатньо визначити лише одновимірні розподіли. Повторенням доведення 3.1.2 можна отримати наступний результат:

**Теорема 3.1.3.** *Точковий процес  $\hat{P}_n$  грубо збігається за розподілом до точкового процесу  $\hat{N}$  на  $[0, 1]$ , для якого*

$$\mathbb{P}(\hat{N}(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0, \\ \frac{\mathbb{P}(N(F)=0, N(F^C)>0)}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

для всіх  $F \in \mathcal{B}([0, 1])$  та  $k \in \mathbb{N}$ .

За властивістю 2 у означенні 1.3.6 маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(F) = 0, N(F^C) > 0) &= \mathbb{P}(N(F) = 0) \cdot \mathbb{P}(N(F^C) > 0) = \\ &= \mathbb{P}(N(F) = 0) \cdot (1 - \mathbb{P}(N(F^C) = 0)) = e^{-\Lambda(F)} \cdot (1 - e^{-\Lambda(F^C)}) = \\ &= e^{-\Lambda(F)} \cdot (1 - e^{-\theta} e^{\Lambda(F)}) = e^{-\Lambda(F)} - e^{-\theta}, \end{aligned}$$

тому можна записати

$$\mathbb{P}(\widehat{N}(F) = k) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0, \\ \frac{e^{-\Lambda(F)} - e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases}$$

Зокрема, для  $F = [0, 1]$ :

$$\mathbb{P}(\widehat{N}([0, 1]) = k) = \begin{cases} \frac{\theta^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

### 3.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 3.1.2 та 3.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення 1.3.6. Корисною також є теорема 1.2.2, згідно з якою для послідовності точкових мір  $\mu_n$ , що грубо збігається до точкової міри  $\mu$ , для будь-якої компактної множини існує номер, починаючи з якого усі елементи послідовності містять стільки ж атомів з цієї множини, скільки й гранична міра. Це означає, що будь-яка неперервна функція багатьох змінних утворює на просторі точкових мір неперервне відносно грубої топології відображення. У нашому випадку достатньо обмежитись функціями з  $[0, 1]^p$ .

#### 3.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри  $\mu$  на  $[0, 1]$  визначимо відображення  $\min(\mu)$  та  $\max(\mu)$ , що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атоми за формулами

$$\begin{aligned} \min(\mu) &= \sup \{x \in [0, 1] : \mu([0, x]) = 0\}, \\ \max(\mu) &= \inf \{x \in [0, 1] : \mu([x, 1]) = 0\}, \end{aligned}$$

де для порожньої множини покладаємо  $\sup \emptyset = 0$  та  $\inf \emptyset = 1$ . Якщо  $\{x_1, \dots, x_k\}$  — множина атомів  $\mu$ , то  $\min(\mu) = \min \{x_1, \dots, x_k\}$  і  $\max(\mu) = \max \{x_1, \dots, x_k\}$ .

Нехай  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ . Оскільки  $\min \{x_1, \dots, x_k\}$  та  $\max \{x_1, \dots, x_k\}$  є неперервними функціями з  $\mathbb{R}^k$  в  $\mathbb{R}$ , з теореми 1.2.2 випливає, що  $\min(\mu)$  та  $\max(\mu)$  є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 3.1.3, простіше отримати розподіл  $\min(N)$  та  $\max(N)$ , оскільки умовний розподіл  $\mathbb{P}(N(F) = k \mid N([0, 1]) = m)$  є відомим (твердження 3.8, ст. 23, [7]) — це одновимірний розподіл біноміального процесу з

розміром вибірки  $m$  та розподілом  $U(0, 1)$ . Це означає, що за умови  $N([0, 1]) = m$  сумісний розподіл положень всіх  $m$  атомів збігається з розподілом випадкового вектора з  $m$  незалежних випадкових величин з розподілом  $U(0, 1)$ . Також, корисним є такий факт: нехай  $U_1, U_2, \dots, U_m$  є незалежними випадковими величинами з розподілом  $U(0, 1)$ ; тоді розподіли  $U_{(1)}^{[m]} = \min\{U_1, \dots, U_m\}$  та  $U_{(m)}^{[m]} = \max\{U_1, \dots, U_m\}$  задаються формулами

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1 - x)^m, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^m, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

оскільки

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \leq x\right) &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(U_1 > x, \dots, U_m > x) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(U_m > x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(U_1 \leq x)) \cdot \dots \cdot (1 - \mathbb{P}(U_m \leq x)), \\ \mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \leq x\right) &= \mathbb{P}(U_1 \leq x, \dots, U_m \leq x) = \mathbb{P}(U_1 \leq x) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(U_m \leq x). \end{aligned}$$

Отже, розподіли  $\min(N)$  та  $\max(N)$  мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} (1 - (1 - x)^m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \\ \mathbb{P}(\max(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ці розподіли є змішаними, бо  $\mathbb{P}(N([0, 1]) = 0) = e^{-\theta}$  і тому  $\mathbb{P}(\min(N) = 1) = \mathbb{P}(\max(N) = 0) = e^{-\theta}$ . Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}(\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\mathbb{P}(\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Умови  $\{\min(N) < 1\}$  та  $\{\max(N) > 0\}$  еквівалентні  $\{N([0, 1]) > 0\}$ , тому умовні розподіли (3.3) та (3.4) задають безумовні розподіли  $\min(\hat{N})$  та  $\max(\hat{N})$ .

З формул (3.1) та (3.2) випливає, що  $n \cdot \min(\hat{P}_n)$  — найменша нерухома точка перестановки Юенса на  $S_n$ , а  $n \cdot \max(\hat{P}_n)$  — найбільша, за умови, що нерухомі точки взагалі існують.

Також, можна обчислити відповідні математичні сподівання:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \min(\hat{N}) &= \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}(\min(\hat{N}) \leq x)\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - e^{-\theta}}\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta x} - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} - e^{-\theta}\right) = \frac{1}{\theta} - \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, \\ \mathbb{E} \max(\hat{N}) &= \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}(\max(\hat{N}) \leq x)\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x} - 1}{e^{\theta} - 1}\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta x}}{e^{\theta} - 1}\right) dx = \frac{1}{e^{\theta} - 1} \cdot \left(e^{\theta} - \frac{e^{\theta} - 1}{\theta}\right) = \frac{e^{\theta}}{e^{\theta} - 1} - \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \min(\hat{P}_n) = \mathbb{E} \min(\hat{N})$  та  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \max(\hat{P}_n) = \mathbb{E} \max(\hat{N})$ , то, наприклад, для  $\theta = 1$  при великих значеннях  $n$  маємо  $\mathbb{E} \min(\hat{P}_n) \approx \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \cdot n \approx 0.418 \cdot n$ ,  $\mathbb{E} \max(\hat{P}_n) \approx \frac{1}{e-1} \cdot n \approx 0.582 \cdot n$ .

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 3.2.1.** Нехай  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ , а  $m_n = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$  та  $M_n = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$  — відповідно, найменша на найбільша нерухомі точки  $\sigma$ , де за домовленістю  $\min \emptyset = n$ ,  $\max \emptyset = 1$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  виконуються граничні співвідношення  $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{d} m$ ,  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} M$ , де функції розподілу

випадкових величин  $m$  та  $M$  дорівнюють, відповідно,

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Якщо позначити  $\hat{m}_n$  та  $\hat{M}_n$  найменшу та найбільшу нерухомі точки за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничні співвідношення  $\frac{\hat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{m}$  і  $\frac{\hat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{M}$ , де  $\hat{m}$  та  $\hat{M}$  є абсолютно неперервними випадковими величинами з функціями та щільностями розподілу

$$F_{\hat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad f_{\hat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_{\hat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad f_{\hat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{\theta x}}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

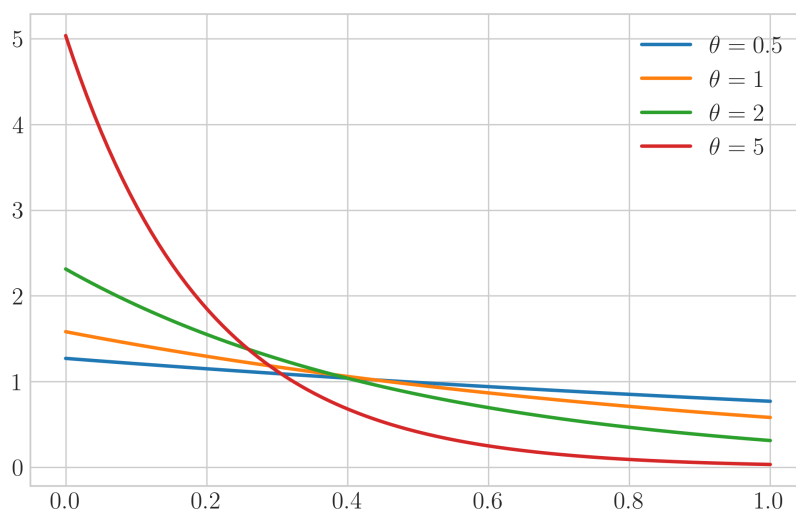


Рисунок 3.1 – Графіки щільності  $f_{\hat{m}}(x)$  для різних значень  $\theta$ .

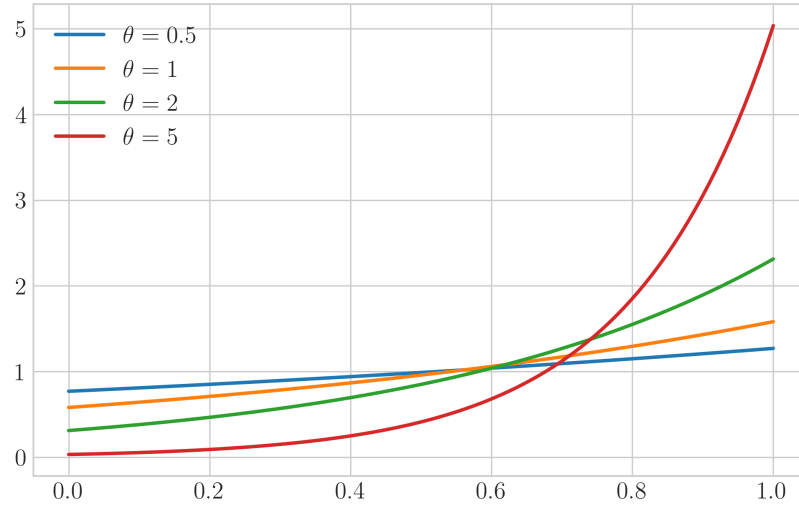


Рисунок 3.2 – Графіки щільності  $f_{\widehat{M}}(x)$  для різних значень  $\theta$ .

### 3.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. Згідно з означенням 1.3.6, для процесу Пуассона з мірою інтенсивності  $\theta \cdot \text{Leb}$  на  $[0, 1]$  цей функціонал задається як

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ -\theta \int_0^1 (1 - e^{-f(x)}) dx \right\} \quad (3.5)$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій  $f$  на  $[0, 1]$ .

Позначатимемо  $\text{sum}(N)$  суму атомів точкового процесу Пуассона  $N$ . Для будь-якої точкової міри  $\mu$ ,  $\text{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$ . Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини  $X$  задається  $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$ . Якщо порівняти це означення з (3.5), можна побачити, що перетворення Лапласа  $\text{sum}(N)$  дорівнює значенню  $\psi_N(f)$  для  $f(x) = px$ . Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) = \exp \left\{ -\theta \left( 1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1) \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Оскільки розподіл  $\text{sum}(N)$  є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для  $\text{sum}(\widehat{N})$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) &= \mathbb{E}e^{-p \cdot \text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) = 0) + \\ &+ \mathbb{E}e^{-p \cdot \text{sum}(\widehat{N})} \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) > 0) = e^{-\theta} + \mathcal{L}\{\text{sum}(\widehat{N})\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta}), \\ \mathcal{L}\{\text{sum}(\widehat{N})\}(p) &= \frac{1}{1 - e^{-\theta}} (\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) - e^{-\theta}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left( \exp \left\{ -\frac{\theta}{p} (e^{-p} - 1) \right\} - 1 \right). \quad (3.7)$$

$\text{sum}(\hat{N})$  є абсолютно неперервною випадковою величиною,  $\mathcal{L} \left\{ \text{sum}(\hat{N}) \right\} (p)$  є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу  $\text{sum}(\hat{N})$  задається

$$\mathcal{L} \left\{ F_{\text{sum}(\hat{N})}(x) \right\} (p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left( \exp \left\{ -\frac{\theta}{p} (e^{-p} - 1) \right\} - 1 \right). \quad (3.8)$$

Знаходження оберненого перетворення для (3.8) є доволі складним.

Розглянемо інший підхід до знаходження  $F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \mathbb{P}(N([0, 1]) = m) = \\ &= \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta}. \end{aligned}$$

Згідно з [15] (ст. 296), умовні розподіли  $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m)$  є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми  $m$  незалежних випадкових величин з розподілом  $U(0, 1)$ . Їх функція розподілу має вигляд

$$F_s^{[m]}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k C_m^k (x - k)^m, & 0 \leq x < m, \\ 1, & x \geq m. \end{cases}$$

Для кожного інтервалу  $[n, n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x)$  може бути виражена через  $I_\nu(z)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  — модифіковані функції Бесселя першого роду ([12], ст. 375):

$$I_\nu(z) = \left( \frac{1}{2} z \right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{1}{4} z^2 \right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Отримаємо відповідну формулу. Нехай  $x \in [n, n + 1)$ , тоді

$$\begin{aligned} e^\theta \cdot \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m) \frac{\theta^m}{m!} = \\ &= 1 + \sum_{m=1}^n 1 \cdot \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_m^k (x - k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!(m-k)!} (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!(m-k)!} (x-k)^m \theta^m \right) = [m-k=l] = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left( \sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{l+k} \theta^{l+k} \right) = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left( \sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l \right) = \\
&= \left[ \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l = a_{k,l} \right] = \\
&= \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left( \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} - \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \\
&+ \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{k+l} \theta^{k+l}.
\end{aligned}$$

Позначимо  $R(n) = \sum_{m=0}^n \frac{\theta^m}{m!}$ ,  $L(n) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{k+l} \theta^{k+l}$ . Покажемо, що  $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
R(n) - R(n-1) &= \frac{\theta^n}{n!}, \\
L(n) - L(n-1) &= \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} s_{k,l} = \sum_{i=0}^n s_{i,n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!n!} (x-i)^n \theta^n = \frac{\theta^n}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (x-i)^n.
\end{aligned}$$

Розглянемо функцію  $f(x) = x^n$ . Ліва скінченна різниця першого порядку для  $f$  з кроком  $h = 1$  — це  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ , другого порядку —  $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1) = f(x) - 2f(x-1) + f(x-2)$ , аналогічно рекурентно визначаються скінченні різниці вищих порядків. Загальною формулою для різниці  $k$ -того порядку буде  $\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(x-i) = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (x-i)^n$ , тому вираз  $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (x-i)^n$  — це ліва скінченна різниця  $n$ -того порядку для  $x^n$ . Оскільки кожна скінченна різниця є поліном порядку на 1 менше, ніж попередня,



то різниця  $n$ -того порядку вже буде константою. Виявляється, що

$$\frac{1}{n!} \Delta^n f(n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (n-i)^n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1,$$

де  $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$  позначає число Стірлінга другого роду ([12], ст. 824-825). Отже,  $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Оскільки  $R(0) = L(0) = 1$ , то  $R(n) = L(n)$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Таким чином, отримуємо

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right), \quad x \in [n, n+1).$$

Зауважимо, що  $F_{\text{sum}(N)}(0) = e^{-\theta} I_0 \left( 2\sqrt{\theta x} \right) \Big|_{x=0} = e^{-\theta} = \mathbb{P}(\text{sum}(N) = 0)$ .

В свою чергу, функція розподілу  $\text{sum}(\hat{N})$  може бути виражена через  $F_{\text{sum}(N)}(x)$  наступним чином:

$$\mathbb{P}(\text{sum}(\hat{N}) \leq x) = \mathbb{P}(\text{sum}(N) \leq x \mid \text{sum}(N) > 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки  $\text{sum}(\hat{N})$  є абсолютно неперервною випадковою величиною, можна також знайти її щільність розподілу. Зробимо це для  $x \in [n, n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . Оскільки  $I'_\nu(z) = I_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} I_\nu(z)$  ([12], ст. 376), то для  $z = z(x) = \sqrt{\theta(x-k)}$  і  $g_k(x) = g_k(z(x)) = (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) = z^k I_k(2z)$  маємо

$$\begin{aligned} g'_k(x) &= \left( k z^{k-1} I_k(2z) + 2z^k \left( I_{k+1}(2z) + \frac{k}{2z} I_k(2z) \right) \right) z'(x) = \\ &= 2z^{k-1} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) \cdot z'(x) = 2z^{k-1} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) \cdot \frac{\theta}{2z} = \\ &= \theta z^{k-2} (k I_k(2z) + z I_{k+1}(2z)) = \\ &= \theta (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}-1} \left( k I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1} \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) \right). \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо

$$f_{\text{sum}(\hat{N})}(x) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} g'_k(x), \quad x \in [n, n+1).$$

При цьому,  $\mathbb{E} \text{sum}(N)$  значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для  $m > 0$   $\mathbb{E}(\text{sum}(N) \mid N([0, 1]) = m) = \frac{m}{2}$  як матема-

тичне сподівання суми  $m$  незалежних випадкових величин з розподілом  $U(0, 1)$ :

$$\mathbb{E} \text{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}(N([0, 1]) = 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \theta^m}{2 m!} e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}.$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 3.2.2.** Нехай  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ , а  $S_n = \sum_{i: \sigma(i)=i} i = \sum_{i=1}^n i \cdot \mathbb{1}\{\sigma(i) = i\}$  — сума нерухомих точок  $\sigma$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  виконується граничне співвідношення  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} S$ , де функція розподілу випадкової величини  $S$  дорівнює

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right), & x \geq 0, \end{cases}$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.6).

Якщо позначити  $\hat{S}_n$  суму нерухомих точок за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничне співвідношення  $\frac{\hat{S}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{S}$ , де  $\hat{S}$  є абсолютно неперервною випадковою величиною з функцією та щільністю розподілу

$$F_{\hat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{F_S(x) - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}, & x \geq 0, \end{cases}, \quad f_{\hat{S}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\theta e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!} f_k(x), & x \geq 0, \end{cases},$$

де  $f_k(x)$  визначено як

$$f_k(x) = (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}-1} \left( k I_k \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) + \sqrt{\theta(x-k)} I_{k+1} \left( 2\sqrt{\theta(x-k)} \right) \right),$$

а її перетворення Лапласа має вигляд (3.7).

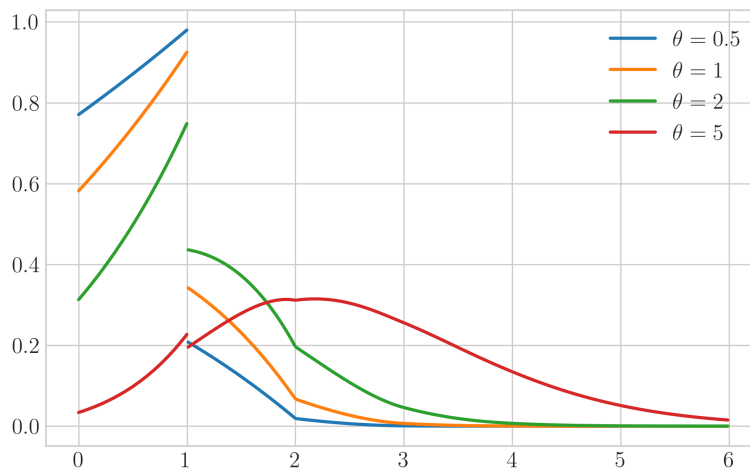


Рисунок 3.3 – Графіки щільності розподілу  $f_{\hat{S}}(x)$  для різних значень  $\theta$ .

### 3.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподіли найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між сусідніми нерухомими точками.

**Зауваження.** Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати  $\min(N)$  і  $1 - \max(N)$  спейсингами. Для випадкової перестановки  $\{1, \dots, n\}$  це означатиме вважати 0 та  $n + 1$  «штучними» нерухомими точками.

Обґрунтуємо можливість застосування теореми 1.3.6 до відповідних відображень. Нехай  $\mu$  — проста точкова міра на  $[0, 1]$ , а  $\{x_1, \dots, x_k\}$  — множина її атомів, які вважатимемо відсортованими, тобто  $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ . Перетворення вектора  $(x_1, \dots, x_k)^T$  у вектор спейсингів  $(y_1, \dots, y_{k+1})$  є лінійним:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} - x_{k-2} \\ x_k - x_{k-1} \\ 1 - x_k \end{pmatrix}$$

Найменший та найбільший спейсинги задаються формулами  $\min\{y_1, \dots, y_{k+1}\}$  та  $\max\{y_1, \dots, y_{k+1}\}$ , відповідно.

Отже, відображення  $s\text{-}\min(\mu)$  та  $s\text{-}\max(\mu)$ , що ставлять у відповідність точковій мірі  $\mu$  найменший та найбільший спейсинги між її атомами, є неперервними функціями від атомів, тому за теоремою 1.3.6 є неперервними відносно грубої топології.

Як і раніше, розподіли  $s\text{-}\min(N)$  та  $s\text{-}\max(N)$  шукатимемо, користуючись тим, що розподіл атомів  $N$  на  $[0, 1]$  за умови, що відома їх кількість, є рівномірним.

Нехай  $U_1, U_2, \dots, U_n$  — незалежні випадкові величини з розподілом  $U(0, 1)$ , що розділяють відрізок  $[0, 1]$  на  $n + 1$  інтервалів з довжинами  $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$ , або, у відсортованому вигляді,  $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \dots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$  (нагадаємо,  $S_{(i)}$  позначає  $i$ -ту порядкову статистику, а  $S_{(i)}^{[n+1]}$  — те ж саме, але з вказанням  $n + 1$  як кількості цих статистик). Розподіли  $S_{(k)}^{[n+1]}$  отримано у багатьох роботах (наприклад, [16],

[17]). Зокрема, для  $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) &= ((1 - (n+1)x)_+)^n, \\ \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^j ((1 - jx)_+)^n,\end{aligned}$$

де  $x_+ = \max(x, 0)$ .

Отже, розподіли найменшого  $s\text{-min}(N)$  та найбільшого  $s\text{-max}(N)$  спейсингів між атомами  $N$  задаються (з домовленістю  $S_{(1)}^{[1]} = 1$ )

$$\mathbb{P}(s\text{-min}(N) > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}(N([0, 1]) = n), \quad (3.9)$$

$$\mathbb{P}(s\text{-max}(N) > x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}(N([0, 1]) = n). \quad (3.10)$$

Хоча явні вирази для (3.9) та (3.10), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Відомо (наприклад, [16]), що для незалежних величин  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  з розподілом  $\text{Exp}(1)$  мають місце наступні три рівності:

$$\begin{aligned}(S_1, S_2, \dots, S_{n+1})^T &\stackrel{d}{=} \left( \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \dots, \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right)^T, \\ (S_{(1)}, S_{(1)}, \dots, S_{(n+1)})^T &\stackrel{d}{=} \left( \frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}, \dots, \frac{X_{(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right)^T, \quad (3.11)\end{aligned}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \dots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}. \quad (3.12)$$

Рівності (3.11) та (3.12) можна доповнити наступною рівністю:

**Лема 3.2.3.** Для порядкових статистик спейсингів  $S_{(1)}^{[n+1]}, \dots, S_{(n+1)}^{[n+1]}$  між незалежними величинами з розподілом  $U(0, 1)$  та незалежних величин  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  з розподілом  $\text{Exp}(1)$  має місце рівність

$$S_{(i)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_{n+1}}{n+1} + \frac{X_n}{n} + \dots + \frac{X_{n-i+2}}{n-i+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{k=0}^{i-1} \frac{X_{n+1-k}}{n+1-k}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (3.13)$$

*Доведення.* Позначимо спейсинги між  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  через  $\Delta_1 = X_{(1)}, \Delta_i =$

$X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \dots, n+1$ . З [18], ст. 72, відомо, що всі  $\Delta_i$  незалежні та мають розподіли  $\text{Exp}(n-i+2)$ . Отже, праву частину  $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j}$  можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \dots + (\Delta_1 + \dots + \Delta_{n+1})}.$$

Введемо нові незалежні випадкові величини  $Y_i = (n-i+2)\Delta_i$  з розподілом  $\text{Exp}(1)$ . В термінах  $Y_i$  верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^{n+1} X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+2}}{\sum_{j=1}^{n+1} Y_j}.$$

Оскільки  $X_i$  та  $Y_i$  незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (3.13).  $\square$

Окремими випадками леми 3.2.3 є рівності для мінімального і максимального спейсингів  $S_{(1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{X_{n+1}}{(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i}$  та  $S_{(n+1)}^{[n+1]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{n-i+2}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}$ . Разом з (3.9) та (3.10) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_{\nu+1}}{(\nu+1) \sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad (3.14)$$

де  $\nu$  має розподіл  $\text{Pois}(\theta)$ , а  $(X_i, i \geq 1)$  незалежні між собою та від  $\nu$  і мають розподіл  $\text{Exp}(1)$ .

Відповідні математичні сподівання  $\mathbb{E} \text{s-min}(N)$  та  $\mathbb{E} \text{s-max}(N)$  можна знайти з (3.14). Нехай  $n \in \mathbb{N}_0$ , тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{X_{n+1}}{(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E} \left( \frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{(n+1)^2}, \\ \mathbb{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E} \left( \frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$ , то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \text{s-min}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\theta} t^{n-1} dt = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} \right) dt = \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{1}{t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) dt = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \text{s-max}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \int_0^1 (1 + s + \dots + s^{n-1}) \, ds = \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} \int_0^1 \frac{1 - s^n}{1 - s} \, ds = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^1 \frac{1}{1 - s} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - s^n) \theta^n}{n!} \right) \, ds = \\
&= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^1 \frac{e^{\theta} - e^{s\theta}}{1 - s} \, ds = [t = \theta(1 - s)] = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^{\theta} - e^{\theta-t}}{t} \, dt = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{1 - e^{-t}}{t} \, dt.
\end{aligned}$$

де  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  —  $n$ -те гармонічне число. Зокрема, для  $\theta = 1$  (випадок рівномірного розподілу)  $\mathbb{E} \text{s-min}(N) \approx 0.48483$  і  $\mathbb{E} \text{s-max}(N) \approx 0.7966$ .

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 3.2.4.** Нехай  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ , а  $\delta_n$  та  $\Delta_n$  — відповідно, найменша та найбільша відстані між нерухомими точками  $\sigma$ . Тоді при  $n \rightarrow \infty$  виконуються граничні співвідношення  $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$  і  $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$ , де

$$\delta \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu + 1) \sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \Delta \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i},$$

для незалежних між собою  $(X_i, i \geq 1)$  з розподілом  $\text{Exp}(1)$  та  $\nu \sim \text{Pois}(\theta)$ , незалежної від  $(X_i, i \geq 1)$ .

## Висновки

В цьому розділі було доведено низку теорем, що стосуються граничної поведінки нерухомих точок випадкової перестановки  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Головним результатом є доведення грубої збіжності за розподілом послідовності точкових процесів, визначених (3.1), яка дозволяє досліджувати розміщення нерухомих точок. Так, застосування теореми про неперервне відображення 1.3.6 дає можливість дослідити граничні розподіли будь-яких випадкових величин, пов'язаних з нерухомими точками, які можна записати як неперервні функції від декількох дійсних змінних (хоча б на одиничному кубі). Як приклад, було розглянуто розподіли найменшої та найбільшої нерухомих точок, суми нерухомих точок, найменшого та найбільшого спейсингів між ними.

## РОЗДІЛ 4

### ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ

#### 4.1. Алгоритми для генерування перестановок

Для чисельних перевірок доведених граничних теорем та демонстрації збіжності необхідно користуватися якимось алгоритмом для отримання вибірок з розподілу (2.2). У [14] наводиться два підходи, засновані на понятті каплінгу: побудові такого випадкового вектора  $(X_1, \dots, X_n)^T$  зі значенням в  $\{1, \dots, n\}^n$ , координати якого певним чином будуть утворювати незалежні цикли, з яких утвориться перестановка з потрібним розподілом (нагадаємо, в силу теореми 1.1.1 кожна перестановка однозначно представляється композицією циклів з точністю до їх порядку).

##### 4.1.1. Процес китайського ресторану

Розглянемо випадкові величини  $A_1, A_2, \dots$  з розподілами

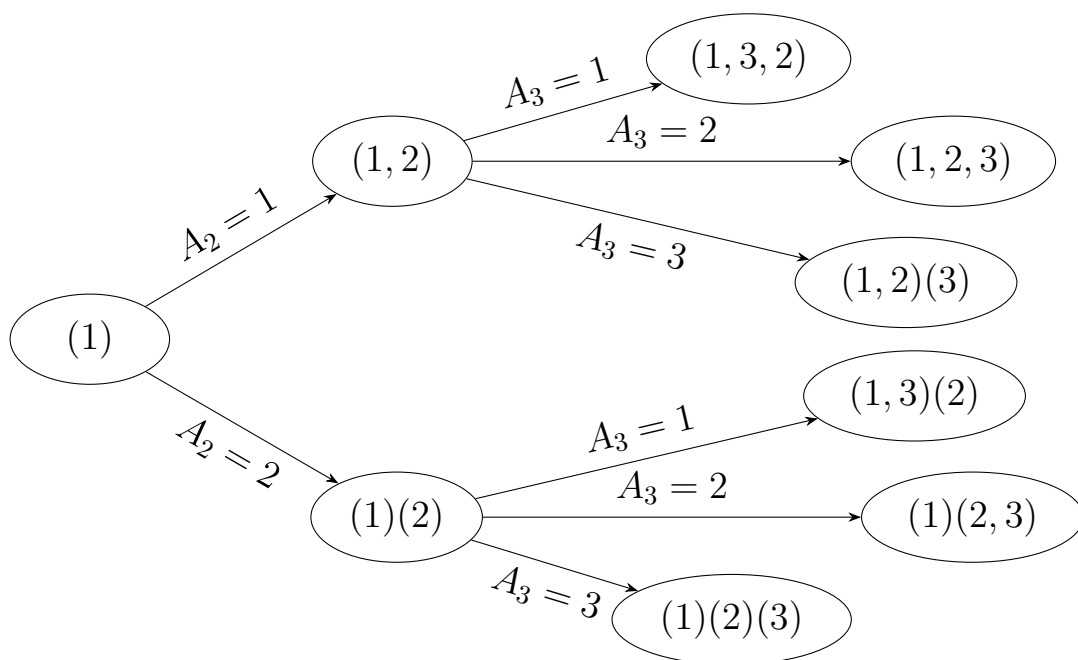
$$\mathbb{P}(A_i = j) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta+i-1}, & j = i, \\ \frac{1}{\theta+i-1}, & j = 1, 2, \dots, i-1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Перший незалежний цикл починається з 1. 2 додається до цього циклу справа (і він стає циклом  $(1, 2)$ ) з ймовірністю  $\frac{1}{\theta+1}$ , або ж починає новий цикл з ймовірністю  $\frac{\theta}{\theta+1}$ . Нехай перші  $k-1$  натуральних чисел вже розставлені в цикли. Тоді  $k$  або починає новий цикл з ймовірністю  $\mathbb{P}(A_k = k) = \frac{\theta}{\theta+k-1}$ , або додається справа від  $j$  у вже наявний цикл з ймовірністю  $\mathbb{P}(A_k = j) = \frac{1}{\theta+k-1}$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ . З алгоритму побудови отримуємо, що ймовірність отримати перестановку на  $\{1, \dots, n\}$  з  $k$  циклами дорівнює  $\frac{\theta^{k-1}}{(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = \frac{\theta^k}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}$ , як і в формулі (2.2).

Цикли, отримані за цим алгоритмом, впорядковані наступним чином: перший містить 1, другий — найменше число, яке не ввійшло в перший, і так далі.

Варто також зауважити, що цей алгоритм дозволяє отримати не просто випадкову перестановку з розподілом  $\text{ESF}(n, \theta)$ , а послідовність перестановок з розподілами  $\text{ESF}(1, \theta), \dots, \text{ESF}(n, \theta)$ , причому два числа, що в якийсь момент опинилися в одному циклі, завжди залишаються в ньому ж.

Розглянемо приклад для  $n = 3$ , який можна проілюструвати наступною діаграмою:



З цієї діаграми видно, що ймовірність отримати перестановку  $(1)(2, 3)$  обчислюється як  $\mathbb{P}(A_3 = 2) \cdot \mathbb{P}(A_2 = 2) = \frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$ . Аналогічно можна перевірити, що ймовірність отримати інші перестановки з двома циклами теж дорівнює  $\frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$ , перестановку  $(1, 2, 3)$  з одним циклом —  $\frac{1}{\theta+2} \cdot \frac{1}{\theta+1}$ , а тотожну перестановку  $(1)(2)(3)$  з трьома циклами —  $\frac{\theta}{\theta+2} \cdot \frac{\theta}{\theta+1}$ .

#### 4.1.2. Каплінг Феллера

Розглянемо незалежні випадкові величини  $B_1, B_2, \dots$  з розподілами

$$\mathbb{P}(B_i = j) = \begin{cases} \frac{\theta}{\theta+i-1}, & j = 1, \\ \frac{i-1}{\theta+i-1}, & j = 0. \end{cases}$$

Знову почнемо перший незалежний цикл з 1. Якщо  $B_n = 1$ , то цей цикл закінчується, а новий починається з 2, а інакше — довільно (з рівними ймовірностями) обирається одне з  $n - 1$  чисел, що залишились, і додається до цього циклу справа від 1. На наступному кроці, якщо  $B_{n-1} = 1$ , то поточний цикл закінчується, а новий починається з найменшого натурального числа, що ще не потрапило до циклів, а інакше — довільно обирається одне з  $n - 2$  чисел і додається до поточного циклу справа. Цей процес повторюється, доки не утвориться перестановка, що буде реалізацією  $\text{ESF}(n, \theta)$ .

Якщо порівнювати цей каплінг з процесом китайського ресторану, то можна помітити, що  $B_i = \mathbb{1}\{A_i = 1\}$ , де  $A_i$  визначено (4.1). Різницею є те, що каплінг Феллера використовує  $A_1, \dots, A_n$  в зворотному порядку, а отже — за допомогою



нього можна отримувати перестановки лише для наперед заданого  $n$ . Зауважимо, що кількість циклів у отриманій перестановці рівна  $\sum_{i=1}^n B_i$ .

Розглянемо приклад для  $n = 5$ . Нехай реалізацією величин  $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$  є  $(0, 1, 1, 0, 0)$ .  $B_5 = 0$ , тому до першого циклу (1) додається довільно вибране число з  $\{2, 3, 4, 5\}$  — наприклад, 3. Оскільки  $B_4 = 0$ , то до циклу (1, 3) додається довільно вибране число з  $\{2, 4, 5\}$  — наприклад, 4. Оскільки  $B_3 = 1$ , то поточний цикл (1, 3, 4) закінчується, а наступний починається з 2. Нарешті, оскільки  $B_2 = 1$ , то 5 утворює новий цикл, і отримуємо перестановку  $(1, 3, 4)(2)(5)$ .

## 4.2. Перевірка отриманих результатів

Для перевірки результатів леми 3.1.1 та теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.2.4 скористаємося процесом китайського ресторану для отримання вибірок з  $\text{ESF}(n, \theta)$ . Розмір вибірки  $m$  в усіх випадках буде рівний 3000.

### 4.2.1. Розподіл кількості нерухомих точок

Для демонстрації збіжностей  $\mathbb{P}(X_n = k) \rightarrow \mathbb{P}(X = k)$ , де  $X \sim \text{Pois}(\theta)$ , а  $X_n$  визначено в лемі 3.1.1 при  $\gamma = 1$ , порівняємо полігони розподілу для  $X_n$  при  $n = 50, 100, 500$  для різних значень  $\theta$ . Ймовірності  $\mathbb{P}(X_n = k)$  отримуватимемо наближено за допомогою закону великих чисел:

$$\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbb{1} \{ \text{card} \{ j \in \{1, \dots, n\} : \sigma_i(j) = j \} = k \},$$

де  $\sigma_i \sim \text{ESF}(n, \theta)$  і незалежні.

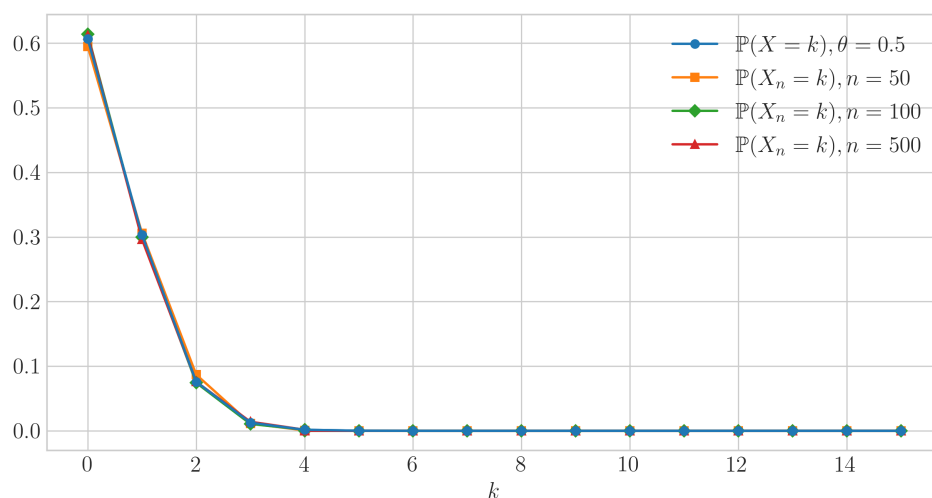


Рисунок 4.1 – Полігони розподілу  $X_n$  та  $X$  для  $\theta = 0.5$ .

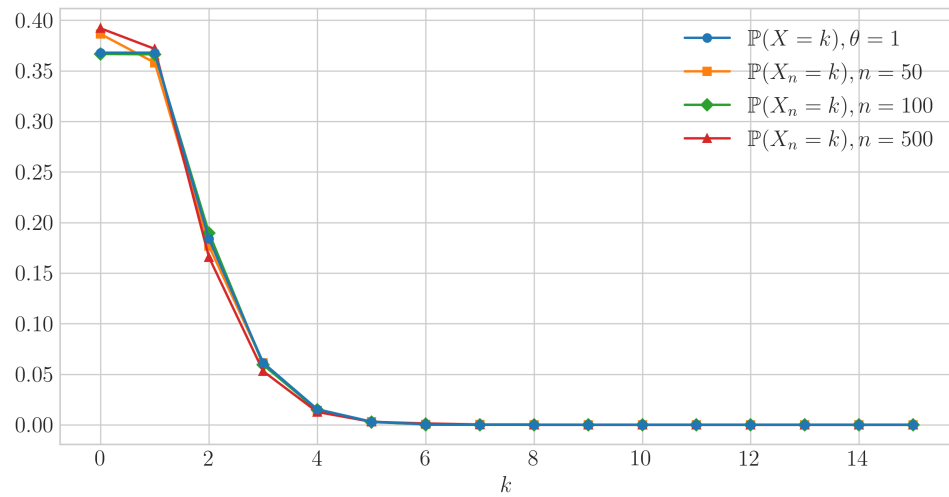


Рисунок 4.2 – Полігони розподілу  $X_n$  та  $X$  для  $\theta = 1$ .

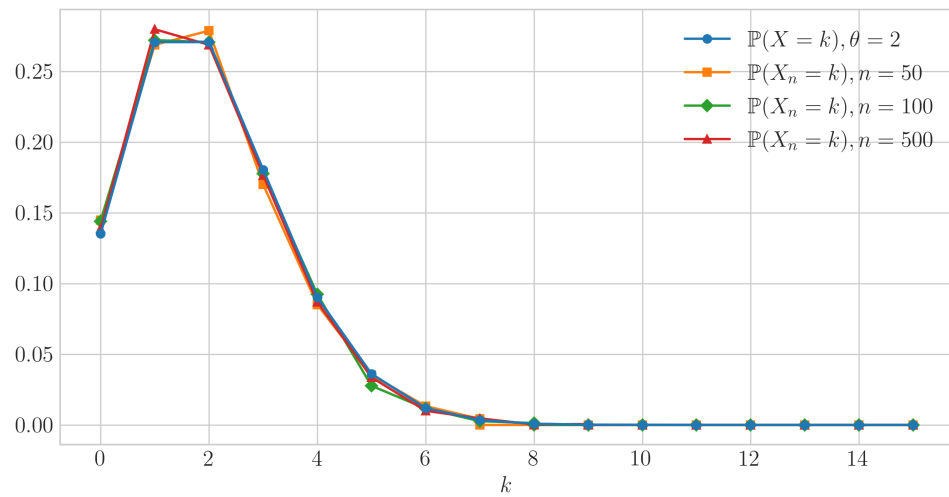


Рисунок 4.3 – Полігони розподілу  $X_n$  та  $X$  для  $\theta = 2$ .

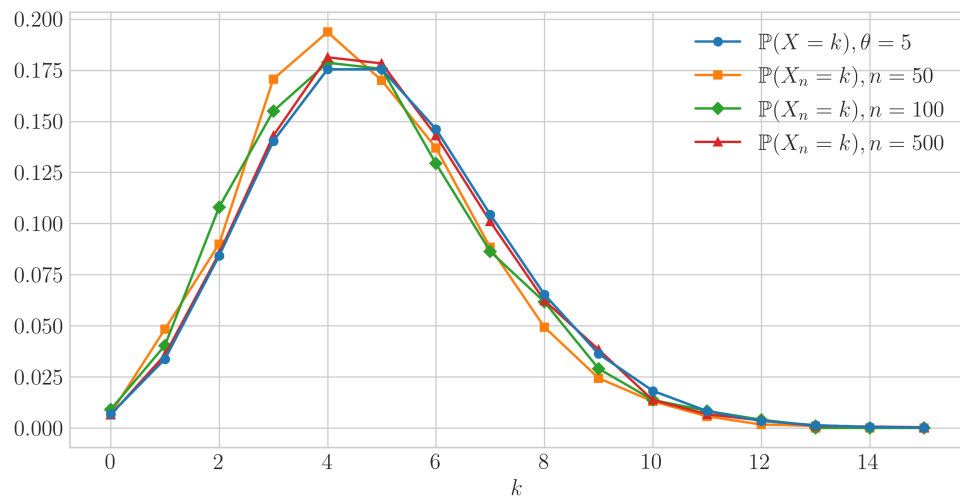


Рисунок 4.4 – Полігони розподілу  $X_n$  та  $X$  для  $\theta = 5$ .

Видно, що збіжність ймовірностей дійсно присутня, але для більших значень  $\theta$  вона є повільнішою.

#### 4.2.2. Розподіл найменшої та найбільшої нерухомих точок

Для демонстрації збіжностей  $\frac{\hat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{m}$  і  $\frac{\hat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{M}$ , доведених в теоремі 3.2.1, порівняємо гістограми  $\frac{\hat{m}_n}{n}$  та  $\frac{\hat{M}_n}{n}$  для  $n = 500$  з щільностями розподілу  $\hat{m}$  та  $\hat{M}$  для різних значень  $\theta$ .

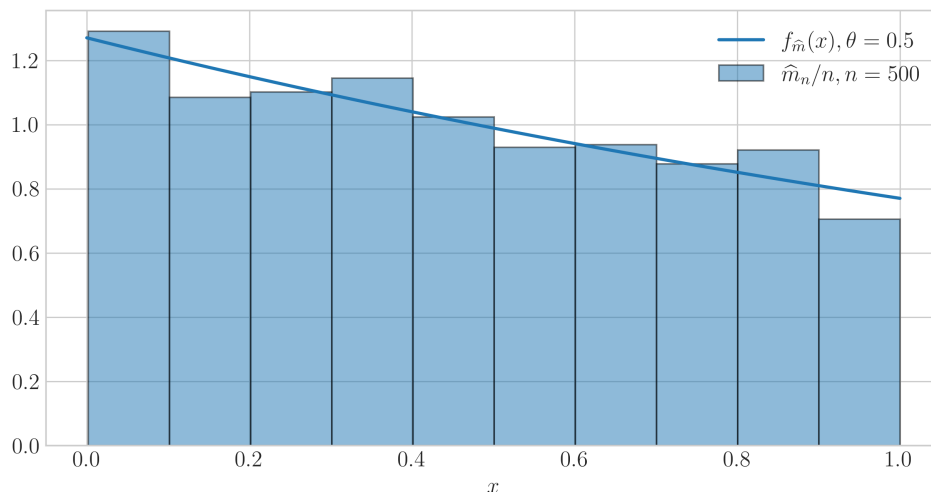


Рисунок 4.5 – Гістограма  $\frac{\hat{m}_n}{n}$  та щільність  $\hat{m}$  для  $\theta = 0.5$ .

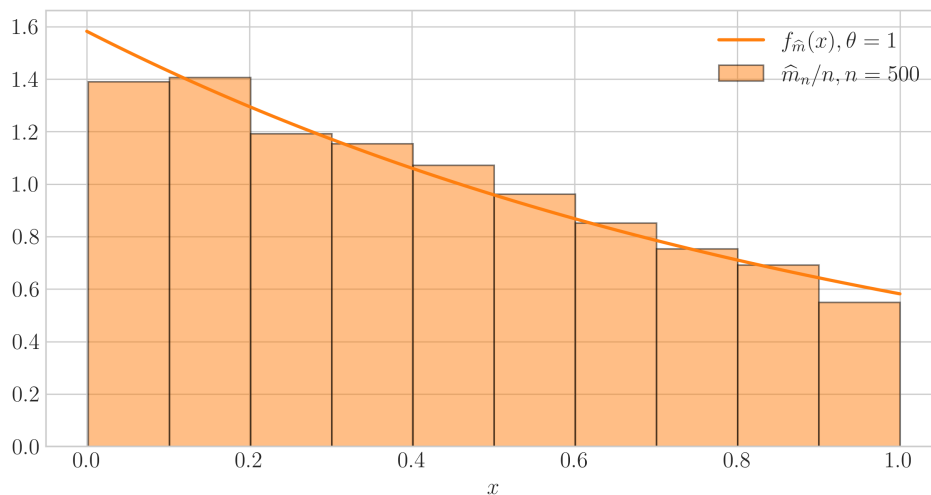


Рисунок 4.6 – Гістограма  $\frac{\hat{m}_n}{n}$  та щільність  $\hat{m}$  для  $\theta = 1$ .

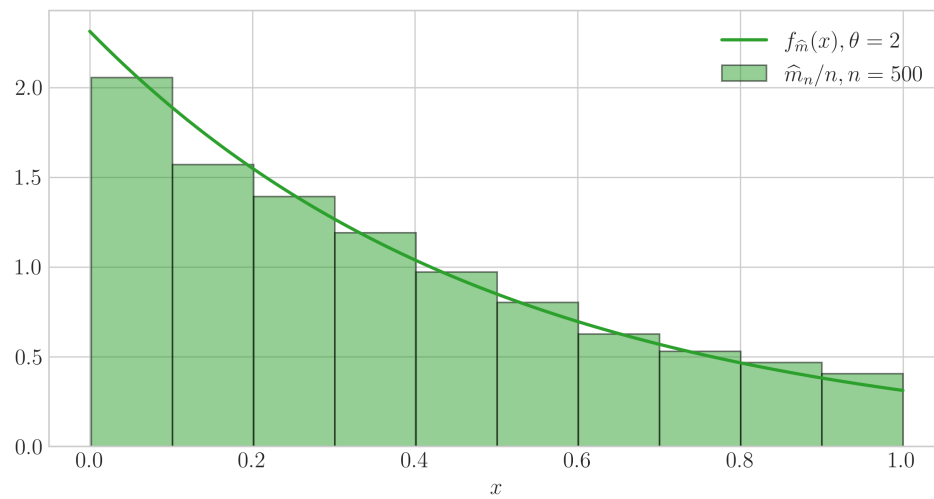


Рисунок 4.7 – Гістограма  $\frac{\hat{m}_n}{n}$  та щільність  $\hat{m}$  для  $\theta = 2$ .

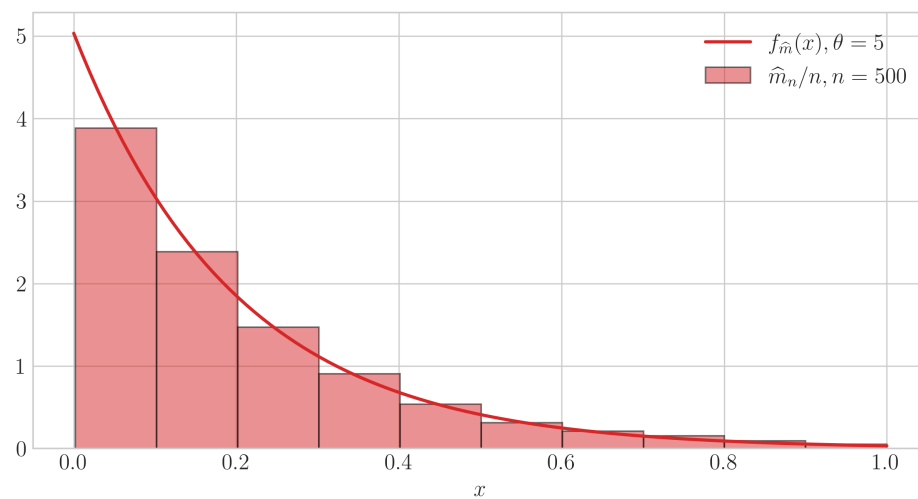


Рисунок 4.8 – Гістограма  $\frac{\hat{m}_n}{n}$  та щільність  $\hat{m}$  для  $\theta = 5$ .

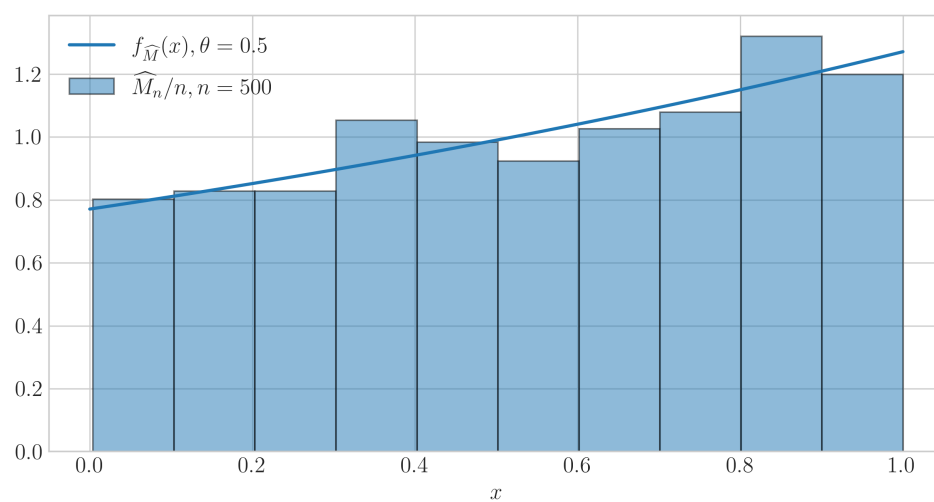


Рисунок 4.9 – Гістограма  $\frac{\hat{M}_n}{n}$  та щільність  $\hat{M}$  для  $\theta = 0.5$ .

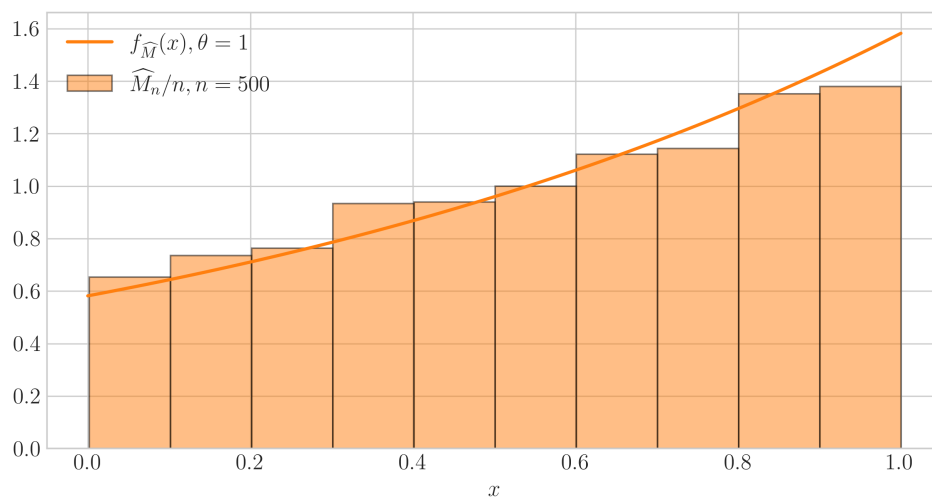


Рисунок 4.10 – Гістограма  $\frac{\widehat{M}_n}{n}$  та щільність  $\widehat{M}$  для  $\theta = 1$ .

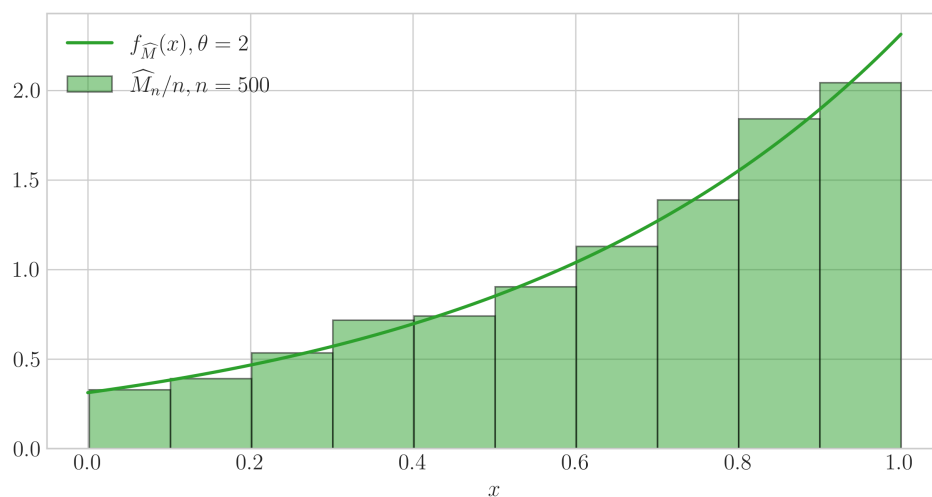


Рисунок 4.11 – Гістограма  $\frac{\widehat{M}_n}{n}$  та щільність  $\widehat{M}$  для  $\theta = 2$ .

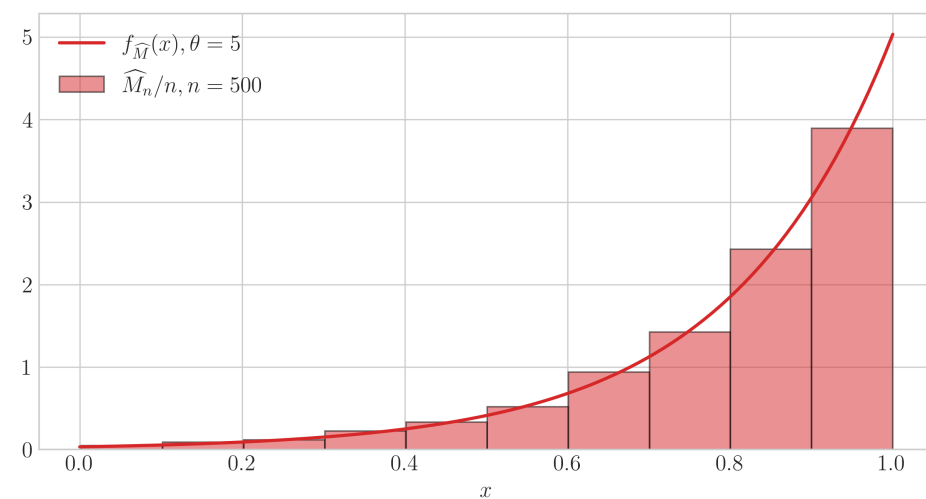


Рисунок 4.12 – Гістограма  $\frac{\widehat{M}_n}{n}$  та щільність  $\widehat{M}$  для  $\theta = 5$ .

### 4.2.3. Розподіл суми нерухомих точок

Для демонстрації збіжності  $\frac{\hat{S}_n}{n} \xrightarrow{d} \hat{S}$  доведеної в теоремі 3.2.2, порівняємо гістограми  $\frac{\hat{S}_n}{n}$  для  $n = 500$  з щільностями розподілу  $\hat{S}$  для різних значень  $\theta$ .

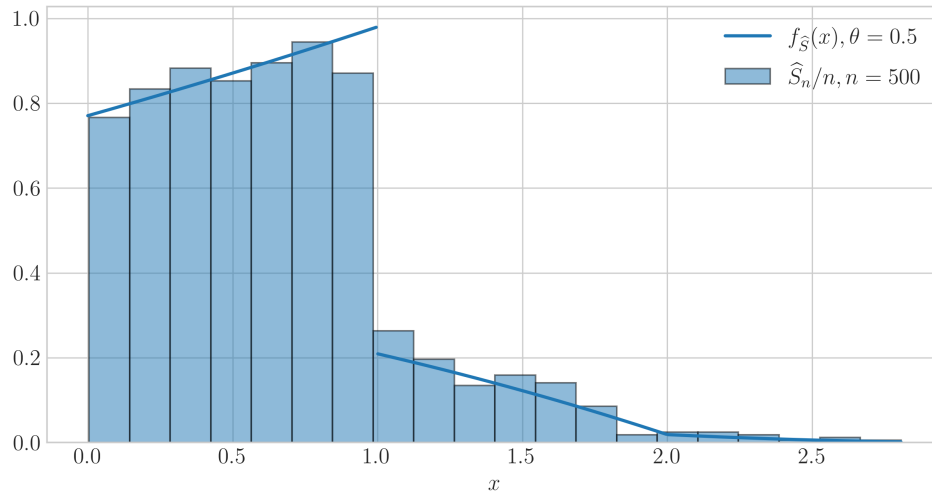


Рисунок 4.13 – Гістограма  $\frac{\hat{S}_n}{n}$  та щільність  $\hat{S}$  для  $\theta = 0.5$ .

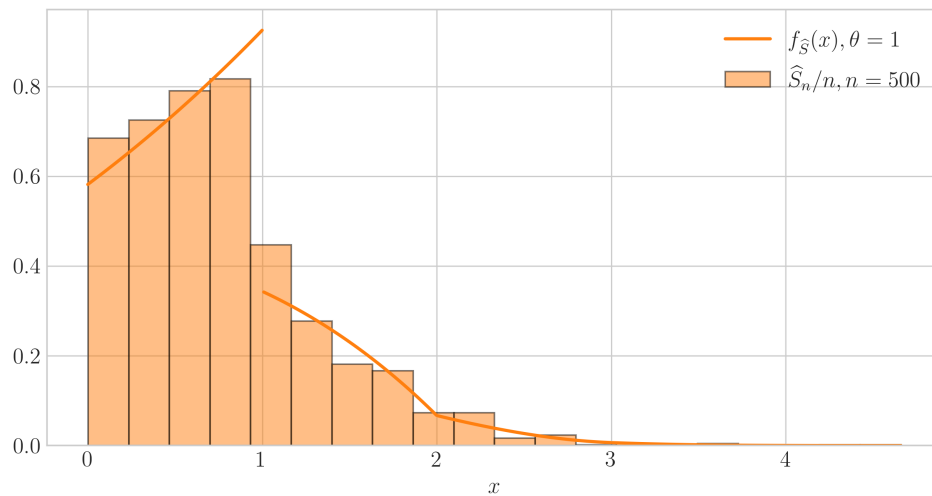


Рисунок 4.14 – Гістограма  $\frac{\hat{S}_n}{n}$  та щільність  $\hat{S}$  для  $\theta = 1$ .

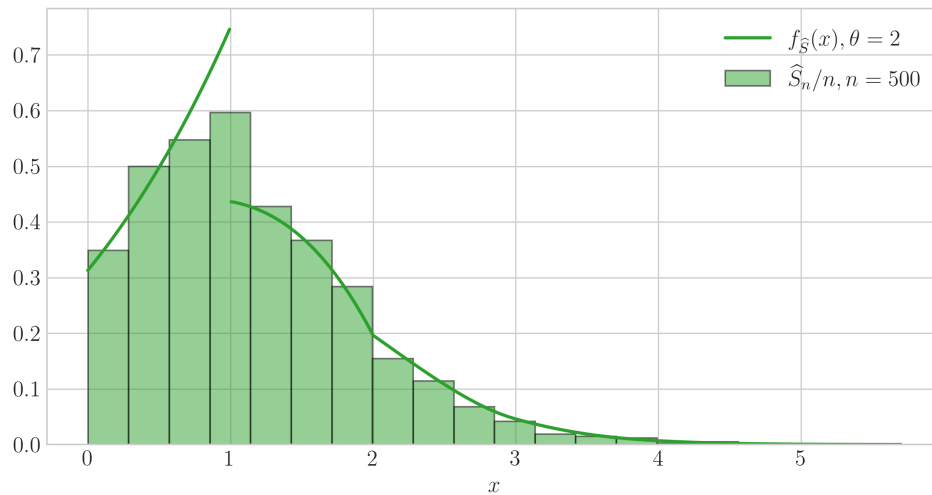


Рисунок 4.15 – Гістограма  $\frac{\hat{S}_n}{n}$  та щільність  $\hat{S}$  для  $\theta = 2$ .

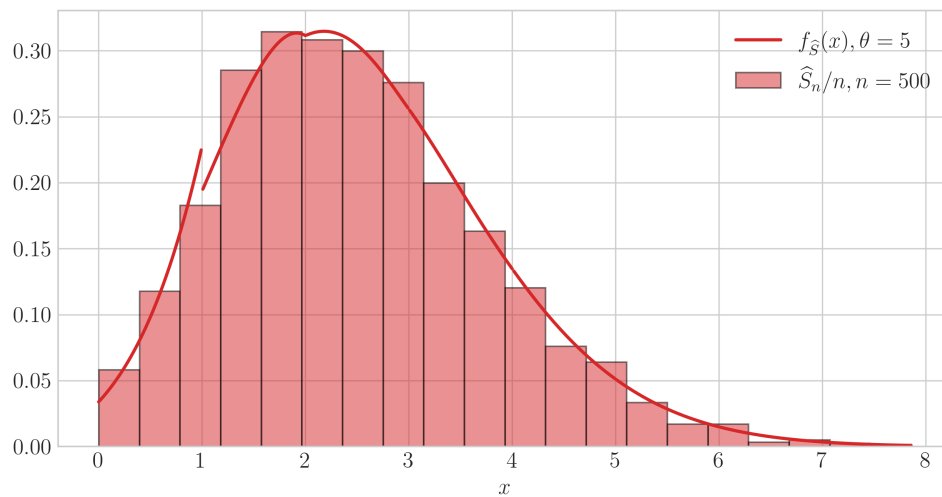


Рисунок 4.16 – Гістограма  $\frac{\hat{S}_n}{n}$  та щільність  $\hat{S}$  для  $\theta = 5$ .

#### 4.2.4. Розподіл найменшого і найбільшого спейсингів

Для демонстрації збіжностей  $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$  і  $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$ , доведених в теоремі 3.2.4, порівняємо емпіричні функції розподілу  $\frac{\delta_n}{n}$  та  $\frac{\Delta_n}{n}$  при  $n = 50, 100, 500$  з емпіричними функціями  $\delta$  та  $\Delta$  для різних значень  $\theta$ .

Емпіричну функцію розподілу випадкової величини  $X$  за вибіркою  $X_1, \dots, X_N$  тут визначено як  $F_X^*(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m \mathbb{1} \{X_i \leq x\}$ .

Оскільки для  $x \geq 1$   $\mathbb{P} \left( \frac{\delta_n}{n} \leq x \right) = \mathbb{P} \left( \frac{\Delta_n}{n} \leq x \right) = \mathbb{P}(\delta \leq x) = \mathbb{P}(\Delta \leq x) = 1$ , то на всіх рисунках емпіричні функції розподілу зображено лише для  $x \in [0, 1)$ .

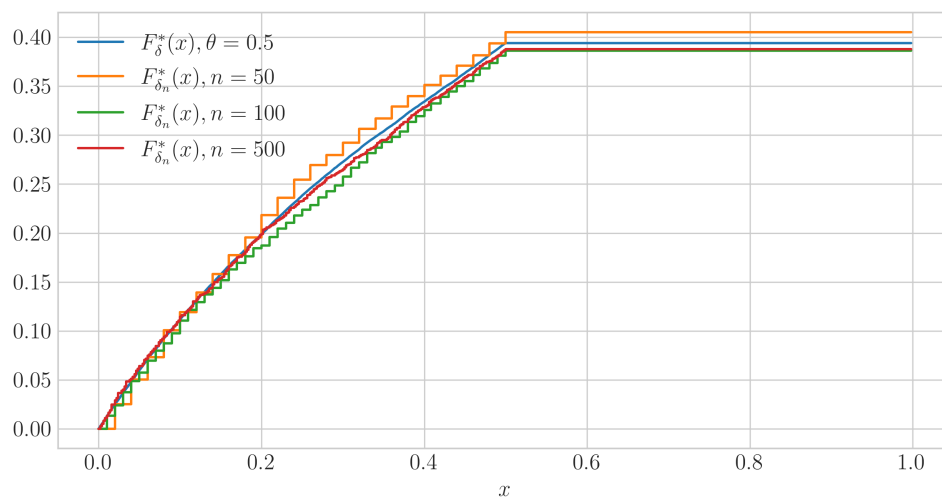


Рисунок 4.17 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\delta_n}{n}$  та  $\delta$  для  $\theta = 0.5$ .

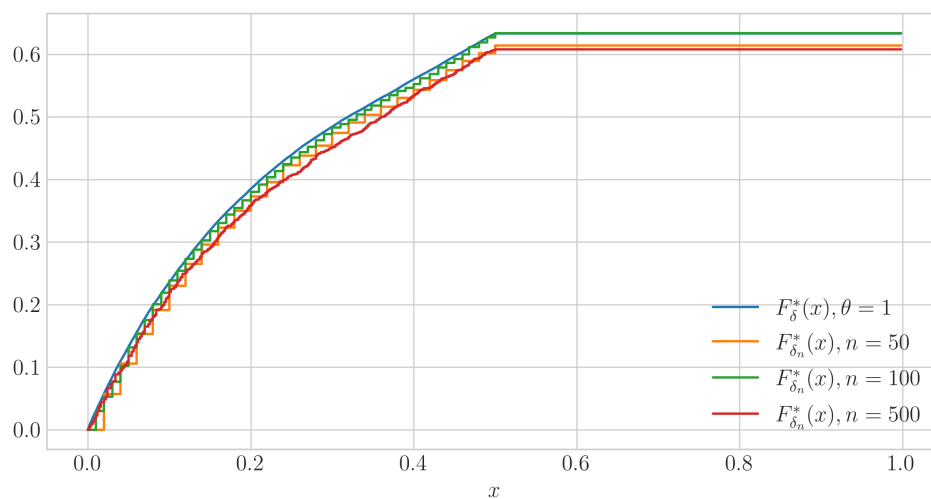


Рисунок 4.18 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\delta_n}{n}$  та  $\delta$  для  $\theta = 1$ .

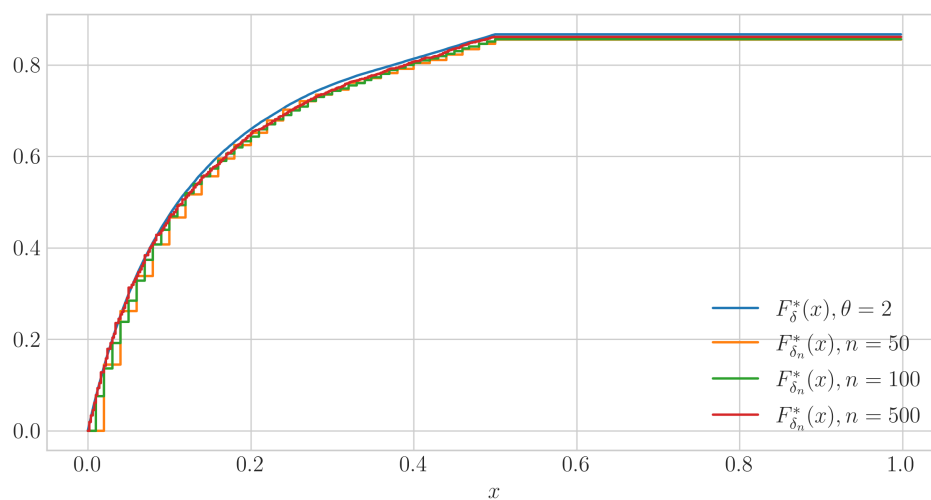


Рисунок 4.19 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\delta_n}{n}$  та  $\delta$  для  $\theta = 2$ .



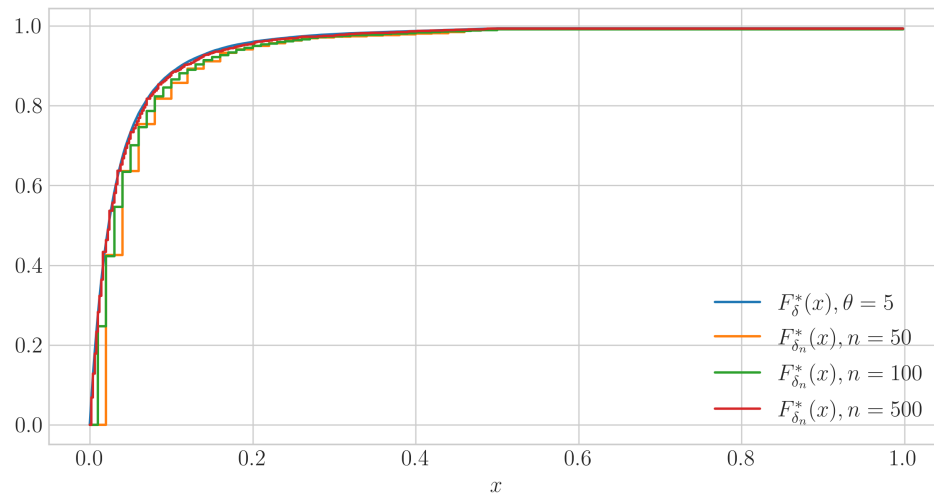


Рисунок 4.20 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\delta_n}{n}$  та  $\delta$  для  $\theta = 5$ .

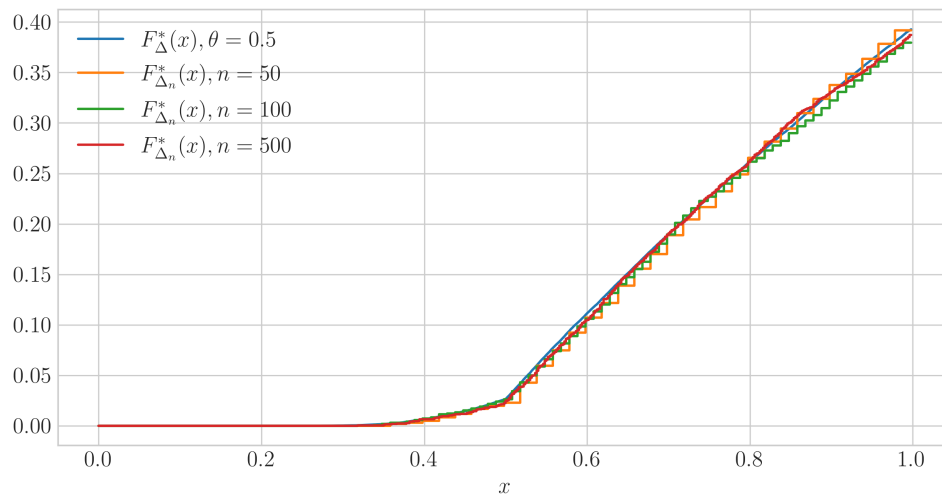


Рисунок 4.21 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\Delta_n}{n}$  та  $\Delta$  для  $\theta = 0.5$ .

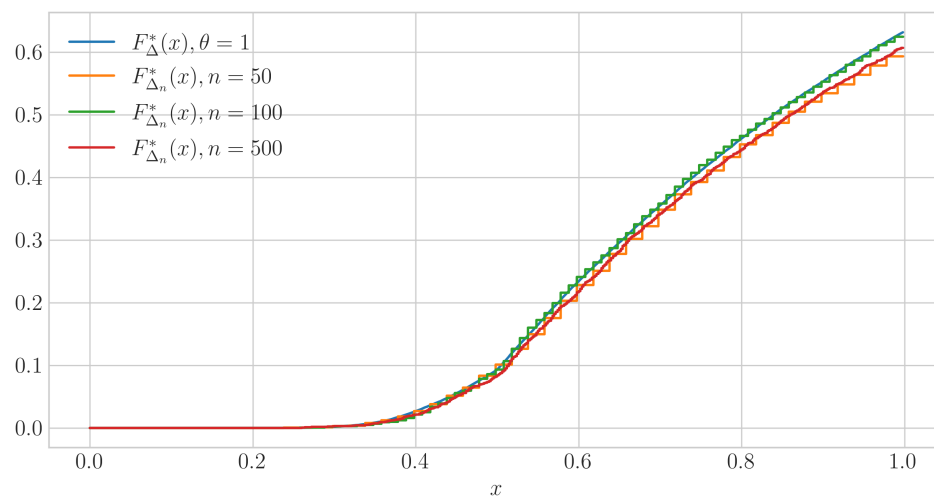


Рисунок 4.22 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\Delta_n}{n}$  та  $\Delta$  для  $\theta = 1$ .

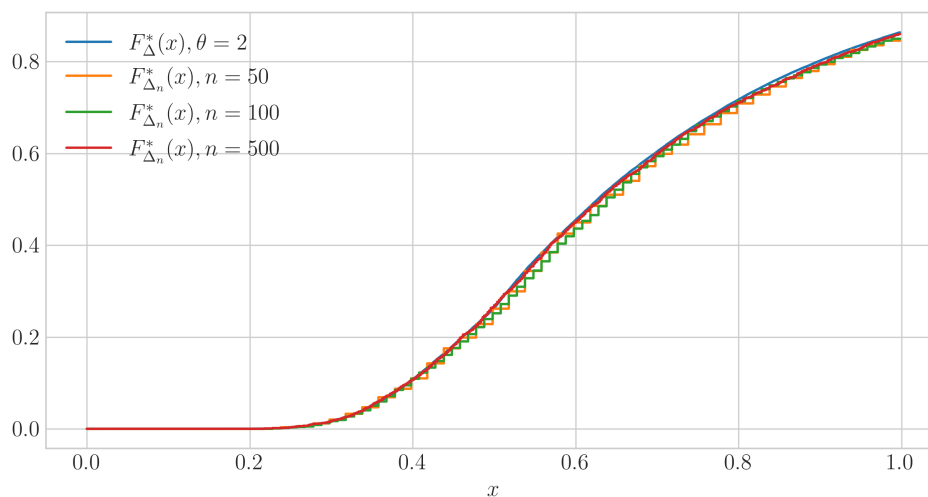


Рисунок 4.23 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\Delta_n}{n}$  та  $\Delta$  для  $\theta = 2$ .

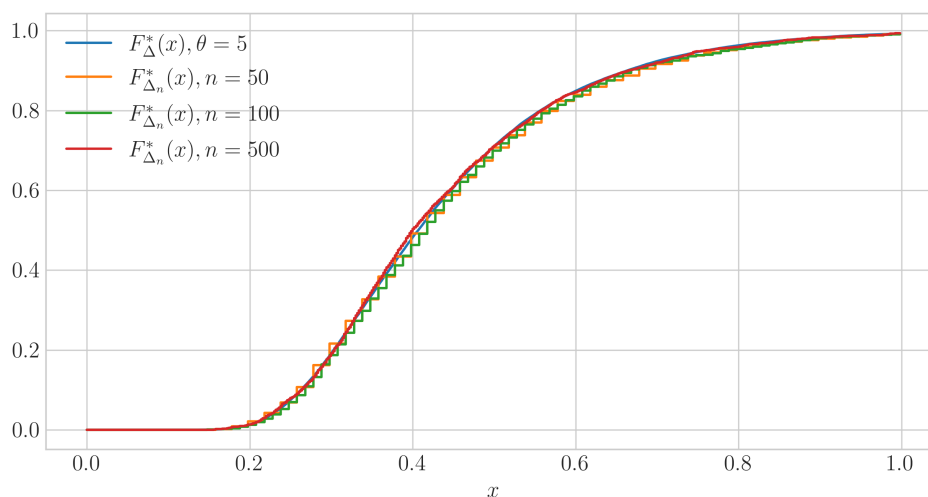


Рисунок 4.24 – Емпіричні функції розподілу  $\frac{\Delta_n}{n}$  та  $\Delta$  для  $\theta = 5$ .

## Висновки

В цьому розділі було розглянуто алгоритми для отримання перестановок Юенса, за допомогою яких було перевірено твердження доведених граничних теорем. Варто зазначити, що обидва алгоритми є досить повільними для отримання вибірок великого розміру для великих значень  $n$ , оскільки кожна перестановка генерується послідовно. Натомість, наближені значення потрібної статистики можна отримувати дуже швидко, якщо для неї доведено граничну теорему і отримано явний вигляд граничного розподілу.

## ВИСНОВКИ

В даній дипломній роботі було розглянуто випадкові перестановки Юенса  $\sigma \sim \text{ESF}(n, \theta)$ , задані розподілом (2.2). Через нерухомі точки таких перестановок означено послідовність точкових процесів  $P_n$  на  $[0, 1]$  формулою (3.1) та доведено збіжність при  $n \rightarrow \infty$  цієї послідовності до однорідного точкового процесу Пуассона з інтенсивністю  $\theta$  в двох, в цьому випадку еквівалентних, сенсах — грубу збіжність за розподілом та збіжність в топології Скорохода.

За допомогою теореми про неперервне відображення 1.3.6 було доведено граничні теореми для деяких статистик, пов'язаних з нерухомими точками перестановок Юенса, а саме — найменшої та найбільшої точок, суми точок і найменшої та найбільшої відстаней між сусідніми нерухомими точками (спейсингів). Для відповідних граничних випадкових величин було отримано розподіли в явному вигляді. Усі ці величини є змішаними, оскільки з ненульовою ймовірністю нерухомих точок може не бути взагалі, тому розглянуто також їх абсолютно неперервні версії, розподіли яких отримані накладанням умови існування таких точок.

Результат теореми 3.1.2 є найважливішим у роботі, оскільки в поєднанні з теоремою 1.3.6 дозволяє отримувати граничні теореми для всіх статистик, які можна представити як неперервні функції від атомів точкової міри. Однак він не є вичерпним з точки зору дослідження властивостей перестановок Юенса, оскільки стосується лише нерухомих точок. Напрямок для продовження проведеної роботи може бути дослідження граничної поведінки циклів у таких перестановках.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спекторський І. Я. Дискретна математика. — Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004. — 120 с.
2. Kallenberg O. Random Measures, Theory and Applications. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Springer International Publishing Switzerland, 2017. — 694 p. — ISBN: 978-3-319-41598-7.
3. Berezansky Y. M., Sheftel Z. G., Us G. F. Functional Analysis. — Birkhäuser Verlag, 1996. — Vol. 1. — 423 p. — ISBN: 978-3-0348-9185-1.
4. Богданський Ю. В. Інтеграл в курсі аналізу. — Київ : Видавництво «Політехніка», 2013. — 180 с.
5. Resnick S.I. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. — Springer Science+Business Media New York, 2008. — 320 p. — ISBN: 978-0-387-75952-4.
6. Billingsley P. Convergence of probability measures. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. — Second ed. — New York : John Wiley & Sons Inc., 1999. — 277 p. — ISBN: 0-471-19745-9. — A Wiley-Interscience Publication.
7. Last G., Penrose M. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. — Cambridge University Press, 2017. — 293 p. — ISBN: 978-1-107-08801-6.
8. Resnick S.I. Crash Course II: Weak Convergence; Implications for Heavy-Tail Analysis // Heavy-Tail Phenomena. — Springer Science+Business Media New York, 2007. — P. 39–69.
9. Kallenberg O. Foundations of Modern Probability. Probability Theory and Stochastic Modelling. — Third ed. — Springer Nature Switzerland, 2021. — 946 p. — ISBN: 978-3-030-61871-1.
10. W.J. Ewens. The sampling theory of selectively neutral alleles // Theoretical Population Biology. — 1972. — Vol. 3, no. 1. — P. 87–112.
11. S. Tavaré. The magical Ewens sampling formula // Bulletin of the London Mathematical Society. — 2021. — Vol. 53, no. 6. — P. 1563–1582.
12. Abramowitz A., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — USA : Dover Publications, Inc., 1972. — 1046 p. — ISBN: 0-486-61272-4.
13. R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré. Logarithmic combinatorial structures: A prob-

- abilistic approach. EMS Monogr. Math. — Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2003. — ISBN: 3-03719-000-0.
14. R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré. Poisson process approximations for the Ewens sampling formula // The Annals of Applied Probability. — 1992. — Vol. 2. — P. 519–535.
  15. J. Norman L., K. Samuel, N. Balakrishnan. Continuous Univariate Distributions. — New York : John Wiley & Sons, 1995. — Vol. 2 of Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. — 717 p. — ISBN: 0-471-58494-0.
  16. Holst L. On the Lengths of the Pieces of a Stick Broken at Random // Journal of Applied Probability. — 1980. — Vol. 17, no. 3. — P. 623–634.
  17. Pinelis I. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution // arXiv. — 2019. — Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1909.06406.pdf>.
  18. C. Arnold B., N. Balakrishnan, N. Nagaraja H. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). — USA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008. — 305 p. — ISBN: 978-0-89871-906-2.

## ДОДАТОК А. ПРОГРАМНИЙ КОД ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ

```
# In[1]:
import numpy as np
import pickle
from scipy.stats import poisson, expon
from scipy.special import iv, factorial
from tqdm import tqdm
from joblib import Parallel, delayed
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
matplotlib.rcParams['mathtext.fontset'] = 'cm'
matplotlib.rcParams['text.usetex'] = True
matplotlib.rcParams['text.latex.preamble'] = r'\usepackage{amsfonts}'
matplotlib.rcParams['font.size'] = '14'
plt.style.use('seaborn-whitegrid')

# In[2]:
IMAGE_DIR = '../plots/'

# In[3]:
def f_m_hat(x, t=1):
    return t * np.exp(-t*x) / (1 - np.exp(-t)) * (0 <= x) * (x <= 1)

def f_M_hat(x, t=1):
    return t * np.exp(t*x) / (np.exp(t) - 1) * (0 <= x) * (x <= 1)

def F_S(x, t=1):
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        dom = [x]
    dom = np.array(x).copy()
    dom[dom < 0] = 0

    n = int(np.floor(dom.max()))
    min_x = int(np.floor(dom.min()))
    ar = np.arange(min_x, n+1)
    k = np.tile(np.arange(n+1), (n+1, 1))
    k[:min_x] = -1
    k = k[np.tril_indices(n+1)]
    k = np.expand_dims(k[k >= 0], axis=1)

    mask = (dom >= ar.reshape(len(ar), 1)) * (dom < (ar.reshape(len(ar), 1) + 1))
    dom = np.repeat(dom * mask, ar + 1, axis=0)
    dom = dom - k
    dom = np.sqrt(t * dom * (dom >= 0))

    res = (dom != 0) * np.power(-dom, k) * iv(k, 2 * dom) / factorial(k)
```

```

res = np.exp(-t) * res.sum(axis=0)
res[x == 0] = np.exp(-t)
if not hasattr(x, '__iter__'):
    return res[0]
else:
    return res

def F_S_hat(x, t=1):
    res = (F_S(x, t) - np.exp(-t)) / (1 - np.exp(-t))
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        return res * (x >= 0)
    else:
        return res * (np.array(x) >= 0)

def f_S_hat(x, t=1):
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        dom = [x]
    dom = np.array(x).copy()
    dom[dom < 0] = 0

    n = int(np.floor(dom.max()))
    min_x = int(np.floor(dom.min()))
    ar = np.arange(min_x, n+1)
    k = np.tile(np.arange(n+1), (n+1, 1))
    k[:min_x] = -1
    k = k[np.tril_indices(n+1)]
    k = np.expand_dims(k[k >= 0], axis=1)

    mask = (dom >= ar.reshape(len(ar), 1)) * (dom < (ar.reshape(len(ar), 1) + 1))
    dom = np.repeat(dom * mask, ar + 1, axis=0)
    dom = dom - k
    dom = np.sqrt(t * dom * (dom >= 0))

    res = (dom != 0) * np.nan_to_num(np.power(-dom, k-2), posinf=0, neginf=0) * (k
    * iv(k, 2 * dom) + dom * iv(k+1, 2*dom)) / factorial(k)
    res = np.exp(-t) * t * res.sum(axis=0) / (1 - np.exp(-t))
    res[x == 0] = np.exp(-t) * t / (1 - np.exp(-t))
    if not hasattr(x, '__iter__'):
        return res[0]
    else:
        return res

# In[4]:
# min pdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

domain = np.linspace(0, 1, 100)

```

```

for theta in [0.5, 1, 2, 5]:
    plt.plot(domain, f_m_hat(domain, theta), label=f'$\\theta = {theta}$',
             linewidth=2)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_min_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# max pdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

for theta in [0.5, 1, 2, 5]:
    plt.plot(domain, f_M_hat(domain, theta), label=f'$\\theta = {theta}$',
             linewidth=2)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_max_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# sum cdf plot
plt.figure(figsize=(8, 5), dpi=120)

domain = np.linspace(0, 6, 500)
domain_floor = np.floor(domain)
n_val = np.sort(np.unique(domain_floor))

for theta, color in zip([0.5, 1, 2, 5], ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', '
    tab:red']):
    f_val = f_S_hat(domain, theta)

    for n in n_val:
        label=f'$\\theta = {theta}$' if n == n_val.max() else ''
        plt.plot(domain[domain_floor == n], f_val[domain_floor == n], label=label,
                 linewidth=2, color=color)

plt.legend()
plt.savefig(IMAGE_DIR + 'pdf_sum_hat.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.show()

# In[5]:
class ChineseRestaurantProcess:
    def __init__(self, theta, n):
        assert theta > 0, 'theta must be > 0'
        self.theta = theta
        self.n = n

```



```

def _sample_A(self, i, rng):
    p = [1 / (self.theta + i - 1) for j in range(i)]
    p[-1] = p[-1] * self.theta
    A = rng.choice(range(1, i+1), p=p)
    return A

def _sample_cycles(self, random_state):
    rng = np.random.default_rng(random_state)
    cycles = [[1]]
    for i in range(2, self.n+1):
        A = self._sample_A(i, rng)
        if A == i:
            cycles.append([i])
        else:
            for cycle_ind, cycle in enumerate(cycles):
                if A in cycle:
                    ind = cycle.index(A)
                    break
            cycles[cycle_ind].insert(ind+1, i)

    return cycles

def sample_permutation(self, random_state=None):
    cycles = self._sample_cycles(random_state=random_state)

    perm = [0] * self.n
    for cycle in cycles:
        cycle.append(cycle[0])
        for ind in range(len(cycle)-1):
            perm[cycle[ind]-1] = cycle[ind+1]

    return perm

def sample_fixed_points(self, random_state=None):
    cycles = self._sample_cycles(random_state=random_state)

    perm = [0] * self.n
    for cycle in cycles:
        if len(cycle) == 1:
            perm[cycle[0] - 1] = cycle[0]

    return perm

# In[6]:
def FixedPointsSample(n, size=1, theta=1, random_state=None, verbose=True):
    rng = np.random.default_rng(random_state)
    sampler = ChineseRestaurantProcess(theta, n)

```

```

if verbose:
    fixed_points = Parallel(n_jobs=-1)(delayed(sampler.sample_fixed_points)(
random_state=rng.integers(size**2)) for _ in tqdm(range(size)))
else:
    fixed_points = Parallel(n_jobs=-1)(delayed(sampler.sample_fixed_points)(
random_state=rng.integers(size**2)) for _ in range(size))

return fixed_points

def FixedPointsCount(fixed_points_sample, n, gamma=1):
    fixed_points_mask = fixed_points_sample <= np.ceil(gamma * n)
    fixed_points = fixed_points_sample * fixed_points_mask
    fixed_points_count = (fixed_points > 0).sum(axis=1)
    unique, counts = np.unique(fixed_points_count, axis=0, return_counts=True)
    return unique, counts / counts.sum()

def MinFixedPoint(fixed_points_sample, n):
    min_fixed_point = np.array(fixed_points_sample).copy()
    min_fixed_point[min_fixed_point == 0] = n + 1
    min_fixed_point = min_fixed_point.min(axis=1)
    return min_fixed_point[min_fixed_point <= n] / n

def MaxFixedPoint(fixed_points_sample, n):
    max_fixed_point = np.array(fixed_points_sample).max(axis=1)
    return max_fixed_point[max_fixed_point > 0] / n

def FixedPointsSum(fixed_points_sample, n):
    fixed_points_sum = np.array(fixed_points_sample).sum(axis=1)
    return fixed_points_sum[fixed_points_sum > 0] / n

def MinSpacing(fixed_points_sample, n):
    fixed_points = np.array(fixed_points_sample)
    spacings = np.diff(np.maximum.accumulate(fixed_points, axis=1), axis=1)
    fixed_points_min = fixed_points.copy()
    fixed_points_min[fixed_points_min == 0] = n + 1
    spacings = np.c_[fixed_points_min.min(axis=1), spacings, n-fixed_points.max(
axis=1)+1]
    spacings[spacings == 0] = n + 1
    min_spacings = spacings.min(axis=1)
    min_spacings[min_spacings == n + 1] = n
    return min_spacings / n

def MaxSpacing(fixed_points_sample, n):
    fixed_points = np.array(fixed_points_sample)
    spacings = np.diff(np.maximum.accumulate(fixed_points, axis=1), axis=1)
    fixed_points_min = fixed_points.copy()
    fixed_points_min[fixed_points_min == 0] = n + 1
    spacings = np.c_[fixed_points_min.min(axis=1), spacings, n-fixed_points.max(

```

```

axis=1)+1]
max_spacings = spacings.max(axis=1)
max_spacings[max_spacings == n + 1] = n
return max_spacings / n

# In[7]:
theta_range = [0.5, 1, 2, 5]
n_range = [50, 100, 500]
sample_size = 3000

# In[8]:
fixed_points_samples = {
    theta: {
        n: FixedPointsSample(n, size=sample_size, theta=theta, verbose=True) for n
        in n_range
    } for theta in theta_range
}

with open('fixed_points_samples.pkl', 'wb') as fout:
    pickle.dump(fixed_points_samples, fout)

# In[9]:
with open('fixed_points_samples.pkl', 'rb') as fin:
    fixed_points_samples = pickle.load(fin)

# In[10]:
markers = ['s', 'D', '^', 'X', '*']

for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    plt.plot(
        range(16),
        [poisson.pmf(k, mu=theta) for k in range(16)],
        marker='.', markersize=10,
        label=fr'$\mathbb{P}\{X = k\}, \theta = \{theta\}$'
    )

    for ind, n in enumerate(n_range):
        fixed_points_sample = fixed_points_samples[theta][n]
        unique, freq = FixedPointsCount(fixed_points_sample, n=n)
        freq = np.append(freq, np.zeros(16-unique.max()))
        unique = np.append(unique, np.arange(unique.max(), 16))
        plt.plot(

```

```

        unique, freq, markersize=5,
        marker=markers[ind],
        label=fr'$\mathbb{P}(X_n = k), n = {n}$'
    )

plt.plot(
    range(16),
    [poisson.pmf(k, mu=theta) for k in range(16)],
    marker='.', markersize=10, color='tab:blue'
)

plt.xlabel('$k$')

plt.legend()
plt.grid(visible=True)
plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_prob_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
plt.show()

# In[11]:
colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 100)
    plt.plot(
        domain,
        f_m_hat(domain, theta),
        label=fr'$f_{\widehat{m}}(x), \theta = {theta}$',
        linewidth=2, color=color
    )

    n = max(n_range)
    plt.hist(
        MinFixedPoint(fixed_points_samples[theta][n], n=n), bins=10,
        density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
        label=fr'$\widehat{m}_n / n, n = {n}$'
    )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_min_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')

```

```

plt.show()

# In[12]:
colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 100)
    plt.plot(
        domain,
        f_M_hat(domain, theta),
        label=fr'$f_{\widehat{\{M\}}}(x)$, \theta = {theta}$',
        linewidth=2, color=color
    )

    n = max(n_range)
    plt.hist(
        MaxFixedPoint(fixed_points_samples[theta][n], n=n), bins=10,
        density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
        label=fr'$\widehat{\{M\}}_n / n$, n = {n}$'
    )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_max_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
    plt.show()

# In[13]:

colors = ['tab:blue', 'tab:orange', 'tab:green', 'tab:red']

for theta, color in zip(theta_range, colors):
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)
    n = max(n_range)

    fp_sum = FixedPointsSum(fixed_points_samples[theta][n], n=n)
    domain = np.linspace(0, fp_sum.max(), 500)
    domain_floor = np.floor(domain)
    n_val = np.sort(np.unique(domain_floor))
    f_val = f_S_hat(domain, theta)

    for _n in n_val:
        label=fr'$f_{\widehat{\{S\}}}(x)$, \theta = {theta}$' if _n == n_val.max()

```

```

else ''
    plt.plot(domain[domain_floor == _n], f_val[domain_floor == _n], label=
label, linewidth=2, color=color)

plt.hist(
    fp_sum, bins=20,
    density=True, facecolor=color, edgecolor='black', alpha=0.5,
    label=f'$\widehat{{S}}_n / n, n = {n}$'
)

plt.xlabel('$x$')

plt.legend()
plt.grid(visible=True)
plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_sum_theta_{theta}.png', dpi=300, bbox_inches='
tight')
plt.show()
# In[14]:
def sample_delta(theta, size):
    nu = poisson(mu=theta).rvs(size=size)
    res = []
    for n in nu:
        X = expon.rvs(size=n+1)
        res.append(
            X[0] / ((n + 1) * X.sum())
        )
    return np.array(res)

def sample_Delta(theta, size):
    nu = poisson(mu=theta).rvs(size=size)
    res = []
    for n in nu:
        X = expon.rvs(size=n+1)
        res.append(
            (X / np.arange(1, n+2)).sum() / X.sum()
        )
    return np.array(res)

# In[15]:
for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 500, endpoint=False)

    delta_val = sample_delta(theta, 20*sample_size)

    plt.plot(

```

```

    domain, [(delta_val <= x).mean() for x in domain],
    label=fr'$F^*_{{\delta}}(x), \theta = {\theta}$'
)

for n in n_range:
    delta_n_val = np.sort(MinSpacing(fixed_points_samples[theta][n], n=n))
    f_val = np.array([(delta_n_val < x).mean() for x in domain])
    plt.step(
        domain, f_val,
        label=fr'$F^*_{{\delta}_n}(x), n = {n}$'
    )

plt.xlabel('$x$')

plt.legend()
plt.grid(visible=True)
plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_spacing_min_theta_{theta}.png', dpi=300,
bbox_inches='tight')
plt.show()

# In[16]:
for theta in theta_range:
    plt.figure(figsize=(10, 5), dpi=120)

    domain = np.linspace(0, 1, 500, endpoint=False)

    Delta_val = sample_Delta(theta, 20*sample_size)

    plt.plot(
        domain, [(Delta_val <= x).mean() for x in domain],
        label=fr'$F^*_{{\Delta}}(x), \theta = {\theta}$'
    )

    for n in n_range:
        Delta_n_val = MaxSpacing(fixed_points_samples[theta][n], n=n)
        plt.step(
            domain, [(Delta_n_val <= x).mean() for x in domain],
            label=fr'$F^*_{{\Delta}_n}(x), n = {n}$'
        )

    plt.xlabel('$x$')

    plt.legend()
    plt.grid(visible=True)
    plt.savefig(IMAGE_DIR + f'fp_spacing_max_theta_{theta}.png', dpi=300,
bbox_inches='tight')
    plt.show()

```