**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**
**«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**
**імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**
**Інститут прикладного системного аналізу**
**Кафедра математичних методів системного аналізу**

До захисту допущено
завідувач кафедри
__________ О.Л. Тимощук
«____» _____________ 2022 р.

# Дипломна робота

**на здобуття ступеня бакалавра**
**за освітньо-професійною програмою «Системний аналіз і управління»**
**спеціальності 124 «Системний аналіз»**
**на тему: «Граничні теореми для нерухомих точок випадкових перестановок»**

Виконав:
студент IV курсу, групи КА-81
Галганов Олексій Андрійович

Керівник:
доцент, к.ф-м.н. Ільєнко Андрій Борисович

Консультант з економічного розділу:
доцент, к.е.н. Рощина Надія Василівна

Консультант з нормоконтролю:
доцент, к.т.н. Коваленко Анатолій Єпіфанович

Рецензент:
???

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Галганов Олексій Андрійович

Київ – 2022 року

# ЗМІСТ


РОЗДІЛ 1 Попередні відомості . . . 3
- 1.1. Позначення . . . 3
- 1.2. Відомості з алгебри . . . 5
- 1.3. Відомості з теорії міри та функціонального аналізу . . . 5
- 1.4. Відомості про випадкові процеси . . . 8

РОЗДІЛ 2 Перестановки Юенса . . . 12
- 2.1. Граничний розподіл нерухомих точок . . . 12
- 2.2. Статистичні властивості нерухомих точок . . . 17
  - 2.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки . . . 17
  - 2.2.2 Сума нерухомих точок . . . 21
  - 2.2.3 Найменші і найбільші спейсинги . . . 25

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . . . 28

# РОЗДІЛ 1
# ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

## 1.1. Позначення

$\mathbb{1}\{\,\cdot\,\}$ — індикаторна функція, що дорівнює 1 у випадку, коли умова в дужках справджується, і 0 у іншому випадку.

$\operatorname{card} X$ — потужність множини $X$.

$\lceil x \rceil$ — найменше ціле число, яке більше за або дорівнює дійсному числу $x$.

$\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле число, яке менше за або дорівнює дійсному числу $x$.

$\mathbb{N}_0$ — множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathrm{S}_n$ — група перестановок (симетрична група) степеня $n$.

$C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм.

$\mathcal{B}(X)$ — борелева $\sigma$-алгебра на множині $X$.

$M_p(E)$ — множина усіх точкових мір, визначених на просторі $E$.

$\langle a, b \rangle$ — інтервал, позначає одне з $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$ чи $(a, b]$.

$\delta_x$ — міра Дірака, зосереджена в точці $x$.

Leb — міра Лебега.

$\mathcal{L}\{f\}$ — перетворення Лапласа функції $f$.

$\psi_N$ — функціонал Лапласа точкового випадкового процесу $N$.

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ — верхня границя послідовності $a_n$.

$a_n \to a$ — числова послідовність $a_n$ збігається до $a$.

$\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ — послідовність мір $\mu_n$ грубо збігається до міри $\mu$.

$\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ — послідовність точкових випадкових процесів $\xi_n$ грубо збігається за розподілом до точкового випадкового процесу $\xi$.

$X_n \xrightarrow{Sd} X$ — послідовність випадкових процесів $\xi_n$ збігається за розподілом у топології Скорохода до випадкового процесу $X$.

$X_n \xrightarrow{d} X$ — послідовність випадкових величин $X_n$ збігається за розподілом до випадкової величини $X$.

$X \stackrel{d}{=} Y$ — випадкові величини $X$ та $Y$ рівні за розподілом.

$X_{(k)}$ — $k$-та порядкова статистика, тобто $k$-та за номером випадкова величина серед відсортованих у порядку зростання неперервних випадкових величин $X_1, \ldots, X_n$.

$X_{(k)}^{[n]}$ — $k$-та порядкова статистика для $n$ випадкових величин.

$\mathbb{E}X$ — математичне сподівання випадкової величини $X$.

$X \sim P$ — випадкова величина $X$ має розподіл $P$.

$\mathrm{Pois}\,(a)$ — дискретний розподіл Пуассона з параметром $a > 0$, $\mathbb{P}\,(X = n) = \frac{a^n}{n!}e^{-a}$ для $n \in \mathbb{N}_0$.

$\mathrm{U}\,(a, b)$ — абсолютно неперервний рівномірний розподіл на інтервалі $\langle a, b \rangle$ зі щільністю $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}\,\{x \in \langle a, b \rangle\}$.

$\mathrm{Exp}\,(\lambda)$ — абсолютно неперервний експоненційний розподіл з параметром $\lambda > 0$ зі щільністю $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}\,\{x \geq 0\}$.

$\mathrm{ESF}\,(n, \theta)$ — розподіл Юенса на $\mathrm{S}_n$ з параметрами $n \in \mathbb{N}$, $\theta > 0$.

$I_\nu(z)$ — модифікована функція Бесселя першого роду, $\nu \in \mathbb{R}$.

## 1.2. Відомості з алгебри

**Означення 1.2.1** ([1], ст. 114)**.** *Перестановкою* $\pi$ на множині $A = \{1, \ldots, n\}$ називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \to A$.

**Означення 1.2.2** ([1], ст. 118)**.** *Циклом довжини* $k$ називають перестановку $\pi$, що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \ldots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \ldots, n$.

**Означення 1.2.3** ([1], ст. 116)**.** *Групою перестановок (симетричною групою) степеня* $n$ називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ за операцією композиції. Група $\mathrm{S}_n$ містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

## 1.3. Відомості з теорії міри та функціонального аналізу

**Означення 1.3.1** ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору $X$ непорожня сім'я підмножин $\mathcal{R}$ називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): сім'я $\mathcal{R}$ непорожня та замкнена відносно скінченних об'єднань та різниць.

**Означення 1.3.2** ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору $X$ непорожня сім'я підмножин $\mathcal{S}$ називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з $\mathcal{S}$ представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з $\mathcal{S}$, тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

**Означення 1.3.3** ([4], ст. 139)**.** Для будь-якого простору $X$ непорожня сім'я підмножин $\mathcal{A}$ називається *$\sigma$-алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

1. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \big(A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}\big)$;
2. $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$;
3. $(A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара $(X, \mathcal{A})$ називається *вимірним простором*.

**Означення 1.3.4** ([4], ст. 146)**.** Нехай $(X, \mathcal{A}_X)$ та $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — два вимірних простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить $\mathcal{A}_X$.

**Означення 1.3.5** ([4], ст. 147)**.** Нехай $X$ — метричний простір, $\mathcal{O}$ — сім'я всіх відкритих підмножин $X$. Мінімальна $\sigma$-алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить $\mathcal{O}$, називається *борелевою $\sigma$-алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами.*

**Означення 1.3.6** ([2], ст. 24)**.** Сім'я підмножин $\mathcal{S}$ сепарабельного метричного простору $X$ називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Кожну відкриту підмножину $X$ можна зобразити як зліченне об'єднання множин з $\mathcal{S}$;
2. Кожну обмежену підмножину $X$ можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{S}$.

Для простору $\mathbb{R}^n$ прикладом розсікаючої сім'ї множин є сім'я куль з раціональними радіусами та центрами в точках з раціональними координатами.

**Означення 1.3.7** ([3], ст. 8)**.** Нехай $\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра у просторі $X$. Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Невід'ємність: $\forall\ A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
2. $\sigma$-адитивність: для довільних множин $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

**Означення 1.3.8** ([2], ст. 22)**.** Нехай $(X, \mathcal{A})$ — вимірний простір, для якого $\{x\} \in \mathcal{A}$ для всіх $x \in X$. Точка $x \in X$ називається *атомом* міри $\mu$ на $(X, \mathcal{A})$, якщо $\mu\left(\{x\}\right) > 0$.

**Означення 1.3.9** ([2], ст. 22; [5], ст. 123)**.** *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра $\delta_x$ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}\left\{x \in A\right\} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$

**Означення 1.3.10** ([5], ст. 123)**.** *Точкова міра* — це міра $\mu$ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — зліченний набір точок $X$, не обов'язково різних. У випадку, коли $X$ — метричний простір, точкова міра називається *радоновою*, якщо міра компактних множин з $\mathcal{A}$ завжди є скінченною.

**Означення 1.3.11** ([5], ст. 124)**.** Точкова міра $\mu$ називається *простою*, якщо для всіх $x \in E$ $\mu\left(\{x\}\right) \leq 1$.

**Означення 1.3.12** ([5], ст. 140)**.** Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, де $X$ є метричним простором, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри $\mu$ на тому ж вимірному просторі, якщо виконується $\int_X f \mathrm{d}\mu_n \to \int_X f \mathrm{d}\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Надалі вважатимемо, що якщо мова йде про грубу збіжність послідовності мір, то простір, на якому вони задані, є метричним. Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

**Теорема 1.3.1** ([5], ст. 144)**.** *Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ та $\mu$ — міри на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$ і $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Для кожної компактної множини $K \subset X$ з $\mu(\partial K) = 0$ існує номер $N = N(K)$ такий, що при $n \geq N$ існують нумерації атомів $\mu_n$ та $\mu$, $x_i^{(n)}, 1 \leq i \leq p$ та $x_i, 1 \leq i \leq p$ відповідно, такі, що*

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i^{(n)}}(A),\ \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i}(A)$$

*для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $x_i^{(n)} \to x_i$ для всіх $1 \leq i \leq p$.*

**Означення 1.3.13** ([6], ст.121-124)**.** *Простором càdlàg-функцій* на $[0,1]$ називається простір $\mathcal{D}_{[0,1]}$ функцій $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, які неперервні справа і мають границі зліва.

**Означення 1.3.14.** *Метрикою Скорохода* на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ називається метрика, визначена за формулою

$$d(f,g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left( \sup_{x \in [0,1]} |\lambda(x) - x|, \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(\lambda(x))| \right),$$

де $\Lambda$ — множина строго зростаючих неперервних відображень $[0,1]$ в себе.

Послідовність функцій $f_n \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ збігається за метрикою Скорохода до $f \in \mathcal{D}_{[0,1]}$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність функцій $\lambda_n \in \Lambda$ таких, що рівномірно за $x$ $\lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_n(x)) = f(x)$ та $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = x$, тобто виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(\lambda_n(x)) - f(x)| = 0,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\lambda_n(x) - x| = 0.$$

### 1.4. Відомості про випадкові процеси

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, $E$ — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева $\sigma$-алгебра підмножин $E$.

Позначимо через $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на $E$, а через $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу $\sigma$-алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де $\Omega$ — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра підмножин $\Omega$, а $\mathbb{P}$ — міра на цьому просторі, що додатково задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

**Означення 1.4.1.** *Точковий випадковий процес $N$* — вимірне відображення з простору $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес $N$ задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P}[N \in \cdot\,]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

**Теорема 1.4.1** ([5], ст. 124)**.** *$N$ є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного $F \in \mathcal{E}$ відображення $\omega \mapsto N(\omega, F)$ з $(\Omega, \mathcal{A})$ в $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ є вимірним.*

**Теорема 1.4.2** ([5], ст. 126)**.** *Нехай $N$ — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а сім'я передкомпактних множин $\mathcal{F}$ задовольняє наступні умови:*

1. *$(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$;*
2. *$\mathcal{E}$ є мінімальною $\sigma$-алгеброю, що містить $\mathcal{F}$;*
3. *Існує послідовність множин $E_n \in \mathcal{F}$, для якої $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.*

*Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли*

$$P_{I_1, \ldots, I_k}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \le j \le k)$$

*для $I_i \in \mathcal{F}$ та цілих $n_i \ge 0$, $1 \le i \le k$.*

*Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1, \ldots, I_k}, k = 1, 2, \ldots, I_j \in \mathcal{F}\}$ однозначно визначає розподіл $P_N$.*

**Теорема 1.4.3** ([7], ст. 50)**.** *Нехай $N$ та $N'$ — прості точкові процеси на $(E, \mathcal{E})$ і*

$$\mathbb{P}\left(N(F) = 0\right) = \mathbb{P}\left(N'(F) = 0\right), \ F \in \mathcal{E}.$$

*Тоді $N$ та $N'$ мають однакові розподіли.*

**Означення 1.4.2** ([5], ст. 129)**.** Нехай $N$ — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. *Функціоналом Лапласа* для $N$ називається відображення $\psi_N$, що переводить невід'ємні вимірні функції на $(E, \mathcal{E})$ у $[0, +\infty)$ за правилом

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}e^{-N(f)} = \int_\Omega e^{-N(\omega, f)} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} \exp\left\{-\int_E f(x)\mathrm{d}\mu\right\} \mathrm{d}P_N(\mu) \qquad (1.1)$$

Наслідком теореми 1.4.2 є наступне твердження:

**Теорема 1.4.4** ([5], ст. 129)**.** *Функціонал Лапласа $\psi_N$ однозначно визначає точковий процес $N$.*

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

**Означення 1.4.3** ([2], ст. 127)**.** *Мірою інтенсивності* або *середньою мірою* точкового процесу $N$ називається міра $\mu$ на $\mathcal{E}$, визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_\Omega N(\omega, F)\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} m(F)\mathrm{d}P_N.$$

Наведемо приклад точкового процесу.

**Означення 1.4.4** ([7], ст. 11)**.** Нехай $P$ — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$, а $X_1, \ldots, X_m$ — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ визначено $\delta_{X_i}$ — точковий процес, для якого $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_i \in F\right)$, $\mathbb{P}\left(\delta_{X_i}(F) = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_i \notin F\right)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \cdots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальним процесом* з розміром вибірки $m$ та розподілом $P$. Для нього

$$\mathbb{P}\left(X(F) = k\right) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \ k = 0, \ldots, m, \ F \in \mathcal{E}.$$

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

**Означення 1.4.5** ([5], ст. 130)**.** Нехай $\mu$ — радонова міра на $\mathcal{E}$. Точковий процес $N$ називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності $\mu$, якщо $N$ задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід'ємного цілого числа $k$
$$\mathbb{P}\left(N(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty; \end{cases}$$
У випадку $\mu(F) = \infty$ покладаємо $N(F) = \infty$ з ймовірністю 1.
2. Для будь-якого натурального $k$, якщо $F_1, \ldots, F_k$ з $\mathcal{E}$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \le i \le k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Функціонал Лапласа точкового процесу Пуассона визначено формулою
$$\psi_N(f) = \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mathrm{d}\mu\right\} \tag{1.2}$$

Як і для невипадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

**Означення 1.4.6** ([2], ст. 109)**.** Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \ge 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

**Теорема 1.4.5** ([2], ст. 121)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес $\xi$ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин $E$, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

*1.* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ *для* $U \in \mathcal{U}$;
*2.* $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \le \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ *для* $I \in \mathcal{I}$.

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

**Теорема 1.4.6** ([8], ст. 42)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, яка грубо збігається за розподілом до точкового* *процесу $\xi$, а відображення $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$ таке, що*

$$\mathbb{P}\left(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперевною в } \mu\}\right) = 0.$$

*Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \geq 1)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$, тобто $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$.*

Розглянемо також поняття звичайних випадкових процесів.

**Означення 1.4.7** ([9], ст. 83)**.** Нехай $(E, \mathcal{E})$ — вимірний простір, $T \subset \mathbb{R}$ — множина індексів. Відображення $X : \Omega \to U \subset S^T$ називається *випадковим процесом* на $T$ зі значеннями в $E$ та траєкторіями в $U$, якщо відображення $X_t : \Omega \to S$ вимірні для кожного $t \in T$.

**Означення 1.4.8.** Нехай $X$ — випадковий процес на $[0, 1]$ зі значеннями в $\mathbb{R}$. Якщо траєкторії $X(t)$ з ймовірністю 1 належать простору $\mathcal{D}_{[0,1]}$, то $X$ називається *càdlàg-процесом*.

**Означення 1.4.9** ([9], ст. 512)**.** Нехай $(X_n, n \geq 1)$ — послідовність càdlàg-процесів. Якщо $\mathbb{E}\varphi(X_n) \to \mathbb{E}\varphi(X)$, для кожного обмеженого функціонала $\varphi : \mathcal{D}_{[0,1]} \to \mathbb{R}$, неперервного на $\mathcal{D}_{[0,1]}$ відносно метрики Скорохода, то послідовність $(X_n, n \geq 1)$ *збігається за розподілом у топології Скорохода*, що позначається $X_n \xrightarrow{Sd} X$.

Наведемо ще один тип збіжності точкових процесів та його зв'язок з грубою збіжністю за розподілом.

**Означення 1.4.10** ([2], ст. 127)**.** Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, де $E = [0, 1]$. Якщо для $X_n(t) = \xi_n([0, t])$ та $X(t) = \xi([0, t])$ виконується $X_n \xrightarrow{Sd} X$, то то послідовність $(\xi_n, n \geq 1)$ *збігається за розподілом у топології Скорохода*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi$.

**Теорема 1.4.7** ([2], ст. 127)**.** *Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, де $E = [0, 1]$. Тоді $\left(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi\right) \Rightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{vd} \xi\right)$. Якщо ж додатково $\xi$ — простий і $\xi(\{0\}) = 0$, то $\left(\xi_n \xrightarrow{Sd} \xi\right) \Leftrightarrow \left(\xi_n \xrightarrow{vd} \xi\right)$.*

# РОЗДІЛ 2

# ПЕРЕСТАНОВКИ ЮЕНСА

## 2.1. Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок $\mathrm{S}_n$, заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)},\ \pi \in \mathrm{S}_n, \tag{2.1}$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $\mathrm{c}(\pi)$ позначає кількість циклів у $\pi$. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса* і, за потреби, для позначення відповідної випадкової перестановки $\sigma$ на $\mathrm{S}_n$ застосовуватимемо позначення $\sigma \sim \mathrm{ESF}\,(n,\theta)$.

**Зауваження.** *Якщо* $\theta = 1$*, то формула* (2.1) *задає рівномірний розподіл, тобто* $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ *для всіх* $\pi \in \mathrm{S}_n$.

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

**Лема 2.1.1.** *Нехай* $\sigma$ *— випадкова перестановка на множині* $\{1,\dots,n\}$*, що задана розподілом* (2.1)*. (тобто,* $\sigma$ *є перестановкою Юенса з* $\mathrm{S}_n$*). Нехай* $\gamma \in [0,1]$*, а* $X_n = \mathrm{card}\,\{i \in \{1,\dots,\lceil\gamma n\rceil\} : \sigma(i) = i\}$ *— кількість нерухомих точок* $\sigma$ *серед перших* $\lceil\gamma n\rceil$ *натуральних чисел. Тоді* $X_n$ *за розподілом збігається до* $\mathrm{Pois}\,(\gamma\theta)$*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\,(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

*Доведення.* Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}\,(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай $F_i$ позначає множину перестановок, для яких $i$ є нерухомою точкою. Тоді

$$\mathbb{P}\,(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil\gamma n\rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil\gamma n\rceil}\right) =$$
$$= 1 - \sum_i \mathbb{P}\,(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}\,(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil\gamma n\rceil}\mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil\gamma n\rceil}\right).$$

У цьому виразі $\lceil\gamma n\rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}\,(F_i)$, $C^2_{\lceil\gamma n\rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}\,(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки $\pi$, то вона має містити «тотожний» цикл $(1)$, тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2,\dots,n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками $\pi$, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини $\{3, \dots, n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}\left(\{\pi\}\right) =$$

$$= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = [\mathrm{c}(\pi) \geq i] =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{\mathrm{c}(\pi)-i} =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{\mathrm{c}(\tilde{\pi})}.$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.1) на $\mathrm{S}_{n-i}$, але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left(1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil} (-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil} \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\left(X_n = k\right)$ для $k > 0$ можна отримати аналогічно: існує $C^k_{\lceil\gamma n\rceil}$ способів вибрати $k$ натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = C^k_{\lceil\gamma n\rceil} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i C^i_{\lceil\gamma n\rceil-k} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) =$$

$$= \frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)} =$$

$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil\gamma n\rceil - k - i + 1)\dots(\lceil\gamma n\rceil - 2)(\lceil\gamma n\rceil - 1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Нехай $N$ достатньо велике і $\lceil \gamma n \rceil - k > N$, тоді $\mathbb{P}\left(X_n = k\right)$ можна розбити на дві суми — $S_1$ від 0 до $N-1$ та $S_2$ від $N$ до $\lceil \gamma n \rceil - k$.

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left( \frac{\lceil \gamma n \rceil}{\theta + n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k} \leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left( \frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma \in [0,1)$, $\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n - \lceil \gamma n \rceil} \leq C = C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \leq C^k \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} C^i \leq C^k \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} C^i \to 0, \ N \to \infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{(n - k - i + 1) \dots (n-2)(n-1)n}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} \leq$$
$$\leq \frac{(n - k - i + 1) \dots (n-2)(n-1)n}{(n - i - k) \dots (n - 1)} = \frac{n}{n - i - k} \to 1, \ n \to \infty,$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується $S_1$, то для фіксованого $N$

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \lim_{n\to\infty} \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1) \dots (\lceil \gamma n \rceil - 2)(\lceil \gamma n \rceil - 1)\lceil \gamma n \rceil}{(\theta + n - i - k) \dots (\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \ N \to \infty.$$

$\square$

Користуючись позначеннями з леми 2.1.1, визначимо для $n \in \mathbb{N}$ точкові процеси $P_n$ на $(E, \mathcal{E}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ за правилом

$$P_n(F) = \text{card}\left\{ i \in \{1, ..., n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F \right\}, \ F \in \mathcal{E}. \tag{2.3}$$

Тобто, $P_n$ є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса $\sigma$, нормованих $n$, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n\left([0,\gamma]\right) = k\right) = \mathbb{P}\left(N\left([0,\gamma]\right) = k\right),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Тут $N$ є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

**Теорема 2.1.2.** *Послідовність точкових процесів $P_n$ грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона $N$ з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n \to \infty$).*

Теорема 1.4.5 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів, скористаємось позначеннями з неї.

Розглянемо сім'ю множин $\mathcal{X}$, що складається зі скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a, b\rangle \subset [0,1]$. Для точкового процесу Пуассона $N$ з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$, бо $\partial B$ складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{E}}_N = \mathcal{X}$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 2.1.2, можна використати теорему 1.4.5 для $\xi_n = P_n$, $\xi = N$ та $\hat{\mathcal{E}}_N = \mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

*Доведення теореми 2.1.2.* Нехай $\langle\gamma_1, \delta_1\rangle, ..., \langle\gamma_m, \delta_m\rangle$ , де $\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_m < \delta_m$, — набір інтервалів в $[0,1]$, що попарно не перетинаються, $I_j = \langle\gamma_j, \delta_j\rangle$ і $I = \bigcup_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$. Позначимо $Y_n = P_n(I)$, де $P_n(I)$ визначено формулою (2.3). Нехай $M_n = \mathrm{card}\left\{i \in \{1, ..., n\} : \frac{i}{n} \in I\right\}$ і тоді, аналогічно лемі 2.1.1,

$$\mathbb{P}\left(Y_n = k\right) = C_{M_n}^k \sum_{i=0}^{M_n - k} (-1)^i C_{M_n-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta + n - i - k)\dots(\theta + n - 1)}.$$

Оскільки $\mathrm{card}\left\{i \in \{1, ..., n\} : \frac{i}{n} \in I_j\right\} = \lceil\delta_j n\rceil - \lfloor\gamma_j n\rfloor$ ( $\lceil\cdot\rceil$ може змінюватися на $\lfloor\cdot\rfloor$ і навпаки в залежності від $n$ та включення кінцевих точок до інтервалу), а $\lfloor x\rfloor \le x \le \lceil x\rceil$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n} = \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 2.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n = k\right) = \frac{1}{k!}\left(\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)\right)^k \exp\left\{-\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)\right\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \mathrm{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^{m}(\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) = \mathbb{P}\left(N(I) = 0\right), I \in \mathcal{X}.$$

Так як $\mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(P_n(I) = 0\right) + \mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right)\right)$ і $\mathbb{P}\left(P_n(I) = 1\right) \to \mathbb{P}\left(N(I) = 1\right)$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n(I) > 1\right) = \mathbb{P}\left(N(I) > 1\right), I \in \mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.4.5 справджуються, що і доводить $P_n \xrightarrow{vd} N$ при $n \to \infty$. □

Варто також зауважити важливий наслідок теореми 2.1.2.

**Наслідок** (2.1.2)**.** *Оскільки граничний процес Пуассона $N$ простий і $N(\{0\}) = 0$ з ймовірністю 1, то в силу теореми* (1.4.7) *має місце збіжність $P_n \xrightarrow{Sd} N$.*

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 2.1.2, для $\gamma = 1$ виконується $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) \to e^{-\theta}, n \to \infty$. Введемо ще один точковий процес $\widehat{P}_n$, що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left(\widehat{P}_n(F) = k\right) = \mathbb{P}\left(P_n(F) = k \mid P_n([0,1]) > 0\right) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k > 0; \\ \frac{\mathbb{P}\left(P_n(F)=0, P_n(F^C)>0\right)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

В силу теореми 1.4.3 достатньо визначити лише одновимірні розподіли. Повторенням доведення 2.1.2 можна отримати наступний результат:

**Теорема 2.1.3.** *Точковий процес $\widehat{P}_n$ грубо збігається за розподілом до точкового процесу $\widehat{N}$ на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k > 0 \\ \frac{\mathbb{P}\left(N(F)=0, N(F^C)>0\right)}{1-e^{-\theta}}, & k = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

*для всіх $F \in \mathcal{B}([0,1])$ та $k \in \mathbb{N}$.*

За властивістю 2 у означенні 1.4.5 маємо

$$\mathbb{P}\left(N(F)=0, N(F^C)>0\right)=\mathbb{P}\left(N(F)=0\right)\cdot\mathbb{P}\left(N(F^C)>0\right)=$$
$$=\mathbb{P}\left(N(F)=0\right)\cdot\left(1-\mathbb{P}\left(N(F^C)=0\right)\right)=e^{-\Lambda(F)}\cdot\left(1-e^{-\Lambda(F^C)}\right)=$$
$$=e^{-\Lambda(F)}\cdot\left(1-e^{-\theta}e^{\Lambda(F)}\right)=e^{-\Lambda(F)}-e^{-\theta},$$

тому можна записати

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}(F)=k\right)=\begin{cases}\frac{(\Lambda(F))^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k>0\\ \frac{e^{-\Lambda(F)}-e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k=0.\end{cases} \tag{2.6}$$

Зокрема, для $F=[0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(\widehat{N}([0,1])=k\right)=\begin{cases}\frac{\theta^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k>0\\ 0, & k=0.\end{cases} \tag{2.7}$$

## 2.2. Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 2.1.2 та 2.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення 1.4.6. Корисною також є теорема 1.3.1, згідно з якою для послідовності точкових мір $\mu_n$, що грубо збігається до точкової міри $\mu$, для будь-якої компактної множини існує номер, починаючи з якого усі елементи послідовності містять стільки ж атомів з цієї множини, скільки й гранична міра. Це означає, що будь-яка неперервна функція багатьох змінних утворює на просторі точкових мір неперервне відносно грубої топології відображення. У нашому випадку достатньо обмежитись функціями з $[0,1]^p$.

### 2.2.1. Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри $\mu$ можна визначити два відображення $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атоми, за формулами

$$\min(\mu)=\sup\{x\in[0,1]:\mu([0,x])=0\} \tag{2.8}$$
$$\max(\mu)=\inf\{x\in[0,1]:\mu([x,1])=0\}, \tag{2.9}$$

де для порожньої множини покладаємо $\sup\varnothing = 0$ та $\inf\varnothing = 1$. Якщо $\{x_1, \ldots, x_k\}$ — множина атомів $\mu$, то $\min(\mu) = \min\{x_1, \ldots, x_k\}$ і $\max(\mu) = \max\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min\{x_1, \ldots, x_k\}$ та $\max\{x_1, \ldots, x_k\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з теореми 1.3.1 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 2.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}(N(F) = k \mid N([0,1]) = m)$ є відомим (твердження 3.8, ст. 23, [7]) — це одновимірний розподіл біноміального процесу з розміром вибірки $m$ та розподілом $\mathrm{U}(0,1)$. Це означає, що за умови $N([0,1]) = m$ сумісний розподіл положень всіх $m$ атомів збігається з розподілом випадкового вектора з $m$ незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{U}(0,1)$. Також, корисним є такий факт: нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є незалежними випадковими величинами з розподілом $\mathrm{U}(0,1)$; тоді розподіли $U_{(1)}^{[m]} = \min\{U_1, \ldots, U_m\}$ та $U_{(m)}^{[m]} = \max\{U_1, \ldots, U_m\}$ задаються формулами

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - (1-x)^m, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

$$\mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^m, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases}$$

оскільки

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)}^{[m]} \le x\right) = 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(U_1 > x, ..., U_m > x) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(U_1 > x) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(U_m > x) = 1 - (1 - \mathbb{P}(U_1 \le x)) \cdot ... \cdot (1 - \mathbb{P}(U_m \le x)),$$
$$\mathbb{P}\left(U_{(m)}^{[m]} \le x\right) = \mathbb{P}(U_1 \le x, ..., U_m \le x) = \mathbb{P}(U_1 \le x) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(U_m \le x).$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ мають вигляд

$$\mathbb{P}\left(\min(N) \le x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$
$$= \mathbb{1}\left\{x \ge 1\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} =$$
$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - (1-x)^m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1; \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N) \le x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$
$$= \mathbb{1}\left\{x \ge 0\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \cdot \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} =$$
$$= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\left(\min(N) = 1\right) = \mathbb{P}\left(\max(N) = 0\right) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}\left(\min(N) \le x \mid \min(N) < 1\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N) \le x \mid \max(N) > 0\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (2.12) та (2.13) задають безумовні розподіли $\min(\widehat{N})$ та $\max(\widehat{N})$.

З формул (2.3) та (2.5) випливає, що $n \cdot \min(\widehat{P}_n)$ — найменша нерухома точка перестановки Юенса на $\mathrm{S}_n$, а $n \cdot \max(\widehat{P}_n)$ — найбільша, за умови, що нерухомі точки взагалі існують.

Також, можна обчислити відповідні математичні сподівання:

$$\mathbb{E}\min(\widehat{N}) = \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}\left(\min(\widehat{N}) \le x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - e^{-\theta}}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta x} - e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} - e^{-\theta}\right) = \frac{1}{\theta} - \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}$$

$$\mathbb{E}\max(\widehat{N}) = \int_0^1 \left(1 - \mathbb{P}\left(\max(\widehat{N}) \le x\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x} - 1}{e^{\theta} - 1}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta x}}{e^{\theta} - 1}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{e^{\theta} - 1} \cdot \left(e^{\theta} - \frac{e^{\theta} - 1}{\theta}\right) = \frac{e^{\theta}}{e^{\theta} - 1} - \frac{1}{\theta}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min(\widehat{P}_n) = \mathbb{E}\min(\widehat{N})$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max(\widehat{P}_n) = \mathbb{E}\max(\widehat{N})$, то, наприклад, для $\theta = 1$ при великих значеннях $n$ маємо $\mathbb{E}\min(\widehat{P}_n) \approx \frac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}} \cdot n \approx 0.418 \cdot n$, $\mathbb{E}\max(\widehat{P}_n) \approx \frac{1}{e-1} \cdot n \approx 0.582 \cdot n$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 2.2.1.** *Нехай $\sigma \sim \mathrm{ESF}\,(n, \theta)$, а $m_n = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ та $M_n = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) = i\}$ — відповідно, найменша на найбільша нерухомі точки $\sigma$, де за домовленістю $\min\varnothing = n$, $\max\varnothing = 1$. Тоді при $n \to \infty$ виконуються граничні співвідношення $\frac{m_n}{n} \xrightarrow{d} m$, $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{d} M$, де функції розподілу випадкових величин $m$ та $M$ дорівнюють, відповідно,*

$$F_m(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

$$F_M(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{\theta(x-1)}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{2.15}$$

*Якщо позначити $\widehat{m}_n$ та $\widehat{M}_n$ найменшу та найбільшу нерухомі точки за умови, що вони взагалі існують, то виконуються також граничні співвідношення $\frac{\widehat{m}_n}{n} \xrightarrow{d} \widehat{m}$ і $\frac{\widehat{M}_n}{n} \xrightarrow{d} \widehat{M}$, де $\widehat{m}$ та $\widehat{M}$ є абсолютно неперервними випадковими величинами з функціями розподілу*

$$F_{\widehat{m}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{2.16}$$

$$F_{\widehat{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

### 2.2.2. Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. Згідно з означенням 1.4.5, для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, цей функціонал задається

$$\psi_N(f) = \exp\left\{ -\theta \int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) \mathrm{d}x \right\} \tag{2.18}$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій $f$ на $[0,1]$.

Позначатимемо $\mathrm{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона $N$. Для будь-якої точкової міри $\mu$, $\mathrm{sum}(\mu) = \int_0^1 x \mathrm{d}\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини $X$ задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (2.18), можна побачити, що перетворення Лапласа $\mathrm{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N)\}(p) = \exp\left\{ -\theta \left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right) \right\}. \tag{2.19}$$

Оскільки розподіл $\mathrm{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(\widehat{N})$.

$$\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) = 0\right) +$$
$$+\mathbb{E}e^{-p\cdot\text{sum}(\widehat{N})} \cdot \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) > 0\right) = e^{-\theta} + \mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta})$$
$$\mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\left\{\text{sum}(N)\right\}(p) - e^{-\theta}\right) =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \left(\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} - 1\right)$$

$\text{sum}(\widehat{N})$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\left\{\text{sum}(\widehat{N})\right\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(\widehat{N})$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\text{sum}(\widehat{N})}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \left(\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} - 1\right) \tag{2.20}$$

Знаходження оберненого перетворення для (2.20) є доволі складним.

Розглянемо інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x\right)$:

$$\mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$
$$= \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta}$$

Згідно з [10] (ст. 296), умовні розподіли $\mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми $m$ незалежних випадкових величин з розподілом $\text{U}\left(0,1\right)$. Їх функція розподілу має вигляд

$$F_s^{[m]}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0 \leq x < m, \\ 1, & x \geq m. \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \leq x\right)$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду ([11], ст. 375):

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}$$

Отримаємо відповідну формулу. Нехай $x \in [n, n+1)$,

$$e^{\theta} \cdot \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \le x\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} 1 \cdot \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_m^k (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(m-k)!} (x-k)^m \right) \frac{\theta^m}{m!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!(m-k)!} (x-k)^m \theta^m \right) = [m-k=l] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^{l+k} \theta^{l+k} \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left( \sum_{l=n-k+1}^{\infty} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l \right) =$$

$$= \left[ \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l = a_{k,l} \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (x-k)^k \theta^k \left( \sum_{l=0}^{\infty} a_{k,l} - \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l$$

Позначимо $R(n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\theta^m}{m!}$, $L(n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{l!(l+k)!} (x-k)^l \theta^l$. Покажемо, що $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$R(n) - R(n-1) = \frac{\theta^n}{n!},$$

$$L(n) - L(n-1) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} s_{k,l} - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k-1} s_{k,l} = \sum_{i=0}^{n} s_{i,n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{1}{(n-i)!n!} (x-i)^n \theta^n = \frac{\theta^n}{n!} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (x-i)^n.$$

Розглянемо функцію $f(x) = x^n$. Ліва скінченна різниця першого порядку для $f$ з кроком $h = 1$ — це $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$, другого порядку — $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x) - \Delta f(x-1) = f(x) - 2f(x-1) + f(x-2)$, аналогічно рекурентно визначаються скінченні різниці вищих порядків. Загальною формулою для різниці $k$-того порядку буде $\Delta^k f(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i f(x-i) = \sum_{i=0}^k C_k^i (x-i)^n$, тому вираз $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (x-i)^n$ — це ліва скінченна різниця $n$-того порядку для $x^n$. Оскільки кожна скінченна різниця є поліном порядку на 1 менше, ніж попередня, то різниця $n$-того порядку вже буде константою. Виявляється, що

$$\frac{1}{n!}\Delta^n f(n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i (n-i)^n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1,$$

де $\left\{ {n \atop m} \right\}$ позначає число Стірлінґа другого роду ([11], ст. 824-825). Отже, $R(n) - R(n-1) = L(n) - L(n-1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $R(0) = L(0) = 1$, то $R(n) = L(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, отримуємо

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), \ x \in [n, n+1) \quad (2.21)$$

В свою чергу, функція розподілу $\text{sum}(\widehat{N})$ може бути виражена через $F_{\text{sum}(N)}(x)$ наступним чином:

$$\mathbb{P}\left(\text{sum}(\widehat{N}) \le x\right) = \mathbb{P}\left(\text{sum}(N) \le x \mid \text{sum}(N) > 0\right) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}\right) \quad (2.22)$$

```
-- CDF plot --
```

При цьому, $\mathbb{E}\,\text{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\text{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми $m$ незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{U}\,(0,1)$:

$$\mathbb{E}\,\text{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 2.2.2.** *Нехай $\sigma \sim \mathrm{ESF}\,(n,\theta)$, а $S_n = \sum_{i:\sigma(i)=i} i$ — сума нерухомих точок $\sigma$. Тоді при $n \to \infty$ виконується граничне співвідношення $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} S$ де функція* *розподілу випадкової величини $S$ дорівнює*

$$F_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\theta} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k \left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \geq 0. \end{cases} \tag{2.23}$$

### 2.2.3. Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподіли найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

**Зауваження.** *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *і* $1 - \max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1, \ldots, n\}$ *це означатиме вважати* $0$ *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — незалежні випадкові величин з розподілом $\mathrm{U}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \cdots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (нагадаємо, $S_{(i)}$ позначає $i$-ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n]}$ — те ж саме, але з вказанням $n$ як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [12], [13]). Зокрема, для $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n \tag{2.24}$$

$$\mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^j \left((1-jx)_+\right)^n \tag{2.25}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого s-min$(N)$ та найбільшого s-max$(N)$ спейсингів між атомами $N$ задаються (з домовленістю $S_{(1)}^1 = 1$)

$$\mathbb{P}\left(\text{s-min}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.26}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{s-max}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.27}$$

Хоча явні вирази для (2.26) та (2.27), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Відомо (наприклад, [12]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n)^T \stackrel{d}{=} \left( \frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i} \right)^T \tag{2.28}$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \ldots, S_{(n)}\right)^T \stackrel{d}{=} \left( \frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i} \right)^T \tag{2.29}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \tag{2.30}$$

Виявляється, (2.29) та (2.30) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

**Лема 2.2.3.** *Для порядкових статистик спейсингів* $S_{(1)}^{[n+1]}, ..., S_{(n+1)}^{[n+1]}$ *між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{U}\,(0, 1)$ *та незалежних величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце*

$$S_{(i)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \ldots, n \tag{2.31}$$

*Доведення.* Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \ldots, n$. З [14] відомо, що всі $\Delta_i$ незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \cdots + (\Delta_1 + \cdots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+1)\Delta_i$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$. В термінах $Y_i$, верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^n Y_j}$$

Оскільки $X_i$ та $Y_i$ незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (2.31). $\square$

Окремими випадками леми 2.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{n\sum_{i=1}^n X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Разом з (2.26) та (2.27) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \ \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \tag{2.32}$$

де $\nu$ має розподіл Pois $(\theta)$, а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл Exp $(1)$.

Відповідні математичні сподівання $\mathbb{E}\,$s-min$(N)$ та $\mathbb{E}\,$s-max$(N)$ можна знайти з (2.32). Нехай $n \in \mathbb{N}_0$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} \mathrm{d}t,$$

$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{1 - e^{-t}}{t} \mathrm{d}t.$$

де $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ — $n$-те гармонічне число. Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,$s-min$(N) \approx 0.48483$ і $\mathbb{E}\,$s-max$(N) \approx 0.7966$.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

**Теорема 2.2.4.** *Нехай $\sigma \sim$ ESF $(n, \theta)$, а $\delta_n$ та $\Delta_n$ — відповідно, найменша та найбільша відстані між нерухомими точками $\sigma$, де за домовленістю $0$ та $n+1$ вважаються нерухомими точками, тобто за відсутності нерухомих точок найбільша та найменша відстані обидві дорівнюють $n$. Тоді при $n \to \infty$ виконуються граничні співвідношення $\frac{\delta_n}{n} \xrightarrow{d} \delta$ і $\frac{\Delta_n}{n} \xrightarrow{d} \Delta$, де*

$$\delta \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \Delta \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \tag{2.33}$$

*для незалежних між собою $X_1, ..., X_n$ з розподілом* Exp $(1)$ *та $\nu \sim$* Pois $(\theta)$.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Спекторський Ігор Якович. Дискретна математика. Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004.
2. Olav Kallenberg. Random Measures, Theory and Applications. Springer International Publishing, 2017.
3. Y. M. Berezansky; Z. G. Sheftel; G. F. Us. Functional analysis, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1996.
4. Богданський Юрій Вікторович. Інтеграл в курсі аналізу. Видавництво «Політехніка», Київ, 2013.
5. Sidney I. Resnick. Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. Springer New York, 1987.
6. Patrick Billingsley. Convergence of probability measures. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
7. Günter Last and Mathew Penrose. Lectures on the Poisson Process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.
8. Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In Heavy-Tail Phenomena, pages 39–69. Springer New York, 2007.
9. Olav Kallenberg. Foundations of modern probability. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.
10. N. Balakrishnan Norman L. Johnson, Samuel Kotz. Continuous univariate distributions, volume 2. John Wiley & Sons, New York, 1995.
11. Irene A. Stegun Milton Abramowitz. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., USA, 1972.
12. Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. Journal of Applied Probability, 17(3):623–634, 1980.
13. Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.
14. Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics). Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.