

Зміст

1	Попередні відомості	2
1.1	Відомості з алгебри	2
1.2	Відомості з теорії міри	2
1.3	Відомості про точкові випадкові процеси	3
2	Перестановки Юенса	4
2.1	Граничний розподіл нерухомих точок	4
2.2	Статистичні властивості нерухомих точок	8
2.2.1	Найменша та найбільша нерухомі точки	8
2.2.2	Сума нерухомих точок	10
2.2.3	Найменші і найбільші спейсинги	12

Розділ 1

Попередні відомості

1.1 Відомості з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114). *Перестановкою* π на скінченній множині A називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \rightarrow A$.

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118). *Циклом* довжини k називають перестановку π , що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \dots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \dots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \dots, n$.

Означення 1.1.3 ([1], ст. 116). *Групою перестановок (симетричною групою) степеня n* називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \dots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

1.2 Відомості з теорії міри

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{R} називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): \mathcal{R} непорожня та $(A, B \in \mathcal{R}) \Rightarrow (A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R})$.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{S} називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з \mathcal{S} представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з \mathcal{S} , тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139). Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин \mathcal{A} називається σ -алгеброю, якщо виконуються наступні три умови:

1. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A^C = X \setminus A \in \mathcal{A})$;
2. $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$;
3. $(A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Означення 1.2.4 ([4], ст. 147). Нехай X — метричний простір, \mathcal{O} — сім'я всіх відкритих підмножин X . Мінімальна σ -алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить \mathcal{O} , називається *борелевою σ -алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами*.

Означення 1.2.5. Сім'я підмножин \mathcal{S} сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Кожну відкриту підмножину X можна представити у вигляді зліченного об'єднання множин з \mathcal{S} ;
2. Кожну підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з \mathcal{S} .

Означення 1.2.6 ([3], ст. 8). Нехай \mathcal{A} — σ -алгебра у просторі X . Функція $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , якщо виконуються наступні дві умови:

1. Невід'ємність: $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
2. σ -адитивність: довільних множин $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.7 ([2], ст. 22). Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , якщо $\mu(\{x\}) > 0$.

Означення 1.2.8 ([2], ст. 22; [5], ст. 123). *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}_{\{x \in A\}} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Означення 1.2.9 ([5], ст. 123). *Точкова міра* — це міра μ на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $\{x_i, i \geq 1\}$ — злічений набір точок X , не обов'язково різних. Точкова міра називається *радоноювою*, якщо міра компактних множин з \mathcal{A} завжди є скінченною.

Означення 1.2.10. Нехай $\{\mu_n, n \geq 1\}$ — послідовність мір на вимірному просторі (X, \mathcal{A}) , а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $\{\mu_n, n \geq 1\}$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо $\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

1.3 Відомості про точкові випадкові процеси

Розділ 2

Перестановки Юенса

2.1 Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n , заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \quad \pi \in S_n, \quad (2.1)$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $c(\pi)$ позначає кількість циклів у π . Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса*.

Зауваження. Якщо $\theta = 1$, (2.1) задає рівномірний розподіл, тобто $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in S_n$.

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 2.1.1. Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1, \dots, n\}$, що задана розподілом (2.1) (тобто, σ є перестановкою Юенса з S_n). Для $a \in \mathbb{R}$ позначимо $\lceil a \rceil = \min \{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$. Нехай $\gamma \in [0, 1]$, а $X_n = \text{card} \{i \in \{1, \dots, \lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до $\text{Poiss}(\gamma\theta)$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.2)$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}\{X_n = k\}$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n = 0\} &= \mathbb{P}(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C) = 1 - \mathbb{P}(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}) = \\ &= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i < j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}). \end{aligned}$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C_{\lceil \gamma n \rceil}^2$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π , то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2, \dots, n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π , то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини

$\{3, \dots, n\}$. Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\} &= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}(\{\pi\}) = \\ &= \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} = [c(\pi) \geq i] = \\ &= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\dots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{c(\pi)-i} = \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{c(\tilde{\pi})}. \end{aligned}$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.1) на S_{n-i} , але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\{1, 2, \dots, i \text{ є нерухомими точками } \sigma\} = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\{X_n = 0\} = \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil}^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\dots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\{X_n = k\}$ для $k > 0$ можна отримати аналогічно: існує $C_{\lceil \gamma n \rceil}^k$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil \gamma n \rceil - k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\{X_n = 0\}$:

$$\mathbb{P}\{X_n = k\} = C_{\lceil \gamma n \rceil}^k \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i C_{\lceil \gamma n \rceil - k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n = k\} &= \frac{(\lceil \gamma n \rceil)!}{k!(\lceil \gamma n \rceil - k)!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i \frac{(\lceil \gamma n \rceil - k)!}{i!(\lceil \gamma n \rceil - k - i)!} \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} = \\ &= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{\lceil \gamma n \rceil - k} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \frac{\lceil \gamma n \rceil (\lceil \gamma n \rceil - 1) (\lceil \gamma n \rceil - 2) \dots (\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)}. \end{aligned}$$

Нехай N достатньо велике і $N < \lceil \gamma n \rceil - k$, тоді $\mathbb{P}\{X_n = k\}$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil \gamma n \rceil - k$.

$$\begin{aligned} \frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| &\leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \frac{\lceil \gamma n \rceil (\lceil \gamma n \rceil - 1) (\lceil \gamma n \rceil - 2) \dots (\lceil \gamma n \rceil - k - i + 1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} \leq \\ &\leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{\theta+n-\lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k} \leq \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} \left(\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n-\lceil \gamma n \rceil} \right)^{i+k}. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lceil \gamma n \rceil}{n-\lceil \gamma n \rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma \in [0, 1)$, $\frac{\lceil \gamma n \rceil}{n-\lceil \gamma n \rceil} \leq C = C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k} \cdot |S_2| \leq C^k \sum_{i=N}^{\lceil \gamma n \rceil - k} \frac{\theta^i}{i!} C^i \leq C^k \sum_{i=N}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} C^i \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{[\gamma n]([\gamma n] - 1)([\gamma n] - 2) \dots ([\gamma n] - k - i + 1)}{(\theta + n - 1) \dots (\theta + n - i - k)} &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k-i+1)}{(\theta + n - 1) \dots (\theta + n - i - k)} \leq \\ &\leq \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k-i+1)}{(n-1) \dots (n-i-k)} = \frac{n}{n-i-k} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N \rightarrow \infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1 , то для фіксованого N

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_1 &= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\gamma n]([\gamma n] - 1)([\gamma n] - 2) \dots ([\gamma n] - k - i + 1)}{(\theta + n - 1) \dots (\theta + n - i - k)} = \\ &= \frac{\theta^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{\theta^i}{i!} \gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i \frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \rightarrow \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta}, \quad N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Користуючись позначеннями з леми 2.1.1, X_n можна інтерпретувати як $P_n([0, \gamma])$, де P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках, нормованих n , тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{P_n([0, \gamma]) = k\} = \mathbb{P}\{N([0, \gamma]) = k\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb on } [0, 1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 2.1.2. *Точковий процес P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n \rightarrow \infty$).*

Як сказано в [2], *груба збіжність за розподілом* $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ послідовності випадкових мір ξ_n на деякому просторі S до деякої випадкової міри ξ означає, що $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ , неперервної відносно *грубої топології* на просторі (невипадкових) мір на S . У цій грубій топології, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ означає $\int_S f d\mu_n \rightarrow \int_S f d\mu$ для всіх обмежених неперервних функцій f на S з обмеженим носієм. Оскільки $S = [0, 1]$, усі функції на S мають обмежений носій, а їх власна обмеженість впливає з неперервності.

Наведемо визначення точкового процесу Пуассона (з [5]). Нехай μ — міра Радона (радонова міра?) на σ -алгебрі борелевих підмножин множини $S = \mathcal{B}(S)$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ , якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F \in \mathcal{B}(S)$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\{N(F) = k\} = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} \exp\{-\mu(F)\}, & \mu(F) < \infty \\ 0, & \mu(F) = \infty \end{cases}$$

2. Для будь-якого натурального k , якщо F_1, \dots, F_k з $\mathcal{B}(S)$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \leq i \leq k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Теорема 4.15 з [2] формулює критерій грубої збіжності точкових процесів:

Теорема (збіжність точкових процесів, Калленберг). *Нехай ξ, ξ_1, ξ_2, \dots — точкові процеси на S , де ξ простий, $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{S}}_\xi$ — фіксоване (dissecting ring), а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \xi_n(U) = 0 \} = \mathbb{P} \{ \xi(U) = 0 \}, U \in \mathcal{U},$
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ \xi_n(I) > 1 \} \leq \mathbb{P} \{ \xi(I) > 1 \}, I \in \mathcal{I}.$

Формулювання цієї теореми потребує додаткових пояснень. Для не випадкової міри μ $\hat{\mathcal{S}}_\mu$ означає клас борелевих множин $B \subset S$ з $\mu(\partial B) = 0$, а для випадкової міри ξ $\hat{\mathcal{S}}_\xi$ позначає $\hat{\mathcal{S}}_{\mathbb{E}\xi}$. Клас \mathcal{C} обмежених борелевих підмножин S називається **dissecting**, якщо кожна відкрита множина $G \subset S$ представляється у вигляді зліченного об'єднання множин з \mathcal{C} , а кожна обмежена борелева множина $B \subset S$ покривається скінченною кількістю множин з \mathcal{C} .

Розглянемо клас \mathcal{X} of скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a, b \rangle \subset [0, 1]$, де $\langle a, b \rangle$ позначає одне з $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ чи $(a, b]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{X}$. Також, \mathcal{X} є кільцем і **dissecting** класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 2.1.2, можна використати **теорему Калленберга про збіжність** для $\xi_n = P_n$, $\xi = N$ та $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

Доведення теореми 2.1.2. Нехай $\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle, \dots, \langle \gamma_m, \delta_m \rangle$ ($\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \delta_m$) — набір інтервалів в $[0, 1]$, що попарно не перетинаються, $\lfloor a \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \leq a \}$, $I_j = \{ \lfloor \gamma_j n \rfloor + 1, \lfloor \delta_j n \rfloor \}$ і $I = \bigvee_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$. Позначимо $Y_n = \text{card} \{ i \in I : Z_n(i) = i \}$, тоді $P_n(I) = Y_n$. Як у лемі 2.1.1, позначимо F_i множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою, тоді

$$\mathbb{P} \{ Y_n = 0 \} = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right)$$

Нехай $\mathcal{M} = \text{card } I = \sum_{j=1}^m (\lfloor \delta_j n \rfloor - \lfloor \gamma_j n \rfloor)$ і, аналогічно лемі 2.1.1,

$$\mathbb{P} \{ Y_n = k \} = C_{\mathcal{M}}^k \sum_{i=0}^{\mathcal{M}-k} (-1)^i C_{\mathcal{M}-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta + n - 1) \dots (\theta + n - i - k)}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{M}}{n} = \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 2.1.1, отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ Y_n = k \} = \frac{1}{k!} \left(\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right)^k \exp \left\{ -\theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j) \right\}, k \in \mathbb{N}_0$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta \cdot \text{Leb}(I) = \theta \sum_{j=1}^m (\delta_j - \gamma_j)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ P_n(I) = 0 \} = \mathbb{P} \{ N(I) = 0 \}, I \in \mathcal{X}$$

Так як $\mathbb{P} \{ P_n(I) > 1 \} = 1 - (\mathbb{P} \{ P_n(I) = 0 \} + \mathbb{P} \{ P_n(I) = 1 \})$ і $\mathbb{P} \{ P_n(I) = 1 \} \rightarrow \mathbb{P} \{ N(I) = 1 \}$ для $I \in \mathcal{X}$, отримуємо навіть більше, ніж треба:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \{ P_n(I) > 1 \} = \mathbb{P} \{ N(I) > 1 \}, I \in \mathcal{X}$$

Значення цих двох границь доводять $P_n \xrightarrow{vd} N, n \rightarrow \infty$. □

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З 2.1.2, для $\gamma = 1$ $\mathbb{P} \{ X_n = 0 \} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \frac{\theta^i}{(\theta + n - 1) \dots (\theta + n - i)} \rightarrow e^{-\theta}, n \rightarrow \infty$. Введемо ще один точковий процес P'_n , що визначений для борелевих множин $F \in \mathcal{B}([0, 1])$ як

$$\mathbb{P} \{ P'_n(F) = k \} = \mathbb{P} \{ P_n(F) = k \mid P_n(F) > 0 \} = \begin{cases} \frac{\mathbb{P} \{ P_n(F) = k \}}{1 - \mathbb{P} \{ P_n(F) = 0 \}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Повторенням доведення 2.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 2.1.3. Точковий процес P'_n грубо збігається за розподілом до «обумовленого» точкового процесу Пуассона N' з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$, для якого

$$\mathbb{P}\{N'(F) = k\} = \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \frac{\exp\{-\Lambda(F)\}}{1 - \exp\{-\Lambda(F)\}}$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0, 1])$ й $k \in \mathbb{N}$.

Точковий процес N' можна назвати обумовленим процесом Пуассона, бо

$$\mathbb{P}\{N(F) = k \mid N(F) > 0\} = \frac{\mathbb{P}\{N(F) = k, N(F) > 0\}}{\mathbb{P}\{N(F) > 0\}} = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}\{N(F)=k\}}{1 - \exp\{-\Lambda(F)\}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

тому $\mathbb{P}\{N(F) = k \mid N(F) > 0\} = \mathbb{P}\{N'(F) = k\}$ для $k \in \mathbb{N}$.

2.2 Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 2.1.2 та 2.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення з [6]. В термінах грубої збіжності точкових процесів, її можна сформулювати наступним чином:

Теорема 2.2.1 (теорема про неперервне відображення). Нехай φ є неперервним відображенням з простору $\mathcal{M}_{[0,1]}^p$ точкових мір на $[0, 1]$ з грубою топологією в \mathbb{R} зі стандартною топологією. Якщо ξ_n — послідовність точкових процесів, що грубо збігається за розподілом до ξ , $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$, тоді $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$, тобто послідовність випадкових величин $\varphi(\xi_n)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$.

Зауваження. За означенням збіжності за розподілом, якщо φ є обмеженою, то також має місце $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}\varphi(\xi)$.

Перед дослідженням граничних розподілів для деяких відображень, варто навести твердження 3.13 з [5], яке можна сформулювати наступним чином:

Лема 2.2.2. Нехай μ_n — грубо збіжна послідовність точкових мір в $\mathcal{M}_{[0,1]}^p$, тобто $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Тоді

$$\mu_n = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i^{(n)}}, \quad \mu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$$

де δ_x є мірою Дірака, зосередженою в x , а $x_i^{(n)} \rightarrow x_i, n \rightarrow \infty$ для $i = 1, \dots, k$.

Це означає, що будь-яка неперервна функція з \mathbb{R}^k (або принаймні $[0, 1]^k$) в \mathbb{R} задає неперервне відносно грубої топології відображення.

2.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ відображення можна визначити два відображення $\min(\mu) = \sup\{x \in [0, 1] : \mu([x, 1]) = 0\}$ та $\max(\mu) = \inf\{x \in [0, 1] : \mu([0, x]) = 0\}$, що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атом, де для порожньої множини за домовленістю $\sup \emptyset = 0$ та $\inf \emptyset = 1$. Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min\{x_1, \dots, x_k\}$ та $\max\{x_1, \dots, x_k\}$ є неперервними функціями з \mathbb{R}^k в \mathbb{R} , з леми 2.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 2.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, ніж $\min(N')$ та $\max(N')$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}\{N(F) = k \mid N([0, 1]) = m\}$ є відомим

(твердження 3.8, [7]) — це біноміальний процес з розміром m та розподілом $\text{Unif}(0, 1)$. Іншим корисним фактом є такий: нехай U_1, U_2, \dots, U_m є тоді розподіли $U_{(1)}$ та $U_{(m)}$ задаються

$$\mathbb{P}\{U_{(1)} \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1 - x)^m, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \quad \mathbb{P}\{U_{(m)} \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^m, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ задаються

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\min(N) \leq x\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \mathbb{P}\{N([0, 1]) = m\} = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\min(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} (1 - (1 - x)^m) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\max(N) \leq x\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \mathbb{P}\{N([0, 1]) = m\} = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\max(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\{N([0, 1]) = 0\} = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\{\min(N) = 1\} = \mathbb{P}\{\max(N) = 0\} = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}\{\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1 - e^{-\theta x}}{1 - e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\mathbb{P}\{\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{\theta x} - 1}{e^{\theta} - 1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0, 1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (2.6) та (2.7) задають безумовні розподіли $\min(N')$ та $\max(N')$.

Для P'_n $\min(P'_n) = \sup\{x \in [0, 1] : \text{card}\{i \in \{1, \dots, \lceil xn \rceil\} : Z(i) = i\} = 0\}$ означає супремум значень x , для яких усі $i \in \{1, \dots, \lceil xn \rceil\}$ під дією перестановки опиняються не на своїх місцях, аналогічно $\max(P'_n)$ означає інфімум x , для $i \in \{\lfloor xn \rfloor + 1, \dots, n\}$ опиняються не на своїх місцях. Легко побачити, що такі x можуть набувати лише значень, що є пропорційними $\frac{1}{n}$.

--- CDF plot ---

Обчислення $\mathbb{P} \left\{ \frac{k-1}{n} < \min(N') \leq \frac{k}{n} \right\}$ та $\mathbb{P} \left\{ \frac{k-1}{n} < \max(N') \leq \frac{k}{n} \right\}$ дає приблизну частку перестановок, для яких k є відповідно найменшою та найбільшою нерухомою точкою.

--- comparison table ---

Також, $\mathbb{E} \min(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{-\theta}}$ та $\mathbb{E} \max(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}\right) dx = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \min(P'_n) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{-\theta}}$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \max(P'_n) = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$.

2.2.2 Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. З [6], для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \text{Leb}$ на $[0, 1]$, цей функціонал задається

$$\psi_N(f) = \mathbb{E} \exp \left\{ - \int_0^1 f(x) dN \right\} = \exp \left\{ - \theta \int_0^1 (1 - e^{-f(x)}) dx \right\} \quad (2.8)$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0, 1]$.

Позначатимемо $\text{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N . Для будь-якої точкової міри μ , $\text{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E} e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (2.8), можна побачити, що перетворення Лапласа $\text{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) = \exp \left\{ -\theta \left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1) \right) \right\} \quad (2.9)$$

Оскільки розподіл $\text{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\text{sum}(N')$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) &= \mathbb{E} e^{-p \cdot \text{sum}(N)} = 1 \cdot \mathbb{P}\{\text{sum}(N) = 0\} + \mathbb{E} e^{-p \cdot \text{sum}(N')} \cdot \mathbb{P}\{\text{sum}(N) > 0\} = \\ &= e^{-\theta} + \mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}(p) \cdot (1 - e^{-\theta}) \Rightarrow \mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}(p) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} (\mathcal{L}\{\text{sum}(N)\}(p) - e^{-\theta}) = \\ &= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \exp \left\{ -\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1) \right\} \end{aligned}$$

Оскільки $\text{sum}(N')$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\{\text{sum}(N')\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\text{sum}(N')$ задається

$$\mathcal{L}\{F_{\text{sum}(N')}(x)\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \frac{1}{p} \exp \left\{ -\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1) \right\} \quad (2.10)$$

Знаходження оберненого перетворення для (2.10) є доволі складним.

Хоча, існує інший підхід до знаходження $F_{\text{sum}(N)}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \mathbb{P}\{N([0, 1]) = m\} = \\ &= \mathbb{1}\{x \geq 0\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} \end{aligned}$$

Умовні розподіли $\mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x \mid N([0, 1]) = m\}$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\text{Unif}(0, 1)$. Їх функція розподілу наступна:

$$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k C_m^k (x - k)^m, & 0 \leq x < m \\ 1, & x \geq m \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n + 1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\}$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}$$

Наприклад:

$$\begin{aligned} x \in [0, 1), \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} &= e^{-\theta} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m\right) = e^{-\theta} \cdot I_0(2\sqrt{\theta x}) \\ x \in [1, 2), \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} &= e^{-\theta} \left(1 + \frac{\theta}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!} (x-1)^m\right) = \\ &= e^{-\theta} \left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)})\right) \\ x \in [2, 3), \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} &= e^{-\theta} \left(1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!} (x-1)^m + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-2)!m!} (x-2)^m\right) = e^{-\theta} \left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \theta(x-2) I_2(2\sqrt{\theta(x-2)})\right) \end{aligned}$$

В загальному випадку:

$$x \in [n, n + 1), \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} = e^{-\theta} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\theta(x-k)})$$

Отже, функція розподілу $\text{sum}(N)$ задається

$$F_{\text{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} (\theta(x-k))^{\frac{k}{2}} I_k(2\sqrt{\theta(x-k)}), & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким чином, функція розподілу $\text{sum}(N')$ може бути виражена через $F_{\text{sum}(N)}(x)$ наступним чином:

$$\mathbb{P}\{\text{sum}(N') \leq x\} = \mathbb{P}\{\text{sum}(N) \leq x \mid \text{sum}(N) > 0\} = \frac{1}{1 - e^{-\theta}} (F_{\text{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}) \quad (2.12)$$

--- CDF plot ---

При цьому, $\mathbb{E} \text{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}(\text{sum}(N) \mid N([0, 1]) = m) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\text{Unif}(0, 1)$:

$$\mathbb{E} \text{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}\{N([0, 1]) = 0\} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

2.2.3 Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподіли найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати $\min(N)$ and $1 - \max(N)$ спейсингами. Для випадкової перестановки $\{1, \dots, n\}$ це означатиме вважати 0 та $n+1$ «штучними» нерухомими точками.

Нехай U_1, U_2, \dots, U_n — незалежні випадкові величини з розподілом $\text{Unif}(0, 1)$, що розділяють відрізок $[0, 1]$ на $n + 1$ інтервалів з довжинами S_1, S_2, \dots, S_{n+1} , або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \dots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (тут і далі, $S_{(i)}$ позначає i -ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n]}$ — те ж саме, але з вказанням n як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [8], [9]). Зокрема, для $x \in [0, 1]$:

$$\mathbb{P} \left\{ S_{(1)}^{[n+1]} > x \right\} = ((1 - (n + 1)x)_+)^n \quad (2.13)$$

$$\mathbb{P} \left\{ S_{(n+1)}^{[n+1]} > x \right\} = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^j ((1 - jx)_+)^n \quad (2.14)$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого $s\text{-min}(N)$ та найбільшого $s\text{-max}(N)$ спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S_{(1)}^1 = 1$)

$$\mathbb{P} \{s\text{-min}(N) > x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ S_{(1)}^{[n+1]} > x \right\} \mathbb{P} \{N([0, 1]) = n\} \quad (2.15)$$

$$\mathbb{P} \{s\text{-max}(N) > x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ S_{(n+1)}^{[n+1]} > x \right\} \mathbb{P} \{N([0, 1]) = n\} \quad (2.16)$$

Хоча явні вирази для (2.15) та (2.16), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Добре відомо (наприклад, [8]), що для незалежних величин X_1, X_2, \dots, X_n з розподілом $\text{Exp}(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \dots, S_n)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \dots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i} \right)^T \quad (2.17)$$

$$(S_{(1)}, S_{(1)}, \dots, S_{(n)})^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \dots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i} \right)^T \quad (2.18)$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \dots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \quad (2.19)$$

Виявляється, (2.18) та (2.19) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

Лема 2.2.3. Для порядкових статистик спейсингів між незалежними величинами з розподілом $\text{Unif}(0, 1)$ та незалежних величин X_1, X_2, \dots, X_n з розподілом $\text{Exp}(1)$ має місце

$$S_{(i)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \dots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Доведення. Позначимо спейсинги між X_1, X_2, \dots, X_n через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}$, $i = 2, \dots, n$. З [10] відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\text{Ехр}(n - i + 1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \dots + (\Delta_1 + \dots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n - i + 1)\Delta_i$ з розподілом $\text{Ехр}(1)$. В термінах Y_i , верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^n Y_j}$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (2.20). \square

Окремими випадками леми 2.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{n \sum_{i=1}^n X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i} \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Разом з (2.15) та (2.16) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \stackrel{d}{=} \frac{X_1}{(\nu + 1) \sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \text{s-max}(N) \stackrel{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \quad (2.21)$$

де ν має розподіл $\text{Poiss}(\theta)$, а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл $\text{Ехр}(1)$.

$\mathbb{E} \text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E} \text{s-max}(N)$ можна знайти з (2.21). Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{X_1}{(n+1) \sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} \\ \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{P}\{\nu = n\} = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \text{s-min}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt \\ \mathbb{E} \text{s-max}(N) &= \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n \end{aligned}$$

де $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ — n -те гармонічне число. Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E} \text{s-min}(N) \approx 0.48483$ and $\mathbb{E} \text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

Бібліографія

- [1] Спекторський Ігор Якович. *Дискретна математика*. Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004.
- [2] Olav Kallenberg. *Random Measures, Theory and Applications*. Springer International Publishing, 2017.
- [3] Y. M. Berezansky; Z. G. Sheftel; G. F. Us. *Functional analysis*, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1996.
- [4] Богданський Юрій Вікторович. *Інтеграл в курсі аналізу*. Видавництво «Політехніка», Київ, 2013.
- [5] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer New York, 1987.
- [6] Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In *Heavy-Tail Phenomena*, pages 39–69. Springer New York, 2007.
- [7] Günter Last and Mathew Penrose. *Lectures on the Poisson Process*. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.
- [8] Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. *Journal of Applied Probability*, 17(3):623–634, 1980.
- [9] Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.
- [10] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.