Зміст

Розділ 1

Попередні відомості

1.1 Відомості з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114)**.** *Перестановкою* π на скінченній множині A називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \to A$.

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118)**.** *Циклом довжини* k називають перестановку π, що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \ldots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \ldots, n$.

Означення 1.1.3 ([1], ст. 116)**.** *Групою перестановок (симетричною групою) степеня* n називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

1.2 Відомості з теорії міри

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{R}$ називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): $\mathcal{R}$ непорожня та $(A, B \in \mathcal{R}) \Rightarrow (A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R})$.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{S}$ називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з $\mathcal{S}$ представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з $\mathcal{S}$, тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{A}$ називається *σ-алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

1. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \big(A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}\big)$;
2. $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$;
3. $(A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара $(X, \mathcal{A})$ називається *вимірним простором*.

Означення 1.2.4 ([4], ст. 146)**.** Нехай $(X, \mathcal{A}_X)$ та $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — два вимірних простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить $\mathcal{A}_X$.

Означення 1.2.5 ([4], ст. 147). Нехай X — метричний простір, $\mathcal{O}$ — сім'я всіх відкритих підмножин X. Мінімальна σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить $\mathcal{O}$, називається *борелевою σ-алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами.*

Означення 1.2.6 ([2], ст. 24). Сім'я підмножин $\mathcal{S}$ сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Кожну відкриту підмножину X можна представити у вигляді зліченного об'єднання множин з $\mathcal{S}$;
2. Кожну підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{S}$.

Означення 1.2.7 ([3], ст. 8). Нехай $\mathcal{A}$ — σ-алгебра у просторі X. Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Невід'ємність: $\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
2. σ-адитивність: довільних множин $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.8 ([2], ст. 22). Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на вимірному просторі$(X, \mathcal{A})$, якщо $\mu(\{x\}) > 0$.

Означення 1.2.9 ([2], ст. 22; [5], ст. 123). *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}\{x \in A\} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Означення 1.2.10 ([5], ст. 123). *Точкова міра* — це міра μ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — зліченний набір точок X, не обов'язково різних. Точкова міра називається *радоновою*, якщо міра компактних множин з $\mathcal{A}$ завжди є скінченною.

Означення 1.2.11 ([5], ст. 140). Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо $\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

Теорема 1.2.1 ([5], ст. 144). *Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ та μ — міри на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$ і $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Для кожної компактної множини $K \subset X$ з $\mu(\partial K)$ існує номер $N = N(K)$ такий, що при $n \geq N$ існує нумерація атомів μ_n та μ такі, що*

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i^{(n)}}(A),\ \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i}(A)$$

для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $x_i^{(n)} \to x_i$ для всіх $1 \leq i \leq p$.

1.3 Відомості про точкові випадкові процеси

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, E — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева σ-алгебра підмножин E. Для точкової міри μ позначимо $S_\mu = \{x \in E : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ — множину атомів.

Означення 1.3.1 ([5], ст. 124)**.** Точкова міра μ називається *простою*, якщо $\mu(\{x\}) \leq 1$ для всіх $x \in E$.

Позначимо $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на E, а $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу σ-алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P}$ — міра на цьому просторі, що додатково задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення 1.3.2. *Точковий випадковий процес* N — вимірне відображення з ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес N задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P} \circ N^{-1} = \mathbb{P}[N \in \cdot\,]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

Теорема 1.3.1 ([5], ст. 124)**.** *N є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного $F \in \mathcal{E}$ відображення $\omega \mapsto N(\omega, F)$ з $(\Omega, \mathcal{A})$ в $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ є вимірним.*

Теорема 1.3.2 ([5], ст. 126)**.** *Нехай N — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а сім'я передкомпактних множин $\mathcal{F}$ задовольняє наступні умови:*

1. *$(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$;*
2. *$\mathcal{E}$ є мінімальною σ-алгеброю, що містить $\mathcal{F}$;*
3. *Існує послідовність множин $E_n \in \mathcal{F}$, для якої $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.*

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1,\ldots,I_k}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \leq j \leq k)$$

для $I_i \in \mathcal{F}$ та цілих $n_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k$.

Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1,\ldots,I_k}, k = 1, 2, \ldots, I_j \in \mathcal{F}\}$ однозначно визначає розподіл P_N.

Означення незалежності процесів — чи потрібно?
Означення функціоналу Лапласа — чи потрібно?

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

Означення 1.3.3 ([2], ст. 127)**.** *Мірою інтенсивності* або *середньою мірою* точкового процесу N називається міра μ, що для $F \in \mathcal{E}$ визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_{\Omega} N(\omega, F) d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} m(F) dP_N$$

.

Наведемо приклад точкового процесу.

Означення 1.3.4 ([6], ст. 11)**.** Нехай P — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$, а $X_1, \ldots, X_m$ — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ δ_{X_i} — це точковий процес, для якого $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 1) = \mathbb{P}(X_i \in F)$, $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 0) = \mathbb{P}(X_i \notin F)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \cdots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальний процесом* з розміром вибірки m та розподілом P. Для нього

$$\mathbb{P}(X(F) = k) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k},\ k = 0, \ldots, m,\ F \in \mathcal{E}$$

.

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

Означення 1.3.5 ([5], ст. 130)**.** Нехай μ — радонова міра на $\mathcal{E}$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\left(N(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty; \end{cases}$$

2. Для будь-якого натурального k, якщо $F_1, \ldots, F_k$ з $\mathcal{E}$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \le i \le k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Як і для невипадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

Означення 1.3.6 ([2], ст. 109)**.** Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \ge 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

Теорема 1.3.3 ([2], ст. 121)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ *для* $U \in \mathcal{U}$*;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \le \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ *для* $I \in \mathcal{I}$*.*

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

Теорема 1.3.4 ([7], ст. 42)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу ξ, а відображення $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$ таке, що $\mathbb{P}\left(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперевною в } \mu\}\right) = 0$.*

Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \ge 1)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$, тобто $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$.

Розділ 2

Перестановки Юенса

2.1 Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n, заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)},\ \pi \in S_n, \tag{2.1}$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $\mathrm{c}(\pi)$ позначає кількість циклів у π. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса*.

Зауваження. *Якщо $\theta = 1$, (2.1) задає рівномірний розподіл, тобто $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in S_n$.*

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 2.1.1. *Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1,\dots,n\}$, що задана розподілом (2.1) (тобто, σ є перестановкою Юенса з S_n). Для $a \in \mathbb{R}$ позначимо $\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \ge a\}$. Нехай $\gamma \in [0,1]$, а $X_n = \operatorname{card}\{i \in \{1,\dots,\lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до $\operatorname{Poiss}(\gamma\theta)$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}\right) =$$
$$= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}\right).$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C^2_{\lceil \gamma n \rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π, то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2,\dots,n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини

$\{3,\ldots,n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\left(1,2,\ldots,i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right)=\sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n}\mathbb{P}\left(\{\pi\}\right)=$$

$$=\sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n}\frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}=[\mathrm{c}(\pi)\geq i]=$$

$$=\frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}\sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n}\theta^{\mathrm{c}(\pi)-i}=\frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)}\sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}}\theta^{\mathrm{c}(\tilde{\pi})}.$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.1) на S_{n-i}, але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left(1,2,\ldots,i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right)=\frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left(X_n=0\right)=\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil}(-1)^iC^i_{\lceil\gamma n\rceil}\frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\left(X_n=k\right)$ для $k>0$ можна отримати аналогічно: існує $C^k_{\lceil\gamma n\rceil}$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil-k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left(X_n=0\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=C^k_{\lceil\gamma n\rceil}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^iC^i_{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=\frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left(X_n=k\right)=\frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil-k)!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{(\lceil\gamma n\rceil-k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil-k-i)!}\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}=$$

$$=\frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\frac{(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)\ldots(\lceil\gamma n\rceil-2)(\lceil\gamma n\rceil-1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Нехай N достатньо велике і $\lceil\gamma n\rceil-k>N$, тоді $\mathbb{P}\left(X_n=k\right)$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil\gamma n\rceil-k$.

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2|\leq\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\frac{(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)\ldots(\lceil\gamma n\rceil-2)(\lceil\gamma n\rceil-1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}\leq$$

$$\leq\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{\theta+n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k}\leq\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}=\frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma\in[0,1)$, $\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\leq C=C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2|\leq C^k\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}C^i\leq C^k\sum_{i=N}^{\infty}\frac{\theta^i}{i!}C^i\to 0,\ N\to\infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\frac{(\lceil\gamma n\rceil - k - i + 1)\dots(\lceil\gamma n\rceil - 2)(\lceil\gamma n\rceil - 1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta + n - i - k)\dots(\theta + n - 1)} = \frac{(n - k - i + 1)\dots(n-2)(n-1)n}{(\theta + n - i - k)\dots(\theta + n - 1)} \leq$$
$$\leq \frac{(n - k - i + 1)\dots(n-2)(n-1)n}{(n - i - k)\dots(n-1)} = \frac{n}{n-i-k} \to 1,\ n \to \infty,$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1, то для фіксованого N

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\lim_{n\to\infty}\frac{(\lceil\gamma n\rceil - k - i + 1)\dots(\lceil\gamma n\rceil - 2)(\lceil\gamma n\rceil - 1)\lceil\gamma n\rceil}{(\theta + n - i - k)\dots(\theta + n - 1)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta},\ N \to \infty.$$

$\square$

Користуючись позначеннями з леми 2.1.1, визначимо для $n \in \mathbb{N}$ точкові процеси P_n на $(E, \mathcal{E}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ за правилом

$$P_n(F) = \operatorname{card}\left\{i \in \{1, ..., n\} : \sigma(i) = i \text{ та } \frac{i}{n} \in F\right\},\ F \in \mathcal{E}. \tag{2.3}$$

Тобто, P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках перестановки Юенса σ, нормованих n, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(P_n\left([0,\gamma]\right) = k\right) = \mathbb{P}\left(N\left([0,\gamma]\right) = k\right),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 2.1.2. *Послідовність точкових процесів P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n \to \infty$).*

Теорема 1.3.3 формулює критерій грубої збіжності точкових процесів:

Теорема. *Нехай $(\xi_n, n \geq 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ *для* $U \in \mathcal{U}$;
2. $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \leq \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ *для* $I \in \mathcal{I}$.

Розглянемо сім'ю множин $\mathcal{X}$, що складається зі скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a, b\rangle \subset [0,1]$, де $\langle a, b\rangle$ позначає одне з $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ чи $(a,b]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B) = 0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{E}}_N = \mathcal{X}$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і розсікаючим класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 2.1.2, можна використати теорему 1.3.3 для $\xi_n = P_n$, $\xi = N$ та $\hat{\mathcal{E}}_N = \mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

Доведення теореми 2.1.2. Нехай $\langle\gamma_1,\delta_1\rangle, ..., \langle\gamma_m,\delta_m\rangle$ $(\gamma_1<\delta_1<\gamma_2<...<\gamma_m<\delta_m)$ — набір інтервалів в $[0,1]$, що попарно не перетинаються, $\lfloor a\rfloor=\max\{k\in\mathbb{Z}:k\le a\}$, $I_j=\langle\gamma_j,\delta_j\rangle$ і $I=\bigvee_{j=1}^m I_j\in\mathcal{X}$. Позначимо $Y_n=P_n(I)$, де $P_n(I)$ визначено формулою (2.3). Нехай $M_n=\operatorname{card}\left\{i\in\{1,...,n\}:\frac{i}{n}\in I\right\}$ і тоді, аналогічно лемі 2.1.1,

$$\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)=C_{M_n}^k\sum_{i=0}^{M_n-k}(-1)^iC_{M_n-k}^i\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\dots(\theta+n-1)}.$$

Оскільки $\operatorname{card}\left\{i\in\{1,...,n\}:\frac{i}{n}\in I_j\right\}=\lceil\delta_jn\rceil-\lfloor\gamma_jn\rfloor$ ($\lceil\cdot\rceil$ може змінюватися на $\lfloor\cdot\rfloor$ і навпаки в залежності від n та включення кінцевих точок до інтервалу), а $\lfloor x\rfloor\le x\le\lceil x\rceil$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 2.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)=\frac{1}{k!}\left(\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right)^k\exp\left\{-\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right\},k\in\mathbb{N}_0.$$

Оскільки $\Lambda(I)=\theta\cdot\operatorname{Leb}(I)=\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(P_n(I)=0\right)=\mathbb{P}\left(N(I)=0\right),I\in\mathcal{X}.$$

Так як $\mathbb{P}\left(P_n(I)>1\right)=1-\left(\mathbb{P}\left(P_n(I)=0\right)+\mathbb{P}\left(P_n(I)=1\right)\right)$ і $\mathbb{P}\left(P_n(I)=1\right)\to\mathbb{P}\left(N(I)=1\right)$ для $I\in\mathcal{X}$, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(P_n(I)>1\right)=\mathbb{P}\left(N(I)>1\right),I\in\mathcal{X}.$$

Отже, обидві умови теореми 1.3.3 справджуються, що і доводить $P_n\xrightarrow{vd}N,\ n\to\infty$. $\square$

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З теореми 2.1.2, для $\gamma=1$ має місце $\mathbb{P}\left(X_n=0\right)\to e^{-\theta},n\to\infty$. Введемо ще один точковий процес P_n', що визначений для борелевих множин $F\in\mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left(P_n'(F)=k\right)=\mathbb{P}\left(P_n(F)=k\mid P_n([0,1])>0\right)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k>0;\\ \frac{1-\mathbb{P}\left(P_n\left(F^C\right)=0\right)}{1-\mathbb{P}(P_n([0,1])=0)}, & k=0.\end{cases}\tag{2.4}$$

Повторенням доведення 2.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 2.1.3. *Точковий процес P_n' грубо збігається за розподілом до точкового процесу N' на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left(N'(F)=k\right)=\begin{cases}\frac{(\Lambda(F))^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\Lambda(F)}}{1-e^{-\theta}}, & k>0\\ \frac{1-e^{-(\theta-\Lambda(F))}}{1-e^{-\theta}}, & k=0.\end{cases}\tag{2.5}$$

для всіх $F\in\mathcal{B}([0,1])$ та $k\in\mathbb{N}$.

Зокрема, для $F=[0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(N'([0,1])=k\right)=\begin{cases}\frac{\theta^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}, & k>0\\ 0, & k=0.\end{cases}\tag{2.6}$$

2.2 Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 2.1.2 та 2.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення з [7]. В термінах грубої збіжності точкових процесів, її можна сформулювати наступним чином:

Теорема 2.2.1 (теорема про неперервне відображення)**.** *Нехай φ є неперервним відображенням з простору $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$ точкових мір на $[0,1]$ з грубою топологією в $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Якщо ξ_n — послідовність точкових процесів, що грубо збігається за розподілом до ξ, $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$, тоді $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$, тобто послідовність випадкових величин $\varphi(\xi_n)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$.*

Зауваження. *За означенням збіжності за розподілом, якщо φ є обмеженою, то також має місце $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$.*

Перед дослідженням граничних розподілів для деяких відображень, варто навести твердження 3.13 з [5], яке можна сформулювати наступним чином:

Лема 2.2.2. *Нехай μ_n — грубо збіжна послідовність точкових мір в $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$, тобто $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Тоді*

$$\mu_n = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i^{(n)}},\ \mu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$$

де δ_x є мірою Дірака, зосередженою в x, а $x_i^{(n)} \to x_i, n \to \infty$ для $i = 1, \ldots, k$.

Це означає, що будь-яка неперервна функція з $\mathbb{R}^k$ (або принаймні $[0,1]^k$) в $\mathbb{R}$ задає неперервне відносно грубої топології відображення.

2.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ відображення можна визначити два відображення $\min(\mu) = \sup\{x \in [0,1] :$ та $\max(\mu) = \inf\{x \in [0,1] : \mu([x,1]) = 0\}$, що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атом, де для порожньої множини за домовленістю $\sup\varnothing = 0$ та $\inf\varnothing = 1$. Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min\{x_1, \ldots, x_k\}$ та $\max\{x_1, \ldots, x_k\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з леми 2.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 2.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, ніж $\min(N')$ та $\max(N')$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}(N(F) = k \mid N([0,1]) = m)$ є відомим (твердження 3.8, [6]) — це біноміальний процес з розміром m та розподілом $\mathrm{Unif}(0,1)$. Іншим корисним фактом є такий: нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є тоді розподіли $U_{(1)}$ та $U_{(m)}$ задаються

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (1-x)^m, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases},\ \mathbb{P}\left(U_{(m)} \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^m, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ задаються

$$\mathbb{P}(\min(N) \le x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m)\, \mathbb{P}(N([0,1]) = m) = \tag{2.7}$$

$$= \mathbb{1}\{x \ge 1\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(\min(N) \le x \mid N([0,1]) = m)\, \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} (1 - (1-x)^m)\, \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max(N) \leq x\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) = \\
&= \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\left(\min(N) = 1\right) = \mathbb{P}\left(\max(N) = 0\right) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$
\mathbb{P}\left(\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.9}
$$

$$
\mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.10}
$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (2.9) та (2.10) задають безумовні розподіли $\min(N')$ та $\max(N')$.

Для P_n' $\min(P_n') = \sup\left\{x \in [0,1] : \operatorname{card}\left\{i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\} : Z(i) = i\right\} = 0\right\}$ означає супремум значень x, для яких усі $i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\}$ під дією перестановки опиняються не на своїх місцях, аналогічно $\max(P_n')$ означає інфімум x, для $i \in \{\lfloor xn \rfloor + 1, \ldots, n\}$ опиняються не на своїх місцях. Легко побачити, що такі x можуть набувати лише значень, що є пропорційними $\frac{1}{n}$.

`--- CDF plot ---`

Обчислення $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \min(N') \leq \frac{k}{n}\right)$ та $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \max(N') \leq \frac{k}{n}\right)$ дає приблизну частку перестановок, для яких k є відповідно найменшою та найбільшою нерухомою точкою.

`--- comparison table ---`

Також, $\mathbb{E}\min(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\mathbb{E}\max(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}\right) dx = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$, тому $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min(P_n') = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max(P_n') = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$.

2.2.2 Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. З [7], для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, цей функціонал задається

$$
\psi_N(f) = \mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^1 f(x) dN\right\} = \exp\left\{-\theta \int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) dx\right\} \tag{2.11}
$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0,1]$.

Позначатимемо $\operatorname{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N. Для будь-якої точкової міри μ, $\operatorname{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X

задається $\mathcal{L}\left\{X\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (2.11), можна побачити, що перетворення Лапласа $\mathrm{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N)\right\}(p) = \exp\left\{-\theta\left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right)\right\} \tag{2.12}$$

Оскільки розподіл $\mathrm{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\mathrm{sum}(N')$.

$$\mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N)\right\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\mathrm{sum}(N)} = 1\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) = 0\right) + \mathbb{E}e^{-p\cdot\mathrm{sum}(N')}\cdot\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) > 0\right) =$$
$$= e^{-\theta} + \mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N')\right\}(p)\cdot(1 - e^{-\theta}) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N')\right\}(p) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N)\right\}(p) - e^{-\theta}\right) =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\}$$

Оскільки $\mathrm{sum}(N')$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\left\{\mathrm{sum}(N')\right\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\mathrm{sum}(N')$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\mathrm{sum}(N')}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}}\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} \tag{2.13}$$

Знаходження оберненого перетворення для (2.13) є доволі складним.

Хоча, існує інший підхід до знаходження $F_{\mathrm{sum}(N)}(x)$:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right)\mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) =$$
$$= \mathbb{1}\left\{x \ge 0\right\}\cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right)\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}$$

Умовні розподіли $\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$. Їх функція розподілу наступна:

$$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor}(-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0 \le x < m \\ 1, & x \ge m \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right)$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}$$

Наприклад:

$$x \in [0,1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m\right) = e^{-\theta} \cdot I_0(2\sqrt{\theta x})$$

$$x \in [1,2),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m\right) =$$
$$= e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)})\right)$$

$$x \in [2,3),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m!)^2} x^m - \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-2)!m!}(x-2)^m\right) = e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)} \cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!}\theta(x-2) I_2(2\sqrt{\theta(x-2)})\right)$$

В загальному випадку:

$$x \in [n, n+1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)$$

Отже, функція розподілу $\mathrm{sum}(N)$ задається

$$F_{\mathrm{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} \sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \frac{1}{k!} \left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \ge 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Таким чином, функція розподіу $\mathrm{sum}(N')$ може бути виражена через $F_{\mathrm{sum}(N)}(x)$ настуним чином:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N') \le x\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid \mathrm{sum}(N) > 0\right) = \frac{1}{1 - e^{-\theta}}\left(F_{\mathrm{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}\right) \tag{2.15}$$

`--- CDF plot ---`

При цьому, $\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\mathrm{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N) = 0 \cdot \mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2} \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

2.2.3 Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподілу найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *and* $1 - \max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1, \ldots, n\}$ *це означатиме вважати* 0 *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_n$ — незалежні випадкові величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S^{[n+1]}_{(1)} < S^{[n+1]}_{(2)} < \cdots < S^{[n+1]}_{(n+1)}$ (тут і далі, $S_{(i)}$ позначає i-ту порядкову статистику, а $S^{[n]}_{(i)}$ — те ж саме, але з вказанням n як кількості цих статистик). Розподіли $S^{[n+1]}_{(k)}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [8], [9]). Зокрема, для $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(1)} > x\right) = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n \tag{2.16}$$

$$\mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(n+1)} > x\right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C^j_{n+1} \left((1-jx)_+\right)^n \tag{2.17}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого s-min(N) та найбільшого s-max(N) спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S^1_{(1)} = 1$)

$$\mathbb{P}\left(\text{s-min}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(1)} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.18}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{s-max}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S^{[n+1]}_{(n+1)} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.19}$$

Хоча явні вирази для (2.18) та (2.19), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Добре відомо (наприклад, [8]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.20}$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \ldots, S_{(n)}\right)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \ldots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.21}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \tag{2.22}$$

Виявляється, (2.21) та (2.22) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

Лема 2.2.3. *Для порядкових статистик спейсингів між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *та та незалежних величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце*

$$S^{[n]}_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \ldots, n \tag{2.23}$$

Доведення. Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \ldots, n$. З [10] відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \cdots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \cdots + (\Delta_1 + \cdots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+1)\Delta_i$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$. В термінах Y_i, верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^n Y_j}$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (2.23). □

Окремими випадками леми 2.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{X_1}{n\sum_{i=1}^n X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Разом з (2.18) та (2.19) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \overset{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \ \text{s-max}(N) \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \tag{2.24}$$

де ν має розподіл $\mathrm{Poiss}\,(\theta)$, а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл $\mathrm{Exp}\,(1)$.

$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N)$ можна знайти з (2.24). Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \cdots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}\,(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt$$

$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n$$

де $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ — n-те гармонічне число Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) \approx 0.48483$ and $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

Бібліографія

[1] Спекторський Ігор Якович. *Дискретна математика.* Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004.

[2] Olav Kallenberg. *Random Measures, Theory and Applications.* Springer International Publishing, 2017.

[3] Y. M. Berezansky; Z. G. Sheftel; G. F. Us. *Functional analysis*, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1996.

[4] Богданський Юрій Вікторович. *Інтеграл в курсі аналізу.* Видавництво «Політехніка», Київ, 2013.

[5] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer New York, 1987.

[6] Günter Last and Mathew Penrose. *Lectures on the Poisson Process.* Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.

[7] Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In *Heavy-Tail Phenomena*, pages 39–69. Springer New York, 2007.

[8] Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. *Journal of Applied Probability*, 17(3):623–634, 1980.

[9] Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.

[10] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics).* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.