Зміст

Розділ 1

Попередні відомості

1.1 Відомості з алгебри

Означення 1.1.1 ([1], ст. 114)**.** *Перестановкою* π на скінченній множині A називають довільне бієктивне відображення $\sigma : A \to A$.

Означення 1.1.2 ([1], ст. 118)**.** *Циклом довжини* k називають перестановку π, що змінює (зсуває за циклом) елементи $i_1, i_2, \ldots, i_k \in A$, залишаючи інші на місці, тобто $\pi(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \ldots, k-1$, $\pi(i_k) = i_1$, $\pi(i_j) = i_j$ для $j = k+1, \ldots, n$.

Означення 1.1.3 ([1], ст. 116)**.** *Групою перестановок (симетричною групою) степеня* n називають групу, утворену множиною перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$ за операцією композиції. Група S_n містить $n!$ різних перестановок, нейтральним елементом є тотожне відображення ([1], ст. 114).

1.2 Відомості з теорії міри

Означення 1.2.1 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{R}$ називається *кільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних об'єднань, перетинів та різниць. Еквівалентне означення ([3], ст. 4): $\mathcal{R}$ непорожня та $(A, B \in \mathcal{R}) \Rightarrow (A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R})$.

Означення 1.2.2 ([2], ст. 19)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{S}$ називається *напівкільцем*, якщо вона замкнена відносно скінченних перетинів та кожна різниця множин з $\mathcal{S}$ представляється у вигляді диз'юнктного об'єднання множин з $\mathcal{S}$, тобто для будь-яких $A, B \in \mathcal{S}$ існують множини $K_i \in \mathcal{S}, i = 1, \ldots, n$, що попарно не перетинаються і $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Означення 1.2.3 ([4], ст. 139)**.** Для будь-якого простору X непорожня сім'я підмножин $\mathcal{A}$ називається *σ-алгеброю*, якщо виконуються наступні три умови:

1. $(A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \big(A^C = X \setminus A \in \mathcal{A}\big)$;
2. $(A, B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$;
3. $(A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A})$.

Пара $(X, \mathcal{A})$ називається *вимірним простором.*

Означення 1.2.4 ([4], ст. 146)**.** Нехай $(X, \mathcal{A}_X)$ та $(Y, \mathcal{A}_Y)$ — два вимірних простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним*, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{A}_Y$ її повний прообраз $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$ належить $\mathcal{A}_X$.

Означення 1.2.5 ([4], ст. 147)**.** Нехай X — метричний простір, $\mathcal{O}$ — сім'я всіх відкритих підмножин X. Мінімальна σ-алгебра $\mathcal{B}(X)$, що містить $\mathcal{O}$, називається *борелевою σ-алгеброю*, а множини $A \in \mathcal{B}(X)$ — *борелевими множинами.*

Означення 1.2.6 ([2], ст. 24)**.** Сім'я підмножин $\mathcal{S}$ сепарабельного метричного простору X називається *розсікаючою*, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Кожну відкриту підмножину X можна представити у вигляді зліченного об'єднання множин з $\mathcal{S}$;
2. Кожну підмножину X можна покрити скінченною кількістю множин з $\mathcal{S}$.

Означення 1.2.7 ([3], ст. 8)**.** Нехай $\mathcal{A}$ — σ-алгебра у просторі X. Функція $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ називається *мірою* на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, якщо виконуються наступні дві умови:

1. Невід'ємність: $\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0$;
2. σ-адитивність: довільних множин $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{A}$, що попарно не перетинаються, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Означення 1.2.8 ([2], ст. 22)**.** Точка $x \in X$ називається *атомом* міри μ на вимірному просторі$(X, \mathcal{A})$, якщо $\mu\left(\{x\}\right) > 0$.

Означення 1.2.9 ([2], ст. 22; [5], ст. 123)**.** *Міра Дірака*, зосереджена в точці $x \in X$ — це міра δ_x на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \delta_x(A) = \mathbb{1}\left\{x \in A\right\} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.

Означення 1.2.10 ([5], ст. 123)**.** *Точкова міра* — це міра μ на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, для якої $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(A)$, де $(x_i, i \geq 1)$ — зліченний набір точок X, не обов'язково різних. Точкова міра називається *радоновою*, якщо міра компактних множин з $\mathcal{A}$ завжди є скінченною.

Означення 1.2.11 ([5], ст. 140)**.** Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ — послідовність мір на на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$, а $C_K^+(X)$ — множина неперервних невід'ємних функцій $X \to \mathbb{R}$ з компактним носієм. Послідовність $(\mu_n, n \geq 1)$ *грубо збігається* до міри μ на тому ж вимірному просторі, якщо $\int_X f d\mu_n \to \int_X f d\mu$ для всіх $f \in C_K^+(X)$. Ця збіжність позначається $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

Наведемо теорему, що характеризує збіжність послідовності точкових мір.

Теорема 1.2.1 ([5], ст. 144)**.** *Нехай $(\mu_n, n \geq 1)$ та μ — міри на вимірному просторі $(X, \mathcal{A})$ і $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Для кожної компактної множини $K \subset X$ з $\mu(\partial K)$ існує номер $N = N(K)$ такий, що при $n \geq N$ існує нумерація атомів μ_n та μ такі, що*

$$\mu_n(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i^{(n)}}(A),\ \mu(A \cap K) = \sum_{i=1}^{p} \delta_{x_i}(A)$$

для всіх $A \in \mathcal{A}$ і $x_i^{(n)} \to x_i$ для всіх $1 \leq i \leq p$.

1.3 Відомості про точкові випадкові процеси

Точкові випадкові процеси є основним поняттям, що досліджується в роботі. Наведемо початкові означення з [5]. В межах цього пункту, якщо не сказано інакше, E — підмножина скінченновимірного евклідового простору, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ — борелева σ-алгебра підмножин E. Для точкової міри μ позначимо $S_\mu = \{x \in E : \mu\left(\{x\}\right) \neq 0\}$ — множину атомів.

Означення 1.3.1 ([5], ст. 124)**.** Точкова міра μ називається *простою*, якщо $\mu(\{x\}) \le 1$ для всіх $x \in E$.

Позначимо $M_p(E)$ множину усіх точкових мір, визначених на E, а $\mathcal{M}_p(E)$ — найменшу σ-алгебру підмножин $M_p(E)$, що містить усі множини виду $\{\mu \in M_p(E) : \mu(F) \in B\}$ для всіх $F \in \mathcal{E}$ і $B \in \mathcal{B}([0, +\infty])$. Також зафіксуємо деякий ймовірнісний простір — трійку $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра підмножин Ω, а $\mathbb{P}$ — міра на цьому просторі, що додатково задовольняє умову $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Означення 1.3.2. *Точковий випадковий процес* N — вимірне відображення з ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ в $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.

Якщо зафіксувати $\omega \in \Omega$, то $N(\omega, \cdot)$ буде точковою мірою. З іншого боку, якщо зафіксувати $F \in \mathcal{E}$, то $N(F)$ буде випадковою величиною зі значеннями в $[0, +\infty]$. Також, точковий процес N задає ймовірнісну міру $P_N = \mathbb{P} \circ N^{-1} = \mathbb{P}[N \in \cdot\,]$ на $\mathcal{M}_p(E)$.

Надалі для спрощення точкові випадкові процеси будемо називати просто *точковими процесами*. Наведемо декілька теорем, що стосуються означення точкового процесу.

Теорема 1.3.1 ([5], ст. 124)**.** *N є точковим процесом тоді і тільки тоді, коли для кожного $F \in \mathcal{E}$ відображення $\omega \mapsto N(\omega, F)$ з $(\Omega, \mathcal{A})$ в $([0, +\infty], \mathcal{B}([0, +\infty]))$ є вимірним.*

Теорема 1.3.2 ([5], ст. 126)**.** *Нехай N — точковий процес на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а сім'я передкомпактних множин $\mathcal{F}$ задовольняє наступні умови:*

1. *$(A, B \in \mathcal{F}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathcal{F})$;*
2. *$\mathcal{E}$ є мінімальною σ-алгеброю, що містить $\mathcal{F}$;*
3. *Існує послідовність множин $E_n \in \mathcal{F}$, для якої $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.*

Для $k \in \mathbb{N}$ визначимо скінченновимірні розподіли

$$P_{I_1,\ldots,I_k}(n_1, \ldots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_j) = n_j, 1 \le j \le k)$$

для $I_i \in \mathcal{F}$ та цілих $n_i \ge 0$, $1 \le i \le k$.

Тоді система скінченновимірних розподілів $\{P_{I_1,\ldots,I_k}, k = 1, 2, \ldots, I_j \in \mathcal{F}\}$ однозначно визначає розподіл P_N.

Означення незалежності процесів — чи потрібно?
Означення функціоналу Лапласа — чи потрібно?

Як і для випадкових величин, для точкових процесів можна ввести поняття «середнього значення».

Означення 1.3.3 ([2], ст. 127)**.** *Мірою інтенсивності* або *середньою мірою* точкового процесу N називається міра μ, що для $F \in \mathcal{E}$ визначена як

$$\mu(F) = \mathbb{E}N(F) = \int_{\Omega} N(\omega, F) d\mathbb{P} = \int_{M_p(E)} m(F) dP_N$$

.

Наведемо приклад точкового процесу.

Означення 1.3.4 ([6], ст. 11)**.** Нехай P — деяка ймовірнісна міра на $(E, \mathcal{E})$, а $X_1, \ldots, X_m$ — незалежні випадкові величини з відповідним розподілом. Для кожного $i = 1, \ldots, m$ δ_{X_i} — це точковий процес, для якого $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 1) = \mathbb{P}(X_i \in F)$, $\mathbb{P}(\delta_{X_i}(F) = 0) = \mathbb{P}(X_i \notin F)$ для $F \in \mathcal{E}$. Точковий процес $X = \delta_{X_1} + \delta_{X_2} + \cdots + \delta_{X_m}$ називається *біноміальний процесом* з розміром вибірки m та розподілом P. Для нього

$$\mathbb{P}(X(F) = k) = C_m^k P(F)^k (1 - P(F))^{m-k}, \; k = 0, \ldots, m, \; F \in \mathcal{E}$$

.

Перейдемо до означення процесу Пуассона, який є центральним у роботі.

Означення 1.3.5 ([5], ст. 130)**.** Нехай μ — радонова міра на $\mathcal{E}$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F \in \mathcal{E}$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k
$$\mathbb{P}\left(N(F) = k\right) = \begin{cases} \frac{(\mu(F))^k}{k!} e^{-\mu(F)}, & \mu(F) < \infty, \\ 0, & \mu(F) = \infty; \end{cases}$$
2. Для будь-якого натурального k, якщо $F_1, \ldots, F_k$ з $\mathcal{E}$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1 \le i \le k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Як і для невипадкових точкових мір, для точкових процесів також можна ввести поняття грубої збіжності.

Означення 1.3.6 ([2], ст. 109)**.** Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$. Якщо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ, неперервної на $M_p(E)$ відносно грубої збіжності мір, то послідовність $(\xi_n, n \ge 1)$ *грубо збігається за розподілом*, що позначається $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Наведемо критерій грубої збіжності за розподілом.

Теорема 1.3.3 ([2], ст. 121)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, а точковий процес ξ — простий. Нехай також $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{E}}_\xi$ — фіксоване розсікаюче кільце, де $\hat{\mathcal{E}}_\xi$ позначає сім'ю борелевих підмножин E, для яких $\mathbb{E}\xi(\partial B) = 0$, а $\mathcal{I} \subset \mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U) = 0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U) = 0\right)$ *для* $U \in \mathcal{U}$*;*
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I) > 1\right) \le \mathbb{P}\left(\xi(I) > 1\right)$ *для* $I \in \mathcal{I}$*.*

Для практичних застосувань є корисною наступна теорема про неперервне відображення.

Теорема 1.3.4 ([7], ст. 42)**.** *Нехай $(\xi_n, n \ge 1)$ — послідовність точкових процесів на вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$, яка грубо збігається за розподілом до точкового процесу ξ, а відображення $\varphi : M_p(E) \to \mathbb{R}$ таке, що $\mathbb{P}\left(\xi \in \{\mu \in M_p(E) : \varphi \text{ не є неперевною в } \mu\}\right) = 0$.*

Тоді послідовність випадкових величин $(\varphi(\xi_n), n \ge 1)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$, тобто $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$.

Розділ 2

Перестановки Юенса

2.1 Граничний розподіл нерухомих точок

Розглянемо ймовірнісний розподіл на групі перестановок S_n, заданий у такий спосіб:

$$\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)},\ \pi \in S_n, \tag{2.1}$$

де $\theta > 0$ — фіксований параметр, а $\mathrm{c}(\pi)$ позначає кількість циклів у π. Цей розподіл також відомий як *міра Юенса*. Тут і далі відповідні випадкові перестановки називатимемо *перестановками Юенса*.

Зауваження. *Якщо $\theta = 1$, (2.1) задає рівномірний розподіл, тобто $\mathbb{P}(\{\pi\}) = \frac{1}{n!}$ для всіх $\pi \in S_n$.*

Перед тим, як вводити подальші поняття, розглянемо і доведемо наступну лему:

Лема 2.1.1. *Нехай σ — випадкова перестановка на множині $\{1, \dots, n\}$, що задана розподілом (2.1) (тобто, σ є перестановкою Юенса з S_n). Для $a \in \mathbb{R}$ позначимо $\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq a\}$. Нехай $\gamma \in [0,1]$, а $X_n = \operatorname{card}\{i \in \{1, \dots, \lceil \gamma n \rceil\} : \sigma(i) = i\}$ — кількість нерухомих точок σ серед перших $\lceil \gamma n \rceil$ натуральних чисел. Тоді X_n за розподілом збігається до $\operatorname{Poiss}(\gamma\theta)$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!} e^{-\gamma\theta},\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

Доведення. Отримаємо явну формулу для $\mathbb{P}(X_n = k)$, починаючи з випадку $k = 0$. Нехай F_i позначає множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 0) &= \mathbb{P}\left(F_1^C \cap F_2^C \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{\lceil \gamma n \rceil}\right) = \\ &= 1 - \sum_i \mathbb{P}(F_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(F_i \cap F_j) - \dots + (-1)^{\lceil \gamma n \rceil} \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{\lceil \gamma n \rceil}\right).\end{aligned}$$

У цьому виразі $\lceil \gamma n \rceil$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i)$, $C^2_{\lceil \gamma n \rceil}$ однакових доданків виду $\mathbb{P}(F_i \cap F_j)$ і так далі. Це означає, що достатньо знайти вирази для цих ймовірностей лише для конкретних наборів індексів. Якщо 1 є нерухомою точкою перестановки π, то вона має містити «тотожний» цикл (1), тобто $\pi = (1) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ є перестановкою множини $\{2, \dots, n\}$. Аналогічно, якщо 1 і 2 є нерухомими точками π, то $\pi = (1)(2) \circ \tilde{\pi}$, де $\tilde{\pi}$ вже є перестановкою множини

$\{3,\ldots,n\}$. Отже,

$$\mathbb{P}\left(1,2,\ldots,i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \mathbb{P}\left(\{\pi\}\right) =$$

$$= \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \frac{\theta^{\mathrm{c}(\pi)}}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} = [\mathrm{c}(\pi)\geq i] =$$

$$= \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\pi=(1)(2)\ldots(i)\circ\tilde{\pi}\in S_n} \theta^{\mathrm{c}(\pi)-i} = \frac{\theta^i}{\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-1)} \sum_{\tilde{\pi}\in S_{n-i}} \theta^{\mathrm{c}(\tilde{\pi})}.$$

Остання сума є сумою ймовірностей розподілу Юенса (2.1) на S_{n-i}, але без константи нормування, тому дорівнює $\theta(\theta+1)\ldots(\theta+n-i-1)$, отже

$$\mathbb{P}\left(1,2,\ldots,i \text{ є нерухомими точками } \sigma\right) = \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

З цього отримуємо

$$\mathbb{P}\left(X_n=0\right) = \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil}(-1)^i C_{\lceil\gamma n\rceil}^i \frac{\theta^i}{(\theta+n-i)\ldots(\theta+n-1)}.$$

$\mathbb{P}\left(X_n=k\right)$ для $k>0$ можна отримати аналогічно: існує $C_{\lceil\gamma n\rceil}^k$ способів вибрати k натуральних чисел, які будуть нерухомими точками, а для інших $\lceil\gamma n\rceil-k$ застосувати формулу, аналогічну до $\mathbb{P}\left(X_n=0\right)$:

$$\mathbb{P}\left(X_n=k\right) = C_{\lceil\gamma n\rceil}^k \sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i C_{\lceil\gamma n\rceil-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-i-k)\ldots(\theta+n-1)}.$$

Тепер доведемо $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(X_n=k\right) = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta}$.

$$\mathbb{P}\left(X_n=k\right) = \frac{(\lceil\gamma n\rceil)!}{k!(\lceil\gamma n\rceil-k)!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{(\lceil\gamma n\rceil-k)!}{i!(\lceil\gamma n\rceil-k-i)!}\frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i-k)} =$$

$$= \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{\lceil\gamma n\rceil-k}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\ldots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i-k)}.$$

Нехай N достатньо велике і $N<\lceil\gamma n\rceil-k$, тоді $\mathbb{P}\left(X_n=k\right)$ можна розбити на дві суми — S_1 від 0 до $N-1$ та S_2 від N до $\lceil\gamma n\rceil-k$.

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2| \leq \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\ldots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i-k)} \leq$$

$$\leq \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{\theta+n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k} \leq \sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}\left(\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\right)^{i+k}.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil} = \frac{\gamma}{1-\gamma}$ для $\gamma\in[0,1)$, $\frac{\lceil\gamma n\rceil}{n-\lceil\gamma n\rceil}\leq C=C(\gamma)$, то

$$\frac{k!}{\theta^k}\cdot|S_2| \leq C^k\sum_{i=N}^{\lceil\gamma n\rceil-k}\frac{\theta^i}{i!}C^i \leq C^k\sum_{i=N}^{\infty}\frac{\theta^i}{i!}C^i \to 0,\ N\to\infty.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} \le$$
$$\le \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-i+1)}{(n-1)\dots(n-i-k)} = \frac{n}{n-i-k} \to 1,\ n\to\infty,$$

тому цей дріб теж обмежений і $\lim_{N\to\infty} S_2 = 0$ також справджується. Що стосується S_1, то для фіксованого N

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\lim_{n\to\infty}\frac{\lceil\gamma n\rceil(\lceil\gamma n\rceil-1)(\lceil\gamma n\rceil-2)\dots(\lceil\gamma n\rceil-k-i+1)}{(\theta+n-1)\dots(\theta+n-i-k)} =$$
$$= \frac{\theta^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{\theta^i}{i!}\gamma^{i+k} = \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}\sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\frac{(\gamma\theta)^i}{i!} \to \frac{(\gamma\theta)^k}{k!}e^{-\gamma\theta},\ N\to\infty.$$

□

Користуючись позначеннями з леми 2.1.1, X_n можна інтерпретувати як $P_n([0,\gamma])$, де P_n є випадковою точковою мірою з атомами у нерухомих точках, нормованих n, тому результат леми можна записати як

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(P_n([0,\gamma]) = k\right) = \mathbb{P}\left(N([0,\gamma]) = k\right),\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Тут N є точковим процесом Пуассона з мірою інтенсивності $\theta\cdot\mathrm{Leb}$ on $[0,1]$. Виявляється, що має місце узагальнення цієї збіжності:

Теорема 2.1.2. *Точковий процес P_n грубо збігається за розподілом до точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta\cdot\mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ ($P_n \xrightarrow{vd} N, n\to\infty$).*

Як сказано в [2], *груба збіжність за розподілом* $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ послідовності випадкових мір ξ_n на деякому просторі S до деякої випадкової міри ξ означає, зо $\mathbb{E}\varphi(\xi_n)\to\mathbb{E}\varphi(\xi)$ для кожної обмеженої функції φ, неперервної відносно *грубої топології* на просторі (невипадкових) мір на S. У цій грубій топології, $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ означає $\int_S f d\mu_n \to \int_S f d\mu$ для всіх обмежених неперервних функцій f на S з обмеженим носієм. Оскільки $S = [0,1]$, усі функції на S мають обмежений носій, а їх власна обмеженість випливає з неперервності.

Наведемо визначення точкового процесу Пуассона (з [5]). Нехай μ — міра Радона (радонова міра?) на σ-алгебрі борелевих підмножин множини S — $\mathcal{B}(S)$. Точковий процес N називається *процесом Пуассона* або *випадковою мірою Пуассона* з мірою інтенсивності μ, якщо N задовольняє наступні умови:

1. Для будь-якої $F\in\mathcal{B}(S)$ та будь-якого невід'ємного цілого числа k

$$\mathbb{P}\left(N(F)=k\right) = \begin{cases}\frac{(\mu(F))^k}{k!}\exp\left\{-\mu(F)\right\}, & \mu(F)<\infty\\ 0, & \mu(F)=\infty\end{cases}$$

2. Для будь-якого натурального k, якщо $F_1,\dots,F_k$ з $\mathcal{B}(S)$ попарно не перетинаються, то $(N(F_i), 1\le i\le k)$ є незалежними в сукупності випадковими величинами.

Теорема 4.15 з [2] формулює критерій грубої збіжності точкових процесів:

Теорема (збіжність точкових процесів, Калленберг)**.** *Нехай $\xi,\xi_1,\xi_2,\dots$ — точкові процеси на S, де ξ простий, $\mathcal{U}\subset\hat{\mathcal{S}}_\xi$ — фіксоване (dissecting ring), а $\mathcal{I}\subset\mathcal{U}$ — напів-кільце. Тоді $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$ тоді і тільки тоді, коли*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(U)=0\right) = \mathbb{P}\left(\xi(U)=0\right), U \in \mathcal{U}$,

2. $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_n(I)>1\right) \le \mathbb{P}\left(\xi(I)>1\right), I \in \mathcal{I}$.

Формулювання цієї теореми потребує додаткових пояснень. Для невипадкової міри μ $\hat{\mathcal{S}}_\mu$ означає клас борелевих множин $B \subset S$ з $\mu(\partial B)=0$, а для випадкової міри ξ $\hat{\mathcal{S}}_\xi$ позначає $\hat{\mathcal{S}}_{\mathbb{E}\xi}$. Клас $\mathcal{C}$ обмежених борелевих підмножин S називається dissecting, якщо кожна відкрита множина $G \subset S$ представляється у вигляді зліченного об'єднання множин з $\mathcal{C}$, а кона обмежена борелева множина $B \subset S$ покривається скінченною кількістю множин з $\mathcal{C}$.

Розглянемо клас $\mathcal{X}$ of скінченних диз'юнктних об'єднань інтервалів $\langle a,b\rangle \subset [0,1]$, де $\langle a,b\rangle$ позначає одне з $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ чи $(a,b]$. Для точкового процесу Пуассона N з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$ (який є простим), $\mathbb{E}N(\partial B) = \Lambda(\partial B)$, тому для всіх $B \subset \mathcal{X}$ $\mathbb{E}N(\partial B)=0$, бо ∂B складається зі скінченного об'єднання окремих точок. Це означає, що $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{X}$. Також, $\mathcal{X}$ є кільцем і dissecting класом, оскільки всі необхідні умови очевидно виконуються. Отже, для доведення теореми 2.1.2, можна використати теорему Калленберга про збіжність для $\xi_n = P_n$, $\xi = N$ та $\hat{\mathcal{S}}_N = \mathcal{U} = \mathcal{I} = \mathcal{X}$.

Доведення теореми 2.1.2. Нехай $\langle\gamma_1,\delta_1\rangle, ..., \langle\gamma_m,\delta_m\rangle$ $(\gamma_1 < \delta_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \delta_m)$ — набір інтервалів в $[0,1]$, що попарно не перетинаються, $\lfloor a\rfloor = \max\{k\in\mathbb{Z} : k \le a\}$, $I_j = \{\lfloor\gamma_j n\rfloor+1, \lceil\delta_j n\rceil\}$ і $I = \bigvee_{j=1}^m I_j \in \mathcal{X}$. Позначимо $Y_n = \mathrm{card}\,\{i\in I : Z_n(i)=i\}$, тоді $P_n(I)=Y_n$. Як у і лемі 2.1.1, позначимо F_i множину перестановок, для яких i є нерухомою точкою, тоді

$$\mathbb{P}\left(Y_n=0\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right)$$

Нехай $\mathcal{M} = \mathrm{card}\, I = \sum_{j=1}^m \left(\lceil\delta_j n\rceil - \lfloor\gamma_j n\rfloor\right)$ і, аналогічно лемі 2.1.1,

$$\mathbb{P}\left(Y_n=k\right) = C_{\mathcal{M}}^k \sum_{i=0}^{\mathcal{M}-k} (-1)^i C_{\mathcal{M}-k}^i \frac{\theta^{i+k}}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i-k)}$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty}\frac{\mathcal{M}}{n} = \sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)$, повторенням доведення збіжності у лемі 2.1.1, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(Y_n=k\right) = \frac{1}{k!}\left(\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right)^k \exp\left\{-\theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)\right\}, k\in\mathbb{N}_0$$

Оскільки $\Lambda(I) = \theta\cdot\mathrm{Leb}(I) = \theta\sum_{j=1}^m(\delta_j-\gamma_j)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(P_n(I)=0\right) = \mathbb{P}\left(N(I)=0\right), I\in\mathcal{X}$$

Так як $\mathbb{P}\left(P_n(I)>1\right) = 1-\left(\mathbb{P}\left(P_n(I)=0\right)+\mathbb{P}\left(P_n(I)=1\right)\right)$ і $\mathbb{P}\left(P_n(I)=1\right)\to\mathbb{P}\left(N(I)=1\right)$ для $I\in\mathcal{X}$, отримуємо навіть більше, ніж треба:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(P_n(I)>1\right) = \mathbb{P}\left(N(I)>1\right), I\in\mathcal{X}$$

Значення цих двох границь доводять $P_n \xrightarrow{vd} N, n\to\infty$. □

Для наступних досліджень будуть важливі перестановки з принаймні однією нерухомою точкою. З 2.1.2, для $\gamma=1$ $\mathbb{P}\left(X_n=0\right) = \sum_{i=0}^n(-1)^i C_n^i\frac{\theta^i}{(\theta+n-1)\ldots(\theta+n-i)} \to e^{-\theta}, n\to\infty$. Введемо ще один точковий процес P'_n, що визначений для борелевих множин $F\in\mathcal{B}([0,1])$ як

$$\mathbb{P}\left(P'_n(F)=k\right) = \mathbb{P}\left(P_n(F)=k \mid P_n(F)>0\right) = \begin{cases}\frac{\mathbb{P}(P_n(F)=k)}{1-\mathbb{P}(P_n(F)=0)}, & k>0\\ 0, & k=0\end{cases} \tag{2.3}$$

Повторенням доведення 2.1.2 можна отримати наступний результат:

Теорема 2.1.3. *Точковий процес P_n' грубо збігається за розподілом до «обумовленого» точкового процесу Пуассона N' з мірою інтенсивності $\Lambda = \theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0,1]$, для якого*

$$\mathbb{P}\left(N'(F) = k\right) = \frac{(\Lambda(F))^k}{k!} \frac{\exp\left\{-\Lambda(F)\right\}}{1 - \exp\left\{-\Lambda(F)\right\}}$$

для всіх $F \in \mathcal{B}([0,1])$ ъта $k \in \mathbb{N}$.

Точковий процес N' можна назвати обумовленим процесом Пуассона, бо

$$\mathbb{P}\left(N(F) = k \mid N(F) > 0\right) = \frac{\mathbb{P}\left(N(F) = k, N(F) > 0\right)}{\mathbb{P}\left(N(F) > 0\right)} = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(N(F)=k)}{1-\exp\{-\Lambda(F)\}}, & k > 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

тому $\mathbb{P}\left(N(F) = k \mid N(F) > 0\right) = \mathbb{P}\left(N'(F) = k\right)$ для $k \in \mathbb{N}$.

2.2 Статистичні властивості нерухомих точок

Результати теорем 2.1.2 та 2.1.3 можуть бути застосовані з теоремою про неперервне відображення з [7]. В термінах грубої збіжності точкових процесів, її можна сформулювати наступним чином:

Теорема 2.2.1 (теорема про неперервне відображення)**.** *Нехай φ є неперервним відображенням з простору $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$ точкових мір на $[0,1]$ з грубою топологією в $\mathbb{R}$ зі стандартною топологією. Якщо ξ_n — послідовність точкових процесів, що грубо збігається за розподілом до ξ, $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$, тоді $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{d} \varphi(\xi)$, тобто послідовність випадкових величин $\varphi(\xi_n)$ збігається за розподілом до $\varphi(\xi)$.*

Зауваження. *За означенням збіжності за розподілом, якщо φ є обмеженою, то також має місце $\mathbb{E}\varphi(\xi_n) \to \mathbb{E}\varphi(\xi)$.*

Перед дослідженням граничних розподілів для деяких відображень, варто навести твердження 3.13 з [5], яке можна сформулювати наступним чином:

Лема 2.2.2. *Нехай μ_n — грубо збіжна послідовність точкових мір в $\mathcal{M}^p_{[0,1]}$, тобто $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Тоді*

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i^{(n)}},\ \mu = \sum_{i=1}^{k} \delta_{x_i}$$

де δ_x є мірою Дірака, зосередженою в x, а $x_i^{(n)} \to x_i, n \to \infty$ для $i = 1, \ldots, k$.

Це означає, що будь-яка неперервна функція з $\mathbb{R}^k$ (або принаймні $[0,1]^k$) в $\mathbb{R}$ задає неперервне відносно грубої топології відображення.

2.2.1 Найменша та найбільша нерухомі точки

Для точкової міри μ відображення можна визначити два відображення $\min(\mu) = \sup\left\{x \in [0,1] :\right.$ та $\max(\mu) = \inf\left\{x \in [0,1] : \mu([x,1]) = 0\right\}$, що ставлять у відповідність цій мірі її найменший та найбільший атом, де для порожньої множини за домовленістю $\sup\varnothing = 0$ та $\inf\varnothing = 1$. Нехай $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Оскільки $\min\left\{x_1, \ldots, x_k\right\}$ та $\max\left\{x_1, \ldots, x_k\right\}$ є неперервними функціями з $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}$, з леми 2.2.2 випливає, що $\min(\mu)$ та $\max(\mu)$ є неперервними відносно грубої топології.

Незважаючи на результат теореми 2.1.3, простіше отримати розподіл $\min(N)$ та $\max(N)$, ніж $\min(N')$ та $\max(N')$, оскільки умовний розподіл $\mathbb{P}\left(N(F) = k \mid N([0,1]) = m\right)$ є відомим (твердження 3.8, [6]) — це біноміальний процес з розміром m та розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$. Іншим корисним фактом є такий: нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m$ є тоді розподіли $U_{(1)}$ та $U_{(m)}$ задаються

$$\mathbb{P}\left(U_{(1)} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^m, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}, \; \mathbb{P}\left(U_{(m)} \leq x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^m, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Отже, розподіли $\min(N)$ та $\max(N)$ задаються

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\min(N) \leq x\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) = \\ &= \mathbb{1}\left\{x \geq 1\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\min(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \left(1-(1-x)^m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = 1 - e^{-\theta x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max(N) \leq x\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = m\right) = \\ &= \mathbb{1}\left\{x \geq 0\right\} \cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid N([0,1]) = m\right) \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} x^m \frac{\theta^m}{m!} e^{-\theta} = e^{\theta(x-1)}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ці розподіли є змішаними, бо $\mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) = e^{-\theta}$ і тому $\mathbb{P}\left(\min(N) = 1\right) = \mathbb{P}\left(\max(N) = 0\right) = e^{-\theta}$. Відповідні умовні розподіли є абсолютно неперервними:

$$\mathbb{P}\left(\min(N) \leq x \mid \min(N) < 1\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\mathbb{P}\left(\max(N) \leq x \mid \max(N) > 0\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Умови $\{\min(N) < 1\}$ та $\{\max(N) > 0\}$ еквівалентні $\{N([0,1]) > 0\}$, тому умовні розподіли (2.6) та (2.7) задають безумовні розподіли $\min(N')$ та $\max(N')$.

Для P'_n $\min(P'_n) = \sup\left\{x \in [0,1] : \mathrm{card}\left\{i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\} : Z(i) = i\right\} = 0\right\}$ означає супремум значень x, для яких усі $i \in \{1, \ldots, \lceil xn \rceil\}$ під дією перестановки опиняються не на своїх місцях, аналогічно $\max(P'_n)$ означає інфімум x, для $i \in \{\lfloor xn \rfloor + 1, \ldots, n\}$ опиняються не на своїх місцях. Легко побачити, що такі x можуть набувати лише значень, що є пропорційними $\frac{1}{n}$.

```
--- CDF plot ---
```

Обчислення $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \min(N') \le \frac{k}{n}\right)$ та $\mathbb{P}\left(\frac{k-1}{n} < \max(N') \le \frac{k}{n}\right)$ дає приблизну частку перестановок, для яких k є відповідно найменшою та найбільшою нерухомою точкою.

```
--- comparison table ---
```

Також, $\mathbb{E}\min(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{1-e^{-\theta x}}{1-e^{-\theta}}\right) dx = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\mathbb{E}\max(N') = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^{\theta x}-1}{e^{\theta}-1}\right) dx = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$, тому $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\min(P'_n) = \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-e^{\theta}}$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\max(P'_n) = 1 - \frac{1}{\theta} + \frac{1}{e^{\theta}-1}$.

2.2.2 Сума нерухомих точок

Граничний розподіл суми нерухомих точок можна отримати, користуючись функціоналом Лапласа точкового процесу Пуассона. З [7], для процесу Пуассона з мірою інтенсивності $\theta \cdot \mathrm{Leb}$ на $[0, 1]$, цей функціонал задається

$$\psi_N(f) = \mathbb{E}\exp\left\{-\int_0^1 f(x)dN\right\} = \exp\left\{-\,\theta\int_0^1 \left(1 - e^{-f(x)}\right) dx\right\} \tag{2.8}$$

для вимірних, невід'ємних, обмежених функцій f на $[0, 1]$.

Позначатимемо $\mathrm{sum}(N)$ суму атомів точкового процесу Пуассона N. Для будь-якої точкової міри μ, $\mathrm{sum}(\mu) = \int_0^1 x d\mu$. Перетворення Лапласа невід'ємної випадкової величини X задається $\mathcal{L}\{X\}(p) = \mathbb{E}e^{-pX}$. Якщо порівняти це означення з (2.8), можна побачити, що перетворення Лапласа $\mathrm{sum}(N)$ дорівнює значенню $\psi_N(f)$ для $f(x) = px$. Пряме обчислення дає наступний результат:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N)\}(p) = \exp\left\{-\theta\left(1 + \frac{1}{p}(e^{-p} - 1)\right)\right\} \tag{2.9}$$

Оскільки розподіл $\mathrm{sum}(N)$ є сумішшю абсолютно неперервного розподілу та дискретного з атомом в 0, можна знайти перетворення Лапласа лише абсолютно неперервної частини, що також буде перетворення для $\mathrm{sum}(N')$.

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N)\}(p) = \mathbb{E}e^{-p\cdot\mathrm{sum}(N)} = 1\cdot\mathbb{P}(\mathrm{sum}(N) = 0) + \mathbb{E}e^{-p\cdot\mathrm{sum}(N')}\cdot\mathbb{P}(\mathrm{sum}(N) > 0) =$$
$$= e^{-\theta} + \mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N')\}(p)\cdot(1 - e^{-\theta}) \Rightarrow \mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N')\}(p) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N)\}(p) - e^{-\theta}\right) =$$
$$= \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\}$$

Оскільки $\mathrm{sum}(N')$ є абсолютно неперервною випадковою величиною, $\mathcal{L}\{\mathrm{sum}(N')\}(p)$ є перетворенням Лапласа для щільності, тому перетворення Лапласа для функції розподілу $\mathrm{sum}(N')$ задається

$$\mathcal{L}\left\{F_{\mathrm{sum}(N')}(x)\right\}(p) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}}\frac{1}{p}\exp\left\{-\frac{\theta}{p}(e^{-p} - 1)\right\} \tag{2.10}$$

Знаходження оберненого перетворення для (2.10) є доволі складним.

Хоча, існує інший підхід до знаходження $F_{\mathrm{sum}(N)}(x)$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{sum}(N) \le x) = \sum_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m)\,\mathbb{P}(N([0,1]) = m) =$$
$$= \mathbb{1}\{x \ge 0\}\cdot e^{-\theta} + \sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m)\,\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta}$$

Умовні розподіли $\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid N([0,1]) = m\right)$ є розподілами Ірвіна-Голла — розподілами суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$. Їх функція розподілу наступна:

$$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k C_m^k (x-k)^m, & 0 \le x < m \\ 1, & x \ge m \end{cases}$$

Для кожного інтервалу $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right)$ може бути виражена через $I_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ — модифіковані функції Бесселя першого роду:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

Наприклад:

$$x \in [0,1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m\right) = e^{-\theta}\cdot I_0(2\sqrt{\theta x})$$

$$x \in [1,2),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m - \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m\right) =$$

$$= e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)}\cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)})\right)$$

$$x \in [2,3),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\left(1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^2}{2!} + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m!)^2}x^m - \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!m!}(x-1)^m + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-2)!m!}(x-2)^m\right) = e^{-\theta}\left(I_0(2\sqrt{\theta x}) - \sqrt{\theta(x-1)}\cdot I_1(2\sqrt{\theta(x-1)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}\theta(x-2)I_2(2\sqrt{\theta(x-2)})\right)$$

В загальному випадку:

$$x \in [n, n+1),\ \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = e^{-\theta}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right)$$

Отже, функція розподілу $\mathrm{sum}(N)$ задається

$$F_{\mathrm{sum}(N)}(x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\theta}\sum\limits_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\theta(x-k)\right)^{\frac{k}{2}} I_k\left(2\sqrt{\theta(x-k)}\right), & x \ge 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Таким чином, функція розподіу $\mathrm{sum}(N')$ може бути виражена через $F_{\mathrm{sum}(N)}(x)$ настуним чином:

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N') \le x\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{sum}(N) \le x \mid \mathrm{sum}(N) > 0\right) = \frac{1}{1-e^{-\theta}}\left(F_{\mathrm{sum}(N)}(x) - e^{-\theta}\right) \tag{2.12}$$

`--- CDF plot ---`

При цьому, $\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N)$ значно простіше знайти за формулою повного математичного сподівання, оскільки для $m > 0$ $\mathbb{E}\left(\mathrm{sum}(N) \mid N([0,1]) = m\right) = \frac{m}{2}$ як математичне сподівання суми m незалежних випадкових величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$:

$$\mathbb{E}\,\mathrm{sum}(N) = 0\cdot\mathbb{P}\left(N([0,1]) = 0\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{2}\frac{\theta^m}{m!}e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\theta^m}{(m-1)!} = \frac{\theta}{2}$$

2.2.3 Найменші і найбільші спейсинги

Визначимо граничні розподілу найменшого і найбільшого спейсингів — відстаней між нерухомими точками.

Зауваження. *Щоб застосувати тут теоретичні результати, що стосуються випадкового розбиття інтервалів, зручно вважати* $\min(N)$ *and* $1-\max(N)$ *спейсингами. Для випадкової перестановки* $\{1,\dots,n\}$ *це означатиме вважати* 0 *та* $n+1$ *«штучними» нерухомими точками.*

Нехай $U_1, U_2, \dots, U_n$ — незалежні випадкові величин з розподілом $\mathrm{Unif}\,(0,1)$, що розділяють відрізок $[0,1]$ на $n+1$ інтервалів з довжинами $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$, або, у відсортованому вигляді, $S_{(1)}^{[n+1]} < S_{(2)}^{[n+1]} < \cdots < S_{(n+1)}^{[n+1]}$ (тут і далі, $S_{(i)}$ позначає i-ту порядкову статистику, а $S_{(i)}^{[n]}$ — те ж саме, але з вказанням n як кількості цих статистик). Розподіли $S_{(k)}^{[n+1]}$ отримано у багатьох роботах (наприклад, [8], [9]). Зокрема, для $x \in [0,1]$:

$$\mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) = \left((1-(n+1)x)_+\right)^n \tag{2.13}$$

$$\mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} C_{n+1}^{j} \left((1-jx)_+\right)^n \tag{2.14}$$

де $x_+ = \max(x, 0)$.

Отже, розподіли найменшого $\text{s-min}(N)$ та найбільшого $\text{s-max}(N)$ спейсингів між атомами N задаються (з домовленістю $S_{(1)}^{1} = 1$)

$$\mathbb{P}\left(\text{s-min}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.15}$$

$$\mathbb{P}\left(\text{s-max}(N) > x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_{(n+1)}^{[n+1]} > x\right) \mathbb{P}\left(N([0,1]) = n\right) \tag{2.16}$$

Хоча явні вирази для (2.15) та (2.16), скоріш за все, доволі складні, цікаво звернути увагу на дві випадкові величини з такими ж розподілами.

Добре відомо (наприклад, [8]), що для незалежних величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$ мають місце наступні три рівності:

$$(S_1, S_2, \dots, S_n)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_2}{\sum_{i=1}^n X_i}, \dots, \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.17}$$

$$\left(S_{(1)}, S_{(1)}, \dots, S_{(n)}\right)^T \stackrel{d}{=} \left(\frac{X_{(1)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{X_{(2)}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \dots, \frac{X_{(n)}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^T \tag{2.18}$$

$$X_{(i)} \stackrel{d}{=} \frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1} \tag{2.19}$$

Виявляється, (2.18) та (2.19) можна узагальнити в наступну неочікувану рівність:

Лема 2.2.3. *Для порядкових статистик спейсингів між незалежними величинами з розподілом* $\mathrm{Unif}\,(0,1)$ *та та незалежних величин* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *з розподілом* $\mathrm{Exp}\,(1)$ *має місце*

$$S_{(i)}^{[n]} \stackrel{d}{=} \frac{\frac{X_n}{n} + \frac{X_{n-1}}{n-1} + \cdots + \frac{X_{n-i+1}}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i}, i = 1, \dots, n \tag{2.20}$$

Доведення. Позначимо спейсинги між $X_1, X_2, \dots, X_n$ через $\Delta_1 = X_{(1)}$, $\Delta_i = X_{(i)} - X_{(i-1)}, i = 2, \dots, n$. З [10] відомо, що всі Δ_i незалежні та мають розподіли $\mathrm{Exp}\,(n-i+1)$. Отже, праву частину $S_{(i)} \overset{d}{=} \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j}$ можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_{(j)}} = \frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_i}{\Delta_1 + (\Delta_1 + \Delta_2) + \dots + (\Delta_1 + \dots + \Delta_n)}$$

Введемо нові незалежні випадкові величини $Y_i = (n-i+1)\Delta_i$ з розподілом $\mathrm{Exp}\,(1)$. В термінах Y_i, верхню рівність можна переписати як

$$\frac{X_{(i)}}{\sum_{j=1}^n X_j} = \frac{\sum_{j=1}^i \frac{Y_j}{n-j+1}}{\sum_{j=1}^n Y_j}$$

Оскільки X_i та Y_i незалежні та мають однакові розподіли, то отримуємо (2.20). $\square$

Окремими випадками леми 2.2.3 є $S_{(1)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{X_1}{n \sum_{i=1}^n X_i}$ та $S_{(n)}^{[n]} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n-i+1}}{\sum_{i=1}^n X_i} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^n X_i}$. Разом з (2.15) та (2.16) вони приводять до наступних рівностей за розподілом:

$$\text{s-min}(N) \overset{d}{=} \frac{X_1}{(\nu+1)\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i}, \quad \text{s-max}(N) \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{\nu+1} X_i} \tag{2.21}$$

де ν має розподіл $\mathrm{Poiss}\,(\theta)$, а $(X_i, i \in \mathbb{N})$ незалежні і мають розподіл $\mathrm{Exp}\,(1)$.

$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N)$ та $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N)$ можна знайти з (2.21). Нехай $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тоді

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} + \dots + \frac{X_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{X_i}{i}}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i}$$

Оскільки $\mathbb{P}\,(\nu = n) = \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta}$, то

$$\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^n}{n \cdot n!} = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{e^t - 1}{t} dt$$

$$\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) = \frac{e^{-\theta}}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n!} \theta^n$$

де $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ — n-те гармонічне число Зокрема, для $\theta = 1$ (випадок рівномірного розподілу) $\mathbb{E}\,\text{s-min}(N) \approx 0.48483$ and $\mathbb{E}\,\text{s-max}(N) \approx 0.7966$.

Бібліоґрафія

[1] Спекторський Ігор Якович. *Дискретна математика.* Київ, НТУУ «КПІ», ННК «ІПСА», 2004.

[2] Olav Kallenberg. *Random Measures, Theory and Applications.* Springer International Publishing, 2017.

[3] Y. M. Berezansky; Z. G. Sheftel; G. F. Us. *Functional analysis*, volume 1. Birkhäuser Verlag, 1996.

[4] Богданський Юрій Вікторович. *Інтеграл в курсі аналізу.* Видавництво «Політехніка», Київ, 2013.

[5] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer New York, 1987.

[6] Günter Last and Mathew Penrose. *Lectures on the Poisson Process.* Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2017.

[7] Sidney I. Resnick. Crash course II: Weak convergence; implications for heavy-tail analysis. In *Heavy-Tail Phenomena*, pages 39–69. Springer New York, 2007.

[8] Lars Holst. On the lengths of the pieces of a stick broken at random. *Journal of Applied Probability*, 17(3):623–634, 1980.

[9] Iosif Pinelis. Order statistics on the spacings between order statistics for the uniform distribution, 2019.

[10] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan, and H. N. Nagaraja. *A First Course in Order Statistics (Classics in Applied Mathematics).* Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, 2008.