Основи диференціальних ігор

Н. Фордуй, О. Галганов

Основні поняття

Рішення, що їх приймають гравці, полягають у виборі так званих **керувань**, від яких залежать **фазові координати**: їх значення у будь-який момент часу повністю визначає хід гри, характеризуючи положення гравців у деякому просторі — **фазовому просторі**.
Поточні значення фазових координат завжди відомі гравцям — тобто, це ігри з повною інформацією. Невідомим зазвичай є характер їх зміни: тобто, **керування** фазовими змінними гравцями.

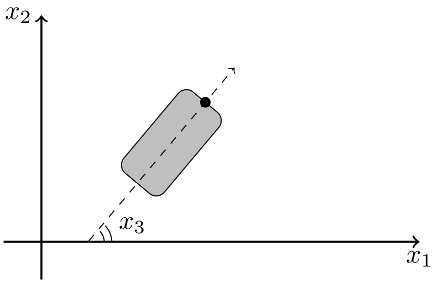
Приклад

Положення матеріальної точки на площині описується двома координатами x_1 та x_2. Нехай швидкість руху точки є сталою v, а гравець обирає напрямок швидкості φ та може змінювати його у будь-який момент часу — тобто, φ є керуванням. Тоді рух точки описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v\cos\varphi \\ \dot{x}_2 = v\sin\varphi \end{cases}$$

Приклад

Геометричне положення автомобіля на декартовій площині описується трьома фазовими координатами: x_1, x_2 — положення деякої точки автомобіля, x_3 — кут, який утворює вісь вздовж автомобіля з деяким фіксованим напрямком — наприклад, x_1.



Продовження приклада

Нехай A — максимальне можливе прискорення автомобіля, тоді прискорення може набувати значень $A\varphi_1$, де $\varphi_1 \in [0; 1]$ і знаходиться під контролем гравця-водія. Можна ввести ще одну фазову координату x_4 — швидкість автомобіля. Таким чином, можна ввести кривину як ще одну фазову координату x_5 (фізично — це кут повороту передніх коліс), керуванням якої є $W\varphi_2$, де $\varphi_2 \in [-1; 1]$, а W — максимальна швидкість зміни x_5.
Система задає рух автомобіля у деякій диференціальній грі:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_4 \cos x_3 \\ \dot{x_2} = x_4 \sin x_3 \\ \dot{x_3} = x_4 x_5 \\ \dot{x_4} = A\varphi_1, \ \varphi_1 \in [0; 1] \\ \dot{x_5} = W\varphi_2, \ \varphi_2 \in [-1; 1] \end{cases}$$

Опис руху

Вважаємо, що гра відбувається у *фазовому просторі* $\mathcal{E}$ — деякій області в $\mathbb{R}^n$ та на її межі. Рух точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ у фазовому просторі описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = f_1(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(x,t), ..., u_P(x,t), v_1(x,t), ..., w_E(x,t)) \\ \dot{x_2}(t) = f_2(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(x,t), ..., u_P(x,t), v_1(x,t), ..., w_E(x,t)) \\ \dots \\ \dot{x_n}(t) = f_n(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(x,t), ..., u_P(x,t), v_1(x,t), ..., w_E(x,t)) \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, ..., x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

або, коротше,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x,t), v(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ці рівняння називаються *рівняннями руху*. Функції f_j є заданими та вважаються достатньо гладкими.

Приклад

Якщо позначити через (x_P, y_P) координати гравця P, через (x_E, y_E) — гравця E, через w_P та w_E їх сталі швидкості руху, а керування напрямком швидкості через $u(t)$ та $v(t)$ відповідно, то отримаємо такі рівняння руху:

$$\begin{cases} \dot{x_P}(t) = w_P \cos u(t) \\ \dot{y_P}(t) = w_P \sin u(t) \\ \dot{x_E}(t) = w_E \cos v(t) \\ \dot{y_E}(t) = w_E \sin v(t) \\ (x_P(0), y_P(0)) = (x_P^0, y_P^0) \\ (x_E(0), y_E(0)) = (x_E^0, y_E^0) \end{cases}$$

Такий рух називається «переслідуванням на площині з простим рухом гравців».

Виграші

Мета диференціальної гри визначається виграшем, який залежить від траєкторій гравців. Позначимо ці траєкторії як функції від часу як $x(t)$ та $y(t)$. Зауважимо, що диференціальні ігри є *антагоністичними* (або ж, *іграми з нульовою сумою*).

Якщо гра триває деякий заздалегідь визначений час T, то виграш гравця E визначається як $H(x(t), y(T))$, де $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — деяка функція (нагадаємо, що розмірність $\mathcal{E}$ — n).

Приклади виграшів

1. $H(x(T), y(T)) = \|x(T) - y(T)\|$
2. $H(x(T), y(T)) = \min\limits_{0 \le t \le T} \|x(t) - y(t)\|$
3. $H(x(T), y(T)) = t_* = \min\{t \ge 0 : (x(t), y(t)) \in \mathcal{T}\}$

Приклад

Розглянемо переслідування на площині з простим рухом, що описується системою

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, \ u_1^2 + u_2^2 \le \alpha^2 \\ \dot{y}_1 = v_1, \dot{y}_2 = v_2, \ v_1^2 + v_2^2 \le \beta^2 \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, y_1(0) = y_1^0, y_2(0) = y_2^0 \end{cases}$$

Якщо $\alpha > \beta$, то гравець P може гарантувати

$$\forall l \ge 0 : \min\{t \ge 0 : \|P(t) - E(t)\| \le l\} < +\infty$$

Якщо $\alpha \le \beta$, то в разі $\|P(0) - E(0)\| > l$ для всіх $l \ge 0$ гравець E, рухаючись від P по прямій з максимальною швидкістю, зможе уникнути захоплення гравцем P.

Поняття стратегії

Означення

Стратегіями у диференціальній грі є вибір керувань u та v як функцій від часу t та фазових координат x у системі рівнянь руху

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x,t), v(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Керування вважаються кусково-гладкими як компроміс між забезпеченням існування розв'язку, (його може не існувати у класі неперервних функцій) та його єдиності (вона може порушуватися, якщо не вимагати неперервності розв'язку).
Позначатимемо через P та E множини кусково-неперервних стратегій (керувань) гравців P та E.

Ситуація

Надалі для спрощення розглядатимемо не один вектор x, а два вектори x та y, що відповідатимуть руху кожного з гравців. Тоді систему можна записати як

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, y, t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), v(x, y, t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Означення

Набір $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$, де x_0, y_0 — початкові умови, а $u \in \mathrm{P}$, $v \in \mathrm{E}$ — керування, називається *ситуацією* в диференціальній грі.

Умова існування та єдиності траекторій

Якщо розглядати траєкторії, що залежать лише від часу t та накладати на f та g умови обмеженості та ліпшицевості по x та y, тобто

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|,$$
$$\|g(y_1, v) - g(y_2, v)\| \leq \beta \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

то за теоремою про існування та єдиність роз'язку задачі Коші, для кожної ситуації S буде існувати єдина пара траєкторій $x(t), y(t)$, для якої

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) = g(y(t), v(t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

Формальне визначення виграшів та їх види

Означення

Користуючись означенням ситуації, можна ввести *виграш* в ситуації $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ як функцію $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$.

Наведемо строгі означення 4 видів виграшів.

Означення

1. *Термінальний виграш.* Задано деяке число $t > 0$ та неперервна по x та y функція $H(x, y)$. Виграш в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ визначається як:

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = H(x(T), y(T))$$

Види виграшів

Означення

2. *Мінімальний результат*. Задано деяке число $t > 0$ та неперервна по x та y функція $H(x, y)$. Виграш в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ визначається як

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \min_{0 \le t \le T} H(x(t), y(t))$$

3. *Інтегральний виграш*. Нехай $\mathcal{T}$ — деяка підмножина $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $H(x, y)$ — неперервна функція. Нехай в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ t_* — перший момент потрапляння траєкторії $(x(t), y(t))$ на $\mathcal{T}$. Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \int\limits_0^{t_*} H(x(t), y(t))dt$$

де при $t_* = +\infty$ покладається $K = +\infty$.

Види виграшів

Означення

4. *Якісний виграш*. Нехай $\mathcal{T}$ та $\mathcal{L}$ — деякі підмножини $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а t_* — перший момент потрапляння траєкторії $(x(t), y(t))$ на $\mathcal{T}$ в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$. Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{якщо } t_* = +\infty \\ -1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \notin \mathcal{L} \end{cases}$$

Нормальна форма диференціальної гри

Нарешті, можна дати означення нормальної форми диференціальної гри.

Означення

Нормальною формою диференціальної гри $\Gamma(x_0, y_0)$, заданої на просторі стратегій $\mathrm{P} \times \mathrm{E}$, називається система

$$\Gamma(x_0, y_0) = \langle x_0, y_0, \mathrm{P}, \mathrm{E}, K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))\rangle \tag{2}$$

де $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$ — функція виграшу, визначена будь-який з чотирьох способів вище.

Кожній парі $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ відповідає своя гра в нормальній формі, тобто, фактично, визначається двопараметрична сім'я ігор, що залежать від (x_0, y_0).