

# Основи диференціальних ігор

О. Галганов, Н. Фордуй

Класична теорія ігор, творцями якої є Джон фон Нейман та Оскар Морґенштерн, оперує матричними іграми та зв'язаними з ними поняттями. Такі ігри зовсім не покривають всі можливості формалізувати процеси, в яких гравці приймають рішення. Наприклад, якщо розглядати задачу про оптимальну траєкторію руху корабля від керованої торпеди, яка його переслідує, то необхідно досліджувати не просто скінченний набір можливих дій кожного з гравців, а континуум можливих стратегій, кожна з яких відповідає деякій комбінації траєкторій руху корабля та торпеди.

Сам термін «диференціальна гра» було введено Руфусом Айзексом — одним з основоположників теорії диференціальних ігор.



Джон фон Нейман



Оскар Морґенштерн



Руфус Айзекс

Рішення, що їх приймають гравці, полягають у виборі так званих **керувань**, від яких залежать **фазові координати**: їх значення у будь-який момент часу повністю визначає хід гри, характеризуючи положення гравців у деякому просторі — **фазовому просторі**.

Поточні значення фазових координат завжди відомі гравцям — тобто, це ігри з повною інформацією. Невідомим зазвичай є характер їх зміни: тобто, **керування** фазовими змінними гравцями.

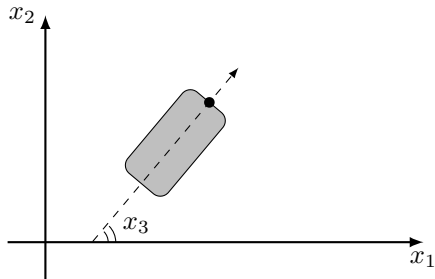
## Приклад

Положення матеріальної точки на площині описується двома координатами  $x_1$  та  $x_2$ . Нехай швидкість руху точки є сталою  $v$ , а гравець обирає напрямок швидкості  $\varphi$  та може змінювати його у будь-який момент часу — тобто,  $\varphi$  є керуванням. Тоді рух точки описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v \cos \varphi \\ \dot{x}_2 = v \sin \varphi \end{cases}$$

# Приклад

Геометричне положення автомобіля на декартовій площині описується трьома фазовими координатами:  $x_1, x_2$  — положення деякої точки автомобіля,  $x_3$  — кут, який утворює вісь вздовж автомобіля з деяким фіксованим напрямком — наприклад,  $x_1$ .



## Продовження приклада

Нехай  $A$  — максимальне можливе прискорення автомобіля, тоді прискорення може набувати значень  $A\varphi_1$ , де  $\varphi_1 \in [0; 1]$  і знаходиться під контролем гравця-водія. Можна ввести ще одну фазову координату  $x_4$  — швидкість автомобіля. Як ще одну фазову координату  $x_5$  можна ввести кривину (фізично — це кут повороту передніх коліс), керуванням якої є  $W\varphi_2$ , де  $\varphi_2 \in [-1; 1]$ , а  $W$  — максимальна швидкість зміни  $x_5$ .

Система задає рух автомобіля у деякій диференціальній грі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 x_5 \\ \dot{x}_4 = A\varphi_1, \varphi_1 \in [0; 1] \\ \dot{x}_5 = W\varphi_2, \varphi_2 \in [-1; 1] \end{cases}$$

Вважаємо, що гра відбувається у *фазовому просторі*  $\mathcal{E}$  — деякій області в  $\mathbb{R}^n$  та на її межі. Рух точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  у фазовому просторі описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, w_E(x, t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, w_E(x, t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, w_E(x, t)) \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \dots, x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

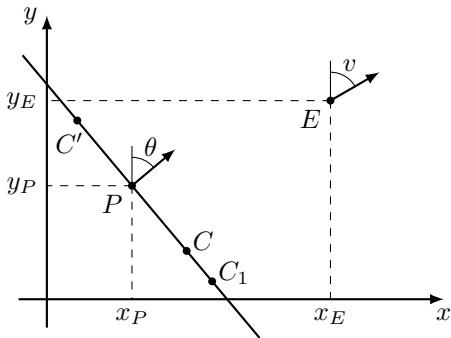
або, коротше,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, t), v(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ці рівняння називаються *рівняннями руху*. Функції  $f_j$  є заданими та вважаються достатньо гладкими.

## Приклад (гра «водій-вбивця»)

Гра відбувається на площині. Переслідувач  $P$  рухається зі сталою швидкістю  $w_P$ , радіус кривини його траєкторії обмежений заданою величиною  $R$ . Керування  $P$  — це вибір значення кривини в кожний момент часу. Рух утікача  $E$  простий: швидкість  $w_E$  фіксована, керуванням є вибір напрямку швидкості  $v(t)$ .  $E$  є більш маневреним, ніж  $P$ . Фазовими координатами в цій грі є пари  $x_P, y_P$  і  $x_E, y_E$  для опису положення  $P$  та  $E$  відповідно, та  $\theta$  — напрямок руху  $P$ .





## Приклад (гра «водій-вбивця»)

Керування  $E$  — це вибір кута швидкості  $v$ . Керування  $P$  записати дещо складніше. Проведемо через точку  $(x_P, y_P)$  пряму  $C'PC$ ,  $|C'P| = |PC| = R$ , перпендикулярну до вектору швидкості  $P$ .  $P$  обирає миттєвий центр кривини своєї траєкторії у довільній точці  $C_1$  цієї прямої, що лежить за межами відрізка  $C'C$  (оскільки радіус кривини обмежений). Керування  $u(t)$  будемо вважати рівним за модулем  $R/|PC_1|$ , додатним для точок  $C_1$ , що знаходяться правіше від  $P$ , та від'ємним для тих, що знаходяться лівіше. Остаточно, маємо такі рівняння руху:

$$\begin{cases} \dot{x}_P(t) = w_P \sin \theta(t) \\ \dot{y}_P(t) = w_P \cos \theta(t) \\ \dot{x}_E(t) = w_E \sin v(t) \\ \dot{y}_E(t) = w_E \cos v(t) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{w_P}{R} u(t), \quad u(t) \in [-1; 1] \end{cases}$$

Мета диференціальної гри визначається виграшем, який залежить від траєкторій гравців. Позначимо ці траєкторії як функції від часу як  $x(t)$  та  $y(t)$ . Зауважимо, що диференціальні ігри є *антагоністичними* (або ж, *іграми з нульовою сумою*).

Якщо гра триває деякий заздалегідь визначений час  $T$ , то виграш гравця  $E$  визначається як  $H(x(t), y(T))$ , де  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — деяка функція (нагадаємо, що розмірність  $\mathcal{E}$  —  $n$ ).

## Приклади виграшів

1  $H(x(T), y(T)) = \|x(T) - y(T)\|$

2  $H(x(T), y(T)) = \min_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - y(t)\|$

3  $H(x(T), y(T)) = t_* = \min \{t \geq 0 : (x(t), y(t)) \in \mathcal{T}\}$

Розглянемо переслідування на площині з простим рухом, що описується системою

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, u_1^2 + u_2^2 \leq \alpha^2 \\ \dot{y}_1 = v_1, \dot{y}_2 = v_2, v_1^2 + v_2^2 \leq \beta^2 \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, y_1(0) = y_1^0, y_2(0) = y_2^0 \end{cases}$$

Якщо  $\alpha > \beta$ , то гравець  $P$  може гарантувати

$$\forall l \geq 0 : \min \{t \geq 0 : \|P(t) - E(t)\| \leq l\} < +\infty$$

Якщо  $\alpha \leq \beta$ , то в разі  $\|P(0) - E(0)\| > l$  для всіх  $l \geq 0$  гравець  $E$ , рухаючись від  $P$  по прямій з максимальною швидкістю, зможе уникнути захоплення гравцем  $P$ .

## Означення

Стратегіями у диференціальній грі є вибір керувань  $u$  та  $v$  як функцій від часу  $t$  та фазових координат  $x$  у системі рівнянь руху

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, t), v(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Керування вважаються кусково-гладкими як компроміс між забезпеченням існування розв'язку, (його може не існувати у класі неперервних функцій) та його єдиності (вона може порушуватися, якщо не вимагати неперервності розв'язку).

Позначатимемо через  $P$  та  $E$  множини кусково-неперервних стратегій (керувань) гравців  $P$  та  $E$ .

Надалі для спрощення розглядатимемо не один вектор  $x$ , а два вектори  $x$  та  $y$ , що відповідатимуть руху кожного з гравців. Тоді систему можна записати як

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, y, t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), v(x, y, t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

## Означення

Набір  $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ , де  $x_0, y_0$  — початкові умови, а  $u \in P$ ,  $v \in E$  — керування, називається *ситуацією* в диференціальній грі.

# Умова існування та єдиності траєкторій

Якщо розглядати траєкторії, що залежать лише від часу  $t$  та накладати на  $f$  та  $g$  умови обмеженості та ліпшицевості по  $x$  та  $y$ , тобто

$$\begin{aligned}\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| &\leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|, \\ \|g(y_1, v) - g(y_2, v)\| &\leq \beta \cdot \|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

то за теоремою про існування та єдиність роз'язку задачі Коші, для кожної ситуації  $S$  буде існувати єдина пара траєкторій  $x(t), y(t)$ , для якої

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) = g(y(t), v(t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

# Формальне визначення виграшів та їх види

## Означення

Користуючись означенням ситуації, можна ввести *виграш* в ситуації  $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$  як функцію  $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$ .

Наведемо строгі означення чотирьох видів виграшів.

## Означення

- 1 *Термінальний виграш*. Задано деяке число  $t > 0$  та неперервна по  $x$  та  $y$  функція  $H(x, y)$ . Виграш в ситуації  $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$  визначається як:

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = H(x(T), y(T))$$

## Означення

- 2** *Мінімальний результат.* Задано деяке число  $t > 0$  та неперервна по  $x$  та  $y$  функція  $H(x, y)$ . Виграш в ситуації  $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$  визначається як

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \min_{0 \leq t \leq T} H(x(t), y(t))$$

- 3** *Інтегральний виграш.* Нехай  $\mathcal{T}$  — деяка підмножина  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $H(x, y)$  — неперервна функція. Нехай в ситуації  $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$   $t_*$  — перший момент потрапляння траєкторії  $(x(t), y(t))$  на  $\mathcal{T}$ . Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^{t_*} H(x(t), y(t)) dt$$

де при  $t_* = +\infty$  покладається  $K = +\infty$ .



## Означення

- 4 *Якісний виграш.* Нехай  $\mathcal{T}$  та  $\mathcal{L}$  — деякі підмножини  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , а  $t_*$  — перший момент потрапляння траєкторії  $(x(t), y(t))$  на  $\mathcal{T}$  в ситуації  $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ . Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{якщо } t_* = +\infty \\ -1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \notin \mathcal{L} \end{cases}$$

# Нормальна форма диференціальної гри

Нарешті, можна дати означення нормальної форми диференціальної гри.

## Означення

Нормальною формою диференціальної гри  $\Gamma(x_0, y_0)$ , заданої на просторі стратегій  $P \times E$ , називається система

$$\Gamma(x_0, y_0) = \langle x_0, y_0, P, E, K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) \rangle$$

де  $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$  — функція виграшу, визначена будь-який з чотирьох способів вище.

Кожній парі  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  відповідає своя гра в нормальній формі, тобто, фактично, визначається двопараметрична сім'я ігор, що залежать від  $(x_0, y_0)$ .

# Простий рух на площині

Розглянемо найпростіші моделі задач переслідування — диференціальні ігри на площині з двома учасниками: переслідувачем  $P$  та утікачем  $E$ , траєкторії яких відповідно позначатимемо  $x(t)$  та  $y(t)$ . Під *простим рухом* мається на увазі, що закони їх руху описуються системою

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \end{cases}$$

Тут  $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ . Такі закони руху означають, що гравці рухаються з обмеженою швидкістю, але напрямок руху можуть змінювати довільно. Проінтегрувавши рівняння, можна явно записати траєкторії руху як

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)ds, \quad y(t) = y(0) + \int_0^t v(s)ds$$

## Умова

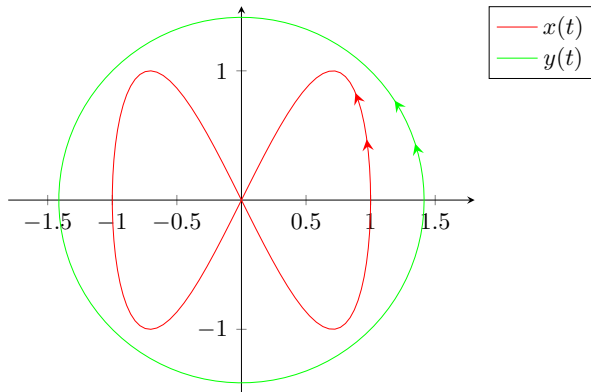
Нехай  $u(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$ ,  $v(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \end{pmatrix}$ ,  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $y(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , а гра триває до моменту  $T = 2\pi$ . Знайти значення функції виграшу мінімального результату з  $H(x, y) = \|x - y\|$ .

Знайдемо рівняння траєкторій:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ 2 \cos 2s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin 2s \end{pmatrix} \Big|_0^t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin s \\ \sqrt{2} \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \end{pmatrix}$$

На декартовій площині ці траєкторії матимуть вигляд:



Значення  $K = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} \|x(t) - y(t)\|$  можна знайти чисельно:  $K \approx 0.282394$  при  $t \approx 0.850448$ .

Тепер розглянемо гру переслідування вже не на площині  $\mathbb{R}^2$ , а в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Тут усі величини є  $n$ -вимірними векторами, і, як раніше,  $x(t)$  — траєкторія руху переслідувача  $P$ ,  $y(t)$  — утікача  $E$ .

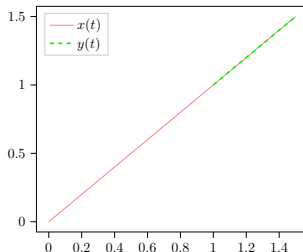
Нехай  $\alpha > \beta$ , тобто, переслідувач може рухатися швидше за утікача. Тоді можна довести, що яку б стратегію  $v(t)$  не обрав утікач  $E$ , переслідувач  $P$  наздожене його не пізніше, ніж за  $\frac{\|x_0 - y_0\|}{\alpha - \beta}$ , використовуючи стратегію  $u(t) = -\frac{\alpha}{\|x(t) - y(t)\|}(x(t) - y(t))$ , причому переслідування буде найдовшим, якщо  $E$  обере «раціональну» стратегію  $v(t) = -\frac{\beta}{\|x(t) - y(t)\|}(x(t) - y(t))$ .

# Приклад

## Умова

Нехай  $\alpha = 3, \beta = 1$ , гра починається з  $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  та  $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , обидва гравці обирають керування, вказані вище.

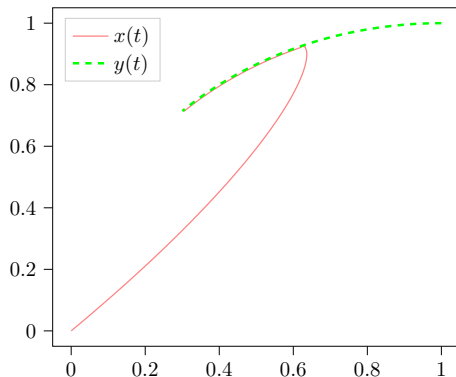
Розв'язавши чисельно (методом Рунге-Кутта) відповідну систему диференціальних рівнянь, отримуємо такі траєкторії руху:



$P$  наздогнав  $E$  у момент часу  $T \approx 0.7071$ . За отриманою формулою точним значенням  $T \in \sqrt{2}/2$ .

# Приклад

Якщо ж утікач обиратиме «нераціональне» керування, наприклад,  $\dot{y} = -\beta \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ , то отримаємо такі траєкторії руху:



В такому випадку  $P$  наздожене  $E$  в момент  $T \approx 0.385$ .



# Лінійна диференціальна гра

У випадку простого руху в  $\mathbb{R}^n$  замість системи диференціальних рівнянь, що описують рух переслідувача та утікача розглядалося одне диференціальне рівняння, що описувало динаміку різниці їх положень.

## Означення

*Лінійною диференціальною грою* називається гра з фазовим простором  $\mathbb{R}^n$ , що описується рівнянням

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) - u(t) + v(t) \\ z(0) = z_0 \\ u \in U, v \in V \end{cases}$$

де  $A$  — деяка стала матриця порядку  $n \times n$ ,  $U$  та  $V$  — опуклі компактні підмножини  $\mathbb{R}^n$ . Також задано матрицю  $\pi$ , що є матрицею проекції на ортогональне доповнення до термінальної множини.

Ця гра відбувається таким чином: в кожний момент часу  $t$  утікач  $E$  знає параметри гри  $(A, U, V, z_0, \pi)$  та обирає своє керування  $v(t) \in V$ , повідомляючи про свій вибір переслідувача  $P$ , який, в свою чергу, обирає керування  $u(t) \in U$ . Якщо існує такий момент часу  $T > 0$ , коли переслідувач  $P$  за будь-яких дій утікача  $E$  забезпечує виконання умови  $\pi z(\tau) = 0$  для деякого  $\tau \in [0; T]$ , то кажуть, що в переслідувач наздоганяє утікача. Наведемо умови, за яких це відбувається. Для цього треба ввести декілька нових означень.

## Означення 1

Сумою множин (за Мінковським)  $A$  і  $B$  називається множина  $C = A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ .

## Означення 2

Різницею множин (за Мінковським)  $A$  і  $B$  називається найбільша така множина  $C = A \div B$ , що  $B + C \subset A$

## Означення 3

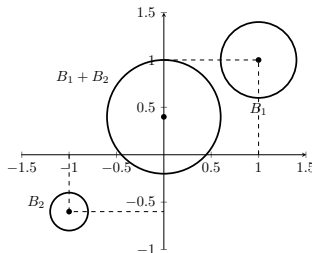
Добутком множини  $A$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$  називається множина  $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : a \in A\}$ .

# Приклад

Нехай  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$  — куля радіуса  $r$  з центром в точці  $a$ . Для  $r \in \mathbb{R}$  та  $a \in \mathbb{R}^n$  має місце  $r \cdot B_1(0) + \{a\} = B_{|r|}(a)$ . Сумою двох куль  $B_{r_1}(a_1)$  та  $B_{r_2}(a_2)$  є множина

$$M = B_{r_1}(a_1) + B_{r_2}(a_2) = \{x_1 + x_2 : \|x_1 - a_1\| \leq r_1, \|x_2 - a_2\| \leq r_2\}$$

Для  $x = x_1 + x_2 \in M$ :  $\|(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)\| \leq \|x_1 - a_1\| + \|x_2 - a_2\| \leq r_1 + r_2$ , тобто  $M = B_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$ .



# Інтеграл багатозначного відображення

## Означення

Нехай  $W(t)$  — неперервна функція з дійсним аргументом, значеннями якої є компактні підмножини  $\mathbb{R}^n$  (багатозначне відображення). Інтегралом за проміжком  $[a; b]$  від неї

називається множина  $\int_a^b W(t)dt$ , яку можна розуміти в сенсі ріманової суми

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot W(t_i^*)$ , де  $\{\Delta t_i\}_{i=1}^n$  — довжини відрізків, на які розбивається  $[a; b]$ ,  $t_i^* \in \Delta t_i$  — деякі точки з цих відрізків, а сума розуміється в сенсі суми множин за Мінковським.

# Інтеграл багатозначного відображення, приклад

## Умова

Нехай  $W(t) = B_t(0)$ ,  $[a; b] = [0; T]$ . Знайдемо  $\int_0^T W(t) dt$ .

$\sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot W(t_i^*) = \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot B_{t_i^*}(0) = \sum_{i=0}^n B_{t_i^* \Delta t_i}(0) = B_{\sum_{i=0}^n t_i^* \Delta t_i}(0)$  — це куля з центром в

0 та радіусом  $\sum_{i=0}^n t_i^* \Delta t_i$ . Вираз для радіуса є інтегральною сумою для  $\int_0^t t dt = \frac{T^2}{2}$ , тому

$$\int_0^T B_t(0) dt = B_{\frac{T^2}{2}}(0).$$

# Умови того, що $P$ наздожене $E$

Нехай у лінійній диференціальній грі виконуються дві умови:

- 1 Для всіх  $t > 0$ :  $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V \neq \emptyset$ .
- 2 Існує такий момент часу  $T_0$ , що  $\pi e^{AT_0}z_0 \in \int_0^T W(T_0 - s)ds$ .

Можна довести, що в разі виконання цих умов переслідувач наздожене утікача.

Наведемо алгоритм застосування методу Понтрягіна:

- 1 Знайти множину  $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V$ .
- 2 Знайти множину  $\Omega(t) = \int_0^t W(s)ds$ .
- 3 Знайти  $T_0$ , для якого  $\pi e^{AT_0}z_0 \in \Omega(T_0)$ .
- 4 Знайти функцію  $w(t) \in W(t)$  таку, що  $\pi e^{AT_0}z_0 = \int_0^{T_0} w(s)ds$ .
- 5 Знайти керування  $u(t)$  як розв'язок  $\pi e^{A(T_0-s)}u(s) - \pi e^{A(T_0-s)}v(s) = w(T_0 - s)$  при заданому керуванні  $v(t) \in V$ .
- 6 Знайти розв'язок задачі Коші  $\dot{z} = Az - u(t) + v(t)$ ,  $z(0) = z_0$  на відрізку  $[0; T_0]$ .



# Метод Понтрягіна у грі з простим рухом

## Умова

Розглянемо гру з простим рухом:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \end{cases}$$

Переслідування закінчується, коли  $x - y = 0$ .

Зробимо заміну  $z = x - y$ :  $\dot{z} = u - v = -(-u) + (-v)$ , переслідування закінчується, коли  $z = x - y = 0$ . В такому випадку оператор  $\pi$  є тотожнім, матриця  $A$  — нульовою, тому й композиція  $\pi e^{At} = I$  — теж тотожній оператор.  $U = B_\alpha(0)$ ,  $V = B_\beta(0)$  — кулі з центрами в 0 та з радіусами  $\alpha$  та  $\beta$  відповідно. Таким чином,  $W(t) = \pi e^{At}U \dot{\div} \pi e^{At}V = U \dot{\div} V = B_{\alpha-\beta}(0)$ , при  $\alpha \geq \beta$  ця множина є непорожньою.

# Метод Понтрягіна у грі з простим рухом

$$\Omega(t) = \int_0^t W(s) ds = B_{t(\alpha-\beta)}(0), \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} \pi e^{AT_0} z_0 \in \Omega(T_0) &\Leftrightarrow z_0 \in B_{T_0(\alpha-\beta)}(0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|z_0\| = T_0(\alpha - \beta) \Leftrightarrow T_0 = \frac{\|z_0\|}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Зауважимо, що такий само час було отримано раніше іншими міркуваннями.

Також можна знайти керування переслідувача  $u(t)$  для заданого керування утікача  $v(t)$  та отримати динаміку різниці координат гравців:

$$x(t) - y(t) = (\beta - \alpha) \cdot \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} t + (x_0 - y_0)$$

## Умова

Нехай рух гравців в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , описується системою

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = a, & \|a\| \leq \rho \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = b, & \|b\| \leq \sigma \end{cases}$$

де  $\alpha, \beta, \rho, \sigma$  — додатні числа. Переслідуювач наздоганяє утікача, якщо  $x = y$ . Кожне рівняння системи описує рух точки одиничної маси під дією сили-керування з урахуванням тертя, що лінійно залежить від швидкості.

Перейдемо до системи диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою заміन  $z^1 = x - y$ ,  $z^2 = \dot{x}$ ,  $z^3 = \dot{y}$ :

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = z^2 - z^3 \\ \dot{z}^2 = -\alpha z^2 + a \\ \dot{z}^3 = -\beta z^3 + b \end{cases}$$

# Контрольний приклад Понтрягіна

Керування  $u$  та  $v$  задаються формулами  $u = (0, -a, 0)^T$ ,  $v = (0, 0, b)^T$ , тому  $U = \{(0, -a, 0)^T : \|a\| \leq \sigma\}$ ,  $V = \{(0, 0, b)^T : \|b\| \leq \sigma\}$ . Оператор  $\pi$  задано як  $\pi : (z^1, z^2, z^3)^T \mapsto (z^1, 0, 0)^T$ , а матриця

$$A \text{ дорівнює } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Знайдемо  $e^{At}$  (за допомогою перетворення Лапласа):

$$e^{At} = \mathcal{L} \{ (pI - A)^{-1} \} \Leftrightarrow (pI - A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \{ e^{At} \}$$

$$pI - A = \begin{pmatrix} p & -1 & 1 \\ 0 & p + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & p + \beta \end{pmatrix}$$

# Контрольний приклад Понтрягіна

$$\begin{aligned}(pI - A)^{-1} &= \frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)} \begin{pmatrix} (p + \alpha)(p + \beta) & (p + \beta) & -(p + \alpha) \\ 0 & p(p + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & p(p + \alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p + \alpha)} & -\frac{1}{p(p + \beta)} \\ 0 & \frac{1}{p + \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p + \beta} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Тепер можна записати  $\pi e^{At}(z^1, z^2, z^3) = z^1 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} z^2 - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} z^3$ , звідки

$$\begin{aligned}\pi e^{At}U &= \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \cdot (-a) : \|a\| \leq \rho \right\} \\ \pi e^{At}V &= \left\{ -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \cdot b : \|b\| \leq \sigma \right\}\end{aligned}$$

# Контрольний приклад Понтрягіна

Отже,  $\pi e^{At}U$  — куля з радіусом  $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho$  і центром в нулі, а  $\pi e^{At}V$  — куля з радіусом  $\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$  і центром в нулі, тому  $W(t) = \pi e^{At}U \dot{-} \pi e^{At}V$  — куля з радіусом  $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$  і центром теж в нулі. Радіус  $W(t)$  буде додатнім при  $\rho > \sigma$  та  $\frac{\rho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}$ .

$\Omega(t) = \int_0^t W(s)ds$  буде кулею з радіусом:

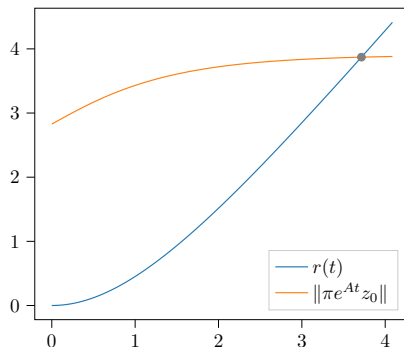
$$\begin{aligned} \int_0^t \left( \frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta s}}{\beta}\sigma \right) ds &= \rho \int_0^t \frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha} ds - \sigma \int_0^t \frac{1-e^{-\beta s}}{\beta} ds = \\ &= \frac{\rho}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1) - \frac{\sigma}{\beta^2} (\beta t + e^{-\beta t} - 1) = r(t) \end{aligned}$$

Далі необхідно знайти таке (найменше) значення  $T_0$ , для якого точка  $\pi e^{AT_0}(z_0^1, z_0^2, z_0^3)$  належить  $\Omega(T_0)$ . З геометричних міркувань це буде найменший корінь рівняння

$$\frac{\rho}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1) - \frac{\sigma}{\beta^2} (\beta t + e^{-\beta t} - 1) = \|\pi e^{At} z_0\|$$

# Контрольний приклад Понтрягіна

Наступний крок будемо проводити на конкретному прикладі. Нехай гра відбувається на площині з  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 1$  та початковими умовами  $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Чисельно можна знайти значення  $T_0 \approx 3.715$ .





# Метод розв'язуючих функцій

Метод розв'язуючих функцій належить А.О. Чикрію. Розглядається не просто лінійна диференціальна гра, а більш загальна *квазілінійна* гра виду:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u, v) \\ z(0) = z_0 \\ z \in \mathbb{R}^n, u \in U, v \in V \end{cases}$$

де  $\varphi(u, v) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неперервна за обома змінними функція.

## Зауваження

У випадку  $\varphi(u, v) = -u + v$  отримуємо лінійну диференціальну гру.

Термінальна множина має вид  $M^* = M^0 + M$ , де  $M^0$  — деякий лінійний підпростір  $\mathbb{R}^n$ , а  $M$  — компактна підмножина ортогонального доповнення  $M^0$ ,  $\pi$  — проектор на  $(M^0)^\perp$ .  
Нехай  $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$  для фіксованої  $v \in V$ ,  $W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v)$ ,  $W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), t \geq 0$ .

## Зауваження

У випадку  $\varphi(u, v) = -u + v$   $W(t) = \pi e^{At} U \div \pi e^{At} V$ .

Вводяться позначення:

$\gamma(t) \in W(t)$  — вимірна функція

$$\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = \pi e^{At} + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \\ = \sup \{ \alpha \geq 0 : [W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)] \cap \alpha [M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \} \end{aligned}$$

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) d\tau \geq 1 \right\}$$

## Означення

$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$  називається *розв'язуючою функцією*.

Можна довести наступне: якщо  $W(t) \neq \emptyset$  для всіх  $t \geq 0$ ,  $M$  — опукла множина,  $T(z_0, \gamma_0(\cdot)) < +\infty$  для деякого початкового положення  $z_0$  та деякої  $\gamma_0(\cdot)$ , то за час  $T(z_0, \gamma_0(\cdot))$  гравці потрапляють у термінальну множину.

Також можна довести, що якщо гра є лінійною,  $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V \neq \emptyset$ , існує неперервна  $r(t) : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  та число  $l \geq 0$  такі, що  $\pi e^{At}U = r(t)S$ ,  $M = lS$ , де  $S$  — одинична куля в  $(M^0)^\perp$  з центром в нулі, то при  $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin lS$ , розв'язуюча функція  $\alpha$  може бути знайдена як найбільший додатний корінь квадратного рівняння

# Контрольний приклад Понтрягіна

Як і у минулому розв'язку цього прикладу перейдемо від системи

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, & \|a\| \leq 1 \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma v, & \|b\| \leq 1 \end{cases}$$

до системи з  $z_1 = x - y$ ,  $z_2 = \dot{x}$ ,  $z_3 = \dot{y}$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \sigma v \end{cases}$$

Термінальна множина  $M^* = \{z : z_1 = 0\} = M^0 + \{0\}$ , ортогональне доповнення  $(M^0)^\perp = \{z : z_2 = z_3 = 0\}$ , тому  $\pi = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , де  $I$  та  $0$  — тотожний та нульовий оператор відповідно.

# Контрольний приклад Понтрягіна

Оскільки у вихідній системі рівнянь  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , то  $z \in \mathbb{R}^{3n}$ , то  $\pi : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow (M^0)^\perp$ . Матриця системи  $A = \begin{pmatrix} 0 & E & -E \\ 0 & -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 & -\beta E \end{pmatrix}$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix} : \|u\| \leq 1 \right\}$ ,  $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma v \end{pmatrix} : \|v\| \leq 1 \right\}$ .

Аналогічно минулому прикладу,

$$\pi e^{At}U = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho S, \quad \pi e^{At}V = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma S$$
$$W(t) = \left( \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma \right) S = \omega(t)S$$

Радіус цієї кулі невід'ємний при  $\rho \geq \sigma$  та  $\frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}$ .

# Контрольний приклад Понтрягіна

Поклавши  $\gamma(t) = 0$ , отримаємо  $\xi(t, z, 0) = z_1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3$ . Ця задача задовольняє всі умови для пошуку розв'язуючої функції через:

$$\left\| \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \sigma v - \alpha \cdot \xi(t, z, 0) \right\| = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho$$

Можна показати, що

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha(t, \tau, z, v, 0) = \frac{\omega(t - \tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$$

і мінімум досягається при  $v = -\frac{\xi(t, z, 0)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$

Час, коли переслідувач наздожене утікача, визначається як

$$T(z, 0) = \min \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \frac{\omega(t - \tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau = 1 \right\}$$

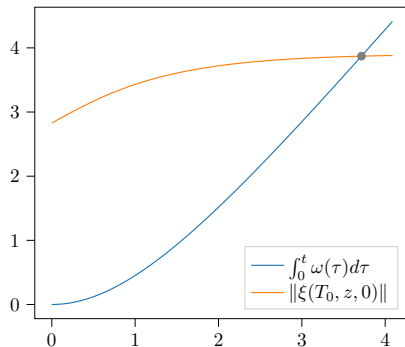
або ж як найменший додатний корінь рівняння

$$\|\xi(t, z, 0)\| = \int_0^t \left( \frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \rho - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \sigma \right) d\tau$$



# Контрольний приклад Понтрягіна

Розглянемо тепер конкретний приклад. Нехай ця гра відбувається на площині з  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 1$  та початковими умовами  $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Чисельно можна знайти значення  $T_0 \approx 3.715$ .



У цій доповіді ми дослідили історію появи теорії диференціальних ігор та деякі задачі, що пояснюють необхідність виникнення цієї теорії. Також ознайомилися з основами теорії багатозначних відображень та двома методами для розв'язання лінійних диференціальних ігор переслідування: методом Понтрягіна та методом розв'язуючих функцій Чикрія. На прикладі контрольного прикладу Понтрягіна (лінійна гра) впевнилися, що обидва методи дають однаковий результат — час завершення переслідування.