

Основи диференціальних ігор

О. Галганов, Н. Фордуй

Класична теорія ігор, творцями якої є Джон фон Нейман та Оскар Морґенштерн, оперує матричними іграми та зв'язаними з ними поняттями. Такі ігри зовсім не покривають всі можливості формалізувати процеси, в яких гравці приймають рішення. Наприклад, якщо розглядати задачу про оптимальну траєкторію руху корабля від керованої торпеди, яка його переслідує, то необхідно досліджувати не просто скінченний набір можливих дій кожного з гравців, а континуум можливих стратегій, кожна з яких відповідає деякій комбінації траєкторій руху корабля та торпеди.

Сам термін «диференціальна гра» було введено Руфусом Айзексом — одним з основоположників теорії диференціальних ігор.



Джон фон Нейман



Оскар Морґенштерн



Руфус Айзекс

Рішення, що їх приймають гравці, полягають у виборі так званих **керувань**, від яких залежать **фазові координати**: їх значення у будь-який момент часу повністю визначає хід гри, характеризуючи положення гравців у деякому просторі — **фазовому просторі**.

Поточні значення фазових координат завжди відомі гравцям — тобто, це ігри з повною інформацією. Невідомим зазвичай є характер їх зміни: тобто, **керування** фазовими змінними гравцями.

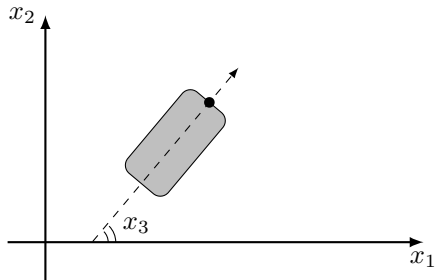
Приклад

Положення матеріальної точки на площині описується двома координатами x_1 та x_2 . Нехай швидкість руху точки є сталою v , а гравець обирає напрямок швидкості φ та може змінювати його у будь-який момент часу — тобто, φ є керуванням. Тоді рух точки описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v \cos \varphi \\ \dot{x}_2 = v \sin \varphi \end{cases}$$

Приклад

Геометричне положення автомобіля на декартовій площині описується трьома фазовими координатами: x_1, x_2 — положення деякої точки автомобіля, x_3 — кут, який утворює вісь вздовж автомобіля з деяким фіксованим напрямком — наприклад, x_1 .



Продовження приклада

Нехай A — максимальне можливе прискорення автомобіля, тоді прискорення може набувати значень $A\varphi_1$, де $\varphi_1 \in [0; 1]$ і знаходиться під контролем гравця-водія. Можна ввести ще одну фазову координату x_4 — швидкість автомобіля. Як ще одну фазову координату x_5 можна ввести кривину (фізично — це кут повороту передніх коліс), керуванням якої є $W\varphi_2$, де $\varphi_2 \in [-1; 1]$, а W — максимальна швидкість зміни x_5 .

Система задає рух автомобіля у деякій диференціальній грі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \cos x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 x_5 \\ \dot{x}_4 = A\varphi_1, \varphi_1 \in [0; 1] \\ \dot{x}_5 = W\varphi_2, \varphi_2 \in [-1; 1] \end{cases}$$

Вважаємо, що гра відбувається у *фазовому просторі* \mathcal{E} — деякій області в \mathbb{R}^n та на її межі. Рух точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ у фазовому просторі описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, v_E(x, t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, v_E(x, t)) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(x, t), \dots, u_P(x, t), v_1(x, t), \dots, v_E(x, t)) \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, \dots, x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

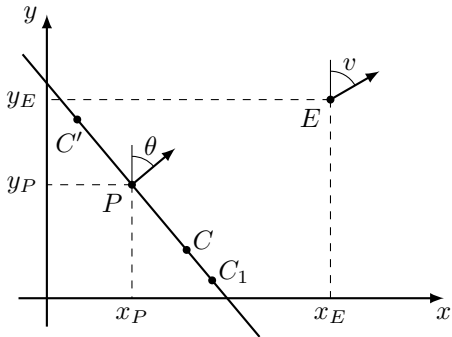
або, коротше,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, t), v(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ці рівняння називаються *рівняннями руху*. Функції f_j є заданими та вважаються достатньо гладкими.

Приклад (гра «водій-вбивця»)

Гра відбувається на площині. Переслідувач P рухається зі сталою швидкістю w_P , радіус кривини його траєкторії обмежений заданою величиною R . Керування P — це вибір значення кривини в кожний момент часу. Рух утікача E простий: швидкість w_E фіксована, керуванням є вибір напрямку швидкості $v(t)$. E є більш маневреним, ніж P . Фазовими координатами в цій грі є пари x_P, y_P і x_E, y_E для опису положення P та E відповідно, та θ — напрямок руху P .



Приклад (гра «водій-вбивця»)

Керування E — це вибір кута швидкості v . Керування P записати дещо складніше. Проведемо через точку (x_P, y_P) пряму $C'PC$, $|C'P| = |PC| = R$, перпендикулярну до вектору швидкості P . P обирає миттєвий центр кривини своєї траєкторії у довільній точці C_1 цієї прямої, що лежить за межами відрізка $C'C$ (оскільки радіус кривини обмежений). Керування $u(t)$ будемо вважати рівним за модулем $R/|PC_1|$, додатним для точок C_1 , що знаходяться правіше від P , та від'ємним для тих, що знаходяться лівіше. Остаточно, маємо такі рівняння руху:

$$\begin{cases} \dot{x}_P(t) = w_P \sin \theta(t) \\ \dot{y}_P(t) = w_P \cos \theta(t) \\ \dot{x}_E(t) = w_E \sin v(t) \\ \dot{y}_E(t) = w_E \cos v(t) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{w_P}{R} u(t), \quad u(t) \in [-1; 1] \end{cases}$$

Мета диференціальної гри визначається виграшем, який залежить від траєкторій гравців. Позначимо ці траєкторії як функції від часу як $x(t)$ та $y(t)$. Зауважимо, що диференціальні ігри є *антагоністичними* (або ж, *іграми з нульовою сумою*).

Якщо гра триває деякий заздалегідь визначений час T , то виграш гравця E визначається як $H(x(t), y(T))$, де $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка функція (нагадаємо, що розмірність \mathcal{E} — n).

Приклади виграшів

1 $H(x(T), y(T)) = \|x(T) - y(T)\|$

2 $H(x(T), y(T)) = \min_{0 \leq t \leq T} \|x(t) - y(t)\|$

3 $H(x(T), y(T)) = t_* = \min \{t \geq 0 : (x(t), y(t)) \in \mathcal{T}\}$

Розглянемо переслідування на площині з простим рухом, що описується системою

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2, u_1^2 + u_2^2 \leq \alpha^2 \\ \dot{y}_1 = v_1, \dot{y}_2 = v_2, v_1^2 + v_2^2 \leq \beta^2 \\ x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, y_1(0) = y_1^0, y_2(0) = y_2^0 \end{cases}$$

Якщо $\alpha > \beta$, то гравець P може гарантувати

$$\forall l \geq 0 : \min \{t \geq 0 : \|P(t) - E(t)\| \leq l\} < +\infty$$

Якщо $\alpha \leq \beta$, то в разі $\|P(0) - E(0)\| > l$ для всіх $l \geq 0$ гравець E , рухаючись від P по прямій з максимальною швидкістю, зможе уникнути захоплення гравцем P .

Означення

Стратегіями у диференціальній грі є вибір керувань u та v як функцій від часу t та фазових координат x у системі рівнянь руху

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, t), v(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Керування вважаються кусково-гладкими як компроміс між забезпеченням існування розв'язку, (його може не існувати у класі неперервних функцій) та його єдиності (вона може порушуватися, якщо не вимагати неперервності розв'язку).

Позначатимемо через P та E множини кусково-неперервних стратегій (керувань) гравців P та E .

Надалі для спрощення розглядатимемо не один вектор x , а два вектори x та y , що відповідатимуть руху кожного з гравців. Тоді систему можна записати як

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(x, y, t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), v(x, y, t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

Означення

Набір $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$, де x_0, y_0 — початкові умови, а $u \in P$, $v \in E$ — керування, називається *ситуацією* в диференціальній грі.

Умова існування та єдиності траєкторій

Якщо розглядати траєкторії, що залежать лише від часу t та накладати на f та g умови обмеженості та ліпшицевості по x та y , тобто

$$\begin{aligned}\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| &\leq \alpha \cdot \|x_1 - x_2\|, \\ \|g(y_1, v) - g(y_2, v)\| &\leq \beta \cdot \|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

то за теоремою про існування та єдиність роз'язку задачі Коші, для кожної ситуації S буде існувати єдина пара траєкторій $x(t), y(t)$, для якої

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) = g(y(t), v(t)) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

Формальне визначення виграшів та їх види

Означення

Користуючись означенням ситуації, можна ввести *виграш* в ситуації $S = \{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ як функцію $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$.

Наведемо строгі означення чотирьох видів виграшів.

Означення

- 1 *Термінальний виграш.* Задано деяке число $T > 0$ та неперервна по x та y функція $H(x, y)$. Виграш в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ визначається як:

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = H(x(T), y(T))$$

Означення

- 2** *Мінімальний результат.* Задано деяке число $T > 0$ та неперервна по x та y функція $H(x, y)$. Виграш в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ визначається як

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \min_{0 \leq t \leq T} H(x(t), y(t))$$

- 3** *Інтегральний виграш.* Нехай \mathcal{T} — деяка підмножина $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $H(x, y)$ — неперервна функція. Нехай в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$ t_* — перший момент потрапляння траєкторії $(x(t), y(t))$ на \mathcal{T} . Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^{t_*} H(x(t), y(t)) dt$$

де при $t_* = +\infty$ покладається $K = +\infty$.

Означення

- 4 *Якісний виграш.* Нехай \mathcal{T} та \mathcal{L} — деякі підмножини $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а t_* — перший момент потрапляння траєкторії $(x(t), y(t))$ на \mathcal{T} в ситуації $\{x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)\}$. Тоді

$$K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{якщо } t_* = +\infty \\ -1, & \text{якщо } (x(t_*), y(t_*)) \notin \mathcal{L} \end{cases}$$

Нормальна форма диференціальної гри

Нарешті, можна дати означення нормальної форми диференціальної гри.

Означення

Нормальною формою диференціальної гри $\Gamma(x_0, y_0)$, заданої на просторі стратегій $P \times E$, називається система

$$\Gamma(x_0, y_0) = \langle x_0, y_0, P, E, K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot)) \rangle$$

де $K(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))$ — функція виграшу, визначена будь-який з чотирьох способів вище.

Кожній парі $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ відповідає своя гра в нормальній формі, тобто, фактично, визначається двопараметрична сім'я ігор, що залежать від (x_0, y_0) .

Простий рух на площині

Розглянемо найпростіші моделі задач переслідування — диференціальні ігри на площині з двома учасниками: переслідувачем P та утікачем E , траєкторії яких відповідно позначатимемо $x(t)$ та $y(t)$. Під *простим рухом* мається на увазі, що закони їх руху описуються системою

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \end{cases}$$

Тут $\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$. Такі закони руху означають, що гравці рухаються з обмеженою швидкістю, але напрямок руху можуть змінювати довільно. Проінтегрувавши рівняння, можна явно записати траєкторії руху як

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(s)ds, \quad y(t) = y(0) + \int_0^t v(s)ds$$

Умова

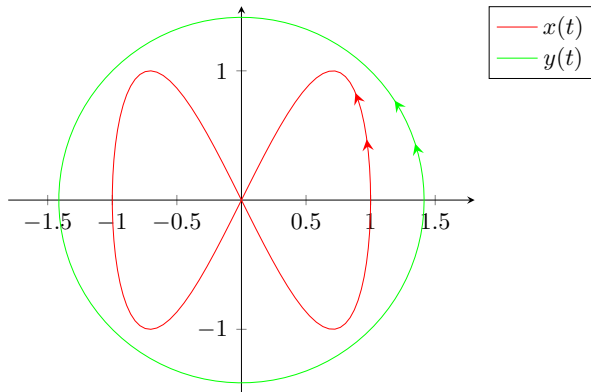
Нехай $u(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$, $v(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin t \\ \sqrt{2} \cos t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, а гра триває до моменту $T = 2\pi$. Знайти значення функції виграшу мінімального результату з $H(x, y) = \|x - y\|$.

Знайдемо рівняння траєкторій:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin s \\ 2 \cos 2s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin 2s \end{pmatrix} \Big|_0^t = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin s \\ \sqrt{2} \cos s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t \\ \sqrt{2} \sin t \end{pmatrix}$$

На декартовій площині ці траєкторії матимуть вигляд:



Значення $K = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} \|x(t) - y(t)\|$ можна знайти чисельно: $K \approx 0.282394$ при $t \approx 0.850448$.

Тепер розглянемо гру переслідування вже не на площині \mathbb{R}^2 , а в \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Тут усі величини є n -вимірними векторами, і, як раніше, $x(t)$ — траєкторія руху переслідувача P , $y(t)$ — утікача E .

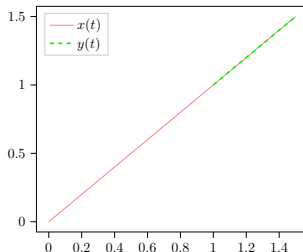
Нехай $\alpha > \beta$, тобто, переслідувач може рухатися швидше за утікача. Тоді можна довести, що яку б стратегію $v(t)$ не обрав утікач E , переслідувач P наздожене його не пізніше, ніж за $\frac{\|x_0 - y_0\|}{\alpha - \beta}$, використовуючи стратегію $u(t) = -\frac{\alpha}{\|x(t) - y(t)\|}(x(t) - y(t))$, причому переслідування буде найдовшим, якщо E обере «раціональну» стратегію $v(t) = -\frac{\beta}{\|x(t) - y(t)\|}(x(t) - y(t))$.

Приклад

Умова

Нехай $\alpha = 3, \beta = 1$, гра починається з $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, обидва гравці обирають керування, вказані вище.

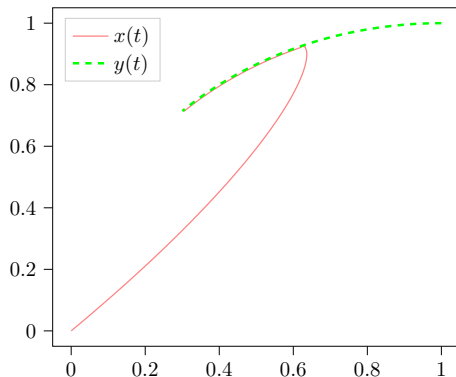
Розв'язавши чисельно (методом Рунге-Кутта) відповідну систему диференціальних рівнянь, отримуємо такі траєкторії руху:



P наздогнав E у момент часу $T \approx 0.7071$. За отриманою формулою точним значенням $T \in \sqrt{2}/2$.

Приклад

Якщо ж утікач обиратиме «нераціональне» керування, наприклад, $\dot{y} = -\beta \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, то отримаємо такі траєкторії руху:



В такому випадку P наздожене E в момент $T \approx 0.385$.

Лінійна диференціальна гра

У випадку простого руху в \mathbb{R}^n замість системи диференціальних рівнянь, що описують рух переслідувача та утікача розглядалося одне диференціальне рівняння, що описувало динаміку різниці їх положень.

Означення

Лінійною диференціальною грою називається гра з фазовим простором \mathbb{R}^n , що описується рівнянням

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) - u(t) + v(t) \\ z(0) = z_0 \\ u \in U, v \in V \end{cases}$$

де A — деяка стала матриця порядку $n \times n$, U та V — опуклі компактні підмножини \mathbb{R}^n . Також задано матрицю π , що є матрицею проекції на ортогональне доповнення до термінальної множини.

Ця гра відбувається таким чином: в кожний момент часу t утікач E знає параметри гри (A, U, V, z_0, π) та обирає своє керування $v(t) \in V$, повідомляючи про свій вибір переслідувача P , який, в свою чергу, обирає керування $u(t) \in U$. Якщо існує такий момент часу $T > 0$, коли переслідувач P за будь-яких дій утікача E забезпечує виконання умови $\pi z(\tau) = 0$ для деякого $\tau \in [0; T]$, то кажуть, що в переслідувач наздоганяє утікача. Наведемо умови, за яких це відбувається. Для цього треба ввести декілька нових означень.

Означення 1

Сумою множин (за Мінковським) A і B називається множина $C = A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Означення 2

Різницею множин (за Мінковським) A і B називається найбільша така множина $C = A \div B$, що $B + C \subset A$

Означення 3

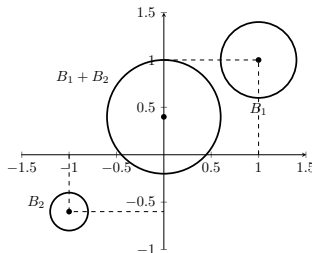
Добутком множини A на число $\lambda \in \mathbb{R}$ називається множина $\lambda \cdot A = \{\lambda \cdot a : a \in A\}$.

Приклад

Нехай $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ — куля радіуса r з центром в точці a . Для $r \in \mathbb{R}$ та $a \in \mathbb{R}^n$ має місце $r \cdot B_1(0) + \{a\} = B_{|r|}(a)$. Сумою двох куль $B_{r_1}(a_1)$ та $B_{r_2}(a_2)$ є множина

$$M = B_{r_1}(a_1) + B_{r_2}(a_2) = \{x_1 + x_2 : \|x_1 - a_1\| \leq r_1, \|x_2 - a_2\| \leq r_2\}$$

Для $x = x_1 + x_2 \in M$: $\|(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)\| \leq \|x_1 - a_1\| + \|x_2 - a_2\| \leq r_1 + r_2$, тобто $M = B_{r_1+r_2}(a_1 + a_2)$.



Інтеграл багатозначного відображення

Означення

Нехай $W(t)$ — неперервна функція з дійсним аргументом, значеннями якої є компактні підмножини \mathbb{R}^n (багатозначне відображення). Інтегралом за проміжком $[a; b]$ від неї

називається множина $\int_a^b W(t)dt$, яку можна розуміти в сенсі ріманової суми

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot W(t_i^*)$, де $\{\Delta t_i\}_{i=1}^n$ — довжини відрізків, на які розбивається $[a; b]$, $t_i^* \in \Delta t_i$ — деякі точки з цих відрізків, а сума розуміється в сенсі суми множин за Мінковським.

Інтеграл багатозначного відображення, приклад

Умова

Нехай $W(t) = B_t(0)$, $[a; b] = [0; T]$. Знайдемо $\int_0^T W(t) dt$.

$\sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot W(t_i^*) = \sum_{i=0}^n \Delta t_i \cdot B_{t_i^*}(0) = \sum_{i=0}^n B_{t_i^* \Delta t_i}(0) = B_{\sum_{i=0}^n t_i^* \Delta t_i}(0)$ — це куля з центром в

0 та радіусом $\sum_{i=0}^n t_i^* \Delta t_i$. Вираз для радіуса є інтегральною сумою для $\int_0^t t dt = \frac{T^2}{2}$, тому

$$\int_0^T B_t(0) dt = B_{\frac{T^2}{2}}(0).$$

Умови того, що P наздожене E

Нехай у лінійній диференціальній грі виконуються дві умови:

- 1 Для всіх $t > 0$: $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V \neq \emptyset$.
- 2 Існує такий момент часу T_0 , що $\pi e^{AT_0}z_0 \in \int_0^T W(T_0 - s)ds$.

Можна довести, що в разі виконання цих умов переслідувач наздожене утікача.

Наведемо алгоритм застосування методу Понтрягіна:

- 1 Знайти множину $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V$.
- 2 Знайти множину $\Omega(t) = \int_0^t W(s)ds$.
- 3 Знайти T_0 , для якого $\pi e^{AT_0}z_0 \in \Omega(T_0)$.
- 4 Знайти функцію $w(t) \in W(t)$ таку, що $\pi e^{AT_0}z_0 = \int_0^{T_0} w(s)ds$.
- 5 Знайти керування $u(t)$ як розв'язок $\pi e^{A(T_0-s)}u(s) - \pi e^{A(T_0-s)}v(s) = w(T_0 - s)$ при заданому керуванні $v(t) \in V$.
- 6 Знайти розв'язок задачі Коші $\dot{z} = Az - u(t) + v(t)$, $z(0) = z_0$ на відрізку $[0; T_0]$.

Метод Понтрягіна у грі з простим рухом

Умова

Розглянемо гру з простим рухом:

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & \|u\| \leq \alpha \\ \dot{y} = v, & \|v\| \leq \beta \end{cases}$$

Переслідування закінчується, коли $x - y = 0$.

Зробимо заміну $z = x - y$: $\dot{z} = u - v = -(-u) + (-v)$, переслідування закінчується, коли $z = x - y = 0$. В такому випадку оператор π є тотожнім, матриця A — нульовою, тому й композиція $\pi e^{At} = I$ — теж тотожній оператор. $U = B_\alpha(0)$, $V = B_\beta(0)$ — кулі з центрами в 0 та з радіусами α та β відповідно. Таким чином, $W(t) = \pi e^{At}U \dot{\div} \pi e^{At}V = U \dot{\div} V = B_{\alpha-\beta}(0)$, при $\alpha \geq \beta$ ця множина є непорожньою.

Метод Понтрягіна у грі з простим рухом

$$\Omega(t) = \int_0^t W(s) ds = B_{t(\alpha-\beta)}(0), \text{ тому}$$

$$\begin{aligned} \pi e^{AT_0} z_0 \in \Omega(T_0) &\Leftrightarrow z_0 \in B_{T_0(\alpha-\beta)}(0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|z_0\| = T_0(\alpha - \beta) \Leftrightarrow T_0 = \frac{\|z_0\|}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Зауважимо, що такий само час було отримано раніше іншими міркуваннями.

Також можна знайти керування переслідувача $u(t)$ для заданого керування утікача $v(t)$ та отримати динаміку різниці координат гравців:

$$x(t) - y(t) = (\beta - \alpha) \cdot \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} t + (x_0 - y_0)$$

Умова

Нехай рух гравців в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, описується системою

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = a, & \|a\| \leq \rho \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = b, & \|b\| \leq \sigma \end{cases}$$

де $\alpha, \beta, \rho, \sigma$ — додатні числа. Переслідуювач наздоганяє утікача, якщо $x = y$. Кожне рівняння системи описує рух точки одиничної маси під дією сили-керування з урахуванням тертя, що лінійно залежить від швидкості.

Перейдемо до системи диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою заміन $z^1 = x - y$, $z^2 = \dot{x}$, $z^3 = \dot{y}$:

$$\begin{cases} \dot{z}^1 = z^2 - z^3 \\ \dot{z}^2 = -\alpha z^2 + a \\ \dot{z}^3 = -\beta z^3 + b \end{cases}$$

Контрольний приклад Понтрягіна

Керування u та v задаються формулами $u = (0, -a, 0)^T$, $v = (0, 0, b)^T$, тому $U = \{(0, -a, 0)^T : \|a\| \leq \rho\}$, $V = \{(0, 0, b)^T : \|b\| \leq \sigma\}$. Оператор π задано як

$$\pi : (z^1, z^2, z^3)^T \mapsto (z^1, 0, 0)^T, \text{ а матриця } A \text{ дорівнює } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Знайдемо e^{At} (за допомогою перетворення Лапласа):

$$e^{At} = \mathcal{L} \{ (pI - A)^{-1} \} \Leftrightarrow (pI - A)^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \{ e^{At} \}$$

$$pI - A = \begin{pmatrix} p & -1 & 1 \\ 0 & p + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & p + \beta \end{pmatrix}$$

Контрольний приклад Понтрягіна

$$\begin{aligned}(pI - A)^{-1} &= \frac{1}{p(p + \alpha)(p + \beta)} \begin{pmatrix} (p + \alpha)(p + \beta) & (p + \beta) & -(p + \alpha) \\ 0 & p(p + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & p(p + \alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p(p + \alpha)} & -\frac{1}{p(p + \beta)} \\ 0 & \frac{1}{p + \alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p + \beta} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \\ 0 & e^{-\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Тепер можна записати $\pi e^{At}(z^1, z^2, z^3) = z^1 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} z^2 - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} z^3$, звідки

$$\begin{aligned}\pi e^{At}U &= \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \cdot (-a) : \|a\| \leq \rho \right\} \\ \pi e^{At}V &= \left\{ -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \cdot b : \|b\| \leq \sigma \right\}\end{aligned}$$

Контрольний приклад Понтрягіна

Отже, $\pi e^{At}U$ — куля з радіусом $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho$ і центром в нулі, а $\pi e^{At}V$ — куля з радіусом $\frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$ і центром в нулі, тому $W(t) = \pi e^{At}U \dot{-} \pi e^{At}V$ — куля з радіусом $\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta}\sigma$ і центром теж в нулі. Радіус $W(t)$ буде додатнім при $\rho > \sigma$ та $\frac{\rho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}$.

$\Omega(t) = \int_0^t W(s)ds$ буде кулею з радіусом:

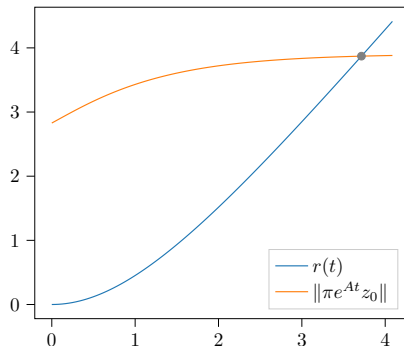
$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha}\rho - \frac{1-e^{-\beta s}}{\beta}\sigma \right) ds &= \rho \int_0^t \frac{1-e^{-\alpha s}}{\alpha} ds - \sigma \int_0^t \frac{1-e^{-\beta s}}{\beta} ds = \\ &= \frac{\rho}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1) - \frac{\sigma}{\beta^2} (\beta t + e^{-\beta t} - 1) = r(t) \end{aligned}$$

Далі необхідно знайти таке (найменше) значення T_0 , для якого точка $\pi e^{AT_0}(z_0^1, z_0^2, z_0^3)$ належить $\Omega(T_0)$. З геометричних міркувань це буде найменший корінь рівняння

$$\frac{\rho}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1) - \frac{\sigma}{\beta^2} (\beta t + e^{-\beta t} - 1) = \|\pi e^{At} z_0\|$$

Контрольний приклад Понтрягіна

Наступний крок будемо проводити на конкретному прикладі. Нехай гра відбувається на площині з $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\rho = 2$, $\sigma = 1$ та початковими умовами $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Чисельно можна знайти значення $T_0 \approx 3.715$.



Метод розв'язуючих функцій

Метод розв'язуючих функцій належить А.О. Чикрію. Розглядається не просто лінійна диференціальна гра, а більш загальна *квазілінійна* гра виду:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \varphi(u, v) \\ z(0) = z_0 \\ z \in \mathbb{R}^n, u \in U, v \in V \end{cases}$$

де $\varphi(u, v) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервна за обома змінними функція.

Зауваження

У випадку $\varphi(u, v) = -u + v$ отримуємо лінійну диференціальну гру.

Термінальна множина має вид $M^* = M^0 + M$, де M^0 — деякий лінійний підпростір \mathbb{R}^n , а M — компактна підмножина ортогонального доповнення M^0 , π — проектор на $(M^0)^\perp$.
Нехай $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$ для фіксованої $v \in V$, $W(t, v) = \pi e^{At} \varphi(U, v)$, $W(t) = \bigcap_{v \in V} W(t, v), t \geq 0$.

Зауваження

У випадку $\varphi(u, v) = -u + v$ $W(t) = \pi e^{At} U \div \pi e^{At} V$.

Вводяться позначення:

$\gamma(t) \in W(t)$ — вимірна функція

$$\xi(t, z, \gamma(\cdot)) = \pi e^{At} + \int_0^t \gamma(\tau) d\tau$$

$$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) = \\ = \sup \{ \alpha \geq 0 : [W(t - \tau, v) - \gamma(t - \tau)] \cap \alpha [M - \xi(t, z, \gamma(\cdot))] \neq \emptyset \}$$

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \inf_{v \in V} \alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot)) d\tau \geq 1 \right\}$$

Означення

$\alpha(t, \tau, z, v, \gamma(\cdot))$ називається *розв'язуючою функцією*.

Можна довести наступне: якщо $W(t) \neq \emptyset$ для всіх $t \geq 0$, M — опукла множина, $T(z_0, \gamma_0(\cdot)) < +\infty$ для деякого початкового положення z_0 та деякої $\gamma_0(\cdot)$, то за час $T(z_0, \gamma_0(\cdot))$ гравці потрапляють у термінальну множину.

Також можна довести, що якщо гра є лінійною, $W(t) = \pi e^{At}U \div \pi e^{At}V \neq \emptyset$, існує неперервна $r(t) : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ та число $l \geq 0$ такі, що $\pi e^{At}U = r(t)S$, $M = lS$, де S — одинична куля в $(M^0)^\perp$ з центром в нулі, то при $\xi(t, z, \gamma(\cdot)) \notin lS$, розв'язуюча функція α може бути знайдена як найбільший додатний корінь квадратного рівняння

$$\left\| \pi e^{a(t-\tau)}v + \gamma(t-\tau) - \alpha \cdot \xi(t, z, \gamma(\cdot)) \right\| = r(t-\tau) + \alpha l$$

Контрольний приклад Понтрягіна

Як і у минулому розв'язку цього прикладу перейдемо від системи

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u, & \|a\| \leq 1 \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} = \sigma v, & \|b\| \leq 1 \end{cases}$$

до системи з $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = \dot{y}$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_3 \\ \dot{z}_2 = -\alpha z_2 + \rho u \\ \dot{z}_3 = -\beta z_3 + \sigma v \end{cases}$$

Термінальна множина $M^* = \{z : z_1 = 0\} = M^0 + \{0\}$, ортогональне доповнення $(M^0)^\perp = \{z : z_2 = z_3 = 0\}$, тому $\pi = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, де I та 0 — тотожний та нульовий оператор відповідно.

Контрольний приклад Понтрягіна

Оскільки у вихідній системі рівнянь $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $z \in \mathbb{R}^{3n}$, то $\pi : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow (M^0)^\perp$. Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 0 & E & -E \\ 0 & -\alpha E & 0 \\ 0 & 0 & -\beta E \end{pmatrix}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \rho u \\ 0 \end{pmatrix} : \|u\| \leq 1 \right\}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma v \end{pmatrix} : \|v\| \leq 1 \right\}$.

Аналогічно минулому прикладу,

$$\begin{aligned} \pi e^{At} U &= \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho S, \quad \pi e^{At} V = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma S \\ W(t) &= \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma \right) S = \omega(t) S \end{aligned}$$

Радіус цієї кулі невід'ємний при $\rho \geq \sigma$ та $\frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}$.

Контрольний приклад Понтрягіна

Поклавши $\gamma(t) = 0$, отримаємо $\xi(t, z, 0) = z_1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3$. Ця задача задовольняє всі умови для пошуку розв'язуючої функції через:

$$\left\| \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} \sigma v - \alpha \cdot \xi(t, z, 0) \right\| = \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho$$

Можна показати, що

$$\min_{\|v\| \leq 1} \alpha(t, \tau, z, v, 0) = \frac{\omega(t - \tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$$

і мінімум досягається при $v = -\frac{\xi(t, z, 0)}{\|\xi(t, z, 0)\|}$

Час, коли переслідувач наздожене утікача, визначається як

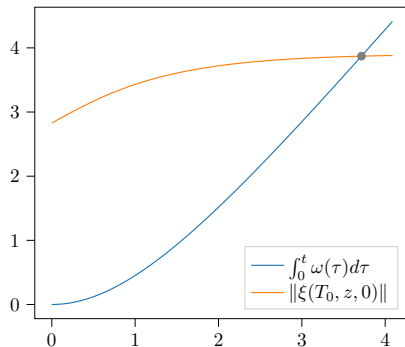
$$T(z, 0) = \min \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \frac{\omega(t - \tau)}{\|\xi(t, z, 0)\|} d\tau = 1 \right\}$$

або ж як найменший додатний корінь рівняння

$$\|\xi(t, z, 0)\| = \int_0^t \left(\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha} \rho - \frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\beta} \sigma \right) d\tau$$

Контрольний приклад Понтрягіна

Розглянемо тепер конкретний приклад. Нехай ця гра відбувається на площині з $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\rho = 2$, $\sigma = 1$ та початковими умовами $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Чисельно можна знайти значення $T_0 \approx 3.715$.



У цій доповіді ми дослідили історію появи теорії диференціальних ігор та деякі задачі, що пояснюють необхідність виникнення цієї теорії. Також ознайомилися з основами теорії багатозначних відображень та двома методами для розв'язання лінійних диференціальних ігор переслідування: методом Понтрягіна та методом розв'язуючих функцій Чикрія. На прикладі контрольного прикладу Понтрягіна (лінійна гра) впевнилися, що обидва методи дають однаковий результат — час завершення переслідування.