Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського»
Інститут прикладного системного аналізу

Курсова робота
з дисципліни
«Теорія керування»

Виконав: студент 4 курсу
групи КА-81
Галганов Олексій
Прийняв: професор
Романенко Віктор Демидович

Київ 2021

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 Вступ 2
1.1. Теоретичні дані 2
1.2. Завдання курсової роботи 3
1.3. Значення коефіцієнтів та сталих 4

РОЗДІЛ 2 Розрахунок дискретних передаточних функцій 5
2.1. Теоретичні дані 5
2.2. Випадок $W_O(S) = \frac{k}{T_1 s+1}$ 5
2.3. Випадок $W_O(S) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ 6
2.4. Випадок $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$ 7
2.5. Випадок $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ 8

РОЗДІЛ 3 Розрахунок періодів квантування 10
3.1. Розрахунок на умові забезпечення необхідної точності керування 10
3.1.1 Випадок $W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$ 10
3.1.2 Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ 11
3.2. Розрахунок за критерієм Джурі 11
3.2.1 Випадок $W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$ 12
3.2.2 Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ 13
3.3. Розрахунок для об'єкта з динамікою в чисельнику 13

РОЗДІЛ 4 Визначення структури та оптимальних настройок регуляторів методом «прямого» синтезу 15

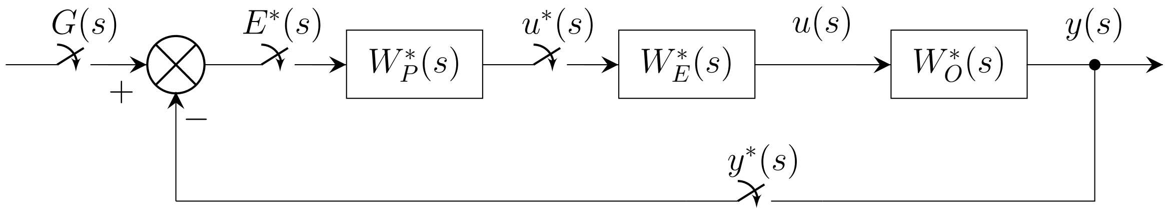
РОЗДІЛ 5 Розрахунок оптимальних параметрів ПІ-регулятора і періоду квантування резонансним методом 17
5.1. Випадок $W_O(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$ 17
5.2. Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$ 20

РОЗДІЛ 6 Синтез лінійно-квадратичного регулятора стану 23

РОЗДІЛ 1
ВСТУП

1.1. Теоретичні дані

Розглядається одноконтурна система автоматичного цифрового керування (ЦК) з наступною структурною схемою:



Тут $W_O(s)$ – передаточна функція об'єкта керування по керуючому діянню, $G(s)$ і $u(s)$ – відповідно задаюче і керуюче діяння в формі перетворення Лапласа, $W_p^*(s)$ – передаточна функція цифрового регулятора (ЦАП) у формі дискретного перетворення Лапласа, $W_E(s)$ – передаточна функція цифро-аналогового регулятора, $E^*(s)$, $u^*(s)$, $y^*(s)$ – відповідно помилка керування, керуюче діяння та вихідна керована координата у формі дискретного перетворення Лапласа. Передаточні функції об'єкта для окремих задач мають вигляд

$$W_O(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \tag{1.1}$$

$$W_O(s) = \frac{k(T_1 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)} \tag{1.2}$$

де k – коефіцієнт передачі об'єкта керування, T_1, T_2, T_3 – сталі часу в секундах, τ – час запізнення в секундах.

Регулятор ЦК, представлений в різницевій формі на основі позиційного алгоритма пропорційно-інтегрально-диференціального (ПІД) закону керування записується таким чином:

$$u(nT_0) = K_p \left(e(nT_0) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=1}^{n} e(iT_0) + \frac{T_D}{T_0} \left[e(nT_0) - e((n-1)T_0) \right] \right) \tag{1.3}$$

Тут $u(nT_0)$ та $e(nT_0)$ – відповідно керуюче діяння і помилка керування в n-тий період квантування, K_p – коефіцієнт передачі регулятора, T_I та T_D – відповідно сталі часу інтегрування та диференціювання в секундах, T_0 – період квантування в секундах.

Відповідно до (1.3), дискретна передаточна функція ПІД-регулятора має вигляд

$$W_p(z) = K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I\left(1 - z^{-1}\right)} + \frac{T_D\left(1 - z^{-1}\right)}{T_0}\right) \tag{1.4}$$

Якщо час диференціювання $T_D = 0$, то для цифрового ПІ-регулятора матимемо дискретну передаточну функцію

$$W_p(z) = K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I\left(1 - z^{-1}\right)}\right) \tag{1.5}$$

де $z = e^{sT_0}$ – оператор z-перетворення.

1.2. Завдання курсової роботи

1. Розрахувати дискретну передаточну функцію замкненого контура цифрового керування, попередньо розрахувавши дискретну передаточну функцію приведеної неперервної частини (ПНЧ) об'єкта

$$W_{\text{п}}(z) = z\left\{W_E(s) \cdot W_O(s)\right\} \tag{1.6}$$

   для наступних варіантів передаточної функції об'єкта:
   $W_O(S) = \frac{k}{T_1 s+1}$, $W_O(S) = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$, $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$, $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$.
2. Розрахувати періоди квантування в системі цифрового керування для об'єктів

$$W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s + 1} \tag{1.7}$$

$$W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \tag{1.8}$$

   і для об'єкта (1.2), передаточна функція якого має динаміку в чисельнику.
3. На основі методу «прямого» синтезу визначити структуру і оптимальні настройки регуляторів цифрового керування і неперервного регулятора для управління об'єктами, передаточна функція яких має вигляд (1.7). При цьому приймається період квантування T_0, розрахований у пункті 2 на основі умови забезпечення необхідної точності керування. Значення коефіцієнта підсилення регулятора $K_{P_{\text{опт}}}$ необхідно визначити при таких параметрах настройки λ:
   а) $\lambda = \frac{1}{T_1}$; б) $\lambda = \frac{1}{1.5T_1}$; в) $\lambda = \frac{1}{2T_1}$; г) $\lambda = \frac{1}{3T_1}$.
   Для вказаного набору параметрів настройки λ шляхом цифрового моделювання побудувати перехідні процеси в замкненому контурі цифрового керування.

4. Розрахувати оптимальні параметри ПІ-регулятора цифрового керування і періоду квантування резонансним методом для об'єкта керування (1.1), (1.8). На основі цифрового моделювання побудувати перехідні процеси вихідної координати y в замкненому контурі при подачі імпульсних тестів на задаюче діяння цифрового регулятора.
5. Виконати синтез лінійно-квадратичного регулятора стану і виконати цифрове моделювання замкненої системи з регулятором стану.
6. Дослідити стійкість контура цифрового керування, розрахованої за пунктом 3. При цьому використовувати відомі критерії стійкості.
7. Сформувати позиційний і швидкісний алгоритм цифрового керування в формі, зручній для програмування для регуляторів цифрового керування відповідно до пунктів 3, 4.
8. Виконати цифрове моделювання замкнених систем керування при синтезованих цифрових регуляторах.

1.3. Значення коефіцієнтів та сталих

k	T_1	T_2	T_3	τ
9.32	35	19	11	14

k – коефіцієнт передачі об'єкта керування, T_1, T_2, T_3 – сталі часу в секундах, τ – час запізнення в секундах.

РОЗДІЛ 2
РОЗРАХУНОК ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Теоретичні дані

Дискретну передаточну функцію приведеної неперервної частини (ПНЧ) об'єкта має вигляд

$$W_{\text{п}}(z) = z\left\{W_E(s) \cdot W_O(s)\right\} = z\left\{\frac{1-e^{-sT_0}}{s} \cdot W_O(S)\right\} = \\ = z\left\{\left(1-e^{-sT_0}\right) \cdot \frac{W_O(s)}{s}\right\} = \left(1-z^{-1}\right) \cdot z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} \quad (2.1)$$

Дискретна передаточна функція замкненого контуру цифрового керування має вигляд

$$W_{\text{з}}(z) = \frac{W_{\text{п}}(z) \cdot W_p(z)}{1 + W_{\text{п}}(z) \cdot W_p(z)} \quad (2.2)$$

де $W_p(z)$ – дискретна передаточна функція регулятора, що для ПІД-регулятора має вигляд (1.3), а для ПІ-регулятора – вигляд (1.5). Далі за текстом термін «дискретна передаточна функція» буде скорочено до ДПФ.

2.2. Випадок $W_O(S) = \frac{k}{T_1 s+1}$

Обчислимо z-перетворення для $\frac{W_O(S)}{s} = \frac{k}{s(T_1 s+1)} = \frac{k}{s} - \frac{kT_1}{T_1 s+1}$. За таблицею z-перетворення отримаємо

$$z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{kz}{z-1} - \frac{kz}{z-e^{T_0/T_1}} = \frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)} \quad (2.3)$$

Тому ДПФ ПНЧ має вигляд

$$W_{\text{п}}(z) = \left(1-z^{-1}\right) \cdot z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)z}{(z-1)\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)} = \\ = \frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)}{z-e^{-T_0/T_1}} \quad (2.4)$$

Отже, ДПФ замкненого контуру цифрового керування з ПІД-регулятором має вигляд

$$W_з(z) = \frac{W_п(z)\cdot W_p(z)}{1+W_п(z)\cdot W_p(z)} = \frac{\frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)}{z-e^{-T_0/T_1}}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{1+\frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)}{z-e^{-T_0/T_1}}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)+k\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2+T_IT_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)}{\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)T_0T_I(1-z^{-1})+kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_0T_I(1-z^{-1})+T_0^2+T_IT_D(1-z^{-1})^2\right)} =$$

$$= \frac{kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2+T_IT_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)T_0T_I(1-z^{-1})+kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_0T_I(1-z^{-1})+T_0^2+T_IT_D(1-z^{-1})^2\right)z^{-1}} \qquad (2.5)$$

Відповідно, з ПІ-регулятором ($T_D = 0$):

$$W_з(z) = \frac{kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_0T_1\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)T_0T_1(1-z^{-1})+kK_p\left(1-e^{-T_0/T_1}\right)(T_0T_1(1-z^{-1})+T_0^2)z^{-1}} =$$

$$= \frac{kK_p\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_1\left(1-z^{-1}\right)+T_0\right)z^{-1}}{\left(1-e^{-T_0/T_1z^{-1}}\right)T_1\left(1-z^{-1}\right)+kK_p\left(z-e^{-T_0/T_1}\right)\left(T_1\left(1-z^{-1}\right)+T_0\right)z^{-1}} \qquad (2.6)$$

2.3. Випадок $W_O(S) = \frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

Обчислимо z-перетворення для $\frac{W_O(S)}{s} = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{k}{s} - \frac{kT_1^2}{(T_1-T_2)(T_1s+1)} + \frac{kT_2^2}{(T_1-T_2)(T_2s+1)}$. За таблицею z-перетворення отримаємо

$$z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = k\left(\frac{z}{z-1} - \frac{az}{T_1(z-d_1)} + \frac{bz}{T_2(z-d_2)}\right) \qquad (2.7)$$

де $a = \frac{T_1^2}{T_1-T_2}$, $b = \frac{T_2^2}{T_1-T_2}$, $d_1 = e^{-T_0/T_1}$, $d_2 = e^{-T_0/T_2}$. Тому ДПФ ПНЧ має вигляд

$$W_п(z) = \left(1-z^{-1}\right)\cdot z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} =$$

$$= \frac{z-1}{z}\cdot k\left(\frac{z}{z-1} - \frac{az}{T_1(z-d_1)} + \frac{bz}{T_2(z-d_2)}\right) =$$

$$= k\left(1 - \frac{a(z-1)}{T_1(z-d_1)} + \frac{b(z-1)}{T_2(z-d_2)}\right) \qquad (2.8)$$

Отже, ДПФ замкненого контуру цифрового керування з ПІД-регулятором має вигляд

$$W_з(z) = \frac{W_п(z) \cdot W_p(z)}{1 + W_п(z) \cdot W_p(z)} =$$

$$= \frac{k\left(1 - \frac{a(z-1)}{T_1(z-d_1)} + \frac{b(z-1)}{T_2(z-d_2)}\right) K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{1 + k\left(1 - \frac{a(z-1)}{T_1(z-d_1)} + \frac{b(z-1)}{T_2(z-d_2)}\right) K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{kK_p\left(1 - \frac{a(z-1)}{T_1(z-d_1)} + \frac{b(z-1)}{T_2(z-d_2)}\right)\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right) + T_0^2 + T_IT_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)}{T_0T_I(1-z^{-1}) + kK_p\left(1 - \frac{a(z-1)}{T_1(z-d_1)} + \frac{b(z-1)}{T_2(z-d_2)}\right)\left(T_0T_I(1-z^{-1}) + T_0^2 + T_IT_D(1-z^{-1})^2\right)} =$$

$$= \frac{kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right) + T_0^2 + T_IT_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)}{T_0T_IT_1T_2(1-z^{-1})(z-d_1)(z-d_2) + kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))\left(T_0T_I(1-z^{-1}) + T_0^2 + T_IT_D(1-z^{-1})^2\right)} \tag{2.9}$$

Відповідно, з ПІ-регулятором ($T_D = 0$):

$$W_з(z) =$$

$$= \frac{kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right) + T_0^2\right)}{T_0T_IT_1T_2(1-z^{-1})(z-d_1)(z-d_2) + kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))\left(T_0T_I(1-z^{-1}) + T_0^2\right)} =$$

$$= \frac{kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))\left(T_I\left(1-z^{-1}\right) + T_0\right)}{T_IT_1T_2(1-z^{-1})(z-d_1)(z-d_2) + kK_p(T_1T_2(z-d_1)(z-d_2) - aT_2(z-1)(z-d_2) + bT_1(z-1)(z-d_1))(T_I(1-z^{-1}) + T_0)} \tag{2.10}$$

2.4. Випадок $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1s+1}$

Обчислимо z-перетворення для $\frac{W_O(S)}{s} = \frac{ke^{-\tau s}}{s(T_1s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{s} - \frac{kT_1e^{-\tau s}}{T_1s+1}$. За таблицею z-перетворення отримаємо для $dT_0 < \tau \leq (d+1)T_0$

$$z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{kz^{-d}}{z-1} - \frac{kz^{-d-1}}{1 - e^{-T_0/T_1}z^{-1}} e^{\left[\frac{\tau}{T_1} - (d+1)\frac{T_0}{T_1}\right]} \tag{2.11}$$

Тоді після перетворень ДПФ ПНЧ матиме вигляд

$$W_п(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{k\left(C_1 + C_2z^{-1}\right)z^{-d-1}}{\left(1 - e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)} \tag{2.12}$$

де d – ціла частина від ділення часу запізнення τ на період квантування T_0, $a = 1 - \frac{\tau - dT_0}{T_0}$, $C_1 = 1 - e^{-\frac{aT_0}{T_1}}$, $C_2 = e^{-\frac{aT_0}{T_1}} - e^{-\frac{T_0}{T_1}}$. Отже, ДПФ замкненого контуру цифрового керування з ПІД-регулятором має вигляд

$$W_з(z) = \frac{W_п(z) \cdot W_p(z)}{1 + W_п(z) \cdot W_p(z)} = \frac{\frac{k\left(C_1 + C_2z^{-1}\right)z^{-d-1}}{\left(1 - e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)} \cdot K_p\left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{1 + \frac{k(C_1 + C_2z^{-1})z^{-d-1}}{\left(1 - e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)} \cdot K_p\left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{k\left(C_1 + C_2 z^{-1}\right) z^{-d-1} \cdot K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{\left(1 - e^{-T_0/T_1} z^{-1}\right) + k\left(C_1 + C_2 z^{-1}\right) z^{-d-1} \cdot K_p \left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})} + \frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(C_1+C_2 z^{-1}\right)\left(T_0 T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2+T_I T_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)}{T_0 T_I\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)(1-z^{-1})+kK_p z^{-d-1}(C_1+C_2 z^{-1})\left(T_0 T_I(1-z^{-1})+T_0^2+T_I T_D(1-z^{-1})^2\right)} \qquad (2.13)$$

Відповідно, з ПІ-регулятором ($T_D = 0$):

$$W_з(z) =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(C_1+C_2 z^{-1}\right)\left(T_0 T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2\right)}{T_0 T_I\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)(1-z^{-1})+kK_p z^{-d-1}(C_1+C_2 z^{-1})(T_0 T_I(1-z^{-1})+T_0^2)} =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(C_1 + C_2 z^{-1}\right)\left(T_I\left(1 - z^{-1}\right) + T_0\right)}{T_I\left(1 - e^{-T_0/T_1} z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right) + kK_p z^{-d-1}\left(C_1 + C_2 z^{-1}\right)\left(T_I\left(1 - z^{-1}\right) + T_0\right)} \qquad (2.14)$$

2.5. Випадок $W_O(S) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

Обчислимо z-перетворення для $\frac{W_O(S)}{s} = \frac{ke^{-\tau s}}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \frac{ke^{-\tau s}}{s} - \frac{kT_1^2 e^{-\tau s}}{(T_1-T_2)(T_1 s+1)} + \frac{kT_2^2 e^{-\tau s}}{(T_1-T_2)(T_2 s+1)}$. За таблицею z-перетворення отримаємо для $dT_0 < \tau \leq (d+1)T_0$

$$z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{kz^{-d}}{z-1} - \frac{kT_1 e^{\left[\frac{\tau}{T_1}-(d+1)\frac{T_0}{T_1}\right]} z^{-d-1}}{(T_1 - T_2)\left(1 - e^{-T_0/T_1} z^{-1}\right)} + \frac{kT_2 e^{\left[\frac{\tau}{T_2}-(d+1)\frac{T_0}{T_2}\right]} z^{-d-1}}{(T_1 - T_2)\left(1 - e^{-T_0/T_2} z^{-1}\right)} \qquad (2.15)$$

Тоді після перетворень ДПФ ПНЧ матиме вигляд

$$W_п(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \cdot z\left\{\frac{W_O(s)}{s}\right\} = \frac{k\left(\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 z^{-1} + \tilde{C}_2 z^{-2}\right) z^{-d-1}}{\left(1 - e^{-T_0/T_1} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-T_0/T_2} z^{-1}\right)} \qquad (2.16)$$

де $a = (d+1) - \frac{\tau}{T_0}$ і сталі $\tilde{C}_0$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ визначаються з

$$\tilde{C}_0 = 1 - \frac{T_1 e^{-aT_0/T_1} - T_2 e^{-aT_0/T_2}}{T_1 - T_2}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{T_1 e^{-aT_0/T_1}\left(1 + e^{-T_0/T_2}\right) - T_2 e^{-aT_0/T_2}\left(1 + e^{-T_0/T_1}\right)}{T_1 - T_2} - e^{-T_0/T_1} - e^{-T_0/T_2}$$

$$\tilde{C}_2 = e^{-T_0/T_1} e^{-T_0/T_2} - \frac{T_1 e^{-aT_0/T_1} e^{-T_0/T_2} - T_2 e^{-T_0/T_1} e^{-aT_0/T_2}}{T_1 - T_2}$$

як і раніше, d – ціла частина від ділення часу запізнення τ на період квантування T_0. Отже, ДПФ замкненого контуру цифрового керування з ПІД-регулятором має вигляд

$$W_з(z) = \frac{W_п(z)\cdot W_p(z)}{1+W_п(z)\cdot W_p(z)} =$$

$$= \frac{\frac{k\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)z^{-d-1}}{\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{1+\frac{k\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)z^{-d-1}}{\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}+\frac{T_D(1-z^{-1})}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{k\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)z^{-d-1}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)}{\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)+k\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)z^{-d-1}\cdot K_p\left(1+\frac{T_0}{T_I\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{T_D\left(1-z^{-1}\right)}{T_0}\right)} =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2+T_IT_D\left(1-z^{-1}\right)^2\right)}{T_0T_I(1-z^{-1})\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)+kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)\left(T_0T_I(1-z^{-1})+T_0^2+T_IT_D(1-z^{-1})^2\right)} \tag{2.17}$$

Відповідно, з ПІ-регулятором ($T_D = 0$):

$$W_п(z) =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)\left(T_0T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0^2\right)}{T_0T_I(1-z^{-1})\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)+kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)\left(T_0T_I(1-z^{-1})+T_0^2\right)} =$$

$$= \frac{kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)\left(T_I\left(1-z^{-1}\right)+T_0\right)}{T_I(1-z^{-1})\left(1-e^{-T_0/T_1}z^{-1}\right)\left(1-e^{-T_0/T_2}z^{-1}\right)+kK_p z^{-d-1}\left(\tilde{C}_0+\tilde{C}_1 z^{-1}+\tilde{C}_2 z^{-2}\right)(T_I(1-z^{-1})+T_0)} \tag{2.18}$$

РОЗДІЛ 3
РОЗРАХУНОК ПЕРІОДІВ КВАНТУВАННЯ

3.1. Розрахунок на умові забезпечення необхідної точності керування

За цим критерієм період квантування обчислюється з умови $T_0 \le \frac{\varepsilon}{B_{\max}}$, де $B_{\max}$ – максимальне значення функції $B(\omega) = \omega A(\omega)$, а $A(\omega)$ – амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) об'єкта. $B(\omega)$ описує верхню границю можливих швидкостей зміни сигналу на виході об'єкта.

3.1.1. Випадок $W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$

Знайдемо $B(\omega)$:

$$B(\omega) = \omega A(\omega) = \omega \cdot |W_{O_1}(j\omega)| = \omega \cdot \frac{k\left|e^{-\tau j\omega}\right|}{|T_1 j\omega + 1|} = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T_1^2\omega^2}} \tag{3.1}$$

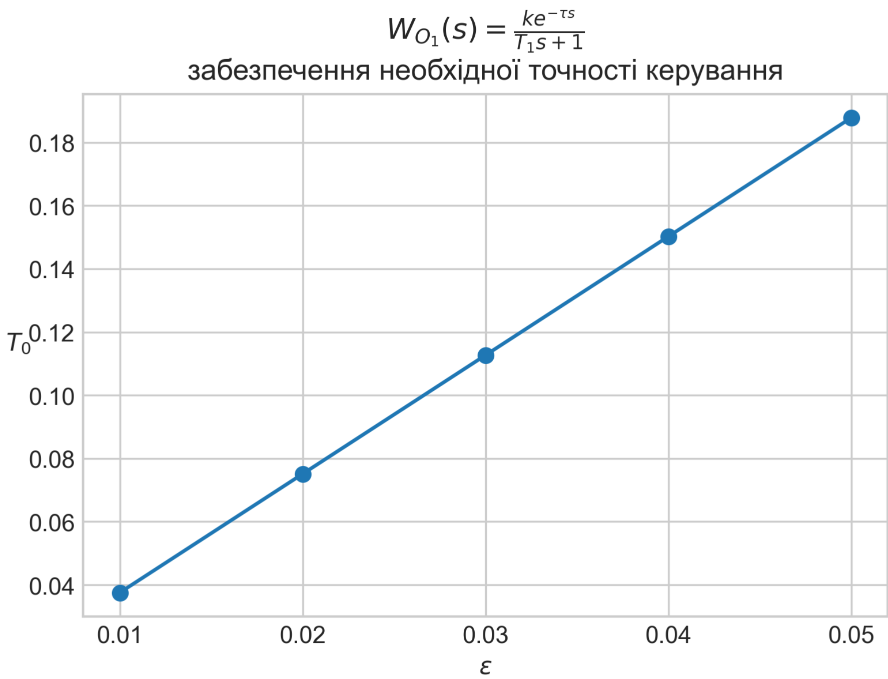
Оскільки $\frac{k\omega}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}} = \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{\omega^2}+T_1^2}}$, то $B(\omega)$ – монотонно зростаюча за ω функція, тому

$$B_{\max} = \lim_{\omega \to +\infty} B(\omega) = \frac{k}{T_1} \Rightarrow T_0 = \frac{\varepsilon T_1}{k} \tag{3.2}$$

Отже, отримуємо наступні періоди квантування для різних ε:

ε	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
T_0	0.0376	0.0751	0.1127	0.1502	0.1878

Залежність T_0 від ε:



3.1.2. Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

Знайдемо $B(\omega)$:

$$B(\omega) = \omega A(\omega) = \omega \cdot |W_{O_2}(j\omega)| = \omega \cdot \frac{k\left|e^{-\tau j\omega}\right|}{|T_1 j\omega+1||T_2 j\omega+1|} = \frac{k\omega}{\sqrt{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}} \quad (3.3)$$

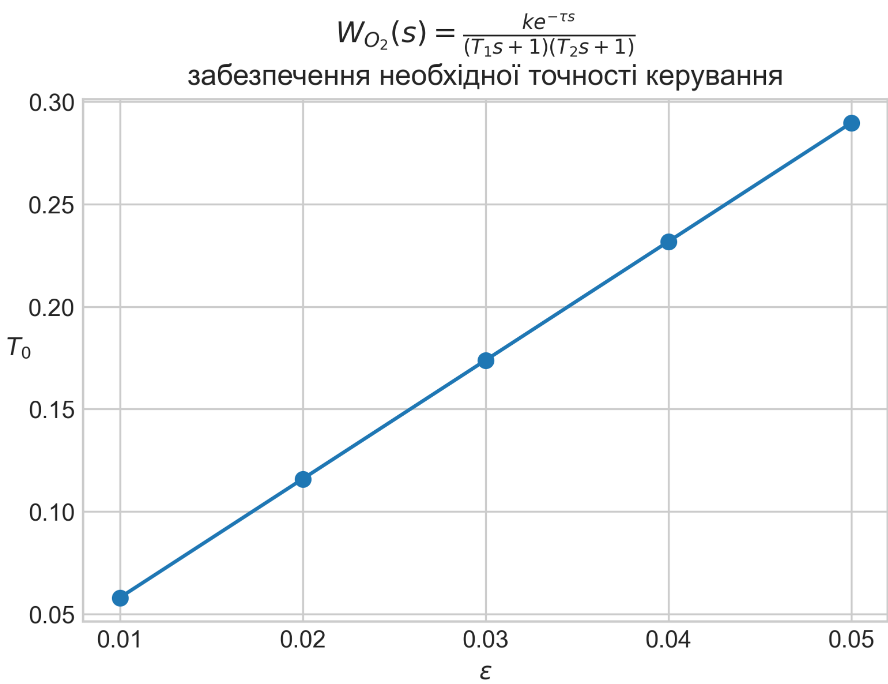
$B_{\max}$ можна знайти за допомогою відповідної таблиці:

$$B_{\max} = \frac{k}{T_1+T_2} \Rightarrow T_0 = \frac{\varepsilon(T_1+T_2)}{k} \quad (3.4)$$

Отже, отримуємо наступні періоди квантування для різних ε:

ε	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
T_0	0.0579	0.1159	0.1738	0.2318	0.2897

Залежність T_0 від ε:



3.2. Розрахунок за критерієм Джурі

За цим критерієм період квантування обчислюється як $T_0 = \frac{\pi}{\omega_k}$, де ω_k – розв'язок рівняння

$$|W_з(j\omega_k)| = \left|\frac{W_O(j\omega_k)W_p(j\omega_k)}{1+W_O(j\omega_k)W_p(j\omega_k)}\right| = \varepsilon \quad (3.5)$$

3.2.1. Випадок $W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$

Згідно з розділом 4, оптимальним регулятором в цьому випадку є ПІ-регулятор з передаточною функцією $W_p(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_I s}\right) = K_p\cdot\frac{T_1 s+1}{T_1 s}$, де $K_p = \frac{\lambda T_1}{k(1+\lambda\tau)}$, $\lambda = \frac{1}{T_1}$, $T_I = T_1$. Знайдемо $|W_з(j\omega)|$:

$$|W_з(j\omega)| = \frac{|W_{O_1}(j\omega)W_p(j\omega)|}{|1+W_{O_1}(j\omega)W_p(j\omega)|} = \frac{\left|\frac{ke^{-\tau j\omega}}{T_1 j\omega+1}\cdot K_p\cdot\frac{T_1 j\omega+1}{T_1 j\omega}\right|}{\left|1+\frac{ke^{-\tau j\omega}}{T_1 j\omega+1}\cdot K_p\cdot\frac{T_1 j\omega+1}{T_1 j\omega}\right|} =$$

$$= \frac{\left|kK_p e^{-\tau j\omega}\right|}{|T_1 j\omega + kK_p e^{-\tau j\omega}|} = \frac{1}{\left|1+\frac{T_1}{kK_p}j\omega e^{\tau j\omega}\right|} = \frac{1}{\left|1+\frac{T_1}{kK_p}j\omega\left(\cos\tau\omega + j\sin\tau\omega\right)\right|} =$$

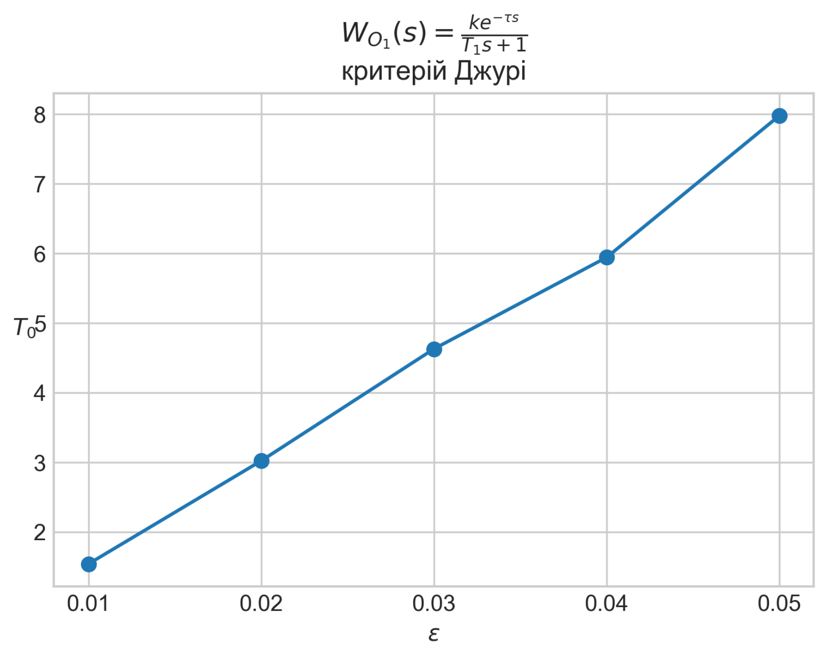
$$= \frac{1}{\left|1+\frac{T_1}{kK_p}\left(j\omega\cos\tau\omega - \omega\sin\tau\omega\right)\right|} = \frac{1}{\left|1-\frac{T_1}{kK_p}\omega\sin\tau\omega + j\frac{T_1}{kK_p}\omega\cos\tau\omega\right|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{T_1}{kK_p}\omega\sin\tau\omega\right)^2+\left(\frac{T_1}{kK_p}\omega\cos\tau\omega\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{T_1}{kK_p}\right)^2\omega^2 - 2\frac{T_1}{kK_p}\omega\sin\tau\omega + 1}}$$

Отже, $|W_з(j\omega)| = \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{T_1}{kK_p}\right)^2\omega^2 - 2\frac{T_1}{kK_p}\omega\sin\tau\omega + 1 = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Отримуємо наступні періоди квантування для різних ε:

ε	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
ω_k	2.0361	1.0391	0.6785	0.5285	0.3937
T_0	1.5430	3.0234	4.6304	5.9449	7.9803

Залежність T_0 від ε:

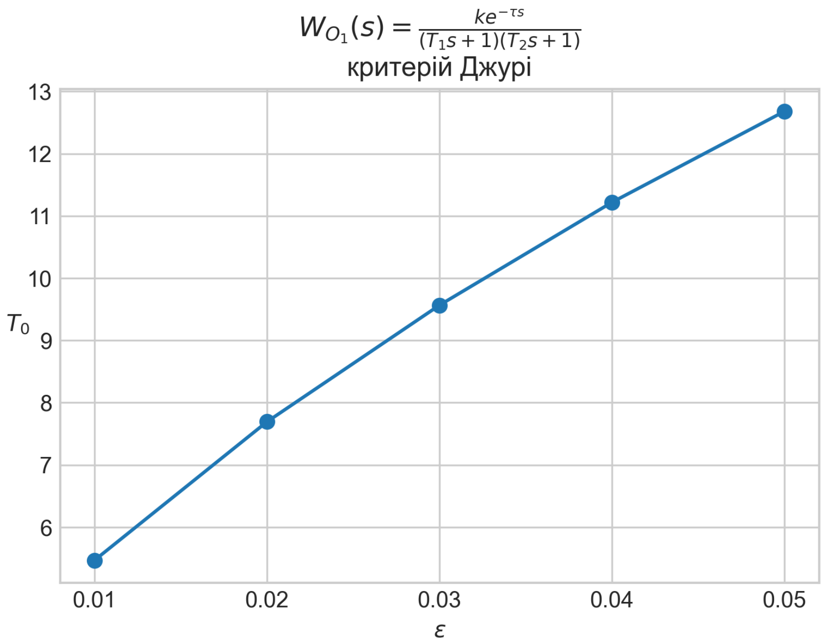


3.2.2. Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

Згідно з розділом 5, оптимальним регулятором в цьому випадку є ПІ-регулятор з передаточною функцією $W_p(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = K_p \cdot \frac{T_1 s+1}{T_1 s}$, де $K_p = 0.23703$, $T_I = 105.72649$. Аналітичний запис $|W_3(j\omega)|$ досить складний, тому одразу наведемо чисельно знайдені розв'язки рівняння $|W_3(j\omega)| = \varepsilon$ для різних ε:

ε	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
ω_k	0.5746	0.4084	0.3284	0.2800	0.2478
T_0	5.4670	7.6924	9.5656	11.2188	12.6804

Залежність T_0 від ε:



3.3. Розрахунок для об'єкта з динамікою в чисельнику

Розглядається об'єкт з передаточною функцією $W_O(s) = \frac{k(T_1 s+1)}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$. Через те, що передаточна функція має динаміку в чисельнику, критерій забезпечення необхідної точності керування та критерій Джурі непридатні для застосування. Приведемо передаточну функцію до вигляду $W_O(s) = \frac{K(bTs+1)}{T^2 s^2+2\nu Ts+1}$:

$$\frac{k(T_1 s+1)}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} = \frac{k(T_1 s+1)}{T_2 T_3 s^2 + (T_2+T_3)s+1}$$

тому $T = \sqrt{T_2 T_3} \approx 14.4568$, $b = \frac{T_1}{T} \approx 2.421$, $\nu = \frac{T_2+T_3}{2\sqrt{T_2 T_3}} = \frac{T_2+T_3}{2T} \approx 1.0376$. Знайдемо $|W_O(j\omega)|$:

$$|W_O(j\omega)| = \frac{k\,|bT \cdot j\omega + 1|}{|-T^2\omega^2 + 2\nu T \cdot j\omega + 1|} = \frac{k\sqrt{1 + b^2T^2\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + 4\nu^2 T^2\omega^2}}$$

Введемо $\omega_{\text{зр}} = \frac{q}{T}$ – найвищу частоту сигналу, який необхідно відновити на виході системи:

$$|W_O(j\omega_{\text{зр}})| = \frac{k\sqrt{1 + b^2q^2}}{\sqrt{\left(1 - q^2\right)^2 + 4\nu^2 q^2}}$$

Розв'яжемо рівняння $|W_O(j\omega_{\text{зр}})| = \frac{1}{\theta}$, де $\theta = 31$, відносно q:

$$\frac{k\sqrt{1 + b^2q^2}}{\sqrt{\left(1 - q^2\right)^2 + 4\nu^2 q^2}} = \frac{1}{\theta} \Leftrightarrow \frac{1 + b^2q^2}{1 - 2q^2 + q^4 + 4\nu^2q^2} = \frac{1}{k^2\theta^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2q^2 + q^4 + 4\nu^2q^2 = k^2\theta^2\left(1 + b^2q^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^4 + q^2\left(4\nu^2 - b^2k^2\theta^2 - 2\right)q^2 + \left(1 - k^2\theta^2\right) = 0$$

Розв'яжемо це рівняння спочатку відносно q^2. Приближні значення коренів:

$$\left[\begin{array}{l} q^2 = 489263.8397 \\ q^2 = -0.17061 \end{array}\right.$$

Оскільки комплексні та від'ємні q не розглядаються, то отримуємо $q \approx 699.474$. Отже, період квантування $T_0 = \frac{\pi}{\omega_{\text{зр}}} = \frac{\pi T}{q} = 0.0649$.

РОЗДІЛ 4

ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ ТА ОПТИМАЛЬНИХ НАСТРОЙОК РЕГУЛЯТОРІВ МЕТОДОМ «ПРЯМОГО» СИНТЕЗУ

Розглядається об'єкт з передаточною функцією $W_{O_1}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{T_1 s+1}$. При перехідному режимі є бажаним аперіодичний перехідний процес в контурі цифрового керування, тобто при подачі на задаюче діяння регулятора одиничного ступінчатого збурення замкнений контур має вести себе як неперервна модель першого порядку з запізненням:

$$W_з(s) = \frac{y(s)}{G(s)} = \frac{\lambda e^{-\tau s}}{s+\lambda} \tag{4.1}$$

Згідно з методичними рекомендаціями, оптимальні параметри ПІ-регулятора з ДПФ $K_p\left(1 + \frac{T_0}{T_I(1-z^{-1})}\right)$ визначаються за формулами

$$K_{p_{\text{опт}}} = \frac{1 - e^{-\lambda T_0}}{k\left(e^{T_0/T_1} - 1\right)\left(1 + d\left(1 - e^{-\lambda T_0}\right)\right)} \tag{4.2}$$

$$T_{I_{\text{опт}}} = \frac{T_0}{e^{T_0/T_1} - 1} \tag{4.3}$$

де d – ціла частина від ділення часу запізнення τ на період квантування T_0, який беремо на основі умови забезпечення необхідної точності керування. Візьмемо $T_0 = 0.1127$. Тоді $d = 124$, $T_{I_{\text{опт}}} = 34.9437$, а для різних варіантів λ отримаємо такі значення $K_{p_{\text{опт}}}$:

λ	$K_{p_{\text{опт}}}$
$\frac{1}{T_1} \approx 0.0286$	0.0765
$\frac{1}{1.5T_1} \approx 0.0190$	0.0564
$\frac{1}{2T_1} \approx 0.0143$	0.0446
$\frac{1}{3T_1} \approx 0.0095$	0.0315

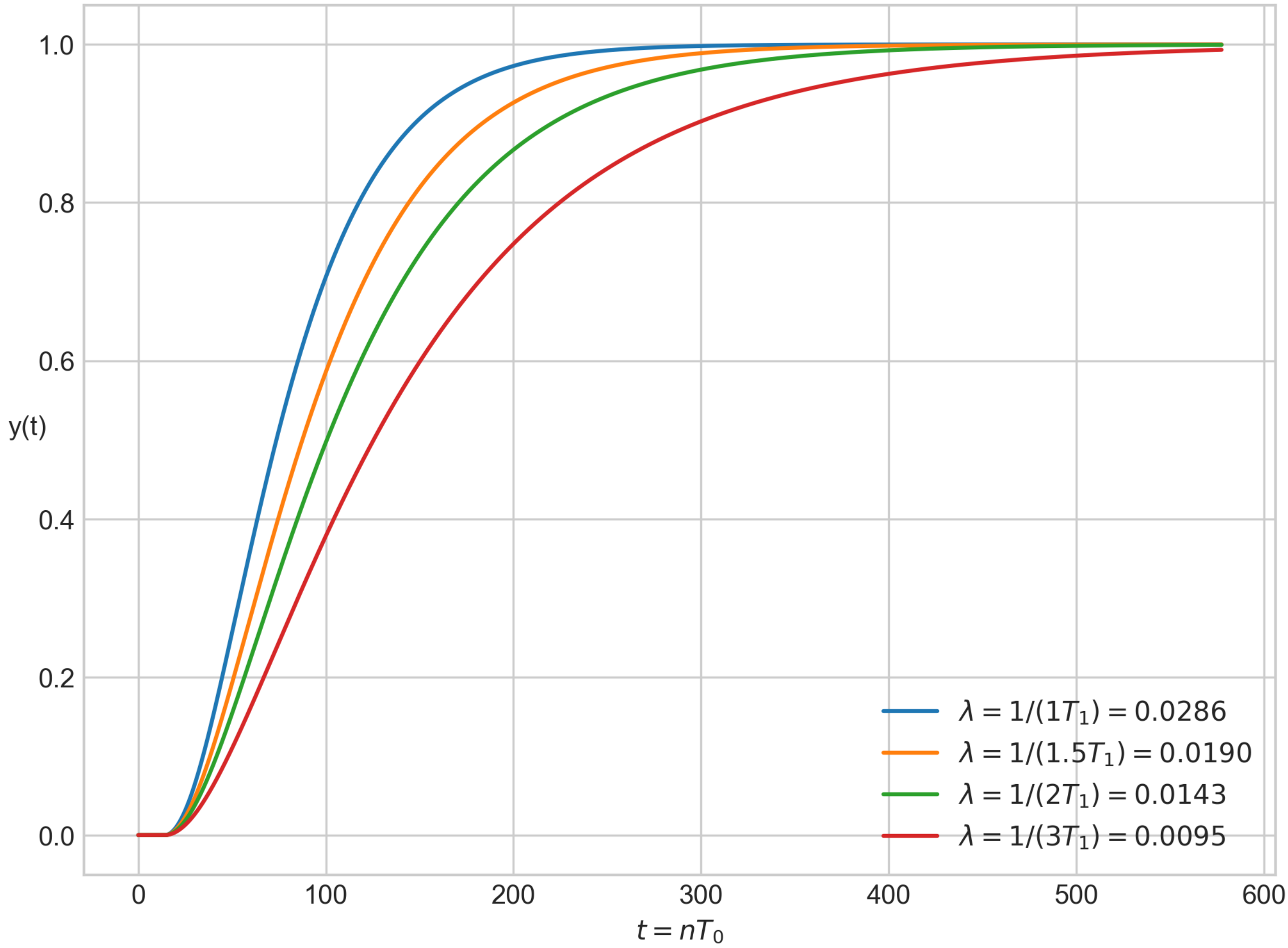
Для цифрового моделювання перехідних процесів в замкненому контурі цифрового керування зауважимо, що можна записати рівняння

$$y(z) = W_p(z)W_п(z)\left(G(z) - y(z)\right) \Rightarrow y(z) = \frac{W_p(z)W_п(z)}{1 + W_p(z)W_п(z)}G(z) = W_з(z)G(z)$$

де $y(z)$, $G(z)$ – z-перетворення від керованої координати і задаючого діяння відповідно, а передаточну функцію $W_з(z)$ було обчислено в (2.4). Можна записати рекурентне рівняння, за яким буде відбуватися моделювання:

$$\begin{aligned}y_n = \left(1+e^{-T_0/T_1}\right) y_{n-1} - e^{-T_0/T_1} y_{n-2} - \\ -\frac{kK_{p\text{опт}}}{T_I}\left(\left(C_1 T_{I_\text{опт}} + C_1 T_0\right) y_{n-d-1} + \left(-C_1 T_{I_\text{опт}} + C_2 T_{I_\text{опт}} + C_2 T_0\right) y_{n-d-2} - C_2 T_{I_\text{опт}} y_{n-d-3}\right) + \\ +\frac{kK_{p\text{опт}}}{T_I}\left(\left(C_1 T_{I_\text{опт}} + C_1 T_0\right) g_{n-d-1} + \left(-C_1 T_{I_\text{опт}} + C_2 T_{I_\text{опт}} + C_2 T_0\right) g_{n-d-2} - C_2 T_{I_\text{опт}} g_{n-d-3}\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

де $a = 1 - \frac{\tau - dT_0}{T_0}$, $C_1 = 1 - e^{-\frac{aT_0}{T_1}}$, $C_2 = e^{-\frac{aT_0}{T_1}} - e^{-\frac{T_0}{T_1}}$, початкові умови для y нульові, а $g_n = 1$. Отже, маємо наступні перехідні процеси для різних значень λ:



Видно, що процес зміни вихідної координати дійсно має бажаний монотонний характер.

На основі формул (4.2) та (4.3) можна визначити оптимальні настройки для неперервного регулятора, взявши границі при $T_0 \to 0$. Отримаємо $K_p^H = \frac{\lambda T_1}{k(1+\lambda\tau)}$, $T_I^H = T_1$.

РОЗДІЛ 5

РОЗРАХУНОК ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ПІ-РЕГУЛЯТОРА І ПЕРІОДУ КВАНТУВАННЯ РЕЗОНАНСНИМ МЕТОДОМ

За завданням, розрахунки треба провести для об'єктів з передаточними функціями $W_O(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$ (1.1) та $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ (1.8).

Регулятор цифрового керування реалізує пропорційно-інтегральний закон керування, який представлений позиційним алгоритмом:

$$u(nT_0) = K_p \left(e(nT_0) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=1}^{n} e(iT_0) \right)$$

Для визначення оптимальних параметрів настройки $K_{p_{\text{опт}}}$, $T_{I_{\text{опт}}}$ та періоду квантування $T_{0_{\text{опт}}}$ скористаємося алгоритмом, наведеним у методичних рекомендаціях до курсової роботи.

5.1. Випадок $W_O(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

а) Шляхом розв'язання відносно частоти ω нелінійного рівняння

$$\operatorname{arctg}\omega T_1 + \operatorname{arctg}\omega T_2 + \operatorname{arctg}\omega T_3 + \omega\tau = 2.62 \tag{5.1}$$

знаходимо резонансну частоту $\omega_{\varphi_H} = 0.04096$ для неперервного контура керування.

б) Визначаємо верхню та нижню частоту відносно резонансної частоти неперервної системи: $\omega_{\varphi_H}^H = \frac{\omega_{\varphi_H}}{\sqrt{2}} = 0.02897$, $\omega_{\varphi_H}^B = \sqrt{2}\omega_{\varphi_H} = 0.05793$.

в) Використовуючи знайдену частоту ω_{φ_H}, за формулою

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{\left(1+\omega^2T_1^2\right)\left(1+\omega^2T_2^2\right)\left(1+\omega^2T_3^2\right)}} \tag{5.2}$$

знаходимо другий основний динамічний параметр неперервного контура в частотній області: $A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right) = 3.83604$. Також, знайдемо третій основний параметр $\Phi_H(A) = \frac{A\left(\omega_{\varphi_H}^B\right)}{A\left(\omega_{\varphi_H}^H\right)} = 0.42790$.

г) Використовуючи вираз

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\omega T_1 + \operatorname{arctg}\omega T_2 + \operatorname{arctg}\omega T_3 + \omega\tau \tag{5.3}$$

визначаємо четвертий основний параметр в частотній області для неперервного контуру: $\Phi_H(\varphi) = \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^H\right) - \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^B\right) = 1.31497$.

д) За емпіричними формулами визначаємо оптимальні коефіцієнти настройки неперервного ПІ-регулятора та оптимальний період квантування:

$$T_{I_{\text{опт}}}^{\text{неп}} = \frac{4.061 \cdot \Phi_H(A)^{-0.3387} \cdot \Phi_H(\varphi)^{0.2075}}{\omega_{\varphi_H}} \tag{5.4}$$

$$K_{p_{\text{опт}}}^{\text{неп}} = \frac{1}{2A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right)} \cdot \left(1 + 1.189 \cdot \Phi_H(A)^{0.7139} \cdot (1.852 - \Phi_H(\varphi))^{0.8643}\right) \tag{5.5}$$

$$T_{0_{\text{опт}}} = \frac{0.5742 \cdot \Phi_H(A)^{0.5742} \Phi_H(\varphi)^{0.9394}}{\omega_{\varphi_H}} \tag{5.6}$$

Отримуємо значення $T_{I_{\text{опт}}}^{\text{неп}} = 139.88408$, $K_{p_{\text{опт}}}^{\text{неп}} = 0.17974$, $T_{0_{\text{опт}}} = 11.13496$.

е) При оптимальному періоду квантування визначаємо чотири основні параметри ω_φ, $A\left(\omega_\varphi\right)$, $\Phi(A)$, $\Phi(\varphi)$ в частотній області при врахуванні ПНЧ об'єкта. Для цього використаємо рівняння

$$A(\omega) = A_H(\omega) \cdot \frac{\sin \frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2}}{\frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2}} \tag{5.7}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2 + \operatorname{arctg} \omega T_3 + \omega\tau + \frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2} \tag{5.8}$$

Шляхом розв'язання $\varphi(\omega) = 2.62$ знаходимо частоту $\omega_\varphi = 0.03670$, а потім за рівняннями (5.7), (5.8) знаходимо $A\left(\omega_\varphi\right) = 4.32464$, $\Phi(A) = \frac{A\left(\omega_{\varphi_H}^B\right)}{A\left(\omega_{\varphi_H}^H\right)} = 0.46223$, $\Phi(\varphi) = \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^H\right) - \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^B\right) = 1.39902$.

ж) При оптимальному періоді квантування $T_{0_{\text{опт}}}$ знаходимо оптимальні значення $T_{I_{\text{опт}}}$ та $K_{p_{\text{опт}}}$ за формулами

$$T_{I_{\text{опт}}} = \frac{4.061 \cdot \Phi(A)^{-0.3387} \cdot \Phi(\varphi)^{0.2075}}{\omega_\varphi} \tag{5.9}$$

$$K_{p_{\text{опт}}} = \frac{1}{2A\left(\omega_{\varphi_H}\right)} \cdot \left(1 + 1.189 \cdot \Phi(A)^{0.7139} \cdot (1.852 - \Phi(\varphi))^{0.8843}\right) \tag{5.10}$$

Отримуємо значення $T_{I_{\text{опт}}} = 154.07932$, $K_{p_{\text{опт}}} = 0.15558$.

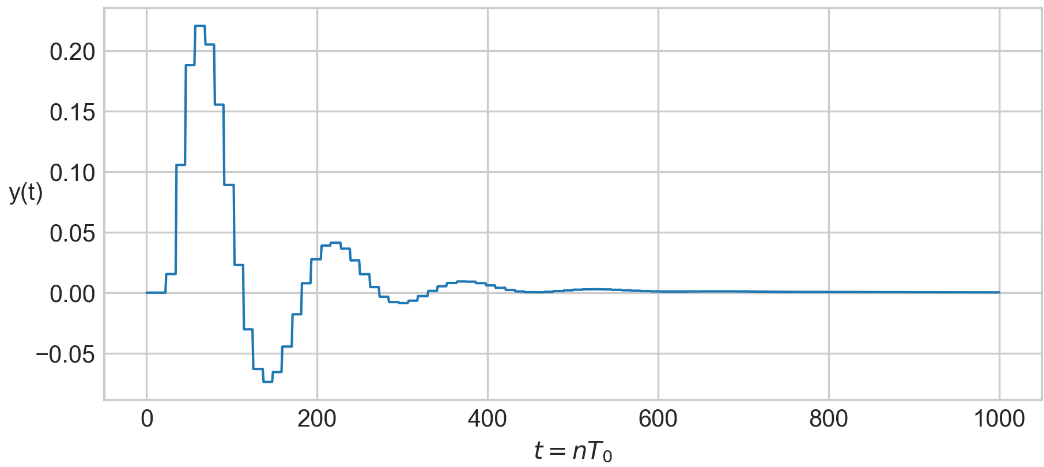
Збережемо результати обчислень до таблиці:

параметр	значення
ω_{φ_H}	0.04096
$\omega_{\varphi_H}^H$	0.02897
$\omega_{\varphi_H}^B H$	0.05793
$A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right)$	3.83604
$\Phi_H(A)$	0.42790
$\Phi_H(\varphi)$	1.31497
$T_{I_{\text{опт}}}^{\text{неп}}$	139.88408
$K_{p_{\text{опт}}}^{\text{неп}}$	0.17974
$T_{0_{\text{опт}}}$	11.13496
ω_{φ}	0.03670
$A\left(\omega_{\varphi}\right)$	4.32464
$\Phi(A)$	0.46223
$\Phi(\varphi)$	1.39902
$T_{I_{\text{опт}}}$	154.07932
$K_{p_{\text{опт}}}$	0.15558

Для цифрового моделювання перехідного процесу вихідної координати y скористаємося передаточною функцією $W_з(s)$:

$$y(s) = W_з(s)G(s) = \frac{W_p(s)W_O(s)}{1+W_p(s)W_O(s)}G(s)$$
$$W_p(s) = K_{p_{\text{опт}}}\left(1 + \frac{1}{T_{I_{\text{опт}}}s}\right),\ G(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT_{0_{\text{опт}}}}\right)$$

Чисельно знайшовши обернене перетворення Лапласа від $y(s)$ в моменти $nT_{0_{\text{опт}}}$, отримаємо значення вихідної координати при подачі на задаюче діяння одиничного імпульсу довжиною $T_{0_{\text{опт}}}$. Відношення затухання дорівнює $\frac{B}{A} = \frac{0.29424}{0.04990} = 0.16958$.



5.2. Випадок $W_{O_2}(s) = \frac{ke^{-\tau s}}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

а) Шляхом розв'язання відносно частоти ω нелінійного рівняння

$$\text{arctg}\,\omega T_1 + \text{arctg}\,\omega T_2 + \omega\tau = 2.62 \tag{5.11}$$

знаходимо резонансну частоту $\omega_{\varphi_H} = 0.05341$ для неперервного контура керування.

б) Визначаємо верхню та нижню частоту відносно резонансної частоти неперервної системи: $\omega^H_{\varphi_H} = \frac{\omega_{\varphi_H}}{\sqrt{2}} = 0.03777$, $\omega^B_{\varphi_H} = \sqrt{2}\omega_{\varphi_H} = 0.07553$.

в) Використовуючи знайдену частоту ω_{φ_H}, за формулою

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1+\omega^2 T_1^2)\,(1+\omega^2 T_2^2)\,(1+\omega^2 T_3^2)}} \tag{5.12}$$

знаходимо другий основний динамічний параметр неперервного контура в частотній області: $A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right) = 3.08583$. Також, знайдемо третій основний параметр $\Phi_H(A) = \frac{A\left(\omega^B_{\varphi_H}\right)}{A\left(\omega^H_{\varphi_H}\right)} = 0.41264$.

г) Використовуючи вираз

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\,\omega T_1 + \text{arctg}\,\omega T_2 + \text{arctg}\,\omega T_3 + \omega\tau \tag{5.13}$$

визначаємо четвертий основний параметр в частотній області для неперервного контуру: $\Phi_H(\varphi) = \varphi\left(\omega^H_{\varphi_H}\right) - \varphi\left(\omega^B_{\varphi_H}\right) = 1.15456$.

д) За емпіричними формулами визначаємо оптимальні коефіцієнти настройки неперервного ПІ-регулятора та оптимальний період квантування:

$$T^{\text{неп}}_{I_{\text{опт}}} = \frac{4.061 \cdot \Phi_H(A)^{-0.3387} \cdot \Phi_H(\varphi)^{0.2075}}{\omega_{\varphi_H}} \tag{5.14}$$

$$K^{\text{неп}}_{p_{\text{опт}}} = \frac{1}{2A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right)} \cdot \left(1 + 1.189 \cdot \Phi_H(A)^{0.7139} \cdot (1.852 - \Phi_H(\varphi))^{0.8643}\right) \tag{5.15}$$

$$T_{0_{\text{опт}}} = \frac{0.5742 \cdot \Phi_H(A)^{0.5742}\Phi_H(\varphi)^{0.9394}}{\omega_{\varphi_H}} \tag{5.16}$$

Отримуємо значення $T^{\text{неп}}_{I_{\text{опт}}} = 105.72649$, $K^{\text{неп}}_{p_{\text{опт}}} = 0.23703$, $T_{0_{\text{опт}}} = 7.40205$.

е) При оптимальному періоду квантування визначаємо чотири основні параметри ω_φ, $A\left(\omega_\varphi\right)$, $\Phi(A)$, $\Phi(\varphi)$ в частотній області при врахуванні ПНЧ об'єкта. Для цього використаємо рівняння

$$A(\omega) = A_H(\omega) \cdot \frac{\sin \frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2}}{\frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2}} \tag{5.17}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T_1 + \operatorname{arctg} \omega T_2 + \operatorname{arctg} \omega T_3 + \omega\tau + \frac{\omega T_{0_{\text{опт}}}}{2} \tag{5.18}$$

Шляхом розв'язання $\varphi(\omega) = 2.62$ знаходимо частоту $\omega_\varphi = 0.04792$, а потім за рівняннями (5.7), (5.8) знаходимо $A\left(\omega_\varphi\right) = 3.51065$, $\Phi(A) = \frac{A\left(\omega_{\varphi_H}^B\right)}{A\left(\omega_{\varphi_H}^H\right)} = 0.43618$, $\Phi(\varphi) = \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^H\right) - \varphi\left(\omega_{\varphi_H}^B\right) = 1.23981$.

ж) При оптимальному періоді квантування $T_{0_{\text{опт}}}$ знаходимо оптимальні значення $T_{I_{\text{опт}}}$ та $K_{p_{\text{опт}}}$ за формулами

$$T_{I_{\text{опт}}} = \frac{4.061 \cdot \Phi(A)^{-0.3387} \cdot \Phi(\varphi)^{0.2075}}{\omega_\varphi} \tag{5.19}$$

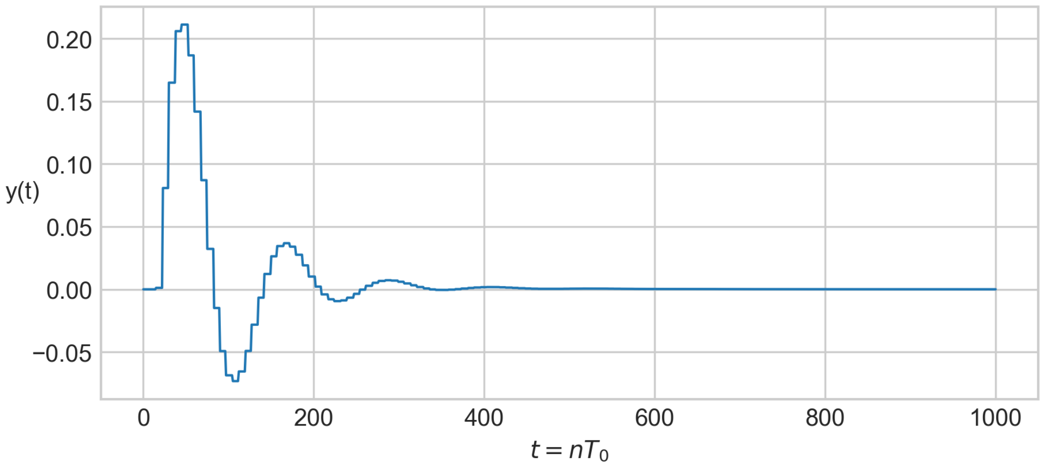
$$K_{p_{\text{опт}}} = \frac{1}{2A\left(\omega_{\varphi_H}\right)} \cdot \left(1 + 1.189 \cdot \Phi(A)^{0.7139} \cdot (1.852 - \Phi(\varphi))^{0.8843}\right) \tag{5.20}$$

Отримуємо значення $T_{I_{\text{опт}}} = 117.36092$, $K_{p_{\text{опт}}} = 0.20311$.

Зберемо результати обчислень до таблиці:

параметр	значення
ω_{φ_H}	0.05341
$\omega_{\varphi_H}^H$	0.03777
$\omega_{\varphi_H}^B H$	0.07553
$A_H\left(\omega_{\varphi_H}\right)$	3.08583
$\Phi_H(A)$	0.41264
$\Phi_H(\varphi)$	1.15456
$T_{I_{\text{опт}}}^{\text{неп}}$	105.72649
$K_{p_{\text{опт}}}^{\text{неп}}$	0.23703
$T_{0_{\text{опт}}}$	7.40205
ω_φ	0.04792
$A\left(\omega_\varphi\right)$	3.51065
$\Phi(A)$	0.43618
$\Phi(\varphi)$	1.23981
$T_{I_{\text{опт}}}$	117.36092
$K_{p_{\text{опт}}}$	0.20311

Цифрове моделювання перехідного процесу вихідної координати y проведемо аналогічно попередньому пункту. Відношення затухання дорівнює $\frac{B}{A} = \frac{0.28438}{0.04621} = 0.16249$.



РОЗДІЛ 6

СИНТЕЗ ЛІНІЙНО-КВАДРАТИЧНОГО РЕГУЛЯТОРА СТАНУ

Розглянемо математичну модель об'єкта у вигляді передаточної функції

$$W_O(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)} =$$
$$= \frac{k}{T_1T_2T_3 s^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\, s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)\, s + 1}$$

Введемо нові коефіцієнти

$$a_1 = \frac{T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3}{T_1T_2T_3} = 0.17211, a_2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1T_2T_3} = 0.00889$$
$$a_3 = \frac{1}{T_1T_2T_3} = 0.00014, b = \frac{k}{T_1T_2T_3} = 0.00127$$

після чого цю передаточну функцію можна записати наступним чином:

$$W_O(s) = \frac{b}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} = \frac{y(s)}{u(s)}$$

Введемо нову змінну $X(s) = \frac{u(s)}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3} = \frac{y(s)}{b}$, звідки

$$u(s) = \left(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3\right) X(s)$$

Виконавши зворотнє перетворення Лапласа, отримаємо

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = u(t) - a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} - a_2\frac{dx(t)}{dt} - a_3 x(t)$$

Введемо фазові змінні $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, $x_3(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$, причому $\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$, $\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$, $\frac{dx_3(t)}{dt} = -a_3x_1(t) - a_2x_2(t) - a_1x_3(t) + u(t)$. Запишемо ці рівності у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t) + \vec{b}u(t) \qquad (6.1)$$

Виконаємо дискретизацію рівняння (6.1), використавши період квантування, який було визначено в резонансному методі ($T_0 = 11.13496$):

$$\vec{x}\left([k+1]\,T_0\right) = F\vec{x}\left(kT_0\right) + \vec{g}u\left(kT_0\right) \qquad (6.2)$$

де $F = e^{AT_0}$, $\vec{g} = \int_0^{T_0} e^{At}\vec{b}dt = A^{-1}\left(e^{AT_0} - I\right)\vec{b}$. Обчислимо значення F та $\vec{g}$:

$$F = \begin{pmatrix} 0.98025 & 9.79083 & 33.05948 \\ -0.00452 & 0.68649 & 4.1009 \\ -0.00056 & -0.04096 & -0.01933 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 144.46778 \\ 33.05948 \\ 4.1009 \end{pmatrix}$$

Синтез лінійно-квадратичного регулятора стану

$$u\left(kT_0\right) = -\vec{K}_p\vec{x}\left(kT_0\right) = -\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\left(kT_0\right) \\ x_2\left(kT_0\right) \\ x_3\left(kT_0\right) \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

виконаємо за рекурентною процедурою

$$\vec{K}_p(k) = \left(q_3 + \vec{g}^T L\left([k+1]T_0\right)\vec{g}\right)^{-1} \vec{g}^T L\left((k+1)T_0\right) F$$
$$L\left(kT_0\right) = F^T L\left([k+1]T_0\right) F + Q_2 - F^T L\left([k+1]T_0\right)\vec{g}\cdot\vec{K}_p(k)$$

при початковому значенні матриці $L\left(nT_0\right) = Q_1$, де вагові матриці Q_1, Q_2 та коефіцієнт q_3 обираються для забезпечення швидкості мінімізації квадратичного критерію оптимальності

$$I = \vec{x}^T\left(nT_0\right) Q_1 \vec{x}\left(nT_0\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\vec{x}^T\left(kT_0\right) Q_2 \vec{x}\left(kT_0\right) + q_3 u^2\left(kT_0\right)\right)$$

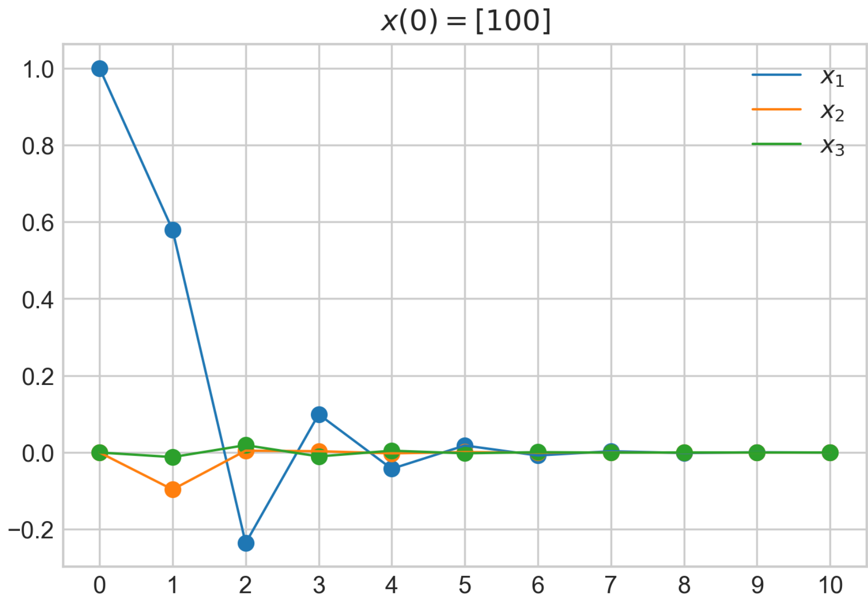
За наведеною рекурентною процедурою отримаємо

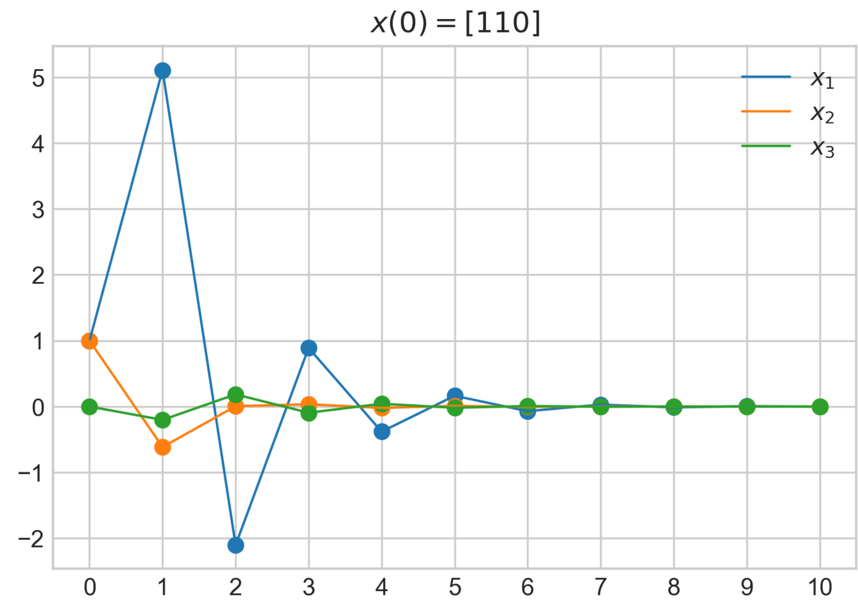
$$\vec{K}_p = \begin{bmatrix} 0.00278 & 0.03643 & 0.15089 \end{bmatrix}$$

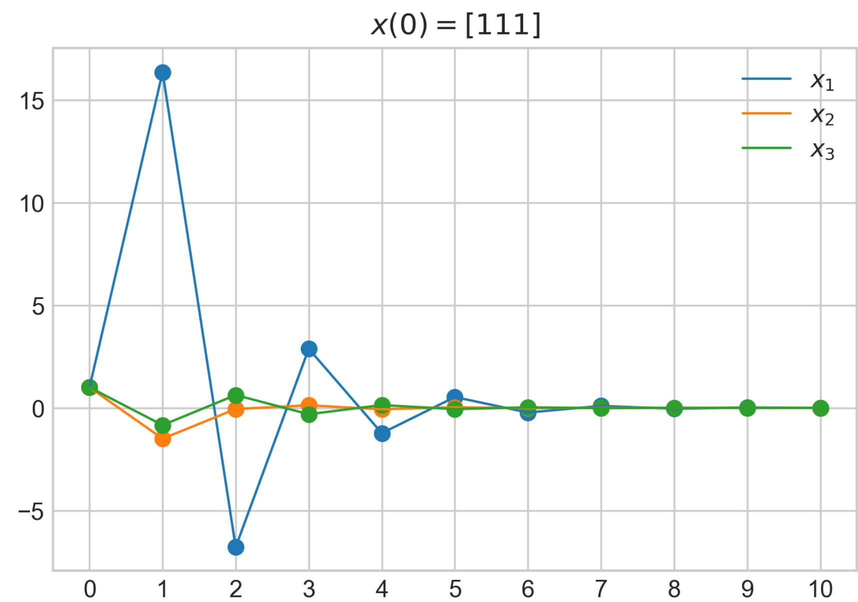
На основі рівнянь (6.1) та (6.3) маємо рівняння стану замкненої системи:

$$\vec{x}\left([k+1]T_0\right) = \left(F - \vec{g}\cdot\vec{K}_p\right)\vec{x}\left(kT_0\right)$$

Користуючись цим рівнянням, змоделюємо поведінку системи при різних ненульових початкових умовах:


$x(0) = [100]$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x_1
x_2
x_3


$x(0) = [110]$
5
4
3
2
1
0
−1
−2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x_1
x_2
x_3


$x(0) = [111]$
15
10
5
0
−5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x_1
x_2
x_3