Домашня контрольна (вона ж розрахункова, вона ж лабораторна) робота на тему «Процесс Пуассона та елементи страхової математики»

Олексій Галганов, КА-81

> Системний дослідник повинен знати, як використовувати те, що знає; розуміти, що необхідно додатково знати, чого він не знає; як і де дізнатися те, чого він не знає.
>
> *Н. Д.*

Розглядаємо процес страхового ризику U, який згідно з моделлю Крамера-Лундберга має вигляд

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,\ t \geq 0 \tag{1}$$

де $u_0 = U(0)$ — початковий капітал, c — сумарна величина страхових внесків за одиницю часу, N — однорідний процесс Пуассона з інтенсивністю $\lambda > 0$, стрибки якого відбуваються в моменти настання страхових подій, $X_i, i \in \mathbb{N}$ — незалежні між собою та від N однаково розподілені м.н. невід'ємні страхові виплати. Розподіл страхових виплат задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \frac{\sin x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x) \tag{2}$$

Одразу варто обчислити функцію розподілу X_i та її обернену на проміжку $[0, \pi]$, яка знадобиться для моделювання цих величин:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \cos x\right), & 0 \leq x < \pi \\ 1, & x \geq \pi \end{cases} \tag{3}$$

$$F^{-1}(y) = \arccos(1 - 2y),\ 0 \leq y < 1 \tag{4}$$

Також, обчислимо математичне сподівання $\mu = \mathbb{E}X$:

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^\pi x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(- x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx\right) = \frac{\pi}{2}$$

Let the show begin!

Пункти 1, 2. *Записати умову NPC у вигляді $c >$ число.* Оскільки NPC — це $c > \lambda\mu$, то для двох випадків ($u_0 = 1, \lambda = 1$ та $u_0 = 10, \lambda = 5$) маємо відповідно $c > \frac{\pi}{2}$ та $c > \frac{5\pi}{2}$. Як і сказано, покладемо для обох випадків відповідно $c = 2\lambda\mu = \pi$ та $c = 1.05\lambda\mu = 2.625\pi$. Дуже цікаво подивитися на цей дивний світ, де за одиницю часу вносят рівно π умовних одиниць грошей...

Пункт 3. *В явному вигляді записати інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства* $\varphi(u), u \geq 0$. За теорією це рівняння має вигляд

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-y)\,(1-F(y))\,dy,\ u \geq 0 \tag{5}$$

Оскільки

$$1 - F(y) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ \frac{1}{2}(1+\cos y), & 0 \leq y < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases} \tag{6}$$

то маємо таку версію інтегрального рівняння (5):

$$\varphi(u) = \begin{cases} \varphi(0) + \frac{\lambda}{2c}\int_0^u \varphi(u-y)\,(1+\cos y)\,dy, & 0 \leq u < \pi \\ \varphi(0) + \frac{\lambda}{2c}\int_0^\pi \varphi(u-y)\,(1+\cos y)\,dy, & u \geq \pi \end{cases} \tag{7}$$

Пункт 4. *У максимально простому вигляді записати перетворення Лапласа $\Phi(p)$ від функції $\varphi(u)$.* Припустимо одразу, що NPC виконується, тоді $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$. Після застосування перетворення Лапласа до інтегрального рівняння (5) в загальному вигляді отримаємо

$$\Phi(p) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)\cdot\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{c}\cdot\Phi(p)\cdot\mathcal{L}\left\{1-F(y)\right\}(p)$$

Знайдемо $\mathcal{L}\left\{1-F(y)\right\}(p)$:

$$\mathcal{L}\left\{1-F(y)\right\}(p) = \int_0^{+\infty}(1-F(y))\,e^{-py}dy = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1+\cos y)\,e^{-py}dy =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-py}dy + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(y)e^{-py}dy \ominus$$
$$\int_0^\pi \cos(y)e^{-py}dy = \int_0^\pi e^{-py}d(\sin y) = e^{-py}\sin y\Big|_0^\pi + p\int_0^\pi \sin(y)e^{-py}dy =$$
$$= -p\int_0^\pi e^{-py}d(\cos y) = -pe^{-py}\cos y\Big|_0^\pi - p^2\int_0^\pi \cos(y)e^{-py}dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (p^2+1)\int_0^\pi \cos(y)e^{-py}dy = p\left(1+e^{-\pi p}\right)$$
$$\ominus\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-\pi p}}{p} + \frac{p\left(1+e^{-\pi p}\right)}{p^2+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2p^2-e^{-\pi p}}{p(p^2+1)}$$

Тепер можемо виразити $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = \frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{p\left(1-\frac{\lambda}{c}\cdot\mathcal{L}\left\{1-F(y)\right\}(p)\right)} = \frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{p-\frac{\lambda}{2c}\cdot\frac{1+2p^2-e^{-\pi p}}{p^2+1}} =$$
$$= \left(1-\frac{\lambda\mu}{c}\right)\cdot\frac{p^2+1}{p^3+p-\frac{\lambda}{2c}\cdot(1+2p^2-e^{-\pi p})}$$

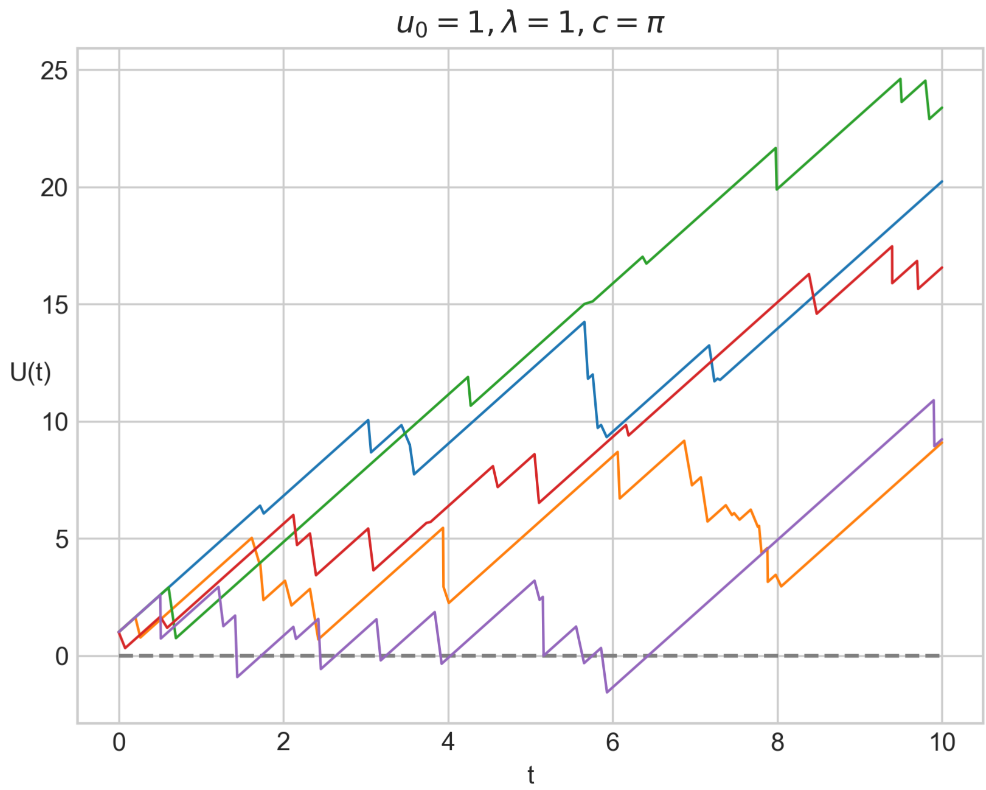
Для першого випадку, при $c = 2\lambda\mu$, отримаємо

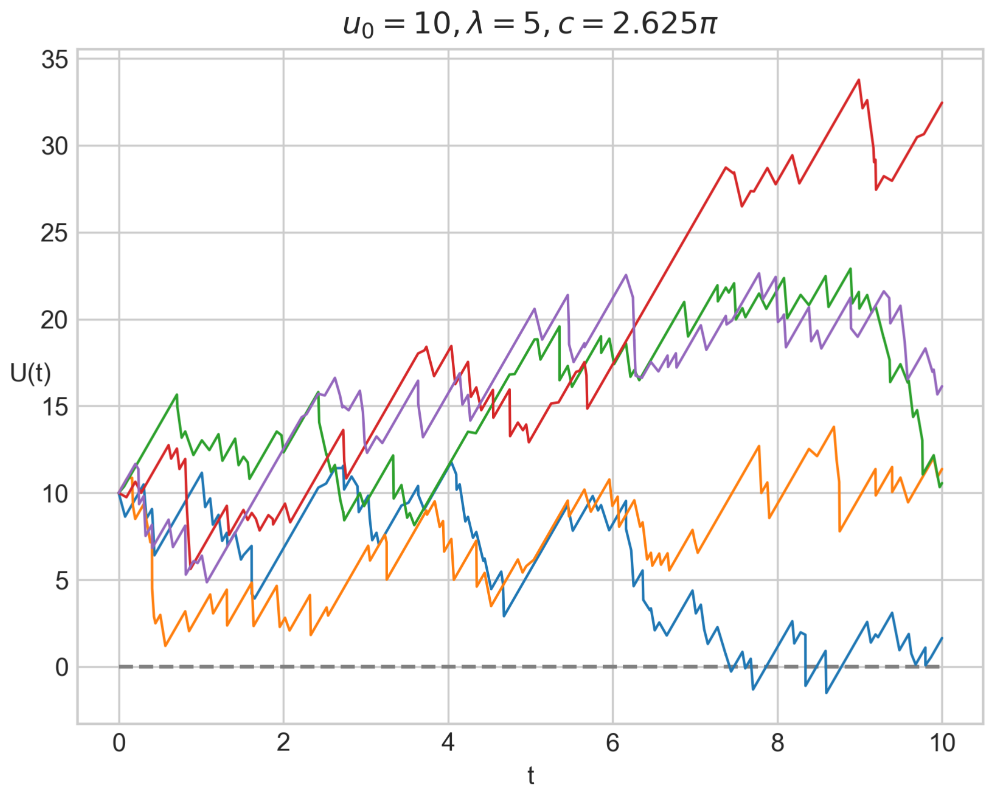
$$\Phi(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2+1}{p^3+p-\frac{1}{2\pi}\cdot(1+2p^2-e^{-\pi p})} \tag{8}$$

Для другого, при $c = 1.05\lambda\mu$, отримаємо

$$\Phi(p) = \frac{1}{21} \cdot \frac{p^2 + 1}{p^3 + p - \frac{1}{1.05\pi} \cdot (1 + 2p^2 - e^{-\pi p})} \tag{9}$$

Пункт 5. *На часовому проміжку* $[0, 10]$ *змоделювати та побудувати на спільному рисунку графіки* 5 *траєкторій процесу* U.





Пункт 6. *Оцінити ймовірність банкрутства за допомогою грубого методу Монте-Карло: для цього на проміжку* $[0, 1000]$ *змоделювати 1000 траєкторій процесу* U *й обчислити частку тих, що банкрутують протягом цього проміжку.* Можна також згадати Ірину Юріївну та довірчий інтервал для ймовірності появи події, межі якого для великої кількості випробувань визначаються з

$$p_{1,2} = p^* \pm t_\gamma \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}}$$

де t_γ — значення оберненої функції Лапласа в точці $\gamma/2$ для рівня надійності γ.

Отже, для першого випадку отримаємо оцінку ймовірності банкрутства $p^* = 0.317$ з 95% довірчим інтервалом $(0.288, 0.346)$, а для другого — $p^* = 0.579$ та $(0.5484, 0.61)$.

Пункт 7. *Оцінити ймовірність банкрутства за допомогою більш точного методу Монте-Карло: для цього спочатку записати функцію розподілу модифікованої величини* $\tilde{X}$*, а потім змоделювати геометрично розподілену кількість незалежних копій цієї величини.* За теорією, функція розподілу $\tilde{X}$ має вигляд

$$F_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}X} \int_0^x (1 - F_X(t))\, dt \tag{10}$$

Скориставшись виразом для $1 - F_X(t)$ з (6), отримаємо

$$F_{\tilde{X}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{1}{2}(1 + \cos t)\, dt = \frac{1}{\pi}(x + \sin x), & 0 \le x < \pi \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 + \cos t)\, dt = 1, & x \ge \pi \end{cases} \tag{11}$$

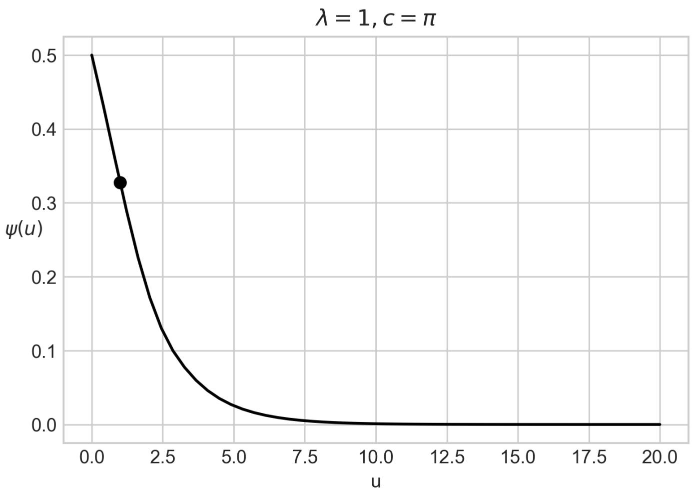
Обернену до функцію розподілу в цьому випадку вже неможливо обчислити в явному вигляді, тому для моделювання цих величин будемо використовувати чисельно знайдену обернену функцію.

Згідно з модифікованим методом Монте-Карло, ймовірність банкрутства при початковому капіталі u обчислюється з формули

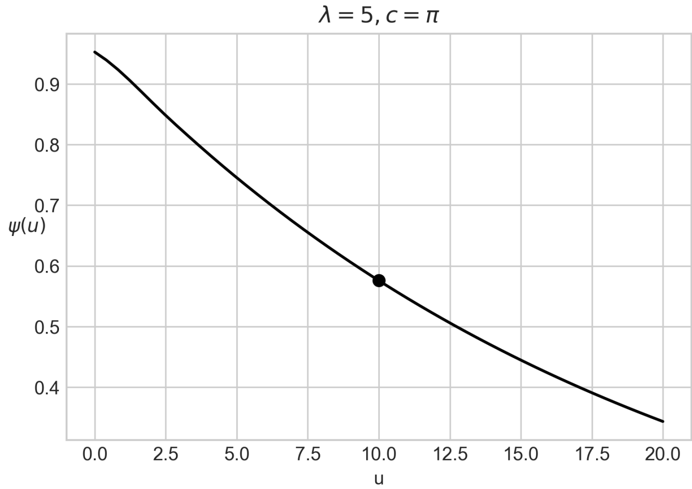
$$\psi(u) = 1 - \varphi(u) = 1 - \mathbb{P}\left\{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_G \le u\right\} = \mathbb{P}\left\{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \cdots + \tilde{X}_G > u\right\}$$

де $G \sim \mathrm{Geom}\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)$. Отже, для оцінки ймовірності банкрутства змоделюємо 1000 значень G, після чого для кожного значення треба реалізувати відповідну кількість значень незалежних $\tilde{X}_i$ та обчислити, скільки разів їх сума перевищить значення початкового капіталу u_0. Для першого випадку отримаємо оцінку ймовірності банкрутства $p^* = 0.325$ з 95% довірчим інтервалом $(0.296, 0.354)$, а для другого — $p^* = 0.583$ та $(0.5524, 0.6136)$.

Пункт 8. *Оцінити ймовірність банкрутства за допомогою чисельного знаходження оберненого перетворення Лапласа.* Можна навіть побудувати графіки залежності ймовірності банкрутства $\psi(u)$ від початкового капіталу u. Для першого випадку $\psi(u_0) = \psi(1) \approx 0.32745$:



Для другого випадку $\psi(u_0) = \psi(10) \approx 0.57576$:



Висновки. Зведемо отримані результати до таблиці:

грубий ММК		**більш точний ММК**		**обернене перетворення Лапласа**
оцінка	інтервал	оцінка	інтервал	
випадок 1: $u_0 = 1, \lambda = 1, c = 2\lambda\mu$				
0.317	$(0.288, 0.346)$	0.325	$(0.296, 0.354)$	0.32745
випадок 2: $u_0 = 10, \lambda = 5, c = 1.05\lambda\mu$				
0.579	$(0.5484, 0.61)$	0.583	$(0.5524, 0.6136)$	0.57576

Отже, ~~в ході виконання лабораторної роботи було виконано лабораторну роботу~~ можна побачити, що для обох випадків оцінки обома методами Монте-Карло не надто відрізняються, але оцінки більш точним методом більші, ніж грубим (і так було не один раз при моделюванні) — це можна пояснити тим, що грубий метод не враховує настання банкрутства на інтервалі $(1000, +\infty)$. Оцінку ймовірності банкрутства за допомогою оберненого перетворення Лапласа можна вважати найбільш наближеною до реальності, оскільки в цьому випадку з обчислень виключається випадковість, а чисельні методи можуть дати значення з якою завгодно точністю. Але в той же час, ці значення не надто відрізняються від оцінок ММК, тому усі три розглянуті методи оцінки ймовірності банкрутства мають право на життя:

– перевагою грубого ММК є простота реалізації, оскільки немає потреби в додаткових аналітичних обчисленнях, але недоліком — неврахування можливого банкрутства за межею відрізку часу, що розглядається;
– перевагою оберненого перетворення Лапласа є висока точність та можливість побудувати як завгодно точно графіки $\varphi(u)$ та $\psi(u)$, але для застосування цього методу треба мати явний вигляд $\Phi(p)$ та вміти обчислювати чисельно обернене перетворення;
– більш точний ММК є таким собі компромісом між двома іншими, оскільки додатково обчислювати потрібно лише функцію розподілу $\tilde{X}$, причому можна покластися і на чисельне інтегрування, а точність обчислення можна покращувати, посилаючись за ЗВЧ та генеруючи більше значень G: наприклад, для другого випадку при моделюванні 10000 значень отримаємо оцінку 0.5718 з довірчим інтервалом $(0.5621, 0.5815)$, а для 100000 — 0.57856 та $(0.5755, 0.5816)$ відповідно.

В той же час, якщо уявити, що відомо лише емпіричний розподіл виплат, то застосовність двох останніх методів буде під питанням. Для більш точного ММК, оскільки розподіли $\tilde{X}$ та G (через наближене значення μ) також будуть деяким наближенням до реальних розподілів цих величин, то точність отриманих оцінок може погіршитись через накопичення різних похибок. Щодо обчислення оберненого перетворення Лапласа, в цілому складно сказати, як використання емпіричної функції розподілу вплине на оцінку цим методом: перетворення такої ступінчастої функції матиме досить складний вид (зважена сума образів зсунутої функції Хевісайда), що також може вплинути на чисельне обчислення оберненого перетворення.