Домашня контрольна (вона ж розрахункова, вона ж лабораторна) робота на тему “Процес Пуассона та елементи страхової математики”.

1. Вихідні дані

Метою роботи є дослідження ймовірності банкрутства страхової компанії в моделі Крамера-Лундберга за допомогою точних та наближених методів.

Розглянемо процес страхового ризику U, який згідно з моделлю Крамера-Лундберга має вигляд

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0.$$

Тут $u_0 = U(0)$ — початковий капітал, c — сумарна величина страхових внесків в одиницю часу (т. з. *premium rate*), N — однорідний процес Пуассона з інтенсивністю λ, стрибки якого відбуваються в моменти настання страхових подій, X_i, $i \in \mathbb{N}$, — незалежні між собою та від N однаково розподілені м. н. невід'ємні страхові виплати. Надалі будемо розглядати такі два випадки — $u_0 = 1, \lambda = 1$ та $u_0 = 10, \lambda = 5$. Розподіл страхових виплат (в обох випадках) задано в таблиці.

Студент	Розподіл X_i	Студент	Розподіл X_i	Студент	Розподіл X_i
Кирило Билим	$\Gamma(3,5)$	Андрій Яковина	$0.4\,\mathrm{Exp}(3) + 0.6\,\mathrm{Exp}(1)$	Руслан Шудра	$f_X(x) = \frac{2}{x^3} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$
Олексій Галганов	$f_X(x) = \frac{\sin x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$	Владислав Гнатієнко	$f_X(x) = (6x - 6x^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$	Дмитро Добринін	$\min\{\mathrm{U}_1(0,4), \mathrm{U}_2(0,4)\}$
Артем Кавара	$0.2\,\delta_5 + 0.3\,\delta_7 + 0.5\,\delta_{10}$	Назар Калініченко	$0.3\,\mathrm{U}(0,1) + 0.7\,\mathrm{U}(2,4)$	Роман Москаленко	$f_X(x) = \frac{x}{2} \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$
Анна Підвальна	$\max\{\mathrm{Exp}(4), \delta_{1/2}\}$	Богуслав Семенов	$0.5\,\delta_1 + 0.5\,\delta_{10}$	Артем Орловський	$\mathrm{U}([1,3] \cup [5,10])$
Нікіта Фордуй	$0.2\,\delta_6 + 0.8\,\mathrm{U}(1,5)$	Тетяна Коваленко	$f_X(x) = (2 - 2x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$	Маргарита Юсупова	$\max\{\mathrm{Exp}_1(3), \mathrm{Exp}_2(3)\}$

У цій таблиці $\Gamma(\alpha, \beta)$ означає гама-розподіл, $\mathrm{U}(a,b)$ та $\mathrm{U}(C)$ — рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$ та множині C відповідно, $\mathrm{Exp}(\lambda)$ — експоненціальний розподіл, δ_a — вироджений (детермінований) розподіл (відповідна випадкова величина дорівнює a м. н.). Крім того, індексами позначено незалежні величини — скажемо, $\mathrm{Exp}_1(2)$ та $\mathrm{Exp}_2(2)$ означають дві незалежні випадкові величини, розподілені за експоненціальним законом з параметром 2. У деяких варіантах замість позначення розподілу задана його щільність.

Знаком “+” позначено суміш розподілів. Скажемо, розподіл $0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)$ має випадкова величина, що з імовірністю 0.2 набуває значення 5, а з імовірністю 0.8 рівномірно розподілена на відрізку $[1,3]$. Її функція розподілу, математичне сподівання та інші характеристики є відповідними лінійними комбінаціями таких характеристик компонент суміші:

$$F_{0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)}(x) = 0.2\,F_{\delta_5}(x) + 0.8\,F_{\mathrm{U}(1,3)}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\mathbb{E}\big(0.2\,\delta_5 + 0.8\,\mathrm{U}(1,3)\big) = 0.2\,\mathbb{E}\delta_5 + 0.8\,\mathbb{E}\mathrm{U}(1,3).$$

2. Хід роботи

В обох наведених вище випадках необхідно виконати такі дії.

1) Записати умову NPC у вигляді $c >$ *число*;

2) у подальших пунктах покласти $c = 2\lambda\mu$ для першого випадку та $c = 1.05\lambda\mu$ для другого;

3) в явному вигляді записати інтегральне рівняння для ймовірності небанкрутства $\varphi(u)$, $u \geq 0$;

4) у максимально простому вигляді записати перетворення Лапласа цієї функції $\Phi(p)$;

А далі починається найцікавіше…

5) На часовому проміжку $[0, 10]$ змоделювати та побудувати на спільному рисунку графіки 5 траєкторій процесу U;

6) оцінити ймовірність банкрутства за допомогою грубого методу Монте-Карло: для цього на проміжку $[0, 1000]$ змоделювати 1000 траєкторій процесу U й обчислити частку тих, що банкрутують протягом цього проміжку;

7) оцінити ймовірність банкрутства за допомогою більш точного методу Монте-Карло: для цього спочатку записати функцію розподілу модифікованої випадкової величини $\tilde{X}$, а потім змоделювати геометрично розподілену кількість незалежних копій цієї величини;

8) оцінити ймовірність банкрутства за допомогою чисельного знаходження оберненого перетворення Лапласа;

9) порівняти одержані результати та написати висновки.

3. Прикінцеві зауваження

1) Термін здачі роботи — 10 жовтня;

2) максимальна кількість рейтингових балів за роботу — 20; за кожен додатковий день нараховується -1 бал, а за кожен день дострокової здачі надається +1 бонусний бал. Отже, максимальна кількість балів тих з вас, хто виконає роботу за декілька годин, що залишилися до ***сьогоднішньої*** опівночі, становить 20+12=32;

3) допускається програмна реалізація будь-якою мовою та в будь-якому середовищі;

4) оформлені роботи надсилаються в телеграм-чат;

5) цитати з Ірини Юріївни, Наталії Дмитрівни, фотографії котів і т. п. в роботі вітаються, але не впливають на остаточну оцінку.