第 3 週レポート

10 班 山村優太

2024 年 10 月 23 日

1 目的

LCR 直列共振回路の電圧電流の周波数特性を測定することで, 交流回路の共振現象について理解を深める.

2 原理

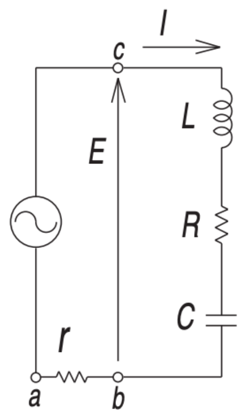

図 1 LCR 直列回路の回路図

図 1 に示した LCR 直列共振回路を考える. 電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ の関係は,

$$\dot{E} = \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R \right) \dot{I} \tag{1}$$

であり, アドミタンスの絶対値 $|\dot{Y}|$ は

$$
\begin{aligned}
|\dot{Y}| &= \left|\frac{\dot{I}}{\dot{E}}\right| &(2)\\
&= \left|\frac{1}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R}\right| &(3)\\
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} &(4)
\end{aligned}
$$

と表される.
$|\dot{Y}|$ が最大値をとるのは分母が最小値をとるときであり, このときの最大値 $|\dot{Y}|_{\max}$ と共振周波数 f_0 は

$$
\begin{aligned}
|\dot{Y}|_{\max} &= \frac{1}{R} &(5)\\
f_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} &(6)
\end{aligned}
$$

である.
また, 共振の鋭さの指標である無次元量として Q 値があり, 共振角周波数 ω_0, アドミタンスの絶対値が最大値の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ になるときの角周波数 ω_1, ω_2 $(\omega_1 < \omega_2)$ を用いて

$$
Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \tag{7}
$$

と表され, 特に LCR 直列共振回路の Q 値は, 共振周波数 f_0 を用いて

$$
Q = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{2\pi f_0 CR} \tag{8}
$$

と表される.

3 方法

1. 図 1 に示した LCR 直列回路を組み立てる. 各素子の値は以下のようにする.
    - インダクタンス：$L = 0.01\,\mathrm{H}$
    - キャパシタンス：$C = 0.01\,\mu\mathrm{F}$
    - 抵抗：$R = 100\,\Omega$, $r = 100\,\Omega$
2. ファンクションジェネレータを接続し, 回路に正弦波電圧を供給する. 周波数 f を共振周波数付近で変化させる.
3. オシロスコープのプローブを使用して, 点 a をグランドとし, ab 間と ac 間に接続する.
4. オシロスコープの差分機能を用いて, 電圧 $\dot{E}$ を測定する.

5. 抵抗 R の両端電圧 $\dot{V}_R$ を測定し, オームの法則より電流 $\dot{I}$ を計算する：

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_R}{R}$$

6. 周波数 f を変化させながら, 各周波数での電圧 $\dot{E}$ と電流 $\dot{I}$ を測定する.
7. アドミタンスの絶対値を計算し：

$$\left|\dot{Y}\right| = \left|\frac{\dot{I}}{\dot{E}}\right|$$

   周波数 f に対する共振曲線をリニアグラフでプロットする.

4　使用器具

- ファンクションジェネレータ
- オシロスコープ
- 抵抗 $100\,\Omega\ \times 2$
- キャパシタ $0.01\,\mu$F
- インダクタ 10 mH
- ブレッドボード
- ジャンパーワイヤー, コード, アダプター各種

5　結果

横軸にファンクションジェネレータの周波数 f [Hz], 縦軸にアドミタンスの絶対値 $|\dot{Y}|$ [S] をとり, アドミタンスの周波数特性を測定した結果を図 2 に示す. なお, アドミタンスの計算には Google スプレッドシートを, データのプロットには MATLAB を用いた.

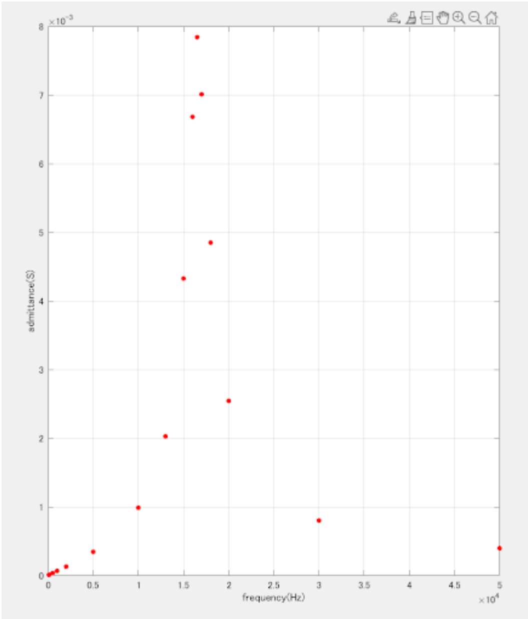

図 2　アドミタンスの共振曲線

アドミタンスの絶対値は 0 Hz 付近ではほぼ 0 であるが, 周波数の増加に伴い増加し, 1.6×10^4 Hz 付近で最大値をとり, その後減少に転じている. 最大値はおよそ 7.9×10^{-3} S である. アドミタンスの絶対値が最大値の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる角周波数 $\omega_1, \omega_2\,(\omega_1 < \omega_2)$ は, グラフよりおよそ $\omega_1 = 1.55 \times 10^4$ Hz, $\omega_2 = 1.75 \times 10^4$ Hz と読み取ることができ, Q 値は次のように計算される：

$$Q = \frac{1.6}{1.75 - 1.55} = 8.0 \tag{9}$$

6　考察

アドミタンスの最大値 $|\dot{Y}|_{\max}$ と共振周波数 f_0 の理論値は式 (5), (6) より

$$|\dot{Y}|_{\max} = \frac{1}{100} = 1.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{S} \tag{10}$$

$$f_0 = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot \sqrt{0.01 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6}}} = 1.6 \times 10^4\,\mathrm{Hz} \tag{11}$$

と求められる. 共振周波数の実験値 $f_0 = 1.6 \times 10^4$ Hz は理論値と一致したが, アドミタンスの最大値の実験値 $|\dot{Y}|_{\max} = 7.9 \times 10^{-3}$ S は理論値と大きな誤差が見られた. 誤差の要因としては, 共振周波数周辺でのアドミタンスの急激な変化, および各回路素子の寄生抵抗の影響が挙げられる.
Q 値の理論値は式 (8) より

$$Q = \frac{1}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.6 \cdot 10^4 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = 10 \tag{12}$$

と求められる. 実験値 $Q = 8.0$ との誤差の要因としては, グラフのプロット数が少ないことに起因する目視による読み取り誤差が考えられる。

7　感想

実験を通して, 交流回路の共振現象に対する理解を深めることができた. また, 測定値が特徴的な値をとる場所（今回の実験では共振周波数周辺）では, より多くのデータを記録するべきだと感じた. 今後実験を重ねる中で, どの部分でどの程度の密度でデータを取るべきかを感覚的に掴んでいきたい.

問題 4.1

実験 4.2 の結果を図 3 に示す.

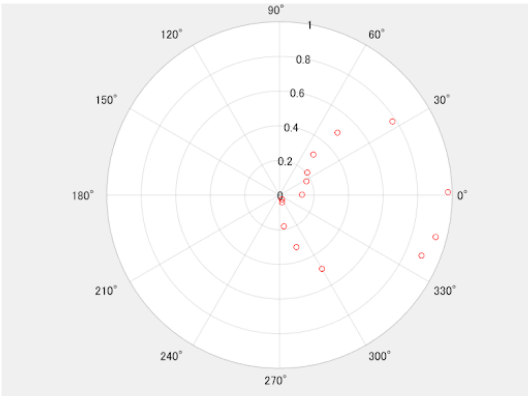

図 3　$\dot{E}$ に対する $\dot{V}$ の大きさと位相差

グラフの概形は理想的な円にはならなかった.
LC 直列部の合成インピーダンス $\dot{Z}$ は以下のように計算される：

$$\dot{Z} = \frac{\dfrac{L}{C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \tag{13}$$

ゆえに, $\dot{V}$ は $\dot{E}$（実軸上）を用いて次のように表される：

$$\dot{V} = \frac{\dfrac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{R + \dfrac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}} \dot{E} = \frac{j\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \dot{E} \tag{14}$$

ここから, $\dot{V} \longrightarrow 0$ as $f \longrightarrow 0$ となる.

しかし, 実際の回路においては, インダクタは抵抗 r を含んでいる：

$$\dot{Z} = \frac{\dfrac{j\omega L + r}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L + r} = \frac{j\omega L + r}{1 - \omega^2 LC + j\omega Cr} \tag{15}$$

$$\therefore \dot{V} = \frac{\dfrac{j\omega L + r}{1 - \omega^2 LC + j\omega Cr}}{R + \dfrac{j\omega L + r}{1 - \omega^2 LC + j\omega Cr}} = \frac{j\omega L + r}{R - \omega^2 LCR + j\omega CRr + j\omega L + r} \tag{16}$$

ここから, $\dot{V} \longrightarrow \dfrac{r}{R + r}$ as $f \longrightarrow 0$ となる.
すなわち, 周波数 f が十分小さい領域においては, $\dot{V}$ は 0 とならない.