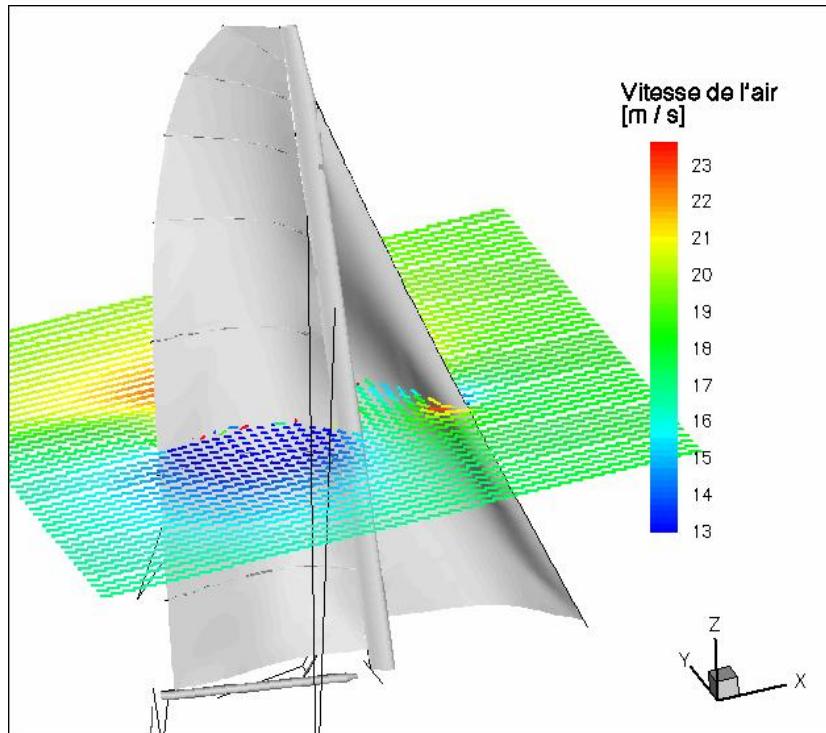


LICENCE 3 DU MAGISTÈRE  
FORMATION INTERUNIVERSITAIRE DE PHYSIQUE

NOTES DE COURS D'HYDRODYNAMIQUE (2012/2013)

Marc Rabaud

Laboratoire FAST, bât. 502, 91405 Orsay cedex  
rabaud@fast.u-psud.fr



*Calcul instationnaire de la pression sur les voiles d'un voilier au près (thèse B. Augier, 2012)*



# Table des matières

<b>1 Notion de milieu continu</b>	<b>9</b>
1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ? . . . . .	9
1.2 Notion d'échelle mésoscopique . . . . .	10
1.3 Notion de « particule fluide » . . . . .	10
1.4 Vitesse d'une particule fluide . . . . .	11
1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie) . . . . .	11
1.5 Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps . . . . .	11
1.5.1 Trajectoire de particule ( <i>particle path</i> ) . . . . .	12
1.5.2 Ligne d'émission ( <i>streakline</i> ) . . . . .	12
1.5.3 Ligne de courant ( <i>streamline</i> ) . . . . .	12
1.5.4 Ligne de temps ( <i>timeline</i> ) . . . . .	13
1.5.5 Changement de référentiel . . . . .	13
1.6 Fonction de courant . . . . .	14
1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires planes	14
1.6.2 Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes - . . . . .	14
1.7 Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne . . . . .	15
<b>2 Le théorème du transport</b>	<b>17</b>
2.1 Notion de volume de contrôle . . . . .	17
2.2 Théorème de Leibnitz . . . . .	18
2.3 Théorème du transport d'une fonction scalaire . . . . .	18
2.4 Conservation de la masse . . . . .	19
2.4.1 Démonstration . . . . .	19
2.4.2 Cas particulier d'un fluide incompressible. . . . .	19
2.5 Théorème du transport d'une fonction vectorielle . . . . .	20
2.6 Application au transport de la quantité de mouvement . . . . .	20
2.7 Application au sillage d'un cylindre . . . . .	21
2.8 Transport de l'énergie . . . . .	23
<b>3 Le tenseur des contraintes</b>	<b>25</b>
3.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2 . . . . .	25
3.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ ( <i>stress tensor</i> ) . . . . .	26
3.3 Symétries du tenseur des contraintes . . . . .	26
3.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$ . . . . .	27
3.5 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ . . . . .	28
3.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$ . . . . .	28

<b>4 Fluides parfaits et équation d'Euler</b>	<b>31</b>
4.1 Équation de Bernoulli . . . . .	32
4.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli . . . . .	34
4.2.1 Cas d'un fluide barotrope . . . . .	34
4.2.2 Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel . . . . .	34
4.2.3 Effet Coanda . . . . .	34
4.3 Quelques applications de l'équation de Bernoulli . . . . .	35
4.3.1 Anémomètre à tube de Pitot . . . . .	35
4.3.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi . . . . .	36
4.3.3 Expérience de Torricelli . . . . .	37
4.4 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin) . . . . .	38
4.4.1 Effet Magnus . . . . .	39
4.4.2 Portance d'une aile . . . . .	40
4.4.3 Amplification des vagues par le vent . . . . .	40
4.4.4 Jet incident sur une plaque . . . . .	41
4.5 Paradoxe de d'Alembert . . . . .	41
<b>5 Analyse dimensionnelle et similitude</b>	<b>43</b>
5.1 Théorème $\pi$ ou de Buckingham . . . . .	43
5.2 Exemple de la traînée d'une sphère . . . . .	45
5.3 Période des oscillations d'un pendule pesant . . . . .	48
5.4 « Démonstration » du théorème de Pythagore . . . . .	48
5.5 Questions et remarques . . . . .	49
5.6 Notion de similitude . . . . .	49
5.6.1 Similitude pour une maquette de navire . . . . .	49
5.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ? . . . . .	49
5.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ? . . . . .	49
5.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ? . . . . .	50
5.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ? . . . . .	51
<b>6 La tension de surface</b>	<b>53</b>
6.1 Origine microscopique . . . . .	54
6.2 La loi de Laplace . . . . .	56
6.3 Angle de mouillage macroscopique . . . . .	57
6.3.1 Loi d'équilibre d'Young-Dupré . . . . .	58
6.3.2 Hystérésis de l'angle de contact . . . . .	59
6.4 Effet de la gravité et longueur capillaire . . . . .	59
6.5 La mesure de la tension superficielle . . . . .	60
6.5.1 La loi de Jurin . . . . .	60
6.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy . . . . .	62
6.5.3 Méthode de la goutte pendante . . . . .	62
6.5.4 Méthode de la goutte tournante . . . . .	62
6.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni) . . . . .	62
6.7 Les tensioactifs . . . . .	63
6.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ? . . . . .	63
6.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux membranes d'eau ? . . . . .	64

6.8	Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Les ondes de surface</b>	<b>67</b>
7.1	Introduction : La vie des vagues . . . . .	68
7.1.1	La naissance des vagues . . . . .	68
7.1.2	Action du vent sur la mer . . . . .	68
7.2	Les ondes linéaires en eau profonde . . . . .	69
7.2.1	Relation de dispersion des ondes entre deux fluides . . . . .	69
7.2.2	Application aux ondes à la surface de l'eau . . . . .	72
7.2.3	Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague . . . . .	74
7.2.4	Energie transportée par la houle . . . . .	75
7.2.5	Atténuation des ondes de surface . . . . .	77
7.2.6	Paquet d'onde lorsqu'un caillou est jeté dans l'eau . . . . .	78
7.2.7	Sillage d'un obstacle . . . . .	78
7.2.8	Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin . . . . .	79
7.2.9	Traînée de vague et vitesse limite de coque . . . . .	81
7.3	Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde . . . . .	83
7.3.1	Relation de dispersion en hauteur d'eau finie . . . . .	83
7.3.2	Cas des ondes longues . . . . .	84
7.4	Les ondes non-linéaires . . . . .	86
7.4.1	Le soliton de Russel . . . . .	87
7.4.2	Ressaut hydraulique . . . . .	88
7.4.3	Mascaret . . . . .	88
7.4.4	Tsunami . . . . .	89
<b>8</b>	<b>Les fluides stratifiés</b>	<b>91</b>
8.1	La fréquence de Brunt-Väisälä . . . . .	91
8.2	Réalisation expérimentale d'un liquide stratifié . . . . .	93
8.3	Relation de dispersion des ondes internes de gravité . . . . .	93
8.3.1	Structure des ondes internes . . . . .	94
8.3.2	Ondes océaniques . . . . .	95
8.3.3	Réflexion des ondes internes . . . . .	95
8.4	Ondes atmosphériques . . . . .	96
8.5	Pour en savoir plus : . . . . .	96
<b>9</b>	<b>La viscosité</b>	<b>99</b>
9.1	Tenseur des déformations $[\epsilon]$ ( <i>strain tensor</i> ) . . . . .	99
9.2	Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$ . . . . .	100
9.2.1	Décomposition d'un tenseur . . . . .	100
9.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures . . . . .	101
9.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures . . . . .	102
9.3	Equation constitutive des fluides newtoniens . . . . .	103
9.4	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses . . . . .	104
9.5	Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien . . . . .	104
9.6	Signification physique de la viscosité . . . . .	105
9.7	Mesure de la viscosité . . . . .	107
9.7.1	Quelques viscosimètres simples . . . . .	107

9.7.2 Quelques exemples de rhéomètre . . . . .	107
<b>10 L'équation de Navier-Stokes</b>	<b>111</b>
10.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes . . . . .	111
10.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds . . . . .	113
10.1.2 Quelques autres nombres sans dimension . . . . .	114
10.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques . . . . .	114
10.2.1 Les conditions cinématiques . . . . .	114
10.2.2 Les conditions dynamiques . . . . .	117
10.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites . . . . .	118
10.3 Les écoulements parallèles . . . . .	119
10.3.1 Ecoulement de Couette plan . . . . .	119
10.3.2 Ecoulement de Couette circulaire . . . . .	120
10.3.3 Ecoulement de Poiseuille plan . . . . .	121
10.3.4 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire . . . . .	121
10.3.5 Solutions instationnaires . . . . .	123
10.4 Les écoulements de Stokes (à très faible nombre de Reynolds) . . . . .	123
10.4.1 L'équation de Stokes . . . . .	123
10.4.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes . . . . .	125
10.4.3 La sédimentation . . . . .	128
10.4.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds . . . . .	129
10.5 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification . . . . .	130
10.5.1 Calcul d'un palier lubrifié . . . . .	132
10.5.2 Force d'adhérence sur un disque . . . . .	133
<b>11 La couche limite</b>	<b>135</b>
11.1 Introduction . . . . .	135
11.2 Couche limite laminaire sur une plaque plane . . . . .	136
11.2.1 Les équations de Prandtl (1904) . . . . .	136
11.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907) . . . . .	137
11.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée . . . . .	139
11.2.4 Définitions de l'épaisseur d'une couche limite . . . . .	140
11.3 Couche limite sur une paroi courbée . . . . .	141
11.4 Equation de Falkner-Skan (1930) . . . . .	142
11.5 Couche limite thermique . . . . .	142
11.6 Couche limite turbulente . . . . .	143
<b>12 Dynamique de la vorticité</b>	<b>145</b>
12.1 Equation de la vorticité (ou équation d'Helmholtz) . . . . .	145
12.2 Quelques exemples de vorticité localisée . . . . .	147
12.3 Evolution de la circulation et théorème de Kelvin . . . . .	149
12.3.1 Enoncé du théorème de Kelvin (1869) . . . . .	150
12.3.2 Quelques conséquences du théorème de Kelvin pour un fluide supposé parfait	150
12.4 Décomposition de Helmholtz et loi de Biot et Savart . . . . .	151

<b>13 Les fluides en rotation</b>	<b>153</b>
13.1 Changement de référentiel . . . . .	154
13.2 Equation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant . . . . .	154
13.3 Equation de la vorticité dans un référentiel tournant . . . . .	155
13.4 Nombre de Rossby et nombre d'Ekman . . . . .	155
13.5 Ecoulements géostrophiques . . . . .	156
13.5.1 Théorème de Taylor-Proudman . . . . .	157
13.5.2 Les colonnes de Taylor . . . . .	157
13.6 Couches limites et recirculations . . . . .	158
13.6.1 Couche d'Ekman . . . . .	158
13.6.2 Ecoulement de Kármán au-dessus d'un disque tournant infini . . . . .	160
13.6.3 Mise en rotation (spin-up) et arrêt de la rotation (spin-down) . . . . .	160
13.6.4 Couche de Stewartson . . . . .	162
13.6.5 Ecoulement secondaire dans les méandres d'une rivière . . . . .	162
13.6.6 Recirculation de Dean . . . . .	162
13.6.7 Vorticité potentielle dans les fluides en rotation. Théorème d'Ertel (1942) . .	163
13.7 Ondes inertielles . . . . .	163
13.7.1 Etude qualitative . . . . .	163
13.7.2 Cas d'une onde plane . . . . .	163
13.7.3 Ondes inertielles axisymétriques (d'après Batchelor [4] p. 559) . . . . .	164
13.7.4 Ondes de Rossby entre deux plans non parallèles (d'après Tritton [41] p. 232)	165
<b>14 Les instabilités</b>	<b>167</b>
14.1 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube . . . . .	168
14.2 Quelques instabilités mécaniques . . . . .	168
14.2.1 L'instabilité d'une bille dans un anneau tournant . . . . .	168
14.2.2 L'instabilité de l'anneau tournant . . . . .	170
14.2.3 L'instabilité de flambage . . . . .	170
14.3 Instabilités de densité : l'instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	171
14.4 Instabilités de cisaillement : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz . . . . .	174
14.4.1 Description physique . . . . .	175
14.4.2 Equation de Rayleigh . . . . .	175
14.4.3 Equation de Orr-Sommerfeld . . . . .	176
14.4.4 Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu . . . . .	176
14.4.5 Cas d'un profil de vitesse continu . . . . .	178
14.4.6 Cas du vent sur la mer . . . . .	179
14.4.7 Analyse spatiale de stabilité . . . . .	179
14.5 Instabilités visqueuses : l'instabilité de Saffman-Taylor . . . . .	180
14.5.1 Loi de Darcy . . . . .	180
14.5.2 Description qualitative de l'instabilité . . . . .	181
14.5.3 Analyse linéaire de l'instabilité . . . . .	182
14.5.4 Evolution non-linéaire de l'instabilité . . . . .	184
14.6 Instabilités centrifuges : l'instabilité de Taylor-Couette . . . . .	186
14.6.1 Critère inviscide de Rayleigh . . . . .	186
14.6.2 Autres instabilités centrifuges . . . . .	187
14.7 Instabilités de convection thermique : convection de Rayleigh-Bénard . . . . .	189
14.8 Instabilité de Bénard-Marangoni . . . . .	189

14.9 Instabilité convective ou instabilité absolue ? . . . . .	190
14.10 Autres instabilités . . . . .	190
<b>15 Introduction à la turbulence</b>	<b>193</b>
15.1 Introduction . . . . .	193
15.1.1 Exemples d'écoulement turbulent . . . . .	194
15.2 Description statistique de la turbulence . . . . .	195
15.2.1 Valeurs moyennes et fluctuations . . . . .	195
15.2.2 Equations de la turbulence . . . . .	196
15.2.3 Le tenseur de Reynolds . . . . .	196
15.2.4 L'apport de la simulation numérique . . . . .	198
15.2.5 Mesures des vitesses et des fonctions de corrélation . . . . .	198
15.2.6 Notion de densité de probabilité (PDF) . . . . .	198
15.2.7 L'hypothèse de Taylor . . . . .	199
15.3 La couche limite turbulente . . . . .	199
15.4 La turbulence stationnaire, homogène et isotrope (TSII) . . . . .	199
15.4.1 Spectre de la turbulence . . . . .	200
15.4.2 Quelques définitions : . . . . .	200
15.4.3 Evidence de la cascade d'énergie. . . . .	200
15.4.4 Spectre de Kolmogorov : . . . . .	202
15.5 Conclusion . . . . .	203
<b>16 Formulaire</b>	<b>205</b>
16.1 Opérateurs différentiels . . . . .	205
16.2 Conservation de la masse et équation de Navier–Stokes . . . . .	208
Références . . . . .	213

# Chapitre 1

## Notion de milieu continu

Marc Rabaud, version du 9 février 2013

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Qu'est-ce qu'un fluide ?</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Notion d'échelle mésoscopique</b>	<b>10</b>
<b>1.3</b>	<b>Notion de « particule fluide »</b>	<b>10</b>
<b>1.4</b>	<b>Vitesse d'une particule fluide</b>	<b>11</b>
1.4.1	Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)	11
<b>1.5</b>	<b>Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps</b>	<b>11</b>
1.5.1	Trajectoire de particule ( <i>particle path</i> )	12
1.5.2	Ligne d'émission ( <i>streakline</i> )	12
1.5.3	Ligne de courant ( <i>streamline</i> )	12
1.5.4	Ligne de temps ( <i>timeline</i> )	13
1.5.5	Changement de référentiel	13
<b>1.6</b>	<b>Fonction de courant</b>	<b>14</b>
1.6.1	Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires planes	14
1.6.2	Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -	14
<b>1.7</b>	<b>Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne</b>	<b>15</b>

---

### 1.1 Qu'est-ce qu'un fluide ?

Un milieu continu est un milieu dont les propriétés et les champs associés sont définis en tout point, continus et dérивables. On distingue deux types de milieux continus : les solides et les fluides. Un solide est rigide (indéformable, élastique ou plastique) et même si les molécules vibrent, elles gardent les mêmes voisins. Il n'y a pas d'écoulement sous contrainte. Pour un liquide ou un gaz au contraire, sous l'action d'une contrainte donnée la déformation se poursuit indéfiniment. La mécanique des fluides s'intéresse à ces déformations infinies, ou plutôt aux vitesses de déplacement appelées *taux de déformations* qui caractérisent le champ de vitesse sous écoulement. D'autre part nous appellerons fluide indifféremment un gaz ou un liquide, la seule chose importante pour la mécanique des fluides étant de savoir si la masse volumique le long d'une trajectoire fluide reste constante ou non.

## 1.2 Notion d'échelle mésoscopique

On peut définir trois échelles de longueur ou de temps pour un milieu fluide ; l'échelle microscopique, l'échelle macroscopique et entre les deux une échelle intermédiaire que l'on nomme *échelle mésoscopique*.

### Echelle microscopique $\lambda$

C'est l'échelle des molécules de fluides (libre parcours moyen  $\lambda$  ou temps moyen entre collision  $\tau$ ). Sur cette échelle les particules ont des trajectoires balistiques (mouvement brownien) avec une vitesse microscopique moyenne donnée par la température.

### Echelle mésoscopique $\delta$

C'est une échelle de taille supérieure à quelques dizaines de libre parcours moyen. A cette échelle on peut déjà effectuer une moyenne spatiale sur un volume, moyenne relativement significative et peu fluctuante car il y aura déjà quelques milliers de particules, et définir une vitesse moyenne sur ce volume. Ce volume mésoscopique porte le nom de *particule fluide*. A l'équilibre thermodynamique, la distribution de vitesse brownienne est isotrope et l'on trouve une vitesse moyenne ou *vitesse fluide* nulle. Hors équilibre, par exemple avec une pression inhomogène, il existe un écoulement et donc une vitesse non nulle de la particule fluide.

### Echelle macroscopique $L$

C'est l'échelle de variation des champs de vecteurs (vitesse  $\vec{v}$ , accélération  $\vec{a}$ , ...) ou scalaire (pression  $P$ , masse volumique  $\rho$ , température  $T$ , ...). Si cette échelle est suffisamment grande devant l'échelle mésoscopique, on peut faire de la *Physique du milieu continu*, c'est-à-dire supposer que les grandeurs sont définies en tout point  $\vec{r}$  et tout temps  $t$ , on écrira par exemple  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  ou  $\rho(\vec{r}, t)$ .

On supposera donc toujours ici que  $\lambda \ll \delta \ll L$ .

Etablir les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes) à partir des propriétés microscopiques et de la thermodynamique hors équilibre (équation de Boltzmann) est une tâche ardue qui suppose de prendre des moyennes sur ces différentes échelles. Dans certaines hypothèses la démonstration a été faite par Chapman et Enskog pour un gaz monoatomique<sup>1</sup>.

## 1.3 Notion de « particule fluide »

On nomme « particule fluide » une petite masse de fluide de taille mésoscopique  $\delta$ . On suppose sa taille suffisamment faible,  $\delta \ll L$ , pour que l'on puisse considérer que son volume tend vers zéro (tout en restant suffisamment volumineuse pour que les valeurs locales restent statistiquement définies  $\delta \gg \lambda$ ) et donc que l'on peut définir les dérivées des champs en tout point. Pour les fluides denses, et les échelles macroscopiques usuelles cela ne pose pas trop de problème. On peut alors faire de la *Mécanique des milieux continus*. Citons quelques cas délicats où il faut utiliser la mécanique statistique hors équilibre : gaz dilué comme dans les nuages interstellaires ( $\lambda \approx 10^4$  km et  $\tau \approx 5$  jours), nanofluidique, ondes de choc, rentrée d'une navette spatiale dans l'atmosphère ( $\lambda >$  taille de la navette).

*Nota :* Par définition une particule fluide conserve sa masse, mais pas forcément son volume si le fluide est compressible.

---

1. S. Chapman et T. G. Cowling, The Mathematical Theory of Nonuniform Gases. Cambridge University Press, 1960

## 1.4 Vitesse d'une particule fluide

La vitesse d'une particule fluide est la moyenne sur son volume mésoscopique de la vitesse de chacune des molécules présentes à cet instant dans le volume. Notons que ce ne sont pas toujours les mêmes molécules qui constituent la *particule fluide*, certaines rentrent, d'autres sortent (ce phénomène caractérise la diffusion moléculaire).

Le mouvement d'une particule fluide peut toujours se décomposer en un mouvement de translation (donné par la vitesse  $\vec{v}$ ), de rotation (donné par un vecteur rotation instantané  $\vec{\omega}$  appelé en mécanique des fluides vorticité) et de déformation (donné par le tenseur des gradients de vitesse  $[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}]$ ). Nous reverrons ce point dans le chapitre 2.

### 1.4.1 Quelques techniques de mesure de vitesse (vélocimétrie)

Voici quelques exemples des techniques classiques de mesure des vitesses dans un fluide.

- Mesure de forces ou de couples et étalonnage. Robuste, simple mais peu précis et perturbant l'écoulement.
- Suivi de particules (*particle tracking*) par exemple un ballon atmosphérique, une tâche de colorant, ... C'est une mesure dite lagrangienne car mesurée en suivant un objet à différents instants et donc à différentes positions et non pas en un point fixe.
- Anémométrie à fil chaud. On mesure le refroidissement d'un fil mince parcouru par un courant électrique. Permet d'atteindre  $10^5$  mesures par seconde.
- Anémométrie laser (LDV : *Laser Doppler Velocimetry*). Basée sur la détection de la lumière émise par une particule traversant l'intersection de deux faisceaux lasers. Mesure non perturbative d'une composante de la vitesse en un point. Nécessite un fluide transparent.
- Anémométrie Doppler ultrasonore. Basé sur le décalage Doppler d'une impulsion acoustique réfléchie par une particule. Permet la mesure des vitesses longitudinales sur toute une ligne de visée.
- Vélocimétrie par image de particules (PIV : *Particle Image Velocimetry*). Basé sur la corrélation entre des portions d'images successives où de petites particules solides transportées par le fluide sont rendues visibles par un fort éclairage (par exemple un plan laser). Cette technique permet d'obtenir par calcul informatique un champ de vitesse sur un maillage du plan des images, où plus précisément les deux composantes de la vitesse contenues dans le plan de l'image.

Les figures 1.1 et 1.2 présentent les vecteurs vitesse projetés dans un plan sur un maillage régulier. Les données pouvant venir de simulations numériques ou de mesures expérimentales.

## 1.5 Trajectoire de particules, ligne d'émission, ligne de courant et lignes de temps

De nombreuses techniques expérimentales sont utilisées pour comprendre la structure d'un écoulement. Elles conduisent à introduire les notions de trajectoire de particules, de ligne d'émission, de ligne de courant ou de ligne de temps. Les trois premières sont équivalentes pour un écoulement stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ). Ce n'est que pour un écoulement instationnaire que ces notions sont différentes.

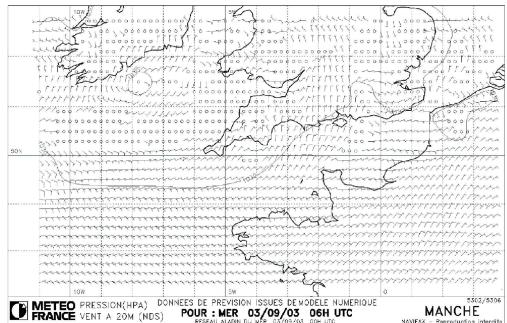


FIGURE 1.1 – Carte météorologique de prévision des vents.

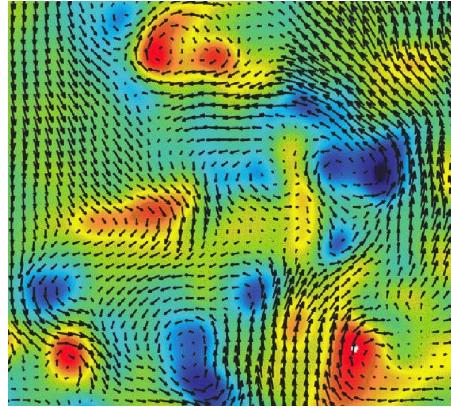


FIGURE 1.2 – Champ de vitesse turbulent mesuré par PIV.

### 1.5.1 Trajectoire de particule (*particle path*)

C'est l'ensemble des points occupés par une particule fluide au cours du temps. Mathématiquement on peut écrire :  $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$  où  $\vec{r}_0$  est la position de la particule à l'instant initiale. C'est donc ce que l'on appelle un suivi *lagrangien* (suivre le déplacement d'un objet donné au cours du temps). Par définition la tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu'avait la particule à l'instant où elle passait en ce point. Un façon classique d'obtenir la trajectoire de traceurs est de prendre une photo en pause longue tout en éclairant de façon continu.

### 1.5.2 Ligne d'émission (*streakline*)

Elles sont facile à réaliser expérimentalement en prenant une photographie à un instant  $t$  d'un filet de colorant émis en continu depuis un certain temps à partir d'un point source fixe. Attention le vecteur vitesse n'a aucune raison d'être tangent à cette courbe pour un écoulement instationnaire.

### 1.5.3 Ligne de courant (*streamline*)

Ligne théorique qu'il est difficile d'observer expérimentalement mais que l'on peut calculer à l'issue d'une simulation. C'est la courbe qui, à un instant donné, est tangente en tout point au vecteur vitesse en ce point. Cela suppose donc de connaître le champ de vitesse en tout point. C'est la ligne de champ classique d'un champ de vecteur à un instant donné (champ électrique par exemple). En coordonnées cartésiennes la ligne de courant est donnée par l'équation  $dx/u = dy/v = dz/w$  si  $\vec{v} = (u, v, w)$ .

- Deux lignes de champ ne se croisent qu'en des points de stagnation (aussi appelés points cols) où la vitesse est nulle.
- On peut aussi définir des surfaces de courant et des tubes de courant. Pour un fluide incompressible le débit massique  $Q_m = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$  ou le débit volumique  $Q_v = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$  se conservent le long d'un tube de champ. Pouvez-vous le montrer ?

**Exercice :** dessiner les lignes de courants, lignes d'émission et trajectoires de particules pour un écoulement homogène mais qui change de direction de  $90^\circ$  à un instant donné.

### 1.5.4 Ligne de temps (*timeline*)

Position à un instant  $t$  d'un ligne marquée dans le fluide à un instant initial et transportée (on dit advectée ou convectée) ensuite par l'écoulement. Elles sont assez facile à réaliser expérimentalement et donnent une idée de la composante du vecteur vitesse normale (perpendiculaire) à la ligne.

### 1.5.5 Changement de référentiel

Un écoulement stationnaire dans un certain référentiel peut ne pas l'être dans un autre. De ce fait la transformation de ces différentes lignes n'est pas évidente comme l'illustre la série de figures suivantes :

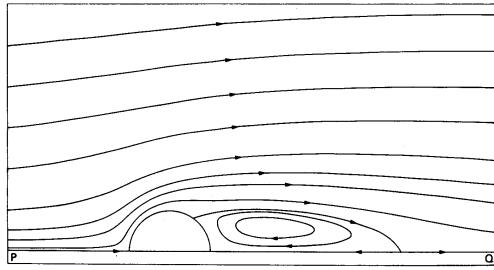


FIGURE 1.3 – Ecoulement stationnaire autour d'un cylindre fixe pour un nombre de Reynolds de 40. Visualisation par lignes d'émission qui sont aussi dans ce cas des lignes de courant et des trajectoires de particules. D'après Réf. [41] p. 76.

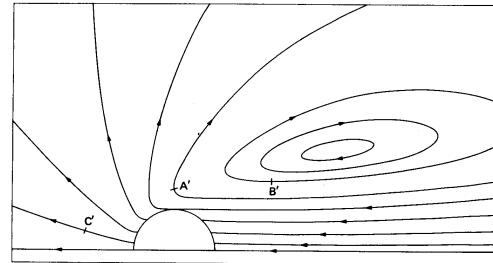


FIGURE 1.4 – Ligne de courant autour d'un cylindre en mouvement de droite à gauche au même nombre de Reynolds dans un référentiel où le fluide est initialement au repos. D'après Réf. [41] p. 76.

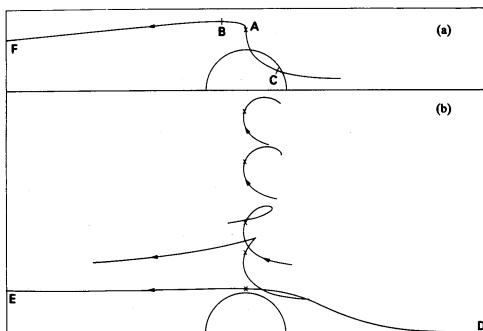


FIGURE 1.5 – Trajectoires de particules dans le référentiel où le fluide est au repos et où le cylindre se déplace de droite à gauche. D'après Réf. [41] p. 78.

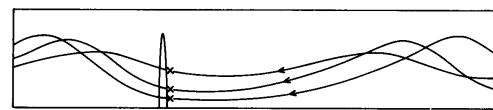


FIGURE 1.6 – Trajectoire de particules piégées dans les tourbillons de recirculation dans le référentiel où le fluide est au repos (noter l'échelle transverse dilatée). D'après Réf. [41] p. 79.

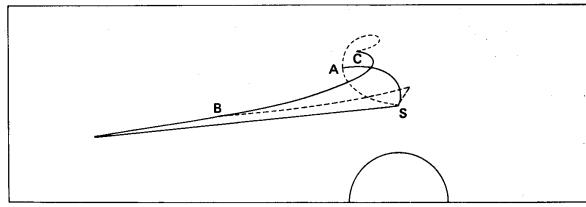


FIGURE 1.7 – Lignes d'émission dans le référentiel où le fluide est au repos. D'après Réf. [41] p. 79.

## 1.6 Fonction de courant

Pour un écoulement incompressible nous verrons que l'hypothèse de conservation de la masse conduit à l'équation  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  (voir chapitre 2 page 17) et on peut donc écrire que  $\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$  (comme on le fait pour le champ électromagnétique  $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$ ). Le vecteur  $\vec{A}$  est appelé le potentiel vecteur du champ de vitesse  $\vec{v}$  et  $\vec{v}$  satisfait alors obligatoirement la condition d'incompressibilité. Noter que  $\vec{A}$  est défini à une jauge près et que  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} C$  est aussi solution. Cette transformation est en général peu utile (on transforme un champ de vecteur en un autre champ vectoriel moins intuitif) sauf si l'écoulement est 2C2D, c'est-à-dire s'il n'a que deux composantes (2C) de vitesse non nulles et qu'elles ne dépendent que deux dimensions d'espace (2D). En effet dans ce cas la connaissance du champ de vitesse se ramène à la connaissance d'un scalaire, la *fonction de courant*  $\psi$ .

### 1.6.1 Ecoulement plan incompressible en coordonnées cartésiennes ou polaires planes

Supposons un écoulement plan d'un fluide incompressible, ou plus précisément un écoulement 2C2D :  $\vec{v} = (u(x, y), v(x, y), 0)$ , c'est-à-dire sans composante selon  $Oz$ . Alors on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\psi \vec{k})}, \quad (1.1)$$

soit  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ .  $\psi$  est la fonction de courant car elle garde une valeur constante sur une ligne de courant ( $\vec{\nabla}(\psi) \cdot \vec{v} = 0$ ).

*Nota* : Le débit par unité de longueur transverse est constant entre deux lignes de courant et vaut  $Q_v = \int_A^B \vec{u} \cdot \vec{ds} = \int_A^B \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_y \right) \cdot (\vec{dl} \wedge \vec{e}_z) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$ .

### 1.6.2 Ecoulement axisymétrique - Fonction de Stokes -

Dans le cas d'un écoulement incompressible 2C2D axisymétrique (sans composante orthoradiale) on doit utiliser une autre définition de la fonction de courant, la *fonction de Stokes*.

- En coordonnées cylindriques :  $\vec{v} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z))$  et l'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( -\frac{\psi(r, z)}{r} \vec{e}_\theta \right)}. \quad (1.2)$$

- En coordonnées sphériques :  $\vec{v} = (u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), 0)$  et l'on peut écrire :

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( \frac{\psi(r, \theta)}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \right)}. \quad (1.3)$$

Là encore, connaître  $\psi$  suffit pour connaître le champ vectoriel de vitesse  $\vec{v}$ .

*Remarque :* Pour un écoulement compressible instationnaire ou 3D3C, il n'existe pas de fonction de courant.

*Exercice :* Vérifier que la fonction  $\psi$  est bien constante sur une ligne de courant ( $d\psi = 0$ ) dans les trois systèmes de coordonnées.

## 1.7 Dérivée eulérienne et dérivée lagrangienne

Les dérivées eulériennes et lagrangiennes sont aussi appelées respectivement dérivées locales et dérivées totales. Cette dernière dérivée s'appelle encore parfois dérivée particulaire ou dérivée convective. Elles apparaissent en mécanique des fluides lorsqu'une grandeur est étudiée en un point qui se déplace dans l'espace. Il faut alors distinguer les variations au cours du temps de la fonction en un point coïncidant fixe des variations dues au fait que le point explore des lieux différents de l'espace.

Prenons un exemple. Lors d'un trajet en voiture vous mesurez l'évolution de la température extérieure. Il fait par exemple  $15^\circ$  à Paris à 8 heures du matin et  $35^\circ$  à Marseille à 16 heures. Dans la voiture vous connaissez donc la variation de la fonction  $T$  au cours du temps,  $\frac{dT}{dt}$ , mais en différents points d'espace au cours du temps. Vous ne connaissez pas séparément  $\frac{\partial T}{\partial t}$  ou  $\frac{\partial T}{\partial x}$ .

Soit  $T$  une fonction scalaire de plusieurs variables  $T(\vec{r}, t)$ . On peut écrire :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz.$$

Soit :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w,$$

avec  $u = dx/dt$ ,  $v = dy/dt$  et  $w = dz/dt$ .

Traditionnellement en mécanique des fluides on note cette dérivée totale  $\frac{DT}{Dt} = \frac{dT}{dt}$  pour bien attirer l'attention sur le fait que cette dérivée totale n'est vraiment pas une dérivée partielle ! Sous forme vectorielle on a donc :

$$\boxed{\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(T)}.$$

On a le même calcul pour une fonction vectorielle. Chacune de ses composantes est un scalaire ayant une dérivée lagrangienne donnée par l'équation précédente. D'une façon symbolique on peut alors écrire pour tout vecteur  $\vec{A}$  sa dérivée lagrangienne :

$$\frac{D\vec{A}}{Dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

ou encore sous forme d'opérateur :

$$\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot$$

Par exemple l'accélération d'une particule fluide (dérivée lagrangienne car en suivant la particule) est donnée par :

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}. \quad (1.4)$$

Le premier terme du membre de droite est le terme d'accélération eulérienne (en un point fixe), le second l'accélération due aux variations spatiales du champ de vitesse à un instant donné. Attention à la concision de la notation, ce deuxième terme résume en fait 9 termes de la forme  $v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ . Nous utiliserons ces notions dans les prochains modules, mais nous pouvons déjà annoncer qu'une grande partie des difficultés de la mécanique des fluides vient de ce second terme car il est non-linéaire : si la vitesse est doublée, ce terme est multiplié par 4.

# Chapitre 2

## Le théorème du transport

Marc Rabaud, version du 9 février 2013

### Sommaire

---

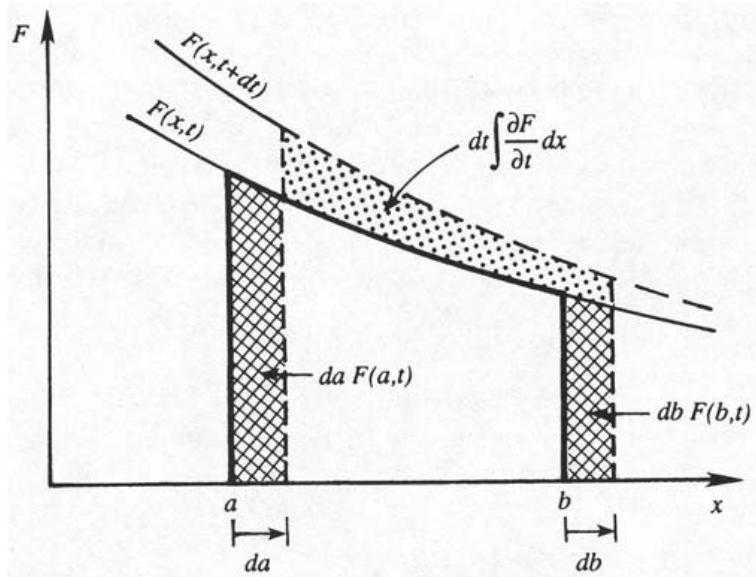
<b>2.1</b>	<b>Notion de volume de contrôle . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Théorème de Leibnitz . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Théorème du transport d'une fonction scalaire . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.4</b>	<b>Conservation de la masse . . . . .</b>	<b>19</b>
2.4.1	Démonstration . . . . .	19
2.4.2	Cas particulier d'un fluide incompressible. . . . .	19
<b>2.5</b>	<b>Théorème du transport d'une fonction vectorielle . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.6</b>	<b>Application au transport de la quantité de mouvement . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.7</b>	<b>Application au sillage d'un cylindre . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>2.8</b>	<b>Transport de l'énergie . . . . .</b>	<b>23</b>

---

Nous allons maintenant présenter quelques théorèmes très puissants et donc utiles pour la mécanique des fluides. Ils sont basés sur les notions de volume de contrôle et de surface de contrôle et permettent d'écrire des équations de bilan, par exemple pour la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie, sans avoir à connaître les équations locales de la mécanique des fluides.

### 2.1 Notion de volume de contrôle

Un *volume de contrôle* (VC) est un volume imaginaire limité par une *surface de contrôle* (SC). Le volume de contrôle peut être un volume fixe dans le référentiel du laboratoire, un volume toujours constitué des mêmes particules fluides, ou un volume ayant un déplacement arbitraire. On parle alors respectivement de *volume fixe*, *volume matériel* ou de *volume mobile*. Dans le cas d'un volume fixe, la vitesse de la surface de contrôle est nulle en tout point ( $\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{0}$  si  $\vec{r} \in SC$ ). Pour un volume matériel, la vitesse de la surface est égale en tout point à la vitesse locale du fluide ( $\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)$  si  $\vec{r} \in SC$ ).

FIGURE 2.1 – Evolution de l'intégrale en  $x$  de la fonction  $f$  entre  $t$  et  $t + dt$ 

## 2.2 Théorème de Leibnitz

Dans de nombreux cas on doit dériver une intégrale d'une fonction de plusieurs variables, dont les bornes dépendent de la variable de dérivation. Dans le cas d'une fonction scalaire dépendant d'une variable de temps et une d'espace on peut par exemple démontrer l'équation 2.1 :

*Théorème de Leibnitz :*

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[b(t), t] \frac{db(t)}{dt} - f[a(t), t] \frac{da(t)}{dt} \quad (2.1)$$

On peut se convaincre de la validité de cette relation en observant la figure 2.1.

## 2.3 Théorème du transport d'une fonction scalaire

On peut ensuite généraliser à trois dimensions d'espace pour une fonction scalaire  $f$  (démonstration dans la référence [7] p. 78 à 86 par exemple) :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}.$$

$\vec{V}(\vec{r}, t)$  est alors la vitesse de déplacement de la surface de contrôle au point considéré. Par exemple si le volume est fixe ce deuxième terme est nul.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, le deuxième terme se transforme en une intégrale de volume et l'on obtient finalement le *Théorème du transport de Reynolds* :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f \vec{V}) \right] d\tau. \quad (2.2)$$

## 2.4 Conservation de la masse

Nous allons montrer que la conservation de la masse conduit à une équation appelée *équation de continuité* qui s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}. \quad (2.3)$$

Cette équation a la forme classique d'une loi de conservation. On peut introduire par exemple la quantité de mouvement par unité de volume (ou flux de masse)  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  et faire un parallèle avec la conservation de la charge électrique en électromagnétisme.

### 2.4.1 Démonstration

La masse dans un volume de contrôle s'écrit :  $M_{VC(t)} = \int_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau$ , où  $\rho$  est la masse volumique. Si VC est un volume de contrôle matériel emporté par l'écoulement, alors  $\vec{V} = \vec{v}$  et s'il y a conservation de la masse (pas de réaction nucléaire par exemple) alors :  $dM_{VC}/dt = 0$ . Le théorème du transport de Reynolds nous donne alors pour  $f = \rho$  :

$$\frac{dM_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] d\tau = 0.$$

On doit donc avoir pour tout VC matériel la relation suivante qui caractérise localement la conservation de la masse (écriture eulérienne) :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}. \quad (2.4)$$

En développant le terme de divergence,  $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho)$  on peut écrire la forme lagrangienne de la conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0}. \quad (2.5)$$

### 2.4.2 Cas particulier d'un fluide incompressible.

Pour un fluide incompressible, une particule fluide conserve son volume au cours du mouvement et donc sa masse volumique et on a donc  $D\rho/Dt = 0$ . En conséquence, *pour un fluide incompressible*, la conservation de la masse s'écrit simplement :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0}. \quad (2.6)$$

C'est en particulier vrai pour un fluide inhomogène en masse volumique, comme par exemple un fluide stratifié en densité. Le terme  $\partial\rho/\partial t$  n'est pas forcément nul en un point mais  $D\rho/Dt$  l'est.

Dans la suite nous traiterons essentiellement les cas des fluides incompressibles qui satisfont donc l'équation 2.6.

## 2.5 Théorème du transport d'une fonction vectorielle

Si la fonction du théorème du transport n'est plus scalaire mais vectorielle, on peut appliquer le théorème pour chacune de ses composantes et l'on trouve finalement :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \vec{A}(\vec{r}, t) [\vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS}] .$$

Cela dit, le dernier terme n'est plus un scalaire et l'on ne peut donc plus utiliser directement le théorème de Green-Ostrogradsky. Nous verrons plus tard (§3.6) qu'il est possible de s'en sortir à condition de définir la divergence d'un tenseur qui sera ... un vecteur.

## 2.6 Application au transport de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement par unité de volume s'écrit  $\rho\vec{v}$ . Le théorème du transport d'une quantité vectorielle sur un volume *matériel* nous permet d'écrire

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho\vec{v} d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho\vec{v} [\vec{v} \cdot \vec{dS}] .$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à ce volume de contrôle matériel nous permet d'écrire :

$$\sum \text{forces appliquées} = \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

où  $\vec{P} = \int_{VC(t)} \rho\vec{v} d\tau$  est la quantité de mouvement totale du volume de contrôle. Si nous projetons cette équation vectorielle sur l'axe  $x_i$ ,

$$F_i = \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} \rho v_i d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} \rho v_i [\vec{v} \cdot \vec{dS}]$$

et nous pouvons appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky pour chaque composante :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \operatorname{div} [v_i(\rho\vec{v})] \right) d\tau.$$

Mais  $\operatorname{div} [v_i(\rho\vec{v})] = v_i \operatorname{div} (\rho\vec{v}) + \rho\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (v_i)$ . En utilisant de plus la conservation de la masse (Eq. 2.4), il vient :

$$F_i = \iiint_{VC(t)} \left( \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (v_i) \right) d\tau.$$

Soit pour le vecteur  $\vec{F}$  :

$$\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) d\tau.$$

L'opérateur  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$  est le même que celui qui a été introduit dans l'équation 1.4 pour la dérivation lagrangienne.

Finalement en faisant apparaître l'accélération lagrangienne, la somme des forces appliquées à un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$\vec{F}(t) = \iiint_{VC(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau. \quad (2.7)$$

Cette équation est vraie même si le fluide est compressible ( $\rho$  variable), tant qu'il y a conservation de la masse.

## 2.7 Application au sillage d'un cylindre

A titre d'exercice nous pouvons utiliser cette équation de transport de la quantité de mouvement pour calculer la force de traînée (drag en anglais)  $\vec{D}$  sur un cylindre infini dans un écoulement homogène dont la vitesse en amont est  $U_\infty$  (cf. [26] p. 86). Nous supposerons l'écoulement stationnaire, incompressible et bidimensionnel (2C2D). Nous prendrons un volume de contrôle matériel (se déplaçant avec le fluide,  $\vec{V} = \vec{v}$ ) limité par la surface du cylindre et un parallélépipède (PQRS) situé assez loin de l'obstacle (figure 2.2). En particulier nous supposerons qu'en aval (sur QR) la pression est revenue à sa valeur en amont  $P_\infty$  (ce qui suppose que le fluide est parfait ou du moins que les effets dissipatifs en l'absence d'obstacle sont faibles).

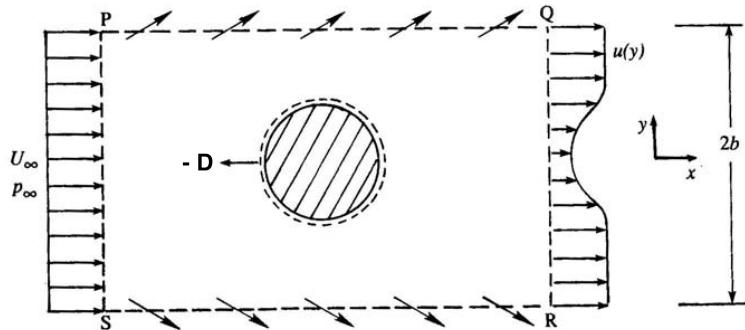


FIGURE 2.2 – Volume de contrôle (PQRS + cylindre) autour d'un obstacle cylindrique

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au volume de contrôle nous dit que :

$$\sum \vec{F}_{\text{appliquées}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \vec{v} d\tau.$$

Comme forces appliquées sur le fluide à la surface de contrôle nous avons les forces de pression, mais elles s'annulent entre l'amont et l'aval et le haut et le bas si la pression vaut partout  $P_\infty$ , et la force appliquée par le cylindre sur le fluide qui vaut  $-\vec{D}$ .

Le théorème du transport nous donne :

$$-\vec{D} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} d\tau + \oint_{SC} \rho\vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}).$$

Le premier terme du membre de droite est nul car l'écoulement est stationnaire. Projetons sur l'axe des  $x$ .

$$-D = \iint_P^Q \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) + \iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) + \iint_R^S \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) + \iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) + \iint_{cylindre} \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}).$$

La contribution correspondant à la surface du cylindre est nulle car le produit  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$  y est nul, le cylindre étant supposé imperméable.

Dans la suite nous noterons  $L$  un élément de longueur fixe dans la direction transverse  $Oz$ .

Sur SP,  $v_x = U_\infty$ , sur QR,  $v_x = U(y)$ . Donc :

- $\iint_S^P \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = -2\rho b L U_\infty^2$ . Le signe moins venant de la convention d'orientation sortante.
- $\iint_Q^R \rho v_x (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = \rho L \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy$ .

Par contre sur PQ et RS il existe une vitesse transverse  $v_y \neq 0$  mais la vitesse longitudinale est proche de  $U_\infty$  si on est assez loin du cylindre. On en déduit :

- $\iint_P^Q \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = U_\infty \iint_P^Q \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = U_\infty \dot{m}_{PQ}$  où  $\dot{m}_{PQ}$  est le débit massique (masse s'échappant par seconde) à travers la surface PQ.
- $\iint_R^S \rho U_\infty (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = U_\infty \iint_R^S \rho (\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}) = U_\infty \dot{m}_{RS}$  où  $\dot{m}_{RS}$  est le débit massique à travers la surface RS.

Les quantités  $\dot{m}_{PQ}$  et  $\dot{m}_{RS}$  ne sont pas connues mais par contre la conservation de la masse permet d'écrire :

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{QR} + \dot{m}_{RS} + \dot{m}_{SQ} = 0,$$

Soit

$$\dot{m}_{PQ} + \dot{m}_{RS} = -\dot{m}_{PS} - \dot{m}_{QR} = L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy.$$

Soit finalement :

$$-D = -2bL\rho U_\infty^2 + L\rho \int_{-b}^{+b} U^2(y) dy + U_\infty \left( L \int_{-b}^b \rho [U_\infty - U(y)] dy \right),$$

et donc :

$$D = \rho L \int_{-b}^b U(y) [U_\infty - U(y)] dy.$$

Cette relation permet de calculer la traînée sur un obstacle par une simple mesure expérimentale du profil transverse de vitesse loin en aval, donc sans avoir à instrumenter l'obstacle.

**Effet de blocage :** On suppose maintenant que l'expérience est faite dans une soufflerie un peu trop étroite. Les surfaces PQ et RS sont donc maintenant les parois de la soufflerie (pas de vitesse normale). La vitesse tangentielle sur ces parois vaut toujours  $U_\infty$ . Montrer qu'on a alors :

$$D = \rho L \int_{-b}^b [U_\infty^2 - U^2(y)] dy.$$

Pour éviter cet effet de blocage (mauvaise estimation de D à cause des survitesses de part et d'autre de l'objet) on considère en pratique qu'une soufflerie doit avoir une largeur supérieure à 10 fois le diamètre de l'obstacle.

## 2.8 Transport de l'énergie

Considérons un volume de contrôle de fluide. Si on note  $\dot{W}$  le travail des forces agissant sur ce volume ou sur la surface de contrôle de ce volume, par unité de temps (c'est donc une puissance) et  $\dot{Q}$  l'échange de chaleur correspondant par unité de temps, la thermodynamique nous dit que :

$$\frac{dU}{dt} = \dot{W} + \dot{Q}$$

où  $U$  est l'énergie interne du volume de fluide considéré,

$$U = \iiint_{VC(t)} e d\tau,$$

où  $e$  est la densité d'énergie, somme de l'énergie potentielle par unité de volume (par exemple  $\rho gz$  pour l'énergie potentielle de gravité) et de l'énergie cinétique par unité de volume  $\frac{1}{2}\rho v^2$ . Le bilan macroscopique d'énergie s'écrit alors comme la variation locale de densité d'énergie plus le flux d'énergie à travers la surface de contrôle :

$$\begin{aligned} \dot{W} + \dot{Q} &= \frac{d}{dt} \iiint_{VC(t)} e(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC(t)} \frac{\partial e}{\partial t} d\tau + \oint_{SC(t)} e(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot \vec{dS} \\ &= \iiint_{VC(t)} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\vec{v}) \right) d\tau. \end{aligned}$$

L'expression détaillée du transport de l'énergie et notamment sa dissipation par la viscosité du fluide sera détaillé dans la section 9.6 page 105.



# Chapitre 3

## Le tenseur des contraintes

Marc Rabaud, version du 12 février 2013

### Sommaire

---

3.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2	25
3.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ ( <i>stress tensor</i> )	26
3.3	Symétries du tenseur des contraintes	26
3.4	Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$	27
3.5	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	28
3.6	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	28

---

### 3.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2

Nous nous limiterons dans ce cours aux tenseurs cartésiens (décrits dans une base orthonormée fixe) sinon tout est bien plus compliqué !

Pour décrire les variations spatiales d'une fonction scalaire on doit calculer le vecteur gradient. De même pour décrire les variations spatiales d'une fonction vectorielle on peut calculer un *tenseur* particulier, le tenseur gradient, qui fait apparaître les composantes des vecteurs gradient de chacune de ses composantes.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse  $[G]$  par

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right].$$

Ainsi chaque ligne de la matrice est constituée des composantes de  $\vec{\nabla}(v_i)$ .

Pour l'opérateur gradient d'un scalaire on a la relation :  $dP = \vec{\nabla} P \cdot \vec{dl}$ .

Pour le tenseur gradient on a la relation :

$$\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl}.$$

En effet

$$\{\vec{dv}\}_i = \{[G] \cdot \vec{dl}\}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dl} = dv_i.$$

Nous avons ici, avec  $[G]$ , un exemple de tenseur de rang 2 (il faut 2 indices pour énumérer les coefficients). Un tenseur de rang 1 correspond à un vecteur tandis qu'un tenseur de rang 0 est un scalaire. On peut aussi définir des tenseurs de rangs plus élevés (exemple pour décrire les variations spatiales d'un tenseur de rang 2).

### 3.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (*stress tensor*)

On appelle *contrainte* la force de contact  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  qui s'applique sur une surface unité de normale  $\vec{n}$  (figure 3.2). Si  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire, dirigé selon la normale sortante de cette surface (dans la direction du milieu qui applique la force de contact), la force s'exerçant sur une surface  $dS$  s'écrit :

$$\vec{df} = \vec{\sigma}(\vec{n})dS.$$

C'est la force de contact appliquée par le milieu supérieur (là où pointe  $\vec{n}$ ) sur le milieu inférieur (là d'où sort  $\vec{n}$ ) sur la surface  $\vec{dS} = dS\vec{n}$ .

Par exemple si on regarde les contraintes s'exerçant sur une des faces de surface unité d'un cube (figure 3.1), on a :

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_i) = \sigma_{1i}\vec{e}_1 + \sigma_{2i}\vec{e}_2 + \sigma_{3i}\vec{e}_3.$$

Par exemple  $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$  est un vecteur ayant trois composantes :  $\sigma_{22}$  représente la contrainte normale et  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{32}$  les deux composantes tangentielles.

Pour connaître l'état des contraintes sur n'importe quelle surface  $\vec{dS}$ , nous allons voir qu'il suffit de connaître  $\vec{\sigma}(\vec{e}_1)$ ,  $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$  et  $\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$ . On construit donc le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Par convention dans  $\sigma_{ij}$ , l'indice  $i$  est le numéro de ligne du tenseur et la direction de la composante de la contrainte considérée et  $j$  est le numéro de colonne et la direction de la normale sortante.

### 3.3 Symétries du tenseur des contraintes

Deux propriétés de symétrie sont importantes pour écrire les contraintes et le tenseur des contraintes :

- Le principe de l'action et de la réaction nous permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = -\vec{\sigma}(-\vec{n}).$$

En effet la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle.

En conséquence, pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit il suffit de connaître les contraintes  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  sur trois faces contiguës et donc de connaître  $[\sigma]$ . Sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

- Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

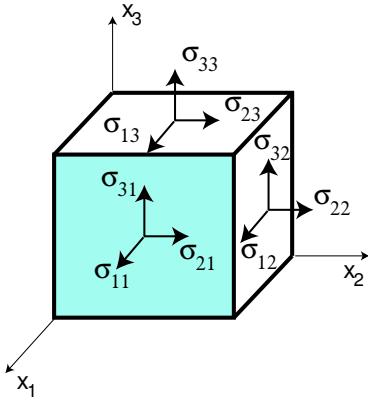


FIGURE 3.1 – Convention d’écriture des 9 termes du tenseur des contraintes.

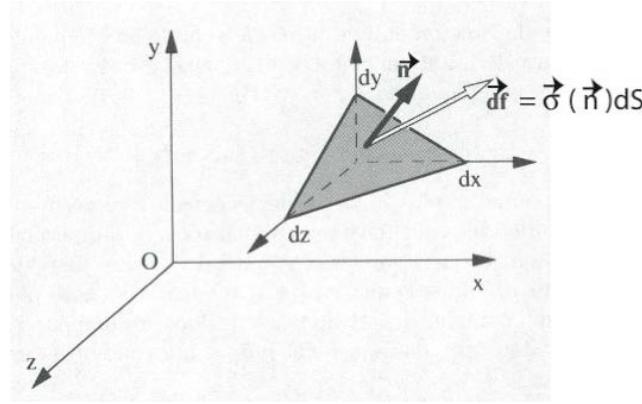


FIGURE 3.2 – Contrainte  $\vec{\sigma}(\vec{n})$  dans une direction quelconque :  $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$ .

En effet regardons les couples de rotation qui s’exercent sur un cube vis-à-vis de l’axe  $Oz$  par exemple :

$$d\Gamma_{Oz} = \|\vec{r} \wedge \vec{df}\| = \sigma_{yx} dS_x dx - \sigma_{xy} dS_y dy = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) d\tau.$$

Or le théorème du moment cinétique nous permet d’écrire  $\Gamma_{Oz} = dI \frac{d^2\theta}{dt^2} \propto \rho d\tau r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ .

Donc  $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \propto \rho r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$ . Lorsque  $r \rightarrow 0$  on doit donc avoir  $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$  pour ne pas avoir une accélération angulaire infinie.

Le même raisonnement pour les autres axes de rotation montrent que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}. \quad (3.1)$$

### 3.4 Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$

Connaissant le tenseur des contraintes  $[\sigma]$  on peut connaître dans un milieu continu la contrainte s’exerçant sur n’importe quelle surface de normale  $\vec{n}$ . En effet on a la relation (figure 3.2) :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j. \quad (3.2)$$

Nous avons ici utilisé la *convention de sommation d’Einstein* : dès que des indices apparaissent deux fois dans une expression, le signe  $\sum$  sur cet indice n’est pas écrit pour simplifier mais il est implicite. Par exemple  $a_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 a_{ii}$  et  $\delta_{ii} = 3$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon.

On peut vérifier la propriété (3.2) en faisant par exemple  $\vec{n} = \vec{e}_i$  ou bien faire la démonstration complète d’équilibre des forces sur un tétraèdre (cube coupé par la face  $\vec{n}$ , voir Ref. [7] p. 108 ou [25] p. 127).

**Exercice :** Démontrer la propriété précédente à 2 dimensions.

### 3.5 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$

Considérons le cas d'un fluide au repos, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement (hydrostatique). Dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre il y a isotropie des contraintes d'une part et uniquement des contraintes normales d'autre part (pas de contraintes tangentielles). On appelle « pression » le scalaire  $p$  tel que  $d\vec{f} = -p d\vec{S}$ . Sans écoulement on peut donc écrire  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p[I]$$

où  $[I]$  est le tenseur identité aussi appelé tenseur de Kronecker  $[\delta]$  car  $[I] = [\delta_{ij}]$ .

On notera que, quelque soit le vecteur  $\vec{n}$ , on a alors  $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = -p[I] \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$ . Les contraintes sont donc normales aux surfaces et isotropes dans un fluide au repos (équilibre thermodynamique).

Dans le cas où il existe un écoulement (hors équilibre) on définit le tenseur des contraintes visqueuses  $[\sigma']$  par la relation :

$$[\sigma] = -p[I] + [\sigma'].$$

$[\sigma']$  est évidemment le tenseur nul s'il n'y a pas d'écoulement, ou plus généralement s'il n'existe pas d'autres forces que les forces de pression (ce sera le cas des fluides parfaits qui sont supposés sans viscosité). Ce tenseur  $[\sigma']$  caractérise les forces d'origine visqueuse qui apparaissent sous écoulement.

Notons que  $[\sigma]$  ou  $[\sigma']$  ne décrivent que les forces de contact (ou de surface, forces à courtes portées) et pas des forces de volumes (forces à longues portées) comme la gravité par exemple dont il faudra tenir compte par ailleurs.

### 3.6 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$

Nous avons démontré (équation 2.7) que pour un volume de contrôle matériel on a la relation :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau.$$

Nous allons maintenant décomposer les forces appliquées en forces de volume  $\sum \vec{F}_{VC}$  et en forces de surface  $\sum \vec{F}_{SC}$ . Soit :  $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{VC} + \sum \vec{F}_{SC}$ . Pour les forces volumiques nous introduirons les forces par unité de masse (donc homogènes à des accélérations) que nous noterons  $\vec{g}$  car souvent ce sera l'accélération de la gravité, mais en principe le terme  $\vec{g}$  pourra représenter n'importe quelle force de volume (force magnétique, électrostatique, force de Laplace, pseudo-forces d'inertie, etc).

$$\sum \vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau.$$

Pour les forces de surface nous avons par définition :

$$\sum \vec{F}_{SC} = \oint_{SC} \vec{\sigma}(\vec{n}) dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{dS}.$$

Or  $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j$ , donc si on projette l'équation précédente sur l'axe des  $i$ , il vient :

$$\left\{ \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{dS} \right\}_i = \oint_{SC} \vec{L}_i \cdot \vec{dS} = \iiint_{VC} \operatorname{div}(\vec{L}_i) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau.$$

Car c'est le flux d'un vecteur  $\vec{L}_i$  de composantes  $\vec{L}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$  ( $L$  pour "ligne" car ses composantes sont les coefficients d'une ligne du tenseur des contraintes) à travers la surface  $\overrightarrow{dS}$ .

Donc si on regroupe les forces de volume et les forces de surface, on a pour la composante  $i$  :

$$\sum F_i = \iiint_{VC} [\rho g_i + \operatorname{div}(\vec{L}_i)] d\tau.$$

Ce que l'on peut encore écrire sous une forme compacte vectorielle :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC(t)} [\rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma]] d\tau,$$

à condition de définir un nouvel opérateur, la divergence d'un tenseur, qui est un *vecteur* (attention !) dont chaque composante est la divergence du vecteur ligne correspondant :  $\{\overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma]\}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ .

En introduisant l'expression  $[\sigma] = -p[I] + [\sigma']$  on en déduit que

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma]\}_i = -\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

soit

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma] = -\vec{\nabla}(p) + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma'].$$

Finalement en rassemblant tous les termes :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \iiint_{VC} [-\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma']] d\tau,$$

quel que soit le volume de contrôle et donc au niveau local :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma']} \quad (3.3)$$

Cette équation est la forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD). Elle est exacte pour tous les fluides, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux du moment qu'ils conservent leur masse. L'étape suivante est d'exprimer la *relation constitutive*, c'est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses  $[\sigma']$  et le tenseur des gradients de vitesse  $[G]$ . Nous établirons cette relation dans le chapitre 9 pour un fluide dit "newtonien". L'équation obtenue portera alors le nom d'équation de Navier-Stokes.

Dans le chapitre 4 nous allons étudier le cas idéal où l'on néglige les contraintes visqueuses ( $[\sigma'] = 0$ ). On a alors l'équation de la dynamique suivante :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g}.} \quad (3.4)$$

Cette équation est appelée équation d'Euler du nom du mathématicien suisse du XVIII<sup>e</sup> siècle qui l'a établie. Cette équation gouverne l'écoulement des fluides sans viscosité que l'on appelle *les fluides parfaits*.



# Chapitre 4

## Fluides parfaits et équation d'Euler

Marc Rabaud, version du 26 février 2013

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Equation de Bernoulli</b>	<b>32</b>
<b>4.2</b>	<b>Généralisation de l'équation de Bernoulli</b>	<b>34</b>
4.2.1	Cas d'un fluide barotrope	34
4.2.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	34
4.2.3	Effet Coanda	34
<b>4.3</b>	<b>Quelques applications de l'équation de Bernoulli</b>	<b>35</b>
4.3.1	Anémomètre à tube de Pitot	35
4.3.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	36
4.3.3	Expérience de Torricelli	37
<b>4.4</b>	<b>Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)</b>	<b>38</b>
4.4.1	Effet Magnus	39
4.4.2	Portance d'une aile	40
4.4.3	Amplification des vagues par le vent	40
4.4.4	Jet incident sur une plaque	41
<b>4.5</b>	<b>Paradoxe de d'Alembert</b>	<b>41</b>

---

Si dans l'équation 3.3, forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma'],$$

on néglige les contraintes de surface (autres que la pression) exercées sur le volume de contrôle, alors  $\overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma'] = \vec{0}$  et l'on obtient l'équation d'Euler, établie par Leonhard EULER (figure 4.1) en 1755 :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}}. \quad (4.1)$$

Cette équation est utilisée pour les fluides dits « parfaits », c'est-à-dire pour ceux où l'on peut négliger les effets de la viscosité. Ceci est parfois justifiable loin des parois et si le nombre de Reynolds

(que nous définirons au §10.1) de l'écoulement est élevé. L'équation est utilisable même pour des fluides compressibles.

Le problème est bien posé si l'on connaît de plus les conditions aux limites sur  $\vec{v}$  (pas de vitesse normale sur les parois) et sur  $p$  et si l'on écrit la conservation de la masse,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ .



FIGURE 4.1 – Portrait de Leonhard EULER (1707-1783)

On peut facilement montrer que les écoulements des fluides parfaits sont réversibles en temps. En effet la transformation de  $\vec{v}(x, y, z)$  en  $-\vec{v}(x, y, z)$  et de  $t$  en  $-t$  laisse l'équation 4.1 invariante. La source d'irréversibilité c'est la dissipation d'énergie par la viscosité, source qui n'existe donc pas pour les fluides parfaits. De façon étonnante nous verrons dans le §10.4.1 que l'autre limite des écoulements dominés par les forces visqueuses conduit aussi à des écoulements réversibles. Ce n'est donc que dans la gamme intermédiaire que les écoulements seront irréversibles.

## 4.1 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait n'ayant par définition pas de viscosité, il ne peut pas dissiper d'énergie. On peut donc à partir de l'équation d'Euler trouver une équation de conservation de l'énergie, appelée équation de Bernoulli.

**Démonstration :** Voyons d'abord la démonstration classique de cette équation, nous verrons ensuite des généralisations possibles. On suppose donc :

1. un fluide de masse volumique constante ( $\rho = Cste$ )
2. un écoulement stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ )
3. que les forces volumiques dérivent d'un potentiel :  $\vec{g} = -\vec{\nabla}(\Phi_g)$ . Dans le cas de la force de gravité  $\Phi_g = gz$  avec l'axe  $z$  dirigé vers le haut.

Alors l'équation d'Euler (Eq. 4.1) peut s'écrire :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

Nous pouvons alors utiliser une relation du formulaire pour transformer partiellement le membre de gauche en un gradient. On a en effet l'identité :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \operatorname{rot} \vec{B} + \vec{B} \wedge \operatorname{rot} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

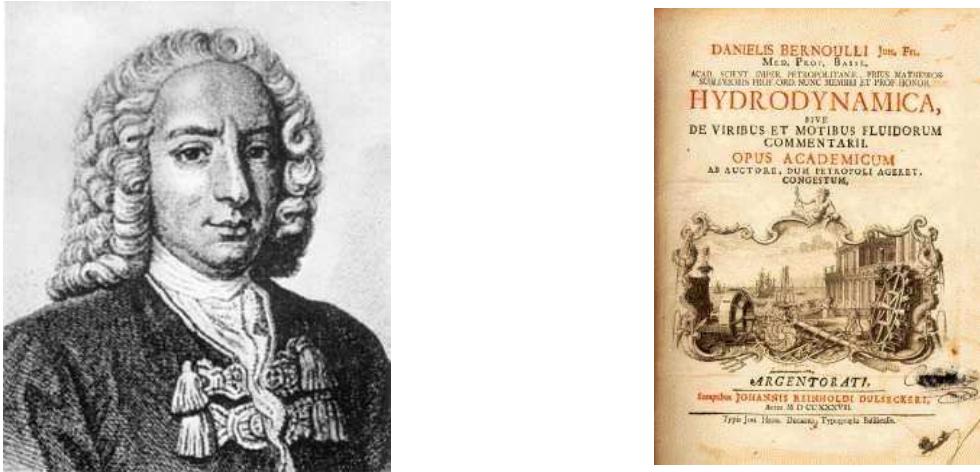


FIGURE 4.2 – Portrait de Daniel BERNOULLI (1700-1782) et première page de son traité *Hydrodynamica* publié en 1738. Daniel Bernoulli faisait partie d'une famille de huit mathématiciens éminents (biographie détaillée sur le site <http://www.bibmath.net/bios/index.php3>).

Si on l'écrit pour le vecteur  $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$  on obtient :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}.$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}}. \quad (4.2)$$

Nous allons montrer que la quantité  $C = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2$ , appelée parfois la « charge », reste constante sur une ligne de courant.

Par définition du gradient nous avons :

$$dC = \vec{\nabla}(C) \cdot \vec{dl} = (\vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{dl}.$$

Donc si  $\vec{dl}$  est colinéaire à  $\vec{v}$ , ce qui est le cas le long d'une ligne de courant, le terme de droite est nul et  $dC = 0$ . Ceci prouve bien que  $C = Cste$  sur une ligne de courant (il n'y a pas de « perte de charge »). Toutefois cette constante peut être différente pour chaque ligne de courant.

Le même raisonnement permet de montrer que  $C$  est aussi une constante sur une ligne de vorticité (on appelle *vorticité* la quantité  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}} \vec{v}$ ).

Si l'écoulement est irrotationnel (aussi appelé écoulement potentiel) dans un certain domaine d'espace, c'est-à-dire si  $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  alors la constante  $C$  est la même sur toutes les lignes de courant situées dans ce domaine.

- Le terme  $p$  est appelé *pression statique* (ou locale).
- Le terme  $\rho g h$  est appelé *pression hydrostatique*.
- Le terme  $\frac{1}{2}\rho v^2$  est appelé *pression dynamique*.
- $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2$  est appelé *pression totale* ou pression de stagnation ou encore pression d'arrêt.

En effet la charge étant constante sur une ligne de courant, cette pression totale est aussi la pression que l'on mesure en un point où la vitesse est nulle.

## 4.2 Généralisation de l'équation de Bernoulli

### 4.2.1 Cas d'un fluide barotrope

Si le fluide est compressible, mais que la masse volumique  $\rho$  en un point de l'écoulement ne dépend que de la pression  $p$  et pas de la température par exemple, les isobares sont aussi des isostères (iso masse volumique). On dit alors que le fluide est *barotrope* (cas d'une transformation isotherme ou adiabatique pour un gaz parfait par exemple). Dans ce cas le terme  $\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho}$  peut se mettre sous la forme d'un gradient :

$$\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho} = \vec{\nabla} \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right).$$

En effet par définition du gradient on a :  $\vec{\nabla} \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) \cdot \vec{dl} = d \left( \int \frac{dp}{\rho(p)} \right) = \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)} \cdot \vec{dl}$ . Et si l'écoulement est stationnaire et si les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la charge peut se mettre sous la forme :  $C = \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz + \frac{1}{2}v^2$ .

### 4.2.2 Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel

Si l'écoulement est instationnaire (mais incompressible et que les forces volumiques dérivent d'un potentiel), l'équation d'Euler peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2 \right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v} = 0.$$

Si l'écoulement est *irrotationnel* ( $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ ),  $\vec{v}$  dérive d'un potentiel (d'où le nom d'écoulement potentiel aussi utilisé) et l'on peut écrire  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$  et donc  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . On peut généraliser l'équation de Bernoulli à chaque instant par :

$$C(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2.$$

La charge  $C(t)$  ne dépend pas de la position mais uniquement du temps. A chaque instant  $C = Cste$  dans toute la zone irrotationnelle. On peut d'ailleurs faire disparaître cette constante en redéfinissant le potentiel de vitesse comme  $\Phi' = \Phi - \int_0^t C(t) dt$ .

### 4.2.3 Effet Coanda

Réécrivons l'équation d'Euler pour un écoulement stationnaire en négligeant les effets de gravité :

$$\rho \left( \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) = \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}(p).$$

Si les lignes de courant sont courbées on peut utiliser le référentiel tangent et l'on note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré et  $\vec{t}$  le vecteur tangent. L'accélération s'écrit alors comme la somme d'une accélération tangent  $\frac{dv}{dt}$  (dérivée du module de la vitesse) et d'une accélération centripète  $\frac{v^2}{R}$  ( $R$  est le rayon de courbure local de la trajectoire) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n}.$$

L'équilibre de la composante radiale du gradient de pression et de la force centrifuge s'écrit donc :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{R}.$$

C'est ce que l'on appelle l'effet « Coanda ». La pression augmente lorsque on s'éloigne du centre de courbure des lignes de courant. On peut utiliser cette relation pour expliquer la figure 4.3 où une balle est maintenue par une force dirigée vers le jet courbé. Cette force est aussi très nettement mesurable si l'on approche le dos d'une cuillère d'un filet d'eau sous un robinet. Cet effet Coanda n'est pas sans relation avec l'effet Magnus et l'effet de portance sur une aile décrits aux §4.4.1 et 4.4.2.



FIGURE 4.3 – Effet Coanda

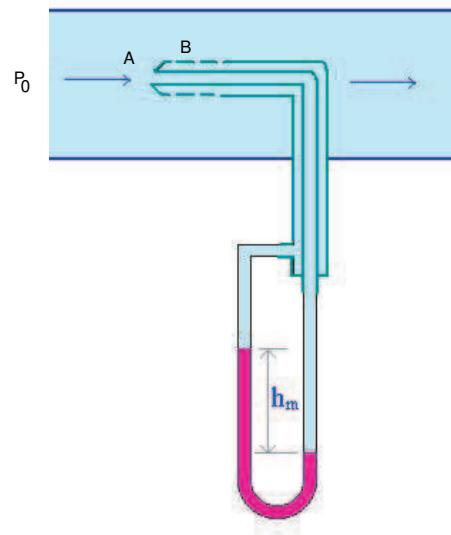


FIGURE 4.4 – Anémomètre à tube de Pitot

## 4.3 Quelques applications de l'équation de Bernoulli

### 4.3.1 Anémomètre à tube de Pitot

Cet appareil, inventé par Henri PITOT en 1732, permet à peu de frais de mesurer la vitesse moyenne d'un écoulement stationnaire ou variant lentement (figure 4.4).

Supposons un écoulement uniforme de vitesse  $U_\infty$  et à la pression  $P_\infty$  loin de l'obstacle pour un fluide de masse volumique  $\rho_f$ . Le tube de Pitot étant profilé il perturbe peu l'écoulement. Une fois les niveaux des liquides équilibrés dans le manomètre à tube (on peut aussi utiliser d'autres types de manomètres) il n'y a plus d'écoulement à l'intérieur du tube et les lois de l'hydrostatique s'appliquent  $P_A - P_B = (\rho_m - \rho_f) g h_m$  où  $\rho_m$  est la masse volumique du liquide manométrique. Dans la suite nous supposerons que  $\rho_f \ll \rho_m$ .

Sur la ligne de courant venant de l'infini et passant par le point de stagnation A on a  $U_A = 0$  soit :

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P_A$$

Cette même ligne de courant après A se prolonge le long du tube et passe au point B, donc on a aussi :

$$P_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2 = P_A = P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2.$$

On supposera que la vitesse en B est déjà revenue à sa valeur à l'infini,  $U_B = U_\infty$ , alors cette équation nous montre que la pression en B est aussi égale à la pression  $P_\infty$ .

La différence entre la pression de stagnation mesurée en A et la pression à la paroi mesurée en B est donc proportionnelle au carré de la vitesse :  $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ , soit finalement :

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho_m g h_m}{\rho}}.$$

Le tube de Pitot fonctionne également si le fluide n'est pas vraiment parfait à condition d'avoir un écoulement rapide (nombre de Reynolds élevé) pour que l'épaisseur de la couche limite soit faible au voisinage de B. Nous verrons dans le chapitre 11 que dans ce cas le gradient de pression transverse à la couche limite est négligeable et que l'on peut bien confondre  $P_B$  et  $P_\infty$ .

Les tubes de Pitot sont encore couramment utilisés (on en a beaucoup parlé récemment dans la presse suite à l'accident du vol Rio-Paris en 2009). Ils mesurent bien la pression en statique, par contre ils ont une mauvaise réponse en fréquence à cause du comportement de filtre passe-bas de l'écoulement dans les petits trous ou les petits tubes.

### 4.3.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi

Considérons une conduite dont la section est localement et progressivement diminuée (figure 4.5). Une mesure de la chute de pression entre l'entrée du tube et l'endroit où la section est la plus faible va permettre, à condition de connaître les sections, de calculer le débit passant dans la conduite, et ceci sans pièce mobile.

En régime stationnaire  $p + \frac{1}{2}\rho U^2$  est constant sur les lignes de courant. Donc si on suppose de plus que la vitesse est uniforme dans toute section de la conduite (ce qui est réaliste pour un fluide parfait), on a, en appelant respectivement A, B et C, les trois points de mesure :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho U_C^2$$

Comme de plus on conserve le débit volumique  $Q = Q_A = Q_B = Q_C$  soit  $U_A S_A = U_B S_B = U_C S_C$ , et donc on peut relier la différence de pression entre A et B à la vitesse et donc au débit  $Q$  :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(U_B^2 - U_A^2) = \frac{1}{2}\rho U_A^2 \left[ \left( \frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right]$$

soit

$$Q = S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho} \left( \frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \right)}.$$

La mesure de  $P_A - P_B$  et la connaissance de  $S_A$ ,  $S_B$ , et de la masse volumique  $\rho$  du fluide en écoulement permettent de déterminer le débit.

Parfois la pression  $P_B$  est tellement faible au niveau de la contraction que l'on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si  $P_B$  devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

Cet effet Venturi, et plus précisément la dépression générée au point B (figure 4.5), est aussi utilisé dans les *trompes à eau* pour abaisser la pression d'un gaz, ou pour projeter de la peinture avec un aérographe.

**Exercice :** Refaire l'étude du débitmètre de Venturi pour un fluide compressible.

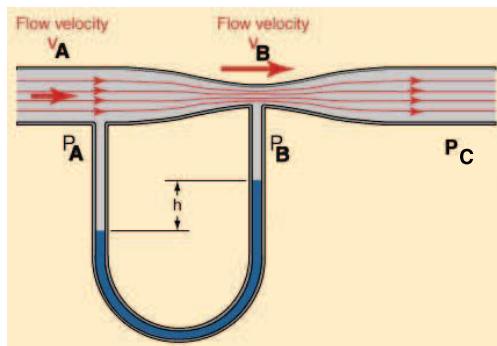
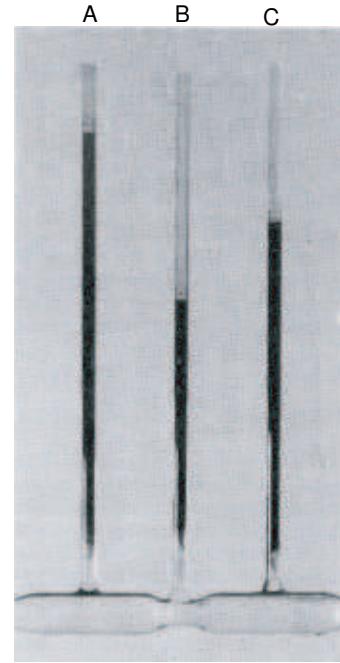


FIGURE 4.5 – Débitmètre de Venturi

FIGURE 4.6 – Démonstration de l'effet Venturi.  
D'après [41] p. 120.  $P_A > P_C > P_B$ .

Notons que sur la figure 4.6, la pression en C est plus faible que la pression en A, ce qui ne devrait pas être le cas pour un fluide parfait. Ceci est due aux pertes de charges dans le rétrécissement, pertes de charge qui n'existent que parce que le fluide réel n'est pas parfait et qu'il y a dissipation d'énergie. Une autre cause possible est que le rétrécissement est un peu trop brusque et qu'il se forme un jet en sortie (l'écoulement n'est alors plus homogène dans la section en C).

*L'artériosclérose* est une maladie où le diamètre des artères est localement diminué par des dépôts de graisse. L'effet Venturi explique en partie l'évolution grave de cette maladie.

### 4.3.3 Expérience de Torricelli

L'expérience de Torricelli consiste à vider un récipient par un petit trou situé à la profondeur  $h$  sous la surface du liquide (figure 4.7). Si le récipient est large comparé à la taille du trou on peut négliger le caractère instationnaire de l'écoulement ( $h$  diminue doucement) et sur une ligne de courant reliant un point de la surface à un point dans le trou on a :  $P_{atm} + \rho gh + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho U^2$  soit :

$$U = \sqrt{2gh}.$$

Une clepsydre (récipient rempli d'eau utilisé il y a bien longtemps pour mesurer les durées) est basé sur ce principe. Elle se vide de plus en plus lentement lorsque  $h$  diminue, contrairement à un sablier dont le sable s'écoule lui à vitesse constante.

**Exercice :** En appliquant la conservation du débit, trouver l'équation régissant  $h(t)$  pour un récipient cylindrique de section  $S$  et pour un trou de section  $s$ . Montrer en particulier que le temps de vidange vaut  $\frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ , où  $h_0$  est la hauteur initiale de remplissage au-dessus du trou. Quelle doit-être la forme du récipient  $S(h)$  pour que l'écoulement se fasse à vitesse constante ?

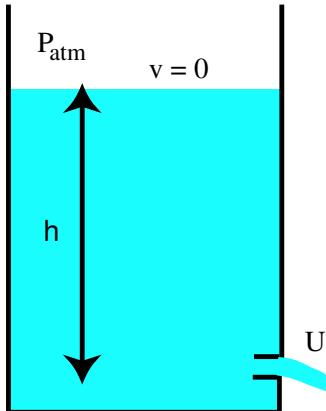


FIGURE 4.7 – Expérience de Torricelli

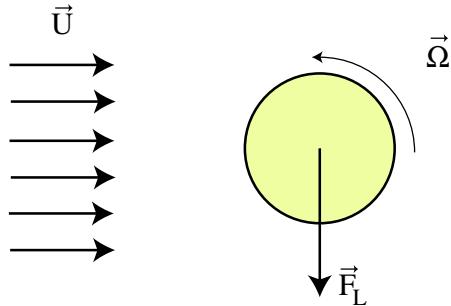
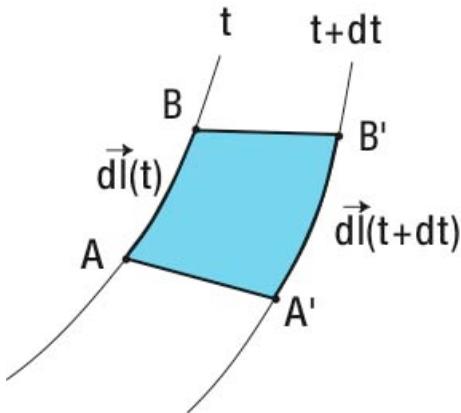


FIGURE 4.8 – Exemple de portance acquise par effet Magnus d'une balle tournant sur elle-même.

FIGURE 4.9 – Schéma du déplacement pendant  $dt$  de l'élément du contour  $\vec{dl}$ .

#### 4.4 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)

La circulation du vecteur vitesse sur un contour  $C_m$  fermé matériel, c'est-à-dire emporté par l'écoulement, s'écrit :  $\Gamma = \oint_{C_m} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ . Par application du théorème de Stokes, on peut aussi l'écrire :  $\Gamma = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ , où  $S$  est n'importe quelle surface portée par ce contour matériel.

Nous allons étudier l'évolution de cette circulation le long d'un contour matériel emporté par l'écoulement. En utilisant le théorème de Leibnitz (Equ. 2.1) et en s'inspirant du théorème du transport on peut écrire :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{C_m} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \oint_{C_m} \vec{v} \cdot \frac{D\vec{dl}}{Dt}.$$

Dans le premier terme du membre de droite se trouve l'accélération lagrangienne des particules fluides sur un contour fixe tandis que dans le deuxième terme apparaît le déplacement du contour.

Pour le deuxième terme, dessinons un petit élément  $d\vec{l}$  aux instants  $t$  et  $t + dt$  (voir figure 12.3). On a  $d\vec{l}(t + dt) = d\vec{l}(t) + \vec{v}_B dt - \vec{v}_A dt$ . Or  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{dv}$ , soit finalement  $\frac{D\vec{dl}}{Dt} = \vec{dv}$ .

On peut donc écrire  $\vec{v} \cdot \frac{D\vec{dl}}{Dt} = \vec{v} \cdot \vec{dv} = \frac{1}{2} d(v^2)$ . L'intégrale sur un contour fermé de ce terme est nulle.

Pour le premier terme en utilisant l'équation d'Euler on a  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$ .

Si la masse volumique est constante (ou si le fluide est barotrope), la circulation du gradient de pression est nulle. Si de plus les forces de volume dérivent d'un potentiel, la dérivée lagrangienne de la circulation s'écrit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0.$$

**Enoncé du théorème de Kelvin (1869) :** Sous la condition de satisfaire les conditions suivantes :

- fluide parfait ( $\nu = 0$ )
- forces de volume dérivant d'un potentiel
- densité constante (ou alors fluide barotrope),

la circulation du vecteur vitesse autour de n'importe quelle boucle fermée et entraînée par le fluide est une quantité qui se conserve au cours du mouvement. Ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}.$$

**Une conséquence du théorème de Kelvin : la persistance de l'irrotationnalité.** Si dans un domaine de l'espace simplement connexe l'écoulement est irrotationnel, la circulation autour de n'importe quel contour contenu dans ce domaine sera nulle. Cette propriété étant conservée par advection par l'écoulement. Une zone irrotationnelle restera donc irrotationnelle si le fluide est parfait. **Il n'y a que dans les couches limites visqueuses que peut naître de la vorticité.** Ceci est cohérent avec le fait que pour faire tourner sur elles-même des particules fluides et donc leur donner de la vorticité il faut l'action des contraintes visqueuses.

#### 4.4.1 Effet Magnus

Le nom d'effet Magnus vient du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) qui a décrit ce phénomène en 1852. Dans de nombreux sports on « lifte » ou on « brosse » les balles, c'est-à-dire qu'on leur donne une rotation sur elles-mêmes qui a pour effet de courber leur trajectoire. Là encore cet effet peut être décrit par le théorème de Bernoulli.

Prenons une balle tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$  (figure 4.8). Dans le référentiel du centre de masse de cette balle il existe un écoulement d'air de gauche à droite d'intensité  $\vec{U}$ . A cause de l'existence de couches limites au voisinage de la balle (zones où la viscosité du fluide se fait sentir, voir § 11 page 135) et de la condition de non-glissement du fluide au voisinage de la surface de la balle (§ 10.2.1 page 114) le fluide va aller plus vite que  $\vec{U}$  juste au-dessous de la balle (les vitesses s'ajoutent) et légèrement moins vite juste au-dessus (les vitesses se soustraient). La relation de Bernoulli nous dit alors que la pression va être un peu plus forte au-dessus qu'au-dessous de la balle avec pour conséquence une force dirigée ici de haut en bas (cas d'une balle liftée) appelée portance (*lift* en anglais)  $\vec{F}_L$ . Ici nous avons une portance positive qui fait monter la balle.

On peut montrer que  $\vec{F}_L \propto \rho \vec{U} \wedge \vec{\Omega}$ . Une autre façon de décrire les choses est que, comme nous le verrons dans l'étude de la portance sur une aile d'avion, il existe une portance parce qu'apparaît une circulation du vecteur vitesse  $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$  autour de l'objet.

Une autre application classique de l'effet Magnus est la propulsion par cylindres tournants imaginée par Anton FLETTNER et pour la première fois utilisée sur le Baden Baden en 1926. L'idée a ensuite été perfectionnée pour l'Alcyone, bateau de J.-Y. COUSTEAU. Dans ce cas la dissymétrie de l'écoulement est contrôlée par aspiration asymétrique des couches limites plutôt que par la rotation du cylindre.

#### 4.4.2 Portance d'une aile

Les deux figures suivantes (figures 4.10 et 4.11) représentent respectivement l'écoulement et les forces locales agissant sur une aile portante sous faible incidence. L'équation de Bernoulli permet d'évaluer assez simplement la portance sur une telle aile (pour plus de détail, voir le chapitre ??).

Si on compare deux lignes de courant passant respectivement juste au-dessous (zone 1) et juste au-dessus (zone 2) d'une aile de longueur  $L$  et d'envergure  $a$ , on peut écrire :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2$$

et

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

soit :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2}\rho(U_2 - U_1)(U_2 + U_1).$$

Au premier ordre on peut écrire  $U_2 + U_1 \approx 2U_\infty$  et la portance  $F_L$  peut s'écrire :

$$F_L \approx \int_0^L a(P_1 - P_2) dl \approx a\rho U_\infty \left[ \int_0^L (U_2 - U_1) dl \right] = -a\rho U_\infty \Gamma$$

où  $\Gamma$  est la circulation autour de l'aile calculée dans le sens trigonométrique. Ce calcul est juste une estimation mais le résultat trouvé est exact comme nous le verrons au chapitre ?? page ?? !

Notons que dans ce type d'approche, basée sur l'équation d'Euler et la conservation de l'énergie, il n'existe pas de force de traînée puisqu'il n'y a pas de viscosité (voir § 4.5 page suivante). En effet sans viscosité il n'existe pas de vorticité, ni de couche limite, ni de décollement de couche limite, un phénomène pourtant capital pour expliquer la traînée et l'éventuel décrochage d'une aile.

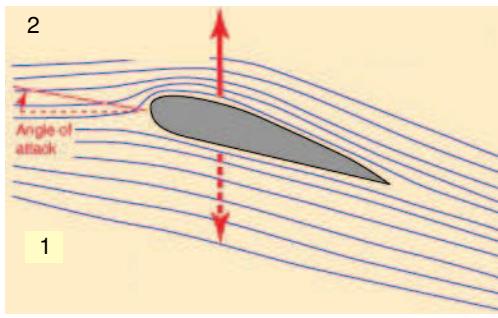


FIGURE 4.10 – Portance sur une aile en incidence. La portance exercée par l'air sur l'aile est égale et opposée à l'action de l'aile déviant l'air vers le bas.

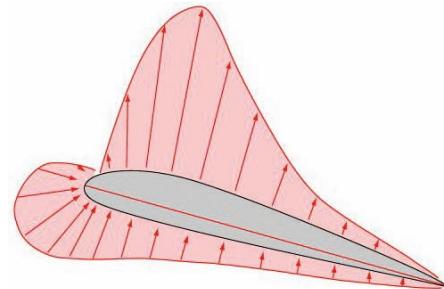


FIGURE 4.11 – Répartition réelle de pression autour d'une aile.

#### 4.4.3 Amplification des vagues par le vent

L'apparition des vagues sous l'action du vent peut se comprendre comme une instabilité (l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, voir 14.4 page 174) dont le mécanisme déstabilisant s'explique par l'équation de Bernoulli. En effet si on considère une interface air-eau légèrement déformée et que

I'on décrit les lignes de courant dans le référentiel qui se déplace avec les vagues (afin de pourvoir appliquer l'équation de Bernoulli stationnaire), le vent est accéléré au-dessus des crêtes, la pression y est donc plus faible. De même la vitesse du vent décroît au niveau des creux, la pression y est plus forte. Le même raisonnement peut être fait dans l'eau. En conséquence l'amplitude de toute déformation initiale de l'interface croît au cours du temps. Ce sont les forces de gravité et de tension de surface qui vont limiter l'amplitude des vagues mais surtout expliquer l'existence d'un seuil en vitesse pour cette instabilité, c'est-à-dire une vitesse du vent minimale pour que les premières rides apparaissent.

#### 4.4.4 Jet incident sur une plaque

**Exercice :** Calculer la force appliquée par un jet d'eau (bidimensionnel et horizontal), d'épaisseur  $h$  rencontrant une plaque plane inclinée d'un angle  $\alpha$  vis-à-vis de la verticale. Montrer que la force par unité de largeur perpendiculaire à la plaque  $F_{\perp}$  vaut :

$$F_{\perp} = \rho U^2 h \cos \alpha.$$

Que vaut la force tangentielle  $F_{\parallel}$  ?

### 4.5 Paradoxe de d'Alembert

On nomme paradoxe de d'Alembert le fait que dans le cadre de l'équation d'Euler il n'existe pas de force de traînée sur un obstacle (force dans le sens de l'écoulement appliquée par le fluide sur l'obstacle) pour un écoulement stationnaire, bien qu'on puisse calculer une portance. Les forces de traînée existent pourtant bien dans la réalité, mais elles sont dues à l'existence de couches limites (éventuellement décollées) qui changent la distribution de pression autour de l'obstacle par rapport au cas du fluide parfait.

Dans le cas d'une aile, le flux de quantité de mouvement est défléchi ce qui donne une portance, par contre il n'y a pas de perte de quantité de mouvement horizontale ce qui correspondrait à une force de traînée et donc à une dissipation d'énergie.

Notons toutefois qu'il existe par contre une force de traînée en régime instationnaire, qui correspond à la nécessaire variation de l'énergie cinétique des particules fluides. Cette force est appelée la force de *masse ajoutée*. Par exemple pour une sphère accélérée on trouve  $\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho V_0 \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$ , où  $V_0$  est le volume de la sphère.

Même en régime stationnaire il peut quand même exister une traînée en fluide parfait en présence d'ondes (sonores, de surface ou autres). En effet ces ondes peuvent rayonner de l'énergie vers l'infini. C'est le cas de la traînée de vague ressentie par un obstacle se déplaçant à la surface de l'eau (voir § 7.2.9 page 81).

**Exercice :** On considère un obstacle symétrique admettant des lignes de courant symétriques. En déduire que dans le cadre de l'équation d'Euler stationnaire la pression présente la même symétrie et que donc la traînée est nulle. On peut généraliser cette démonstration à des corps non-symétriques et ainsi démontrer le paradoxe de D'Alembert (voir [33] page 240 ou [4] page 404).



# Chapitre 5

## Analyse dimensionnelle et similitude

Marc Rabaud, version du 3 juin 2013

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Théorème <math>\pi</math> ou de Buckingham . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>5.2</b>	<b>Exemple de la traînée d'une sphère . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>5.3</b>	<b>Période des oscillations d'un pendule pesant . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>5.4</b>	<b>« Démonstration » du théorème de Pythagore . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>5.5</b>	<b>Questions et remarques . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>5.6</b>	<b>Notion de similitude . . . . .</b>	<b>49</b>
5.6.1	Similitude pour une maquette de navire . . . . .	49
5.6.2	Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ? . . . . .	49
5.6.3	Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ? . . . . .	49
5.6.4	Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ? . . . . .	50
5.6.5	Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ? . . . . .	51

---

Les mathématiciens et les physiciens théoriciens résolvent des équations adimensionnées dont les paramètres et les coefficients sont des nombres réels ou complexes. Pourtant concrètement le physicien cherche des relations entre des quantités qui ont une dimension ; des forces, des énergies, des viscosités, des tailles ou des masses volumiques par exemple. Ces dimensions sont toutes exprimables dans une base de dimensions, par exemple le Système International (SI), ou simplement masse, longueur et temps dans la plupart des applications en mécanique. Ce choix n'est pas unique, on peut par exemple préférer un système construit avec une force, une énergie, etc. Nous savons qu'une équation, pour avoir un sens, doit être « homogène en dimension ». Mais on peut aller un peu plus loin, et prédire à partir d'une hypothèse réaliste sur les paramètres pertinents la dépendance d'une quantité en fonction des autres variables et d'un certain nombre de « nombres sans dimension » dont la mécanique des fluides est si friande.

Présentons maintenant plus formellement la méthode de l'analyse dimensionnelle avant d'étudier un exemple au § 5.2 page 45.

### 5.1 Théorème $\pi$ ou de Buckingham

Traduit de l'article de Bernard Castaing [8], pages 62-64.

Il semble que l'analyse dimensionnelle ait été utilisée au moins depuis Galilée. Elle est utilisée depuis longtemps pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides, et c'est maintenant un outil courant en physique. [...]

L'idée de base est bien connue. Imaginons qu'une expérience ait été réalisée avec des conditions aux limites particulières et que tout ait été exprimé dans le Système International (SI ou MKSA). Pour l'exprimer en CGS nous multiplions simplement les nombres représentant les longueurs par  $10^2$ , les masses par  $10^3$ , les densités par  $10^{-3}$ . Mais imaginons que nous oublions de le faire et changions simplement le nom des unités. Notre résultat serait celui d'un nouveau problème où les longueurs seraient  $10^2$  fois plus petites, les masses  $10^3$  fois plus petites et les densités  $10^3$  fois trop grandes. En résolvant notre problème, nous avons donc résolu toute une classe de problèmes équivalents. En réalité ce n'est peut-être pas très utile car peu de liquides ont des densités  $10^3$  fois supérieures à celle de l'eau par exemple ! Certaines quantités doivent être maintenues constantes (la vitesse de la lumière par exemple) si elles ont quelques importances.

Formalisons cela en utilisant les travaux de Edgar BUCKINGHAM (Phys. Rev., **14**, 345 (1914)). Soit  $y_1, \dots, y_n$  les paramètres (conditions aux limites, quantités importantes) et  $y$  la quantité inconnue. Nous recherchons une relation mathématique :

$$y = f(y_1, \dots, y_n).$$

Soit  $A_1, \dots, A_m$  les  $m$  dimensions *indépendantes* ( $M$  pour la masse,  $T$  pour le temps,  $\dots$ ). Nous verrons que le nombre de dimensions indépendantes n'est pas déterminé de façon évidente mais supposons qu'il le soit. Alors les dimensions des  $y_i$  s'expriment en fonction des  $A_j$  :

$$[y_i] = A_1^{\alpha_{1i}}, \dots, A_m^{\alpha_{mi}}.$$

L'expression :

$$y_1^{x_1} y_2^{x_2} \cdots y_n^{x_n}$$

sera sans dimension si les  $m$  équations :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} x_i = 0$$

sont satisfaites. Nous pouvons alors former  $n - m$  quantités sans dimensions « indépendantes » :  $\pi_1, \dots, \pi_{n-m}$ . Prenons ces quantités comme nouveaux paramètres, et appelons  $y'_1, \dots, y'_m$  les paramètres restants. Ces  $y'_i$  ont des dimensions indépendantes et il existe des exposants  $\beta_i$  tels que :

$$[y] = [y'_1]^{\beta_1} \cdots [y'_m]^{\beta_m}.$$

Alors l'expression

$$\pi = y y'_1'^{-\beta_1} \cdots y'_m'^{-\beta_m}$$

est sans dimension et est une fonction de tous les paramètres :

$$\pi = h(y'_1 \cdots y'_m, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ni  $\pi$ , ni les valeurs de  $\pi_i$  ne dépendent du système d'unité. Nous pouvons donc choisir ces unités pour que tous les  $y'_i = 1$  et :

$$\pi = h(1 \cdots 1, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}) = g(\pi_1, \dots, \pi_{n-m}).$$

Ceci est le théorème de Buckingham : une quantité inconnue sans dimension peut uniquement dépendre des nombres sans dimension formés à partir des paramètres. Le cas le plus intéressant correspond au cas où on ne peut former aucun paramètre sans dimension. Alors la fonction  $g$  est une constante  $g_0$  et le problème est entièrement résolu à cette constante multiplicative près :

$$y = g_0 y_1'^{\beta_1} \cdots y_m'^{\beta_m}.$$

[...]

On peut choisir autant de dimensions indépendantes que l'on veut. Cela introduit simplement des facteurs de conversion qui agissent comme de nouveaux paramètres. Cela n'a pas d'intérêt sauf si l'on sait que ces facteurs ne peuvent pas intervenir dans le problème. Par exemple, on considère habituellement que le temps et une longueur ont des dimensions différentes. Pourtant, à cause de la théorie de la relativité, c'est artificiel et cela introduit un « facteur de conversion » qui est la vitesse de la lumière. En mécanique classique, nous savons que ce paramètre ne va pas intervenir, ce qui donne tout son intérêt à distinguer le temps et l'espace.

- **Attention,** l'analyse dimensionnelle est un outil extrêmement puissant, mais aussi très dangereux ! Si l'on oublie ou si l'on se trompe sur le choix des variables physiques à considérer le résultat devient faux. Le « sens physique » doit permettre de sélectionner les variables indépendantes pertinentes.

## 5.2 Exemple de la traînée d'une sphère

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple concret. On cherche à calculer la force de traînée d'une sphère dans un liquide visqueux. On recherche une solution stationnaire  $F_D$  du problème. De quoi peut-elle dépendre ? Certainement du rayon  $R$  de la sphère, de la vitesse  $U$  de déplacement de l'obstacle par rapport au liquide et de la viscosité  $\nu$  du liquide (cette propriété sera décrite dans le module 9) quantité qui différentie par exemple le mouvement dans l'eau du mouvement dans du miel. L'analyse dimensionnelle nous donne :

- dimension de  $R$ , une longueur. Ce que l'on note  $[R] = L$ .
- $[U] = L/T$  où  $T$  est un temps.
- $[\nu] = L^2/T$ .
- $[F_D] = ML/T^2$  où  $M$  est une masse.

Comme il n'y a pas de masse dans les trois premières variables on ne peut pas avoir d'équation du type  $F_D = f(R, U, \nu)$ . Il y a forcément une autre variable contenant une unité de masse qui intervient dans le problème. Peut-être la masse volumique  $\rho$  du fluide. Attention si l'on met ici autre chose comme la masse volumique de la sphère, ou sa masse, ... on peut trouver des résultats justes au niveau des dimensions mais incorrects au point de vue de la physique. L'intuition physique a donc beaucoup d'importance à ce niveau. Formellement on peut tout à fait mettre ici la masse de l'expérimentateur, ou même celle de sa belle-mère, mais ce n'est pas forcément pertinent !

Supposons donc que nous écrivions que  $F_D = f(R, U, \nu, \rho)$  nous aurons donc à satisfaire l'équation aux dimensions  $[F_D] = [R]^\alpha [U]^\beta [\nu]^\gamma [\rho]^\delta$  soit  $ML/T^2 = L^\alpha (L/T)^\beta (L^2/T)^\gamma (M/L^3)^\delta$ . Ce qui nous donne un système de 3 équations et 4 inconnues, avec par exemple comme solution  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 2 - \alpha$ ,  $\beta = \alpha$  avec  $\alpha$  libre. On peut donc écrire

$$F_D = R^\alpha U^\alpha \nu^{2-\alpha} \rho F(Re)$$

où  $Re = \frac{U2R}{\nu} = \frac{UD}{\nu}$  est appelé le nombre de Reynolds et c'est le seul nombre sans dimension que l'on peut fabriquer avec les variables  $R, U, \nu, \rho$  (vérifiez-le). Pour  $\alpha = 2$  on peut écrire une forme équivalente plus simple :

$$F_D = \rho U^2 R^2 F'(Re).$$

On définit souvent le coefficient de traînée (sans dimension),  $C_D$  parfois aussi appelé  $C_x$  en français par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A},$$

où  $A = \pi R^2$  est l'aire de la section de l'obstacle.

Notre analyse dimensionnelle nous prédit que  $C_D = f(Re)$ . C'est en effet ce que l'on observe expérimentalement (figure 5.1). A faible nombre de Reynolds on démontrera (§10.4.2) le résultat exact  $C_D = 24/Re$ . Ceci montre que la force de traînée  $F_D$  augmente d'abord comme la vitesse à faible  $Re$  puis comme le carré de la vitesse lorsque  $C_D \approx \text{cste}$ , sauf au moment du décrochement appelé crise de traînée pour  $Re \approx 400\,000$ .

Lorsque le Reynolds n'est pas très petit devant l'unité, Oseen a calculé le terme correcteur (valable si  $Re \leq 5$ ) :  $C_D = \frac{24}{Re}(1 + \frac{3}{16}Re)$ .

Il existe ensuite des formules empiriques approchées qui donnent d'assez bon résultats jusqu'à la crise de traînée ( $Re \leq 400\,000$ ) par exemple la relation de White :

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{6}{1 + \sqrt{Re}} + 0,4.$$

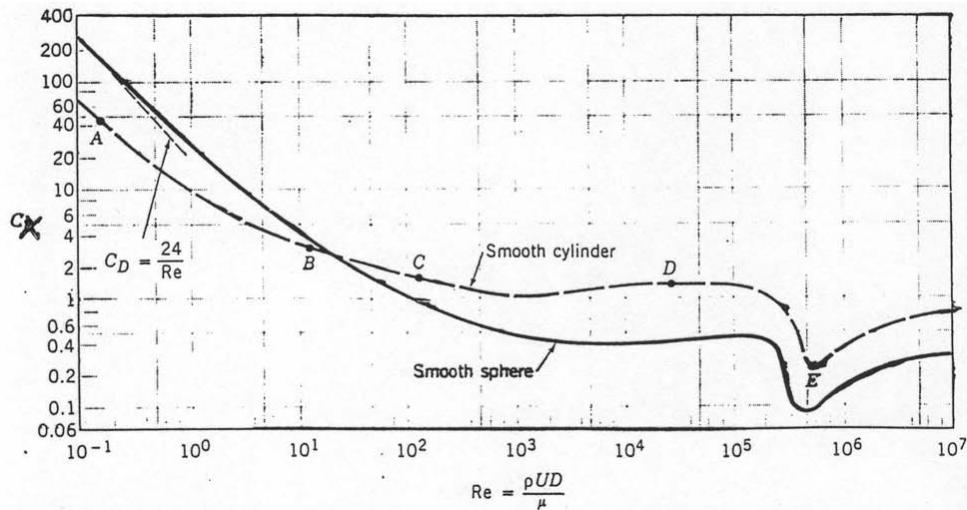


FIGURE 5.1 – Evolution de la traînée adimensionnée d'une sphère ou d'un cylindre par unité de longueur en fonction du nombre de Reynolds. Noter les échelles logarithmiques. D'après Réf. [2] page 441.

• Applications :

- Calculer la traînée sur une balle de tennis à 200 km/h.  $R = 33 \text{ mm}$ ,  $\nu_{air} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho_{air} = 1,29 \text{ Kg/m}^3$ . Comparer au poids de la balle ( $M = 50 \text{ g}$ ).

Notons que si la sphère n'est pas lisse (cas d'une balle de golf par exemple, du duvet de la balle de tennis) il apparaît au moins une nouvelle variable sans dimension (par exemple le rapport rugosité/rayon comme sur la figure 5.2).

De même s'il existe plus d'une dimension (un ellipsoïde de révolution plutôt que sphère par exemple) alors l'analyse dimensionnelle prédit l'existence d'au moins un autre nombre sans dimension, par exemple le rapport grand axe sur petit axe  $a/b$  si on a affaire à une ellipsoïde de révolution. Ensuite le problème peut aussi dépendre de l'angle  $\alpha$  entre l'axe de l'ellipsoïde et l'écoulement. Alors on aura  $C_D = f(Re, a/b, \alpha)$ .

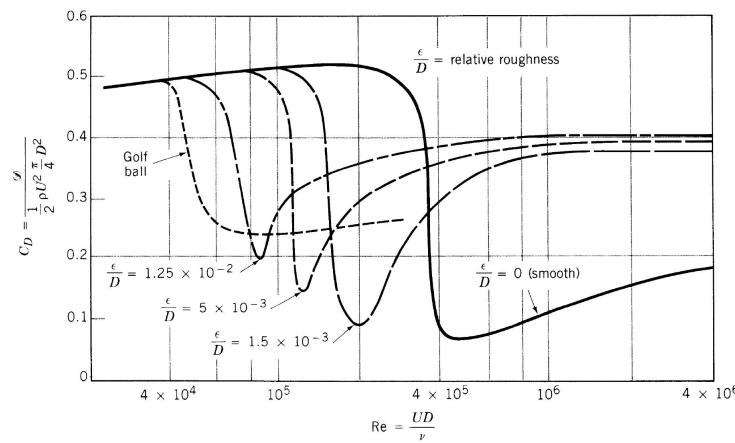


FIGURE 5.2 – Effet de la rugosité sur la crise de traînée d'une sphère. D'après Réf. [2].

- Calculer le fardage (force de traînée) dû au mât de 20 mètres de haut d'un voilier dans un vent de 30 Nœuds ( $\approx 60$  km/h) si  $R = 10$  cm (le  $C_D$  d'un cylindre est environ le double de celui d'une sphère dans cette gamme de nombre de Reynolds).
- Calcul de la traînée sur une plaque plane infiniment mince. Pour une plaque mince de largeur  $b$  et de longueur  $l$  (dans le sens de l'écoulement) on pose  $C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f(Re, b/l)$ , où  $A = b \times l$  et  $Re = Ul/\nu$ . On suppose que  $b \ll l$ . Pour  $Re < 10^5$  on trouve expérimentalement  $C_D = 1,33 Re^{-1/2}$  et pour  $Re > 10^6$  on trouve  $C_D^{1/2} \log(Re C_D) \approx 0,242$  ([7] p. 307). Calculer la force de traînée sur la quille d'un monocoque de type *60 pieds open*. On prendra  $b = 3$  m,  $l = 0,5$  m,  $U = 10$  Nœuds,  $\rho = 10^3$  kg/m<sup>3</sup> et  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s. On trouve alors  $C_D \approx 3,710^{-3}$  et  $F_D = 73N$ . On trouverait certainement nettement plus en tenant compte de l'incidence non nulle de la quille.
- En ces temps de records... En athlétisme et particulièrement pour un 100 mètres il paraît que l'on ne peut espérer battre un record du monde par temps froid. Ceci est sans doute dû à l'augmentation de la force de traînée avec une baisse de température. En effet de 30°C à 10°C, la masse volumique de l'air  $\rho_{air}$  augmente d'environ 10 % ce qui augmente d'autant la force de traînée  $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$ .
- Toujours en athlétisme la plupart des records ne sont validés que si le vent favorable est inférieur à 2 m/s. Regardons l'effet sur la force de traînée d'un vent favorable de 2 m/s. Un coureur de 100 m a une vitesse de l'ordre de 100 m/ 10 s = 10 m/s. Il a donc selon qu'il y a du vent ou pas une vitesse relative de 8 ou 10 m/s. Comme la force de traînée  $F_D = \frac{1}{2}\rho U^2 A C_D$  varie comme le carré de la vitesse apparente, la force de traînée avec un vent dans le dos de 2 m/s est près de 40% plus faible que sans vent. C'est donc un énorme avantage.

### 5.3 Période des oscillations d'un pendule pesant

Soit un pendule constitué d'une masse ponctuelle  $m$  pouvant osciller librement sous l'action de la gravité au bout d'une tige de longueur  $l$ . On recherche une expression pour la période  $T$  des oscillations.

1. Si l'on suppose que  $T = f(l)$  uniquement, l'analyse dimensionnelle nous montre que c'est impossible.
2. Si l'on suppose que  $T = f(l, g)$  l'analyse dimensionnelle prédit que  $T \propto \sqrt{l/g}$  ce qui n'est pas mal du tout sachant que le résultat exact pour de petites oscillations est  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  !
3. Si l'on suppose que  $T = f(l, g, a)$  où  $a$  est l'amplitude horizontale des oscillations on trouve  $T = \sqrt{l/g} F(a/l)$ .
4. Si l'on suppose que  $T = f(l, g, m)$  on trouve que  $T$  ne peut pas dépendre de  $m$  sans dépendre d'autres variables faisant intervenir la dimension d'une masse.
5. Enfin si l'on suppose que  $T = f(l, g, m, \eta, a)$  où  $\eta$  est la viscosité de l'air, on voit apparaître d'autres nombres sans dimension possibles.

### 5.4 « Démonstration » du théorème de Pythagore

(D'après [42] page 17.)

Soit un triangle ABC rectangle et appelons B le sommet dont l'angle est le plus petit, et AH la hauteur passant par A et coupant BC en H. Soit  $a$  la longueur du segment BC,  $b$  la longueur de AC et  $c$  celle de AB. La surface du triangle ABC est donc la somme de la surface du triangle ACH et celle du triangle AHB :  $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$ . De plus appelons  $\alpha$  le plus petit angle du triangle, ici l'angle  $\widehat{ABC}$ . Nous retrouvons ce même angle pour  $\widehat{CAH}$ . Nous supposerons enfin que tout triangle rectangle est parfaitement défini par la connaissance de son hypoténuse et par la valeur de son plus petit angle. Pour respecter l'analyse dimensionnelle, la surface de tout triangle rectangle est alors égale au carré de son hypoténuse multiplié par une fonction de ce plus petit angle. Nous avons donc  $S_{ABC} = a^2 f(\alpha)$ , mais aussi  $S_{ACH} = b^2 f(\alpha)$  et  $S_{AHB} = c^2 f(\alpha)$ . Comme  $S_{ABC} = S_{ACH} + S_{AHB}$ , il vient :  $a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha)$  soit  $a^2 = b^2 + c^2$  puisque  $f(\alpha)$  est une constante non nulle ! Nous avons démontré le théorème de Pythagore grâce à l'analyse dimensionnelle !

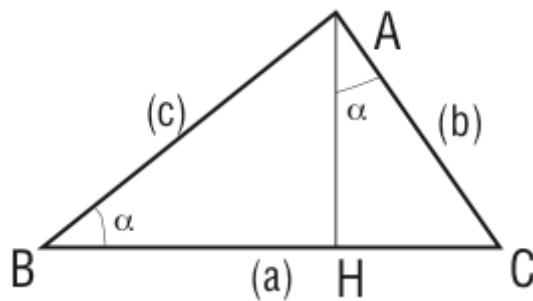


FIGURE 5.3 – Démonstration du théorème de Pythagore.

## 5.5 Questions et remarques

– Pourquoi est-ce toujours une loi de puissance qui apparaît entre les variables dans le théorème II ? Parce que toute fonction peut s'exprimer localement comme la somme d'une série de termes en loi de puissance des différentes variables (développement limité) et que chaque terme doit alors satisfaire l'analyse dimensionnelle.

– Combien doit-on choisir de dimensions indépendantes ? Généralement on en choisit 4 dans le Système International (SI anciennement MKSA, pour mètre, kilogramme, seconde et ampère). Mais c'est un choix relativement arbitraire. Deux dimensions sont indépendantes tant qu'il n'existe pas, dans le problème considéré, de lien physique entre ces deux dimensions. Par exemple masse et énergie ne sont plus des dimensions indépendantes en physique des particules puisque  $E = mc^2$  (surtout si l'on fait  $c = 1$ !). Par contre chaleur et travail peuvent être deux dimensions indépendantes si dans le problème considéré il n'y a pas transformation entre les deux types d'énergie.

## 5.6 Notion de similitude

On dit que deux problèmes sont similaires s'ils sont gouvernés par les mêmes nombres sans dimension. Par exemple s'ils ont le même rapport d'aspect (même rapport de taille). Alors résoudre l'un des problèmes, c'est aussi résoudre l'autre. Prenons quelques exemples.

### 5.6.1 Similitude pour une maquette de navire

Le sillage d'un bateau et en particulier la traînée que l'eau exerce sur la coque peut être décomposée en plusieurs termes, en particulier la traînée de forme — caractérisé par le coefficient  $C_D = f(Re)$  — et la traînée de vague — caractérisée par un coefficient  $C_{vague} = f(Fr)$  où  $Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$  est le nombre de Froude. La traînée de vague correspond à l'énergie transportée à l'infini par les ondes de surface. Pour faire une maquette en similitude, il conviendrait de choisir une échelle de réduction de toutes les dimensions géométriques et d'avoir le même nombre de Reynolds et le même nombre de Froude pour bien respecter la part relative de traînée de forme et de traînée de vague. Mais on vérifie aisément que c'est impossible, en tout cas en conservant l'eau comme fluide porteur et sans modifier  $\vec{g}$  ! Lorsque l'on fait des essais de traction sur maquette en bassin d'essais de carène il convient de travailler soit en « similitude de Reynolds » soit en « similitude de Froude ».

### 5.6.2 Pourquoi les enfants marchent-ils facilement pieds-nus sur les gravillons ?

Si on suppose les enfants et les adultes homothétiques, leur poids est proportionnel à leur volume  $L^3$  alors que la surface des pieds est proportionnelle à  $L^2$ . En conséquence la pression exercée par les gravillons sur la plante des pieds est proportionnelle à  $L$ . Plus on est grand, plus ça fait mal !

### 5.6.3 Pourquoi un animal de 50 m de haut ne peut-il exister sur Terre ?

Là aussi si on fait croître de façon homothétique (sans changer la forme) la taille d'un animal, son poids augmente comme  $L^3$  alors que la section de ses fémurs par exemple croît comme  $L^2$ . La contrainte de compression sur chaque fémur augmente donc comme  $L$ . S'il existe une contrainte maximale avant rupture de l'os, il existe une taille maximum pour cette espèce d'animaux.

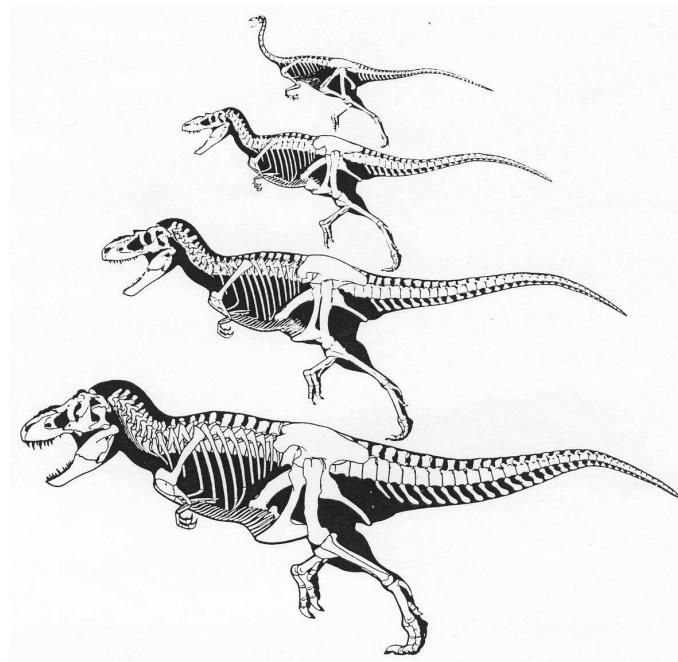


FIGURE 5.4 – Comparaison des tailles et donc des rapports d’aspect des squelettes de théropodes. Du plus petit au plus grand, un ornithomimus (165 kg), deux tyrannosaures (750 kg et 2500 kg) et un tyrannosaure rex (6000 kg). D’après [32] p. 126.

En l’occurrence, un fémur de mammouth n’est pas homothétique à un fémur de héron, et la figure 5.4 montre que les os de théropodes (dinosaures sans doute ancêtres des oiseaux) ne sont pas homothétiques lorsque l’on passe du plus petit (160 kg) au plus gros (6000 kg).

#### 5.6.4 Pourquoi les animaux sautent-ils tous à peu près à la même hauteur ?

(D’après [40] p. 53 et [32] p. 209). Tous les animaux sautent de l’ordre de 1 mètre, et même si c’est 2m45 pour le champion Sotomayor ce n’est pas 10 mètres ni 10 centimètres. L’ordre de grandeur est donc le mètre. Et ceci est aussi vrai pour une puce qui saute de l’ordre de 400 fois sa hauteur. Pourquoi ?

Le poids varie comme  $L^3$  et l’énergie mécanique à fournir pour atteindre une hauteur  $h$  est  $E = mgh \sim L^3 h$ . Or la force que peut développer un muscle, ici les cuisses, est au premier ordre proportionnel à sa section ( $L^2$ ) alors que le travail  $W$  qu’il peut fournir est le produit de la force par le déplacement (ici la contraction du muscle proportionnel à sa longueur  $L$ ), soit  $W \sim L^2 \times L = L^3$ . L’égalité  $E = W$  conduit à une hauteur  $h$  de saut indépendante au premier ordre de la taille de l’animal  $L$  !

Au deuxième ordre, les puces sautent plutôt de l’ordre de 20 cm et les léopards de 2m50. On peut penser au frottement de l’air pour diminuer les performances des puces, mais le calcul montre que cela conduit seulement à une diminution de 10 %. Par contre l’accélération que peuvent supporter les animaux est peut-être en cause. En effet les animaux sauteurs comme les félin sont une poussée très longue (pattes arrières qui se déplient). Si les animaux sautent à la même hauteur  $h$ , ils ont la même vitesse de décollage  $V$  donné par  $\frac{1}{2}mV^2 = mgh$ . D’autre part la durée de la poussée est de

l'ordre de  $\tau = L/V$ . Leur accélération est donc  $a \sim V/\tau \sim V^2/L \sim h/L$ . En sautant à la même hauteur, les animaux ne subissent pas du tout la même accélération, les plus petits sont soumis à la plus forte accélération. On trouve pour une puce une accélération de l'ordre de  $300g$  ce qui doit poser d'important problème aux structures internes !

### 5.6.5 Pourquoi les sociétés de fourmis n'ont-elles pas inventé le feu ?

On peut montrer que la combustion à l'air libre met en jeu des processus de diffusion de l'oxygène qui font que la taille minimum d'une flamme est de l'ordre de 2 à 3 millimètres (c'est d'ailleurs visible au moment où une allumette s'éteint, la taille de la flamme ne diminue pas continuement jusqu'à zéro). Et une fourmi ne peut pas s'approcher suffisamment d'une flamme si gigantesque à son échelle pour l'alimenter sans se brûler gravement. C'est peut-être pour cela qu'elles n'ont pas « inventé » le feu ! Plus sérieusement c'est pour le même genre de raison qu'une goutte d'eau est mortelle pour une fourmi et qu'elles ne se lavent qu'à sec en se frottant les pattes avec de la poussière. Un fois mouillées elles ne peuvent pas vaincre la tension de surface et sortir de la goutte comme on peut le voir dans le film *Microcosmos* de Francis Perrin.



# Chapitre 6

## La tension de surface

Marc Rabaud, version du 15 mars 2013

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Origine microscopique</b>	54
<b>6.2</b>	<b>La loi de Laplace</b>	56
<b>6.3</b>	<b>Angle de mouillage macroscopique</b>	57
6.3.1	Loi d'équilibre d'Young-Dupré	58
6.3.2	Hystérésis de l'angle de contact	59
<b>6.4</b>	<b>Effet de la gravité et longueur capillaire</b>	59
<b>6.5</b>	<b>La mesure de la tension superficielle</b>	60
6.5.1	La loi de Jurin	60
6.5.2	Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy	62
6.5.3	Méthode de la goutte pendante	62
6.5.4	Méthode de la goutte tournante	62
<b>6.6</b>	<b>Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)</b>	62
<b>6.7</b>	<b>Les tensioactifs</b>	63
6.7.1	Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?	63
6.7.2	Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux membranes d'eau ?	64
<b>6.8</b>	<b>Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface</b>	64

---

A petite échelle les forces de tension aux interfaces ne peuvent souvent plus être négligées devant les autres forces, la gravité par exemple. Ce sont elles par exemple qui expliquent comment les araignées d'eau marchent sur l'eau (figure 6.1) ou pourquoi nos cheveux sont collés entre eux en sortant de l'eau (figure 6.2). Le phénomène existe à toutes les interfaces de deux corps immiscibles (qui ne se mélangent pas) : solide/solide ou solide/liquide ou solide/gaz ou liquide/liquide ou liquide/gaz. C'est-à-dire dans tous les cas où il existe une frontière nette entre deux milieux. Par contre la tension de surface est nulle entre deux liquides miscibles ou deux gaz : par agitation thermique les molécules des deux milieux se mélangent, il n'y a pas à terme de séparation de phase. Nous devons donc tenir compte de cette force aux interfaces.



FIGURE 6.1 – Un gerris posé à la surface d'un étang.



FIGURE 6.2 – Effet des forces capillaires sur un pinceau sec, immergé ou mouillé. (D'après [44], p. 12).

## 6.1 Origine microscopique

Les phénomènes de tension de surface, aussi appelés phénomènes capillaires ou interfaciaux trouvent leur origine dans les forces intermoléculaires attractives qui existent dans toute phase condensée de la matière. Une molécule loin de toute surface a de nombreuses voisines (entre 6 et 10 premières voisines) donc une forte énergie d'interaction. Par contre une molécule en surface a moitié moins de voisines de son espèce, donc moitié moins d'énergie d'interaction (figure 6.3). Tout se passe comme s'il avait fallu casser un certain nombre de liaisons, ce qui a un coût en énergie. L'énergie  $E_S$  pour fabriquer une surface  $S$  est égale à ce coût par molécule multiplié par le nombre de molécules en surface (lui-même proportionnel à la surface  $S$ ). On peut donc écrire :

$$E_S = \gamma S. \quad (6.1)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\gamma$  s'appelle la tension de surface ou tension interfaciale. C'est une énergie par unité de surface (grandeur intensive) mais, comme nous le verrons, ce coefficient peut aussi être interprété comme une force par unité de longueur. La tension de surface s'exprime en  $J/m^2$  ou en  $N/m$ .

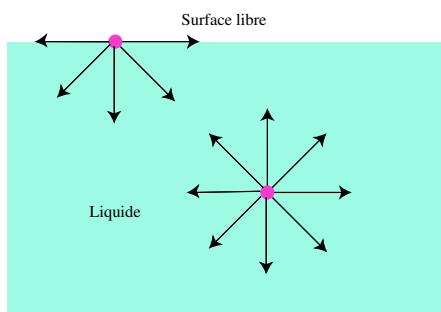


FIGURE 6.3 – Différence entre les forces d'interaction entre molécules à la surface et au sein d'un liquide.



FIGURE 6.4 – Effet des forces capillaires en apesanteur sur le whisky du capitaine Haddock dans *On a marché sur la lune*.

$\gamma_{air-eau}$	72 mN/m
$\gamma_{Hg-air}$	490 mN/m
$\gamma_{éthanol-air}$	22 mN/m
$\gamma_{éthanol-huilesilicone}$	0,7 mN/m

TABLE 6.1 – Quelques ordres de grandeur de tension interfaciale à 20°C

Le cas de l'eau : l'eau très pure a une tension de surface relativement forte (environ 72 mN/m) comparativement à d'autres liquides usuels. Mais c'est en réalité une valeur asymptotique car, dès qu'elle est en contact avec l'atmosphère, de nombreuses particules vont se déposer progressivement à la surface et en quelques minutes ou heures la tension de surface vaut plutôt de l'ordre de 50 mN/m. C'est aussi l'ordre de grandeur de la tension de surface que l'on mesure pour l'eau du robinet.

Afin de minimiser son énergie  $E_S$ , un fluide va avoir tendance à minimiser sa surface et donc à prendre une forme sphérique en l'absence d'autres contraintes comme la gravité (figure 6.4). De même une membrane de savon portée par un contour va réaliser une *surface minimale*, c'est-à-dire une surface portée par un contour dont l'aire est la plus faible possible (figures 6.5 et 6.6).

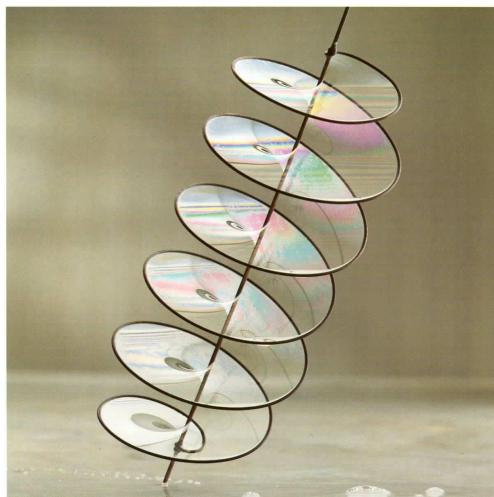


FIGURE 6.5 – Exemple de surface minimale portée par une hélice et son axe [44].



FIGURE 6.6 – La caténoïde, surface minimale portée par deux anneaux [44].

La figure 6.7 illustre le fait qu'il existe une force qui tend à minimiser la surface de la membrane de savon et qui conduit à une surface dont l'aire est minimale. En tirant avec une force  $f$  sur la ficelle centrale on fournit un travail  $dW = f dl = \gamma dS$  et l'on peut donc augmenter la surface. Cette action est réversible.

La surface d'un liquide est donc un lieu de contrainte. Tout segment  $\vec{dl}$  de cette surface est soumis à deux forces égales et opposées si la surface est à l'équilibre et dirigées dans le plan de la membrane et perpendiculairement à l'élément de longueur considéré :

$$\vec{df} = \pm \gamma (\vec{n} \wedge \vec{dl}). \quad (6.2)$$

où  $\vec{n}$  représente la normale à la surface. On peut facilement rompre cet équilibre en diminuant localement la tension de surface, par exemple si le liquide est de l'eau en touchant la surface avec du savon ce qui à pour effet de diminuer localement la tension de surface (voir §6.7). L'équilibre est alors rompu et le fluide en surface se déplace brutalement radialement vers la zone de plus forte tension de surface.

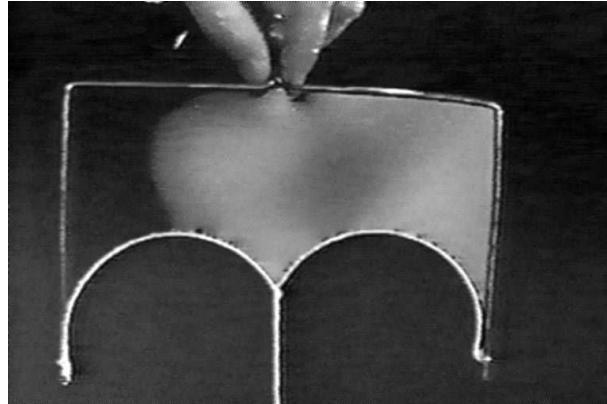


FIGURE 6.7 – Démonstration de l'existence des forces capillaires. Les deux bouts de la ficelle sont en forme d'arcs de cercle. Pourquoi ?

**Exercice :** On s'intéresse à l'ouverture rapide d'un trou dans une membrane de savon horizontale sous l'action de la tension de surface. En supposant que toute la masse se retrouve dans un bourrelet montrer que rapidement ce bourrelet avance à vitesse constante dite de Taylor-Culick que l'on calculera. Ref. : Culick, F.E.C. 1960 Comment on a ruptured soap film. J. Appl. Phys. 31 1128-1129.

## 6.2 La loi de Laplace

Si une surface est courbée, les contraintes de traction existant sur la surface ont une composante non nulle dans la direction normale à la surface et orientée vers le centre de courbure, c'est-à-dire du côté concave de la surface. A l'équilibre, cette force normale doit être compensée par une pression plus forte du côté intérieur que du côté extérieur.

Prenons l'exemple d'une goutte sphérique que nous allons couper en deux par la pensée (figure 6.8). La force dirigée vers le haut due à la surpression à l'intérieur de la goutte,  $\Delta P \pi R^2$ , doit être égale à la somme des forces de tension de surface sur l'équateur  $\gamma 2\pi R$ . Soit pour une goutte sphérique :

$$\Delta p = p_{int} - p_{ext} = 2 \frac{\gamma}{R}.$$

Dans le cas général on montre que la loi de Laplace, formulée pour la première fois en 1806 par Pierre-Simon de Laplace, s'écrit en chaque point d'une surface courbée :

$$p_i - p_j = \gamma \left[ \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right]. \quad (6.3)$$

où  $R'$  et  $R''$  sont les deux rayons de courbure de la surface en ce point, comptés positivement lorsque leur centre de courbure se trouve du côté  $i$ . En effet, pour tout point d'une surface lisse, on peut définir la normale et donc des plans contenant cette normale. Chacun de ces plans coupe la

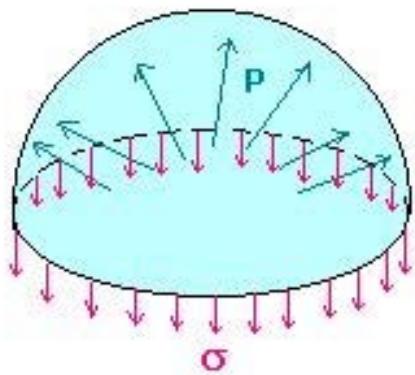


FIGURE 6.8 – Illustration de l'effet de la surpression de Laplace  $\Delta p$  sur une goutte coupée en deux par la pensée.

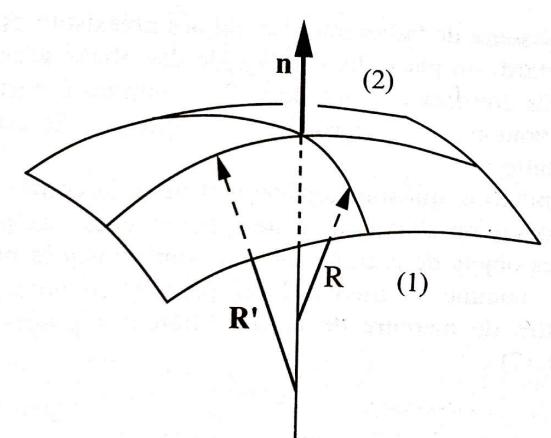


FIGURE 6.9 – Notion de rayon de courbure, d'après [25] p. 46.

surface selon une courbe dont on peut déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure (figure 6.9). Pour une courbe  $y = f(x)$ , la courbure (inverse du rayon de courbure) qui caractérise la rotation du vecteur tangent lorsqu'on se déplace sur la courbe est donnée par la relation :

$$C = 1/R = \frac{y''}{(1 + y')^{3/2}}.$$

Les deux rayons  $R'$  et  $R''$  doivent être mesurés dans deux plans perpendiculaires [4]. On montre que la somme de ces rayons de courbure, appelée **courbure géométrique** ou **courbure moyenne** ( $1/R' + 1/R''$ ), est indépendante du choix des deux plans perpendiculaires, c'est un invariant de la surface.

Notons qu'une surface peut avoir une courbure nulle, c'est le cas d'un point-selle (aussi appelé point-col). En effet les rayons de courbure sont des quantités algébriques, comptées positives si le centre de courbure est situé du côté identifié par la lettre  $i$ . Dans le cas du point-selle les pressions de chaque côté de la surface sont égales. Les figures 6.5 et 6.6 sont des exemples de surface de courbure nulle en tout point et donc de surface minimale.

En conséquence de la loi de Laplace, plus une goutte est petite plus le fluide à l'intérieur est à une pression élevée. Les petites bulles sont donc bien sphériques et peu déformables. Attention, pour les bulles de savon, la tension de surface agit des deux côtés des membranes (il y a en effet deux surfaces eau-gaz). Il apparaît donc un facteur 2 dans la relation de Laplace :  $\Delta P = 4\gamma/R$ . Cette surpression dans les petites bulles a de nombreuses conséquences, par exemple pour l'initiation de la cavitation, de l'ébullition ou de la formation de brouillards.

### 6.3 Angle de mouillage macroscopique

Dans de nombreuses situations, trois phases, solide-liquide-gaz par exemple, sont présentes et leur frontière est une ligne nommée **ligne triple**. Si la ligne triple est stable, les trois forces interfaciales doivent s'équilibrer.

Prenons le cas d'une goutte liquide posée sur un substrat et notons  $\theta$  l'angle de contact mesuré dans la phase liquide (figures 6.10 et 6.11). La goutte peut s'étaler plus ou moins sur le support, on

dit qu'on est en situation **mouillante** si  $\theta$  est faible, en situation de **mouillage partiel**, ou encore en situation **non mouillante** si  $\theta$  est élevé ( $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ).

Un exemple historique de mouillage total est l'expérience de Benjamin Franklin qui en 1750 versa une cuillère d'huile d'olive sur un étang dans les environs de Londres. Il observa une disparition des rides créées par le vent sur une surface importante de l'étang et Rayleigh put 100 ans après en déduire une estimation très raisonnable de la taille des molécules.

L'angle  $\theta$  est appelé l'angle de mouillage apparent ou angle macroscopique. En effet il n'est pas forcément défini au niveau microscopique (il peut par exemple exister un film précurseur [15] dont l'épaisseur de l'ordre de quelques molécules est contrôlé par la pression de disjonction).

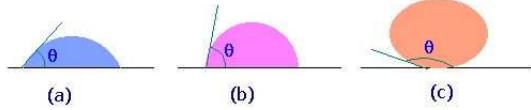


FIGURE 6.10 – Liquide partiellement mouillant une paroi et de moins en moins mouillant de (a) à (c).

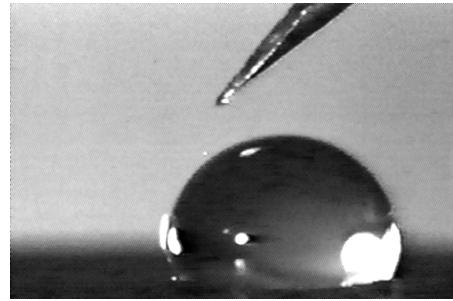


FIGURE 6.11 – Goutte d'eau sur une surface ciree.

### 6.3.1 Loi d'équilibre d'Young-Dupré

Pour une goutte posée sur une surface solide indéformable, l'équilibre des forces sur une longueur  $dl$  de la ligne triple de contact et dans le plan tangent à la surface s'écrit (figure 6.12) :

$$\sum df = \gamma_{SL} dl + \gamma_{LG} \cos \theta dl - \gamma_{GS} dl = 0,$$

Où  $\gamma_{ij}$  est la tension de surface entre la phase  $i$  et  $j$ . Soit :

$$\boxed{\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta = \gamma_{GS}.} \quad (6.4)$$

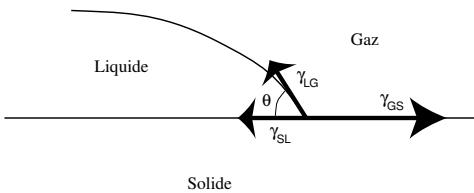


FIGURE 6.12 – Equilibre des forces de tension de surface au niveau de la ligne triple pour une goutte posée sur une surface solide (relation d'Young-Dupré).

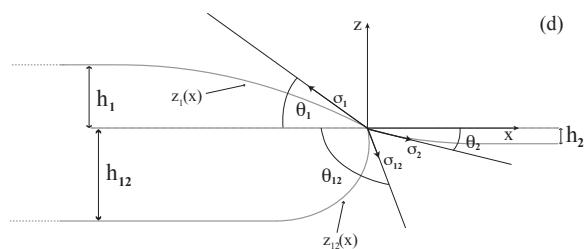


FIGURE 6.13 – Même condition d'équilibre pour une goutte posée sur un autre liquide.

C'est la loi d'Young-Dupré. Comme

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}},$$

l'angle  $\theta$  n'est pas défini si  $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} < -1$ , on parle alors de **non mouillage** ( $\theta = 180^\circ$ ), ou si  $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} > 1$  et l'on parle alors de **mouillage total** ( $\theta = 0^\circ$ ). Dans le premier cas  $\gamma_{LS} > \gamma_{SG} + \gamma_{LG}$  et le système préfère minimiser l'aire de contact liquide-solide qui coûte trop en énergie. On parle alors de mouillage nul. C'est ce que l'on essaye de réaliser sur des vêtements imperméables en les enduisant de produit déperlant ou dans le fond des poèles en utilisant des revêtements anti-adhésifs. Dans le second cas  $\gamma_{SG} > \gamma_{SL} + \gamma_{LG}$  le contact solide-gaz coûte beaucoup d'énergie et c'est le liquide qui va séparer les deux phases. C'est ce que l'on appelle le **mouillage total**. C'est par exemple le cas d'une goutte d'huile sur du verre propre. On peut aussi introduire le paramètre d'étalement  $S$  qui, s'il est positif, prédit l'étalement du liquide :

$$S = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma_{LG}.$$

Note : La composante transverse appliquée par l'interface gaz-liquide  $\gamma_{LG} \sin \theta$  sur la surface solide est en général équilibrée par la rigidité de ce solide mais on peut parfois observer une légère déformation pour des gels très souples. Dans le cas où l'on a deux liquides et un gaz, par exemple une lentille d'huile à la surface de l'eau, il n'existe pas un tel plan de contact. Il faut alors aussi écrire l'équilibre des forces verticales (figure 6.13).

### 6.3.2 Hystérésis de l'angle de contact

L'angle de contact dépend en général du mouvement présent ou passé de la goutte. S'il est mesuré pendant le mouvement de la goutte on parle d'angle de contact dynamique. Il augmente avec la vitesse d'avancée et pour des faibles angles on peut montrer qu'il avance comme la racine cubique de la vitesse. L'hystérésis de l'angle de contact au repos est particulièrement visible pour une goutte de pluie accrochée sur un pare-brise de voiture. Le fait que la goutte ne glisse pas malgré la pente impose que l'angle au bord le plus haut de la goutte soit plus faible qu'en bas. Cette différence d'angle est liée à l'existence de rugosités, d'impuretés physiques ou chimiques sur la surface.

## 6.4 Effet de la gravité et longueur capillaire

Si l'on observe une grosse goutte posée sur une surface horizontale, elle n'a pas une forme sphérique, elle est aplatie. Il existe un compromis entre la gravité qui tend à abaisser le centre de gravité de la goutte et la tension de surface qui tend à rendre la goutte sphérique (figure 6.14). Ce compromis est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Bond, rapport de l'énergie de gravité sur l'énergie de tension superficielle :

$$Bo = \frac{\rho g}{\gamma} R^2.$$

Ce nombre de Bond est aussi le rapport de deux longueurs  $Bo = (R/l_c)^2$ . La longueur

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (6.5)$$

est appelée *longueur capillaire*. Pour cette taille les effets de gravité et de tension de surface sont comparables. Si  $R \gg l_c$  les effets de gravité dominent, si  $R \ll l_c$  ce sont les effets superficiels.

• Pour de l'eau dans l'air par exemple on trouve  $l_c \approx 3$  mm. On retrouve cette taille caractéristique en regardant la surface de l'eau au bord d'un verre de rayon  $R$  (figure 6.15). Loin du bord la surface est horizontale ( $R \gg l_c$ ) mais près de la paroi verticale ( $R \ll l_c$ ) la tension de surface fait monter l'eau qui mouille partiellement le verre ( $\theta < 90^\circ$ ).

• On retrouve aussi cette longueur capillaire  $l_c \approx 3$  mm dans la taille typique des gouttes d'eau (figure 6.16), ou des premières rides observées sur l'eau lorsque le vent se lève (voir chapitre 7 page 67).



FIGURE 6.14 – Déformation sous l'effet de la gravité de gouttes de mercure de taille croissante. D'après [25] p. 37.

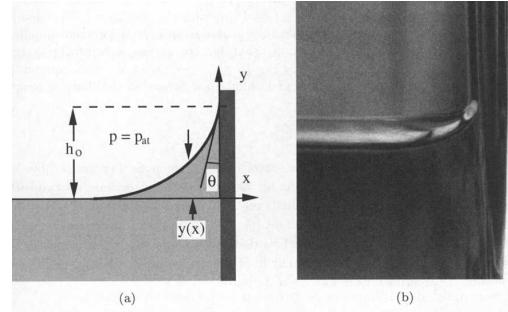


FIGURE 6.15 – Ménisque sur le bord d'un verre d'eau. D'après [25] p. 39.

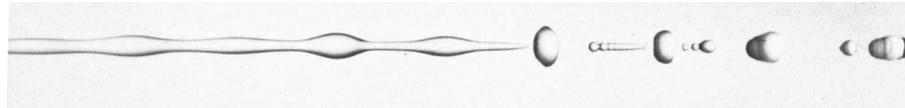


FIGURE 6.16 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d'un jet d'eau tombant (ici de gauche à droite) et qui se fractionne en gouttes.

## 6.5 La mesure de la tension superficielle

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer la tension de surface, basées sur la mesure d'une force ou d'une forme.

### 6.5.1 La loi de Jurin

Si on plonge un tube fin (on parle de tube « capillaire », c'est-à-dire dont le diamètre intérieur est de l'ordre de grandeur du diamètre d'un cheveu) dans un liquide, *à l'équilibre* la surface du liquide dans le tube n'est pas au même niveau qu'à l'extérieur (figures 6.17 et 6.18). C'est l'illustration classique des forces capillaires, autre nom des forces de tension interfaciales.

Le calcul de la hauteur  $h$  d'ascension capillaire se fait en calculant la dépression  $\Delta p$  qui existe au-dessous du ménisque :  $\Delta p = 2\gamma/r$  où  $r$  est le rayon de courbure de la calotte sphérique que forme le ménisque. Si  $R$  est le rayon du tube et  $\theta$  l'angle de mouillage on a  $R = r \cos \theta$  et donc  $\Delta p = 2\gamma \cos \theta / R$ . Cette dépression tire la colonne de fluide vers le haut et donc  $\Delta p = \rho gh$ . Finalement

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{R}.$$



FIGURE 6.17 – Illustration de la loi de Jamin ([44], p. 13). Plus le tube est fin plus le liquide monte haut.

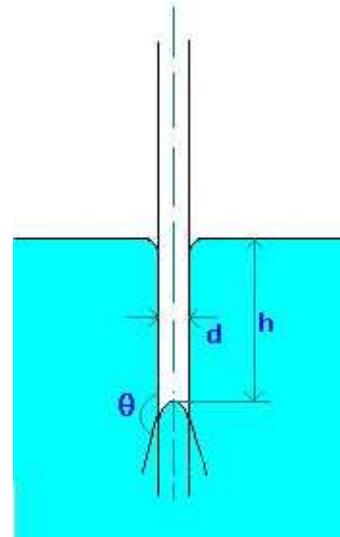


FIGURE 6.18 – Cas d'un liquide non mouillant comme le mercure montrant une ascension négative.

A.N. Avec de l'eau, si  $R = 0,1 \text{ mm}$ , on trouve  $h = 14 \text{ cm}$ . La mesure de  $h$  est donc une mesure de la tension de surface si on connaît l'angle de mouillage  $\theta$  et le diamètre du capillaire.

**Exercice :** Si on fait l'expérience non pas dans un tube, mais entre deux plaques de verre au contact d'un côté mais espacées de l'épaisseur d'un trombone de l'autre (figure 6.19) quelle sera la forme de la surface libre ?

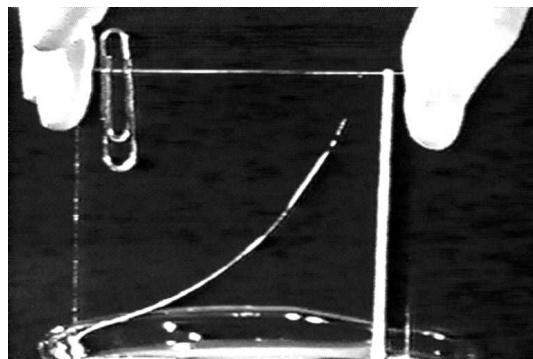


FIGURE 6.19 – Ascension capillaire dans le dièdre formé par deux plaques de verre séparées d'un côté de l'épaisseur d'un trombone.

L'ascension capillaire est limitée pour l'eau à environ 10 mètres, ce qui correspond à un tube de rayon de l'ordre d'un micromètre. En effet, au-delà de cette hauteur, la pression sous le ménisque deviendrait inférieure à la pression de vapeur saturante. Ce phénomène intervient dans la montée de la sève dans les arbres et est en partie la cause de leur taille maximale de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

### 6.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy

Les tensiomètres modernes sont basés sur la mesure de la force d'arrachement qu'il faut exercer sur une lame ou un anneau de platine pour la sortir lentement du liquide. Juste avant que le film liquide qui tire l'objet vers le bas ne casse, la balance mesure une force (de l'ordre du gramme) proportionnelle à la tension de surface (figures 6.20 et 6.21) :  $\gamma = F/(p \cos \theta)$  si  $p$  est le périmètre de la lame. On peut aussi mesurer par cette méthode des forces interfaciales entre deux liquides.

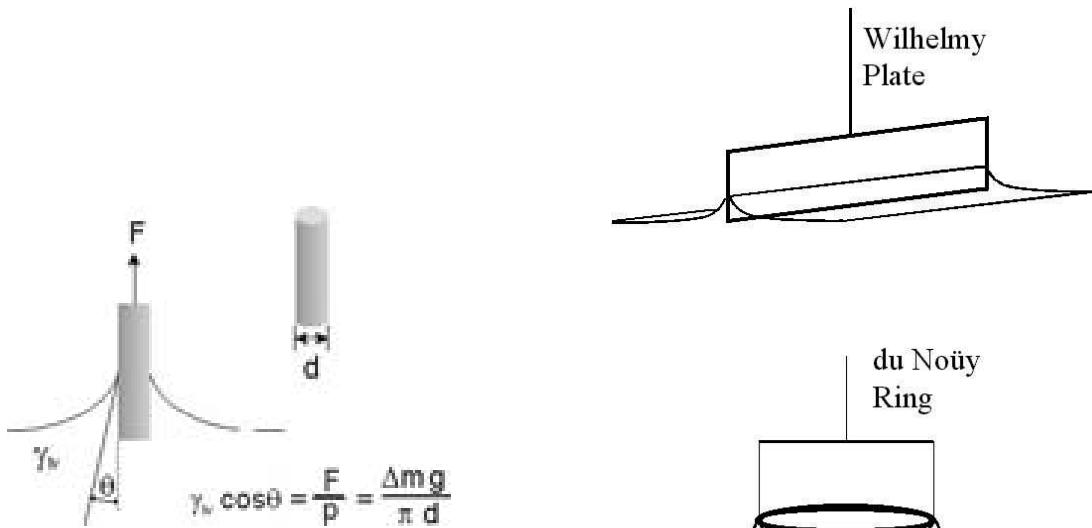


FIGURE 6.20 – Mesure de la tension de surface par la méthode de la lame de Wilhelmy.

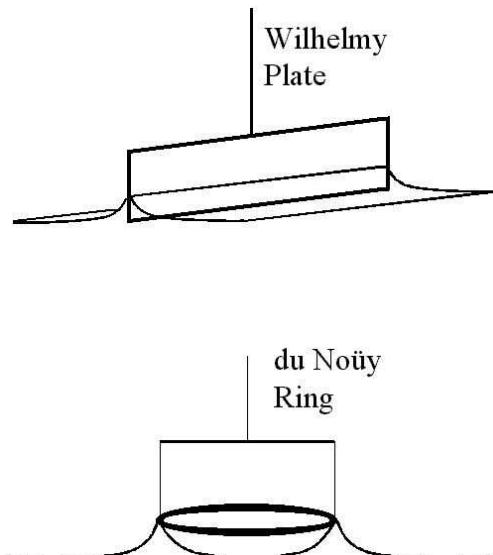


FIGURE 6.21 – Méthode de l'anneau de Noüy.

### 6.5.3 Méthode de la goutte pendante

Juste avant qu'une goutte ne se détache d'un robinet, son poids est équilibré par la tension de surface (loi de Tate). La mesure du volume de la goutte ou de son poids est donc aussi une mesure précise de la tension de surface (figures 6.22 et 6.23) et cette méthode porte le nom de stalagmométrie. Là aussi, la méthode permet de mesurer la tension de surface entre deux liquides.

On peut aussi mesurer le profil complet de la goutte et le comparer au résultat de l'intégration d'une équation intégro-différentielle dont le seul paramètre est la longueur capillaire. Pour cela on écrit dans chaque plan horizontal l'équilibre des forces entre le poids de la goutte sous ce plan, les forces de pressions de Laplace à l'interface et la tension interfaciale ([15] p. 59).

### 6.5.4 Méthode de la goutte tournante

Voir TD n°4.

## 6.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)

La tension de surface est en général une fonction décroissante de la température, en effet elle s'anule au point critique (liquide et vapeur ne font plus qu'un, ils sont alors en quelque sorte miscibles). Cette variation qui porte le nom d'effet Marangoni explique les deux expériences suivantes (figures

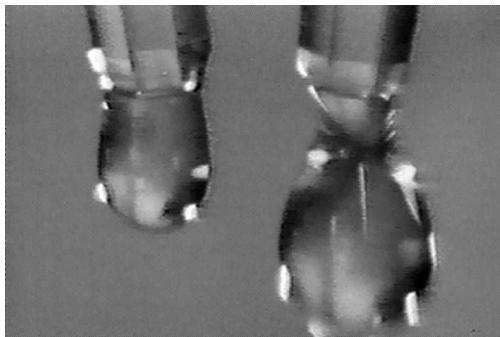


FIGURE 6.22 – Une goutte d’alcool (à gauche) et une goutte d’eau (à droite) toutes les deux sur le point de se détacher.



FIGURE 6.23 – Détachement d’une goutte pendante ([44], p. 8).

6.24 et 6.25). Les endroits de faible tension de surface sont des zones de divergence de l’écoulement de surface et conduisent donc à l’amincissement de la couche fluide, alors qu’une zone de forte tension interfaciale est une zone de convergence et donc d’épaississement.

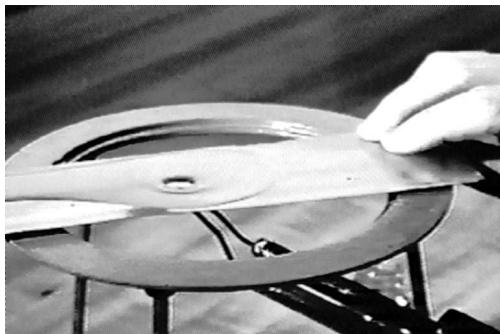


FIGURE 6.24 – Effet d’un point chaud fixe sous une couche mince de liquide.



FIGURE 6.25 – Effet d’un point froid se déplaçant sous une couche mince de liquide.

## 6.7 Les tensioactifs

Les tensioactifs sont très utilisés dans l’industrie pour fabriquer et stabiliser les mousses, ou pour contrôler l’étalement de liquides.

### 6.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?

Le savon est un tensioactif pour l’eau, c’est-à-dire un corps dont la présence diminue la tension de surface du liquide. Le plus souvent il s’agit de molécules amphiphiles, c’est-à-dire des molécules dont une extrémité préfère être entourée de molécules d’eau et l’autre refuse au contraire ce contact. Ces molécules se mettent de préférence aux interfaces et elles sont donc très efficaces, même en faible quantité, pour diminuer la tension de surface (figure 6.26). En réalité il existe toujours un équilibre thermodynamique entre les molécules adsorbées en surface et des molécules présentes dans le liquide

(voir Réf. [6] chap. 16. C'est cette diminution de la tension de surface qui rend l'eau savonneuse plus « mouillante » (l'angle  $\theta$  est plus faible) et donc plus efficace pour détacher et dégraissier.

Dans un premier temps, plus on augmente la quantité de tensioactif plus la tension de surface diminue, jusqu'à un certain point appelé la concentration micellaire critique (c.m.c.) où les molécules amphiphiles isolées déjà présentes à l'intérieur du liquide atteignent une concentration maximale et commencent à se regrouper sous forme de globules appelés *micelles*. A partir de la c.m.c., la tension de surface ne décroît plus et les molécules rajoutées augmentent seulement la taille et le nombre de micelles (figure 6.27).

### 6.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon contrairement aux membranes d'eau ?

Une membrane de savon est en réalité une membrane d'eau avec des molécules de tensioactif sur ses deux surfaces. Si une membrane de savon est rapidement déformée et donc étirée localement, la concentration de savon dans la partie étirée sera plus faible, la tension de surface locale y devient plus élevée qu'ailleurs et il apparaît donc une force de rappel qui tend à lutter contre la déformation initiale. Cet effet élastique, qui n'existe pas pour une membrane d'eau pure, explique la relative longévité des bulles de savon.

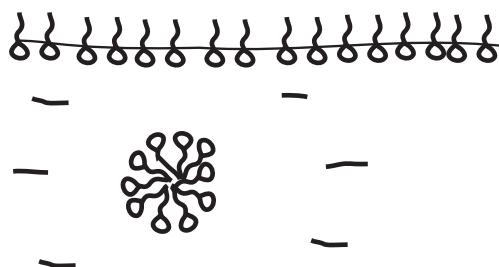


FIGURE 6.26 – Localisation des molécules amphiphiles : à la surface de l'eau ou dans des micelles.

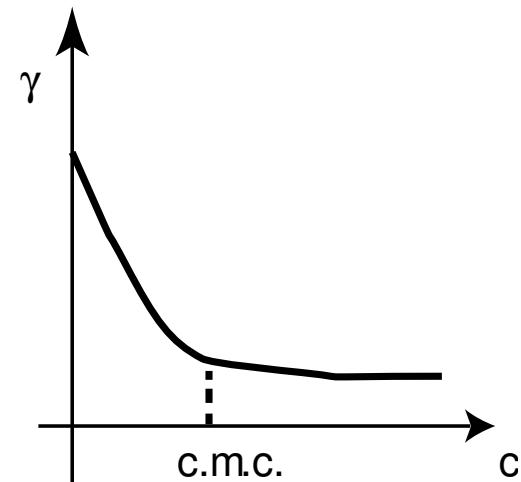


FIGURE 6.27 – Allure de l'évolution de la tension de surface de l'eau en fonction de la concentration  $c$  en tensioactif.

## 6.8 Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface

- Imbibition d'un milieu poreux ou d'un tube capillaire.** Pour un tube horizontal ou vertical trouver la cinétique d'envahissement par le liquide mouillant pour un fluide parfait et pour un fluide très visqueux (lois de Washburn [15] p.130).
- Dynamique d'étalement d'une goutte de liquide mouillant une surface solide.** On trouve des lois en  $t^{1/8}$  et  $t^{1/10}$  selon la taille de la goutte (lois de Tanner [15] p. 149).

3. **Evaporation d'une goutte de café.** Une goutte en forme de calotte sphérique et contenant des particules en suspension est posée sur une table. En supposant un flux d'évaporation constant, montrer que dans le référentiel de la ligne triple il existe un écoulement dans la goutte. En déduire pourquoi il reste une auréole sur la table de la cuisine (Deegan, R. D., Bakajin, O., Dupont, T. F., Huber, G., Nagel, S. R., § Witten, T. A. (1997). Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops. *Nature*, 389(6653), 827-828.).
4. **Divergence de la dissipation visqueuse au voisinage de la ligne triple d'une goutte qui avance.** Dessiner le profil de vitesse du fluide dans le référentiel où la ligne triple est immobile. Calculer les cisaillements au voisinage de la ligne triple (on peut supposer l'angle de contact petit) et en déduire la dissipation d'énergie. Montrer qu'il existe une divergence de cette dissipation à la ligne triple. Comment résoudre ce problème ([15] p. 142) ?

**Pour en savoir plus :**

- *Gouttes, bulles, perles et ondes*, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Belin (2006). Réf. [15].
- *Liquides. Solutions, dispersions, émulsions, gels*, B. Cabane et S. Hénon, Belin (2003). Réf. [6].
- *1805-2005 deux siècles de découvertes sur la capillarité*, Y. Pomeau, séminaire disponible en vidéo sur <http://savoirsenmultimedia.ens.fr/expose.php?id=194>
- *Surface Tension in Fluid Mechanics*, Lloyd Trefethen, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Surface\\_Tension\\_in\\_Fluid\\_Mechanic.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Surface_Tension_in_Fluid_Mechanic.rm)



# Chapitre 7

## Les ondes de surface

Marc Rabaud, version du 11 mars 2013

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction : La vie des vagues</b>	<b>68</b>
7.1.1	La naissance des vagues	68
7.1.2	Action du vent sur la mer	68
<b>7.2</b>	<b>Les ondes linéaires en eau profonde</b>	<b>69</b>
7.2.1	Relation de dispersion des ondes entre deux fluides	69
7.2.2	Application aux ondes à la surface de l'eau	72
7.2.3	Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague	74
7.2.4	Energie transportée par la houle	75
7.2.5	Atténuation des ondes de surface	77
7.2.6	Paquet d'onde lorsqu'un caillou est jeté dans l'eau	78
7.2.7	Sillage d'un obstacle	78
7.2.8	Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin	79
7.2.9	Trainée de vague et vitesse limite de coque	81
<b>7.3</b>	<b>Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde</b>	<b>83</b>
7.3.1	Relation de dispersion en hauteur d'eau finie	83
7.3.2	Cas des ondes longues	84
<b>7.4</b>	<b>Les ondes non-linéaires</b>	<b>86</b>
7.4.1	Le soliton de Russel	87
7.4.2	Ressaut hydraulique	88
7.4.3	Mascaret	88
7.4.4	Tsunami	89

---

Nous allons ici nous intéresser aux ondes se propageant à l'interface entre deux liquides ou entre un liquide et un gaz, propagation causée par deux forces de rappel : la gravité et la tension de surface entre les deux fluides. Nous étudierons tout d'abord le cas des ondes en eau profonde puis le cas des ondes en eau peu profonde.

Comme toute déformation périodique ou localisée peut se décomposer en série de Fourier, nous étudierons d'abord le comportement d'onde plane monochromatique. La déformation de l'interface s'écrit alors  $\zeta(x, t) = \zeta_0 \cos(kx - \omega t)$ . Le nombre d'onde est  $k = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde.

L'amplitude de l'onde est  $\zeta_0$ . La vitesse de phase est donné par  $V_\varphi = \omega/k$  et la vitesse de groupe par  $V_g = \partial\omega/\partial k$ .

## 7.1 Introduction : La vie des vagues

Les vagues naissent, grandissent, vieillissent et meurent. On parle même de l'âge d'une vague ! Voyons donc comment une vague naît, grandit (s'amplifie) puis s'atténue ou déferle et finit par mourir.

### 7.1.1 La naissance des vagues

Le vent est la première cause des vagues, que cela soit en mer, sur un lac ou sur une flaque d'eau. Par frottement avec la surface de l'eau, le vent injecte son énergie de façon continue à cause de la forte différence de vitesse entre l'air et l'eau par un mécanisme de type instabilité de Kelvin-Helmholtz (voir § 14.4 page 174). L'attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil sur l'eau est une autre source d'énergie pour les mouvements de l'eau, mais à l'échelle de toute la Terre, et elle induit les ondes de marées qui peuvent se décrire comme des ondes de très grande longueur. Enfin les séismes, glissements de terrain et éruptions volcaniques correspondent à des injections brutales et localisées d'énergie qui sont la cause des tsunamis, aussi appelés raz-de-marée ; à une tout autre échelle, un caillou jeté dans l'eau correspond aussi à une création locale d'ondes de surface. Commençons par analyser l'action du vent sur la mer.

### 7.1.2 Action du vent sur la mer

En dessous d'un vent minimum, de l'ordre de quelques kilomètres par heure, la mer reste plate ; on parle alors d'une mer d'huile. Ce n'est qu'au-dessus d'une valeur seuil que les premières rides se forment par l'écoulement rapide et turbulent de l'air au voisinage de l'eau. Peu à peu, les premières ondes désordonnées, amplifiées par l'action du vent, deviennent plus ordonnées, augmentent en amplitude, en longueur et donc en vitesse. Le processus se poursuit jusqu'à ce que les vagues atteignent une vitesse de l'ordre de 80 % de la vitesse du vent. Au-delà de cette valeur, la différence de vitesse entre l'air et les vagues semble insuffisante pour continuer à amplifier ces dernières. Ces grands principes exposés, le détail des mécanismes et le rôle exact des turbulences de l'air sur la formation des vagues font encore l'objet de discussions parmi les spécialistes. On appelle souvent « âge de la vague » le rapport  $V_\varphi/U$  de la vitesse des vagues sur celle du vent. Une vague qui vient de se former a une faible longueur d'onde, et donc une faible vitesse comparée à la vitesse du vent ( $V_\varphi/U$  petit), elle est donc jeune. Lorsqu'elle atteint l'âge adulte, elle est de plus grande longueur d'onde, et donc de plus grande vitesse ( $V_\varphi/U \approx 0,8$ ). Ensuite c'est le vieillissement, lorsque le vent diminue et que la vague, poursuivant sa route, se déplace plus vite que le vent ( $V_\varphi/U > 1$ ). Outre un effet sur la longueur et la vitesse des vagues, un vent plus fort formera aussi des vagues de plus grande amplitude, surtout s'il souffle suffisamment longtemps. Pour un vent établi, la hauteur des vagues croît avec la « force du vent » et l'amiral anglais Francis BEAUFORT a défini en 1806 une table de correspondance entre cette force du vent et l'état de la mer. L'échelle Beaufort fait aujourd'hui encore référence pour les marins et les météorologues. Notons toutefois que l'amplitude et la longueur d'onde des vagues en un point sont aussi fonction de la durée pendant laquelle le vent a soufflé, ainsi que de l'étendue d'eau sur laquelle il a soufflé à l'amont du point considéré et que l'on nomme par le terme d'origine anglaise *fetch*. L'effet de ces différents paramètres est assez bien connu empiriquement par les météorologues et les océanographes, ce qui leur permet de bien prédire la hauteur des vagues et leur heure d'arrivée sur nos côtes. Ces prédictions de hauteur de houle ont été grandement améliorées par le lancement des

satellites d'observation de la mer (<http://www.jason.oceanobs.com/>). On appelle « mer du vent » l'ensemble des vagues qui se forment en un lieu donné sous l'action du vent qui souffle à ce moment-là. On est alors dans la zone dite du fetch. Par opposition, le terme de houle désigne les vagues qui persistent après être sorties du fetch ou après que le vent soit tombé. La grande houle se propageant très vite, elle peut dans certains cas atteindre la côte avant la dépression qui lui a donné naissance, et ainsi annoncer l'arrivée du vent.

## 7.2 Les ondes linéaires en eau profonde

Nous considérerons ici uniquement le cas des ondes linéaires, c'est-à-dire d'amplitude faible devant la longueur d'onde :  $\zeta_0 \ll \lambda$  ou  $\zeta_0 k \ll 1$ .

On note 1 le fluide inférieur et 2 le fluide supérieur et  $Oz$  l'axe vertical (figure 7.1).

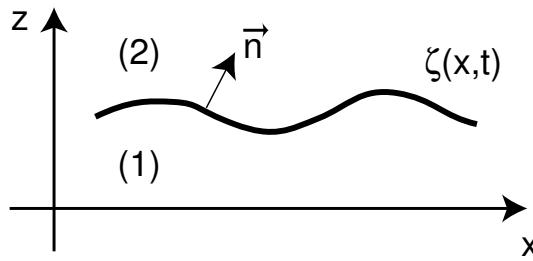


FIGURE 7.1 – Schéma de l'interface entre deux fluides superposés.

### 7.2.1 Relation de dispersion des ondes entre deux fluides

On supposera les fluides incompressibles et surtout l'écoulement irrotationnel. En effet si on considère un fluide immobile (donc forcément irrotationnel) avant l'arrivée des vagues, il doit rester irrotationnel, au moins à cours terme et loin des parois (éventuellement présentes sur le fond ou à l'interface si les deux fluides sont visqueux). En négligeant l'effet de la viscosité, nous étudierons la propagation des ondes sans atténuation<sup>1</sup>.

Si l'écoulement dans chaque fluide est irrotationnel,  $\text{rot } \vec{v}_i = \vec{0}$  (avec  $i = 1, 2$ ) et l'on peut écrire  $\vec{v}_i = \vec{\nabla} \Phi_i$ , le champ de vitesse dérive d'un potentiel. Si de plus l'écoulement est incompressible,  $\text{div } \vec{v}_i = 0$  et donc  $\Delta \Phi_i = 0$ . Le potentiel des vitesses satisfait l'équation de Laplace.

En recherchant des solutions propagatives périodiques on peut écrire :  $\Phi_i = f_i(z) \exp(i(kx - \omega t))$ . Les ondes étant supposées linéaires, nous pouvons utiliser la notation complexe sans problème en prenant à la fin des calculs la partie réelle du résultat.

L'équation de Laplace impose que :

$$f_i'' - k^2 f_i = 0,$$

soit

$$f_i(z) = A_i \exp(kz) + B_i \exp(-kz).$$

1. Un fluide parfait ne peut satisfaire les relations de Kramer-Krönig entre dissipation et dispersion

Dans le cas de milieu infini au-dessus et au-dessous de l'interface, la condition de non divergence de  $f_i$  pour  $z \rightarrow \pm\infty$  donne  $A_2 = B_1 = 0$ . (Le cas d'une profondeur finie sera traité au paragraphe 7.3.)

L'équation d'Euler doit être satisfait pour chaque fluide :

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} p_i + \vec{g}.$$

Le terme convectif non-linéaire peut-être négligé si  $(\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_i \ll \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}$ . On peut estimer l'ordre de grandeur de ces deux termes car  $v_i \sim \zeta_0/T$ , la condition devenant  $k \zeta_0/T \ll 1/T$  soit  $\zeta_0 k \ll 1$  ce qui correspond bien à notre choix d'ondes de faible amplitude.

L'équation devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi_i + \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} p_i - \vec{g} = 0,$$

soit :

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + gz \right) = 0,$$

et finalement :

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} - \rho_i g z + C_i.$$

La surface plane devant être solution, on a  $C_1 = C_2 = P_{atm}$ .

En particulier à l'interface nous avons :

$$p_1 - p_2 = \rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - (\rho_1 - \rho_2) g \zeta. \quad (7.1)$$

**Conditions aux limites :** elles sont de deux sortes, cinématiques (égalité des vitesses transverses à l'interface) et dynamiques (égalité des contraintes normales). Pour la première, comme l'amplitude de la déformation est faible, il suffit que :  $v_{z1} = v_{z2}$  soit :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}|_{z=\zeta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (7.2)$$

(La relation exacte, valable quelque soit l'amplitude de la déformation, est donnée par l'équation 10.4 page 116.) Cette condition nous donne ici la relation :  $k A_1 = -k B_2 = -i\omega \zeta_0$ . Ceci nous permet d'exprimer les constantes d'intégration  $A_1$  et  $B_2$  en fonction de l'amplitude de l'onde :

$$\begin{cases} \Phi_1 = -i \frac{\omega}{k} \zeta_0 \exp(kz) \exp(i(kx - \omega t)) \\ \Phi_2 = i \frac{\omega}{k} \zeta_0 \exp(-kz) \exp(i(kx - \omega t)) \end{cases} \quad (7.3)$$

La condition dynamique nous dit que la différence de pression sur une interface courbée est donnée par la loi de Laplace (§6.2) :

$$p_{int} - p_{ext} = \gamma \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right],$$

où  $\gamma$  est la tension de surface. Ici pour des ondes planes (invariantes en  $y$ ) nous avons un seul rayon de courbure et la courbure étant faible :  $p_1 - p_2 \approx -\gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ , soit :

$$p_1 - p_2 = \gamma k^2 \zeta \quad (7.4)$$

En rassemblant ces trois résultats (équations 7.1, 7.3 et 7.4) on obtient finalement *la relation de dispersion des ondes planes linéaires en eau profonde* :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3}. \quad (7.5)$$

Notons que si  $\rho_1 < \rho_2$  la pulsation est complexe, c'est-à-dire que l'on est en présence d'une instabilité. C'est l'instabilité de Rayleigh-Taylor qui sera décrite plus loin (§ 14.3 page 171). L'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (7.6)$$

Avec

$$k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\gamma}. \quad (7.7)$$

Ce nombre d'onde de coupure  $k_c$  appelé nombre d'onde capillaire sépare le régime des ondes capillaires (petites longueurs d'onde – ou grands  $k$  – contrôlées par la tension de surface) de celui des ondes de gravité (grandes longueurs d'onde – ou petit  $k$  – gouvernées par la gravité). La relation de dispersion  $\omega(k)$  n'étant pas linéaire, les ondes interfaciales sont dispersives ( $V_\varphi \neq V_g$ ). On rappelle que la vitesse de phase de l'onde plane est donnée par  $V_\varphi = \omega/k$  et sa vitesse de groupe par  $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ .

### Rappels sur la vitesse de phase et de groupe

On considère tout d'abord une onde plane monochromatique qui s'écrit :

$$\zeta(x, t) = \Re [A_0 \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t)],$$

où  $\Re$  exprime la partie réelle. Son spectre est une fonction de Dirac  $A_0 \delta(k - k_0)$ , sa vitesse de phase  $V_\varphi = \omega(k_0)/k_0$ .

Si maintenant on est en présence d'un *paquet d'onde*, l'onde s'écrit :

$$\zeta(x, t) = \Re \int_0^\infty A(k) \exp i(kx - \omega(k)t) dk.$$

Si le paquet d'onde est étroit (dans l'espace de Fourier) autour de  $k_0$ , on peut écrire  $k = k_0 + \delta k$  soit :

$$\zeta(x, t) = \Re \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i(k_0 x - \omega(k_0)t) \exp i(\delta k x - \delta \omega t) dk.$$

Où  $\delta \omega = \omega(k_0 + \delta k) - \omega(k_0) \approx \frac{\partial \omega}{\partial k} \delta k = V_g \delta k$ .

A l'instant initial  $t = 0$  on a :

$$\zeta(x, 0) = \Re \exp i(k_0 x) F(x)$$

avec

$$F(x) = \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i(\delta k x) dk.$$

C'est un paquet d'onde avec une porteuse  $k_0$  et une enveloppe  $F(x)$ .

Pour  $t \neq 0$  :

$$\zeta(x, t) = \Re \exp i(k_0(x - V_\varphi t)) F(x - V_g t)$$

avec

$$F(x - V_g t) = \int_0^\infty A(k_0 + \delta k) \exp i(\delta k(x - V_g t)) dk.$$

L'enveloppe du paquet d'onde se propage bien avec la vitesse de groupe  $V_g$  alors que la porteuse se propage à  $V_\varphi$  (voir figure 7.2).

Nota : on peut généraliser à des ondes tridimensionnelles où  $\vec{k} = (k, l, m)$ . Dans ce cas la vitesse de phase s'écrit  $\vec{V}_\varphi = (\omega/k^2)\vec{k}$  (elle est forcément colinéaire au vecteur d'onde) et la vitesse de groupe  $\vec{V}_g = (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l, \partial\omega/\partial m)$ . Ces deux vitesses ne sont pas forcément colinéaires si la relation de dispersion n'est pas isotrope et même elles peuvent être perpendiculaires entre elles si la relation de dispersion ne dépend pas du module de  $\vec{k}$  comme nous le verrons pour les ondes internes (chap. 8 page 91) ou les ondes inertielles (§ 13.7.3 page 164).

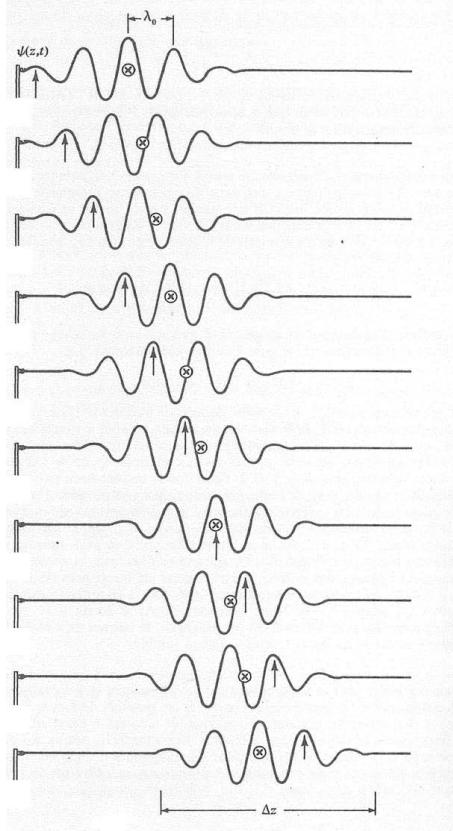


FIGURE 7.2 – Paquet d'onde dont la vitesse de phase est le double de la vitesse de groupe. La croix se déplace à la vitesse de groupe, la flèche à la vitesse de phase (cours Berkeley III, p. 294).

### 7.2.2 Application aux ondes à la surface de l'eau

Dans le cas des ondes à la surface de l'eau, les densités des deux fluides (air et eau) étant dans un rapport 1000, on peut négliger  $\rho_2$  devant  $\rho_1$  et la relation de dispersion (Eq. 7.5) s'écrit alors :

$$\omega^2 = gk \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right].$$

Rappelons que dans le cas de l'interface entre l'air et l'eau on a  $\lambda_c = 2\pi/k_c \approx 17$  mm.

L'évolution de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe avec le nombre d'onde est représenté sur la figure 7.3.

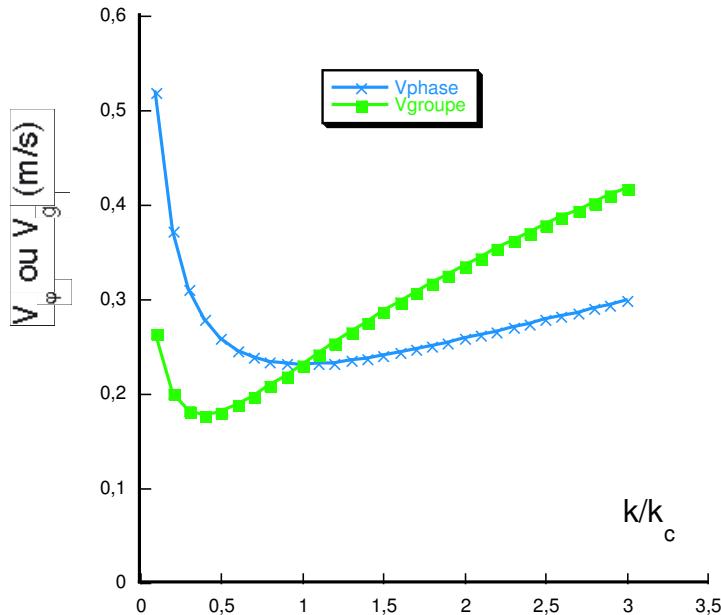


FIGURE 7.3 – Evolution de la vitesse de phase  $V_\varphi(\times)$  et de la vitesse de groupe  $V_g$  ( $\square$ ) en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k/k_c$ . Pour  $k/k_c < 1$  ce sont des ondes de gravité ( $V_g < V_\varphi$ ), et pour  $k/k_c > 1$  ce sont des ondes capillaires ( $V_g > V_\varphi$ ).

### Limite des ondes de gravité :

Si  $k \ll k_c$  on est dans le domaine des ondes de gravité et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk.$$

La vitesse de phase s'écrit alors  $V_\varphi = \sqrt{g/k} = g/\omega$ .

La figure 7.2 représente l'évolution d'un paquet d'ondes de gravité pour lequel  $V_g = \frac{1}{2}V_\varphi$ . Des ondes naissent à l'arrière du paquet d'ondes et meurent à l'avant.

### Limite dans le domaine des ondes capillaires :

Si  $k \gg k_c$  on est dans le domaine des ondes capillaire et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk^3/k_c^2 = \frac{\gamma}{\rho}k^3.$$

La vitesse de phase s'écrit alors  $V_\varphi = \sqrt{\gamma k / \rho}$ .

### Exercices :

- Dans le cas des ondes longues calculer  $V_\varphi$  et  $V_g$  et leur rapport.
- Calculer  $k_c$  pour l'eau et la longueur d'onde capillaire  $l_c = 2\pi/k_c$ .
- Pour les ondes capillaires calculer  $V_g/V_\varphi$ .
- Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont égales si  $k = k_c$ .
- Montrer que les ondes de surface ne peuvent pas se propager en dessous d'une certaine vitesse. Calculer ce minimum de la vitesse de phase. Montrer qu'il vaut 23 cm/s pour de l'eau pure.
- Calculer la vitesse de groupe minimale. Que vaut alors  $k/k_c$  ?

### 7.2.3 Trajectoire des particules et lignes de courant sous la vague

Si l'eau est assez profonde et si l'amplitude de la vague reste faible, le déplacement vertical d'un flotteur lors du passage de la vague est accompagné d'un mouvement de va-et-vient horizontal de même amplitude. Le flotteur décrit alors des cercles, dans le sens des aiguilles d'une montre pour une onde se déplaçant devant nous de gauche à droite (figure 7.4). On peut d'ailleurs ressentir ce mouvement circulaire en se laissant flotter au large dans les vagues. Notons que même si, au sommet de la vague, il existe une vitesse de l'eau dans le sens du déplacement de l'onde, cette vitesse du fluide est en général très inférieure à la vitesse de l'onde. De plus, moyenné sur une période, le déplacement de la particule fluide est nul<sup>2</sup>. Ce mouvement circulaire de l'eau existe aussi sous la surface, mais avec une amplitude décroissant rapidement avec  $z$  (exponentiellement) et il n'est déjà pratiquement plus mesurable à une profondeur comparable à la longueur d'onde de la vague. Un plongeur qui s'enfonce sous la surface est ainsi rapidement à l'abri de la houle si la profondeur de l'eau est suffisamment grande.

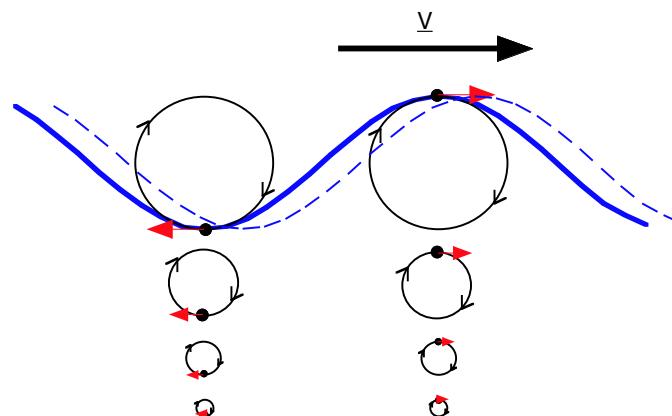


FIGURE 7.4 – Schéma montrant dans un plan vertical le mouvement circulaire de l'eau lors du passage de gauche à droite d'une vague. Ici est représentée la position de la surface à deux instants successifs. Les cercles noirs représentent les trajectoires suivies par les points noirs lorsque l'onde avance d'une longueur d'onde. Les flèches représentent leur vitesse à l'instant initial. Noter la diminution importante du mouvement circulaire de l'eau lorsqu'on s'enfonce sous la surface.

2. Ces mouvements des particules d'eau, dans un sens en haut de la vague et en sens contraire dans le creux de la vague (voir figure 7.4), jouent un rôle dans le possible chavirage de petites embarcations prises dans de grosses vagues.

Pour trouver les trajectoires des particules fluides pendant une période, il faut intégrer la vitesse lagrangienne de la particule. D'après l'équation 7.3,  $\Phi = \frac{\omega}{k} \zeta_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$ , soit :

$$\begin{cases} v_x = \omega \zeta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t) \\ v_z = \omega \zeta_0 e^{kz} \sin(kx - \omega t) \end{cases} \quad (7.8)$$

On remarque tout d'abord que le module du vecteur vitesse vaut  $|\vec{v}| = \omega \zeta_0 e^{kz}$ . Il est indépendant du temps et de la position  $x$  et s'amortit exponentiellement avec la profondeur. Dans la limite des très faibles amplitudes ( $\zeta_0 k \ll 1$ ) les trajectoires sont des cercles de rayon  $\zeta_0 e^{kz}$ . Si l'amplitude n'est pas petite, l'intégration lagrangienne du mouvement des particules fluides (que l'on peut résoudre par approximations successives) fait apparaître une lente dérive, appelée « dérive de Stokes » dans le sens de propagation de l'onde (voir TD n°1). Les trajectoires ont alors une forme de cycloïde, la vitesse moyenne de dérive vaut  $k^2 \zeta_0^2 v_\varphi e^{2kz}$  (voir ref. [26] page 225). Une façon de comprendre ce résultat est que sur l'orbite circulaire (au premier ordre) une particule en haut est soumise à une vitesse plus grande qu'en bas de la trajectoire du fait de l'atténuation exponentielle avec la profondeur, et en moyenne il apparaît donc une dérive lente.

Mais revenons au cas des très faibles amplitudes. Pour tracer les lignes de courant à un instant donné il faut calculer la fonction de courant  $\Psi$ . Or  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Psi) = \vec{\text{rot}}(\Psi \vec{e}_y)$ , d'où l'équation du champ scalaire  $\Psi(x, z) = \Psi_0 - \frac{\omega}{k} \zeta_0 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$ . Les isopotentiels  $\Phi = \text{Cste}$  sont perpendiculaires aux lignes de courant (voir chapitre ??).

Les figures 7.5 et 7.6 permettent d'avoir une idée des lignes de courant à un instant donné sous la surface.

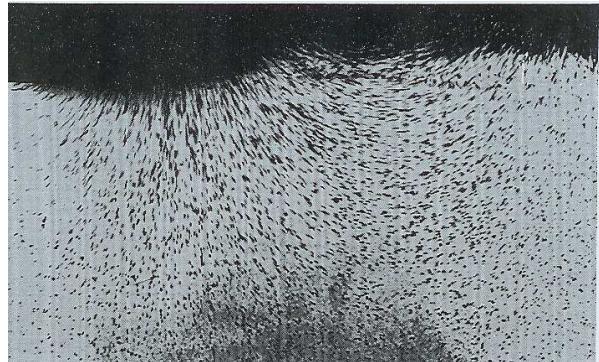


FIGURE 7.5 – Lignes de courant sous la surface obtenues par photo en pose courte. Ces lignes sont solutions de l'équation  $z = z_0 - \frac{1}{k} \ln |\cos(kx - \omega t)|$ .

#### 7.2.4 Energie transportée par la houle

Les vagues transportent de l'énergie, il n'y a qu'à voir l'effet dévastateur d'une tempête en bord de mer. Cette énergie est transportée sous forme d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

##### Energie cinétique

La densité locale d'énergie cinétique (énergie cinétique par unité de volume) s'écrit  $e_c = \frac{1}{2} \rho v^2$ . Or nous avons vu que le module de la vitesse ne dépend ni de  $x$  ni du temps et vaut  $v^2 = \zeta_0^2 \omega^2 \exp 2kz$ .

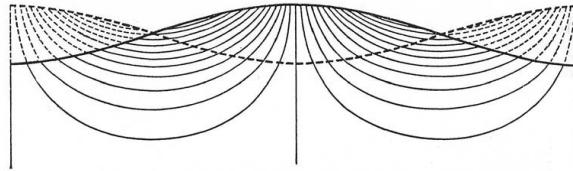


FIGURE 7.6 – Isopotentiels de vitesse représentés à deux instants en opposition de phase pour des ondes en eau profonde (d'après [27] page 366).

L'énergie cinétique intégrée dans la profondeur par unité d'aire  $A$  de la surface s'écrit donc :

$$\frac{E_c}{A} = \int_{-\infty}^0 e_c dz = \frac{1}{4} \rho \zeta_0^2 \frac{\omega^2}{k}.$$

Or  $\frac{\omega^2}{k} = g \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]$  et donc :

$$\frac{E_c}{A} = \frac{1}{4} \rho \zeta_0^2 g \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right].$$

### Energie potentielle de gravité

En prenant comme référence des énergies potentielles de gravité l'état de repos  $z = 0$ , une particule à l'altitude  $z$  possède une densité d'énergie potentielle  $e_p = \rho g z$ . Il existe donc une énergie potentielle moyenne par unité d'aire :

$$\frac{E_p}{A} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \int_0^{\zeta(x,t)} \rho g z dx dz = \frac{1}{2} \rho g \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \zeta^2(x, t) dx = \frac{1}{4} \rho g \zeta_0^2.$$

### Energie potentielle capillaire

En présence de tension de surface, il existe un autre terme dans l'énergie potentielle : l'énergie élastique due à l'augmentation de surface.

$E_\gamma/A = \gamma (S_{surface}/A - 1) = \gamma \left( (1/\lambda) \int_0^\lambda dl - 1 \right)$ . Or l'abscisse curviligne le long de l'interface est donné par  $dl^2 = dx^2 + dz^2 = dx^2 (1 + \zeta_0^2 k^2 \sin^2 kx)$  soit  $dl = dx \left( 1 + \frac{1}{2} \zeta_0^2 k^2 \sin^2 kx \right)$ . Donc  $E_\gamma/A = \frac{1}{4} \gamma \zeta_0^2 k^2$ .

L'énergie élastique moyenne par unité de surface s'écrit donc en introduisant le nombre d'onde de coupure  $k_c$  :

$$\frac{E_\gamma}{A} = \frac{1}{4} \rho g \zeta_0^2 \left( \frac{k}{k_c} \right)^2.$$

### Energie totale

Finalement, comme pour un pendule simple, il y a en moyenne autant d'énergie potentielle totale (gravité et capillaire) que d'énergie cinétique. L'énergie totale  $E = E_p + E_c + E_\gamma$  s'écrit par unité de surface :

$$\boxed{\frac{E}{A} = \frac{1}{2} \rho \zeta_0^2 g [1 + (k/k_c)^2]}. \quad (7.9)$$

Soit encore  $\frac{E}{A} = \frac{1}{2} \rho \zeta_0^2 \frac{\omega^2}{k}$  compte tenu de la relation de dispersion. L'énergie par unité de surface est proportionnelle au carré de l'amplitude des vagues.

### Flux d'énergie

Comme la pression et la vitesse horizontale du fluide sont en phase sous la vague, une colonne de fluide exerce un travail sur le fluide de la colonne de fluide situé du côté de la direction de propagation, d'où un flux d'énergie :  $\dot{W} = \int_h^\zeta p u dz = v_g E$ . L'énergie se propage donc bien à la vitesse de groupe.

**Exercice :** Calculer l'énergie transportée par une houle de 2 mètres d'amplitude et de 200 m de longueur d'onde par mètre de crête.

### 7.2.5 Atténuation des ondes de surface

Jusqu'ici nous avons considéré que le fluide était parfait. Si l'on suppose que ces solutions sont toujours valables même en présence d'une faible viscosité du fluide on peut estimer la dissipation d'énergie et donc l'atténuation des ondes.

En calculant le taux de dissipation de l'énergie par unité de volume et de temps (§9.6) :

$$\epsilon = -\eta/2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

(avec une sommation implicite sur tout les indices redoublés) on en déduit l'amortissement temporel des ondes :

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp(-2\nu k^2 t).$$

La durée caractéristique d'amortissement  $\tau = \frac{1}{2\nu k^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \nu}$ . On passe du temps d'amortissement  $\tau$  à la distance d'amortissement  $L$  en écrivant  $L = v_g \tau$ . On a finalement :

$$\tau/T = \frac{\omega}{4\pi\nu k^2}$$

et

$$L/\lambda = (v_g/v_\varphi)(\tau/T).$$

Dans le cas de l'interface eau/air en milieu infini on trouve les valeurs suivantes des longueurs et des temps d'amortissement :

$\lambda$ (m)	L (m)	$\tau$
1 mm	12 mm	0,01 s
1 cm	30 cm	1 s
1 m	23 km	3,5 heures
10 m	7500 km	14 jours
100 m	60 fois le tour de la Terre !	4 ans !

Ce qui explique que les ondes capillaires s'amortissent très vite et que seules persistent les vagues de grandes longueurs d'onde lorsque le vent se calme. En réalité l'évolution du spectre des vagues est due d'une part à la dispersion, d'autre part à l'atténuation sélective des longueurs d'onde et enfin à des transferts non-linéaires entre modes. Le spectre mesuré en mer est souvent décrit par le spectre de Pierson-Moskowitz

$$S(\omega) = \alpha \frac{g^2}{w^5} \exp \left[ -\beta \left( \frac{g}{U\omega} \right)^4 \right].$$

Le calcul de l'atténuation n'est justifiable que si l'atténuation est faible, c'est-à-dire si  $\tau$  est grand devant la période des ondes et donc si  $L$  est grand devant la longueur d'onde. Pour l'eau l'approximation n'est plus valable pour des longueurs d'onde inférieures à  $100 \mu\text{m}$ . Il faut alors refaire un calcul plus complet en décomposant le champ de vitesse en une partie irrotationnelle et une partie rotationnelle<sup>3</sup>.

### 7.2.6 Paquet d'onde lorsqu'un caillou est jeté dans l'eau

En jetant un caillou dans l'eau on injecte brutalement de l'énergie en un point et à un instant donné. Une grande partie de cette énergie est rayonnée sous forme d'ondes interfaciales radiales. Dans l'espace spectral cette énergie est surtout émise à des nombres d'onde correspondant à la taille  $L$  de l'objet ( $k_L \sim 2\pi/L$ ) et dans des harmoniques de plus petites longueurs d'onde. Rapidement ces ondes circulaires perdent de l'amplitude (en  $r^{-1/2}$  car elles augmentent leur périmètre) même en l'absence de dissipation et l'on arrive ensuite dans un régime d'ondes linéaires pratiquement planes.

Si le caillou est gros comparé à la longueur capillaire, les ondes de taille  $L$  sont des ondes de gravité et ce sont les plus rapides. Elles voyagent avec une vitesse de groupe égale à la moitié de leur vitesse de phase. Le front externe du paquet d'onde va donc moins vite que les ondes individuelles. Les ondes meurent en arrivant sur ce front avant. A l'arrière du paquet d'onde (vers le centre) on retrouve les ondes les plus lentes correspondant à la vitesse de groupe minimale. Ces ondes ont une vitesse de phase légèrement plus grande que leur vitesse de groupe, elles semblent donc naître sur le front arrière. Voir figures 7.7a et 7.8a.

Si maintenant on jette un tout petit caillou (ou si l'on regarde tomber des gouttes de pluie), toutes les ondes émises sont des ondes capillaires. Les ondes les plus lentes correspondent à des ondes capillaires de longueur d'onde  $L$  et elles ont donc une vitesse de phase inférieure à la vitesse de groupe. Elles se font donc rattraper par le front arrière et y meurent. Devant, il n'y a en principe pas de limite à la vitesse de phase et de groupe et de très petites longueurs d'onde devraient se propager très loin en avant (avec une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de phase). Toutefois ces petites longueurs d'onde sont aussi très vites atténueres par la viscosité (voir § 7.2.5) et ne sont pas visibles en pratique. Voir figures 7.7b et 7.8b.

### 7.2.7 Sillage d'un obstacle

Supposons que l'on place verticalement un bâton dans une rivière s'écoulant à la vitesse  $U$ . Dans ce référentiel l'écoulement est indépendant du temps, et l'on observera une déformation de l'interface stationnaire que pour des ondes se déplaçant vis-à-vis de l'eau à la vitesse  $v_\varphi = -U$ . Si on se reporte à la figure 7.3, on voit que si  $U > U_{\min}$  il existe deux longueurs d'onde possibles, une longueur d'onde dans le domaine capillaire  $\lambda_1 < \lambda_c$  et une dans le domaine des ondes de gravité  $\lambda_2 > \lambda_c$ .

3. V. G. Levich, Physicochemical hydrodynamics, 1962

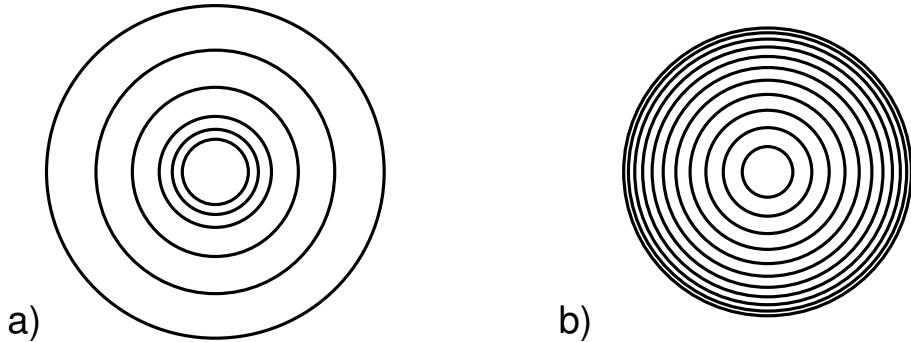


FIGURE 7.7 – Schémas vus de dessus des ronds dans l'eau créés par un gros caillou jeté dans l'eau (a) et par une goutte de pluie tombant sur une surface d'eau (b).

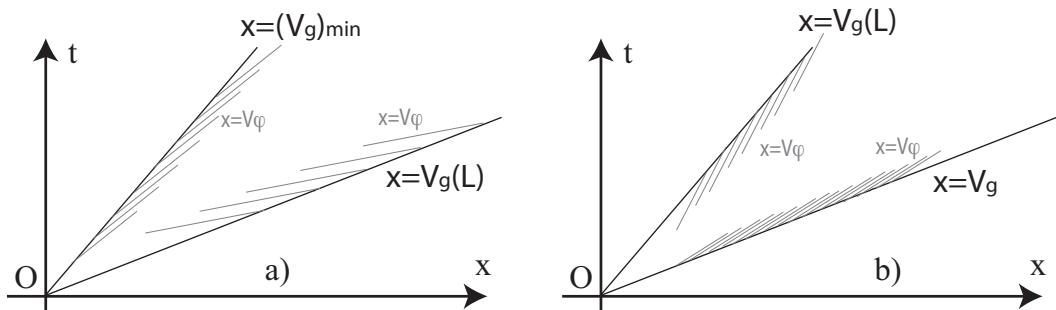


FIGURE 7.8 – Diagrammes spatio-temporels esquissant l'évolution d'un paquet d'onde dans le plan  $(r, t)$  (a) pour un caillou dans l'eau ( $V_\varphi > V_g$ ) et (b) pour une goutte dans l'eau ( $V_\varphi < V_g$ ).

En observant un bâton dans l'eau (figure 7.9) on peut voir en effet des ondes capillaires immobiles en amont (car leur vitesse de groupe  $V_g > V_\varphi = -U$ ) mais amorties par la viscosité assez rapidement et les ondes de gravité immobiles en aval de l'obstacle (car  $V_g < V_\varphi = -U$ ).

La forme des ondes capillaires stationnaires en amont d'un obstacle ponctuel a été étudiée par Poncelet (1831) puis par Kelvin et Helmholtz [13].

### 7.2.8 Le sillage en « V » ou sillage de Kelvin

Regardons d'abord ce qui se passe pour des ondes non dispersives comme les ondes sonores. Pour cela considérons un avion supersonique qui se déplace à vitesse constante  $U$ . Lorsque qu'il était au point M (figure 7.10a) il a émis des ondes sphériques qui se propagent à la célérité  $c$  (constante, quelque soit le nombre d'onde pour un milieu non dispersif comme l'air en première approximation). Ces ondes ont atteint le point H tel que  $MH = c \Delta t$  alors que l'avion a parcouru pendant ce temps là la distance  $MO = U \Delta t$  (avec  $U > c$ ). Les ondes émises par tous les points M pendant  $\Delta t$  sont donc toutes arrivées sur le bord du cône dont l'angle  $\theta$  est donné par la relation :  $\sin \theta = MH/MO = c/U$ . On appelle nombre de Mach le rapport  $Ma = U/c$ , et donc  $\sin \theta = 1/Ma$ . L'onde de choc correspond à l'accumulation des ondes de pression sur ce cône et n'existe que si  $Ma > 1$ .

Revenons maintenant aux ondes de surface générées par un objet ponctuel se déplaçant à la vitesse  $U$ . Nous ne considérerons ici que des ondes de gravité. Le milieu étant dispersif, il faut raisonner



FIGURE 7.9 – Photographie montrant les ondes fixes dans un écoulement d'eau au niveau d'un bâton immobile. Les petites longueurs d'onde sont en amont (à droite) et les plus grandes en aval (à gauche).

d'abord pour chaque nombre d'onde  $k$  (figure 7.10b). Cette fois-ci, pour des ondes de gravité  $v_g = \frac{1}{2}v_\varphi$ , l'énergie de l'onde émise en  $M$  n'est pas arrivée en  $H$  mais en  $H'$  (avec  $MH' = \frac{1}{2}MH$ ). Toutes les ondes de nombre d'onde  $k$  émises pendant  $\Delta t$  sont arrivées sur le bord du triangle d'angle au sommet  $\alpha(k)$ . On a la relation :

$$\tan(\theta - \alpha) = H'H/HO = \frac{1}{2}MH/HO = \frac{1}{2} \tan \theta.$$

En développant il vient :

$$\tan \alpha(k) = \frac{\tan \theta}{2 + \tan^2 \theta},$$

avec  $\sin \theta(k) = v_\varphi(k)/U$ .

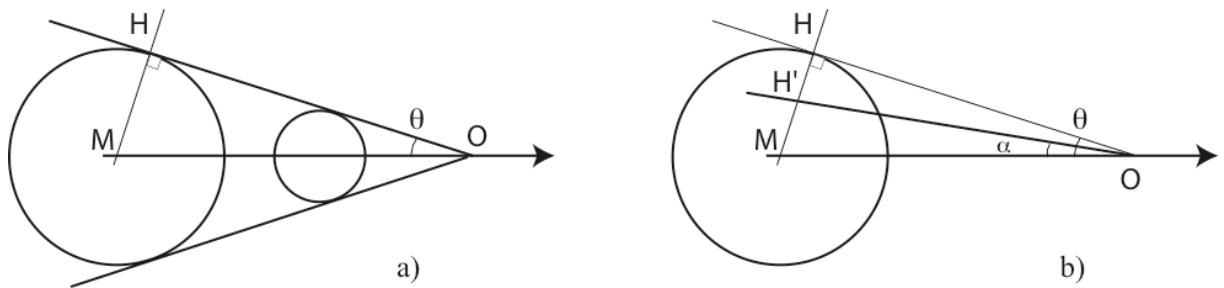


FIGURE 7.10 – Construction du cône de Mach (a) et du sillage de Kelvin (b)

Si on laisse maintenant varier le nombre d'onde  $k$ , leur vitesse de phase  $v_\varphi(k)$  et donc l'angle  $\theta(k)$  vont varier aussi. En étudiant la variation de la fonction  $\alpha(k)$  on voit qu'elle possède un maximum lorsque  $\theta$  varie entre 0 et  $\pi/2$ . Ce maximum correspond à  $\tan \theta_0 = \sqrt{2}$  et donc  $\tan \alpha_0 = \sqrt{2}/4$ . Au-delà de cet angle maximum  $\alpha_0 = \arcsin(1/3) \approx 19,47^\circ$  aucune onde n'est encore arrivée. En-deçà de cette angle il existe deux longueurs d'onde différentes pour le même angle et les interférences ne

sont pas constructives. On a donc un maximum d'amplitude au voisinage du dièdre d'angle  $\alpha_0$ <sup>4</sup>.

Les vagues qui sont observées au maximum d'amplitude sont des ondes d'une longueur d'onde particulière  $k_0$  dont les crêtes font un angle  $\theta_0 = 54,73^\circ$  avec l'axe du navire (en effet leur vitesse de phase est dirigée selon MH). Elles font donc en angle  $\theta_0 - \alpha_0 = 35,26^\circ$  avec le bord du sillage. C'est ce sillage d'angle constant qui est aussi observé derrière des canards sur une mare (figure 7.11b), du moment qu'ils se déplacent à une vitesse nettement supérieure à la vitesse minimum d'apparition des ondes de surface. Dans le cas des navires de grandes longueurs ou de forme assez rectangulaire comme une péniche, on peut observer deux sillages de Kelvin bien distincts : celui de l'étrave et celui de la poupe.

Notons que dans ces problèmes de sillage d'avion ou de bateau, l'écoulement est stationnaire dans le référentiel de l'obstacle, on s'intéresse donc aux solutions stationnaires dans ce référentiel. Il faut donc que la vitesse du bateau projeté dans la direction de propagation  $\vec{k}$  des ondes soit égal à la vitesse de phase, ce qui peut s'écrire  $U \sin(\theta) = v_\varphi$  ou encore  $\vec{U} \cdot \vec{k} = \omega$ .

**Exercice :** Pour le nombre d'onde des vagues divergentes du sillage en V nous avons la relation :  $\sin \theta_0 = v_\varphi(k_0)/U$ , soit comme  $v_\varphi = \sqrt{g/k}$  :  $k_0 = \frac{g}{U^2 \sin^2 \theta} = \frac{3}{2} \frac{g}{U^2}$ . Du coup pour un navire avançant en ligne droite à vitesse constante on peut déduire sa vitesse à partir de la mesure de la longueur d'onde ou plus simplement de la période  $T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2\pi}{g} U$  des ondes arrivant sur la plage ou les berges. Ces ondes sont une source d'érosion des berges des rivières et des canaux, on parle alors du phénomène de *batillage*.

### Démonstration géométrique du sillage de Kelvin

Voici une deuxième démonstration inspirée du livre de Whitham [43]. Puisque pour toutes les longueurs d'onde, la droite MH fait en angle droit avec la droite HO, lorsque  $k$  et donc  $\theta$  varie le point H décrit un demi-cercle de diamètre MO (figure 7.11a). Le point H' situé au milieu de MH décrit donc lui un demi-cercle de diamètre MI. L'énergie ne peut donc pas atteindre de point situé à l'extérieur de la droite issue de O et qui tangente le cercle de diamètre MI. Le sinus de l'angle maximum  $\alpha_0$  est donc donné par  $\sin \alpha_0 = \frac{MI/2}{3MI/2} = 1/3$ , soit  $\alpha_0 = 19,47^\circ$ .

### 7.2.9 Traînée de vague et vitesse limite de coque

Les ondes de surface émises par l'obstacle en mouvement rayonnent de l'énergie à l'infini. Cette énergie est fournie par le travail d'une force que l'on appelle la traînée de vague et qui existe donc même si l'on considère le fluide comme parfait. Pour un bateau rapide cette force peut être une composante importante de la force de traînée totale.

Si l'on regarde maintenant les ondes se propageant dans l'axe du navire qui se déplace à sa vitesse  $U$ , elles ont pour vitesse de phase,  $v_\varphi = U$  et donc une longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{g} U^2$ . Les ondes générées par l'étrave sont visibles le long de la coque. Lorsque ces ondes sont en phase avec celles émises par la poupe, c'est-à-dire lorsque  $L = n\lambda$  où  $L$  est la longueur du navire à la flottaison, on observe un maximum d'énergie rayonné par le sillage de vague et donc un maximum de la traînée de vague. Ces vitesses particulières de résonance sont en général évitées par les navires de transport.

*Cas particulier des petits bateaux ou des navires rapides :* Lorsque la longueur d'onde de la vague d'étrave est de l'ordre de la longueur de coque  $L$ , il apparaît une très forte augmentation de la traînée

---

4. Ce problème est assez similaire au maximum de déviation des rayons lumineux dans une goutte d'eau qui explique l'existence de l'arc-en-ciel.

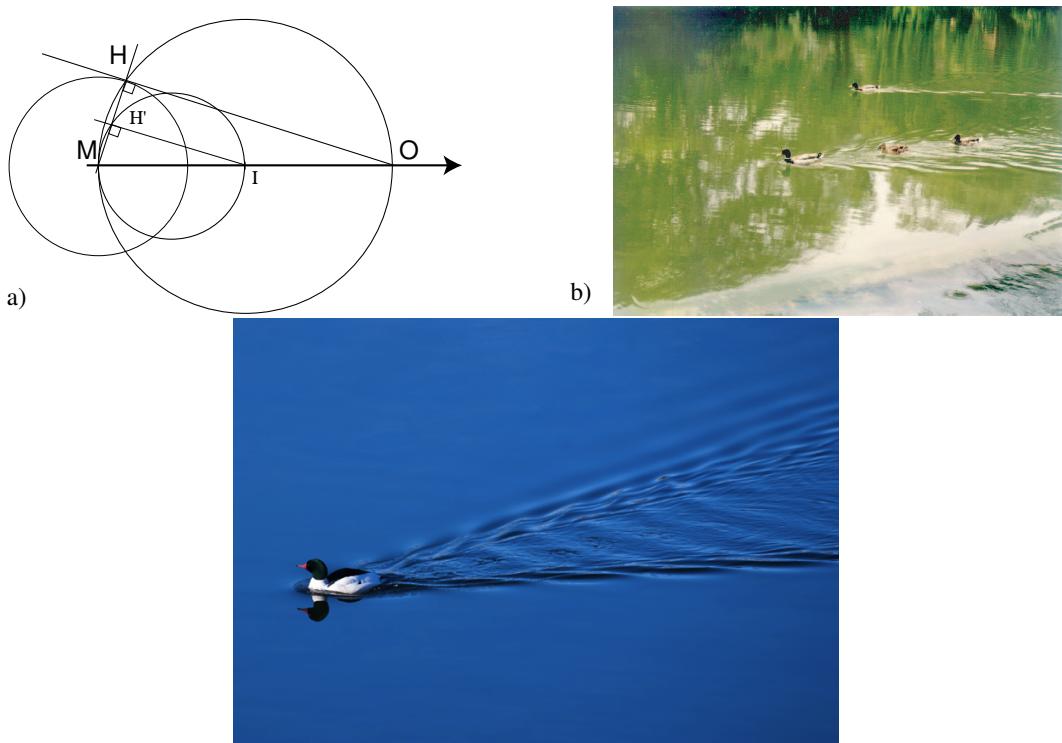


FIGURE 7.11 – Construction géométrique du sillage de Kelvin (a) et exemples du sillage de canards (b,c).

de vague, en effet au-delà de cette vitesse le bateau se retrouve cabré sur sa vague d'étrave. C'est ce que l'on appelle la vitesse limite de coque  $U_{max} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$ . Les navires les plus longs peuvent donc aller plus vite avant d'atteindre leur vitesse limite de coque et c'est pour cela que la longueur de la coque est souvent limitée en régate ! Les navires légers et à la propulsion puissante peuvent toutefois de nos jours dépasser cette vitesse limite en partant au « planing ». On dit aussi qu'ils « déjaugent » (voir figure 7.12b). La transition apparaît lorsque le nombre de Froude de coque  $Fr = U/\sqrt{gL}$  est de l'ordre de 0.4<sup>5</sup>.

Des sillages similaires en "V" peuvent aussi exister dans les fluides stratifiés : dans l'atmosphère (figure 7.13) ou dans certains fjords ([http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM\\_CSP\\_Phenomene-eaux-mortes.xml](http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_Phenomene-eaux-mortes.xml)).

5. Les longueurs d'onde théoriques derrière le bateau ou aux bords du triangle de Kelvin sont respectivement  $2\pi Fr^2 L$  et  $\frac{4}{3}\pi Fr^2 L$ . Pour un bateau rapide ( $Fr > 1$ ) ces longueurs d'onde seraient très supérieures à la longueur de la coque, mais la coque n'est pas capable d'injecter de l'énergie à ces échelles (de même qu'un caillou de 10 cm jeté dans l'eau ne peut pas générer des longueurs d'onde d'un mètre). En conséquence, toutes les longueurs d'onde utiles pour la construction géométrique de sillage ne sont pas présentes et on observe une structure tronquée du sillage de Kelvin avec un angle qui décroît avec la vitesse du bateau.



FIGURE 7.12 – Différence des formes de sillage entre (a) un petit bateau de pêche lent (nombre de Froude petit devant 1) et (b) un navire très rapide (nombre de Froude grand devant 1).

## 7.3 Les ondes gravito-capillaires en eau peu profonde

### 7.3.1 Relation de dispersion en hauteur d'eau finie

En présence d'un fond en  $z = -h$  où la vitesse normale du fluide 1 doit s'annuler, et en supposant un milieu 2 toujours infini, on peut reprendre l'analyse du §7.2.1 et l'on trouve une nouvelle relation de dispersion en eau peu profonde.

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk \tanh(hk) \left[ 1 + \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (7.10)$$

Avec toujours le même nombre d'onde de coupure  $k_c = \sqrt{(\rho_1 - \rho_2)g/\gamma}$ . Cette relation ne diffère significativement de l'équation 7.6 que si  $\lambda > h$ .

**Exercice :** Montrer que dans le cas air/eau il existe une hauteur d'eau optimale pour que les ondes ne soit presque pas dispersives. C'est cette épaisseur  $h = \sqrt{3\gamma/(\rho g)} \approx 4,8$  mm qui est choisie dans les « cuves à ondes » utilisées pour illustrer le comportement ondulatoire de la lumière.

La figure 7.14 montre les fonctions de courant en présence d'un fond. Notez que la vitesse près de la paroi est parallèle au fond. Les trajectoires des particules en eau peu profondes sont des ellipses horizontales de plus en plus aplatises en s'approchant du fond (figure 7.15).

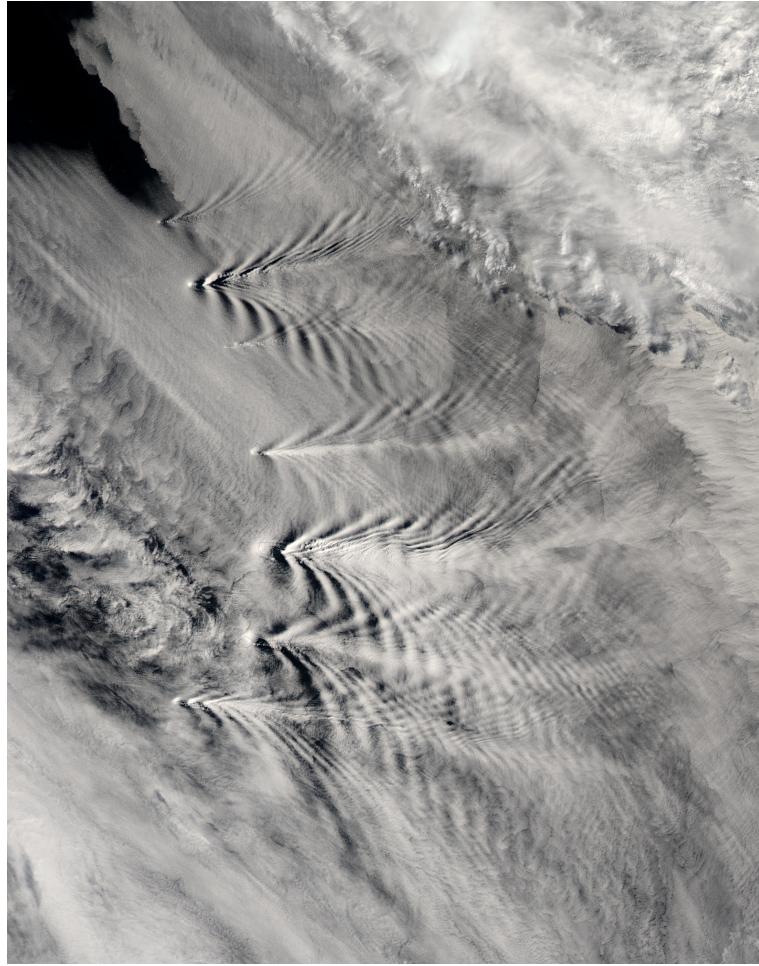


FIGURE 7.13 – Sillages de Kelvin dans l’atmosphère. Ondes observées dans la couche nuageuse en aval des îles Sandwich du Sud (Cliché Nasa, <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=4174>).

### 7.3.2 Cas des ondes longues

Dans le cas des ondes de gravité de grandes longueurs d’onde devant la profondeur d’eau ( $\lambda \gg h$ ) la relation de dispersion se simplifie et devient

$$\omega = \sqrt{gh}k.$$

La vitesse de phase et de groupe sont alors égales et constantes,  $V_\varphi = V_g = \sqrt{gh} = \text{Cste}$ . Ces ondes ne sont plus dispersives. Sous ces ondes le mouvement des particules fluides est simplement un mouvement horizontal oscillant de vitesse  $V_\varphi$  et de pulsation  $\omega$ .

#### Ondes de marée

Et oui, la marée est une onde ! Certes une onde de très grande longueur et de relativement faible amplitude, mais qui se déplace comme une vague à la surface de la Terre. Par exemple, lorsque la

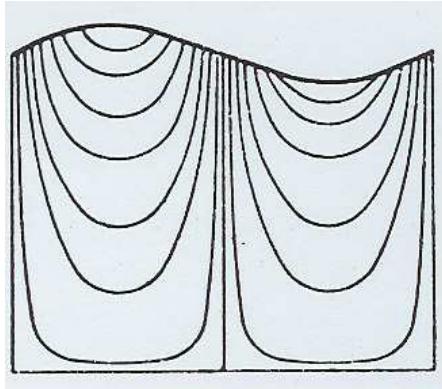


FIGURE 7.14 – Fonction de courant  $\Psi$  à un instant donné pour des ondes en eau peu profonde. D'après [39] page 180.

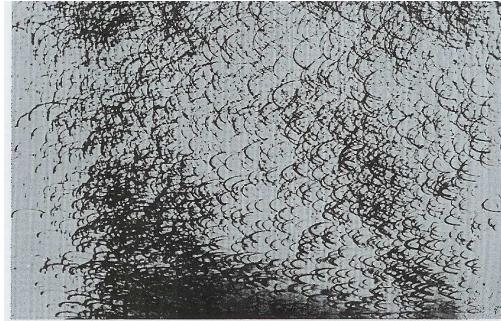


FIGURE 7.15 – Trajectoires des particules sous la vague en eau peu profonde, obtenues par une photo en pose longue. La forme elliptique de ces trajectoires est plus visible près du fond.

marée est haute à Brest, elle est encore basse dans le Pas-de-Calais et l'onde de marée mettra quelques heures à remonter la Manche avant de poursuivre sa route vers la mer du Nord. Si la Terre était composée entièrement de liquide, l'onde de marée présenterait deux longueurs d'ondes autour de la Terre et en ferait le tour en vingt-quatre heures. Mais à l'échelle de cette gigantesque longueur d'onde les océans sont peu profonds et la vitesse de propagation de l'onde de marée est limitée par la profondeur des mers. Si l'on regarde une carte de l'avancée de l'onde de marée dans la Manche (figure 7.16), on peut constater que cette onde va moins vite dans les endroits les moins profonds. On peut estimer sa vitesse de phase  $V_\varphi \simeq 100$  km/h et sa longueur d'onde  $\lambda \simeq 1000$  km, valeurs qui sont en bon accord avec une profondeur moyenne de la Manche d'environ 100 mètres. Par contre, si l'on faisait un calcul sur la base d'une propagation en eau profonde, c'est-à-dire en négligeant la présence du fond sous-marin, on trouverait une vitesse de phase peu réaliste de 4500 km/h pour l'onde de marée !

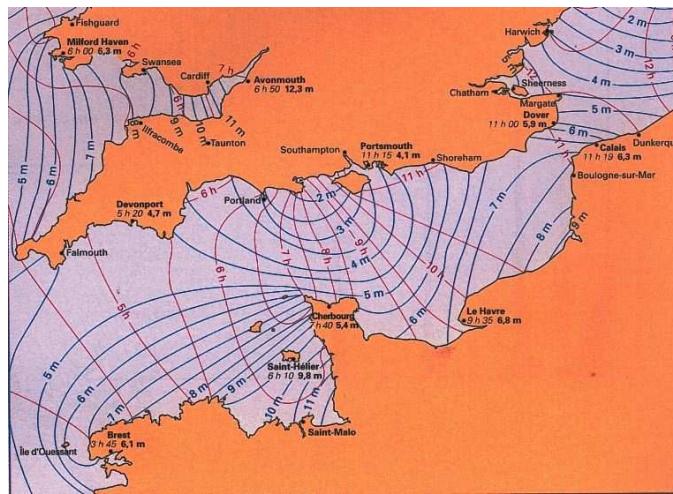


FIGURE 7.16 – Onde de marée remontant la Manche, montrant les isophases et les isoamplitudes.

### Le raidissement des ondes près de la plage

Lorsqu'une onde de gravité se déplace sur un fond qui remonte graduellement, la longueur d'onde va diminuer ainsi et l'amplitude des ondes va augmenter. Pour trouver ces variations, il nous faut écrire que l'énergie par longueur d'onde est conservée et donc  $\zeta_0^2 \lambda = \text{Cste}$  et que la pulsation de l'onde est aussi conservée, soit  $h/\lambda^2 = \text{Cste}$ <sup>6</sup>. Par conséquent près d'une plage la longueur d'onde diminue avec la hauteur d'eau locale comme  $\lambda \sim h^{1/2}$  et l'amplitude augmente comme  $\zeta \sim h^{-1/4}$ . Près de la plage l'approximation linéaire ne sera sans doute plus vérifiée et l'onde voit sa forme évoluer et peut déferler.

### Réfraction et diffraction

La vitesse de phase des ondes diminuant lorsque la profondeur d'eau diminue, les plans de phase tournent, c'est la *réfraction* des ondes que l'on peut observer près d'une plage, les vagues tournent progressivement pour que leur vecteur d'onde soit perpendiculaire à la plage. On peut aussi observer de la *diffraction* lorsqu'une onde rentre dans un port ou fait le tour d'une île (figure 7.17).

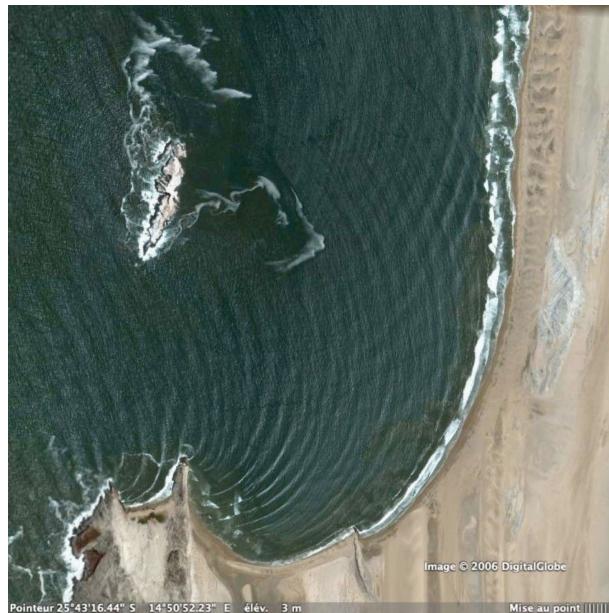


FIGURE 7.17 – Réfraction (dans la baie) et diffraction des vagues (derrière l'île), vu par satellite au large de la Namibie.

## 7.4 Les ondes non-linéaires

Lorsque l'amplitude des ondes n'est pas petite devant la longueur d'onde, l'analyse que nous avons développée n'est plus valable. Une première solution est de développer aux ordres suivants en fonction du petit paramètre  $\epsilon = \zeta_0/\lambda$ .

6. En présence de courant il peut y avoir une modification de la fréquence des vagues par effet Doppler. La fréquence apparente est alors  $\omega - \vec{k} \cdot \vec{U}$  où  $U$  est la vitesse du courant.

Stokes a montré qu'à l'ordre suivant il existe un écoulement moyen généré dans la direction de propagation des ondes. Les trajectoires des particules ne sont plus fermées, c'est ce qu'on appelle la dérive de Stokes.

Dans le cas des ondes de gravité (tension de surface négligée), l'ordre 0 (houle sinusoïdale) du développement en amplitude  $\epsilon$  porte le nom de houle d'Airy (1845). L'ordre 1 porte le nom de houle de Stokes, l'ordre 2 de houle de Rayleigh, etc. Stokes a montré en 1847 qu'après quelques ordres apparaît lorsque  $\epsilon = 14\%$  une singularité à  $120^\circ$  au sommet des vagues.

Il existe aussi des solutions non irrotationnelles, comme la houle trochoïdale (ou cycloïdale) de Gerster (1802).

En eau peu profonde, il existe d'autres modèles de houle, dites houle cnoïdales (qui ressemblent à la forme de ces fonctions elliptiques) dont la limite pour une période infinie est le soliton étudié par S. Russel à partir de 1834, solution de l'équation de Korteweg et De Vries (KdV, 1895).

#### 7.4.1 Le soliton de Russel

La découverte de ce qui devait ensuite s'appeler un « soliton » date de 1834. Cette année-là, un jeune écossais, Scott RUSSEL, écrivit :

*« Je ne puis donner une idée plus nette du phénomène qu'en décrivant les circonstances dans lesquelles il m'apparut pour la première fois. J'observais le mouvement d'un bateau que deux chevaux tiraient rapidement dans un canal étroit, lorsque ce bateau vint à s'arrêter tout à coup : mais il n'en fut pas de même de la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal ; elle s'accumula autour de la proue dans un état de violente agitation, puis, laissant tout à coup le bateau en arrière, se mit à cheminer en avant avec une grande vitesse sous la forme d'une seule grande ondulation, dont la surface était arrondie, lisse et parfaitement déterminée. Cette onde continua sa marche dans le canal sans que sa forme et sa vitesse parussent s'altérer en rien. Je la suivis à cheval et la retrouvai cheminant encore avec une vitesse de 8 à 9 milles à l'heure et conservant sa forme initiale (environ 30 pieds de longueur sur 1 pied à 1 1/2 pied de hauteur). La hauteur de l'onde diminuait graduellement, et après l'avoir suivie pendant un mille ou deux, je la perdis dans les sinuosités du canal. »*

Il y a quelques années l'expérience initiale de Russel a été réalisée à nouveau dans le même canal par des élèves d'une école écossaise (<http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>). Il est à noter que ces canaux écossais sont assez particuliers car ils ont une profondeur faible, de l'ordre du mètre. Russel a étudié la forme et la vitesse de déplacement de ces ondes pendant plus de dix ans, y compris en construisant un canal d'étude au fond de son jardin. Malheureusement pour lui, ce n'est qu'assez récemment que ces ondes solitaires, qui peuvent se propager sur de très grandes distances sans changer de forme ni s'atténuer, ont été redécouvertes. Les solitons sont maintenant très utilisés, en particulier en télécommunication pour transmettre de l'information sur de grandes distances dans les fibres optiques transatlantiques (il s'agit alors d'ondes électromagnétiques).

Cette onde solitaire a pour forme :

$$\zeta = h + \frac{A}{\cosh^2 \left( \frac{x-ct}{\Delta} \right)}$$

où l'amplitude est reliée à la largeur du soliton par  $A = \frac{4}{3} \frac{h^3}{\Delta^2}$  (figure 7.18). Cette onde se déplace à la célérité  $c = \sqrt{g(h+A)}$ .

**Exercice :** Vérifier que cette onde est solution exacte de l'équation non-linéaire de KdV (Korteweg-de Vries) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3c_0}{2h} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{c_0 h^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0.$$

Le troisième terme est le terme non linéaire, le quatrième représente la dispersion. Que vaut  $c_0$  ?

Pour l'établissement de cette équation de KdV, on pourra consulter la référence [36]. Pour cette forme particulière, la dispersion des ondes de gravité est compensée exactement par un terme de focalisation (de dispersion négative) d'origine non-linéaire.



FIGURE 7.18 – Forme du soliton solution de l'équation de KdV.

#### 7.4.2 Ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique est un phénomène très courant que vous pouvez observer tous les jours dans l'évier de votre cuisine. Le filet d'eau qui tombe du robinet se brise au fond de l'évier en une nappe d'eau circulaire, d'abord mince près du point d'impact du jet, puis qui s'épaissit brutalement à une certaine distance de ce point, y formant ce que l'on nomme un ressaut circulaire. Près du centre l'écoulement du liquide est rapide et mince ( $U_1$  et  $h_1$ ), alors qu'à l'extérieur il est plus lent et plus épais ( $U_2 < U_1$  et  $h_2 > h_1$ ). Ici comme l'eau se déplace, la vitesse des ondes par rapport au fond est la somme de la vitesse des ondes par rapport à l'eau et de la vitesse de l'eau par rapport au fond. Etudions d'abord la région centrale. Comme cette zone est mince, les ondes sont assez lentes car en eau peu profonde et elles n'arrivent pas à remonter le fort courant. L'eau les emporte vers l'aval. Le nombre de Froude  $Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gh_1}}$  est très grand devant 1, on parle d'écoulement torrentiel. Par contre, à l'extérieur du ressaut, par conservation du débit, la vitesse de l'eau devient plus faible et les ondes venues de l'extérieur vont pouvoir remonter le courant en direction du centre. Le nombre de Froude  $Fr_2 = \frac{U_2}{\sqrt{gh_2}}$  est petit devant 1, on parle d'écoulement fluvial. Les ondes vont être bloquées sur le cercle où la vitesse des vagues est exactement égale et opposée à la vitesse du courant, c'est-à-dire pour  $Fr_c = 1$ , ce qui protège le centre de tout épaississement. L'accumulation de ces vagues sur ce rayon critique forme un ressaut circulaire correspondant à un changement brutal d'épaisseur. Sa forme exacte dépend du nombre de Reynolds et donc de la viscosité du fluide.

#### 7.4.3 Mascaret

Un mascaret est l'équivalent d'un ressaut hydraulique, mais c'est un ressaut qui se déplace. On en observe parfois qui remonte le courant d'un estuaire lors des grandes marées montantes (figure 7.20). Comme pour le ressaut, le changement d'épaisseur est brutal. En effet, pour des profondeurs d'eau plus faibles et donc des vitesses de l'eau élevées (ici en amont du mascaret), les ondes de surface ne peuvent pas remonter le fleuve alors qu'en aval du ressaut, où la profondeur est plus grande, elles le peuvent. Là encore, les ondes s'accumulent et produisent un changement brusque d'épaisseur. On peut les observer sous la forme d'une ou plusieurs vagues solitaires déferlantes. Certains fleuves sont ou ont été célèbres pour leur mascaret. Le mascaret de la Seine a disparu en 1963 suite à des travaux d'aménagement du fleuve. Avant cette date, il remontait jusqu'à Rouen. Dangereux pour la navigation, les maserets sont par contre très recherchés par les surfeurs, qui peuvent ainsi surfer pendant plusieurs kilomètres la même vague ! Il reste deux maserets visibles en France, l'un à l'embouchure de la

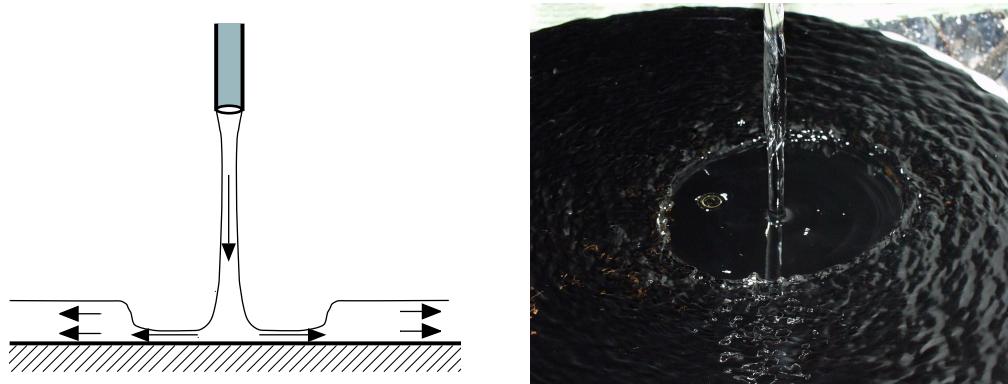


FIGURE 7.19 – Un ressaut hydraulique circulaire tel qu'on peut l'observer au fond d'un évier à fond plat. Un cercle limite une zone centrale mince et lisse d'une zone externe plus épaisse et agitée.

Dordogne près de Saint-Pardon, l'autre plus petit autour du Mont-Saint-Michel, et d'autres bien plus impressionnantes au Canada, en Chine ou au Brésil.

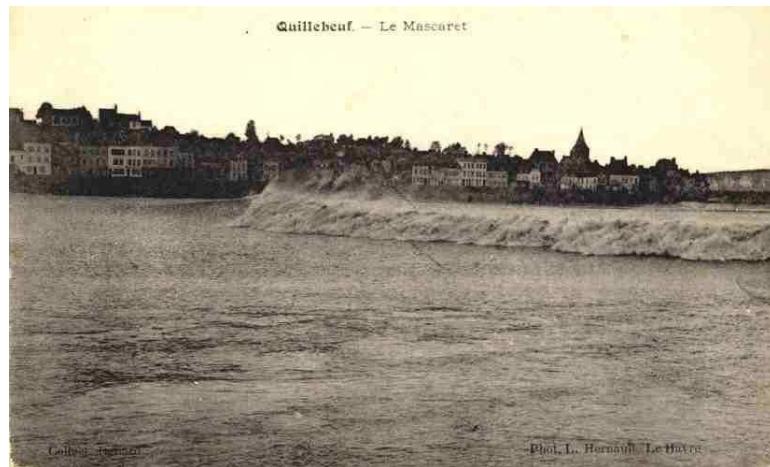


FIGURE 7.20 – Carte postale du mascaret sur la Seine à Quillebeuf (Seine-Maritime) vers 1930. Lors des grandes marées la vague déferlante remontait le fleuve avec le flot (marée montante).

#### 7.4.4 Tsunami

On nomme maintenant *tsunami* ce qui auparavant s'appelait *lame de fond* ou *raz-de-marée*, bien que n'ayant aucun rapport avec la marée. Ce nom d'origine japonaise désigne les vagues engendrées par un glissement de terrain, une éruption volcanique ou un séisme sous-marin. Ces vagues de grande longueur d'onde au large peuvent voyager à grande vitesse sur de très grandes distances et déferlent puissamment en arrivant sur la côte. La longueur d'onde des tsunamis est de l'ordre de la taille de la zone de séisme, et elle peut donc dépasser la centaine de kilomètres. En comparaison, tous les océans peuvent être considérés comme peu profonds et la vitesse de déplacement d'un tsunami est donc seulement fonction de la profondeur de l'eau. En mer, les tsunamis se propagent sur de grandes

distances avec une vitesse de plusieurs centaines de kilomètres par heure mais, étant de grande longueur d'onde et de faible amplitude au large, ils ne sont alors pas dangereux. En arrivant sur la côte, à cause de la diminution de la profondeur, les tsunamis ralentissent et voient donc leur amplitude grandir énormément : elle peut passer d'une amplitude à peine notable au large, de l'ordre de 10 centimètres, à quelques mètres en arrivant à la côte. Ils causent alors de très importants dommages. Pour des raisons d'activités volcanique et sismique, les tsunamis sont surtout observés sur les côtes du Pacifique. En France, le 16 octobre 1979, des glissements de terrain sous-marins, sans doute liés aux travaux d'agrandissement sur la mer de l'aéroport de Nice, causèrent deux tsunamis qui noyèrent douze personnes et détruisirent des centaines de bateaux dans le port. La mer se retira d'abord brutalement, puis revint sous la forme de deux vagues de trois mètres de haut qui frappèrent cinquante kilomètres de la côte.

**Pour en savoir plus :**

- [13] O. Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [26] P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990. Chap. 7, pp184-247.
- [30] J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press, 1978.
- [43] G. Whitham , *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and sons, 1974.
- [21] M. Peyrard et T. Dauxois. *Physique des Solitons*, Collections "Savoirs Actuels", EDP Sciences-CNRS Editions (2004).
- [36] M. Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides*, Masson (1997).

**Sur le web :**

- *Waves in Fluids*, A.E. Bryson, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Waves\\_in\\_Fluids.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Waves_in_Fluids.rm)
- Cours de l'IFREMER : [http://www.ifremer.fr/lpo/cours/vagues\\_ondes/index.html](http://www.ifremer.fr/lpo/cours/vagues_ondes/index.html)
- <http://www.ocean.washington.edu/research/gfd/hydraulics.html>
- sur les eaux mortes [http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM\\_CSP\\_Phenomene-eaux-mortes.xml](http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/XML/db/csphysique/metadata/LOM_CSP_Phenomene-eaux-mortes.xml)
- Sur le mascaret de la Seine <http://www.univ-lehavre.fr/cybernat/pages/mascaret.htm>
- Sur les solitons : <http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>
- Pour voir différents types d'ondes : <http://www.kettering.edu/physics/drussell/Demos/waves/wavemotion.html>.

# Chapitre 8

## Les fluides stratifiés

Marc Rabaud, version du 13 mars 2013

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>La fréquence de Brunt-Väisälä</b>	91
<b>8.2</b>	<b>Réalisation expérimentale d'un liquide stratifié</b>	93
<b>8.3</b>	<b>Relation de dispersion des ondes internes de gravité</b>	93
8.3.1	Structure des ondes internes	94
8.3.2	Ondes océanes	95
8.3.3	Réflexion des ondes internes	95
<b>8.4</b>	<b>Ondes atmosphériques</b>	96
<b>8.5</b>	<b>Pour en savoir plus :</b>	96

---

De même que des ondes peuvent se propager à l'interface de deux fluides de densités différentes (voir chapitre 7 page 67) nous allons voir que l'on peut aussi observer des ondes se propageant à l'intérieur d'un fluide de densité continûment variable (figure 8.1).

### 8.1 La fréquence de Brunt-Väisälä

Imaginons un ballon gonflé à l'hélium et convenablement lesté. Il est possible de le faire flotter « entre deux eaux » dans une pièce fermée et chauffée. En effet l'air chaud étant moins dense se retrouve près du plafond et si le ballon à un poids apparent légèrement négatif au niveau du sol, il pourra avoir un poids apparent positif au niveau du plafond. C'est un cas de stratification stable de l'air dans la pièce. Si le ballon de volume  $V$  et de masse  $m$  se stabilise à l'altitude  $z_0$ , il a un poids apparent nul, qui s'écrit simplement si on suppose que le ballon est petit devant l'échelle de variation de la masse volumique  $(m - \rho(z_0)V)\vec{g} = \vec{0}$ , soit  $m = \rho(z_0)V$ .

Si maintenant on écarte légèrement le ballon de son altitude d'équilibre, il va revenir en oscillant avec une fréquence caractéristique  $N$  que l'on appelle la fréquence de Brunt-Väisälä. Calculons cette fréquence. Pour cela supposons que le ballon soit déplacé d'une petite distance  $\delta z = z - z_0$  vers le haut et nous négligerons pour l'instant la compressibilité de ce ballon. Ecrivons la variation de masse volumique de l'air au premier ordre avec l'altitude (axe  $Oz$  dirigé vers le haut :  $\rho(z) = \rho(z_0) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z$ , avec  $\frac{\partial \rho}{\partial z} < 0$ ). Alors il est soumis à un poids apparent  $[m - \rho(z)V]\vec{g} = -\frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z V \vec{g}$  et le principe



FIGURE 8.1 – Ondes internes dans le détroit de Gibraltar entre l’eau relativement douce de l’Atlantique (à gauche) et l’eau plus salée de la Méditerranée (à droite) (cliché ESA).

fondamental de la dynamique s’écrit :

$$m \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{\partial \rho}{\partial z} V g \delta z$$

soit

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} + N^2 \delta z = 0,$$

avec  $N^2 = -\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{Vg}{m} = -\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{g}{\rho(z_0)}$ . On a donc un mouvement oscillatoire à la pulsation  $\omega = N$ , à condition que  $N$  soit réel, ce qui est le cas si la masse volumique du fluide décroît avec l’altitude (stratification stable,  $\frac{d\rho}{dz} < 0$ ). On a finalement une fréquence propre des petites oscillations  $f = N/2\pi$ , ou plus généralement une pulsation locale (elle peut dépendre de  $z$ ) :

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z}}.$$

Cette fréquence dite de Brunt-Väisälä est importante pour décrire la dynamique de l’atmosphère et des océans. David Brunt et Vilho Väisälä étaient d’ailleurs deux météorologues respectivement gallois et finlandais. Cette fréquence est le paramètre clé de la dynamique des ondes dites internes, ondes se propageant sur de grandes distances dans les océans. Cela dit ce calcul de  $N$  pour un objet ponctuel est très simplifié car il ne tient pas compte du fait que le fluide est un milieu continu et que l’on ne peut déplacer une particule fluide sans modifier le champ de pression.

## 8.2 Réalisation expérimentale d'un liquide stratifié

En pratique on peut réaliser un liquide stratifié stable ( $\rho$  augmentant avec la profondeur) en mélangant de l'eau pure ( $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$  à  $20^\circ\text{C}$ ) avec de l'eau très salée ( $\rho_2 \leq 1300 \text{ kg/m}^3$ ). Une technique classique est de disposer de trois réservoirs de même volume  $V$ , le premier plein d'eau pure, le deuxième d'eau fortement salée et le troisième vide dans lequel on réalise le fluide stratifié. Le système est schématisé sur la figure 8.2. Une pompe de débit  $Q$  pompe l'eau pure de la première cuve dans la seconde. La seconde cuve, qui est brassée en permanence pour y maintenir une masse volumique homogène (mais qui va diminuer au cours du temps) se déverse elle avec le même débit  $Q$  dans le troisième réservoir. L'arrivée de fluide dans cette dernière cuve se faisant en surface (par exemple avec un tuyau muni d'un flotteur) en limitant au maximum les turbulences (débit  $Q$  faible).

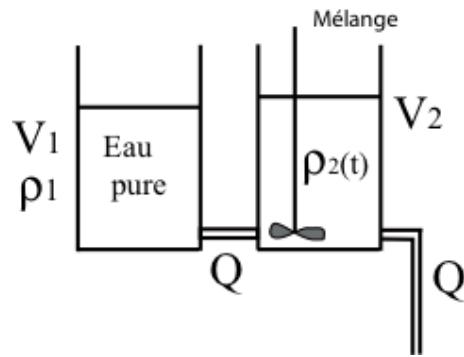


FIGURE 8.2 – Schéma du montage des deux premiers réservoirs. Le deuxième est brassé en permanence de tel façon que la masse volumique  $\rho_2(t)$  y soit homogène.

**Exercice :** a) En écrivant le bilan de masse dans le réservoir 2, trouver l'évolution de  $\rho_2(t)$ . Que vaut  $\rho_2(t_1)$  à l'instant  $t_1$  où le récipient 1 est vide ?

Le troisième récipient (non représenté) est un cylindre de section  $S$  initialement vide. Il est alimenté en permanence au niveau de sa surface libre grâce à un système de flotteur qui en plus limite les turbulences et donc le mélange entre les strates. A l'instant  $t$  le liquide issu du réservoir 2 arrive à la surface du réservoir 3, à une altitude  $z(t)$ .

b) Que vaut à l'instant  $t_1$  la stratification  $\rho(z)$  ? En particulier, quelles sont les valeurs de la masse volumique au fond ( $z = 0$ ) et en surface ( $z = h = V_1/S = 1 \text{ m}$ ) de ce réservoir. Calculer la fréquence  $N(z)$  au fond et en surface. En pratique en utilisant des débits différents entre les cuves on peut réaliser une stratification où  $N$  est pratiquement constant.

## 8.3 Relation de dispersion des ondes internes de gravité

On considère un liquide incompressible stratifié stable, c'est-à-dire dont la masse volumique au repos  $\rho$  décroît avec l'altitude  $z$ .

Quel doit être le profil de  $\rho(z)$  pour que  $N$  soit constant dans tout le fluide. En mer, si on mesure  $N \approx 10^{-2} \text{ rad/s}$ , qu'elle est l'échelle typique des variations de  $\rho$  ?

Dans un réservoir contenant un fluide stratifié tel que  $N = \text{Cste}$  on fait osciller sinusoïdalement un petit cylindre horizontal de diamètre  $d$  avec une très faible amplitude  $A$ . On recherche à quelles conditions des ondes planes propagatives de vecteur d'onde  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  peuvent se propager dans un tel milieu incompressible. Pour cela on pose :

$$\begin{cases} \vec{u} &= \vec{U} \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \\ p &= P \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \\ \Delta\rho &= \Gamma \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \end{cases}$$

où  $p$  est l'écart à la pression hydrostatique, et  $\Delta\rho$  l'écart à la distribution initiale de densité. Les quantités  $\vec{U}$ ,  $P$  et  $\Gamma$  sont supposées petites.

a) On néglige la diffusion moléculaire, on a donc  $D\rho/Dt = 0$ . Montrer qu'on a alors la relation :

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

b) Montrer que la conservation de la masse impose  $\vec{u} \cdot \vec{k} = 0$  et en déduire que les ondes sont des ondes transverses.

c) Ecrire l'équation de Navier-Stokes en négligeant la dissipation visqueuse. En éliminant les variables  $\vec{U}$ ,  $P$  et  $\Gamma$  montrer que la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = N \sqrt{\frac{k^2 - k_z^2}{k^2}} = N |\sin \theta|.$$

d) Montrer que les ondes internes de gravité sont polarisées rectilignes. C'est une des différences avec les ondes inertielles dans les fluides en rotation (§ 13.7 page 163) où la force de Coriolis impose une polarisation circulaire anticyclonique.

### 8.3.1 Structure des ondes internes

On supposera que  $k_y = 0$  (toujours possible par rotation des axes) et on introduira  $\theta$ , angle du vecteur d'onde  $\vec{k}$  avec la verticale.

a) Montrer que  $\omega = N |\sin \theta|$  et que la pulsation ne dépend donc que de  $N$  et de  $\theta$  et pas du module de  $k$ . En déduire que pour une pulsation donnée il existe quatre directions de  $\vec{k}$  possibles à une certaine condition sur  $\omega$  que l'on précisera.

b) Pour un de ces nombres d'onde (par exemple pour  $0 < \theta < \pi/2$ ), décrire le mouvement des plans équiphases et en déduire la direction et le module de la vitesse de phase  $\vec{v}_\varphi$ . Décrire cet angle  $\theta$  dans les images des figures 8.3 et 8.4.

c) Calculer la vitesse de groupe de ces ondes définie par  $\vec{v}_g = (\frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \frac{\partial \omega}{\partial k_z})$ . Montrer que  $\vec{v}_g \cdot \vec{v}_\varphi = 0$ . Montrer que  $\vec{v}_\varphi + \vec{v}_g$  est toujours un vecteur horizontal.

d) Que vaut  $\vec{v}_g$  lorsque  $\omega \rightarrow N$ ? Que se passe-t-il alors? Représenter la structure spatiale originale des vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}_\varphi$  et  $\vec{v}_g$  si  $0 < \theta < \pi/2$  et si  $\pi/2 < \theta < \pi$ . En particulier que vaut l'angle  $\beta$  entre  $\vec{v}_g$  et l'axe vertical si  $0 < \theta < \pi/2$  et si  $\pi/2 < \theta < \pi$ ? Que se passe-t-il dans le cas des très faibles pulsations  $\omega$ ?

e) Lorsque la pulsation  $\omega$  est fixée, quel paramètre de l'expérience peut sélectionner la longueur d'onde et la largeur du paquet d'onde ?

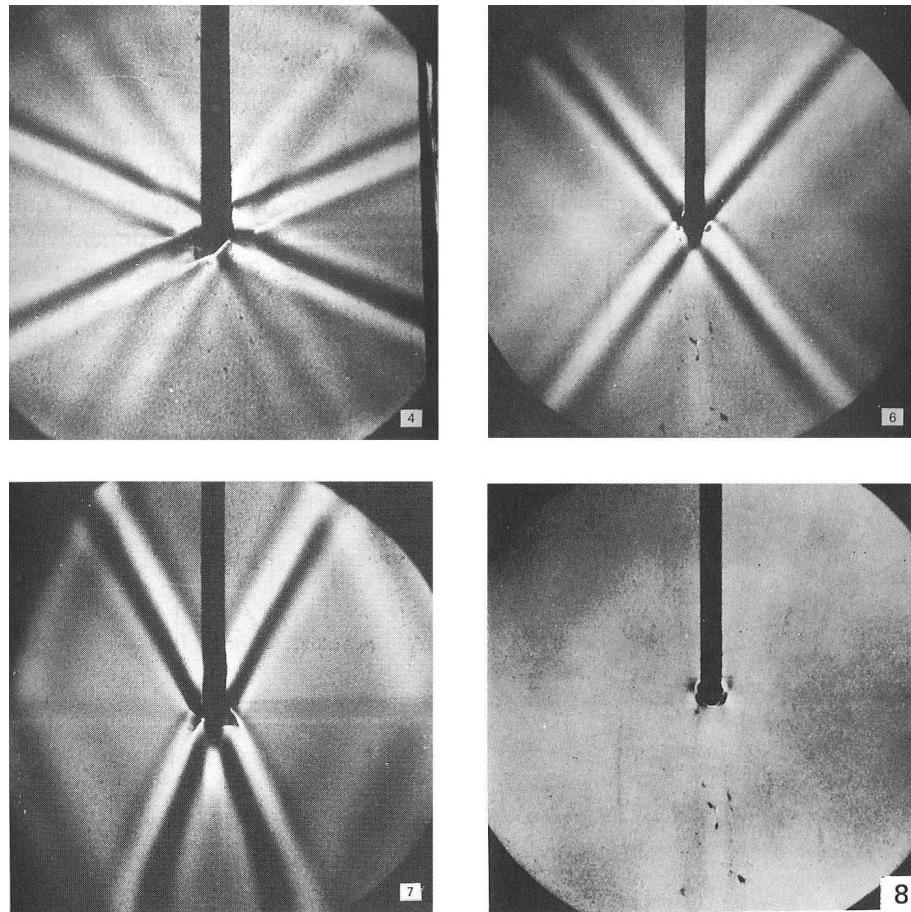


FIGURE 8.3 – Images obtenues par la technique de Schlieren (mesure des variations d'indice optique), mettant en évidence les écarts au gradient de densité linéaire  $\rho(z)$ . La tige verticale noire maintient un cylindre horizontal, non visible, en oscillation verticale de faible amplitude à la fréquence  $\omega$ . (4)  $\omega/N = 0,419$ , (6)  $\omega/N = 0,699$ , (7)  $\omega/N = 0,900$ , (8)  $\omega/N = 1,11$ . D'après [43] p.424.

### 8.3.2 Ondes océanes

a) L'océan est un milieu stratifié à cause de gradients verticaux de température et de salinité. On observe que la fréquence de Brunt-Väisälä locale présente un maximum  $N \sim 0.01$  rad/s aux environs de  $[-100, -500]$  mètres (niveau de la thermocline) (figure 8.5). Montrer que l'existence de ce maximum conduit à un changement de direction de la vitesse de groupe. En déduire l'effet de cette couche thermocline.

b) Quels mécanismes peuvent atténuer les ondes internes ?

### 8.3.3 Réflexion des ondes internes

Lors d'une réflexion sur une paroi, une onde garde toujours sa pulsation. La relation de dispersion particulière des ondes internes impose donc que  $|\sin \theta| = Cste$ . Décrire la réflexion des ondes sur des surfaces horizontales et verticales. Que peut-il se passer pour certaines surfaces inclinées ? Le nombre d'onde réfléchi est-il toujours conservé ?

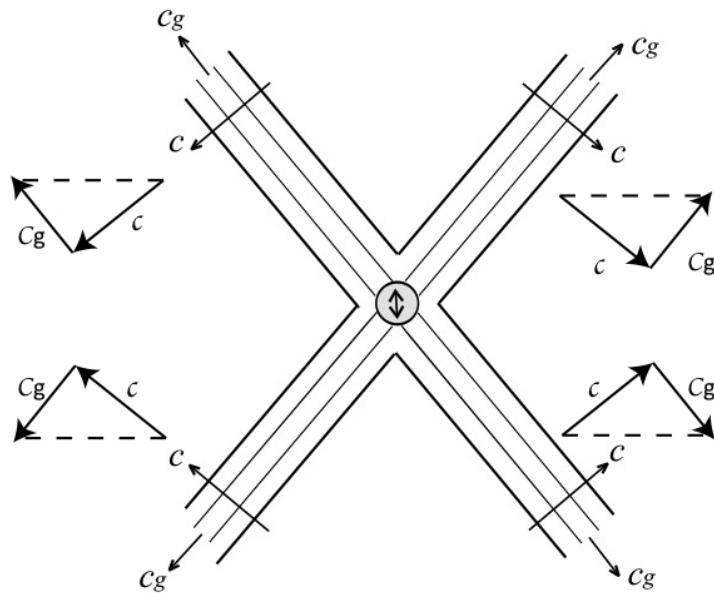


FIGURE 8.4 – Schéma montrant les directions où des ondes sont observées pour une oscillation à fréquence imposée. Noter les directions des vitesses de phase et des vitesses de groupe dans chaque faisceau.

## 8.4 Ondes atmosphériques

Aussi appelées ondes aval ou ondes orographiques ou *lee waves* en anglais, elles sont observées sous le vent (en aval) des montagnes. Dans l'atmosphère il faut refaire le calcul de la fréquence car la masse volumique dépend de la pression et de la température. Il faudra tenir compte de la transformation adiabatique de l'air pour calculer  $N$ . Voir un bel exemple d'onde orographique sur la figure 7.13 page 84.

**Exercice :** Refaire le calcul de la fréquence de Brunt-Väisälä en tenant compte de la compressibilité du gaz. On supposera que le gaz satisfait à la loi des gaz parfaits et que les transformations sont adiabatiques (voir chapitre ?? page ??). Montrer en particulier que :

$$N(z) = \sqrt{\frac{g}{T(z)} \left( -\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{g}{c_p} \right)}.$$

et qu'il faut donc un certain écart au profil correspondant à une atmosphère adiabatique pour avoir une atmosphère stable.

## 8.5 Pour en savoir plus :

Joli développement et propagation de ces ondes internes sur la page <http://www.phys.ocean.dal.ca/programs/doubdiff/pics/iw1.mpeg>.

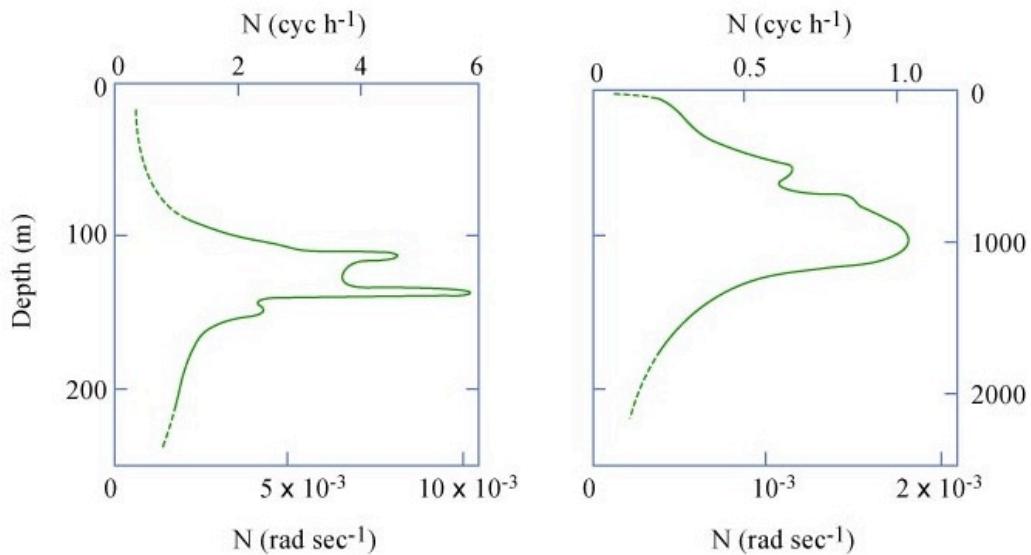


FIGURE 8.5 – Variation de la fréquence locale de Brunt-Väisälä  $N(z)$  en fonction de la profondeur. D’après Phillips (Phillips, O. M. (1977), The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge University Press).

*Stratified Flow*, R.R. Long, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Stratified\\_Flow.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Stratified_Flow.rm)  
et aussi les références [41] page 184, [26] et [30] p. 285.



# Chapitre 9

## La viscosité

Marc Rabaud, version du 17 mars 2013

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Tenseur des déformations <math>[\epsilon]</math> (<i>strain tensor</i>) . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>9.2</b>	<b>Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse <math>[G]</math> . . . . .</b>	<b>100</b>
9.2.1	Décomposition d'un tenseur . . . . .	100
9.2.2	Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[\epsilon]$ des déformations pures . . . . .	101
9.2.3	Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures . . . . .	102
<b>9.3</b>	<b>Equation constitutive des fluides newtoniens . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>9.4</b>	<b>Divergence du tenseur des contraintes visqueuses . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>9.5</b>	<b>Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>9.6</b>	<b>Signification physique de la viscosité . . . . .</b>	<b>105</b>
<b>9.7</b>	<b>Mesure de la viscosité . . . . .</b>	<b>107</b>
9.7.1	Quelques viscosimètres simples . . . . .	107
9.7.2	Quelques exemples de rhéomètre . . . . .	107

---

Un fluide parfait n'a pas de viscosité, c'est-à-dire que deux veines de fluides vont pouvoir s'écouler côté à côté à des vitesses différentes sans interagir. Pour un fluide réel, à cause de l'agitation moléculaire d'origine thermique, il existe des collisions entre les molécules des deux veines et donc des échanges progressifs de quantité de mouvement. La viscosité est le coefficient qui mesure cette diffusion de la quantité de mouvement.

### 9.1 Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (*strain tensor*)

Lorsqu'on tire avec une force constante sur une barre de métal, elle commence par s'allonger. Ensuite la longueur de la barre reste constante (sauf en cas de fluage) et l'on peut alors définir l'allongement relatif d'un vecteur initial  $\overrightarrow{AB}$  aligné avec l'axe de traction par la quantité :

$$\vec{\epsilon}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}}{\| AB \|}.$$

A cette déformation longitudinale s'ajoutent des déformations de compression transverses à la direction d'élongation. Si maintenant la contrainte a lieu dans une direction quelconque, on peut connaître la déformation d'un volume élémentaire si on connaît les 9 coefficients  $\epsilon_{ij}$  et donc le *tenseur des déformations*  $[\epsilon]$  (appelé *strain tensor* en anglais). Le tenseur des déformations est la réponse du solide à une contrainte appliquée. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire [18] il y a proportionnalité entre le tenseur des déformations  $[\epsilon]$  et le tenseur des contraintes  $[\sigma]$ , c'est-à-dire qu'il existe un tenseur de rang 4 tel que :

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Heureusement souvent les propriétés d'isotropie du matériau permettent de ramener les  $9 \times 9 = 81$  coefficients du tenseur  $[A]$  à seulement deux coefficients : le module d'Young,  $E$ , (s'exprime en GPa par exemple) qui caractérise la raideur du matériau et le coefficient de Poisson,  $\mu$ , (sans dimension  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ ) qui caractérise sa diminution de volume sous compression.

## 9.2 Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$

Dans le cas d'un fluide soumis à une contrainte constante, la déformation se poursuit indéfiniment, contrairement au cas du solide. Par contre, la « vitesse de déformation » va être une fonction de l'intensité de la contrainte. On nomme cette vitesse de déformation, le *taux de déformation*. La encore, on peut définir un tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor)  $[\dot{\epsilon}]$ , dérivée par rapport au temps du tenseur des déformations, qui n'est rien d'autre qu'un tenseur que nous avons déjà rencontré au chapitre 3, le *tenseur des gradients de vitesse* :  $[\dot{\epsilon}] = [G] = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$ .

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon] = [G].$$

Le tenseur  $[G]$  décrit la variation spatiale du vecteur vitesse au voisinage d'un point. En effet la différence de vitesse entre un point  $\vec{r}$  et un point  $\vec{r} + \vec{dr}$  s'écrit :

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{v}(\vec{r}) = \vec{dr} = [G] \cdot \vec{dr},$$

car

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dr}. \quad (9.1)$$

La dimension des coefficients  $G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  est l'inverse d'un temps (par exemple des  $s^{-1}$ ).

### 9.2.1 Décomposition d'un tenseur

Tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'une tenseur antisymétrique. Pour le tenseur des gradients de vitesse, il suffit d'écrire :

$$[G] = [e] + [w] \quad (9.2)$$

avec

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (9.3)$$

et

$$\boxed{\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}. \quad (9.4)$$

Le tenseur  $[e]$  est symétrique ( $e_{ij} = e_{ji}$ ) et  $[\omega]$  est antisymétrique ( $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ). On peut aussi écrire :

$$[e] = \frac{1}{2} ([G] + {}^t[G])$$

et

$$[w] = \frac{1}{2} ([G] - {}^t[G]).$$

### 9.2.2 Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures

Le tenseur  $[e]$  (Equ. 9.3) étant symétrique est caractérisé par 6 coefficients indépendants.

Notons déjà que  $\text{trace } [e] = \text{trace } [G] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } (\vec{v})$ . Pour un fluide incompressible on a donc,  $\text{trace } [e] = 0$ .

Le tenseur  $[e]$  étant symétrique dans une base orthonormée il est en chaque point diagonalisable. Dans la base orthonormée construite localement sur ses vecteurs propres il s'écrit donc :

$$[e] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Il n'y a maintenant plus que trois coefficients (les valeurs propres) mais cette base locale est définie par trois autres coefficients (par exemple les trois angles d'Euler), ce qui redonne bien les 6 coefficients de départ. Si l'écoulement est incompressible,  $a + b + c = 0$ . Il y a donc de façon générique soit une direction contractante ( $a < 0$ ) et 2 directions dilatantes ( $b$  et  $c > 0$ ), soit l'inverse (figure 9.1).

Un tel écoulement qui n'induit pas de rotation de la particule fluide, est dit de *déformation pure*.

En conclusion, les termes symétriques du tenseur des gradients de vitesse  $[G]$  correspondent à des déformations pures.

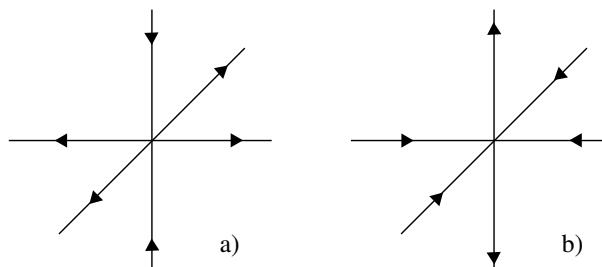


FIGURE 9.1 – Les deux cas génériques d'une déformation pure d'un écoulement incompressible 3D dans sa base orthonormée locale des vecteurs propres. a) une direction contractante (ici verticale) et les deux autres dilatantes, b) une direction dilatante (ici verticale) et les deux autres contractantes.

- Exercices à deux dimensions :

- Etudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  (figure 9.2a) si  $[G] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ .
- De même étudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  si  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ .

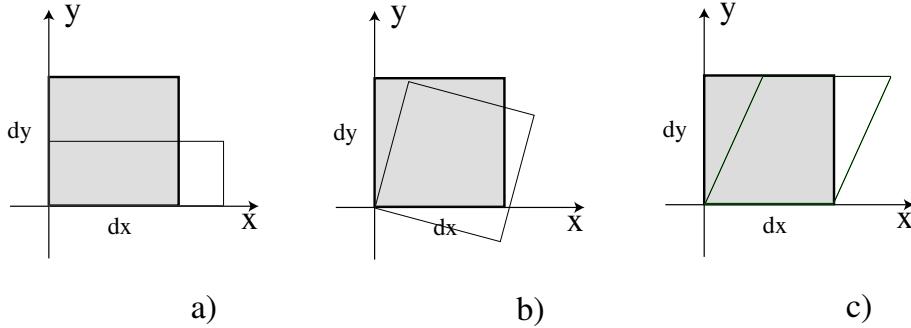


FIGURE 9.2 – Trois cas de transformation d'une particule fluide dans un écoulement bidimensionnel.

### 9.2.3 Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures

La partie antisymétrique de  $[G]$  s'écrit :  $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ . Il est caractérisé par trois coefficients,

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.5)$$

Construisons le vecteur  $\vec{\omega} = \{w_k\}$  ayant pour composantes  $w_k = -\epsilon_{ijk} \omega_{ij}$  où  $\epsilon_{ijk}$  vaut 0, -1 ou +1 selon que deux des indices sont égaux, qu'ils sont dans le sens indirect ou qu'ils sont dans le sens direct. Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -\omega_{23} + \omega_{32} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \omega_2 = \omega_{13} - \omega_{31} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \omega_3 = \omega_{21} - \omega_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{array} \right..$$

On constate donc que  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}(\vec{v})$ . Le vecteur  $\vec{\omega}$  s'appelle le vecteur **vorticité** de l'écoulement, il caractérise la rotation locale des particules fluides. C'est un vecteur très important pour l'étude de la dynamique des tourbillons (voir chapitre 12).

Si on récapitule, on a donc  $\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl} = [e] \cdot \vec{dl} + [\omega] \cdot \vec{dl}$ . En utilisant l'équation 9.5, on a :

$$[\omega] \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{dl}).$$

Donc si  $[e] = 0$ , on a  $\vec{dv} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \wedge \vec{dl}$ , ce qui correspond à une *rotation locale pure* de vecteur rotation instantanée  $\frac{1}{2}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\text{rot}}\vec{v}$ .

Il est important de noter qu'une rotation pure ne déforme pas la particule fluide et il n'y a donc pas de mouvements relatifs du fluide à l'intérieur. En conséquence la rotation pure ne dissipe pas d'énergie.

Rappelons qu'un mouvement quelconque d'une particule fluide est la somme d'une translation pure ( $\vec{dv} = \vec{0}$ ), d'une rotation pure ( $\vec{dv} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \wedge \vec{dl}$ ) et d'une déformation pure ( $\vec{dv} = [e] \cdot \vec{dl}$ ). Seule la déformation pure dissipe de l'énergie. On peut facilement illustrer ce résultat en faisant tourner côté-à-côte un œuf dur et un œuf cru. Le second est beaucoup plus difficile à mettre en rotation. Pourquoi ?

• **Exercices à deux dimensions :**

- Etudier les déformations d'un carré pendant  $dt$  (figure 9.2b) si  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$ .
- Etude d'un cisaillement simple (qui n'est pas une déformation pure), l'écoulement de Couette plan :  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tracer le profil de vitesse de cet écoulement, calculer sa vorticité et son taux de déformation. Application à la déformation d'un carré pendant  $dt$  (figure 9.2c).
- A quelle condition deux lignes de courant se croisent-elles à angle droit ?

### 9.3 Equation constitutive des fluides newtoniens

Nous avons vu au chapitre 4 que le seul terme qui va dissiper de l'énergie dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique (équation 3.3 page 29) est le terme qui fait intervenir le tenseur des contraintes visqueuses  $\vec{\text{div}}[\sigma']$ . Or ni la translation globale de la particule fluide, ni sa rotation en bloc ne déforme la particule fluide (pas de mouvement relatif à l'intérieur). Seules les déformations pures dissipent de l'énergie, et donc le tenseur des contraintes visqueuses ne peut dépendre que de la partie symétrique du tenseur des déformations. Ce que l'on écrit :

$$[\sigma'] = f([e]).$$

On appelle **fluides newtoniens** les fluides pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses dépend **uniquement et linéairement** des valeurs **instantanées** des déformations. Soit :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl},$$

où nous utilisons la convention d'Einstein (sommation implicite de tous les indices redoublés).  $[A]$  est alors un tenseur de rang 4. Si le milieu est isotrope (invariant dans les directions 1, 2 et 3), on peut montrer de façon générale [18] qu'un tel tenseur, au lieu d'avoir 81 coefficients indépendants, n'en a que trois,  $A$ ,  $A'$  et  $B$  et s'écrit :

$$A_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

$\delta_{ij}$  est l'indice de Kronecker (il vaut zéro si  $i \neq j$  et 1 si  $i = j$ ). Comme de plus le tenseur des contraintes visqueuses est symétrique, ( $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$ ) on en déduit  $A = A'$ .

$$\sigma'_{ij} = A(\delta_{ik} \delta_{jl} e_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} e_{kl}) + B \delta_{ij} \delta_{kl} e_{kl} = A(e_{ij} + e_{ji}) + B \delta_{ij} e_{ll} = 2Ae_{ij} + B \delta_{ij} e_{ll},$$

en effet le tenseur  $[e]$  est aussi symétrique. On pose en général  $A = \eta$  et  $B = \zeta - \frac{2}{3}\eta$ . La constante  $\eta$  est appelée la viscosité de cisaillement et  $\zeta$  (zéta) la viscosité de volume. Alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}) + \zeta\delta_{ij}e_{ll}. \quad (9.6)$$

Le premier terme est de trace nulle (en effet  $\delta_{ll} = 3$ ), le deuxième terme fait apparaître la trace du tenseur  $[e]$  qui caractérise la compressibilité de l'écoulement. Or  $\text{trace}[e] = \text{trace}[G] = \text{div}(\vec{v})$ . Donc **pour un fluide incompressible**,  $\text{div}(\vec{v}) = e_{ll} = 0$ , et donc  $[\sigma'] = 2\eta[e]$ , soit l'expression finale des contraintes visqueuses pour un fluide newtonien incompressible :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}. \quad (9.7)$$

## 9.4 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

Repartons maintenant de la relation 9.6. La composante  $i$  du vecteur divergence du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit (voir §3.6) :

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 2\eta \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \frac{\partial e_{ll}}{\partial x_j}.$$

Or  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ , donc :

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + (\zeta - \frac{2}{3}\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \nabla^2 v_i + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} [\text{div}(\vec{v})].$$

Soit vectoriellement :

$$\boxed{\vec{\text{div}} [\sigma'] = \eta \vec{\nabla}^2(\vec{v}) + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \vec{\nabla} [\text{div}(\vec{v})]}. \quad (9.8)$$

## 9.5 Équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique nous avions trouvé (Eq. 3.3) :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \vec{\text{div}} [\sigma']$$

De l'équation 9.8 on déduit directement l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien éventuellement compressible :

$$\boxed{\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + (\zeta + \frac{1}{3}\eta) \vec{\nabla} [\text{div}(\vec{v})]}. \quad (9.9)$$

La viscosité  $\eta$  est appelé la viscosité de cisaillement ou aussi la viscosité dynamique (elle est parfois notée  $\mu$  et s'exprime en Pa.s). La viscosité de volume  $\zeta$  est en général faible, elle intervient par exemple dans l'atténuation du son dans un fluide. Dans le cas où le fluide est incompressible ( $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ ) on obtient **l'équation de Navier-Stokes** d'un fluide newtonien **incompressible** :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (9.10)$$

Où  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  est appelé la viscosité cinématique (unité classique, le  $m^2 s^{-1}$ ). Comme la viscosité dynamique, c'est une propriété du fluide et pas de l'écoulement. La viscosité cinématique caractérise la viscosité de cisaillement par unité de masse contrairement à  $\eta$  qui est la viscosité de cisaillement par unité de volume.

## 9.6 Signification physique de la viscosité

Le coefficient de viscosité correspond au coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. C'est grâce à la viscosité que le mouvement d'une couche de fluide peut induire des mouvements dans les couches voisines (voir films du DVD [22] et les exemples du §10.3.5).

Le coefficient de viscosité caractérise aussi la dissipation d'énergie. Montrons que la puissance dissipée par frottement interne n'existe que si la particule fluide est déformée et que la puissance dissipée par unité de volume s'écrit :

$$\epsilon = -2\eta e_{ij}e_{ij} = -\frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

avec une sommation implicite sur tous les indices redoublés (notations tensorielles) :

$$e_{ij}e_{ij} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2,$$

où plusieurs de ces termes sont égaux car le tenseur des déformations est un tenseur symétrique. Cette puissance est dissipée en chaleur dans le fluide, d'où le signe moins.

**Démonstration :** Voici une démonstration inspirée de la référence [1] p. 216.

L'énergie cinétique  $E_c$  contenue dans un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$E_c = \iiint_{VC_m} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 d\tau.$$

Calculons la dérivée temporelle de cette énergie cinétique. En appliquant le théorème du transport pour une quantité scalaire (Equ. 2.2 page 18) et la conservation de la masse,  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$  (Equ. 2.3 page 19) :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{VC_m} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial(\rho \vec{v}^2)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 \vec{v}\right) \right] d\tau \\ &= \iiint_{VC_m} \left[ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v}^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) \right] d\tau \\ &= \iiint_{VC_m} \frac{1}{2} \rho \frac{D \vec{v}^2}{Dt} d\tau. \end{aligned}$$

En introduisant la convention d'Einstein sur les indices redoublés, la dérivée de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} d\tau.$$

En introduisant le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  pour les forces de surface, le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire :  $\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$  (voir § 3.6 page 28), donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \left[ \rho v_i g_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] d\tau.$$

Le terme qui contient le tenseur des contraintes peut s'écrire :  $v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  et on a donc :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i g_i d\tau + \iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau - \iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau.} \quad (9.11)$$

- Le premier terme du membre de droite de l'expression précédente,

$$\iiint_{VC_m} \rho \vec{v} \cdot \vec{g} d\tau$$

représente la variation d'énergie potentielle (la puissance) due à la force de gravité, ou plus généralement à toutes les forces volumiques.

- Le deuxième terme peut écrire :

$$\iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau = \iiint_{VC_m} \operatorname{div} ([\sigma] \cdot \vec{v}) d\tau = \iint_{SC_m} ([\sigma] \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{SC_m} \vec{v} \cdot \vec{\sigma}(\vec{n}) dS.$$

Il représente donc la variation d'énergie due aux forces de surface  $\vec{\sigma}(\vec{n})dS$  qui s'exercent sur chaque élément de la surface du volume de contrôle.

- Enfin le troisième terme peut se transformer encore. En effet

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

puisque on peut permuter les indices muets  $i$  et  $j$  et que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  car le tenseur des contraintes est symétrique.

De plus  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  (Equ. 9.7 page 104), donc

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\eta e_{ij} e_{ij}$$

car  $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Donc le troisième terme s'écrit finalement :

$$-\iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau = -2\eta \iiint_{VC_m} e_{ij} e_{ij} d\tau.$$

Ce dernier terme, toujours négatif, représente donc la dissipation d'énergie. La dissipation est proportionnelle au coefficient de viscosité dynamique  $\eta$ , et elle est toujours présente si le tenseur des déformations est non nul. Seule la déformation des particules fluides dissipe de l'énergie, pas leur translation ni leur rotation.

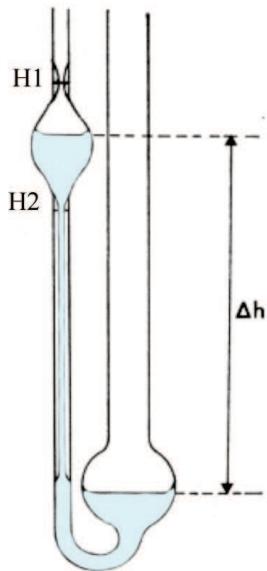


FIGURE 9.3 – Viscosimètre à tube capillaire.



FIGURE 9.4 – Viscosimètre à chute de bille.

## 9.7 Mesure de la viscosité

Il existe de nombreux appareils pour mesurer la viscosité. La table 9.7.2 donne quelques exemples de viscosité pour des fluides courants. On distingue les *viscosimètres* utilisés pour les fluides newtoniens, qui font une mesure comparative et doivent donc être étalonnés, des *rhéomètres* qui mesurent directement les contraintes et les taux de déformation. On réalise en général des écoulements rhéologiques, c'est-à-dire des écoulements où un seul terme du tenseur des gradients de vitesse est non nul et il faut de plus qu'il soit constant en temps et homogène en espace. On appelle taux de cisaillement le gradient de vitesse imposé, noté parfois  $\dot{\gamma}$  ou  $\dot{\epsilon}$ , par exemple  $\dot{\epsilon} = \partial v_x / \partial y$ . Ce coefficient est homogène à l'inverse d'un temps ( $s^{-1}$ ).

### 9.7.1 Quelques viscosimètres simples

Avec un viscosimètre à tube capillaire on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince (figure 9.3). Ce temps est simplement proportionnel à la viscosité pour un fluide newtonien. On fait de même dans un viscosimètre à chute de bille, où cette fois l'on mesure le temps de chute d'une bille à travers un tube préalablement rempli du liquide à tester (figure 9.4). Dans la méthode de la *louche percée* utilisée dans l'industrie de la peinture, on mesure le temps de vidange d'une louche percée d'un trou calibré.

### 9.7.2 Quelques exemples de rhéomètre

Dans un rhéomètre on cherche à réaliser des écoulements particuliers, où les déformations sont homogènes en espace et constantes en temps. Pour mesurer la viscosité de cisaillement on utilise des écoulements où il n'existe qu'une seule composante du tenseur des gradients de vitesse : par exemple la géométrie de Couette cylindrique (§10.3.2) ou la géométrie du cône/plan (figure 9.5).

La plupart des rhéomètres peuvent travailler à cisaillement imposé (constant strain) ou bien à contrainte imposée (constant stress). A partir des courbes donnant l'évolution de la contrainte  $\sigma$  avec le

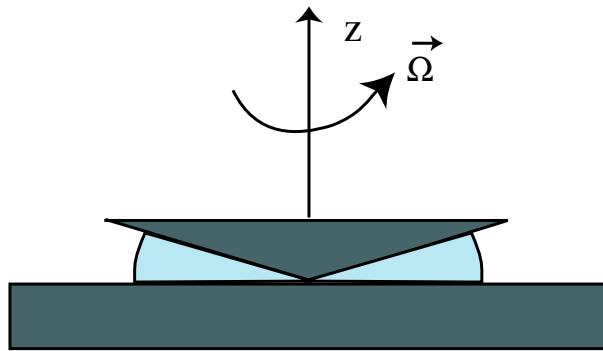


FIGURE 9.5 – Principe du rhéomètre cône/plan. Il peut fonctionner soit à contrainte imposée (couple imposé) soit à cisaillement imposé ( $\vec{\Omega} = Cste$ ) et il permet de plus de mesurer l'apparition éventuelle des contraintes normales  $\sigma_{zz}$ , ce qui est important pour caractériser les fluides viscoélastiques.

cisaillement  $\dot{\epsilon}$  que l'on appelle des rhéogrammes, on peut décrire la variation de la viscosité apparente avec l'intensité du taux de cisaillement  $\eta = \sigma/\dot{\epsilon} = f(\dot{\epsilon})$ .

La figure 9.6 montre que la viscosité est une propriété des fluides qui, même pour un fluide newtonien, dépend fortement de la température, mais différemment pour un gaz ou un liquide ! Dans un liquide les viscosités dynamique et cinématique diminuent avec la température (loi de Andrade,  $\log(\eta) \approx A + \frac{B}{T}$ ). Pour un gaz au contraire elles augmentent avec la température (l'agitation moléculaire augmentant, la diffusion de la quantité de mouvement augmente aussi).

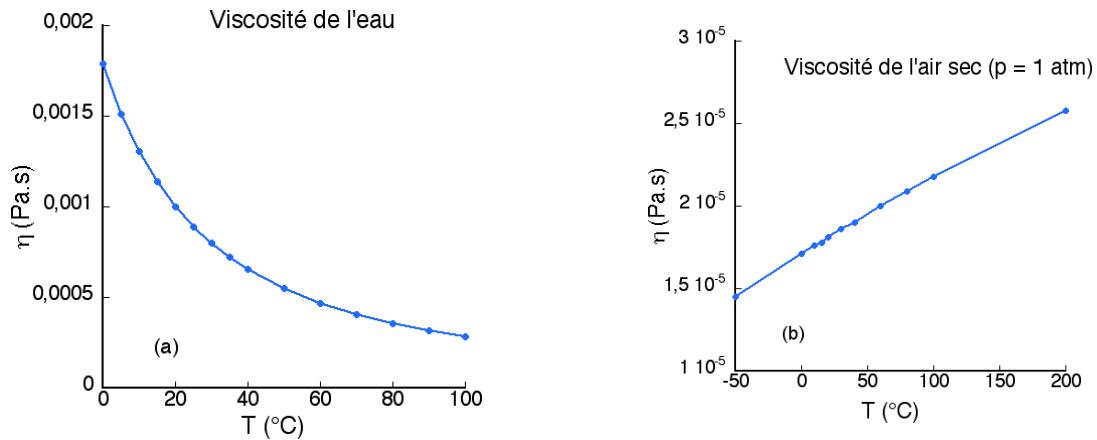


FIGURE 9.6 – Courbes montrant l'évolution de la viscosité dynamique  $\eta$  de l'eau (a) et de l'air sec (b) en fonction de la température, à une pression de 1 atm. (D'après [4] p. 594-597).

	Viscosité dynamique $\eta$ (Pa.s)	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ( $m^2/s$ )
Eau (20°C)	$10^{-3}$	$1,006 \cdot 10^{-6}$
Air (20°C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$	$15,1 \cdot 10^{-6}$
Glycérine (20°C)	1,49	$1180 \cdot 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,116 \cdot 10^{-6}$
$CO_2$ (20°C, 1 atm.)	$14,7 \cdot 10^{-6}$	$8,03 \cdot 10^{-6}$
$H_2$ (20°C, 1 atm.)	$8,83 \cdot 10^{-6}$	$105 \cdot 10^{-6}$

TABLE 9.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides newtoniens à 20°C.



# Chapitre 10

## L'équation de Navier-Stokes

Marc Rabaud, version du 27 mars 2013

### Sommaire

---

<b>10.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes . . . . .</b>	<b>111</b>
10.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds . . . . .	113
10.1.2 Quelques autres nombres sans dimension . . . . .	114
<b>10.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques . . . . .</b>	<b>114</b>
10.2.1 Les conditions cinématiques . . . . .	114
10.2.2 Les conditions dynamiques . . . . .	117
10.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites . . . . .	118
<b>10.3 Les écoulements parallèles . . . . .</b>	<b>119</b>
10.3.1 Ecoulement de Couette plan . . . . .	119
10.3.2 Ecoulement de Couette circulaire . . . . .	120
10.3.3 Ecoulement de Poiseuille plan . . . . .	121
10.3.4 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire . . . . .	121
10.3.5 Solutions instationnaires . . . . .	123
<b>10.4 Les écoulements de Stokes (à très faible nombre de Reynolds) . . . . .</b>	<b>123</b>
10.4.1 L'équation de Stokes . . . . .	123
10.4.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes . . . . .	125
10.4.3 La sédimentation . . . . .	128
10.4.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds . . . . .	129
<b>10.5 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification . . . . .</b>	<b>130</b>
10.5.1 Calcul d'un palier lubrifié . . . . .	132
10.5.2 Force d'adhérence sur un disque . . . . .	133

---

### 10.1 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Dans le chapitre précédent, nous avons montré (équation 9.10) que l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}}. \quad (10.1)$$

Le premier terme s'appelle le terme instationnaire, le second le terme inertiel. A droite on a successivement les forces de pression, les forces de volume et les forces visqueuses. Cette équation, écrite par unité de masse, est dimensionnée mais on peut chercher à l'adimensionner.

On adimensionne les variables par :

$$t = \hat{t} T, \quad x_i = \hat{x}_i L, \quad v = \hat{v} V_0, \quad p = \hat{p} P_0, \quad \vec{g} = \hat{\vec{g}} G,$$

où les termes en majuscule sont des constantes dimensionnées et les termes avec un chapeau les variables sans dimension. On peut remplacer ces variables dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient :

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{V_0^2}{L} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{P_0}{\rho L} \vec{\nabla}(\hat{p}) + G \hat{\vec{g}} + \frac{\nu V_0}{L^2} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Soit en faisant apparaître un coefficient unité devant le terme inertiel :

$$\frac{L}{V_0 T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{P_0}{\rho V_0^2} \vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{LG}{V_0^2} \hat{\vec{g}} + \frac{\nu}{V_0 L} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Considérons d'abord le cas particulier d'une sphère de rayon  $L$  se déplaçant à une vitesse constante  $V_0$  dans un fluide au repos.  $L$  et  $V_0$  sont les seules échelles du problème et il n'y a pas d'échelle indépendante de temps et de pression. Enfin supposons que la gravité n'intervienne pas dans cet exemple. On peut alors choisir librement  $T_0 = L/V_0$  et  $P_0 = \rho V_0^2$ .

On obtient l'équation adimensionnée de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}). \quad (10.2)$$

On appelle **nombre de Reynolds** le rapport :

$$\boxed{Re = \frac{V_0 L}{\nu} = \frac{\rho V_0 L}{\eta}}. \quad (10.3)$$

*N.B.* : Dans le cas où la sphère est fixe dans l'écoulement, le terme instationnaire peut éventuellement disparaître s'il n'y a pas d'instabilité du sillage.

Il ne reste plus dans l'équation de la dynamique qu'un seul nombre sans dimension. La structure de l'écoulement ne dépend alors que de la valeur de ce nombre de Reynolds  $Re$ . On a en particulier deux cas limites :

- $Re \rightarrow 0$ , les effets visqueux sont dominants,
- $Re \rightarrow \infty$ , les effets inertIELS dominent.

Le terme de Reynolds peut d'ailleurs aussi s'écrire comme le rapport du terme (dimensionné) d'inertie sur le terme visqueux :

$$Re = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{V_0^2/L}{\nu V_0/L^2} = \frac{V_0 L}{\nu}.$$

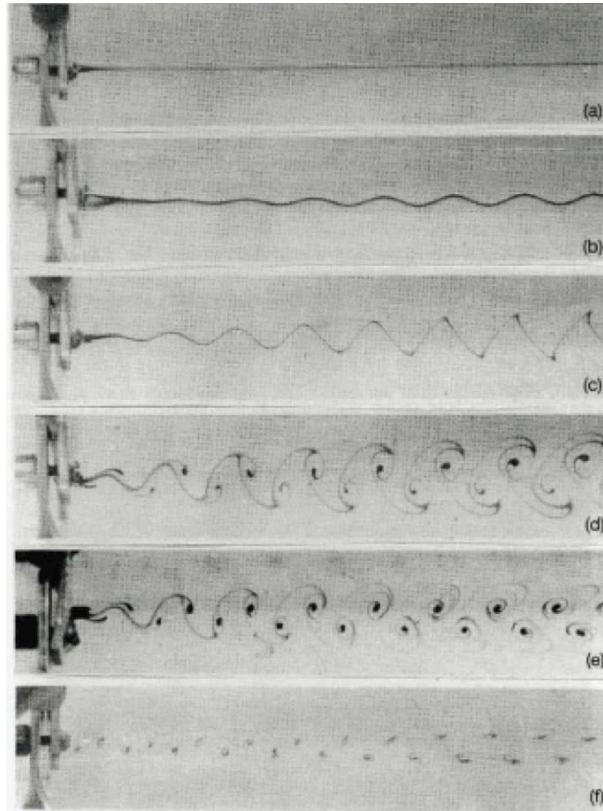


FIGURE 10.1 – Visualisation du sillage d'un cylindre par émission d'encre à travers un orifice dans le cylindre. Ce sillage serait le même pour différents diamètres, différents fluides ou différentes vitesses du moment que le nombre de Reynolds  $Re$  est le même. Le nombre de Reynolds prend de haut en bas les valeurs 30, 40, 47, 55, 67 et 100. Pour  $Re > 50$  on visualise une allée de tourbillons alternés émis par le cylindre, dite *allée de tourbillons de Bénard-von Kármán*. (D'après [41] p. 25).

### 10.1.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds

On peut facilement estimer des ordres de grandeur pour quelques écoulements :

- Une paramécie nageant dans l'eau :  $Re \approx 10^{-2}$ .
- Un goutte de pluie tombant dans l'air :  $Re \approx 1000$ .
- Sillage d'un marcheur :  $Re \approx 30\,000$ .
- Sillage d'une voiture :  $Re \approx 4 \times 10^6$ .
- Sillage d'un avion :  $Re \approx 2 \times 10^8$ .

• La limite  $Re \rightarrow \infty$  est mathématiquement une limite singulière, car l'équation différentielle aux dérivées partielles passe alors du second au premier ordre de dérivation en espace. L'équation de Navier-Stokes est d'ordre 2 pour la dérivation en espace alors que l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace. Par exemple, dans le cas du sillage de la sphère, pour un fluide parfait comme il n'y a plus aucun paramètre sans dimension dans l'équation d'Euler, la solution ne doit plus dépendre d'aucun paramètre et doit en particulier être la même quelque soit la vitesse de la sphère. Une autre conséquence de ces ordres des dérivées dans les équations est que l'on a besoin de plus de conditions aux limites pour résoudre l'équation de Navier-Stokes que pour résoudre l'équation d'Euler.

- A cause du terme  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ , l'équation de Navier-Stokes, comme l'équation d'Euler, sont des équations non-linéaires. En conséquence on ne peut utiliser ni le théorème de superposition ni le théorème d'unicité : pour les mêmes conditions aux limites il existe des solutions multiples. Certaines de ces solutions peuvent être stables, d'autres instables, et c'est uniquement l'ensemble des solutions qui satisfait aux symétries du problème.

### 10.1.2 Quelques autres nombres sans dimension

Reprendons l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes. S'il apparaît dans les conditions du problème, une pression propre  $P_0$ , un temps caractéristique des phénomènes instationnaires  $T$ , des effets de la gravité (ondes de surface par exemple), des tailles différentes en  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , l'équation de Navier-Stokes fait alors apparaître d'autres nombres sans dimension :

- Le nombre de Strouhal :  $St = \frac{\text{fréquence imposée}}{\text{fréquence naturelle}} = \frac{1/T}{V_0/L} = \frac{L}{V_0 T}$ .
- Le nombre de Froude :  $Fr = \left[ \frac{\text{forces d'inerties}}{\text{forces de gravité}} \right]^{1/2} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}}$ . L'exposant 1/2 permet de comparer directement la vitesse de l'objet aux vitesses des ondes de gravité en eau peu profonde (voir §7.2.8).
- Le nombre d'Euler :  $Eu = \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces inertielles}} = \frac{P_0/\rho L}{V_0^2/L} = \frac{P_0}{\rho V_0^2}$ .

L'équation de Navier-Stokes adimensionnée s'écrit alors :

$$St \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -Eu \vec{\nabla}(\hat{p}) + Fr^{-2} \vec{g} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Si de plus l'obstacle n'est pas une sphère,  $L_x \neq L_y \neq L_z$  on doit aussi introduire des rapports d'aspect géométriques,  $L_x/L_z$  ou  $L_y/L_z$ , ou plus généralement des fonctions de la forme de l'objet.

## 10.2 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques

Il existe deux types de conditions aux limites que l'on doit préciser pour résoudre les équations du mouvement : les conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse) et les conditions aux limites dynamiques (sur les forces).

### 10.2.1 Les conditions cinématiques

#### Cas d'une surface solide immobile

- Si le matériau est non poreux, alors les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le solide et la composante de la vitesse normale à la paroi doit être nulle (pas de flux de matière) :  $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ , et ce quelque soit  $d\vec{S}$ . Soit :

$$\boxed{\vec{v}_\perp = \vec{0}}.$$

La vitesse normale à une paroi solide est nulle.

- Si le fluide est parfait (pas de viscosité, équation d'Euler), il n'y a pas d'autre condition cinématique car il peut exister des gradients de vitesse infinis entre le liquide et le solide, et donc la vitesse tangentielle à la paroi peut prendre n'importe quelle valeur.

- Si le fluide est réel (visqueux), on observe expérimentalement que les molécules de fluide au voisinage de la paroi sont en moyenne immobiles, surtout si la surface est un peu rugueuse ou si les molécules sont adsorbées sur la paroi. La vitesse tangentielle d'une particule fluide (vitesse mésoscopique) est donc nulle. C'est ce que l'on appelle *la condition de non-glissement sur une paroi solide*.

$$\vec{v}_{//} = 0.$$

Notons toutefois que cette condition classique de non-glissement n'est pas évidente à petite échelle. Plus précisément si on note  $\lambda$  le libre parcours moyen des molécules entre deux collisions, à une distance  $z$  inférieure à  $\lambda$  de la paroi, la moitié des particules vont vers la paroi et n'ont pas encore eu de collisions avec elle. Ces molécules ont donc toujours une composante parallèle à la surface solide  $V_S = v_{//}(z = \lambda)$  alors que l'autre moitié des molécules s'éloignent de la paroi après l'avoir frappée. Si lors du choc il y a eu une adsorption temporaire des molécules sur la paroi (collision non spéculaire), il y a après le choc *en moyenne* perte de la vitesse tangentielle,  $V_S = 0$ . En faisant la moyenne de ces deux contributions on a donc finalement au voisinage de la paroi :  $V_S = \frac{1}{2}v_{//}(z = \lambda)$ . Il existe alors une petite vitesse de glissement à la paroi et c'est uniquement le prolongement du profil de vitesse qui s'annule à l'intérieur du solide, à une distance  $b \approx \lambda$  (Fig. 10.2). La relation de continuité du gradient de vitesse donne alors :

$$V_S = b \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Cela dit, dans la plupart des applications réelles le libre parcours est inférieur à 1 micromètre et la distinction reste académique. Notons toutefois quelques exceptions notoires : la microfluidique où les fluides se déplacent dans des microcapillaires où un glissement sur  $1 \mu\text{m}$  n'est pas négligeable, le cas des gaz très dilués (régime de Knudsen) où le libre parcours n'est pas petit devant la taille de l'objet, ce qui augmente fortement l'effet du glissement du fluide à la paroi. On retrouve aussi de telles vitesses de glissement pour certains écoulements de polymères concentrés ou même pour des écoulements granulaires denses.

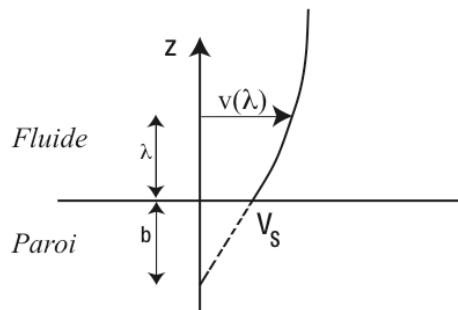


FIGURE 10.2 – Détail d'un profil de vitesse près d'une paroi mettant en évidence la vitesse de glissement  $V_S = b \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$  où  $b$  est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules du fluide.

### Cas d'une surface solide mobile

Si la paroi se déplace les conditions aux limites sont physiquement les mêmes, mais il faut écrire la nullité des vitesses normales et tangentielle à la paroi *dans le référentiel de la paroi*, et donc

égalité des vitesses normales (fluide parfait) ou égalité des vecteurs vitesses (fluide visqueux) dans le référentiel fixe :

$$v_{\perp \text{fluide}} = v_{\perp \text{paroi}} \text{ pour un fluide parfait}$$

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}} \text{ pour un fluide réel}$$

### Cas d'une interface fluide déformable

Là encore il faut écrire une condition sur les vitesses au niveau de l'interface (figure 10.3). Tout d'abord les vitesses normales doivent être égales sinon il apparaît un espace entre les deux fluides (ou un recouvrement) :

$$(v_1)_\perp = (v_2)_\perp$$

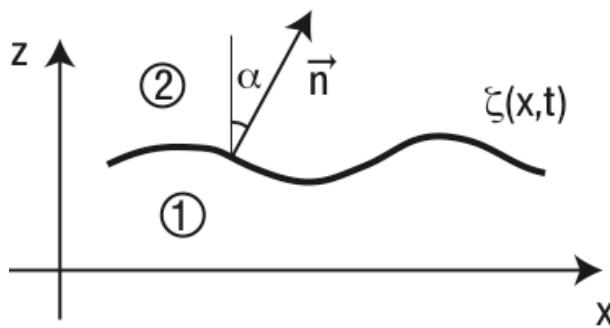


FIGURE 10.3 – Interface déformée  $\zeta(x, t)$  entre deux fluides et normale locale  $\vec{n}$ .

Le calcul de cette vitesse normale fait intervenir l'équation de l'interface  $\zeta(x, t)$ . Le vecteur normal à l'interface a pour composantes  $\vec{n} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$  où  $\tan \alpha = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  (figure 10.3). En égalisant les composantes normales des vitesses de l'interface et des fluides 1 et 2,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \vec{n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$ , il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos \alpha = v_{1x} \sin \alpha + v_{1z} \cos \alpha = v_{2x} \sin \alpha + v_{2z} \cos \alpha,$$

soit en divisant pour  $\cos \alpha$ ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_{1x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{1z} = -v_{2x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{2z} \quad (10.4)$$

On peut aussi retrouver cette équation en écrivant qu'une particule fluide de l'interface reste à l'interface. En effet une particule  $M_1$  de coordonnées  $(x_1, z_1)$  dans le fluide 1 est à l'interface si la distance  $h = z_1 - \zeta(x_1, t)$  est nulle. Elle reste sur l'interface si  $dh(x_1, z_1, t) = 0$ . Or  $dh = dz_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt = 0$ , c'est-à-dire si  $\frac{dz_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ . Comme  $\frac{dz_1}{dt} = V_{1z}$  et  $\frac{dx_1}{dt} = V_{1x}$  et en faisant le même raisonnement pour une particule du milieu 2 on retrouve les équations 10.4.

Si de plus les deux fluides sont visqueux, la condition d'égalité des vitesses tangentielles à l'interface,  $(v_1)_\perp = (v_2)_\perp$ , conduit à l'égalité des vecteurs vitesses à l'interface :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 .$$

### 10.2.2 Les conditions dynamiques

L'idée de base est de faire un bilan des forces qui s'appliquent à un petit volume qui entoure l'interface, puis de faire tendre la hauteur de ce volume vers zéro. Comme la masse devient nulle il faut que la somme des forces appliquées à ce petit volume soit nulle. Rappelons l'expression du tenseur des contraintes :  $[\sigma] = -p[I] + [\sigma'] = [-p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)]$ .

#### Cas des fluides parfaits

Il n'existe pas d'autre force que les forces de pression dans chacun des fluides ( $[\sigma'] = 0$ ), avec éventuellement des forces interfaciales s'il existe une courbure de l'interface et une tension de surface (voir chapitre 6). Il n'existe alors que des conditions sur les pressions à la paroi :

- pour une surface solide :  $P_{fluide} = P_{paroi}$
- pour une interface fluide plane :  $P_{fluide1} = P_{fluide2}$
- pour une interface fluide courbée :

$$P_{fluide1} - P_{fluide2} = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \quad (10.5)$$

où  $R$  et  $R'$  sont les deux rayons de courbure de la surface (comptés positivement si leur centre est du côté 1) et  $\gamma$  la tension de surface (voir chapitre 6). C'est la loi de Laplace, qui montre que la pression est plus élevée du côté concave de la surface.

#### Cas des fluides réels

Il faut maintenant égaliser les contraintes tangentielles *et* les contraintes normales. Considérons successivement les trois cas suivants : une surface solide, une interface fluide plane, une interface fluide courbée.

- Cas d'une surface solide.

Montrons d'abord que dans le tenseur des gradients de vitesse, de nombreux termes sont nuls sur une paroi solide. En effet si la paroi est perpendiculaire à la direction  $Oz$ , au voisinage d'un point  $x$  on a  $\vec{v}(x+dx) = \vec{v}(x) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$ . Comme la vitesse à la paroi est nulle en  $x$  et aussi en  $x+dx$  on en déduit :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$ . On montre de même  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$ . En utilisant l'incompressibilité du fluide,  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ , on en déduit que  $\partial v_z / \partial z = 0$  au niveau de la paroi. Donc seules les composantes  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$  et  $\frac{\partial v_y}{\partial z}$  peuvent ne pas être nulles et la contrainte à la paroi a alors pour composantes  $\sigma_{xz} = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$ ,  $\sigma_{yz} = \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$  et  $\sigma_{zz} = -p$ .

- Cas d'une interface entre deux liquides sans effet de tension de surface.

En présence de deux fluides non miscibles, on doit écrire à l'interface

$$[\sigma_1] \cdot \vec{n} = [\sigma_2] \cdot \vec{n}.$$

L'égalité des contraintes tangentielles s'écrit :

$\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial z}$

(10.6)

et idem pour la composante  $\sigma_{yz}$  si elle existe. Les pentes des profils de vitesse de part et d'autre de l'interface sont donc dans le rapport inverse des viscosités. La pente est la plus faible dans le fluide le plus visqueux (voir figure 10.4).

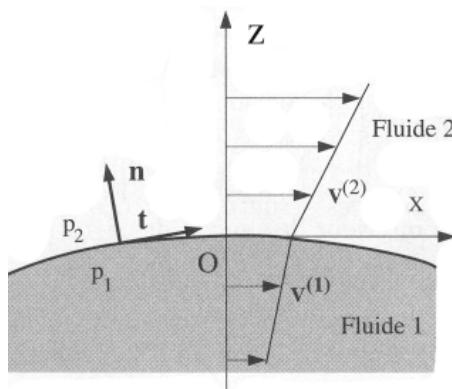


FIGURE 10.4 – Conditions aux limites cinématiques dans le plan ( $xOy$ ) à une interface fluide.

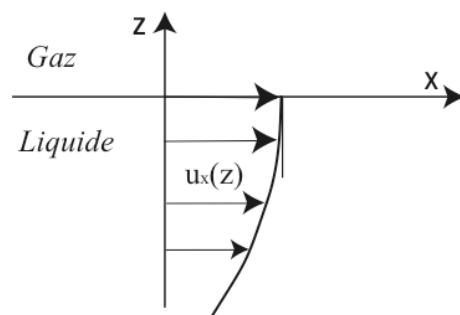


FIGURE 10.5 – Profil de vitesse au voisinage d'une surface libre, c'est-à-dire si la contrainte du gaz sur le liquide peut être négligée.

On appelle « surface libre » une surface sur laquelle la contrainte tangentielle est nulle. Cette condition de surface libre est souvent justifiée à l'interface entre l'air et l'eau car la viscosité dynamique de l'air est très faible devant celle de l'eau. La condition de contrainte nulle impose que la pente du profil de vitesse dans l'eau soit nulle. Il existe donc un maximum de la vitesse à la surface libre (figure 10.5).

Condition à une surface libre :

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0}. \quad (10.7)$$

#### – Cas d'une interface entre deux liquides avec tension de surface

S'il existe une tension de surface, par rapport au cas précédent il se rajoute une contrainte normale proportionnelle à la courbure de l'interface (comme dans le cas de deux fluides parfaits, donné par la loi de Laplace (Equ. 6.3)) plus éventuellement une contrainte tangentielle s'il existe un gradient de tension de surface. Un tel gradient peut apparaître sous l'action d'un gradient de température, ou d'un gradient de concentration en produit tensioactif. On parle alors d'effet Marangoni (voir [25] p. 155 ou [4] p. 69).

### 10.2.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites

Voici un tableau résumant les différentes conditions aux limites, pour un fluide parfait et pour un fluide réel.

Interface	Fluide parfait (Euler)	Fluide visqueux (Navier-Stokes)
Paroi solide	$(v_\perp)_{fluide} = (v_\perp)_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$	$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$ $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$
Interface plane	$(v_\perp)_1 = (v_\perp)_2$ $p_1 = p_2$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $p_1 = p_2$ $\eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_1 = \eta_2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_2$
Interface déformée avec tension de surface	$(v_\perp)_1 = (v_\perp)_2$ $P_1 - P_2 = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $(\sigma_{ij} n_j)_1 - (\sigma_{ij} n_j)_2 = -\gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) n_i + \left\{ \vec{\nabla} \gamma \right\}_i$

Dans la suite nous allons parler des écoulements laminaires (par opposition à turbulents), c'est-à-dire des écoulements où le fluide s'écoule en « lames » parallèles. Ce sont en général les écoulements que l'on observe quand le fluide est peu sollicité c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé.

## 10.3 Les écoulements parallèles

On appelle écoulements *parallèles* des écoulements unidirectionnels et invariants le long de l'écoulement. Ce sont des écoulement "1C1D" ( $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$ ) ou "1C2D" ( $\vec{v} = \{u(y, z), 0, 0\}$ ). Cette propriété impose automatiquement  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0$ , le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes disparaît donc. De plus, on a obligatoirement par construction la conservation de la masse  $\text{div}(\vec{v}) = 0$ . Voyons quelques exemples.

### 10.3.1 Ecoulement de Couette plan

On cherche l'écoulement établi (indépendant du temps) entre deux plaques parallèles dont l'une se déplace dans son plan à la vitesse  $U_0$ . On suppose  $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$  et l'on néglige la gravité. L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} & = & \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme  $u$  ne dépend pas de  $x$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  n'en dépend pas non plus. C'est une constante qui ne peut dépendre ni de  $y$  ni de  $z$  puisque  $p$  n'en dépend pas ( $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ ). Cette constante sera nulle s'il n'y a pas de gradient de pression imposé à l'infini par les conditions aux limites. Nous le supposerons et on trouve, en tenant compte des conditions aux limites  $u = 0$  en  $y = 0$  et  $u = U_0$  en  $y = h$  :

$$u(y) = \frac{U_0}{h} y.$$

Le gradient de vitesse est constant partout dans l'écoulement (figure 10.6). C'est un écoulement de cisaillement pur (somme d'un écoulement de déformation pure et de rotation pure, voir §9.2).

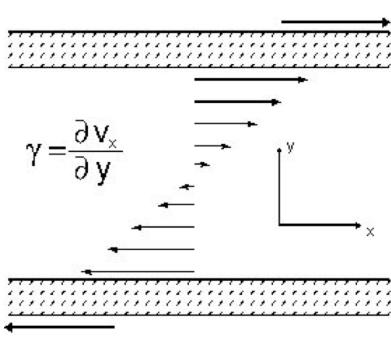


FIGURE 10.6 – Géométrie et profil de vitesse de l'écoulement de Couette plan, ici avec deux vitesses de paroi égales et opposées.

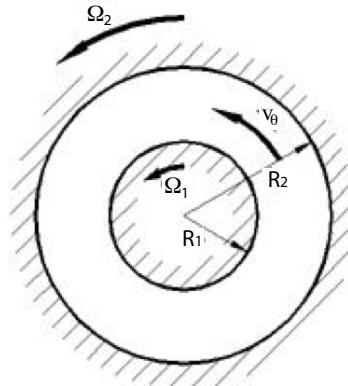


FIGURE 10.7 – Géométrie de Couette cylindrique.

**Exercice :** Calculer l'écoulement de Couette plan entre deux plaques avec deux fluides superposés et de viscosités différentes. Tracer le profil transverse des vitesses.

### 10.3.2 Ecoulement de Couette circulaire

Cherchons maintenant l'écoulement axisymétrique purement azimuthal existant entre deux cylindres coaxiaux ( $\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$ ). La projection de Navier-Stokes sur la direction orthoradiale nous conduit à l'équation  $\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = 0$ . On trouve alors :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Les valeurs de  $A$  et  $B$  sont données par les conditions aux limites cinématiques aux parois en  $r = R_1$  et  $r = R_2$  (figure 10.7) :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

### 10.3.3 Ecoulement de Poiseuille plan

Supposons maintenant que nous ayons deux plaques parallèles et immobiles. En appliquant une différence de pression  $P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}$  on crée un écoulement visqueux selon la direction  $x$ . Le même système d'équations que pour le calcul de l'écoulement de Couette plan nous montre que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Cste = -\frac{P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}}{L} = -G.$$

$G (> 0)$  est le gradient de pression imposé. On déduit de l'équation de Navier-Stokes que le profil de vitesse est parabolique :

$$u(y) = \frac{G}{2\eta}y(h-y). \quad (10.8)$$

Ce profil parabolique porte le nom de profil de Poiseuille ( $\sim 1850$ ) ou de Hagen-Poiseuille (Figure 10.8).

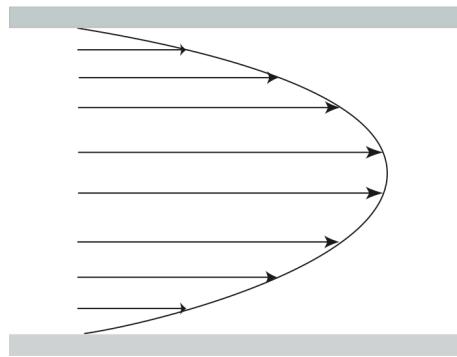


FIGURE 10.8 – Profil parabolique de Poiseuille entre deux plaques ou dans une conduite circulaire.

Le débit volumique par unité de largeur dans la troisième dimension est donné par :

$$Q_v = \int_0^h u(y)dy = \frac{h^3}{12\eta}G. \quad (10.9)$$

**Exercice : Ecoulement sur un plan incliné.** Calculer le profil de vitesse d'une couche de fluide d'épaisseur  $h$  coulant sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Montrer en particulier que la condition de surface libre impose que le profil de vitesse est une demi-parabole.

### 10.3.4 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire

En refaisant le calcul du profil de Poiseuille pour une conduite de section circulaire on trouve :

$$u(r) = \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2) \quad (10.10)$$

et que le débit volumique vaut :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}G. \quad (10.11)$$

Attention, une des conditions aux limites est donnée par le fait que l'on ne veut pas de vitesse infinie sur l'axe ( $r = 0$ ). Cette solution non physique est en effet générée par le choix des coordonnées cylindriques.

Ainsi à gradient de pression constant, si le diamètre du tube diminue d'un facteur 2, le débit est divisé par 16 ! Cette forte non-linéarité explique la difficulté d'équilibrer les réseaux de distribution d'eau d'une ville par exemple. De même il faut 10 000 tubes de 1 mm de rayon pour faire s'écouler le même débit sous la même différence de pression que dans un tube de rayon 1 cm. Jean-Louis Marie POISEUILLE était d'ailleurs un médecin physiologiste qui s'est intéressé dans les années 1850 aux écoulements sanguins.

On peut calculer les contraintes visqueuses appliquées sur les parois du tube,  $\sigma'_{zr} = -GR/2$  et en déduire que les forces appliquées par le liquide sur une longueur de tube sont logiquement égales à la différence des forces de pression appliquées entre ses deux extrémités.

La relation 10.11 n'est valable que si l'écoulement reste laminaire. Au-dessus d'un certain nombre de Reynolds de l'ordre de quelques milliers ce n'est plus vrai. Il apparaît d'autres composantes de la vitesse et un régime turbulent. C'est en étudiant cette transition que O. Reynolds a montré que cette transition était gouvernée par un nombre sans dimension qui porte maintenant son nom. A débit donné, la turbulence de l'écoulement augmente la dissipation d'énergie et donc le gradient de pression, c'est-à-dire la différence de pression entre l'entrée et la sortie aussi appelée en hydraulique la *perte de charge* (figure 10.9).

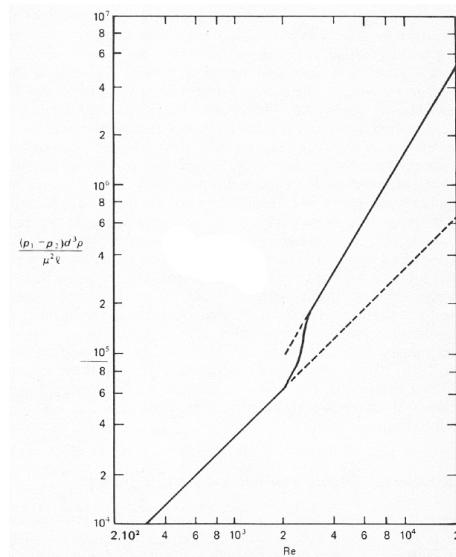


FIGURE 10.9 – Transition laminaire/turbulent de l'écoulement de Poiseuille. Variation du gradient de pression moyen adimensionné  $G \frac{d^3 \rho}{\eta^2}$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ . Lignes pointillées : écoulement laminaire ( $G \frac{d^3 \rho}{\eta^2} = 32 Re$ ) ou complètement turbulent ([41] p. 20). Ligne continue : un exemple de cas réel présentant une transition pour  $Re \approx 2000$  mais cette valeur dépend fortement de l'état du tube et de la qualité de l'écoulement injecté.

### 10.3.5 Solutions instationnaires

#### Mise en mouvement d'une plaque

Supposons maintenant que, dans un milieu infini, on mette brutalement une plaque en mouvement dans son plan. Si les effets de la gravité sont négligeables et si l'écoulement est invariant dans la direction du mouvement (il n'y aura donc pas de gradient de pression longitudinal), l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u. \quad (10.12)$$

On reconnaît là une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement est  $\nu$ , la viscosité cinématique. On peut adimensionner cette équation

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\nu \tau}{\delta^2} \hat{\nabla}^2 \hat{u}.$$

On trouve alors que le temps caractéristique de diffusion sur une distance  $\delta$  est :

$$\boxed{\tau = \frac{\delta^2}{\nu}}. \quad (10.13)$$

Dans le cas du démarrage brutal de la plaque à la vitesse  $U_0$  dans un fluide au repos, on trouve par intégration la solution de l'équation de diffusion :

$$u(y) = U_0 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]$$

où  $\operatorname{erf}$  est la **fonction « erreur »**, intégrale d'une gaussienne :  $\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-x^2) dx$ .

#### Mise en mouvement d'un fluide entre deux parois

Dans le cas de l'écoulement de Couette plan il faut un temps  $\tau \sim h^2/\nu$  pour que le profil linéaire s'établisse (figure 10.10), soit une longueur de déplacement de la plaque  $X = U_0 \tau \sim Re h$ .

Dans un tube, pour obtenir un profil parabolique à partir d'un profil d'entrée plat (on dit aussi « bouchon ») il faut attendre un temps  $\tau \sim R^2/\nu$ , c'est-à-dire une distance depuis l'entrée du tube  $X \approx Re R$ . En conséquence, dès que le nombre de Reynolds est élevé, la *longueur d'entrée* avant l'établissement du profil parabolique est loin d'être négligeable (figure 10.11). Expérimentalement on trouve plutôt  $X/R \approx Re/30$ .

## 10.4 Les écoulements de Stokes (à très faible nombre de Reynolds)

### 10.4.1 L'équation de Stokes

Dans les écoulements strictement parallèles le terme  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  était géométriquement nul. Si maintenant l'écoulement est non parallèle mais que le nombre de  $Re$  est très faible (effets dominant de la viscosité), le terme inertiel peut être négligé.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (10.14)$$

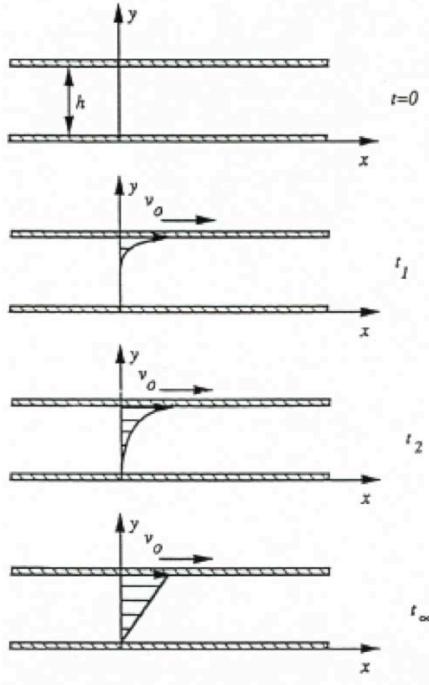


FIGURE 10.10 – Ecoulement instationnaire en géométrie de Couette plan. Evolution du profil de vitesse entre deux plaques parallèles infinies. La plaque supérieure est mise en translation à vitesse uniforme à l'instant  $t = 0$ .

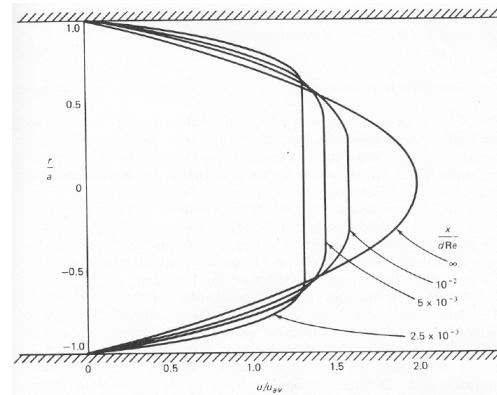


FIGURE 10.11 – Profils de vitesse laminaires à diverses distances de l'entrée d'une conduite circulaire. D'après [41], p. 15.

Ce cas correspond à la limite opposée à l'équation d'Euler ( $Re \rightarrow \infty$ ).

Nous supposerons dans la suite que la seule force volumique est la force de gravité ou dérive d'un potentiel. On peut alors introduire le potentiel  $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{r}$  (alors  $\vec{g} = -\nabla \Phi$ ). De plus nous supposerons que le nombre de Stokes qui compare le terme instationnaire aux termes visqueux est très petit :

$$St = \frac{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1.$$

Formellement le nombre de Stokes apparaît comme le produit du nombre de Strouhal déjà rencontré (§10.1.2) et du nombre de Reynolds. On obtient alors l'équation de Stokes :

$$\boxed{\vec{\nabla} (p + \rho \Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}} . \quad (10.15)$$

Cette équation est exacte en toute rigueur pour un écoulement stationnaire et si  $Re \rightarrow 0$ . Une des propriétés des écoulements de Stokes est l'absence d'inertie. Dès que les causes du mouvement disparaissent, l'écoulement s'arrête sans délai. Ces écoulements dissipent extrêmement rapidement leur énergie cinétique.

L'équation de Stokes étant une équation linéaire il y a unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites. De plus on montre que l'écoulement de Stokes est celui qui minimise la dissipation d'énergie ([25] p. 443-452).

Il existe d'autres formes équivalentes de l'équation de Stokes :

1. Première variante :

$$\vec{\nabla} (p + \rho\Phi) = -\eta \vec{\text{rot}}(\vec{\omega}) . \quad (10.16)$$

En effet  $\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla} (\text{div}(\vec{v})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$ , or  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  pour un fluide incompressible et l'on écrit  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}(\vec{v})$  la vorticité.

2. Deuxième variante en prenant la divergence de l'équation précédente :

$$\vec{\nabla}^2(p + \rho\Phi) = 0 . \quad (10.17)$$

En effet on a  $\vec{\nabla}^2(p + \rho\Phi) = \text{div}(\vec{\nabla}(p + \rho\Phi))$  et  $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{v})) = 0$ .

La pression  $p + \rho\Phi$  satisfait donc à une équation de Laplace à très faible nombre de Reynolds.

3. Troisième variante :

$$\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = 0 . \quad (10.18)$$

En effet  $\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = \vec{\nabla} [\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))] - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{\omega})) = -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{\omega})) = \frac{1}{\eta} \vec{\text{rot}} [\vec{\nabla}(p + \rho\Phi)] = 0$ .

Ceci montre qu'à très faible nombre de Reynolds, il n'y a plus transport de la vorticité. la vorticité est dans un état d'équilibre et ne diffuse plus.

4. Quatrième variante pour un écoulement plan 2D2C : En prenant le rotationnel de l'équation de Stokes, et en écrivant que pour un écoulement incompressible 2D2C,  $\vec{v} = \vec{\text{rot}}(\Phi \vec{k})$ , on obtient l'équation bi-harmonique suivante pour la fonction de courant :

$$\vec{\nabla}^4(\Psi) = 0 . \quad (10.19)$$

#### 10.4.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes

Nous allons montrer, dans la limite des nombres de Reynolds tendant vers 0, que la force de traînée visqueuse exercée sur une sphère de rayon  $R$  par un fluide s'écoulant à la vitesse  $\vec{U}$  s'écrit :

$$\vec{F}_{St} = 6\pi\eta R \vec{U} \quad (10.20)$$

C'est ce que l'on appelle la force de Stokes (1851).

#### Démonstration

Les hypothèses sont  $Re \ll 1$ , écoulement stationnaire  $St \ll 1$  et pas de force volumique. Nous pouvons alors utiliser l'équation de Stokes (Equ. 10.15) :

$$\vec{\nabla}(p) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}.$$

Nous allons travailler en coordonnées sphériques avec une sphère immobile dans un écoulement homogène de vitesse à l'infini  $U$ , dirigé selon  $Oz$  (figure 10.12). Nous supposerons un écoulement axisymétrique autour de  $Oz$  (nous aurons alors  $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$ ) et que  $u_\varphi = 0$ . L'écoulement est alors 2C2D stationnaire et s'écrit en coordonnées sphériques :  $\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$ .

Les conditions aux limites sont :

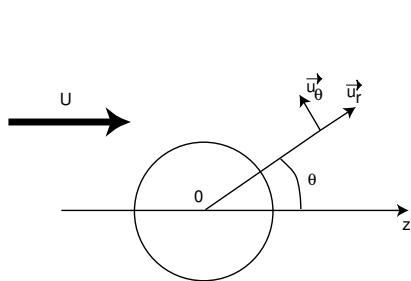


FIGURE 10.12 – Coordonnées sphérique autour d'une sphère. L'écoulement à l'infini est selon  $Oz$ .

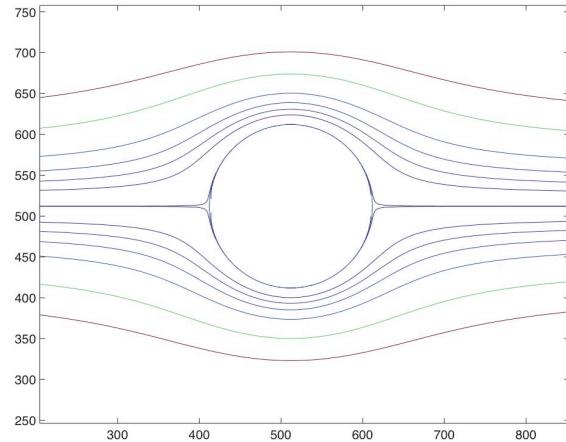


FIGURE 10.13 – Lignes de courant autour d'une sphère immobile dans un écoulement de Stokes.

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} \text{ en } r = R \\ \vec{u} = U \vec{e}_z \text{ en } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Soit  $u_r = u_\theta = 0$  en  $r = R$  et  $u_r = U \cos \theta$  et  $u_\theta = -U \sin \theta$  en  $r \rightarrow \infty$ .

En introduisant la fonction de Stokes en coordonnées sphériques (Equ. 1.3 page 14) on trouve pour la fonction de courant (voir TD 7)  $\Psi = U \sin^2 \theta \left( \frac{L}{r} + Mr^2 + C \frac{r}{2} \right)$  avec  $L$ ,  $M$  et  $C$  trois constantes à déterminer pour satisfaire les conditions aux limites. On trouve alors

$$\Psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right).$$

On trouve finalement le champ de vitesse partout autour de la sphère (figure 10.13)) (cf. [1] p. 223, [25] p. 465) :

$$\begin{cases} p(r, \theta) &= P_0 - \frac{3}{2} \frac{\eta U R}{r^2} \cos \theta \\ u_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \end{cases} \quad (10.21)$$

Ces équations montrent que le champ de vitesse décroît très doucement à grande distance (en  $1/r$ ). Ce qui fait que l'écoulement est très influencé par des parois même lointaines ou d'autres particules en mouvement (cas de la sédimentation de particules).

A partir du champ de vitesse nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur des contraintes  $[\sigma]$  en coordonnées sphériques :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{rr} & = & 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\theta\theta} & = & 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\phi\phi} & = & 2\eta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} & = & \eta \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} & = & \eta \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi r} & = & \eta \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) \right) \end{array} \right. \quad (10.22)$$

Le fluide étant incompressible,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ . De plus, sur la sphère  $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . On en déduit les contraintes à la surface de la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sigma_{rr} & = & -p \\ \sigma_{\theta\theta} & = & -p \\ \sigma_{\phi\phi} & = & -p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} & = & \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} & = & 0 \\ \sigma_{\phi r} = \sigma_{r\phi} & = & 0 \end{array} \right. \quad (10.23)$$

On peut ensuite calculer la composante selon l'axe  $Oz$  de la contrainte :  $\sigma_z = ([\sigma] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_z = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta$ , et l'on trouve :  $\sigma_z = \frac{3\eta U}{2R}$  en tout point de la sphère (quelque soit  $\theta$ ).

Finalement

$$F_z = \oint \sigma_z dS = \sigma_z 4\pi R^2 = 6\pi\eta RU.$$

C'est la force de Stokes exercée par un fluide visqueux sur une sphère.

*Exercices :*

- Vérifier que la force transverse (portance) est bien nulle comme l'impose ici la symétrie de l'écoulement.
- Montrer que, pour une bulle sphérique, donc avec surface libre (contrainte tangentielle nulle à l'interface), on trouve :  $\vec{F}_z = -4\pi\eta R\vec{U}$ .

### Coefficient de traînée $C_D$

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds on introduit souvent le coefficient de traînée  $C_D$  (sans dimension). Il est défini par

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 S} \quad (10.24)$$

où  $S$  est la section de l'objet et  $F_D$  la force de traînée (*Drag* en anglais, d'où le D). En identifiant ici avec l'expression de la force de Stokes, on trouve :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (10.25)$$

où le nombre de Reynolds est calculé sur le diamètre ( $2R$ ) de la sphère. La figure 10.14 montre que l'expression de la force de Stokes est une bonne approximation de la force de traînée jusqu'à  $Re \sim 1$ . Au-delà, la correction analytique d'Oseen permet d'écrire à l'ordre suivant ( $Re < 5$ ) :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re \right] \quad (10.26)$$

A plus haut nombre de Reynolds encore on peut trouver d'autres formules empiriques pour  $C_D$  (§5.2).

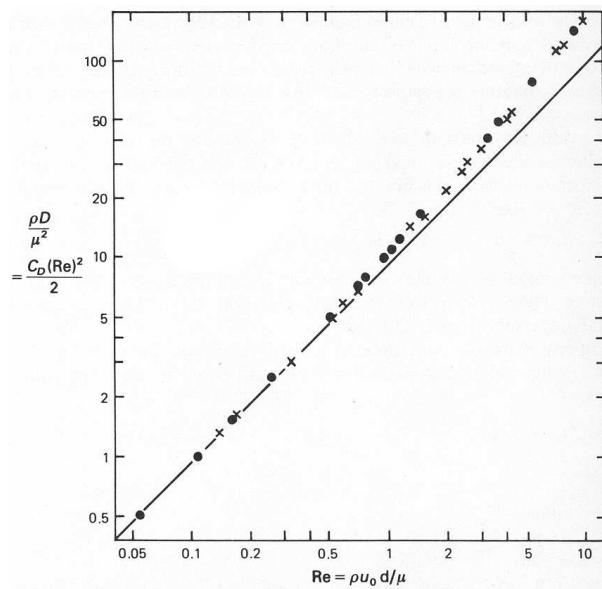


FIGURE 10.14 – Traînée sur une sphère à faible nombre de Reynolds. Ici la fonction  $C_D Re^2$  est tracée en fonction de  $Re$  ([41] p. 111).

#### 10.4.3 La sédimentation

Une sphère unique placée dans un fluide va sédimerter si sa densité est supérieure à la densité du fluide. Après une phase initiale d'accélération elle sédimente ensuite à sa vitesse limite de chute. La valeur du nombre de Reynolds calculé avec cette vitesse de chute va permettre de savoir si c'est une vitesse de chute visqueuse ou inertie. A très faible Reynolds il y a égalité entre le poids apparent (poids corrigé de la poussée d'Archimète) et la force de Stokes :

$$g(\rho_s - \rho_f) \frac{4}{3} \pi R^3 = 6\pi\eta RV_{Stokes},$$

et donc la vitesse limite de Stokes :

$$V_{Stokes} = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g}{\eta} R^2, \quad (10.27)$$

avec  $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$ . Cette vitesse limite est proportionnelle au carré du rayon, donc les grosses particules sédimentent plus vite. Ce résultat reste vrai même si les particules ne sont pas parfaitement sphériques.

Pour que le nombre de Reynolds de chute soit petit et que l'on puisse utiliser la formule de la force de Stokes il faut :

$$Re = \frac{2R V_{Stokes}}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g R^3}{\nu^2} \ll 1,$$

soit :

$$R \ll \left( \frac{9}{4} \frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{\nu^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Les toutes petites particules ( $\sim 1 \mu m$ ) dites **particules colloïdales** ou **particules browniennes** ne sédimentent pratiquement pas à cause de l'agitation thermique (la vitesse aléatoire moyenne devient supérieure à la vitesse de sédimentation).

Si maintenant beaucoup de particules sédimentent ensemble, le calcul de la vitesse de sédimentation se complique nettement (il n'est d'ailleurs pas résolu à ce jour). En effet il existe des interactions collectives (à  $N$  corps) car le champ de vitesse autour d'une particule décroît lentement (en  $1/r$ ). De plus des effets supplémentaires apparaissent à cause de la taille finie du récipient (effet de paroi). La sédimentation d'un grand nombre de particules crée en effet un contre-écoulement du fluide vers le haut qui ralentit leur chute (une jolie démonstration en est l'effet Boycott observé lorsque l'on incline le récipient). La vitesse est alors une fonction de la concentration en particules :

- A faible Reynolds, Albert Einstein (1905) a donné le premier terme correctif à la vitesse limite de chute dépendant de la concentration  $c$  en particules :  $V_{lim} \approx V_{Stokes} [1 - 6,55 c]$ .
- Au-delà on utilise la loi empirique de Richardson-Zaki,  $V_{lim} = V_{Stokes} [1 - c/c_{max}]^n$  où  $n \approx 5$ , mais dépend du nombre de Reynolds et  $c_{max}$  est la compacité maximum, de l'ordre de 54 % pour un empilement aléatoire lâche de sphères identiques.

#### 10.4.4 La réversibilité et la vie aux faibles nombres de Reynolds

Si  $Re \ll 1$  les termes inertIELS sont négligeables et l'équation de la dynamique se réduit à l'équation 10.14. Si de plus l'écoulement est stationnaire (ou a un nombre de Stokes très petit) on trouve l'équation de Stokes (Eq. 10.15). Cette équation  $\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta\vec{\nabla}^2\vec{v}$  est une équation **réversible**, ce qui a d'importantes conséquences. En effet, la transformation  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$  transforme  $(p + \rho\Phi)$  en  $-(p + \rho\Phi)$ .

Voyons quelques exemples et contre-exemples :

- Cas d'une bille tombant à côté d'un mur vertical. La réversibilité impliquant que le mouvement vers le bas est identique à un mouvement vers le haut, la bille doit tomber parallèlement à la paroi. A faible Reynolds et en régime stationnaire une bille n'est ni repoussée ni attirée par la paroi.
- Si maintenant on regarde le mouvement d'une bille s'approchant d'une paroi horizontale, ou s'en éloignant, ces mouvements ne sont pas identiques car dans les deux cas il y a des forces d'accélération (instationnarité) donc des effets de masse ajoutée et des forces d'histoire.
- Expérience de G.I. Taylor. Une tache de colorant dans un fluide visqueux placé dans l'espace entre deux cylindres d'un montage de Couette circulaire est déformée par l'écoulement. Mais quelques tours en sens contraire reconstituent la forme initiale de la tache (aux effets de diffusion moléculaire près) si la viscosité du liquide est suffisamment forte.
- Chaos lagrangien. On peut avoir le mélange de deux fluides dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, mais uniquement près des points cols, là où les termes instationnaires sont importants.

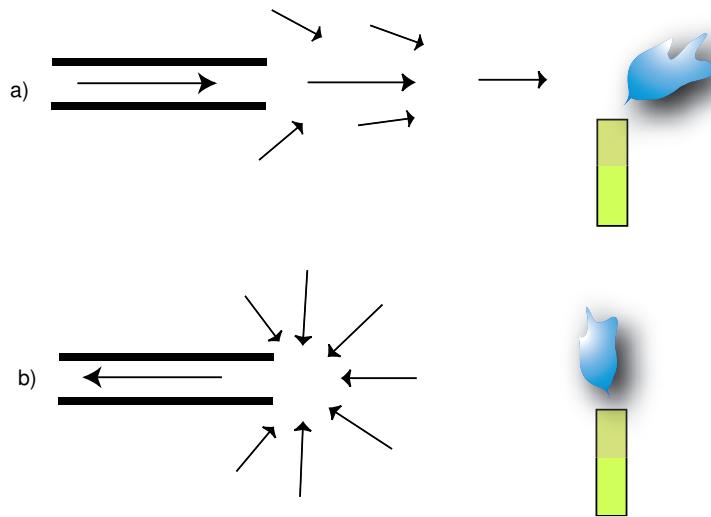


FIGURE 10.15 – Un exemple d’irréversibilité des écoulements, ou pourquoi il est plus facile d’éteindre une bougie en soufflant (a) qu’en aspirant (b) !

L’article de Purcell [35] est une excellente lecture introductory au sujet de la réversibilité des écoulements et de sa conséquence pour la vie animale aux faibles nombres de Reynolds. Je vous en recommande vivement la lecture.

## 10.5 Les écoulements quasi-parallèles : les équations de la lubrification

Dans les écoulements de Stokes ( $Re \ll 1$ ) (§10.4.1) et dans les écoulements parallèles (§10.3), le terme inertiel  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  de l’équation de Navier-Stokes est soit négligeable soit exactement nul. Dans certains cas toutefois l’écoulement n’est que *presque* parallèle, c’est-à-dire qu’une composante de la vitesse domine devant les autres et que les angles entre les parois sont faibles. Ces écoulements sont dit *lubrifiés* mais parfois aussi appelés *écoulements rampants* (*creeping flow* en anglais). Comme les lignes de courants sont parallèles aux parois, elles font un angle  $\theta$  faible avec l’axe des  $x$  (figure 10.16). On peut alors calculer des *ordres de grandeur* (noté ODG) des différents termes des équations du mouvement.

Prenons le cas d’un écoulement stationnaire à deux dimensions (2C2D) entre deux parois :  $\vec{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y), 0)$  et appelons  $U$  l’ODG des vitesses horizontales et  $e_0$  l’ODG des épaisseurs (figure 10.16). Comme l’écoulement est laminaire, les lignes de courant sont pratiquement parallèles aux parois et donc presque parallèles à l’axe des  $x$ , on a :  $u_x \approx U$  et  $u_y \approx U\theta$ .

Comme nous le verrons, l’écoulement sera localement la superposition d’un écoulement de Poiseuille ou de Couette. On peut estimer ses dérivées transverses :

$$\begin{cases} ODG\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) &= \frac{U}{e_0} \\ ODG\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) &= \frac{U\theta}{e_0} \end{cases} .$$

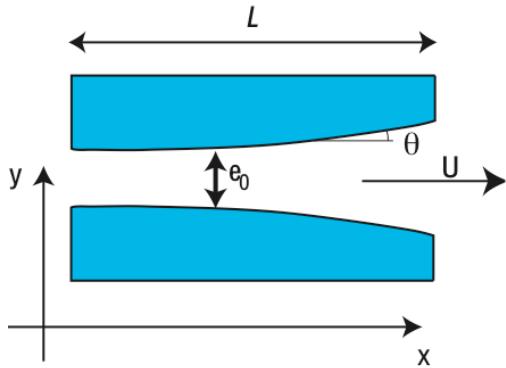


FIGURE 10.16 – Schéma d'un écoulement quasi-parallèle lubrifié.

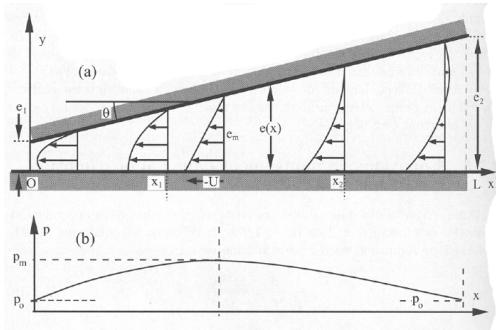


FIGURE 10.17 – Schéma du palier lubrifié lorsque le plan inférieur se déplace de droite à gauche. (a) Profils de vitesses, (b) profil de pression. (D'après [25] p. 228).

En dérivant encore une fois ces expressions selon  $y$ , il vient :

$$\begin{cases} ODG\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) = \frac{U}{e_0^2} \\ ODG\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) = \frac{U\theta}{e_0^2} \end{cases}.$$

La conservation de la masse nous donne

$$ODG\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = ODG\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = \frac{U\theta}{e_0}$$

Pour les dérivées secondes, on a en dérivant l'équation de continuité :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}$$

et

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \sim \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \sim \frac{U\theta}{e_0^2}.$$

Reportons ces termes dans la projection selon  $x$  de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right).$$

$ODG\left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \sim \frac{U^2 \theta}{e_0}$ . Pour calculer l'ODG du terme visqueux il nous manque encore l'ODG du terme  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ . Nous avons  $\frac{\partial u_x}{\partial x} \sim \frac{U\theta}{e_0}$ , et en supposant une échelle de variation horizontale  $L$  il vient :  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \sim \frac{U\theta}{e_0 L}$ . En conséquence  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$  si  $e_0 \theta / L \ll 1$  ce qui est vérifié jusqu'à l'ordre 2. Alors  $ODG\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \sim \frac{U}{e_0^2}$ .

Les termes inertIELS seront alors négligeables devant les termes visqueux si

$$U^2 \theta / e_0 \ll \nu U / e_0^2$$

soit

$$(U e_0 / \nu) \theta = Re \theta \ll 1,$$

où  $Re$  est un nombre de Reynolds construit sur la vitesse  $U$  et la largeur  $e_0$ . Cette équation est un compromis entre la condition des écoulements parallèles ( $\theta = 0$  et  $Re$  en principe quelconque<sup>1</sup>) et la condition des écoulements de Stokes ( $Re \ll 1$  et  $\theta$  quelconque).

En étudiant ensuite de la même façon la projection de Navier-Stokes sur  $y$  on peut montrer que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}.$$

On obtient alors le système suivant pour résoudre l'écoulement :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

à condition de pouvoir négliger les termes instationnaires ce qui est le cas si le nombre de Stokes est petit ( $St = \frac{e_0^2}{\nu T} \ll 1$ ). On peut alors intégrer l'équation de Stokes pour  $u_x$  selon  $y$  (variation rapide) en négligeant les variations de  $p$  avec  $y$ . On trouve une fonction du second ordre en  $y$ , ce qui dans le cas général correspond à une superposition d'un écoulement de Couette et de Poiseuille.

Ayant obtenu cette vitesse horizontale  $u_x(x, y)$  en fonction du gradient local de pression  $\partial p / \partial x$  on peut intégrer  $u_x$  à  $x$  fixé pour obtenir le débit  $Q$  en fonction du gradient longitudinal de pression et de la géométrie  $e(x)$ . Le fait que le débit  $Q$  est indépendant de  $x$  permet alors d'exprimer le gradient local de pression en fonction de  $Q$  et de trouver  $p(x)$  et donc  $Q$  par intégration en  $x$  à condition de connaître les conditions aux limites sur  $p$ . Finalement on peut réinjecter ce résultat dans l'équation donnant la vitesse, et tout calculer explicitement, comme dans l'exemple ci-dessous.

### 10.5.1 Calcul d'un palier lubrifié

On considère le mouvement horizontal d'un bloc au-dessus d'un plan, ce bloc faisant un petit angle  $\theta$  avec le plan (figure 10.17).

#### Exercices :

- Montrer que si l'on note respectivement  $e_1$  et  $e_2$  les épaisseurs minimum et maximum de la couche  $\theta = (e_2 - e_1)/L$ , on a pour les forces tangentielle et normale :

$$\begin{aligned} F_T &= - \left[ 6 + 2 \ln \left( \frac{e_2}{e_1} \right) \right] \frac{\eta U}{\theta} \\ F_N &= 6 \left[ \ln \left( \frac{e_2}{e_1} \right) - 2 \right] \frac{\eta U}{\theta^2} \end{aligned} \tag{10.28}$$

En particulier montrer que  $\frac{F_N}{F_T} \sim 1/\theta$  est grand, ce qui est recherché dans les paliers lubrifiés pour supporter de lourdes charges sans consommer trop de puissance. C'est le même phénomène qui sustente les planches de bois (skimboard) qui glissent dans quelques centimètres d'eau sur les plages à marée basse, ou qui cause l'aquaplaning sur une route mouillée.

- Calculer la vitesse verticale. Montrer qu'il existe un point de stagnation dans l'écoulement. Tracer quelques lignes de courant et montrer qu'il existe une zone du fluide où l'approximation  $u_y \ll u_x$  n'est pas justifiée.

---

1. Dans la pratique inférieur à quelques milliers car sinon l'écoulement peut devenir instable et transiter brutalement vers un état turbulent, c'est-à-dire un état où la vitesse en un point donné fluctue fortement dans le temps.

3. Dans le cas de deux cylindres excentrés (faible gap entre eux) montrer que l'on peut écrire un développement parabolique près du point d'épaisseur minimale. Dessiner les lignes de courant et trouver les points de stagnations en fonction des vitesses des deux cylindres.
4. Calculer la portance pour deux cylindres excentrés mais de diamètres proches (voir Acheson [1] page 249).
5. En appliquant les équations de la lubrification, trouver l'épaisseur d'eau sous un glaçon en train de fondre sur une table de verre.
6. Appliquer les équations de la lubrification pour montrer que l'étalement d'une grosse goutte sur un support plan est donné par la loi de Tanner  $r(t) \propto t^{1/10}$  (voir [25] page 244).

### 10.5.2 Force d'adhérence sur un disque

On considère un disque de rayon  $a$  placé parallèlement à un plan rigide, l'espace entre ces deux surfaces étant occupé par un fluide visqueux, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . La distance  $h(t)$  entre les deux surfaces varie lorsqu'on applique une force ascendante  $F(t)$  sur le disque. On souhaite obtenir l'expression de la force  $F(t)$  en fonction de l'épaisseur du film  $h(t)$ .

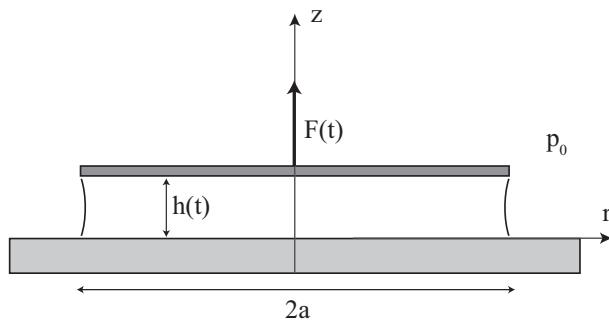


FIGURE 10.18 – Schéma de mesure de la force d'adhérence sous un disque

On néglige la gravité ainsi que la tension de surface dans ce problème (pas de ménisque sur les bords du disque). On suppose de plus que le fluide occupe l'ensemble de l'espace entre le plan et le disque à tout temps. Enfin, on se place dans l'approximation de lubrification : on considère l'écoulement comme quasi-parallèle et lentement variable dans le temps, avec  $h/a \ll 1$  et  $Re \ll a/h$ .

1. Compte tenu des approximations effectuées, montrer que l'équation de Navier-Stokes en régime quasi-stationnaire se réduit à

$$\vec{\nabla} p = \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{u} \quad (10.29)$$

On donnera une condition sur  $\partial h / \partial t$  pour que le terme instationnaire puisse effectivement être négligé.

2. On cherche une solution bidimensionnelle du champ de vitesse  $\vec{u} = u_r(r, z, t) \vec{e}_r + u_z(r, z, t) \vec{e}_z$ , où  $u_r$  et  $u_z$  sont les composantes radiale et axiale de la vitesse en coordonnées cylindriques. Projetez l'équation précédente sur  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_z$ , et donnez l'équation d'incompressibilité. Donner les conditions aux limites sur  $u_r$ ,  $u_z$  et  $p$ .
3. On cherche à déterminer la distribution de pression  $p(r, t)$  sur la surface inférieure du disque, en  $z = h(t)$ .

- (a) Calculer  $u_r$  en fonction de  $\partial p / \partial r$ ,  $z$  et  $h$  en tenant compte des conditions aux limites.
- (b) Calculer  $u_z$  en fonction de  $\partial p / \partial r$ ,  $r$ ,  $z$  et  $h$  à l'aide de l'équation d'incompressibilité en tenant compte de la condition aux limites en  $z = 0$ .
- (c) Déduire la relation reliant  $\partial p / \partial r$  aux grandeurs  $r$  et  $h(t)$  en utilisant la condition aux limites sur  $u_z$  en  $z = h(t)$ .
- (d) Intégrer l'équation en  $p(r, t)$  en tenant compte des conditions aux limites sur la surface du fluide en contact avec l'air.
4. Calculer la force d'adhérence exercée par le disque sur le fluide.
5. Ecrire le principe fondamental de la dynamique sur le disque en considérant que l'on tire le disque verticalement avec une force constante  $F_0$  (on négligera la masse du disque). En déduire une équation différentielle pour  $h(t)$ , que l'on intégrera sous la forme
- $$h(t) = \frac{h_0}{\sqrt{1 - t/\tau}}$$
- où  $\tau$  est le « temps de décollement », que l'on identifiera.
6. Application numérique : Calculer  $\tau$  dans le cas de l'eau, avec  $h_0 = 0.1$  mm,  $F_0 = 1$  N,  $a = 2$  cm.

**Pour en savoir plus :**

- *Low Reynolds Number Flow*, Sir Geoffrey Taylor, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Low\\_Reynolds\\_Number\\_Flow.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Low_Reynolds_Number_Flow.rm)
  - [35] E. Purcell. Life at low reynolds numbers. Am. J. Phys. **45**, 3–11, 1977. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gold/pdfs/purcell.pdf>
  - H. K. Moffatt. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder. Journal de Mécanique, 16 :651–673, 1977. [http://www.igf.fuw.edu.pl/KB/HKM/PDF/HKM\\_026\\_s.pdf](http://www.igf.fuw.edu.pl/KB/HKM/PDF/HKM_026_s.pdf)
- Quelques expériences récentes faisant intervenir la théorie de la lubrification :
- Déformation sous une pointe d'AFM : Leroy, S., Steinberger, A., Cottin-Bizonne, C., Restagno, F., Léger, L., and Charlaix, É. (2012). Hydrodynamic Interaction between a Spherical Particle and an Elastic Surface : A Gentle Probe for Soft Thin Films. Physical Review Letters, 108(26), 264501. (<http://prl.aps.org/abstract/PRL/v108/i26/e264501>)
  - Goutte liquide en caléfaction : David Quéré "Leidenfrost Dynamics", Annual Review of Fluid Mechanics, 45, 197 (2013). ([http://www.pmmh.espci.fr/fr/gouttes/Publications\\_files/Quere2013.pdf](http://www.pmmh.espci.fr/fr/gouttes/Publications_files/Quere2013.pdf))
  - Goutte liquide rebondissante : Couder, Y., Fort, E., Gautier, C. H., and Boudaoud, A. (2005). From bouncing to floating : Noncoalescence of drops on a fluid bath. Physical review letters, 94(17), 177801. (<http://www.lps.ens.fr/~boudaoud/Publis/Couder05Bounc.pdf>)

# Chapitre 11

## La couche limite

Marc Rabaud, version du 16 avril 2013

### Sommaire

---

<b>11.1 Introduction</b> . . . . .	<b>135</b>
<b>11.2 Couche limite laminaire sur une plaque plane</b> . . . . .	<b>136</b>
11.2.1 Les équations de Prandtl (1904) . . . . .	136
11.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907) . . . . .	137
11.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée . . . . .	139
11.2.4 Définitions de l'épaisseur d'une couche limite . . . . .	140
<b>11.3 Couche limite sur une paroi courbée</b> . . . . .	<b>141</b>
<b>11.4 Equation de Falkner-Skan (1930)</b> . . . . .	<b>142</b>
<b>11.5 Couche limite thermique</b> . . . . .	<b>142</b>
<b>11.6 Couche limite turbulente</b> . . . . .	<b>143</b>

---

On pourra lire avec profit les documents suivants : [25] p. 507, [7] p. 321, [26] p. 299 et [11] tome II p. 86, et le chapitre correspondant dans le DVD [22].

### 11.1 Introduction

La compréhension du comportement des couches limites date du début du XX<sup>e</sup> siècle. Les travaux de Prandtl ont permis une avancée majeure dans l'histoire de la mécanique des fluides.

Nous avons déjà évoqué quelques phénomènes de couches limites lors de l'établissement de l'écoulement de Poiseuille ou de Couette, ou du démarrage d'une plaque plane au §10.3.5. Il existe alors deux domaines : l'un loin des parois où l'écoulement n'est pas encore modifié et où la viscosité n'a aucune influence, l'autre près de la paroi où la quantité de mouvement diffuse en racine carrée du temps à cause de la viscosité. En passant d'une description temporelle à une description spatiale on voit apparaître deux échelles de longueur très distinctes, une grande dans le sens de l'écoulement et une petite dans la direction transverse à la paroi. L'étude de la couche limite laminaire, par exemple sur une plaque plane comme schématisée sur la figure 11.1, est le but de ce chapitre.

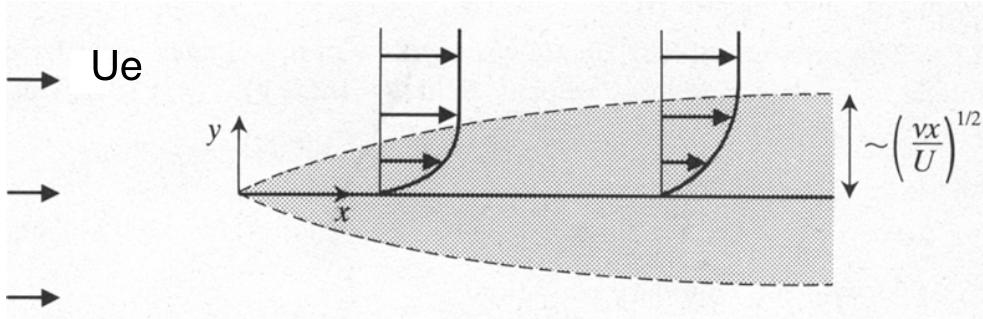


FIGURE 11.1 – Ecoulement de couche limite au voisinage d'une plaque plane. D'après [1] p. 49.

## 11.2 Couche limite laminaire sur une plaque plane

L'hypothèse de base est que, loin des parois, l'écoulement est laminaire et n'est pas influencé par la viscosité. On a alors affaire à un fluide parfait, qui satisfait à l'équation d'Euler. Si on suppose de plus que l'écoulement extérieur est potentiel (irrotationnel) on peut y appliquer partout l'équation de Bernoulli. Près de la plaque au contraire, l'écoulement est dominé par les termes visqueux. Dans cette couche limite, d'épaisseur variable  $\delta(x)$  mais supposée faible, l'on pourra faire les approximations des écoulements quasi-parallèles, comme nous l'avons vu dans la théorie de la lubrification (§ 10.5 page 130). Le raisonnement est aussi valable si la paroi est légèrement courbée, à condition que le rayon de courbure soit grand devant l'épaisseur de la couche limite.

### 11.2.1 Les équations de Prandtl (1904)

Près de la paroi on suppose que l'écoulement est 2D2C,  $\vec{u}(x, y) = (u, v, 0)$  avec les conditions aux limites  $\vec{u} = \vec{0}$  pour  $y = 0$  et  $u = U_e(x)$  pour  $y \rightarrow +\infty$  (figure 11.1) et l'on mène un calcul similaire à celui d'un écoulement de lubrification (§ 10.5 page 130).

La conservation de la masse,  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , nous permet une estimation des ordres de grandeur :  $u/x_0 \approx v/\delta(x_0)$ , où  $x_0$  est l'abscisse du point considéré par rapport au bord d'attaque de la plaque. Donc la vitesse transverse est négligeable devant la vitesse longitudinale lorsque  $\delta(x_0) \ll x_0$ .

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes d'un écoulement stationnaire pour les deux composantes  $u$  et  $v$ .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (11.2)$$

Le terme visqueux a été simplifié pour tenir compte du fait que  $\delta(x_0) \ll x_0$  et donc que les dérivées secondes en  $y$  dominent.

Comme  $v \ll u$ , les termes où la vitesse intervient dans l'équation selon  $y$  (11.2) sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes correspondants de la première équation (11.1). On en déduit que  $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$ . Les gradients de pression transverses sont faibles et au premier ordre la pression ne varie que selon  $x$ , soit  $p \approx p(x)$ . En particulier la pression au sein de la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. C'est à cause de cette propriété qu'un tube de Pitot peut être utilisé

pour mesurer la vitesse dans un fluide (cf 4.3.1 page 35). En effet la pression mesurée à la paroi est pratiquement la même que celle qui existe *au-delà* de la couche limite ( $\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$ ). De même, c'est parce que les couches limites sont minces que les équations d'Euler donnent la bonne portance pour une aile d'avion en faible incidence malgré la présence de couches limites attachées (cf 4.4.2 page 40).

Les termes visqueux sont dominants dans la couche limite, les termes inertIELS le sont en dehors de cette couche. Les deux termes sont du même ordre de grandeur à une distance  $\delta(x_0)$  de la surface solide si :

$$U_e^2/x_0 \approx \nu U_e/\delta^2, \text{ où } x_0 \text{ est la distance au bord d'attaque de l'obstacle. Soit si}$$

$$\delta(x_0) = \sqrt{\nu x_0 / U_e}.$$

Cette quantité est, dimensionnellement, l'épaisseur locale de la couche limite. Cette épaisseur croît lentement, en racine de la distance selon  $x$ . Si on introduit un nombre de Reynolds longitudinal construit sur la distance  $x_0$  du début de la couche limite,  $Re_{x_0} = U_e x_0 / \nu$ , on obtient :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

Si ce nombre de Reynolds est élevé, on vérifie bien l'hypothèse  $\delta(x_0) \ll x_0$ . Attention, l'analyse n'est plus valable si  $x_0$  est petit, c'est-à-dire très près du bord d'attaque de la plaque.

En dehors de la couche limite, la viscosité étant négligeable, l'équation de Bernoulli nous donne  $p(x) + \rho U_e^2(x)/2 = Cste$  sur une ligne de courant et en fait partout si l'écoulement amont est irrotationnel. Nous avons pour l'instant traité le cas général où l'écoulement externe  $U_e(x)$  dépend effectivement de  $x$ . Soit :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x}. \quad (11.3)$$

On peut donc reporter cette relation dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient l'équation de Prandtl de la couche limite :

$$\boxed{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}. \quad (11.4)$$

Cette équation ne peut être résolue que si l'on connaît l'écoulement externe  $U_e(x)$ . Nous allons voir le cas d'un écoulement homogène. Il existe aussi par exemple toute une famille de solutions, les solutions de Falkner-Skan (1930), lorsque l'on peut écrire  $U_e(x) = Cx^m$ .

### 11.2.2 Profil de vitesse de Blasius (1907)

Si maintenant on considère le cas plus simple d'un écoulement externe homogène,  $U_e(x) = U_e = Cste$  au-dessus d'une plaque plane, l'équation 11.4 se simplifie en :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Cette équation, après adimensionnement, admet une solution auto-similaire unique.

Pour le montrer, posons  $X = x/x_0$ ,  $Y = y/\delta(x_0)$ ,  $U = u/U_e$  et  $V = v/(U_e/\sqrt{Re_{x_0}})$ . La conservation de la masse et l'équation de la dynamique de la composante longitudinale s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (11.5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (11.6)$$

Ces équations ne contiennent plus aucun paramètre (ni  $U_e$ , ni  $Re_{x_0}$ ). En plus elle admet pour la variable  $U$  une solution auto-similaire,  $U(X, Y) = f(\theta)$  ce qui fait que l'on obtiendra une équation différentielle ordinaire, bien plus simple qu'une équation aux dérivées partielles. Ceci est possible car notre résultat doit être indépendant du choix arbitraire de l'abscisse  $x_0$  et l'on peut alors éliminer cette variable. La vitesse  $U(X, Y)$  ne dépend donc pas de  $X$  et  $Y$  indépendamment mais à travers une variable intermédiaire unique indépendante de  $x_0$ . On trouve alors  $\theta = Y/\sqrt{X} = y/\delta(x)$  avec pour conditions aux limites :  $f(0) = 0$  et  $f(\infty) = 1$ . Attention  $\theta = y/\delta(x)$  n'est pas la variable  $Y = y/\delta(x_0)$  !

En exprimant  $\frac{\partial V}{\partial Y}$  par l'équation de continuité (11.5) et en intégrant par partie cette expression on obtient formellement :

$$V(X, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{X}} \left[ \theta f - \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right] \quad (11.7)$$

que l'on peut injecter dans l'équation 11.6.

On en déduit l'équation intégro-différentielle satisfaite par  $f$  :

$$2f'' + f' \int_0^\theta f(\xi) d\xi = 0. \quad (11.8)$$

Si on introduit la fonction  $F(\theta) = \int_0^\theta f(\xi) d\xi$  cette nouvelle équation peut s'écrire :

$$2F''' + F''F = 0. \quad (11.9)$$

C'est l'**équation de Blasius**. Cette équation différentielle ordinaire et non-linéaire s'intègre numériquement et l'on obtient alors le profil de vitesse longitudinale dans la couche limite (figure 11.2a). Le profil de vitesse est très linéaire dans la couche limite et transite rapidement (exponentiellement) vers l'asymptote.

### Développements limités de la fonction de Blasius

- Pour  $\theta$  petit, on peut écrire un développement de Taylor. On a  $f(0) = 0$  et en utilisant l'équation intégro-différentielle,  $f''(0) = 0$ . En dérivant l'équation 11.8 on montre de plus que  $f'''(0) = 0$ . Le développement limité s'écrit donc :

$$f(\theta) = \theta f'(0) + b\theta^4 + O(\theta^5).$$

En reportant dans l'équation de Blasius on trouve  $b = -\frac{1}{48}f'^2(0)$ .

Numériquement l'on trouve  $f'(0) = 0,332 \approx 1/3$  soit

$$\frac{u}{U_e} = \frac{1}{3} \frac{y}{\delta(x)} - \frac{1}{432} \left[ \frac{y}{\delta(x)} \right]^4 + \dots$$

De plus  $f(\theta = 5) \approx 0,99$  ce qui permet une définition de l'épaisseur locale de la couche limite  $\delta_{0,99} = 5\delta$ .

– Pour  $\theta$  grand, on a  $f(\theta) \rightarrow 1$  et donc  $\int_0^\theta f(\xi)d\xi \rightarrow \theta$ . De l'équation de Blasius on déduit que

$$f''(\theta) = -\frac{\theta}{2}f'(\theta)$$

soit en intégrant que  $f' = C \exp(-\theta^2/4)$ . Donc la fonction  $f(\theta) \rightarrow 1$  comme une gaussienne tend vers zéro.

L'écartement progressif des lignes de courant au voisinage de la plaque plane (en  $\sqrt{x}$ ) est dû à l'existence d'une petite composante de vitesse transverse (dans et hors de la couche limite) que l'on peut calculer explicitement en utilisant l'équation 11.7 (figure 11.2b).

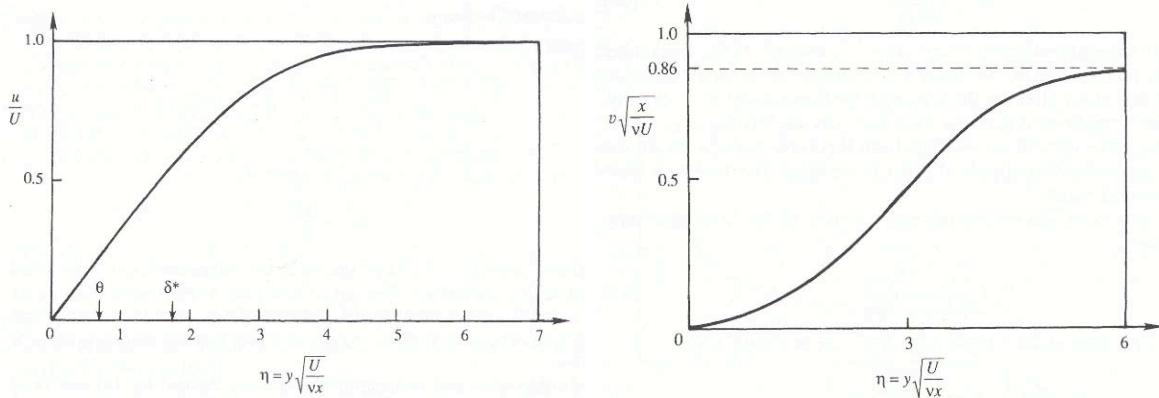


FIGURE 11.2 – Profil de vitesse de Blasius. a) vitesse longitudinale  $U = f(\theta)$ , b) vitesse transverse  $V = f(X, \theta)$ . D'après [26] p. 311.

### Paradoxe de Blasius

L'existence d'une vitesse transverse non nulle même loin de la plaque (figure 11.2b) pose quelques problèmes. En effet cela veut dire que sur un très grand domaine le module de la vitesse est supérieur à la vitesse incidente  $U_e$  et donc qu'il y a un gain en énergie cinétique ! Ce problème est connu sous le nom de paradoxe de Blasius. En réalité, en effectuant des calculs aux ordres suivants ou par simulation numérique, on montre que la vitesse transverse redécroît vers zéro loin de la plaque lorsque  $Re_x$  est grand mais fini. Ce n'est que lorsque ce nombre de Reynolds est infini que la zone de décroissance est rejetée à l'infini [38].

#### 11.2.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée

La connaissance explicite de la vitesse dans la couche limite permet de calculer la contrainte locale de frottement visqueux sur la paroi.

$$\sigma_{xy} = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \eta U_e f'(0) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \eta U_e f'(0) \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \approx \frac{1}{3} \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

On en déduit la force de traînée visqueuse par unité de largeur et par face d'une plaque de longueur  $L$  :

$$F_D = \int_0^L \sigma_{xy} dx = 2\rho U_e^2 L f'(0) \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

La force de traînée varie donc comme  $U_e^{3/2}$  et comme  $L^{1/2}$ . La dépendance avec la vitesse en puissance 3/2 est clairement intermédiaire avec le cas très visqueux (force de Stokes) où elle est proportionnelle à  $U_e$  et le cas des Reynolds très élevés où l'écoulement est turbulent et où elle varie comme le carré de la vitesse. La dépendance avec la longueur en puissance 1/2 fait que si  $L$  double, la force de traînée ne double pas. La contribution au frottement des zones en amont de la plaque est donc plus importante que celles des zones en aval (où le cisaillement est moins intense).

Si on introduit le coefficient de traînée adimensionné, on trouve :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_e^2 L} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

Résultat qu'il faut multiplier par 2 si l'on veut tenir compte des deux faces de la plaque. Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, ce coefficient de traînée est très faible, mais la couche limite peut aussi devenir turbulente !

A. N. Calculer la force de traînée d'une plaque de  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  tirée à incidence nulle à une vitesse de  $1 \text{ m/s}$  dans de l'eau.

#### 11.2.4 Définitions de l'épaisseur d'une couche limite

Il n'y a pas de définition unique de l'épaisseur de la couche limite présente à haut nombre de Reynolds près des parois solides. Pour les expériences on définit traditionnellement plusieurs échelles caractérisant l'épaisseur des couches limites

- *Epaisseur  $\delta_{0,99}$  de la couche limite*

Cette épaisseur  $\delta_{0,99}(x)$  correspond à la distance de la plaque où la vitesse longitudinale atteint 99% de la vitesse à l'infini  $U_e$ .

$$u [x, \delta_{0,99}(x)] = 0,99 U_e .$$

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve :  $\delta_{0,99}(x) \approx 5\sqrt{\nu x / U_e}$ .

- *Epaisseur de déplacement  $\delta^*$*

L'épaisseur de déplacement correspond au déplacement latéral de la paroi qu'il faudrait effectuer dans un écoulement uniforme pour avoir le même débit massique dans l'hypothèse d'un fluide parfait, donc glissant à la paroi. Pour un fluide incompressible le débit massique s'écrit :

$$Q/\rho = \int_0^\infty u(y) dy = \int_{\delta^*}^\infty U_e dy ,$$

en appellant  $U_e$  la vitesse longitudinale loin de la paroi.

Un petit schéma montre que l'on a égalité des aires et donc :

$$U_e \delta^* = \int_0^\infty (U_e - u) dy .$$

On peut donc finalement écrire :

$$\delta^*(x) = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u(x, y)}{U_e} \right) dy .$$

Pour un écoulement uniforme arrivant sur une plaque plane on trouve :  $\delta^*(x) \approx 1,73\sqrt{\nu x/U_e}$ .

- *Epaisseur de quantité de mouvement  $\delta^{**}$*

Cette épaisseur est construite en calculant la perte de flux de quantité de mouvement :

$$\rho U_e^2 \delta^{**} = \rho \int_0^\infty u(U_e - u) dy.$$

soit

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy.$$

Cette épaisseur  $\delta^{**}$  permet de calculer simplement la force s'exerçant sur la paroi entre 0 et  $x$  car  $F(x) = \rho U_e^2 \delta^{**}$ . Elle permet aussi de calculer la contrainte pariétale locale à la paroi par  $\tau^* = dF/dx = \rho U_e^2 d\delta^{**}/dx$ .

Pour un écoulement uniforme sur une plaque plane on trouve :  $\delta^{**}(x) \approx 0,66\sqrt{\nu x/U_e}$ .

En résumé pour une plaque plane dans un écoulement laminaire uniforme, on peut définir plusieurs épaisseurs caractéristiques et l'on a :  $\delta_{0,99} > \delta^* > \delta^{**}$ . Il faut toutefois remarquer qu'aucune de ces définitions de la frontière de la couche limite ne correspond à une ligne de courant particulière, c'est-à-dire que le fluide traverse cette « frontière ».

## 11.3 Couche limite sur une paroi courbée

S'il existe un écoulement extérieur non uniforme (par exemple parce que la surface est courbée ou que l'écoulement se situe dans un convergeant ou un divergent) il existe des gradients de pression longitudinaux positifs ou négatifs qui interviennent dans l'équation de la couche limite (équation 11.1).

- Si une particule lagrangienne accélère, d'après l'équation de Bernoulli valable au-delà de la couche limite pour un écoulement potentiel (équation 11.3), on a  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ . Le fluide est accéléré par ce gradient de pression,  $v$  devient négatif et la couche limite s'amincit.
- Par contre si l'écoulement ralentit on a  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ . Le fluide est décéléré et comme près de la paroi il était déjà ralenti l'écoulement peut changer de sens près de la paroi (figure 11.3). C'est ce que l'on appelle le phénomène de décollement de la couche limite.

Le décollement de la couche limite peut être brutal. C'est une transition qui peut être catastrophique par exemple pour un avion lorsque l'incidence des ailes augmente car il correspond à une perte brutale de la portance (décrochage). C'est le même phénomène que le marin cherche à éviter et c'est pour pouvoir le mettre en évidence que l'on colle des brins de laine sur l'intrados et sur l'extrados de ses voiles (figure 11.4).

Le décollement des couches limites induit un sillage plus important et donc une forte augmentation de la traînée de pression. Il est donc très important de bien profiler l'arrière des obstacles. Le fait de profiler un véhicule par exemple permet de faire baisser la force de traînée d'un facteur 10 à 100 ! Il existe de nombreux dispositifs pour essayer de contrôler le décollement des couches limites : volets de bord d'attaque ou de bord de fuite sur les ailes à l'atterrissement, aspiration ou soufflage des couches limites, profilage des véhicules, alules sur les ailes de certains oiseaux planeurs (figure 11.5), etc.

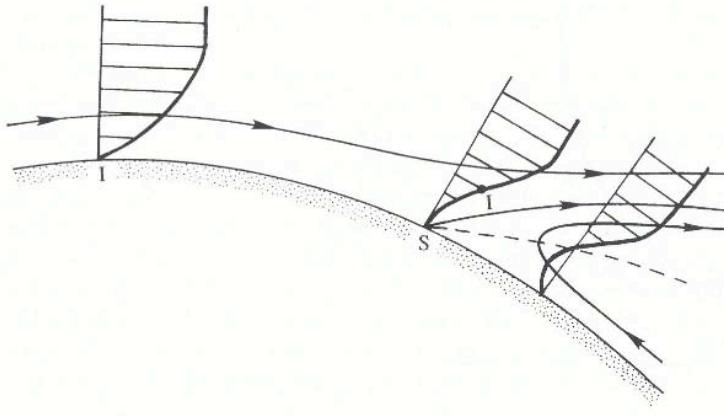


FIGURE 11.3 – Lignes de courant et profils de vitesse près d'un point de séparation S. La ligne pointillée représente le lieu où  $u = 0$ . D'après [26] p. 319.

## 11.4 Equation de Falkner-Skan (1930)

Il est possible de trouver des solutions exactes de la couche limite pour des écoulements externes autres qu'un écoulement homogène. C'est le cas pour un écoulement dans ou autour d'un dièdre dont la solution en fluide parfait est donné par le potentiel complexe de vitesse  $f(z) = Cz^{m+1}$  pour deux demi-plan formant un angle  $\alpha = \frac{\pi}{m+1}$  (voir chapitre ?? page ??).

En particulier au voisinage du plan  $\theta = 0$  on a  $\vec{v} = (v_r, v_\theta = 0)$  avec  $v_r = C(m+1)r^m = C'r^m$ . On peut donc prendre cet écoulement comme écoulement externe et résoudre près de cette paroi le développement de la couche limite depuis l'origine  $r = 0$ .

Comme précédemment l'on peut adimensionner le problème en introduisant  $X = x/x_0$ ,  $Y = y/\delta(x_0)$ . Le fait que la variable de similarité  $\theta$  ne doit pas dépendre de  $x_0$  permet d'introduire  $\theta = Y/\sqrt{X} = y/\delta(x)$  et l'on trouve finalement l'équation :

$$f'' + m(1 - f^2) + \frac{m+1}{2}f' \int_0^\theta f(\xi)d\xi = 0. \quad (11.10)$$

Cette équation est une généralisation de l'équation de Blasius (Equ. 11.8) qui correspond au cas particulier  $m = 0$ . Elle nous permet de trouver le profil de couche limite sur une des plaques d'un dièdre.

La figure 11.6 montre quelques profils pour différentes valeurs de  $m$ .

- Plus  $m$  est grand (i.e. plus l'angle  $\alpha$  est petit) plus la couche limite est mince car il existe une accélération longitudinale de l'écoulement externe. Dans le cas  $m = 1$  on obtient l'écoulement au voisinage d'un point de stagnation et l'on trouve que la couche limite est d'épaisseur constante.

- A l'inverse plus  $m$  est petit (et négatif) plus la couche limite est épaisse à cause de la décélération du fluide externe. Pour  $m < -0,0905$  correspondant à  $\alpha > \pi + 18^\circ$ , un contre-écoulement apparaît à la paroi qui montre qu'il y a alors décollement de la couche limite.

## 11.5 Couche limite thermique

En construction

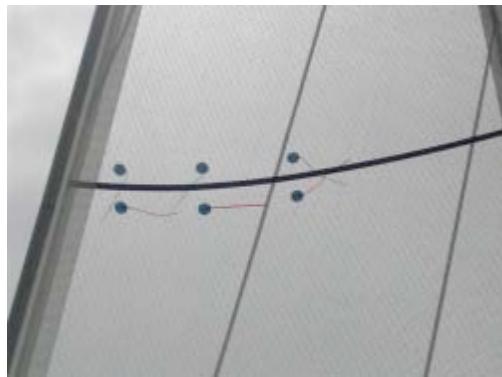


FIGURE 11.4 – Brins de laine placés sur l’extrados et l’intrados (près du bord d’attaque) d’une voile d’avant d’un voilier naviguant au près et qui permettent de visualiser le décollement éventuel des couches limites.



FIGURE 11.5 – Aigrette en vol montrant ses alules qu’elle utilise pour recoller la couche limite et donc augmenter la portance à basse vitesse.

## 11.6 Couche limite turbulente

Si l’épaisseur de la couche limite est très faible, il existe un très fort cisaillement entre la vitesse nulle sur la paroi et la vitesse  $U_e$  hors de la couche limite. Ce cisaillement peut devenir tellement important que l’écoulement laminaire se déstabilise et devient turbulent. Ceci est observé si le nombre de Reynolds transverse calculé avec l’épaisseur de la couche limite  $Re_y = U_e \delta / \nu$  est suffisamment grand :

$$Re_y = U_e \delta / \nu = U_e \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} / \nu = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{Re_x}.$$

La couche limite laminaire transite vers une couche limite turbulente si  $Re_y \approx 300$  (ce qui correspond à  $Re_x \approx 10^5$ ). On voit alors apparaître des ondes transverses dites « ondes de Tollmien-Schlichting » qui se déstabilisent en « épingle à cheveux », puis des taches turbulentes apparaissent qui finalement envahissent toute la couche limite et au-delà. Le profil de vitesse moyenne dans une couche limite turbulente est plus arrondi que dans une couche limite laminaire. On trouve en général un profil de vitesse logarithmique :

$$\bar{u}/u^* = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) \approx 2,5 \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.$$

La vitesse  $u^*$  s’appelle la vitesse de frottement. Elle représente une échelle de vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes et elle est définie par  $\tau^* = \rho u^{*2}$  où  $\tau^*$  est la contrainte moyenne mesurée en paroi. La constante  $\kappa \approx 0,41$  s’appelle la constante de von Kármán et  $y_0$  est une hauteur typique caractérisant les rugosités de la paroi.

### Pour en savoir plus

**Livres :** Références [25] et [38] H. Schlichting (2000), Boundary Layer Theory, Springer, 8<sup>e</sup> édition. On y trouve en particulier quelques études plus pointues sur les couches limites instationnaires et sur les calculs au-delà du premier ordre.

**Vidéo :** *Fundamentals of Boundary Layers*, F.H. Abernathy, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Fundamentals-Boundary\\_Layers.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Fundamentals-Boundary_Layers.rm)

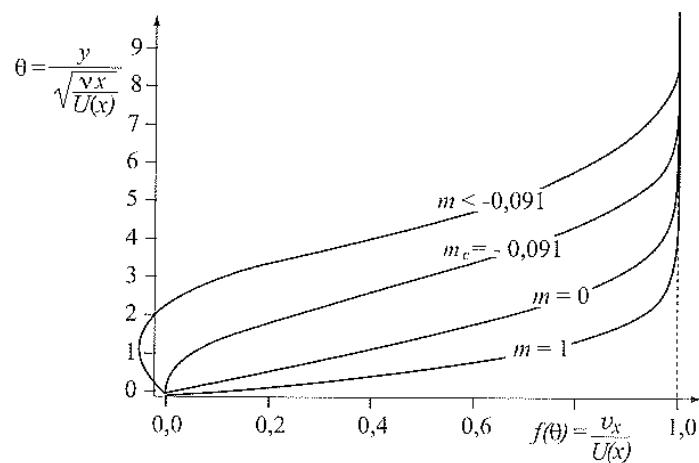


FIGURE 11.6 – Solutions du profil de vitesse de Falkner-Skan pour différentes valeurs de  $m$ . D'après [25] p. 509.

# Chapitre 12

## Dynamique de la vorticité

Marc Rabaud, version du 6 mai 2013

### Sommaire

---

12.1 Equation de la vorticité (ou équation d’Helmholtz) . . . . .	145
12.2 Quelques exemples de vorticité localisée . . . . .	147
12.3 Evolution de la circulation et théorème de Kelvin . . . . .	149
12.3.1 Enoncé du théorème de Kelvin (1869) . . . . .	150
12.3.2 Quelques conséquences du théorème de Kelvin pour un fluide supposé parfait	150
12.4 Décomposition de Helmholtz et loi de Biot et Savart . . . . .	151

---

Par définition on appelle **vorticité** le rotationnel de la vitesse :  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ . L’intérêt d’une telle quantité vectorielle vient du fait qu’à haut nombre de Reynolds on observe souvent de grandes zones d’écoulement potentiel (irrotationnel) auxquelles s’ajoutent des structures « tourbillonnaires » relativement localisées où se concentre l’essentiel de la vorticité (voir par exemple sur la figure 12.1 le tourbillon localisé entre un nuage et la surface de la mer).

### 12.1 Equation de la vorticité (ou équation d’Helmholtz)

Ecrivons l’équation de la dynamique pour la vorticité. Mais tout d’abord transformons l’équation de Navier-Stokes en utilisant la relation  $\vec{\nabla}(v^2) = 2\vec{v} \wedge \vec{\omega} + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  qui nous a déjà servi pour obtenir l’équation de Bernoulli. L’équation de Navier-Stokes devient alors pour un fluide newtonien incompressible :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \wedge \vec{\omega} = -\vec{\nabla} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}.$$

En calculant le rotationnel de cette équation, le terme de gradient de pression et celui des forces volumiques, si elles dérivent bien d’un potentiel, disparaissent et les dérivations temporelles et les dérivations spatiales commutent. (Notons que nous avons supposé ici que  $\nu$  est homogène en espace ce qui exclut le cas des fluides stratifiés par exemple). Soit :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = \vec{0} + \nu \vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}^2 \vec{v}).$$



FIGURE 12.1 – Photo d'une trombe se développant sous un cumulonimbus et au-dessus d'une mer chaude.

En utilisant la relation (voir formulaire Chap. 16 page 205)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \cdot \text{div} \vec{B} - \vec{B} \cdot \text{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

on a donc

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = \vec{v} \cdot \text{div} \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \text{div} \vec{v} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}.$$

Si le fluide est incompressible  $\text{div} \vec{v} = 0$  et par construction  $\text{div} \vec{\omega} = 0$ .

Donc il reste :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}.$$

Parallèlement :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}^2 \vec{v}) = \vec{\text{rot}}\left(\vec{\nabla}(\text{div}(\vec{v})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))\right) = -\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{\omega})) = \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}.$$

Soit en rassemblant tous les termes :

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}. \quad (12.1)$$

Cette équation est l'équation de la vorticité, aussi appelée équation d'Helmholtz. Cette équation gouverne la dynamique de la vorticité et ne fait plus intervenir la pression mais elle fait par contre apparaître, en plus du champ  $\vec{\omega}$ , le champ de vitesse  $\vec{v}$ .

On reconnaît une équation similaire à l'équation de Navier-Stokes, avec un terme instationnaire  $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ , un terme non-linéaire d'advection  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega}$ , un terme de diffusion visqueuse  $\nu \vec{\nabla}^2 \vec{\omega}$ . Le seul terme nouveau est le terme  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$  qui va gouverner l'étirement et la rotation du vecteur vorticité.

**Quelques conséquences :**

### 1. Fluide parfait.

Pour un fluide parfait  $\nu = 0$  et si la vorticité est nulle à un instant  $t$  l'équation de Helmholtz devient  $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0$ . La vorticité reste donc nulle aux instants ultérieurs, au moins en lagrangien. La vorticité ne peut donc apparaître à haut Reynolds que dans des couches limites, là où le fluide n'est pas parfait !

### 2. Ecoulement bidimensionnel (2D2C).

Si l'écoulement est 2D2C, la vorticité a une direction fixe perpendiculaire au plan du vecteur vitesse et donc  $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ . L'équation de la vorticité se réduit alors à l'équation scalaire :

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega.$$

C'est une équation de diffusion. La vorticité se comporte comme un scalaire, elle est advectée par l'écoulement et est soumise à la diffusion visqueuse. C'est la même équation que l'on retrouve pour le transport d'un colorant ou de la température, même si ici comme  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}} \vec{v}$  le champ scalaire  $\omega$  n'est pas découpé du champ de vitesse.

### 3. Etude du terme $(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ .

Si en un point  $\vec{r}$  on choisit l'axe  $Oz$  dans la direction du vecteur  $\vec{\omega}$ , on peut décomposer  $\vec{v}$  en sa composante  $v_z$  et sa composante  $\vec{v}_\perp = v_\perp \vec{e}_\perp$ . Alors :

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \vec{e}_z + \omega_z \frac{\partial v_\perp}{\partial z} \vec{e}_\perp.$$

- (a) Le premier terme du membre de droite est proportionnel à l'étirement ou la compression longitudinal du champ de vitesse. L'étirement longitudinal est la cause d'une augmentation de l'intensité de la vorticité. Ceci correspond à la conservation du moment cinétique de la particule fluide. En effet en étirant un cylindre de fluide on diminue sa section et donc son moment d'inertie diminue. Sa vitesse angulaire augmente alors tout comme pour un solide déformable (patineuse sur la glace).
- (b) Le deuxième terme est un terme de rotation de l'axe du vecteur vorticité sous l'action cisaillante du champ de vitesse. Ce terme fait apparaître de la vorticité dans la direction transverse  $\vec{e}_\perp$ . Il correspond à une simple rotation du vecteur vorticité, à module constant.
- (c) Pour un fluide parfait, seul le processus d'étirement peut changer l'intensité de la vorticité. En effet  $\frac{D\vec{\omega}^2}{Dt} = 2\vec{\omega} \cdot \frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \omega_z^2 \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z}$ .
- (d) A trois dimensions, l'étirement ou la compression d'une ligne de vorticité est le mécanisme qui va augmenter ou diminuer son intensité. Ce mécanisme ne peut pas exister dans un écoulement bidimensionnel (2D2C ou 2D3C) et c'est pourquoi ces écoulements sont si particuliers.

## 12.2 Quelques exemples de vorticité localisée

On peut imaginer de nombreuses fonctions modélisant de façon plus ou moins réaliste des répartitions localisées de vorticité. Voici quelques distributions de vorticité plus ou moins classique :

- 1. **Rotation solide.** Un volume de fluide en rotation solide a partout une vorticité égale à deux fois sa vitesse angulaire. Il n'y a pas de mouvement relatif.

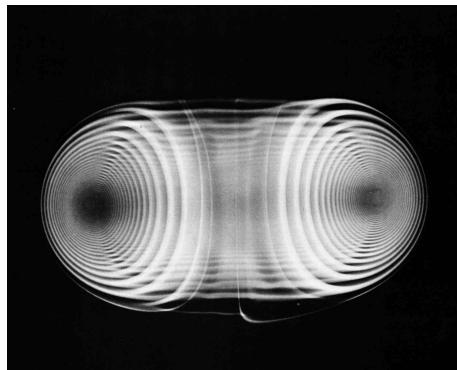
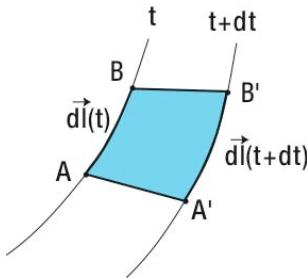


FIGURE 12.2 – Coupe d'un vortex de Hill (Ref. [17]).

2. **Couche limite visqueuse au voisinage d'une paroi.** Il existe de la vorticité localisée dans la couche limite à cause de la condition de non-glissement sur la paroi. Cette viscosité diffuse dans le volume mais est aussi advectée par l'écoulement. Elle reste donc confinée dans la couche limite laminaire.
3. **Couche de mélange.** Ecoulement parallèle de deux veines de fluides ayant des vitesses différentes. Dans la zone de raccordement du profil de vitesse il existe une vorticité et cela bien que les lignes de courant soient toutes parallèles.
4. **Vortex ponctuel.** C'est une distribution de Dirac de la vorticité, caractérisée par sa circulation  $\Gamma$ . C'est un modèle valable pour les fluides parfaits. Il existe des vortex rectilignes et des vortex en anneaux. Le meilleur exemple de vortex très localisé est le quantum de vorticité dans l'hélium superfluide. Les « dust devils » sont des tourbillons de poussière observées aux Etats-Unis (voir par exemple le film <http://www.animalu.com/pics/dd1.htm>), tourbillons qui se modélisent assez bien par des tourbillons ponctuels. On peut citer aussi les trombes et les tornades (figure 12.1).
5. **Vortex en anneau.** C'est un vortex ponctuel (ou en tout cas localisé) refermé sur lui-même en forme de tore.
6. **Vortex de Rankine.** C'est un vortex rectiligne, dont la vorticité est constante à l'intérieur d'un disque et nulle à l'extérieur.
7. **Vortex de Stuart.** Comme le vortex de Rankine mais avec une section elliptique.
8. **Vortex de Lamb-Oseen.** C'est un vortex rectiligne plus réel que le vortex de Rankine avec une distribution de vorticité gaussienne.
9. **Vortex écranté** C'est un vortex rectiligne dont la distribution de vorticité est la dérivée d'une gaussienne (chapeau mexicain, d'abord positive puis négative) et tel que la circulation mesurée à grande distance soit nulle.
10. **Vortex de Burgers.** C'est un vortex étiré, solution exacte de Navier-Stokes où la diffusion de la vorticité est compensée par un étirement axial.
11. **Vortex de Hill (1894).** Modèle de vortex sphérique où la vorticité est confinée dans une sphère et les lignes de vorticité sont toriques (figure 12.2).
12. **Vortex de Batchelor (1964).** Vortex rectiligne avec une distribution gaussienne de vorticité comme le vortex de Lamb-Oseen plus une vitesse axiale gaussienne. Souvent utilisé pour modéliser le vortex en bout d'aile d'avion.

FIGURE 12.3 – Déplacement pendant  $dt$  de l’élément du contour  $\vec{dl}$ .

13. **Vortex de Taylor-Green.** Vortex périodique en  $x$ ,  $y$  et  $z$  ( $u = \sin x \cos y \cos z$ ,  $v = \cos x \sin y \cos z$  et  $w = \cos x \cos y \sin z$ ). Pour ses symétries il est utilisé comme condition initiale dans des simulations numériques de turbulence développée dans une boîte périodique.
14. **NEW mars 2013 ! Vortex noués.** Voir les très beaux films sur <http://phys.org/news/2013-03-physics-duo-vortex-fluid-video.html>.

## 12.3 Evolution de la circulation et théorème de Kelvin

On définit la circulation du vecteur vitesse sur un contour  $\mathcal{C}$  fermé matériel c'est-à-dire emporté par l'écoulement :  $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ . Par application du théorème de Stokes, on peut aussi l'écrire :  $\Gamma = \iint \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ .

Nous allons étudier l'évolution de cette circulation le long d'un contour matériel emporté par l'écoulement. En utilisant le théorème de Leibnitz (Equ. 2.1) et en s'inspirant du théorème du transport on peut écrire :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{v} \cdot \frac{D\vec{l}}{Dt}.$$

Dans le premier terme du membre de droite se trouve l'accélération lagrangienne des particules fluides sur un contour fixe tandis que dans le deuxième terme apparaît le déplacement du contour.

Pour le deuxième terme, dessinons un petit élément  $d\vec{l}$  aux instants  $t$  et  $t + dt$  (voir schéma 12.3). On a  $d\vec{l}(t + dt) = d\vec{l}(t) + \vec{v}_B dt - \vec{v}_A dt$ . Or  $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{dv}$ , soit finalement  $\frac{D\vec{l}}{Dt} = \vec{dv}$ .

On peut donc écrire  $\vec{v} \cdot \frac{D\vec{l}}{Dt} = \vec{v} \cdot \vec{dv} = \frac{1}{2} d(v^2)$ . L'intégrale sur un contour fermé de ce terme est nulle.

Pour le premier terme en utilisant l'Equ. de Navier-Stokes on a  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}$ .

Si la masse volumique est constante (ou si le fluide est barotrope), la circulation du gradient de pression est nulle. Si de plus les forces de volume dérivent d'un potentiel, la dérivée lagrangienne de la circulation s'écrit simplement :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \nu \oint \vec{\nabla}^2(\vec{v}) \cdot d\vec{l}.$$

Comme  $\vec{\nabla}^2(\vec{v}) = \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \operatorname{rot} \vec{v})$  on a finalement :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\nu \oint \vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega}) \cdot d\vec{l} = -\nu \iint \vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) \cdot d\vec{S}.$$

### 12.3.1 Enoncé du théorème de Kelvin (1869)

SI les conditions suivantes sont satisfaites :

- fluide parfait ( $\nu = 0$ )
- forces de volume dérivant d'un potentiel
- densité constante (ou alors fluide barotrope),

la circulation du vecteur vitesse autour de n'importe quelle boucle fermée et entraînée par le fluide est une quantité qui se conserve au cours du mouvement. Ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}.$$

### 12.3.2 Quelques conséquences du théorème de Kelvin pour un fluide supposé parfait

1. **Les tubes de vorticité n'ont pas d'extrémité.** En effet comme pour le champ magnétique, il n'existe pas de source de vorticité monopolaire car  $\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$ . Un tube de champ peut s'amincir si l'écoulement l'étire mais il ne peut pas s'arrêter en un point. De toute façon la circulation étant conservée sur un contour faisant le tour d'un tube de vorticité, si la section de ce tube tend vers zéro, la vorticité doit devenir infinie ce qui n'existe que dans le modèle du vortex ponctuel. Les lignes de vorticité sont donc soit fermées sur elles-même (on parle alors d'anneaux de vorticité), soit se prolongent jusqu'à l'infini, soit se perdent dans les couches limites près des parois où la dissipation visqueuse n'est pas négligeable, soit encore elles rejoignent une surface libre.
2. **Les tubes de vorticité sont advectés par l'écoulement.** En effet prenons un contour porté par la paroi du tube de vorticité mais n'en faisant pas le tour. La circulation de la vitesse y est nulle car le flux de vorticité à travers la paroi est nul. Le parcours, constitué de particules fluides est advecté par l'écoulement. La circulation le long du contour qui est advecté reste nulle. En conséquence la surface du tube de vorticité reste une surface de champ malgré l'advection.
3. En conséquence, en l'absence de vorticité, une particule fluide va conserver sa circulation (et à 2D sa vorticité). Cette propriété des écoulements inertIELS est utilisée dans une technique de simulation numérique pour les écoulements bidimensionnels : le champ de vitesse initial, bidimensionnel, est modélisé par un grand nombre  $N$  de vortex ponctuels. Le mouvement élémentaire de chaque vortex est calculé à chaque pas de temps par le calcul du champ de vitesse induit par les  $N - 1$  autres vortex.
4. **Persistance de l'irrotationnalité.** Si dans un domaine de l'espace l'écoulement est irrotationnel, n'importe quel contour correspondra à une circulation nulle. Cette propriété étant conservée par advection par l'écoulement, une zone irrotationnelle reste irrotationnelle pour un fluide parfait. Pour faire tourner des particules fluides sur elles-même et leur donner ainsi de la vorticité il faut des contraintes visqueuses ! **Il n'y a que dans les couches limites visqueuses que peut naître de la vorticité.**
5. **Vorticité potentielle.** Considérons un écoulement dans un canal à surface libre et tel que le fond présente une bosse. Une ligne verticale de vorticité sera advectée par l'écoulement si le fluide est parfait mais va être raccourcie en passant sur la bosse. Comme la circulation est conservée,  $d\Gamma = \omega \cdot dS$ , où  $dS$  est une petite surface horizontale, reste constant. Si de plus le fluide est incompressible et si l'on note  $h$  la hauteur locale de fluide, le produit  $dS \times h = Cste$ . On en déduit que  $\omega/h = Cste$ . La quantité  $\omega/h$ , appelé **vorticité potentielle**, se conserve dans un fluide parfait.

## 12.4 Décomposition de Helmholtz et loi de Biot et Savart

Pour un écoulement incompressible nous avons  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  et l'on peut donc écrire  $\vec{v} = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{A})$  avec  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$  (champ de vecteur « solénoïdal »<sup>1</sup>) où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur. Dans certains cas l'écoulement est 2D2C et  $\vec{A}$  garde une direction fixe et on se ramène donc à la connaissance d'un scalaire, la fonction de courant  $\Psi$ .

Pour un écoulement irrotationnel  $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$  et l'on peut donc écrire  $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$ , où  $\Phi$  est le potentiel des vitesses.

Plus généralement le théorème de Helmholtz nous dit que si dans un domaine simplement connexe (sans trou !) la divergence et le rotationnel du champ de vitesse s'annulent à l'infini plus vite que  $1/r^2$  l'on peut toujours décomposer un champ de vecteur en une composante irrotationnelle et une composante de divergence nulle (composante solénoïdale)<sup>2</sup>. On peut alors écrire :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \Phi + \vec{\operatorname{rot}} \vec{A}'. \quad (12.2)$$

On a alors  $\Delta \Phi = \operatorname{div} \vec{v}$  et  $\vec{\Delta} \vec{A}' = -\vec{\operatorname{rot}} \vec{v} = -\vec{\omega}$ . La connaissance de la divergence et du rotationnel du champ de vecteur, ainsi que de la valeur de la composante normale aux parois permet de calculer par intégration ce champ (cf. <http://mathworld.wolfram.com/HelmholtzsTheorem.html>). Comme en magnétostatique l'on peut calculer par la loi de Biot et Savart le champ de vitesse à partir du champ de vorticité (à un champ de vitesse irrotationnel près, connu si l'on connaît les conditions aux limites) (Guyon *et al.* [25] p. 293 ou Batchelor [4] p. 509).

En effet on a les correspondances suivantes :

Magnétostatique	Hydrodynamique
$\operatorname{div}(\vec{B}/\mu_0) = 0$	$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$
$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{B}/\mu_0) = \vec{j}$	$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{v}) = \vec{\omega}$
ou $\oint \vec{B}/\mu_0 \cdot d\vec{l} = I$	$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma$

On peut alors utiliser les relations de Biot et Savart sous les mêmes conditions qu'en électromagnétisme, à condition de transformer  $\vec{B}/\mu_0$  en  $\vec{v}$ ,  $\vec{j}$  en  $\vec{\omega}$  et  $I$  en  $\Gamma$ .

Dans le cas d'une distribution continue de vorticité on trouve :

$$\vec{v}(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \vec{\omega}(P) \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \right) d\tau. \quad (12.3)$$

Par exemple pour un filament de vorticité de circulation  $\Gamma$  le champ de vitesse est donné par :

$$\vec{v}(M) = \frac{1}{4\pi} \Gamma \oint \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}. \quad (12.4)$$

Donc, si on connaît le champ de vorticité à un instant, on peut calculer le champ de vitesse au même instant. Ce champ de vitesse transporte les tubes de vorticité (voir §12.3) et l'on peut donc

1. Pour un vecteur solénoïdal (à divergence nulle) on peut toujours l'écrire :  $\vec{A} = \vec{\operatorname{rot}}(\Psi \vec{k}) + \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}}(\Phi \vec{k})$ , où  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire. Cette décomposition en composante toroïdale  $\vec{\operatorname{rot}}(\Psi \vec{k})$  et poloïdale  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}}(\Phi \vec{k})$  est souvent utilisée en géophysique ou en magnéto-hydrodynamique (MHD).

2. Gui, Y. F. and Dou, W. B. (2007). A Rigorous and Completed Statement on Helmholtz Theorem. Progress In Electromagnetics Research, 69, 287-304.



FIGURE 12.4 – Interaction en "saute-mouton" de deux vortex en anneau (Ref. [17]).

connaître la nouvelle distribution de vorticité aux instants ultérieurs. Attention, cela ne fonctionne que pour des fluides parfaits (sinon la vorticité diffuse au cours du temps). Les mouvements induits ne sont dus qu'à la cinématique car on ne résout pas l'équation de la dynamique.

#### **Exercices :**

- Calculer le mouvement de deux vortex ponctuels rectilignes de même signe et de deux vortex de sens contraire.
- Calculer le mouvement d'un vortex rectiligne parallèle à une paroi.
- Pour un vortex de cœur de taille  $\delta$  en anneau de rayon  $R$  et de circulation  $\Gamma$  on peut montrer que sa vitesse de translation s'écrit :  $V = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[ \ln\left(\frac{8R}{\delta}\right) - 1/2 \right]$ , où  $\delta$  est une longueur de coupure correspondant à la taille du cœur du vortex. En déduire que deux vortex en anneau de même force se déplaçant dans la même direction avec des diamètres légèrement différents, vont rester en interaction avec un mouvement de « saute-mouton » (figure 12.4).

#### **Pour tout savoir sur les tourbillons :**

- [37] « Of Vortices and vortical layers : an overview », Maurice Rossi, dans Vortex Structure and Dynamics (2000) Lecture Notes in Physics A. Maurel and P. Petitjeans (Eds.) Springer Verlag, p. 40-123.
- *Vorticity I and II*, A. H. Shapiro, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

# Chapitre 13

## Les fluides en rotation

Marc Rabaud, version du 30 mai 2013

### Sommaire

---

<b>13.1 Changement de référentiel</b> . . . . .	<b>154</b>
<b>13.2 Equation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant</b> . . . . .	<b>154</b>
<b>13.3 Equation de la vorticité dans un référentiel tournant</b> . . . . .	<b>155</b>
<b>13.4 Nombre de Rossby et nombre d'Ekman</b> . . . . .	<b>155</b>
<b>13.5 Ecoulements géostrophiques</b> . . . . .	<b>156</b>
13.5.1 Théorème de Taylor-Proudman . . . . .	157
13.5.2 Les colonnes de Taylor . . . . .	157
<b>13.6 Couches limites et recirculations</b> . . . . .	<b>158</b>
13.6.1 Couche d'Ekman . . . . .	158
13.6.2 Ecoulement de Kármán au-dessus d'un disque tournant infini . . . . .	160
13.6.3 Mise en rotation (spin-up) et arrêt de la rotation (spin-down) . . . . .	160
13.6.4 Couche de Stewartson . . . . .	162
13.6.5 Ecoulement secondaire dans les méandres d'une rivière . . . . .	162
13.6.6 Recirculation de Dean . . . . .	162
13.6.7 Vorticité potentielle dans les fluides en rotation. Théorème d'Ertel (1942)	163
<b>13.7 Ondes inertielles</b> . . . . .	<b>163</b>
13.7.1 Etude qualitative . . . . .	163
13.7.2 Cas d'une onde plane . . . . .	163
13.7.3 Ondes inertielles axisymétriques (d'après Batchelor [4] p. 559) . . . . .	164
13.7.4 Ondes de Rossby entre deux plans non parallèles (d'après Tritton [41] p. 232)	165

---

On se retrouve souvent avec des mouvements de fluide lents vis-à-vis d'une rotation d'ensemble par exemple pour les écoulements atmosphériques, océaniques ou certains écoulements industriels. Il est alors commode d'écrire l'équation du mouvement dans le référentiel tournant (non galiléen) à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ .

### 13.1 Changement de référentiel

Soit un vecteur  $\vec{A}$ . En prenant par exemple un système de coordonnées cylindriques centré en  $O$  supposé fixe (sans translation) et lié au référentiel tournant (référentiel relatif) on a :  $\vec{A}(M) = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$ .

En dérivant par rapport au temps ce vecteur dans le référentiel absolu on obtient :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_a = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad (13.1)$$

Applications :

- Si  $\vec{A} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}$ , c'est le vecteur position d'un point  $M$ . La relation 13.1 nous donne la relation entre vitesse absolue et vitesse relative :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad (13.2)$$

- Si  $\vec{A} = \vec{v}_a$  on obtient :  $\vec{a}_a = \left( \frac{d}{dt} (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right)_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{r})$ . Soit :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \quad (13.3)$$

Le terme  $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$  est l'accélération de Coriolis, le terme  $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = -\Omega^2 r_\perp \vec{e}_r$  est le terme d'accélération centripète ( $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_r + z \vec{e}_z$  où  $r_\perp$  est la distance de M à l'axe de rotation) et le dernier terme, qui est nul pour un référentiel relatif tournant à vitesse angulaire constante, porte le nom d'accélération de libration.

### 13.2 Equation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant

Appliquons ces relations pour exprimer l'équation de Navier-Stokes dans un référentiel tournant à vitesse angulaire constante ( $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$ ) :

$$\left( \frac{D\vec{v}_a}{Dt} \right)_a = \vec{a}_a = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}_a$$

soit en utilisant la relation 13.3

$$\left( \frac{D\vec{v}_r}{Dt} \right)_r = \vec{a}_r = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}).$$

Or  $\vec{\nabla}^2 (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = 0$  donc dans un référentiel tournant, en omettant dorénavant l'indice  $r$  :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \nu \vec{\nabla}^2 (\vec{v}).$$

Or  $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2$  (voir formulaire du gradient d'un produit scalaire Chap. 16 page 205). On voit donc que la force centrifuge dérive d'un potentiel. Si les forces de volume dérivent aussi d'un potentiel ( $\vec{g} = -\vec{\nabla}(\Phi)$ ) et si  $\rho = \text{Cste}$ , on peut introduire une quantité  $p' = p + \rho\Phi - \frac{\rho}{2}(\vec{\Omega} \wedge \vec{r})^2$  homogène à une pression telle que :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p') - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2(\vec{v})}. \quad (13.4)$$

C'est l'équation de Navier-Stokes exprimée dans un référentiel tournant. Le seul terme nouveau est l'accélération de Coriolis,  $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$  qui est à angle droit de  $\vec{v}$ . Cette force n'existe que s'il y a mouvement relatif dans le référentiel tournant et elle est dirigée « à droite » du vecteur vitesse si  $\Omega > 0$  (cas de l'hémisphère Nord sur la Terre). Cette force est indépendante de la distance à l'axe de rotation contrairement à la force centrifuge. La force centrifuge a disparu dans le nouveau terme de pression, en réalité il se construit un gradient de pression  $p$ , centripète, qui compense la force centrifuge. C'est exactement comme en hydrostatique où un gradient de pression vertical compense la force de gravité pour un fluide isodensité (voir chapitre sur l'hydrostatique ?? page ??).

### Exercices :

1. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide de densité variable dans un référentiel tournant.
2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide isodensité dans un référentiel en mouvement rectiligne en accélération.

## 13.3 Equation de la vorticité dans un référentiel tournant

Si nous prenons le rotationnel de l'équation 13.4 il vient ;

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) - 2 \vec{\text{rot}}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}).$$

(Le calcul est identique à la démonstration de l'équation d'Helmholtz (Eq. 12.1 page 146)).

Mais  $\vec{\text{rot}}(\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \vec{\Omega} \text{div}(\vec{v}) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  et  $\text{div}(\vec{v}) = 0$  pour un fluide incompressible. Donc finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = [(\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2(\vec{\omega})}. \quad (13.5)$$

On retrouve une équation similaire à l'équation de la vorticité dans un référentiel galiléen (Eq. 12.1 page 146) sauf que le terme de vorticité relative  $\vec{\omega}$  est remplacé par la vorticité absolue  $\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}$  dans le premier terme du membre de droite. Ce terme correspond à la vorticité totale, somme de la vorticité relative et de la vorticité du référentiel en rotation solide  $2\vec{\Omega}$ . La dynamique de la vorticité relative, en particulier les comportements d'étirement et de rotation des tubes de vorticité, est donc gouvernée par cette vorticité totale. En conséquence, dans un référentiel en rotation il existe une brisure de symétrie : un **cyclone** (tourbillon tournant dans le même sens que le référentiel en rotation) n'a pas la même dynamique qu'un **anticyclone** (qui tourne dans le sens contraire).

## 13.4 Nombre de Rossby et nombre d'Ekman

Reprenons l'équation 13.4 et estimons les ordres de grandeurs des différents termes :

- (1) le terme non linéaire :  $ODG[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] = U^2/L$
- (2) le terme dissipatif :  $ODG[\nu \vec{\nabla}^2(\vec{v})] = \nu U/L^2$  et

– (3) le terme de Coriolis :  $ODG[\vec{\Omega} \wedge \vec{v}] = \Omega U$ .

Comme d'habitude le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re = \frac{(1)}{(2)} = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme visqueux}} = \frac{UL}{\nu} = \frac{\text{temps visqueux } (L^2/\nu)}{\text{temps d'advection } (L/U)},$$

Mais l'on peut maintenant définir deux nouveaux nombres sans dimensions :

– Le nombre d'Ekman (océanographe suédois, 1905) qui compare le terme visqueux au terme de Coriolis :

$$Ek = \frac{(2)}{(3)} = \frac{\text{terme visqueux}}{\text{terme de Coriolis}} = \frac{\nu U / L^2}{\Omega U} = \frac{\text{temps de la rotation } (1/\Omega)}{\text{temps diffusion visqueuse } (L^2/\nu)}.$$

Soit

$$Ek = \frac{\nu}{\Omega L^2}. \quad (13.6)$$

– Le nombre de Rossby (météorologue suédois) qui compare le terme inertiel au terme de Coriolis :

$$Ro = \frac{(1)}{(3)} = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme de Coriolis}} = \frac{U^2 / L}{\Omega U} = \frac{\text{temps de la rotation } (1/\Omega)}{\text{temps d'advection } (L/U)}.$$

Soit

$$Ro = \frac{U}{\Omega L}. \quad (13.7)$$

La rotation du référentiel dominera la dynamique si  $Ek \ll 1$  et si  $Ro \ll 1$ . Notons que l'on a, pour cette échelle  $L$ , la relation :  $Re Ek = Ro$ .

**Ordres de grandeur :** Sur Terre,  $\Omega = 2\pi/1 \text{ jour} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Le nombre d'Ekman n'est petit que si le temps de diffusion est supérieur à 24 heures, soit pour de l'eau ou de l'air si la taille considérée  $L$  est grande. De même le nombre de Rossby n'est petit que si le temps d'advection est supérieur à 24 heures, ce qui suppose que le terme  $U/L$  est petit. En conséquence la force de Coriolis est fondamentale pour comprendre la dynamique à grande échelle de l'atmosphère (anticyclones et dépressions,  $L \approx 500 \text{ km}$ ,  $\nu_{\text{air}} = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $U \approx 10 \text{ m/s}$ ) car alors  $Ek \sim 10^{-12}$  et  $Ro \sim 0,2$ . Par contre, contrairement à la croyance souvent colportée, la force de Coriolis est totalement *négligeable* pour décrire la vidange d'un lavabo ou d'une baignoire (durée inférieure à quelques minutes) ! Ceci a été démontré dans les années 1960 par deux expériences identiques, l'une menée au MIT (USA) et l'autre en Australie<sup>1</sup>. Récemment F. Moisy et son équipe ont toutefois mis en évidence l'action de la rotation de la Terre sur la rotation solide d'un liquide<sup>2</sup>.

## 13.5 Ecoulements géostrophiques

On appelle **écoulements géostrophiques**, ou approximation géostrophique, des écoulements qui sont dominés par la force de Coriolis ( $Ek \ll 1$  et  $Ro \ll 1$ ) et où les termes instationnaires sont aussi négligeables devant le terme de Coriolis (évolution lente comparée à la période de rotation).

Dans ce cas, l'équation de Navier-Stokes en référentiel tournant (Eq. 13.4) se réduit à :

1. Shapiro, Nature **196**, 1081-1082 (1962) et Trefethen *et al.*, Nature **207**, 1084-1085 (1965)

2. J. Boisson *et al.*, *Earth rotation prevents exact solid body rotation of fluids in the laboratory*, EPL **98**, (2012), 59002

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p') = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}}. \quad (13.8)$$

- En prenant le produit scalaire de cette équation par  $\vec{v}$ , il vient  $\vec{\nabla}(p') \cdot \vec{v} = 0$ , ce qui signifie que les isobares sont colinéaires à la vitesse et donc aux lignes de courant. Ce qui est pour le moins inhabituel ! Sans rotation, la vitesse est en générale plutôt colinéaire au gradient de pression (des hautes pressions vers les basses pressions) mais, avec rotation, la force de Coriolis fait dévier les trajectoires vers la droite, et comme cette force est ici dominante, les vecteurs vitesses sont tournés de  $90^\circ$  vers la droite. Dans le cadre de cette approximation la pression est constante sur une ligne de courant. Cette tendance est visible sur une carte météorologique (figure 13.1). Le vent ne va pas des hautes pressions (anticyclone) vers les basses pressions (dépression) perpendiculairement aux isobares mais souffle vers la droite, plutôt le long des isobares (avec un angle d'environ  $20^\circ$  au voisinage du sol, voir §13.6.1).
- De même en multipliant l'équation 13.8 par  $\vec{\Omega}$  on en déduit que la pression modifiée  $p'$  est constante le long de l'axe de rotation.

### 13.5.1 Théorème de Taylor-Proudman

En prenant le rotationnel de l'équation 13.8, et en utilisant l'expression du rotationnel d'un produit vectoriel (voir formulaire du chap. 16 page 205,  $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = \vec{\Omega} \operatorname{div}(\vec{v}) - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ ) on obtient pour un fluide incompressible isodensité :

$$\boxed{(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0}. \quad (13.9)$$

Si  $\vec{\Omega}$  est selon  $Oz$  par exemple, cela implique que  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$ . Le champ de vitesse est donc invariant selon  $Oz$ . L'écoulement est alors 3C2D, il est **bidimensionnalisé** par la forte rotation d'ensemble du référentiel, c'est ce que l'on appelle le théorème de Taylor-Proudman<sup>3</sup>. Si de plus  $v_z = 0$  quelque part en  $z$ , par exemple sur une paroi, alors  $v_z = 0$  partout au-dessus de cette paroi : l'écoulement est alors 2C2D.

L'atmosphère terrestre n'est géostrophique qu'en première approximation, mais une carte météorologique même au niveau du sol montre qu'il existe un écart angulaire important entre les vecteurs vitesses et les gradients de pression (figure 13.1).

### 13.5.2 Les colonnes de Taylor

Une conséquence importante de cette hypothèse géostrophique et de la bidimensionnalisation de l'écoulement qui en découle peut être visualisé en déplaçant très lentement un objet dans un écoulement dominé par la rotation<sup>4</sup>. On y déplace en réalité toute une colonne de fluide parallèle à l'axe de rotation (voir films [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating\\_Flows.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating_Flows.rm)).

**Exercice :** Comment peut-on préciser le mot « lentement » en fonction de la taille de l'objet et de la vitesse angulaire du référentiel ?

3. J. Proudman, *On the motion of solids in a liquid possessing vorticity*, Proc. Roy. Soc. A **92**, 408, 1916

4. G.I. Taylor, *The motion of a sphere in a rotating liquid*, Proc. Roy. Soc. A **102**, 180, 1922, et G.I. Taylor, *Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids*, Proc. Roy. Soc. A **104**, 213, 1923.

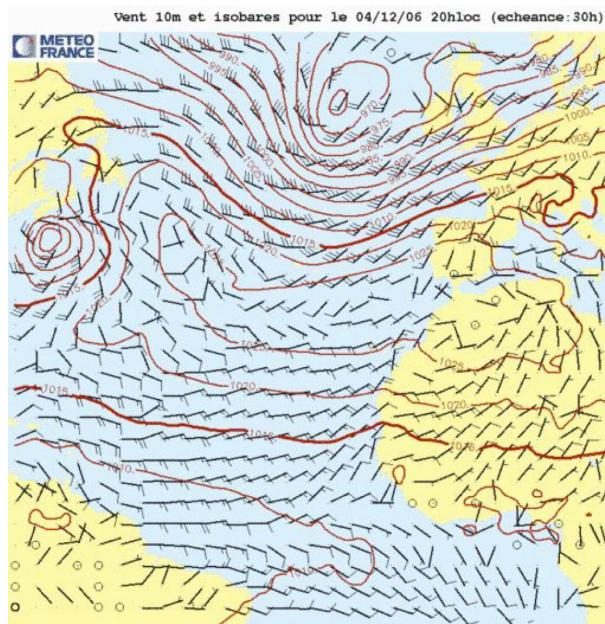


FIGURE 13.1 – Carte de prévision de vent et de pression pour l’Atlantique. Un angle de 20° environ est visible entre les isobares (lignes continues) calculés ici à 5000 m et le vent au sol (flèches et barbules).

## 13.6 Couches limites et recirculations

Les couches d'Ekman et de Stewartson sont des couches limites visqueuses supposées minces de raccordement entre une zone d'écoulement géostrophique et une zone où la viscosité ne peut être négligée (une paroi le plus souvent). Les couches d'Ekman sont observées près des parois perpendiculaires à l'axe de rotation, les couches de Stewartson dans des couches parallèles à l'axe de rotation.

### 13.6.1 Couche d'Ekman

Supposons tout d'abord qu'en altitude existe un écoulement géostrophique localement uniforme dans la direction  $\vec{e}_x$  :  $\vec{v} = U_0 \vec{e}_x$  (en réalité il suffira que les variations horizontales de l'écoulement géostrophique soient lentes devant l'épaisseur de la couche limite).

L'équation de Navier-Stokes (Eq. 13.4) pour un écoulement géostrophique (stationnaire, petit  $Ek$  et petit  $Ro$ ) se réduit à :  $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p') = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ . Si  $\vec{\Omega}$  est orienté selon  $Oz$  cette équation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial p'}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial y} & = & -2\rho\Omega U_0 \\ \frac{\partial p'}{\partial z} & = & 0 \end{array} \right.$$

Le gradient de pression n'a qu'une composante horizontale, perpendiculaire à l'écoulement.

Près de la paroi, le fluide étant visqueux, la vitesse doit s'annuler et il faut tenir compte du terme visqueux dans l'équation de Navier-Stokes (Eq. 13.4). Si on recherche une solution stationnaire 2C1D  $\vec{v} = (u(z), v(z), 0)$ , le terme inertiel est nul. L'équation de Navier-Stokes devient  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p') - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \nu \vec{\nabla}^2(\vec{v})$ , soit en projetant sur les trois axes :

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + 2\Omega v + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - 2\Omega u + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

La pression ne dépendant pas de  $z$  elle doit se raccorder à sa valeur en altitude  $\vec{p}' = -2\rho\Omega U_0 \vec{e}_y$  (même raisonnement que pour la couche limite visqueuse classique (§ 11 page 135). Le système précédent devient :

$$\begin{cases} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\Omega v \\ \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\Omega(u - U_0) \end{cases}$$

Pour résoudre ces deux équations différentielles ordinaires couplées, on peut multiplier la deuxième équation par  $i$  et résoudre en notation complexe  $\tilde{U} = (u + iv)/U_0$  l'équation :

$$\nu \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial z^2} - 2i\Omega(\tilde{U} - 1) = 0.$$

Les conditions aux limites sont  $u = v = 0$  en  $z = 0$  et  $u = U_0$  et  $v = 0$  pour  $z \rightarrow \infty$ .

En posant  $\Delta = \sqrt{\nu/\Omega}$  et en intégrant on trouve  $\tilde{U} = 1 - \exp[-(1+i)z/\Delta]$  soit finalement :

$$\begin{cases} u = U_0 [1 - \exp(-z/\Delta) \cos(z/\Delta)] \\ v = U_0 \exp(-z/\Delta) \sin(z/\Delta). \end{cases}$$

Ces fonctions sont tracées sur les figures 13.2 et 13.3. On notera que l'épaisseur  $\Delta$  de la couche limite correspond à l'épaisseur de diffusion visqueuse calculée pour une période de rotation.

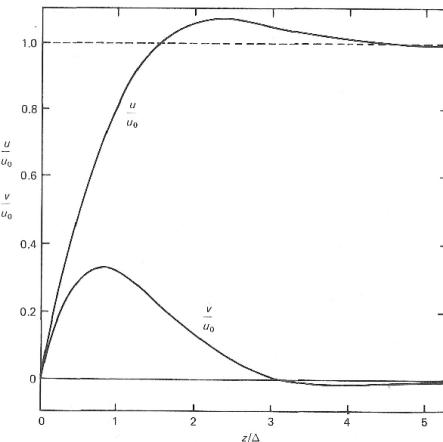


FIGURE 13.2 – Distribution des vitesses  $u/U_0$  et  $v/U_0$  en fonction de  $z/\Delta$  dans la couche d'Ekman. D'après [41] p. 174.

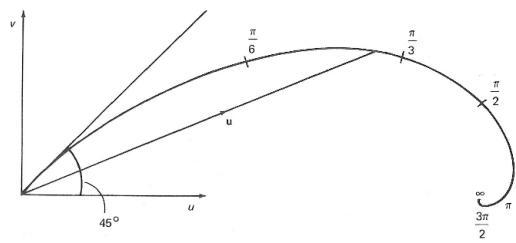


FIGURE 13.3 – La spirale d'Ekman : diagramme polaire du vecteur vitesse  $\vec{v}$  dans la couche d'Ekman. Les nombres le long de la spirale sont les valeurs de  $z/\Delta$  correspondantes. D'après [41] p. 174.

Les équations précédentes et la figure 13.3 expliquent que le vent au voisinage du sol fait un angle avec le vent en altitude. Dans l'hémisphère Nord ce décalage est vers la gauche. Si l'écoulement était

laminaire ce décalage serait de  $45^\circ$  au niveau du sol et avec une épaisseur caractéristique de  $\Delta \approx 50$  cm ! Dans la réalité l'écoulement atmosphérique est turbulent ce qui augmente fortement le transfert de quantité de mouvement depuis le sol et augmente très fortement le coefficient de viscosité effectif. Dans l'atmosphère on observe plutôt un vrillage du vent entre le vent géostrophique en altitude et le vent au sol de l'ordre de  $20^\circ$  sur une épaisseur caractéristique de 1000 m.

Le rôle de la force de Coriolis a été proposé pour la première fois par l'explorateur norvégien Fridtjof Nansen pour expliquer la dérive vers la droite de son bateau pris par les glaces. Le détail de l'analyse a été formalisé par l'océanographe suédois Vagn Walfrid Ekman en 1905. Il a montré qu'il existe en fait une double spirale pour le vecteur vitesse, l'une dans l'air et l'autre dans l'eau, et c'est le débit moyen dans l'eau qui explique une direction de transport des icebergs à  $45^\circ$  à droite du vent géostrophique dans l'hémisphère Nord.

### 13.6.2 Ecoulement de Kármán au-dessus d'un disque tournant infini

On s'intéresse au champ de vitesse tridimensionnel existant au-dessus d'un disque tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ . On recherche des solutions stationnaires auto-similaires [von Kármán (1921)] de la forme :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= r\Omega F(Z)\vec{e}_r \\ \vec{v} &= r\Omega G(Z)\vec{e}_\theta \\ \vec{w} &= \sqrt{\nu\Omega}H(Z)\vec{e}_z \\ \vec{p} &= -\rho\nu\Omega P(Z)\end{aligned}$$

où  $Z = \sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}z$  en coordonnées cylindriques dans le référentiel du laboratoire.

1) Par analyse dimensionnelle, justifier l'expression de  $Z$  et des vitesses. Montrer que les fonctions  $F$ ,  $G$ ,  $H$  et  $P$  satisfont un système d'équations différentielles ordinaires (ODE) couplées relativement simple.

Avec les conditions aux limites  $F = H = 0$  et  $G = 1$  en  $z = 0$  et  $F = G = 0$  en  $z - > \infty$ , on trouve numériquement [Cochran (1936)] les courbes de la figure 13.4.

- 2) Effectuer un développement limité de cette solution au voisinage du plan  $z = 0$ .
- 3) Décrire l'allure de l'écoulement. Que pensez-vous de l'allure de l'écoulement si le disque est fini et constitue la paroi inférieure d'un cylindre ?
- 4) Application à l'estimation de la puissance d'une pompe centrifuge.

Le calcul peut être repris avec un fluide tournant au-dessus d'un disque fixe (écoulement centripète de Bödewadt, 1940).

### 13.6.3 Mise en rotation (spin-up) et arrêt de la rotation (spin-down)

Lors de la mise en rotation d'un récipient, la rotation solide du liquide qu'il contient prend un certain temps pour s'installer. Le temps que l'on mesure ne correspond pas à un simple temps diffusif ( $T_{diff} = R^2/\nu$  où  $R$  est le rayon du récipient) mais à un temps convectif plus court ou temps d'Ekman ( $T_{Ek} = h/\sqrt{\Omega\nu}$  où  $h$  est la hauteur du récipient). Ceci vient du fait qu'il apparaît une circulation secondaire radiale forcée dans la couche d'Ekman sur les surfaces perpendiculaires à l'axe de rotation, circulation qui favorise les transferts de quantité de mouvement et donc la mise en rotation.

Dans la phase de spin-up il apparaît une couche limite centrifugée près d'un disque en rotation dans le fluide au repos (dite couche d'Ekman ou plutôt de von Kármán, figure 13.5), tandis que dans

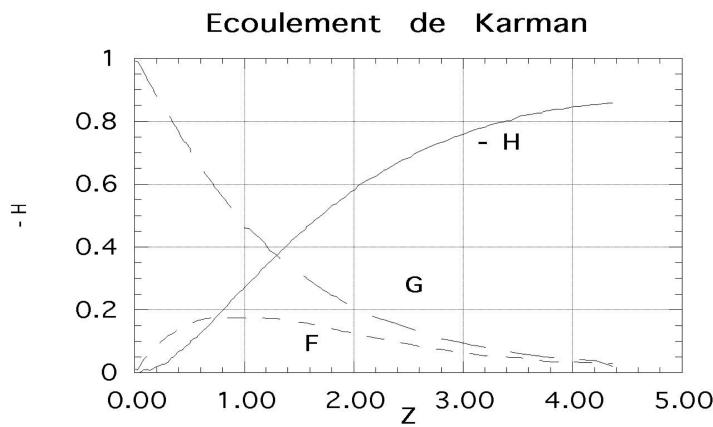


FIGURE 13.4 – Profil des fonctions  $F$ ,  $G$  et  $-H$  de l’écoulement de von Kármán.

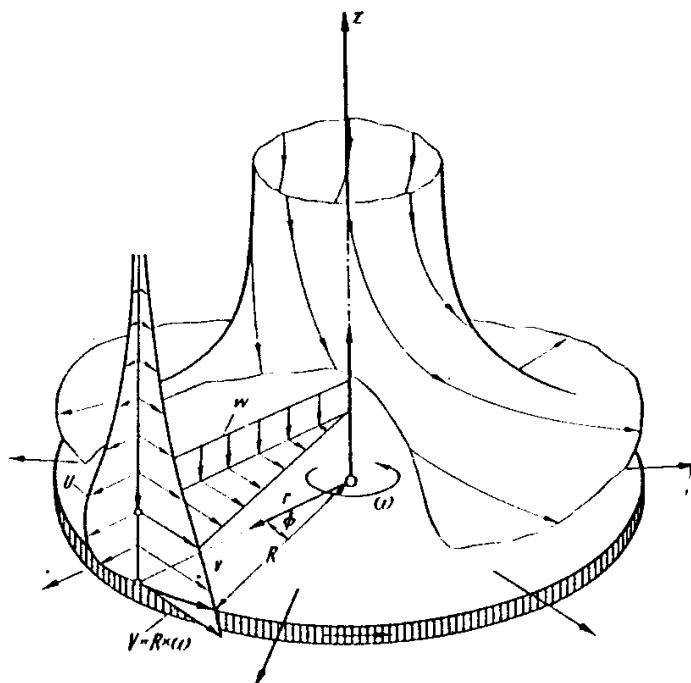


FIGURE 13.5 – Ecoulement de von Kármán au-dessus d’un disque en rotation [38]. Il existe un flux axial dirigé vers le disque tournant (principe des pompes centrifuges).

la phase de spin-down il existe une couche limite entrante, dite de Bödewadt pour un disque fixe dans un fluide en rotation.

On peut estimer cette vitesse radiale à  $u_r(r) = \Omega r$  sur une épaisseur  $\Delta = \sqrt{\nu/\Omega}$ , soit un débit

volumique radial  $Q = 2\pi R^2 \sqrt{\nu \Omega}$ . Le fluide sera en rotation solide quand il sera passé une fois dans la couche limite, c'est-à-dire au bout d'un temps  $T_{Ek}$  tel que  $T_{Ek}Q = \pi R^2 h$ , le volume du récipient. D'où la relation :

$$T_{Ek} = \frac{h}{2\sqrt{\nu \Omega}} \ll T_{diff}.$$

Ces recirculations peuvent être visualisées par exemple par des feuilles de thés nageant au fond d'une tasse.

### 13.6.4 Couche de Stewartson

Ce sont des couches limites parallèles à l'axe de rotation qui apparaissent entre des zones de vitesses angulaires différentes où près des parois verticales. Voir le livre [24] de Greenspan, *The theory of rotating fluids*.

### 13.6.5 Ecoulement secondaire dans les méandres d'une rivière



FIGURE 13.6 – Méandre de Queuille en Auvergne.

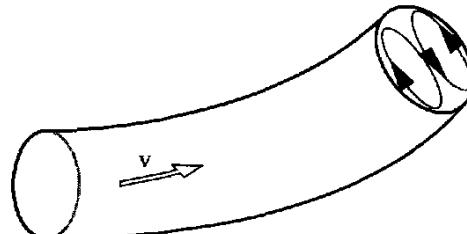


FIGURE 13.7 – Recirculation en aval d'une conduite courbe. D'après [25] p. 360.

Comme pour la mise en rotation d'un récipient il apparaît dans le méandre d'une rivière un écoulement centrifuge à la surface de l'eau et un écoulement centripète au fond. Cette recirculation radiale explique l'érosion de la berge extérieur et le dépôt de sédiment sur la berge intérieur et donc la dynamique instable des méandres de rivière (figure 13.6). Ce phénomène a été décrit par A. Einstein<sup>5</sup>.

### 13.6.6 Recirculation de Dean

Comme dans le méandre d'un rivière, les écoulements dans des conduites courbées font apparaître des recirculations dans et en aval des virages, centrifuges loin des parois et centripètes près des parois parallèles au plan de la courbe (figure 13.7).

5. A. Einstein, Die Naturwissenschaften **26**, 223 (1926)

### 13.6.7 Vorticité potentielle dans les fluides en rotation. Théorème d'Ertel (1942)

Pour un fluide parfait dans un référentiel tournant, on peut montrer que, comme dans un référentiel galiléen (§ 5 page 150) la vorticité potentielle est aussi conservée dans un écoulement en couche mince, à condition de bien considérer la vorticité verticale totale. Si on note  $h$  la hauteur de fluide en un point, la vorticité verticale totale, divisée par la hauteur d'eau se conserve dans l'écoulement. Soit :

$$\frac{\omega_z + 2\Omega}{h} = Cste. \quad (13.10)$$

Une des conséquences surprenantes de ce théorème dans un référentiel en rotation est qu'il peut donc apparaître de la vorticité relative lors d'une compression verticale d'une colonne de fluide initialement irrotationnelle (ce qui confirme que la force de Coriolis ne dérive pas d'un potentiel). Par exemple dans l'expérience des colonnes de Taylor (§ 13.5.2), si l'on déplace lentement vers le haut une sphère dans le fluide il apparaît une rotation du fluide anticyclonique au-dessus de la sphère et cyclonique au-dessous ! Ce résultat sur la vorticité potentielle peut être généralisé à des fluides de densité variable (stratifiés) et isentropiques et est donc utile en météorologie.

## 13.7 Ondes inertielles

Etudions la dynamique d'un fluide parfait, homogène et incompressible, contenu dans une cuve en rotation à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}$  dirigée selon l'axe vertical  $Oz$ .

### 13.7.1 Etude qualitative

On considère le fluide en rotation solide, donc au repos dans le référentiel tournant. On suppose qu'une particule fluide isolée est animée d'une vitesse relative  $\vec{u}_0$  de direction quelconque horizontale. Montrer que sous l'action de la seule force de Coriolis sa trajectoire serait un cercle dont vous calculerez le rayon ainsi que la période de rotation  $T$ . Ce mouvement est-il cyclonique (dans le sens de rotation de la cuve) ou anticyclonique ? Comparer  $T$  à la période de rotation de la cuve. Existe-t-il une analogie avec un mouvement d'une particule en électromagnétisme ?

La force de Coriolis agit donc comme une force de rappel, ce qui peut conduire à la propagation d'ondes dans un fluide en rotation.

### 13.7.2 Cas d'une onde plane

Cherchons la relation de dispersion de ces ondes inertielles en les supposant linéaires et planes. On écrit donc pour la vitesse du fluide

$$\vec{v} = \vec{V}_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \sigma t)$$

dans le référentiel en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , et on suppose le fluide parfait, incompressible. Attention ici  $V_0$  pourra être complexe pour décrire des ondes polarisées circulairement.

La vorticité s'écrit alors  $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}} \vec{v} = i\vec{k} \wedge \vec{v}$ , et l'incompressibilité du fluide  $\text{div } \vec{v} = i\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$ . Cette relation montre que ces ondes sont des ondes transverses (déplacement perpendiculaire au vecteur d'onde).

L'équation d'Helmholtz en référentiel tournant (Eq. 13.5) s'écrit en la linéarisant :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = [(2\vec{\Omega}) \cdot \vec{\nabla}] \vec{v}.$$

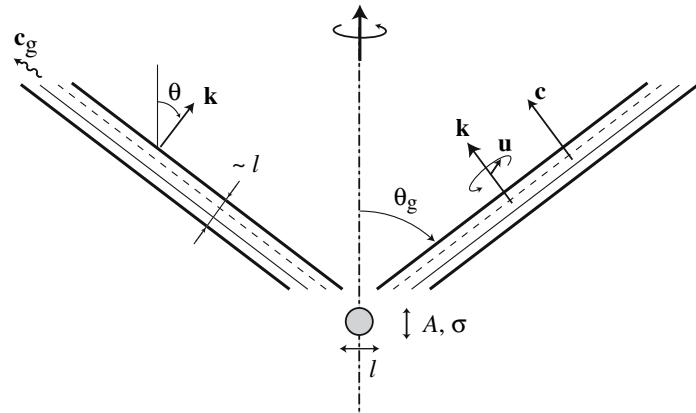


FIGURE 13.8 – Schéma des ondes inertielles émises par une source ponctuelle oscillante. Seul le cône supérieur est tracé ici.

Soit en prenant le produit vectoriel par  $\vec{k}$  :

$$\sigma = \pm 2\Omega \frac{k_z}{k} = 2\Omega \cos \theta \quad (13.11)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{k}$  (figure 13.8). L'angle de propagation de l'onde est sélectionné par la fréquence d'excitation, mais pas son nombre d'onde qui est libre. Il sera physiquement sélectionné par la taille de l'objet excitant l'onde<sup>6</sup>.

On en déduit que la vitesse de phase vaut :

$$\vec{v}_\varphi = 2\Omega \cos \theta \frac{\vec{k}}{k^2}$$

et la vitesse de groupe :

$$\vec{v}_g = \vec{k} \wedge (2\vec{\Omega} \wedge \vec{k})/k^3.$$

Comme pour les ondes internes (§ 8.3 page 93) la vitesse de groupe est perpendiculaire à la vitesse de phase (milieu anisotrope) mais cette fois-ci la somme de ces deux vitesses est un vecteur vertical,

$$\vec{v}_g + \vec{v}_\varphi = 2\vec{\Omega}/k,$$

comme le montre la figure 13.8. Il s'agit d'ondes transverses polarisées circulairement (dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ ), le vecteur vitesse tournant dans le sens anti-cyclonique ([28] page 41) si  $\theta < \pi/2$ .

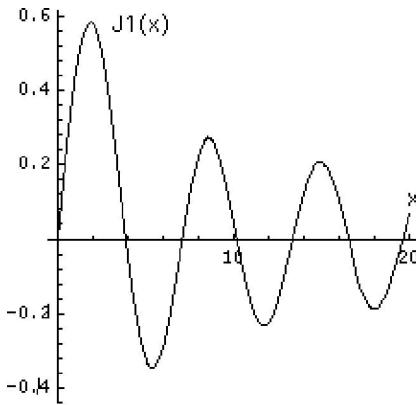
La condition de linéarisation de l'équation d'Helmholtz impose  $V_0 \ll 2\Omega/k$ .

### 13.7.3 Ondes inertielles axisymétriques (d'après Batchelor [4] p. 559)

*D'après un sujet d'examen.*

On s'intéresse maintenant à un champ de vitesse axisymétrique  $\vec{u}(r, z, t) = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$  par rapport à l'état de « rotation solide ».

6. L. Messio, C. Morize, M. Rabaud et F. Moisy, Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid, Exp. Fluids 44 :519-528 (2008)

FIGURE 13.9 – Fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce,  $J_1(x)$ .

a) Montrer que l'on peut introduire la fonction de courant de Stokes  $\Psi(r, z, t)$  tel que  $\vec{u} = u_\theta \vec{e}_\theta + \vec{\text{rot}}(\frac{\Psi}{r} \vec{e}_\theta)$  pour décrire l'écoulement, et montrer que  $\Psi$  est constant sur une ligne de courant.

b) Ecrire l'équation d'Euler linéarisée (faibles vitesses). A quoi correspond cette approximation pour les nombres d'Ekman et de Rossby ? Introduire la fonction  $\Psi$  et éliminer la pression et la vitesse orthoradiale. En déduire l'équation d'évolution de  $\Psi$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

c) On cherche des solutions sous la forme d'ondes planes propagatives dans la direction verticale  $\Psi(r, z, t) = ArF(r) \sin(kz - \omega t)$ . Trouver l'équation que doit satisfaire la fonction  $F$ . Montrer que  $k$  et  $\omega$  sont deux variables indépendantes si le milieu est infini. Sachant que les fonctions de Bessel de première espèce  $J_1(Kr)$  sont solutions de l'équation  $J_1'' + J_1'/r + (K^2 - 1/r^2)J_1 = 0$ , en déduire une condition sur la pulsation  $\omega$ .

d) On suppose maintenant un réservoir cylindrique de rayon  $a$ , et l'on notera  $\gamma_n$ , avec  $n = 1, 2, \dots$  les zéros successifs de la fonction  $J_1$  (voir figure). Par exemple  $\gamma_1 = 3,83$ . Trouver la relation de dispersion  $\omega(k)$  de ces ondes. Calculer le rapport entre la vitesse de groupe de ces ondes et leur vitesse de phase. Est-il positif et inférieur à 1 ?

e) Pour une hauteur de cylindre  $h$ , chercher les solutions sous forme d'ondes stationnaires (deux ondes de même amplitude contra-propagatives) et montrer que les pulsations propres possibles sont quantifiées.

f) Pour le premier mode d'onde stationnaire, exprimer  $u_r$ ,  $u_z$  et aussi  $u_\theta$  en fonction de  $\Psi$ . En déduire que la vitesse orthoradiale change de signe  $n$  fois le long du rayon de la cuve.

On pourra regarder à ce sujet le film : [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating\\_Flows.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating_Flows.rm).

#### 13.7.4 Ondes de Rossby entre deux plans non parallèles (d'après Tritton [41] p. 232)

On considère un cylindre vertical tournant à vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}$ . Ce cylindre est limité par deux plans non parallèles d'équation  $z = L$  et  $z = \alpha y$ , et l'on supposera dans la suite  $\alpha \ll 1$ .

a) Ecrire l'équation linéaire d'Euler dans le repère tournant (vitesse faible). On supposera que l'échelle de temps caractéristique  $T$  est lente si  $\alpha$  est petit, et l'on recherchera les solutions sous la forme,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{u}_0(x, y, z, T) + \alpha \vec{u}_1(x, y, z, T) + \dots \\ p' &= p'_0(x, y, z, T) + \alpha p'_1(x, y, z, T) + \dots,\end{aligned}$$

avec  $\frac{\partial}{\partial t} = \alpha \frac{\partial}{\partial T}$ . Ecrire les équations d'évolution des composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  de la vitesse ainsi que la conservation de la masse jusqu'à l'ordre 1 en  $\alpha$ .

b) Ecrire *soigneusement* les conditions aux limites en  $z = L$  et  $z = \alpha y$  au même ordre, et sans tenir compte des parois verticales.

c) Etude à l'ordre 0. Montrer que  $p'_0$  et  $\vec{u}_0$  ne dépendent pas de  $z$ . En déduire que l'on peut décrire le mouvement en introduisant une fonction de courant  $\Psi$  que l'on reliera à la pression  $p'_0(x, y, T)$ . Quelles sont les propriétés d'un tel écoulement ?

d) Etude à l'ordre 1 en  $\alpha$ . A partir de la conservation de la masse, montrer que la vitesse verticale s'écrit

$$w_1 = \left( \frac{L - z}{2\Omega} \right) \frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial T}.$$

On montrera ensuite que la condition aux limites pour ne pas avoir de vitesse normale sur le fond incliné impose pour  $\Psi$  l'équation,

$$\frac{\partial(\nabla^2 \Psi)}{\partial T} + \frac{2\Omega}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

e) Montrer que cette équation admet des solutions en ondes planes propagatives de la forme  $\Psi = A \exp i(lx + my - \omega t)$ , (avec  $T = \alpha t$ ) dont on donnera l'équation de dispersion.

f) Dans le cas  $m = 0$ , calculer la vitesse de groupe et la vitesse de phase, et décrire les propriétés de cette onde.

### Pour en savoir plus sur les fluides en rotation :

- [12] Benoit Cushman-Roisin, *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*, Prentice Hall, 1994.
- [34] Joseph Pedlosky, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer, Second Edition, 1987.
- [24] H.P Greenspan, *The theory of rotating fluids*, Brekelen Press, 1990.
- *Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid*, L. Messio, C. Morize, M. Rabaud et F. Moisy, Exp. Fluids 44 :519-528 (2008).
- *Rotating Flows*, D. Fultz, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating\\_Flows.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rotating_Flows.rm).

# Chapitre 14

## Les instabilités

Marc Rabaud, version du 8 juin 2013

### Sommaire

---

<b>14.1 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube</b> . . . . .	<b>168</b>
<b>14.2 Quelques instabilités mécaniques</b> . . . . .	<b>168</b>
14.2.1 L'instabilité d'une bille dans un anneau tournant . . . . .	168
14.2.2 L'instabilité de l'anneau tournant . . . . .	170
14.2.3 L'instabilité de flambage . . . . .	170
<b>14.3 Instabilités de densité : l'instabilité de Rayleigh-Taylor</b> . . . . .	<b>171</b>
<b>14.4 Instabilités de cisaillement : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz</b> . . . . .	<b>174</b>
14.4.1 Description physique . . . . .	175
14.4.2 Equation de Rayleigh . . . . .	175
14.4.3 Equation de Orr-Sommerfeld . . . . .	176
14.4.4 Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu . . . . .	176
14.4.5 Cas d'un profil de vitesse continu . . . . .	178
14.4.6 Cas du vent sur la mer . . . . .	179
14.4.7 Analyse spatiale de stabilité . . . . .	179
<b>14.5 Instabilités visqueuses : l'instabilité de Saffman-Taylor</b> . . . . .	<b>180</b>
14.5.1 Loi de Darcy . . . . .	180
14.5.2 Description qualitative de l'instabilité . . . . .	181
14.5.3 Analyse linéaire de l'instabilité . . . . .	182
14.5.4 Evolution non-linéaire de l'instabilité . . . . .	184
<b>14.6 Instabilités centrifuges : l'instabilité de Taylor-Couette</b> . . . . .	<b>186</b>
14.6.1 Critère inviscide de Rayleigh . . . . .	186
14.6.2 Autres instabilités centrifuges . . . . .	187
<b>14.7 Instabilités de convection thermique : convection de Rayleigh-Bénard</b> . . . . .	<b>189</b>
<b>14.8 Instabilité de Bénard-Marangoni.</b> . . . . .	<b>189</b>
<b>14.9 Instabilité convective ou instabilité absolue ?</b> . . . . .	<b>190</b>
<b>14.10 Autres instabilités</b> . . . . .	<b>190</b>

---

## 14.1 Instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube

Contrairement à d'autres instabilités qui existent même pour des fluides parfaits, et où la viscosité est juste une correction sur le taux de croissance, l'instabilité de l'écoulement de Poiseuille en tube (comme d'ailleurs celle de la déstabilisation de l'écoulement de Couette plan) n'existe que parce que le fluide est visqueux. L'analyse linéaire de stabilité montre d'ailleurs que l'écoulement parabolique dans un tube cylindrique est linéairement stable pour tout nombre de Reynolds (alors que pour l'écoulement de Poiseuille entre plaques l'écoulement est linéairement stable uniquement jusqu'à  $Re = 5772$ ). Expérimentalement toutefois on observe que pour un nombre de Reynolds critique (qui dépend de la qualité du montage expérimental,  $Re = 2000$  pour un montage standard mais plus de 100 000 pour des montages très soigneux) l'écoulement devient brutalement turbulent. C'est donc une instabilité sous-critique qui est observée. Malgré le caractère mal défini du seuil de cette instabilité, c'est cet écoulement qui a permis à Osborne Reynolds de montrer en 1883 que la transition au régime turbulent dépendait du diamètre, du débit et de la viscosité, mais uniquement à travers un seul nombre sans dimension  $Re = \frac{UD}{\nu}$  qui maintenant porte son nom (figure 14.1).

De nombreuses études analytiques, numériques et expérimentales essayent actuellement de caractériser les premières structures non-linéaires observées. L'idée est, comme pour une bifurcation sous-critique, de partir de l'état développé et de revenir lentement vers l'état stable en diminuant le paramètre de contrôle.

Des travaux récents<sup>1</sup> ont montré, expérimentalement avec un tube de longueur  $L = 3750D$  ! et numériquement qu'une bouffée turbulente a une probabilité de survie qui décroît exponentiellement avec le temps mais que le temps caractéristique augmente très fortement (plus qu'exponentiellement) avec le nombre de Reynolds. Simultanément une bouffée turbulente a une probabilité de se diviser et de s'étendre qui croît avec le nombre de Reynolds mais avec un temps caractéristique qui décroît fortement (plus qu'exponentiellement) avec le nombre de Reynolds. Finalement il existe un nombre de Reynolds  $Re = 2040 \pm 10$  pour lequel les probabilités de disparition ou d'envahissement sont égales.

## 14.2 Quelques instabilités mécaniques

### 14.2.1 L'instabilité d'une bille dans un anneau tournant

Cette instabilité a l'avantage de permettre un calcul explicite très simple de la transition. Considérons une anneau de rayon  $R$  placé verticalement et tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  (14.2). L'anneau est muni d'une goulotte dans lequel une bille d'acier de masse  $M$  peut rouler sans (ou avec peu) de frottement. A basse vitesse angulaire la position stable de la bille correspond au point le plus bas. Mais au-delà d'une vitesse angulaire critique, la bille prend une des deux positions d'équilibre faisant un angle  $\theta(\Omega)$  avec la verticale. La transition présente un seuil et est super-critique.

Considérons un angle  $\theta$  non nul et écrivons à l'équilibre que la somme de la force centrifuge (dans le référentiel tournant)  $M\Omega^2 R \sin \theta$ , du poids  $Mg$  et de la réaction du support est nulle. L'équilibre des forces tangentielles donne :

$$Mg \sin \theta = M\Omega^2 R \sin \theta \cos \theta. \quad (14.1)$$

Cette équation a pour première solution  $\theta = 0$  qui existe quelque soit  $\Omega$ , et comme autres solutions  $\theta = \pm \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right)$  qui elles n'existent que si  $\Omega \geq \Omega_c = \sqrt{g/R}$ .

---

1. The Onset of Turbulence in Pipe Flow, Kerstin Avila, et al. Science 333, 192 (2011)

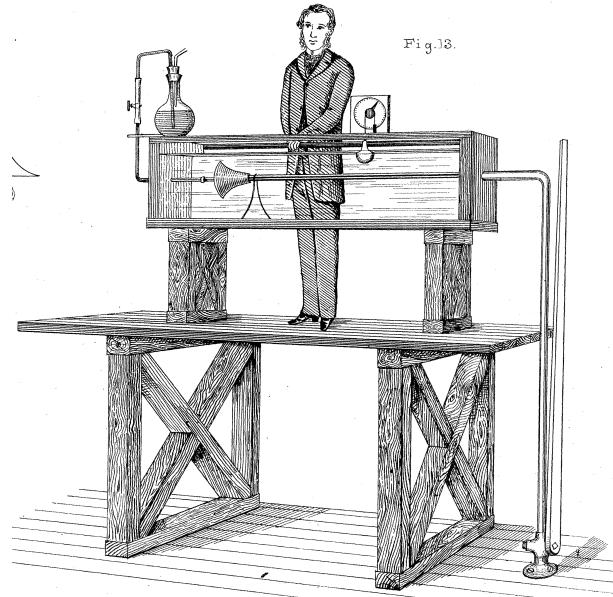


FIGURE 14.1 – Dessin issu de l'article historique d'Osborne Reynolds démontrant que l'écoulement en tube devient instable lorsque un nombre sans dimension devient suffisamment grand. Ce nombre maintenant appelé « de Reynolds » est LE nombre fondamental de la mécanique des fluides.

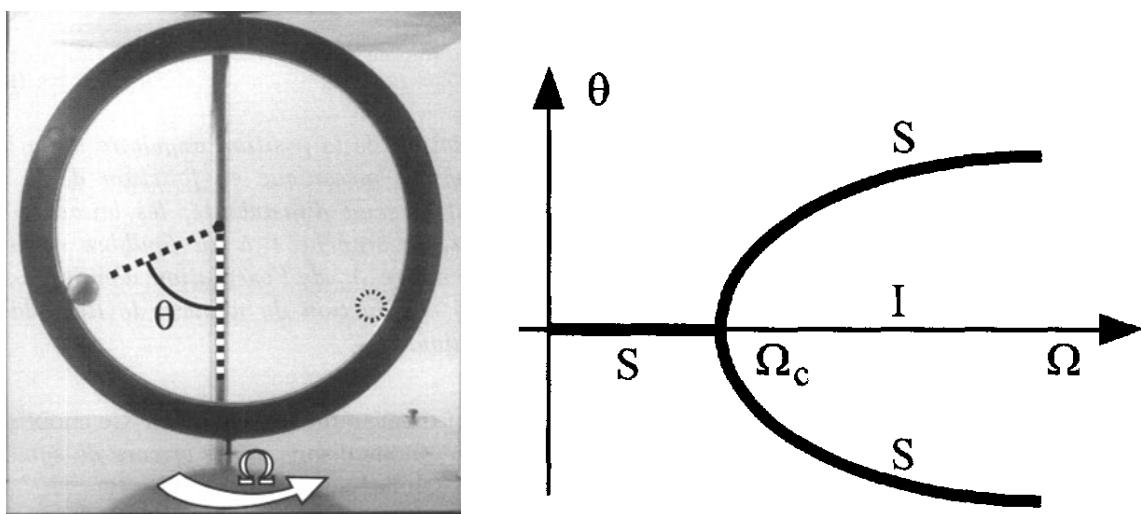


FIGURE 14.2 – (a) Photographie d'un bille en équilibre dans la goulotte d'un anneau métallique tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$  et (b) diagramme de stabilité correspondant [25].

Pour évaluer la stabilité de ces solutions il faut calculer l'énergie potentielle  $U_p(\theta)$  et voir si elle est minimale. En réalité il s'agit d'une pseudo-énergie car on est dans le référentiel tournant et le plus simple est de la calculer en exprimant le travail de la force tangentielle entre  $\theta = 0$  et  $\theta$ .

On trouve :

$$U_p(\theta) = MgR(1 - \cos \theta) - \frac{M}{2}\Omega^2 R^2 \sin^2 \theta.$$

L'étude de stabilité (i.e. du signe de  $\partial^2 U_p / \partial \theta^2$ ) montre que la solution  $\theta = 0$  n'est plus stable (si on la perturbe) pour  $\Omega \geq \Omega_c$  et que c'est l'autre solution qui devient alors stable.

Nous pouvons écrire l'évolution de la solution au voisinage de la transition (changement de solution). Pour cela écrivons le petit paramètre  $\epsilon = \frac{\Omega - \Omega_c}{\Omega_c}$  et linéarisons l'équation d'équilibre (Eq. 14.1) au voisinage de la transition. On trouve une relation en racine carré :  $\theta_e = \pm 2\epsilon^{1/2}$ . Ce type de comportement en  $\epsilon^{1/2}$  est caractéristique d'une bifurcation supercritique (voir §??). On a une transition continue et réversible entre les solutions au voisinage du seuil (en l'absence de frottement). De plus les solutions bifurquées  $+\theta_e$  et  $-\theta_e$  sont totalement équivalentes. Le choix d'une des deux solutions possibles correspond toutefois à une brisure d'une des symétries du problème.

#### 14.2.2 L'instabilité de l'anneau tournant

Cette instabilité est assez similaire à la précédente et encore plus simple à réaliser expérimentalement. Un anneau rigide de masse  $M$  et de rayon  $R$  suspendu par son bord à une ficelle de longueur  $L$  que l'on fait tourner à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ . A faible vitesse angulaire, l'anneau tourne dans un plan vertical, au-dessus d'un seuil le plan de l'anneau fait un angle  $\theta$  avec la verticale. A haute vitesse l'anneau tend à tourner dans un plan horizontal<sup>2</sup>. Cette instabilité présente quelques analogies avec la stabilité du lasso en rotation.

#### 14.2.3 L'instabilité de flambage

Et aussi l'instabilité de flambage. Cette instabilité apparaît lorsque qu'une poutre où une plaque est soumise à un effort de compression important<sup>3</sup>.

---

2. F. Moisy, Supercritical bifurcation of a spinning hoop, Am. J. Phys. 71 (10), 999-1004 (2003).

3. Role of boundary conditions on mode selection in a buckling instability, M. Boucif, J. E. Wesfreid and E. Guyon, J. Physique Lett. 45 (1984) 413–418

### 14.3 Instabilités de densité : l'instabilité de Rayleigh-Taylor

Lorsque deux fluides non miscibles sont placés l'un au-dessus de l'autre, et que le fluide du haut (fluide 2) est plus dense que le fluide du bas (fluide 1), l'interface qui les sépare est instable et se déforme.

Dans le cas où il existe un espace infini au-dessus et au-dessous de l'interface, nous pouvons utiliser la relation de dispersion en eau profonde établie au § 7.5 page 71 pour des ondes de faible amplitude et dans un fluide supposé parfait.

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} gk + \frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} k^3 = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} gk \left[ 1 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right],$$

avec  $k_c = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g}/\gamma$ . Cette équation relie la pulsation et le nombre d'onde de toutes ondes sinusoïdales de faible amplitude s'écrivant

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \exp i(kx - \omega t).$$

Comme le montre la figure 14.3 il n'y a pas toujours de solution réelle pour  $\omega$  à cette équation, car  $\rho_1 - \rho_2 < 0$ . Si le nombre d'onde  $k$  est plus petit qu'une valeur critique  $k_c$  (qui correspond à la longueur capillaire déjà rencontrée au §6.4),  $\omega$  est même un imaginaire pur. On peut alors écrire  $\omega = i\sigma$  et la forme de l'interface s'écrit alors :

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 \exp \sigma t \exp ikx.$$

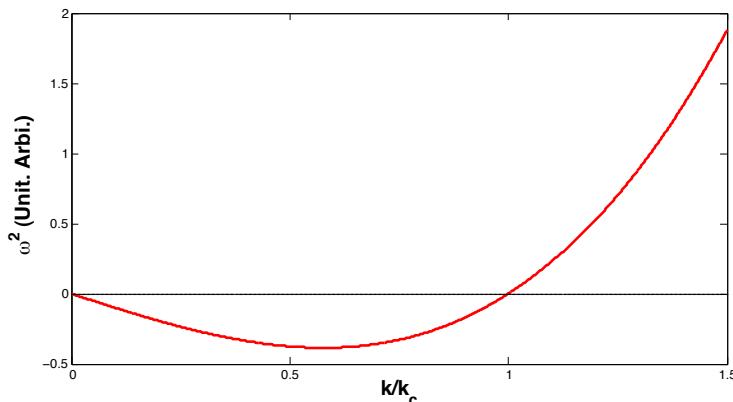


FIGURE 14.3 – Tracé de la relation de dispersion  $\omega^2 = f(k/k_c)$  de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Si  $\sigma$  est positif, l'amplitude de la déformation de l'interface croît exponentiellement avec le temps : l'interface est donc linéairement instable. Comme la partie réelle de  $\omega$  est nulle il n'y a pas propagation de l'onde qui croît donc sur place (voir figure 14.4).

Le mode le plus instable et qui devrait rapidement dominer est le mode qui maximise  $\sigma$  et il correspond donc à  $\frac{\partial \sigma}{\partial k} = 0$  soit :

$$k_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}} k_c.$$

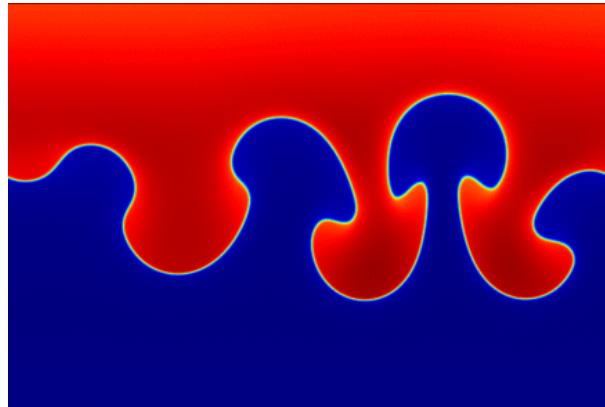


FIGURE 14.4 – Simulation numérique bidimensionnelle de l’interface d’un fluide lourd placé au-dessus d’un fluide léger, quelques instants après qu’ils aient été mis en contact.

Soit  $\lambda_{max} \approx 3cm$  pour de l’eau au-dessus de l’air.

Si l’expérience est faite en retournant un tube rempli d’eau de diamètre nettement inférieur à cette longueur capillaire, il ne se videra pas et il faudra le secouer (augmenter  $\vec{g}$ ) pour que l’instabilité démarre.

#### Exercice : Instabilité de Rayleigh-Taylor

On étudie l’instabilité de l’interface entre deux fluides incompressibles, de masse volumique  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et de viscosité dynamique  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , initialement au repos dans un récipient infini. On suppose  $\rho_1 > \rho_2$  et bien sûr que le fluide (1) est au-dessus du fluide (2).  $\gamma$  représente la tension interfaciale et  $g = \|\vec{g}\|$  l’accélération verticale uniforme à laquelle est soumis l’ensemble du fluide. On s’intéressera dans la suite uniquement à des mouvements bidimensionnels et à l’analyse linéaire de l’instabilité ( $u_i = (u_i, 0, w_i)$  avec  $i = 1$  ou  $2$ ).

a) Déterminer le champ de pression correspondant à l’état de repos. On notera  $P_0$  la valeur de la pression sur l’interface plane. Dans la suite on notera  $p_i$  les perturbations de pression par rapport à l’état de base. Ecrire les équations régissant l’évolution des perturbations de vitesse et de pression dans les zones (1) et (2). Montrer que  $\nabla^2 p_i = 0$ .

b) Déterminer et justifier les conditions aux limites à l’interface. On écrira  $\zeta(x, t)$  la perturbation (supposée petite) de position de l’interface initialement en  $z = 0$ . Vérifier les signes des différents termes.

c) En analysant les perturbations en mode normal ( $f_i \propto f_i(z) \exp(\sigma t - ikx)$ ), calculer la pression en tout point et déterminer le système d’équations différentielles satisfait par  $u_i(z)$  et  $w_i(z)$ . En négligeant la viscosité, déterminer l’équation de dispersion (équation dite de Rayleigh) et le taux de croissance de chaque onde.

d) Tracer  $\sigma(k)$  et calculer  $k_{max}$  et  $k_{crit}$ . Discuter le comportement de ces ondes. Existe-t-il des modes propagatifs ? Quels peuvent être l’effet des termes non-linéaires et de la viscosité ? Application : le liquide (1) est de l’eau et le liquide (2) de l’huile de densité relative 0,965 et  $\gamma = 3010^{-3}$  N/m. Calculer  $\lambda_{max}$ ,  $\lambda_{crit}$  et  $\sigma_{max}$ . On suppose que le récipient a une largeur  $d = 25$  cm, montrer que les parois sont des ventres de vibration et calculer les différents modes instables et leur taux de croissance.

L’instabilité de Rayleigh-Taylor dans la limite des couches minces de fluides visqueux a été étu-

diée récemment<sup>4</sup>. Elle donne lieu à des pavages hexagonaux de gouttes (figure 14.5).

En couche mince le taux de croissance de l'instabilité est modifié et l'on obtient un autre taux de croissance :

$$\sigma = \frac{e^3}{3\eta} [\rho g k^2 - \gamma k^4],$$

où  $e$  est l'épaisseur initiale de la couche.

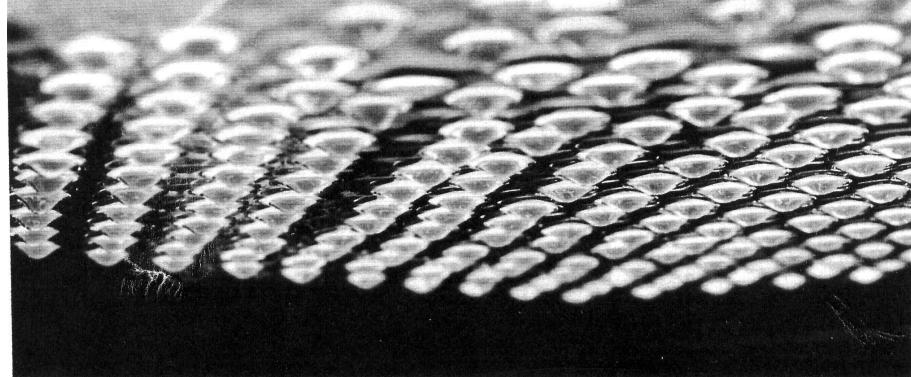


FIGURE 14.5 – Photographie d'une couche d'huile étalée sur une surface plane quelques minutes après que la plaque ait été retournée.

---

4. M. Fermigier, L. Limat, J. E. Wesfreid, P. Boudinet and C. Quilliet (1992). Two-dimensional patterns in Rayleigh-Taylor instability of a thin layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 236, pp 349-383

## 14.4 Instabilités de cisaillement : l'instabilité de Kelvin-Helmholtz

Cette instabilité est, entre autres, à l'origine de la formation des vagues à la surface de l'eau.

Chacun a observé que lorsque le vent souffle sur un lac par exemple, de petites rides peuvent apparaître si le vent est suffisamment fort. Helmholtz<sup>5</sup> en 1868 fût le premier à décrire le profil de vitesse d'un fluide s'écoulant au-dessus d'un autre au repos. Quelques années après, Lord Kelvin<sup>6</sup> a décrit le mécanisme de cette instabilité. La même instabilité peut être observée au sein d'un écoulement parallèle d'un fluide unique si le profil de vitesse présente un cisaillement localisé. Dans ce cas la tension de surface et la gravité ne jouent aucun rôle. Cette géométrie est parfois appelée la géométrie de la couche de mélange lorsque le cisaillement évolue librement en aval. Un cas atmosphérique est présenté sur la figure 14.6.

Une réalisation expérimentale classique est due à Thorpe<sup>7</sup>. Dans un tube fermé et légèrement incliné à l'instant initial, le fluide le plus dense s'écoule sous l'action de la gravité, et le fluide le plus léger s'écoule dans l'autre sens (figure 14.7). Dans un tel montage le cisaillement est homogène spatialement mais évolue dans le temps.



FIGURE 14.6 – Instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz visible dans une couche nuageuse. Les nuages visualisent l'enroulement des tourbillons entre de l'air se déplaçant lentement et de l'air se déplaçant plus rapidement.



FIGURE 14.7 – Photographie de l'expérience de Thorpe.

5. H. von Helmholtz, "On discontinuous movements of fluids", Phil. Mag. (4) 36, 337-347 (1868)

6. Lord Kelvin, "Hydrokinetic solutions and observations", Phil. Mag. (4) 42, 362-377 (1871)

7. S. A. Thorpe, "Experiments on the instability of stratified shear flows : immiscible fluids", J. Fluid. Mech. 39, 25-48 (1969)

#### 14.4.1 Description physique

Décrivons tout d'abord le mécanisme physique de l'instabilité pour un profil discontinu de vitesse, mécanisme basé sur l'inertie et l'équation de Bernoulli. Il existe un référentiel où l'un des fluides se déplace à la vitesse constante  $+U$  au-dessus d'une couche du même fluide se déplaçant à la vitesse  $-U$  (figure 14.8). Nous supposerons ici qu'il n'existe ni tension de surface ni différence de densité.

Supposons qu'une fluctuation sinusoïdale de l'interface apparaisse (quelque qu'en soit la cause : vibrations, fluctuations thermiques, etc). Il apparaît alors de chaque côté de l'interface des déformations des lignes de courant, en phase avec la déformation de la surface. Ces déformations sont atténuées lorsqu'on s'éloigne de l'interface, et comme le débit est conservé entre deux lignes de courant, le fluide est accéléré du côté convexe et décéléré du côté concave de la perturbation. Si on néglige la viscosité (ce qui est cohérent avec le fait d'avoir un profil discontinu de vitesse) l'équation de Bernoulli nous dit que sur une ligne de courant la quantité  $P + \frac{1}{2}\rho u^2$  est constante. Les changements de vitesse sont donc accompagnés de modification de la pression et donc de forces de pression qui agissent perpendiculairement à l'interface et qui tendent à amplifier les perturbations initiales de l'interface. C'est donc l'inertie qui est la cause de l'instabilité. Pour comprendre l'existence d'un seuil de l'instabilité et d'une longueur d'onde critique il faut tenir compte des phénomènes stabilisants que sont la tension de surface, la gravité, ou la forme exacte du profil de vitesse. Ce calcul est fait dans les paragraphes suivants.

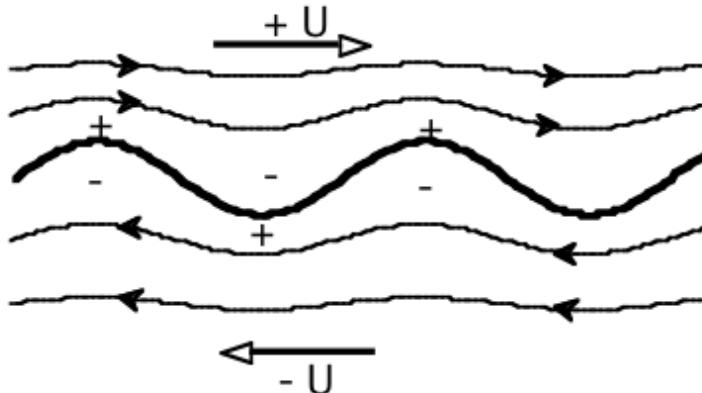


FIGURE 14.8 – Formes des lignes de courant près d'une interface déformée (en gras). Les signes + et - représentent l'évolution locale de la vitesse. Les variations de pression sont de signes opposés aux variations de vitesse. Les forces de pression ont donc tendance à amplifier la déformation.

#### 14.4.2 Equation de Rayleigh

Considérons un domaine infini où un fluide homogène, supposé ici parfait, s'écoule dans une direction  $Ox$  avec un profil de vitesse de base  $U_0(y)$  qui ne dépend que de la position transverse  $y$ . Par exemple un profil en tangent hyperbolique  $U_0(y) = U_0 \tanh(y/\delta)$ . Si une instabilité apparaît, ce champ de vitesse sera modifié mais la nouvelle solution  $\vec{u} = \vec{U}_0(y) + \vec{u}_1(x, y)$  doit satisfaire l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) \quad (14.2)$$

Le théorème de Squire (voir ??) permet de justifier que la première instabilité conduira à des perturbations bidimensionnelles dans le plan  $(x, y)$ <sup>8</sup>. Il est donc pertinent d'écrire le rotationnel de l'équation d'Euler sous la forme d'une équation aux dérivées partielles (PDE) pour la fonction de courant  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$  ( $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ) :

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Delta \psi = 0. \quad (14.3)$$

Pour étudier la stabilité de l'écoulement primaire et développer une étude de stabilité *linéaire* il suffit de considérer de petites perturbations qui peuvent s'écrire comme une somme infinie de composantes de Fourier de la forme :  $\Phi(y) \exp[ik(x - ct)]$  où  $k$  est un nombre d'onde qui sera supposé réel (c'est-à-dire qu'on ne tient pas compte d'une éventuelle évolution spatiale de l'instabilité) et  $c$  est une vitesse de phase éventuellement complexe. La partie imaginaire de  $c$  décrira l'évolution temporelle de l'amplitude de l'onde plane. Chaque mode  $k$  doit donc satisfaire l'équation dite de Rayleigh :

$$(U_0 - c) \left( \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - k^2 \Phi \right) - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \Phi = 0. \quad (14.4)$$

On peut montrer qu'une condition nécessaire pour observer une instabilité non visqueuse pour cet écoulement est l'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse, c'est-à-dire un point où  $\frac{d^2 U_0}{dy^2} = 0$ <sup>9</sup>.

#### 14.4.3 Equation de Orr-Sommerfeld

Si l'on reprend l'étude bidimensionnelle précédente mais sans négliger la viscosité cette fois, la même description pour l'équation de Navier-Stokes conduit à l'équation dite de Orr-Sommerfeld (1908) :

$$\nu \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \Phi(y) = ik \left[ (U_0 - c) \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - \frac{d^2 U_0}{dy^2} \right] \Phi(y). \quad (14.5)$$

Cette équation (qui redonne l'équation 14.4 comme cas particulier pour  $\nu = 0$ ) contient des dérivées d'ordre 4 et est donc beaucoup plus complexe à résoudre. C'est uniquement numériquement, ou en utilisant des approximations de grandes ou petites longueurs d'ondes que l'analyse peut être poursuivie, ce que nous ne ferons pas ici.

#### 14.4.4 Analyse de stabilité pour un profil de vitesse discontinu

Nous allons maintenant simplifier l'analyse pour pouvoir résoudre analytiquement l'équation de Rayleigh. Considérons deux couches de fluide s'écoulant l'une au-dessus de l'autre dans la même direction  $Ox$  avec des vitesses différentes  $U_1$  et  $U_2$  (figure 14.9). Les fluides ont des densités différentes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  le plus léger au-dessus ( $\rho_1 > \rho_2$ ) afin d'éviter l'instabilité de Rayleigh-Taylor (décrise elle dans la section 14.3). Nous noterons  $\gamma$  la tension de surface qui peut exister entre les deux fluides,  $\gamma > 0$ .

8. P.G. Drazin and W.H. Reid, Hydrodynamic Stability, 1981. Cambridge Univ. Press.

9. D.J. Acheson, Elementary Fluid dynamics, 1990 (Clarendon Press, Oxford)

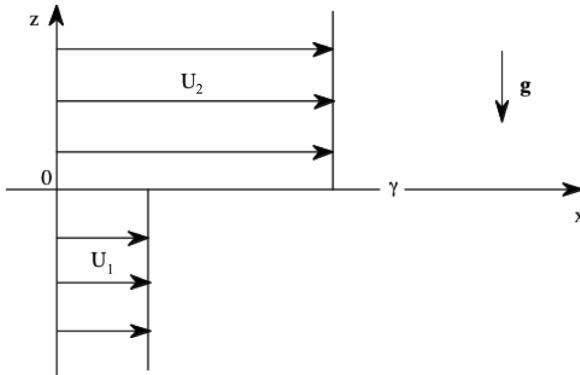


FIGURE 14.9 – Schéma de l'écoulement parallèle de deux fluides avec les vitesses  $U_1$  et  $U_2$ , et de densité  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ( $\rho_2 < \rho_1$ ) et une tension interfaciale  $\gamma$ .

Un tel profil de vitesse discontinu est une solution de l'écoulement de base tant que la viscosité n'est pas prise en compte. En résolvant l'équation d'Euler dans chaque fluide, et en imposant que les solutions décroissent à l'infini ( $y = \pm\infty$ ), la continuité des vitesses normales à l'interface, et la condition de saut de pression à l'interface à cause de la tension de surface, on trouve une équation du second degré pour la célérité complexe des ondes :

$$c^2 - 2\frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} c + \frac{\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \gamma k^2}{(\rho_1 + \rho_2)k} = 0. \quad (14.6)$$

Les solutions sont :

$$c = c_r + i c_i = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm i \left[ \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_2 - U_1)^2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)g + \gamma k^2}{(\rho_1 + \rho_2)k} \right]^{1/2}. \quad (14.7)$$

Si  $c_1$  est réel,  $c_r$  est la vitesse de phase des ondes et apparaît comme la moyenne pondérée par les densités des vitesses des deux veines de fluide.  $\sigma = kc_i$  est le taux de croissance temporel. L'amplitude des ondes va croître comme  $\exp \sigma t$ <sup>10</sup>. La partie imaginaire de la célérité n'apparaît que si le terme déstabilisant inertiel lié à la différence des vitesses est supérieur aux termes stabilisants de la tension de surface et de la gravité. Si ce n'est pas le cas,  $c$  est réel et il n'y a donc pas de taux de croissance et juste une modification de la vitesse de phase des ondes selon la valeur de  $k$ . On peut noter d'ailleurs que l'on retrouve la célérité des ondes interfaciales libres si  $U_1 = U_2$  (L'équation 14.7 devient en effet équivalente à l'équation 7.5 page 71). L'amplification des ondes correspond donc à la condition :

$$(U_2 - U_1)^2 \geq \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2} \frac{g}{k} (1 + (k/k_c)^2). \quad (14.8)$$

La plus petite valeur possible de la différence de vitesse correspond donc au nombre d'onde critique, ici le nombre d'onde capillaire  $k_c = \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\gamma}}$  (déjà rencontré dans le chapitre sur les ondes de surface, Eq. 7.7). On est au seuil de l'instabilité pour :

10. En réalité l'équation étant non dissipative, elle est réversible et les deux solutions  $\exp \sigma t$  et  $\exp -\sigma t$  existent. Ce problème disparaît en présence de viscosité.

$$|U_1 - U_2|_{min} = \left[ 2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} (\Delta \rho g \gamma)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (14.9)$$

Lorsque  $|U_1 - U_2| > |U_1 - U_2|_{min}$  les ondes instables sont comprises entre les deux bornes (appelés modes marginaux) :

$$k_{max/min} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2 \Delta U^2}{(\rho_1 + \rho_2) \gamma} \pm \left[ \left( \frac{\rho_1 \rho_2 \Delta U^2}{(\rho_1 + \rho_2) \gamma} \right)^2 - \frac{4 \Delta \rho g}{\gamma} \right]^{1/2} \right\}. \quad (14.10)$$

La courbe de stabilité marginale correspondant à l'équation 14.8 est représentée sur la figure 14.10.

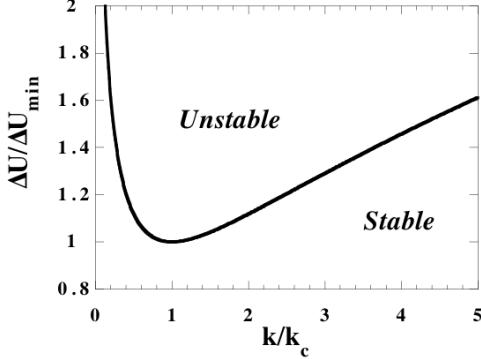


FIGURE 14.10 – Courbe de stabilité marginale adimensionnée pour l'instabilité de Kelvin-Helmholtz .

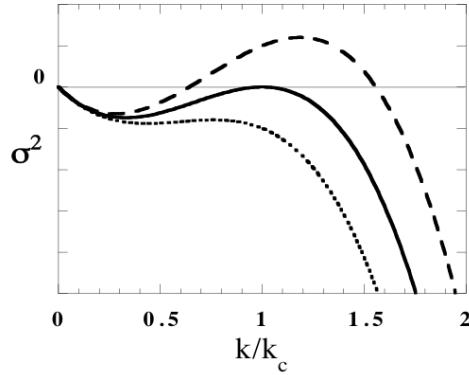


FIGURE 14.11 – Evolution du carré du taux de croissance de l'instabilité  $\sigma^2$  (unité arbitraire) en fonction de  $k/k_c$  pour trois valeurs de la différence de vitesse ( $\Delta U/\Delta U_{min} = 0.9 ; 1$  et  $1.1$ ).

Le taux de croissance de l'instabilité  $\sigma$  est donné par  $\sigma^2 = c_i^2 k^2$  :

$$\sigma^2 = \frac{\gamma k_c^3}{\rho_1 + \rho_2} \left[ -\frac{k}{k_c} + 2 \left( \frac{\Delta U^2}{\Delta U_{min}^2} \right) \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^3 \right]. \quad (14.11)$$

Cette fonction est tracée sur la figure 14.11. L'interface est instable si  $\sigma^2$  est positif. S'il est négatif, cela correspond simplement à une modification de la vitesse de phase des ondes, et les déformations initiales se propagent sans amplification ni atténuation car nous avons négligé les effets visqueux. L'équation 14.11 montre que les petites valeurs de  $k$  ne sont pas amplifiées à cause de la gravité et les grandes valeurs de  $k$  à cause de la tension de surface. On peut aussi pour toute différence de vitesse  $\Delta U$  calculer le mode le plus instable  $k_0$ .

#### 14.4.5 Cas d'un profil de vitesse continu

Si le profil de vitesse n'était pas discontinu mais continu sur une taille caractéristique  $\delta$ , il n'y aurait pas vraiment de modification des résultats pour les petits nombres d'onde mais les nombres d'onde plus grand que  $1/\delta$  ne peuvent plus être instables.

**Exercice :** Dans le cas d'un fluide unique avec un profil linéaire sur une largeur  $\delta$  raccordant aux vitesses constantes  $U_1$  et  $U_2$ , montrer que la célérité complexe s'écrit :

$$c = \frac{U_1 + U_2}{2} \pm \frac{\Delta U}{2k\delta} [(k\delta - 1)^2 - \exp(-2k\delta)]^{1/2}.$$

Tracer la courbe du taux de croissance  $\sigma(k)$  et discuter les cas limites des petits et grands  $k$ .

#### 14.4.6 Cas du vent sur la mer

Lorsque le fluide inférieur est de l'eau au repos, et que le fluide supérieur est de l'air, nous obtenons pour un profil de vitesse discontinu la longueur d'onde critique au seuil  $\lambda_c = 2\pi l_c \approx 1.7$  cm et pour la vitesse du vent au seuil  $\Delta U_{min} \approx 7.2$  m/s. Cette valeur est bien trop grande par rapport à la réalité car pour un tel vent les vagues sont déjà en train de déferler. Bien que le mécanisme physique initial corresponde à l'instabilité de Kelvin-Helmoltz d'autres arguments doivent être invoqués (profil de vitesse logarithmique dans l'air, contribution des fluctuations turbulentes pour initier des perturbations, effet du fetch,...). Trouver un seuil réaliste n'est pas simple et est encore controversé. Le lecteur intéressé pourra lire les papiers de Miles<sup>11</sup>. Notons que de façon un peu surprenante, la prédition simple de Kelvin-Helmoltz est bien meilleure pour des expériences où de l'air s'écoule sur un liquide plus visqueux comme de l'huile<sup>12</sup>.

#### 14.4.7 Analyse spatiale de stabilité

Nous avons pour l'instant uniquement considéré une analyse temporelle, c'est-à-dire supposé que  $k$  était réel et  $\omega$  (ou  $c$ ) était complexe. Mais on peut à partir de la même relation de dispersion résoudre en supposant  $\omega$  réel et  $k$  complexe. Dans ce cas le terme en  $\exp(-k_i x)$  correspond à l'amplification des ondes lorsque  $k_i$  est négatif. Cette description correspond mieux à la plupart des expériences où il existe un écoulement moyen et une origine des  $x$  à partir de laquelle les deux fluides sont mis en contact. Cette description conduit aux notions d'instabilité convective et d'instabilité absolue décrites dans la section 14.9. Toutefois Gaster<sup>13</sup> a montré que, au seuil, les deux descriptions sont équivalentes.

---

11. J. W. Miles, "On the generation of surface waves by shear flows", *J. Fluid Mech.* 3, 185-204 (1957)

12. J. R. D. Francis, "Wave motions and the aerodynamics drag on a free oil surface," *Phil. Mag.* 45, 695-702 (1954)

13. M. Gaster, A note on the instability between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.* 14, 222–224 (1962).

## 14.5 Instabilités visqueuses : l'instabilité de Saffman-Taylor

Cette instabilité apparaît lorsqu'un fluide peu visqueux pénètre dans un fluide plus visqueux. Elle est le plus souvent étudiée dans une cellule de Hele-Shaw (écoulement entre deux plaques planes proches) mais existe surtout dans les milieux poreux. Cette instabilité est emblématique des instabilités morphogénétiques (qui génèrent des formes). La figure 14.12 montre par exemple le cas d'une injection ponctuelle de gaz entre deux plaques de verre séparées par une mince couche d'huile.

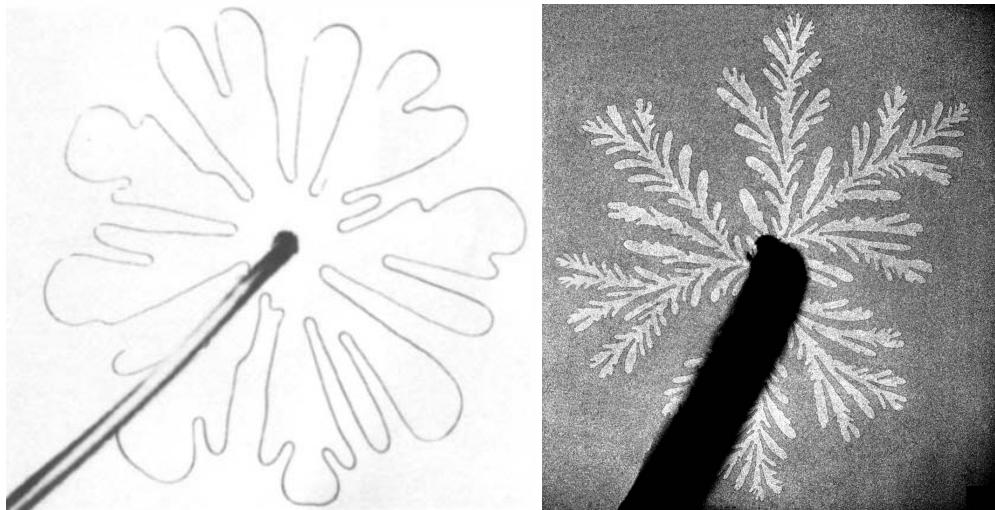


FIGURE 14.12 – Interface air/huile observée en géométrie circulaire. L'air est injecté au centre à basse vitesse en (a) et haute vitesse en (b). Seules les extrémités des doigts d'air continuent à croître. Les autres parties du front de croissance air/huile sont pratiquement immobiles car les gradients de pression dans l'huile sont écrantés par les doigts les plus développés.

### 14.5.1 Loi de Darcy

Le montage classique pour l'étude de l'instabilité de Saffman-Taylor est soit un milieu poreux, soit une cellule de Hele-Shaw<sup>14</sup> (deux parois parallèles et proches). Nous allons d'abord établir la loi de Darcy qui relie la vitesse moyenne locale au gradient de pression local dans une telle cellule<sup>15</sup>. Nous supposerons que les deux plans limitant la cellule sont horizontaux – afin de pourvoir négliger la gravité –, parallèles et séparés d'une petite distance  $b$ . Le mouvement de chacun des deux fluides est gouverné par l'équation de Navier-Stokes. Si le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de la cellule est petit et si l'écoulement est quasi-stationnaire, l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{u} = \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} p \quad (14.12)$$

où  $\eta = \rho\nu$  est la viscosité dynamique de chacun des fluides. Tant que les structures horizontales sont grandes comparées à l'épaisseur de la cellule on peut écrire que  $\vec{\nabla}^2 \vec{u} \approx \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2}$  et l'équation

14. H. J. S. Hele-Shaw, On the motion of a viscous fluid between two parallel plates, *Nature* 58, 34 (1898)

15. H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : distribution d'eau et filtrage des eaux* (Victor Dalmont, Paris, 1856)

précédente se réduit pour les composantes  $(u, v, w)$  de la vitesse  $\vec{u}$  à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{array} \right.$$

De plus la conservation de la masse nous permet de négliger les vitesses verticales (axe  $z$ ) devant les vitesses horizontales. Nous avons alors  $w = 0$  et donc  $\partial p / \partial z = 0$ . Donc  $p$  ne dépend pas de  $z$  et les équations précédentes peuvent être intégrées selon  $z$ . Les vitesses  $u$  et  $v$  sont donc quadratiques en  $z$ , c'est en effet un écoulement de Poiseuille plan (voir section 10.3.3 page 121). Si l'on prend en compte la condition de non-glissement sur les parois horizontales il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z(z - b) \\ v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} z(z - b) \\ w = 0 \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors une équation linéaire entre la vitesse moyennée sur l'épaisseur (vitesse débitante)  $\vec{V} = \frac{1}{b} \int_0^b \vec{u} dz$  et le gradient horizontal de la pression :

$$\boxed{\vec{V}(x, y, t) = -\frac{b^2}{12\eta} \vec{\nabla} p} \quad (14.13)$$

Dans cette équation  $\vec{V}$  est un vecteur à deux composantes et  $\vec{\nabla} p$  est le gradient horizontal de la pression. Cette équation s'appelle l'équation de Darcy et elle est valide dans chacun des fluides du moment que le profil de la vitesse est parabolique, c'est-à-dire tant que l'on n'est pas trop près de l'interface entre les deux fluides ou des parois verticales de la cellule. Dans le cadre de cette approximation l'écoulement horizontal est bidimensionnel et irrotationnel ( $\text{rot } \vec{v} = 0$ ). Cette dernière propriété fait que la cellule de Hele-Shaw est souvent utilisée pour visualiser les lignes de courant d'un écoulement irrotationnel autour d'un obstacle, ce qui est a priori surprenant puisque nous avons ici un écoulement d'un fluide visqueux alors que les écoulements irrotationnels (potentiels) correspondent généralement à des écoulements de fluides parfaits.

### 14.5.2 Description qualitative de l'instabilité

Nous allons montrer qualitativement que l'interface entre deux fluides de viscosités différentes est instable si le fluide le moins visqueux repousse le fluide le plus visqueux.

Supposons que les deux fluides s'écoulent horizontalement dans la cellule de Hele-Shaw, à la même vitesse  $U$  le long de l'axe des  $x$  et que l'interface qui les sépare soit initialement plane et perpendiculaire à  $Ox$  (figure 14.13).

Si les deux fluides sont incompressibles,  $\text{div } \vec{V} = 0$ , et si l'épaisseur  $b$  est aussi constante, l'équation 14.13 montre que le champ de pression satisfait l'équation de Laplace :

$$\vec{\nabla}^2 p = 0. \quad (14.14)$$

Le champ de pression est donc un champ harmonique.

Décrivons maintenant qualitativement le mécanisme d'instabilité en négligeant tout d'abord la tension de surface, ce qui fait que l'interface reste une isobare. Imaginons tout d'abord une faible

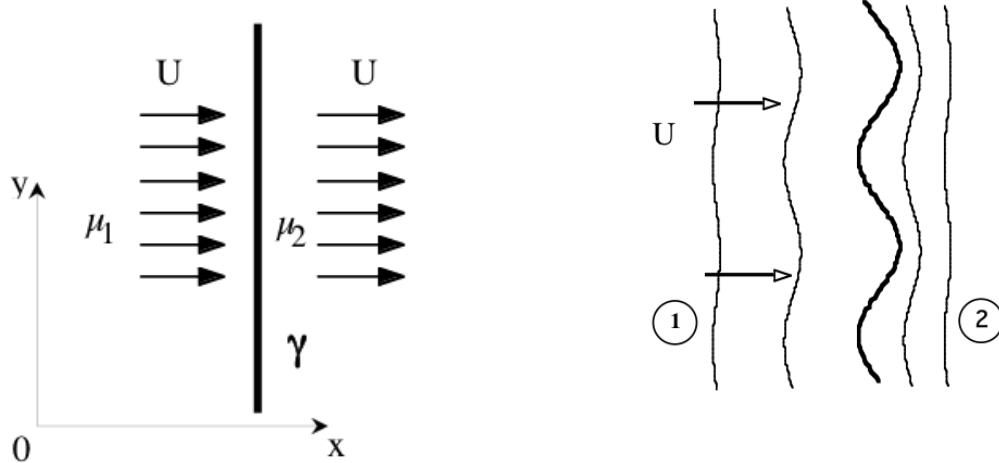


FIGURE 14.13 – Schéma d'une interface se déplaçant à la vitesse  $U$  entre les fluides 1 et 2.

FIGURE 14.14 – Dessin des isobares devant et à l'arrière de l'interface déformée.

perturbation de l'interface, périodique en  $y$ . Les isobares de chaque côté de l'interface restent à peu près parallèles à l'interface mais la perturbation doit s'amortir loin de l'interface car de chaque côté la pression satisfait l'équation de Laplace. Si le fluide 1 est moins visqueux que le fluide 2, les isobares sont un peu plus resserrés dans le domaine 2 (figure 14.14) car on y trouve l'essentiel de la perte de charge. En particulier au niveau des bosses de l'interface, les isobares sont plus resserrées que devant les creux, le gradient de pression y est donc plus important et la vitesse locale de l'interface y est donc plus grande (Eq. 14.13). En conséquence, au cours du mouvement, les crêtes se déplacent plus vite que les creux : les déformations initiales de l'interface sont donc amplifiées si  $\eta_1 < \eta_2$  mais amorties si  $\eta_1 > \eta_2$ . Sans tension de surface les crêtes formeraient rapidement des pointes (singularités en temps finis). Dans la réalité la tension de surface est un facteur limitant la courbure des pointes et qui ralentit donc la croissance de l'instabilité. Notons que même en l'absence de tension de surface (cas des fluides miscibles) il existe une autre limitation à la formation de singularités, car lorsque la courbure dans le plan  $(x, y)$  de la cellule devient de l'ordre de l'épaisseur de la cellule, l'approximation de la loi de Darcy n'est plus justifiée.

### 14.5.3 Analyse linéaire de l'instabilité

Nous allons maintenant étudier l'évolution linéaire de l'instabilité du front plan. On introduira le nombre capillaire  $Ca = \eta U / \gamma$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide le plus visqueux,  $\gamma$  la tension de surface entre les deux fluides et  $U$  la vitesse du front plan. Nous allons établir la relation de dispersion et tracer la courbe de stabilité marginale.

#### Ecoulement de base (i.e. ordre 0)

Nous allons considérer le cas simplifié d'un gaz (fluide 1) repoussant un liquide visqueux (fluide 2) et que l'interface est plate et avance à la vitesse  $U$ .

La vitesse moyenne est alors égale partout et l'on a  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = U \vec{e}_x$ . En effet le ménisque qui relie les deux parois est entraîné par le fluide à la vitesse moyenne, donc à la vitesse débitante locale. L'équation de Darcy (14.13) nous donne alors la relation :  $\frac{1}{\eta_1} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial P_2}{\partial x}$ . Compte tenu de la faible

viscosité de l'air,  $P_1$  est pratiquement constant et il suffit de résoudre le problème dans le milieu 2. On trouve

$$P_2(x, t) = P_1 - \frac{2\gamma}{b} - \frac{U}{b^2} 12\eta_2(x - Ut) \quad (14.15)$$

pour la pression en un point fixe du fluide 2 qui tient compte du saut de pression à l'interface courbée (dans le plan vertical), et de la position  $\zeta_0 = Ut$  de l'interface à l'instant  $t$ .

### Ecoulement perturbé (i.e. ordre 1)

Afin d'étudier la stabilité de l'écoulement de base, supposons maintenant que cette interface plane est légèrement perturbée et décomposons cette perturbation dans la direction  $y$  en série de Fourier<sup>16</sup>. Comme nous ferons une analyse linéaire il suffit d'étudier indépendamment chacun des modes de Fourier en  $\sin(ky)$ .

On écrit donc à l'ordre 1,  $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$  avec  $\zeta_1 = a \exp(\sigma t - iky)$ ,  $p_2 = P_2 + p$  et  $\vec{V}_2 = U \vec{e}_x + \vec{v}$ .

Si après étude de la relation de dispersion on trouve  $\sigma(k) > 0$  la perturbation sera amplifiée et le front plan sera instable, si tous les  $\sigma(k) < 0$  le front plan sera stable. Si  $\sigma$  était imaginaire cela correspondrait à des ondes propagatives le long de l'interface mais ça ne sera pas le cas ici.

Compte tenu que la pression doit satisfaire l'équation de Laplace, on obtient pour la perturbation de pression  $p = A(t) \exp(-k(x - Ut)) \exp(-iky)$ .

Il faut ensuite écrire la condition cinématique à l'interface :

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + v_y \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} = v_x,$$

qui donne au premier ordre la relation :

$$\sigma a \exp(\sigma t) = A(t) \frac{b^2 k}{12\eta_2}.$$

et la condition dynamique :

$$p(x, t) = \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2},$$

qui donne la relation

$$A(t) = \left( \frac{12\eta_2}{b^2} U - \gamma k^2 \right) a \exp(\sigma t).$$

En éliminant  $A(t)$  de ces 2 relations on obtient la relation de dispersion :

$$\sigma = U k - \frac{b^2 \gamma}{12\eta_2} k^3. \quad (14.16)$$

Dans le cas complet, à deux fluides, le taux de croissance  $\sigma$  est donné par la relation de dispersion :

$$\sigma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} U k - \frac{b^2 \gamma}{12(\eta_2 + \eta_1)} k^3 \quad (14.17)$$

---

16. R. L. Chouke, P. Van Meurs et C. Van der Pol, The Instability of Slow Immiscible Viscous Liquid-Liquid Displacement in Permeable Media, Tr. AIME 216, 188 (1959)

où  $k$  est le nombre d'onde de la perturbation. Comme  $\sigma$  est toujours réel, la déformation ne se propage pas selon  $y$ . Le front est instable si  $\sigma > 0$  c'est-à-dire si  $(\eta_2 - \eta_1)U > 0$ . Cette condition correspond à un fluide de faible viscosité repoussant un fluide plus visqueux par rapport aux parois immobiles de la cellule. Cette instabilité n'a pas de seuil, dès que l'interface bouge elle devient instable. Le deuxième terme de l'équation précédente, toujours négatif, montre que la tension de surface limite la croissance de l'instabilité, en particulier pour les grandes valeurs de  $k$ . Le vecteur d'onde le plus amplifié  $k_c$  correspond au maximum de la courbe de  $\sigma(k)$ . Dans le cas où  $\eta_1 \ll \eta_2$  et en introduisant  $Ca$  il vient :

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{2}{b}\sqrt{Ca}. \quad (14.18)$$

et pour le taux de croissance maximum :

$$\sigma_c = \frac{4\gamma}{3b\eta_2} Ca^{2/3}.$$

A basse vitesse, les longueurs d'ondes observées sont grandes mais elles diminuent à plus hautes vitesses. Ce résultat théorique peut être testé expérimentalement en imposant à l'instant initial une vitesse  $U$  à une interface initialement au repos. Rapidement toutefois l'amplitude des déformations n'est plus petite car on n'observe pas de saturation à faible amplitude. L'analyse linéaire n'est alors plus valable. On peut noter que cette analyse de stabilité présente de profondes similarités avec l'analyse de stabilité d'un front de croissance d'un cristal initialement plan<sup>17</sup>.

**Exercice :** Montrer que la loi de Darcy induit une discontinuité de la vitesse tangentielle au niveau de l'interface déformée, incompatible avec l'hypothèse d'un fluide visqueux. Comment peut-on résoudre cette contradiction ?

**Correction de Park et Homsy :** En réalité la courbure dans un plan vertical de l'interface entre les deux fluides n'est pas une constante car l'épaisseur des films liquides déposés sur les surfaces dépend de la vitesse d'avancée de l'interface. Park et Homsy<sup>18</sup> ont montré qu'il existe une correction en  $Ca^{2/3}$  mais celle-ci reste faible à faible vitesse.

#### 14.5.4 Evolution non-linéaire de l'instabilité

En 1958, Saffman et Taylor ont été les premiers à décrire une saturation non-linéaire de l'instabilité<sup>19</sup>. Dans une cellule de Hele-Shaw de largeur constante  $W$ , ils ont observé que l'interface évolue vers une forme stationnaire se propageant à vitesse constante. Ce « doigt » reste large à faible débit d'injection mais tend à occuper la moitié de la largeur de la cellule à plus grand débit (figure 14.15a). Expérimentalement il existe une fonction unique qui relie la largeur relative du doigt  $\lambda$  à sa vitesse de propagation  $U$ .

En l'absence de tension de surface, Saffman et Taylor ont pu trouver par la méthode des transformations conformes (§ ?? page ??) la forme stationnaire du doigt. Ils ont trouvé une famille continue de solutions donnée par l'équation :

$$x = \frac{W(1 - \lambda)}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda W} y \right) \right] \right) \quad (14.19)$$

17. W.W. Mullins and R.F. Sekerka, J. of Appl. Phys. 35, 444 (1964)

18. C.-W. Park and G. M. Homsy (1984). Two-phase displacement in Hele Shaw cells : theory. Journal of Fluid Mechanics, 139 , pp 291-308

19. P. G. Saffman and G. I. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous fluid. Proc. R. Soc. Lond. A, 245 :312–329, 1958.

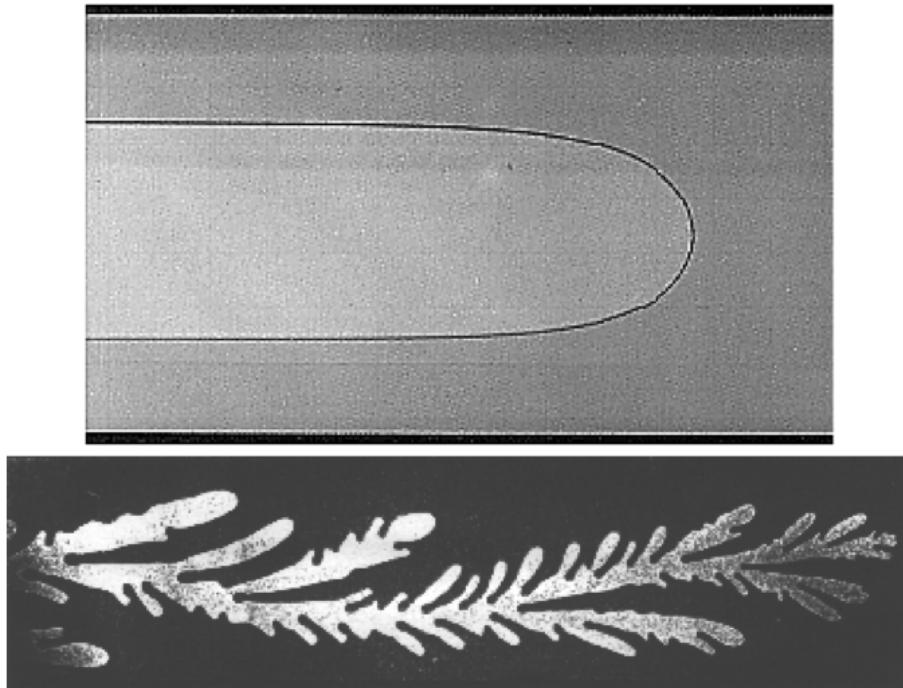


FIGURE 14.15 – (a) Photographie d'un doigt d'air de Saffman-Taylor se propageant à vitesse constante de la gauche à droite dans une cellule de Hele-Shaw linéaire initialement remplie d'huile. Cette forme correspond bien à la forme théorique du doigt de Saffman-Taylor pour  $\lambda = 0.5$  (Eq. 14.19). (b) Doigt d'air instable à grand débit dans la même cellule linéaire.

où  $0 \leq \lambda \leq 1$  est le rapport de la largeur du doigt sur la largeur du canal. Ces solutions sont les analogues de la parabole d'Ivantsov pour la croissance cristalline d'une dendrite libre. Le doigt de largeur  $\lambda = 0.5$  se compare assez bien à la forme expérimentale de la figure 14.15a.

Sans tension de surface il n'existe pas de mécanisme de sélection entre la largeur du doigt et sa vitesse d'avancée. Contrairement à l'expérience, pour toute vitesse  $U$  toutes les largeurs sont théoriquement possibles. Le mécanisme de sélection par la tension de surface n'a finalement été compris qu'en 1986. Toutefois, même en cellule linéaire, si l'écoulement est trop rapide le doigt de Saffman-Taylor devient instable et des structures bien plus complexes sont observées (figure 14.15b).

Dans une cellule circulaire où l'air est injecté au centre de grandes plaques transparentes, il apparaît le même phénomène d'instabilité. Seule l'extrémité des doigts se développe, devient instable soit par une division de la pointe (tip-splitting) soit par des branchements latéraux (side-branching) et les doigts ne se restabilisent jamais (figure 14.12a). La structure devient rapidement de plus en complexe et fractale (figure 14.12b).

Dans toute cette dynamique, à cause de la loi de Darcy et de l'équation de Laplace sous-jacentes, il existe une forte similarité avec les phénomènes « d'effet de pointe » en électrostatique et dans les figures de claquage dans un isolant diélectrique (figures de Lichtenberg).

## 14.6 Instabilités centrifuges : l'instabilité de Taylor-Couette

Cette instabilité a beaucoup été étudiée dans les années 1980 comme un exemple de la transition progressive d'un écoulement laminaire vers un régime turbulent.

L'instabilité de l'écoulement de base apparaît dans la géométrie de Couette circulaire (voir section 10.3.2 page 120), lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse angulaire suffisamment élevée. Avant le seuil de l'instabilité de Taylor-Couette l'écoulement initial est stationnaire, purement orthoradial (1C1D, c'est-à-dire une seule composante de la vitesse qui ne dépend que du rayon). Au-dessus d'un premier seuil en vitesse angulaire, des composantes radiale et axiale de la vitesse apparaissent et des tores de sens alternés sont observés (figure 14.16). Contrairement à l'instabilité de Saffman-Taylor, l'instabilité est ici supercritique, c'est-à-dire qu'elle sature à des amplitudes aussi faibles que l'on veut au voisinage du seuil. Au-delà du seuil, du fait de ces rouleaux toriques, l'écoulement est maintenant 3C2D, mais l'axisymétrie et la stationnarité sont toujours réalisées. C'est au-delà d'un deuxième seuil que les anneaux commencent à onduler en  $\theta$  (perte de l'invariance par rotation) ce qui brise la dernière symétrie spatiale (écoulement est alors 3D3C) mais l'écoulement est encore stationnaire dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire des ondulations. Au-delà d'un troisième seuil une première modulation temporelle intrinsèque de l'intensité des rouleaux apparaît brisant cette fois la symétrie de translation dans le temps du problème. Si les deux cylindres tournent le diagramme des états bifurqués est plus complexe (figure 14.17b d'après l'étude d'Andereck et al.<sup>20</sup>).

En 1923 Taylor<sup>21</sup> a calculé par analyse de stabilité linéaire et mesuré le premier seuil de l'instabilité dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ) où les deux nombres de Reynolds sont définis par la relation  $Re_i = \Omega_i R_i (R_2 - R_1) / \nu$  (figure 14.17a). C'était la première fois qu'un étude de stabilité permettait une si bonne confrontation entre théorie et expérience.

Dans le cas d'un faible gap ( $d = R_2 - R_1 \ll R_1$ ) et du cylindre extérieur fixe, le seuil correspond à un nombre de Taylor critique donné par :

$$Ta_c = Re_1^2 \frac{d}{R_1} \approx 1608,$$

où  $Re_1 = \Omega_1 R_1 d / \nu$  est le nombre de Reynolds construit sur la vitesse angulaire et sur l'épaisseur du gap<sup>22</sup>. La longueur d'onde la plus instable est  $\lambda_c \approx 2(R_2 - R_1)$ .

### 14.6.1 Critère inviscide de Rayleigh

L'écoulement de base est l'unique solution linéaire du problème, ce qui ne veut pas dire que cette solution est stable. Nous allons étudier sa stabilité dans le cas plus simple d'un fluide parfait.

#### Exercice : Instabilités centrifuges

a) Retrouver le critère de stabilité de Rayleigh pour un écoulement orthoradial, en déterminant les forces qui s'appliquent sur une particule déplacée d'un rayon  $r_1$  à un rayon  $r_2$ .

b) Trouver le profil de vitesse d'un écoulement de Couette en rotation dans les deux cas particuliers suivants : (a) deux cylindres tournant dans le même sens et à la même vitesse angulaire, (b) un seul

20. C. David Andereck, S. S. Liu and Harry L. Swinney (1986). Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 164 , pp 155-183

21. Taylor, G.I. 1923 Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 223, 289-343

22. Dans le cas où les deux cylindres tournent dans le même sens le seuil donné par le critère de Rayleigh, correspond à une ligne dans le plan ( $Re_1, Re_2$ ) (figure 14.17a).

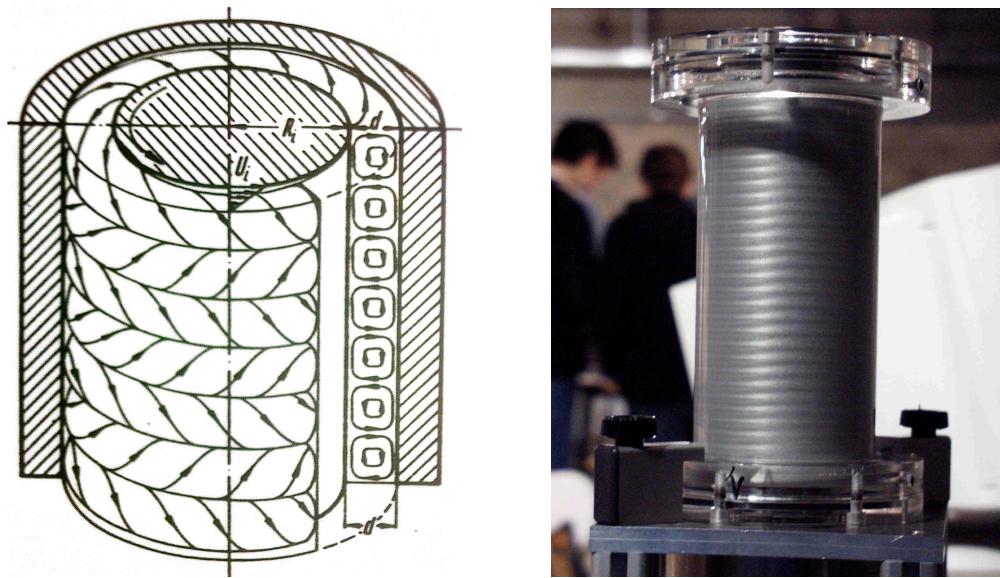


FIGURE 14.16 – Instabilité centrifuge de Taylor-Couette visible sous forme de tores superposés entre deux cylindres lorsque le cylindre intérieur tourne suffisamment vite : (a) Schéma issu de la référence [38] et (b) visualisation par des écailles nacrantes.

cylindre tournant dans un récipient infini. Montrer qu'en utilisant le critère inviscide de stabilité, le premier est stable et le deuxième marginalement stable.

c) Refaire le raisonnement pour un écoulement de Couette dans le cas d'un fluide visqueux. (On cherchera seulement à mettre en évidence l'existence du nombre de Taylor).

d) Montrer que le critère de Rayleigh peut être formulé sous une forme prédisant l'instabilité dans le cas où la vorticité est de sens contraire à la vitesse angulaire du fluide.

#### 14.6.2 Autres instabilités centrifuges :

Il existe d'autres instabilités dont l'origine physique est proche de celle de Taylor-Couette. On peut citer l'instabilité de Görtler dans la couche limite d'une surface concave (voir figure 14.18) et l'instabilité de Dean dans une conduite courbée (voir figure 13.7 page 162).

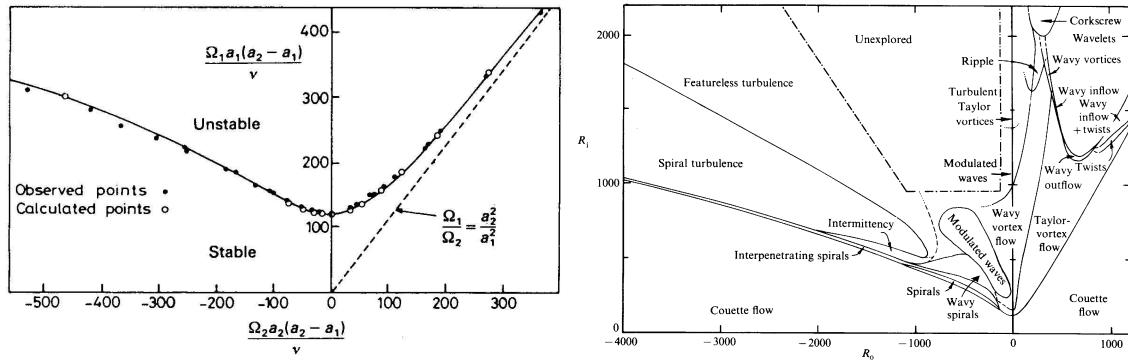


FIGURE 14.17 – (a) Comparaison entre prédition théorique et expérience pour le seuil d'apparition de l'instabilité de Taylor-Couette dans le plan des deux nombres de Reynolds  $Re_1$  et  $Re_2$  pour un rapport  $R_2/R_1 = 1.14$  (d'après G.I. Taylor [1923]) et (b) Diagramme des régimes observés dans le montage de Taylor-Couette lorsque les deux cylindres tournent au-delà du seuil (Andereck et al. [1986]).

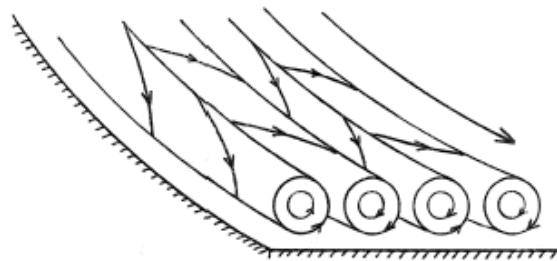


FIGURE 14.18 – Schéma des vortex de Görtler se développant dans la couche limite d'une paroi concave [38].

## 14.7 Instabilités de convection thermique : convection de Rayleigh-Bénard

Lorsqu'une couche de fluide placée entre deux parois horizontales est soumise à un gradient vertical de température, il apparaît un mouvement de convection au-dessus d'une différence de température critique  $\Delta T_c$ . A faible différence de température le fluide reste au repos et le transfert de chaleur a lieu par conduction, mais au-dessus d'un nombre de Rayleigh critique, des rouleaux de convection de sens contraire se mettent progressivement en place (figure 14.19). La bifurcation est supercritique pour les fluides usuels.

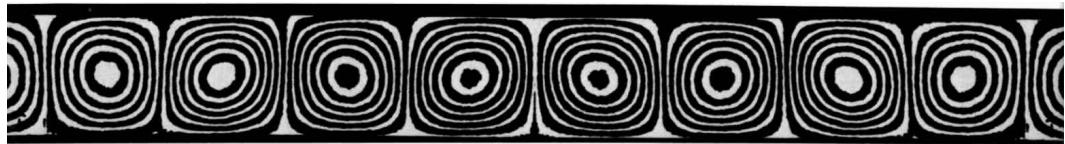


FIGURE 14.19 – Rouleaux de Rayleigh-Bénard observés dans de l'huile de silicone par interférométrie ([17] p.82).

Une étude dimensionnelle du problème fait apparaître un nombre critique, le nombre de Rayleigh :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\nu\kappa}.$$

En effet pour que le mouvement de convection ait lieu il faut que la force motrice (la dilatation thermique du fluide) soit suffisante pour vaincre les deux phénomènes stabilisants, la conductivité thermique et la dissipation visqueuse.

Ecrivons la variation de la masse volumique avec la température  $\rho(T_0 + \Delta T) = \rho(T_0)(1 - \alpha\Delta T)$ , où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique volumique. La force de flottaison (poussée d'Archimète) est de l'ordre de  $\rho g\alpha\Delta T$  ce qui, si elle était seule, conduirait à un mouvement vertical uniformément accéléré et donc au parcours de la distance  $d$  en un temps  $t^2 = 2d/(g\alpha\Delta T)$ . Ce temps  $t$  doit être plus court que le temps de diffusion visqueuse sur la couche de fluide de hauteur  $\tau_v = d^2/\nu$  et plus court que le temps de diffusion thermique :  $\tau_T = d^2/\kappa$  où  $\kappa$  est la diffusivité thermique du fluide. En ordre de grandeur il faut donc que  $t^2 < \tau_v\tau_T$ , soit :

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta T d^3}{\nu\kappa} < 1.$$

Le calcul complet montre que la valeur critique du Rayleigh est  $Ra_c = 1708$  pour que la convection commence (figure 14.20). Près du seuil on observe des rouleaux de convection sous forme de cylindres parallèles contra-rotatifs de faible intensité (bifurcation supercritique).

## 14.8 Instabilité de Bénard-Marangoni.

Cette instabilité, aussi d'origine thermique, est observée lorsqu'un liquide présentant une surface libre est chauffé par le bas. Un paramètre clé est la baisse de la tension de surface avec la température. Souvent des structures hexagonales sont observées (figure 14.21).

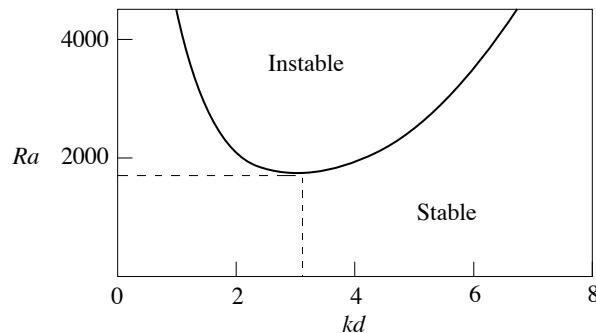


FIGURE 14.20 – Diagramme de stabilité dans le plan  $(Ra, kd)$  de l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

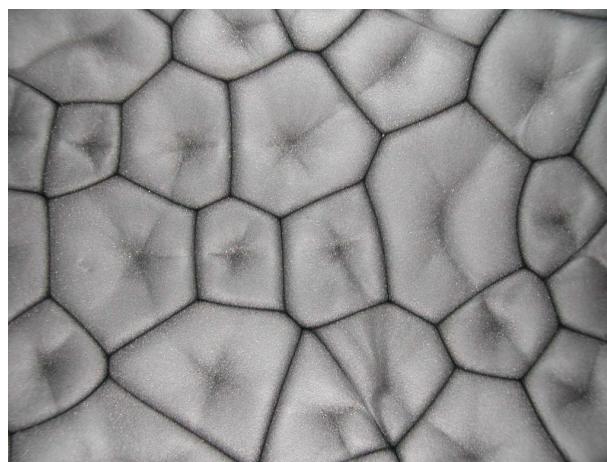


FIGURE 14.21 – Instabilité de Bénard-Marangoni dans un mélange huile/poudre d'aluminium.

## 14.9 Instabilité convective ou instabilité absolue ?

On appelle « écoulements ouverts » des écoulements où il existe une vitesse d’advection moyenne (ce n’est jamais le même fluide qui passe en un point donné). La réponse à une perturbation va donc dépendre du temps et donc de l’espace à cause de cette vitesse d’advection. La localisation de la source de bruit dans l’espace physique et la perte des propriétés d’invariance galiléenne qui en découle ont des conséquences importantes. Une question devient alors importante, lors du développement de l’instabilité à partir d’un germe localisé en temps et en espace : la perturbation va-t-elle se développer suffisamment vite pour pouvoir remonter le courant et ne pas être à terme balayée par l’écoulement ? Ce problème est illustré par la figure 14.22.

## 14.10 Autres instabilités

**Instabilité de Crow :** Instabilité du sillage des avions (figure 14.23). Une référence : R. L. Bristol et al., (2004). On cooperative instabilities of parallel vortex pairs. *J. Fluid Mech.*, 517, pp 331-358.

**Instabilité magnétique :** Instabilité des ferrofluides. Une référence : B. Abou, G. Néron de Surgy

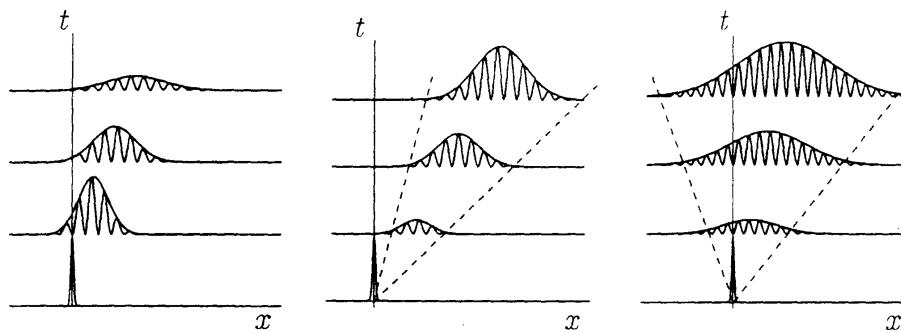


FIGURE 14.22 – Diagramme spatio-temporel illustrant le comportement d'un paquet d'onde dans un écoulement ouvert. A gauche perturbation advectée mais amortie, au centre cas d'une instabilité convective, à droite cas d'une instabilité absolue.



FIGURE 14.23 – Sillage d'avion instable évoluant en anneaux de tourbillon (Instabilité de Crow).

and J.E. Wesfreid, Dispersion Relation in a Ferrofluid Layer of Any Thickness and Viscosity in a Normal Magnetic Field ; Asymptotic Regimes, *J. Phys. II France* 7 (1997) 1159-1171.

Pour en savoir plus :

- *Flow instabilities*, E.L. Mollo-Christensen, National Committee for Fluid Mechanics Films, [http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Flow\\_Instabilities.rm](http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Flow_Instabilities.rm)
- [10] F. Charru, *Instabilités hydrodynamiques*, EDP Sciences, 2007.
- [31] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004.
- [16] P.G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [5] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Ordre dans le chaos*. Hermann, 1998.
- [9] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover, 1981.

Instabilité	Paramètre	Bifurcation	Déstabilisant	stabilisant	écoulement
Kelvin-Helmholtz		supercritique	cisaillement	gravité et capillarité	ouvert
Rayleigh-Taylor			gravité	capillarité	fermé
Rayleigh-Plateau			capillarité		ouvert
Kapitza	$Ka$		capillarité		ouvert
Bénard-Von Karman	$Re_c$	supercritique	cisaillement	viscosité	ouvert
Faraday	$\Gamma_c$	supercritique	accélération	viscosité	fermé
Saffman-Taylor			viscosité	capillarité	fermé
Rayleigh-Bénard	$Ra_c$	supercritique	dilatation	conductivité thermique	fermé
Bénard-Marangoni		supercritique	capillarité	conductivité thermique	fermé
Taylor-Couette	$Ta_c$	supercritique	centrifuge	viscosité	fermé
Dean			centrifuge		ouvert
Poiseuille	$Re_c$	souscritique	couche limite	viscosité	ouvert
Couette plan	$Re_c$	souscritique	couche limite	viscosité	ouvert
Stuart			couche limite	ouvert	
Tollmien-Schlichting			couche limite	ouvert	
Görtler			couche limite		ouvert
Crow					ouvert
Benjamin-Feir					ouvert
Mullins-Sekerka					ouvert
Richtmyer-Meshkov			gravité	capillarité	fermé
Ferrofluide					ouvert
Belousov-Zhabotinsky					fermé
Flambage		supercritique			
Anneau tournant		supercritique	centrifuge	gravité	

TABLE 14.1 – Petit catalogue des instabilités répertoriées et principales propriétées.

# Chapitre 15

## Introduction à la turbulence

Marc Rabaud, version du 15 juin 2013

### Sommaire

---

<b>15.1 Introduction</b> . . . . .	<b>193</b>
15.1.1 Exemples d'écoulement turbulent . . . . .	194
<b>15.2 Description statistique de la turbulence</b> . . . . .	<b>195</b>
15.2.1 Valeurs moyennes et fluctuations . . . . .	195
15.2.2 Equations de la turbulence . . . . .	196
15.2.3 Le tenseur de Reynolds . . . . .	196
15.2.4 L'apport de la simulation numérique . . . . .	198
15.2.5 Mesures des vitesses et des fonctions de corrélation . . . . .	198
15.2.6 Notion de densité de probabilité (PDF) . . . . .	198
15.2.7 L'hypothèse de Taylor . . . . .	199
<b>15.3 La couche limite turbulente</b> . . . . .	<b>199</b>
<b>15.4 La turbulence stationnaire, homogène et isotrope (TSHI)</b> . . . . .	<b>199</b>
15.4.1 Spectre de la turbulence . . . . .	200
15.4.2 Quelques définitions : . . . . .	200
15.4.3 Evidence de la cascade d'énergie. . . . .	200
15.4.4 Spectre de Kolmogorov : . . . . .	202
<b>15.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>203</b>

---

### 15.1 Introduction

Dans la nature la plupart des écoulements sont turbulents et ils ne sont que très rarement laminaires. Il suffit de travailler avec de l'eau ou de l'air, avec des objets macroscopiques ( $L > 1 \text{ cm}$ ) et des vitesses usuelles pour que le nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$  soit très grand devant 1. Et si l'on parle beaucoup des écoulements à faible nombre de Reynolds ... c'est surtout parce qu'ils sont plus simples à décrire !

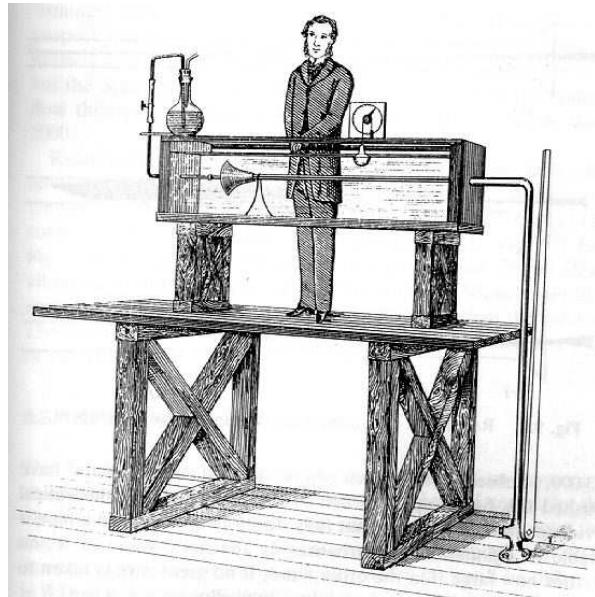


FIGURE 15.1 – Osborne REYNOLDS en 1883 mettant en évidence la transition laminaire/turbulent par injection d'encre dans un écoulement en conduite. D'après [1] p. 301

### 15.1.1 Exemples d'écoulement turbulent

Les écoulements atmosphériques, l'écoulement de l'eau sous un pont, les écoulements d'eau dans les tuyaux de votre maison, le sillage d'un voilier ou d'un avion sont des exemples d'écoulements turbulents.

- Prenons le cas d'un sillage d'un objet de taille  $L = 1 \text{ m}$  se déplaçant à  $u = 1 \text{ m/s}$  dans de l'eau. Le temps de déclin de l'énergie est donné en l'absence de turbulence par le temps de diffusion visqueuse sur la taille  $L$  :  $\tau_{diffusion} = L^2/\nu \approx 100 \text{ jours}$ , ce qui n'est pas très réaliste. La turbulence va fabriquer de plus petites structures d'écoulement, qui elles vont être dissipées par diffusion de la quantité de mouvement. La disparition du sillage se mesurera en minutes plutôt qu'en jours ! Pour un écoulement turbulent l'énergie n'est pas dissipée à l'échelle  $L$  où l'énergie est injectée, mais à une échelle bien plus petite. Il y a donc transfert de l'énergie vers ces petites échelles.

- Dans turbulence il y a aussi l'idée d'*aléatoire*, de non prédictif. Si un écoulement est turbulent, la connaissance de la vitesse en un point à un instant donné ne permet pas de connaître la vitesse en ce point un instant plus tard, ou bien au même instant un peu plus loin.

- Dans turbulence il y a aussi l'idée de *mélange*. La turbulence est une façon très efficace pour mélanger des fluides (dispersion de polluant atmosphérique par exemple).

- La turbulence est contenue dans les équations de Navier-Stokes et dans l'équation de continuité. En effet, bien que ces équations soient déterministes on ne sort pas de leur domaine de validité (tant que le libre parcours moyen des molécules reste très inférieur aux plus petites échelles de l'écoulement). Et pourtant l'écoulement turbulent dans un conduit est très différent d'un écoulement laminaire de Poiseuille.

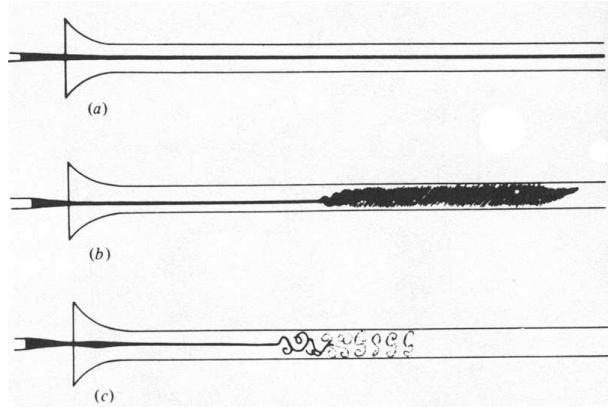


FIGURE 15.2 – Dessins d’Osborne REYNOLDS illustrant les différents écoulements observés. D’après [1] p. 302

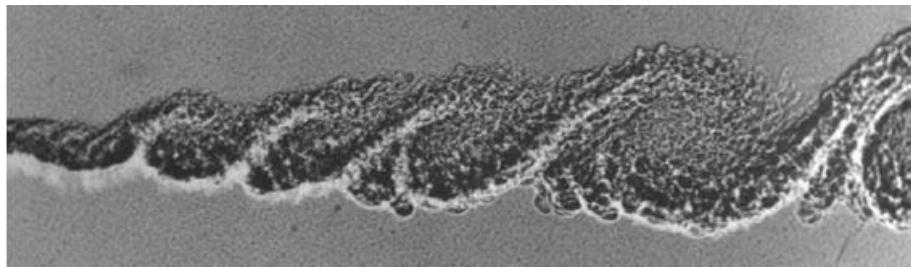


FIGURE 15.3 – Image montrant la persistance de structures dans une couche de mélange même en régime pleinement turbulent ( $Re = 850\,000$ ). Photo : Rebello, Brown et Roshko, d’après [17] p. 102.

## 15.2 Description statistique de la turbulence

On cherche à connaître les valeurs en un point et à un instant d’une composante de la vitesse par exemple,  $v_i(\vec{r}, t)$ , ou en tout cas la distribution de probabilité (PDF en anglais) que  $v_i(\vec{r}, t)$  prenne une certaine valeur. L’idée est alors de développer une description statistique (hors-équilibre) puisque le nombre de degrés de liberté devient très grand, un peu comme on le fait pour la théorie cinétique des gaz.

### 15.2.1 Valeurs moyennes et fluctuations

Si l’écoulement est dans des conditions macroscopiques stationnaires, on veut connaître les valeurs moyennes et les fluctuations autour de la moyenne des quantités physiques. Pour cela on fera l’hypothèse d’*ergodicité* c’est-à-dire que la moyenne d’ensemble (au sens statistique) est égale à la moyenne du signal sur un temps  $T$  long comparé à toutes ses échelles de variation temporelle mais toutefois inférieur à l’échelle de temps macroscopique de l’écoulement (par exemple  $T <$  temps de déclin).

$$\overline{v_i(\vec{r}, t)} = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} v_i(\vec{r}, t') dt'.$$

On notera  $v_i = U_i + u_i$  où  $U_i = \overline{v_i}$  sera la valeur moyenne et  $u_i$  la quantité fluctuante de valeur moyenne nulle. De même pour la pression on pourra définir sa valeur moyenne et sa partie fluctuante

par  $p = P + p'$  où  $P = \bar{p}$

Par exemple pour un fluide incompressible on a :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{U} + \operatorname{div} \vec{u} = 0$$

soit en prenant la moyenne de cette équation :

$$\overline{\operatorname{div} \vec{v}} = \overline{\operatorname{div} \vec{U}} + \overline{\operatorname{div} \vec{u}} = \operatorname{div} \overline{\vec{U}} + \operatorname{div} \overline{\vec{u}} = 0.$$

Comme par définition  $\overline{\vec{U}} = \vec{U}$  et  $\overline{\vec{u}} = 0$  il vient :

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0$$

et donc par voie de conséquence  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  également. L'écoulement moyen et l'écoulement fluctuant sont tous les deux des champs de divergence nulle.

### 15.2.2 Equations de la turbulence

Nous utiliserons les notations tensorielles et notamment la convention d'Einstein de sommation implicite des indices redoublés. Décomposons les quantités en leur valeur moyenne et la partie fluctuante :

$$v_i = U_i + u_i \text{ avec } \overline{u_i} = 0 \text{ et } \overline{U_i} = U_i.$$

Reportons dans l'équation de Navier-Stokes écrite sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial t} + (U_j + u_j) \frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(U_i + u_i)}{\partial x_j^2}.$$

En prenant la moyenne d'ensemble de cette équation il vient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}. \quad (15.1)$$

Cette équation décrit la dynamique de la vitesse moyenne  $U_i$ , elle est parfois appelée équation de Reynolds. Elle est identique à l'équation de Navier-Stokes à un terme près qui peut s'écrire :  $\overline{u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i} u_j)$  car  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \operatorname{div}(\vec{u}) = 0$ .

Ce terme est en général inconnu. Il représente la rétroaction des fluctuations de vitesse sur l'écoulement moyen. C'est à cause de lui que le profil turbulent est en général très différent du profil laminaire (cas d'un écoulement en conduite ou de la couche limite turbulente).

Si l'on fait une moyenne temporelle au lieu d'une moyenne d'ensemble on peut retrouver la même équation à condition d'avoir une nette séparation des échelles temporelles. Le temps  $T$  sur lequel on calcule la moyenne doit être à la fois grand devant les échelles temporelles des fluctuations mais petit devant le temps de l'instationnarité de l'écoulement moyen (qui intervient dans le terme  $\frac{\partial U_i}{\partial t}$ ).

### 15.2.3 Le tenseur de Reynolds

On réécrit souvent l'équation de Reynolds (Equ. 15.1) sous la forme :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right).$$

Le terme  $\eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  peut se réécrire comme  $\sigma'_{ij} = \eta \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$  sans modifier l'équation précédente puisque  $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{U} = 0$ . Ce terme est donc le tenseur des contraintes visqueuses de l'écoulement moyen (voir définition au § 9.3 page 103) et le terme  $\tau_{ij} = -\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$  est appelé le **tenseur de Reynolds** (ou les contraintes de Reynolds). Ce tenseur est lui aussi symétrique. La divergence de ce tenseur correspond aussi à une diffusion de la quantité de mouvement par la turbulence. Ce terme est souvent dominant vis-à-vis des contraintes visqueuses calculées avec la valeur moyenne  $\sigma'_{ij}$ .

Si les signaux de fluctuations ne sont pas corrélés  $\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_i \bar{u}_j = 0$ . Si par exemple on trouve en un point  $\bar{u}_i \bar{u}_j < 0$  cela veut dire que lorsque  $u_i$  est positif, en moyenne  $u_j$  est négatif, et vice-versa. Les signaux de fluctuations sont alors corrélés.

Propriétés du tenseur de Reynolds :

- L'équation de Navier-Stokes étant une équation locale il convient de calculer le terme  $-\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$  en chaque point.
- Par sa définition le tenseur de Reynolds est un tenseur symétrique :  $-\rho \bar{u}_i \bar{u}_j = -\rho \bar{u}_j \bar{u}_i$ .
- Le tenseur de Reynolds étant symétrique, il est diagonalisable dans une base locale ( $\bar{u}_j \bar{u}_i = 0$  si  $i \neq j$ ). Si la turbulence est en plus isotrope le tenseur devient proportionnel au tenseur identité localement. Si la turbulence est en plus homogène ce résultat est vrai partout.

*Démonstration* : soit deux valeurs instantanées  $u_i$  et  $u_j$  avec  $i \neq j$ . En exprimant les deux vecteurs  $\vec{e}_i$  et  $\vec{e}_j$  dans un repère tourné de  $45^\circ$  on peut écrire :  $u_i = \frac{\sqrt{2}}{2}(u' - v')$  et  $u_j = \frac{\sqrt{2}}{2}(u' + v')$ . Donc  $\bar{u}_i \bar{u}_j = \frac{1}{2}(\bar{u}'^2 - \bar{v}'^2)$ . Si l'écoulement est isotrope on a  $\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2$  et par conséquent  $\bar{u}_i \bar{u}_j = 0$ .

En conclusion, dans une turbulence isotrope le tenseur de Reynolds ne contient plus qu'un terme mais qui en général dépend du temps et du point considéré. Dans une turbulence stationnaire, homogène et isotrope (TSHI, voir §15.4) on a donc  $\tau_{ij} = a \delta_{ij}$  et la divergence de ce tenseur est nul. Il n'y a plus rétroaction de la turbulence sur l'écoulement moyen, mais celui-ci est forcément très simple pour une turbulence TSHI.

**Signe de  $-\bar{u}_i \bar{u}_j$**  :

En général les composantes  $-\bar{u}_i \bar{u}_j$  ont le même signe que  $\sigma'_{ij}$  la composante correspondante du tenseur des contraintes visqueuses car  $-\rho \bar{u}_i \bar{u}_j$  est un terme de diffusion. Prenons par exemple un profil continu d'écoulement avec  $\frac{\partial U}{\partial y}$  positif. Soit  $u$  et  $v$  les termes fluctuants selon  $Ox$  et  $Oy$ . Si  $v$  est positif une particule fluide va se déplacer vers le haut et se retrouve donc aller moins vite que les particules environnantes ( $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$ ). Du coup son  $u$  local sera négatif et  $u_x u_y < 0$ . On peut faire le même raisonnement avec la même conclusion si  $v$  est négatif. Il faut noter la grande similitude avec la description microscopique de l'origine de la viscosité. Ici ce sont les fluctuations turbulentes qui font diffuser la quantité de mouvement transverse.

### Le problème de la fermeture des équations de la turbulence

Un ingénieur est généralement intéressé par la connaissance de l'écoulement moyen et il préfère éviter de calculer le tenseur de Reynolds car calculer ce tenseur de rang deux fait intervenir le tenseur de rang trois  $-\rho \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k$ , qui lui-même se calcule par le tenseur de rang 4, etc. C'est ce que l'on appelle le problème de fermeture des équations de la turbulence. Les approches classiques sont soit de décrire qu'à l'ordre  $n$  le tenseur de Reynolds prend une forme simple que l'on postule, soit de prendre directement une *modélisation raisonnable* du tenseur de rang 2. On peut citer par exemple le

modèle de la **longueur de mélange** ou le **modèle  $k - \epsilon$**  où  $k$  représente l'énergie turbulente  $\frac{1}{2}\overline{u_i u_i}$  et  $\epsilon$  la dissipation d'énergie.

On définit parfois la *viscosité turbulente* en écrivant :

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u_i u_j} = \rho \nu_{Turb} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Le terme  $\nu_{Turb}$  a bien les dimensions d'une viscosité mais ce n'est pas une propriété du fluide mais une propriété de l'écoulement ! En particulier  $\nu_{Turb}$  peut dépendre du point considéré (et parfois du temps).

#### 15.2.4 L'apport de la simulation numérique

La turbulence développée fait intervenir beaucoup d'échelles spatiales et temporelles. La simulation numérique directe (DNS en anglais) de l'équation de Navier-Stokes reste donc toujours un défi malgré l'augmentation de la puissance de calcul. Les plus gros ordinateurs mondiaux passent une grande partie de leur temps à calculer des écoulements turbulents. Les records mondiaux actuels viennent d'atteindre des Reynolds de  $10^6$ . Pour aller plus loin, ou calculer plus vite ou avoir moins de données à traiter on a recours à des modélisations de la turbulence, par exemple les méthodes LES (Large eddy simulation) ou RANS (Random-averaged Navier-Stokes).

#### 15.2.5 Mesures des vitesses et des fonctions de corrélation

Pour mesurer les vitesses on utilise tout type de vélocimétrie, mais par leur dynamique temporelle, certains appareils correspondent mieux à la mesure des vitesses moyennes et d'autres à l'étude des fluctuations.

On peut citer :

- le tube de Pitot avec un temps de réaction de l'ordre du dixième de seconde ou plus,
- l'anémométrie laser une ou plusieurs composantes de vitesse avec une fréquence d'échantillonnage maximum de 10 kHz,
- la vélocimétrie ultrasonore (128 ou 256 points de mesure sur une ligne),
- la PIV (vélocimétrie par image de particules) avec 200200 points de mesure quelques centaines de fois par seconde,
- le fils chaud permettant la mesure en un point avec les meilleures fréquences temporelles (jusqu'à 1 MHz !).

On définit les *fonctions de corrélation* des vitesses en deux points par  $\overline{u_i(\vec{r}_1, t_1) u_j(\vec{r}_2, t_2)}$ . Dans le cas  $r_1 = r_2$  et  $t_1 = t_2$  cette fonction est le tenseur de Reynolds. On peut définir des corrélations spatiales (corrélation entre deux points au même instant,  $t_1 = t_2$ ), par exemple des corrélations longitudinales ou transverse. Elles peuvent donner une idée de la taille des structures spatiales (tourbillons) observés. On parle de *structures* ou de tourbillons localisés. On définit aussi l'autocorrélation ou corrélation temporelle simple, par exemple  $\overline{u_x(t) u_x(t + \tau)}$ . Elle donne une idée des échelles de temps caractéristiques de l'écoulement.

#### 15.2.6 Notion de densité de probabilité (PDF)

Pour toute fonction aléatoire continue on définit la fonction densité de probabilité (*Probability Density Function* en anglais, abrégé en PDF)  $P$  tel que  $P(u_i) du_i$  soit la probabilité que la composante  $i$  de la vitesse soit comprise entre  $u_i$  et  $u_i + du_i$ .

On peut aussi définir des probabilités croisées plus complexes, par exemple  $P(u_i(\vec{r}_1, t_1), u_j(\vec{r}_2, t_2))$  à différents instants, différents endroits et différentes composantes. On peut même coupler des composantes de  $\vec{u}$  et la pression en un point !

### 15.2.7 L'hypothèse de Taylor

S'il existe un fort écoulement moyen de direction constante  $\vec{U}_0$ , on peut imaginer que les structures de la turbulence sont advectées par l'écoulement moyen plus vite qu'elles n'évoluent. Alors la mesure en un point en fonction du temps ressemblera à la mesure spatiale à un instant donné. Supposer que ces deux quantités sont égales c'est faire *l'hypothèse de Taylor*. Par exemple pour la fonction d'autocorrélation on aura :

$$f(\tau) = \overline{u_x(0, t) u_x(0, t + \tau)} = \overline{u_x(0, t) u_x(0, t + \frac{\Delta x}{U_0})} \approx \overline{u_x(0, t) u_x(-U_0 \tau, t)} = f(\Delta x),$$

où  $\tau = \frac{\Delta x}{U_0}$ .

## 15.3 La couche limite turbulente

Nous avons vu au chapitre sur la couche limite laminaire que celle-ci pouvait devenir instable et donner lieu à une couche limite turbulente (voir § 11.6 page 143).

Cette couche limite turbulente est observée si le nombre de Reynolds transverse calculé avec l'épaisseur de la couche limite laminaire  $Re_y = U_e \delta / \nu$  est suffisamment grand :

$$Re_y = U_e \delta / \nu = \sqrt{Re_x}.$$

Le profil de vitesse moyenne dans une couche limite turbulente est plus arrondi que dans une couche limite laminaire. On trouve en général un profil de vitesse logarithmique (figure 15.3) :

$$\bar{u}/u^* = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{y}{y_0} \right) \approx 2,5 \ln \left( \frac{yu^*}{\nu} \right) + 5.$$

La vitesse  $u^*$  s'appelle la vitesse de frottement. Elle représente une échelle de vitesse caractéristique des fluctuations turbulentes et elle est définie par  $\tau^* = \rho u^{*2}$  où  $\tau^*$  est la contrainte moyenne mesurée en paroi. La constante  $\kappa \approx 0,41$  s'appelle la constante de von Kármán et  $y_0$  est une hauteur typique caractérisant les rugosités de la paroi.

Pour une justification physique de l'existence d'une zone logarithmique on pourra consulter le chapitre Turbulence de la Ref. [25].

## 15.4 La turbulence stationnaire, homogène et isotrope (TSHI)

Le modèle de la TSHI est un modèle idéal et simplifié, un peu comme la théorie des gaz parfaits. C'est dans certains cas une bonne approximation de premier ordre. L'analyse est alors basée sur l'hypothèse d'une isotropie totale à petite comme à grande échelles. Elle suppose de plus que ces petites et grandes échelles sont très séparées.

La théorie de Kolmogorov (datant de 1941 et donc appelée théorie K41 par les spécialistes) que nous allons présenter ne tient pas compte des phénomènes possibles d'intermittence. C'est-à-dire que l'on néglige le fait que l'énergie est souvent dissipée de façon inhomogène dans l'espace et dans le temps, et plutôt dans de petites régions très actives.

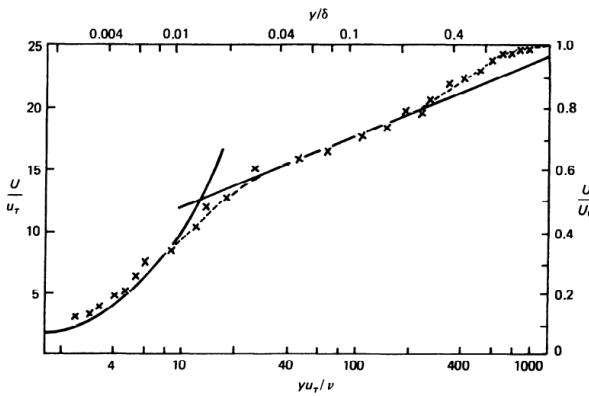


FIGURE 15.4 – Mesure du profil adimensionné de vitesse dans une couche limite turbulente. On peut y voir la sous-couche visqueuse et la partie logarithmique. D’après [41] p. 343

#### 15.4.1 Spectre de la turbulence

Soit  $e(t)$  l’énergie cinétique instantanée par unité de masse calculée sur la composante fluctuante du champ de vitesse. On a :  $e(t) = \frac{1}{2} \vec{u}^2 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} u_i^2$ . On peut définir la densité d’énergie moyenne par :

$$\bar{e} = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = \frac{1}{2} \overline{\vec{u}^2} = \frac{3}{2} \overline{u_1^2}.$$

En prenant la moyenne spatiale et en calculant sa transformée de Fourier (souvent par l’algorithme FFT, pour Fast Fourier Transform) du signal temporel de vitesse et en utilisant l’hypothèse de Taylor on obtient la densité spectrale d’énergie  $E(k)$  tel que :

$$\bar{e} = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = \int_0^\infty E(k) dk. \quad (15.2)$$

$E(k) dk$  est l’énergie contenue entre les nombres d’onde spatiaux  $k$  et  $k + dk$ .

#### 15.4.2 Quelques définitions :

- Echelle de Kolmogorov : Plus petite échelle  $\eta$  de la turbulence à laquelle l’énergie est dissipée. Par définition le nombre de Reynolds construit sur l’incrément de vitesse à l’échelle  $\eta$  est égal à 1.
- Echelle d’ injection : Taille caractéristique  $L$  à laquelle l’énergie est apportée à l’écoulement.
- Taux de turbulence d’un écoulement : c’est le rapport entre la valeur quadratique moyenne de la vitesse fluctuante et la vitesse moyenne :  $\sqrt{\overline{u^2}} / \overline{U}$ . Ce taux sert par exemple à caractériser la qualité d’une soufflerie. Un taux de turbulence de 5 % est considéré comme déjà assez faible.

#### 15.4.3 Evidence de la cascade d’énergie.

Comme nous l’avons déjà mentionné, si l’on observe le sillage d’un bateau par exemple une estimation rapide du temps de dissipation directe de l’énergie pour des tourbillons de l’ordre du mètre donne un temps de dissipation  $L^2 / \nu$  de l’ordre de 100 jours ! Ce temps n’est pas réaliste car le fluide revient au repos en quelques minutes ou dizaines de minutes. Il faut donc en conclure que l’énergie

des gros tourbillons est transférée à de plus petites échelles où elle est dissipée efficacement par la viscosité (figure 15.5). D'où l'idée d'une cascade d'énergie entre l'échelle d'injection de l'énergie,  $L$ , et l'échelle de dissipation (ou échelle de Kolmogorov),  $\eta$ , l'énergie passant continûment à travers toutes les échelles spatiales intermédiaires. Attention à ne pas confondre ici cette échelle de longueur traditionnellement notée  $\eta$  avec la viscosité dynamique du fluide. Les mécanismes possibles de ce transfert d'énergie sont les instabilités (par exemple l'instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz) et l'étirement axial de la vorticité. Rappelons que ce dernier mécanisme nécessite un écoulement tri-dimensionnel.

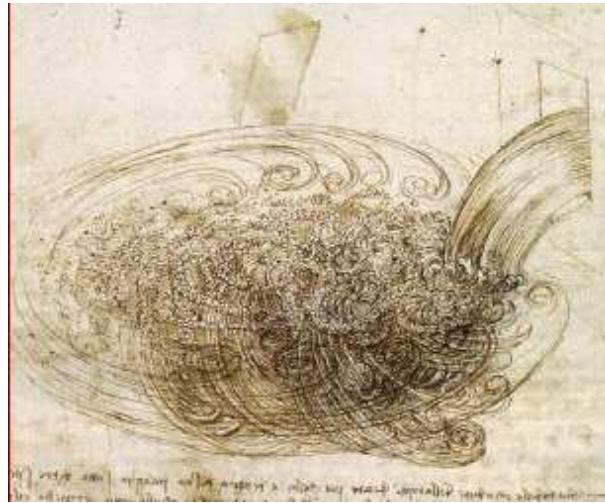


FIGURE 15.5 – Dessin de Léonard de Vinci illustrant la notion de cascade d'énergie.

- **Hypothèse :** Il existe entre les deux échelles  $L$  et  $\eta$  une gamme d'échelles où les propriétés physiques sont indépendantes de  $L$  et de la viscosité  $\nu$  ( $\nu$  n'intervenant qu'aux petites échelles). Grâce à cette hypothèse, l'analyse dimensionnelle va nous donner des résultats intéressants.

- **Incréments de vitesse :** On s'intéresse aux incrémentations spatiales de vitesse fluctuante définis par :

$$\overrightarrow{\Delta u}(\vec{r}) = \overrightarrow{u}(\vec{X} + \vec{r}) - \overrightarrow{u}(\vec{X}).$$

(On peut aussi faire une différence temporelle si on utilise l'hypothèse de Taylor.)

Appelons  $\epsilon$  la puissance (énergie par unité de temps) qui transite par unité de masse de l'échelle  $r$  aux échelles plus petites. Si l'échelle  $r$  appartient aux échelles inertielles ( $L \gg r \gg \eta$ ) alors la statistique de  $\overrightarrow{\Delta u}(\vec{r})$  ne peut dépendre que de  $\epsilon$  et de  $r$  et pas de  $L$ ,  $\eta$  ou  $\nu$ . En particulier on peut écrire pour sa valeur quadratique moyenne :

$$\overline{\Delta u(r)^2} = f(\epsilon, r).$$

L'analyse dimensionnelle nous donne  $[\epsilon] = l^2 T^{-3}$  et donc si  $\overline{\Delta u(r)^2} = C_2 \epsilon^\alpha r^\beta$ . On trouve  $\alpha = \beta = 2/3$ . Soit :

$$\overline{\Delta u(r)^2} = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}.$$

$C_2$  est une constante sans dimension, de l'ordre de 1.

• **Echelle de Kolmogorov :** L'échelle de dissipation  $\eta$  ne doit dépendre que de  $\nu$  et de  $\epsilon$  et pas de l'échelle d'injection  $L$ . Du coup  $\eta = g(\epsilon, \nu)$ . L'analyse dimensionnelle donne alors :

$$\eta = \left[ \frac{\nu^3}{\epsilon} \right]^{1/4}.$$

(Le préfacteur numérique toujours possible par analyse dimensionnelle est pris ici égal à 1 par définition de l'échelle de Kolmogorov.)

On peut vérifier que le nombre de Reynolds associé à cette échelle est de l'ordre de 1. En effet  $Re_\eta = \frac{\eta \Delta u(\eta)}{\nu} = \sqrt{C_2}$ .

#### 15.4.4 Spectre de Kolmogorov :

En introduisant la densité d'énergie par mode  $E(k)$  (Eq. 15.2) et en supposant que cette énergie par mode ne peut dépendre dans la gamme inertie que de  $\epsilon$  et du nombre d'onde  $k$  on peut aussi écrire :  $E(k) = f(\epsilon, k) = C_K \epsilon^\alpha k^\beta$ . Par analyse dimensionnelle la seule solution est :

$$E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}.$$

La constante  $C_K$  est la constante universelle de Kolmogorov. Expérimentalement on trouve  $C_K \approx 1,5$ .

Cette loi du spectre de puissance en  $k^{-5/3}$  est assez bien vérifiée (sur plusieurs décades en  $k$ ) pour la turbulence stationnaire homogène isotrope *tri-dimensionnelle* (Figure 15.6). Par contre les cas de la turbulence bidimensionnelle (turbulence en rotation, fluide stratifié, simulation bidimensionnelle, ...) semblent s'en écarter nettement.

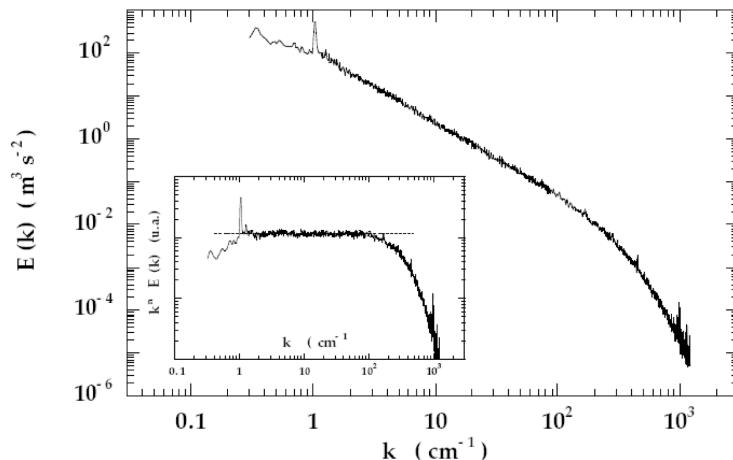


FIGURE 15.6 – Exemple de spectre unidimensionnel d'énergie d'une turbulence de grille obtenue dans l'hélium (Moisy, 2000) montrant la loi en  $k^{-5/3}$  prévue par l'analyse de Kolmogorov (1941) et la zone de dissipation visqueuse aux petites échelles (grand  $k$ ).

Bien que correctement vérifiée expérimentalement il existe d'importants doutes sur les fondements théoriques de cette théorie. La compréhension de la turbulence reste encore à ce jour un problème majeur de la physique.

## 15.5 Conclusion

Dans la réalité la turbulence n'est pas forcément stationnaire (turbulence en déclin par exemple) ou homogène (cas d'un sillage) ou isotrope (fluide stratifié par exemple). On ne devrait donc peut-être pas dire la turbulence mais... les turbulences !

Pour en savoir plus :

- [3] C. Bailly and G. Comte-Bellot. Turbulence, CNRS éditions. Sciences et techniques de l'ingénieur, 2003.
- [25] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. Hydrodynamique physique. EDP Sciences, 3ème édition, 2012.
- [29] M. Lesieur, La turbulence. Presses Universitaires de Grenoble, 1994. Simple, moderne et bien illustré.
- [23] U. Frisch. Turbulence. Cambridge University Press, 1995. Orienté vers la description statistique de la turbulence.
- [14] P.A. Davidson, Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers, Oxford University, 2004. Un livre très complet.
- Une vidéo : *Turbulence*, R.W. Stewart, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Turbulence.rm>



# Chapitre 16

## Formulaire

Marc Rabaud, version du 15 mars 2013

### Sommaire

---

16.1 Opérateurs différentiels . . . . .	205
16.2 Conservation de la masse et équation de Navier–Stokes . . . . .	208
Références . . . . .	213

---

### 16.1 Opérateurs différentiels

• Relations usuelles :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{\nabla} U) &= \Delta U \\ \operatorname{div}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\nabla} U) &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A} \\ \vec{\nabla}(UW) &= U \vec{\nabla} W + W \vec{\nabla} U \\ \operatorname{div}(U \vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} U \\ \vec{\operatorname{rot}}(U \vec{A}) &= \vec{\nabla} U \wedge \vec{A} + U \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \\ \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \\ \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} \\ \vec{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}\end{aligned}$$

• Relations intégrales :

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} &= \iint_{S(C)} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot \vec{dS} && \text{(théorème de STOKES)} \\ \oint_C U \vec{dl} &= - \iint_{S(C)} \vec{\nabla} U \wedge \vec{dS}\end{aligned}$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A} dV \quad (\text{théorème de GREEN–OSTROGRADSKY})$$

$$\oint_S U d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \vec{\nabla} U dV$$

$$\oint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} = - \iiint_{V(S)} \vec{\operatorname{rot}}(\vec{A}) dV$$

$$\oint_S (U \vec{\nabla} W - W \vec{\nabla} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(S)} (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

• Théorème de LEIBNITZ :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

• Théorème du transport de REYNOLDS :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \left( f \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dV$$

• Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla}(U) = \vec{\nabla}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

• Coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

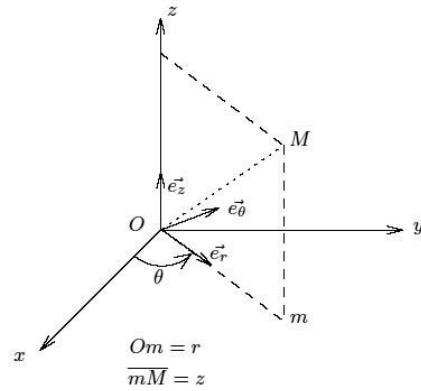


FIGURE 16.1 – Notations utilisées dans le système des coordonnées cylindriques \$(r, \theta, z)\$

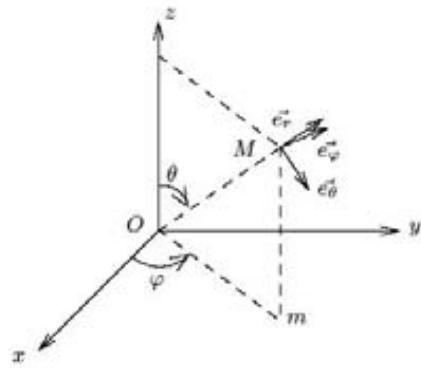


FIGURE 16.2 – Notations utilisées dans le système des coordonnées sphériques \$(r, \theta, \varphi)\$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left( \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left( \Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

•Coordonnées sphériques :

$$\vec{\nabla}(U) = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rU) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\ \vec{\Delta}(\vec{A}) &= \vec{\nabla}^2 \vec{A} = (\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}) \vec{e}_r \\ &+ (\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}) \vec{e}_\theta + (\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}) \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

## 16.2 Conservation de la masse et équation de Navier–Stokes

Pour un fluide newtonien et incompressible on a :

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_m + \nu \vec{\nabla}^2 u$$

- En coordonnées cartésiennes avec  $\vec{u} = (u, v, w)$  :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sur l'axe  $x$

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe  $y$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe  $z$

$$\rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

- En coordonnées cylindriques avec  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

sur l'axe  $r$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe  $\theta$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe  $z$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

• En coordonnées sphériques avec  $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$  :

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

sur l'axe  $r$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_r)}{\partial r^2} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] & \end{aligned}$$

sur l'axe  $\theta$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta \\ + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\theta)}{\partial r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] & \end{aligned}$$

sur l'axe  $\varphi$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi \\ + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r u_\varphi)}{\partial r^2} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] & \end{aligned}$$



# Lectures conseillées

*En français :*

- [19] D. Salin et J. Martin, *La mécanique des Fluides*, Nathan Université. Un livre simple et bref d'introduction à la mécanique des fluides.
- [20] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Ce que disent les fluides*, Belin, Pour La Science, 2005. Un livre où, sous le principe de double pages Photo + Textes, sont illustrés des aspects de la mécanique des fluides que l'on peut rencontrer dans la vie courante.
- [25] E. Guyon, J.-P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, 3ème édition, EDP Sciences, 2012. La référence en français avec une approche de physicien sur la mécanique des fluides.
- [7] S. Candel, *Mécanique des fluides*, Dunod.
- [18] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions de Moscou.
- [44] W. Wick, *Gouttes d'eau*, Editions Millepages. Livre de photographies.
- [29] M. Lesieur, *La turbulence*, Presses Universitaires de Grenoble.
- [15] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin, 2006.
- [31] P. Manneville, *Instabilités, Chaos et Turbulence*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2004.

*En anglais :*

- [41] D.J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, Oxford Science Publication, 1988.
- [26] P.K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, 1990.
- [17] Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, 1982.
- [1] D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford, 1990.
- [23] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [32] Th. A. McMahon and J.T. Bonner, *On Size and Life*, Scientific American Library, 1983.
- [16] P.G. Drazin, *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, 2002.
- [8] B. Castaing, *An introduction to hydrodynamics*, Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities, Cambridge University Press, pages 25 à 79 (1998).
- [14] P.A. Davidson, *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University, 2004.
- [13] O. Darrigol, *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University, 2005.

*CD conseillés :*

- [22] G. Homsy *et al.*, *Muti-Media Fluid Mechanics*, CD-Rom Cambridge University Press, 2002.
- CD (images et films) sur les phénomènes interfaciaux dans le livre [15].

*Films conseillés :*

Toute une série de films du « National Committee for Fluid Mechanics Films » (NCFMF), anciens mais excellents, sont maintenant disponibles en ligne sur le site du MIT :

<http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.

# Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990.
- [2] D. F. Young B. R. Munson and T. H. Okiishi. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. Wiley, NY, 1990.
- [3] C. Bailly and G. Comte-Bellot. Turbulence cnrs éditions. *Sciences et techniques de l'ingénieur*, 2003.
- [4] G. K. Batchelor. *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] P. Bergé, Y. Pomeau, and C. Vidal. *Ordre dans le chaos*. Hermann, 1998.
- [6] B. Cabane and S. Hénon. *Liquides - Solutions, dispersions, émulsions, gels*. Belin, Paris, 2003.
- [7] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- [8] B. Castaing. *An introduction to hydrodynamics*, pages 25–79. Cambridge University Press, 1998.
- [9] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover, New-York, 1961.
- [10] François Charru. *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences, 2007.
- [11] Raymond Comelet. *Mécanique expérimentale des fluides, tomes 1, 2 et 3*. Editions Masson, 1979.
- [12] Benoit Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, 1994.
- [13] Olivier Darrigol. *Worlds of Flow : A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*. Oxford University, 2005.
- [14] P.A. Davidson. *Turbulence An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University, 2004.
- [15] P.-G. de Gennes et F. Brochard-Wyart et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [16] P. G. Drazin. *Introduction to Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2002.
- [17] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion*. Parabolic Press, 1982.
- [18] L. Landau et E. Lifchitz. *Elasticité*. Editions de Moscou, 1989.
- [19] D. Salin et J. Martin. *La mécanique des Fluides*. Nathan Université, 1997.
- [20] E. Guyon J.-P. Hulin et L. Petit. *Ce que disent les fluides*. Belin, Pour la science, 2005.
- [21] M. Peyrard et T. Dauxois. *Physique des Solitons*. EDP Sciences, 2004.
- [22] G. Homsy *et al.* *Multi-Media Fluid Mechanics, second edition*. DVD-Rom Cambridge University Press, 2008.
- [23] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995.
- [24] H.P. Greenspan. *The theory of rotating fluids*. Brekelen Press, 1990.

- [25] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 3ème edition, 2012.
- [26] P.K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [27] Sir H. Lamb. *Hydrodynamics*. Sixth edition, Cambridge University Press, 1995.
- [28] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique des fluides*. Editions de Moscou, 1989.
- [29] M. Lesieur. *La turbulence*. Presses Universitaires de Grenoble, 1994.
- [30] J. Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge University Press, 1978.
- [31] Paul Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l'Ecole polytechnique, 2004.
- [32] Th. A. McMahon and J. T. Bonner. *On Size and Life*. Scientific American Library, 1983.
- [33] A.R. Paterson. *A first course in fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1983.
- [34] Joseph Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer, Second Edition.
- [35] E.M. Purcell. Life at low reynolds numbers. *Am. J. Phys.*, 45 :3–11, 1977.
- [36] Michel Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.
- [37] Maurice Rossi. Of vortices and vortical layers : an overview. In A. Maurel and P. Petitjeans, editors, *Vortex Structure and Dynamics*, Lecture Notes in Physics, pages 40–123. Springer Verlag, 2000.
- [38] H. Schlichting. *Boundary Layer Theory*. Springer, 8th edition, 2000.
- [39] Arnold Sommerfeld. *Mechanics. Lectures on Theoretical Physics, Vol I*. Academic Press Inc., 1953.
- [40] D'Arcy Thompson. *Forme de croissance*. Edition du Seuil, 1994.
- [41] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. (second edition), Oxford University Press, 1988.
- [42] Luc Valentin. *L'Univers Mécanique*. Editions Hermann, 1997.
- [43] G.B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley and sons, 1974.
- [44] W. Wick. *Gouttes d'eau*. Editions Millepages, 1999.