

# Intégrales elliptiques et champ magnétique créé par une spire circulaire

par **Thierry PRÉ**  
Lycée Turgot - 75003 Paris  
thierry@pre.fr

## RÉSUMÉ

*Nous cherchons des expressions valables en tout point du champ magnétique créé par une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité constante. Ces expressions font intervenir des intégrales elliptiques. Nous montrons ensuite comment ces expressions peuvent être utilisées dans un logiciel de calcul symbolique pour tracer rapidement des lignes de champ dans des situations plus ou moins complexes.*

## INTRODUCTION

Si le champ magnétique créé par une spire de courant circulaire sur son axe est implicitement au programme de physique de PCSI (Physique, chimie, sciences de l'ingénieur), ce n'est plus le cas dès qu'on s'intéresse au champ en dehors de l'axe. Un exercice classique de PCSI permet de donner une approximation du champ près de l'axe par un calcul de flux magnétique sur une surface cylindrique et une approximation dipolaire permet de retrouver le champ loin de la distribution de courant.

Le calcul direct du champ, partout dans l'espace, est pourtant nécessaire dès qu'on cherche à tracer les lignes de champ d'une ou plusieurs spires, et à montrer comment évolue le champ lorsque la distribution de courant se rapproche d'un solénoïde.

Nous avons choisi de calculer le champ magnétique créé par une spire circulaire de courant en appliquant directement la loi de Biot-Savart, tel que peut le faire un étudiant de PCSI. Nous donnerons rapidement en annexe la méthode de calcul qui utilise le potentiel vecteur, qui n'est pas au programme de CPGE (Classes préparatoires aux grandes écoles) première année. Nous aboutirons à une expression faisant intervenir les intégrales elliptiques complètes. Il est évident que ce travail illustre la complémentarité avec le cours de mathématiques.

Nous utiliserons ensuite dans différentes situations, les nouvelles fonctionnalités du logiciel *Mathematica 7* qui permet, à partir d'une expression symbolique, de tracer des lignes de champ.

## 1. CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UNE SPIRE DE COURANT CIRCULAIRE

### 1.1. Notations

On s'intéresse donc au champ magnétique créé par une spire de courant circulaire, de rayon  $a$  et de centre  $O$  placée dans le plan  $(Oxy)$ . On cherche le champ magnétique en un point  $P$  qu'on prendra pour simplifier dans le plan  $(Oxz)$ . Ce point sera repéré dans ce plan par ses coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ . Le plan  $(Oxz)$  étant un plan d'antisymétrie de

la distribution de courant, le champ magnétique en P est dans ce plan et donc n'a pas de composante suivant Oy . Il ne reste donc plus qu'à calculer  $B_x$  (ou  $B_r$ ) et  $B_z$  .

En première année de CPGE, le potentiel vecteur n'étant pas au programme, nous avons donc effectué le calcul en utilisant la loi de Biot et Savart :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{QP}}{\|\vec{QP}\|^3}$  . Q est un point de la spire repéré par l'angle  $\phi$  et  $d\vec{\ell}$  un élément de circuit.

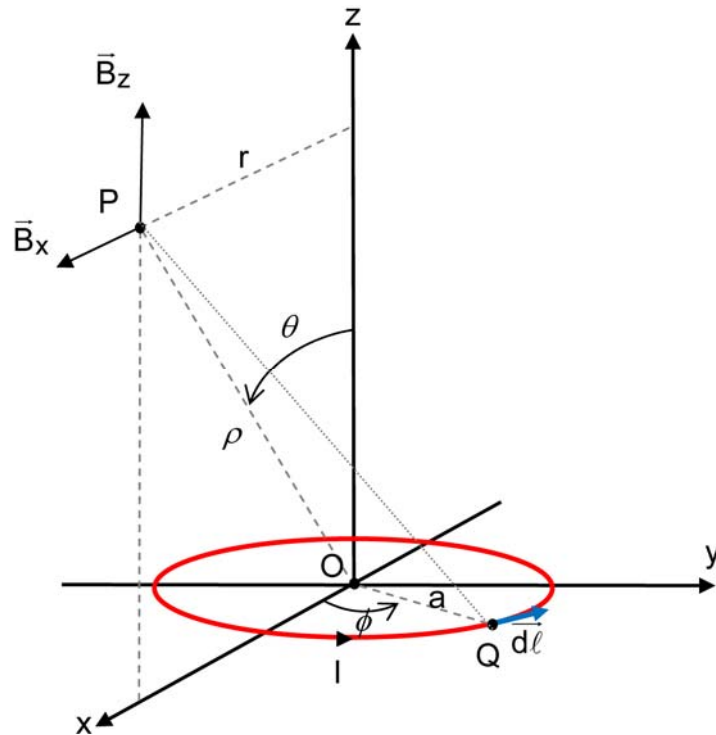


Figure 1

Avec ces notations, on a :

$$\begin{pmatrix} \vec{OP} \\ (\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \rho \sin \theta \\ 0 \\ \rho \cos \theta \end{vmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \vec{OQ} \\ (\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{QP} \\ (\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \rho \sin \theta - a \cos \phi \\ -a \sin \phi \\ \rho \cos \theta \end{vmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} d\vec{\ell} \\ (\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -a \sin \phi d\phi \\ a \cos \phi d\phi \\ 0 \end{vmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} d\vec{\ell} \wedge \vec{QP} \\ (\vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a \rho \cos \theta \cos \phi d\phi \\ a \rho \cos \theta \sin \phi d\phi \\ (a^2 - a \rho \sin \theta \cos \phi) d\phi \end{vmatrix} .$$

Puis :

$$\|\overline{QP}\|^3 = (\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi)^{\frac{3}{2}}.$$

Finalement :

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\rho \cos \theta \cos \phi d\phi}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \quad (1)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(a^2 - a\rho \sin \theta \cos \phi) d\phi}{(\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi)^{3/2}} \quad (2)$$

et :

$$B_x = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dB_x ; B_z = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} dB_z \quad (3)$$

## 1.2. Expression en fonction des intégrales elliptiques

On trouve dans la littérature [1] des expressions du champ en fonction des intégrales elliptiques complètes :

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \gamma}} \quad \text{et} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \gamma} d\gamma \quad (4)$$

Nous avons cherché à redémontrer ces formules. Pour cela, remarquons tout d'abord que :

$$\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi = \rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \left( 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right)$$

$$\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi = \rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta - 4a\rho \sin \theta \cos^2 \frac{\phi}{2}$$

$$\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi = (\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta) \left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right)$$

En posant :  $k^2 = \frac{4a\rho \sin \theta}{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta} = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}$ , on remarque que cette grandeur ne dépend que de la position du point P et ne dépend pas de Q (ou  $\phi$ ). On peut donc écrire (3) sous la forme :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\rho \cos \theta}{(\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\cos \phi d\phi}{\left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right)^{3/2}} \quad (5)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta)^{3/2}} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{(a - \rho \sin \theta \cos \phi) d\phi}{\left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right)^{3/2}} \quad (6)$$

Avec :  $z = \rho \cos \theta$  et  $r = \rho \sin \theta$ , on a :

$$\frac{a\rho \cos \theta}{(\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta)^{3/2}} = \frac{z \times k^2}{4 \times r \times [(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \quad (7)$$

et : 
$$\frac{a}{(\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta)^{3/2}} = \frac{k^2}{4 \times r \times [(a+r)^2 + z^2]^{1/2}} \quad (8)$$

Donc, on peut écrire (5) et (6) sous la forme :

$$B_x = \frac{\mu_0 I \times z \times k^2}{16\pi \times r} \times [(a+r)^2 + z^2]^{-1/2} \times \eta_1 \quad (9)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I \times k^2}{16\pi \times r} \times [(a+r)^2 + z^2]^{-1/2} \times \eta_2 \quad (10)$$

avec : 
$$\eta_1 = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\left(2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1\right) d\phi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}\right)^{3/2}} \quad (11)$$

et : 
$$\eta_2 = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\left(a - r \left(2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1\right)\right) d\phi}{\left(1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}\right)^{3/2}} \quad (12)$$

On intègre de  $\phi = 0$  à  $\phi = 2\pi$ , ce qui est la même chose que d'intégrer de  $\phi = -\pi$  à  $\phi = \pi$  vu la périodicité des fonctions à intégrer, puis un changement de variable :

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2}$ , nous donne finalement :

$$\eta_1 = 4 \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{(2\sin^2 x - 1) dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{3/2}} \quad (13)$$

et : 
$$\eta_2 = 4a \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{3/2}} - r \times \eta_1 \quad (14).$$

Nous montrerons en annexe que :

$$\eta_1 = 4 \left\{ -\frac{2}{k^2} K(k) + \frac{(2 - k^2)}{k^2(1 - k^2)} E(k) \right\} \quad \text{et} \quad \eta_2 = 4 \left\{ \frac{2r}{k^2} K(k) + \frac{(a+r)k^2 - 2r}{k^2(1 - k^2)} E(k) \right\},$$

ce qui, après quelques simplifications, nous donne :

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{r} \times [(a+r)^2 + z^2]^{-1/2} \times \left\{ -K(k) + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right\} \quad (15)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times [(a+r)^2 + z^2]^{-1/2} \times \left\{ K(k) + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E(k) \right\} \quad (16)$$

On remarque que pour un point de l'axe Oz :  $r = 0$  donc  $k = 0$ , et comme :  $K(0) = \pi/2$

et  $E(0) = \pi/2$ , on a :  $B_x = 0$  et  $B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$ , ce qui est un résultat bien connu.

## 2. UTILISATION DU LOGICIEL *MATHEMATICA* 7

### 2.1. Spire simple

Nous avons commencé par tracer la carte de champ magnétique d'une spire simple. Le logiciel *Mathematica* 7 offre la possibilité de tracer directement les lignes de champ d'un champ vectoriel<sup>1</sup> dont on donne les différentes composantes vectorielles. Il n'y a plus besoin de résoudre les équations différentielles de ces lignes de champ. Voici le résultat obtenu pour une spire (cf. figure 2).

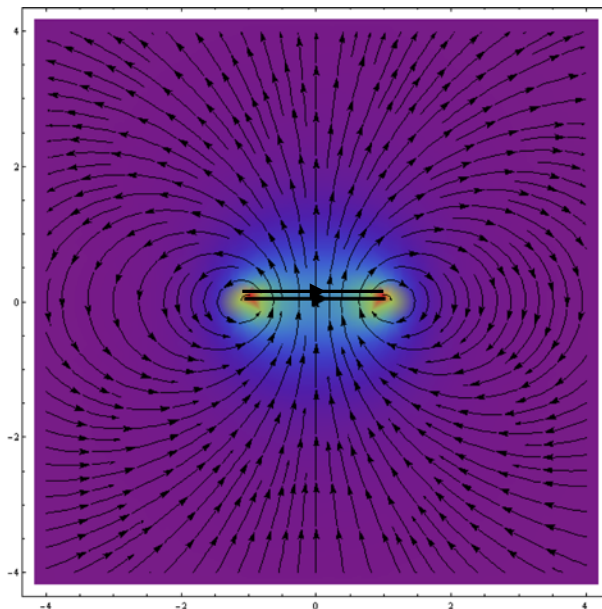


Figure 2

### 2.2. Passage de la spire au solénoïde

Nous pouvons maintenant utiliser les expressions précédentes pour obtenir le champ créé par deux, trois, quatre, cinq... spires de même axe, parcourues par la même intensité et régulièrement espacées.

Nous voyons progressivement se transformer les lignes de champ. À l'intérieur des spires, le champ devient de plus en plus uniforme. À l'extérieur, le champ évolue rapidement, surtout près des spires (cf. figure 3, page ci-après).

### 2.3. Configuration des bobines de Helmholtz

Nous pouvons également montrer graphiquement que la configuration des bobines de Helmholtz (deux spires de rayon  $a$  séparé d'une distance  $R = a$ ) est la configuration qui donne le champ le plus uniforme entre les deux spires (cf. figure 4, page ci-après).

---

<sup>1</sup> Commandes : StreamPlot et StreamDensityPlot

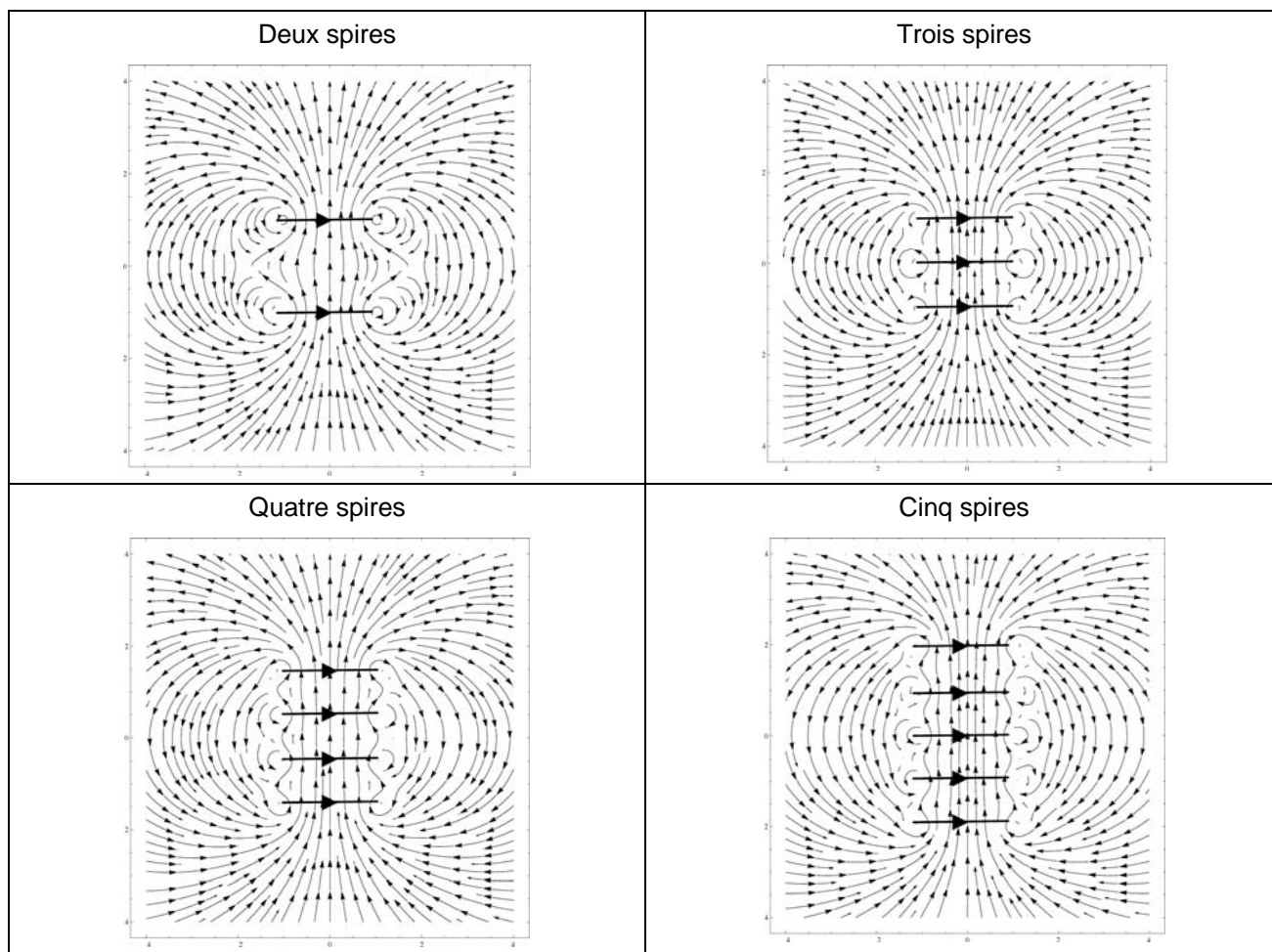


Figure 3

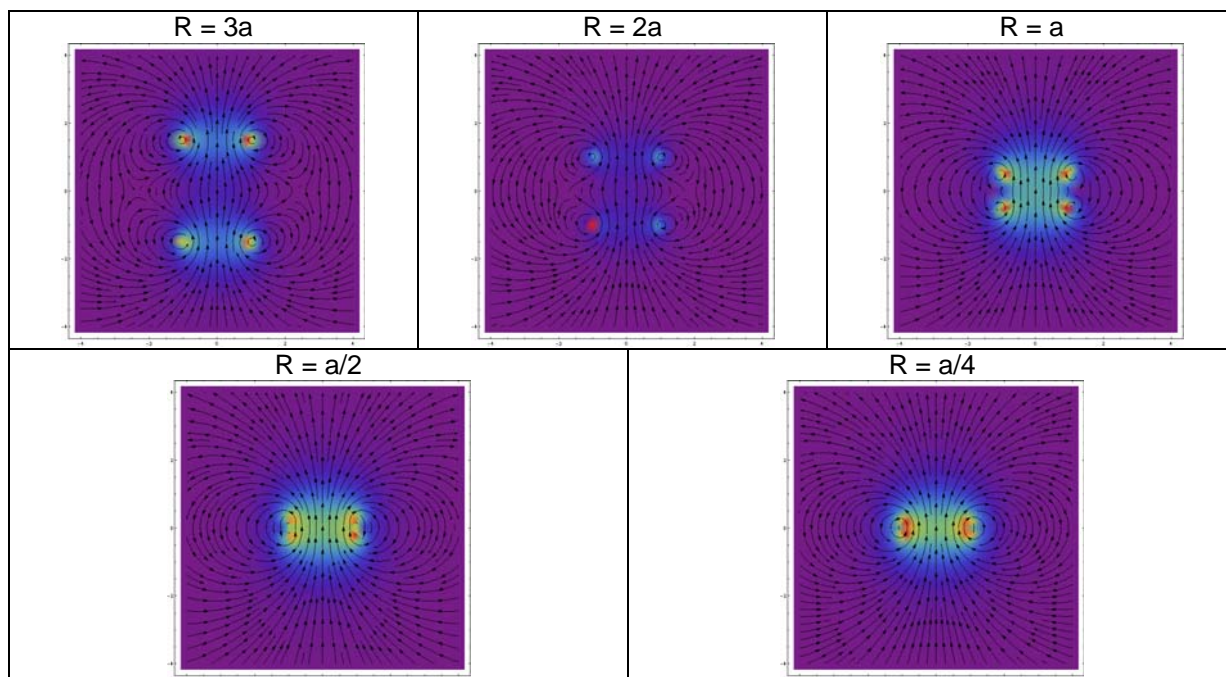


Figure 4

## 2.4. Autres configurations

Nous nous sommes « amusés » à étudier d'autres configurations...

- ♦ La configuration en bobines de Helmholtz inversées où le courant circule en sens contraire (cf. figure 5).

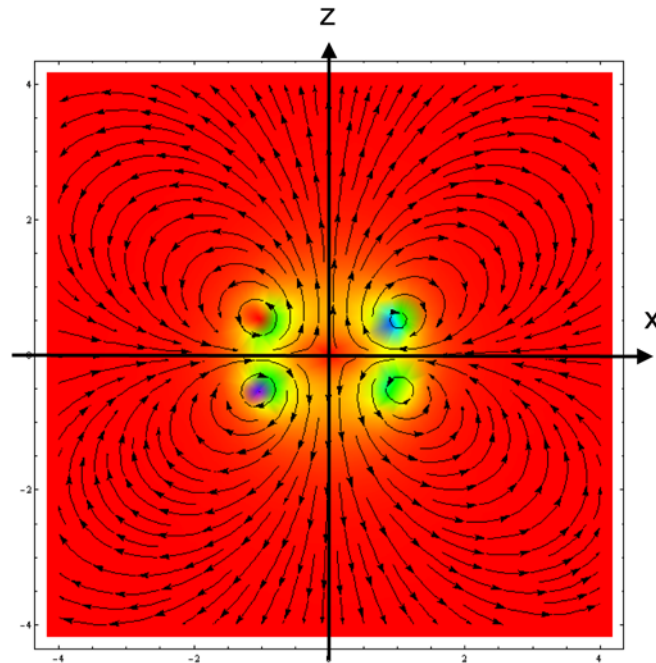


Figure 5

On retrouve la structure quadripolaire du champ et un champ nul au centre.

- ♦ Où le courant est doublé à chaque spire en allant du bas vers le haut (cf. figure 6).

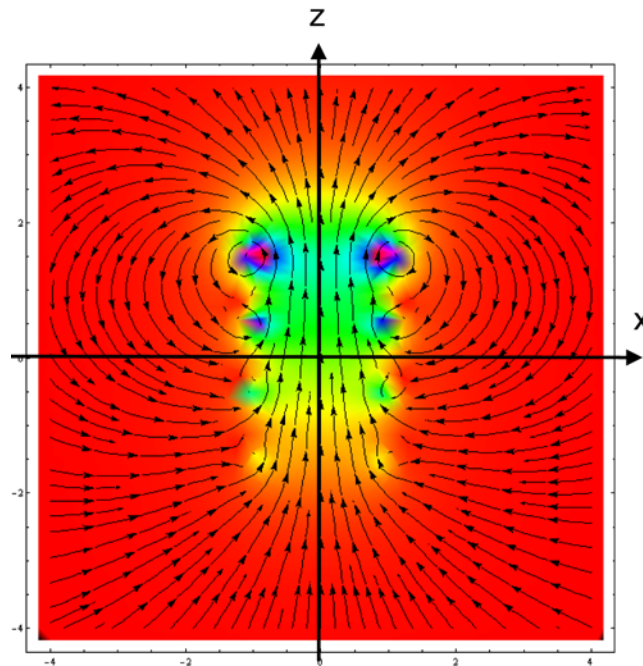


Figure 6



- ♦ Où le rayon des spires double en allant du bas vers le haut (*cf.* figure 7).

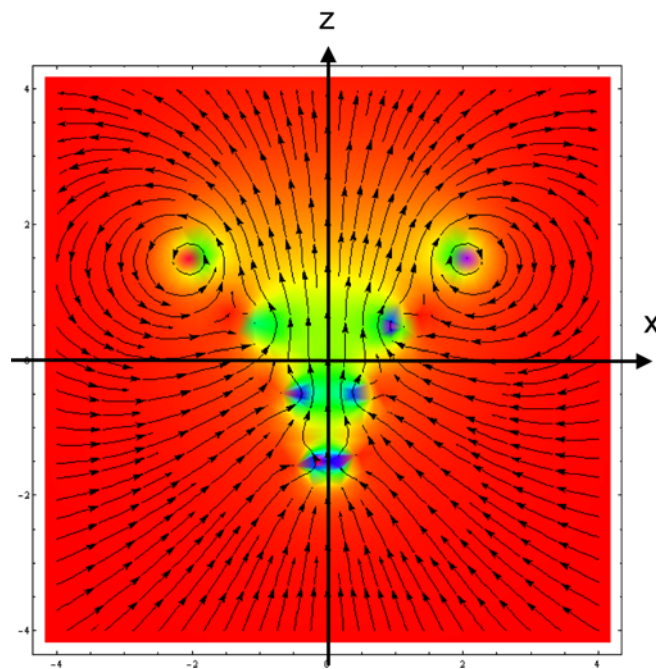


Figure 7

- ♦ Une configuration à quatre spires réparties uniformément sur un cercle (approximation d'un tore) (*cf.* figure 8).

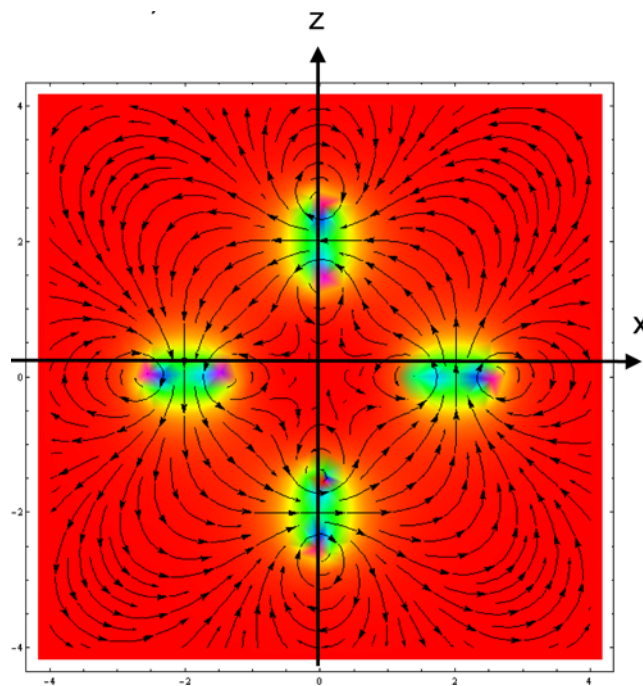


Figure 8



- ♦ Une configuration à huit spires réparties uniformément sur un cercle (approximation d'un tore) (cf. figure 9).

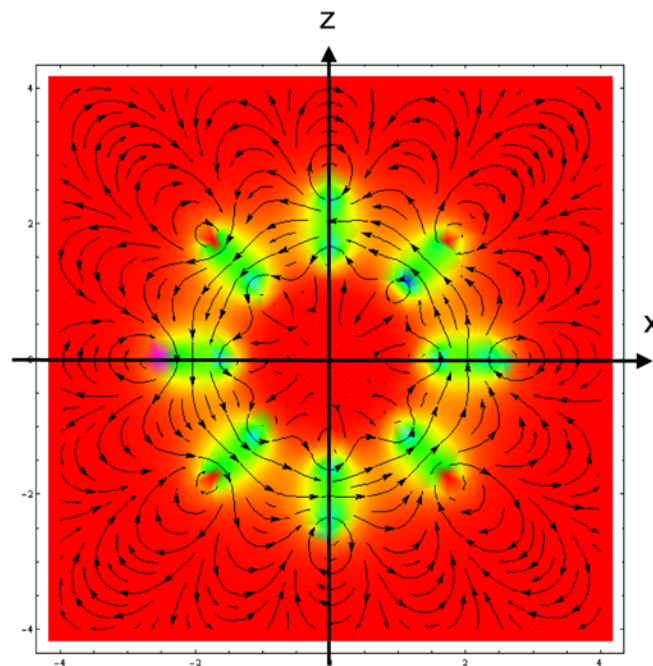


Figure 9

Le champ devient de plus en plus uniforme à l'intérieur du tore, au centre il est presque nul.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon collègue de mathématiques de PCSI : M. Guillaume HERVE pour son aide et ses encouragements précieux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] DURAND E. *Électrostatique et magnétostatique*. Masson, 1953.
- [2] BERNARD M. « Le champ magnétique des hélices ». *Bull. Un. Phys.*, mai-juin 1955, vol. 49, n° 422, p. 335-342.

## Annexe 1

Il nous semble important de préciser ces calculs qui sont tout à fait à la portée d'un étudiant de CPGE première année, mais que nous n'avons pas trouvés de façon détaillée dans la littérature.

Montrons que  $\mathcal{I}_1 = 4 \left\{ -\frac{2}{k^2} K(k) + \frac{(2-k^2)}{k^2(1-k^2)} E(k) \right\} :$

$$\mathcal{I}_1 = 4 \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{(2 \sin^2 x - 1) dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{3/2}} = 4 \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{\left( -\frac{2}{k^2} (1 - k^2 \sin^2 x) + \frac{2}{k^2} - 1 \right) dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{3/2}},$$

soit :

$$\mathcal{I}_1 = 4 \left\{ -\frac{2}{k^2} K(k) + \frac{(2-k^2)}{k^2} \mathcal{I}_3 \right\}$$

en posant :

$$\mathcal{I}_3 = \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{3/2}}$$

Nous montrerons dans l'annexe 2 que :

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{1-k^2} E(k).$$

Finalement :

$$\mathcal{I}_1 = 4 \left\{ -\frac{2}{k^2} K(k) + \frac{(2-k^2)}{k^2(1-k^2)} E(k) \right\}$$

Montrons que :

$$\mathcal{I}_2 = 4 \left\{ \frac{2r}{k^2} K(k) + \frac{(a+r)k^2 - 2r}{k^2(1-k^2)} E(k) \right\}$$

Nous avons :

$$\mathcal{I}_2 = 4a\mathcal{I}_3 - r \times \mathcal{I}_1 = 4a \times \frac{1}{1-k^2} E(k) - 4r \left\{ -\frac{2}{k^2} K(k) + \frac{(2-k^2)}{k^2(1-k^2)} E(k) \right\},$$

après simplification nous avons bien :

$$\mathcal{I}_2 = 4 \left\{ \frac{2r}{k^2} K(k) + \frac{(a+r)k^2 - 2r}{k^2(1-k^2)} E(k) \right\}.$$

## Annexe 2

Nous voulons montrer que :

$$I_3 = \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{dx}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{1-k^2} E(k).$$

Nous allons pour cela dériver :

$$f(x) = \frac{k^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$$

Soit 
$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{(k^2 - 2k^2 \sin^2 x + k^4 \sin^4 x)}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} = \left\{ \frac{k^2 - 1}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} + \frac{(1-k^2 \sin^2 x)^2}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} \right\}.$$

D'où : 
$$\frac{1}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{k^2 - 1} \frac{df(x)}{dx} - \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}{k^2 - 1}$$

Donc : 
$$I_3 = \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{dx}{(1-k^2 \sin^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{k^2 - 1} [f(x)]_{x=0}^{x=\pi/2} - \frac{1}{k^2 - 1} E(k) = \frac{1}{1-k^2} E(k)$$

## Annexe 3

### Calcul du champ à partir du potentiel vecteur

On calcule le potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{\ell}}{\|\vec{QP}\|}.$$

Soit avec :  $d\vec{\ell} = -a \sin \phi d\phi \vec{e}_x + a \cos \phi d\phi \vec{e}_y$  et  $\|\vec{QP}\| = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi}$  :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{-a \sin \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi}} \vec{e}_x + \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{a \cos \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi}} \vec{e}_y \right]$$

Or le potentiel vecteur a les propriétés d'un vecteur polaire, donc la première intégrale est nulle (pas de composantes dans le plan d'antisymétrie de la distribution de courant).

Pour la deuxième intégrale, on utilise :

$$\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi = (\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta) \left( 1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right)$$

avec :

$$k^2 = \frac{4a\rho \sin \theta}{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta} = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2},$$

donc :

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{a \cos \phi d\phi}{\sqrt{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \sin \theta \cos \phi}} \vec{e}_y = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta}} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\left( 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right) d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}} \vec{e}_y.$$

On effectue le changement de variable :

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2};$$

d'où :

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\left( 2 \cos^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right) d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}} \vec{e}_y = 4 \times \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{(2 \sin^2 x - 1) dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \vec{e}_y.$$

En remarquant que :

$$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \right)$$

et donc que :

$$4 \times \int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{(2 \sin^2 x - 1) dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \vec{e}_y = 4 \left\{ \frac{2}{k^2} (K(k) - E(k)) - K(k) \right\} \vec{e}_y$$

On obtient finalement en utilisant :

$$\frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta}} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{a}{r}}.$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + 2a\rho \sin \theta}} \times 4 \left\{ \frac{2}{k^2} (K(k) - E(k)) - K(k) \right\} \vec{e}_y$$

soit :

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \sqrt{\frac{a}{r}} \times \left\{ K(k) \left( \frac{2}{k} - k \right) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \vec{e}_y}$$

Pour calculer le champ magnétique, il faut maintenant appliquer l'opérateur rotationnel :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  par rapport aux coordonnées du point P en remarquant que  $\vec{e}_y$  joue le rôle du vecteur ortho radial en coordonnées cylindriques pour P :

$$\vec{B} = -\frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \vec{e}_z.$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier, en utilisant :

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k} \quad \text{et} \quad \frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$$

qu'on retrouve les expressions données plus haut pour  $\vec{B}$ .