



## Electromagnétisme

Jean-Marie Malherbe

### ► To cite this version:

| Jean-Marie Malherbe. Electromagnétisme . Licence. France. 2018. cel-01697221

HAL Id: cel-01697221

<https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01697221>

Submitted on 31 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## CPES 2 filière sciences

### *Electromagnétisme*

Enseignant: Jean-Marie.Malherbe@obspm.fr

### Cours

Champ scalaire

Champ vectoriel

Définition du champ électrique et du champ magnétique par leur action sur une charge

Charges et courant électriques

Electrostatique

Condensateur

Magnétostatique

Equations de Maxwell en régime variable

Régimes permanents dans un conducteur

Induction électromagnétique en ARQP

Ondes électromagnétiques dans le vide

Réflexion métallique des ondes et modes d'ondes

Réfraction et réflexion vitreuse des ondes ; milieux diélectriques

Ondes dans d'autres milieux

### Exercices corrigés

Analyse vectorielle

Mouvement des particules chargées

Electrostatique

Magnétostatique

Induction

Ondes

### Avertissement

Ce fascicule ne contient pas la totalité du cours de CPES 2, mais un extrait, correspondant aux cours et exercices du MOOC Electromagnétisme L2 de PSL dont le programme est voisin

<https://www.fun-mooc.fr/courses/OBSPM/62002/session01/about>

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## PLAN DU COURS

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

## SEMAINE 1

### **Introduction (I)**

I.I Présentation du cours et des enseignants

Présentation du cours

Plan du cours

Présentation des enseignants

I.I Structure du cours et navigation

Structure du cours

Navigation

Réalisation des exercices

Vidéo

Pages de la plateforme

Forum - Discussion

### **Analyse vectorielle A (AV-A)**

AV-A.0 Introduction

AV-A.I Champs et produits scalaires et vectoriels

Champs scalaire et vectoriel, et produit scalaire

Produit vectoriel

Exemple de champs scalaires

Exemples de champs vectoriels

AV-A.II Dérivées, différentielle, gradient et potentiel

Dérivées partielles et différentielle

Gradient

Exemple de gradient

Potentiel

## SEMAINE 2

### **Électromagnétisme A (ELM A)**

ELM-A.0 Introduction

ELM-A.I Force de Lorentz

Force de Lorentz

Orientation de la force magnétique

## ELM-A.II Travail et puissance

Travail et puissance de la force de Lorentz

Loi de conservation de l'énergie mécanique

Application : Le canon à électrons

## ELM-A.III Mouvement dans un champ électrique uniforme et constant

Équations horaires

Exemple

Application : Oscilloscope à écran cathodique

Application : Expérience de Millikan

## ELM-A.IV Mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant

Vitesse de dérive et vitesse de giration

Pulsation gyromagnétique et rayon de giration

Application : Effet de miroirs magnétiques

Application : Chambre à bulles

Application : Cyclotron et synchrotron

## SEMAINE 3

### ELM-A.V Équations horaires du mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant

Équations horaires

Application : Guidage par un champ magnétique

### ELM-A.VI Oscillateur harmonique dans un champ magnétique : effet Zeeman

Introduction

Équations horaires du mouvement

Écart de pulsations et mesure du champ magnétique à distance

Exemple de mesure du champ magnétique à distance

### ELM-A.VII Oscillateur harmonique excité par une onde électromagnétique

Effet d'une onde

Section efficace d'interaction matière-rayonnement

Application : Profil d'amortissement d'une raie en fréquence

Application : Exploration du profil des raies

Application : Exploration en altitude

## SEMAINE 4

### Analyse vectorielle B (AV B)

#### AV-B.0 Introduction

## AV B.I Opérateurs

Opérateur divergence

Exemples d'opérateur gradient et divergence

Opérateur rotationnel

Exemple de rotationnel

Opérateur Laplacien

## AV-B.II Coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Coordonnées cylindriques

Coordonnées sphériques

## AV-B.III Lignes de champs et lignes et surfaces équipotentielles

Lignes de champs

Lignes et surfaces équipotentielles

Exemple

## AV-B.IV Circulation et flux

Circulation

Flux à travers une surface fermée

Flux à travers une surface ouverte

## AV-B.V Théorèmes de Stokes et d'Ostrogradski

Théorème de Stokes

Théorème d'Ostrogradski

Exemple d'utilisation du théorème d'Ostrogradski

# SEMAINE 5

## Électromagnétisme B (ELM B)

### ELM-B.0 Introduction

Introduction

Historique

### ELM B.I Équations de Maxwell locales et globales

Les équations de Maxwell locales

Relation champs-potentiels et équation de conservation de la charge

Milieu conducteur et charge électrique

Équations de Maxwell globales dans un milieu conducteur

Comparaison équations locales - équations globales

## SEMAINE 6

ELM-B.II Ondes dans le vide, dans un diélectrique et dans un plasma

Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans le vide

Équations de Maxwell dans le vide

Composantes électrique et magnétique de l'onde

Spectre des ondes électromagnétiques

Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans un diélectrique, dans un plasma

Milieu LHI et solution OPPH

Paquet d'ondes

Exemples

Application : Ondes dans la couronne solaire

## SEMAINE 7

ELM-B.III(a) Régime stationnaire : l'électrostatique

Équations de Maxwell en régime stationnaire

Électrostatique

Champ et potentiel électrostatiques

Théorème de Gauss de l'électrostatique

Utilisation du théorème de Gauss

Analogie électrostatique/gravitation

Analogie

Théorème de Gauss de la gravitation

## SEMAINE 8

ELM-B.III(b) Régime stationnaire : la magnétostatique

Loi de Biot et Savart

Exemple : Les champs potentiels

Dipôle magnétique

Théorème d'Ampère de la magnétostatique

Application : Champ magnétique créé par un cylindre infini

## SEMAINE 9

ELM-B.IV Force de Laplace

Force de Laplace

Application : Protubérances solaires

Illustration vidéo : Les protubérances

ELM-B.V Loi d'Ohm

Loi d'Ohm pour un milieu conducteur

**ELM-B.VI Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)**

ARQS et Loi des noeuds

Loi de Faraday

Exemple d'induction magnétique

Loi d'Ohm généralisée pour un circuit

Exemple : Induction dans un circuit fermé

**SEMAINE 10****ELM-B.VII Équation de conservation de l'énergie électromagnétique**

Vecteur de Poynting et conservation de l'énergie

Application : Plasma d'électrons mobiles

Application : Forme globale de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Application : Spire de courant dans un champ magnétique extérieur

Application : Transport de l'énergie par une onde en milieu LHI

Applications

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### AV I Éléments d'analyse vectorielle

Ci dessous,  $f(x, y, z)$  désigne un champ scalaire : c'est une fonction des variables  $(x, y, z)$ .

$\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ ,  $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$  et  $\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$  désignent des champs vectoriels, chaque composante est un champ scalaire dépendant des variables spatiales  $(x, y, z)$ .

#### AV I.1 Rappels sur les vecteurs

##### Le produit scalaire

*Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre positif ou négatif*

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul.

$$\|\vec{A}\|^2 = \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

##### Le produit vectoriel

*Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur*

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

$\vec{A} \wedge \vec{B}$  est un vecteur orthogonal à la fois à  $\vec{A}$  et à  $\vec{B}$

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \times |\sin(\vec{A}, \vec{B})|$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.  $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$  représente l'aire du parallélogramme généré par  $\vec{A}, \vec{B}$ .

*Orientation du produit vectoriel* : Règle des doigts de la main droite :  $\vec{A}$  = pouce ;  $\vec{B}$  = index ;  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  = majeur.

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

## Le produit mixte

*Le produit mixte de trois vecteurs est un nombre*

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

est invariant par permutation circulaire

$\|\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})\|$  représente le volume du prisme droit généré par  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ .

Dès que deux vecteurs sont colinéaires, le produit mixte est nul.

## Le double produit vectoriel

*Le double produit vectoriel de trois vecteurs est un vecteur*

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

n'a pas de composante sur  $\vec{A}$  puisqu'il lui est orthogonal.

## AV I.2 Dérivées partielles, différentielle d'une fonction

### Dérivées partielles

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction des variables spatiales  $x, y, z$

- $\partial f / \partial x$  est la dérivée de la fonction par rapport à  $x$  en considérant  $y$  et  $z$  comme des constantes,
- $\partial f / \partial y$  est la dérivée de la fonction par rapport à  $y$  en considérant  $x$  et  $z$  comme des constantes,
- $\partial f / \partial z$  est la dérivée de la fonction par rapport à  $z$  en considérant  $x$  et  $y$  comme des constantes.

### Différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

est la différentielle de  $f(x, y, z)$ ; elle représente les variations de  $f(x, y, z)$  lorsque  $x$  varie de  $x$  à  $x + dx$ ,  $y$  de  $y$  à  $y + dy$  et  $z$  de  $z$  à  $z + dz$ .

## AV I.3 Les opérateurs

Ils agissent soit sur des champs scalaires, soit sur des champs vectoriels. En coordonnées cartésiennes, on définit :

L'opérateur « *nabla* » :

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

L'opérateur *gradient* :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Remarque :  $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dOM}$  avec  $\overrightarrow{dOM}(dx, dy, dz)$

L'opérateur *divergence* :

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

(produit scalaire de  $\vec{\nabla}$  et  $\vec{A}$ ).

L'opérateur *rotationnel* :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

(produit vectoriel de  $\vec{\nabla}$  et  $\vec{A}$ ) tel que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Le gradient s'applique à un champ scalaire et le résultat est un champ vectoriel.
- La divergence s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ scalaire.
- Le rotationnel s'applique à un champ vectoriel et le résultat est un champ vectoriel.

## Quelques formules très utiles

Le rotationnel d'un gradient est nul :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

La divergence d'un rotationnel est nulle :

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

Divergence et rotaionnelle du produit  $f\vec{A}$  d'un champ scalaire  $f$  par un champ vectoriel  $\vec{A}$  :

$$\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A}$$

Cas particulier : si  $\vec{A}$  est un vecteur fixe indépendant des coordonnées de l'espace :

$$\text{div}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A}$$

Divergence d'un produit vectoriel :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

Carré d'un champ vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A}^2/2) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{A}$$

Rotationnel d'un rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

### Laplacien scalaire

Il est défini par

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

### Laplacien vectoriel

Il est défini par

$$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A})$$

En coordonnées cartésiennes, on peut écrire  $\Delta\vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$  où  $\Delta$  est le Laplacien scalaire ; ce n'est pas vrai dans les autres systèmes de coordonnées (cylindriques et sphériques).

Le Laplacien s'applique à un champ scalaire ou vectoriel et le résultat est de même nature.

## AV I.4 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$ , trièdre mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

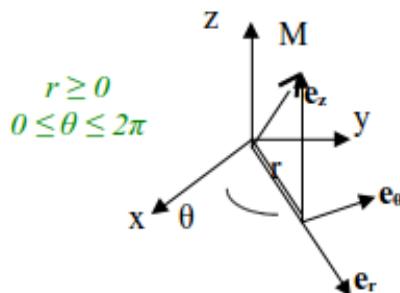


FIGURE 1 – Système de coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left[ \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \partial f / \partial r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

**Coordonnées polaires  $M(r, \theta)$  planes, repère mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$**

Ce sont les coordonnées cylindriques sans la 3ème dimension  $z$

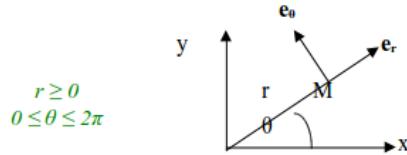


FIGURE 2 – Système de coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \left[ \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \partial f / \partial r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \varphi)$ , trièdre mobile  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

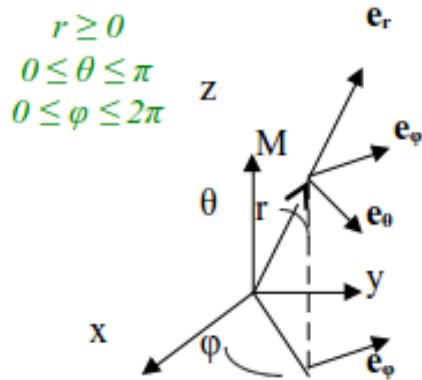


FIGURE 3 – Système de coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad (\vec{e}_\varphi \text{ appartient au plan } xOy)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left[ \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right]$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial (\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \partial f / \partial \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

## AV I.5 Circulation et flux d'un champ vectoriel

### Circulation d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur un contour

la circulation d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  sur un contour est l'intégrale curviligne  $\int \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$  où  $\overrightarrow{dl}$  désigne un élément de contour ( $\overrightarrow{dl}$  est tangent au contour en tout point). L'intégrale curviligne s'évalue entre un point de départ  $P$  et un point d'arrivée  $Q$ .

Si le contour est fermé, alors  $P = Q$  et le signe  $\int$  est barré d'un rond et la circulation s'écrit :

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{dl}$$

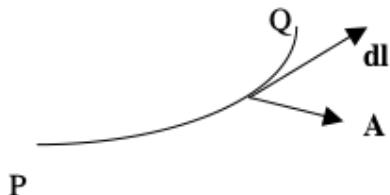


FIGURE 4 – Circulation sur un contour

Un champ vectoriel  $\vec{A}$  dont la circulation est nulle sur tout contour fermé est dit à circulation conservative. C'est toujours vrai si  $\vec{A}$  est un champ défini par  $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f$  où  $f$  est une fonction "potentiel" (exemple : champ de pesanteur, champ de gravitation, champ électrostatique).

### Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ sur une surface

Le flux d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  sur une surface est l'intégrale surfacique

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

où  $d\vec{S}$  désigne un élément de surface (le vecteur  $d\vec{S} = \vec{n} dS$  est normal en tout point de la surface). Une surface qui entoure un volume est fermée : le vecteur  $d\vec{S}$  est orienté vers l'extérieur. Une surface qui s'appuie sur un contour fermé est ouverte ;  $d\vec{S}$  est orienté par le contour.

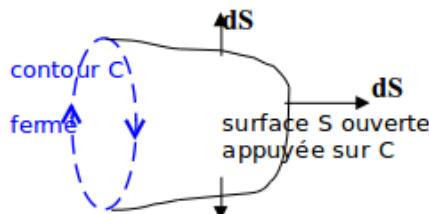


FIGURE 5 – Surface ouverte

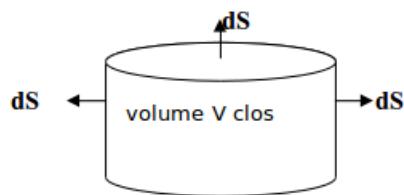


FIGURE 6 – Volume clos

### Surface ouverte appuyée sur un contour, Surface fermée entourant un volume fini

Une surface ouverte appuyée sur un contour orienté (exemple : un disque délimité par la circonférence d'un cercle) s'oriente à l'aide de la règle des doigts de la main droite : pouce en  $M$  le long du Contour  $\mathcal{C}$ , index =  $MO$ , vise le centre  $O$  de  $\mathcal{C}$  et majeur = vecteur surface  $d\vec{S}$  (sur la figure 7)

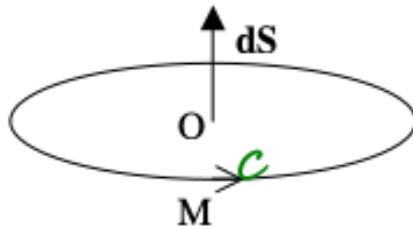


FIGURE 7 – Contour orienté d'une surface

Si la surface est fermée, alors le signe  $\iint$  est barré d'un rond et le flux au travers s'écrit :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Un champ vectoriel  $\vec{A}$  dont le flux est nul sur toute surface fermée entourant un volume quelconque est dit à flux conservatif (exemple : champ magnétique).

### AV I.6 Théorème de Stokes

Formule de Stokes ou du rotationnel :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

La circulation du champ vectoriel  $\vec{A}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface  $S$  s'appuyant sur ce contour fermé.

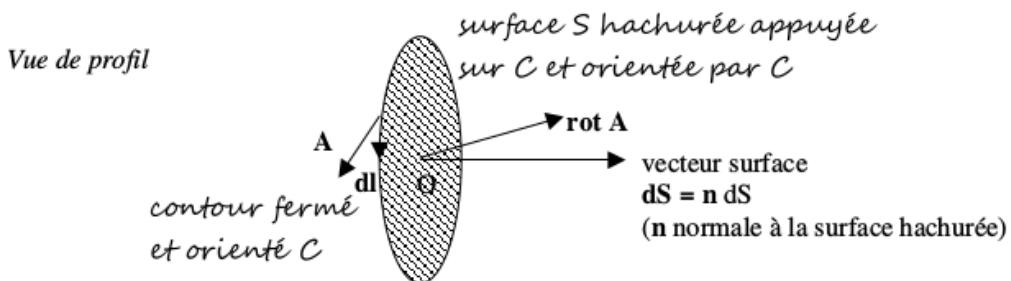


FIGURE 8 – Illustration du théorème de Stokes

On choisit une orientation arbitraire du contour  $\mathcal{C}$ .

Le vecteur surface  $\vec{S}$  est alors orienté par  $\mathcal{C}$  selon la règle des doigts de la main droite : pouce sur le contour dans le sens choisi, l'index vise le centre  $O$ , le majeur indique le vecteur  $\vec{S}$ .

## AV I.7 Théorème d'Ostrogradski

Formule d'Ostrogradski ou « flux divergence » :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv$$

Le flux du champ vectoriel  $\vec{A}$  à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur  $V$  délimité par cette surface.

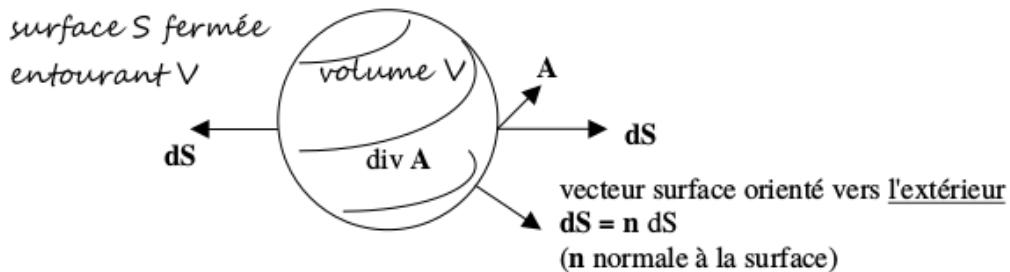


FIGURE 9 – Illustration du théorème d'Ostrogradski

### Exemple simple

Prenons  $\vec{A}(x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ . Alors  $\operatorname{div} \vec{A} = 3$ .

D'après le théorème d'Ostrogradski :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{A} \cdot dv = 3V$$

Le volume  $V$  intérieur à toute surface  $\mathcal{S}$  fermée et quelconque est tout simplement donné par

$$V = 1/3 \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Si la surface  $\mathcal{S}$  fermée est composée de facettes planes, le calcul de cette intégrale est aisé.

## AV I.8 Lignes de champ

Si  $\vec{A}$  est un champ vectoriel, l'équation des lignes de champ est donnée par  $\vec{A} = k\vec{OM}$  ( $k$  réel),  $\vec{OM}$  étant un élément tangent à la ligne de champ. On en tire les équations différentielles par élimination de  $k$  :

Coordonnées cartésiennes :

$$dx/A_x = dy/A_y = dz/A_z \quad \text{avec } \overrightarrow{dOM}(dx, dy, dz)$$

Coordonnées cylindriques :

$$dr/A_r = rd\theta/A_\theta = dz/A_z \quad \text{avec } \overrightarrow{dOM}(dr, rd\theta, dz)$$

Coordonnées sphériques :

$$dr/A_r = rd\theta/A_\theta = rsin\theta d\varphi/A_\varphi \quad \text{avec } \overrightarrow{dOM}(dr, rd\theta, rsin\theta d\varphi)$$

$\vec{A}$  est tangent en tout point à la ligne de champ.

## AV I.9 Lignes ou surfaces équipotentielles

Si  $\vec{A}$  est un champ vectoriel tel que  $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} V$  où  $V$  est une fonction "potentiel", l'équation des lignes ou surfaces équipotentielles est donnée par

$$dV = 0 = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{dOM} = \vec{A} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

impliquant que les lignes ou surfaces équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ.

Leur équation est donnée par  $V(x, y, z) = \text{constante}$ , qui définit une surface.

En deux dimensions dans le plan  $xOy$ ,  $V(x, y) = \text{constante}$  définit une ligne équipotentielle.

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### **ELM-A Électromagnétisme**

#### **ELM-A.1 Force de Lorentz subie par une charge dans un champ électrique et dans un champ magnétique**

Une particule de charge  $q$  mobile, de vitesse  $\vec{v}$ , plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , subit la force de Lorentz :

$$\boxed{\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

$q\vec{E}$  est une force électrique, colinéaire au champ électrique  $\vec{E}$ .

$q\vec{v} \wedge \vec{B}$  est une force magnétique, orthogonale à la fois à la vitesse  $\vec{v}$  de la charge et au champ magnétique  $\vec{B}$ .

Unités :

- $\vec{E}$  se mesure en Volts/m
- $\vec{B}$  en Tesla ( $T$ )
- $q$  en Coulomb ( $C$ )
- $\vec{v}$  en m/s

Rappel : Charge élémentaire :  $e = 1.6 * 10^{-19} C$ ; le proton a la charge  $+e$ , l'électron la charge  $-e$ .

#### **ELM-A.2 Travail de la force de Lorentz et énergie mécanique**

Le travail élémentaire est

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

où  $\overrightarrow{dOM}$  est un déplacement élémentaire de la charge située en  $M$ , l'origine du repère étant en  $O$ .

La vitesse  $\vec{v}$  est reliée à  $\overrightarrow{dOM}$  par  $\vec{v} = \overrightarrow{dOM}/dt$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} dW &= q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{dOM} \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v} dt + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \end{aligned}$$

Or  $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$  car  $(\vec{v} \wedge \vec{B})$  est un vecteur orthogonal au vecteur vitesse  $\vec{v}$ .

Donc

$$dW = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

La puissance de la force de Lorentz est

$$\boxed{\mathcal{P} = q\vec{E} \cdot \vec{v}} \quad (\text{Watts})$$

La force magnétique ne travaille pas ; sa puissance est nulle ; seule la force électrique travaille.

Si  $m$  désigne la masse de la particule de charge  $q$ , le principe fondamental de la dynamique implique

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

Effectuons le produit scalaire avec  $\vec{v}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d\frac{1}{2}m\vec{v}^2}{dt} &= q\vec{E} \cdot \vec{v} \\ &= q\vec{E} \cdot \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = q\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Si  $\vec{E}$  dérive du potentiel électrostatique  $V$ , on a  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 &= -q\overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \overrightarrow{dOM} \\ &= -q dV \end{aligned}$$

car par définition  $dV = \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \overrightarrow{dOM}$

Nous pouvons en conclure que la quantité  $\boxed{\frac{1}{2}m\vec{v}^2 + qV}$  est conservée. C'est l'énergie mécanique de la particule chargée. Elle se décompose en deux parties :

l'énergie cinétique  $\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2}$  et l'énergie potentielle  $\boxed{E_p = qV}$ .

### ELM-A.3 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$  soit soumise à la seule force électrique  $\vec{F} = q\vec{E}$ , où  $\vec{E}$  est invariable dans l'espace et dans le temps. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= q\vec{E} \end{aligned}$$

ce qui s'intègre vectoriellement, une première fois pour obtenir la vitesse

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= (q\vec{E}/m)t + \vec{v}_0 \end{aligned}$$

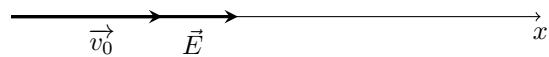
où  $\vec{v}_0$  est la vitesse initiale de la charge.

Une seconde fois pour obtenir la position

$$OM(t) = \left(\frac{1}{2}qE/m\right)t^2 + v_0 t + OM_0$$

où  $M_0$  est la position initiale de la charge.

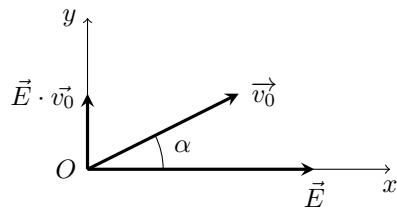
**Exemple 1 :**  $\vec{E}$  et  $\vec{v}_0$  sont colinéaires ; la charge a pour abscisse  $x(t)$  et pour vitesse  $v(t)$  sur un axe  $Ox$  ; sa position initiale est l'abscisse  $x_0$ .



$$v(t) = (qE/m)t + v_0 \text{ et } x(t) = (\frac{1}{2}qE/m)t^2 + v_0 t + x_0$$

Il s'agit d'un mouvement rectiligne, accéléré ou ralenti.

**Exemple 2 :** La charge a pour coordonnées  $[x(t), y(t)]$  et pour vitesse  $[v_x(t), v_y(t)]$  dans le repère  $(xOy)$  ; en  $t = 0$ , elle est au point  $O$  et possède la vitesse initiale  $\vec{v}_0 = [v_0 \cos(\alpha), v_0 \sin(\alpha)]$



On a

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= d\overrightarrow{OM}/dt \\ &= (q\vec{E}/m)t + \vec{v}_0 \end{aligned}$$

et

$$OM(t) = \left(\frac{1}{2}q\vec{E}/m\right)t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$$

Ces deux équations se projettent sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\alpha) & \text{mouvement accéléré ou ralenti selon } Oy \\ v_y(t) = (q\vec{E}/m)t + v_0 \sin(\alpha) & \text{mouvement à vitesse constante selon } Ox \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \\ y(t) = (\frac{1}{2}q\vec{E}/m)t^2 + v_0 \sin(\alpha)t \end{cases}$$

On peut éliminer le temps  $t$  entre les deux équations ; on obtient l'équation de la trajectoire :

$$y = \left(\frac{1}{2}qE/m\right) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + xt \tan(\alpha)$$

Il s'agit d'une parabole.

*Conclusion : Les charges sont accélérées ou ralenties par un champ électrique. L'énergie cinétique de la particule varie.*

#### ELM-A.4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant ; pulsation gyro-magnétique et rayon de giration

Supposons qu'une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$  soit soumise à la seule force magnétique  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , où  $\vec{B}$  est invariable dans l'espace et dans le temps.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Le produit scalaire avec  $\vec{v}$  donne

$$\begin{aligned} m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)/dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique de la particule est constante. La norme  $v = \|\vec{v}\|$  du vecteur vitesse est invariable.

Considérons maintenant la dérivée du produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{B}$  par rapport au temps en supposant que  $\vec{B}$  ne varie pas au cours du temps :

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{B})}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{B} \\ &= \frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{B} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux.

On en déduit que le produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{B}$  est constant.

On peut décomposer le vecteur vitesse  $\vec{v}$  en 2 composantes,  $\vec{v}_{//}$  dans la direction du champ magnétique et  $\vec{v}_{\perp}$  dans le plan orthogonal au champ tel que  $\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_{\perp}$ . On a alors, avec  $v = \|\vec{v}\|$ ,  $v_{//} = \|\vec{v}_{//}\|$ ,  $v_{\perp} = \|\vec{v}_{\perp}\|$  et  $B = \|\vec{B}\|$  :

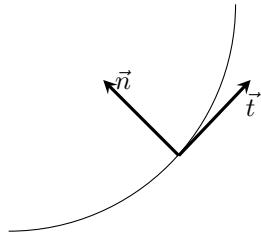
$$v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 = \text{constante et } v_{//}B = \text{constante}$$

*Conséquence :*

$$B = \text{constante}, v_{//} = \text{constante et } v_{\perp} = \text{constante}$$

### Mouvement dans un champ magnétique de la forme $\vec{B} = B\vec{e}_z$

$\vec{v}_{//}$  est dans la direction  $Oz$  du champ magnétique et  $\vec{v}_{\perp}$  dans le plan orthogonal  $xOy$  que l'on munit du repère de Frenet  $(\vec{t}, \vec{n})$  où  $\vec{t}$  est la tangente à la trajectoire et  $\vec{n}$  la normale.  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{e}_z)$  forment un trièdre orthonormé.



L'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= m \frac{d\vec{v}_{//}}{dt} + md\frac{\vec{v}_{\perp}}{dt} \\ &= q\vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= q\vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Posons  $\vec{v}_{//} = v_{//}\vec{e}_z$  et  $\vec{v}_{\perp} = v_{\perp}\vec{t}$ .

On a d'une part :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} &= v_{\perp} \vec{t} \wedge B\vec{e}_z \\ &= -v_{\perp} B \vec{n} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{dv_{\perp}}{dt} \vec{t} + \frac{v_{\perp} dt}{dt}$$

Attention : Ne pas confondre  $t$ , temps, et  $\vec{t}$ , vecteur unitaire tangent !

Or  $d\vec{t}/dt = (d\vec{t}/ds)(ds/dt)$  où  $s$  est l'abscisse curviligne de la charge dans le plan  $xOy$ ,  $v_{\perp} = ds/dt$  et  $d\vec{t}/ds = \vec{n}/R$  où  $R$  est le rayon de courbure de la trajectoire.

Donc

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{dv_\perp}{dt}t + (v_\perp^2/R)\vec{n}$$

et  $m\frac{dv_{//}}{dt}\vec{e}_z + m\frac{dv_\perp}{dt}\vec{t} + (mv_\perp^2/R)\vec{n} = -qv_\perp B\vec{n}$

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e}_z, \text{ on obtient } dv_{//}/dt = 0 & \text{d'où } v_{//} = \text{constante} \\ \text{sur } \vec{t}, \text{ on obtient } dv_\perp/dt = 0 & \text{d'où } v_\perp = \text{constante} \\ \text{sur } \vec{n}, \text{ on obtient } mv_\perp^2/R = -qv_\perp B & \text{d'où } R = -mv_\perp/qB \text{ rayon de giration} \end{cases}$$

et le vecteur rotation de la charge

$$\vec{\Omega} = -(qB/m)\vec{e}_z$$

L'accélération dans le plan  $xOy$  est donnée par  $\vec{a}_\perp = d\vec{v}_\perp/dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_\perp$ . La quantité  $\|\vec{\Omega}\| = |qB/m|$  porte le nom de pulsation gyromagnétique.

Si le champ magnétique est uniforme, le rayon de courbure  $R$  est uniforme et la trajectoire est un cercle dans le plan  $xOy$ . Il est parcouru dans le sens horaire ou antihoraire selon le signe du produit  $(qB)$ . Dans l'espace, le mouvement est une hélice d'axe parallèle à  $\vec{e}_z$  et de pas  $h = v_{//}T$  où  $T$  est le temps de parcours du cercle égal à  $2\pi/\Omega$ . Le moment cinétique est constant et vaut  $mv_\perp R$ .

*Conclusion : Les charges sont déviées par un champ magnétique. L'énergie cinétique de la particule ne varie pas.*

### Application : le phénomène de piégeage de charges par miroir magnétique

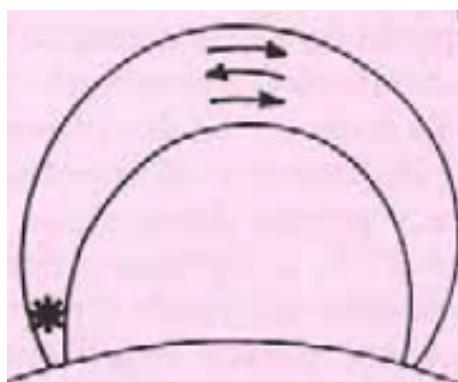


FIGURE 1 – A la surface du Soleil, le phénomène de miroir magnétique se produit lorsqu'une particule chargée se déplace d'une zone de champ magnétique faible (sommet d'une arche magnétique) vers ses pieds d'ancrage où le champ magnétique est fort. La vitesse de dérive  $v_{//}$ , maximale au sommet de l'arche, diminue vers ses pieds, peut s'annuler et s'inverser.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  étant à flux conservatif, on peut écrire en première approximation :  $BS = \text{constante}$ , où  $S$  est la section de l'arche. Celle-ci diminue du sommet vers les pieds de l'arche, de sorte que le champ magnétique  $B$  augmente. Cependant,  $v_{//}B = \text{constante}$  implique que  $v_{//}$  diminue du sommet vers les pieds de l'arche.

De  $v^2 = v_{//}^2 + v_{\perp}^2 = \text{constante}$ , on en déduit que  $v_{\perp}$  augmente vers les pieds de l'arche.

Aux ordres de grandeur, en supposant que  $S$  est voisin de  $R^2$ , rayon de giration,  $B$  varie en  $1/R^2$  et  $v_{//}$  varie en  $R^2$ ; comme  $R \rightarrow 0$  aux pieds,  $v_{//} \rightarrow 0$  aux pieds, donc  $v_{//}$  peut s'annuler et s'inverser.

Sachant que  $R = m \frac{v_{\perp}}{q} B$ , on en déduit que  $v_{\perp}$  varie en  $1/R$ , donc  $v_{\perp} \rightarrow \infty$  aux pieds.

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

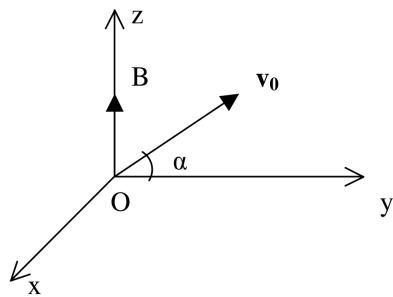
Automne 2016

## COURS

### ELM-A Électromagnétisme A

#### ELM-A.5 Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant : équations horaires

On considère une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , située à l'instant  $t = 0$  à l'origine  $O$  du repère, et de vitesse initiale  $v_0$  contenue dans le plan ( $yOz$ ), de coordonnées  $(0, v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$ .



La particule est à l'instant  $t$  en  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  et sa vitesse  $\vec{v}$  a pour composantes  $(dx/dt, dy/dt, dz/dt)$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

Équation que l'on projette sur les 3 axes :

$$\begin{cases} \text{Selon } Ox : md^2x/dt^2 = qBdy/dt & (1) \\ \text{Selon } Oy : md^2y/dt^2 = -qBdx/dt & (2) \\ \text{Selon } Oz : md^2z/dt^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

La troisième équation donne immédiatement  $dz/dt = v_0 \sin\alpha = \text{constante}$ , et  $z(t) = (v_0 \sin\alpha)t$

Le mouvement se fait donc à vitesse constante dans la direction du champ magnétique.

Les deux premières équations sont couplées ; pour les résoudre, on va les combiner en posant  $u(t) = x(t) + iy(t)$  et on calcule  $(1) + i(2)$ , ce qui donne :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -iqB \frac{du}{dt}$$

Avec la condition initiale en  $t = 0$  :  $du/dt = i v_0 \cos\alpha$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= i v_0 \cos\alpha \exp(-i\omega t) \\ &= i v_0 \cos\alpha [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] \\ &= v_0 \cos\alpha [\sin(\omega t) + i \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

où  $\boxed{\omega = qB/m}$  est la pulsation gyromagnétique.

$$\begin{cases} dx/dt = v_0 \cos\alpha \sin(\omega t) \\ dy/dt = v_0 \cos\alpha \cos(\omega t) \end{cases}$$

Dans le plan  $xOy$ , la vitesse est égale à  $v_0 \cos\alpha$  ; selon l'axe  $Oz$ , la vitesse vaut  $v_0 \sin\alpha$  ; la norme du vecteur vitesse est donc constante et égale à  $v_0$ .

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha (1 - \cos(\omega t))/\omega \\ y(t) = v_0 \cos\alpha \sin(\omega t)/\omega \end{cases}$$

d'où l'équation de la trajectoire dans le plan  $xOy$  :

$$(x - v_0 \cos\alpha/\omega)^2 + y^2 = (v_0 \cos\alpha/\omega)^2$$

C'est un cercle de centre  $C(v_0 \cos\alpha/\omega, 0)$  et de rayon  $R = v_0 \cos\alpha/\omega$ , dit rayon de giration.

Au bout d'une rotation effectuée en un temps  $T = 2\pi/\omega$ , la particule a dérivé sur l'axe  $Oz$  de la quantité  $h = v_0 \sin\alpha T = 2\pi v_0 \sin\alpha/\omega$ .

La trajectoire dans l'espace est donc une hélice de pas  $h$  dont l'axe est parallèle au champ magnétique, décrite à vitesse constante, avec un rayon  $R$  de giration constant.

On remarque que  $h/R = 2\pi \tan(\alpha)$ , rapport qui ne dépend que de l'orientation de la vitesse initiale.

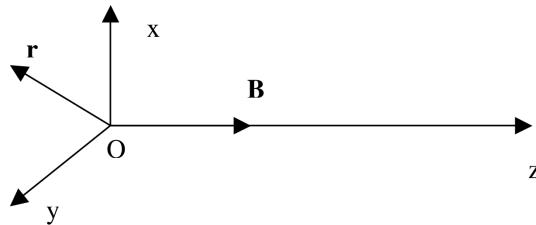
La force de Lorentz a pour composantes :  $qBv_0 \cos\alpha [\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0]$ , sa norme est invariable et vaut  $qBv_0 \cos\alpha$ . Elle est radiale. Le moment de cette force par rapport à l'axe de l'hélice est donc nul, impliquant la constance du moment cinétique  $K$  égal à :

$$K = mv_0 \cos\alpha R = mv_0^2 \cos^2\alpha / \omega$$

### ELM-A.6 Oscillateur harmonique en présence de champ magnétique et effet Zeeman

Considérons un modèle d'atome très simplifié dans lequel l'électron mobile en  $M$  autour du noyau immobile situé en  $O$  est décrit par un oscillateur harmonique, c'est-à-dire dont la force de rappel est décrite par  $-kOM$ , où  $k$  est une constante positive. La charge de l'électron est  $-e$  et sa masse est  $m$ . On plonge cet électron dans un champ magnétique extérieur, de sorte qu'il subit deux forces, la force de rappel vers  $O$  et la force de Lorentz.

#### Mouvement de l'électron dans le champ magnétique



On choisit un champ magnétique uniforme et on oriente l'axe  $Oz$  tel que  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . L'électron est situé à l'extrémité du vecteur  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(x, y, z)$ . On pose :

$\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega_0$  est la pulsation propre liée à la force de rappel

et

$\omega_g = eB/m$  est la pulsation gyromagnétique.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit vectoriellement :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge B\vec{e}_z$$

En projection sur les axes, cette équation devient :

$$\begin{cases} d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x + \omega_g dy/dt = 0 & (1) \\ d^2y/dt^2 + \omega_0^2 y - \omega_g dx/dt = 0 & (2) \\ d^2z/dt^2 + \omega_0^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

La 3ème équation donne par exemple  $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)$ , qui représente une vibration selon l'axe  $Oz$  de pulsation  $\omega_0$  dans la direction du champ magnétique. On dit que

la vibration est polarisée linéairement selon  $Oz$ .

Pour résoudre les deux premières équations donnant le mouvement vibratoire dans le plan  $xOy$ , on pose  $u = x + iy$  et on effectue (1) +  $i(2)$ . Il vient :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u - i\omega_g \frac{du}{dt} = 0$$

Posons  $u = u_0 e^{i\omega t}$ , on obtient  $u_0 e^{i\omega t}(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0 \omega_g) = 0$ .

Nous recherchons les solutions de  $(-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_0 \omega_g) = 0$  telles que  $\omega_g \ll \omega_0$ . On obtient alors les deux solutions :

$$\boxed{\omega = \omega_g/2 + \omega_0 \text{ et } \omega = \omega_g/2 - \omega_0}$$

ce qui donne les deux autres solutions possibles :

$$\begin{cases} u_1 = u_0 [\cos(\omega_0 + \omega_g/2)t + i\sin(\omega_0 + \omega_g/2)t] \\ \text{et} \\ u_2 = u_0 [\cos(\omega_0 - \omega_g/2)t - i\sin(\omega_0 - \omega_g/2)t] \end{cases}$$

$\boxed{\omega_L = \omega_g/2 = eB/2m}$  s'appelle pulsation de Larmor.

En supposant que  $u_0 = x_0$  (réel), on en déduit les deux vibrations suivantes selon la valeur de  $\omega$  :

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 + \omega_g/2)t \\ y = x_0 \sin(\omega_0 + \omega_g/2)t \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = x_0 \cos(\omega_0 - \omega_g/2)t \\ y = -x_0 \sin(\omega_0 - \omega_g/2)t \end{cases}$$

Ces deux vibrations décrivent un cercle, puisque  $(x^2 + y^2) = \text{cte}$ , on dit qu'elles sont polarisées circulairement droite et gauche selon le sens de rotation du vecteur  $\vec{r}(x, y, 0)$  dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. L'écart entre les deux pulsations étant  $\boxed{\Delta\omega = \omega_g}$ , on en déduit l'écart en longueur d'onde sachant que  $\lambda = C2\pi/\omega$  :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda^2 \Delta\omega / 2\pi C \\ &= \lambda^2 \omega_g / 2\pi C \\ &= (e/2\pi mC) \lambda^2 B \end{aligned}$$

On note par convention  $\boxed{\Delta\lambda_B = (e/4\pi mC)\lambda^2 B}$  de sorte que l'écartement est  $\boxed{\Delta\lambda = 2\Delta\lambda_B}$  et numériquement  $\Delta\lambda_B = 4.67 \times 10^{-13} \lambda^2 B$  avec dans cette formule  $B$  en Gauss ( $1G = 10^{-4}T$ ),  $\lambda$  et  $\Delta\lambda_B$  en Angströms ( $10^{-10}m$ ).

## Effet Zeeman

La mécanique quantique transforme cette expression en introduisant simplement un facteur multiplicatif, le facteur de Landé équivalent  $g^*$  de la transition (ce facteur est tabulé) :

$$\Delta\lambda_B = (e/4\pi mC)g^*\lambda^2 B = 4.67 \times 10^{-13} g^* \lambda^2 B$$

avec  $B$  en Gauss,  $\lambda$  et  $\Delta\lambda_B$  en Angströms.

Il y a en conclusion trois solutions possibles :

- une vibration dans la direction du champ magnétique à la pulsation  $\omega_0$  de l'oscillateur harmonique
- deux vibrations dans un plan orthogonal au champ magnétique ayant pour pulsation  $\omega_0 + \omega_L$  ou  $\omega_0 - \omega_L$  qui sont polarisées circulairement droite et gauche ( $\omega_L = \omega_g/2$  pulsation de Larmor).

*L'écart  $\Delta\omega = \omega_g$  entre les deux pulsations ou l'écart en longueur d'onde  $\Delta\lambda$  est proportionnel au module  $B$  du champ magnétique.*

C'est l'effet Zeeman. On l'observe sur une raie spectrale atomique (exemple ci-dessous) centrée sur la pulsation  $\omega_0$  sans champ magnétique ; en présence de champ, deux autres composantes centrées sur  $\omega_0 + \omega_L$  et  $\omega_0 - \omega_L$  apparaissent. La mesure de leur écartement permet de connaître la valeur du champ magnétique à distance, en examinant les spectres de certains atomes. Application : mesure des champs magnétiques solaires et stellaires.

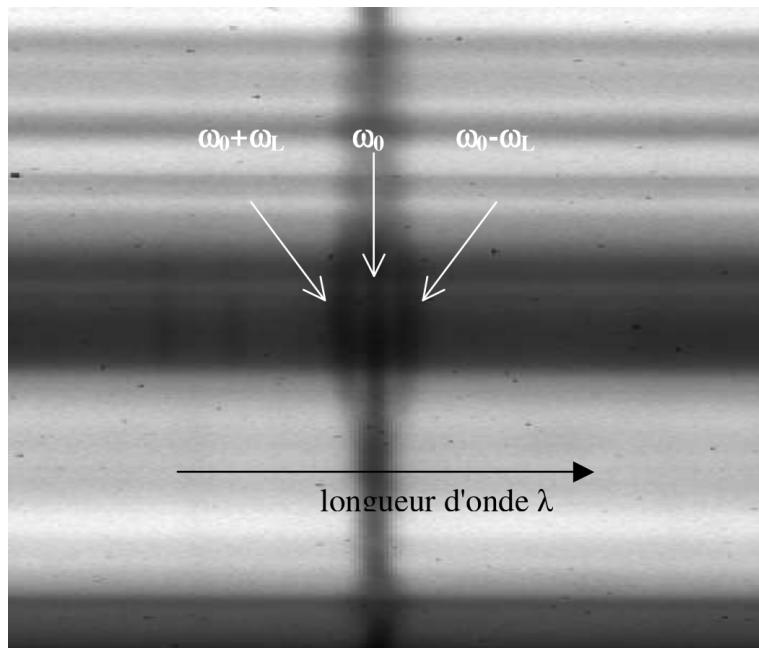


FIGURE 1 – Raie FeI 6173 Å sur une tache solaire

## ELM-A.7 Oscillateur harmonique en présence d'un champ électrique et profil d'amortissement en fréquence

Un modèle très simple permet d'expliquer les profils en fréquence des raies spectrales qui caractérisent un gaz en interaction avec le rayonnement ambiant (ondes lumineuses). Considérons un modèle unidimensionnel composé un électron de position  $x(t)$  lié au noyau de l'atome par la force de rappel  $-kx$ , subissant un amortissement  $-m\gamma dx/dt$ , et oscillant dans un champ électrique de la forme  $Ee^{i\omega t}$  représentant une vibration lumineuse de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$  ou de fréquence  $\nu$ .

$m$  et  $-e$  sont respectivement la masse et la charge de l'électron ;  $\gamma$  représente son amortissement (en  $s^{-1}$ ). Le principe fondamental de la dynamique donne selon  $Ox$  :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + kx = -eEe^{i\omega t}$$

et l'on pose  $x(t) = Xe^{i\omega t}$ , où  $X$  est l'amplitude complexe du mouvement.

On a alors

$$(-m\omega^2 + i\omega m\gamma + k)X = -eE$$

d'où  $X = (-e/m)E/(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$

$\omega_0 = (k/m)^{1/2}$  est la pulsation propre, qui décrit de façon très simplifiée le fait que l'électron est lié au noyau par une force de rappel.

Nous nous intéressons à la puissance moyenne dissipée par la force de frottement  $\langle m\gamma(dx/dt)^2 \rangle$ , qui dans la réalité correspond à la perte d'énergie de l'électron lié parce qu'il rayonne en se comportant comme un dipôle oscillant (rayonnement dipolaire électrique, théorie des potentiels retardés).

Comme  $\langle (dx/dt)^2 \rangle = \frac{1}{2}|(dx/dt)^2| = \frac{1}{2}|X|^2\omega^2$ , la puissance moyenne absorbée par la dissipation est égale à :

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{2}m\gamma|X|^2\omega^2 = \frac{1}{2}\gamma(e^2/m)E^2\omega^2/[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]$$

En posant  $\omega = 2\pi\nu$ , il vient

$$\langle P_f \rangle = (\gamma/8\pi^2)(e^2/m)E^2/[(\nu_0^2/\nu - \nu)^2 + (\gamma/2\pi)^2]$$

Au voisinage de la fréquence de résonance  $\nu_0$ , on a  $(\nu_0^2/\nu - \nu) \simeq 2(\nu_0 - \nu)$ , d'où

$$\langle P_f \rangle \simeq (\gamma/32\pi^2)(e^2/m)E^2/[(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

La section efficace  $\sigma$  (en  $m^2$ ) de photo excitation caractérise l'interaction entre le rayonnement et l'électron lié à l'atome ; elle est définie comme le rapport de la puissance moyenne dissipée  $\langle P_f \rangle$  (en  $W$ ) à la puissance moyenne électromagnétique transportée par unité de surface (moyenne du vecteur de Poynting  $\langle P \rangle$  en  $W/m^2$ ), égale au produit  $C\epsilon_0 E^2/2$  :

$$\sigma(\nu) = \frac{\langle P_f \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{\langle P_f \rangle}{C\epsilon_0 E^2/2}$$

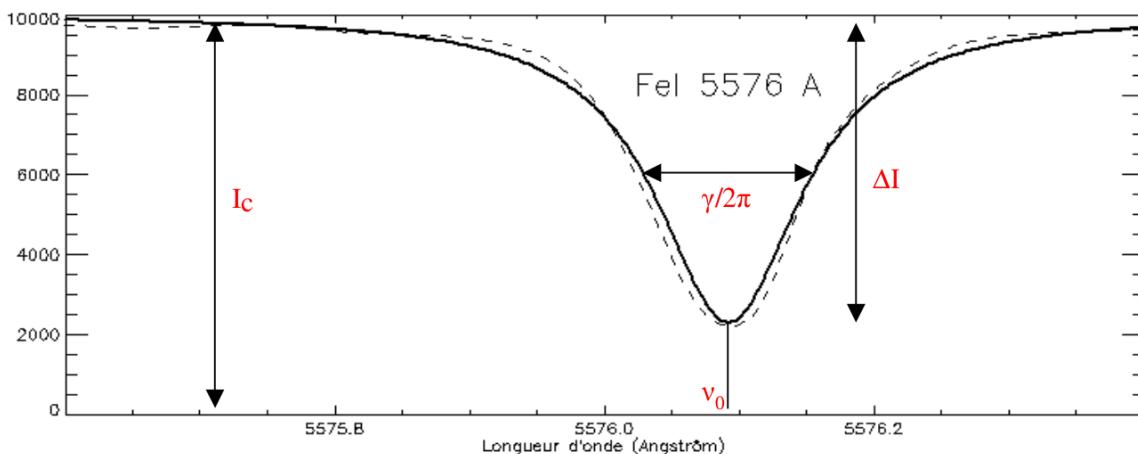
proportionnel à

$$L(\nu) = (\gamma/4\pi)^2/[(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2]$$

Il s'agit d'un profil "Lorentzien", présentant un pic à la résonance  $\nu_0$  et de largeur à mi-hauteur  $\gamma/2\pi$ .

$\nu_0$  est assimilable à la fréquence centrale d'une raie spectrale atomique, la quantité  $\gamma/2\pi$  représentant alors la largeur naturelle de la raie ou élargie par les collisions, de l'ordre de  $10^{-11} s^{-1}$ .

Cependant, dans l'atmosphère solaire, les profils sont plutôt renversés, en absorption.



On effectue alors un ajustement (trait continu) entre le profil d'une raie solaire observée (ici en tirets) et la fonction intensité :

$$I(\nu) = I_c - \Delta I L(\nu)$$

où  $L(\nu)$  est le profil Lorentzien ci-dessus (fonction variant entre 0 et 1, égale à 1 à la résonance),  $I_c$  l'intensité du rayonnement continu (figure) et  $\Delta I$  la dépression centrale de la raie (figure). Pour de nombreuses raies d'atomes lourds, l'ajustement est bon. Par contre, pour des atomes plus légers (Hydrogène), il l'est moins. En effet, on n'a pas tenu compte, par simplicité, de l'agitation thermique des atomes, qui confère au coeur des raies un profil plutôt de forme gaussienne, et cette agitation thermique est d'autant plus forte que les éléments ont une faible masse.

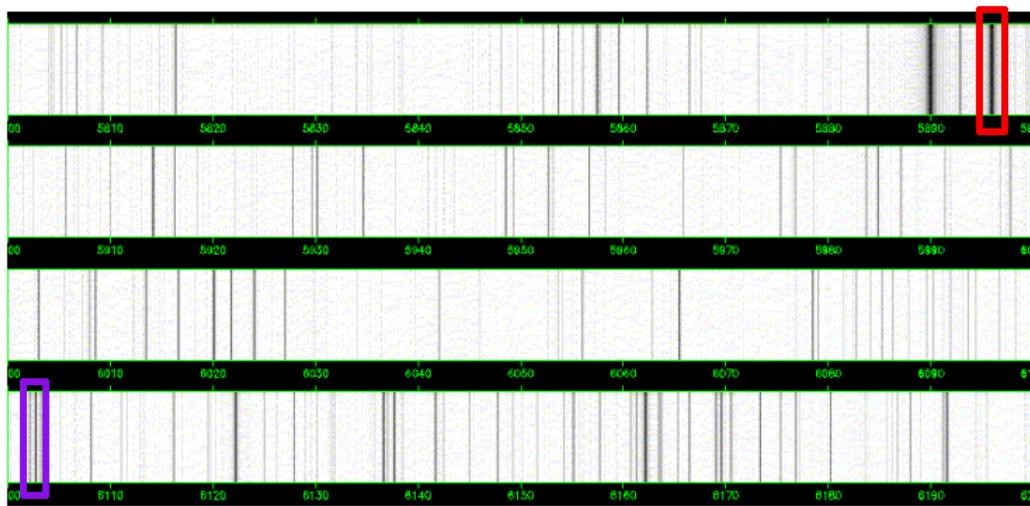


FIGURE 2 – Exemples de raies spectrales dans l'atmosphère du soleil : dans l'encadré rouge la raie du Sodium à 589.6 nm, dans l'encadré violet la raie du Calcium à 610.3 nm

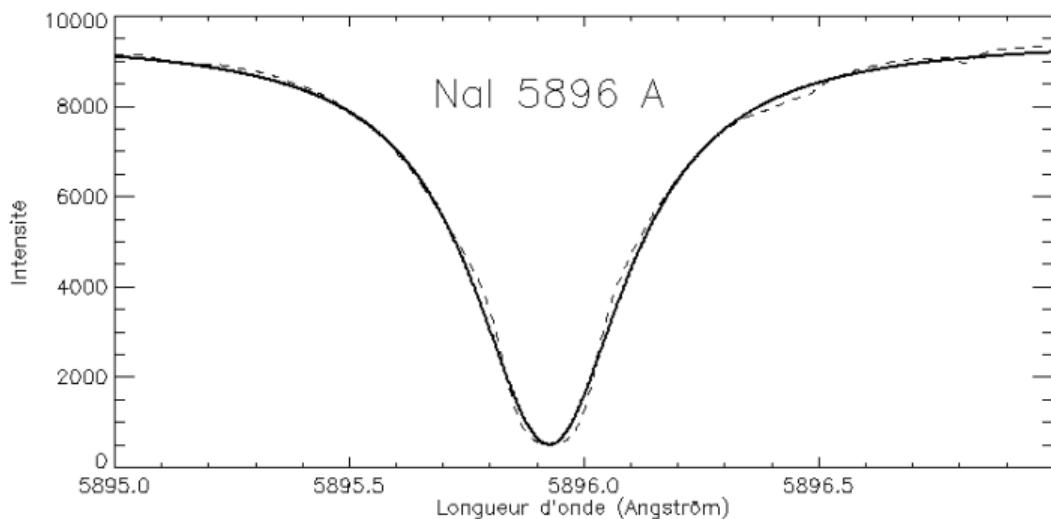


FIGURE 3 – Raie du Sodium à 589.6 nm

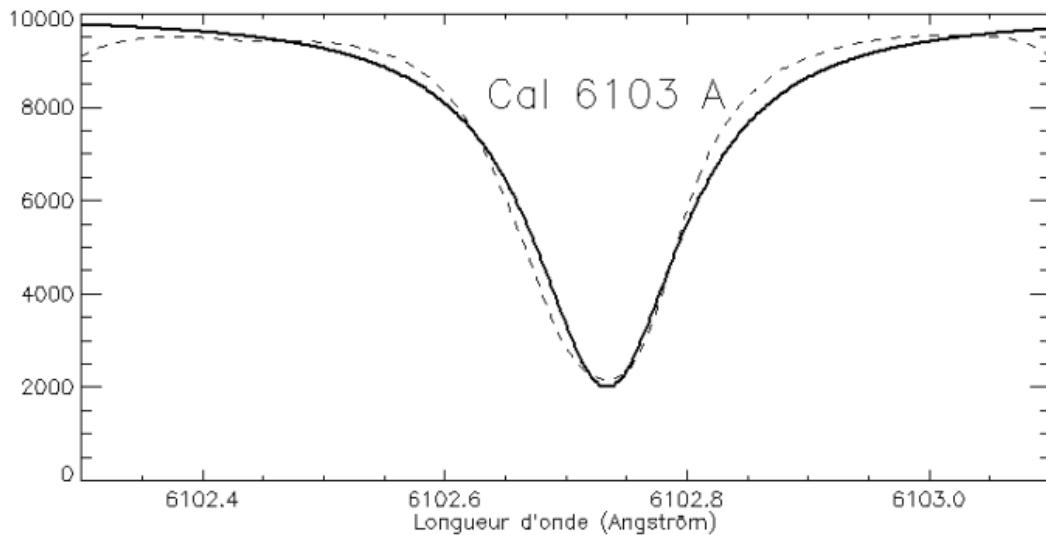


FIGURE 4 – Raie du Calcium à 610.3 nm

**Exemples de raies spectrales dans l'atmosphère du soleil** En trait pointillé : profil observé de la raie en fonction de la longueur d'onde En trait continu : fonction  $I(\nu) = I_c - \Delta IL(\nu)$  ajustée au profil observé.



FIGURE 5 – L'exploration des profils des raies permet de sonder l'atmosphère solaire en profondeur ; ici plusieurs couches de la chromosphère dans la raie H alpha de l'Hydrogène

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.0 Introduction

##### Introduction

Nous présentons tout d'abord les équations de Maxwell dans leur généralité, valables dans le vide ou dans un conducteur. Nous appliquons ensuite les équations de Maxwell à des régimes particuliers :

- Les ondes électromagnétiques dans le vide ou dans un milieu diélectrique (sans charge ni courant).
- Les régimes stationnaires que sont l'électrostatique et la magnétostatique (dans lesquels les équations de Maxwell sont découplées).
- L'approximation des régimes quasi-stationnaires permettant de décrire l'induction magnétique c'est-à-dire l'interaction entre champ magnétique et champ électrique.

Nous terminons par la notion d'énergie électromagnétique en discutant l'équation de conservation de l'énergie appliquée à divers régimes.

L'électromagnétisme est à l'oeuvre dans les atmosphères du soleil et des étoiles (ainsi que l'hydrodynamique comme nous le verrons dans un prochain MOOC ...); quand ce sera possible nous choisirons des exemples empruntés à la physique du soleil.

##### Historique

Maxwell (1831-1879) est un physicien écossais qui a développé la formulation mathématique des travaux antérieurs sur l'électricité et le magnétisme, réalisés notamment par Gauss (1777-1855), Faraday (1791-1867) et Ampère (1775-1836). Il proposa un ensemble de 20 équations présentées la première fois à la Royal Society

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

en 1864 qui décrivent le champ électrique et le champ magnétique ainsi que leur interaction avec la matière (charges et courants). Mais il faudra attendre l'avènement du calcul opérationnel et de l'analyse vectorielle vers 1900 pour aboutir aux 4 équations ci dessous.

### ELM-B.1 Équations de Maxwell locales et globales dans un milieu conducteur

#### Équations de Maxwell locales dans un milieu conducteur

Nous postulons les 4 équations locales suivantes :

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  | équation de Maxwell Gauss           |
| $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                                 | équation de Maxwell Faraday         |
| $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  | équation de Maxwell Thomson ou flux |
| $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | équation de Maxwell Ampère          |

avec les quantités suivantes dépendant du temps  $t$  et des coordonnées spatiales  $(x, y, z)$  :

$\vec{E}$  champ électrique (unité : Volt/mètre ou  $V m^{-1}$ ) - *champ vectoriel*

$\vec{B}$  champ magnétique (unité : Tesla ou  $T$ ) - *champ vectoriel*

$\vec{j}$  densité volumique de courant électrique (unité : Ampère  $m^{-2}$ ) - *champ vectoriel*

$\rho$  densité volumique de charge électrique (unité : Coulomb  $m^{-3}$ ) - *champ scalaire*

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide ( $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$  unités SI)

$\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide ( $4\pi \times 10^{-7}$  unités SI) avec entre eux la relation  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$  où  $C = 3 \times 10^8 ms^{-1}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Les équations sont couplées. Les charges  $\rho$  ou un champ magnétique variable sont source de  $\vec{E}$  (équations de Maxwell Gauss et Faraday), tandis que la densité de courant électrique  $\vec{j}$  ou un champ électrique variable sont source de  $\vec{B}$  (Maxwell Ampère). En régime stationnaire (électrostatique, magnétostatique), les équations sont découplées ; les charges sont source de  $\vec{E}$  et les courants source de  $\vec{B}$ .

$\operatorname{div}$ ,  $\operatorname{rot}$  sont les opérateurs "divergence" et "rotationnel" agissant sur les variables d'espace (voir le formulaire, en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques).

Par exemple, en coordonnées cartésiennes, si  $\vec{E}$  a pour composantes  $(E_x, E_y, E_z)$  dans un repère orthonormé de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , et si  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur "nabla" des dérivées partielles par rapport aux variables d'espace  $x, y, z$ , soit  $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$  désigne la dérivée partielle par rapport au temps  $t$ .

À ces quatre équations couplées en termes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , nous ajoutons :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ \text{et la condition de jauge de Coulomb : } &\text{div} \vec{A} = 0\end{aligned}}$$

$V$  est le potentiel scalaire (unité : Volt) - *champ scalaire*

$\vec{A}$  est le potentiel vecteur (unité : Tesla m) - *champ vectoriel*

$\vec{\text{grad}}$  est l'opérateur "gradient" agissant sur les variables d'espace ; en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}} V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} V \text{ (les opérateurs } \vec{\text{grad}} \text{ et } \vec{\nabla} \text{ sont identiques)}$$

On remarque que :

- l'équation de Maxwell Faraday  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  découle de  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  en prenant son rotationnel, sachant que le rotationnel d'un gradient est nul.
- l'équation de Maxwell flux  $\text{div} \vec{B} = 0$  découle de  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$  en prenant sa divergence, sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle.
- si l'on prend la divergence de l'équation de Maxwell Ampère  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  sachant que la divergence d'un rotationnel est nulle, on obtient  $\text{div} \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \text{div} \vec{E}}{\partial t} = 0$  qui combinée avec l'équation de Maxwell Gauss  $\text{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$  donne l'équation de conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0}$$

Lorsqu'il n'y a qu'une population de charges mobiles se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$ , on a la relation :

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (\text{Am}^{-2})}$$

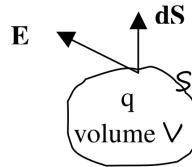
Dans un conducteur, comportant autant de charges positives fixes (ions dans un réseau cristallin de charge volumique  $\rho_+$ ) et de charges négatives mobiles (électrons de conduction, un par atome en moyenne, de charge volumique  $\rho_-$ ), on a :

$\boxed{\rho = \rho_+ + \rho_- = 0}$        $\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-, \vec{v}_+ = 0$  d'où  $\vec{j} = \rho_- \vec{v}_-$  le courant  $\vec{j}$  est produit par les électrons, et son sens est opposé au mouvement des électrons puisque  $\rho_- = -ne$  où  $n$  est la densité volumique d'électrons (en  $\text{m}^{-3}$ ) et  $-e$  la charge de l'électron ( $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).

Les équations de Maxwell sont locales ; elles existent également sous forme globale intégrées sur une portion d'espace à l'aide des théorèmes de Stokes (dit du "rotationnel") ou d'Ostrogradski (dit "flux divergence") ; la forme globale est celle préférée lorsqu'il y a des symétries pour déterminer le champ électrique et le champ magnétique à partir d'une distribution de charges ou de courants donnée.

## Équations de Maxwell globales dans un milieu conducteur

### Usage du théorème d'Ostrogradski



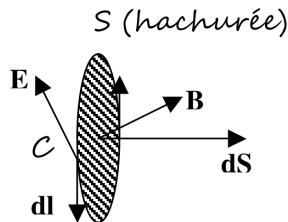
$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 &\Rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{E} dv = \iiint \rho / \varepsilon_0 dv \\ &\Rightarrow \boxed{\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q / \varepsilon_0} \end{aligned}$$

Le flux de  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à  $q/\varepsilon_0$  (théorème de Gauss,  $q$  charge intérieure)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} = 0 &\Rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{B} dv = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{\iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0} \end{aligned}$$

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif : son flux sur une surface fermée  $S$  entourant un volume  $V$  est globalement nul ; le flux magnétique entrant dans le volume  $V$  est donc égal au flux qui en sort ; en conséquence, on ne peut trouver de monopôles magnétiques.

### Usage du théorème de Stokes



$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\Rightarrow \iint \vec{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &\Rightarrow \boxed{\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t}} \end{aligned}$$

La circulation de  $\vec{E}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  et orienté est l'opposé de la variation du flux magnétique à travers n'importe quelle surface  $\mathcal{S}$  enlacée par ce contour. La surface est orientée par la règle des doigts de la main droite : pouce dans le sens de  $\mathcal{C}$ , index vers le centre de la surface enlacée par le contour, le majeur indique le vecteur surface  $\mathcal{S}$ . C'est la loi de Faraday.

$$\begin{aligned} r\vec{\omega}\vec{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &\Rightarrow \iint r\vec{\omega}\vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint j \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &\Rightarrow \boxed{\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 [I + \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t}]} \\ &\quad (\text{théorème d'Ampère généralisé}) \end{aligned}$$

La circulation de  $\vec{B}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  et orienté est proportionnelle au courant électrique et de déplacement traversant toute surface enlacée (et orientée) par ce contour.

$$\begin{aligned} \vec{B} = r\vec{\omega}\vec{A} &\Rightarrow \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint r\vec{\omega}\vec{A} \cdot d\vec{S} \\ &\Rightarrow \boxed{\Phi(\vec{B}) = \int \vec{A} \cdot d\vec{l}} \\ &\quad (\text{théorème d'Ampère du potentiel vecteur}) \end{aligned}$$

La circulation de  $\vec{A}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  et orienté est égale au flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface enlacée (et orientée) par ce contour.

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.2 Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans le vide

Dans le vide, il n'y a ni charge ( $\rho = 0$ ), ni courant ( $\vec{j} = 0$ ) :

|  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| $\operatorname{div} \vec{E} = 0$   | équation de Maxwell Gauss           |
| $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$                    | équation de Maxwell Faraday         |
| $\operatorname{div} \vec{B} = 0$   | équation de Maxwell Thomson ou flux |
| $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | équation de Maxwell Ampère          |

La combinaison de ces équations aboutit à l'équation de d'Alembert, dont les solutions sont les ondes électromagnétiques :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

où  $\Delta \vec{E} = \left( \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \right)$  est l'opérateur Laplacien, et  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  la dérivée seconde par rapport au temps.

Par exemple, une Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH) de la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

est solution de l'équation de d'Alembert ;  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(x, y, z)$  désigne un point  $M$  de l'espace ; le vecteur d'onde  $\vec{k}$  indique la direction de propagation. Sa norme  $k$  (unité :

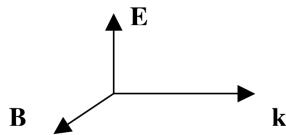
---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

$m^{-1}$ ) est liée à la pulsation  $\omega$  (unité :  $rd\ s^{-1}$ ) par la relation de dispersion  $\omega = Ck$ , où  $C$  est la vitesse de la lumière ( $\mu_0 \varepsilon_0 C^2 = 1$ ).

Dans le cas des OPPH, on montre que les opérateurs prennent la forme simplifiée suivante :

|   |  |
|---|--|
| $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$       | opérateur multiplication par $(i\omega)$       |
| $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$ | opérateur multiplication par $(-i\vec{k})$     |
| $grad = -i\vec{k}$                            | opérateur multiplication par $(-\omega^2)$     |
| $div = -i\vec{k} \wedge$                      | opérateur produit scalaire avec $(-i\vec{k})$  |
| $rot = -i\vec{k} \cdot$                       | opérateur produit vectoriel avec $(-i\vec{k})$ |
| $\Delta = -\vec{k}^2$                         | opérateur multiplication par $(-k^2)$          |



L'équation de Maxwell Faraday donne alors  $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B}$  d'où

$$\vec{B} = (\vec{k} \wedge \vec{E})/\omega$$

est le champ magnétique associé à l'onde plane. Le triplet de vecteurs  $(k, \vec{E}, \vec{B})$  forme donc un trièdre direct,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux entre eux et orthogonaux à la direction de propagation  $\vec{k}$ . Ils vibrent en phase et on a la relation  $E = C B$  entre les normes de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$ .

La densité volumique d'énergie électromagnétique locale est  $\rho_E = \varepsilon_0 E^2 (J\ m^{-3})$ .

La puissance moyenne propagée par l'onde plane est  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \rho_E \rangle C = 1/2 \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 C$  en  $W\ m^{-2}$ ) où  $|\vec{E}|$  est l'amplitude du champ électrique.

### ELM-B.3 Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques dans un diélectrique LHI

Dans un milieu diélectrique sans charge ( $\rho = 0$ ), ni courant ( $\vec{j} = 0$ ) :

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| $div \vec{D} = 0$   | équation de Maxwell Gauss           |
| $rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$      | équation de Maxwell Faraday         |
| $div \vec{B} = 0$   | équation de Maxwell Thomson ou flux |
| $rot \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | équation de Maxwell Ampère          |

$\vec{D}$  est le champ de déplacement électrique ( $Cm^{-2}$ ).

Dans un milieu diélectrique Linéaire, Homogène et Isotrope (dit LHI),

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

La permittivité  $\epsilon$  du milieu est un scalaire complexe invariable dans l'espace et le temps (mais qui peut dépendre de la pulsation de l'onde).

$\vec{P}$  est la polarisation du milieu ou moment dipolaire électronique par unité de volume induit par le champ électrique de l'onde ( $Cm^{-2}$ ). En milieu LHI,  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$  où  $\chi$  est la susceptibilité du milieu, constante complexe (sans dimension) qui dépend de la pulsation de l'onde.

On a donc dans un milieu LHI :

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}}$$

La combinaison des équations aboutit à l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

La recherche d'OPPH de la forme  $\vec{E}(r, t) = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  fournit la relation de dispersion :

$$\boxed{k = (\omega/C)(1 + \chi)^{1/2} = n(\omega/C)} \quad k \text{ est complexe}$$

permettant de définir un indice de réfraction complexe  $n(\omega) = n_1 - i n_2 = (1 + \chi)^{1/2}$  et  $\epsilon = \epsilon_0 n^2$  où  $n_1$  et  $n_2$  sont respectivement les indices de dispersion et d'absorption.

La vitesse de phase de l'onde est  $v_\phi = C/n_1(\omega) = \omega/Re(k)$ . Elle peut être supérieure à la vitesse de la lumière  $C$ .

$Re$  désigne la partie réelle.

La vitesse de groupe est par contre toujours inférieure à la vitesse de la lumière  $C$  :  $v_g = d\omega/dRe(k) = C/[n_1 + \omega(dn_1/d\omega)]$

L'énergie se propage à la vitesse de groupe. Si le milieu n'est pas dispersif,  $dn_1/d\omega = 0$ , donc  $v_\phi = v_g = C/n_1$ .

Le champ magnétique associé à l'OPPH est  $\vec{B} = (k/\omega) \vec{E}$ ; la puissance transportée est donnée par le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi} = (\vec{E} \wedge \vec{B})/\mu_0$  dont la moyenne est :

$$\boxed{< \vec{\Pi} > = 1/2 Re(\vec{E} \vec{B}^*)/\mu_0 = |\vec{E}|^2/(2\mu_0\omega) Re(k) = 1/2 \epsilon_0 |\vec{E}|^2 C n_1 = 1/2 \epsilon_0 |\vec{E}|^2 C^2 / v_\phi}$$

en  $W m^{-2}$ , où  $*$  désigne la quantité conjuguée. Une onde purement absorbée ( $k$  imaginaire pur,  $n_1 = 0$ ) ne propage pas d'énergie. Une onde évanescante ( $k$  complexe)

en propage.

$\langle \vec{\Pi} \rangle$  définit la densité d'énergie propagée par  $\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle \rho_E \rangle v_g}$  d'où

$$\boxed{\langle \rho_E \rangle = 1/2\epsilon_0 |\vec{E}|^2 C^2 / (v_\varphi v_g)}$$

Dans un milieu non dispersif,  $v_\varphi = v_g = C/n_1$ ,  $\langle \rho_E \rangle = 1/2\epsilon_0 n_1^2 |\vec{E}|^2$

### Exemple de milieu LHI : ondes dans un plasma d'électrons libres

Un électron libre de masse  $m$  et de charge  $-e$  soumis à une onde électromagnétique de champ électrique  $\vec{E}(r, t) = E_0 e^{i(\omega t)}$  a pour équation du mouvement (PFD) :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}, \text{ d'où } \vec{r} = (e/m\omega^2) \vec{E} \quad (\text{car } \frac{d^2}{dt^2} = -\omega^2 \text{ pour une solution en } e^{i\omega t})$$

La polarisation du milieu résulte de la superposition des dipôles de moment dipolaire  $\vec{p} = -e \vec{r}$ , soit :

$$\boxed{\vec{P} = -N e \vec{r}} \quad (C \text{ m}^{-2}), \text{ où } N \text{ est le nombre d'électrons par unité de volume } (m^{-3}).$$

On a donc  $\vec{P} = -(Ne^2/m\omega^2) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ ; le milieu est LHI de susceptibilité  $\boxed{\chi = -\omega_p^2/\omega^2}$  où  $\boxed{\omega_p = (Ne^2/\epsilon_0 m)^{1/2}}$  désigne la pulsation plasma électronique.

La relation de dispersion des ondes s'écrit :

$$\boxed{k^2 = \omega^2/C^2(1 + \chi) = (\omega^2 - \omega_p^2)/C^2 = n^2(\omega/C)^2}$$

$\omega_p$  apparaît donc comme une pulsation de coupure en deça de laquelle l'onde est absorbée ( $k$  imaginaire pur). Lorsque  $\omega > \omega_p$ ,  $k$  est réel pur, le plasma possède un indice de réfraction  $n$  :

$$\boxed{n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2} < 1}$$

La vitesse de phase  $v_\varphi = C/n$  est donc supérieure à  $C$ ; cependant la vitesse de groupe  $v_g$ , liée à la vitesse de phase par la relation

$$\boxed{v_g v_\varphi = C^2} \quad \text{est toujours inférieure à } C.$$

Pour  $\omega > \omega_p$ ,  $\langle \vec{\Pi} \rangle = |\vec{E}|^2/(2\mu_0\omega)k = |\vec{E}|^2/(2\mu_0 v_\varphi) = 1/2\epsilon_0 |\vec{E}|^2(C^2/v_\varphi) = 1/2\epsilon_0 |\vec{E}|^2 v_g$  ( $W \text{ m}^{-2}$ ).

L'onde transporte donc l'énergie volumique  $\boxed{1/2\epsilon_0 |\vec{E}|^2}$  ( $J \text{ m}^{-3}$ ) à la vitesse de groupe  $v_g$ .

## Application

La fréquence plasma varie en  $N^{1/2}$ ; or la densité électronique  $N$  décroît au fur et à mesure que l'on s'éloigne du soleil. En observant avec les radiotélescopes à différentes fréquences, on explorera donc des couches atmosphériques stratifiées en altitude. Plus la fréquence est élevée, et plus on est proche de la surface de l'étoile.

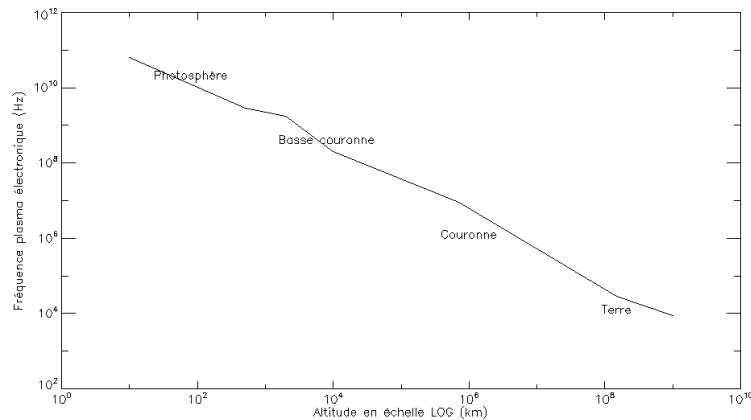


FIGURE 1 – Fréquence du plasma électronique en fonction de l'altitude, Valeurs de  $\nu_p = \omega_p/2\pi$  dans l'atmosphère solaire

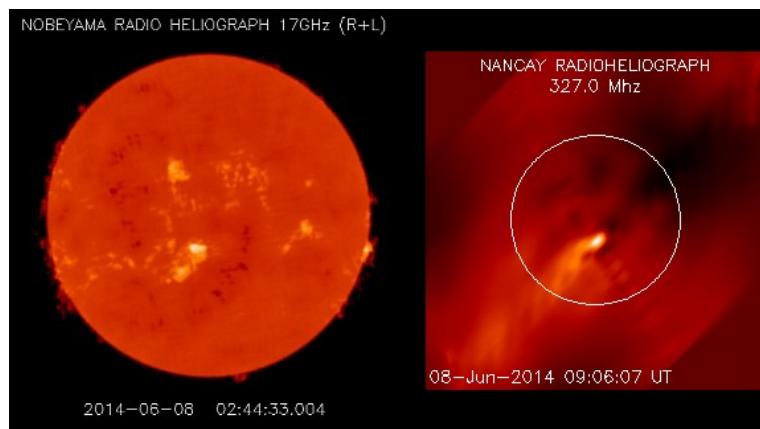


FIGURE 2 – Observations du soleil à 17 GHz et à 327 MHz

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.4 Équations de Maxwell en régime stationnaire (ou permanent) dans un conducteur (ou dans le vide)

##### Équations de Maxwell

Dans le cas stationnaire,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ , on obtient :

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ | équation de Maxwell Gauss           |
| $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$            | équation de Maxwell Faraday         |
| $\operatorname{div} \vec{B} = 0$                  | équation de Maxwell Thomson ou flux |
| $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$      | équation de Maxwell Ampère          |

Les équations sont découplées en régime stationnaire. Dans le vide, on aurait  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

L'équation de Maxwell Gauss indique que les charges statiques  $\rho$  constituent la source du champ électrique  $\vec{E}$ .

L'équation de Maxwell Ampère indique que les courants électriques permanents  $\vec{j}$  constituent la source du champ magnétique  $\vec{B}$ .

L'équation de Maxwell Faraday indique que le champ électrique  $\vec{E}$  est à circulation conservative : le théorème de Stokes montre que sa circulation sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est nulle :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \iint \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

En régime stationnaire, on a  $\vec{E} = \text{grad } V$  et  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

L'électrostatique, ou étude des champs électriques  $\vec{E}$  générés par des charges statiques  $\rho$ , est basée sur les deux premières équations.

La magnétostatique, ou étude des champs magnétiques  $\vec{B}$  générés par des courants permanents  $\vec{j}$ , est basée sur les deux dernières équations.

L'intensité du courant électrique  $I$  (unité : Ampère  $A$ ) est le flux de la densité volumique de courant  $\vec{j}$  à travers la section  $\mathcal{S}$  du conducteur ( $I$  est un scalaire, mais  $\vec{j}$  est un vecteur) :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (I \text{ en } A, \vec{j} \text{ en } A \text{ m}^{-2})$$

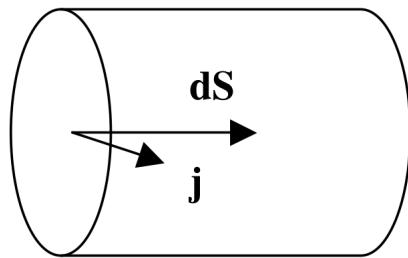


FIGURE 1 – Section du conducteur  $\mathcal{S}$

Pour un conducteur filiforme,  $\vec{j}$  et  $\vec{S}$  (vecteur surface totale de la section du conducteur) sont colinéaires, on peut écrire :  $I = jS$  où  $S$  est la section du fil en  $m^2$ .

### Loi des noeuds

L'équation de conservation de la charge en régime statique devient  $\text{div } \vec{j} = 0$  ou  $\iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$  sur une surface fermée  $\mathcal{S}$  : c'est la loi des noeuds. Elle signifie que  $\vec{j}$  est à flux conservatif, autrement dit qu'à l'intérieur d'un volume fermé par une surface  $\mathcal{S}$ , il n'y a pas d'accumulation de courant, soit :

$$\text{courants entrants} = \text{courants sortants}$$

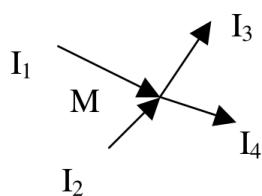


FIGURE 2 – loi des noeuds en  $M$  :  $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$

## Électrostatique

De l'équation de Maxwell Gauss  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  et de  $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}} V$ , on tire l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Dont la solution est

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} dv$$

Le volume  $\mathcal{V}$  contient la charge  $q = \iiint \rho dv$

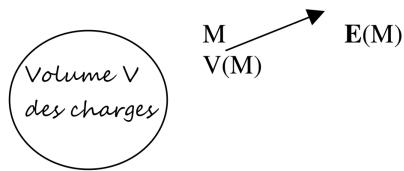


FIGURE 3 – Volume des charges  $\mathcal{V}$

L'intégrale porte sur le volume  $\mathcal{V}$  contenant les charges et  $r$  est la distance de la charge élémentaire  $dq = \rho dv$  située en  $P$  au point  $M$  où l'on considère son effet. On en tire pour le champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho \vec{u}}{r^2} dv$$

$\vec{u}$  étant le vecteur unitaire orienté de la charge élémentaire  $dq = \rho dv$  située en  $P$  vers le point  $M$  où l'on recherche le champ électrique. En particulier,  $\vec{u} = \vec{PM}/\|\vec{PM}\|$  et  $\vec{\operatorname{grad}}(1/r) = -\vec{u}/r^2$ .

Pour une charge ponctuelle  $q$ , c'est la loi de Coulomb :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q \vec{u}}{r^2}$$

Les quantités élémentaires sont donc :  $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dv}{r}$  et  $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dv \vec{u}}{r^2}$

La force exercée sur une charge  $q'$  par le champ électrique  $\vec{E}$  est  $\vec{F} = q' \vec{E}$ .

En conséquence, la force s'exerçant entre deux charges ponctuelles  $q$  et  $q'$  est

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q' q \vec{u}}{r^2}$$

Elle est répulsive (charges de même signe) ou attractive (charges de signe opposé).

Le champ d'une charge ponctuelle vérifie  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  et l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ .

### Théorème de Gauss de l'électrostatique

Imaginons un volume  $\mathcal{V}$  entouré par une surface  $\mathcal{S}$  fermée et contenant une distribution volumique de charges  $\rho(x, y, z)$ .

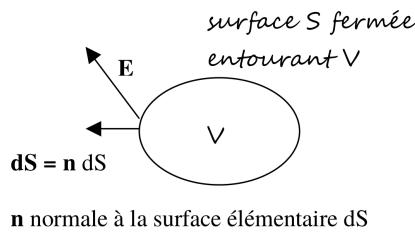


FIGURE 4 – volume  $\mathcal{V}$  entouré par une surface  $\mathcal{S}$  fermée

Intégrons l'équation de Maxwell Gauss  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$  sur ce volume  $\mathcal{V}$  :

La charge intérieure à  $\mathcal{V}$  est

$$q = \iiint \rho dv$$

$$\iiint \operatorname{div} \vec{E} dv = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Le théorème d'Ostrogradski indique que  $\iiint \operatorname{div} \vec{E} dv = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$  d'où le théorème de Gauss :

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum \text{charges intérieures}}{\varepsilon_0} \quad (\text{charge mesurée en } C)$$

Le flux du champ électrique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est égal à la somme des charges intérieures au volume  $\mathcal{V}$  entouré par cette surface divisée par  $\varepsilon_0$ .

Ce théorème est très utilisé pour déterminer le champ électrique lorsque les symétries du problème permettent de calculer aisément son flux.

### Lignes du champ électrique

Le champ électrique  $\vec{E}$  est tangent en tout point  $M$  d'une ligne de champ.

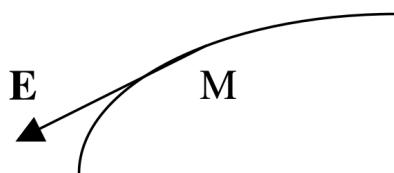


FIGURE 5 – Lignes du champ électrique

Comme  $\overrightarrow{dOM} = (dx, dy, dz)$  est tangent en  $M$  à la ligne de champ, alors  $\vec{E} = k \overrightarrow{dOM}$ , où  $k$  est un nombre réel quelconque. En éliminant  $k$ , on obtient le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

$V$  étant le potentiel,  $dV = \vec{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{dOM} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} < 0$  en suivant une ligne de champ. Ainsi, le potentiel électrostatique décroît le long d'une ligne de champ.

### Symétries du champ électrique

Le champ électrique  $\vec{E}$  est dans le plan de symétrie des charges, ou orthogonal au plan d'antisymétrie des charges.

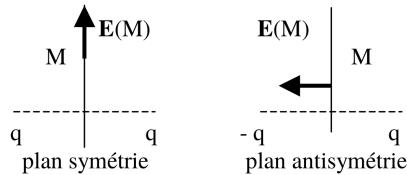


FIGURE 6 – Symétries du champ électrique

### Lignes ou surfaces équipotentielles

Le potentiel  $V$  est constant sur une ligne équipotentielle. Comme  $dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dOM} = 0$ ,  $\overrightarrow{dOM}$  étant tangent à la ligne équipotentielle,  $\vec{E}$  et  $\overrightarrow{dOM}$  sont orthogonaux. Ainsi, les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

### Exemple d'application du théorème de Gauss : champ électrique d'une sphère uniformément chargée en surface

On considère une sphère de rayon  $R$  uniformément chargée en surface.

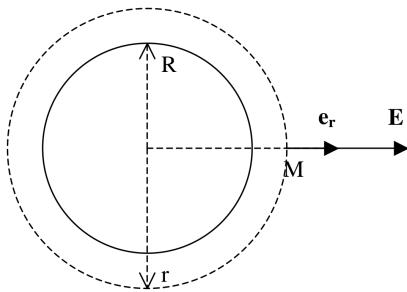


FIGURE 7 – Sphère de Gauss

La densité surfacique de charge  $\sigma$  ( $C m^{-2}$ ) est uniforme, la sphère porte la charge  $q = \sigma 4\pi R^2$ . Déterminer  $\vec{E}(M)$  en tout point  $M$  de l'espace se fait en plusieurs étapes à respecter :

(1) invariances : le problème est à symétrie sphérique et dépend de la seule variable radiale  $r$

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \hat{e}_r$$

(2) symétries : tout plan passant par le centre de la sphère est plan de symétrie des charges

$$\Rightarrow \vec{E} \text{ est radial, } \vec{E} = E(r) \hat{e}_r$$

(3) on définit une surface de Gauss : sphère de rayon  $r$ ; le flux de  $\vec{E}(r)$  à travers cette surface orientée vers l'extérieur est égal à  $4\pi r^2 E(r)$

$$(4) \text{ espace } r > R : 4\pi r^2 E(r) = \frac{\text{charge intérieure}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \sigma 4\pi R^2 / \varepsilon_0 \Rightarrow E(r) = (\sigma / \varepsilon_0) R^2 / r^2$$

$$(5) \text{ espace } r < R : 4\pi r^2 E(r) = \text{charge intérieure} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

$$\rightarrow \text{À la surface de la sphère } E(R) = \sigma / \varepsilon_0$$

C'est le théorème de Coulomb.

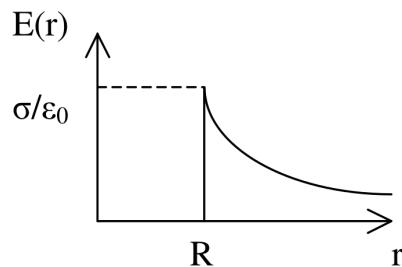


FIGURE 8 – Module du champ électrique en fonction de la distance

Le potentiel  $V(r)$  s'obtient par  $E(r) = -dV/dr$  sachant que  $V(\infty) = 0$ .

$$r > R : V(r) = (\sigma / \varepsilon_0) R^2 / r$$

$$r < R : V(r) = \text{constante} = (\sigma / \varepsilon_0) R$$

Le champ électrique est discontinu en  $r = R$ ; par contre le potentiel est toujours continu.

### Analogie électrostatique/gravitation : équations du champ de gravitation

Le champ de gravitation créé par une masse  $m$  obéit à la loi de Newton :

$$\vec{G}(M) = -K m \vec{u} / r^2 \quad (m s^{-2})$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire allant de la masse  $m$  au point  $P$  vers le point  $M$  où l'on considère ses effets gravitationnels ( $\vec{u} = \overrightarrow{PM} / \|\overrightarrow{PM}\|$ ).

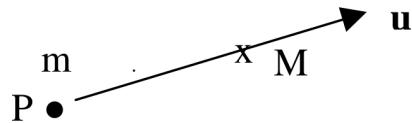


FIGURE 9 – Loi de Newton

$K$  est la constante d'attraction universelle ( $6.67 * 10^{-11}$  unités SI).  $r = PM$  (en mètres) est la distance qui sépare le point  $M$  de la masse  $m$  (en kg).

Cette loi est analogue à la loi de Coulomb  $\vec{E}(M) = (1/4\pi\epsilon_0)q \vec{u}/r^2$  ( $V m^{-1}$ )

Cependant, les forces de gravitation sont purement attractives, contrairement aux forces électrostatiques qui sont attractives ou répulsives selon le signe des charges en interaction.

En remplaçant  $-K$  par  $1/4\pi\epsilon_0$  et  $\vec{E}$  par  $\vec{G}$  dans les deux équations de Maxwell du champ électrique, on obtient les équations du champ de gravitation :

|                                     |                             |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| $\text{div } \vec{G} = -4\pi K\rho$ | équation de Maxwell Gauss   |
| $\text{rot } \vec{G} = \vec{0}$     | équation de Maxwell Faraday |

où  $\rho$  est désormais la masse volumique ( $kg m^{-3}$ ).

Le champ de gravitation  $\vec{G}$  est à circulation conservative, il dérive d'un potentiel de gravitation  $V$  par la relation :

$$\vec{G} = -\vec{\text{grad}} V \quad (V \text{ en } m^2 s^{-2})$$

Le potentiel  $V$  est solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V = 4\pi K\rho$$

Dont la solution est

$$V(M) = -K \iiint [\rho/r] dv$$

l'intégrale portant sur le volume contenant les masses et  $r$  étant la distance de la masse élémentaire  $dm = \rho dv$  au point  $M$  où l'on considère la gravitation. On en tire pour le champ gravitationnel :

$$\vec{G}(M) = -K \iiint [\rho \vec{u}/r^2] dv \quad (\text{unité : } m s^{-2})$$

$\vec{u}$  étant le vecteur unitaire orienté de la masse élémentaire  $dm = \rho dv$  vers le point  $M$  où l'on recherche le champ de gravitation.

### Théorème de Gauss du champ de gravitation

Le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est égal à la somme des masses (en  $kg$ ) intérieures au volume  $\mathcal{V}$  entouré par cette surface multipliée par  $-4\pi K$

$$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi K (\sum \text{masses intérieures})$$

Les symétries du champ de gravitation sont identiques à celles du champ électrostatique : le champ appartient au plan de symétrie des masses.

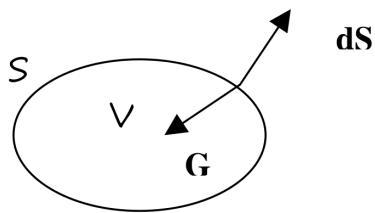


FIGURE 10 – Champ de gravitation

Masse intérieure :

$$M = \iiint \rho dv \text{ sur le volume } \mathcal{V}$$

*Conséquence* : champ de gravitation à la surface d'un corps sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$

$\vec{G}$  est à symétrie sphérique sur la sphère de rayon  $R$ , donc :

$$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi R^2 G$$

D'après le théorème de Gauss,

$$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi K M, \quad \text{d'où} \quad \vec{G} = -KM/R^2 \vec{u}$$

appelé aussi champ de pesanteur. Tout se passe comme si la masse  $M$  était ponctuelle et ramenée au centre de la sphère de rayon  $R$ . On note en général ce champ de pesanteur  $g = KM/R^2$ . Il vaut  $9.81 \text{ m s}^{-2}$  à la surface de la Terre et  $275 \text{ m s}^{-2}$  à la surface du Soleil.

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.4 Équations de Maxwell en régime stationnaire (ou permanent) dans un conducteur (ou dans le vide)

##### Magnétostatique

De l'équation de Maxwell Ampère  $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  et de  $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$ , en complétant par la jauge de Coulomb  $div \vec{A} = 0$ , on tire l'équation de Poisson du potentiel vecteur :

$$\boxed{\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}}$$

Dont la solution est (par analogie avec l'équation de Poisson)

$$\boxed{\vec{A}(M) = (\mu_0/4\pi) \iiint [\vec{j}/r] dv}$$

l'intégrale portant sur le volume contenant les courants et  $r$  étant la distance des courants  $\vec{j}$  au point  $M$  où l'on considère ses effet. On en tire pour le champ magnétique la loi de Biot et Savart par  $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A}$ , qui fournit après évaluation de  $\vec{rot}(\vec{j}/r)$  :

$$\boxed{\vec{B}(M) = (\mu_0/4\pi) \iiint [\vec{j} \wedge \vec{u}/r^2] dv}$$

$\vec{u}$  étant le vecteur unitaire orienté du courant  $\vec{j}$  vers le point  $M$  où l'on étudie le champ magnétique.

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

Pour des courants filiformes dans lesquels circule un courant d'intensité  $i$ , la loi de Biot et Savart s'écrit aussi :

$$\vec{B}(M) = (\mu_0/4\pi) \int i d\vec{l} \wedge \vec{u}/r^2 \quad \text{de potentiel vecteur associé} \quad \vec{A}(M) = (\mu_0/4\pi) \int i d\vec{l}/r$$

l'intégrale curviligne portant sur l'élément de courant  $d\vec{l}$  et  $\vec{u} = \overrightarrow{PM}/\|\overrightarrow{PM}\|$  étant le vecteur unitaire orienté du courant élémentaire  $i d\vec{l}$  situé en  $P$  vers le point  $M$  où l'on calcule le champ magnétique.

Les champs élémentaires sont donc :

$$d\vec{B} = (\mu_0/4\pi)i d\vec{l} \wedge \vec{u}/r^2 \quad \text{et} \quad d\vec{A} = (\mu_0/4\pi)i d\vec{l}/r$$

Pour une charge ponctuelle  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  la loi de Biot et Savart devient :

$$\vec{B}(M) = (\mu_0/4\pi)q\vec{v} \wedge \vec{u}/r^2 \quad \text{de potentiel vecteur associé} \quad \vec{A}(M) = (\mu_0/4\pi)q d\vec{l}/r$$

toujours avec  $\vec{u} = \overrightarrow{PM}/\|\overrightarrow{PM}\|$  si la charge est située au point  $P$ .

**Un exemple simple d'application de la loi de Biot et Savart : champ magnétique au centre d'une spire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $i$**

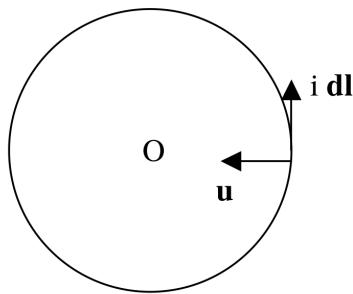


FIGURE 1 – Spire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $i$

$$d\vec{B}(O) = (\mu_0/4\pi)i d\vec{l} \wedge \vec{u}/R^2$$

$d\vec{l}$  et  $\vec{u}$  sont orthogonaux,  $d\vec{B}$  est orthogonal au plan de la figure (produit vectoriel, règle des doigts)

$$dB(O) = (\mu_0/4\pi)i dl/R^2 \text{ or } dl = Rd\theta, \text{ d'où } B(O) = (\mu_0/4\pi) \int_0^{2\pi} id\theta/R$$

$$B(O) = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

## Cas magnétostatiques particuliers : champ "potentiel" et "sans force" dans le vide

Dans le vide, sans courant ( $\vec{j} = \vec{0}$ ), l'équation de Maxwell Ampère s'écrit  $\vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{0}$ .

En astrophysique, il existe des champs sans courant : on les appelle "champs potentiels". En calculant,  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{B})$  sachant que  $\text{div}\vec{B} = 0$ , on obtient l'équation de Laplace dont  $\vec{B}$  est solution :

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \vec{0}}$$

$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{0}$  implique que  $\vec{B}$  dérive d'une fonction potentiel  $\varphi$  telle que  $\boxed{\vec{B} = \vec{\text{grad}}\varphi}$

### Champs potentiels dans un plan (xOy)

Dans un espace à deux dimensions (plan  $xOy$ ), avec  $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$  dépendant seulement des coordonnées  $x$  et  $y$  de l'espace, on peut écrire  $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$  où  $\vec{A} = \psi(x, y)\vec{e}_z$ , ce qui implique puisque

$$\vec{\text{rot}}[\psi(x, y)\vec{e}_z] = \psi(x, y)\vec{\text{rot}}[\vec{e}_z] + \vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{e}_z \text{ et } \vec{\text{rot}}[\vec{e}_z] = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{e}_z} \quad \text{avec} \quad \vec{\text{grad}}(\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0).$$

$$\begin{cases} B_x = \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ B_y = \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

Les lignes du champ magnétique sont telles que  $\vec{B} = k\overrightarrow{OM}$  ( $k$  constante quelconque exprimant la colinéarité entre  $\vec{B}$  et la ligne de champ) ; elles sont donc données par l'équation  $dy/dx = B_y/B_x$ , soit :

$$dy/dx = -(\partial\psi/\partial x)/(\partial\psi/\partial y)$$

d'où  $(\partial\psi/\partial x)dx + (\partial\psi/\partial y)dy = 0$ , c'est à dire  $\psi(x, y) = \text{constante}$ .

Quant aux lignes équipotentielles, elles sont données par  $\varphi(x, y) = \text{constante}$ , et en conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x, y) = \text{constante} &\text{ est l'équation des lignes équipotentielles} \\ \psi(x, y) = \text{constante} &\text{ est l'équation des lignes de champ} \end{aligned}}$$

De l'égalité  $\vec{B} = \vec{\text{grad}}\varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y) = \vec{\text{grad}}\psi \wedge \vec{e}_z = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ , on voit que les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  obéissent aux conditions de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial\varphi/\partial x = \partial\psi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial x \end{cases}$$

impliquant que ces fonctions sont harmoniques :

$$\boxed{\Delta\varphi = \Delta\psi = 0}$$

Définissons le potentiel complexe :  $f(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  et introduisons les variables complexes  $z = x + iy$  et  $z^* = x - iy$  (quantité conjuguée).

On a les relations réciproques  $x = (z + z^*)/2$  et  $y = (z - z^*)/(2i)$  de sorte que le potentiel complexe est aussi fonction de  $z$  et  $z^*$  :  $f(x, y) = f(z, z^*)$ . Calculons  $\partial f / \partial z^*$  :

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = 1/2 \frac{\partial f}{\partial x} + (i/2) \frac{\partial f}{\partial y}$$

Avec  $f = \varphi + i\psi$ , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + (i/2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Utilisons les conditions de Cauchy ci dessus entre  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + (i/2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le potentiel complexe  $f = \varphi + i\psi$  est une fonction analytique de la seule variable  $z = x + iy$

Évaluons maintenant  $\partial f / \partial z$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= 1/2 \frac{\partial f}{\partial x} - (i/2) \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Avec  $f = \varphi + i\psi$ , on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - (i/2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

Utilisons de nouveau les conditions de Cauchy entre  $\varphi$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - (i/2) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= 1/2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ &= B_x - iB_y \end{aligned}$$

Conclusion : Le champ magnétique complexe défini par  $B = B_x - iB_y$  dérive d'une fonction potentiel  $f(z)$  analytique quelconque telle que  $B = B_x - iB_y = df(z)/dz$

N'importe quelle fonction  $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$  convient pourvu qu'elle ait un sens physique.

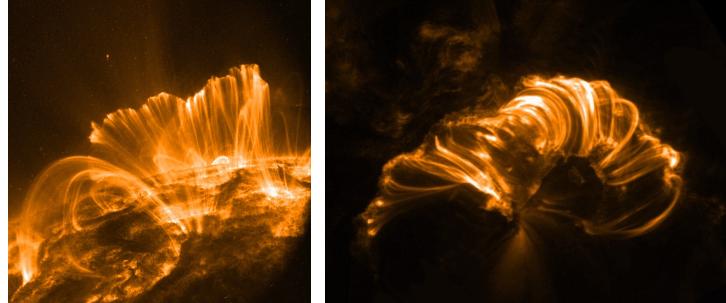
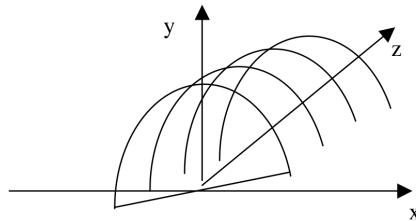


FIGURE 2 – Arcades de champ magnétique à la surface du soleil (satellite TRACE/NASA)

Il existe aussi des champs "sans force", c'est-à-dire pour lesquels la force de Laplace  $\vec{j} \wedge \vec{B}$  est nulle. C'est le cas lorsque le courant  $\vec{j}$  est colinéaire au champ magnétique  $\vec{B}$ , soit  $\mu_0 \vec{j} = \alpha \vec{B}$ ,  $\alpha$  étant une constante.  $\vec{B}$  est alors solution de  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \alpha \vec{B}$ . En prenant le rotationnel, sachant que  $\text{div} \vec{B} = 0$ , on obtient l'équation d'Helmoltz dont  $\vec{B}$  est solution :

$$\boxed{\Delta \vec{B} + \alpha^2 \vec{B} = \vec{0}}$$



Pour résoudre cette équation dans le plan  $(xOy)$ , on pose :

$$\vec{B}(x, y) = \alpha \vec{\text{rot}}(f \vec{e}_z) + \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(f \vec{e}_z)$$

où  $f$  est un "pseudo potentiel" fonction de  $x$  et de  $y$  seulement (symétrie de translation selon  $Oz$ ).

Développons :

$$\vec{\text{rot}}(f \vec{e}_z) = f \vec{\text{rot}}(\vec{e}_z) + \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_z = \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}}(f \vec{e}_z) = \vec{\text{grad}} \text{div}(f \vec{e}_z) - \Delta f \vec{e}_z = -\Delta f \vec{e}_z$$

car  $\text{div}(f \vec{e}_z)$  est nul puisque  $f$  ne dépend pas de  $z$ .

On a donc :  $\vec{B}(x, y) = \alpha \vec{\text{grad}} f \wedge \vec{e}_z - \Delta f \vec{e}_z$  d'où les coordonnées :

$$\boxed{\vec{B} \left( \alpha \frac{\partial f}{\partial y}, -\alpha \frac{\partial f}{\partial x}, -\Delta f \right)}$$

De  $\vec{rot} \vec{B} = \alpha \vec{B}$ , on tire alors deux équations :

$$\begin{cases} \partial(\Delta f + \alpha^2 f)/\partial y = 0 \\ \partial(\Delta f + \alpha^2 f)/\partial x = 0 \end{cases}$$

qui se résume à une unique équation d'Helmoltz pour le "pseudo potentiel"  $f(x, y)$  :

$$\boxed{\Delta f + \alpha^2 f = 0}$$

### Théorème d'Ampère de la magnétostatique

Imaginons une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur un contour  $\mathcal{C}$  fermé et orienté, et traversée par une distribution volumique de courants  $\vec{j}(x, y, z)$ .

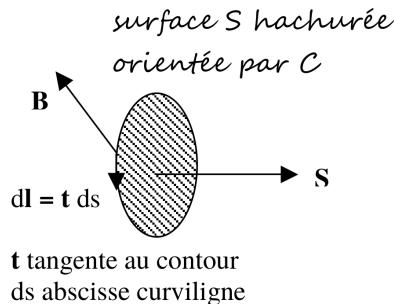


FIGURE 3 – Surface s'appuyant par un contour

Intégrons l'équation de Maxwell Ampère  $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  sur cette surface  $\mathcal{S}$  :

L'intensité enlacée est  $\boxed{I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}}$  où  $d\vec{S}$  est orientée par  $\mathcal{C}$

$$\iint \vec{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

Le théorème de Stokes indique que :

$$\iint \vec{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

d'où le théorème d'Ampère :

$$\boxed{\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum \text{Intensités enlacées}} \quad (\text{intensité mesurée en } A)$$

La circulation du champ magnétique  $\vec{B}$  sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égale à la somme des intensités enlacées par ce contour multipliée par  $\mu_0$ .

Ce théorème est très utilisé pour déterminer le champ magnétique lorsque les symétries du problème permettent de calculer aisément sa circulation.

### Symétries du champ magnétique

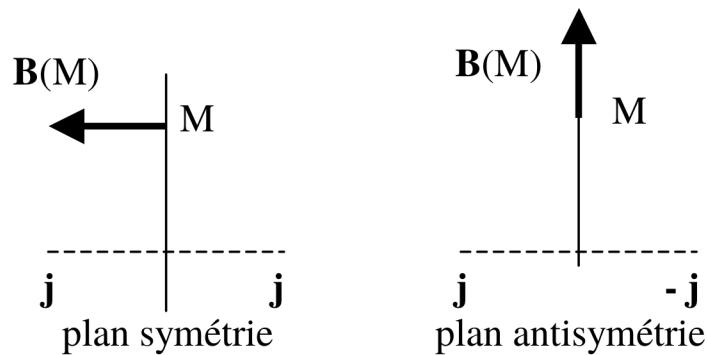


FIGURE 4 – Symétries du champ magnétique

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est dans le plan d'antisymétrie des courants, ou orthogonal au plan de symétrie des courants.

### Lignes du champ magnétique

Comme en électrostatique, elles sont données par  $\vec{B} = k \overrightarrow{dOM}$  où  $\overrightarrow{dOM} = (dx, dy, dz)$  est tangent en  $M$  à la ligne de champ,  $k$  nombre réel indiquant la colinéarité, d'où :

$$dx/B_x = dy/B_y = dz/B_z$$

Premier exemple d'application du théorème d'Ampère : champ magnétique créé par un fil infini

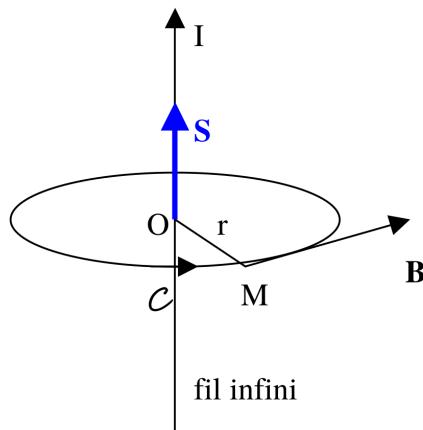


FIGURE 5 – Champ magnétique créé par un fil infini

On procède en plusieurs étapes :

(1) invariances : le problème est à symétrie cylindrique ; il ne dépend que de la variable radiale  $r$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$$

(2) symétries : le plan contenant le point  $M$  et le fil est un plan de symétrie des courants,  $\vec{B}$  y est donc orthogonal

$$\Rightarrow \vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$$
 est orthoradial

(3) on définit un contour  $C$ , ici cercle de rayon  $r$ , ayant le fil pour axe, orienté de sorte qu'il définisse un vecteur surface  $S$  dans le sens du courant  $I$

- Orientation du contour (règle de la main droite) : pouce sur  $C$ , l'index vise  $O$ , majeur =  $S$

- Orientation de  $\vec{B}$  (règle de la main droite) : pouce sur  $I$ , l'index vise  $M$ , majeur =  $\vec{B}$  (la formule de Biot et Savart indique en effet que  $d\vec{B}$  est proportionnel à  $I d\vec{l} \wedge \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire de  $O$  vers  $M$ ,  $I d\vec{l}$  étant un élément de courant)

(4) Circulation de  $\vec{B}$  sur le contour  $C$  :  $B 2\pi r$

(5) Courant enlacé par le contour  $C$  :  $I \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow \boxed{B(r) = \mu_0 I / (2\pi r)}$

Potentiel vecteur  $\vec{A}$  : on sait qu'il est porté par le courant puisque  $d\vec{A}$  est proportionnel à  $I d\vec{l}$ .

Posons alors  $\vec{A} = A(r)\vec{e}_z$  où  $\vec{e}_z$  désigne un vecteur unitaire sur l'axe du fil infini.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\text{rot}} \vec{A} \\ &= \vec{\text{rot}}[A(r)\vec{e}_z] \\ &= A(r)\vec{\text{rot}}\vec{e}_z + \vec{\text{grad}}A(r) \wedge \vec{e}_z \\ &= -dA/dr \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

d'où  $dA/dr = -\mu_0 I/(2\pi r)$  et par intégration  $A(r) = -(\mu_0 I/2\pi) \ln(r) + \text{constante}$ .

Le potentiel diverge à l'infini, en raison de la présence de courants à l'infini.

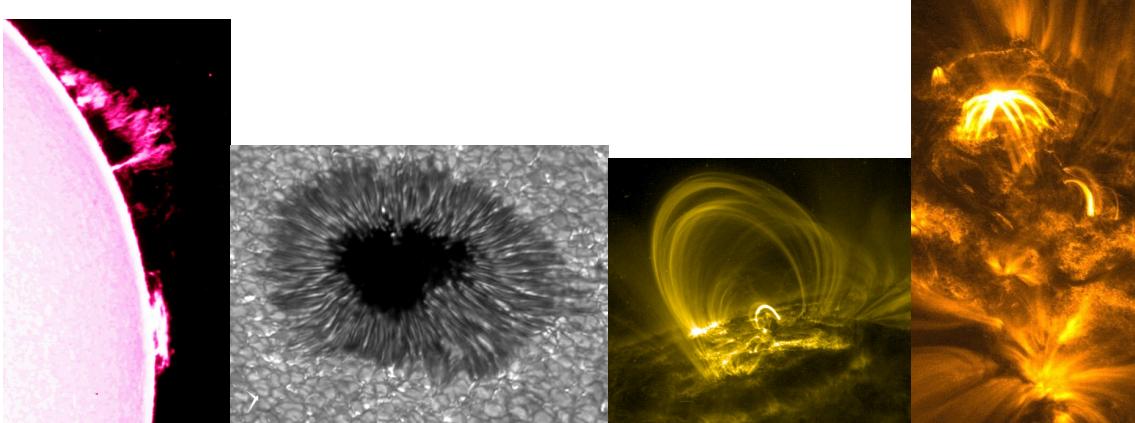


FIGURE 6 – Quelques manifestations des champs magnétiques dans l'atmosphère solaire.

De gauche à droite :

- 1) protubérance : champ faible (environ 0.001 Tesla)
- 2) tache solaire : champ fort,  $B = 0.1$  à  $0.2$  Tesla
- 3) boucle de champ magnétique reliant deux taches de polarités opposées, champ décroissant des pieds (ancrage dans les taches) vers le sommet, hauteur voisine de 100 000 km
- 4) éruption : libération d'énergie magnétique au sein de configurations magnétiques instables

### Second exemple d'application du théorème d'Ampère : le solénoïde fini

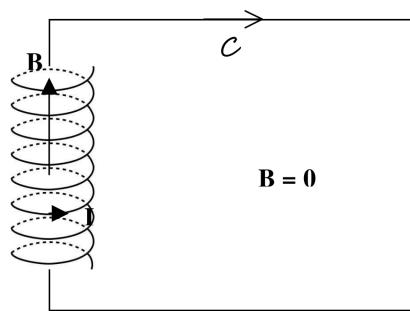


FIGURE 7 – Le solénoïde fini

Le solénoïde est parcouru par un courant d'intensité  $I$  et sa longueur est  $l \rightarrow \infty$  ; son nombre de spires par unité de longueur est  $n$

- Circulation de  $\vec{B}$  sur le contour  $\mathcal{C}$  :  $Bl$
- Courant enlacé par le contour  $\mathcal{C}$  :  $(nl)I$  car le courant total traversant la surface

enlacée par le contour est  $Ix$  nombre de spires

$$\Rightarrow B = \mu_0 n I$$

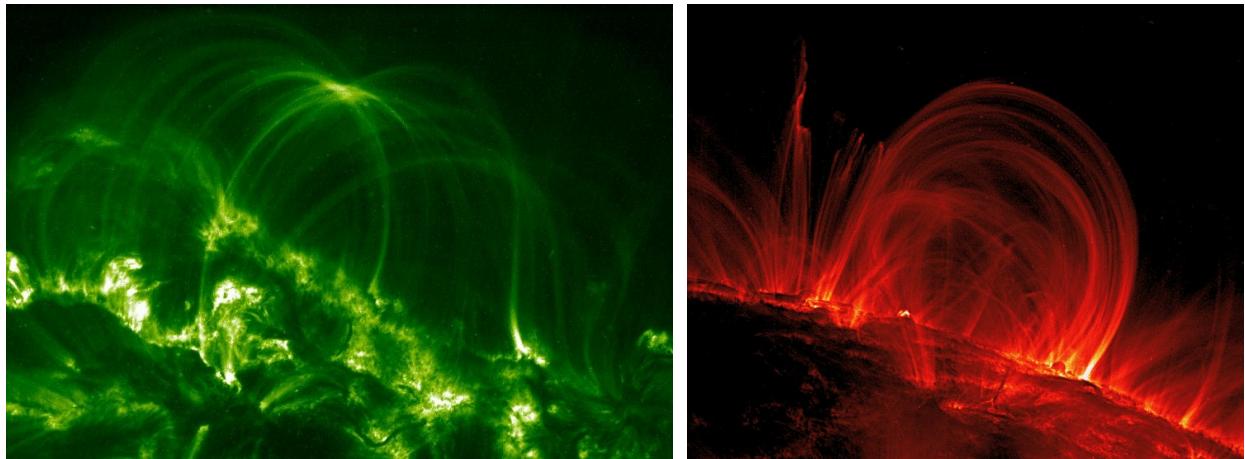


FIGURE 8 – Des boucles de champ magnétique à la surface du soleil (satellite TRACE/NASA)

### Dipôle magnétique

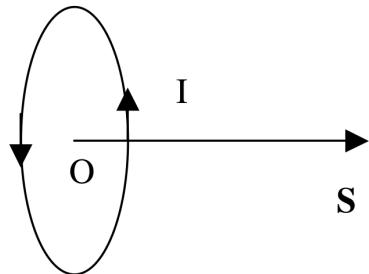


FIGURE 9 – Dipôle magnétique

Moment magnétique d'une spire de surface  $\mathcal{S}$  parcourue par un courant électrique  $I$

$$\mathcal{M} = I \vec{S}$$

$\vec{S}$  est le vecteur surface de la spire, orienté par le sens du courant  $I$  (règle des doigts : pouce sur  $I$ , l'index vise  $O$ , majeur =  $\vec{S}$ ).

À grande distance, la spire de courant constitue un dipôle magnétique. Le potentiel vecteur créé par ce dipôle est, au point  $M$  placé à grande distance :

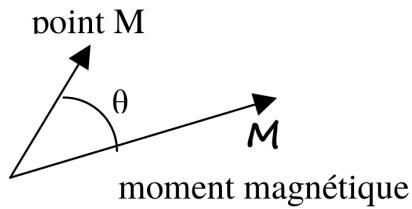
$$A(M) = (\mu_0/4\pi)\mathcal{M} \wedge \vec{u}/r^2$$

où  $r$  est la distance du point  $O$  (centre du dipôle) au point  $M$  et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$ .

Le champ magnétique à grande distance  $\vec{B} = r\vec{\omega}\vec{A}$  est

$$\boxed{\vec{B}(M) = -(\mu_0/4\pi)\vec{\text{grad}}(\mathcal{M} \cdot \vec{u}/r^2)}$$

Plaçons nous dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $\theta$  désignant l'angle entre le moment magnétique  $\mathcal{M}$  et le vecteur de position  $\overrightarrow{OM}$ .



$$\begin{aligned}\vec{B}(M) &= -(\mu_0/4\pi)\mathcal{M} \left[ \frac{\partial(\cos\theta/r^2)}{\partial r}, (1/r) \frac{\partial(\cos\theta/r^2)}{\partial\theta} \right] \\ \vec{B}(M) &= (\mu_0/4\pi) (\mathcal{M}/r^3) [2\cos\theta, \sin\theta]\end{aligned}$$

- Dans la direction du moment magnétique du dipôle,  $B(r, 0) = 2(\mu_0/4\pi)(\mathcal{M}/r^3)$ .
- Dans la direction orthogonale,  $B(r, \pi/2) = (\mu_0/4\pi)(\mathcal{M}/r^3)$  est deux fois moindre.
- Lignes de champ : on écrit  $\vec{B} = k\overrightarrow{OM}$  ( $k$  réel quelconque) soit, en éliminant  $k$  :

$$dr/B_r = rd\theta/B_\theta \Rightarrow dr/2\cos\theta = rd\theta/\sin\theta$$

ce qui donne par intégration :

$$\boxed{r = \sin^2\theta \times \text{constante}}$$

**Application : champ magnétique terrestre et champ magnétique solaire**

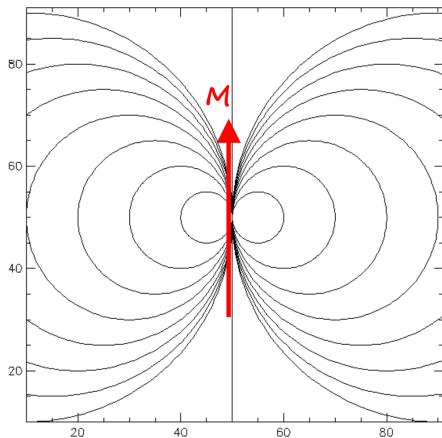


FIGURE 10 – Lignes de champ magnétique du dipôle (valable seulement à grande distance)

Le champ magnétique dipolaire de la Terre ou du Soleil est proche de celui d'un dipôle porté par l'axe Nord Sud. Le champ est vertical aux pôles, et y est deux fois plus intense qu'à l'équateur où il est horizontal, comme le montre la théorie ci dessus. Dans le cas de la Terre ou du Soleil, le champ dipolaire est de l'ordre de  $10^{-4} T$ .

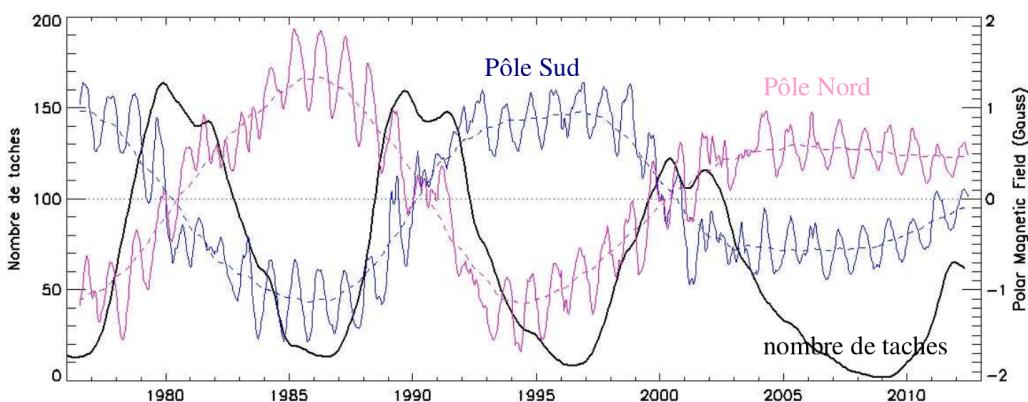


FIGURE 11 – Observations des champs des pôles Nord et Sud du soleil (Wilcox)

Le champ dipolaire du Soleil est cyclique : il se renverse tous les 11 ans pour former un cycle magnétique de 22 ans.

#### Couple et énergie du dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur

L'énergie potentielle est définie par  $Ep = -I\Phi$  où  $\Phi = \iint \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S}$  est le flux magnétique ; sur la surface petite d'un dipôle,  $\vec{B}_{ext}$  est uniforme et  $Ep = -\vec{B}_{ext} \cdot \iint I d\vec{S} = -\mathcal{M} \cdot \vec{B}_{ext}$

Un dipôle dans un champ magnétique acquiert donc une énergie potentielle  $Ep = -\mathcal{M} \cdot \vec{B}_{ext}$

Il subit une force  $F = \vec{\text{grad}}(\mathcal{M} \cdot \vec{B}_{ext}) = -\vec{\text{grad}}Ep$  qui est nulle si le champ est uniforme.

Si le dipôle peut pivoter sur lui même,  $dEp = -d\mathcal{M} \cdot \vec{B}_{ext}$  où  $d\mathcal{M} = \Omega dt \wedge \mathcal{M}$  avec  $\Omega$  vecteur vitesse angulaire. Alors  $dEp = -(\Omega dt \wedge \mathcal{M}) \cdot \vec{B}_{ext} = -(\mathcal{M} \wedge \vec{B}_{ext}) \cdot \Omega dt = -\Gamma \cdot \Omega dt$  (produit mixte invariant par permutation circulaire).

Un dipôle placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  subit un couple de forces  $\vec{\Gamma} = \mathcal{M} \wedge \vec{B}_{ext}$  et s'aligne dans la direction de  $\vec{B}_{ext}$  : c'est l'exemple bien connu de l'aiguille aimantée de la boussole, de moment magnétique  $\mathcal{M}$ , qui s'oriente dans la direction du champ magnétique terrestre.

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

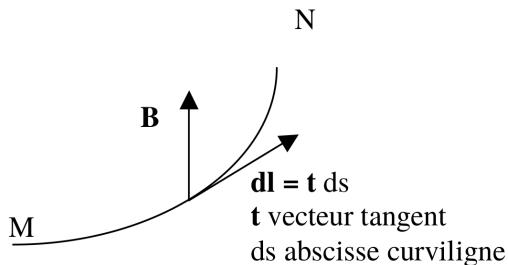
J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.5 Force de Laplace



Lorsqu'un courant électrique de densité volumique  $\vec{j}$  ( $A m^{-2}$ ) est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , il subit une force magnétique, dite force de Laplace, dont l'expression vectorielle est :

$$\boxed{\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}} \quad (\text{en } N m^{-3})$$

Cette force est volumique ; sur un volume  $\mathcal{V}$  la force totale est

$$\vec{F} = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} dv \quad (\text{en } N)$$

#### Cas du circuit filiforme

Si le courant est filiforme d'intensité  $i$ , la force de Laplace élémentaire devient :

$$\boxed{d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B}} \quad (\text{en } N)$$

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

$\vec{dl}$  étant un élément de courant.

Sur le circuit  $MN$ ,  $\vec{F} = \int i \vec{dl} \wedge \vec{B}$  (intégrale curviligne de  $M$  à  $N$ ).

La force de Laplace est orthogonale au plan formé par les vecteurs  $\vec{dl}$  (élément de courant) et  $\vec{B}$  (champ magnétique).

Un courant colinéaire au champ magnétique ne subit pas de force de Laplace.

## ELM-B.6 Loi d'Ohm

### Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur fixe

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

où  $\gamma$  est la conductivité du milieu en Siemens  $m^{-1}$  (inverse de la résistivité, mesurée en  $\Omega m$ ).

Exemples de valeurs de conductivité (inverse de la résistivité) :

- métaux (très conducteurs) :  $10^7 S m^{-1}$
- atmosphère solaire :  $\gamma = 8 \times 10^{-4} T^{3/2} S m^{-1}$  où  $T$  est la température en  $K$  du milieu

photosphère et chromosphère ( $10\,000 K$ ) :  $\gamma \simeq 10^3 S m^{-1}$   
couronne ( $10^6 K$ ) :  $\gamma \simeq 10^6 S m^{-1}$

- eau de mer :  $5 S m^{-1}$
- eau douce :  $0.05 S m^{-1}$
- verre (isolant) :  $10^{-17} S m^{-1}$

### Loi d'Ohm pour un circuit filiforme

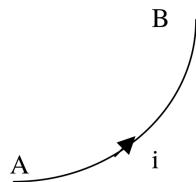


FIGURE 1 – Circuit filiforme  $AB$  parcouru par un courant  $i$

Si le conducteur est filiforme entre  $A$  et  $B$ , la loi d'Ohm s'écrit  $[V_A - V_B = Ri]$  où  $R = l/\gamma s$  est la résistance du fil en Ohms ( $\Omega$ ), entre  $A$  et  $B$ ,  $l$  étant sa longueur ( $m$ ) et  $s$  sa section ( $m^2$ )

## Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur mobile

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse de déplacement du conducteur. Le second terme  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  dit champ électromoteur, provient du fait que le conducteur "voit" dans son propre référentiel un champ électrique  $\vec{E}'$  différent de celui ( $\vec{E}$ ) qui existe dans le référentiel fixe (ce n'est pas le cas pour le champ magnétique).

En effet, dans un référentiel mobile à la vitesse  $\vec{v}$ , on montre que le champ électrique  $\vec{E}'$  vaut :  $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$  alors que le champ magnétique  $\vec{B}'$  reste égal à  $\vec{B}$ , champ du repère fixe (cette relation n'est exacte que dans le cadre de la transformation de Galilée, lorsque  $v \ll C$ ; dans le cas contraire il faut utiliser la transformation de Lorentz en relativité restreinte, hors programme).

### ELM-B.7 ARQS dans un conducteur et induction magnétique

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), les équations de Maxwell s'écrivent :

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$              | équation de Maxwell Gauss           |
| $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ | équation de Maxwell Faraday         |
| $\operatorname{div} \vec{B} = 0$                                    | équation de Maxwell Thomson ou flux |
| $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$                        | équation de Maxwell Ampère          |

On a négligé le courant de déplacement  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  dans l'équation de Maxwell Ampère. La suppression de ce terme empêche la propagation d'ondes électromagnétiques. Cette approximation est valable à condition que :

$$T_p \text{ temps de propagation} = L/C \ll T \text{ temps caractéristique d'évolution du système}$$

où  $C$  est la vitesse de la lumière et  $L$  la dimension caractéristique du système.

La condition  $L \ll CT$  signifie aussi  $\nu \ll C/L$  pour une variation sinusoïdale à la fréquence  $\nu$ ; l'ARQS n'est donc valable aux basses fréquences.

Pour un circuit mobile de vitesse  $v$ ,  $L \ll CT$  signifie aussi  $v \ll C$ .

L'hypothèse ARQS implique la loi des noeuds  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  en prenant la divergence de l'équation Maxwell Ampère (la divergence d'un rotationnel étant nulle).

Or dans un conducteur fixe,  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (loi d'Ohm), donc  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  implique  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  (en supposant la conductivité uniforme). Mais  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  implique  $\rho = 0$  : un conducteur en ARQS est globalement neutre (il y a autant de charges positives que négatives).

## Loi de Faraday

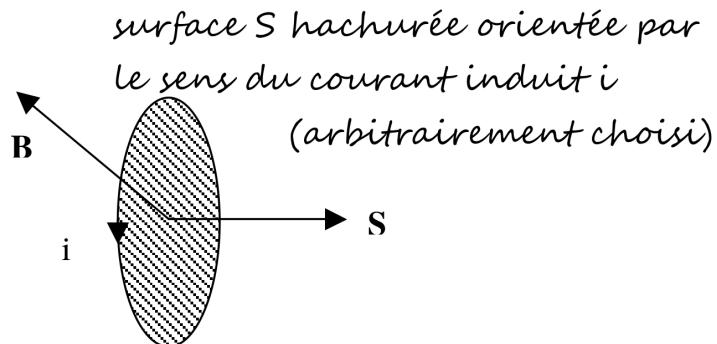


FIGURE 2 – Surface orientée par le sens du courant induit  $i$

Considérons un circuit fermé  $\mathcal{C}$  et prenons le flux de l'équation de Maxwell Faraday sur la surface  $\mathcal{S}$  appuyée sur son contour :

$$\iint r\vec{\omega}t \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\partial [\iint \vec{B} \cdot d\vec{S}] / \partial t$$

En appliquant le théorème de Stokes, il vient :

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = e = -\partial \Phi(\vec{B}) / \partial t$$

C'est la loi de Faraday.

$e$  est la force électromotrice d'induction (fem).

$\boxed{\Phi(\vec{B}) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}}$  est le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $\mathcal{S}$  du circuit.

La fem d'induction  $e$  se mesure en Volts. Elle n'existe que si le flux  $\Phi(\vec{B})$  du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers le circuit varie dans le temps, ou bien si le circuit se déplace dans un champ constant.  $\Phi(\vec{B})$  porte dans ce cas le nom de flux coupé lors du déplacement.

## Loi d'Ohm généralisée pour un circuit filiforme AB

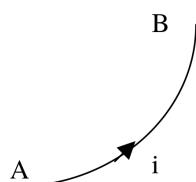


FIGURE 3 – Circuit filiforme  $AB$  parcouru par un courant  $i$

la loi d'Ohm généralisée s'écrit  $V_A - V_B = Ri - e$  où  $R$  est la résistance du fil en Ohms ( $\Omega$ ) et  $e = -\partial[\int \vec{A} \cdot d\vec{l}]/\partial t$

Si le circuit est fermé :  $A = B$ , l'intégrale porte sur un contour fermé. Dans ce cas,  $V_A = V_B$  et  $e = -\partial[\int \vec{A} \cdot d\vec{l}]/\partial t = -\partial[\iint r \vec{\omega} \vec{A} \cdot d\vec{S}]/\partial t$  (d'après le théorème de Stokes).

Donc  $e = -\partial[\iint \vec{B} \cdot d\vec{S}]/\partial t = -\partial\Phi(\vec{B})/\partial t$  et on retrouve ainsi la loi de Faraday.

Il apparaît un courant induit dans le circuit :  $i = e/R$  c'est le phénomène d'induction magnétique.

Comme  $i = dq/dt$ , la quantité d'électricité induite est alors  $q = -\Delta\Phi/R$  pour une variation de flux  $\Delta\Phi$ .

### Loi de Lenz

Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. C'est le signe "-" de la loi de Faraday.

### Exemple d'induction dans une spire de courant en champ magnétique variable

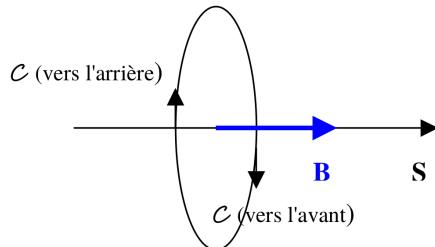


FIGURE 4 – Spire de courant en champ magnétique variable

La spire est dans un champ magnétique variable  $\vec{B}(t)$ . On choisit un sens positif arbitraire pour les courants qui oriente le contour  $C$  et la surface  $S$  du circuit dans le sens de  $\vec{B}$  de sorte que  $\Phi = BS$

$\vec{B} \nearrow \rightarrow d\Phi/dt > 0 \rightarrow e < 0 \rightarrow i < 0 \rightarrow \vec{B}_{induit}$  vers la gauche s'oppose à l'augmentation du flux (loi de Lenz)

$\vec{B} \searrow \rightarrow d\Phi/dt < 0 \rightarrow e > 0 \rightarrow i > 0 \rightarrow \vec{B}_{induit}$  vers la droite s'oppose à la diminution du flux (loi de Lenz)

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### ELM-B Électromagnétisme B

#### ELM-B.8 Équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Introduisons le vecteur de Poynting (dont on donnera la signification plus loin) :

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{P} &= \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{\vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{rot} \vec{B}}{\mu_0} \end{aligned}$$

avec  $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (Maxwell Ampère pour un milieu conducteur)  
et  $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (Maxwell Faraday).

On obtient :  $\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$

Soit l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \vec{P} = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

qui est de la forme d'une équation de conservation généralisée

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_E = s$$

où  $\rho_E = \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$  est la densité volumique d'énergie électromagnétique ( $J m^{-3}$ ) dans laquelle :

$\boxed{\varepsilon_0 \vec{E}^2/2}$  est la densité volumique d'énergie électrique ( $J m^{-3}$ ) ou pression électrique ( $Pa$ )

$\boxed{\vec{B}^2/(2\mu_0)}$  est la densité volumique d'énergie magnétique ( $J m^{-3}$ ) ou pression magnétique ( $Pa$ )

$\vec{P} = \vec{j}_E$  est la densité de courant d'énergie, ou puissance transportée par unité de surface ( $W m^{-2}$ ).

$\operatorname{div} \vec{P}$  représente alors une densité volumique de puissance transportée en  $W m^{-3}$ .

Attention : Ne pas confondre  $\vec{P}$  vecteur de Poynting avec polarisation ou pression gazeuse !

$s = -\vec{j} \cdot \vec{E}$  est un terme source/perte d'énergie en  $W m^{-3}$ ; c'est la densité de puissance des charges mobiles ; ce peut être une perte par effet Joule dans un conducteur si  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

### Application : Cas des électrons mobiles

Supposons l'électron, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , lié à un atome par une force de rappel de la forme simplifiée  $-m\omega_0^2 \vec{r}$ , où  $k = m\omega_0^2$  est une constante de raideur et  $\vec{r}$  la position de la particule ; le PFD donne en présence du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{B}$  (en négligeant tout frottement, donc collision) :

$$md\vec{v}/dt = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - m\omega_0^2 \vec{r} \quad \text{où } \vec{v} \text{ est la vitesse définie par } \vec{v} = \overrightarrow{dr}/dt$$

En faisant le produit scalaire avec  $\vec{v}$ , on obtient :  $d(1/2m\vec{v}^2)/dt = -e\vec{E} \cdot \vec{v} - d(1/2m\omega_0^2 \vec{r}^2)/dt$

Multiplions par  $N$ , nombre d'électrons par unité de volume : le produit  $mN$  est alors la masse volumique  $\mu$  ( $kg m^{-3}$ ) et la densité de charge mobiles est  $\rho = -Ne(C m^{-3})$ .

$$d(1/2\mu\vec{v}^2)/dt = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} - d(1/2\mu\omega_0^2 \vec{r}^2)/dt$$

Comme  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ , on en conclut que la puissance volumique des charges mobiles s'exprime ainsi :

$$\boxed{\vec{j} \cdot \vec{E} = d(1/2\mu\vec{v}^2 + 1/2\mu\omega_0^2 \vec{r}^2)/dt = d(E_c + E_p)/dt}$$

où  $E_c$  et  $E_p$  constituent respectivement la densité volumique d'énergie cinétique et potentielle des charges mobiles ( $J m^{-3}$ ). L'équation de conservation de l'énergie devient alors :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + E_c + E_p \right) + \operatorname{div} \vec{P} = 0}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{P} = 0}$$

où  $\rho_E = \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + E_c + E_p$  est la densité volumique d'énergie totale.

L'énergie mécanique des charges mobiles s'ajoute donc à l'énergie électromagnétique des champs.

### Application : Cas d'une OPPH

Si  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont associés à une OPPH, on a en valeur moyenne temporelle  $\langle \partial/\partial t(\rho_E) \rangle = 0$ . On en déduit  $\operatorname{div} \langle \vec{P} \rangle = 0$ ; cette égalité signifie (en moyenne) puissance entrante = puissance sortante. Par contre,  $\langle \vec{P} \rangle$  et  $\langle \rho_E \rangle$  sont non nuls. Examinons cela en détails.

Pour une OPPH du type  $X = |X|e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ , on a en valeur moyenne temporelle :

$$\begin{aligned} \langle \partial/\partial t(X^2) \rangle &= \langle 2X\partial X/\partial t \rangle \\ &= \operatorname{Re}[\langle X\partial X/\partial t^* \rangle] \\ &= \operatorname{Re}[X(i\omega X)^*] \\ &= \omega|X|^2\operatorname{Re}(i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci est vrai pour toute quantité quadratique comme l'énergie électromagnétique ( $\varepsilon_0 \vec{E}^2/2 + \vec{B}^2/(2\mu_0)$ ), l'énergie cinétique ( $1/2 m \vec{v}^2$ ) ou potentielle ( $1/2 \mu \omega_0^2 \vec{r}^2$ ).

Toujours pour une OPPH avec  $B = E(k/\omega)$ , en valeur algébrique

$$\boxed{\langle P \rangle = 1/2\operatorname{Re}[EB^*/\mu_0] = 1/2\varepsilon_0|E|^2C^2\operatorname{Re}(k)/\omega}$$

$v_\varphi = \omega/\operatorname{Re}(k)$  et  $v_g = d\omega/d\operatorname{Re}(k)$  sont respectivement les vitesses de phase et de groupe.

De  $\langle P \rangle = 1/2\varepsilon_0|E|^2C^2/v_\varphi = \langle \rho_E \rangle v_g$ , on en déduit la densité moyenne d'énergie transportée  $\langle \rho_E \rangle$  :

$$\boxed{\langle \rho_E \rangle = 1/2\varepsilon_0|E|^2[C^2/(v_\varphi v_g)]}$$

### Application : Cas d'un milieu diélectrique LHI

Sans charge et sans courant, l'équation de conservation devient :

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{B}^2/(2\mu_0))}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{P} = 0$$

en raison de l'équation de Maxwell Ampère qui est  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \partial \vec{D} / \partial t$ .

Dans un milieu LHI,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  où  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 n^2$ ;  $n = n_1 - in_2$  est l'indice de réfraction complexe.

L'équation de d'Alembert  $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$  a pour solution une OPPH de relation de dispersion :

$$k = (\omega/C)n = (\omega/C)(n_1 - in_2)$$

Une OPPH de pulsation  $\omega$  se propageant selon  $Oz$  est de la forme :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-(\omega n_2/C)z} e^{i\omega(t - n_1 z/C)}$$

Le module  $E$  du champ décroît selon  $Oz$  (onde évanescante) :  $E = E_0 e^{-(\omega n_2/C)z}$

$$\begin{cases} \text{onde propagative : } & n_2 = 0 \\ \text{onde absorbée : } & n_1 = 0 \quad (\text{ondes stationnaires amorties}) \\ \text{onde évanescante : } & n_1 \neq 0 \text{ et } n_2 \neq 0 \text{ amplitude } \underline{\text{décroissante}} \\ & \text{au fur et à mesure de la propagation} \end{cases}$$

Évaluons la puissance moyenne transportée ( $W m^{-2}$ ) :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 C^2 |E|^2 \operatorname{Re}(k)/\omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |E|^2 C n_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2/C)z} C n_1$$

On en déduit :  $\langle \operatorname{div} \vec{P} \rangle = \partial \langle P \rangle / \partial z = -\varepsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2/C)z} n_1 n_2 \omega < 0$  ( $W m^{-3}$ )

De ce fait,

$$\langle \partial \rho_E / \partial t \rangle = \langle \vec{E} \cdot \partial \vec{D} / \partial t + \partial(\vec{B}^2/2\mu_0) / \partial t \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2/C)z} n_1 n_2 \omega > 0$$

la densité d'énergie volumique  $\rho_E$  croît en moyenne, l'onde dépose localement de l'énergie dès que  $n_1 \neq 0$  et  $n_2 \neq 0$ .

Enfin, avec  $\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E}$ ,  $\rho_E = \varepsilon_0 (n \vec{E})^2 / 2 + \vec{B}^2 / (2\mu_0)$

$B = k E / \omega$ ,  $k = (\omega/C)n \implies B = (nE)/C \implies \langle \rho_E \rangle = (\varepsilon_0/2) |n|^2 |E|^2$  densité d'énergie.

Récapitulatif :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{onde propagative :} & n_2 = 0, \langle P \rangle = 1/2\varepsilon_0 E_0^2 C n_1 \text{ constant}, \\ & \langle \partial \rho_E / \partial t \rangle \geq 0, \text{ transport sans dépôt} \\ \text{onde absorbée :} & n_1 = 0, \langle P \rangle = 0, \langle \partial \rho_E / \partial t \rangle \geq 0, \text{ pas de transport d'énergie} \\ \text{onde évanescante :} & n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, \langle P \rangle = 1/2\varepsilon_0 E_0^2 e^{-2(\omega n_2/C)z} C n_1 \text{ décroissant}, \\ & \langle \partial \rho_E / \partial t \rangle \gg 0, \text{ transport avec dépôt d'énergie} \end{array} \right.$$

**Application : Cas d'un conducteur fixe obéissant à la loi d'Ohm**  
avec  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (loi d'Ohm), l'équation de Maxwell Ampère devient :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$$

De  $\text{div } \vec{E} = 0$  (pas de charges) et  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , on obtient

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \partial \vec{E} / \partial t + \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2}$$

Cette équation comporte un terme diffusif  $\mu_0 \gamma \partial \vec{E} / \partial t$  et un terme propagatif  $\mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$ . Recherchons une solution de type OPPH de pulsation  $\omega$  propagative selon  $Oz$  de la forme :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ; la relation de dispersion s'écrit :

$$\boxed{k^2 = \omega^2 / C^2 - i\omega \mu_0 \gamma}$$

Dans un milieu conducteur (métal, eau de mer), aux radio fréquences (de  $3000 \text{ Hz}$  à  $300 \text{ GHz}$  correspondant respectivement aux longueurs d'onde de  $100 \text{ km}$  à  $1 \text{ mm}$ ), le premier terme est négligeable devant le second, donc :

$$k^2 = -i\omega \mu_0 \gamma = 1/2(1-i)^2 \omega \mu_0 \gamma$$

$$\text{d'où } \boxed{k = (1-i)/\delta} = (\omega/C)(n_1 - in_2) \text{ où } \delta \text{ est l'épaisseur de peau : } \boxed{\delta = \left( \frac{2}{\omega \mu_0 \gamma} \right)^{1/2}}$$

Cette grandeur caractérise l'épaisseur d'absorption de l'onde dans le milieu. A titre d'exemple, l'ordre de grandeur de  $\delta$  est le cm à  $50 \text{ Hz}$  pour un métal ( $\gamma$  voisin de  $10^7 \text{ S m}^{-1}$ ). Pour l'eau de mer ( $\gamma$  proche de  $5 \text{ S m}^{-1}$ ),  $\delta$  est de l'ordre de quelques mètres pour les basses fréquences radio ( $10 \text{ KHz}$ ); les communications avec les sous marins ne peuvent donc se faire qu'aux basses fréquences, celles usuellement utilisées étant dissipées dans l'eau par effet Joule, comme on va le voir ci dessous.

On a donc pour les indices de dispersion et d'absorption :  $n_1 = n_2 = C/\delta\omega$

$$\text{L'onde est évanescante : } \boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)}}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= 1/2 \text{Re}[EB^*/\mu_0] \\ &= 1/2 |E|^2 \text{Re}(k)/(\omega \mu_0) \\ &= 1/2 E_0^2 e^{-2z/\delta}/(\omega \delta \mu_0) \end{aligned}$$

d'où  $\langle \operatorname{div} \vec{P} \rangle = \partial \langle P \rangle / \partial z = -E_0^2 e^{-2z/\delta} / (\omega \delta^2 \mu_0)$

à comparer avec la puissance Joule moyenne

$$\boxed{\mathcal{P}_J = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \langle \gamma \vec{E}^2 \rangle} = 1/2 \gamma |E|^2$$

soit  $\mathcal{P}_J = 1/2 \gamma E_0^2 e^{-2z/\delta} = E_0^2 e^{-2z/\delta} / (\omega \delta^2 \mu_0)$  puisque  $\delta = (2/\omega \mu_0 \gamma)^{1/2}$ .

Ainsi,  $\boxed{\langle \operatorname{div} \vec{P} \rangle + \mathcal{P}_J = 0}$  l'énergie déposée par l'onde est dissipée localement par effet Joule.

Le champ magnétique associé à l'OPPH est, en valeur algébrique,  $B = E(k/\omega) = E(1-i)/\delta\omega = (\sqrt{2}/\delta\omega)e^{-i\pi/4} E$

$$\boxed{B = (\sqrt{2}/\delta\omega)E_0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta - \pi/4)}}$$

**Loi de conservation globale pour un conducteur fixe, avec  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  (loi d'Ohm)**

Dans ce cas,  $\boxed{|s| = \gamma E^2 = j^2/\gamma = \text{densité de puissance JOULE } (W m^{-3})}$

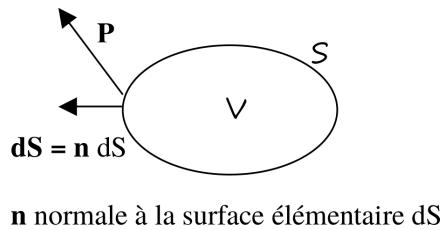


FIGURE 1 – Volume entouré par une surface

L'équation globale de conservation de l'énergie électromagnétique s'obtient par intégration de l'équation locale  $\partial/\partial t \left( \varepsilon_0 \vec{E}^2/2 + \vec{B}^2/(2\mu_0) \right) + \operatorname{div} \vec{P} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$  sur un volume  $\mathcal{V}$  entouré par la surface fermée  $\mathcal{S}$ , au moyen du théorème d'Ostrogradski :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left[ \iiint \left( \varepsilon_0 \frac{\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) dv \right] + \iint \vec{P} \cdot d\vec{S} = - \iiint \left( \frac{\vec{j}^2}{\gamma} \right) dv}$$

$\iiint (\varepsilon_0 \vec{E}^2/2 + \vec{B}^2/(2\mu_0)) dv$  est la puissance électromagnétique ( $W$ ) du volume  $\mathcal{V}$   
 $\iint \vec{P} \cdot d\vec{S}$  est le flux de puissance électromagnétique au travers de la surface fermée  $\mathcal{S}$  frontière (perte ou gain aux frontières selon que  $\vec{P}$  est orienté vers l'extérieur ou l'intérieur). Il peut être nul.

$- \iiint (\vec{j}^2/\gamma) dv$  est la perte par effet Joule ( $W$ ) du volume  $\mathcal{V}$ .

Cette équation globale possède plusieurs significations :

- l'énergie électromagnétique  $\iiint(\varepsilon_0 \vec{E}^2/2 + \vec{B}^2/(2\mu_0))dv$  se conserve en l'absence de dissipation Joule si les entrées sont compensées par les sorties aux frontières (ou si elles y sont nulles).
- en régime permanent,  $\iint \vec{P} \cdot d\vec{S} = -\iiint(\vec{j}^2/\gamma)dv$  signifie que la puissance électromagnétique entrante est égale à la puissance sortante plus celle dissipée par effet Joule.

### Exemple de bilan du circuit filiforme fermé en ARQS

Dans le cas d'un circuit filiforme fermé sur lui même, de résistance  $R$ , on a vu que l'équation électrique s'écrit  $Ri - e = 0$  soit :

$$Ri + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{où } \Phi \text{ est le flux magnétique total au travers du circuit}$$

en multipliant par  $i$ , on obtient le bilan de puissance :  $Ri^2 + i\partial\Phi/\partial t = 0$

Si ce circuit possède une inductance propre  $L$  (unité : Henry,  $H$ ) et baigne dans un champ magnétique extérieur variable  $\vec{B}_{ext}$

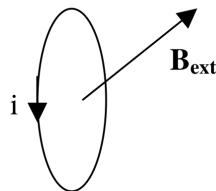


FIGURE 2 – Circuit filiforme fermé

alors :

$$\Phi = Li + \Phi_{ext}$$

où  $Li$  est le flux propre (flux du champ magnétique généré par le circuit au travers de lui-même) et

$$\Phi_{ext} = \iint \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{S} \quad \text{est le flux du champ } \underline{\text{extérieur}} \text{ au travers du circuit.}$$

En présence d'un second circuit d'intensité  $I$ , il faudrait y ajouter le flux mutuel  $MI$ , où  $M$  serait le coefficient d'inductance mutuelle (unité : Henry,  $H$ ) entre les deux circuits.

L'intensité  $i$  est donnée par la résolution de l'équation électrique  $Ri + L\partial i/\partial t + \partial\Phi_{ext}/\partial t = 0$  et le bilan de puissance devient :

$$Ri^2 + \partial(\frac{1}{2}Li^2)/\partial t + i\partial\Phi_{ext}/\partial t = 0$$

relation dans laquelle :

|                                  |   |
|----------------------------------|---|
| $Ri^2$                           | est la puissance Joule (W)                  |
| $\frac{1}{2}Li^2$                | est l'énergie magnétique du circuit ( $J$ ) |
| $i\partial\Phi_{ext}/\partial t$ | la puissance échangée avec l'extérieur (W)  |

# MOOC (ASTRO)PHYSIQUE I : ÉLECTROMAGNÉTISME

J.M. Malherbe \*

Automne 2016

## COURS

### Annexes

#### Annexe 1    Quelques constantes fondamentales universelles en physique

Unités fondamentales : mètre, kg, seconde, Ampère, Kelvin (les autres unités s'y ramènent)

$C = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  vitesse de la lumière dans le vide

$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  charge de l'électron

$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  masse de l'électron

$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  masse du proton

$h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ J s}$  constante de Planck

$k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  constante de Boltzmann

$N = 6.02 \times 10^{23}$  nombre d'Avogadro

$R = 8.32 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$  constante des gaz parfaits

$R_H = 13.6 \text{ eV}$  constante de Rydberg

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$  perméabilité magnétique du vide

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  constante gravitationnelle

$1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \times 10^9 \text{ N C}^{-2}$  permittivité du vide

#### Annexe 2    Quelques constantes spécifiques au soleil

$M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$  masse solaire

$R_S = 696\,000 \text{ km}$  rayon solaire

$g_S = 275 \text{ m/s}^2$  accélération de la pesanteur à la surface solaire =  $GM_S/R_S^2$

$L = 3.86 \times 10^{26} \text{ W}$  luminosité solaire (luminosité d'1  $\text{m}^2$  de surface :  $6.3 \times 10^7 \text{ W}$ )

$1UA = 149\,600\,000 \text{ km}$  distance moyenne Terre/Soleil

---

\*LESIA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, 92195 Meudon cedex, France

$V_l = 620 \text{ km/s}$  vitesse de libération

$T_e = 5800 \text{ K}$  température effective

Composition : H 92.1% et He 7.8%, autres éléments (O, C, N, Fe, Mg, Ca...) en trace (0.1%)

Rotation : 26 jours à l'équateur, 31 jours aux pôles, inclinaison de 6° sur l'écliptique

# **Exercices corrigés**

**(corrections en bleu)**

## Eléments d'analyse vectorielle

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: dérivées partielles

Soit la fonction  $f(x, y, z) = 5x^2y + 3xy^2z^3$

Calculer  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z, \partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial y^2, \partial^2 f / \partial z^2, \partial^2 f / \partial x \partial y, \partial^2 f / \partial x \partial z, \partial^2 f / \partial y \partial z$

(1)  $\partial f / \partial x = 10xy + 3y^2z^3$

(2)  $\partial f / \partial y = 5x^2 + 6xyz^3$

(3)  $\partial f / \partial z = 9xy^2z^2$

(4)  $\partial^2 f / \partial x^2 = 10y$

(5)  $\partial^2 f / \partial y^2 = 6xz^3$

(6)  $\partial^2 f / \partial z^2 = 18xy^2z$

(7)  $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x = 10x + 6yz^3$

(8)  $\partial^2 f / \partial x \partial z = \partial^2 f / \partial z \partial x = 9y^2z^2$

(9)  $\partial^2 f / \partial y \partial z = \partial^2 f / \partial y \partial z = 18xyz^2$

### Exercice 2: gradient, Laplacien

On donne le champ scalaire  $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Calculer **grad(f)** et  $\Delta f$ .

(1) **grad(f)** est un champ vectoriel de coordonnées  $(2x, 2y, 2z)$

(2)  $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = 6$

### Exercice 3: lignes équipotentielles, lignes de champ

Soit  $f(x,y) = x^2 + y^2$  une fonction potentiel. Quelle est la nature géométrique des lignes équipotentielles et des lignes du champ défini par  $\mathbf{u} = \text{grad } f$ ? Donner  $\text{div } \mathbf{u}$  et  $\text{rot } \mathbf{u}$ .

(1) les lignes équipotentielles  $x^2 + y^2 = \text{constante}$  sont des cercles de centre O

(2) le champ vectoriel  $\mathbf{u} = \text{grad}(f)$  a pour composantes  $(2x, 2y)$ ; les lignes du champ vectoriel  $\mathbf{u}$  sont des droites issue de l'origine ( $dy/2y = dx/2x \rightarrow y = a x$ )

(3)  $\text{div } \mathbf{u} = 4$

(4)  $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$  car  $\mathbf{u}$  est un gradient

### Exercice 4: lignes équipotentielles, lignes de champ

Soit  $f(x,y) = x^2 + 2y^2$  une fonction potentiel. Quelle est la nature géométrique des lignes équipotentielles et des lignes du champ défini par  $\mathbf{u} = \text{grad } f$ ? Calculer le Laplacien de f.

(1) lignes équipotentielles  $x^2 + 2y^2 = k^2 = \text{constante}$

Ce sont des ellipses de centre O et de demi axes k selon Ox et  $k/\sqrt{2}$  selon Oy

(2) lignes de champ de  $\mathbf{u} = \text{grad } f = (2x, 4y)$

On écrit la colinéarité entre  $\mathbf{u}$  et la tangente à la ligne de champ:  $\mathbf{u} = k \mathbf{dOM}$  (k constante) et on élimine k pour obtenir l'équation différentielle  $dx/2x = dy/4y$ ,

ce qui s'intègre:  $\ln y = 2 \ln x + \text{constante}$ , soit  $y = a x^2$  où a est une constante. Ce sont des paraboles.

(3)  $\Delta f = 2 + 4 = 6$

### Exercice 5: champs à flux conservatif

Montrer que les champs suivants en coordonnées sphériques:

$\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon_0) q \mathbf{e}_r / r^2$  champ coulombien créé par la charge  $q$  à la distance  $r$  et

$\mathbf{G} = -K m \mathbf{e}_r / r^2$  champ newtonien créé par la masse  $m$  à la distance  $r$  sont des champs à flux conservatif (on donne:  $\text{div } \mathbf{A} = (1/r^2) d(r^2 A_r)/dr$ ).

Exprimer la fonction potentiel  $V$  dont ils dérivent; que vaut leur rotationnel ?

Vérifier que le potentiel  $V$  est une fonction harmonique (de Laplacien nul), on donne:

$$\Delta V = (1/r) d^2(r V)/dr^2.$$

(1)  $\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{G} = 0$ ; ces champs créés par des charges ou masses ponctuelles sont à flux conservatif (ce n'est pas le cas d'une distribution de charges ou de masses).

(2)  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V \rightarrow V = (1/4\pi\epsilon_0) q/r$

$$\mathbf{G} = -\mathbf{grad} V \rightarrow V = -K m/r$$

(3)  $\text{rot } \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{0}$  (aucun calcul à faire: le rotationnel d'un gradient est nul)

(4)  $r V = \text{constante} \rightarrow \Delta V = 0$

Exercice 6: divergence et rotationnel en coordonnées cartesiennes

On donne le champ des vitesses d'un fluide  $\mathbf{v}(x) = x \mathbf{e}_x$

Calculer  $\text{div } \mathbf{v}$  et  $\text{rot } \mathbf{v}$

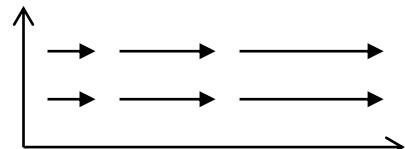
Identifier la nature géométrique des lignes de champ et les tracer.

Mêmes questions avec  $\mathbf{v}(x) = y \mathbf{e}_x$

(1)  $\text{div } \mathbf{v} = 1$

(2)  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ; remarque:  $\mathbf{v} = \mathbf{grad}(x^2/2)$

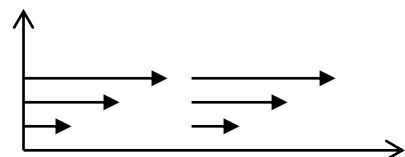
(3)  $\mathbf{v} = k \mathbf{dOM} \rightarrow 0 = k dy \rightarrow dy = 0 \rightarrow y = \text{constante}$   
(droites // Ox)



(4)  $\text{div } \mathbf{v} = 0$

(2)  $\text{rot } \mathbf{v} = -\mathbf{e}_z$  soit  $\|\text{rot } \mathbf{v}\| = 1$

(3)  $\mathbf{v} = k \mathbf{dOM} \rightarrow 0 = k dy \rightarrow dy = 0 \rightarrow y = \text{constante}$   
(droites // Oy)



Exercice 7: divergence et rotationnel en coordonnées polaires/cylindriques

On donne un écoulement de vitesse  $\mathbf{v}$  de la forme:  $\mathbf{v}(r) = a r \mathbf{e}_r$  où  $a$  est une constante

Expliciter la nature géométrique des lignes fluides (lignes du champ des vitesses).

Montrer que  $\mathbf{v}$  dérive d'un potentiel  $f$ ; le déterminer.

Calculer  $\text{div } \mathbf{v}$  et  $\text{rot } \mathbf{v}$  (on donne  $\text{div } \mathbf{A} = (1/r) d(r A_r)/dr$ ).

Discuter le signe de  $\text{div } \mathbf{v}$  selon celui de  $a$ ; dans quel cas l'écoulement est-il convergent, divergent ?

(1) lignes fluides:  $\mathbf{v} = k \mathbf{dOM} \rightarrow 0 = k r d\theta \rightarrow d\theta = 0 \rightarrow \theta = \text{constante}$ ; c'est l'équation d'une droite issue de l'origine en coordonnées polaires; les lignes fluides sont donc des droites en étoile.

(2)  $\mathbf{v} = \mathbf{grad}(1/2 a r^2)$ ; le potentiel des vitesses est  $f(r) = 1/2 a r^2$

(3)  $\text{div } \mathbf{v} = 2 a$

$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (aucun calcul à faire: le rotationnel d'un gradient est nul)

(4)  $a > 0$  divergent;  $a < 0$  convergent

Exercice 8: divergence et rotationnel en coordonnées polaires/cylindriques

On donne un écoulement de vitesse  $\mathbf{v}$  de la forme:  $\mathbf{v}(r) = \omega r \mathbf{e}_\theta$  où  $\omega$  est une constante

Expliciter la nature géométrique des lignes fluides (lignes du champ des vitesses).

On donne  $\operatorname{div} \mathbf{A} = (1/r) dA_\theta/d\theta$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = [0, 0, (1/r) d(rA_\theta)/dr]$ .

Calculer  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$

Discuter le signe de  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  sur l'axe Oz selon celui de  $\omega$ ; dans quel cas l'écoulement est-il un tourbillon tournant dans le sens horaire ou antihoraire ?

(1) lignes fluides:  $\mathbf{v} = k \mathbf{dOM} \rightarrow 0 = k dr \rightarrow dr = 0 \rightarrow r = \text{constante}$ ; c'est l'équation d'un cercle de centre O en coordonnées polaires; les lignes fluides sont donc des cercles concentriques.

(2)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = (0, 0, 2 \omega)$

(3)  $\omega > 0$  rotation sens trigonométrique,  $\omega < 0$  rotation sens horaire

### Exercice 9: théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes

On rappelle les théorèmes d'Ostrogradski  $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{A} dV$  sur une surface fermée et de Stokes  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$  sur un contour fermé.

Que peut-on dire si A est un champ de vecteurs constant ?

(1)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \rightarrow \iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \iint d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = 0$ ; ceci est vrai quelque soit  $\mathbf{A}$ , alors  $\iint d\mathbf{S} = \mathbf{0}$  vectoriellement sur une surface fermée, alors que  $\iint d\mathbf{S} = \mathbf{S} \neq 0$  = surface totale

(1)  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0} \rightarrow \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \int d\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$ ; ceci est vrai quelque soit  $\mathbf{A}$ , alors  $\int d\mathbf{l} = \mathbf{0}$  vectoriellement sur un contour fermé, alors que  $\int d\mathbf{l} = \mathbf{L} \neq 0$  = périmètre du contour fermé

### Exercice 10: théorème d'Ostrogradski

On donne le champ vectoriel en coordonnées sphériques  $\mathbf{A}(r) = r^n \mathbf{e}_r$  (n nombre réel)

- calculer  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  (on donne:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 1/r^2 d(r^2 A_r)/dr$ )

- calculer le flux de  $\mathbf{A}$  au travers d'une surface sphérique de rayon R

- calculer l'intégrale de  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  sur un volume sphérique de rayon R

- constater que le théorème d'Ostrogradski est bien vérifié

(1)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = (n+2) r^{n-1}$

$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$  car  $\mathbf{A} = \operatorname{grad}(r^{n+1}/(n+1))$ : le rotationnel d'un gradient est nul

(2) flux sur la surface sphérique:  $R^n \times 4\pi R^2 = 4\pi R^{n+2}$

(3) Volume élémentaire: coquille sphérique d'épaisseur dr et de surface  $4\pi r^2$  d'où  $dV = 4\pi r^2 dr$

$\rightarrow \operatorname{div} \mathbf{A} dV = (n+2) r^{n-1} \times 4\pi r^2 dr = (n+2) 4\pi r^{n+1} dr$

$\rightarrow \iiint \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int (n+2) 4\pi r^{n+1} dr$  (pour r variant de 0 à R) =  $4\pi R^{n+2}$ , Ostrogradski est vérifié

### Exercice 11: théorème de Stokes

On donne le champ vectoriel en coordonnées cylindriques  $\mathbf{A}(r) = r^n \mathbf{e}_\theta$  (n nombre réel)

On donne:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = (1/r) dA_\theta/d\theta$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = [0, 0, (1/r) d(rA_\theta)/dr]$ .

- calculer  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$

- calculer la circulation de  $\mathbf{A}$  sur un contour circulaire de rayon R

- calculer le flux de  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  sur un disque de rayon R

- constater que le théorème de Stokes est bien vérifié

(1)  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$

$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [0, 0, (n+1) r^{n-1}]$

(2) circulation sur un contour circulaire:  $R^n \times 2\pi R = 2\pi R^{n+1}$

(3) Surface élémentaire: couronne circulaire de largeur dr et de périmètre  $2\pi r$  d'où  $dS = 2\pi r dr$

$\rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (n+1) r^{n-1} \times 2\pi r dr = (n+1) 2\pi r^n dr$

$\rightarrow \iint \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int (n+1) 2\pi r^n dr$  (pour r variant de 0 à R) =  $2\pi R^{n+1}$ , Stokes est vérifié

## Mouvements dans un champ électrique ou magnétique

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: mouvement des particules chargées, force de Lorentz

On accélère un électron de masse  $m$  et charge  $-e$ , initialement au repos, sous la tension accélératrice  $U > 0$  donnée. On désigne par  $v$  la vitesse qu'il acquiert à l'issue de cette accélération.

1) Quelle est l'expression de son énergie cinétique finale  $E_c$  en fonction de  $m$  et  $v$  ?

2) Comment s'exprime l'énergie potentielle finale  $E_p$  en fonction de  $e$  et  $U$  ?

3) déduire du principe de conservation de l'énergie  $v$  en fonction de  $e$ ,  $m$  et  $U$ .

4) on dirige cet électron vers une zone de

l'espace où règne un champ électrique

uniforme  $\mathbf{E}$  donné et un champ magnétique

uniforme  $\mathbf{B}$  fixé selon les indications de la figure.

Quelle relation doit-il y avoir entre la vitesse  $v$  et les modules  $E$  et  $B$  des champs pour annuler la force de Lorentz de sorte que l'électron ne soit pas dévié ?

5) quelle est l'orientation de la force électrique

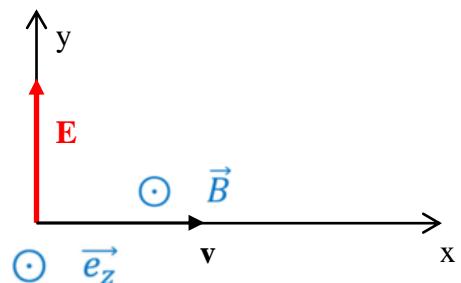
(y positif ou y négatif) ?

6) quelle est l'orientation de la force magnétique ?

(y positif ou y négatif) ?

7) déduire des questions précédentes le rapport  $e/m$

en fonction des données, c'est à dire  $E$ ,  $B$  et  $U$ . C'est l'expérience de Thomson.



Réponses:

1)  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

2)  $E_p = -e U$

3)  $v = (2 e U / m)^{1/2}$

4)  $v = E / B$

5) y négatif

6) y positif

7)  $e/m = (1 / 2U) E^2/B^2$

### Exercice 2 : mouvements des particules chargées et optique électronique

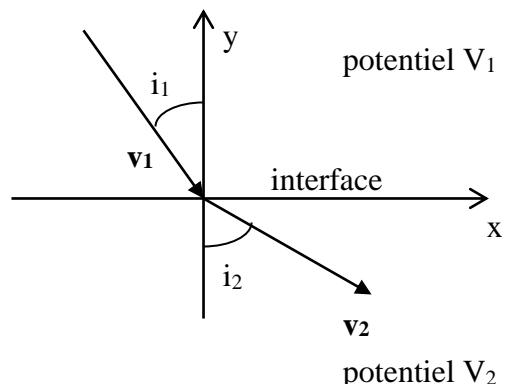
Un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  d'énergie mécanique  $E_m$  nulle se propage à la vitesse  $v_1$  dans un milieu porté au potentiel électrique uniforme  $V_1 > 0$ .

Aide: on rappelle que l'énergie mécanique de l'électron est:  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - e V$  où  $v$  est sa vitesse et  $V$  son potentiel.

L'électron tombe sous l'angle d'incidence  $i_1$  sur une interface séparant deux régions, la seconde étant au potentiel uniforme  $V_2 > 0$ . Il ressort sous incidence  $i_2$ .

1) exprimer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  dans les deux régions en fonction de  $e$ ,  $m$  et de leurs potentiels respectifs  $V_1$  et  $V_2$ .

2) à l'interface entre les régions 1 et 2 règne un champ électrique  $\mathbf{E} = (V_1 - V_2)/d \mathbf{e}_y$ ,  $d$  étant l'épaisseur supposée faible (et non représentée) de l'interface. En appliquant le principe fondamental



de la dynamique (PFD) à l'électron, de vitesse  $\mathbf{v}$  ( $v_x, v_y$ ), que vaut  $dv_x/dt$ ? En déduire que la composante  $v_x$  est conservée lors de la traversée.

- 3) en remarquant que  $v_x = v \sin(i)$ , quelle loi en déduit-on entre  $v_1, i_1$  et  $v_2, i_2$ ?
- 4) en déduire alors une loi entre  $V_1, i_1$  et  $V_2, i_2$  à partir des résultats de la question 1.
- 5) on suppose que  $V_1 > V_2 > 0$ . Il existe un angle d'incidence  $i_1 = i_L$  limite au delà duquel l'électron ne franchit pas l'interface et est réfléchi. Donner l'expression de  $\sin(i_L)$  en fonction de  $V_1$  et  $V_2$ , incidence limite qui correspond à  $i_2 = \pi/2 = 90^\circ$ .
- 6) citez un exemple de loi analogue en optique géométrique.

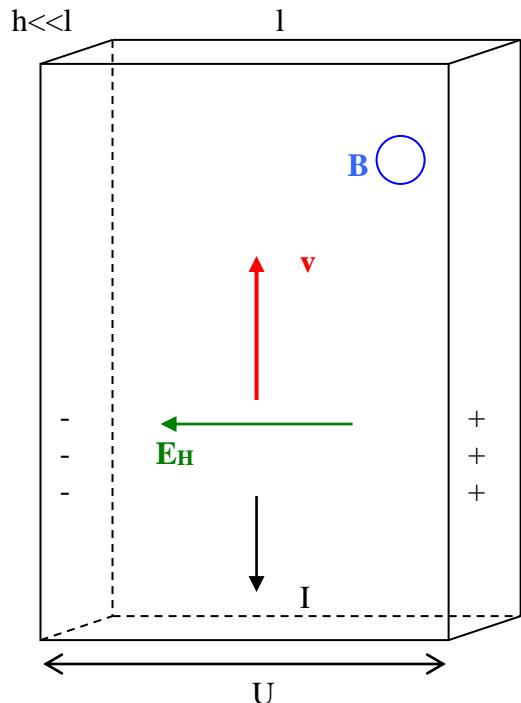
### Réponses

- 1)  $v_1 = (2 e V_1 / m)^{1/2}$   
 $v_2 = (2 e V_2 / m)^{1/2}$
- 2) PFD:  $m dv/dt = -e E = -e (V_1 - V_2)/d$   $e_y$  n'a pas de composante sur  $e_x$   
 $dv_x/dt = 0$   
 ainsi la composante  $v_x$  reste constante lors de la traversée
- 3)  $v_x = v_1 \sin(i_1) = v_2 \sin(i_2) = \text{constante}$
- 4)  $V_1^{1/2} \sin(i_1) = V_2^{1/2} \sin(i_2) = \text{constante}$
- 5)  $V_1^{1/2} \sin(i_1) = V_2^{1/2}$   
 d'où  $\sin(i_L) = (V_2/V_1)^{1/2} < 1$ ,  $i_L$  existe bien car  $V_1 > V_2$
- 6) les lois de Descartes  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) = \text{constante}$   
 où  $n_1$  et  $n_2$  sont les indices de réfraction des milieux.

### Exercice 3 : Teslamètre à effet Hall

Considérons une plaque métallique d'épaisseur  $h$  faible devant sa largeur  $l$  et sa longueur  $L$ . Un courant d'intensité  $I$  parcourt cette plaque. On la plonge dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  orthogonal à son plan, et on constate que l'action de  $\mathbf{B}$  sur les électrons libres entraîne l'apparition d'une tension  $U$  entre le bord gauche et droit de la plaque, résultant de l'accumulation de charges sur les côtés. Le but du teslamètre est de relier  $U$  (que l'on peut mesurer avec un voltmètre) à  $B = \|\mathbf{B}\|$  lorsque  $I$  est imposé.

- 1) Quel est le sens (droite ou gauche) de la force subie par les électrons lors de l'établissement du courant  $I$ ? Quels sont les signes des charges (+ ou -) accumulées sur les côtés gauche et droit de la plaque?
- 2) à l'équilibre, la force de Lorentz est nulle; montrer qu'il existe un champ électrique Hall  $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ , où  $\mathbf{v}$  est la vitesse des électrons (opposée au sens conventionnel du courant). Exprimer sa norme.
- 3) exprimer la tension Hall  $U$  en fonction de  $E_H = \|\mathbf{E}_H\|$  et de  $l$ , puis de  $v$ ,  $l$  et  $B$
- 4) exprimer l'intensité du courant  $I$  en fonction de la vitesse  $v$  des électrons, du nombre d'électrons  $n$  par unité de volume (voisin de  $10^{29} \text{ m}^{-3}$  dans un métal) et de la section de la plaque  $S = h l$ ; on appellera  $e$  la charge élémentaire ( $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ).
- 5) en déduire une relation entre  $U$  et  $B$ : on a ainsi réalisé un teslamètre !



## Réponses

1) la force  $-e \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  est dirigée vers la gauche; en conséquence, les électrons s'accumulent sur le côté gauche; en raison de la neutralité électrique du conducteur, des charges positives apparaissent sur le côté droit.

2) Entre les deux côtés apparaît alors un champ électrique dirigé vers la gauche allant des charges positives vers les charges négatives. A l'équilibre, la force de Lorentz tenant compte de ce champ est nulle:

$$\mathbf{F} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{0}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \text{ et en norme, } E_H = v B$$

$$3) U = E_H l = v B l$$

4)  $I = j S$  où  $j$  est la densité de courant et  $S = h l$  est la section du conducteur

$$j = n e v \quad (n e \text{ est la densité volumique de charge})$$

d'où

$$I = n e v h l$$

(autre méthode:  $I = dq/dt = n e dV/dt$  où  $dV/dt = S v$  est le débit volumique d'électrons)

$$5) v = I / (n e h l)$$

$\rightarrow U = v B l = (I / n e h) B = \underline{\text{constante} \times B}$ ,  $U$  est proportionnel à  $B$  lorsque  $I$  est imposé

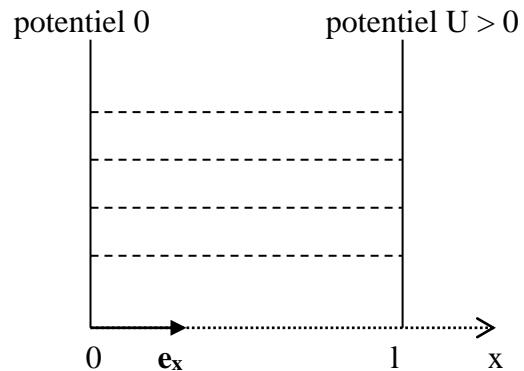
$\rightarrow$  la mesure de la tension Hall fournit le champ magnétique

## Electrostatique et analogie électrostatique/gravitation

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: électrostatique, capacité du condensateur plan

On considère un condensateur plan formé de deux plaques conductrices parallèles et infinies, l'une au potentiel nul, et l'autre au potentiel  $U > 0$ . Entre ces deux plaques, les lignes du champ électrique  $\mathbf{E}$  (tirets) sont des droites parallèles et le champ électrique est uniforme de module  $E$ . La distance entre les plans est appelée  $l$ . Ils portent des charges égales en valeur mais de signe opposé. On désigne la position d'un point  $M$  entre les plans par la variable  $x$  telle que  $0 < x < l$ .

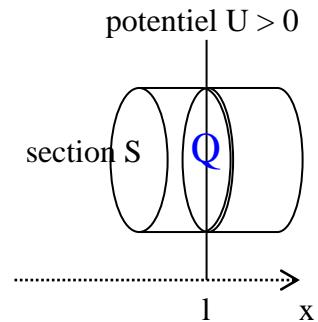


- 1) quelle relation vectorielle lie le champ électrique local  $\mathbf{E}(x)$  au potentiel local  $V(x)$  ?
- 2) en déduit-on  $\mathbf{E}(x) = - E \mathbf{e}_x$  ou  $\mathbf{E}(x) = E \mathbf{e}_x$  ( $\mathbf{E}$  étant le vecteur champ et  $E$  son module) ?
- 3) exprimer la fonction  $V(x)$  en fonction de  $E$  (module du champ) et de  $x$ .
- 4) en déduire l'expression de  $E$  en fonction de  $U$  et de  $l$ .
- 5) la plaque de droite en  $x = l$  porte t-elle une charge  $Q$  positive ou négative (aide: se rappeler que le vecteur  $\mathbf{E}$  va des charges positives vers les charges négatives) ?

On considère maintenant sur la plaque de droite une surface de Gauss cylindrique fermée de section  $S$  à cheval sur la plaque, le champ électrique étant nul dans l'espace  $x > l$  et de module  $E$  pour  $x < l$ .

On appelle  $Q$  la charge répartie sur la portion  $S$  de la plaque.

- 6) quel est le flux  $\Phi$  du champ électrique au travers de la surface de Gauss fermée en fonction de  $E$  (module du champ entre les plaques) et de  $S$  ?
- 7) en utilisant le théorème de Gauss, exprimer  $E$  en fonction de  $Q$ ,  $S$  et  $\epsilon_0$ .
- 8) déduire des questions 4 et 7 la capacité du condensateur  $C = Q / U$  en fonction de  $S$ ,  $l$  et  $\epsilon_0$ . La capacité se mesure en Farads.

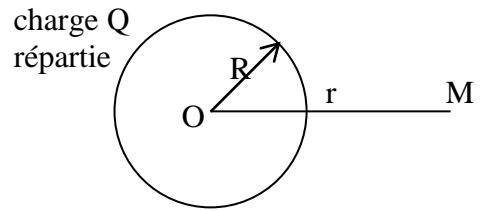


Réponses:

- 1)  $\mathbf{E}(x) = - \mathbf{grad} V(x) = - dV/dx \mathbf{e}_x$
- 2)  $\mathbf{E}(x) = - E \mathbf{e}_x$
- 3)  $V(x) = E x$
- 4)  $E = U / l$
- 5) positive
- 6)  $\Phi = E S$
- 7)  $E = Q / (\epsilon_0 S)$
- 8)  $C = \epsilon_0 S / l$

## Exercice 2: électrostatique, capacité d'une boule, pouvoir des pointes

On considère une boule creuse de rayon  $R$  uniformément chargée en surface et portant une charge  $Q > 0$ . On s'intéresse au champ électrique et au potentiel à l'extérieur de la boule. Le problème est à symétrie sphérique et la seule variable est  $r$ , distance au centre  $O$  de la boule. On se place en un point  $M$  à l'extérieur de la boule à la distance  $r = OM$  du centre  $O$ .



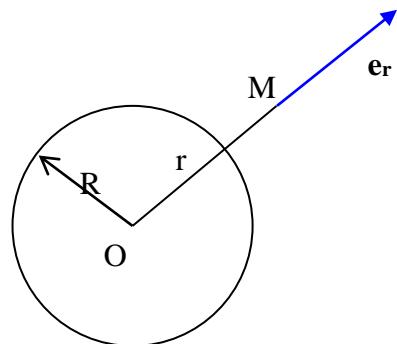
- 1) quelle est la direction du champ électrique en  $M$  (radiale ? orthoradiale ?)
  - 2) on choisit pour surface de Gauss une surface sphérique de centre  $O$  et de rayon  $r > R$ . Quel est le flux  $\Phi$  du champ électrique au travers de cette surface fermée en fonction du module  $E(r)$  du champ électrique et de  $r$  ?
  - 3) déduire du théorème de Gauss le champ électrique  $E(r)$  en  $M$  en fonction de  $Q$  et de  $r$
  - 4) par la relation  $E(r) = -dV/dr$ , donner l'expression du potentiel  $V(r)$  en  $M$  en fonction de  $Q$  et de  $r$
  - 5) on se place à la surface de la boule de potentiel  $U = V(R)$ : en déduire sa capacité  $C = Q/U$  en fonction de  $R$ .
  - 6) que vaut la capacité de la Terre sachant que  $R = 6400 \text{ km}$  (on prendra  $1 / 4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$ ).
  - 7) exprimer le champ électrique  $E(R)$  à la surface de la boule en fonction de son potentiel de surface  $U$  et de son rayon  $R$ .
  - 8) pour un potentiel de surface donné, comment  $E(R)$  varie-t-il quand  $R$  décroît (croît ? décroît ?).
  - 9) on prend  $U = 10^4 \text{ Volts}$  et  $R = 1 \text{ mm}$ ; calculer  $E(R)$ .
- Remarque: au dessus de  $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ , le champ électrique peut provoquer un phénomène de claquage de l'air, ouvrant un canal ionisé conducteur. C'est le principe du paratonnerre.

Réponses:

- 1) radiale
- 2)  $\Phi = E \cdot 4\pi r^2$
- 3)  $E(r) = Q / (4\pi \epsilon_0 r^2)$
- 4)  $V(r) = Q / (4\pi \epsilon_0 r)$
- 5)  $C = 4\pi \epsilon_0 R$
- 6)  $C = 0.0007 \text{ F}$
- 7)  $E(R) = U/R$
- 8)  $E(R)$  croît
- 9)  $E(R) = 10^7 \text{ V/m}$

## Exercice 3: analogie entre électrostatique et gravitation

On considère un corps sphérique de masse  $M$  et de rayon  $R$  donnés, de centre  $O$  et de masse volumique décrite par la loi  $\rho(r) = \rho_0 (r_0/r)$  où  $r$  désigne la variable radiale des coordonnées sphériques ( $r = OM$ ).  $\rho_0$  et  $r_0$  sont des constantes.



- 1) la masse élémentaire  $dm$  d'une coquille sphérique comprise entre  $r$  et  $r+dr$  est  $dm = \rho(r) 4\pi r^2 dr$ .

En déduire par intégration entre  $0$  et  $R$  la masse totale  $M$  du corps en fonction de  $\rho_0$ ,  $r_0$  et  $R$ .

- 2) soit une surface, dite de Gauss, sphérique de rayon  $r = OM$  et de centre  $O$ . Le champ de gravitation, en raison de la symétrie sphérique, est en tout point  $M$  de l'espace, de la forme

$\mathbf{G}(r) = G(r) \mathbf{e}_r$ , où  $\mathbf{e}_r$  est le vecteur unitaire radial  $\mathbf{OM}/\|\mathbf{OM}\|$ . Exprimer le flux  $\Phi$  du champ de gravitation  $\mathbf{G}(r)$  à travers de la surface sphérique de rayon  $r$ .

3) on se place dans l'espace où  $r < R$ . Exprimer, en reprenant la question 1, la masse  $m(r)$  intérieure à la sphère de rayon  $r$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $r_0$  et  $r$ .

4) en utilisant le théorème de Gauss du champ de gravitation, en déduire  $\mathbf{G}(r)$  dans l'espace  $r < R$  en fonction de  $K$  (constante de gravitation,  $6.67 \cdot 10^{-11}$  SI),  $\rho_0$  et  $r_0$ . Remarquer que son module ne dépend pas de  $r$  et est donc uniforme partout dans la sphère.

5) en utilisant le théorème de Gauss du champ de gravitation, en déduire  $\mathbf{G}(r)$  dans l'espace  $r > R$  en fonction de la masse  $M$  totale de la sphère,  $K$  et  $r$ . Remarquer qu'on retrouve la loi de Newton.

6) exprimer le potentiel de gravitation  $V(r)$  lorsque  $r > R$  sachant que  $G(r) = -dV/dr$  et que le potentiel est nul à l'infini, en fonction de  $M$ ,  $K$  et  $r$ ; puis de  $K$ ,  $\rho_0$ ,  $r_0$ ,  $R$  et  $r$  en remplaçant  $M$  par son expression trouvée à la question 1.

7) exprimer le potentiel de gravitation  $V(r)$  lorsque  $r < R$  sachant que  $G(r) = -dV/dr$ , en fonction de  $K$ ,  $\rho_0$ ,  $r_0$ ,  $R$  et  $r$ .

aide: le potentiel  $V(r)$  est une fonction continue en  $r = R$  ce qui permet de fixer la constante d'intégration puisque la question 6 permet de déterminer  $V(R)$ .

8) tracer l'allure de la valeur absolue du champ de gravitation  $|G(r)|$  et de la valeur absolue du potentiel  $|V(r)|$ .

Réponses:

1)  $M = 2\pi \rho_0 r_0 R^2$

2)  $\Phi = G(r) 4\pi r^2$

3)  $m(r) = 2\pi \rho_0 r_0 r^2$

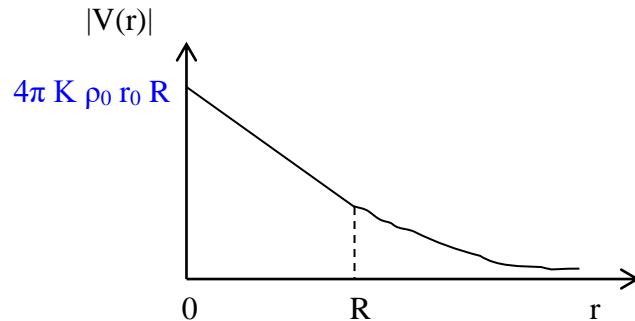
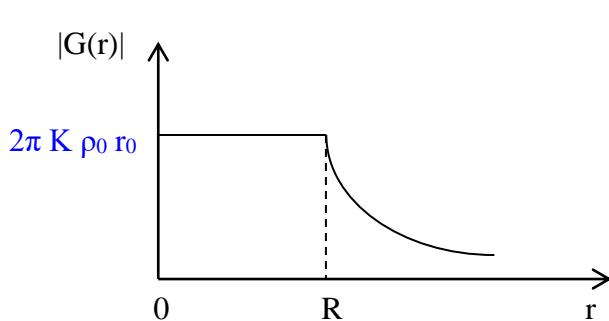
4)  $\mathbf{G}(r) = -2\pi K \rho_0 r_0 \mathbf{e}_r$

5)  $\mathbf{G}(r) = -K M/r^2 \mathbf{e}_r$

6)  $V(r) = -K M/r = -2\pi K \rho_0 r_0 R^2/r$

7)  $V(r) = 2\pi K \rho_0 r_0 (r - 2R)$

8) allure des fonctions.



#### Exercice 4: analogie entre électrostatique et gravitation; structure interne de la Terre

On donne ci joint le profil des mesures gravimétriques destinées à établir une loi de variation du champ de gravitation

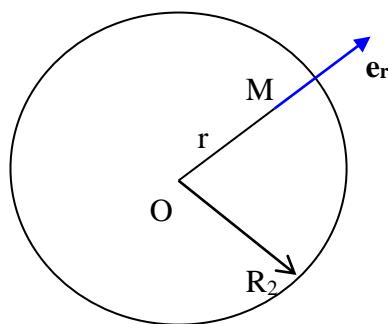
$\mathbf{G}(r) = G_r(r) \mathbf{e}_r$  en fonction de la distance  $r = OM$  du centre O de la Terre de rayon  $R_2$ .

Le champ de gravitation en  $M$  est lié à la masse volumique locale  $\rho(r)$  par l'équation de

Maxwell Gauss div  $\mathbf{G} = -4\pi K \rho$

où  $K$  est la constante de gravitation ( $6.67 \cdot 10^{-11}$  SI).

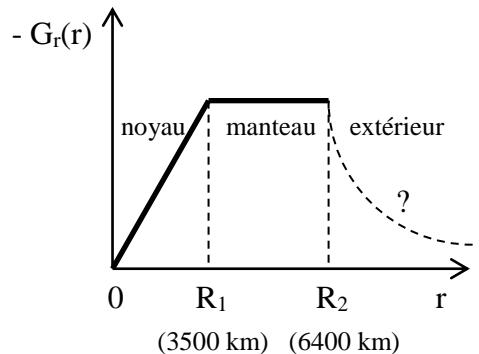
On donne la divergence pour un champ à symétrie sphérique de coordonnées  $\mathbf{G}$  ( $G_r, 0, 0$ ) dans



le repère orthonormé usuel ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ) :

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = (1/r^2) d(r^2 G_r)/dr$$

- 1) que peut-on dire de la loi de variation de  $\rho(r)$  dans la zone  $0 < r < R_1$  (répondre à cette question en donnant une fonction de  $r$ , sans constantes) ?
  - 2) que peut-on dire de la loi de variation de  $\rho(r)$  dans la zone  $R_1 < r < R_2$  (répondre à cette question en donnant une fonction de  $r$ , sans constantes) ?
  - 3) que peut-on dire de la loi de variation de  $G_r(r)$  dans la zone  $r > R_2$  sachant que  $\rho(r)$  y est nul (répondre à cette question en donnant une fonction de  $r$ , sans constantes) ?
  - 4) comment varie le potentiel de gravitation dans les trois zones  $0 < r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  et  $r > R_2$  (répondre à cette question en donnant trois fonctions de  $r$ , sans constantes) ?
- aide:  $G_r(r) = - dV/dr$  (provient de  $\mathbf{G} = - \operatorname{grad} V$ )



attention au signe de  $G_r(r)$  !

### Réponses

- 1)  $G_r(r)$  varie comme  $(-r)$  donc  $\rho(r)$  est constant (ne dépend pas de  $r$ )
- 2)  $G_r(r)$  est une constante négative donc  $\rho(r)$  varie comme  $(1/r)$
- 3)  $\rho(r)$  est nul donc  $G_r(r)$  varie comme  $(-1/r^2)$ , c'est un champ newtonien
- 4)  $V(r)$  varie dans les trois zones comme  $(1/2 r^2)$ ,  $(r)$  et  $(-1/r)$

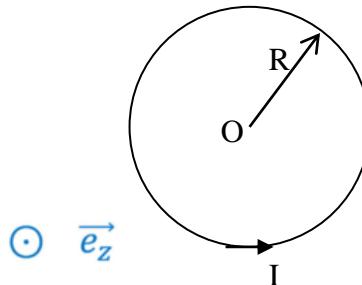
## Magnétostatique

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: magnétostatique, propriétés magnétiques d'une spire circulaire

On considère une spire de courant circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  dans le sens de la figure. On s'intéresse au champ magnétique au point O centre de la spire.

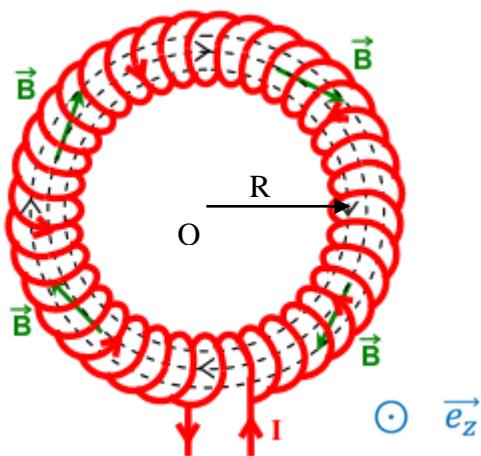
- 1) quelle est la direction du champ magnétique en O: selon l'axe de la spire ? dans son plan ?
- 2) quelle est le sens du champ magnétique en O: vers l'avant de la figure ( $\vec{e}_z$ ) ? vers l'arrière ( $-\vec{e}_z$ ) ?
- 3) en utilisant la loi de Biot et Savart, exprimer le champ magnétique  $B$  au point O en fonction de  $R$ ,  $I$  et  $\mu_0$
- 4) en considérant le champ magnétique uniforme dans le plan de la spire, quel est son flux  $\Phi$  à travers la surface de la spire en fonction de  $R$ ,  $I$  et  $\mu_0$  ?
- 5) en déduire l'inductance propre  $L$  de la spire en fonction de  $R$  et  $\mu_0$  ...
- 6) ... puis l'énergie magnétique  $E_m$  de la spire en fonction de  $R$ ,  $I$  et  $\mu_0$ .



**Réponses:**

- 1) axe
- 2) avant
- 3)  $B = \mu_0 I / (2R)$
- 4)  $\Phi = B \pi R^2 = \mu_0 I R (\pi / 2)$
- 5)  $L = \Phi / I = \mu_0 R (\pi / 2)$
- 6)  $E_m = 1/2 I \Phi = \mu_0 R \pi I^2 / 4$

### Exercice 2: magnétostatique, champ magnétique d'un tore



On considère une bobine torique de rayon  $R$  composée de  $N$  spires jointives circulaires de rayon  $a \ll R$  et parcourue par un courant  $I$  dans le sens de la figure, orientant ainsi le champ magnétique dans la direction de l'axe du tore.

- 1) On choisit un contour circulaire de centre O et de rayon  $r$  tel que  $R-a < r < R+a$ . Exprimer la circulation du champ magnétique sur ce contour orienté dans le sens horaire en fonction de  $B$  et de  $R$ .
- 2) la surface (disque) enlacée par ce contour est-elle orientée vers l'avant ( $\vec{e}_z$ ) ou l'arrière ( $-\vec{e}_z$ ) de la figure ?
- 3) Quel est le courant total traversant cette surface en fonction de  $N$  et de  $I$  ?
- 4) Appliquer le théorème d'Ampère et donner l'expression du champ magnétique  $B$  à l'intérieur du tore en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $\mu_0$
- 5) en considérant le champ magnétique uniforme à l'intérieur du tore (car  $a \ll R$ ), quel est son flux  $\Phi$  à travers l'ensemble des  $N$  spires du tore en fonction de  $R$ ,  $I$ ,  $N$ ,  $a$  et  $\mu_0$  ?
- 6) en déduire l'inductance propre  $L$  du tore en fonction de  $R$ ,  $N$ ,  $a$  et  $\mu_0$  ...

7) ... puis l'énergie magnétique  $E_m$  du tore en fonction de  $R$ ,  $I$ ,  $N$ ,  $a$  et  $\mu_0$ .

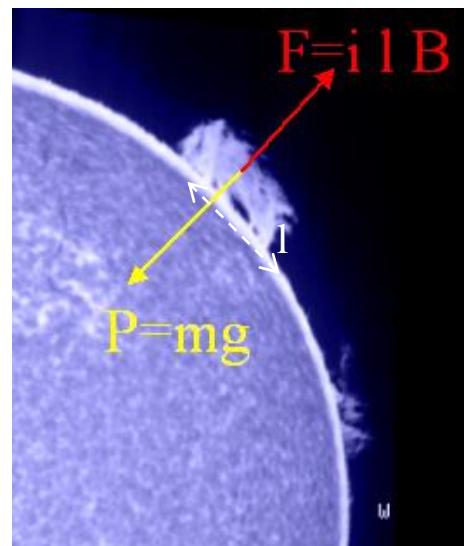
Réponses:

- 1) circulation =  $2 \pi R B$
- 2) arrière
- 3) courant total =  $N I$
- 4)  $B = \mu_0 N I / (2 \pi R)$
- 5)  $\Phi = B N \pi a^2 = \mu_0 N^2 I a^2 / (2 R)$
- 6)  $L = \Phi / I = \mu_0 N^2 a^2 / (2 R)$
- 7)  $E_m = 1/2 I \Phi = \mu_0 N^2 I^2 a^2 / (4 R)$

### Exercice 3: magnétostatique, force de Laplace

Un filament solaire est un "nuage" d'hydrogène de masse volumique  $\rho = 10^{-10} \text{ kg m}^{-3}$  plongé dans un champ magnétique  $B$  de l'ordre de  $10^{-3} \text{ T}$ . Il est parcouru par un courant d'intensité  $i$  et se trouve en équilibre entre le poids (dirigée vers le centre du soleil) et la force de Laplace (qui s'oppose à sa chute). On désigne par  $m$  sa masse et par  $l$  sa longueur. On donne l'accélération de la pesanteur à la surface du soleil:  $g = 275 \text{ m s}^{-2}$ .

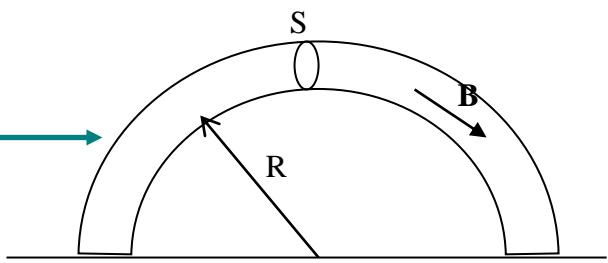
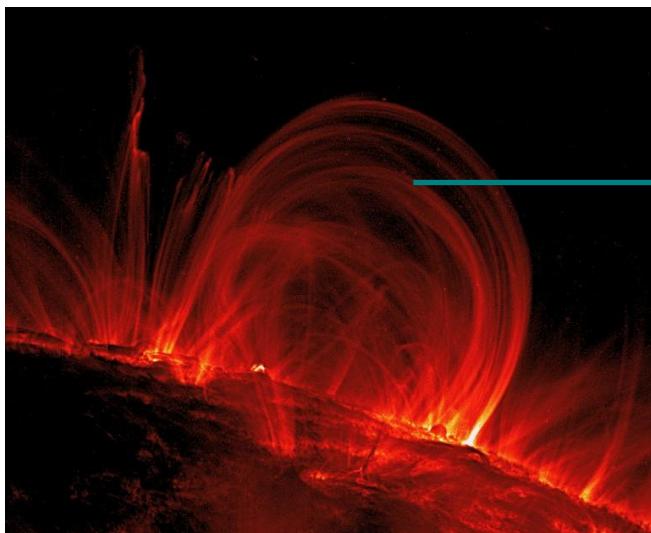
- 1) écrire l'équilibre entre la force de Laplace et la pesanteur en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $i$ ,  $l$  et  $B$ .
- 2) on suppose que l'objet a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur  $l$  et de section  $S$ ; exprimer sa masse  $m$  en fonction de  $\rho$ ,  $l$  et  $S$ .
- 3) quelle relation y a t-il entre l'intensité du courant  $i$ , la densité de courant  $j$ , et la section  $S$  ?
- 4) exprimer la densité de courant  $j$  ( $\text{A m}^{-2}$ ) qui circule dans le filament en fonction de  $\rho$ ,  $g$  et  $B$ .
- 5) calculer numériquement sa valeur.
- 6) calculer l'ordre de grandeur de la valeur de l'intensité  $i$  (en A) en prenant une section typique  $S = 5 \cdot 10^7 \text{ m} \times 5 \cdot 10^6 \text{ m}$ .



Réponses:

- 1)  $m g = i l B$
- 2)  $m = \rho S l$
- 3)  $i = j S$
- 4)  $j = \rho g / B$
- 5)  $j = 2.75 \cdot 10^{-5} \text{ A m}^{-2}$
- 6)  $i = j S = 10^9 \text{ A}$  environ, soit un milliard d'Ampères.

#### Exercice 4: magnétostatique, énergie magnétique, des ordres de grandeur numériques



Tube semi circulaire de rayon  
 $R = 50\ 000\ km$  et dont la section  $S$  est un disque de diamètre  $D = 3000\ km$

On assimile une boucle de champ magnétique à la surface du soleil à un tube semi circulaire de rayon  $R = 50\ 000\ km$  et dont la section  $S$  est un petit disque de diamètre  $D = 3000\ km$ . Le champ magnétique dans le tube vaut partout  $B = 0.01\ T$ .

- 1) de l'équation de Maxwell  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ , on peut se faire une idée de l'ordre de grandeur de la densité de courant  $j$  dans la boucle en écrivant:  $j = B / (R\mu_0)$ ; quelle est la valeur de  $j$  ?
- 2) que vaut la section  $S = \pi D^2/4$  de la boucle ?
- 3) que vaut alors l'intensité du courant  $I = j S$  dans la boucle ?
- 4) que vaut le volume  $V = \pi R S$  de la boucle ...
- 5) ... et l'énergie magnétique  $U_m = V (B^2 / 2\mu_0)$  stockée dans cette boucle ? Comparez là à l'énergie dégagée par une éruption solaire (comprise entre  $10^{20}\ J$  et  $10^{24}\ J$ ), à l'énergie consommée sur Terre en un an ( $10^{21}\ J$ ) puis à l'énergie des réserves fossiles estimées sur Terre ( $10^{23}\ J$ ).
- 6) la puissance dissipée par effet joule dans la boucle est  $P_J = V (j^2/\gamma)$  où  $\gamma = 10^6\ S\ m^{-1}$  est la conductivité du milieu. Que vaut-elle ?
- 7) si le milieu a pour densité  $\rho = 10^{-11}\ kg\ m^{-3}$ , quelle est la masse  $m = \rho V$  de la boucle ?
- 8) imaginons que nous convertissions seulement 10% de l'énergie magnétique  $U_m$  de la boucle (calculée en question 5) en énergie cinétique  $U_c = 1/2 m v^2$ , quelle vitesse  $v$  d'éjection du soleil trouverions nous ? Est ce supérieur à la vitesse de libération du soleil ( $600\ km\ s^{-1}$ ) qui permet à la matière d'échapper à l'attraction du soleil et de se répandre dans le milieu interplanétaire ?

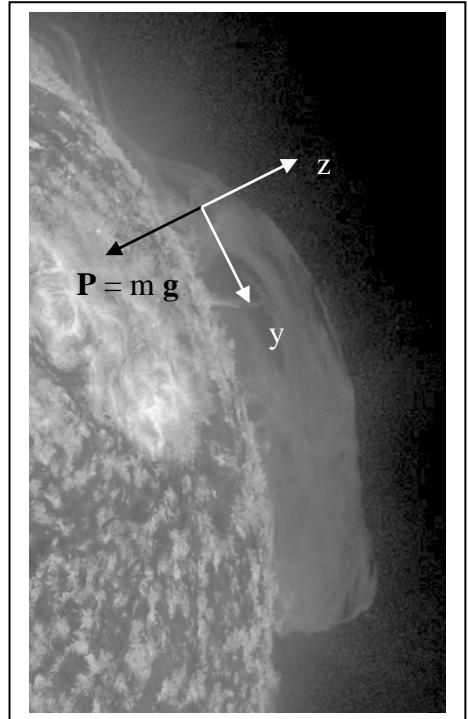
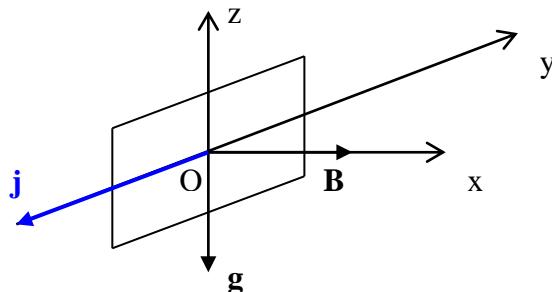
Réponses:

- 1)  $j = 1.6 \cdot 10^{-4}\ A\ m^{-2}$
- 2)  $S = 7 \cdot 10^{12}\ m^2$
- 3)  $I = 1.1 \cdot 10^9\ A$  (environ un milliard d'Ampères !)
- 4)  $V = 1.1 \cdot 10^{21}\ m^3$
- 5)  $U_m = 4.4 \cdot 10^{22}\ J$
- 6)  $2.8 \cdot 10^7\ W$
- 7)  $m = 1.1 \cdot 10^{10}\ kg$
- 8)  $v = 1000\ km\ s^{-1}$  environ, cette vitesse permet d'échapper à l'attraction solaire !

## Exercice 5: un modèle magnétostatique de filament solaire

Les protubérances sont constituées d'Hydrogène à 10000 K de température en suspension dans la couronne solaire 100 fois plus chaude. L'équilibre des pressions gazeuses implique que l'on s'attend à ce qu'elles soient approximativement 100 fois plus denses que le milieu environnant. C'est l'action d'un champ magnétique (force de Laplace) qui fait que les protubérances ne s'effondrent pas sous leur propre poids. Nous allons modéliser leur équilibre dans le cadre d'hypothèses très simplificatrices.

1) La protubérance est plongée dans un champ magnétique de la forme  $\mathbf{B} = B(z) \mathbf{e}_x$  où  $z$  est la verticale locale.



Le plan  $xOy$  est horizontal. La protubérance est parcourue par une densité de courant électrique  $\mathbf{j}$ ; montrer que  $\mathbf{j}$  est porté par  $\mathbf{e}_y$  et exprimer  $j(z)$  en fonction de  $z$ .

- 2) En écrivant que la force de Laplace volumique équilibre le poids, obtenir une équation différentielle sur  $B(z)$ . On suppose que la masse volumique  $\rho$  de la protubérance ainsi que la gravité  $g$  sont des constantes.
- 3) Intégrer cette équation en prenant comme condition  $B(0) = B_0$  constante connue en  $z = 0$ . Donner alors les expressions de  $B(z)$  et de  $j(z)$ .
- 4) Sachant que  $B_0 = 0.002$  T, quelle est la hauteur maximale possible de la protubérance pour une masse volumique de  $10^{-10}$  kg m<sup>-3</sup> et  $g = 275$  m s<sup>-2</sup> ?

Solution:

1)  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = (d/dz) \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{B}(z) \mathbf{e}_x = dB/dz \mathbf{e}_y$

le courant  $\mathbf{j}$  est donc porté par  $\mathbf{e}_y$

la valeur algébrique du courant est donnée par

$$j(z) = (1/\mu_0) dB/dz$$

2) Equilibre vectoriel force de Laplace - pesanteur

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

$$(1/\mu_0) dB/dz \mathbf{e}_y \wedge \mathbf{B}(z) \mathbf{e}_x - \rho g \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Cette équation d'équilibre n'a de composante que sur Oz:

$$(1/\mu_0) dB/dz B(z) = -\rho g, \text{ ou encore } d(B^2/2\mu_0) = -\rho g$$

3) Par intégration sur  $z$ , on obtient alors:

$$(B^2 - B_0^2)/2\mu_0 = -\rho g z$$

soit en définitive:

$$\boxed{\begin{aligned} B(z) &= [B_0^2 - 2 \mu_0 \rho g z]^{1/2} \\ \text{et } j(z) &= -\rho g / [B_0^2 - 2 \mu_0 \rho g z]^{1/2} \end{aligned}}$$

4) On constate que le champ magnétique diminue avec l'altitude  $z$  et devient nul pour une hauteur maximale  $h$  telle que:

$$\boxed{h = B_0^2 / (2 \mu_0 \rho g)}$$

Pour  $B_0 = 0.002$  T,  $\rho = 10^{-10}$  kg m<sup>-3</sup> et  $g = 275$  m s<sup>-2</sup>, on obtient  $h = 58000$  km.

## Induction magnétique

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

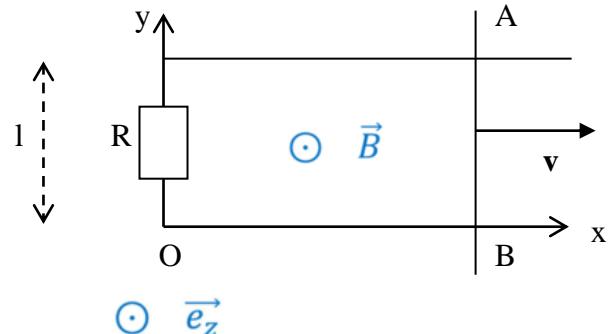
### Exercice 1: Induction magnétique (rails de Laplace)

On considère un circuit fermé de résistance globale  $R$  constitué de rails conducteurs. Sur ces rails, un opérateur entraîne à vitesse constante  $v$  un barreau conducteur  $AB$ , dans le sens positif de l'axe  $Ox$ . On désigne par  $l$  la largeur du circuit et par  $x = OB$  la position du barreau. Ainsi,  $v = dx/dt = \text{constante}$ . Le circuit est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  orthogonal au plan du circuit, uniforme et constant (figure). Un courant induit  $I$  apparaît dans le circuit en raison de sa variation de surface et ce courant applique une force de Laplace au barreau.

- 1) en utilisant la loi de Lenz, prévoir le sens ( $x$  positif ou  $x$  négatif) de la force de Laplace qui s'applique au barreau se déplaçant dans le sens  $x$  positif.
- 2) le courant induit va t-il de  $A$  vers  $B$  ou de  $B$  vers  $A$  dans le barreau ?
- 3) orienter le circuit dans le sens du courant induit. Son vecteur surface  $\mathbf{S}$  (de valeur  $S = x l$ ) est-il dirigé vers l'avant de la figure ( $\mathbf{e}_z$ ) ou vers l'arrière ( $-\mathbf{e}_z$ ) ?
- 4) Exprimer le flux magnétique  $\Phi$  au travers du circuit en fonction de  $B$ ,  $x$  et  $l$  (**attention au signe !**).
- 5) en déduire la force électromotrice  $e$  en fonction de  $B$ ,  $v$  et  $l$  par la loi de Faraday ...
- 6) ... puis l'intensité  $I$  du courant induit en fonction de  $B$ ,  $v$ ,  $l$  et  $R$  par la loi d'Ohm ...
- 7) ... et enfin la puissance Joule  $P_J$  dégagée dans le circuit.
- 8) donner l'expression de la force de Laplace  $F$  subie par le barreau en fonction de  $B$ ,  $v$ ,  $l$  et  $R$ . L'opérateur doit appliquer une force égale et opposée pour maintenir le barreau à vitesse constante. Vérifier que la puissance Joule est égale à la puissance  $F v$  de la force de Laplace.

Réponses:

- 1)  $x$  négatif
- 2) de  $A$  vers  $B$
- 3) arrière
- 4)  $\Phi = -B l x$
- 5)  $e = B l v$
- 6)  $I = B l v / R$
- 7)  $P = B^2 l^2 v^2 / R$
- 8)  $F = B^2 l^2 v / R$



## Exercice 2 : Induction dans un circuit ouvert ou fermé en présence de champ magnétique variable

On considère un champ magnétique uniforme mais variable orienté selon  $\mathbf{e}_z$  tel que  $\mathbf{B} = B(t) \mathbf{e}_z$  dans un système de coordonnées cylindriques ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ ).

- 1) on veut déterminer le potentiel vecteur orthoradial en M  $\mathbf{A}(M) = A(r,t) \mathbf{e}_\theta$  dont dérive ce champ magnétique sachant que  $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A}) = (1/r) \partial(r\mathbf{A})/\partial r \mathbf{e}_z = B(t) \mathbf{e}_z$  exprimer  $A(r,t)$  en fonction de  $B(t)$  et de  $r$  (on choisira la constante d'intégration nulle)
- 2) on considère un barreau conducteur PM orienté radialement selon  $\mathbf{e}_r$ . Apparaît-il une fem d'induction  $e$  dans ce barreau ?
- 3) on considère un arc conducteur PQ tangent à  $\mathbf{e}_\theta$  en tout point M lui appartenant et ayant la forme d'un arc de cercle d'angle  $\alpha$  et de rayon  $r$ . Apparaît-il une fem d'induction  $e$  dans ce barreau ? Si oui exprimer  $e$  en fonction de  $dB/dt$ ,  $r$  et de  $\alpha$ ; puis  $V_P - V_Q$  en fonction de  $e$ .
- 4) que vaut  $e$  lorsque  $\alpha = 2\pi$  (circuit fermé) ?
- 5) exprimer le flux du champ magnétique  $\Phi$  sur le disque de centre O enlacé par le cercle de rayon  $r$  (on orientera le cercle dans le sens trigonométrique).
- 6) si  $R$  est la résistance du circuit circulaire, donner le courant induit  $I$  en fonction de  $dB/dt$ ,  $r$  et  $R$  en utilisant la loi de Faraday.
- 7) dans quel sens circule le courant induit  $I$  si  $dB/dt > 0$  (trigonométrique ? horaire ?)
- 8) le champ magnétique induit créé par le courant induit  $I$  est-il orienté selon  $\mathbf{e}_z$  ou  $-\mathbf{e}_z$  lorsque  $dB/dt > 0$  ?
- 9) est ce conforme à la loi de Lenz ?

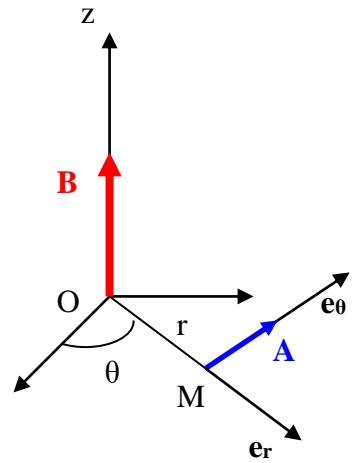
### Aide

pour un circuit ouvert AB:  $e = - \partial/\partial t \left[ \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]$

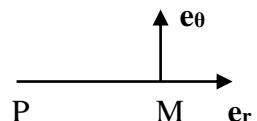
pour un circuit fermé:  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  est la circulation du potentiel vecteur sur un contour fermé; elle est égale au flux de  $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$  sur la surface enlacée par ce contour (théorème de Stokes), donc  $e = - \partial\Phi/\partial t$  où  $\Phi$  est le flux du champ magnétique (loi de Faraday).

### Réponses

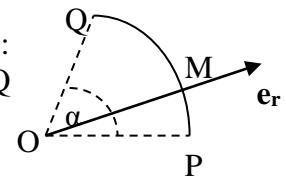
- 1)  $A(r,t) = B(t) r / 2$
- 2) non, car  $\mathbf{A}(r,t)$  est orthogonal au barreau conducteur
- 3) oui, car  $\mathbf{A}(r,t)$  est colinéaire à l'arc conducteur  $e = - (dB/dt) r^2 \alpha / 2$  et  $V_P - V_Q = -e$
- 4)  $e = - (dB/dt) \pi r^2$
- 5)  $\Phi = B \pi r^2$
- 6)  $e = - \partial\Phi/\partial t = - (dB/dt) \pi r^2$
- 7)  $RI = e$  donne le courant induit  $I = e/R = - (dB/dt) \pi r^2 / R$
- 8) selon  $-\mathbf{e}_z$  (utiliser la loi de Biot et Savart en ( $I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{u}$ ) et la règle des doigts de la main droite)
- 9) oui, le champ magnétique induit s'oppose à l'augmentation du champ extérieur



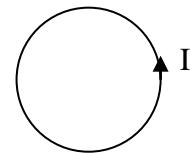
question 2:  
barreau radial PQ



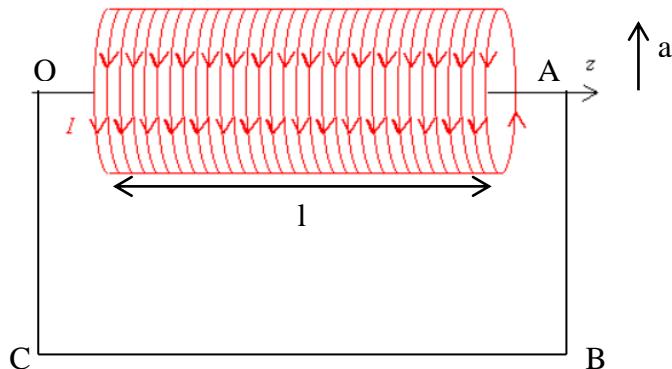
questions 3 et 4:  
arc de cercle PQ  
de rayon r



questions 5 à 9:  
cercle de rayon r  
d'axe Oz



### Exercice 3 : Energie magnétique du solénoïde



on considère un solénoïde d'axe Oz de grande longueur l par rapport à son rayon a ( $l \gg a$ ), comportant n spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité i dans le sens de la figure.

- 1) quelle est la direction du champ magnétique sur l'axe du solénoïde ?
- 2) on considère un contour rectangulaire OABC orienté par le champ magnétique du solénoïde; le champ est nul sur AB, BC et CO. Exprimer la circulation du champ magnétique sur OA en fonction de B (champ sur l'axe du solénoïde) et de l.
- 3) le vecteur surface de OABC est-il vers vous ou à l'opposé ?
- 4) que vaut le courant total traversant la surface appuyée sur le contour OABC en fonction de n, l et i ?
- 5) En déduire le champ magnétique B sur l'axe du solénoïde en fonction de  $\mu_0$ , n et i.
- 6) On suppose le champ magnétique uniforme sur la section du solénoïde de rayon a; exprimer le flux  $\Phi$  du champ magnétique à travers la totalité des spires; en déduire l'inductance propre L du solénoïde en fonction de  $\mu_0$ , n, l et a puis l'énergie magnétique Ep du solénoïde en fonction de  $\mu_0$ , n, l, a et i.
- 7) le potentiel vecteur A du solénoïde est orthoradial; pour le déterminer, on peut utiliser le théorème d'Ampère du potentiel vecteur sur un contour circulaire de rayon r et d'axe Oz:

$$\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \text{flux du champ magnétique enlacé par le contour}$$

En supposant B uniforme à l'intérieur, exprimer A(r) en fonction de  $\mu_0$ , n, i et r (pour  $r < a$ ).

8) pour calculer l'énergie magnétique du solénoïde, une alternative consiste à utiliser l'intégrale volumique sur les courants  $Ep = 1/2 \iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dv$  qui se réduit pour un courant filiforme à la forme  $Ep = 1/2 \int \mathbf{A} \cdot i dl$  où  $dl$  est un élément de circuit.

Ici,  $dl$  et  $A$  sont colinéaires, et on obtient simplement  $Ep = 1/2 i A(a) x$  (longueur totale de fil)  
Après avoir exprimé la longueur totale de fil en fonction de a, n et l, vérifier que l'expression de Ep trouvée par cette méthode est identique à celle de la question 6.

**réponses**

- 1) dans le sens Oz
- 2) B l
- 3) à l'opposé
- 4)  $n l i$
- 5)  $B = \mu_0 n i$
- 6)  $\Phi = \mu_0 n i (n l \pi a^2) = \mu_0 n^2 l \pi a^2 i$   
 $L = \Phi/i = \mu_0 n^2 l \pi a^2$   
 $Ep = 1/2 i \Phi = 1/2 L i^2 = 1/2 \mu_0 n^2 l \pi a^2 i^2$
- 7)  $A(r) 2 \pi r = B \pi r^2$  d'où  $A(r) = \mu_0 n i r / 2$
- 8)  $Ep = 1/2 A(a) i (2\pi a n l) = 1/2 (\mu_0 n i a / 2) i (2\pi a n l) = 1/2 \mu_0 n^2 l \pi a^2 i^2$

#### Exercice 4 : Induction par un fil infini parcouru par une intensité variable

1) On considère un fil infini d'axe Oz vertical parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  variable. En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon  $r$  et d'axe Oz, retrouver la formule du cours donnant le champ magnétique à la distance  $r$  du fil. Celui ci est orthoradial.

2) en déduire le potentiel vecteur porté par Oz en écrivant:

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}(r) \mathbf{e}_z = \mathbf{grad} A(r) \wedge \mathbf{e}_z = - dA(r)/dr \mathbf{e}_\theta$$

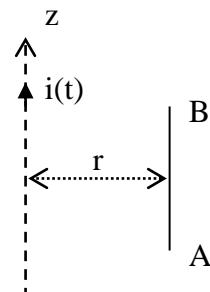
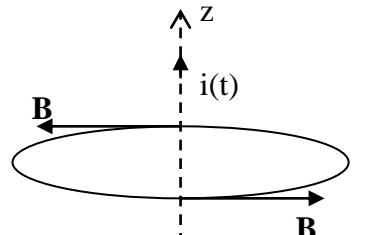
3) On place à la distance  $r$  du fil un barreau conducteur AB de longueur  $l$  parallèle à l'axe Oz.

Ce barreau est le siège d'une fem d'induction si le courant  $i(t)$  varie. Exprimer  $V_A - V_B$  en fonction de  $di/dt$ .

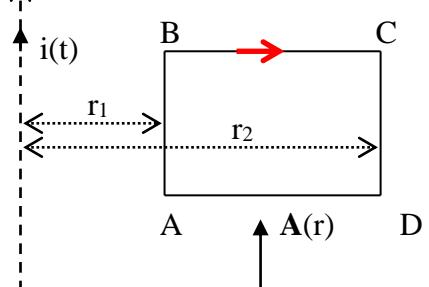
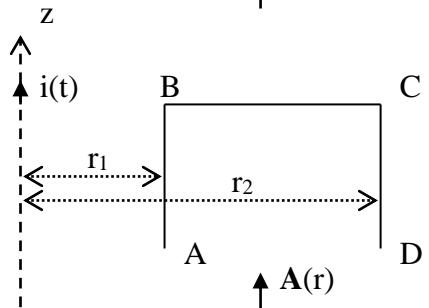
Aide: loi d'OHM dans le barreau:  $V_A - V_B = - e$

pour un circuit ouvert AB:  $e = - \partial/\partial t \left[ \int_A^B \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]$

4) Dans la configuration à 3 barreaux ABCD de la figure, exprimer  $V_A - V_D$  en fonction de  $di/dt$ . Y a t-il induction dans l'élément BC ?



5) Dans la configuration à 4 barreaux constituante un circuit fermé ABCD, exprimer le courant induit  $I(t)$  en fonction de  $di/dt$ .  
On désigne par R la résistance de ce circuit.  
On utilisera la loi de Faraday  $e = - d\Phi/dt$  en utilisant l'orientation arbitraire du contour ABCD indiquée sur la figure. Si  $i(t)$  augmente, dans quel sens circule le courant induit  $I(t)$ ? Est ce conforme à la loi de Lenz?



#### Réponses

1)  $B = \mu_0 i / (2 \pi r)$

2)  $A(r) = - (\mu_0 i / 2 \pi) \ln(r)$

3)  $V_A - V_B = d/dt (A(r) l) = - (\mu_0 l / 2 \pi) \ln(r) di/dt$

4) pas d'induction dans BC car le potentiel vecteur est orthogonal à BC

$V_A - V_D = - (\mu_0 l / 2 \pi) \ln(r_1) di/dt + (\mu_0 l / 2 \pi) \ln(r_2) di/dt$

Attention, sur AB  $d\mathbf{l}$  et  $\mathbf{A}(r_1)$  ont même sens, mais sur CD  $d\mathbf{l}$  et  $\mathbf{A}(r_2)$  sont opposés!

$V_A - V_D = - (\mu_0 l / 2 \pi) \ln(r_1/r_2) di/dt$

5)  $I = e/R$

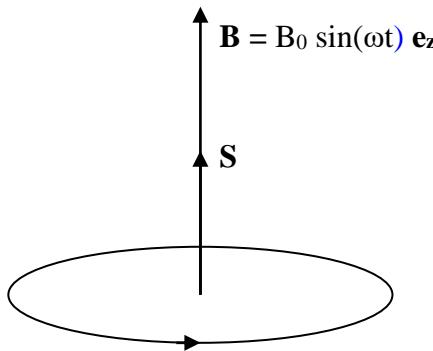
$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B l dr$  car les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $d\mathbf{S}$  sont colinéaires et de même sens.

d'où par intégration de  $r_1$  à  $r_2$ ,  $\Phi = \mu_0 i l / (2 \pi) \ln(r_2/r_1)$  et  $e = - \mu_0 l / (2 \pi) \ln(r_2/r_1) di/dt$ ,

d'où  $I = e/R = - \mu_0 l / (2 \pi R) \ln(r_2/r_1) di/dt$

Si  $di/dt > 0$ ,  $I(t) < 0$  et circule de C vers B. Il crée un champ induit qui s'oppose à l'augmentation du champ du fil infini en conformité avec la loi de modération de Lenz.

### Exercice 5 : induction dans une spire de courant dans un champ magnétique extérieur variable



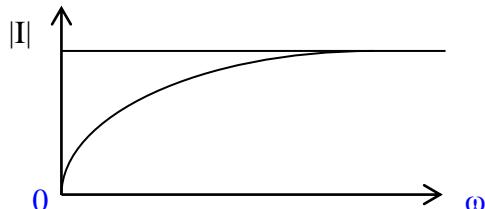
On considère une spire de courant de résistance R, d'inductance propre L plongée dans un champ magnétique uniforme mais variable  $\mathbf{B} = B_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_z$ . Il apparaît un courant induit  $i(t)$ . Le circuit est orienté arbitrairement dans le sens indiqué sur la figure de sorte que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{B}$  soient de même sens.

- 1) donner l'expression du flux total (propre + extérieur) au travers du circuit
- 2) écrire l'équation électrique du circuit
- 3) on passe aux quantités complexes en posant:  $i = I e^{j\omega t}$  ( $I$  complexe); écrire l'équation électrique avec cette notation et en déduire l'amplitude complexe  $I$  du courant
- 4) donner  $|I|$  et tracer la fonction  $|I|$  en fonction de  $\omega$ ; lorsque  $\omega \rightarrow \infty$ , quelle est la limite de  $|I|$  ?
- 5) donner  $\langle E_m \rangle = \langle L i^2/2 \rangle$  valeur moyenne de l'énergie magnétique en fonction de  $\omega$
- 6) donner  $\langle P_m \rangle = \langle d(Li^2/2)/dt \rangle$  valeur moyenne de la puissance magnétique en fonction de  $\omega$
- 7) donner  $\langle P_j \rangle = \langle R i^2 \rangle$  valeur moyenne de la puissance Joule en fonction de  $\omega$
- 8) donner  $\langle P_e \rangle = \langle i d\Phi_{ext}/dt \rangle$  valeur moyenne de la puissance échangée avec l'extérieur de  $\omega$
- 9) constater que  $\langle P_e \rangle + \langle P_j \rangle = 0$

Réponses

- 1)  $\Phi = L i + B_0 S \sin(\omega t)$
- 2)  $Ri + d\Phi/dt = 0$   
soit  $Ri + L di/dt + B_0 S \omega \cos(\omega t) = 0$
- 3)  $I(R + jL\omega) + B_0 S \omega = 0$  d'où  $I = -B_0 S \omega / (R + jL\omega)$
- 4)  $|I| = B_0 S \omega / (R^2 + L^2 \omega^2)^{1/2}$

asymptote horizontale  $B_0 S / L$



- 5)  $\langle E_m \rangle = \langle L i^2/2 \rangle = 1/4 L \operatorname{Re}(i i^*) = 1/4 L |I|^2 = 1/4 L B_0^2 S^2 \omega^2 / (R^2 + L^2 \omega^2)$
- 6)  $\langle P_m \rangle = \langle d(Li^2/2)/dt \rangle$   
 $= \langle L i di/dt \rangle = 1/2 L \operatorname{Re}(i di/dt^*) = 1/2 L \operatorname{Re}[i(-j\omega i^*)] = 1/2 L\omega |I|^2 \operatorname{Re}(-j) = 0$
- 7)  $\langle P_j \rangle = \langle R i^2 \rangle = 1/2 R |I|^2 = 1/2 R B_0^2 S^2 \omega^2 / (R^2 + L^2 \omega^2)$
- 8)  $\langle P_e \rangle = \langle i d\Phi_{ext}/dt \rangle$  où  $\Phi_{ext} = B_0 S e^{j(\omega t - \pi/2)} = -B_0 S j e^{j\omega t}$  en notation complexe  
 $= 1/2 \operatorname{Re}[i(d\Phi_{ext}/dt)^*] = 1/2 \operatorname{Re}[i(-j\omega \Phi_{ext}^*)] = \omega/2 \operatorname{Re}[i(-j)(jB_0S)] = \omega B_0 S / 2 \operatorname{Re}(i)$   
 $= (\omega B_0 S / 2) (-B_0 S \omega) R / (R^2 + L^2 \omega^2) = -1/2 R B_0^2 S^2 \omega^2 / (R^2 + L^2 \omega^2)$
- 9)  $\langle P_e \rangle = -\langle P_j \rangle$  la puissance échangée avec l'extérieur est dégagée en effet Joule

## Ondes électromagnétiques

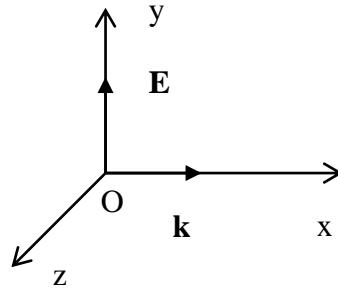
(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: ondes électromagnétiques dans le vide

Une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant dans le sens des  $x$  positifs, de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$ , de pulsation  $\omega$ , possède un champ électrique transversal de la forme suivante, en notation complexe:

$$\mathbf{E} = E(x, t) \mathbf{e}_y = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \mathbf{e}_y$$

L'onde se propage dans le vide à la vitesse  $C$  de la lumière.  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique.



- 1) quelle est la direction du champ magnétique associé (axe  $Ox$ , axe  $Oy$ , axe  $Oz$ ) ?
- 2) quelle est l'expression complexe de la valeur algébrique  $B(x, t)$  du champ magnétique en fonction de  $k$ ,  $\omega$ ,  $E_0$ , et des variables  $x$  et  $t$  ?
- 3) quelle relation lie  $k$  à  $\omega$  et  $C$  et dans le vide ?
- 4) le vecteur de Poynting est le produit vectoriel  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$ ; quelle est la direction de  $\mathbf{P}$  (axe  $Ox$ , axe  $Oy$ , axe  $Oz$ ) ?
- 5) la valeur algébrique de  $P$  est  $E(x, t) B(x, t) / \mu_0$  dont la valeur moyenne est  $\langle P \rangle = 1/2 \operatorname{Re}(E B^*) / \mu_0$  où  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle de la quantité en argument et  $B^*$  la quantité complexe conjuguée de  $B$ . Exprimer  $\langle P \rangle$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $C$  et  $E_0$  (aide:  $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$ ).
- 6) quelle est la valeur moyenne  $\langle U_e \rangle$  de la densité d'énergie électrique  $U_e = 1/2 \epsilon_0 E^2$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E_0$  ?
- 7) et la valeur moyenne  $\langle U_m \rangle$  de la densité d'énergie magnétique  $U_m = 1/2 B^2 / \mu_0$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E_0$ ? Remarquer qu'il y a équpartition entre énergie électrique et magnétique moyenne.
- 8) donner alors l'expression de la valeur moyenne  $\langle U_e + U_m \rangle$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E_0$ .
- 9) quelle relation y a t-il entre  $\langle P \rangle$  et  $\langle U_e + U_m \rangle$ ? Quelle est sa signification physique ?

Réponses:

- 1) Oz
- 2)  $B = (k/\omega) E_0 e^{i(\omega t - kx)}$
- 3)  $k = \omega / C$
- 4) Ox
- 5)  $\langle P \rangle = 1/2 E_0^2 k / (\omega \mu_0) = 1/2 \epsilon_0 E_0^2 C$
- 6)  $\langle U_e \rangle = 1/4 \epsilon_0 E_0^2$
- 7)  $\langle U_m \rangle = 1/4 E_0^2 k^2 / (\omega^2 \mu_0) = 1/4 \epsilon_0 E_0^2$
- 8)  $\langle U_e + U_m \rangle = 1/2 \epsilon_0 E_0^2$
- 9)  $\langle P \rangle = \langle U_e + U_m \rangle C$

L'onde propage son énergie à la vitesse  $C$ .

### Exercice 2: équation de d'Alembert et ondes progressives à une dimension spatiale

Soit l'équation de d'Alembert  $\partial^2 f / \partial x^2 = (1/C^2) \partial^2 f / \partial t^2$  où  $f(x, t)$  est une fonction des variables  $x$  (abscisse) et  $t$  (temps), et  $C$  est une vitesse caractéristique. Considérons une fonction  $g(u)$  quelconque de la variable  $u = C t - x$ ; on veut montrer que  $g(u)$  est solution de cette équation. On rappelle que  $\partial g / \partial x = (\partial g / \partial u) (\partial u / \partial x) = g'(u) (\partial u / \partial x)$  et que  $\partial g / \partial t = (\partial g / \partial u) (\partial u / \partial t) = g'(u) (\partial u / \partial t)$  où  $g'$  est la dérivée de  $g$ . On notera  $g''$  la dérivée seconde.

- 1) évaluer  $\partial g / \partial x$  en fonction de  $g'(u)$
- 2) évaluer  $\partial^2 g / \partial x^2$  en fonction de  $g''(u)$
- 3) évaluer  $\partial g / \partial t$  en fonction de  $g'(u)$
- 4) évaluer  $\partial^2 g / \partial t^2$  en fonction de  $g''(u)$  et conclure
- 5) quelle relation faut-il entre  $k$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que la fonction  $g(x,t) = \cos(\omega t - kx)$  soit solution ?
- 6) comment nomme t'on cette onde ?
- 7) dans quel sens se propage t-elle ( $x > 0$  ou  $x < 0$ ) ?
- 8) soit la variable  $v = C t + x$ ; une fonction quelconque  $h(v)$  est-elle aussi solution de l'équation de d'Alembert ?
- 9) quelle relation faut-il entre  $k$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que la fonction  $h(x,t) = \cos(\omega t + kx)$  soit solution ?
- 10) dans quel sens cette onde se propage t-elle ( $x > 0$  ou  $x < 0$ ) ?

Réponses:

- 1)  $\partial g / \partial x = -g'(u)$
- 2)  $\partial^2 g / \partial x^2 = g''(u)$
- 3)  $\partial g / \partial t = C g'(u)$
- 4)  $\partial^2 g / \partial t^2 = C^2 g''(u)$  et l'équation de d'Alembert est vérifiée par  $g(u)$
- 5)  $\omega = C k$
- 6) onde plane progressive harmonique ou OPPH
- 7)  $x > 0$
- 8) oui
- 9)  $\omega = C k$
- 10)  $x < 0$

### Exercice 3: caractérisation de l'onde plane progressive harmonique (OPPH) dans le vide

Une onde plane progressive harmonique (OPPH) est de la forme  $\cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde qui indique la direction de propagation, et où  $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$  est le vecteur qui définit la position du point M de l'espace où l'on considère l'onde.

En notation complexe, le champ électrique s'écrit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  et le champ magnétique associé s'écrit  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  où  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  sont les amplitudes complexes. Bien entendu, ce sont les parties réelles qui ont un sens physique, la notation complexe étant un outil simplifiant les calculs.

Par exemple, en notation complexe, les opérateurs suivants s'écrivent très simplement:

- $\partial / \partial t = i \omega$  opérateur multiplication par ( $i \omega$ )
- $\partial^2 / \partial t^2 = -\omega^2$  opérateur multiplication par ( $-\omega^2$ )
- $\mathbf{grad} = -i \mathbf{k}$  opérateur multiplication par ( $-i \mathbf{k}$ )
- $\mathbf{div} = -i \mathbf{k} \cdot$  opérateur produit scalaire avec ( $-i \mathbf{k}$ )
- $\mathbf{rot} = -i \mathbf{k} \wedge$  opérateur produit vectoriel avec ( $-i \mathbf{k}$ )
- $\Delta = -\mathbf{k}^2$  opérateur multiplication par ( $-\mathbf{k}^2$ )

- 1) quelle conclusion tirer de  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  (équation de Maxwell Gauss) en ce qui concerne les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{k}$  ?
- 2) le champ électrique  $\mathbf{E}$  est-il longitudinal ? transversal ?
- 3) quelle conclusion tirer de  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  (équation de Maxwell Thomson) en ce qui concerne les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{k}$  ?
- 4) le champ magnétique est-il longitudinal ? transversal ?
- 5) quelle relation vectorielle entre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  peut-on tirer de  $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  (équation de Maxwell Faraday: exprimer  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\omega$ ) ?

- 6) les champs **E** et **B** sont-ils colinéaires, orthogonaux ?  
 7) le trièdre (**k**, **E**, **B**) est -il direct, indirect ?  
 8) quelle relation vectorielle entre **E**, **B**, **k** et  $\omega$  peut-on tirer de  $\text{rot } \mathbf{B} = (1/C^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$  (équation de Maxwell Ampère où l'on a posé  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$ : exprimer **E** en fonction de **B**, **k**,  $\omega$  et  $C^2$ ) ?  
 9) en combinant les deux relations issues des questions 5 et 8, quelle loi relie  $k^2$ ,  $C^2$  et  $\omega^2$  ?  
 aide:

a) prendre **B** exprimé en fonction de **E** (question 5) et l'injecter dans **E** exprimé en fonction de **B** (question 8)

b)  $\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}$  (formule du double produit vectoriel)

- 10) donner alors les deux solutions possibles pour **k** en fonction de  $C$  et de  $\omega$   
 11) quel sens physique donner aux deux solutions ?

Réponses:

- 1) les vecteurs **E** et **k** sont orthogonaux  
 2) transversal  
 3) les vecteurs **B** et **k** sont orthogonaux  
 4) transversal  
 5)  $\mathbf{B} = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) / \omega$   
 6) orthogonaux  
 7) direct  
 8)  $\mathbf{E} = - (C^2 / \omega) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{B})$   
 9)  $k^2 = \omega^2 / C^2$   
 10)  $k = \omega / C$  et  $k = -\omega / C$   
 11) deux sens de propagation

#### Exercice 4: équation de d'Alembert et ondes stationnaires

Soit l'équation de d'Alembert  $\partial^2 f / \partial x^2 = (1/C^2) \partial^2 f / \partial t^2$  où  $f(x,t)$  est une fonction des variables  $x$  (abscisse) et  $t$  (temps), et  $C$  est une vitesse caractéristique. Nous allons rechercher des solutions de cette équation par la méthode de séparation des variables. On pose pour ce faire  $f(x,t) = X(x) T(t)$  où  $X(x)$  et  $T(t)$  sont respectivement des fonctions de  $x$  et  $t$  seules. On note  $X''$  et  $T''$  les dérivées secondes des fonctions  $X$  et  $T$ .

- 1) Quelle équation obtient-on en divisant l'équation de l'Alembert par  $f(x,t) = X(t) T(t)$  ?  
 2) on pose  $X''/X = -k^2$  où  $k$  est une constante réelle; quelle est la solution générique réelle de cette équation différentielle en utilisant une fonction sinus dont appellera  $\varphi$  la phase ?  
 3) quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par  $T(t)$  ?  
 4) quelle est la solution générique réelle de cette équation différentielle en utilisant une fonction sinus (on appellera  $\Phi$  la phase et on posera  $\omega = C k$ ) ?

On suppose désormais pour simplifier  $\varphi = \Phi = 0$

- 5) Cette solution n'est pas progressive mais stationnaire car il existe des noeuds et des ventres. On définit la position spatiale des noeuds par les points d'annulation de  $X(x)$  et la position spatiale des ventres par la position des minima ou maxima de  $X(t)$ . Quelle est la position  $x_n$  des noeuds en fonction de  $k$  et d'un entier relatif  $n$  qu'on introduira ?  
 6) donner la position  $x_n$  des noeuds en fonction de la longueur d'onde  $\lambda = k / 2\pi$  et de  $n$ .  
 7) quelle est la position  $x_v$  des ventres en fonction de  $k$  et d'un entier relatif  $p$  qu'on introduira ?  
 8) donner la position  $x_v$  des ventres en fonction de la longueur d'onde  $\lambda = k / 2\pi$  et de  $p$ .  
 9) quel intervalle  $y$  a t'il entre deux noeuds adjacents ou deux ventres adjacents en fonction de  $\lambda$  ?

10) on suppose que de sorte que  $f(x,t) = A \sin(kx) \sin(\omega t)$  où  $A$  est une amplitude constante. On a un noeud à l'origine, donc  $f(0,t) = 0$  à tout instant  $t$ . On souhaite qu'en  $x = L$ , on ait également un noeud de sorte que  $f(L,t) = 0$  à tout instant  $t$ . Quelles valeurs le produit  $k L$  doit-il prendre (introduire un nombre entier  $m$ ) ? On a ainsi défini les modes de vibration d'une cavité.

11) dans ce cas, quelles sont les pulsations admissibles dans la cavité ?

Réponses:

- 1)  $X''/X = (1/C^2) T'''/T$
- 2)  $X(x) = \sin(kx + \phi)$
- 3)  $T''/T = - C^2 k^2$
- 4)  $T(t) = \sin(\omega t + \Phi)$
- 5)  $x_n = n \pi / k$
- 6)  $x_n = n (\lambda/2)$
- 7)  $x_v = (1/2 + p) \pi / k$
- 8)  $x_v = (\lambda/2) (1/2 + p)$
- 9) intervalle  $\lambda/2$
- 10)  $k L = m \pi$
- 11)  $\omega = m (C \pi / L)$

### Exercice 5: lois de Descartes

Les lois de Descartes découlent de l'électromagnétisme. Considérons l'interface de séparation entre un milieu 1 d'indice de réfraction  $n_1$  et un milieu 2 d'indice de réfraction  $n_2$ .

L'onde plane progressive harmonique incidente (OPPH) est notée (indice i):

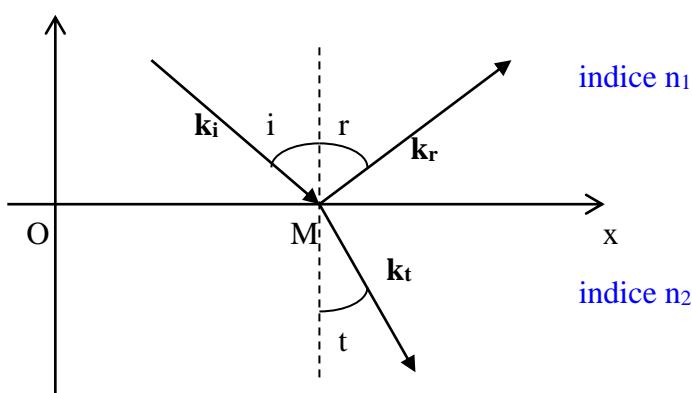
$E_i = A_i \cos(\omega t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OM})$  au point point M de l'espace.

Les OPPH réfléchies et transmises sont respectivement notées au point M (indices r et t):

$E_r = A_r \cos(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{OM})$  et  $E_t = A_t \cos(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{OM})$

$\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$  sont les vecteurs d'onde incident, réfléchi, transmis.

L'invariance de phase sur l'interface implique que si  $\mathbf{OM} = x \mathbf{e}_x$ , alors  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OM} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{OM} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{OM}$



- 1) exprimer  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OM}$ ,  $\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{OM}$  et  $\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{OM}$  en fonction des normes des vecteurs d'onde  $k_i, k_r, k_t$ , des angles  $i, r, t$  et de l'abscisse  $x$  du point M sur l'interface.
- 2) quelle relation en déduit-on entre  $k_i, i, k_r$  et  $r$  ?
- 3) quelle relation en déduit-on entre  $k_i, i, k_t$  et  $t$  ?
- 4) dans un milieu d'indice  $n$ ,  $k = n \omega / C = \omega / v$  où  $v = C / n$  est la vitesse de propagation dans le milieu; exprimer  $k_i, k_r, k_t$  en fonction de  $n_1, n_2, \omega$  et  $C$  en remarquant que  $k_i = k_r$ .
- 5) quelle loi découle alors de la question 2 entre  $i$  et  $r$  (loi de la réflexion) ?
- 6) quelle loi découle alors de la question 3 entre  $i$  et  $t$  (loi de la réfraction) ?

## Réponses

- 1)  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{OM} = k_i \sin(i) x ; \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{OM} = k_r \sin(r) x ; \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{OM} = k_t \sin(t) x$
- 2)  $k_i \sin(i) = k_r \sin(r)$
- 3)  $k_i \sin(i) = k_t \sin(t)$
- 4)  $k_i = n_1 \omega / C ; k_r = n_1 \omega / C ; k_t = n_2 \omega / C$
- 5)  $i = r$
- 6)  $n_1 \sin(i) = n_2 \sin(t)$

## Exercice 6: dualité onde corpuscule; pression de radiation et "voile solaire"

La science fiction a parfois exploité l'idée de "voile solaire" poussée dans le milieu interplanétaire par la pression de radiation exercée par les photons sur une surface. Sous cette idée réside la dualité onde corpuscule suggérée par Louis de Broglie en 1924.

En mécanique classique, considérons un flux de  $n$  particules par unité de volume, de même masse  $m$  et de même vitesse  $v$ , percutant sous incidence normale une surface  $S$ . Pendant le temps  $dt$ , la quantité de mouvement de l'ensemble des particules arrivant sur la surface  $S$  est :

$$dP = p n (S v dt),$$

où  $p$  est la quantité de mouvement de chaque particule et  $(S v dt)$  le volume qui atteint la surface  $S$  en  $dt$ . La force exercée sur la surface est  $F = dP/dt = p n S v$ , et la pression exercée par les collisions (inélastiques) avec la surface  $S$  est  $P_{\text{rad}} = F/S = p n v$ .

En ce qui concerne les photons qui n'ont pas de masse, la quantité de mouvement  $p$  est donnée par la relation:  $E = \text{énergie} = h v = p C$ , d'où  $p = h / \lambda$ ,  $h$  étant la constante de Planck ( $6.62 \cdot 10^{-34}$ ),  $v$  la fréquence,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $C$  la vitesse de la lumière.

C'est la relation de "de Broglie" qui associe à toute particule d'impulsion  $p$  (aspect corpusculaire) une longueur d'onde  $\lambda$  (aspect ondulatoire).

- 1) Soit  $L = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ W}$  la luminosité du Soleil; quel vaut la puissance rayonnée ou module du vecteur de Poynting en  $\text{W/m}^2$  reçu au niveau de l'orbite terrestre distante de  $d = 150$  millions de km (on nomme cette valeur la "constante" solaire) ? En supposant que la puissance moyenne rayonnée est  $C \varepsilon_0 E^2$ , quelle est l'ordre de grandeur du champ électrique associé ( $\varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$ ) ?
- 2) Si on suppose que la longueur d'onde des photons est  $\lambda = 550 \text{ nm}$  (hypothèse très grossière), que vaut l'impulsion  $p$  d'un photon ?
- 3) soit  $F$  la force exercée par les photons sur une surface  $S$  en incidence normale; exprimer la puissance de cette force par unité de surface en fonction de  $F$ ,  $S$  et  $C$  vitesse de la lumière.
- 4) le rapport  $F/S$  est égal à la pression de radiation  $P_{\text{rad}}$ ; en égalisant les résultats trouvés aux questions 1 et 3, donner son expression en fonction de  $L$ ,  $d$  et  $C$  et en déduire sa valeur numérique (en Pa) et le nombre moyen de photons par unité de volume  $n$  (en utilisant  $P_{\text{rad}} = p n C$ ).
- 5) quelle surface faut-il déployer pour obtenir une force de 1 N ?
- 6) le vent solaire est un flux de particules (électrons et protons) qui se propage à la vitesse  $v = 400 \text{ km/s}$  dans le milieu interplanétaire. On donne  $m = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  (masse du proton) et  $n = 10^6 \text{ m}^{-3}$  (nombre de protons par unité de volume). Que vaut la quantité de mouvement  $p$  du proton ? La pression de radiation  $P_{\text{rad}} = p n v$  ? Est ce plus efficace ?
- 7) Que vaut la longueur d'onde de Broglie associée au proton ? Le caractère ondulatoire du proton est-il observable à la vitesse du vent solaire ?
- 8) Que vaut la longueur d'onde de Broglie d'un électron de masse  $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  se déplaçant à une vitesse égale à  $0.01 C$  ? Son caractère ondulatoire est-il observable ?

## Réponses:

- 1)  $L / (4 \pi d^2) = 1362 \text{ W m}^{-2}$  = module moyen du vecteur de Poynting  
 $E = 716 \text{ V m}^{-1}$
- 2)  $p = 1.2 \cdot 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}$
- 3)  $F C / S$

- 4)  $L / (4 \pi d^2) = P_{\text{rad}} C$  d'où  $P_{\text{rad}} = L / (4 \pi d^2 C) = 4.54 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$   
et  $n = P_{\text{rad}} / pC = 1.26 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$
- 5)  $S = 220 \cdot 000 \text{ m}^2$
- 6)  $p = 6.68 \cdot 10^{-16} \text{ kg m s}^{-1}$   
et  $P_{\text{rad}} = p n v = 2.67 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$
- 7)  $\lambda = h / p = 9.91 \cdot 10^{-19} \text{ m}$ , très petit devant la dimension d'un atome ( $10^{-10} \text{ m}$ ), caractère ondulatoire inobservable
- 8)  $\lambda = h / mC = 2.42 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , de l'ordre de grandeur de la dimension d'un atome ( $10^{-10} \text{ m}$ ), caractère ondulatoire observable (diffraction par exemple)

### Exercice 7: Onde Plane Progressive Harmonique (OPPH)

On étudie une onde dont le champ électrique  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$  telle que  $E_x = E_0 \cos[\omega t - a(x+2y+z)]$  où  $a$  est une constante positive. L'onde se propage dans le vide à la vitesse  $C$ . La longueur d'onde de la lumière est de 600 nm.

- 1) calculer la fréquence de l'onde en Hz et préciser le domaine du spectre électromagnétique dans lequel elle se trouve (X ? UV ? visible ? IR ? radio ?).
  - 2) quelles sont les coordonnées du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et sa norme en fonction de  $a$  ?
  - 3) donner l'équation des plans d'onde en fonction de  $x, y, z$ .
  - 4) quelle est la relation de dispersion des ondes liant  $\omega$  à  $k = \|\mathbf{k}\|$  en fonction de  $C$  ?
  - 5) trouver  $E_y$  en fonction de  $E_x$  sachant que  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  (Maxwell Gauss), signifiant que le produit scalaire  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}$  est nul pour une OPPH (utiliser  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ).
  - 6) exprimer les 3 coordonnées du champ magnétique  $\mathbf{B}$  associé en utilisant la relation valide pour les OPPH, soit  $\mathbf{B} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} / \omega$  (provient de Maxwell Faraday) en fonction de  $a, \omega$  et  $E_x$ .
  - 7) Déterminer les 3 coordonnées du vecteur de Poynting  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0$  en fonction de  $a, \omega$  et  $E_x$ .
  - 8) Exprimer le vecteur  $\mathbf{P}$  en fonction de  $E_x^2, \mu_0, \omega$  et du vecteur  $\mathbf{k}$ .
  - 9) Exprimer la moyenne temporelle de la norme  $\langle P \rangle$  du vecteur de Poynting en fonction de  $\langle E_x^2 \rangle$ , moyenne du carré de  $E_x$ ,  $\epsilon_0$  et  $C$ .
  - 10) En déduire la norme  $\langle P \rangle$  du vecteur de Poynting en fonction de  $E_0^2, \epsilon_0$  et  $C$ .
- Aide:  $\langle E_x^2 \rangle = 1/2 E_0^2$
- 11) exprimer la densité d'énergie électromagnétique moyenne  $\langle U_{\text{em}} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2 / 2 + B^2 / 2\mu_0 \rangle$  en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E_0^2$
- Aide: remarquer qu'en norme,  $B = E / C$  de sorte que  $\langle U_{\text{em}} \rangle = \langle \epsilon_0 E^2 \rangle$
- Aide:  $\langle E^2 \rangle = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle$  qu'on exprimera en fonction de  $E_0^2$
- 12) Quelle relation a-t-on entre  $\langle P \rangle$  et  $\langle U_{\text{em}} \rangle$  en fonction de  $C$  ?

### Solution

- 1)  $v = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$   
domaine visible (rouge)
- 2) coordonnées du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  ( $a, 2a, a$ )  
norme  $k = a\sqrt{6}$
- 3) les plans d'onde ont pour équation  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante}$ , donc  $x + 2y + z = \text{constante}$ . Ces plans sont tous orthogonaux au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .
- 4) La relation de dispersion des ondes est pour une OPPH dans le vide  $\omega = C k$
- 5) Pour une onde plane,  $\text{div } \mathbf{E} = 0$  est équivalent à  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ , le champ électrique est transversal (orthogonal à la direction de propagation), donc  $a E_x + 2a E_y = 0$  soit  $E_y = -1/2 E_x$
- 6)  $\mathbf{B} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} / \omega$   
où  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0) = (E_x, -1/2 E_x, 0)$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a/\omega \\ 2a/\omega \\ a/\omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \mathbf{B} = a/\omega \begin{pmatrix} 1/2 E_x \\ E_x \\ -5/2 E_x \end{pmatrix}$$

$$7) \mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0 = \begin{pmatrix} E_x \\ -1/2 E_x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \left( a/\mu_0 \omega \right) \begin{pmatrix} 1/2 E_x \\ E_x \\ -5/2 E_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \left( a/\mu_0 \omega \right) E_x^2 \begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

8)  $\mathbf{P} = 5/4 (\mathbf{k}/\mu_0 \omega) E_x^2$  est un vecteur colinéaire au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$

Remarque:

Ce résultat était prévisible car  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{E} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E})/\mu_0 \omega$

Le double produit vectoriel vaut  $E^2 \mathbf{k}$  car  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{k}$  sont orthogonaux, donc  $\mathbf{P} = (E^2/\mu_0 \omega) \mathbf{k}$   
 $E^2 = E_x^2 + E_y^2 = 5/4 E_x^2$  donne bien  $\mathbf{P} = 5/4 (E_x^2/\mu_0 \omega) \mathbf{k}$

9) En moyenne temporelle,  $\langle \mathbf{P} \rangle = 5/4 \langle E_x^2 \rangle / \mu_0 \omega \mathbf{k}$

La relation de dispersion  $\omega = C k$  donne finalement  $\boxed{\langle \mathbf{P} \rangle = 5/4 \langle E_x^2 \rangle / \mu_0 C = 5/4 C \epsilon_0 \langle E_x^2 \rangle}$

$$10) E_x^2 = 1/2 E_0^2 \rightarrow \boxed{\langle \mathbf{P} \rangle = 5/8 C \epsilon_0 E_0^2}$$

$$11) \langle U_{em} \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle / 2 + \langle B^2 \rangle / 2 \mu_0$$

Or  $B^2 = k^2 E^2 / \omega^2 = E^2 / C^2$  d'après la relation de dispersion  $\omega = C k$

$$\text{donc } \langle U_{em} \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \epsilon_0 (\langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle) = 5/4 \epsilon_0 E_x^2 = \boxed{5/8 \epsilon_0 E_0^2}$$

12) on a la relation  $\boxed{\langle \mathbf{P} \rangle = C \langle U_{em} \rangle}$  donc l'énergie est propagée à la vitesse  $C$ .

### Exercice 8: Onde sphérique Progressive Harmonique (OSPH) et pression de radiation

On considère une onde sphérique progressive harmonique dans un système de coordonnées sphériques ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ ) dont le champ électrique  $\mathbf{E}$  s'écrit au point M distant de la distance  $r$  à l'origine O du repère ( $OM = r$ ):

$$\mathbf{E} = E_0 [\cos(\omega t - kr) / r] \mathbf{e}_\theta = E \mathbf{e}_\theta$$

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r$  de norme  $k$  est radial.

1) ce champ électrique transversal de valeur  $E(r, t)$  est, à grande distance seulement, à divergence nulle et solution de l'équation de d'Alembert sphérique:

$$\Delta \mathbf{E} = (1/r) \partial^2 (r \mathbf{E}) / \partial r^2 = (1/C^2) \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$$

En déduire la relation de dispersion qui lie  $k$  à  $\omega$  en fonction de  $C$ .

2) Le champ magnétique associé est, à grande distance seulement, donné par  $\mathbf{B} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}/\omega$ .

Le vecteur  $\mathbf{B}$  est-il porté par  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ , ou  $\mathbf{e}_\phi$  ?

3) donner le module  $B$  de  $\mathbf{B}$  en fonction du module  $E$  de  $\mathbf{E}$  et de  $C$ .

4) Le vecteur de Poynting  $\mathbf{P} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$  est-il porté par  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ , ou  $\mathbf{e}_\phi$  ?

5) donner le module  $P$  de  $\mathbf{P}$  en fonction de  $\epsilon_0, E$  et  $C$ .

Aide:  $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$

6) exprimer la valeur moyenne temporelle  $\langle \mathbf{P} \rangle$  en fonction de  $\epsilon_0, E_0, C$  et  $r$  et remarquer que l'intensité de l'onde décroît en fonction de la distance en  $1/r^2$ .

7) la densité d'énergie électromagnétique est définie par  $U_{em} = \epsilon_0 E^2 / 2 + B^2 / 2 \mu_0$ ; donner son expression uniquement en fonction de  $\epsilon_0$  et  $E$ .

Aide:  $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$

8) exprimer la valeur moyenne temporelle  $\langle U_{em} \rangle$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $r$  et  $E_0$

9) quelle relation lie  $\langle P \rangle$  à  $\langle U_{em} \rangle$  en fonction de  $C$  ?

10) Quelle relation lie la puissance rayonnée dans l'espace  $L$  sur une surface sphérique de rayon  $r$  à  $\langle P \rangle$  ?

Aide: la puissance rayonnée est le flux du vecteur de Poynting sur une surface

11) On définit la pression de radiation par la relation  $P_{rad} = \langle U_{em} \rangle$ . Exprimer  $P_{rad}$  en fonction de  $L$ ,  $r$  et  $C$ .

12) si  $L = 3.86 \cdot 10^{26}$  W est la puissance rayonnée par le Soleil, en déduire la pression de radiation en Pascals à l'orbite terrestre où  $r = 1.5 \cdot 10^{11}$  m est la distance Soleil Terre.

13) quelle surface  $S$  en  $m^2$  faudrait-il déployer dans l'espace pour que la pression de radiation exerce dessus une force de 1 N ?

**Solution**

1)  $k = \omega/C$

2)  $e_\phi$

3)  $B = E/C$

4)  $e_r$

5)  $P = \epsilon_0 C E^2$

6)  $\langle P \rangle = \epsilon_0 C E_0^2 / (2 r^2)$

7)  $U_{em} = \epsilon_0 E^2$

8)  $\langle U_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 / (2 r^2)$

9)  $\langle P \rangle = C \langle U_{em} \rangle$ , ce qui signifie que l'énergie se propage à la vitesse  $C$  de la lumière

10)  $L = 4 \pi r^2 \langle P \rangle$

11)  $P_{rad} = L / (4 \pi r^2 C)$

12)  $P_{rad} = 4.55 \cdot 10^{-6}$  Pa

13)  $S = 220000$   $m^2$

### Exercice 9: vitesse de groupe et vitesse de phase

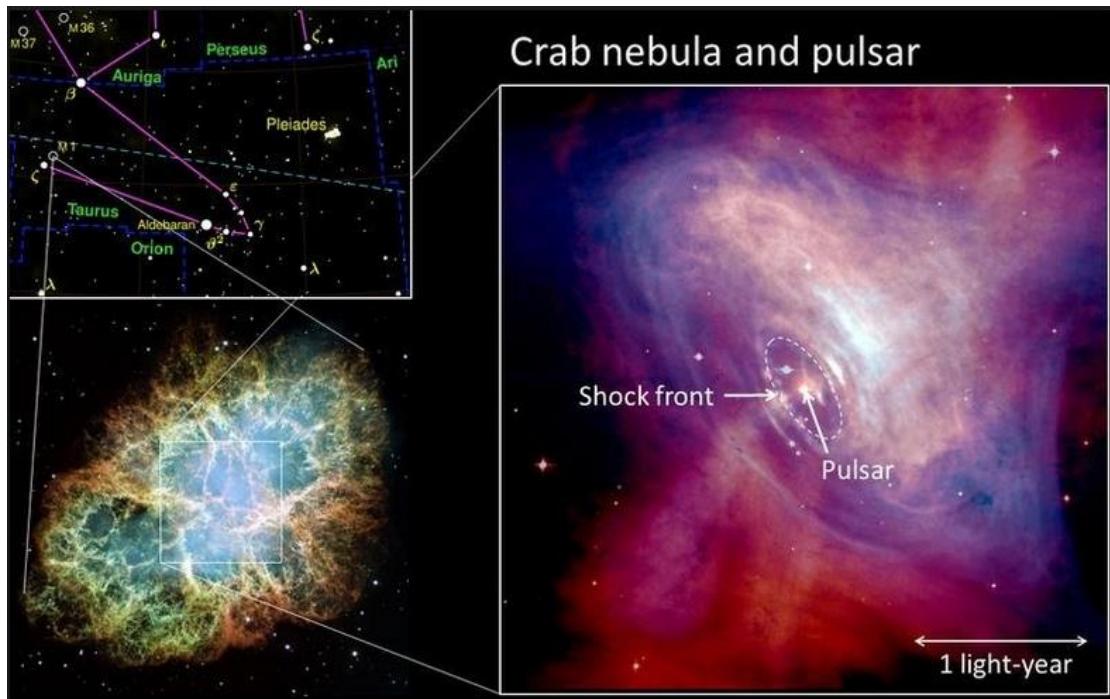
La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie; c'est elle qui intéresse le physicien; elle est toujours  $< C$ .

#### **1) Décalage temporel entre signaux de fréquences voisines émis par les pulsars**

Les pulsars sont des étoiles dégénérées en rotation rapide ( $T$  de l'ordre de la seconde) pourvues d'un champ magnétique intense ( $10^8$  T). Leur moment magnétique n'étant pas confondu avec leur axe de rotation, elles émettent des "pulses" réguliers et brefs, d'où leur nom, lorsque leur moment magnétique est dirigé vers la Terre. Le pulsar de la nébuleuse du Crabe, apparu en 1054 sous forme d'une "supernova", a une période de rotation  $T$  de 0.033 s. Les signaux radio émis, de pulsation  $\omega$ , traversent le milieu interstellaire de densité électronique  $N = 10^4$   $m^{-3}$  à la vitesse de groupe  $v_g = C (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$  où  $\omega_p$  est la pulsation plasma ( $\omega_p^2 = Ne^2 / \epsilon_0 m$ ). En conséquence, les "pulses" radio n'arrivent pas en même temps à la Terre selon leur pulsation.

- calculer  $\omega_p$  et comparer sa valeur à la pulsation  $\omega$  d'un signal radio de fréquence  $v = 350$  MHz.

On donne  $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  C,  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $\epsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12}$  SI.



- un pulse radio composé de 2 pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  voisines distantes de  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll (\omega_1, \omega_2)$  se propage dans le milieu interstellaire aux vitesses de groupe respectives  $v_{g1}$  et  $v_{g2}$  de sorte que l'observateur perçoit un décalage à la réception entre les pulsations de  $\Delta t = |d/v_{g1} - d/v_{g2}|$  où  $d$  est la distance du pulsar.

Sachant que  $v_g \approx C(1 - \omega_p^2/2\omega^2)$ , exprimer  $\Delta t$  en fonction de  $d$ ,  $C$ ,  $\omega_p$ ,  $\Delta\omega$  et  $\omega \approx (\omega_1, \omega_2)$ .

- on mesure  $\Delta t = 0.02$  s pour  $\Delta\nu = 5$  MHz autour de  $\nu = 350$  MHz. Déduire de la relation précédente la distance du pulsar en m puis en année lumière (distance parcourue par la lumière en un an). Attention au facteur  $2\pi$  entre pulsation et fréquence !

Réponses:

-  $\omega_p = 5641$  rd/s à comparer à  $2.2 \cdot 10^9$  rd/s, on a donc  $\omega_p \ll \omega$

-  $\Delta t \approx (d / C) \omega_p^2 (\Delta\omega / \omega^3)$

-  $d \approx C \Delta t \omega^3 / (\Delta\omega \omega_p^2) = 6.4 \cdot 10^{19}$  m = 6761 AL

## 2) la houle

- en eau peu profonde (côtes), la relation de dispersion est  $\omega = k(g h)^{1/2}$  où  $h$  est la profondeur ( $g = 9.81$  m s<sup>-2</sup>); exprimer la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de phase, puis les calculer pour une houle de période  $T = 20$  s et une profondeur  $h$  de 10 m ainsi que la longueur d'onde. Que se passe t-il lorsque  $h \rightarrow 0$  ?

- en eau profonde (pleine mer), la relation de dispersion est  $\omega^2 = g k$  ( $g = 9.81$  m s<sup>-2</sup>); exprimer la vitesse de groupe en fonction de la vitesse de phase, puis les calculer pour une houle de période  $T = 20$  s ainsi que la longueur d'onde.

Réponses:

- eau peu profonde  $v_g = v_\phi = (g h)^{1/2} = 9.9$  m/s,  $\lambda = v_\phi T = 198$  m, milieu non dispersif. lorsque  $h \rightarrow 0$ ,  $v_g = v_\phi \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ , il n'y a plus d'énergie (plage par exemple).

- eau profonde  $v_\phi = g / \omega = 31.2$  m/s,  $v_g = v_\phi / 2 = g / 2\omega = 15.6$  m/s, milieu dispersif  $\lambda = v_\phi T = 624$  m

## 3) le verre

On donne pour l'eau l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde (loi de Cauchy):  $n = 1.320 + 2.38 \cdot 10^{-15}/\lambda^2$  où  $\lambda$  est exprimée en m. On a donc  $dn/d\lambda < 0$ .

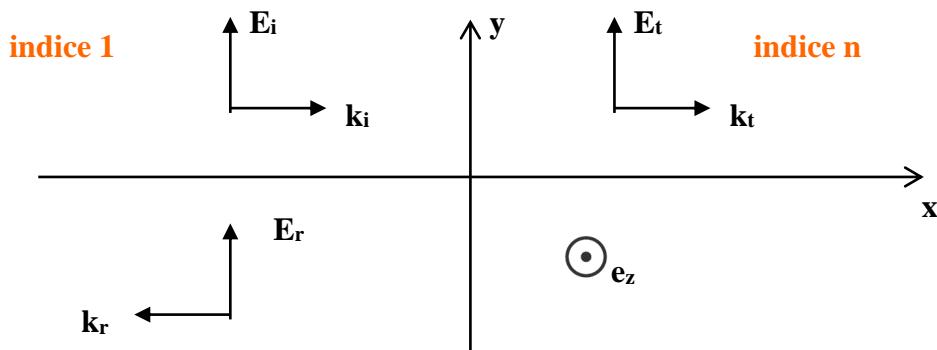
- calculer  $n$  avec 3 décimales pour  $\lambda = 400 \text{ nm}$  (bleu) et  $700 \text{ nm}$  (rouge)
- que vaut la vitesse de phase  $v_\phi$  pour  $n = 1.330$  ?
- exprimer  $v_g$  en fonction de  $v_\phi$ ,  $\lambda$ ,  $n$  et  $dn/d\lambda$ ; a t-on  $v_g < v_\phi$  ou  $v_g > v_\phi$  ?
- exprimer la variation relative  $(v_\phi - v_g)/v_g$  en fonction de  $\lambda$ ,  $n$  et  $dn/d\lambda$  et calculer son ordre de grandeur en utilisant les deux valeurs de  $n$  à  $400$  et  $700 \text{ nm}$  ( $dn/d\lambda \approx \Delta n/\Delta \lambda$ )

Réponses:

- $n = 1.335$  (bleu),  $1.325$  (rouge)
- $v_\phi = C/n = 225500 \text{ km/s}$
- $v_g = v_\phi / [1 - (\lambda/n)(dn/d\lambda)] < v_\phi$  car  $dn/d\lambda < 0$
- $(v_\phi - v_g)/v_g = -(\lambda/n)(dn/d\lambda) > 0$  est voisin de  $1\%$ , de ce fait la vitesse de groupe est très proche de la vitesse de phase.

#### Exercice 10: réflexion/transmission d'une onde en incidence normale

On considère une OPPH dans l'air (d'indice 1) tombant sous incidence normale sur une interface de séparation en  $x = 0$  entre l'air et un milieu d'indice  $n$  pouvant être complexe. Sur cette interface de séparation, on suppose que la composante tangentielle du champ électrique et du champ magnétique est conservée. Les indices  $i$ ,  $r$ ,  $t$  désignent les OPPH incidente, réfléchie, transmise.



- 1) quelle relation lie  $k_i$ ,  $k_r$ ,  $k_t$  à  $\omega$ ,  $C$  et  $n$  (en valeur algébrique) ?
- 2) positionner les vecteurs  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{B}_r$  et  $\mathbf{B}_t$  sachant que  $\mathbf{B} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{E} / \omega$
- 3) exprimer la conservation de la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à l'interface  $x = 0$  et obtenir deux équations comportant le coefficient de réflexion en amplitude  $r = E_r/E_i$  et de transmission en amplitude  $t = E_t/E_i$ ; en déduire  $r$  et  $t$  en fonction de  $n$ .

On montre que le coefficient de réflexion énergétique est  $R = |r|^2$ . On en déduit le coefficient de transmission énergétique  $T$  par la relation:  $T = 1 - R$

- 4) on se place dans le cas où  $n = -i n_2$ . C'est par exemple le cas de l'ionosphère lorsque la pulsation de l'onde incidente est inférieure à la pulsation plasma de l'ionosphère; que dire de  $|r|$ ,  $R$  et  $T$ ? Y a-t-il une énergie transmise? Quelle est la nature de l'onde transmise (donner l'expression du champ électrique transmis en fonction de  $n_2$ ,  $\omega$ ,  $C$ ,  $t$  et  $x$ )?
- 5) on se place dans le cas où  $n = n_1 - i n_2$ . C'est par exemple le cas de l'eau au voisinage de la bande d'absorption micro onde (vers 5 GHz); exprimer  $R$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  et comparer  $R$  à 1; y a-t-il une énergie transmise? Quelle est la nature de l'onde transmise (donner l'expression du champ électrique en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\omega$ ,  $C$ ,  $t$  et  $x$ )?

Réponses:

- 1)  $k_i = k_r = \omega / C$  et  $k_t = n \omega / C$
- 2)  $\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{B}_t$  selon  $\mathbf{e}_z$ , et  $\mathbf{B}_r$  selon  $-\mathbf{e}_z$ .

3) selon  $\mathbf{e}_y$ :  $E_i + E_r = E_t$

selon  $\mathbf{e}_z$ :  $B_i - B_r = B_t$  avec  $B_i = E_i/C$ ,  $B_r = E_r/C$  et  $B_t = n E_t/C$

d'où  $1 + r = t$  et  $1 - r = n t$

et finalement:  $t = 2 / (1 + n)$  et  $r = (1 - n) / (1 + n)$

4)  $|r|=1$ ,  $R=1$  et  $T=0$ . Toute l'énergie de l'onde est réfléchie.

L'onde absorbée est de la forme  $E_t = E_0 e^{-n_2 \omega x/C} e^{i\omega t}$  et ne transporte pas d'énergie

5) Comme  $R = [(1-n_1)^2 + n_2^2] / [(1+n_1)^2 + n_2^2] < 1$ , il y a une énergie transmise,  $T = 1 - R > 0$ .

L'onde est évanescante de la forme  $E_t = E_0 e^{-n_2 \omega x/C} e^{i\omega(t-n_1 x/C)}$

### Exercice 11 : ondes électromagnétiques, effet Doppler et mesure des vitesses radiales

Complément de cours:

lorsqu'une source d'ondes électromagnétiques de pulsation  $\omega$  est en déplacement à la vitesse  $v \ll C$  par rapport à un observateur fixe, la pulsation de l'onde perçue par l'observateur diffère de celle émise par la source de la quantité:

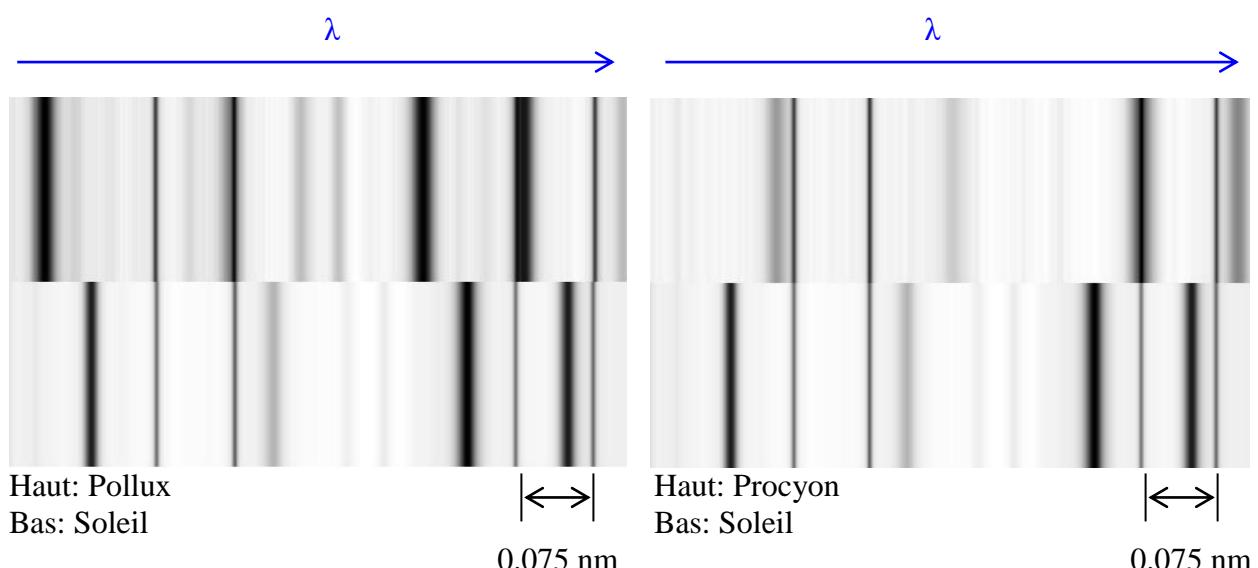
$$\Delta\omega = \omega (v/C) \quad \text{où } C \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide (300 000 km/s).}$$

La pulsation de l'onde perçue par l'observateur est  $\underline{\omega + \Delta\omega}$ . Si la source s'approche de l'observateur,  $v > 0$  et  $\Delta\omega > 0$ : il y a un décalage vers les hautes fréquences; si elle s'éloigne de l'observateur,  $v < 0$  et  $\Delta\omega < 0$ : il y a un décalage vers les basses fréquences.

En termes de longueur d'onde, la relation devient:  $\Delta\lambda = -\lambda (v/C)$

La longueur d'onde perçue par l'observateur est  $\underline{\lambda + \Delta\lambda}$ . Si la source s'approche de l'observateur,  $v > 0$  et  $\Delta\lambda < 0$ : il y a un décalage vers les courtes longueurs d'onde ou le "bleu"; si la source s'éloigne de l'observateur,  $v < 0$  et  $\Delta\lambda < 0$ : il y a un décalage vers les grandes longueurs d'onde ou le "rouge".

On veut déterminer la vitesse de certaines étoiles par rapport à la Terre. Pour cela, on étudie le spectre de chaque étoile au voisinage de  $\lambda = 630 \text{ nm}$  de longueur d'onde. Des raies du Fer formées dans l'atmosphère de l'étoile sont visibles, larges et sensibles à l'effet Doppler; les quatre raies telluriques (oxygène O<sub>2</sub>) formées dans l'atmosphère de la Terre sont étroites et insensibles. Ci-dessous les spectres de Pollux, Procyon et du Soleil (qui sert de référence car sa distance à la Terre est quasi constante). Mesurer les décalages  $\Delta\lambda$  des raies stellaires par rapport aux raies solaires fournit ainsi la vitesse  $v$  de chaque étoile par rapport à la Terre.



1) quel est le décalage  $\Delta\lambda$  des raies de Pollux par rapport au Soleil en nm ?

aide: utilisez l'écart de 0.075 nm entre les deux raies telluriques pour étalonner le spectre.

2) quelle est la vitesse  $v$  de Pollux par rapport à la Terre en km/s ?

3) Est ce un mouvement d'approche ou d'éloignement ?

4) quel est le décalage  $\Delta\lambda$  des raies de Procyon par rapport au Soleil en nm ?

aide: utilisez l'écart de 0.075 nm entre les deux raies telluriques pour étalonner le spectre.

5) quelle est la vitesse  $v$  de Procyon par rapport à la Terre en km/s ?

6) Est ce un mouvement d'approche ou d'éloignement ?

On peut appliquer la même méthode pour déterminer la vitesse de rotation du Soleil sur lui même.

Le bord Est (gauche) vient vers nous et le bord Ouest (droit) s'éloigne de nous. En mesurant le décalage  $\Delta\lambda$  en longueur d'onde entre les raies du Fer du bord Est et du bord Ouest, on va obtenir deux fois la valeur de la vitesse  $v$  de rotation du soleil sur lui même (donc 2  $v$ ). Bien sûr, les quatre raies telluriques visibles ci dessous et formées dans l'atmosphère de la Terre sont insensibles.

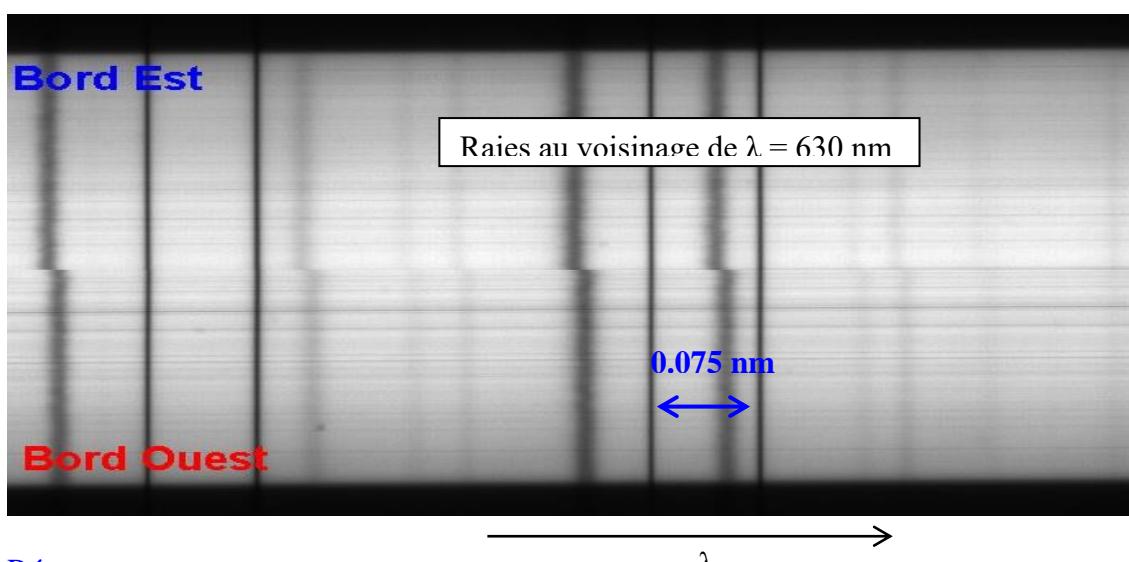
7) quel est le décalage  $\Delta\lambda$  des raies entre le bord Est et le bord Ouest en nm ?

aide: utilisez l'écart de 0.075 nm entre les deux raies telluriques pour étalonner le spectre.

8) quelle est la vitesse  $v$  de rotation  $v$  du Soleil sur lui même en km/s ?

9) sachant que son rayon  $R$  vaut  $1.4 \cdot 10^6$  km, quelle est sa vitesse angulaire  $\omega$  en degrés par jour ?

aide:  $v = \omega R$ , où  $\omega$  est en radians/seconde. 1 radian =  $57^\circ$  environ. 1 jour = 86400 s.



Réponses

1) Décalage vers le bleu de 0.05 nm

2)  $v = 24$  km/s environ

3) approche

4) Décalage vers le rouge de 0.05 nm

5)  $v = 24$  km/s environ

6) éloignement

7) décalage de 0.008 nm environ

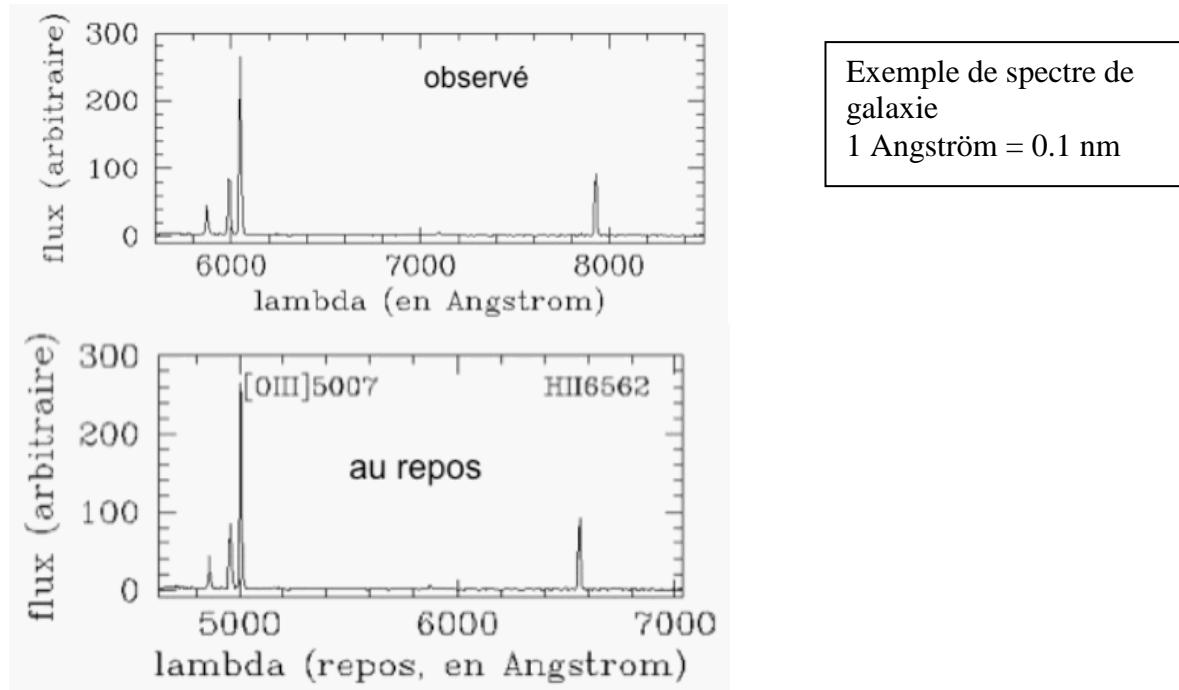
8)  $v = 2$  km/s environ

9)  $\omega = 14^\circ/\text{jour}$  environ

## Exercice 12: effet Doppler sur le spectre d'une galaxie

En 1929, Edwin Hubble confirme expérimentalement l'expansion de l'Univers prédicta deux ans plus tôt par l'abbé Lemaître, de l'Université catholique de Louvain (Belgique), à partir de la théorie de la relativité générale. Hubble, au télescope de 2.50 m du Mont Wilson (Californie), observait un décalage systématique des spectres des galaxies vers le rouge, proportionnel à leur distance, phénomène appelé "loi de Hubble".

On s'intéresse ici à la raie d'émission de l'Oxygène ionisé à  $\lambda = 500.7$  nm au repos, qu'on retrouve dans le spectre des galaxies, mais à une position en longueur d'onde  $\lambda'$  décalée vers le rouge par effet Doppler en raison d'une vitesse de récession.



1) La longueur d'onde  $\lambda'$  vue par l'observateur terrestre est :  $\lambda' = \lambda [ (1 + v/C) / (1 - v/C) ]^{1/2}$  où  $v$  est la vitesse d'éloignement de la galaxie et  $C = 3 \cdot 10^5$  km/s la vitesse de la lumière.

On appelle  $Z = (\lambda' - \lambda)/\lambda$  le décalage spectral (nombre sans dimension, nul si  $v = 0$ ).

Relier  $v$  à  $Z$  puis donner une formule approchée lorsque  $Z \ll 1$  (soit  $v \ll C$ ).

2) Que vaut  $Z$  pour la raie de l'Oxygène de la galaxie en exemple ci dessus ?

3) En déduire la vitesse  $v$  de la galaxie en utilisant la formule exacte puis approchée de la première question. Quelle erreur relative fait-on en utilisant la formule approchée ?

4) La loi de Hubble est  $v = H d$ , où  $H = 70$  km s<sup>-1</sup> Mpc<sup>-1</sup> (constante de Hubble) et  $d$  la distance de la galaxie en mégaparsec (Mpc). Quelle est la distance de la galaxie observée en Mpc puis en AL (année lumière) ? On donne: 1 pc = 3.26 AL. Vérifiez que votre résultat est compatible avec l'âge estimé de l'Univers (14 10<sup>9</sup> ans) !

Réponses:

1)  $v = C [(Z+1)^2 - 1] / [(Z+1)^2 + 1] \approx C Z$  si  $Z \ll 1$

2)  $Z = (6045 - 5007) / 5007 = 0.21$

3)  $v = 0.19 C = 56500$  km/s formule exacte

$v = 0.21 C = 63000$  km/s formule approchée

erreur relative de  $6500 / 56500 = 12\%$

4)  $d = v/H = 56500 / 70 = 807$  Mpc =  $2.64 \cdot 10^9$  AL

## Ondes dans des milieux particuliers (conducteur, plasma)

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

### Exercice 1: Onde dans un conducteur

- 1) On s'intéresse à la propagation d'une onde dans un milieu métallique conducteur globalement neutre de conductivité statique  $\gamma_0 = ne^2\tau/m$  (voisine de  $10^7 \text{ Sm}^{-1}$ ), en présence de courant, la densité de courant  $\mathbf{j}$  étant reliée au champ électrique  $\mathbf{E}$  par la loi d'Ohm. Dans l'expression de  $\gamma_0$ ,  $n$  est la densité électronique ( $\text{m}^{-3}$ ), tandis que  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et  $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  sont respectivement la charge et la masse de l'électron;  $\tau = 10^{-14} \text{ s}$  est le temps moyen entre deux collisions. La conductivité en présence d'une onde de pulsation  $\omega$  devient  $\gamma = \gamma_0 / (1 + i\omega\tau)$ . On a deux cas limite:
- si  $\omega \ll 1/\tau = 10^{14} \text{ rd/s}$ ,  $\gamma = \gamma_0$  (nombre réel)
  - si  $\omega \gg 1/\tau = 10^{14} \text{ rd/s}$ ,  $\gamma = \gamma_0 / (i\omega\tau) = -i n e^2 / m\omega$  (nombre imaginaire pur)

Comme dans l'exercice 2B, l'équation à laquelle obéit le champ électrique est:

$$\Delta\mathbf{E} = \mu_0 \gamma \partial\mathbf{E}/\partial t + \mu_0 \epsilon_0 \partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$$

On se place dans le cadre d'une OPPH en  $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ . En utilisant la forme prise par les opérateurs  $\partial/\partial t$ ,  $\partial^2/\partial t^2$  et  $\Delta$  pour une OPPH, en déduire la relation de dispersion des ondes liant  $k^2$  à  $\omega$  en fonction de  $C$ ,  $\mu_0$  et  $\gamma$  (rappel:  $\mu_0 \epsilon_0 C^2 = 1$ ).

2) A quelle gamme de longueur d'onde  $\lambda$  la relation  $\omega \ll 1/\tau = 10^{14} \text{ rd/s}$  correspond-elle ? Nommer ce domaine du spectre électromagnétique; même question pour  $\omega \gg 1/\tau$ .

3) Aux basses fréquences telles que  $\omega \ll 1/\tau = 10^{14} \text{ rd/s}$ , comparer les deux termes de la relation de dispersion (on donne  $\gamma_0 = 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ ,  $\epsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$ ); en déduire que  $k^2 = -i \mu_0 \gamma_0 \omega$ , puis en remarquant que  $-i = (1 - i)^{1/2}/2$ , exprimer  $k$  (nombre complexe) en fonction de  $\delta = (2 / \mu_0 \gamma \omega)^{1/2}$ , longueur caractéristique d'amortissement de l'onde appelée épaisseur de peau, ainsi que les indices de dispersion et absorption  $n_1$  et  $n_2$ ; on rappelle que  $k = (\omega/C)(n_1 - i n_2)$ . Que vaut  $\delta$  (en microns) pour une onde radio de fréquence 100 MHz ? Comparer  $\delta$  à la longueur d'onde. Quelle est la nature de l'onde: propagation pure ? absorption pure ? évanescente ?

4) Aux hautes fréquences telles que  $\omega \gg 1/\tau$ , montrer que  $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$  où  $\omega_p = (n e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2}$  désigne la pulsation plasma. La calculer pour  $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$ . Donner la longueur d'onde  $\lambda_p$  correspondante en microns; nommer le domaine du spectre électromagnétique.

5) Considérons une onde telle que  $\omega > \omega_p$ ; se propage-t-elle ?

6) Considérons une onde telle que  $\omega < \omega_p$ ; se propage-t-elle ? Quelle est la nature de l'onde: absorption pure ou évanescente ?

Expliquer pourquoi les ondes lumineuses visibles sont réfléchies par un métal, alors que l'UV lointain y pénètre. Quel est l'ordre de grandeur de l'épaisseur caractéristique d'absorption, en comparaison de la longueur d'onde ?

Réponses:

1)  $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 - i \mu_0 \gamma \omega = \omega^2/C^2 - i \mu_0 \gamma \omega$

2)  $\omega \ll 1/\tau$  correspond à  $\lambda > 18.85 \text{ microns}$  (IR lointain et ondes radio)  
 $\omega \gg 1/\tau$  correspond à  $\lambda < 18.85 \text{ microns}$  (IR proche, visible, UV)

3)  $\omega \ll 1/\tau$  implique  $\gamma = \gamma_0$

Le rapport des termes  $\omega^2/C^2$  et  $\mu_0 \gamma_0 \omega$  vaut  $\omega \epsilon_0 / \gamma_0 < 10^{-4}$ . En conséquence,  $k^2 = -i \mu_0 \gamma_0 \omega$  et  $k = (1 - i) / \delta = n \omega / C$ , d'où  $n = n_1 - i n_2 = (1 - i) (C / \delta \omega) = (1 - i) (\gamma / 2\epsilon_0 \omega)^{1/2}$   
 $\nu = 10^8 \text{ Hz}$ ,  $\omega = 6.28 \cdot 10^8 \text{ rd/s}$ ,  $\delta = 16 \text{ microns} \ll \lambda = 3 \text{ m}$

L'onde est évanescente (propagation + absorption)

4)  $\omega \gg 1/\tau$  implique  $\gamma = -i n e^2 / m \omega$  et  $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$

$n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$ ,  $\omega_p = 1.78 \cdot 10^{16} \text{ rd/s}$  et  $\lambda_p = 0.106 \text{ micron}$ , dans l'UV

5)  $\omega > \omega_p$ ;  $k^2$  réel positif, propagation pure de l'onde

6)  $\omega < \omega_p$ ;  $k^2$  réel négatif, donc  $k$  imaginaire pur: absorption pure de l'onde

Les ondes lumineuses visibles sont telles que  $\lambda > \lambda_p$ ; elles sont absorbées et l'épaisseur

caractéristique d'absorption a pour ordre de grandeur la longueur d'onde.

### Exercice 2: ondes électromagnétiques dans l'eau; comportement diélectrique ou conducteur ?

On s'intéresse à la propagation d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) dans l'eau dont la conductivité est très variable selon sa nature:

eau pure:  $\gamma = 5 \cdot 10^{-6} \text{ S m}^{-1}$

eau douce:  $\gamma = 0.03 \text{ S m}^{-1}$

eau de mer:  $\gamma = 5 \text{ S m}^{-1}$

De même, la permittivité relative de l'eau  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$  (nombre sans dimension rapport de la permittivité à celle du vide) varie beaucoup en fonction de la fréquence de l'onde:

domaine 1:  $v \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ :  $\epsilon_r = 1.77$

domaine 2:  $v \approx 2.5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ :  $\epsilon_r = 78 - 7i$  (i nombre imaginaire)

domaine 3:  $v < 10^6 \text{ Hz}$ :  $\epsilon_r = 80$

1) Donner la longueur d'onde  $\lambda = C/v$  dans le vide correspondant au domaine 1; de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?

2) Donner la longueur d'onde  $\lambda = C/v$  dans le vide correspondant au domaine 2; de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?

3) Donner la longueur d'onde  $\lambda = C/v$  dans le vide correspondant au domaine 3: de quelle partie du spectre électromagnétique s'agit-il (X, UV, visible, IR, radio) ?

4) l'indice de réfraction  $n$  du milieu (éventuellement complexe) est défini par  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ ; que vaut  $n$  dans le domaine 1 ?

5) dans le domaine 2,  $\epsilon_r$  est un nombre complexe; que cela signifie t-il pour l'onde (progressive sans absorption, progressive avec absorption, absorption pure) ?

6) Pour une OPPH dans un milieu neutre, de conductivité  $\gamma$  et de permittivité relative  $\epsilon_r$ , on obtient à partir des équations de Maxwell la relation de dispersion:

$$k^2 = \epsilon_r \omega^2 / C^2 - i \mu_0 \gamma \omega$$

On suppose dans la suite que  $\epsilon_r$  est un nombre réel; donner l'expression de  $\omega_c$  pour laquelle les deux termes  $\epsilon_r \omega^2 / C^2$  et  $i \mu_0 \gamma \omega$  sont égaux (**rappel**:  $\epsilon_0 \mu_0 C^2 = 1$ ).

7) que vaut numériquement  $v_c = \omega_c / 2\pi$  pour l'eau douce et l'eau salée ?

8) lorsque  $\omega > \omega_c$  les propriétés diélectriques l'emportent et  $k \approx \sqrt{\epsilon_r} (\omega/C)$ ; donner en fonction de  $C$  et  $\epsilon_r$  la vitesse de phase  $v_\phi$  de l'onde; pour une onde du domaine 1, le comportement de l'eau salée est-il diélectrique ou conducteur ? Que vaut numériquement  $v_\phi$  en  $\text{km s}^{-1}$  ?

9) si  $\omega < \omega_c$  les propriétés conductrices l'emportent;  $k \approx (1 - i)/\delta$  où  $\delta = [2/(\mu_0 \gamma \omega)]^{1/2}$  et l'onde est absorbée sur la longueur caractéristique  $\delta$  appelée épaisseur de peau. Pour une onde du domaine 3, le comportement de l'eau salée est-il diélectrique ou conducteur ? Que vaut numériquement l'épaisseur de peau  $\delta$  pour  $\omega = 10^4 \text{ rd/s}$  ? Cette faible épaisseur explique pourquoi les sous marins ne peuvent communiquer qu'aux basses fréquences.

Réponses:

1)  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$ , domaine visible

2)  $\lambda = 0.12 \text{ m}$ , domaine radio (Wifi, téléphone portable)

3)  $\lambda > 300 \text{ m}$ , domaine radio (émissions radiophoniques)

4)  $n = 1.33$

5) progressive avec absorption

6)  $\omega_c = \gamma / (\epsilon_0 \epsilon_r)$

7)  $10^7 \text{ Hz}$  pour l'eau douce;  $10^9 \text{ Hz}$  pour l'eau salée

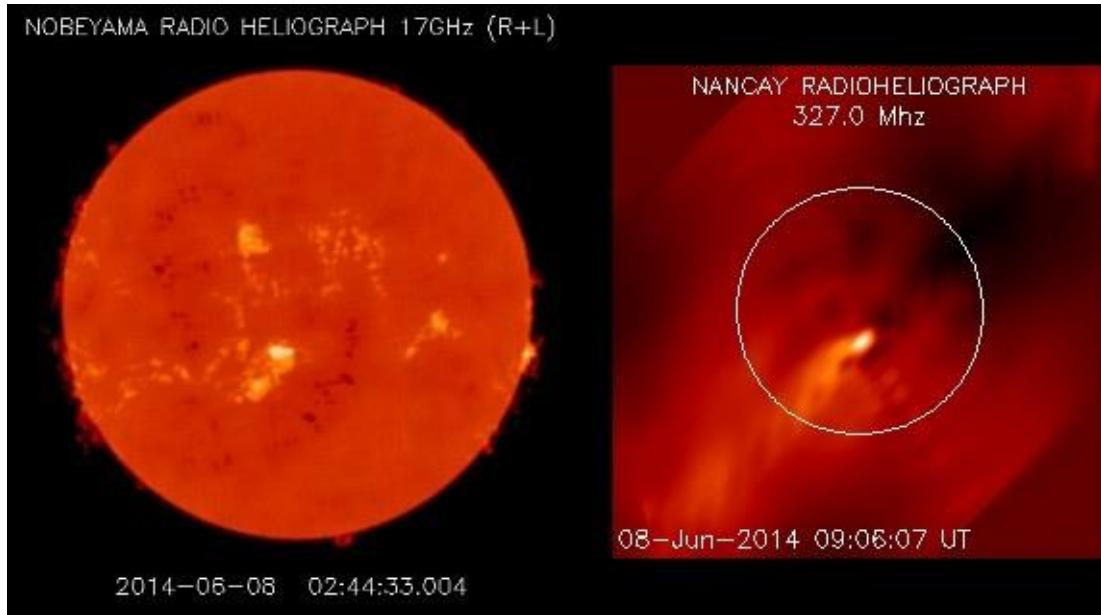
8)  $v_\phi = C / \sqrt{\epsilon_r}$

diélectrique,  $v_\phi = 225 \cdot 000 \text{ km s}^{-1}$

9) conducteur

$\delta = 5.6 \text{ m}$

### Exercice 3: ondes électromagnétiques dans la couronne solaire et l'ionosphère terrestre



Lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un gaz ionisé globalement neutre comme l'atmosphère solaire, avec autant d'électrons que de protons (plasma), les électrons sont mis en mouvement par l'onde. La relation de dispersion des Ondes Planes Progressives Harmoniques (OPPH) s'écrit:

$$k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2) / C^2$$

où  $k$  est le module du vecteur d'onde,  $C$  la vitesse de la lumière ( $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ),  $\omega$  la pulsation de l'onde et  $\omega_p$  la pulsation plasma donnée par la relation  $\omega_p^2 = n e^2 / (\epsilon_0 m)$ .  $n$  est le nombre d'électrons par unité de volume (densité électronique, unité  $\text{m}^{-3}$ ),  $m$  la masse de l'électron,  $-e$  sa charge et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide. On donne les valeurs numériques suivantes:  $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , et  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$ .

- 1) les ondes se propagent-elles si  $\omega < \omega_p$  ?
- 2) dans l'atmosphère solaire, la densité électronique  $n$  décroît avec l'altitude; quand on divise  $n$  par 100, par quel facteur varie la pulsation plasma  $\omega_p$  ?
- 3) observer à des fréquences plasma diverses permet ainsi de sonder les différentes couches de l'atmosphère du soleil. A haute fréquence, observe t-on bas ou haut ?
- 4) quelle est la valeur de la densité électronique  $n$  qui correspond à la fréquence de 17 GHz (image de gauche) ?
- 5) quelle est la valeur de la densité électronique  $n$  qui correspond à la fréquence de 327 MHz (image de droite) ?
- 6) l'ionosphère terrestre est une couche ionisée située à plus de 100 km d'altitude du sol. La densité électronique  $n$  y est de  $10^{11} \text{ m}^{-3}$ . Calculer la pulsation plasma  $\omega_p$ , puis la fréquence plasma associée  $v_p$ . Une onde radio de fréquence  $v = 1 \text{ MHz}$  peut-elle s'y propager ?  
aide: la pulsation  $\omega$  vaut  $2\pi v$ , où  $v$  est la fréquence

#### Réponses

1) non,  $\omega_p$  est une pulsation de coupure.

2) 10

3) bas

4)  $n = 3.6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$

c'est la chromosphère solaire

5)  $n = 1.3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$

c'est la basse couronne solaire

6)  $v_p = 2.8 \text{ MHz}$

Une onde de fréquence  $\nu = 1 \text{ MHz} < v_p$  ne s'y propage pas; elle est réfléchie. On met à profit cette propriété pour propager sur des longues distances les ondes radiophoniques par réflexion.

#### Exercice 4: comportement diélectrique ou conducteur de l'eau

L'eau possède à la fois des propriétés diélectriques et conductrices. Soit  $\epsilon_r$  sa permittivité relative et  $\gamma$  sa conductivité.

1) Donner les 4 équations de Maxwell dans un milieu diélectrique LHI neutre ( $\rho = 0$ ) et conducteur (régi par la loi d'Ohm  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ ), de permittivité complexe  $\epsilon$ .

2) Sachant que  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$ , déduire des équations de Maxwell une équation pour le champ électrique  $\mathbf{E}$ .

3) en recherchant  $\mathbf{E}$  sous la forme d'une OPPH de la forme  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , et en utilisant la formulation des opérateurs  $\Delta$ ,  $\partial/\partial t$  et  $\partial^2/\partial t^2$  pour les OPPH, montrer que la relation de dispersion s'écrit:

$$k^2 = \epsilon_r (\omega/C)^2 - i (\mu_0 \gamma \omega)$$

Rechercher l'expression de la pulsation  $\omega_c$  (en fonction de  $\gamma$ ,  $\epsilon_0$  et  $\epsilon_r$ ) qui égalise les deux termes de la relation de dispersion,  $\epsilon_r (\omega/C)^2$  et  $\mu_0 \gamma \omega$ , et qui définit ainsi deux domaines:

$\omega \ll \omega_c$  comportement conducteur avec  $k \approx (1 - i)(\mu_0 \gamma \omega / 2)^{1/2}$

$\omega \gg \omega_c$  comportement diélectrique avec  $k \approx \sqrt{\epsilon_r} (\omega/C)$

4) pour une eau douce et des ondes décimétriques (micro ondes) de pulsation  $\omega = 10^{10} \text{ rd/s}$ , on donne:  $\gamma = 0.001 \text{ S m}^{-1}$  et  $\epsilon_r = (80 - 10i) = (8.96 - 0.56i)^2$

- calculez  $\omega_c$  (on prendra pour simplifier ce calcul  $\epsilon_r \approx 80$  et  $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ SI}$ )

- quel comportement domine (diélectrique ? conducteur ?)

- que signifie pour le milieu l'existence d'une partie imaginaire dans  $\epsilon_r$  ?

- que vaut la profondeur typique de pénétration des micro ondes  $\delta = C / (n_2 \omega)$  dans l'eau ?

remarque: cette propriété est mise à profit dans les fours à micro ondes

5) pour une eau de mer et des ondes kilométriques de pulsation  $\omega = 10^6 \text{ rd/s}$ , on donne  $\gamma = 5 \text{ S m}^{-1}$  et  $\epsilon_r = 80$

- calculez  $\omega_c$  (on prendra  $\epsilon_0 \approx 10^{-11} \text{ SI}$ )

- quel comportement domine (diélectrique ? conducteur ?)

- que vaut l'épaisseur de peau (ou profondeur de pénétration typique) de l'onde kilométrique dans l'eau de mer,  $\delta = [2/(\mu_0 \gamma \omega)]^{1/2}$  ? (on prendra  $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ SI}$ )

remarque: les sous marins doivent remonter une antenne sous la surface pour communiquer avec leur base à cette pulsation, où bien utiliser des pulsations beaucoup plus basses, ce qui réduit beaucoup le débit de données

Réponses:

1)  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \gamma \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$$

2)  $\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \gamma \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \epsilon \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$

3)  $k^2 = \epsilon_r (\omega/C)^2 - i (\mu_0 \gamma \omega)$

$$\omega_c = \gamma / (\epsilon_0 \epsilon_r)$$

4)  $\omega_c = 1.25 \cdot 10^6 \text{ rd/s} \ll \omega$

comportement diélectrique

milieu diélectrique absorbant

$\delta = 5.4 \text{ cm}$

5)  $\omega_c = 6.25 \cdot 10^9 \text{ rd/s} >> \omega$

comportement conducteur

$\delta = 63 \text{ cm}$

# Annexes

# Formulaires

## CPES 2 - Révisions de mécanique du point matériel

(les vecteurs sont en caractères gras)

### Cinématique

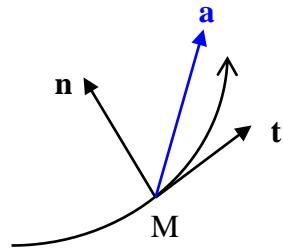
- vitesse  $\mathbf{v}$  d'une particule de masse  $m$  située au point  $M$  dans un repère d'origine  $O$   
 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt}$  (unité:  $\text{m s}^{-1}$ )

- quantité de mouvement ou impulsion  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  (unité:  $\text{kg m s}^{-1}$ )

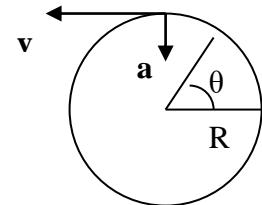
- accélération  $\mathbf{a}$  d'une particule de masse  $m$  située au point  $M$  dans un repère d'origine  $O$   
 $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{OM}}{dt^2}$  (unité:  $\text{m s}^{-2}$ )

- Dans le repère de Frênet lié à la masse  $m$  (repère  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  où  
 $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et  $\mathbf{n}$  est  
le vecteur unitaire normal en  $M$ ), on a:  
 $\mathbf{v} = v \mathbf{t}$  ( $v$  vitesse vectorielle,  $v$  vitesse algébrique)  
 $\mathbf{a} = (dv/dt) \mathbf{t} + (v^2/R) \mathbf{n}$

$R$  est le rayon de courbure (varie le long de la trajectoire)



- mouvement circulaire de rayon  $R$   
la vitesse angulaire est  $d\theta/dt$  (unité: radian  $\text{s}^{-1}$ ) de sorte que  
 $\mathbf{v} = R (d\theta/dt) \mathbf{t}$   
 $\mathbf{a} = R (d^2\theta/dt^2) \mathbf{t} + R (d\theta/dt)^2 \mathbf{n}$



exemple: à vitesse angulaire  $d\theta/dt = \omega = \text{constante}$  ( $\text{rd s}^{-1}$ )  
le vecteur vitesse est  $\mathbf{v} = \omega R \mathbf{t}$  et en valeur algébrique  $v = \omega R$   
le vecteur accélération  $\mathbf{a}$  est normal au cercle et centripète:  $\mathbf{a} = \omega^2 R \mathbf{n} = (v^2/R) \mathbf{n}$

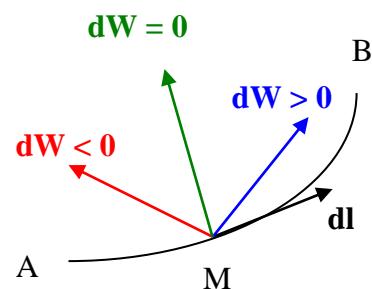
### Dynamique

- PFD ou Principe Fondamental de la Dynamique:  
 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$  (somme des forces appliquée au point matériel, unité N ou Newton)  
ou encore  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$

- Travail d'une force  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$   
lors d'un déplacement du point A vers le point B

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{unité: J ou Joule})$$

c'est un produit scalaire, le travail est moteur si  $> 0$   
résistant si  $< 0$



La force  $\mathbf{F}$  appliquée à la masse  $m$  en  $M$  est représentée par les vecteurs colorés.  
 $d\mathbf{l}$  est tangent à la trajectoire: c'est le déplacement élémentaire de la masse  $m$  qui subit  $\mathbf{F}$

exemple: lors d'un déplacement horizontal, le poids  $m g$  ne travaille pas

- Puissance instantanée d'une force  $\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  (unité: W ou Watt)  
 (produit scalaire de la force avec la vitesse du point matériel, peut être  $> 0$  ou  $< 0$ )

- Energie cinétique  $\mathbf{Ec} = 1/2 m \mathbf{v}^2$  (unité: J ou Joule)

- théorème de l'énergie cinétique de la position A vers B:  $\mathbf{Ec}_B - \mathbf{Ec}_A = \mathbf{W}_{AB}$

démonstration simple à partir du PFD:  $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$

effectuons le produit scalaire avec le vecteur vitesse  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt}$ :

$$m \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{donc } d\mathbf{Ec}/dt = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{OM}}{dt}$$

$$d\mathbf{Ec} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$$

$$\text{et de A vers B: } \int_A^B d\mathbf{Ec} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM} \text{ c'est à dire } \mathbf{Ec}(B) - \mathbf{Ec}(A) = \mathbf{W}_{AB}$$

- Force dérivant d'une énergie potentielle:  $\mathbf{F} = - \mathbf{grad} \mathbf{Ep}$

$\mathbf{Ep}$  est la fonction énergie potentielle (unité: J ou Joule); elle dépend des variables de position.

exemples de forces et d'énergie potentielle associée :

\* poids  $m \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{Ep}(z) = m g z$  ( $z$  = hauteur de la masse  $m$ )

\* force de gravitation entre deux masses  $m$  et  $m'$  distantes de  $r$

loi de Newton  $\mathbf{F} = -K m m' / r^2 \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{Ep}(r) = -K m m' / r$

\* force électrique entre deux charges  $q$  et  $q'$  distantes de  $r$

loi de Coulomb  $\mathbf{F} = q q' / 4\pi\epsilon_0 r^2 \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{Ep}(r) = (1/4\pi\epsilon_0) q q' / r$

\* force de rappel d'un ressort d'allongement  $x$

$$\mathbf{F} = -k x, \mathbf{Ep}(x) = 1/2 k x^2$$

- Principe de conservation de l'énergie mécanique lorsque la force dérive d'une énergie potentielle :

on a vu ci dessus dans la démonstration du théorème de l'énergie cinétique que:

$$d\mathbf{Ec} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM}$$

Pour une force dérivant d'une énergie potentielle,  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{OM} = - \mathbf{grad}(\mathbf{Ep}) \cdot d\mathbf{OM} = - d\mathbf{Ep}$

D'où  $d\mathbf{Ec} + d\mathbf{Ep} = 0$

$\mathbf{Ec} + \mathbf{Ep} = \text{constante}$  (unité: J ou Joule)

Il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique en cas de dissipation par frottement  
 (les forces de frottement ne dérivent pas d'un potentiel).

exemple: masse  $m$  dans le champ de pesanteur :  $1/2 m v^2 + m g z = \text{constante}$

## Dynamique des mouvements de rotation

Imaginons que la masse  $m$  en  $M$  effectue un mouvement de rotation autour du point  $O$ .

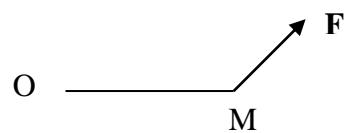
- Moment de la force au point O:  $\mathbf{M}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$

(unité N m)

La force  $\mathbf{F}$  est appliquée au point  $M$ .

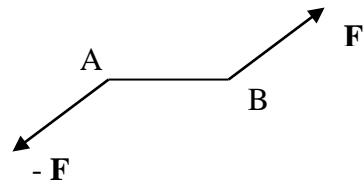
En norme, le moment est maximal lorsque

$\mathbf{OM}$  et  $\mathbf{F}$  sont orthogonaux (il est nul s'ils sont colinéaires)



- Notion de couple de forces

Il s'agit de la somme des moments en O de deux forces  $\mathbf{F}$  et  $-\mathbf{F}$  égales en norme mais opposées en direction



$$M_O = \mathbf{OA} \wedge (-\mathbf{F}) + \mathbf{OB} \wedge \mathbf{F} = (\mathbf{AO} + \mathbf{OB}) \wedge \mathbf{F} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$$

est indépendant de O (unité N m); on écrira alors que le couple de forces est  $\mathcal{C} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}$

*exemple: action d'un tournevis sur la tête d'une vis.*

- Moment cinétique en O de la masse m située au point M:  $\mathbf{K}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$

C'est le moment en O de la quantité de mouvement  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  (unité:  $\text{m}^2 \text{ kg s}^{-1}$ )

Le moment cinétique est une notion utile pour décrire les mouvements de rotation.

*exemple1: dans un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse angulaire  $\omega$ , on a en norme:  $v = \omega R$ ,  $p = m v = m \omega R$ ,  $K_O = R p = m \omega R^2$*

*exemple2: dans un mouvement à force centrale, la valeur du moment cinétique est lié à la constante des aires  $C = r^2 d\theta/dt$  par la relation simple  $K_O = m r^2 d\theta/dt = m C = \text{constante}$ .*

*exemple3: le moment cinétique de l'électron de l'atome d'Hydrogène est quantifié par la relation de Bohr:  $K_O = n \hbar$  où n est un nombre entier positif. La constante de Planck réduite  $\hbar = h/2\pi$  apparaît donc comme un quantum de moment cinétique.*

- théorème du moment cinétique:  $dK_O/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$

c'est l'analogue du PFD, pour les mouvements de rotation d'une masse m située au point M.

démonstration simple:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}$$

dérivons par rapport au temps:

$$d\mathbf{K}_O/dt = d\mathbf{OM}/dt \wedge \mathbf{p} + \mathbf{OM} \wedge dp/dt$$

or  $d\mathbf{OM}/dt = \mathbf{v}$  et  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$  sont colinéaires (produit vectoriel nul) et d'après le PFD, on a:

$$dp/dt = \mathbf{F}$$
 d'où

$$d\mathbf{K}_O/dt = \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}$$

*exemple: mouvement du pendule de longueur l dans le champ de pesanteur g*

*On a un mouvement de rotation circulaire :*

$$K_O = m l^2 d\theta/dt \quad (\text{en valeur algébrique})$$

$$\rightarrow dK_O/dt = m l^2 d^2\theta/dt^2$$

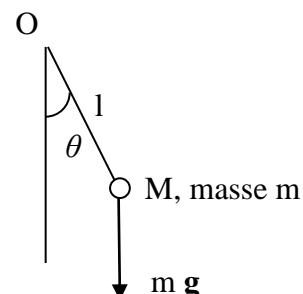
*le moment du poids par rapport à O est:*

$$M_O = -m g l \sin\theta \quad (\text{en valeur algébrique})$$

$$\rightarrow m l^2 d^2\theta/dt^2 + m g l \sin\theta = 0$$

*et pour les petits mouvements ( $\theta \ll 1$ ),  $d^2\theta/dt^2 + (g/l) \theta = 0$*

*c'est un mouvement périodique de période  $T = 2\pi (l/g)^{1/2}$*



CPES 2 - Rappels de trigonométrie - formules en bleu à savoir par coeur

### Dans le triangle rectangle

$\sin(\alpha)$  = côté opposé/hypoténuse      et       $\cos(\alpha)$  = côté adjacent/hypoténuse  
 et  $\tan(\alpha)$  = côté opposé/adjacent =  $\sin(\alpha)/\cos(\alpha)$

Remarque:  $\cotan(\alpha) = 1/\tan(\alpha)$

Projections (a, b, d sont les longueurs des côtés du triangle rectangle):

The diagram shows a right-angled triangle with its right angle at the bottom-left vertex. The horizontal leg is labeled 'a' and the vertical leg is labeled 'b'. The hypotenuse, connecting the two legs, is labeled 'd'. An angle is marked at the bottom-right vertex, labeled  $\alpha$ .

## Quelques formules de base

Les angles s'expriment en radians (rd);  $\pi$  rd = 180°;  $\pi \sim 3.1415926535$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i \sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i \sin(x) \end{aligned} \quad \rightarrow \cos(x) = [e^{ix} + e^{-ix}] / 2 \text{ et } \sin(x) = [e^{ix} - e^{-ix}] / 2i$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\rightarrow 1 + \tan^2 x = 1 / \cos^2 x \quad (\text{diviser par } \cos^2 x \text{ la formule ci dessus})$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \rightarrow \quad \cos(x-y) \text{ en changeant } y \text{ en } -y$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \quad \rightarrow \quad \sin(x-y) \text{ en changeant } y \text{ en } -y$$

Cas particulier de l'angle double ( $x = y$ ); on déduit des deux formules ci dessus:

$$x = y \rightarrow \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos^2 x = [1 + \cos(2x)] / 2$$

$$\rightarrow \sin^2 x = [1 - \cos(2x)] / 2$$

$$x = y \rightarrow \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

### Dérivées usuelles comportant une fonction $u(x)$ de dérivée notée $u'(x)$

$$(\sin u)' = u' \cos u \quad \rightarrow \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u \rightarrow (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan u)' = u' / \cos^2 u \rightarrow (\tan x)' = 1/\cos^2 x$$

(attention au signe !)

## Primitives usuelles (à déduire des dérivées)

la primitive de  $(u' \cos u)$  est  $\sin u$  → la primitive de  $\cos x$  est  $\sin x$

la primitive de  $(u' \sin u)$  est  $- \cos u$  → la primitive de  $\sin x$  est  $- \cos x$  (attention au signe !)

la primitive de  $u' / \cos^2 u$  est  $\tan u$  → la primitive de  $1 / \cos^2 x$  est  $\tan x$

# Utilisation de la notation complexe pour les quantités harmoniques rencontrées en électromagnétisme

## 1 - Représentation complexe d'une quantité harmonique

Soit un signal harmonique  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

A est l'amplitude du signal,  $\varphi$  est sa phase (entre 0 et  $2\pi$  radians) et  $\omega$  sa pulsation (en radians/s). La période de ce signal est  $T = 2\pi/\omega$  et sa fréquence est  $v = 1/T = \omega/2\pi$ .

Il est beaucoup plus facile de résoudre des équations différentielles linéaires en utilisant la notation complexe suivante:

posons  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} [A e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re} (X e^{i\omega t})$

où  $\operatorname{Re}$  désigne la partie réelle de la quantité complexe;  $X$  désigne l'amplitude complexe du signal. Cette amplitude complexe  $X$  est reliée à l'amplitude réelle  $A$  et à la phase  $\varphi$  par:

$$X = A e^{i\varphi}$$

En physique, on confond souvent  $x(t) = X e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \varphi)}$  avec sa partie réelle qu'on écrit souvent *par abus de langage de la même manière*, soit  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Il faut simplement se souvenir que seule la partie réelle de  $x(t) = X e^{i\omega t}$  avec  $X = A e^{i\varphi}$  possède un sens physique.

## 2 - Valeur moyenne et valeur quadratique moyenne

a - valeur moyenne de  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$

On la note  $\langle x \rangle$  et elle est nulle.

La notation complexe  $x(t) = X e^{i\omega t}$  où  $X = A e^{i\varphi}$  ne perturbe pas ce résultat, sa moyenne est bien nulle sur une période.

b - valeur moyenne de  $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$

On la note  $\langle x^2 \rangle$  et elle vaut  $A^2/2$ .

Cependant,  $x^2(t) = A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$  n'est pas la partie réelle de  $(X e^{i\omega t})^2$ , en effet la valeur moyenne de cette quantité complexe est nulle, car sa partie réelle est un cosinus de l'angle double !

La formule qui donne la valeur quadratique moyenne de la représentation complexe  $x(t) = X e^{i\omega t}$  est:

$$\langle x^2 \rangle = 1/2 \operatorname{Re} (x x^*) = 1/2 \operatorname{Re} (X X^*) = 1/2 |X|^2 = A^2/2$$

où  $*$  désigne la quantité conjuguée (changer  $i$  en  $-i$ ).

c - valeur moyenne d'un produit de deux signaux harmoniques  $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  sur une période  $T = 2\pi/\omega$

On la note  $\langle xy \rangle$  et elle vaut  $1/2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ; cette quantité peut être négative.

En notation complexe,

$$x(t) = X e^{i\omega t} \text{ et } y(t) = Y e^{i\omega t}$$

où  $X = |X| e^{i\varphi_1} = A_1 e^{i\varphi_1}$  et  $Y = |Y| e^{i\varphi_2} = A_2 e^{i\varphi_2}$

$$\langle xy \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(xy^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(XY^*) = \frac{1}{2} |X| |Y| \operatorname{Re}(e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}) = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Remarque:  $\operatorname{Re}(xy^*) = \operatorname{Re}(x^*y)$ .

### 3 - Dérivées temporelles

La notation complexe est très commode en ce qui concerne la dérivation.

En effet si  $x(t) = X e^{i\omega t}$ , on aura :

$$dx(t)/dt = i\omega X e^{i\omega t} \text{ et } d^2x(t)/dt^2 = -\omega^2 X e^{i\omega t}$$

donc la dérivation est une opération multiplication par  $i\omega$

$$dx(t)/dt = i\omega x(t) \text{ et } d^2x(t)/dt^2 = -\omega^2 x(t)$$

Conséquence:

$$\langle x dx/dt \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(x dx/dt^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[x(-i\omega x^*)] = \omega/2 |x|^2 \operatorname{Re}(-i) = 0$$

De même, l'intégration est une division par  $i\omega$

## Quelques formules d'analyse vectorielle

(les vecteurs sont en caractères **gras**)

$f(x,y,z)$  est un champ scalaire

**A** ( $A_x, A_y, A_z$ ), **B** ( $B_x, B_y, B_z$ ) et **C** ( $C_x, C_y, C_z$ ) sont des champs vectoriels

Produit scalaire:  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  si **A** et **B** sont orthogonaux

Produit vectoriel:  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$

$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| |\sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})|$

$\|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}\|$  représente l'aire du parallélogramme (**A**, **B**)

$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{0}$  si **A** et **B** sont colinéaires

Produit mixte:  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \wedge \mathbf{A})$  invariant par permutation circulaire

$\|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})\|$  représente le volume du prisme droit (**A**, **B**, **C**)

Double produit vectoriel:  $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$

Opérateur « nabla »:  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$

Gradient: **grad**  $f = \nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$

*Le gradient d'un champ scalaire est un champ vectoriel; il caractérise les variations spatiales*

Divergence:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$  (produit scalaire de  $\nabla$  avec **A**)

*La divergence d'un champ vectoriel est un champ scalaire; elle caractérise les variations spatiales du champ dans sa direction*

Rotationnel: **rot**  $\mathbf{A} = \nabla \wedge \mathbf{A}$  (produit vectoriel de  $\nabla$  avec **A**)

$\mathbf{rot} \mathbf{A} = (\partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z, \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x, \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y)$

*Le rotationnel d'un champ vectoriel est un champ vectoriel; il caractérise les variations spatiales du champ dans les directions orthogonales*

Laplacien scalaire:

$\Delta f = \nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$

Le Laplacien **vectoriel** est défini par  $\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A})$

en coordonnées cartésiennes:  $\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$  où  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$

**rot(gradf) = 0**

$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$

$\operatorname{div}(f \mathbf{A}) = f \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{A}$

**rot(f A) = f rotA + gradf A**

Formules utilisées plus rarement (à ne pas savoir par coeur) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

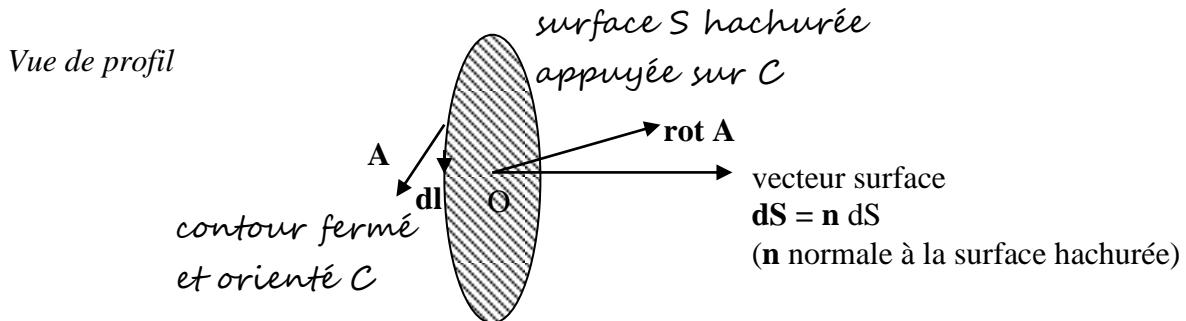
$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B}) \mathbf{B}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A}) \mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{B}) \mathbf{A}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A}^2 / 2) = \mathbf{A} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{A}) \mathbf{A}$$

Théorème de Stokes ou du rotationnel:  $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{rot A} \cdot d\mathbf{S}$

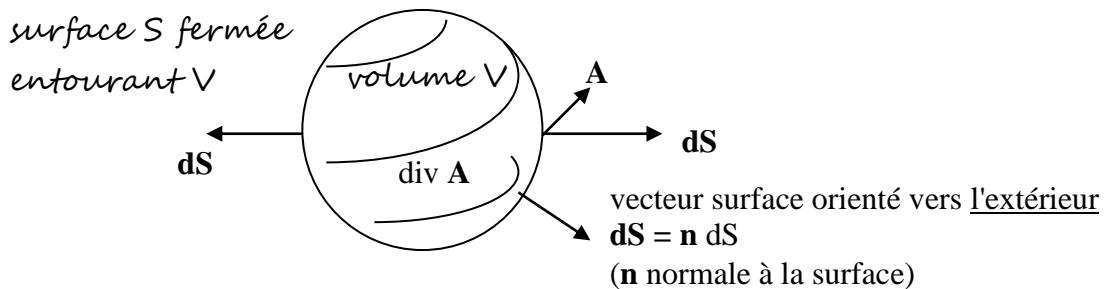
La circulation du champ vectoriel  $\mathbf{A}$  sur un contour fermé  $C$  est égale au flux de son rotationnel à travers n'importe quelle surface  $S$  s'appuyant sur ce contour fermé.



On choisit une orientation arbitraire du contour  $C$ . Le vecteur surface  $\mathbf{S}$  est alors orienté par  $C$  selon la règle des doigts de la main *droite*: pouce sur le contour dans le sens choisi, index visant le centre O, le majeur indique le vecteur  $\mathbf{S}$ .

Théorème d'Ostrogradski ou « flux divergence »:  $\iint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{A} dv$

Le flux du champ vectoriel  $\mathbf{A}$  au travers d'une surface fermée  $S$  est égal à l'intégrale de sa divergence sur le volume intérieur  $V$  délimité par cette surface.



### SYSTEMES PARTICULIERS DE COORDONNEES

Coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$ , trièdre direct ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ )

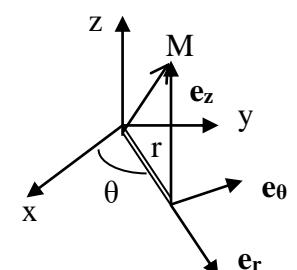
$$\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{grad} f = [\partial f / \partial r, (1/r) \partial f / \partial \theta, \partial f / \partial z]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (1/r) \partial(rA_r) / \partial r + (1/r) \partial A_\theta / \partial \theta + \partial A_z / \partial z$$

$$\mathbf{rot A} = [(1/r) \partial A_z / \partial \theta - \partial A_\theta / \partial z, \partial A_r / \partial z - \partial A_z / \partial r, (1/r) (\partial(rA_\theta) / \partial r - \partial A_r / \partial \theta)]$$

$$\Delta f = (1/r) \partial(r \partial f / \partial r) / \partial r + (1/r^2) \partial^2 f / \partial \theta^2 + \partial^2 f / \partial z^2$$



Coordonnées sphériques  $M(r, \theta, \phi)$ , trièdre direct ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ )

$$\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r \quad (\mathbf{e}_\phi \in \text{plan } xOy)$$

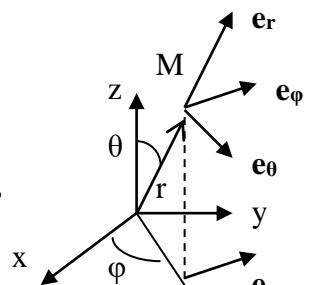
$$\mathbf{grad} f = [\partial f / \partial r, (1/r) \partial f / \partial \theta, (1/r \sin \theta) \partial f / \partial \phi]$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (1/r^2) \partial(r^2 A_r) / \partial r + (1/r \sin \theta) \partial(\sin \theta A_\theta) / \partial \theta + (1/r \sin \theta) \partial A_\phi / \partial \phi$$

$$\mathbf{rot A} = [(1/r \sin \theta) (\partial(\sin \theta A_\phi) / \partial \theta - \partial A_\theta / \partial \phi), (1/r \sin \theta) \partial A_r / \partial \phi - (1/r) \partial(r A_\phi) / \partial r, (1/r) (\partial(r A_\theta) / \partial r - \partial A_r / \partial \theta)]$$

$$\Delta f = (1/r) \partial^2(rf) / \partial r^2 + (1/r^2 \sin \theta) \partial(\sin \theta \partial f / \partial \theta) / \partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 f / \partial \phi^2$$

$$= (1/r^2) \partial(r^2 \partial f / \partial r) / \partial r + (1/r^2 \sin \theta) \partial(\sin \theta \partial f / \partial \theta) / \partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 f / \partial \phi^2$$



## Constantes physiques

### Unités

Constante de Planck  
 $h = 6,62617 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Vitesse de la lumière  
 $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Charge élémentaire  
 $e = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Constante gravitationnelle  
 $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \text{.kg}^{-2}$

Nombre d'Avogadro  
 $N_A = 6,02204 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann  
 $k_B = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante de Faraday  
 $F = 96484 \text{ C.mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits  
 $R = 8,3144 \text{ J.K}^{-1} \text{.mol}^{-1}$

Masse de l'électron  
 $m_e = 9,10953 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Masse du neutron  
 $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Masse du proton  
 $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Permittivité du vide  
 $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Perméabilité du vide  
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

### Unités dérivées courantes

| Grandeur physique       | Unité (Symbole)  | Expression   |
|-------------------------|------------------|--|
| Fréquence               | Hertz (Hz)       | $\text{s}^{-1}$                                      |
| Force                   | Newton (N)       | $\text{kg m s}^{-2}$                                 |
| Énergie                 | Joule (J)        | $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$                        |
| Puissance               | Watt (W)         | $\text{J s}^{-1}$                                    |
| Pression                | Pascal (Pa)      | $\text{N m}^{-2}$                                    |
| Charge électrique       | Coulomb (C)      | $\text{A s}$   |
| Potentiel électrique    | Volt (V)         | $\text{kg m}^2 \text{A}^{-1} \text{s}^{-3}$          |
| Champ magnétique        | Tesla (T)        | $\text{kg A}^{-1} \text{s}^{-2}$                     |
| Flux magnétique         | Weber (Wb)       | $\text{T m}^2$                                       |
| Conductivité électrique | Siemens (S)      | $\text{A}^2 \text{kg}^{-1} \text{s}^3 \text{m}^{-3}$ |
| Résistance électrique   | Ohm ( $\Omega$ ) | $\text{kg m}^2 \text{A}^{-2} \text{s}^{-3}$          |
| Capacité électrique     | Farad (F)        | $\text{A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-2}$ |
| Inductance              | Henry (H)        | $\text{kg m}^2 \text{A}^{-2} \text{s}^{-2}$          |