

ANALYTICAL MECHANICS

# 解析力学

細谷 暁夫

やまなみ書房

# 解析力学

ANALYTICAL MECHANICS

細谷 曉夫

AKIO HOSOYA

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>  
or send a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

## はじめに

平成2年に東工大に着任してから、物理学科の学生を対象に「解析力学」を講じた。その後、出版の話があったが、「大学改革」なるものに対処せざるを得ず、TeX 原稿を作った段階で時間切れになった。

定年退職後、地元の我孫子でサイエンスカフェを2か月に一度開いているうちに50人ほど参加する賑わいになった。常連の一人が、相対論の授業をしてくれませんか、と言ってきた。5人生徒さんを集めたら始めましょう、と先送りしたつもりが数日で7人集まったので、喫茶店で始めた。特殊相対論だけでなく、一般相対論まで数式まで丁寧に追ひ、東工大と同レベルの講義を要望だったので、月2回で1年と少しかかった。途中から大きなホワイトボードが必要になり、市の学習室を借りた。全員、理工系の素養のある元技術者で、時間に余裕のある人たちだったためか。式変形の細部にもこだわると同時に、全体像を明らかにすることを求める質問も数多く、まさに双方向的授業展開となった。

途中で、解析力学を用いて説明をスッキリさせる必要が出てきたので、以前作った講義録をコピーして配布した。生徒さんの一人が、それをPDF化して下さったので、私の個人的なブログに「幻の解析力学」としてアップしておいた。

そのことがTwitterを通じて広がったことは認識していたが、やまなみ書房の飯沢さんから、オンデマンド出版しませんか、と提案を受けた時は少し驚いた。以前から面識があり、志をお聞きして、これからの学術書はオンデマンドになると、私も思ったので、すぐお引き受けした。たまたま理研で行われた研究会の折に打ち合わせをし、次に池袋の喫茶店でお会いして、そのあとは飯沢さんの高い能力のおかげでとうとう出版の運びになったので、とても嬉しい。

考え方を理解するための導入部には工夫を凝らしたつもりである。ここでは、東工大の学生諸君からのすぐれた質問も取り入れた。「拘束系」

の解析力学は技術的でもあるし、場の理論の教科書の中に入れるのが適当と考えて割愛した。図は私の希望で、手書きとした。

2019 年 10 月

細谷 暁夫

---

# 目次

---

はじめに . . . . .	1
----------------	---

---

## 第 1 章 解析力学の考え方 7

---



---

## 第 2 章 フェルマーの原理 Fermat's Principle 9

---



---

## 第 3 章 最小作用の原理 Principle of Least Action, Hamilton's Principle 15

---

§ 3.1 一般化座標 (Generalized Coordinates) . . . . .	15
§ 3.2 最小作用の原理 . . . . .	16
§ 3.3 高階微分を含む場合 (Higher Derivative Case) . . . . .	21
§ 3.4 測地線の方程式 (Geodesic Equation) . . . . .	23
§ 3.5 自由粒子の運動 . . . . .	29
§ 3.6 保存力場中の粒子の運動 . . . . .	33
§ 3.7 系の合成 . . . . .	36

---

## 第 4 章 拘束条件のある系 Constrained System 43

---

§ 4.1 ラグランジュの未定係数法 (The Method of Lagrange Multiplier) . . . . .	45
§ 4.2 ラグランジュの未定係数法の正当化 . . . . .	50
§ 4.3 撃力 (Impact) . . . . .	55
§ 4.4 ダランベール・ラグランジュの原理 (d'Alembert-Lagrange's Principle) . . . . .	57

---

## 第 5 章 電磁場中の荷電粒子の運動 59

---

§ 5.1	電磁場中の相対論的荷電粒子の運動 . . . . .	65
-------	----------------------------	----

---

## 第 6 章 時間的に変化する外力と摩擦のある場合の質点の運動 69

---



---

## 第 7 章 質点系の力学 75

---

§ 7.1	重心系、換算質量 . . . . .	75
§ 7.2	重心系、換算質量—ラグランジャン . . . . .	76
§ 7.3	重心—一般の場合 . . . . .	79
§ 7.4	微小振動 . . . . .	80
§ 7.5	基準振動—CO <sub>2</sub> の例 . . . . .	84
§ 7.6	基準振動—一般の場合 . . . . .	87
§ 7.7	強制振動と固有振動数 . . . . .	93
§ 7.8	強制振動の方程式の解き方 . . . . .	95

---

## 第 8 章 対称性と保存則 Symmetry and Conservation Law 99

---

§ 8.1	エネルギー保存則 (Energy Conservation Law) . . . . .	99
-------	--	----

---

## 第 9 章 運動量保存則 Momentum Conservation 103

---



---

## 第 10 章 角運動量保存則 Angular Momentum Conservation 107

---



---

## 第 11 章 不変変分論 Invariance Principle 111

---



---

## 第 12 章 ゲージ不変性 Gauge Invariance 121

---



---

## 第 13 章 力学的相似 Dynamical Similarity 125

---

---

**第 14 章 運動方程式の解き方 131**


---

- § 14.1 1 次元の運動 . . . . . 131
- § 14.2 中心力場中の運動 . . . . . 132
- § 14.3 惑星の運動 . . . . . 133

---

**第 15 章 特殊相対性理論 Special Theory of Relativity 143**


---

- § 15.1 光速不変の原理からローレンツ変換を導くこと . . . . . 143
- § 15.2 ローレンツ変換にたいして不変な作用—自由粒子 . . . . . 149
- § 15.3 相対論的荷電粒子の運動 . . . . . 151
- § 15.4 相対論的運動学 . . . . . 154

---

**第 16 章 正準形式 Canonical Formalism 157**


---

- § 16.1 実現される作用 . . . . . 157

---

**第 17 章 モーペルティユイの原理 Maupertuis' Principle 167**


---



---

**第 18 章 正準変換 Canonical Transformation 171**


---

- § 18.1 点変換 (Point Transformation) . . . . . 171
- § 18.2 正準変換の一般論 . . . . . 174

---

**第 19 章 ポアッソンの括弧式 Poisson Bracket 179**


---

- § 19.1 変換の生成子 (Generator of Transformation) . . . . . 181
- § 19.2 変換群 (Transformation Group) . . . . . 183
- § 19.3 ポアッソン括弧式と正準変換 . . . . . 189
- § 19.4 時間発展を正準変換の特殊な場合とみること . . . . . 192

---

**第 20 章 リウヴィユの定理 Liouville's Theorem 195**


---

- § 20.1 ポアンカレの再帰定理 (Poincare's Theorem) . . . . . 199



---

**第 21 章 ハミルトン・ヤコビの方程式** Hamilton-Jacobi's Equation **201**


---

§ 21.1	ハミルトン・ヤコビの方程式の完全解から、運動方程式の解を求める やり方 . . . . .	202
§ 21.2	変数分離の方法 . . . . .	206

---

**第 22 章 断熱不変量** Adiabatic Invariant **211**


---

§ 22.1	簡単な系の断熱不変量 . . . . .	211
§ 22.2	断熱不変量の一般的な形 . . . . .	215
§ 22.3	ゆっくりと変化する磁場中の荷電粒子の運動における断 熱不変量 . . . . .	218
§ 22.4	断熱不変量と前期量子論 . . . . .	220

---

**第 23 章 断熱不変量と角変数** Angle Variable **223**


---

§ 23.1	縮退 (Degeneracy) . . . . .	226
--------	---------------------------	-----

---

**第 24 章 解析力学と量子力学** Analytical Dynamics and Quantum Mechanics **229**


---

§ 24.1	正準量子化 (Canonical Quantization) . . . . .	229
§ 24.2	最小作用の原理はどこから来るのか? . . . . .	232

---

**初出索引** **240**


---

## 第1章

# 解析力学の考え方

質点に対する古典力学の基本方程式は、質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  として、ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

質量  $\times$  加速度 = 力.

であり、ある意味でこれに尽きているとも言える。

解析力学では、実現する運動を問題にする前に、仮想的にありとあらゆる運動を想定する。それぞれの運動に対してある作用 (**action**) という量があたえられていて、そのなかで実現する運動は作用を最小にするものである、として記述する。これは歴史的には、幾何光学におけるフェルマーの最小時間の原理<sup>1</sup>を力学に拡張したものであった。

力学を運動方程式から出発するのではなくて、作用から出発して考えるやりかたはやや迂遠のようにみえるが、2つの本質的な利点と2つの実際的な利点があるように思う。

本質的な利点の第一は基本方程式があらかじめわかっていないときに、系の持つ対称性などから作用の形を推定することができることにある。素粒子の相互作用を研究するときに取りられる方法であるが、巨視的な系に対しても役に立つ。第二は量子力学へステップとして本質的であることがあげられる。量子力学に移行するときには、解析力学の正準形式を経由するのが標準的であるからである。

実際の利点の第一は、系の保存量の発見が系の対称性から容易になさ

---

<sup>1</sup> たとえば媒質中の光の経路は、その所用間が最小になるようなものと一致する。

れることである。エネルギーなどの保存量が見つければ、運動方程式の解が容易になることは高校の物理でもよく経験したところであろう。第二は、変数としてデカルト座標あるいはほかの直交座標系に限らず、任意の座標が取れるので系に特徴的な便利な座標系を採用して、解法を著しく容易にすることができることがあげられる。

古典力学の範囲では、最小作用の原理はまさに「原理」であってその根拠を問わないものであるが、自然界におけるより基本的な量子力学のある極限として最小作用の原理が導かれる。(実は、作用の極値性だけが導かれ、古典力学でも実際には極値性だけが用いられるので言葉にやや不的確なところがあるが慣例に従って最小作用の原理と呼ぼう。)

## 第2章

# フェルマーの原理

## FERMAT'S PRINCIPLE

フェルマーは幾何光学における諸法則が

「光は所要時間が最小になるような経路を取る」

という「最小時間の原理」にまとめられることを示した。<sup>\*1</sup>

フェルマーの原理の簡単な適用をみよう。

### (a) 反射の法則

この問題の場合、光速は一定なので、最短距離は最短時間を意味する。光線が、A 点から進み鏡によって反射されて B 点まで到達する最短の経路を作図によって求めよう。

### (b) 屈折の法則 (Snell's law)

光は媒質中では真空中の光速  $c$  に比べて、遅い速度で伝搬する。媒質中の光の速さを  $c' (< c)$  としよう。屈折率  $n$  は

$$n = \frac{c}{c'} (> 1) \quad (2.1)$$

と定義される。水の場合約 1.333。

だいたいの考え方は以下の通りである。真空中の方が光は速く進むのである程度長く真空中を走り、遅くしか進めない媒体中に走る距離を少

<sup>\*1</sup> 歴史的には、以下のようなことらしい。

ヘレニズム時代にアレクサンドリアのヘロン (Heron) が光の反射の問題に対して「最小距離の原理」を述べていた。フェルマーはこれを「最小時間の原理」と言い直して屈折の法則に応用した。これは、自然が経済的な経路を通るという意味で興味を持たれたのであろう。

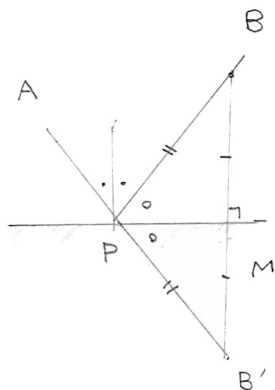


図 2.1 反射の法則

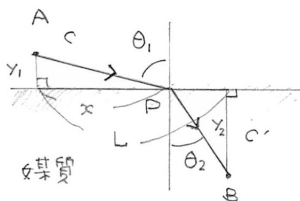


図 2.2 屈折の法則

な目にとすると全所要時間を短くできるだろう。ただこれをやりすぎると、光は遠回りをすることになるのでほどほどにする必要がある。

これを定量化するために、光が真空と媒質の境界面をよぎる点の座標  $x$  を図 2.2 のように変数として、全所要時間  $T = T(x)$  を  $x$  の関数として表し  $x$  をいろいろ変えてみて、 $T(x)$  の最小値をあたえる  $x$  を求めよう。

全所要時間  $T = T(x)$  は

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{c} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}}{c'} \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{x^2 + y_1^2} + n \sqrt{(L-x)^2 + y_2^2} \right] \quad (2.3)$$

と与えられるので、その最小値を求めるために極値を調べよう。関数の極値はその微係数をゼロと置いて得られるので、

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{1}{c} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - n \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + y_2^2}} \right] \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{c} [\sin \theta_1 - n \sin \theta_2] = 0. \quad (2.5)$$

ここに、 $\theta_1$  と  $\theta_2$  は、おのおの真空中の光線と媒質中の光線の鉛直線にたいしてなす角度である。上式を  $x$  について解いて  $x$  を求めてもよいが、むしろ同じ内容を屈折角で表す形が Snell の屈折の法則<sup>42</sup>としてよく知られているので、なじみがあるだろう。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n. \quad (2.6)$$

これが、所要時間  $T$  の最小値を与えることはほぼ明らかであるが、

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n} > 0$$

を確認せよ。

この問題をより一般化して、屈折率  $n = n(x)$  が深さ  $x$  の関数であるとしよう。このためには媒質を多数の薄い層に分解して、各層のなかでは屈折率  $n$  を一定と考えて、上の Snell の法則を繰り返し使えばよいだろう。すなわち、各  $x$  にたいして屈折角を  $\theta(x)$  とすれば

$$\sin \theta_1 = n(x) \sin \theta(x). \quad (2.7)$$

### 例題 2.0.1

屈折率  $n = n(x)$  が深さ  $x$  の関数である場合に光線の軌跡  $y = f(x)$  を屈折率  $n = n(x)$  を用いて表せ。特に、 $n(x) = x (> 1)$  の場合に、 $f(x)$  を具体的に求めよ。

[ヒント]

<sup>42</sup> 実はアラビアの数学者 Abū Saʿd al-ʿAlāʾ ibn Sahl が西暦 984 年ごろに書いた、“On the Burning Instruments” の中にすでにあるそうだ。

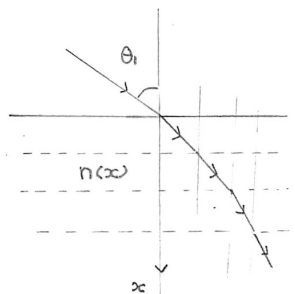


図 2.3 Snell の法則の一般化

$$\frac{df(x)}{dx} = \tan \theta, \quad (2.8)$$

$$\frac{\sin \theta_1}{n(x)} = \sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} = \frac{\frac{df(x)}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2 + 1}} \quad (2.9)$$

上の式を  $\frac{df(x)}{dx}$  について解けば、

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{s}{\sqrt{n^2 - s^2}}. \quad (2.10)$$

ただし、ここに  $s = \sin \theta_1$ 。したがって、

$$f(x) = \int \frac{s}{\sqrt{n^2 - s^2}} dx. \quad (2.11)$$

特に  $n(x) = x (> 1)$  の場合、

$$f(x) = s \left( \cosh^{-1} \frac{x}{s} - \cosh^{-1} \frac{1}{s} \right). \quad (2.12)$$

あるいは

$$x = s \cosh \left( \frac{y}{s} + \cosh^{-1} \frac{1}{s} \right) \quad (2.13)$$

$x$  が大きいところでは、 $x = \frac{s}{2} e^{\frac{y}{s}}$  のように指数関数的に振る舞う。詳しくはグラフで示す。

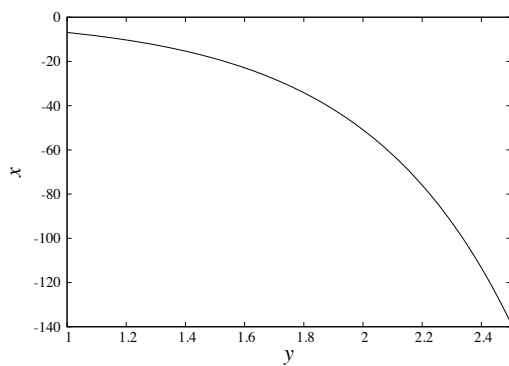


図 2.4  $s = \sin \theta_1 = \frac{1}{2}$  のとき





## 第3章

# 最小作用の原理

## PRINCIPLE OF LEAST ACTION, HAMILTON'S PRINCIPLE

解析力学は、幾何光学におけるフェルマーの原理を力学に拡張するものである。ただし、幾何光学においては「時間」という意味のはっきりしたものであったが、非相対論的な力学の場合には替わってより抽象的な「作用」を導入して、その作用が最小になるように運動が決定される。以下では質点や質点系に対して最小作用の原理を一般的な述べよう。

### §3.1 一般化座標 (Generalized Coordinates)

各質点の座標は必ずしもデカルト座標  $r_1, r_2, \dots$  であらわす必要はない。例えば極座標を用いてもよい。さらに一般化して、

$$(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (3.1)$$

と書くことにしよう。ここに、 $s$  は座標変数の総数で自由度 (**degree of freedom**) あるいは力学的自由度 (**dynamical degrees of freedom**) と呼ぶ。 $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  の記述する空間を配位空間 (**configuration space**) と呼ぶ。

以下の2重振り子 (**double pendulum**) の場合には、 $(\phi, \phi')$  が一般化座標であり、自由度は2である。2個の重りのデカルト座標  $(x, y), (x', y')$

との関係は

$$x = l \cdot \cos \phi \quad (3.2)$$

$$y = l \cdot \sin \phi \quad (3.3)$$

$$x' = x + l' \cdot \cos \phi' = l \cdot \cos \phi + l' \cdot \cos \phi' \quad (3.4)$$

$$y' = y + l' \cdot \sin \phi' = l \cdot \sin \phi + l' \cdot \sin \phi' \quad (3.5)$$

この問題にはあとで立ち返る。

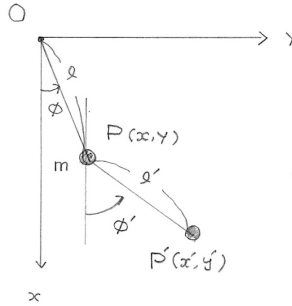


図 3.1 2重振り子

一般化された座標をうまく選べば、運動の記述が簡単になることが多い。

### §3.2 最小作用の原理

この節では記述を簡単にするために、一般化座標  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$  を一括して  $q$  と書いて 1 自由度の場合として議論を進め、最後に自由度が複数ある場合に一般化した表式をあたえよう。

作用 (Action)  $S$  をラグランジアン (Lagrangian)  $L = L(q, \dot{q}, t)$  の時間

積分で書けると仮定する。すなわち

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3.6)$$

上の (3.6) 式においては、 $q(t)$  はまだ決定されていない、 $S$  はいろいろ可能な経路  $q(t)$  の汎関数である。それを、明示的に示したいときに、 $S[q]$  と書くことにしよう。<sup>1</sup> ラグランジアン  $L = L(q, \dot{q}, t)$  は、座標  $q$  と速度  $\dot{q}$  の関数であるとするが、 $q$  と  $\dot{q}$  を通じて時間に依るだけではなく、時間  $t$  を陽に含んでもよいとする。時間積分の下端  $t_1$  と上端  $t_2$  は、おのおの考えている運動の始まる時刻と終わる時刻である。<sup>2</sup>

さて、出発点  $q(t_1)$  と終着点  $q(t_2)$  を固定して、途中いろいろな経路に対して作用積分  $S[q]$  の値を考えよう。(図 3.2 参照) そのなかで  $S[q]$  の極値をあたえる経路  $\bar{q}$  があつたとしよう。そして経路  $\bar{q}$  と微小に異なる経路  $q = \bar{q} + \delta q$  を考えよう。ここに  $\delta q$  は、出発点  $q(t_1)$  と終着点  $q(t_2)$  を動かさないような、微小ではあるが時間の任意関数である。すなわち

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0. \quad (3.7)$$

経路が  $\bar{q}$  から  $\bar{q} + \delta q$  に微小に変更されたことによる作用  $S$  の変化分を

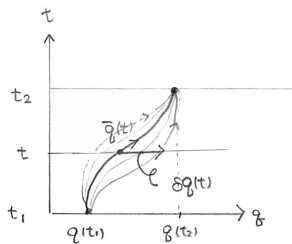


図 3.2 最小作用の原理

<sup>1</sup> 系を指定すれば、ラグランジアンが一個の関数であたえられることに注意する必要がある。一方運動方程式は座標の数だけある。

<sup>2</sup> ここではラグランジアンは座標とその 1 階微分の関数とした。たいていの力学系に対してはこれで充分であるが、2 階以上の微分を含む場合への拡張は容易である。

計算してみよう。

$$\begin{aligned}
 \delta S &= S[\bar{q} + \delta q] - S[\bar{q}] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} [L(\bar{q} + \delta q, \dot{\bar{q}} + \delta \dot{q}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] + (\delta q \text{ と } \delta \dot{q} \text{ について 2 次以上の項})
 \end{aligned}$$

ここで、第3行目で角括弧の中を  $\delta q$  と  $\delta \dot{q}$  についてテイラー展開した。

さて、 $\bar{q}$  が作用  $S$  の極値を与える停留点であるということから、 $\delta q$  について1次の項は消えるはずである。すなわち

$$\delta_1 S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] = 0. \quad (3.8)$$

上の式において、微小量が  $\delta q$  と  $\delta \dot{q} = \dot{\delta q}$  の2つの形で入っている。これをひとまとめにするために第2項を変形して、上の式を以下のように書き直す。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] \quad (3.9)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.10)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (3.11)$$

途中で完全微分の積分を、積分の上端と下端の差  $[\dots \delta q]_{t_1}^{t_2}$  に書き換えた。ここで、変分が両端を止めたもの、 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  に限定したことを思い起こせば上の式の最後の項は消える。第1項の被積分関数は  $[\dots] \delta q$  の形をしていることに注意しよう。任意関数  $\delta q$  に対して積分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt [\dots] \delta q \quad (3.12)$$

がゼロのなるためには、被積分関数の括弧の中 [...] がゼロでなければならない。

したがって

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} \right) = 0. \quad (3.13)$$

これをオイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation) と呼び、解析力学における中心的な方程式である。

変数が複数ある時への拡張は容易で、以下のようにする。変数が複数あってもラグランジャンは一つで、

$$L = L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (3.14)$$

の形をしている。作用の変分に対する結果を書けば、

$$\delta_1 S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \right) \right] \delta q_i + \sum_{i=1}^s \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (3.15)$$

となる。 $\delta q(t_1)_i = \delta q(t_2)_i = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) であるから最後の項はゼロになってしかも  $\delta q_i$  は任意の時間  $t$  の関数だから第 1 項の積分の被積分関数のなかのかぎ括弧の中が各  $i$  に対してゼロになる。したがって、各  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) に対してオイラー・ラグランジュ方程式：

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (3.16)$$

が成り立つ。

以下では、記述を簡単にするために停留点をあらわすバーを省略することにする。

### 例題 3.2.1

変分問題を解くことにより、前節の問題を解け。(屈折率  $n = n(x)$  が深さ  $x$  の関数である場合に光線の軌跡  $y = f(x)$  を屈折率

$n = n(x)$  を用いて表せ。)

[ヒント]

光の所要時間  $T$  は

$$cT = \int_{x_1}^{x_2} n(x) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int n(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (3.17)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d \left( \frac{\partial (n(x) \sqrt{1+f'(x)^2})}{\partial f'(x)} \right)}{dx} = \frac{d \left( \frac{nf'}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right)}{dx} = 0$$

これは直ちに積分できて

$$\frac{n(x)f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}} = \text{const.} \quad (3.18)$$

これは以前の結果  $n \cdot \sin \theta = \text{const.}$  に他ならない。

### 例題 3.2.2

一様なひもを両端を同じ高さで固定してぶら下げたとき、ポテンシャルエネルギーが最小になるようにその形が決まる。その形（懸垂線）を変分問題を解くことにより求めよ。

[ヒント]

懸垂線のポテンシャルエネルギー  $U$  はひもの質量の線密度を  $\rho$  とすれば、

$$U = -\rho \int y \sqrt{dx^2 + dy^2} = -\rho \int f \sqrt{1 + f'^2} dx \quad (3.19)$$

とあたえられる。ポテンシャルエネルギー  $U$  を最小にするよう

に、ひもの形状が決まると考えて変分問題を解こう。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{d \left( \frac{\partial (f(x) \sqrt{1+f'(x)^2})}{\partial f'(x)} \right)}{dx} - \frac{\partial (f(x) \sqrt{1+f'(x)^2})}{\partial f(x)} \\ &= \frac{d \left( \frac{ff'}{\sqrt{1+f'(x)^2}} \right)}{dx} - \sqrt{1+f'(x)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この微分方程式を解くには若干の技巧が必要であるが、答えは  $c$  と  $x_0$  を 2 個の任意定数として

$$f(x) = c \cdot \cosh \left( \frac{x - x_0}{c} \right) \quad (3.20)$$

である。2 個の任意定数  $c$  と  $x_0$  とはぶら下げる 2 点を与えると決まる。例えば、中点を  $x$  座標の原点に選び、両端の  $x$  座標を  $x = \pm a$  と選ぶと  $f(x) = c \cdot \cosh \left( \frac{x}{c} \right)$  ただし、 $c$  は両端の高さ  $h$  から  $h = c \cdot \cosh \left( \frac{a}{c} \right)$  と与えられる。

### §3.3 高階微分を含む場合 (Higher Derivative Case)

ラグランジアンが  $L \left( q, \frac{dq}{dt}, \dots, \frac{d^n q}{dt^n}, t \right)$  2 階以上の高階微分を含む場合の変分原理を考えよう。応用としては、梁の運動など特殊なものしか見あたらないが、理論的に興味深い。 $S$  の変化分を計算してみよう。



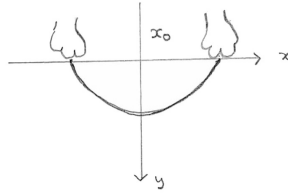


図 3.3 梁の運動

$$\begin{aligned}
 \delta_1 S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ L \left( q + \delta q, \frac{dq}{dt} + \delta \frac{dq}{dt}, \dots, \frac{d^n q}{dt^n} + \delta \frac{d^n q}{dt^n}, t \right) \right. \\
 &\quad \left. - L \left( q, \frac{dq}{dt}, \dots, \frac{d^n q}{dt^n}, t \right) \right] \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \delta \frac{dq}{dt} + \dots + \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \delta \frac{d^n q}{dt^n} \right] \\
 &\quad + (\delta q, \dots, \delta \frac{d^n q}{dt^n} \text{ について 2 次以上の項})
 \end{aligned}$$

さて、 $q$  が作用  $S$  の極値を与える停留点であるということから、 $\delta q$  について 1 次の項は消えるはずである。すなわち

$$\delta_1 S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) \delta q + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \delta q \right] = 0 \quad (3.21)$$

ただし、部分積分において、積分の上端と下端の寄与がが消えるためには端点  $t_1, t_2$  で、 $\delta q = \dots = \delta \frac{d^{n-1} q}{dt^{n-1}} = 0$  である必要がある。

$\delta q$  は任意だから、 $[\ ]$  の中がゼロになる必要がある。すなわち、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) = 0 \quad (3.22)$$

となる。

### §3.4 測地線の方程式 (Geodesic Equation)

ユークリッド空間においては、2点を結ぶ曲線のうち最短のものは直線である。曲がった空間における最短曲線は一般に測地線と呼ばれる。この測地線を求める問題は、力学と言うよりは幾何学に属するが、最小作用の原理の幾何学的なイメージは有用であるし、一般相対論においては本質的となる。

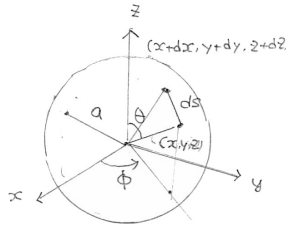


図 3.4 球面上の作用

まず、代表的な曲面として球面を考えてみよう。半径  $a$  の 2 次元球面上の近接した 2 点のデカルト座標を  $(x, y, z)$  と  $(x + dx, y + dy, z + dz)$  とすれば、それらの間の距離は

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (3.23)$$

となる。極座標  $(\theta, \phi)$

$$x = a \sin \theta \cos \phi$$

$$y = a \sin \theta \sin \phi$$

$$z = a \cos \theta$$

を導入すると、 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = a \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}$  となる。

近接しているとは限らない一般の2点、A、Bの間の距離は

$$\begin{aligned}
 S &= \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\
 &= \int a \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2} = \int a \sqrt{1 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2} d\theta \\
 &\equiv \int L \left( \phi, \frac{d\phi}{d\theta} \right) d\theta
 \end{aligned}$$

となる。Sを最小にする経路はオイラー・ラグランジュ方程式であたえられるが、今の場合には、 $\phi$ が循環変数になっているので、第一積分がある。

$$\frac{\sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\theta}}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\theta} \right)^2}} = \text{定数} := \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \quad (3.24)$$

これを整理すると、

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \sin^2 \theta \sqrt{A^2 - \cot^2 \theta} \quad (3.25)$$

となり、積分すれば

$$\phi - \phi_0 = \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{A^2 - \cot^2 \theta}} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \text{Cos}^{-1} \xi \quad (3.26)$$

ただし、右辺の積分を実行するために、 $\cot \theta = A\xi$ と置いた。したがって、

$$\cot \theta = A \cos(\phi - \phi_0) \quad (3.27)$$

となる。これは、球面と原点を通る平面  $z = A\bar{x} = Aa \cdot \sin \theta \cos(\phi - \phi_0)$  の交わりに他ならない。すなわち、大円が測地線になるというよく知られた結果が再現される。

つぎに、これほどには結果が明らかな回転双曲面を考えよう。

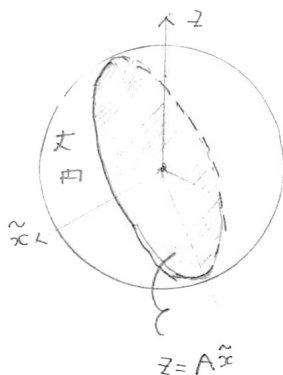


図 3.5 大円が測地線となる

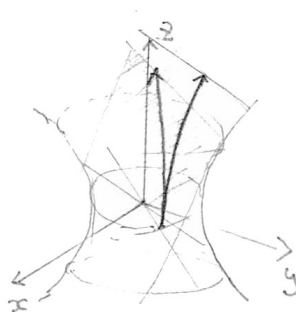


図 3.6 回転双曲面

3次元空間に回転双曲面を埋め込んで考えよう。すなわち、極座標  $(\theta, \phi)$

$$x = a \sinh \theta \cos \phi$$

$$y = a \sinh \theta \sin \phi$$

$$z = a \cosh \theta$$

とパラメータ化された曲面： $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$  の測地線を考えよう。符

号  $(- - +)$  を考慮に入れると、近接する2点間の距離は

$$ds = \sqrt{-dx^2 - dy^2 + dz^2} = a\sqrt{d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2} \quad (3.28)$$

となる。球面と比較すると、 $\sin \theta \rightarrow \sinh \theta, \cos \theta \rightarrow \cosh \theta$  とするだけで回転双曲面の測地線

$$\coth \theta = A \cos(\phi - \phi_0) \quad (3.29)$$

を得る。これは双曲面と原点を通る平面  $z = A\bar{x} = Aa \cdot \sinh \theta \cos(\phi - \phi_0)$  の交わりに他ならない。

球面と双曲面の測地線を比較しよう。図を描くと明らかなように、球面上の一点から出た隣接した測地線はやがて、再び接近して交わる（共役点）<sup>43</sup>。一方、双曲面上の隣接した測地線は離れて行く。このことは、球面の曲率が正であり、双曲面の曲率が負であることと関係しているが、一般論の中で示そう。

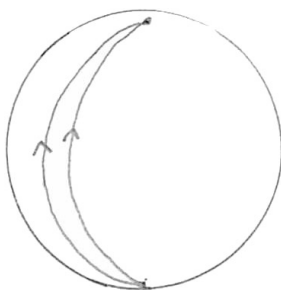


図 3.7 共役点

近接する2点間の距離の2乗を計量テンソルを  $g_{ij}(x)$  として、

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (3.30)$$

<sup>43</sup> 実は大円が最短曲線をあたえるのは、共役点対の間に限る。

と書くと、一般の2点間の距離は

$$S = \int ds = \int \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} d\tau \quad (3.31)$$

と書ける。球面の例では、 $g_{\theta\theta} = a^2, g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2 \theta, g_{\theta\phi} = 0$  である。

$S$  の極値は、測地線の方程式：

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(x) \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (3.32)$$

の解があたえる。

ただし、クリストッフェル記号： $\Gamma_{jk}^i$  は

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_m \frac{1}{2} g^{im} \left[ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right] \quad (3.33)$$

導出は他書にゆずる。隣接する測地線の軌跡を  $x^i + \delta x^i$  とすると、方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2(x^i + \delta x^i)}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(x + \delta x) \\ \frac{d(x^j + \delta x^j)}{ds} \frac{d(x^k + \delta x^k)}{ds} = 0 \end{aligned}$$

となるが、差を取って整理すると、測地線差の方程式：

$$\frac{d^2 \delta x^i}{ds^2} + \sum_{j,k,l} R_{jkl}^i(x) \frac{dx^j}{ds} \delta x^k \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (3.34)$$

を得る。ここに  $R_{jkl}^i$  はリーマンの曲率テンソル (**Riemann curvature tensor**) と呼ばれ、クリストッフェル記号の微分を用いて、

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \quad (3.35)$$

と表される。リーマンテンソルの添字を全部下に下げたもの  $g_{im}R^m_{jkl} = R_{ijkl}$  を球面と双曲面に対して計算すると

$$R_{ijkl} = \frac{1}{a^2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad \text{球面}$$

$$R_{ijkl} = \frac{-1}{a^2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad \text{双曲面}$$

となる。測地線差の方程式はそれぞれ、

$$\frac{d^2\delta x^i}{ds^2} + \frac{1}{a^2} \left[ \delta x^i \left| \frac{dx^j}{ds} \right|^2 - \left( \frac{dx^j}{ds} \cdot \delta x^j \right) \frac{dx^i}{ds} \right] = 0 \quad \text{球面}$$

$$\frac{d^2\delta x^i}{ds^2} - \frac{1}{a^2} \left[ \delta x^i \left| \frac{dx^j}{ds} \right|^2 - \left( \frac{dx^j}{ds} \cdot \delta x^j \right) \frac{dx^i}{ds} \right] = 0 \quad \text{双曲面}$$

となる。ここに、 $\left| \frac{dx^j}{ds} \right|^2 = \sum_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 1$ 。特に、軌道と直交する方向  $\left( \frac{dx^j}{ds} \cdot \delta x^j \right) = 0$  への偏差  $\delta x^j$  に対しては

$$\frac{d^2\delta x^i}{ds^2} + \frac{1}{a^2} \delta x^i = 0 \quad \text{球面}$$

$$\frac{d^2\delta x^i}{ds^2} - \frac{1}{a^2} \delta x^i = 0 \quad \text{双曲面}$$

となり、球面の場合に隣接する測地線はより近づき  $\delta x^i \approx e^{-s/a}$ 、双曲面の場合に隣接する測地線はより遠ざかる  $\delta x^i \approx e^{s/a}$ 。

#### 例題 3.4.1

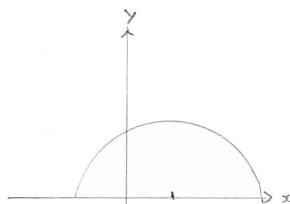
計量が

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad (y > 0, -\infty < x < +\infty) \quad (3.36)$$

とあたえられる空間の測地線を求めよ。

[ヒント]

$x$  軸上に中心を持つ半円。

図 3.8  $x$  軸上に中心を持つ半円

## §3.5 自由粒子の運動

真空中を外力を受けずに運動する質点の運動を自由粒子の運動と呼び、それを記述するラグランジアンを考えよう。まず、ラグランジアンに対して、直観的に明らかな対称性からの考察を行う。質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$ 、速度ベクトルを  $\dot{\mathbf{r}}$  としよう。

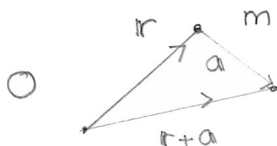


図 3.9 自由粒子の運動

- (1) 真空中の外力の働かない粒子の運動は粒子がどの位置にあっても同様である。したがって、この空間の一様性 (**spatial uniformity**) からラグランジアンは質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  から定数ベクトル  $\mathbf{a}$  だけずらしたものの、 $\mathbf{r} + \mathbf{a}$  に変えても変わらないはずである。したがってラグランジアンは  $\mathbf{r}$  に陽に依らず、 $\dot{\mathbf{r}}$  のみの関数である。



- (2) 自由粒子の運動に特別な方向はないという、空間の等方性 (**spatial isotropy**) からラグランジアンは速度の大きさだけの関数であることが結論できる。

以上から

$$L = F(\dot{\mathbf{r}}^2) \quad (3.37)$$

と書けるだろう。

空間の一樣・等方性だけからは以上のことしか言えない。ここで、われわれは目的を限定して速度が充分小さいときを考えよう。関数  $F(\dot{\mathbf{r}}^2)$  をテイラー展開して  $\dot{\mathbf{r}}^2$  について1次までを考慮しよう。

$$L = \text{const.} + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \dots \quad (3.38)$$

はじめの定数は作用原理にとってはどうでもよい項なので一般性を失うことなくゼロとおこう。1次の係数を  $\frac{m}{2}$  と置いたのはあとの便宜のためである。

結局

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2. \quad (3.39)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}} = 0. \quad (3.40)$$

これは、等速運動にたいするニュートンの方程式に他ならない。関数  $F(\dot{\mathbf{r}}^2)$  の形をさらに限定していくためには、さらに“強い”対称性が必要になる。

**特殊相対性理論 (special relativity)** におけるローレンツ変換に対する不変性を要求してみよう。**世界間隔 (world distance)**

$$ds^2 = (cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2 \quad (3.41)$$

は慣性系の取り方によらない不変量<sup>4</sup>なので作用

$$S = -mc \int \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2} = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} \quad (3.42)$$

も不変である。これを相対論的な自由粒子に対する作用としよう。ラグランジアンはしたがって、

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} \quad (3.43)$$

とあたえられる。速度  $\dot{\mathbf{r}}$  の大きさが光速  $c$  に比べて充分小さいとしてテイラー展開をすれば

$$L = -mc^2 + \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{m}{8} \frac{\dot{\mathbf{r}}^4}{c^2} + \dots \quad (3.44)$$

第2項が非相対論的な作用を与えている。ローレンツ不変性が  $\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}$  の4次以上の項も決定していることは着目すべきことである。

一般に、考えている対称性のもとで許されるものはすべてラグランジアンとして採用するのが解析力学の立場である。それにたいして系を特別な物に限定して近似を行ったり実験値を用いて係数を決定していく。そのからさらに、強い対称性が発見されれば、それを原理として可能な作

---

<sup>4</sup> 世界間隔  $ds^2$  を不変にするような変換をローレンツ変換と呼ぶ。慣性系  $S$  の時空座標を  $(t, x, y, z)$ 、それに対して  $x$  軸正の方向に速度  $v$  で運動している慣性系  $S'$  の座標  $(t', x', y', z')$  の間には、

$$\begin{aligned} cdt' &= \frac{cdt - \frac{v}{c} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dx' &= \frac{dx - \frac{v}{c} (cdt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned}$$

があり、 $ds^2$  がどちらの慣性系でも同じ値であることは直接確かめられる。

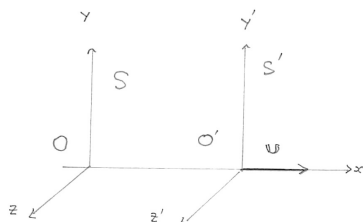


図 3.10 ローレンツ変換

用を書き下していく。この作業を続けて、ただの1項だけからなる統一されたラグランジアンを目指しているのが今日では素粒子物理学とも言える。

### 例題 3.5.1

相対論的な粒子を記述するラグランジアンに対してオイラー・ラグランジュ方程式を立ててそれを解け。

[ヒント]

$$\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right)}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2}} \right) = 0. \quad (3.45)$$

これから直ちに

$$\frac{m\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2}} = \mathbf{p} = \text{const.} \quad (3.46)$$

という相対論的運動量の保存則が出てくる。

## §3.6 保存力場中の粒子の運動

外力のもとでの粒子の運動を記述するラグランジアンは、自由粒子のラグランジアンに位置座標  $\mathbf{r}$  の関数を加えることであろう。(もちろんほかの可能性もあり、あとで述べる。) 外力が、特定の場所に特定の方向にある値で働くのであるからこの段階では空間の一樣・等方性は破れている。

以上の考察から、ラグランジアンを

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (3.47)$$

と置こう。 $V(\mathbf{r})$  はポテンシャルエネルギー (potential energy) とよばれる。マイナス記号はあとの便宜のためである。

ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  のために空間の一樣性が破れていることに注意しよう。したがって、 $\dot{\mathbf{r}}$  が小さいというだけでは、 $\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$  のような項を排除できない。実際、後で述べる磁場中の荷電粒子に対するラグランジアンには登場する。ここでは、簡単のために  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  とする。

オイラー・ラグランジュ方程式を立てると直ちに

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (3.48)$$

ここで、力  $\mathbf{F}$  を

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.49)$$

と置けば古典力学の基本方程式であるニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

(質量 × 加速度 = 力).

を得る。ここで、 $m$  は質量と解釈される。以上から明らかなように、もともとニュートンの方程式は速度が充分小さいときに妥当性のある近似的なものである。

質点あるいは質点の集まりの系に対しては、多くの場合、ラグランジャンは

$$L = T(\text{運動エネルギー}) - V(\text{ポテンシャルエネルギー}) \quad (3.50)$$

の形をしている。

### 例題 3.6.1

質量  $m$  の長さ  $l$  の単振子の問題を、糸が鉛直線となす角度を  $\theta$  としてラグランジャンを立てて解け。ただし、重力加速度を  $g$  とせよ。

#### [ヒント]

ラグランジャンは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差であるので各々をまず計算しよう。質点の速度の大きさは  $l\dot{\theta}$  だから、運動エネルギー  $T$  は

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 \quad (3.51)$$

ポテンシャルエネルギー  $V$  は

$$V = -mg \cdot l \cos \theta \quad (3.52)$$

したがって、ラグランジャンは

$$L(\theta, \dot{\theta}) = T - V = \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}^2 + mg \cdot l \cos \theta \quad (3.53)$$

とあたえられる。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (3.54)$$

となる。 $\theta \ll 1$  のときには、 $\sin \theta \approx \theta$  と近似してよいので

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0. \quad (3.55)$$

この微分方程式の解法は以前示したのでここでは結果のみを書いておこう。

結果は角振動数  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  の単振動で振幅  $A$  と位相  $\delta$  は初期値で決められる定数として、

$$\theta = A \sin(\omega t + \delta). \quad (3.56)$$

とあたえられる。

たとえば、初期時刻  $t = 0$  での初期値を  $\theta = 0$ 、初速度を  $\dot{\theta} = \omega_0$  とすれば、上記の解は

$$\theta = \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.57)$$

となる。

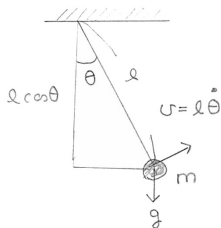


図 3.11 単振り子

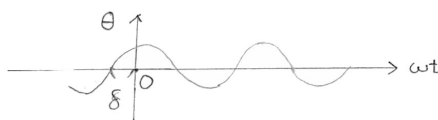


図 3.12 単振動

### 例題 3.6.2

質量  $m$  の惑星が太陽の周りをニュートンポテンシャル  $V(r) = -\frac{GmM}{r}$  を受けて運動している。この運動を太陽の位置を座標原

点とする極座標  $(r, \theta, \phi)$  を用いて記述せよ。ただし、 $G$  はニュートンの万有引力定数である。

[ヒント]

運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (3.58)$$

とあたえられるので、ラグランジアンは

$$L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{GmM}{r} \quad (3.59)$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{GmM}{r}, \quad (3.60)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddot{r} = r \dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 - \frac{GM}{r^2} \quad (3.61)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \dot{\phi}^2 \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (3.63)$$

### §3.7 系の合成

いま系 A のラグランジアンが  $L_A$ 、系 B のラグランジアンが  $L_B$  であたえられるとき、A と B の合成系のラグランジアンは、A と B の相互作用を  $L_{\text{int}}$  として

$$L = L_A + L_B + L_{\text{int}} \quad (3.64)$$

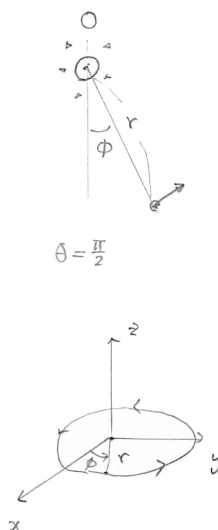


図 3.13 太陽と惑星

と書けるだろう。これは、何かの原理があると言うよりは、現象論的に2つの系の相互作用  $L_{\text{int}}$  を推定していくやり方と考えるべきである。その研究の結果、例えば、上の3つの項がある原理のもとに2つ以下の項にまとめればさらによいと考えるのである。実際に、荷電粒子と電磁場の相互作用にたいしては、このような一段進んだ理解が得られている。

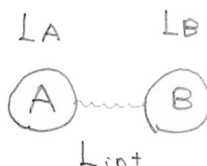


図 3.14 合成系のラグランジアン



**例題 3.7.1**

質量  $M_1$  の質点がバネ定数  $K_1$  のバネと結合していて質量  $M_2$  の質点がバネ定数  $K_2$  のバネと結合している。さらに、この2質点をバネ定数  $k$  の弱いバネでつなごう。はじめ、全てのバネが自然長になるように置かれていたとして運動を解け。

[ヒント]

バネ 1, 2 の自然長からの変化を、 $x_1$ 、 $x_2$  とすれば、ラグランジアンは上の合成から

$$L = \frac{M_1}{2} \dot{x}_1^2 - \frac{K_1 x_1^2}{2} + \frac{M_2}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{K_2 x_2^2}{2} - \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2} \quad (3.65)$$

最後の項が、2つの系の相互作用をあらわしている。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = M_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = M_2 \ddot{x}_2 + K_2 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0. \quad (3.67)$$

簡単のために  $M_1 = M_2 = m$ ,  $K_1 = K_2 = K$  の場合を考えよう。

上の式を辺べん足したり引いたりすると

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) + K(x_1 + x_2) = 0 \quad (3.68)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2) + (K + 2k)(x_1 - x_2) = 0. \quad (3.69)$$

となり、標準的な単振動の微分方程式になっている。したがって、

$$x_1 + x_2 = A \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{K}{m}} t + \Delta \right) \quad (3.70)$$

$$x_1 - x_2 = a \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{(K+2k)}{m}} t + \delta \right). \quad (3.71)$$

ここで、2 質点を結ぶバネが弱い  $K \gg k$  場合を考えてみよう。はじめ  $x_2$  をつり合いの位置に置き初速度もゼロとしておき、 $x_1$  だけを  $Q$  の位置から静かに離してみよう。近似的な答えとして

$$x_1 = Q \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t \cdot \cos \frac{k}{2\sqrt{mK}} t \quad (3.72)$$

$$x_2 = Q \sin \sqrt{\frac{K}{m}} t \cdot \sin \frac{k}{2\sqrt{mK}} t \quad (3.73)$$

はじめは、 $x_1$  だけが振動しているが、徐々に振幅が減少し、一方の  $x_2$  が振動をはじめ徐々に振幅が増大する。やがて、振動はほとんど  $x_2$  に移る。これを、繰り返す。弱いバネを通してエネルギーが往復する。

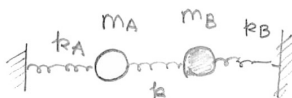


図 3.15 連成振動子

## 例題 3.7.2

質量  $m_1, m_2, m_3$  を持つ3質点が互いに万有引力で引き合っている。ただし、万有引力定数は  $G$  とせよ。

- (1) 3質点の位置座標を  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  としてラグランジアンを書き、オイラー・ラグランジュ方程式をたてよ。
- (2) それらが正三角形の配位（これをラグランジュポイントという）をしつつ、重心のまわりに等速円運動する場合も運動方程式の特別な解になっていることを示し、周期  $T$  と質点間の距離  $a$  の関係を求めよ。
- (3) 上の正三角形の解の場合の全エネルギーと全角運動量を求めよ。

ラグランジュポイントの例としては、太陽と木星とトロヤ小惑星群がある。

---

[ヒント]

ラグランジアンは

$$L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + \frac{m_3 \dot{\mathbf{r}}_3^2}{2} + \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{Gm_2 m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{Gm_3 m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} \quad (3.74)$$

運動方程式は

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{Gm_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) = 0 \quad (3.75)$$

と同様のもの2個の方程式になる。正三角形の配位だと  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = a = |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|$  だから、重心を原点に置く条件： $m_1 \mathbf{r}_1 +$

$m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0$  を用いれば、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{G}{a^3} (m_2 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_1 - m_3 \mathbf{r}_3) \\ = \ddot{\mathbf{r}}_1 + \frac{G}{a^3} (m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{r}_1 \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

となり  $\mathbf{r}_1$  のみの方程式になる。 $\frac{G}{a^3} (m_1 + m_2 + m_3) = \omega^2$  と置けば、

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 + \omega^2 \mathbf{r}_1 = 0. \quad (3.77)$$

$\mathbf{r}_2$ 、 $\mathbf{r}_3$  に対しても同じ式が成り立つ。したがって、正三角形が角速度  $\omega$  で重心の周りを回転する配位が解であることが分かる。

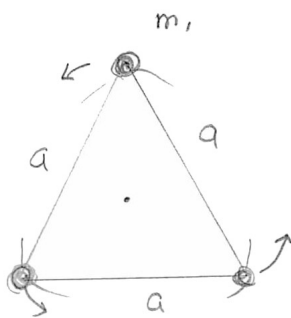


図 3.16 ラグランジュポイント



## 第4章

# 拘束条件のある系

## CONSTRAINED SYSTEM

力学系によっては、座標と速度： $q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  全てが独立でなく何らかの条件が付いていることがある。それをここでは**拘束条件 (constraint)** と呼ぼう。たとえば、半径  $a$  の球面上にある質点のデカルト座標  $(x, y, z)$  の間には

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad (4.1)$$

の関係がある。

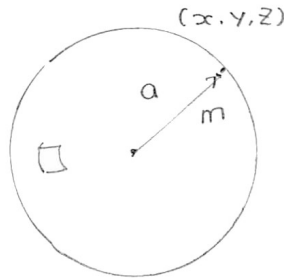


図 4.1 球面上の質点の系

その関係が、上の例のように、一般化座標の間のみの関係に帰着されるとき、

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l (< s)) \quad (4.2)$$

それらを**ホロノームな拘束条件 (holonomic constraint)** と呼び、そのような系を**ホロノーム系 (holonomic system)** と呼ぶ。一般化座標の間の

関係に帰着できない拘束条件を持つ系を非ホロノーム系 (**nonholonomic system**) と呼ぶ。上に述べた、球面上の質点の系の場合はもちろんホロノーム系である。

非ホロノーム系の典型的な例をあげよう。

半径  $a$  の円盤がその面を鉛直の保ったまま、水平な床を滑らずに転がる。(コインが床を転がることを想像しよう。) 座標として円盤と床の接点  $(x, y)$  と円盤の自転角度  $\phi$ , 円盤の面が  $x$ -軸となす角度  $\theta$  である。滑らないという条件から2個の拘束条件が出てくるはずである。

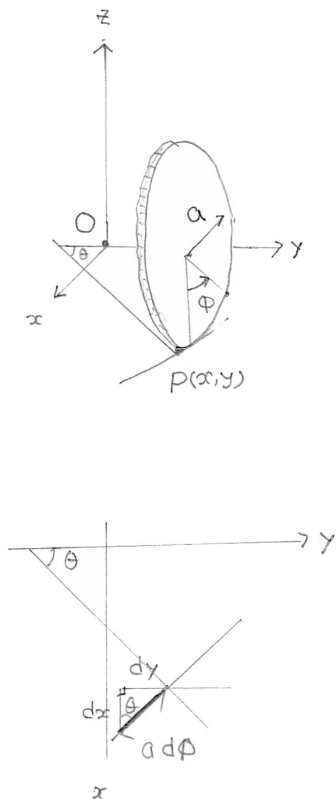


図 4.2 床の上を滑らず自転する円盤

図 4.2 のように座標を設定し、円盤と床の接点を  $P(x, y)$  とおこう。円盤が微小角度  $d\phi$  だけ自転すると、円盤と床の接点は距離  $a d\phi$  だけ移動する。これを  $x, y$  座標で記述して、 $P(x + dx, y + dy)$  に移動するとしよう。

$$dx = a \cos \theta d\phi$$

$$dy = -a \sin \theta d\phi.$$

ただし、 $\theta$  は円盤の面が  $x$ -軸となす角度である。拘束条件は、上の式を  $d\phi$  だけ自転するのにかかった微小時間  $dt$  で割って、

$$\dot{x} = a \cos \theta \dot{\phi}$$

$$\dot{y} = -a \sin \theta \dot{\phi}.$$

左辺が完全微分であるのに対して右辺がそうでないので、これを積分して  $x$  と  $y$  を角度  $(\theta, \phi)$  で表すことはできない。

## §4.1 ラグランジュの未定係数法

(The Method of Lagrange Multiplier)

座標  $q_1, q_2, \dots, q_s$  の間に、拘束条件：

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l(< s)) \quad (4.3)$$

があたえられているとき、すぐ考えつく一つのやり方は  $q_1, q_2, \dots, q_s$  のうち独立な  $s - l$  個の座標  $q_{l+1}, q_2, \dots, q_s$  で、残りの座標  $q_1, q_2, \dots, q_l$  を書いてラグランジャン全体を  $q_{l+1}, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_{l+1}, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$  で書くやり方である。しかし、この方法は、大変面倒であるし、結果のラグランジャンの形は複雑な物になるであろう。次にもっとうまいやり方を述べよう。

ラグランジャンが  $L$  とあたえられるとして、拘束条件が

$$f_i(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, l(< s)) \quad (4.4)$$



であるとして。新たなラグランジャンとして、

$$L' = L + \sum_i^s \lambda_i f_i \quad (4.5)$$

を採用しよう。ここに  $L'$  は  $q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$  の関数であると同時に  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  の関数であることが肝心である。係数  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l(< s)$ ) はラグランジュの未定係数 (**Lagrange undetermined multiplier**) と呼ばれる。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_i^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, l(< s)) \quad (4.7)$$

1 行目は、拘束条件が再現されただけであり、2 行目が本質的な運動方程式である。右辺に新しく現れた第2項は拘束条件のためにあらわれた力であるので、**拘束力 (constraining force)** と呼ばれる。以下の具体例でみるように、それは垂直抗力や張力などとしてあらわれる。係数  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l(< s)$ ) は、運動方程式を解くことにより求められる。

#### 例題 4.1.1

傾斜角  $\theta$  の斜面  $x \sin \theta + y \cos \theta = 0$  を滑り降りる質点の運動をラグランジュ未定係数法で解析せよ。

[ヒント]

図 4.3 のように座標を設定すると、ラグランジャンは  $\lambda$  を未定係数として

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(x \sin \theta + y \cos \theta). \quad (4.8)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m\ddot{x} - \lambda \cdot \sin \theta = 0$$

$$m\ddot{y} + mg - \lambda \cdot \cos \theta = 0$$

$$x \sin \theta + y \cos \theta = 0.$$

これから直ちに、 $\lambda$  が垂直抗力であることがわかる。第3式を2回時間  $t$  で微分して  $m$  を掛けておけば

$$m\ddot{x} \sin \theta + m\ddot{y} \cos \theta = 0. \quad (4.9)$$

これに上の2式を代入して

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot \sin^2 \theta + (\lambda \cdot \cos \theta - mg) \cos \theta \\ &= \lambda - mg \cos \theta \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

すなわち、

$$\lambda = mg \cos \theta \quad (4.11)$$

を得る。

この例でわかるように、ラグランジュの未定係数法を用いると、垂直抗力などの中間的な量を途中で技巧的に考える必要がなく「頭ごなし」に一気に運動方程式を立てることができる。垂直抗力などを考える初等的な方法は、力のベクトルの方向をあらわす矢印を間違ったりしやすいことは、経験したことがあるだろう。

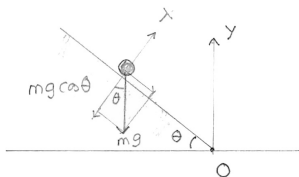


図 4.3 斜面を滑り降りる質点の運動

**例題 4.1.2**

曲線  $y = f(x)$  上に制限された粒子の2次元運動を記述せよ。(重力は無視してよい。)

[ヒント]

ラグランジアンは  $\lambda$  を未定係数として

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \lambda(y - f(x)). \quad (4.12)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m\ddot{x} + \lambda f' = 0$$

$$m\ddot{y} - \lambda = 0$$

$$y = f(x).$$

第3式を時間  $t$  について2回微分すれば、

$$\ddot{y} = \ddot{x}f' + \dot{x}^2f'' \quad (4.13)$$

これに上の2式を代入して

$$\lambda = \frac{m\dot{x}^2f''}{1 + f'^2}. \quad (4.14)$$

これを第1式に代入すると

$$m\ddot{x} + \frac{m\dot{x}^2f''f'}{1 + f'^2} = 0. \quad (4.15)$$

この微分方程式の解き方はやや技術的であるが以下のようにする。まず、 $m\dot{x}$  で両辺を割って、

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} + \frac{\dot{x}f''f'}{1+f'^2} = 0. \quad (4.16)$$

これは、1回積分できて

$$\log(\dot{x}) + \frac{1}{2} \log(1+f'^2) = \text{const.} \quad (4.17)$$

書き換えて

$$\dot{x}\sqrt{1+f'^2} = c \quad (4.18)$$

形式的に積分すると、

$$\int^x \sqrt{1+f'^2} dx = ct \quad (4.19)$$

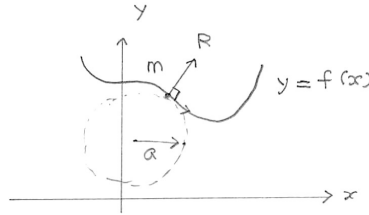
これを、 $x$  について  $t$  の関数として解けばよい。 $y$  は  $y = f(x)$  に上の  $x = x(t)$  を代入すればよい。

抗力を見るために、運動方程式を速度の大きさの2乗  $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2(1+f'^2)$  で書くと

$$m\ddot{x} = -\frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}} \frac{f'}{(1+f'^2)^{1/2}}$$

$$m\ddot{y} = \frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}} \frac{1}{(1+f'^2)^{1/2}}.$$

$\left(-\frac{f'}{(1+f'^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1+f'^2)^{1/2}}\right)$  は曲線  $y = f(x)$  にたいする単位法線ベクトルの成分である事をみれば、 $R = \frac{mv^2 f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$  が曲線  $y = f(x)$  に対する垂直抗力であることがわかる。 $y = f(x)$  を  $x$  の近傍で円  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  で近似しよう。このとき、 $R = -\frac{mv^2}{a}$ 。これは、半径  $a$  の円上を運動するときの遠心力を打ち消す垂直抗力に他ならない。

図 4.4 曲線  $y = f(x)$  上に制限された粒子の 2 次元運動

## §4.2 ラグランジュの未定係数法の正当化

この辺で、ラグランジュの未定係数法を正当化しよう。一般論を展開する前に上の例で、拘束条件： $y = f(x)$  をラグランジャンに直接代入することを実行しよう。

$$\begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \lambda) &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2(1 + f'(x)^2). \end{aligned}$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= m \left( \frac{d}{dt} \right) [\dot{x}(1 + f'(x)^2)] - mf'(x)f''(x)\dot{x}^2 \\ &= m\ddot{x}(1 + f'(x)^2) + mf'(x)f''(x)\dot{x}^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

となり、ラグランジュの未定係数法によるものと一致する。

一般化すると次のようになる。ラグランジャンを一般に

$$L = L(q_1, \dots, q_L, q_{L+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_L, \dot{q}_{L+1}, \dots, \dot{q}_s) \tag{4.21}$$

とし、 $L$  個の拘束条件を解いて、

$$q_k = Q_k(q_{L+1}, q_{L+2}, \dots, q_s) \quad (k = 1, 2, \dots, L) \quad (4.22)$$

と従属変数  $q_k$  ( $k = 1, 2, \dots, L$ ) を独立変数  $q_i$  ( $i = L+1, L+2, \dots, s$ ) で書き表そう。そうすると、ラグランジアンは形式的に

$$\begin{aligned} L'(q_{L+1}, \dots, q_s, \dot{q}_{L+1}, \dots, \dot{q}_s) \\ &= L(Q_1, \dots, Q_L, q_{L+1}, \dots, q_s, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_L, \dot{q}_{L+1}, \dots, \dot{q}_s) \\ &= L(Q_1, \dots, Q_L, q_{L+1}, \dots, q_s, \sum_j \frac{\partial Q_1}{\partial q_j} \dot{q}_j, \dots, \sum_j \frac{\partial Q_L}{\partial q_j} \dot{q}_j, \dot{q}_{L+1}, \dots, \dot{q}_s) \end{aligned}$$

となる。これに対してオイラー・ラグランジュ方程式を立てよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^L \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &\quad - \sum_{k=1}^L \frac{\partial L}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \sum_{j=L+1}^s \sum_{k=1}^L \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \frac{\partial^2 Q_k}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum_{k=1}^L \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &\quad - \sum_{k=1}^L \frac{\partial L}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^L \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_k} \right] \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \end{aligned}$$

一方、ラグランジュの未定係数法によれば、新しいラグランジアンとして

$$L'' = L + \sum_{k=1}^L \lambda_k (Q_k - q_k) \quad (4.23)$$

を考える。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^L \lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} &= 0 \quad (i = L+1, \dots, s) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial L}{\partial Q_k} - \lambda_k &= 0 \quad (k = 1, \dots, L)\end{aligned}$$

となるので、未定係数  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, L$ ) を消去すると、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^L \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial L}{\partial Q_k} \right] \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = 0 \quad (i = L+1, \dots, s) \quad (4.24)$$

となり、(4.20) に一致する。これで、ラグランジュの未定係数法を正当化できたことになる。

#### 例題 4.2.1

質量  $m_1$  の小さい円環に水平に張られた針金に通されていて、円環は針金に沿ってなめらかに滑る。その円環から質量  $m_2$ 、長さ  $l$  の振り子がぶら下がっている。

[ヒント]

$m_1$  の座標を  $(x_1, 0)$ 、 $m_2$  の座標を  $(x_2, y_2)$  と置こう。拘束条件は振り子の糸の長さが  $l$  ということから

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} - l = 0 \quad (4.25)$$

ラグランジアンは  $\lambda$  を未定係数として

$$\begin{aligned}L(x_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \lambda) \\ = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g y_2 + \lambda \left( \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} - l \right).\end{aligned} \quad (4.26)$$

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m_1 \ddot{x}_1 - \lambda \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - \lambda \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}} = 0$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - \lambda \frac{y_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^2}} - m_2 g = 0$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_2^2} - l = 0.$$

糸と鉛直線のなす角度を  $\phi$  とすれば

$$m_1 \ddot{x}_1 - \lambda \sin \phi = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_1 + m_2 l \frac{d^2}{dt^2}(\sin \phi) + \lambda \sin \phi = 0$$

$$m_2 l \frac{d^2}{dt^2}(\cos \phi) + \lambda \cos \phi - m_2 g = 0.$$

微小振動の場合、 $|\phi| \ll 1$ ,  $\sin \phi \approx \phi$  を用いて、運動方程式を簡単化すれば

$$m_1 \ddot{x}_1 - \lambda \phi = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_1 + m_2 l \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \lambda \phi = 0$$

$$\lambda = m_2 g.$$

$x_1$  を消去すれば

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l} \phi = 0. \quad (4.27)$$

解は

$$\phi = A \sin(\omega t + \delta) \quad (4.28)$$



ここに、角振動数  $\omega$  は

$$\omega = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l}}. \quad (4.29)$$

$\phi$  の解を

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_2 g \phi = 0. \quad (4.30)$$

に代入して積分すれば、

$$x_1 = vt + x_1(0) - \frac{m_2 A g}{m_1 \omega^2} \sin(\omega t + \delta) \quad (4.31)$$

$$= vt + x_1(0) - \frac{m_2 A l}{m_1 + m_2} \sin(\omega t + \delta). \quad (4.32)$$

これは円環の等速運動がぶら下げられた振り子の反作用をうけて変化していく様子を示している。

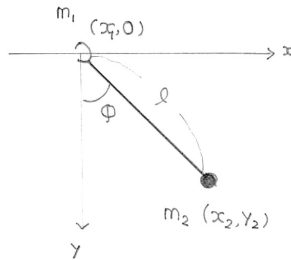


図 4.5 振り子付き円環の運動

### §4.3 撃力 (Impact)

ラグランジュの未定係数を拡張して、拘束条件として不等式も含めてみよう。簡単な例として、垂直に落下して床に衝突しはね上がる問題を考えよう。床に垂直に上向きに  $y$  軸を取ろう。ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy + \lambda\theta(-y) \quad (4.33)$$

としよう。ただし、 $\theta(x)$  は階段関数で、

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

と定義される。

ラグランジアンを  $\lambda$  について変分すると、 $\theta(-y) = 0$  すなわち、質点が床の上方にあるという条件： $y \geq 0$  を得る。 $y$  に関する変分から、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + mg + \lambda\delta(y) = 0 \quad (4.34)$$

両辺に  $\dot{y}$  を掛けて、衝突時刻  $t = 0$  前後の微小区間、 $(-\epsilon, \epsilon)$  について積分しよう。

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \dot{y}(m\ddot{y} + mg + \lambda\delta(y))dt = \left[ \frac{m\dot{y}^2}{2} \right]_{-\epsilon}^{\epsilon} + \lambda [\theta(-y)]_{y(-\epsilon)}^{y(\epsilon)} = 0 \quad (4.35)$$

$\epsilon \rightarrow 0$  の極限を取ると、エネルギー保存則：

$$\frac{m v_f^2}{2} = \frac{m v_i^2}{2} \quad (4.36)$$

を得る。運動方程式 4.34 の最後の項は、床の位置  $y = 0$  でのみ働く撃力である。この方程式を解こう。衝突時刻を  $t = 0$  とし、その時刻の速度を  $-v$  としよう。 $t < 0$  では、

$$y = -vt - \frac{gt^2}{2} \quad (4.37)$$

$$v_f^2 = v_i^2 = v^2 \quad (4.38)$$

したがって、 $v_f = v$ 。これを考慮に入れば  $t > 0$  では

$$y = vt - \frac{gt^2}{2} \quad (4.39)$$

と求められる。

したがって、

$$m\ddot{y} + mg = -2mv\delta(t) = -\lambda\delta(y) \quad (4.40)$$

これから、

$$\lambda = 2mv^2 \quad (4.41)$$

を得る。したがって撃力は

$$F = 2mv\delta(t) \quad (4.42)$$

と書いて、確かに

$$I = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} F dt = mv - (-mv) = \text{運動量の変化} \quad (4.43)$$

になっている。

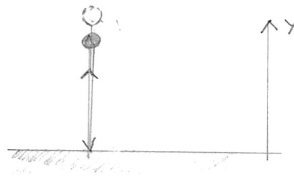


図 4.6 撃力

## §4.4 ダランベール・ラグランジュの原理

(d'Alembert-Lagrange's Principle)

拘束力を導入して、運動方程式を

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = R_i \quad (4.44)$$

と書こう。

拘束面に接する方向の微小変位を  $\delta \xi^i$  としたときに、ダランベール・ラグランジュの原理とは、拘束力が仕事をしない

$$\sum_i R_i \delta \xi^i = 0 \quad (4.45)$$

ことである。

これを作用原理から導いてみよう。作用  $S$  が拘束面に接する方向の微小変位  $q^i \rightarrow q^i + \delta \xi^i$  に対して不変であることから、

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] \delta \xi^i \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i R_i \delta \xi^i \end{aligned} \quad (4.46)$$

これが成立するためには全ての時間に対して

$$\sum_i R_i \delta \xi^i = 0 \quad (4.47)$$

が成り立たなくてはならない。

ダランベール・ラグランジュの原理とラグランジュの未定係数法の関係を考えよう。拘束条件：

$$f_a(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, l (< s)) \quad (4.48)$$

を配位空間の中の超曲面と見なそう。拘束条件の交わりに運動が制限されている。この時、超曲面に対する法線方向はベクトル

$$v_i^a = \frac{\partial f^a}{\partial q_i} \quad (4.49)$$

で表される。ラグランジュの未定係数法では拘束力が

$$\sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_i} = \sum_a \lambda_a v_i^a \quad (4.50)$$

であらわされるので、超曲面内の変位と直交するからダランベール・ラグランジュの原理と一致する。

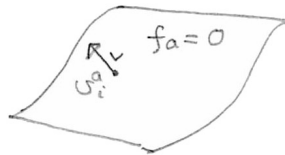


図 4.7 ラグランジュの未定係数法とダランベール・ラグランジュの原理

## 第5章

# 電磁場中の荷電粒子の運動

今までは、ラグランジャンが運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差の形をしているものを扱ってきたが、いつもそうであるわけではない。

この節では電磁場中の質量  $m$ 、電荷  $e$  の荷電粒子の電磁場中の運動を取り上げよう。運動方程式はローレンツ力の式であるが、それをあたえるラグランジャンはどうなるのだろうか？ まず、結論を述べて、理由付けをあとに述べよう。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (5.1)$$

ここに、 $\phi$  と  $\mathbf{A}$  はおのおのスカラーポテンシャルとベクターポテンシャルである。それらは場であるので時間座標  $t$  と空間座標  $\mathbf{r}$  の関数であるが、上の標識の中では空間座標  $\mathbf{r}$  に粒子の位置座標が代入されているものと了解する。電場と磁場はスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクターポテンシャル  $\mathbf{A}$  を用いて

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.3)$$

と書ける。

上記のラグランジャン (5.1) の理由付けを述べる。遅い粒子に対しては、ラグランジャンを速度  $\dot{\mathbf{r}}$  についてテーラー展開して、2次の項までに止めるとしよう。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = L^{(0)}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{r}} \cdot L^{(1)}(\mathbf{r}) + \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} L^{(2)} + \dots \quad (5.4)$$

ここで、 $L^{(0)}(\mathbf{r}) = -e\phi(\mathbf{r})$ 、 $L^{(1)}(\mathbf{r}) = e\mathbf{A}$ 、 $L^{(2)} = m$  と置いた。それぞれの物理的意味は、以下に述べるように、運動方程式を立てると明らかになる。

オイラー・ラグランジュ方程式は式変形を続けていくと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} &= m\ddot{r}_i + e \left[ \frac{dA_i}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \sum_j \dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] \\ &= m\ddot{r}_i + e \left[ \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \dot{r}_j \frac{\partial A_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \sum_j \dot{r}_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right] \\ &= m\ddot{r}_i + e \left[ \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r_i} + \sum_j \dot{r}_j \left( \frac{\partial A_i}{\partial r_j} - \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \right) \right] \\ &= m\ddot{r}_i + e \left[ \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial r_i} - (\dot{\mathbf{r}} \times \text{rot } \mathbf{A})_i \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがって、ローレンツ力の式を得る。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}]. \quad (5.5)$$

すなわち、荷電粒子には電場の方向に力を受けると同時に、磁場と速度に直交する方向にも力が働く。ここで、興味深いことに、運動方程式には電場と磁場があらわれて、スカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  があらわに現れることはないのに、ラグランジャンには現れる。量子力学に移行すると、これはスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルなしには、荷電粒子の量子力学を記述できないことになる。

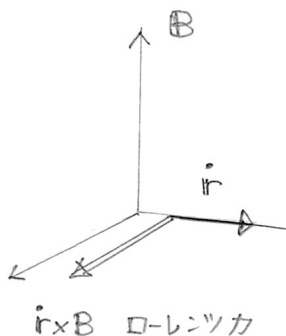


図 5.1 ローレンツ力

以上は、最小作用の原理からローレンツ力の式を導くことであったがいくつかの興味ある特殊な場合について運動方程式の解を調べてみよう。

### 例題 5.0.1

時間的に一定で一様な磁場中の荷電粒子の運動を解け。

[ヒント]

ローレンツ力の式：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}. \quad (5.6)$$

において、磁束密度  $\mathbf{B}$  を  $z$  軸に平行に選び、 $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  と書くと、

$$m\dot{v}_x = eBv_y,$$

$$m\dot{v}_y = -eBv_x,$$

$$m\dot{v}_z = 0.$$

この種の方程式の解き方の常套手段として、第 1 式と第 2 式に虚



数単位  $i$  を掛けたものを辺べん足す。 $\mathbf{v} = v_x + iv_y$  と置くと、

$$m\dot{\mathbf{v}} = -ieB\mathbf{v}. \quad (5.7)$$

これは直ちに積分できて、

$$\mathbf{v} = \exp[-i\omega t]\mathbf{v}_0. \quad (5.8)$$

ただし、ここに

$$\omega = \frac{eB}{m} \quad (5.9)$$

はラーマー振動数 (**Larmor frequency**) と呼ばれる。

簡単のために初速度を  $x$  方向にとって置けば、上の式の実部と虚部を取るにより

$$v_x = v_0 \cos \omega t$$

$$v_y = -v_0 \sin \omega t$$

$$v_z = \text{const.}$$

これをもう一回積分すれば

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + y_0$$

$$z = v_z t + z_0.$$

したがって、 $z$  方向には等速運動をして、 $x, y$  方向には  $(x_0, y_0)$  を中心とした半径  $\frac{v_0}{\omega}$  の円運動を行う。

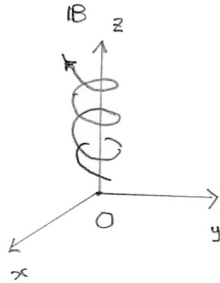


図 5.2 時間的に一定で一様な磁場中の荷電粒子の運動

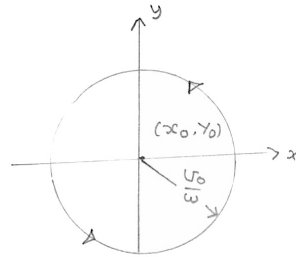


図 5.3  $xy$  方向は円運動

### 例題 5.0.2

時間的に一定で一様な磁束密度  $B$  が  $z$  軸方向に向いており、電場  $E$  が  $y$  方向に向いている。この中の荷電粒子の運動を解け。

[ヒント]

$z$  方向は前題から等速運動であることはわかっているので、 $x, y$  方向の運動だけ考えよう。運動方程式は

$$m\dot{v}_x = eBv_y + eE,$$

$$m\dot{v}_y = -eBv_x.$$

$v = v_x + iv_y$  に対しては、

$$m\dot{v} = -ieBv + eE. \quad (5.10)$$

この解は

$$v = \exp[-i\omega t] \left( \frac{eE}{m} \int_0^t \exp[i\omega t'] dt' + v_0 \right). \quad (5.11)$$

この実部と虚部を取って、

$$v_x = v_0 \cos \omega t + \frac{eE}{m\omega} \sin \omega t$$

$$v_y = -v_0 \sin \omega t - \frac{eE}{m\omega} + \frac{eE}{m\omega} \cos \omega t.$$

興味深いことに、 $x$  方向に電場をかけたにも関わらず、 $y$  方向に  $-\frac{eE}{m\omega}$  の一定の速度でドリフトしていく。上の式を時間  $t$  について積分すれば、

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{eE}{m\omega^2} \cos \omega t + x_0$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t + \frac{eE}{m\omega^2} \sin \omega t - \frac{eE}{m\omega} t + y_0.$$

上の式において  $t$  を消去して得られる軌跡の方程式は

$$(x - x_0)^2 + \left( y - y_0 + \frac{eE}{m\omega} t \right)^2 = \left( \frac{m}{eB} \right)^2 \left( v_0^2 + \frac{E^2}{B^2} \right) \quad (5.12)$$

となり、これは中心が  $y$  軸方向に速度  $-\frac{eE}{m\omega}$  で運動する円である。

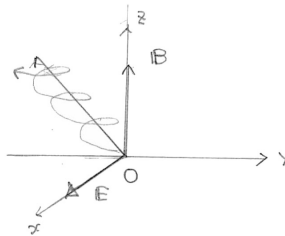


図 5.4 時間的に一定で一様な磁場・電場中の荷電粒子の運動

## §5.1 電磁場中の相対論的荷電粒子の運動

以上を相対論的にすることは容易である。ラグランジヤンの運動エネルギーの部分相対論的なものに置き換えて、

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (5.13)$$

を得る。

ローレンツ変換に対する不変性を見るには作用の不変性を見れば十分である。作用  $S = \int L dt$  は

$$S = \int L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) dt \quad (5.14)$$

$$= \int \left[ -mc \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2} - e \left( \frac{\phi}{c} cdt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \right) \right]. \quad (5.15)$$

と、書いておこう。これがローレンツ変換に対して不変であることは次のようにしてみることができる。まえに見たように、時間と空間に関するローレンツ変換： $(dt, dx, dy, dz) \rightarrow (dt', dx', dy', dz')$

$$cdt' = \frac{cdt - \frac{v}{c} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx' = \frac{dx - \frac{v}{c} cdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

に対して、世界間隔  $(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2$  は不変なので、作用のうち運動エネルギーの項は不変である。スカラーポテンシャル  $\frac{\phi}{c}$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  がローレンツ変換に対して  $cdt$  と  $d\mathbf{r}$  と同様に変換するならば、作

用の表式の中の  $\frac{\Phi}{c}cdt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$  も不変である。したがって、作用全体もローレンツ変換に対して不変である。上に仮定したスカラーポテンシャル  $\frac{\Phi}{c}$  とベクトルポテンシャルの変換性は電磁場自身の力学がローレンツ変換に対して不変であることを示してはじめて正当化されるが、それは本書の範囲を超えるので述べないで、結果を受け入れることにしよう。

$$\frac{\Phi'}{c} = \frac{\frac{\Phi}{c} - \frac{v}{c}A_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c}\frac{\Phi}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$A'_y = A_y$$

$$A'_z = A_z$$

ローレンツ力の式は、オイラー・ラグランジュ方程式から

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}} \right) = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}). \quad (5.16)$$

と書ける。

### 例題 5.1.1

時間的に一定で一様な電場中の荷電粒子の相対論的運動を解け。

[ヒント]

ローレンツ力の式

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}} \right) = e\mathbf{E} \quad (5.17)$$

を積分して

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{1 - (\dot{\mathbf{r}}/c)^2}} = \frac{e\mathbf{E}}{m}t. \quad (5.18)$$

電場  $\mathbf{E}$  が  $x$  軸の方向にあるとしよう。その場合に上の方程式を初速度をゼロとして解いて速度

$$\dot{x} = c \frac{\frac{eEt}{m}}{\sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{m}\right)^2}} \quad (5.19)$$

を得る。粒子は加速されて、その速度は時間とともに増大して光速に限りなく近づく。上の式をさらに積分すれば、

$$x = \frac{cm}{eE} \sqrt{1 + \left(\frac{eEt}{m}\right)^2}. \quad (5.20)$$

荷電粒子の世界線は  $x = \pm ct$  を漸近線とする双曲線である。

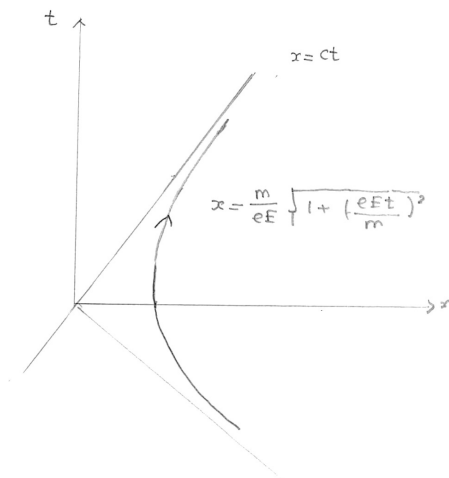


図 5.5 荷電粒子の世界線は  $x = \pm ct$  を漸近線とする双曲線である



## 第6章

# 時間的に変化する外力と摩擦のある場合の質点の運動

外力  $f(t)$  のもとでの、質点の一次元的運動を考えよう。質点の座標を  $x$  とすると、運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial x} = f(t) \quad (6.1)$$

と書けるだろう。この運動方程式を再現するようなラグランジャンを書くと、

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) + xf(t) \quad (6.2)$$

最後の項  $xf(t)$  が外力の効果をあらわす。

さらに速度に比例する摩擦力がはたらく場合には、運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = f(t) \quad (6.3)$$

と書ける。この運動方程式を再現するようなラグランジャンを書くと、

$$L = e^{\gamma t} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) + xf(t) \right] \quad (6.4)$$

となる。

上の二つの例では、ラグランジャンがあらわに時間によるので、エネルギーは保存しない。



特別な場合として、摩擦力が働いて外力が周期的 ( $f(t) = F \cdot \sin(\Omega t)$ ) な場合に運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = F \cdot \cos(\Omega t) \quad (6.5)$$

となる。

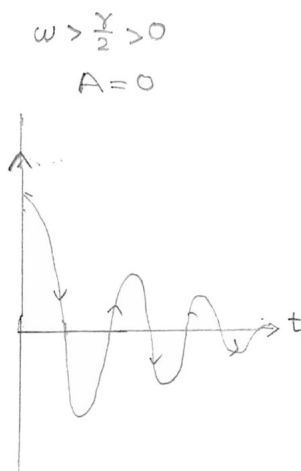


図 6.1 減衰振動

この線形微分方程式の解き方は典型的であるので、少し丁寧に述べよう。

まず、上の方程式の特解が一つ求まったとしよう。外力がない場合の斉次方程式：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = 0 \quad (6.6)$$

の一般解  $x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [A \sin \omega' t + B \cos \omega' t]$  ( $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ ) と特解の和は明らかにうえの微分方程式の解である。さらに任意定数を2個 (A と B) を含んでいるので、一般解でもある。特解を求めるために、C を後

で決める複素定数として

$$x = \Re (C e^{i\Omega t}) \quad (6.7)$$

と置くと、微分方程式からは  $C$  に対する代数方程式：

$$(-m\Omega^2 + mi\gamma\Omega + m\omega^2)C = F \quad (6.8)$$

を得る。これから

$$C = \frac{F}{m(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega^2)} \quad (6.9)$$

だから、特解

$$\begin{aligned} x_s &= \Re \left( \frac{F e^{i\Omega t}}{m(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega^2)} \right) \\ &= \frac{F}{m} \left[ \frac{(\omega^2 - \Omega^2) \cos \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} + \frac{\gamma \Omega \sin \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \right] \end{aligned}$$

が求まる。したがって、一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega' t + B \cos \omega' t + x_s \\ &= A \sin \omega' t + B \cos \omega' t \\ &\quad + \frac{F}{m} \left[ \frac{(\omega^2 - \Omega^2) \cos \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} + \frac{\gamma \Omega \sin \Omega t}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \right] \end{aligned}$$

となる。

ここで、この系の特徴を見るために、質点のはじめ平衡の位置に静止していたものとしよう。すなわち、初期条件として  $x = \dot{x} = 0$ ,  $t = 0$  を取り、周期的な外力の影響でどうなるかを見よう。初期条件から、

$$B = -\frac{F}{m} \frac{(\omega^2 - \Omega^2)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2}, \quad A = -\frac{F}{m\omega'} \frac{\gamma \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \quad (6.10)$$

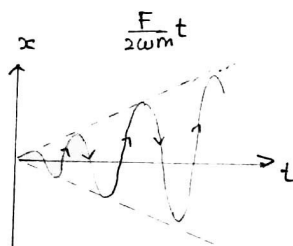


図 6.2 質点がはじめ平衡の位置に静止していた場合

を得るので、それを一般解の公式に代入して、

$$x(t) = \frac{F}{m} \left[ \frac{(\omega^2 - \Omega^2)(\cos \Omega t - \cos \omega' t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} + \frac{\gamma \Omega (\sin \Omega t - \frac{\Omega}{\omega'} \sin \omega' t)}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2 \Omega^2} \right] \quad (6.11)$$

を得る。

摩擦が小さいとき、すなわち  $\omega, \Omega \gg \gamma$  で上の式は

$$x(t) \approx \frac{F}{m} \left[ \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\omega^2 - \Omega^2} \right] \quad (6.12)$$

さらに外力の振動数が固有振動数に近いとき、 $\Omega = \omega + \Delta$ ,  $|\Delta| \ll \omega$  のときには、

$$x(t) \approx \frac{Ft \sin \omega t}{2\omega m} \quad (6.13)$$

となり、振幅を増幅させながら振動する。これを共鳴 (**resonance**) という。

非保存系のラグランジアンとして興味ある例として、運動摩擦係数  $\mu$  を持つ摩擦の働く床の上を運動する物体の運動がある。運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + mg\mu \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (6.14)$$

第2項は摩擦についてのクーロンの法則 (**Coulomb's law**) として知られている。

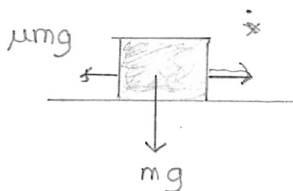


図 6.3 摩擦の働く床の上を運動する物体の運動

ここに、 $\hat{x}$  は  $x$  方向の単位ベクトル、 $\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$  である。この運動方程式を再現するようなラグランジアンを書くと、

$$L = \frac{m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}{2} - V(x) + mg\mu \left| \frac{dx}{dt} \right| t \quad (6.15)$$

となる。



## 第7章

# 質点系の力学

今まで、主にあたえられたポテンシャル中の一個の質点の力学を調べてきたが、この章では複数あるいは多数の質点の系を調べよう。その中では、質点個々の運動を詳細に調べるよりも、複数の質点の系に特徴的なことに着目して議論しよう。

### §7.1 重心系、換算質量

2 質点に力が働いている。2 質点全体の運動と相対的な運動に分けて考えよう。質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$  とし、

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (7.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (7.2)$$

2 式の右辺の符号が反対になっているのは作用反作用の法則をあらわす。

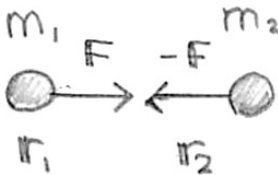


図 7.1 2 質点の運動

第1式と第2式を辺べん足して

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = 0. \quad (7.3)$$

これを積分して

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \text{const.} \quad (7.4)$$

2質点全体の運動を記述するために、2質点の重心座標を

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.5)$$

と定義すれば、重心座標は等速運動することがわかる。

第1式点に  $m_2$  を掛けて第2式に  $m_1$  を掛けて辺べん足すと、

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (7.6)$$

換算質量  $\mu$  を

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (7.7)$$

と定義し、相対座標を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  と定義すれば相対座標  $\mathbf{r}$  に対する運動方程式は

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (7.8)$$

となる。これは外力の働かない相互の力だけが働くような2質点の運動を、換算質量をもつ1質点と等価な運動に帰着する。

## §7.2 重心系、換算質量—ラグランジャン

上に述べたことと同じ内容をラグランジャンで見よう。 $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  を力  $\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  をあたえるポテンシャルとして、ラグランジャンは

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (7.9)$$

ここで、重心座標  $\mathbf{R}$  と相対座標  $\mathbf{r}$  を次のように定義する。

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.10)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (7.11)$$

これを、各粒子の座標  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  について解けば、

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (7.13)$$

を得る。これをラグランジャンに代入して、重心座標と相対座標で全て書き表そう。

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}). \quad (7.14)$$

ここに、 $M = m_1 + m_2$  は全質量で、 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  は換算質量である。このラグランジャンのなかには重心の位置座標に依存するポテンシャルの項がないので、重心は自由運動し、相対座標だけが自明でない動きをする。これは、例えば2原子分子全体は自由粒子のように等速運動するが、相対的には振動している場合を記述している。

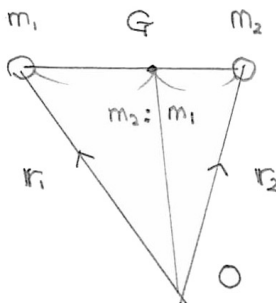


図 7.2 重心系からみた 2 質点の運動



この結果は、重心の周りを2質点が運動することを意味する。一例として惑星の太陽の周りの運動を考えよう。太陽質量が惑星の質量に比べて大きいので、太陽はほとんど動かないが実は重心の周りを楕円運動している。

このことを確かめるために、重心  $G$  の座標を  $\mathbf{R} = 0$  すなわち原点に選ぼう。 $m_2 \gg m_1$  の極限で、 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}$  だから、太陽の運動は惑星の軌道を  $\frac{m_1}{m_2}$  倍縮小して鏡映したものになっている。

このことは、系外惑星系を探すことに利用されている。われわれの太陽系以外に惑星があるだろうか、という疑問は昔からあったが、最近 4000 個ほどの系外惑星が見つかっている。系外の場合に直接観測できるのは恒星だけで、惑星がたとえあっても直接観測することは今のところできない。恒星の重心の周りのわずかな運動から惑星の存在を推定するのである。恒星からの光のドップラーシフトを精密観測をすることにより、恒星の速度がわかり、それから惑星の速度がわかる。後はケプラーの法則から惑星と恒星の軌道もわかる。

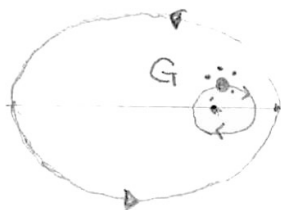


図 7.3 重心  $G$  を原点とする ( $\mathbf{R} = 0$ )。  $m_2 \gg m_1$  で  $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_2 \approx -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{r}$  だから、惑星の軌道を  $\frac{m_1}{m_2}$  倍縮小して鏡うつしになったものである。

重心運動と相対運動の分離は 3 個以上の多体になっても成立する。

## §7.3 重心——一般の場合

N個の質点に対するラグランジアンを

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 - \sum_{i>j}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (7.15)$$

ただし、 $\mathbf{r}_i$  は  $i$  番目の粒子のデカルト座標でありポテンシャル  $V$  は粒子の相対座標にのみ依存する。

重心座標を

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} \quad (7.16)$$

と書いて、

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \tilde{\mathbf{r}}_i \quad (7.17)$$

と置くと、

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \dot{\mathbf{R}} \cdot \sum m_i \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left( \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{dt} \right)^2 - \sum_{i>j}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (7.18)$$

となる。定義から  $\sum m_i \tilde{\mathbf{r}}_i = 0$  なので、結局

$$L = \frac{M\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left( \frac{d\tilde{\mathbf{r}}_i}{dt} \right)^2 - \sum_{i>j}^N V(\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j) \quad (7.19)$$

ただし、 $M$  は全質量で、

$$M = \sum m_i. \quad (7.20)$$

## §7.4 微小振動

自然界には、2質点がほぼ平衡の位置を保ちながら、その近傍でわずかに振動している場合が数多くみられる。例としては、酸素分子のような2原子分子などがあげられる。前に、換算質量のところで示したように、このような2質点の運動は重心運動と相対運動に分離できる。

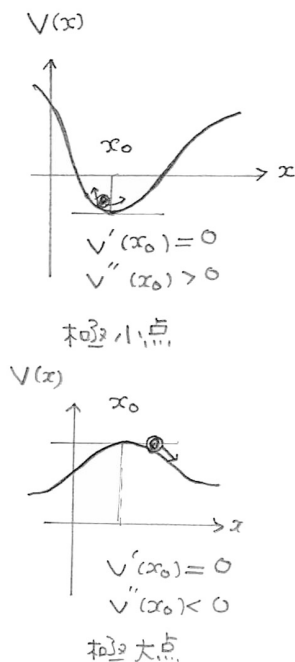


図7.4 1次元の微小振動

簡単のため、一次元の運動を考えよう。換算質量を  $m$ 、相対位置座標を  $x$  とし、ポテンシャルを  $V(x)$  として、ラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x). \quad (7.21)$$

ポテンシャル  $V(x)$  が、 $x = x_0$  に極小値を持つ場合を考えよう。その極小点の近傍の微小振動を考えて、(図 7.4 参照)  $x = x_0$  の周りにテイラー展開をして 2 次まで残そう。

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots \quad (7.22)$$

定数項  $V(x_0)$  は作用原理においてはどうしてもよいのでゼロと置いて座標原点を適当にずらして一般性を失うことなく  $x_0 = 0$  と置き、 $V''(x_0)$  を  $m\omega^2$  と書くと、ラグランジアンは近似的に

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (7.23)$$

になる。このラグランジアンからオイラー・ラグランジュ方程式を立てると単振動の運動を与える。

$$m\ddot{x} + m\omega^2x = 0. \quad (7.24)$$

ここで、 $x = x_0$  がポテンシャル  $V(x)$  の極大値の場合には、 $V''(x_0) < 0$  すなわち、 $\omega^2 < 0$  となり、角振動数  $\omega$  は純虚数となる。そのとき運動方程式の解は、 $Ae^{|\omega|t} + Be^{-|\omega|t}$  となり、 $A \neq 0$  であるかぎり、指数関数的に増大する。これは、 $x = x_0$  がポテンシャルの極大という不安定点にあり、解はそこから転がり落ちる。図 7.4 に安定点と不安定点の例を示す。

#### 例題 7.4.1

##### [X 振子]

精密器具を外界の振動から防ぐ方法の一つとして、器具全体を吊すやり方があり、重力波検出器の防振に用いられている。吊された器具を振り子と見なしたときに、その周期を十分長く取れば、外界の振動は器具まで伝わらない。単純には吊す糸を長くすればよいが、スペースが必要なので得策ではない。以下に述べる X 振子は、コンパクトな装置で実現できる長周期の振り子である。

質量  $M$  長さ  $a$  の一様な棒の両端から長さ  $l$  の糸を交差させて、図 7.5 のように巾  $a$  で天井から吊す。解析を簡単にするために、運動は鉛直面内に限るとする。棒が水平線となす角度を  $\theta$  とし、その重心の座標を  $(X, Y)$  とする。棒の運動を調べ、振動の周期が長くなる場合を述べよ。

[ヒント]

棒の両端の座標を、 $(X, Y)$  と  $\theta$  で表すと、 $(X + \frac{a}{2} \cos \theta, Y + \frac{a}{2} \sin \theta)$ 、 $(X - \frac{a}{2} \cos \theta, Y - \frac{a}{2} \sin \theta)$  となる。2本の糸の長さが  $l$  であることから、

$$\left(X + \frac{a}{2} \cos \theta + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(Y + \frac{a}{2} \sin \theta\right)^2 = l^2$$

$$\left(X - \frac{a}{2} \cos \theta - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{a}{2} \sin \theta\right)^2 = l^2$$

を得る。上の2式から  $(X, Y)$  を  $\theta$  の関数として求めると、

$$X = \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - a^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$Y = -\sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - a^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}$$

となる。

重力によるポテンシャルエネルギー  $V(\theta)$  は重力加速度を  $g$  として、

$$V(\theta) = MgY = -Mg \sqrt{l^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - a^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (7.25)$$

振れの角度  $\theta$  が 1 に比べて小さいときは、上の表式を  $\cos \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta^2}{8} + \dots$  を用いて、 $\theta$  の 2 次までで近似できるだろう。結果

をまとめると、

$$V(\theta) \approx \text{const.} + Mg \frac{l^2 - 2a^2}{8\sqrt{l^2 - a^2}} \theta^2 + \dots \quad (7.26)$$

このポテンシャルは、 $l > \sqrt{2}a$  の場合に、原点で下に凸で安定であるが、 $l < \sqrt{2}a$  の場合には上に凸で不安定になる。安定点は  $\theta = \pm \text{Cos}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}a}$  に移る。ちょうど  $l = \sqrt{2}a$  の場合には、 $V(\theta) \approx \text{const.} + \frac{Mga\theta^4}{32} + \dots$  となり、安定である。このように、外的なパラメータの変化によって安定点の位置が変化することはしばしば見られる。

運動エネルギーは、重心の並進の運動エネルギー  $T_G$  と重心のまわりの回転エネルギー  $T_R$  の和である。 $\theta$  が小さい場合は

$$T_G = \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \approx \frac{Mh^2 \dot{\theta}^2}{8}$$

$$T_R = \frac{I \dot{\theta}^2}{2} = \frac{Ma^2 \dot{\theta}^2}{24}.$$

ここに、 $h = \sqrt{l^2 - a^2}$  は静止の位置の棒の天井からの距離であり、 $I = \frac{Ma^2}{12}$  は棒の重心のまわりの慣性モーメントである。

ラグランジアンは、 $\theta$  が 1 に比べて小さいときに

$$L = \left( \frac{Mh^2}{8} + \frac{Ma^2}{24} \right) \dot{\theta}^2 - Mg \frac{l^2 - 2a^2}{8\sqrt{l^2 - a^2}} \theta^2 \quad (7.27)$$

となる。

周期  $T$  は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{h^2}{8} + \frac{a^2}{24}}{g \frac{l^2 - 2a^2}{8\sqrt{l^2 - a^2}}}}. \quad (7.28)$$

したがって、糸の長さを  $l = \sqrt{2}a$  よりほんの少し長く取っておけば長周期の振り子が得られる。

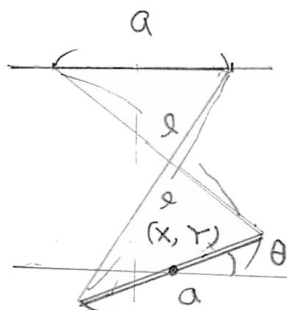


図 7.5 X 振り子

## §7.5 基準振動—CO<sub>2</sub> の例

2 酸化炭素 (CO<sub>2</sub>) のような直線状に並んでいる左右対称な 3 原子分子の平衡点の近傍の振動を考えよう。並んでいる方向を  $x$  軸にとろう。原子 1 (質量  $m_A$ )、2 (質量  $m_B$ )、3 (質量  $m_A$ ) の  $x$  座標をそれぞれ  $x_1, x_2, x_3$  としよう。ポテンシャルは位置座標の差の 2 次であると考えるとラグランジアンは

$$L = \frac{m_A}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2]. \quad (7.29)$$

と書けるだろう。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$m_A\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \quad \dots\dots \text{左} \quad (7.30)$$

$$m_B\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0 \quad \dots\dots \text{中} \quad (7.31)$$

$$m_A\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0 \quad \dots\dots \text{右} \quad (7.32)$$

と書き下せる。3 式を辺べん足すと

$$m_A\ddot{x}_1 + m_B\ddot{x}_2 + m_A\ddot{x}_3 = 0. \quad (7.33)$$

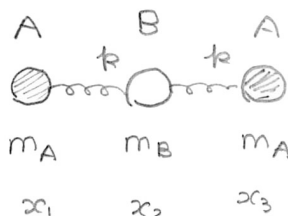


図 7.6 直線上に並んでいる左右対称な 3 原子分子の平衡点近傍の振動

一回積分して

$$m_A \dot{x}_1 + m_B \dot{x}_2 + m_A \dot{x}_3 = \text{const.} \quad (7.34)$$

これは重心が等速運動をすることを示しているが、われわれは 3 原子分子全体の運動に興味がないので慣性系を適当に選ぶことにより右边を 0 と置こう。もう一度積分して、

$$m_A x_1 + m_B x_2 + m_A x_3 = \text{const.} \quad (7.35)$$

これも、座標原点を適当に選んで右边をゼロとしよう。

この系の自由度は 3 であり、そのうちの一つは重心の位置であり、上に述べたように原点に選んだ。残りの 2 個は分子間の相対座標であるが、いろいろな選びかたがあり一意的ではない。うまく選ぶと、連動した振動運動の記述が簡単になり、見通しが良くなる。

$$Q_a = x_1 + x_3, \quad (7.36)$$

$$Q_s = x_1 - x_3. \quad (7.37)$$

と置くと、

$$x_1 = (Q_a + Q_s)/2, \quad (7.38)$$

$$x_3 = (Q_a - Q_s)/2, \quad (7.39)$$

$$x_2 = -\frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) = -\frac{m_A}{m_B}Q_a. \quad (7.40)$$



運動方程式のうち、一本は重心運動の情報を与えるはずなのでそれを第2の方程式と考え、第1(「左」)と第3(「右」)の方程式を振動運動を記述するものとしよう。その2式を辺べん引いたものと足したものを書けば、

$$m_A \ddot{Q}_s + k Q_s = 0, \quad (7.41)$$

$$m_A \ddot{Q}_a + k \frac{2m_A + m_B}{m_B} Q_a = 0 \quad (7.42)$$

これから直ちに2つの角振動数

$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{m_A}} \quad (7.43)$$

$$\omega_a = \sqrt{k \frac{2m_A + m_B}{m_A m_B}} \quad (7.44)$$

の単振動を得る。

$Q_a$  は下の図 7.7 に示すように、それぞれ両端の原子が反対方向に運動し真ん中の原子が停止しているものである。一方、 $Q_s$  の運動は両端の原子が同一方向に運動し、真ん中の原子がそれらと反対方向に動くするものと解される。このように、特徴的な角振動数を持ち単振動をする座標を基準モード (normal mode) と呼びその運動を基準振動 (normal vibration) と呼ぶ。ここで、エネルギーの担い手が個々の粒子ではなくて基準モードという集団的な運動であるという見方が重要である。

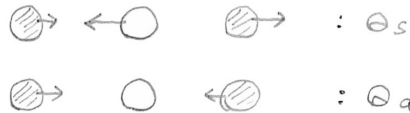


図 7.7 基準モード

これをラグランジャンレベルで考えてみよう。ラグランジャン

$$L = \frac{m_A}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m_B}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2]. \quad (7.45)$$

を  $Q_a$  と  $Q_s$  で書き表そう。

$$x_1 = (Q_a + Q_s)/2, \quad (7.46)$$

$$x_3 = (Q_a - Q_s)/2, \quad (7.47)$$

$$x_2 = -\frac{m_A}{m_B}(x_1 + x_3) = -\frac{m_A}{m_B}Q_a. \quad (7.48)$$

をラグランジヤンの表式に代入して

$$L = \frac{Mm_A}{4m_B}(\dot{Q}_a)^2 + \frac{m_A}{4}(\dot{Q}_s)^2 - \frac{kM^2}{4m_B^2}Q_a^2 - \frac{k}{4}Q_s^2. \quad (7.49)$$

運動エネルギーもポテンシャルエネルギーも平方の完成ができていることに注意しよう。ただし、 $M = 2m_A + m_B$  は  $\text{CO}_2$  分子の全質量である。

## §7.6 基準振動——一般の場合

多数の粒子が平衡点の近傍を微小振動している場合を一般的に考察するために一般化座標  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) とその速度  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) について2次式の形をしているラグランジヤンを考えよう。 $m_{ij}, v_{ij}$  を係数として

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s m_{ij} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s v_{ij} q_i q_j \quad (7.50)$$

ここで係数  $m_{ij}, v_{ij}$  は一般性を失うことなく、添字  $i, j$  について対称： $m_{ij} = m_{ji}$   $v_{ij} = v_{ji}$  と仮定してよい。 $m_{ij}, v_{ij}$  を要素とする行列を  $M, V$ 、座標  $q_i$  を要素とする縦ベクトルを  $q$

$$M = (m_{ij}) \quad (7.51)$$

$$V = (v_{ij}) \quad (7.52)$$

$$q = (q_i). \quad (7.53)$$

と書き、ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^t M \frac{dq}{dt} - \frac{1}{2} {}^t(q) V q \quad (7.54)$$

と書き直そう。このコンパクトな書き方だと運動方程式は

$$M \frac{d^2 q}{dt^2} + V q = 0. \quad (7.55)$$

となる。ここで、左肩に  $t$  をつけたものは、転置をしたものをあらわす。

この段階でラグランジアンは一般には  $s$  個の変数  $q_i$  の絡んだ運動を記述している。これから行おうとすることは、 $q_i$  を  $s$  個の新たな座標  $\xi_a$  ( $a = 1, 2, \dots, s$ ) の適当な線形結合で表わし、運動を  $s$  個の独立な振動運動として記述し直すことである。これを数式で書くと

$$q = \sum_{a=1}^s \xi_a A^a \quad (7.56)$$

となる。ここに、 $A^a$  はこれから求める適当な定数の縦ベクトルであり、 $\xi_a$  はこれから求めるある角振動数  $\omega_a$  で単振動する新たに導入した座標である。すなわち、 $C_a$  と  $\delta_a$  を  $a$  ごとに異なってもよい任意の定数として

$$\xi_a = C_a \cdot \sin(\omega_a t + \delta_a) \quad (a = 1, 2, \dots, s). \quad (7.57)$$

これを、運動方程式に代入すると

$$\sum_{a=1}^s [-\omega_a^2 \xi_a M A^a + \xi_a V A^a] = 0. \quad (7.58)$$

これが項別に成り立つとすると、

$$-\omega_a^2 M A^a + V A^a = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, s). \quad (7.59)$$

自明でない解 ( $A^a \neq 0$ ) を持つためには、それにかかる行列の行列式がゼロになる必要がある。

$$|-\omega_a^2 M + V| = 0, \quad (7.60)$$

これを固有値方程式 (eigenvalue equation) と呼ぶ。固有値方程式は、 $\omega_a^2$  に関して  $s$  次式なので、 $s$  個の解を持ち固有値 (eigenvalue) と呼ぶ。行列  $M$ 、 $V$  が対称行列なので当然ながら  $-\omega_a^2 M + V$  も対称行列であるので、線形代数学により固有値がすべて実数であることが保証されている。

物理的には  $\omega_a$  は固有振動数 (natural frequency) と呼ばれる。固有振動数  $\omega_a$  が 1 つ決まると、それに対応してベクトル  $A^a$  が (全体の大きさを除いて) 決まる。これを固有値  $\omega_a^2$  に属する固有ベクトル (eigenvector) と呼ぶ。

ここで、簡単な例で練習してみよう。この例では等しい質量とを持つ 2 個の質点が等しいバネ定数を持つバネにそれぞれつながれていて、それらが弱いバネで結合している系である。それらは、以下で見るように連結振動と呼ばれるおもしろい動きをする。

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1)^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2)^2 - \frac{m\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + m\alpha x_1 x_2 \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - (x_1, x_2) \begin{pmatrix} m\omega_0^2 & -m\alpha \\ -m\alpha & m\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.62)$$

ここに、 $\alpha$  は 2 個の振子  $x_1$  と  $x_2$  の間の結合の度合いをあらわす。 $\alpha = 0$  のときには、2 個の振子  $x_1$  と  $x_2$  はおなじ振動数  $\omega_0$  で独立の単振動をする。一般論にしたがって基準振動を調べよう。行列  $M$  と  $V$  を

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ V &= \begin{pmatrix} m\omega_0^2 & -m\alpha \\ -m\alpha & m\omega_0^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と定義すればラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2)M \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} - (x_1, x_2)V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7.63)$$

と書ける。

従って運動方程式は

$$\left( M \frac{d^2}{dt^2} + V \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

となり、一般論で述べた固有方程式：

$$(-M\omega^2 + V)A = 0 \quad (7.65)$$

は書き下すと

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

この代数式が自明でない解を持つためには  $\omega^2$  が固有値方程式を充たす必要がある。行列式がゼロ、すなわち

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \alpha^2 = 0 \quad (7.67)$$

である必要がある。これから、固有振動数  $\omega^{(1)}$ 、 $\omega^{(2)}$  が得られる。

$$\omega^{(1)2} = \omega_0^2 + \alpha$$

$$\omega^{(2)2} = \omega_0^2 - \alpha$$

以下当面の間、 $\omega_0^2 - \alpha > 0$  とする。そうでない場合についてはあとで述べる。

上の固有値に対応する固有ベクトルを求めよう。 $\omega^{(1)2} = \omega_0^2 + \alpha$  に対しては、固有方程式は

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)A_1 - \alpha A_2 = -\alpha A_1 - \alpha A_2 = 0 \quad (7.68)$$

となり、 $A_2 = -A_1$  を得る。規格化すれば

$$A^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7.69)$$

同様にして、 $\omega^{(1)2} = \omega_0^2 + \alpha$  に対しては

$$A^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.70)$$

従って基準モードは、

$$\xi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \quad (7.71)$$

$$\xi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \quad (7.72)$$

となる。この時ラグランジアンは、対角化されて

$$L = \frac{1}{2}[(\dot{\xi}^{(1)})^2 + (\dot{\xi}^{(2)})^2] - \frac{1}{2}[(\omega^{(1)})^2(\xi^{(1)})^2 + (\omega^{(2)})^2(\xi^{(2)})^2] \quad (7.73)$$

となる。明らかに、基準モード  $\xi^{(1)}(t), \xi^{(2)}(t)$  は振動数  $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}$  で単振動する。 $a, b, c, d$  を定数としてそれらは

$$\xi^{(1)}(t) = a \cdot \cos \omega^{(1)}t + b \cdot \sin \omega^{(1)}t \quad (7.74)$$

$$\xi^{(2)}(t) = c \cdot \cos \omega^{(2)}t + d \cdot \sin \omega^{(2)}t \quad (7.75)$$

と書ける。定数  $a, b, c, d$  は  $x, y$  の初期値と初速度から決まる。基準モード  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$  はそれぞれ、2 振子と同じ方向に振動するものと反対方向に振動するものをあらわす。2 振子の元の座標で書けば

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)] \quad (7.76)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t)] \quad (7.77)$$

一般の初期条件の場合はこの 2 種類の基準振動の重ね合わせになり、見かけは複雑な運動をしている。その特徴を、2 振子の初速度がともにゼロであるという特殊な初期条件を課して見てみよう。上の式において

$\sin$  の係数  $b = d = 0$  とすれば明らかに初速度は 0 となるので、

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a \cdot \cos \omega^{(1)}t + c \cdot \cos \omega^{(2)}t) \quad (7.78)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a \cdot \cos \omega^{(1)}t - c \cdot \cos \omega^{(2)}t) \quad (7.79)$$

が初速度 0 の解になる。さらに見やすい簡単な場合として、振子  $x_2$  がはじめ平衡の位置にあって静止している  $x_2(0) = 0$  とし、振子  $x_1$  は、はじめ  $x_1(0) = X$  に静止していたとしよう。そのためには、 $a = c = X/\sqrt{2}$  と取ればよいから、結局

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X \cdot \frac{\cos \omega^{(1)}t + \cos \omega^{(2)}t}{2} \\ &= X \cdot \cos \frac{(\omega^{(1)} + \omega^{(2)})t}{2} \cos \frac{(\omega^{(1)} - \omega^{(2)})t}{2} \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= X \cdot \frac{\cos \omega^{(1)}t - \cos \omega^{(2)}t}{2} \\ &= X \cdot \sin \frac{(\omega^{(1)} + \omega^{(2)})t}{2} \sin \frac{(\omega^{(1)} - \omega^{(2)})t}{2} \end{aligned} \quad (7.81)$$

となる。この運動の特徴をさらにはっきりされるために、2 振子の結合が弱い場合  $\omega_0^2 \gg \alpha$  を考えよう。この場合には近似的に固有振動数は  $\omega^{(1)} \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}$ ,  $\omega^{(2)} \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}$  となるので

$$x_1(t) \approx X \cdot \cos \frac{\alpha t}{2\omega_0} \cdot \cos \omega_0 t \quad (7.82)$$

$$x_2(t) \approx X \cdot \sin \frac{\alpha t}{2\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t \quad (7.83)$$

が求めたかったものである。これからすぐに見て取れることは、はじめのうち ( $\frac{\alpha t}{2\omega_0} \ll 1$ ) では、振子  $x_1$  のみが振動数  $\omega_0$  で単振動をして、振子  $x_2$  はほぼ静止しているが、しだいに  $x_2$  も振動を開始し  $\frac{\alpha t}{2\omega_0} = \frac{\pi}{2}$  になると今度は振子  $x_2$  のみが振動数  $\omega_0$  で単振動して、振子  $x_1$  はほぼ静止

する。以後このパターンをくり返し、運動は長周期で  $x_1$  と  $x_2$  の単振動を交替させる。

今まで、

$$\omega^{(1)2} = \omega_0^2 + \alpha$$

$$\omega^{(2)2} = \omega_0^2 - \alpha$$

が両方とも正で固有振動数： $\omega^{(1)}$ 、 $\omega^{(2)}$  が実数の場合を考えてきたが、 $\alpha$  が大きくて、 $\omega^{(2)2} = \omega_0^2 - \alpha < 0$  の場合には基準モード  $\xi^{(2)}$  は振動にはならず指数関数的な増大を示す。

一般に固有値方程式：

$$|-M\omega^2 + V| = 0 \quad (7.84)$$

が、 $\omega^2 < 0$  の解を持つときには、ある基準モードが指数関数的に増大して不安定になる。

## §7.7 強制振動と固有振動数

前に述べた周期的な外力の働く強制振動を、2 個以上の粒子のある系の場合に考えよう。これから外力の周期が系の固有振動数に近いとき共鳴振動が起こることを示そう。簡単のために上で述べた 2 自由度のモデルに周期的な外力を加えたものを考えよう。ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1)^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2)^2 - \frac{m\omega_0^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) + m\alpha x_1 x_2 + f(t)x_1 \quad (7.85)$$

であたえられとしよう。ここで、外力は  $x_1$  だけにかかるとした。すでに求めた基準振動  $\xi^{(1)}(t)$ ,  $\xi^{(2)}(t)$  をもちいてラグランジアンを書き直そう。

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)] \quad (7.86)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\xi^{(1)}(t) - \xi^{(2)}(t)] \quad (7.87)$$



をラグランジアンに代入すると

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\xi}^{(1)})^2 + \frac{m}{2}(\dot{\xi}^{(2)})^2 - \frac{m\omega_1^2}{2}\xi^{(1)2} - \frac{m\omega_2^2}{2}\xi^{(2)2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)})f(t) \quad (7.88)$$

となる。したがって、運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}^{(1)} + m\omega_1^2\xi^{(1)} &= \frac{f(t)}{\sqrt{2}} \\ m\ddot{\xi}^{(2)} + m\omega_2^2\xi^{(2)} &= \frac{f(t)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。 $\frac{f(t)}{\sqrt{2}}$  が2つの基準振動の外力として働いていることに注意しよう。

さてここで、興味のある場合として、外力  $f(t)$  が  $\sqrt{2}F \cos \Omega t$  のように振動している場合を考えよう。特に、 $\Omega$  が系の固有振動数  $\omega_1$  あるいは  $\omega_2$  に近いとしよう。 $\omega_1$  に近いとすると、

$$\xi^{(1)}(t) \approx \frac{Ft \cdot \sin \Omega t}{2m\Omega} \quad (7.89)$$

のように共鳴を起こす。 $\xi^{(2)}$ の方は、 $\Omega$  は  $\omega_2$  に近くないので、特に共鳴は起こさない。もとの変数で書くと

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Ft \cdot \sin \Omega t}{2m\Omega} \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Ft \cdot \sin \Omega t}{2m\Omega} \end{aligned}$$

となり、同じ位相で増幅する振動をする。これは外力が小さくても起きる。俗に言う「義経の釣り鐘突き」である。逆に、 $\Omega$  が系の固有振動数  $\omega_2$  に近いとすると、

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Ft \cdot \sin \Omega t}{2m\Omega} \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Ft \cdot \sin \Omega t}{2m\Omega} \end{aligned}$$

となり、逆位相で増幅する振動をする。

このように、外力の振動数を固有振動数に合わせて共鳴をおこして、特別な固有振動を励起することができる。このことから、風の息、海の波、地震波等に対して建造物が安定であるために、固有振動数を自然環境の固有振動数と一致しないようにすることが必要であることが理解できる。

## §7.8 強制振動の方程式の解き方

まず、線形常微分方程式の解き方の一般論を復習しよう。 $F(t)$  をあたえられた時間の関数として、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F(t) \quad (7.90)$$

の一般解を求めよう。(7.90)の右辺をゼロと置いた斉次の微分方程式：

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega^2 x_0 = 0 \quad (7.91)$$

の一般解  $x_0(t)$  は

$$x_0(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (7.92)$$

と書ける。ここで、何らかの方法で、(7.90)の特解  $x_s(t)$  が分かっているとしよう。(7.90)の一般解は、斉次微分方程式の一般解  $x_0(t)$  ともとの微分方程式の特解  $x_s(t)$  の和であらわされる。解であることは、代入することにより直接確かめることのできる。すなわち

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) \\ &= \frac{d^2x_0(t)}{dt^2} + \omega^2 x_0(t) + \frac{d^2x_s(t)}{dt^2} + \omega^2 x_s(t) \\ &= \frac{d^2x_s(t)}{dt^2} + \omega^2 x_s(t) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

一般解であることは、解が2個の任意定数  $A, B$  を含むことから保証される。強制振動の外力が周期的である時を特に考えよう。

$$m\ddot{\xi}^{(1)} + m\omega_1^2\xi^{(1)} = F\cos\Omega t \quad (7.93)$$

特解としては明らかに、 $\xi^{(1)} = K\cos\Omega t$  の形のものがある。定数を決めるために、これを上の微分方程式に代入すれば、

$$(-m\Omega^2 + m\omega_1^2)K = F \quad (7.94)$$

だから、

$$K = \frac{F}{m(\omega_1^2 - \Omega^2)} \quad (7.95)$$

と決まる。したがって、上の微分方程式の一般解は

$$\xi^{(1)}(t) = A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + \frac{F}{m(\omega_1^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t \quad (7.96)$$

となる。 $t = 0$  で初期条件、 $\xi^{(1)}(0) = \dot{\xi}^{(1)}(0) = 0$  を置こう。直ちに、 $A = 0$ ,  $B = -\frac{F}{m(\omega_1^2 - \Omega^2)}$  を得る。結局

$$\xi^{(1)}(t) = \frac{F}{m(\omega_1^2 - \Omega^2)}[\cos\Omega t - \cos\omega_1 t] \quad (7.97)$$

同様に、

$$m\ddot{\xi}^{(2)} + m\omega_2^2\xi^{(2)} = F\cos\Omega t \quad (7.98)$$

の解は  $\xi^{(2)}(0) = \dot{\xi}^{(2)}(0) = 0$  の初期値に対しては、

$$\xi^{(2)}(t) = \frac{F}{m(\omega_2^2 - \Omega^2)}[\cos\Omega t - \cos\omega_2 t] \quad (7.99)$$

となる。

ここで、外力の振動数  $\Omega$  が、固有振動数のうちのひとつ、例えば  $\omega_1$  に一致すると、

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(t) &\approx \frac{Ft \cdot \sin\omega_1 t}{2m\omega_1} \\ \xi^{(2)}(t) &= \frac{F}{m(\omega_2^2 - \omega_1^2)}[\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t]. \end{aligned}$$

すなわち、外力の振動数  $\Omega$  と一致した振動数を持つ基準モードは、振動しながら増幅する。

この方法は、非斉次線形常微分方程式に一般的に適用できる。

一様重力加速度を  $g$  として、鉛直方向、上向きに  $y$  軸を選ぶと、質点の位置座標  $y$  に対して、非斉次線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (7.100)$$

が成り立つ。

この特解が

$$y^* = -\frac{gt^2}{2} \quad (7.101)$$

であることはすぐ見て取れる。(7.100) の右辺をゼロと置いた斉次線形常微分方程式の一般解  $y^0$  は、 $y_0, v$  を任意定数として、

$$y^0 = y_0 + vt \quad (7.102)$$

である。(7.100) の一般解は、特解  $y^*$  と外力  $g$  をゼロにした時の一般解  $y^0$  の和

$$y = y_0 + vt - \frac{gt^2}{2} \quad (7.103)$$

である。これが一般解であることは、任意定数  $y_0, v$  が2個含まれていることからわかる。



## 第8章

# 対称性と保存則

## SYMMETRY AND CONSERVATION LAW

保存則は物理学において重要な役割をしている。代表的な保存量はエネルギー、運動量、角運動量であり、それぞれ系が時間的に変化しない場合、空間的に一様である場合、空間的に等方である場合に保存する。解析力学において、これらの対称性は、時間並進、空間並進、空間回転に対して作用が不変であることとして、明示的にあらわされる。このことを、これから個別に見ていき、次に一般的この不変性すなわち対称性があれば保存則があるという関係をネーターの定理 (Noether's Theorem) として統一的に見よう。<sup>\*1</sup>

### §8.1 エネルギー保存則 (Energy Conservation Law)

系が時間並進に対して不変であるということを解析力学の言葉で言うと、ラグランジアンが時間  $t$  をあらわにに含まないと言い換えられる。すなわち

$$L = L(q, \dot{q}, t \text{ なし}) \quad (8.1)$$

<sup>\*1</sup> 逆に、保存則があれば対称性があるかと問えば、必ずしもそうではなく反例を挙げることができる。たとえば、2本の閉じた糸の絡み合いの数は、糸の運動によって変わらないが背後に対称性があるわけではない。この種のものを総称して位相幾何学的な保存量と呼ぶ。

つぎにエネルギー  $E$  を

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (8.2)$$

と定義しよう。この  $E$  が保存する、すなわち時間によらないことを直接計算で示そう。

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$= \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (8.4)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (8.5)$$

ここで、一行目に

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (8.6)$$

2 行目に運動方程式を用いた。3 行目でラグランジアンが時間をあらわに含まないという、時間並進対称性を用いた。

すなわち、ラグランジアンが時間にあらわによらない場合にはエネルギーは保存する。

質点系の場合

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (8.7)$$

に、エネルギーは

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L \\
 &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - \left( \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V \right) \\
 &= \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \\
 &= T + V
 \end{aligned}$$

と、運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $V$  の和であらわされる。

逆に、ラグランジャンが時間にあらわによるときにはエネルギーは保存しなく、エネルギーの変化率は

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (8.8)$$

と与えられる。

保存しない典型的な例である摩擦のある系を考えてみよう。

$$L = e^{\frac{\gamma t}{m}} \left[ \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] \quad (8.9)$$

に対して、オイラー・ラグランジュ方程式を立てれば、

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (8.10)$$

第2項は速度に比例する摩擦力をあらわす。この場合、エネルギーの変化率は

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\gamma}{m} L. \quad (8.11)$$

となる。

ここで摩擦のある系のラグランジャンを書くことの意味について考察してみよう。ラグランジャンを基本的な力学を記述しているものと考え



るときもちろんあるが、複雑な系において注目している力学的自由度だけを取り出して、他の自由度を平均化あるいは単に捨象することを行った結果であるところの実効的なものとする場合もある。摩擦のある系にたいしては、考えている質点に衝突する空気分子や物体と床の接触するところの分子の力学的自由度からの寄与が平均化されたものとして時間にあらわによる依存性が出てきていると考えるのである。この問題は統計力学の一大問題であって、まだ完全な解決が得られているわけではない。

### 例題 8.1.1

つぎのラグランジャンが摩擦力に関するクーロンの法則（運動と反対の方向に質量に比例する摩擦力）をあたえることを示せ。

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + m\mu g |\dot{\mathbf{r}}| t \quad (8.12)$$

#### [ヒント]

運動方程式から、加速度  $\ddot{\mathbf{r}}$  が  $\dot{\mathbf{r}}$  と同じ方向であることに注意すると、運動の方向は変わらないことがわかる。したがって、 $\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) = 0$ 。オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + mg\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} t \right) \\ = m\ddot{\mathbf{r}} + mg\mu \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} + mgt\mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \right) \\ = m\ddot{\mathbf{r}} + mg\mu \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \\ = 0. \end{aligned}$$

運動の方向  $\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$  が変わらないから、最後の項がゼロになる。

## 第9章

# 運動量保存則

## MOMENTUM CONSERVATION

空間が一様 (homogeneous) であるということを数学的に表現しよう。  
 $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を  $i$  番目の粒子の位置をあらわすデカルト座標として、すべての粒子に一様な (時間によらない) 微小なずらし：

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\epsilon} \quad (\delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\epsilon}) \quad (9.1)$$

を考えよう。ラグランジアンが上記の一様かつ時間的に一定なずらしに対して不変なとき、

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0. \quad (9.2)$$

ここで、 $\boldsymbol{\epsilon}$  は微小ではあるが任意なので、

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \quad (9.3)$$

が導かれる。

ここで、全運動量  $\mathbf{P}$  を

$$\mathbf{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (9.4)$$

と定義しよう。 $\mathbf{p}$  の時間変化は運動方程式を用いると、

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0. \quad (9.5)$$

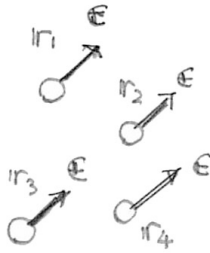


図 9.1 すべての粒子に一樣な時間によらない微小なずらしを考える

となる。最後のステップに一樣性  $\delta L = 0$  を用いた。この一樣性が成り立つ場合をもっと詳しく見よう。質点系の場合

$$L = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (9.6)$$

に、運動エネルギーの項は明らかに一樣一定なずらしに対して不変である。ポテンシャルエネルギーの項は

$$V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, \dots) \quad (9.7)$$

のように相対座標のみに依存するときに限って一樣なずらしに対して不変である。このとき全運動量  $\mathbf{p}$  は

$$\mathbf{p} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (9.8)$$

このことを別の見方をすると、作用・反作用の法則とみなせる。簡単のため2体系を例にとろう。ポテンシャルは、 $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  と2質点の相対座標のみの関数である。運動方程式は、

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= - \frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= - \frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} \end{aligned}$$

となる。

辺べん和を取ると、左辺の力は大きさが同じで符号が反対なのでは相殺するから全運動量の保存則：

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = 0 \quad (9.9)$$

を得る。

運動量保存則と空間の一様性の関係を述べてきたが、これを部分的に適用することも可能である。系すなわちラグランジアンがある方向の一様・一定のずらしに対して不変な場合にはその方向の運動量は保存する。例をあげよう。質点の力学において、ポテンシャルが、座標  $x$  と  $y$  にはよるけれども、 $z$  によらない場合：

$$V = V(x, y) \quad (9.10)$$

$z$  方向に平行移動してもあきらかに系は変わらない。以前のずらしに対する不変性の議論を  $z$  方向のずらしに限定すれば、 $z$  方向の運動量の保存則を導くことが出来る。



## 第10章

# 角運動量保存則

## ANGULAR MOMENTUM CONSERVATION

系が等方的 (isotropic) であるとは、系すなわちラグランジアンが特定の方向性を持たなく、回転に対して不変であることである。

位置ベクトル  $\mathbf{r}$  を、単位ベクトル  $\mathbf{k}$  の方向を向いている回転軸のまわりに微小な角度  $\delta\phi$  だけ回転することを考えよう。便宜のために微小回転ベクトル  $\delta\boldsymbol{\phi}$  を導入しよう。 $\delta\boldsymbol{\phi}$  の大きさは  $\delta\phi$  にして、方向を回転軸  $\mathbf{k}$  に一致させるのである。すなわち、

$$\delta\boldsymbol{\phi} = \delta\phi\mathbf{k}. \quad (10.1)$$

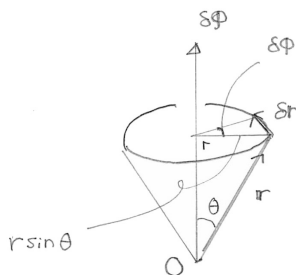


図 10.1 角運動量保存則

図 10.1 を見ながら考えよう。

微小変移  $\delta\mathbf{r}$  の大きさ  $|\delta\mathbf{r}|$  は

$$|\delta\mathbf{r}| = r\delta\phi \cdot \sin\theta \quad (10.2)$$

であり、その方向は、 $\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$  に向いている。したがって、微小回転  $\delta\boldsymbol{\phi}$

による微小変移  $\delta \mathbf{r}$  は

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} \quad (10.3)$$

とあらわされる。さらにこれを時間で微分して

$$\delta \dot{\mathbf{r}} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (10.4)$$

を以下の議論の準備としよう。

微小回転に対して、ラグランジアンは不変だから、

$$\begin{aligned} 0 &= \delta L \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \delta \dot{\mathbf{r}}_i \right) \\ &= \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) \delta \mathbf{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \delta \dot{\mathbf{r}}_i \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}_i \right) \\ &= \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) \end{aligned}$$


ここで、 $i$  番目の粒子の運動量  $\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}$  の定義とベクター解析の公式  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$  を用いた。

$\delta \boldsymbol{\phi}$  は任意だから、

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \right) = 0. \quad (10.5)$$

したがって、角運動量  $\mathbf{L}$  を

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (10.6)$$



$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

図 10.2 円循環

と定義すれば  $\mathbf{L}$  は保存する。

回転対称性のある系の例として、ポテンシャルが中心からの距離のみの関数であるような中心力系をあげることができる。中心力系の例としては太陽系と水素原子をあげることができる。(太陽は他の惑星に対して十分重いし、陽子も電子に比べて重いのでともに中心に静止していると考えてよい。)





## 第11章

# 不変変分論

## INVARIANCE PRINCIPLE

前の節をまとめると、作用の持つ時空的な対称性から、エネルギー、運動量、角運動量の保存則が導かれることがわかる。表にすれば、以下のようになる。<sup>\*1</sup>

	対称性	保存則
(1)	時間並進	エネルギー
(2)	空間並進	運動量
(3)	空間回転	角運動量

これらを一般化して、系の持つ連続的な対称性が保存則を意味することが予想される。

### ネータの定理

作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) \quad (11.1)$$

が、点変換 (point transformation) と呼ばれる微小変換:  $q_i \rightarrow$

<sup>\*1</sup> 部分的な保存則もあり得る。例えば、x 方向にのみ並進対称性のある時には、 $P_x$  だけが保存する。z-軸のまわりに軸対称であれば  $M_z$  が保存する。

$$q_i + \delta q_i$$

$$\delta q_i = \sum_{a=1}^K f_{ia} \epsilon_a \quad (11.2)$$

に対して不変なとき、ネータ荷電：

$$Q_a = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_{ia} \quad (11.3)$$

は保存する。

ここに、 $\epsilon_a, a = 1, \dots, K$  は  $K$  個の微小パラメタである。前の節の  $\delta \phi, \epsilon$  は  $\epsilon_a$  の例になっている。 $f_{ia}$  は一般には  $q$  の関数である。前の節の空間並進 ( $q_i \rightarrow q_i + \epsilon_i$ ) の例では、 $f_{ia} = \delta_{ia}$  である。空間回転 ( $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \phi \times \mathbf{r}$ ) の例では、 $f_{ia} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{iak} x_k$ 。 $\epsilon_{iak}$  は完全反対称テンソルと呼ばれるものである。具体的には、 $\epsilon_{123}$  とその偶置換  $= 1$  であり、 $\epsilon_{123}$  の奇置換  $= -1$  である。

時間並進とエネルギーの関係の方は、時間  $t$  も力学変数とする必要があるので、すこし込み入っている。

### 例題 11.0.1

時間  $t$  も力学変数と見なして、ラグランジアンが時間  $t$  にあらわによらない場合、時間の並進  $t \rightarrow t + \epsilon$  に対する不変性とみなそう。時間  $t$  も力学変数と見なして、ネータの定理を適用せよ。

[ヒント]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \left( q, \frac{dq}{dt} \right) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dt}{d\tau} L \left( q, \frac{dq}{d\tau} \bigg/ \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (11.4)$$

と書き換えて、 $L'$  を  $L'(q, t, \frac{dq}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau}) = \frac{dt}{d\tau} L(q, \frac{dq}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau})$  と見なそう。 $\tau$  を新たな時間と考えて、

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau L' \left( q, t, \frac{dq}{d\tau}, \frac{dt}{d\tau} \right) \quad (11.5)$$

に対して、ネータの定理を適用しよう。

ネータ荷電は

$$Q = \frac{\partial L'}{\partial \frac{dt}{d\tau}} = L + \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\tau}} = L - \frac{dq}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} = -E \quad (11.6)$$

とあたえられ、前の節のエネルギーと（本質的でない）符号を除いて一致する。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\tau}} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial \left( \frac{dq}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau} \right)}{\partial \frac{dt}{d\tau}} \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \\ &= \frac{dt}{d\tau} \left( -\frac{1}{\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2} \frac{\partial q}{\partial \tau} \right) \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \\ &= -\frac{d\tau}{dt} \frac{\partial q}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \\ &= -\frac{dq}{dt} \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \end{aligned}$$

の式変形を行った。

### 【注意 1】

ネータの定理の逆は必ずしも成り立たない。ずなわち、保存則があるからと言って、対称性があるとは限らない。例えば、一次元空間上の場

$\phi(x, t)$  に対して、無限遠での境界条件：

$$\phi(x, t) = \begin{cases} 1/2 & (x \rightarrow \infty) \\ -1/2 & (x \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (11.7)$$

があるとき、

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x \phi(x, t) dx \quad (11.8)$$

は保存する。このように、境界条件に原因する保存量を、トポロジカルな保存量という。

### 【注意 2】

ラグランジアンがある変数  $\phi$  によらない場合にその変数  $\phi$  を**循環変数 (cyclic variables)** と呼ぶ。この簡単な場合に ネータの定理を応用するまでもなく、オイラー・ラグランジュ方程式から、

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad (11.9)$$

が保存することが分かる。デカルト座標で書き表した時にそれが循環変数ならば運動量、極座標で表したときにそれが循環変数ならば角運動量が保存する。

さて、ここで定理の証明をあたえよう。

### 【定理の証明】

対称変換  $\delta q_i$  を行っても、作用は変化しないということを式に書いてみると

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \quad (11.10)$$

第 2 項を部分積分すると

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (11.11)$$

となる。右辺の第1項は運動方程式によりゼロになる。第2項に

$$\delta q_i = \sum_{a=1}^K f_{ia} \epsilon_a \quad (11.12)$$

を代入すれば

$$\left[ \sum_{a=1}^N \epsilon_a \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_{ia} \right) \right]_{t_1}^{t_2} \quad (11.13)$$

ここで、初めの時刻  $t_1$  と終わりの時刻  $t_2$  は任意だったから、上の式は

$$\sum_{a=1}^N \epsilon_a \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_{ia} \right) \quad (11.14)$$

が時間に依らないことを意味する。さらに、微小変換のパラメタ  $\epsilon_a$  も任意だったので

$$Q_a = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_{ia} \quad (a = 1, \dots, N) \quad (11.15)$$

が時間によらず保存することが示された。(証明終わり)

証明における式変形がオイラー・ラグランジュ方程式を導いたときと似通っているので混乱するかもしれない。今の場合の  $q_i(t)$  は運動方程式を充たす粒子の位置座標であり、オイラー・ラグランジュ方程式を導く際の  $q_i(t)$  はそうとは限らないより一般のものであった。さらに、以前の場合では、 $q_i(t)$  の変分  $\delta q_i(t)$  は上端と下端でゼロであったが、今の場合の  $\delta q_i(t)$  は同じ記号で書いてはいるが対称変換による変化分であって意味が異なり、上端と下端でゼロとは限らない。

ネータの定理を少しだけ拡張しよう。厳密には系が対称性を持つときに、ラグランジアンは必ずしも不変でなくてもよくて、微小変換に対して完全微分量だけ変化してもよい。作用の変化が時間の両端における値の差にのみよる量のときには、運動方程式が変わらないからである。微

小変換:  $\delta q_i = \sum_{a=1}^K f_{ia} \epsilon_a$  に対して、作用  $S$  が  $\delta S = \left[ \sum_{a=1}^K C_a \epsilon_a \right]_{t_1}^{t_2}$  だけ変化するとすれば、上の議論をくり返して

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{a=1}^K C_a \epsilon_a \right]_{t_1}^{t_2} &= \delta S \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \left[ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

を得る。

したがって、一般の場合

$$Q_a = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_{ia} - C_a \quad (a = 1, \dots, N) \quad (11.16)$$

が保存量である。

### 【注意 3】

ネータの定理は、自然の中にある相互作用の研究についての解析力学的なアプローチにとって重要な意味をあたえる。実験事実として保存則の方が先に見つかることが多いし、現象論的に得たいろいろな作用をある原理で統一的にまとめあげるときに対称性はもっとも重要な鍵になる。あたえられた作用の対称性を探して、保存則を導くということをひっくりかえして、むしろ対称性をより高い原理に基づいて課して、それを充たす作用は何かという形で問題を立て直すのである。

### 【注意 4】

ネータの定理は対称性があれば保存則があることを教えるが、それが新しい保存量をあたえるとは限らない。対称変換は時間をあらわに含む場合には、すでに知られているものと運動方程式からの帰結の帰着する。例で説明しよう。

相対論的な粒子の作用：

$$\begin{aligned}
 -mc \int \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2} &= -mc \int d\tau \sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2} \\
 &= \int d\tau L\left(t, r, \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}\right) \quad (11.17)
 \end{aligned}$$

はローレンツ変換に対して不変である。ただし、ここでは、時間座標  $t$  と空間座標  $x, y, z$  を対等に扱う目的で、パラメタ  $\tau$  を導入した。

特に微小なローレンツ変換：

$$\delta t = -\frac{v}{c^2}x$$

$$\delta x = -vt$$

$$\delta y = 0$$

$$\delta z = 0$$

を考えれば、ネータ荷電は

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\tau}} \delta t + \frac{\partial L}{\partial \frac{dx}{d\tau}} \delta x \\
 &= \frac{v}{c} \left[ x \frac{mc^2 \frac{dt}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}} - t \frac{mc \frac{dx}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}} \right] \\
 &= \frac{v}{c} (Ex - p_x t)
 \end{aligned}$$

とエネルギー  $E$  と運動量  $p_x$  で書け、( $x$  方向の) ブーストと呼ばれる。

ブーストの保存則の内容はエネルギーと運動量の保存則と独立ではない。実際

$$\frac{dQ}{dt} = E \frac{dx}{dt} - p_x = 0 \quad (11.18)$$

最後の等式では  $E$  と  $p_x$  の定義を使った。



この節の最後に、高階微分を含むラグランジアンに対するネータの定理を述べよう。

$$\begin{aligned}
 \delta_1 S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) \delta \frac{dq}{dt} + \cdots + \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \delta \frac{d^n q}{dt^n} \right] \\
 &\quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) \delta q + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \delta q \right] \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} \right) \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right] \delta q \\
 &\quad + \left[ \left\{ \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^3 q}{dt^3}} \right) \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right\} \delta \frac{dq}{dt} + \cdots \right] \\
 &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} \right) \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right] \delta q \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^3 q}{dt^3}} \right) \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right] \delta \frac{dq}{dt} + \cdots
 \end{aligned}$$

ここで、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) = 0 \quad (11.19)$$

を用いた。

したがって、保存量は括弧のなかの量で

$$\begin{aligned}
 Q &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} \right) \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right] \delta q \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^3 q}{dt^3}} \right) \cdots + (-1)^{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^n q}{dt^n}} \right) \right] \frac{d\delta q}{dt} + \cdots
 \end{aligned}$$

$n = 2$  の場合を書けば、

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \frac{dq}{dt}} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \frac{d^2 q}{dt^2}} \right) \frac{d\delta q}{dt} \quad (11.20)$$

---

となる。



## 第12章

# ゲージ不変性

## GAUGE INVARIANCE

電磁場中の荷電粒子の運動を記述するラグランジアンを思い出そう。

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (12.1)$$

電場と磁場は物理的にその値が観測できる量であるが、スカラーポテンシャルとベクターポテンシャルはそうではない。実際、スカラーポテンシャル  $\phi$  とベクターポテンシャル  $\mathbf{A}$  を

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (12.2)$$

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \quad (i = x, y, z) \quad (12.3)$$

とゲージ変換 (gauge transformation) したときに電場と磁場：

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (12.4)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (12.5)$$

は変わらない。われわれのラグランジアン (12.1) は電場と磁場ではなくて、スカラーポテンシャルとベクターポテンシャルに陽に依存しているので、ゲージ変換にたいしてどのように変化するか興味がある。ラグランジアン (12.1) はゲージ変換 (12.3) にたいしては

$$L \rightarrow L + e \left( \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \lambda \right) \quad (12.6)$$

$$= L + e \frac{d\lambda}{dt} \quad (12.7)$$

から、時間についての完全微分だけ変化する。作用積分全体は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt L + [e\lambda]_{t_1}^{t_2} \quad (12.8)$$

となり、変化分は時間の両端  $t_2, t_1$  における粒子の位置座標にのみ依るので、変分原理を適用する際には効かない。<sup>1)</sup>ローレンツ力の式というゲージ不変な方程式を得たのは、作用がゲージ変換に対して積分の上下端にのみよる変化しかしないためであった。

逆に作用 (12.1) はゲージ変換 (12.3) に対して、上の意味で不変であることを要請して定められたとも言える。

### 例題 12.0.1

電磁場中の荷電粒子の運動を記述するラグランジャン：

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (12.9)$$

において、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルが時間に依らないときに保存するエネルギーを求めよ。

[ヒント]

一般論を適用して

$$\begin{aligned} E &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L \\ &= \dot{\mathbf{r}} \cdot (m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A}) - \left[ \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right] \\ &= \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + e\phi \end{aligned} \quad (12.10)$$

となる。ベクトルポテンシャルが姿をあらわしていないことに注

<sup>1)</sup> このような時間の両端だけの量は古典力学においては後に述べる正準変換の母関数としてある役割をするが物理的な効果を持たない。ただし量子力学では重要な意味をもつ時がある。

意しよう。E が保存することを直接時間微分を取ることで、確かめてみよう。そうすると、磁場のローレンツ力が粒子の変位に垂直であるために、磁場は粒子に対して仕事をしないことにも見て取れる。

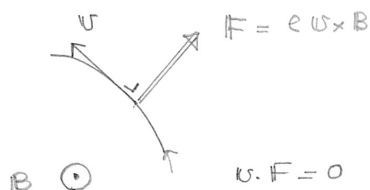


図 12.1 電磁場中の荷電粒子の運動



## 第13章

# 力学的相似

## DYNAMICAL SIMILARITY

ネータの定理で仮定している対称性は、対称変換に対する作用の不変性であって、運動方程式の不変性ではない。一般に運動方程式を不変にする変換は、必ずしも作用自体を不変にしない。例として、万有引力の働く、質点の運動を記述するニュートンの方程式を考えてみよう。

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (\#) \quad (13.1)$$

ただし、 $M$  は中心天体の質量、 $G$  は万有引力定数、 $\hat{\mathbf{r}}$  は  $\mathbf{r}$  方向の単位ベクトルである。この運動方程式は、スケール変換：

$$\begin{aligned} t &\rightarrow \lambda^3 t \\ \mathbf{r} &\rightarrow \lambda^2 \mathbf{r}, \quad \lambda > 0, \end{aligned}$$

に対して不変である。<sup>\*1</sup>一方、上の運動方程式をあたえる作用：

$$S = \int dt \left[ \frac{m \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2}{2} + \frac{GmM}{r} \right] \quad (13.2)$$

は上のスケール変換に対して  $\lambda$  倍、 $S \rightarrow \lambda S$  になる。

一般に、ある作用を定数倍しても、得られる運動方程式は同じである。ある変換をして、作用がたかだか定数倍になるようなときに、その変換を**力学的相似 (dynamic similarity)** と呼ぶ。力学的相似はある解を、そ

<sup>\*1</sup> 実は、これこそが惑星の軌道に関するケプラーの第3法則：周期の2乗と平均距離の3乗の比が一定、の本質的な理由になっている。



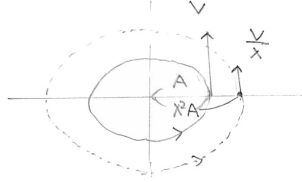


図 13.1 万有引力の働く質点の運動

れとは初期条件の異なる別の解に写像する。以前、取りあげたケプラーの第3法則は異なる軌道を比較しているのでもまさにその例になっている。 $\mathbf{r}(t)$  を (#) 式の一つの解であるとしよう。そのとき、上の議論から  $\lambda$  をパラメータとして

$$\mathbf{r}_\lambda(t) = \lambda^2 \mathbf{r}(\lambda^{-3}t) \quad (13.3)$$

も解であることがわかる。 $\lambda$  の違いは、初期条件の違いであると見なせる。惑星の楕円軌道の場合に例を図示しよう。例えば、近日点までの距離  $a$ 、速度  $v$  を初期条件とすると、 $A = \lambda^2 a$ 、 $V = \lambda^{-1}v$  が別の解の初期条件である。

### 例題 13.0.1

調和振動子の系について、力学相似を見いだせ。

[ヒント]

調和振動子に対する運動方程式:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} + m\omega^2 q = 0 \quad (13.4)$$

は、変換:  $q \rightarrow \lambda q$ ,  $\lambda$ : ゼロでない実数 に対して不変であるが作用:  $S = \int dt \left[ \frac{m(\frac{dq}{dt})^2}{2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right]$  はこの変換に対して、定数倍、 $S \rightarrow \lambda^2 S$  になる。この力学相似は、「振り子の周期は振幅によらない」という振り子の等時性としてよく知られている。

万有引力と調和振動子の場合に共通なことは、ポテンシャルが座標の同次式であることである。すると、一般に、ポテンシャルが

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (13.5)$$

がデカルト座標  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  の同次関数、すなわち

$$V(\lambda \mathbf{r}_1, \lambda \mathbf{r}_2, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^k V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (13.6)$$

の時に、作用：

$$S = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\mathbf{r}}_a^2}{2} - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (13.7)$$

は、スケール変換:

$$\mathbf{t} \rightarrow \lambda^{\frac{2-k}{2}} \mathbf{t} \quad (13.8)$$

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \lambda \mathbf{r}_a, \quad \lambda > 0, \quad (13.9)$$

に対して

$$S \rightarrow \lambda^k S \quad (13.10)$$

と定数倍になる。したがって、 $\mathbf{r}_a(t)$  が解ならば、 $\lambda \mathbf{r}_a(\lambda^{\frac{2-k}{2}} t)$  も解である。言い換えると、解の 1 パラメータ族が得られたことになる。すなわち、軌道を  $\lambda$  だけ相似拡大したのも解であり、ただし時間の方は、

$$\mathbf{t}' = \lambda^{\frac{2-k}{2}} \mathbf{t} \quad (13.11)$$

あるいは

$$\frac{\mathbf{t}'}{\mathbf{t}} = \left( \frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}} \right)^{\frac{2-k}{2}} \quad (13.12)$$

のように進みが変わる。万有引力の場合は  $k = -1$  で調和振動子の場合は  $k = 1$  であることに注意しよう。

力学相似は、ある力学系を小さいサイズの模型で実験するときなどに有用でもある。

系が空間のある限られた領域に限定されていて、しかもポテンシャルが座標の同次式のときには、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの時間平均について、**ビリアル定理 (Virial theorem)** と呼ばれる定理が成り立つ。

### ビリアル定理

$\langle f \rangle$  を力学量  $f$  の長時間平均： $\langle f \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$  とすれば、運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $V$  の時間平均の間に

$$2\langle T \rangle = k\langle V \rangle \quad (13.13)$$

の関係がある。

### 【定理の証明】

まず、

$$\begin{aligned} 2\langle T \rangle &= \langle \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} dt \\ &= - \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}} dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}]_0^\tau \end{aligned} \quad (13.14)$$

と部分積分により変形できるが、第 2 項は運動が空間のある限られた領域に限定されているという仮定のもとではゼロになる。第 1 項を運動方程式を用いて変形すれば、 $V$  が  $k$  次の同時式であることにより

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} dt = k\langle V \rangle \quad (13.15)$$

を得る。簡単のために 1 変数の場合に証明したが、多変数の場合も全く同様である。

このようなビリアル定理は、球状星団や銀河のような重力多体系に対しては、 $k = -1$  として成り立つと考えられている。また、統計力学などにも登場する。

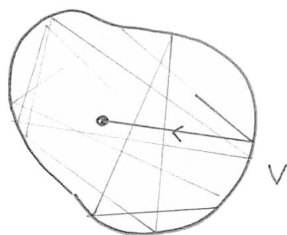


図 13.2 ビリアル定理のイメージ



## 第14章

# 運動方程式の解き方

### §14.1 1次元の運動

エネルギー保存則を用いて1次元の運動の運動方程式を解こう。ポテンシャルを  $V(x)$  としてエネルギー保存則を書けば

$$E = \frac{m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}{2} + V(x) \quad (14.1)$$

となる。これを  $\frac{dx}{dt}$  について解けば

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}} \quad (14.2)$$

となる。これを積分して

$$t = \pm \int^x dx \sqrt{\frac{m}{2(E - V(x))}} \quad (14.3)$$

を得る。これを  $x$  について解けば、座標  $x$  が時間の関数  $x(t)$  として得られる。

$$V(x) = E \quad (14.4)$$

の解を  $x_1, x_2$  としよう。それらの点では  $\frac{dx}{dt} = 0$  すなわち運動はいったん停止し反転するので、転回点 (turning point) と呼ばれる。

周期は

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{\frac{m}{2(E - V(x))}} \quad (14.5)$$

となる。

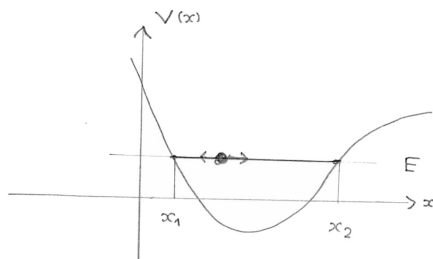


図 14.1 1次元の運動

## §14.2 中心力場中の運動

すでに述べたように、中心力の場合には、角運動量が保存する。この場合はエネルギー保存則と角運動量保存則を用いて、運動方程式を解くことができる。

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (14.6)$$

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (14.7)$$

ここで、ポテンシャル  $V(r)$  に遠心力の効果  $\frac{L^2}{2mr^2}$  を加えた有効ポテンシャル

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (14.8)$$

を定義すれば、エネルギー保存則と角運動量保存則は

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (14.9)$$

$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (14.10)$$

となり、動径座標に対する一次元問題に帰着する。

$V_{\text{eff}}(r)$  の形から、運動を定性的に論じよう。原点近くでは、遠心力が効いて遠方では中心力が効く典型的な場合を図 14.2 に描く。

$E < 0$  では運動は引力源に束縛されていて、動径座標は図の  $r = r_1$  と  $r = r_2$  の間に挟まれる。 $E > 0$  では、粒子は遠方からやってきて  $r = r_1$  で転回して、いずれ引力源から脱出して無限遠方に去っていく。

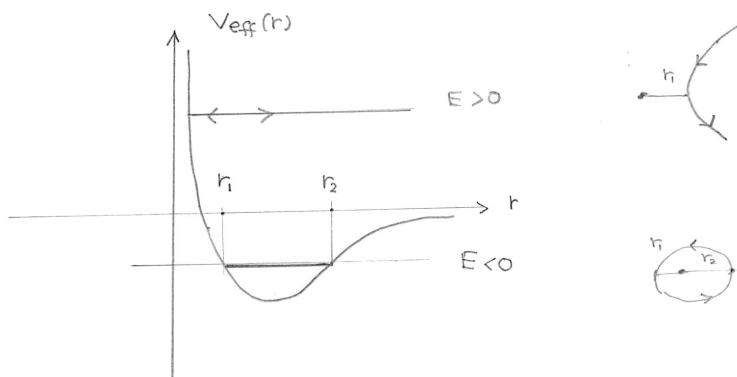


図 14.2 中心力場中の運動

## §14.3 惑星の運動

エネルギー保存則と角運動量保存則を用いて、運動方程式の解きかたの例を惑星の力学の場合に示そう。

$$E = \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \quad (14.11)$$

$$= \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) \quad (14.12)$$



$$L = mr^2 \frac{d\phi}{dt} \quad (14.13)$$

球対称性のために粒子の運動が動径方向 1 次元の力学に帰着されている。有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$  はそのポテンシャルの役割をしている。粒子のエネルギー  $E$  が、正 ( $E > 0$ )、ゼロ ( $E = 0$ ) あるいは負 ( $E < 0$ ) の場合に粒子の運動を図示すると、定性的に理解するのに役立つ。その極小点  $r = r^*$  は

$$V'_{\text{eff}}(r^*) = -\frac{L^2}{mr^{*3}} + \frac{GMm}{r^{*2}} = 0$$

から得られる。角運動量  $L$  を用いると

$$r^* = \frac{L^2}{GMm^2} \quad (14.14)$$

と表せる。極小値は

$$V_{\text{eff}}(r^*) = -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} \quad (14.15)$$

であるので、エネルギー  $E$  は

$$E > -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} \quad (14.16)$$

である。

式 (14.11) と (14.13) を

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{L}{mr^2} \end{aligned}$$

と書き直そう。辺ぺん割って

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}}{\frac{L}{mr^2}} \quad (14.17)$$

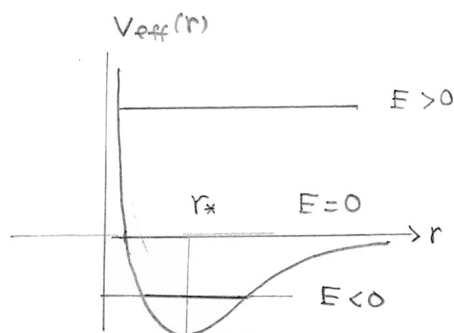


図 14.3 粒子の運動を動径方向 1 次元の力学に帰着

あるいは、 $u = \frac{1}{r}$  と置くと

$$\begin{aligned}
 -\frac{du}{d\phi} &= \frac{\sqrt{2m}}{L} \sqrt{E - \frac{L^2 u^2}{2m} + GMmu} \\
 &= \frac{\sqrt{2m}}{L} \sqrt{E - \frac{L^2}{2m} \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 + \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2m}}{L} \sqrt{E' - \frac{L^2}{2m} \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

となり、解析的に積分できる形になる。

ただし、

$$E' = E + \frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2} \quad (14.18)$$

である。ここで、 $E' > 0$  をすなわち  $E > -\frac{G^2 M^2 m^3}{2L^2}$  と仮定して、

$$u = \frac{\sqrt{2mE'}}{L} \cos \phi + \frac{GM^2 m^2}{L^2} \quad (14.19)$$

$$l = \frac{L^2}{GMm^2}$$

$$e = \frac{L\sqrt{\frac{2E}{m}}}{GMm}$$

と置くと、軌道の式は

$$r = \frac{l}{1 + e \cdot \cos \phi} \quad (14.20)$$

とあたえられる。このことはケプラーの第 2 法則とも呼ばれる。 $e$  は離心率 (**eccentricity**) と呼ばれる。書き直すと

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \quad (14.21)$$

となる。このことから、

$$e < 1 \Leftrightarrow E < 0 \Leftrightarrow \text{楕円軌道}$$

$$e = 1 \Leftrightarrow E = 0 \Leftrightarrow \text{放物線軌道}$$

$$e > 1 \Leftrightarrow E > 0 \Leftrightarrow \text{双曲線軌道}$$

がわかる。有効ポテンシャルの図と比較すると、 $E < 0$  の場合に確かに軌道が有限で運動が無限遠方に発散することはない、 $e < 1$  で動径座標  $r$  が有限であることに対応している。一方、 $E > 0$  の場合には有効ポテンシャルの図から分かるように運動が無限遠方に発散するが、このことは  $e > 1$  の場合、ある角度で動径座標  $r$  が発散することに対応している。 $e = 1$  の場合はその中間で、運動は辛うじて遠方に発散する。

$e < 1$  の場合に、軌道が楕円軌道であることをもう少し詳しく見よう。太陽にもっとも接近するのは、上の表式では、角度が  $\phi = 0$  のとき（近日点）で、距離は  $\frac{l}{1+e}$ 。逆にもっとも遠いとき（遠日点）は  $\phi = \pi$  で距離は  $\frac{l}{1-e}$  である。長半径はその平均で、

$$A = \frac{l}{1 - e^2} \quad (14.22)$$

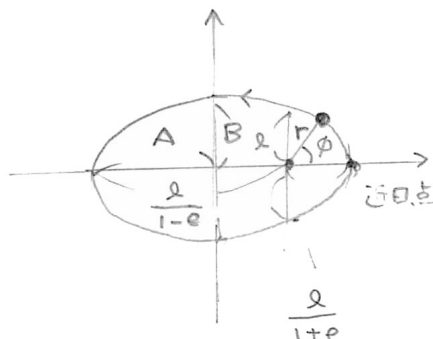


図 14.4 惑星の軌道

となる。短半径を作図によって計算しよう。図から分かるように楕円の中心と太陽の間の距離は  $C = A - \frac{l}{1+e} = \frac{le}{1-e^2}$ 。楕円の中心からもっとも近い点までの距離は、楕円の性質から  $A = \frac{l}{1-e^2}$ 。したがって、短半径 B はピタゴラスの定理から

$$B = \sqrt{A^2 - C^2} = \frac{l}{\sqrt{1-e^2}} \quad (14.23)$$

とあたえられる。

軌道の要素である長半径 A と離心率 e は、保存量であるエネルギー E と角運動量 L で書き表せる事に留意しよう。特に長半径は

$$A = \frac{l}{1-e^2} = \frac{GMm}{2|E|} \quad (14.24)$$

となり、エネルギーだけで決まり、角運動量にはよらない。

次に周期を計算しよう。

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\left(E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\right)}} \quad (14.25)$$

から周期  $T$  は

$$T = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} \right)}} \quad (14.26)$$

とあたえられる。ただし、 $r_1, r_2$  は  $E - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r} = 0$  の 2 根である ( $r_1 = \frac{l}{1+e}$ 、 $r_2 = \frac{l}{1-e}$ )。  $r = \frac{l}{1+e \cdot \cos \phi}$  を代入して積分変数を、 $r$  から  $\phi$  に変換すると、少しの計算の後で

$$T = \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e \cdot \cos \phi)^2} \quad (14.27)$$

積分を実行すると、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 + e \cdot \cos \phi)^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (14.28)$$

だから

$$T = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \quad (14.29)$$

ここで、 $L = m\sqrt{GMl}$  であることと、楕円軌道の長半径  $A$  が

$$A = \frac{l}{1 - e^2} \quad (14.30)$$

とあたえられることを考慮すると、

$$T = \frac{2\pi}{(GM)^{1/2}} A^{3/2} \quad (14.31)$$

が得られる。すなわち、周期の 2 乗と長半径の 3 乗の比が一定、

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{(2\pi)^2}{GM} \quad (14.32)$$

というケプラーの第 3 法則が得られた。

実は、ケプラーの第2法則すなわち面積速度一定を用いると、周期はもっと簡単に求められる。長半径と短半径が  $A = \frac{l}{1-e^2}$ ,  $B = \frac{l}{(1-e^2)^{1/2}}$  なので楕円軌道の面積は

$$S = \pi AB = \frac{\pi l^2}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (14.33)$$

とあたえられる。

一方、面積速度は

$$h = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{(lGM)^{1/2}}{2} \quad (14.34)$$

周期は

$$T = \frac{S}{h} = \frac{2\pi l^{3/2}}{(1-e^2)^{3/2}(GM)^{1/2}} = \frac{2\pi}{(GM)^{1/2}} A^{3/2} \quad (14.35)$$

となり前の結果を再現する。

ケプラーの第3法則を前に述べた力学相似におけるスケール変換の観点から見てみよう。スケール変換にたいして、

$$t \rightarrow \lambda^3 t$$

$$\mathbf{r} \rightarrow \lambda^2 \mathbf{r}, \quad \lambda > 0,$$

に対してはエネルギー  $E$  と角運動量  $L$  は

$$L \rightarrow (\lambda^2)^2 \lambda^{-3} L = \lambda L$$

$$E \rightarrow [(\lambda^2)^2 \lambda^{-3}]^2 E = (\lambda)^{-2} E,$$

と変換するので軌道パラメタは

$$l = \frac{L^2}{GM^2 m^2} \rightarrow \lambda^2 l$$

$$e = \frac{L\sqrt{2mE}}{GM^2 m^2} \rightarrow e \quad \text{不変}$$

となる。

上に述べた軌道についての結果を用いて、惑星の位置の時間変化を見よう。角運動量  $L$  に対する式

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{ml^2}(1 + e \cos \phi)^2 \quad (14.36)$$

を積分すると

$$t = \frac{ml^2}{L} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (14.37)$$

となり、これを  $\phi$  について解けば、角度変数の運動  $\phi(t)$  が解けたことになる。動径変数  $r$  は軌道の式において  $\phi = \phi(t)$  を代入すればよい。積分

$$I = \int_0^\phi \frac{1}{(1 + e \cos \phi)^2} \quad (14.38)$$

を

$$\tan \frac{\phi}{2} = \xi \quad (14.39)$$

と置いて実行しよう。

$$\begin{aligned} I &= \int d\xi \frac{2}{1 + \xi^2} \frac{1}{\left(1 + e \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{(1 - e)^2} \int d\xi \frac{\xi^2 + 1}{(\xi^2 + \alpha^2)^2} \\ &= \frac{2}{(1 - e)^2} \left[ \int \frac{d\xi}{\xi^2 + \alpha^2} + (1 - \alpha^2) \int \frac{d\xi}{(\xi^2 + \alpha^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (14.40)$$

ここで、 $\xi = \alpha \tan \frac{\theta}{2}$  すなわち

$$\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad (14.41)$$

と置くと、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(1-e)^2} \left[ \alpha^{-1} \theta + (1-\alpha^2) \alpha^{-3} \int \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} [\theta - e \cdot \sin \theta] \end{aligned} \quad (14.42)$$

以上をまとめると、惑星の角度座標  $\phi$  の時間変化は

$$\frac{(1-e^2)^{3/2} L}{m l^2} t = \omega t = \theta - e \cdot \sin \theta \quad (14.43)$$

となる。ただし、 $\theta$  は角度座標  $\phi$  と  $\tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\theta}{2}$  の関係があり、

$$\omega = \frac{(1-e^2)^{3/2} L}{m l^2} = \frac{L}{m A B} \quad (14.44)$$

である。特に、 $e=0$  (円軌道) の場合は、 $\theta = \phi$  なり、運動は確かに等速円運動になる。

特に周期は

$$T = \frac{m l^2}{L} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1+e \cos \phi)^2} \quad (14.45)$$

となり、スケール変換に対しては確かに

$$T \rightarrow (\lambda^2)^2 \lambda^{-1} T = \lambda^3 T \quad (14.46)$$

と変換する。これと、 $l \rightarrow \lambda^2 l$  を合わせると、ケプラーの第3法則をあたえる。

次に双曲軌道について調べよう。軌道は

$$r = \frac{l}{1+e \cdot \cos \phi} \quad (e > 1) \quad (14.47)$$

書き直すと、

$$r + ex = l \quad (14.48)$$



あるいは両辺を 2 乗して

$$x^2 + y^2 = (l - ex)^2 \quad (14.49)$$

から双曲線の標準形

$$y^2 - (e^2 - 1) \left[ x - \frac{el}{e^2 - 1} \right]^2 = \frac{-l^2}{e^2 - 1} \quad (14.50)$$

を得る。

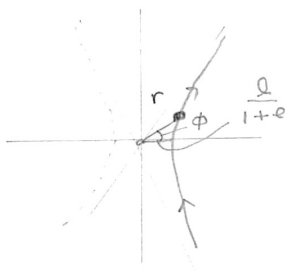


図 14.5 双曲軌道

## 第15章

# 特殊相対性理論

## SPECIAL THEORY OF RELATIVITY

### § 15.1 光速不変の原理から ローレンツ変換を導くこと

光の速さが、観測者の慣性系に関係なく一定の  $c$  であることを、光速不変の原理という。この光速不変の原理から異なる慣性系の座標の間の関係：ローレンツ変換を求めよう。

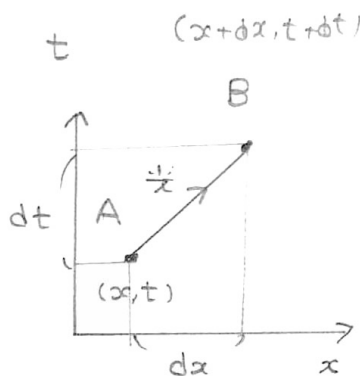


図 15.1 簡便のため空間座標は  $x$  のみ考える

簡単のために当座は空間座標としては  $x$  のみを考えて、あとで他の座標も考察する。それを  $x$  座標とする。時間座標を  $t$  とするが、便利のために光速  $c$  を掛けたもの  $ct = x^0$  を用いることもある。さて、ある慣性

系  $S$  で時刻  $t$  で場所  $x$  に起きたイベント  $A$  と時刻  $t + dt$  で場所  $x + dx$  に起きたイベント  $B$  の 2 つを考えよう。イベント  $A$  が起きたときに、光の信号を発して、イベント  $B$  が起きたちょうどその時その場所でその光の信号を受信したとしよう。そのためには

$$cdt = \pm dx \quad (15.1)$$

あるいは、時空計量： $ds^2 \equiv -(cdt)^2 + (dx)^2$  を定義して、

$$ds^2 \equiv -(cdt)^2 + (dx)^2 = 0 \quad (15.2)$$

である必要がある。全く同じイベント  $A$  と  $B$  を、 $S$  に対して  $x$  軸正の方向に速度  $v$  で運動している別の慣性系  $S'$  から見たときに、それぞれの時空座標を  $A : (t', x')$ ,  $B : (t' + dt', x' + dx')$  と書こう。光の信号の発振と受信の考察から、

$$ds'^2 \equiv -(cdt')^2 + (dx')^2 = 0 \quad (15.3)$$

を得る。

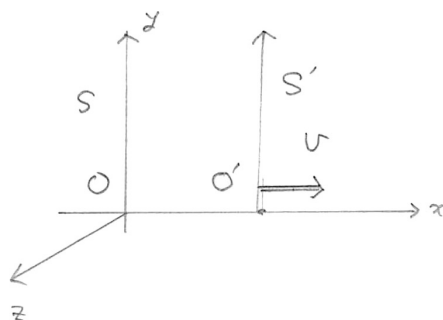


図 15.2 別の慣性系から見たとき

このことは、異なる慣性系で定義した、(一般には光の信号で結ばれているとは限らない) 2 つのイベントの間の時空計量が、比例していることを意味するだろう。比例係数は慣性系  $S$  と  $S'$  の間の相対速度  $v$  による

だろうが、 $x$  軸の取り方にはよらないはずなので相対速度の大きさにのみよるはずである。すなわち、

$$ds'^2 = A(|v|)ds^2 \quad (15.4)$$

一方、 $S'$  は  $S$  に対して  $-v$  で運動しているので、上の議論において  $S'$  と  $S$  の役割を入れ替えると

$$ds^2 = A(|v|)ds'^2 = A(|v|)^2 ds'^2 \quad (15.5)$$

である。すなわち、 $A(|v|) = \pm 1$ 。 $v = 0$  の時には、あきらかに  $S = S'$  だから  $A(0) = 1$ 。したがって、 $A$  の連続性から考えて、 $A = 1$  と結論することができる。まとめると、

$$-(cdt')^2 + (dx')^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 \quad (15.6)$$

この等式を満たす、 $(cdt, dx)$  と  $(cdt', dx')$  の間の 1 次変換は、パラメタを  $\xi$  として

$$(cdt') = \cosh \xi \cdot (cdt) - \sinh \xi \cdot dx$$

$$dx' = \cosh \xi \cdot dx - \sinh \xi \cdot (cdt)$$

と書けるだろう。結論を見越して  $\tanh \xi = \frac{v}{c}$  と置けば、上の式は

$$(cdt') = \frac{(cdt) - \frac{v}{c} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$dx' = \frac{dx - \frac{v}{c} (cdt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

とも書ける。 $S'$  系の空間座標の原点  $x' = 0$  の  $S$  系から見た運動に興味を持とう。それは、当然ながら  $S'$  系では原点  $x' = 0$  にとどまるので、 $dx' = 0$  であるが、 $S$  系からみると時間  $dt$  の間に  $dx$  進む。上の式の 2 行目から

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (15.7)$$

を得る。このことは、 $S'$  系の空間座標の原点が、 $S$  系に対して速度  $v$  で運動していることを確かにあらわしている。 $y$  方向と  $z$  方向については、以上の議論から明らかなように何の変化もないので、 $dy' = dy$ ,  $dz' = dz$  である。

以上をまとめて、ふつうの書き方をすると、

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

となる。これを慣性系  $S$  とそれに対して、 $x$  軸正の方向に速度  $v$  で運動している別の慣性系  $S'$  の間のローレンツ変換 (Lorentz transformation) と呼ぶ。

### 例題 15.1.1

慣性系  $S$  系にたいして  $x$  軸正の方向に速度  $v$  で運動している別の慣性系  $S'$  系がある。その慣性系  $S'$  に対して、 $x$  軸正の方向に速度  $v'$  で運動している第3の慣性系  $S''$  を考えよう。 $S''$  と  $S$  の座標の間の関係を求めよ。

---

[ヒント]

$$dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dt'' = \frac{dt' - \frac{v'}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

$$dx'' = \frac{dx' - v' dt'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}$$

において上の2式を下の2式に代入して整理すると

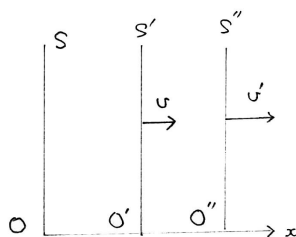
$$dt'' = \frac{dt - \frac{w}{c^2} dx}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$$

$$dx'' = \frac{dx - w dt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}},$$

$$w = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad (15.8)$$

となる。速度が小さいときには、 $w = v + v' \dots$  となり、近似的に速度の和になる。簡単な計算で、 $w$  が  $c$  より小さいことを示すことができる。すなわち、慣性系の間の速度は、ローレンツ変換をくり返しても光速を越えることができない。

特別な場合として、 $v' = c$  を考えると  $w = c$  となる。これは、 $S'$  系において光速で運動する粒子は静止系でも光速で運動することを意味するので、光速不変の原理を再確認したことになる。

図 15.3  $S''$  と  $S$  の座標の間の関係を求める**例題 15.1.2**

静止している観測者に対して光速に近い速度で向かってくる系を考えよう。運動系で等方的に発射した光を静止している観測者が見たときの分布を求めよ。

[ヒント]

ローレンツ因子を  $\gamma$  として、 $\theta < \frac{1}{\gamma}$  の範囲にある。(相対論的ビーミング効果)

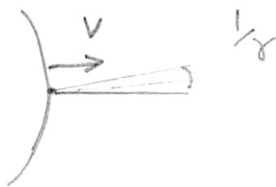


図 15.4 相対論的ビーミング効果

## §15.2 ローレンツ変換にたいして 不変な作用—自由粒子

相対論的な運動をする質点を考えよう。作用にローレンツ変換にたいする不変性を要求し、しかも速度が光速に比べて小さいときには、非相対論的な作用に一致するものを探そう。前節で、世界距離  $ds^2$  が不変であることを見たのでそれを参考にしよう。粒子の時空座標を  $(t, x)$  とすると、

$$\int \sqrt{(cdt)^2 - (dr)^2} = c \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad (15.9)$$

はローレンツ変換に対して不変である。比例係数をあとで都合の良いように  $-mc$  と選ぶと、作用は

$$S = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad (15.10)$$

と書ける。速度が光速に比べて小さいときには、根号をテイラー展開して、 $\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \dots$  だから作用は

$$S = \int dt \left[ -mc^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \dots \right] \quad (15.11)$$

と展開できる。第1項は定数なので作用原理にとってはどうでもよい項である。第2項は、非相対論的な運動をする質点に対する作用に他ならない。したがって、作用  $S$  はローレンツ変換にたいする不変性を持ち、しかも速度が光速に比べて小さいときには、非相対論的な作用に一致するので、求めていたものであることが分かる。

従って、ラグランジアンは

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad (15.12)$$



であたえられる。このラグランジアンは、もちろん、空間の一様性と等方性を持っているので、運動量と角運動量は保存する。

運動量  $\mathbf{p}$  は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{m \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 / c^2}} \quad (15.13)$$

とあたえられる。角運動量は、非相対論的な議論と同様にして、 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  となる。時間の並進に対する不変性から、エネルギーの表式：

$$E = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 / c^2}} \quad (15.14)$$

を得る。速度が光速に比べて小さい場合に、 $\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 / c^2 (\ll 1)$  についてテイラー展開をすると、エネルギーは

$$E = mc^2 + \frac{m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{2} + \dots \quad (15.15)$$

となる。第 1 項は、静止エネルギーと呼ばれるもので定数である。第 2 項は非相対論的力学における運動エネルギーである。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 / c^2}} \right) = 0 \quad (15.16)$$

となる。

## § 15.3 相対論的荷電粒子の運動

相対論的荷電粒子の運動をあらわすラグランジアンは、非相対論的な場合を参考にとすると、

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{c^2}} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \quad (15.17)$$

と予想される。

オイラー・ラグランジュ方程式は非相対論的な場合とほとんど同様な計算により、

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{c^2}}} \right) = e[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}] \quad (15.18)$$

となる。右辺のローレンツ力は非相対論的な場合と同じ形をしている。

### 例題 15.3.1

$x$  軸方向に一定・一様な電場  $E$  があるときに相対論的な荷電粒子の運動を解け。

[ヒント]

$x$  座標だけ考えれば十分である。運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{c^2}}} \right) = eE \quad (15.19)$$

となる。 $\alpha = \frac{eE}{mc}$  と置いて上の微分方程式を一回積分すると

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{c\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2/c^2}} = \alpha t. \quad (15.20)$$

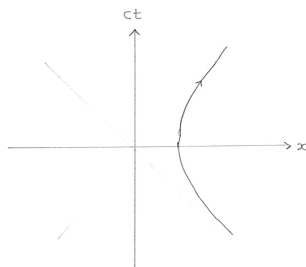
ここで、記述を簡単にするために、時間座標  $t$  の原点を適当に選んで、初速度  $\frac{dx}{dt}|_{t=0}$  をゼロに取った。上の式を積分する方便として  $\frac{dx}{dt} = \tanh \psi$  と置くと、左辺は  $\sinh \psi$  となり  $\sinh \psi = \alpha t$  を得る。すなわち、

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{c} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} \quad (15.21)$$

を得る。この式は、時間が十分経つと、粒子の速度が光速に近づくことを意味する。もともとの運動方程式が、一定加速度  $c\alpha$  で運動する粒子を記述して行いたので、これと粒子の運動は光速を越えないと言う相対論の要請と合わせると、理解しやすい。上の微分方程式をさらにもう一回積分すると、簡単のために座標原点を初期値  $x|_{t=0}$  を上手に取ると、

$$x = \frac{c\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}{\alpha} \quad (15.22)$$

となる。グラフに描くと図 15.5 のようになる。軌跡は無限遠方から光速に近い速度で接近し、転回してまた光速に近い速度で去っていく形をしている。漸近線は図では  $\pm 45$  度の直線で、それぞれ  $ct = -x$  と  $ct = x$  である。

図 15.5  $x$  方向に一定・一様な電場があるときの相対論的な荷電粒子の運動**例題 15.3.2**

$z$  軸方向に一定・一様な磁場  $B$  があるときに相対論的な荷電粒子の運動を解け。

[ヒント]

簡単のために粒子の運動は  $x-y$  平面内に限定されていると考えよう。あとで  $z$  方向の運動も考えに入れよう。

運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{dx}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \right) = e \frac{dy}{dt} B$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \frac{dy}{dt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \right) = -e \frac{dx}{dt} B$$

まず、エネルギー保存則から  $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$  が定数であ

ることが導ける。従って運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{eBc^2}{E}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} \frac{eBc^2}{E}$$

となり、非相対論的なものにおいて  $m \rightarrow \frac{E}{c^2}$  と置き換えただけで同じかたちになる。従って、解き方も同じである。z 方向の運動は等速運動になるのはすぐ見て取れる。保存するエネルギーは

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{dx}{dt})^2}{c^2} - \frac{(\frac{dy}{dt})^2}{c^2} - \frac{(\frac{dz}{dt})^2}{c^2}}}$$

## §15.4 相対論的運動学

すでに述べたように質量  $m$ 、速度  $v$  の相対論的粒子の運動量  $p$  は

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.23)$$

であり、エネルギー  $E$  は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15.24)$$

である。特に粒子が静止している場合に

$$E_0 = mc^2 \quad (15.25)$$

は静止エネルギーとよばれる。この式は、質量がエネルギーと等価であるという意味で有名である。

この2つの式から  $v$  を消去して、エネルギー  $E$  を運動量  $p$  であらわすことも有用である。

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (15.26)$$

以下に例を示そう。

### §15.4.1 粒子の崩壊

粒子の崩壊における、運動量とエネルギーの保存則を調べよう。静止している質量  $M$  の粒子が質量  $m$  の2個の粒子に崩壊するプロセスを考えよう。運動量の保存則から、終状態における片方の粒子の運動量を  $p$  とおけば、もう片方のそれは  $-p$  である。したがって、エネルギーの保存則は

$$Mc^2 = 2 \times \sqrt{m^2 c^2 + p^2 c^2} \quad (15.27)$$

と書ける。

これを運動量  $p$  について解けば

$$p = \sqrt{M^2 - 4m^2} c \quad (15.28)$$

となる。



図 15.6 粒子の崩壊



## 第16章

# 正準形式

## CANONICAL FORMALISM

これまでは、ラグランジアンを出発点として力学を組み立ててきたが、これからは正準形式と呼ばれる少し違うやり方を述べよう。正準形式は量子力学に移行するための標準的な形式である。そこでは、座標とともに運動量が力学変数になっており、ラグランジアンのかわりにハミルトニアンと呼ばれるエネルギーが力学を特徴づける。

### §16.1 実現される作用

作用積分  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t'), \dot{q}(t')) dt'$  において、 $q(t')$  を  $q(t_1) = q_1$  (固定する) を初期値としたオイラー・ラグランジュ方程式をみたす解  $\bar{q}(t')$  であるとしよう。したがって、同じ  $S$  という記号で書いているが、変分原理における作用とは意味が根本的に違う。区別するためにこれを実現される作用と呼ぼう。

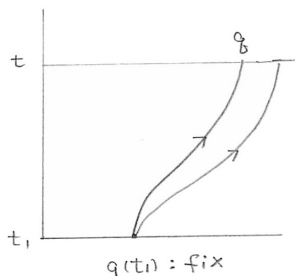


図 16.1  $q(t')$  の  $t' = t_1$  における値を  $q(t_1)$  に固定する



したがって  $S$  は上端の時間  $t_2$  の関数であるが、このことをはっきりさせるために  $t \equiv t_2$  と書き、また  $t_2$  における位置座標  $q(t_2)$  の関数でもあるので、これも  $q \equiv q(t_2)$  と書くと、実現される作用  $S = \int_{t_1}^t L(\bar{q}(t'), \dot{q}(t')) dt' = S(q, t)$  は  $q$  と  $t$  の関数である。変分原理の時の作用が、あらゆる可能な経路  $\{q\}$  の「汎関数」であったこととははっきり区別しよう。

このことからただちに、 $q$  を変えた場合の作用の変化分が計算できる。すなわち、

$$\delta S = L \delta t + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta q dt'. \quad (16.1)$$

$q(t')$  はオイラー・ラグランジュ方程式を充たすので、第 3 項はゼロである。したがって、

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^t = p \delta q \quad (16.2)$$

ここで、

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (16.3)$$

と書いた。この  $p$  を  $q$  に共役な**共役運動量 (conjugate momentum)** と呼ぶ。

作用の変化分に対する式を偏微分の形式で書くと

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p \quad (16.4)$$

となる。一方あきらかに

$$\frac{dS}{dt} = L \quad (16.5)$$

であるが、左辺を変形すると

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} = \frac{\partial S}{\partial t} + p \dot{q} \quad (16.6)$$

となるから

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - p\dot{q} \quad (16.7)$$

である。ここで、ハミルトニアン (**Hamiltonian**)  $H(q, p)$  を

$$H(q, p) \equiv p\dot{q} - L \quad (16.8)$$

と定義すると、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad (16.9)$$

となる。ただし、ハミルトニアン  $H$  は、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$  を  $\dot{q}$  について解いて、 $q$  と  $p$  の関数であらわしたものである。

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$  を  $\dot{q}$  について一義的に解けない場合もある。そのようなラグランジアンを特異なラグランジアンと呼ぼう。実は、電磁気学を含むゲージの理論、一般相対性理論、さらには弦理論まで素粒子の最新理論はすべて特異なラグランジアンを持つ。

ここでは、相対論的な粒子を記述する  $\tau$  でパラメータづけされたラグランジアン

$$L = -mc \sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2} \quad (16.10)$$

の例をあげよう。

$$p_t = \frac{\partial L}{\partial \frac{dt}{d\tau}} = \frac{mc^2 \frac{cdt}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx}{d\tau}} = -\frac{mc \frac{dx}{d\tau}}{\sqrt{\left(\frac{cdt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}}$$

だから、共役運動量  $p_t$  と  $p_x$  のあいだには

$$(p_t)^2 - c^2(p_x)^2 = m^2 c^4 \quad (16.11)$$

の関係がある。このことは、共役運動量  $p_t$  と  $p_x$  が独立でないことを示すので、速度  $\frac{dt}{d\tau}$  と  $\frac{dx}{d\tau}$  を共役運動量  $p_t$  と  $p_x$  で一意的にあらわすことはできない。

上の関係式には、エネルギーと運動量の関係という物理的な意味がある。一般に座標と運動量の間にある関係があつて、運動が相空間のある超曲面に制限される場合に、それらを**拘束条件 (constraint)** と呼ぶ。拘束条件のある力学系を拘束系と呼ぶが、拘束系の一般論については他書にゆずる。

以上をまとめると

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial q} &= p \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= -H\end{aligned}$$

であるので、

$$dS = p dq - H dt \quad (16.12)$$

となる。

例としてラグランジアンが

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \quad (16.13)$$

の場合を考えよう。

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \quad (16.14)$$

だから、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}H(q, p) &= p \dot{q} - L \\ &= m \dot{q}^2 - \left[ \frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right] \\ &= \frac{m}{2} \dot{q}^2 + V(q) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(q)\end{aligned} \quad (16.15)$$

と書ける。右辺が、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和すなわち全エネルギーになっていることに注意しよう。

### 例題 16.1.1

電磁場中の荷電粒子の運動をあらわすハミルトニアンを求めよ。

[ヒント]

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}). \quad (16.16)$$

を思い出そう。運動量は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m(\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{A}) \quad (16.17)$$

となる。したがって、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \\ &= [m(\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{A})] \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} + e(\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \\ &= \frac{m(\dot{\mathbf{r}})^2}{2} + e\phi \\ &= \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi \end{aligned}$$

とあたえられる。

形から明らかなように、ハミルトニアンはエネルギーの意味を持つ。ハミルトニアンの定義式を書き直すと：

$$-H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = L - \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (16.18)$$

とも書ける。これを変数を  $(q, \dot{q})$  から  $(q, p)$  に取り替えにともなう  $L \rightarrow -H$  のルジャンドル変換 (Legendre transformation) と見なすこと

ができる。<sup>\*1</sup>

ここで、変分原理を正準変数  $p, q$  を変数とするハミルトニアン形式で書こう。ただし、時間の両端で固定するものは座標  $q$  である。

時刻  $t_2$  と  $t_1$  の間を  $N$  個に細分し、 $\delta t = \frac{t_2 - t_1}{N}$  とおいて、ある時刻  $t$  と  $t + \delta t$  の短い区間の運動を考えてみよう。その区間での出発点  $q(t)$  をあたえられたものとして固定して、短い区間での運動の到達点  $q(t + \delta t)$  を求めると考えよう。 $\delta q = q(t + \delta t) - q(t)$  と置くと、その間の作用の

---

<sup>\*1</sup> 物理学の中であらわれるルジャンドル変換の例として、熱力学における変数の変換がある。熱力学第一法則：

$$dU = TdS - pdV \quad (16.19)$$

において内部エネルギー  $U = U(S, V)$  はエントロピー  $S$  と体積  $V$  の関数である。変数をたとえば、温度  $T$  と体積  $V$  にしたければ、ルジャンドル変換： $F = U - TS$  を行い第一法則を書き直すと

$$dF = dU - TdS - dTS = -pdV - SdT \quad (16.20)$$

となる。 $F$  はヘルムホルツの自由エネルギーと呼ばれる。

ルジャンドル変換： $L \rightarrow -H$  がいつでもできるとは限らないことに注意しよう。 $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$  を  $\dot{q}$  について解いて  $p$  の関数として一意的とは限らないからである。ラグランジャンが  $\dot{q}$  の凸関数であれば、可能である。

理由を一般的なルジャンドル変換の中で説明しよう。 $f(x)$  (一般性を失うことなく、 $f(0) = 0$  とする) を凸関数として、その微係数を

$$p = \frac{df(x)}{dx} \quad (16.21)$$

と置こう。ルジャンドル変換： $x \rightarrow p$  を行うためには、 $p = \frac{df(x)}{dx}$  を  $x$  について解かなければならない。直線  $y = px$  と曲線  $y = f(x)$  の差：

$$F(p) = px - f(x) \quad (16.22)$$

の最大値を  $g(p)$  とし、 $(x, f(x)) \rightarrow (p, g(p))$  をルジャンドル変換の定義とする流儀もある。その場合には曲線  $y = f(x)$  は下に凸の関数でなければならない。幾何学的には、曲線  $y = f(x)$  を、それに接する接線の傾きと、切片の  $y$  座標で表すことに対応している。

どちらでもない例をあげよう。 $f(x) = \frac{x^3}{3}$  は、 $x < 0$  では凹関数で  $x > 0$  では凸関数である。しかし、 $x$  の全領域では凸でも凹でもない。この例では  $\frac{df(x)}{dx} = x^2$  だから  $x > 0$  では  $x = \sqrt{p}$ 、 $x < 0$  では  $x = -\sqrt{p}$  である。

変化は

$$\delta S = p\delta q - H\delta t \quad (16.23)$$

これをくり返して、 $t_1$  から  $t_2$  まで足しあげると作用は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p\delta q - H\delta t] = \int_{t_1}^{t_2} [p\dot{q} - H(q, p)] dt \quad (16.24)$$

となる。ここで力学変数は、座標  $q$  と共役運動量  $p$  であることに注意しよう。作用を上形で書くことと、ラグランジアンによるものは等価であるが、上の形式が便利なのも多い。 $(q, p)$  であらわされる空間を**相空間 (phase space)**と呼ぶ。上の作用を相空間で定義された作用と呼ぶこともある。

変分原理を相空間で定義された作用に適用すると、

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta p \dot{q} + p \delta \dot{q} - \delta H(q, p)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta p \dot{q} - \dot{p} \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt = 0. \end{aligned}$$

ここで、時間について部分積分を行い積分の両端で  $\delta q = 0$  とした。<sup>2</sup> さて、 $\delta q$  と  $\delta p$  は任意だったので、( ) の中がゼロでなければならない。すなわち、

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

となる。

---

<sup>2</sup> このことと、実現された作用のところの議論は混同しないで欲しい。

これをハミルトンの運動方程式 (**Hamilton's equation**) と呼ぶ。その内容は共役運動量の定義と、オイラー・ラグランジュ方程式と等価であるが、この新しい形式の方が便利ことがある。たとえば量子力学に移行するときに役に立つ。

ここでいくつかの力学系のハミルトンの運動方程式の例を見よう。まず、ポテンシャル  $V(q)$  のなかで運動する質点の場合：

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (16.25)$$

に、ハミルトンに運動方程式は

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \end{aligned}$$

となり、第 1 式と第 2 式を組み合わせたものが、オイラー・ラグランジュ方程式と等価である。言い換えると、ハミルトンの方程式は、2 階微分方程式であるオイラー・ラグランジュ方程式を 1 階微分方程式 2 本に書き換えたものとみなせる。

つぎに、電磁場中の荷電粒子の運動をあらわすハミルトニアン<sup>1</sup>の運動方程式を求めよう。ハミルトニアンは

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi \quad (16.26)$$

であたえられることはすでに見た。ハミルトニアン<sup>1</sup>の運動方程式を書き下すと、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p} + e\mathbf{A}}{m} \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_i} \\ &= -e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_i} + e \sum_j \frac{\mathbf{p} + e\mathbf{A}}{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{r}_i} \end{aligned}$$

となり、第1式と第2式を組み合わせたものが、ローレンツ力の方程式と等価である。これを導くときに、

$$\frac{d\mathbf{A}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} + \sum_j \dot{\mathbf{r}}_j \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{r}_j}$$

に注意して第2式を変形すると

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = e \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} - e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_i} \right] + e \sum_j \dot{\mathbf{r}}_j \left[ \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{\partial \mathbf{A}_j}{\partial \mathbf{r}_i} \right]$$

となる。ここで、電場と磁場をスカラーポテンシャルとベクターポテンシャルで定義した式：

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial t} - e \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}_i}$$

$$\mathbf{B}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial \mathbf{r}_j}$$

を用いれば第2式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e[\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}] \quad (16.27)$$

となり、たしかにローレンツの式を再現する。

### 例題 16.1.2

調和振動子のラグランジアン：

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (16.28)$$

に対してハミルトニアンを構成して、ハミルトンの方程式を立てよ。ハミルトンの方程式を解いて、相空間における軌道として図示せよ。

---

[ヒント]



ハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (16.29)$$

であり、ハミルトンの方程式は

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -m\omega^2 q \end{aligned}$$

である。ハミルトンの方程式の解は

$$\begin{aligned} q &= A \sin(\omega t + \delta) \\ p &= mA\omega \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

である。この時、ハミルトニアンすなわちエネルギーは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = E \quad (16.30)$$

と当然ながら定数である。したがって、相空間上で運動の軌跡は楕円である。

ちなみに、その囲む面積は  $\pi \times \text{長径} \times \text{短径}$  すなわち

$$\pi\sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = 2\pi \frac{E}{\omega} \quad (16.31)$$

となる。<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup> 前期量子論では、相面積はプランク定数  $h$  の整数倍である。したがって、 $n$  を整数としてエネルギーは量子化されて、 $E = n\hbar\omega$  となる。

## 第17章

# モーペルティユイの原理

## MAUPERTUIS' PRINCIPLE

エネルギーが保存している系の、粒子の軌跡を求めることに関心があるとして。すなわち、自由度  $s$  の系に対して

$$H(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_s) = E \quad \text{固定} \quad (17.1)$$

この時、作用

$$S = \int \left( \sum_i p_i dq_i - E dt \right) \quad (17.2)$$

のうち、第1項だけが変分問題に有効であるので、それを簡約化された作用と呼ぼう。ラグランジアンが普通の形をしている時、

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} - V(q) \quad (17.3)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{dq_i}{dt}} = \sum_j a_{ij}(q) \frac{dq_j}{dt}$$

$$E = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} + V(q)$$

$$\rightarrow dt = \sqrt{\frac{1}{2[E - V(q)]}} \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j$$

だから、簡約化された作用は

$$\begin{aligned}
 S_{\text{red}} &= \int \sum_i p_i dq_i \\
 &= \int \sqrt{2(E - V(q)) \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j} \\
 &:= \int \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j}
 \end{aligned}$$

と書ける。ただし、ここで

$$g_{ij}(q) = 2(E - V(q))a_{ij}(q) \quad (17.4)$$

と置いた。簡約化された作用の形はちょうど、以前に述べた計量  $g_{ij}$  を持つ  $s$  次元空間の幾何学における曲線の長さになっている。したがって、それに対して最小作用の原理を要求すると、計量  $g_{ij}$  を持つ曲がった空間の測地線の方程式：

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i(q) \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0 \quad (17.5)$$

を得る。ただし、クリストッフエル記号： $\Gamma_{jk}^i$  は

$$\Gamma_{jk}^i = \sum_m \frac{1}{2} g^{im} \left[ \frac{\partial g_{jm}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^m} \right] \quad (17.6)$$

このようにして幾何学的な描像が使えるので、モーペルティユイの原理による軌跡の分析は有利である。さらに、時間発展を知りたいければ、以前に導いた式： $dt = \sqrt{\frac{1}{2[E - V(q)]}} \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j$  を時間積分して

$$t - t_0 = \int \sqrt{\frac{1}{2[E - V(q)]}} \sum_{ij} a_{ij} dq_i dq_j \quad (17.7)$$

を用いればよい。

例題として、モーペルティユイの原理を用いて、惑星の軌道を再現してみよう。角運動量保存則のために軌道が平面に限定されることを利用すると、極角を  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (運動は  $x$ - $y$  平面内) として一般性を失わない。ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{GmM}{r} \quad (17.8)$$

である。

簡約化された作用は

$$\begin{aligned} S_{\text{red}} &= \int \sqrt{2m \left( E + \frac{GmM}{r} \right) [(dr)^2 + r^2 (d\phi)^2]} \\ &= \int \sqrt{2m \left( E + \frac{GmM}{r} \right) \left[ 1 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \right]} dr \\ &:= \int L_{\text{red}} \left( \phi, \frac{d\phi}{dr} \right) \end{aligned}$$

となる。

この極値をあたえるオイラー・ラグランジュ方程式が第一積分を持つことが、 $\phi$  が循環変数であること、すなわち  $L_{\text{red}} \left( \phi, \frac{d\phi}{dr} \right)$  が  $\phi$  にあらずに依らないことからわかる。

すなわち、

$$\frac{\partial L_{\text{red}}}{\partial \left( \frac{d\phi}{dr} \right)} = \frac{r^2 \frac{d\phi}{dr} \sqrt{2m \left( E + \frac{GmM}{r} \right)}}{\sqrt{1 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2}} = \text{const.} := \sqrt{2ma} \quad (17.9)$$

は一定である。整理すると、

$$r^4 \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \left( E + \frac{GmM}{r} \right) = a^2 \left[ 1 + r^2 \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 \right] \quad (17.10)$$

となる。 $r = 1/u$  と置いて、

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{du} &= \frac{a}{\sqrt{E + GMmu - a^2u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{E}{a^2} + \frac{G^2M^2m^2}{4a^4} - \left(u - \frac{GMm}{2a^2}\right)^2}}\end{aligned}\quad (17.11)$$

と書いて積分する。 $u' = u - \frac{GMm}{2a^2}$ 、 $A^2 = \frac{E}{a^2} + \frac{G^2M^2m^2}{4a^4}$  と置くと

$$\phi = \int \frac{du'}{\sqrt{A^2 - u'^2}} = \text{Cos}^{-1} \frac{u'}{A} \quad (17.12)$$

となる。整理すると、

$$u = \frac{GMm}{2a^2} + A \cos \phi \quad (17.13)$$

となるので、惑星の軌道として結局

$$r = \frac{l}{1 + e \cdot \cos \phi} \quad (17.14)$$

を再現した。

ただし、

$$\begin{aligned}l &= \frac{2a^2}{GMm} \\ e &= \frac{\sqrt{\frac{E}{a^2} + \frac{G^2M^2m^2}{4a^4}}}{\frac{GMm}{2a^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4a^2E}{G^2M^2m^2}} \quad (< 1)\end{aligned}$$

$2a^2 = \frac{L^2}{m}$  と置けば、以前の表式 (14.21) に一致する。

## 第18章

# 正準変換

## CANONICAL TRANSFORMATION

ラグランジュ形式の場合、座標の取り方は任意である。ハミルトン形式では座標と共役運動量をひっくるめて変換することも可能である。この相空間での変換を正準変換と呼ぶ。

まず簡単な、座標だけの変換である点変換を考えよう。

### §18.1 点変換 (Point Transformation)

新しい座標： $Q^I$ ,  $I = 1, \dots, N$  と古い座標： $q^i$ ,  $i = 1, \dots, q^N$  の関係が

$$Q^I = Q^I(q^1, q^2, \dots, q^N) \quad (I = 1, \dots, N) \quad (18.1)$$

と与えられたとしよう。

これを時間微分すると

$$\dot{Q}^I = \sum_i \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \dot{q}^i \quad (18.2)$$

となる。新しい変数で書かれたラグランジアンは

$$L(Q^I, \dot{Q}^I) = L \left( Q^I(q^1, q^2, \dots, q^N), \sum_i \frac{\partial Q^I(q^1, q^2, \dots, q^N)}{\partial q^i} \dot{q}^i \right) \quad (18.3)$$

と書き直すと、古い変数  $q^i$  とその時間微分の関数と見なすことのでき

る。 $q^i$  に共役な運動量  $p_i$  は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \sum_I^N \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}^I} = \sum_I^N \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} P_I \quad (18.4)$$

あるいは、これを逆に解いて、

$$P_I = \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} p_i \quad (18.5)$$

を得る。以上をまとめて  $Q^I = Q^I(q^1, q^2, \dots, q^N)$ ,  $P_I = \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} p_i$  を正準変数の変換:  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  とみなすことができる。

この変換のもとでハミルトンの方程式が不変であることを以下で示そう。

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

から

$$\dot{Q}^I = \frac{\partial H}{\partial P_I}$$

$$\dot{P}_I = -\frac{\partial H}{\partial Q^I}$$

を導くことができるし逆も成り立つ。

証明は直接的である。

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}^I &= \sum_i \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \dot{q}^i \\
 &= \sum_{ij} \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^J} \dot{Q}^J \\
 &= \sum_{ij} \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^J} \frac{\partial H}{\partial P^J} \\
 &= \frac{\partial H}{\partial P^I}
 \end{aligned} \tag{18.6}$$

ここで、偏微分の鎖則： $\sum_i \frac{\partial Q^I}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^J} = \delta_J^I$  を用いた。同様にして

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_I &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} p_i \right) \\
 &= \sum_i \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^I \partial Q^J} \dot{Q}^J p_i + \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \dot{p}_i \\
 &= \sum_i \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^I \partial Q^J} \dot{Q}^J p_i - \sum_i \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial H}{\partial q^i} \\
 &= \sum_i \frac{\partial^2 q^i}{\partial Q^I \partial Q^J} \dot{Q}^J p_i - \sum_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \left( \frac{\partial Q^J}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial Q^J} + \frac{\partial^2 q^k}{\partial Q^J \partial Q^K} \frac{\partial Q^J}{\partial q^i} p_k \frac{\partial H}{\partial P_K} \right) \\
 &= - \frac{\partial H}{\partial Q^I}.
 \end{aligned}$$

ここで、第1項と第3項が相殺していることに注意し、第2項を前に述べた偏微分の鎖則を用いた。この証明で、 $Q^I = Q^I(q^1, q^2, \dots, q^N)$  の関係が時間をあらわに含んでいても成立することに注意しよう。



## § 18.2 正準変換の一般論

次に、逆にハミルトンの方程式を不変にする相空間における変換が何であるかを考えよう。相空間での古い変数： $(q, p)$  であらわしたものと新しい変数： $(Q, P)$  であらわしたものとで作用を 2 通りに書いてみよう。

$$S = \int \left( \sum_i p_i dq^i - H dt \right)$$

$$S' = \int \left( \sum_I P_I dQ^I - H' dt \right)$$

新しいハミルトニアン  $H'$  は古いハミルトニアン  $H$  と一般には異なる。

前に述べたように、作用の差  $S - S'$  が積分の両端の量のみの関数であれば、 $S$  と  $S'$  は同じ力学系をあたえるので、作用の差  $S - S'$  が積分の両端の量のみの関数であることを要求しよう。<sup>\*1</sup>

すなわち、 $F(q, Q, t)$  をある  $q, Q$  の関数として、

$$\sum_i p_i dq^i - H dt = \sum_I P_I dQ^I - H' dt + dF \quad (18.7)$$

であることを要求しよう。右辺に加えられた完全微分の項は、時間積分すると時間の両端にのみによる項を作用につけ加える。上の式を書き換

---

<sup>\*1</sup> このことを詳しく説明しよう。作用の変分を古い変数と新しい変数の両方で書き表して見よう。

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt = 0$$

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{Q} - \frac{\partial H'}{\partial P} \right) \delta P - \left( \dot{P} + \frac{\partial H'}{\partial Q} \right) \delta Q \right] dt = 0.$$

したがって、新しい変数  $(Q, P, H')$  でのハミルトンの方程式  $\dot{Q} - \frac{\partial H'}{\partial P} = 0$ ,  $\dot{P} + \frac{\partial H'}{\partial Q} = 0$  が古い変数  $(q, p, H)$  に対するハミルトンの方程式  $\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} = 0$ ,  $\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0$  を意味する。この意味で 2 つの力学系は等価である。

えると

$$dF(q, Q) = \sum_i p_i dq^i - \sum_I P_I dQ^I + (H' - H)dt \quad (18.8)$$

となる。同じ事を偏微分で書けば、

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial q^i} \\ P_I &= -\frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial Q^I} \\ H' &= H + \frac{\partial F(q, Q, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

となる。

$F = F(q, Q, t)$  を正準変換  $(q, p, H) \rightarrow (Q, P, H')$  の母関数と呼ぶ。上の変換則がハミルトンの方程式を不変にすることは、その構成法から明らかである。母関数  $F(q, Q, t)$  が、古い変数と新しい変数の両方に依存することに注意しよう。

あるいはルジャンドル変換  $\Phi(q, P, t) = F(q, Q, t) + \sum_I P_I Q^I$  を行って母関数の変数を  $(q, Q)$  から  $(q, P)$  に変更しよう。

$$d\Phi(q, P, t) = \sum_i p_i dq^i + \sum_I Q_I dP^I + (H' - H)dt \quad (18.9)$$

だから、

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial q^i} \\ Q^I &= \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial P_I} \\ H' &= H + \frac{\partial \Phi(q, P, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

と書ける。

## 例題 18.2.1

調和振動子のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (18.10)$$

であたえられる。正準変換  $(q, p, H) \rightarrow (Q, P, H')$  が

$$P = H(q, p)$$

$$Q = \frac{1}{\omega} \tan^{-1} \frac{m\omega q}{p}$$

$$H' = 0$$

であたえられるときに、正準変換の母関数を求めよ。

[ヒント]

$$\begin{aligned} pdq - PdQ &= \frac{m\omega q}{\tan \omega Q} dq - \frac{m\omega^2 q^2}{2 \sin^2 \omega Q} dQ \\ &= d \left( \frac{m\omega^2 q^2}{2 \tan \omega Q} \right) \end{aligned} \quad (18.11)$$

だから母関数を

$$F(q, Q) = \frac{m\omega^2 q^2}{2 \tan \omega Q} \quad (18.12)$$

と取ればよい。新しい変数で作用は

$$S' = \int PdQ - Pdt \quad (18.13)$$

だから、ハミルトンの方程式  $\dot{P} = 0$  と  $\dot{Q} = 1$  が出てくるので、解は

$$P = \text{const.} \quad Q = t \quad (18.14)$$

となる。これを、 $q$  と  $p$  について解けば、よく知られた調和振動の解になる。

### 例題 18.2.2

$\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャルとして、質量  $m$ 、電荷  $e$  の荷電粒子に対するラグランジアン：

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \quad (18.15)$$

を考えよう。

- (1)  $z$  方向に一定一様磁場がある場合、運動を  $(x, y)$  平面に限って考えよう。このときベクトルポテンシャルは  $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x)$  で与えられる。上のラグランジアンを 2 次元の極座標  $r, \phi$  で書き表すと

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{eB}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (18.16)$$

となることを示せ。

- (2)  $r$  に共役な運動量を  $p_r$ 、 $\theta$  に共役な運動量を  $p_\theta$  としてハミルトニアン  $H$  が

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{eB}{2m} p_\theta + \frac{m}{2} \left( \frac{eB}{2m} \right)^2 r^2 \quad (18.17)$$

となることを示せ。

- (3) 新しい運動量を  $P_R, P_\Theta$  として、時間による正準変換を母関数：

$$\Phi(P_R, P_\Theta, r, \phi, t) = P_R \cdot r + P_\Theta \cdot \theta - P_\Theta \frac{eB}{2m} t \quad (18.18)$$

で行うと

$$H = \frac{P_R^2}{2m} + \frac{P_\Theta^2}{2mR^2} + \frac{m}{2} \left( \frac{eB}{2m} \right)^2 R^2 \quad (18.19)$$

と 2 次元調和振動子と同じ形になることを示せ。

新しい座標と古い座標の関係は、 $R = \frac{\partial \Phi}{\partial P_R} = r$ 、 $\Theta = \theta - \frac{eB}{2m} t$  になるが、これは角速度  $\frac{eB}{2m}$  の回転座標系で記述したことに対応する。回転座標系では 2 次元調和振動子と同等になる。(ラーマーの定理)

## 第19章

# ポアッソンの括弧式

## POISSON BRACKET

ハミルトン形式は、座標と運動量を対等に扱っている。そのことは、例えば、ハミルトンの方程式の形によく現れている。ここでは、その相空間の対称性をさらに追求してみよう。相空間における座標と運動量を  $q^i, p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) としよう。相空間上で定義された物理量を、 $A(q, p)$ ,  $B(q, p)$  などとしよう。

まず、ポアッソンの括弧式： $\{A, B\}_{PB}$  を次のように定義しよう。

$$\{A, B\}_{PB} = \sum_i \left[ \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p_i} \right] \quad (19.1)$$

明らかに、ポアッソンの括弧式： $\{A, B\}_{PB}$  は以下の性質を充たす。

(1) 反対称性

$$\{A, B\}_{PB} = -\{B, A\}_{PB} \quad (19.2)$$

(2) 双一次性

$a, b, c$  を任意の実数として、

$$\{aA + bB, C\}_{PB} = a\{A, C\}_{PB} + b\{B, C\}_{PB}$$

$$\{A, bB + cC\}_{PB} = b\{A, B\}_{PB} + c\{A, C\}_{PB}$$

が成り立つ。

(3) ヤコビの恒等式

$$\{A, \{B, C\}_{PB}\}_{PB} + \{B, \{C, A\}_{PB}\}_{PB} + \{C, \{A, B\}_{PB}\}_{PB} = 0 \quad (19.3)$$

双一次性は、定数  $a$  に対して  $\{a, A\}_{PB} = 0$  であることを見れば明らかであろう。

最後のヤコビの恒等式だけはそれほど自明でないかもしれないが、具体的に書き下し、偏微分の順番を入れ替えてもよいことを用いると証明できるが、退屈なので省略する。ただし、演算  $\{ \ , A \}_{PB}$  に対するライブニッツ則：

$$\{fg, A\}_{PB} = f\{g, A\}_{PB} + \{f, A\}_{PB}g \quad (19.4)$$

が成り立つことに注意すると計算が楽になる。次の節の末尾に、ポアッソン括弧式の幾何学的な意味に動機づけられたもっと見通しの良い証明をあたえる。

ポアッソン括弧式を用いると、ハミルトンの方程式は座標と運動量はより対称的になる。すなわち、

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q^i, H\}_{PB} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} = \{p_i, H\}_{PB} \end{aligned}$$

一般に、任意の物理量  $A(q, p, t)$  の時間微分は

$$\frac{d}{dt}A(q, p, t) = \frac{\partial}{\partial t}A(q, p, t) + \{A(q, p, t), H\}_{PB} \quad (19.5)$$

となる。証明は以下の通りである。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(q, p, t) &= \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_i \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ &= \frac{\partial A(q, p, t)}{\partial t} + \{A(q, p, t), H\}_{PB} \end{aligned}$$

## § 19.1 変換の生成子 (Generator of Transformation)

特に、 $A(q, p)$  が時間  $t$  にあらずに時間によらない場合には、

$$\frac{d}{dt}A(q, p) = \{A(q, p), H\}_{PB} \quad (19.6)$$

となる。これをわずかに書き換えて、

$$\delta A(q, p) = \{A(q, p), \delta t H\}_{PB} \quad (19.7)$$

としよう。この式は、「 $\delta t H$  が微小時間  $\delta t$  だけの時間推進を生成する」と、解釈できる。

同様に、デカルト座標で書けば、空間並進  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$  は  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}$  によって生成される。すなわち、

$$\delta A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{A(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}\}_{PB}. \quad (19.8)$$

空間回転  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{p}$  は、

$$\delta A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{A(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}\}_{PB}. \quad (19.9)$$

のように、生成子  $\delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}$  によって生成される。回転については次の節で示す。

以上を一般化して、力学量  $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  によって生成される、相空間上の流れ（相流）を考えることができる。 $s$  をパラメータとして、任意の力学量に対して、

$$\frac{dA}{ds} = \{A, F\}_{PB}. \quad (19.10)$$

あるいは、 $A$  として特に座標  $q^i$  や  $p_i$  の時には、

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{ds} &= \{q^i, F\}_{PB} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{ds} &= \{p_i, F\}_{PB} = -\frac{\partial F}{\partial q^i} \end{aligned}$$



となる。相流を成分で書くと、 $\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}, -\frac{\partial F}{\partial q^i}\right)$  となるが、あるいは

$$D_F = \sum_i \left[ \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right] \quad (19.11)$$

とも書く。

このことは、ポアッソン括弧式という代数的に定義されたものに、 $D_F = \{ \cdot, F \}_{PB}$  が  $F$  による相流であるという幾何学的な意味をあたえる。これを知ると、ヤコビの恒等式の見通しのよい証明ができる。まず、

$$\{ \{A, B\}_{PB}, C \}_{PB} + \{ \{B, C\}_{PB}, A \}_{PB} + \{ \{C, A\}_{PB}, B \}_{PB} = 0 \quad (19.12)$$

の左辺は、 $A$  の 2 階微分に対して 1 次式で、 $B, C$  についても同様であることに注意しよう。さらに、いずれの項も  $A, B, C$  の 2 階微分のいずれかは含む。これから、 $A$  の 2 階微分の係数が実はゼロであることを示し、 $B$  と  $C$  についても同様とするので、左辺がゼロであると主張できる。

まず、第 2 項は  $A$  の 1 階微分しか含まない。第 1 項と第 3 項の和は

$$\begin{aligned} & \{ \{A, B\}_{PB}, C \}_{PB} - \{ \{A, C\}_{PB}, B \}_{PB} \\ &= D_C \{A, B\}_{PB} - D_B \{A, C\}_{PB} \\ &= (D_C D_B - D_B D_C) A \end{aligned}$$

と書ける。

ここで、相空間で定義された微分  $D_B, D_C$  を、相空間の座標  $q^i, -p_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) を一括して  $x^n$  ( $n = 1, \dots, 2N$ ) と書こう。すなわち、

$$\begin{aligned} D_B &= \sum_{n=1}^{2N} \beta^n \frac{\partial}{\partial x^n} \\ D_C &= \sum_{n=1}^{2N} \gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

簡単な計算により、

$$[D_C D_B - D_B D_C]A = \sum_{nm} \left[ \gamma^n \frac{\partial \beta^m}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^m} - \beta^n \frac{\partial \gamma^m}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial x^m} \right] A \quad (19.13)$$

だから、これは  $A$  の 1 階微分しか含まない。結局ヤコビの恒等式の左辺は  $A$  の 2 階微分を含まない。同様に、 $B$  の 2 階微分も  $C$  の 2 階微分も含まない。したがって、左辺はゼロである。

## §19.2 変換群 (Transformation Group)

次に変換を立て続けに行うことを考えよう。そのために、(添字  $_{PB}$  は以下省略する。) 抽象的に議論した方が見通しがよい。微小パラメータ  $f$  を含む変換の生成子を  $G[f]$  として、 $A$  に対する変換  $\delta_f A$  は

$$\delta_f A = \{A, G[f]\}. \quad (19.14)$$

と書ける。

変換  $\delta_g$  に引き続いて  $\delta_f$  を行くと、

$$\begin{aligned} \delta_f \delta_g A &= \{\{A, G[f]\}, G[g]\} \\ &= -\{\{G[f], G[g]\}, A\} - \{\{G[g], A\}, G[f]\} \\ &= \{A, \{G[f], G[g]\}\} + \{\{A, G[g]\}, G[f]\} \\ &= \{A, \{G[f], G[g]\}\} + \delta_g \delta_f A. \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$[\delta_f \delta_g - \delta_g \delta_f]A = \delta_f \delta_g A - \delta_g \delta_f A = \{A, \{G[f], G[g]\}\}. \quad (19.15)$$

ここで、右辺の中にある  $\{G[f], G[g]\}$  の意味を理解するための具体例として 2 段階の回転を考えよう。それらの微小回転のパラメータを

$f \rightarrow \delta\phi_1$ 、 $g \rightarrow \delta\phi_2$  としよう。それらの生成子は、角運動量を  $\mathbf{L}$  として

$$G[f] \rightarrow G[\delta\phi_1] = \delta\phi_1 \cdot \mathbf{L}$$

$$G[g] \rightarrow G[\delta\phi_2] = \delta\phi_2 \cdot \mathbf{L}$$

である。簡単な計算で、

$$\begin{aligned} \{G[\delta\phi_1], G[\delta\phi_2]\} &= \left\{ \sum_i \delta\phi_{1i} L_i, \sum_j \delta\phi_{2j} L_j \right\} \\ &= \sum_{ij} \delta\phi_{1i} \delta\phi_{2j} \{L_i, L_j\} \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \delta\phi_{1i} \delta\phi_{2j} L_k \\ &= \delta\phi_1 \times \delta\phi_2 \cdot \mathbf{L} \\ &= G[\delta\phi_1 \times \delta\phi_2]. \end{aligned}$$

したがって、

$$[\delta\phi_1 \delta\phi_2 - \delta\phi_1 \delta\phi_2] A = \delta\phi_1 \times \delta\phi_2 A. \quad (19.16)$$

新しいパラメータ  $\delta\phi_1 \times \delta\phi_2$  は、ベクター  $\delta\phi_2$  を  $\delta\phi_1$  だけ回転したものと見なせる。

上の式の意味は次のように解される。回転  $\delta\phi_2$  を行い、次に回転  $\delta\phi_1$  を行ったものと、その順番を入れ替えたものの差は、 $\delta\phi_2$  を  $\delta\phi_1$  だけ回転したものによる回転に等しい。

### §19.2.1 ポアッソンの定理

物理量  $A$  と  $B$  が時間によらないとすれば、そのポアッソン括弧式  $\{A, B\}_{\text{PB}}$  も時間によらない。証明にはヤコビの恒等式を用いる。(添字

PB は省いた。)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\{A, B\} &= \{\{A, B\}, H\} \\
 &= -\{\{B, H\}, A\} - \{\{H, A\}, B\} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{19.17}$$

この定理は一見すると、運動の定数を次々とあたえてくれる打ち出の小槌のように思うかもしれない。しかし、これから得られるものは、すでに分かっているものであるか、ポアッソン括弧式  $\{A, B\}_{PB}$  がそもそもゼロであったりする場合が多い。

### 例題 19.2.1

$x$  方向の運動量  $p_x$  と  $z$  軸のまわりの角運動量  $L_z$  が保存量であるとして。このとき、 $y$  方向の運動量  $p_y$  も保存することを示せ。

[ヒント]

計算によって

$$\{L_z, p_x\}_{PB} = p_y \tag{19.18}$$

を示せ。

ネーターの定理を思い出すと、このことは対称性からも理解できる。 $L_z$  が保存するということは、系が  $z$  軸のまわりに回転対称であることだから、保存量  $p_x$  を  $z$  軸のまわりに  $90$  度回転した  $p_y$  も保存する。

## §19.2.2 ポアッソン括弧式による代数

角運動量  $\mathbf{L}$  が微小な回転  $\delta\phi$  を生成することを示そう。

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \delta\phi_j \mathbf{r}_k = \{\mathbf{r}_i, \sum_j \delta\phi_j \mathbf{L}_j\}_{PB} \tag{19.19}$$

あるいは、同じことをベクターの記号で書くと、

$$\delta \mathbf{r} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r} = \{\mathbf{r}, \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}\}_{\text{PB}} \quad (19.20)$$

同様にして、

$$\delta \mathbf{p} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{p} = \{\mathbf{p}, \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}\}_{\text{PB}} \quad (19.21)$$

が成り立つ。 $\delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}$  を回転の生成子 (**generator**) と呼ぶ。一般に関数  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  に対して

$$\delta F = \{F, \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}\}_{\text{PB}} \quad (19.22)$$

が成り立つ。特に

$$\delta \mathbf{L} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{L} = \{\mathbf{L}, \delta \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L}\}_{\text{PB}}. \quad (19.23)$$

この事から角運動量の成分  $L_i$  ( $i = x, y, z$ ) はポアッソン括弧式に関して、閉じた代数を作ることが見て取れる。直接計算することにより、

$$\{L_i, L_j\}_{\text{PB}} = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k \quad (19.24)$$

ただし、 $\epsilon_{xyz} = 1$  で、その偶置換は  $+1$  であり、その奇置換は  $-1$  である。3次元回転は明らかに群  $\text{SO}(3)$  をなすが、微小回転の生成子である角運動量のなす代数は  $\text{so}(3)$  代数と呼ばれる。

ポアッソンの定理により、角運動量の2成分が保存すれば残りの成分も保存する。この場合、ハミルトニアン  $H$  は、位置ベクターあるいは運動量ベクターの内積の関数  $H = H(\mathbf{r}^2, \mathbf{p}^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p})$  であって、回転にたいして不変である。

水素原子の系における、やや意外な保存量としてルンゲ・レンツのベクトル  $\mathbf{V}$  をあげよう。ハミルトニアンは

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{r} \quad (19.25)$$

であり、運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$$

である。ルンゲ・レンツのベクトル：

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{m} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (19.26)$$

が保存すると事は、角運動量  $\mathbf{L}$  が保存することに注意しつつ、直接時間微分して確かめることができる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} &= -\frac{\alpha \mathbf{r} \times \mathbf{L}}{mr^3} - \alpha \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \right) \\ &= \alpha \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3} - \alpha \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、ベクター 3 重積についての公式：

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} \quad (19.27)$$

を、第 1 項に対して使った。

水素原子あるいは万有引力の問題が厳密に解ける背景には、このような保存量の存在がある。

ルンゲ・レンツのベクトルの成分の間のポアッソン括弧式を直接計算しよう。結果は

$$\{V_i, V_j\}_{PB} = -4\epsilon_{ijk}EL_k \quad (19.28)$$

あるいは、 $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}}{2\sqrt{|E|}}$  と置くと、きれいな形になり、

$$\{A_i, A_j\}_{PB} = \epsilon_{ijk}L_k \quad (19.29)$$

が成り立つ。これと、角運動量が回転を生成するという式：

$$\{A_i, L_j\}_{PB} = \epsilon_{ijk} A_k \quad (19.30)$$

さらに、角運動量のなす代数：

$$\{L_i, L_j\}_{PB} = \epsilon_{ijk} L_k \quad (19.31)$$

と合わせると、4次元回転の代数  $so(4)$  を生成することがわかる。

### 例題 19.2.2

ルンゲ・レンツのベクトル：

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{m} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (19.32)$$

の物理的な意味を考えよ。

[ヒント]

$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$  と  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  を代入すれば、

$$\mathbf{V} = m(-(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}^2 \mathbf{r}) - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (19.33)$$

となるが、第1項は近日点と遠日点ではゼロである。したがって、ルンゲ・レンツのベクトルは近日点から原点（太陽）への単位ベクトルに比例する。比例定数は  $\frac{L^2}{mr^2} + \alpha$ 。惑星が楕円軌道を描いて運動するときもルンゲ・レンツのベクトルは固定した方向を向いている。

### 例題 19.2.3

万有引力以外の小さい力が働いている場合は軌道が閉じなくて、近日点は移動していく。それを、ルンゲ・レンツのベクトルの変

化として記述することができることを示せ。簡単な例として

$$\dot{\mathbf{p}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \beta \frac{\mathbf{r}}{r^4} \quad (19.34)$$

を考えよ。

---

[ヒント]

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{L} \times \beta \frac{\mathbf{r}}{r^4} \quad (19.35)$$

だから、近日点  $\mathbf{r} = \mathbf{q}$  に対しては、

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\beta}{\frac{L^2}{mq^2} + \alpha} \mathbf{L} \times \frac{\mathbf{q}}{q^3} \quad (19.36)$$

が成り立つ。これは、角速度

$$\dot{\phi} = \frac{L\beta}{\left(\frac{L^2}{mq^2} + \alpha\right) q^3} \quad (19.37)$$

で近日点が回転していることを意味する。

## §19.3 ポアッソン括弧式と正準変換

相空間における正準変換： $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  に対してポアッソン括弧式が不変であることを見よう。言い換えると、ポアッソン括弧式は新しい変数： $(Q, P)$  で定義しても古い変数： $(q, p)$  で定義しても変わらない。すなわち、

$$\{A, B\}_{QP} = \{A, B\}_{qp} \quad (19.38)$$



証明は、直接的に行えばよい。

$$\begin{aligned}
 \{A, B\}_{QP} &= \sum_I \frac{\partial A}{\partial Q^I} \frac{\partial B}{\partial P_I} - \frac{\partial B}{\partial P_I} \frac{\partial A}{\partial Q^I} \\
 &= \sum_I \left[ \sum_i \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \right] \\
 &\quad \left[ \sum_j \frac{\partial B}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} + \sum_j \frac{\partial B}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} \right] \\
 &\quad - (A \text{ と } B \text{ を取り替えたもの}) \\
 &= \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial q^j} \sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^j}{\partial Q^I} \frac{\partial q^i}{\partial P_I} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} - \frac{\partial p_j}{\partial Q^I} \frac{\partial q^i}{\partial P_I} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^j} \sum_I \left[ \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^j}{\partial Q^I} \frac{\partial p_i}{\partial P_I} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_j} \sum_I \left[ \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} - \frac{\partial p_j}{\partial Q^I} \frac{\partial p_i}{\partial P_I} \right].
 \end{aligned}$$

ここで、右辺にでてくる因子は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 \sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^j}{\partial Q^I} \frac{\partial q^i}{\partial P_I} \right] &= 0 \\
 \sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} - \frac{\partial p_j}{\partial Q^I} \frac{\partial q^i}{\partial P_I} \right] &= \delta_j^i \\
 \sum_I \left[ \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^j}{\partial Q^I} \frac{\partial p_i}{\partial P_I} \right] &= -\delta_j^i \\
 \sum_I \left[ \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} - \frac{\partial p_j}{\partial Q^I} \frac{\partial p_i}{\partial P_I} \right] &= 0.
 \end{aligned}$$

証明の仕方はどれも同様なのでひとつだけ示そう。ルジャンドル変換を行い変数を取り直した正準変換の母関数たちを

$$dF = \sum_i p_i dq^i - \sum_I P_I dQ^I + \dots$$

$$d\Phi = \sum_i p_i dq^i + \sum_I dP_I Q^I + \dots$$

$$dG = -\sum_i dp_i q^i - \sum_I P_I dQ^I + \dots$$

$$d\Psi = -\sum_i dp_i q^i + \sum_I dP_I Q^I + \dots$$

と定義して、 $(q, p)$  から  $(Q, P)$  の変換が正準変換であることに留意すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^j \partial P_I} = \frac{\partial Q^I}{\partial q^j} \\ \frac{\partial q^i}{\partial P^I} &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial p_i \partial P^I} = -\frac{\partial Q^I}{\partial p_i} \end{aligned}$$

がわかる。したがって、

$$\sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^i}{\partial P_I} \frac{\partial p_j}{\partial Q^I} \right] = \sum_I \left[ \frac{\partial Q^I}{\partial q^j} \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} + \frac{\partial Q^I}{\partial p^j} \frac{\partial p^i}{\partial Q^I} \right] = \delta_j^i \quad (19.39)$$

はじめに戻ると、

$$\{A, B\}_{QP} = -\sum_i \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q^i} + \sum_i \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} = \{A, B\}_{qp} \quad (19.40)$$

が証明されたことになる。

## 例題 19.3.1

$$\sum_I \left[ \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} \right] = 0$$

$$\sum_I \left[ \frac{\partial p_i}{\partial Q^I} \frac{\partial q^j}{\partial P_I} - \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \frac{\partial p_j}{\partial P_I} \right] = -\delta_j^i$$

を示せ。

[ヒント]

母関数  $F, \Phi, G, \Psi$  のうち役に立つものを選択せよ。

## §19.4 時間発展を正準変換の特殊な場合とみる

正準変数  $(q(t), p(t))$  の微小時間  $\delta t$  後の時間発展  $:(q(t+\delta t), p(t+\delta t))$  を考えよう。ハミルトンの方程式：

$$q(t+\delta t) = q(t) + \frac{\partial H}{\partial p(t)} \delta t$$

$$p(t+\delta t) = p(t) - \frac{\partial H}{\partial q(t)} \delta t$$

を、 $Q(t) = q(t+\delta t)$ 、 $P(t) = p(t+\delta t)$  と「新しい正準変数」を定義し、 $\delta t$  について 2 次以上の微小量を無視して書き換えれば、

$$Q(t) = q(t) + \frac{\partial H}{\partial P(t)} \delta t$$

$$p(t) = P(t) + \frac{\partial H}{\partial q(t)} \delta t$$

となる。これから、直ちに見て取れると思うが、 $(q(t), p(t)) \rightarrow (Q(t), P(t))$  は

$$\Phi(q, P) = Pq + H(q, P)\delta t \quad (19.41)$$

を母関数とする正準変換である。

したがって、時間発展も正準変換の一つと見なせる。



## 第20章

# リウヴィユの定理

## LIUVILLE'S THEOREM

統計力学において、相空間の考え方は頻繁に用いられる。初期値の集合  $\Gamma_0$  を相空間の中に書き込んでみよう。そして、時間  $t$  後に  $\Gamma_t$  がどのような集合になるか考えてみよう。

それは一般には形を変えていくであろうし、場合によっては複雑になるかもしれない。以下で示そうとすることは、その相体積：

$$V(\Gamma_t) = \int_{\Gamma_t} dq dp \quad (20.1)$$

が時間発展に対して変わらないことである。

ここではもっと一般に、正準変換に対して相体積が不変であることを示そう。これをリウヴィユの定理 (**Liuville's theorem**) という。これが示されれば、前節に述べた時間発展も正準変換と見なすことができるという事実を合わせると、相体積は時間に依らないことはリウヴィユの定理の系として導くことができる。

正準変換  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  の母関数を  $\Phi(q, P)$  としよう。それに対応して、相空間の領域が  $\gamma$  から  $\Gamma$  へ写像されるとしよう。相体積は

$$\int_{\Gamma} dQ dP = \int_{\gamma} dq dp \left| \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \right| \quad (20.2)$$

と書ける。ここに、 $\left| \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \right|$  は変数変換  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  のヤコビアンである。これを計算していくと、

$$\left| \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \right| = |\{Q, P\}_{qp}| = |\{Q, P\}_{QP}| = 1 \quad (20.3)$$

となるので、定理は証明された。変数の数が増えても証明は同様である。

リウヴィユの定理の物理的な意味を考えよう。座標の初期値と運動量の初期値をあたえればそれ以後の運動が一意的に決まる。これを「初期条件によって物理的状態が決まる」、と言ってよいだろう。したがって、初期値の集合が物理的状態の集合そのものである。状態の数が相空間の体積に比例すると仮定すると、リウヴィユの定理は状態の数が正準変数の取り方によらないことを言っている。特に、時間発展しても、状態の数は変わらない。このことは、次のように考えれば理解しやすい。ある時刻で初期値をあたえ運動方程式を解いて、後の時刻での座標と運動量を得たとしよう。さらにそれを初期値として運動方程式を解いても、同じ運動を与えるわけだから状態は変わらない。したがって、状態の数も変わらない。

量子力学における不確定性原理によれば、座標  $q$  と運動量  $p$  の不確定さ、 $\Delta q, \Delta p$  の間には、

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2 \quad (20.4)$$

の関係がある。ここに  $\hbar$  はプランク定数である。このことから、体積  $\Delta q \Delta p = \hbar$  の位相領域  $[q, q + \Delta q] \times [p, p + \Delta p]$  の中の状態は区別がつかないと言える。したがって、相体積をプランク定数で割った量そのものを状態の数と考えてよい。まとめると、リウヴィユの定理は状態の数が正準不変量であることを述べている。

### 例題 20.0.1

$x$  方向に進む自由粒子の運動を相空間で表現せよ。相空間を可視化するために、 $x, p_x, y$  の自由度のみを考えて、 $x$  方向に進む運動の初期値の集合の時間変化を図示せよ。

[ヒント]

$t = 0$  における集合を  $\frac{p_x t}{m}$  だけ、 $x$  方向に平行移動させる。

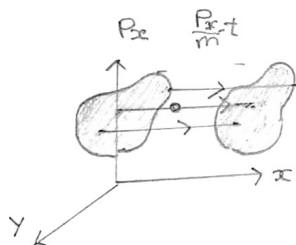


図 20.1 x 方向に進む自由粒子の運動

**例題 20.0.2**

調和振動子の系のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (20.5)$$

であたえられる。初期値の集合を、 $\Gamma_0 = \{(q, p) \mid 0 \leq H \leq E, 0 \leq \tan^{-1} \frac{p\omega}{mq} \leq \alpha\}$  としたとき (図 20.2 参照) その集合の時刻  $t$  における位置を相空間上に示し、その面積を計算して時間によらないことを示せ。

[ヒント]

$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \delta)$ 、 $p = \sqrt{2Em} \cos(\omega t + \delta)$  と置くと、 $\Gamma_0 = \{(H, \delta) \mid 0 \leq H \leq E, 0 \leq \delta \leq \alpha\}$ 。相体積の積分は  $V(\Gamma) = \int_{\Gamma} dq dp = \int_{\Gamma} dE d\delta = E\alpha$  となり確かに時間に依らない。

相空間において、初期値の集合の変形はときには奇妙な様相を呈する。多くの非線形系では、初期値の集合は、パイをこねるように引き延ばされて折り畳まれことが際限なくくり返されることもある。そのために初期値が接近していても、時間とともに指数関数的に値が離れていくことが起こる。このような系をカオスと呼ぶ。このことは、初期値をあたえれば以後の時間発展を正確に予言できるという古典力学の考え方に一定



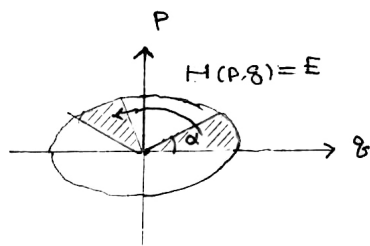


図 20.2 調和振動子

の留保条件を付ける必要があることを示している。

カオスの考え方を物理系だけではなく、生物、気象、はては経済現象にまで拡張しようとしている人達もいる。「ローレンツのアトラクター」と呼ばれる代表的な例を一つだけ、微分方程式の形とその数値計算例として上げよう。

$$\frac{dx}{dt} = -10(x - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + 30x - y$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z$$

$(x, y, z)$  は正準変数の 4 つのうちの 3 つで、残る一つは 0 に固定されていると見てよい。

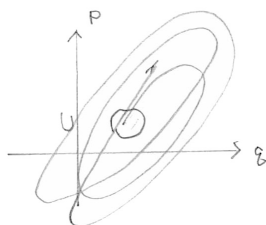


図 20.3 ローレンツのアトラクター

## § 20.1 ポアンカレの再帰定理 (Poincaré's Theorem)

運動がある範囲に限定されている場合には 相空間の体積は有限である。このような場合に、十分時間がたてば運動は初期値に限りなく近い値に回帰する。正確な言い方をしよう。相空間の中のある開集合  $U$  が、単位時間後に  $T(U)$  に移行したとしよう。これをくり返して、集合の無限列  $U, T(U), T^2(U), T^3(U), \dots$  を得る。これらに重なりがないとすると、リウヴィユの定理から  $T^n(U)$  はすべて同じ体積を持つから、各全相空間の体積が有限であることに反する。したがって、ある  $n, m$  に対して  $T^n(U) \cap T^m(U) \neq \emptyset$ 。すなわち、 $T^{n-m}(U) \cap U \neq \emptyset$  となり、必ず近傍  $U$  に回帰する。



## 第21章

# ハミルトン・ヤコビの方程式

## HAMILTON-JACOBI'S EQUATION

$S(q, t)$  を「実現された作用」とするときに以下の式が成り立っていたことを思い出そう。

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H(q, p)$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p.$$

上の2式をまとめて、 $S(q, t)$  に対する1階の偏微分方程式

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) \quad (21.1)$$

を立てることができる。これをハミルトン・ヤコビの方程式という。座標が2個以上ある一般の場合は、

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}\right) \quad (21.2)$$

となる。ハミルトニアンが

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (21.3)$$

であたえられる場合には

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}}\right)^2 + V(\mathbf{r}) \quad (21.4)$$

となる。

## §21.1 ハミルトン・ヤコビの方程式の完全解から、運動方程式の解を求めるやり方

偏微分方程式の一般解は、座標が  $s$  個あれば、 $s$  個の任意関数を含む。しかし、以下に示すように、運動方程式の解を求めるためには一般解 (general solution) を必要としない。十分な数の任意定数、すなわち  $(s+1)$  個の任意定数を含む完全解 (complete solution) が得られればよい。完全解は

$$S = \Phi(t, q_1, q_2, \dots, q_s; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + A \quad (21.5)$$

の形をしている。ここに、 $\alpha_2, \dots, \alpha_s$  と  $A$  は時間に依らない定数である。 $A$  が  $S$  の表式に付け加わったのは、ハミルトン・ヤコビの方程式には、必ず  $S$  の微分を通してのみ  $S$  が入っているからである。

$q$  を古い座標、 $\alpha$  を新しい運動量とみなして、 $\Phi(t, q, \alpha)$  を正準変換： $(q, p) \rightarrow (\beta, \alpha)$  の母関数と見なそう。

正準変換の一般論から

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}$$

$$\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$$

$$H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

である。一方、 $\Phi$  はハミルトン・ヤコビの方程式の解であるから 3 式目の右辺はゼロである。すなわち、新しいハミルトニアン  $H'$  はゼロである。

したがって、新しい変数  $(\beta, \alpha)$  に対するハミルトンの方程式を書けば、

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 0.$$

すなわち、 $\alpha$  も  $\beta$  も運動の定数である。このことから、

$$\beta = \frac{\partial \Phi(t, q, \alpha)}{\partial \alpha} \quad (21.6)$$

を座標  $q$  について解けば運動方程式の解が求められる。運動量  $p$  は

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad (21.7)$$

から求められる。

特に、ハミルトニアンが時間をあらわに含まないときには、作用  $S$  を

$$S(t, q) = S_0 - Et \quad (21.8)$$

とにおいて、簡約化されたハミルトン・ヤコビの方程式：

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = E \quad (21.9)$$

を得る。

### 例題 21.1.1

調和振動子の系のハミルトニアンは

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (21.10)$$

であたえられる。ハミルトン・ヤコビの方程式を解け。

[略解]

ハミルトン・ヤコビの方程式は

$$H\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}\right) = \frac{\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E \quad (21.11)$$

$S_0$  は  $q$  にのみよるので、上の方程式は

$$\frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}. \quad (21.12)$$

と書き直すことができる。これを積分して、 $S_0$  を得る。すなわち、

$$S_0(q) = \pm \int^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2}. \quad (21.13)$$

右辺の積分は、例えば積分変数  $q'$  を

$$q' = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin \theta' \quad (21.14)$$

と置いて、 $\theta'$  に変換すれば実行できる。

すなわち、

$$\begin{aligned} S_0(q; E) &= \pm \frac{2E}{\omega} \int^{\theta} d\theta' \cos^2 \theta' \\ &= \frac{E}{\omega} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + A \end{aligned} \quad (21.15)$$

ここに、 $\theta$  は  $q$  の関数：

$$\theta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{m}{2E}} \omega q \quad (21.16)$$

であり、 $A$  は定数である。したがって、ハミルトン・ヤコビの方程式の解は

$$\begin{aligned} S(t, q; E) &= S_0(q; E) - Et \\ &= \pm \frac{E}{\omega} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - Et + A, \end{aligned} \quad (21.17)$$

である。いま考えている 1 自由度系では、積分定数は  $E$  と  $A$  の 2 個である。そのうちのエネルギー  $E$  は、一般論における  $\alpha$  の役割をしていることに注意しよう。

運動方程式の解を、一般論にしたがって求めよう。

$$\begin{aligned} \Phi(q; E) &= S(t, q; E) \\ &= \pm \int^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} - Et \end{aligned} \quad (21.18)$$

だから、 $t_0$  を一般論における  $-\beta$  にあたる定数として、 $\beta = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$  に対応する式を書けば、

$$\begin{aligned} -t_0 &= \frac{\partial S(t, q; E)}{\partial E} \\ &= \pm \frac{\partial \int^q dq' \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2}}{\partial E} - t \end{aligned} \quad (21.19)$$

となる。少し整理すると、

$$\begin{aligned} t - t_0 &= m \pm \int^q dq' \frac{1}{\sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2}} \\ &= \frac{\theta}{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega} \text{Sin}^{-1} \sqrt{\frac{m}{2E}} \omega q. \end{aligned} \quad (21.20)$$

これを  $q$  について解くと、

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m}} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \quad (21.21)$$

と期待通り単振動の式を得た。技術的な注意であるが、 $E$  について微分するときには、 $S(t, q; E)$  の積分形にもどった方が計算を複雑にしなくて済む。

とはいえ、ハミルトン・ヤコビの方程式を解くことにより運動方程式の解を求めるやり方はいかにも迂遠で実際的ではない。ここで述べたことは、力学系の数学的な研究に役立つ他には、量子力学と古典力学の関係のところに登場する。<sup>a</sup>

<sup>a</sup> ハミルトン・ヤコビの方程式を立てたのが、ハミルトンで、その完全解からニュートン方程式の一般解を求めたのが、ヤコビである。



## § 21.2 変数分離の方法

ハミルトン・ヤコビの方程式の一般的な解法はないが、系に対称性があるときに使える変数分離の方法を述べよう。一般論を展開することはないで、簡単な例で示そう。

### 例題 21.2.1

自由粒子に対するハミルトン・ヤコビの方程式を解け。

[略解]

ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad (21.22)$$

なので、作用  $S(t, x, y, z)$  を  $S(t, x, y, z) = S_0(x, y, z) - Et$  と置けば、 $S_0(x, y, z)$  に対する簡約化されたハミルトン・ヤコビの方程式は

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_0}{\partial z} \right)^2 \right] = E \quad (21.23)$$

と書ける。

3 変数関数  $S_0(x, y, z)$  を

$$S_0(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z) \quad (21.24)$$

と 1 変数関数の和であると仮定して簡約化されたハミルトン・ヤコビの方程式を解こう。<sup>a</sup>変数分離形を簡約化されたハミルトン・ヤコビの方程式に代入すれば

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dz} \right)^2 \right] = E \quad (21.25)$$

左辺の各項は、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  の関数である。上の方程式はその和が  $x, y, z$  によらない定数であるということを意味している。このことが成り立つためには、項別に定数である必要がある。それらを、 $E_x$ 、 $E_y$ 、 $E_z$  と書けば

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 = E_x$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dY}{dy} \right)^2 = E_y$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dZ}{dz} \right)^2 = E_z.$$

ただし、 $E_x + E_y + E_z = E$ . 上の常微分方程式は簡単に積分できて

$$X = \sqrt{2mE_x}(x - x_0)$$

$$Y = \sqrt{2mE_y}(y - y_0)$$

$$Z = \sqrt{2mE_z}(z - z_0)$$

と求められる。(根号の前の  $\pm$  は省いた。)

まとめると、ハミルトン・ヤコビの方程式の解は

$$\begin{aligned} S(t, x, y, z) = & \sqrt{2mE_x}(x - x_0) + \sqrt{2mE_y}(y - y_0) \\ & + \sqrt{2mE_z}(z - z_0) - (E_x + E_y + E_z)t + A \end{aligned} \quad (21.26)$$

となり、これが完全解であることは明らかである。

ハミルトン・ヤコビの方程式の解から運動方程式の解を求めるには、一般論に従って

$$-t_{x_0} = \frac{\partial S}{\partial E_x} = \frac{\partial X}{\partial E_x} - t = \sqrt{\frac{m}{2E_x}}(x - x_0) \quad (21.27)$$

とすればよい。これを  $x$  について解けば

$$x = \sqrt{\frac{2E_x}{m}}(t - t_{x_0}) + x_0. \quad (21.28)$$

ただし、積分定数  $t_{x_0}$  は、 $x_0$  の中に吸収できる。 $Y$  と  $Z$  についても同様である。

結局、

$$x = \sqrt{\frac{2E_x}{m}}t + x_0$$

$$y = \sqrt{\frac{2E_y}{m}}t + y_0$$

$$z = \sqrt{\frac{2E_z}{m}}t + z_0$$

と予測通り等速運動の解が再現された。

<sup>a</sup> ずいぶん乱暴な仮定をすると思うかもしれない。必要な解が一般解ではなく完全解であることがポイントである。つまり、解として特殊な形を仮定しても、十分な数の任意定数を含む解が求まりさえすれば、運動方程式の解が求められる。

### 例題 21.2.2

3次元調和振動子に対するハミルトン・ヤコビの方程式を解け。

[ヒント]

ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad (21.29)$$

だから自由粒子の場合と同じように作用を

$$S(t, x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z) - Et \quad (21.30)$$

とおけばよい。ハミルトン・ヤコビの方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \\ & + \frac{1}{2m} \left( \frac{dY}{dy} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2 \\ & + \frac{1}{2m} \left( \frac{dZ}{dz} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} z^2 = E \end{aligned} \quad (21.31)$$

となり、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  の関数の和の形なので、それぞれ定数であることが分かる。すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = E_x \\ & \frac{1}{2m} \left( \frac{dY}{dy} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2 = E_y \\ & \frac{1}{2m} \left( \frac{dZ}{dz} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} z^2 = E_z. \end{aligned}$$

$X(x), Y(y), Z(z)$  の具体的な解き方は一次元調和振動子の場合に帰着するので省略する。運動方程式の解も省略しよう。



## 第 22 章

# 断熱不変量

## ADIABATIC INVARIANT

### § 22.1 簡単な系の断熱不変量

単振子の糸の長さをゆっくりと変化させることを考えてみよう。ゆっくりとは、振り子の周期に比べて、糸の長さの変化の時間スケールがはるかに長い場合である。

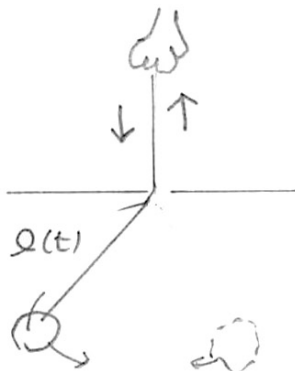


図 22.1 単振り子の糸の長さをゆっくりと変化させる

式で書けば、振り子の周期を  $T$  として糸の長さを  $l(t)$  とするときに

$$T \left| \frac{dl(t)}{dt} \right| \ll l(t). \quad (22.1)$$

糸の長さの変化がゆっくりなので、ある時刻  $t$  における角振動数  $\omega(t)$  を

定義することができて、

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{g}{l(t)}} \quad (22.2)$$

この系ではエネルギー  $E$  は保存しないが、 $E$  と糸の長さ  $l(t)$  の組合せ

$$\left\langle \frac{E}{\omega(t)} \right\rangle \quad (22.3)$$

は保存する。ただし、 $\langle * \rangle$  は一周期にわたる時間平均

$$\langle * \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T * \quad (22.4)$$

である。

そのことをこれから見ていこう。 $\langle E\sqrt{l} \rangle$  が時間に依らないことを示せば十分である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle E\sqrt{l} \rangle &= \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \sqrt{l} + \frac{1}{2\sqrt{l}} \frac{dl(t)}{dt} \langle E \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle \sqrt{l} + \frac{1}{2\sqrt{l}} \frac{dl(t)}{dt} \langle E \rangle. \end{aligned} \quad (22.5)$$

ハミルトニアン  $H$  は、振子の鉛直線となす小さな角度を  $\theta$  とし、その共役運動量を  $p_\theta$  とすると、

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{mgl\theta^2}{2} \quad (22.6)$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \left[ -\frac{p_\theta^2}{ml^3} + \frac{g\theta^2}{2} \right] \frac{dl(t)}{dt} \\ &= \frac{\frac{dl(t)}{dt}}{l} (-2K + V) \end{aligned} \quad (22.7)$$

ここで、運動エネルギーを  $K$ 、ポテンシャルエネルギーを  $V$  と書いた。

ビリアル定理から

$$\langle K \rangle = \langle V \rangle \quad (22.8)$$

なので、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \left\langle \frac{\partial H}{\partial t} \right\rangle \sqrt{l} + \frac{1}{2\sqrt{l}} \frac{dl(t)}{dt} \langle E \rangle \\ &= \sqrt{l} \frac{dl(t)}{l} \left[ \langle (-2K + V) \rangle + \frac{1}{2} \langle K + V \rangle \right] = 0. \end{aligned} \quad (22.9)$$

(糸の長さの変化が十分ゆっくりとしているとして、計算の途中で、 $\frac{dl(t)}{dt}$  を積分の外に出した。)

結局、 $\left\langle \frac{E}{\omega(t)} \right\rangle$  が、 $l(t)$  がゆっくりと変化する場合には保存することが示された。これは以下に一般的に示す断熱不変量の典型的な場合である。

これは定性的には次のことを言っている。糸を引き上げて行くことを考えよう。ポテンシャルエネルギーはもちろん増大する。糸が短くなるに従い、振り子は速く振れるので運動エネルギーも増大するから、全エネルギーも増大する。一方、角速度も増大するのだが、その比は一定と主張している。

### 例題 22.1.1

$r^n$  の中心力場中を運動している質点がある。ハミルトニアンは

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \alpha r^n \quad (22.10)$$

仮に、結合定数  $\alpha$  が時間に対してゆっくり変わっているとすると、断熱不変量を  $\langle E \rangle \alpha^s$  と置くと  $s$  の値は何になるか？

---

[ヒント]



$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\langle E \rangle \alpha^s) &= \frac{d\alpha}{dt} s \alpha^{s-1} \langle E \rangle + \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{s-1} \langle V \rangle \\
 &= \frac{d\alpha}{dt} \alpha^{s-1} [s \langle E \rangle + \langle V \rangle].
 \end{aligned} \tag{22.11}$$

一方、ビリアル定理により

$$\langle K \rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle \tag{22.12}$$

だから

$$\begin{aligned}
 s \langle E \rangle + \langle V \rangle &= s \langle K \rangle + s \langle V \rangle + \langle V \rangle \\
 &= \left( s \frac{n}{2} + s + 1 \right) \langle V \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{22.13}$$

したがって、

$$s = -\frac{1}{1 + \frac{n}{2}}. \tag{22.14}$$

特にクーロンポテンシャル ( $n = -1$ ) の場合には  $\langle E \rangle \alpha^{-2}$  が断熱不変量である。同様に、質量  $m$  がゆっくり変化する場合には、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\langle E \rangle m^{s'}) &= \frac{dm}{dt} s m^{s'-1} \langle E \rangle + \frac{dm}{dt} m^{s'-1} \langle -K \rangle \\
 &= \frac{dm}{dt} s' m^{s'-1} [s' \langle K \rangle + s' \langle V \rangle - \langle K \rangle].
 \end{aligned}$$

したがって、 $s' \langle K \rangle + s' \langle V \rangle - \langle K \rangle = [(s' - 1) \frac{n}{2} + s'] \langle V \rangle = 0$  から

$$s' = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2} + 1} \tag{22.15}$$

クーロンポテンシャル ( $n = -1$ ) の場合には、 $s' = -1$ . まとめると、 $m$  と  $\alpha$  の断熱的变化に対する  $\langle E \rangle$  の時間依存性は

$$\langle E \rangle \propto m \alpha^2 \tag{22.16}$$

となる。

量子力学においては、調和振動子のエネルギーレベルは  $\omega \propto \sqrt{l}$  に比例し、水素原子のエネルギーレベルは  $m\alpha^2$  に比例する。これは、量子力学において束縛系のエネルギーレベルは離散的な値を取り連続的に変化できないことと断熱不変量が関係している。この事は前期量子論で用いられた。

## § 22.2 断熱不変量の一般的な形

$\lambda(t)$  をゆっくり変化するパラメータとしよう。そのためにエネルギー  $E$  も時間的にゆっくり変化する。

$$H(q, p; \lambda) = E \quad (22.17)$$

を  $p$  について解いたものを運動量  $p = p(q, \lambda, E)$  と考えよう。

このとき、1 周期にわたる以下の積分を考えよう。

$$J = \oint p dq. \quad (22.18)$$

これを時間微分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \oint \left[ \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right] dq \\ &= \frac{d\lambda}{dt} \oint \left[ \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right] dq. \end{aligned} \quad (22.19)$$

となる。(J が 1 周積分であるために、積分の上端・下端の寄与が出ていない。) さてここで、 $H(q, p; \lambda) = E$  の両辺を  $\lambda$  と  $E$  で偏微分しよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial H}{\partial p} &= \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dq}{dt} = 1. \end{aligned}$$

これを、 $\frac{dJ}{dt}$  の式に代入すれば、

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{dq}{dt} \right] dt = 0. \quad (22.20)$$

したがって、 $J = \oint p dq$  は断熱不変量である。前には簡単な例において、断熱不変量をビリアル定理を用いて導いたが、 $J$  と一致することを確認することができる。<sup>\*1</sup>

### 例題 22.2.1

長さ  $L$  の箱のなかの粒子の往復運動の場合に、断熱不変量  $J = \oint p dq$  を計算せよ。

[ヒント]

$$J = \oint p dq = mv^2 T = mv^2 \frac{L}{v} = mvL \quad (22.22)$$

箱の長さがゆっくり変化するときには、速度と長さの積が一定になる。

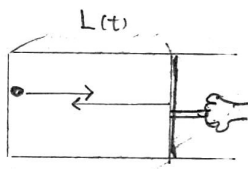


図 22.2 長さ  $L$  の箱の中の粒子の往復運動

<sup>\*1</sup> ビリアル定理の証明に  $J$  を使ったことは興味深い。 $V(q)$  が  $q^n$  の形をしているときは、

$$J = 2\langle K \rangle = \int_0^T p \frac{dq}{dt} dt = - \int_0^T \frac{dp}{dt} q dt = \int_0^T \frac{dV(q)}{dq} q dt = n\langle V \rangle \quad (22.21)$$

**例題 22.2.2**

1 次元調和振動子の場合に、断熱不変量  $J = \oint p dq$  を計算せよ。

[ヒント]

$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E$  を  $p$  について解けば、

$$p = \pm \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right)} \quad (22.23)$$

だから

$$\begin{aligned} J &= \oint p dq \\ &= 2 \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right)} dq \\ &= 2\pi \frac{E}{\omega}. \end{aligned} \quad (22.24)$$

**例題 22.2.3**

$T$  を周期として

$$T = \frac{dJ}{dE} \quad (22.25)$$

を示せ。

[ヒント]

$$\frac{dJ}{dE} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} \frac{dq}{dt} dt = \int_0^T dt = T \quad (22.26)$$

ここで、 $H(q, p) = E$  の両辺を  $E$  で微分して得られる式:  $\frac{\partial p}{\partial E} \frac{dq}{dt} = 1$  を用いた。

## § 22.3 ゆっくりと変化する磁場中の荷電粒子の運動における断熱不変量

ここで断熱不変量が有用な例として、磁場中の荷電粒子の運動を再び取り上げよう。

8 章を思いだすと、運動量は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} - e\mathbf{A} \quad (22.27)$$

であり、ハミルトニアンは

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + e\phi \quad (22.28)$$

とあたえられる。磁場は  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  である。磁場の時間空間的变化が小さければ、荷電粒子の速度は 4 章により

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} \cos \omega t \\ v_y &= -v_{\perp} \sin \omega t \\ v_z &= v_{\parallel}. \end{aligned}$$

とあたえられる。ただし、 $\omega = \frac{eB}{m}$  はラーマー角振動数である。したがって運動量は

$$\begin{aligned} p_x &= mv_{\perp} \cos \omega t - eA_x \\ p_y &= -mv_{\perp} \sin \omega t - eA_y \\ p_z &= mv_{\parallel}. \end{aligned}$$

明らかに  $x - y$  面内では周期的な運動をしているので

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint [p_x dx + p_y dy] \quad (22.29)$$

は断熱不変量になっている。具体的に計算すれば、

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T [mv_{\perp}^2] dt - e \frac{1}{2\pi} \oint [A_x dx + A_y dy] \\ &= \frac{mv_{\perp}^2}{\omega} - e \frac{1}{2\pi} B \pi a^2. \end{aligned} \quad (22.30)$$

最後の式変形でストークスの定理：

$$\oint [A_x dx + A_y dy] = \iint_{\text{軌道を周囲とする円盤領域}} dx dy B \quad (22.31)$$

を用いた。ここに、 $a$  はラーマー半径で

$$a = \frac{v_{\perp}}{\omega} \quad (22.32)$$

とあたえられる。したがって、

$$I = \frac{mv_{\perp}^2}{2\omega} = \frac{K_{\perp}}{\omega} \quad (22.33)$$

ただし、 $K_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2}$  は  $x$ - $y$  面内の運動エネルギーである。言い換えると、 $x$ - $y$  面内の運動エネルギーと磁場の比：

$$\frac{K_{\perp}}{B} \quad (22.34)$$

は磁場  $B$  がゆっくり変化するとき一定に保たれる。別の言い方をすると、 $Ba^2 = B \frac{v_{\perp}^2}{\omega^2} \propto \frac{v_{\perp}^2}{B}$  だから、旋回運動の軌道が囲む領域の磁束が一定になる。

一方、4章で指摘したように磁場中の荷電粒子の全運動エネルギー：

$$\begin{aligned} K &= K_{\perp} + K_{\parallel} \\ K_{\parallel} &= \frac{mv_{\parallel}^2}{2} \end{aligned}$$

は保存するので次のような面白い現象が起こる。

磁場が図 22.4 のように絞られていると、磁場はその方向に強くなる。そこを荷電粒子が旋回運動しながら進むと、 $\frac{K_{\perp}}{B}$  が断熱不変量であ

るために、 $K_{\perp}$  は増大する。エネルギー保存則から、これは、 $K_{\parallel}$  の減少を意味し、磁場方向の運動はいつか止まり反転する。この荷電粒子の反射は、地球磁場の極の近くで起きている。電子は約 200 秒の周期で北極と南極の間を往復している。このように荷電粒子を反射させるような磁場の配位をミラー磁場と呼び、プラズマの閉じこめに重要である。

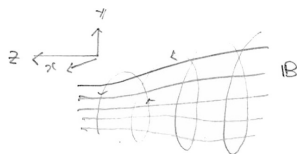


図 22.3 旋回運動の軌道が囲む領域の磁束は一定になる

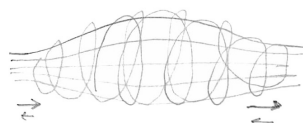


図 22.4 ミラー磁場

## § 22.4 断熱不変量と前期量子論

前期量子論において、周期的な運動をする系では断熱不変量  $J$  が量子化されて、プランク定数  $h$  の整数倍になるという作業仮説がおかれた。

$$J = \oint p dq = nh \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (22.35)$$

調和振動子の場合、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  を用いると、

$$E = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (22.36)$$

とエネルギーがとびとびの値を取ることになる。その係数は  $\omega \propto 1/\sqrt{I}$  であり、 $E\sqrt{I}$  が連続的に変化できないという断熱定理と整合している。同様のことは、水素原子のエネルギースペクトラムについても言える。エネルギーを  $E$  として、 $E/m\alpha^2$  が連続的に変化できないことと量子化が整合している。

現代の量子力学ではこの結果 (22.36) は完全に正しいわけではないことがわかっているが、量子力学の発展の道しるべになった。

断熱不変量  $J$  は、相空間内の閉曲線のまわりの 1 周積分の形をしているのでストークスの定理により、閉曲線を境界とする領域  $S$  にわたる面積分に書き換えることができる。

$$J = \oint pdq = \int_S dpdq \quad (22.37)$$

1 自由度系の場合、これは相体積を意味する。量子化条件： $J = \oint pdq = nh$  を

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dpdq = n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (22.38)$$

となり、相空間の最小単位がプランク定数であることを示唆している。





## 第23章

# 断熱不変量と角変数

## ANGLE VARIABLE

$\lambda$  を固定して、断熱不変量  $J$  をエネルギー  $E$  の関数と見なそう。同じことだが、 $E$  を  $J$  の関数と見なそう。簡約化された作用：

$$S_0(E(J), q) = \int^q p(E, q) dq \quad (23.1)$$

を、 $J$  と  $q$  の関数と考えて、正準変換： $(q, p) \rightarrow (Q, J)$  の母関数としよう。 $J$  を新しい運動量とするのである。正準変換は

$$p = \frac{\partial S_0(E(J), q)}{\partial q}$$

$$Q = \frac{\partial S_0(E(J), q)}{\partial J} = \frac{dE}{dJ} \frac{\partial S_0(E(J), q)}{\partial E} = \omega t$$

ただし、ここで  $T = \frac{dJ}{dE}$ ,  $\frac{\partial S_0(E(J), q)}{\partial E} = t$  を用いて、 $\omega = T^{-1}$  と書いた。<sup>\*1</sup>

$S_0(E, q)$  は時間をあらわに含まないのので、ハミルトニアンは変数の書き換えになるだけで、今の場合は単に

$$H = E(J) \quad (23.3)$$

である。

---

\*1

$$\frac{\partial S_0(E(J), q)}{\partial E} = \int^t \frac{\partial p(E, q)}{\partial E} \frac{dq}{dt} dt = t \quad (23.2)$$

ハミルトンの方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{dE}{dJ} = \omega \\ \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -\frac{\partial E(J)}{\partial Q} = 0\end{aligned}$$

となり、 $Q = \omega t$  と  $J = \text{const.}$  を再現する。

$J$  は作用変数 (action variable)、 $\omega$  は角変数 (angle variable) と呼ばれることがある。新しい変数で書き表したときに、ハミルトニアンが作用変数だけになるときは、ハミルトンの方程式は解けたと言ってよい。

以上を 1 次元の力学系：

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (23.4)$$

で具体的に考えてみよう。ただし、運動は周期的なものに限ることしよう。簡約化された作用：

$$S_{\text{red}} = \int^q p dq = \int^q \sqrt{2m(E - V(q))} dq = \Phi(q, E := P) \quad (23.5)$$

を母関数とする正準変換： $(p, q) \rightarrow (P = E, Q)$  を考えよう。新しい座標  $Q$  は

$$Q = \frac{\partial \Phi(q, E := P)}{\partial P} = \int^q m dq / \sqrt{2m(E - V(q))} \quad (23.6)$$

とあたえられる。明らかに  $Q$  は時間  $t$  の意味を持つ。運動が一周すると、

$$\begin{aligned}S_{\text{red}} &\rightarrow S_{\text{red}} + J \\ Q &\rightarrow Q + T(\text{周期})\end{aligned}$$

ただし、作用変数  $J$  と周期  $T$  は

$$\begin{aligned}J &= \oint p dq = \oint \sqrt{2m(E - V(q))} dq \\ T &= \oint m dq / \sqrt{2m(E - V(q))} = \frac{\partial J}{\partial E}\end{aligned}$$

ここで、作用変数  $J$  がエネルギー  $E$  のみの関数であることに注意しよう。  
逆に解けば、

$$E = E(J) \quad (23.7)$$

ここであらためて、 $J$  に共役な座標  $w$  を定義しよう。時間によらない正準変換なので、ハミルトニアンは変化しない。 $(H' = H)$  ハミルトンの方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\partial E(J)}{\partial J} = \frac{1}{T} \\ \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w} = 0 \end{aligned}$$

となるので、簡単に積分できて、

$$\begin{aligned} w &= \frac{t}{T} + \text{const.} \\ J &= \text{const.} \end{aligned}$$

となる。

特に調和振動子の場合には、積分を実行することができて、

$$\begin{aligned} J &= \oint p dq = \oint \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right)} dq \\ &= \frac{2\pi E}{\omega} \\ Q &= \frac{\partial \Phi}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J} \int^q \frac{\partial p}{\partial E} dq \\ &= \frac{T}{2\pi} \text{Sin}^{-1} \sqrt{\frac{\pi\omega m}{J}} q \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{\frac{J}{2\pi\omega m}} \sin 2\pi Q \\
 p &= \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right)} \\
 &= \sqrt{\frac{2m\omega}{2\pi^2}} \cos 2\pi Q
 \end{aligned}$$

したがって、新しい座標変数は

$$Q = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \frac{m\omega q}{p} \quad (23.8)$$

となり、以前に述べた正準変換  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  を再現したことになる。  
エネルギーすなわちハミルトニアンを作用変数で書けば

$$E = H = \frac{\omega}{2\pi} J \quad (23.9)$$

後述する量子力学の準古典近似によれば、 $h$  をプランク定数として、作用変数は

$$J = nh \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (23.10)$$

となる。したがって、調和振動子のエネルギーレベルは、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  として、

$$E = \omega \hbar n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (23.11)$$

## § 23.1 縮退 (Degeneracy)

前節の簡単な拡張として、異方性のある 3 次元調和振動子の系を考えよう。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (23.12)$$

とあたえられる。簡約化された作用  $S_{\text{red}}$  を変数分離形を仮定して

$$S_{\text{red}}(x, y, z) = X(x) + Y(y) + Z(z) \quad (23.13)$$

と置こう。ハミルトン・ヤコビの方程式を変数分離の方法で解いたときと同じやり方で、成分毎に問題を処理することができる。たとえば、

$$X = \int p_x dx = \int \sqrt{2m \left( E_x - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} \right)} dx \quad (23.14)$$

$$J_x = \oint p_x dx = \oint \sqrt{2m \left( E - \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} \right)} dx = \frac{2\pi E_x}{\omega_x} \quad (23.15)$$

正準変換:  $(p_x, x), (p_y, y), (p_z, z) \rightarrow (J_x, w_x), (J_y, w_y), (J_z, w_z)$  によって、ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H = E &= E_x + E_y + E_z \\ &= \frac{1}{2\pi} (\omega_x J_x + \omega_y J_y + \omega_z J_z) \end{aligned} \quad (23.16)$$

となる。

ここで、特に  $\omega_x = \omega_y$  の時には、 $x$ - $y$  面内の回転に対して対称性を持ち、ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2\pi} [\omega_x (J_x + J_y) + \omega_z J_z] \quad (23.17)$$

となり、同じエネルギーをあたえる作用変数の組  $(J_x, J_y)$  がある。

このような場合に、エネルギーは縮退しているという。球対称の場合、 $\omega_x = \omega_y = \omega_z$  の場合にはさらに縮退している。

量子化すると、作用変数はプランク定数  $h$  を単位として、整数値を取る、

$$J_x = n_x h$$

$$J_y = n_y h$$

$$J_z = n_z h$$

$$n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots$$

特に  $\omega_x = \omega_y$  の時には、エネルギーレベルは

$$E = \omega_x h(n_x + n_y) + \omega_z h n_z \quad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, \dots) \quad (23.18)$$

となり、同じエネルギーをあたえる整数の組  $(n_x, n_y)$  があるのは明らかであろう。

## 第24章

# 解析力学と量子力学

## ANALYTICAL DYNAMICS AND QUANTUM MECHANICS

### §24.1 正準量子化 (Canonical Quantization)

ある物理系の正準形式が与えられた時に、それに対応する量子力学は  
 どうなるであろうか？ 以下に述べる、ディラックによる正準量子化とは  
 それを見つける標準的な手続きの一つである。もちろん、古典力学から  
 量子力学が導かれるわけではなく、推定するのであり、それが正しいか  
 どうかは実験が決着をつけることである。

正準形式をおさらいしよう。正準変数  $(q, p)$  が与えられ、その間にポ  
 アッソン括弧式：

$$\{q, p\}_{PB} = 1 \quad (24.1)$$

が成り立っている。さらに、系の時間発展を決めるハミルトニアン：  
 $H(q, p)$  が与えられている。ハミルトンの方程式は、ポアッソン括弧式を  
 用いると、

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \{q, H\}_{PB} \\ \frac{dp}{dt} &= \{p, H\}_{PB} \end{aligned}$$

と書ける。

さて、ポアッソン括弧式： $\{A, B\}_{PB}$  の持つ一般的な性質を思い出そう。

(1) 反対称性

$$\{A, B\}_{PB} = -\{B, A\}_{PB} \quad (24.2)$$



## (2) 双一次性

$$\{aA + bB, C\}_{PB} = a\{A, C\}_{PB} + b\{B, C\}_{PB} \quad (24.3)$$

$$\{A, bB + cC\}_{PB} = b\{A, B\}_{PB} + c\{A, C\}_{PB} \quad (24.4)$$

## (3) ヤコビの恒等式

$$\{\{A, B\}_{PB}, C\}_{PB} + \{\{B, C\}_{PB}, A\}_{PB} + \{\{C, A\}_{PB}, B\}_{PB} = 0 \quad (24.5)$$

ディラック (P.A.M. Dirac) は、交換子積 (**commutator**)

$$[A, B] = AB - BA \quad (24.6)$$

が形式的に上のポアッソン括弧式の性質を持つことに着目した。<sup>\*1</sup>

正準量子化の手続きとは、

$$\{ \quad , \quad \}_{PB} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [ \quad , \quad ] \quad (24.7)$$

のことである。ただし、 $\hbar$  はプランク定数 (Planck's constant) で

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (24.8)$$

特に、正準変数の間の交換関係は

$$[q, p] = i\hbar. \quad (24.9)$$

この置き換えをすると、量子力学では、古典力学におけるハミルトンの方程式は、

$$i\hbar \frac{dq}{dt} = [q, H]$$

$$i\hbar \frac{dp}{dt} = [p, H]$$

---

<sup>\*1</sup> 反対称性と双一次性は明らかであるが、ヤコビの恒等式を充たすことは、 $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B]$  を交換子積の定義に従って書き下せば、右辺がゼロであることを確かめることができる。

に移行し、ハイゼンベルグ (W. Heisenberg) の方程式と呼ばれる。

交換子積を、形式的に  $[A, B] = AB - BA$  と定義した。量子力学においては物理量  $A$  と  $B$  は単なる関数ではなくて、演算子であり一般には掛ける順番を変えたときに等しくない。線形空間で表現したときには行列になる。その線形空間のベクトルを波動関数と呼ぶ。

演算子の中でもっとも重要なものがハミルトニアンである。ハミルトニアン演算子の固有値は物理的に測定されるエネルギーを意味するから重要である。

ハミルトニアンに対する固有方程式すなわちシュレーディンガー方程式：

$$H(q, p)\psi = E\psi \quad (24.10)$$

を考えよう。運動量演算子  $p$  を交換関係を充たすように

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} \quad (24.11)$$

と微分演算子で表現しよう。このときシュレーディンガー方程式は

$$H\left(q, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}\right) \psi(q) = E\psi(q) \quad (24.12)$$

と微分方程式になる。

調和振動子の場合には、ハミルトニアンが

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (24.13)$$

だからシュレーディンガー方程式を具体的に書くと、

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right) \psi(q) = E\psi(q) \quad (24.14)$$

となる。振動子の運動が有界であることに対応して、 $\psi(q) \rightarrow 0$ ,  $|q| \rightarrow \infty$  という境界条件をおけば、エネルギー固有値として

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (24.15)$$

という離散的な値を得る。この答えは、前節に述べた前期量子論の答えと  $\frac{1}{2}$  の部分だけ違う。波動関数の具体的な形については、量子力学の教科書を見られたい。ここでは基底状態 ( $n = 0$ ) の波動関数：

$$\psi(q) = A e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2} \quad (24.16)$$

だけを示す。(A は定数) 無限遠方 ( $|q| \rightarrow \infty$ ) でゼロという境界条件が充たされていることがわかる。これは、波動関数の確率解釈に従うと、粒子が無限遠方に行く確率がゼロであることを意味している。

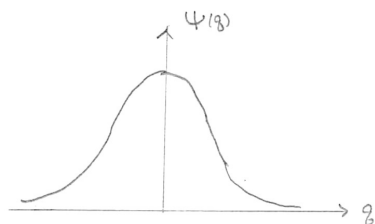


図 24.1 基底状態の波動関数

## § 24.2 最小作用の原理はどこから来るのか？

### § 24.2.1 作用の意味と準古典近似

最小作用の原理についての素朴な質問として、「粒子は運動を始める前にどの経路が最小の作用をあたえるのか、あらかじめ知っていたのでしょうか？」というのがある。同じ事は、光学におけるフェルマーの原理に対して言える。

解析力学は最小作用の原理から出発する。原理という以上その根拠は問わなかった。しかし、量子力学というより本質的な自然法則が見つかり、古典力学がその近似にすぎないということが判明した以上、古典力学における最小作用の原理の根拠を問うべきだろう。

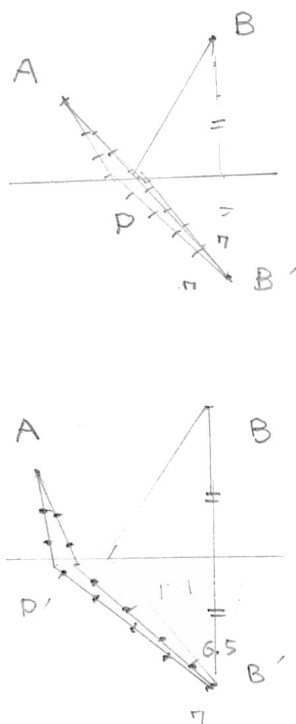


図 24.2 最小作用の原理はどこから来るのか？

解答を言ってしまうと、量子力学における波動性が根拠である。光学における反射の法則を例に取ってその本質を図 24.2 を用いて説明しよう。フェルマーの原理によれば、光は A 点から出発して P 点で反射して B 点に到達するために最短の距離を通る。光が波動ならば最短の経路そのものだけではなくその近傍も考えなければならない。言い換えると、反射点 P をすこし左右に動かして、波動の山と谷の部分を書き込んで見よう。最短の経路の近傍では、P を少し変えても経路の距離は変わらないので終点 B での位相はそろっている。比較のために、反射点を P から大きく離れた P' 点とする別の経路を考えてみよう。P' 点を微小に左右に

動かすと、経路の距離はそれに比例して変化する。そのために B 点での位相がそろわなくなり、例えば図 24.2 の下の図に示したように波動の山と谷が出会い、互いに打ち消し合うことが起こる。つまり、光はありとあらゆる経路を通るのであるが、最短時間の経路以外の経路を通ったものは打ち消し合うのである。この傾向は、波長が短い波動ほど顕著になることは容易に納得できるだろう。

まとめると、以下ようになる。光は波動であり、あらゆる経路を通るのであるが、波動関数の位相が定常になる経路だけが生き残り、他は異なる経路からの寄与が位相のばらつきのために相殺し合う傾向にある。波長が十分短いという極限では、幾何光学的な最小時間の経路だけが有効になる。

同様のことを非相対論的な粒子について考察しよう。

### 例題 24.2.1

非相対論的な粒子の運動がハミルトン・ヤコビの方程式によって与えられることを量子力学から導け。

[ヒント]

そもそも作用  $S$  の物理的な意味は何だろうか？ ここでは一般的な作用ではなくハミルトン・ヤコビの方程式の解である作用を考える。計算を見やすくするためにハミルトニアンも

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad (24.17)$$

の形のものに限定する。

さて、波動関数  $\psi$  に対して、“シュレーディンガー表示での波動関数”  $\psi_s$

$$\psi_s(t, \mathbf{r}) = e^{-i \frac{Ht}{\hbar}} \psi(\mathbf{r}) \quad (24.18)$$

を定義すれば、 $\psi_s$  は“時間によるシュレーディンガー方程式”：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} &= H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \psi(t, \mathbf{r}) \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(t, \mathbf{r}) \end{aligned}$$

を充たす。

波動関数  $\psi_s(\mathbf{r})$  を

$$\psi_s(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{i \frac{S(\mathbf{r})}{\hbar}} \quad (24.19)$$

と置いて上のシュレーディンガー方程式に代入して  $\hbar$  のべきで整理すると、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{r}^2} \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (24.20)$$

となるので、 $\hbar$  のゼロ次の項を比較して

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 + V(\mathbf{r}) \quad (24.21)$$

を得る。

これはハミルトン・ヤコビ方程式に他ならない。

このことから、 $\hbar \rightarrow 0$  の極限で、作用  $S$  は波動関数の位相を意味することがわかった。

波動関数を

$$\psi_s(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{i \frac{S(\mathbf{r})}{\hbar}} \quad (24.22)$$

と書き、 $S(\mathbf{r})$  をハミルトン・ヤコビの方程式の解とする近似を、準古典

近似あるいは WKB 近似と呼ぶ。

### 例題 24.2.2

一次元自由粒子の系のハミルトニアンは

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} \quad (24.23)$$

であたえられる。

- (1) ハミルトニアン・ヤコビの方程式を立てて作用  $S$  を解け。
- (2) 波動関数を  $\psi(x, t) = \exp \left[ i \frac{S}{\hbar} \right]$  としたときに、波動関数が平面波になっていることを示せ

---

[ヒント]

エネルギーを  $E$  として、

$$S = \sqrt{2mEx} - Et \quad (24.24)$$

だから、

$$\psi(x, t) = \exp \left[ i \frac{S}{\hbar} \right] = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \sqrt{2mEx} - Et \right) \right] \quad (24.25)$$

となる。この平面波を重ね合わせたものもシュレーディンガー方程式の解である。

$$\int dEA(E) \exp \left[ i \frac{S}{\hbar} \right] = \int dEA(E) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \sqrt{2mEx} - Et \right) \right] \quad (24.26)$$

重み  $A(E)$  が変数  $E$  についておとなしい関数であるとし、 $\hbar \rightarrow 0$  とすると、上の積分において位相の停留値を与えるところだけが効いてくる。

すなわち、

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial (\sqrt{2mEx} - Et)}{\partial E} = 0 \quad (24.27)$$

これは、ハミルトンヤコビの方程式の解から、運動方程式の解を求めるやりかたに他ならない。今の場合は、 $x = \sqrt{\frac{2E}{m}}t$  となり、等速運動になる。

### §24.2.2 経路積分と最小作用の原理

実は、近似なしの厳密な式として波動関数  $\psi_s(t, \mathbf{r})$  を、 $t=0$  に指定した始点から時間  $t$  後に  $\mathbf{r}$  に到達するあらゆる経路  $p$  についての和：

$$\begin{aligned} \psi_s(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\text{経路 } p} e^{i \frac{S_p(t, \mathbf{r})}{\hbar}} \\ &= \sum_{\text{経路 } p} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_0^t [\mathbf{p} \dot{\mathbf{r}} - H] dt \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \end{aligned} \quad (24.28)$$

と書ける。(正準量子化に基づく証明は量子力学の教科書を見て欲しい。) ここで  $S_p(t, \mathbf{r})$  は経路  $p$  に対応する作用積分である。

プランク定数が小さいと考えられる古典の極限では、近接する2つの経路  $p$  と  $p'$  に対応する作用積分が少しでも値が違うと、位相が大きく異なるので、上の経路についての和は相殺する。近接する経路  $p$  と  $p'$  に対する作用積分が同じ値ならばその寄与は足し合わされて、増大する。

すなわち、 $\epsilon$  を経路  $p$  と  $p'$  の差の大きさの程度として、

$$\delta S = S_{p+\delta p} - S_p = \mathcal{O}((\epsilon)^2) \quad (24.29)$$

のような経路  $p$  が古典極限では実現する経路である。このとき、 $S$  はハミルトン・ヤコビの方程式を充たすので、そのような停留値をあたえる経路1つの寄与だけを考慮したものが、前小節における準古典近似である。



これが、最小作用の原理（正しくは作用が経路の微小変分について極値をとるという原理）の量子力学からの起源である。

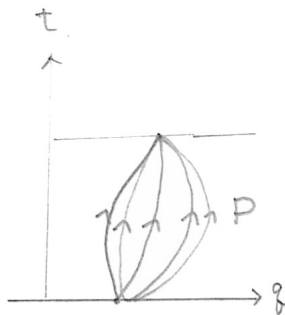


図 24.3 経路積分



# 初出索引

## 記号／数字

2 重振子 15

## A

action 7, 16

action variable 224

angle variable 224

## C

commutator 230

complete solution 202

configuration space 15

conjugate momentum 158

constraining force 46

constraint 43, 160

Coulomb's law 72

cyclic variables 114

## D

degree of freedom 15

double pendulam 15

dynamic similarity 125

dynamical degrees of  
freedom 15

## E

eccentricity 136

eigenvalue 89

eigenvalue equation 89

eigenvector 89

Euler-Lagrange equation 19

## G

gauge transformation 121

general solution 202

generator 186

## H

Hamilton's equation 164

Hamiltonian 159

holonomic constraint 43

holonomic system 43

## I

isotropic 107

## L

Lagrange undetermined  
multiplier 46

Lagrangian 16

Larmor frequency	62
Legendre transformation	161
Liouville's theorem	195
Lorentz transformation	146

**N**

natural frequency	89
nonholonomic system	44
normal mode	86
normal vibration	86

**P**

phase space	163
point transformation	111
potential energy	33

**R**

resonance	72
Riemann curvature tensor	27

**S**

spatial isotropy	30
spatial uniformity	29
special relativity	30

**T**

turning point	131
---------------	-----

**V**

Virial theorem	128
----------------	-----

**W**

world distance	30
----------------	----

**X**

X 振子	81
------	----

**あ**

一般解	202
オイラー・ラグランジュ方程式	19

**か**

角変数	224
完全解	202
基準振動	86
基準モード	86
共鳴	72
共役運動量	158
空間の一様性	29
空間の等方性	30
クーロンの法則	72
ゲージ変換	121
交換子積	230
拘束条件	43, 160
ホロノームな—	43
拘束力	46
固有振動数	89
固有値	89
固有ベクトル	89
固有方程式	89

**さ**

作用	7, 16
作用変数	224

自由度	15
循環変数	114
生成子	186
世界間隔	30
相空間	163

## た

転回点	131
点変換	111
等方的	107
特殊相対性理論	30

## な

2重振子	15
------	----

## は

配位空間	15
ハミルトニアン	159

ハミルトンの運動方程式	164
ビリアル定理	128
ポテンシャルエネルギー	33
ホロノーム系	43
非—	44

## ら

ラーマ振動数	62
ラグランジャン	16
ラグランジュの未定係数	46
リーマンの曲率テンソル	27
リウヴィユの定理	195
力学的自由度	15
力学的相似	125
離心率	136
ルジャンドル変換	161
ローレンツ変換	146

## 著者紹介

細谷 暁夫 (ほそや あきお)

東京工業大学大学院名誉教授。理学博士。

大阪大学助手、助教授、広島大学教授などを経る。

主な研究分野は、相対論、宇宙論、量子力学の基礎、  
および量子情報。主な著作に「量子コンピュータの基礎」  
(サイエンス社)と「物理の基礎的13の法則」(丸善)  
がある。趣味は詩を書き絵を描くこと。猫好き。

# 解析力学

---

2020年1月1日 初版 オンデマンド版発行

著者

細谷 暁夫

発行者

飯澤 正登実

発行所

やまなみ書房

〒156-0043 東京都世田谷区松原5丁目22番地6番 リベラリティ内

<https://www.yamanami.tokyo/>

[books@yamanami.tokyo](mailto:books@yamanami.tokyo)

初版 オンデマンド版 ISBN 978-4-909624031

---

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/> or send  
a letter to Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.





9784909624031

