

Chapter 7

Relativistic

Wave

Equations

2021. 4. 16. 13:30~

Chapter 1. Relativistic Wave Equations.

① 日本語訳

これから我々が調べる現象は 時空 (spacetime) の領域において 局在化したものである。高い精度で 時空を調べるために、高エネルギー、高運動量を要求する。このことは 単純な 不確定性原理による ギロニゼルも示唆されたこと。されば、我々は Schrödinger 方程式の 狂対称的な一般化を必要とする。

この章で我々は 特殊相対性理論の原理と ローレンツ変換について復習し、これらの原理を適用して 特殊相対論的 波動方程式を構成していく。この方程式は Fermion と Boson が従うものとされ、これで Dirac equation, Klein-Gordon equation と呼ばれる。その過程で多くの 専門用語と慣習を紹介していくことになる。丁度、これらの方程式を 1 粒子の 波動方程式として 解釈しようとすると 困難が生じることが 後ほど分かるであろう。

2~4 において 量子場の理論における技術的側面を説明する。これは Ch. 1 で 説明する
“第二量子化”的方法に対応する。

これらを見てあとにすれば、我々が興味のある 理論を 相手にするための 数学的な 強力な 手法を十分に得ることができるはずである。

② 要約

時空を 精密に 調べるために、高エネルギー・高運動量 の現象を見なければならない。そのためには、 Schrödinger 方程式を 相対論的に 一般化する。この章では Schrödinger eq の一般化と、 Dirac eq. & Klein-Gordon eq. を扱う。これらは 量子場の理論へ進んだときに役立つ 数学的な道具となる。

1.1 特殊相対論と時空 (Special relativity and Spacetime)

時間と空間を合わせて“時空(timespace)”と呼び、時空内の1点は (ct, x, y, z) の4つの座標の組を用いて指定される。特に、特殊相対論で扱う時空にはミンコフスキー空間(Minkowski space)という名前がついている。これは、時空原点 $(0, 0, 0, 0)$ と時空内のある点 (ct, x, y, z) との間の距離の2乗 S^2 が

$$S^2 \equiv ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

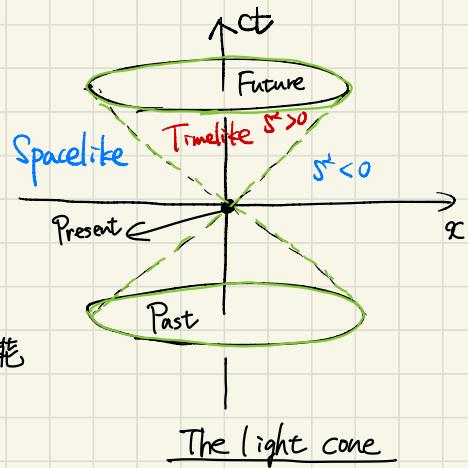
という表式される4次元空間にて定義される。

この式を0と等置したものは光円錐(light cone)と定める。

S^2 の符号により次のようく分類される：

- $S^2 > 0$ Timelike $\Rightarrow t > 0$ にて現在から到達可能
- $S^2 = 0$ Lightlike \Rightarrow 時空における光の軌跡
- $S^2 < 0$ Spacelike \Rightarrow 原点からローレンツ変換で移る事が可能。
(つまり、同時に起る事象)

→ 次のページで説明。



④ 特殊相対論の基本原理

(1) 全ての慣性系について、真空中の光速は定数である ($c = 299,792,458 \text{ m/s}$)

\Rightarrow 地上で静止しているAくんと 100 km/s で走る車に乗っているBくんのどちらが光を観測しても同じ速度 $c [\text{m/s}]$ であるということ。

(2) 物理法則は異なる慣性系の間で変換において不变である。

\Rightarrow AくんとBくんが見てる運動方程式は同じであるということ。

以上の原理を満たす変換がローレンツ変換(Lorentz transformation)である。

⑥ 時間的・光的・空間的

簡単のため、図のように (t, x) の 2 次元時空を
考える。ただし、Minkowski 時空の 2 次元 S^2 は。

$$S^2 = t^2 - x^2$$

となる。すなはち、timelike (過去と未来)、timelike とは
 $S^2 > 0 \Rightarrow t^2 - x^2 > 0$ の領域である。
赤で示した領域である。この領域は原点と同時刻
にだけ観測ができない領域である。 (t, x) の
ローレンツ変換は

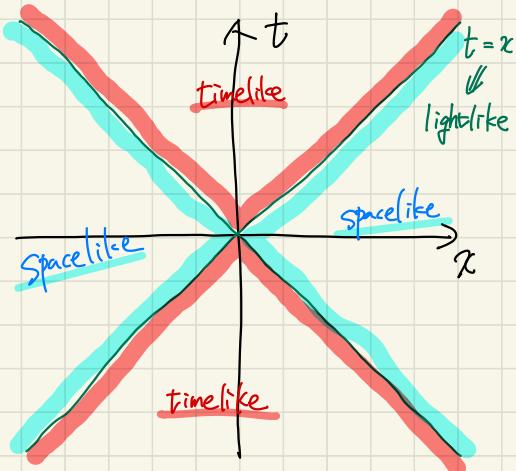
$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\beta = v/c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
 である。

$$\rightarrow x' = -\beta\gamma t + \gamma x$$

$$t' = -\frac{1}{\beta\gamma}x' + \frac{1}{\beta}x$$

$$= \frac{1}{\beta}x \quad (x'=0)$$



$$t = \frac{1}{\beta}x, \quad 0 < \beta < 1$$

ローレンツ変換で移すことはできる慣性系の
原点は timelike 領域には存在しない
一方で、 $t > 0$ の未来において $v < c$ で到達
可能な領域である。これを **timelike**
と呼ばれる。

次に **spacelike** について。これは、今見ながら、原点 $(t, x) = (0, 0)$ と 同時刻に観測ができた
事象が存在する領域である。つまり、原点とローレンツ変換で移り変わるところがこの領域である。
一方で、 $t > 0$ の未来において 到達可能に観測ができない領域である。この意味で **spacelike** と
呼ばれる。

ついで、**lightlike** について。これは光の進む軌道を表している。 $S^2 = t^2 - x^2 = 0 \Rightarrow t^2 = x^2$

1.2 反変ベクトルと共変ベクトル (Contravariant and Covariant Vectors)

慣習的に説明するが、特殊相対論の範囲ではある) 重要なとされる記法・呼び方について。
一般相対論においては有用なものである。特殊相対論の思想だけを方程式へ導入するとしても、
この記法は区別しないことにする！ 反変ベクトルと共変ベクトルの記法

既に説明したが我々は Minkowski 空間を扱っていくことになる。座標は、

$$(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

と上付き添字で表わし、 $\hbar = c = 1$ の自然単位系 (natural unit) を採用する。
異なる座標系が存在し (慣性系ではなくとも)、その変換が次式で与えられるとする：

$$x'^\mu = x^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

この式は $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ の変換下でその逆 $x'^\mu \rightarrow x^\mu$ も可能である。

④ 具体例

$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \phi)$ が分かりやすい。 (r, θ, ϕ) を新座標とみたときに、上式の形で表せざる。

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

時空の1点 (x^0, x^1, x^2, x^3) における k 階のテンソルは そのの $x \rightarrow x'$ の変換の際の性質にて定義する。

(変換を縮約記法については 2ページ先で説明)

定義

④ スカラー (scalar)

$x \rightarrow x'$ の変換で不变なもの。0階のテンソルともみなせる。

$$A' = A$$

⑤ ベクトル (vectors)

$x \rightarrow x'$ の変換で以下のようく変換される量。1階のテンソルともみなせる。

・ 反変ベクトル (contravariant vector)

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

と変換される量。

・ 共変ベクトル (covariant vector)

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$$

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\nu$$

と変換される量。

⑥ テンソル (tensor)

$x \rightarrow x'$ の変換で以下のようなくん変換に従う量。

・ 2階反変テンソル

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix}, (\mu, \nu = 0 \sim 3 \text{ など})$$

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} F^{\rho\sigma}$$

・ 2階共変テンソル

$$F_{\mu\nu} = (\dots)$$

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} F_{\rho\sigma}$$

・ 2階混合テンソル

$$F_\nu^\mu = (\dots)$$

$$F'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} F_\sigma^\rho$$

④ 皮換

例として、反変ベクトル $A^M = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ の場合を考える。座標 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ の関数である：

$$A^0 = A^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad A^1 = A^1(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$A^2 = A^2(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad A^3 = A^3(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

A^M を書くことは、同時に 4 次元空間の座標で表した A^M を意味することである。

$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $\mu = 0 \sim 3$ の変換によって、 A^M は $x'^M = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ の関数である書くことができる。 \Rightarrow

$$A^0 = A^0(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow x'} A^0(x^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), x'(\dots), \dots)$$

$$= A^0(x'^\mu) = A'^0 \quad (\mu = 1, 2, 3 \text{ について同様})$$

と書くこととする。言ひ換えれば、 $A^M(x'^\mu)$ を A'^M と書くことである。この A'^M と A^M の間の関係式が前ページの形に沿うとき、 A^M を「反変ベクトル」と呼ぶ。

⑤ 細約記法

また、このように式を書くとき、Einstein の細約記法と呼ばれるのが使われる。具体的には、

$$A'^M = \sum_U \frac{\partial x'^M}{\partial x^U} A^U \rightarrow A'^M = \frac{\partial x'^M}{\partial x^U} A^U$$

すなはち、1つの式に同じ添字が現れたときは、その添字について和をとるものと約束し、和の記号 Σ を省略するという取り決めである。ここで、ギリシャ文字は $(0, 1, 2, 3)$ 、ローマ字は $(1, 2, 3)$ について和をとることとして理解される。

これらの反変・共変の定義は一般相対論において必要となる。ここで、座標変換が時空の座標に依存している。一方、特殊相対論で扱う平坦な時空での、慣性系間の変換は線形であり、座標依存性を持たない。

具体的には

$$x'^\mu = \alpha^\mu_\nu x^\nu, \quad \mu = 0 \sim 3$$

ここで 反変ベクトルの変換が与えられ、 α^μ_ν は

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \alpha^\mu_\nu$$

で与えられる座標(x^μ)に依存しない数となる。したがって、スカラーやベクトル等これらが次のように変換する。

① Scalars

$$A' = A$$

② Tensors

$$F'^{\mu\nu} = \alpha^\mu_\rho \alpha^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$$

③ Vectors

$$A'^\mu = \alpha^\mu_\nu A^\nu$$

$$F'_{\mu\nu} = \alpha^\rho_\mu \alpha^\sigma_\nu F_{\rho\sigma}$$

$$A'_\mu = \alpha_\mu^\nu A_\nu$$

$$F'_\nu^\mu = \alpha^\mu_\rho \alpha^\sigma_\nu F_\sigma^\rho$$

この α^μ_ν はローレンツ変換の成分である。

縮約の記法を用いると良いことがある。

- ベクトル内積が簡潔に表せる
- 縮約 (contraction) という操作が表現できる
- 距離 (線素) の表現が簡潔になる

ベクトル内積、スカラー積は

$$A \cdot B = A^\mu B_\mu$$

で定義される。名前の通り、 λ 量はスカラー：座標変換の下で不変。

縮約 (contraction)

$$A^\nu_\mu = B^{\nu\lambda} C_{\lambda\mu}$$

高階のテンソルから低い階数のテンソルを生成する。

微小線素 $(ds)^2$ は次式で与えられる

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれる。Minkowski 空間では

$$(ds)^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

として定義される。

* 一般相対論ではこの計量テンソルの成分を時空の関数として求めるを中心課題とする
そのためには Einstein 方程式を解くことになる。

この2つの計量テンソルの縮約は4次元版のノルマの δ を与える。

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu} = \delta_{\mu}^{\mu} = \begin{cases} 1 & \mu=\nu=0, 1, 2, 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

添字の上部下部は $g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}$ を用いて実行されると理解する。

ex.) $x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}, \quad x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$

$g_{00}=1, \quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1$ すなはち、反対ベクトルの $A^M=(A^0, A^1, A^2, A^3) = (A_0, \vec{A})$ と表されるとき、 A_0 と \vec{A} が変換 A_{μ} には、

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu} \rightarrow A_0 = g_{00} A^0 = A^0$$

$$A_1 = g_{11} A^1 = -A^1$$

$$A_2 = g_{22} A^2 = -A^2$$

$$A_3 = g_{33} A^3 = -A^3$$

なる。

$$A_{\mu} = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$$

となることに注意が必要である。

4元ベクトルのスカラーアイデア積は次のように計算される：

$$\begin{aligned} A \cdot B &= g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} \\ &= A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \\ &= A_{\mu} B^{\mu} \end{aligned}$$

と書けるので、前ページで説明した記法と整合が行く。

一般的な高階テンソルについて、添字の上部下部は $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ を用いた縮約と理解可。

⑧ 時空の座標変換

• 座標変換

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}}$$

$$f(x') = f(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ = f(x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3), \dots, x'^3(x^0, \dots, x^3))$$

と実験されるとすると、 f は $x^\mu = x^0, \dots, x^3$ のあらわな関数として表わされる。

$$\begin{aligned} \text{さて}, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial f(x'(x))}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu} + \frac{\partial f(x'(x))}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^\mu} + \dots + \frac{\partial f(x'(x))}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial x^3}{\partial x'^\mu} \\ &= \sum_{\nu} \frac{\partial f(x'(x))}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \xrightarrow{x' \text{を書く}} \\ &= \sum_{\nu} \frac{\partial f(x')}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial f(x')}{\partial x^\nu} \end{aligned}$$

これで、 f を取除く、 $\partial/\partial x'^\mu$ の変換の式を得る。

これは反変ベクトルに関する変換式。

微分演算子は次のように書く：

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right)$$

反変ベクトルを基準に書く。つまり、

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (-\partial^1, -\partial^2, -\partial^3)$$

$$\text{二つ目}, \text{発散 (divergence) は } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_k A^k \quad (k=1,2,3)$$

4元ベクトルの発散は

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \partial_i A^i$$

d'Alembertian operator は次式で定義する。

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^0} - \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

この演算子は Lorentz 変換の下でスカラー。

⑥ $\overleftrightarrow{\partial_\mu}$ を次式で定義する。

$$A \overleftrightarrow{\partial_\mu} B \equiv A (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B$$

以上が主な記法となる。

• なぜ反復ベクトルを基準として記法ではある?

・ 反復ベクトル

$$\chi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu$$

$$= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} x^3$$

・ 共変ベクトル

$$\chi'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} x_\nu$$

$$= \frac{\partial x^0}{\partial x'^\mu} x_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^\mu} x_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^\mu} x_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^\mu} x_3$$

これらを比較したとき、各段用いてる座標はどういう現れる? たとえば、 $(x,y) \rightarrow (r,\theta)$ を考えると、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \frac{\partial r}{\partial x} x + \frac{\partial r}{\partial y} y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} y$$

となる。共変ベクトルについても、

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \Rightarrow r = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta$$

となる。Euclid space では計量が直角、この場合に直角座標で反復・共変ベクトルを採用してもよい。

では Minkowski space の中でどう結果が変わるか?

$$(t, x) \rightarrow (t', x') \text{ のローレンツ変換を考える。 } \beta = v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \text{ とする。}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma \\ -\beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \gamma \\ \beta \gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

座標で反復ベクトルを採用する: $\chi^\mu = (x^0, x^1) = (t, x)$ このとき、変換則を考えると

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} x^1 \\ &= \gamma t + (-\beta \gamma) x \\ &= \gamma t - \beta \gamma x \end{aligned} \quad \begin{aligned} x'^1 &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} x^1 \\ &= (-\beta \gamma) t + \gamma x \\ &= -\beta \gamma t + \gamma x \end{aligned}$$

共変ベクトル χ_μ は $\chi_\mu = (x_0, x_1) = (x^0, -x^1) = (t, -x)$ である。その変換則は、

$$\begin{aligned} x'_0 &= \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} x_0 + \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} x_1 \\ &= \gamma \cdot x_0 + \beta \gamma x_1 \\ &= \gamma t - \beta \gamma x \end{aligned} \quad \begin{aligned} x'_1 &= \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} x_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} x_1 \\ &= \beta \gamma x_0 + \gamma x_1 \\ &= \beta \gamma t - \gamma x \quad (= -x') \end{aligned}$$

これらを比較すると、 $\chi_\mu = g_{\mu\nu} \chi^\nu$ の関係が分かる。 \Rightarrow 反復・共変は $g_{\mu\nu}$ で変換可能であることが重要となる。

1.3. Lorentz transformation

$t=t'=0$ において原点を一致させた 2つの慣性系を考える。これらは間の相対速度は \vec{v} 。
 $t=t'=0$ において光 ($c=1$) が発せられたとする。その波面は

$$S : t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$S' : t'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = 0$$

と表わすことができる。縮約の記法を用いれば“

$$\chi_\mu \chi^\mu = 0, \quad \chi'_\mu \chi'^\mu = 0$$

であり、これらは等しいとおくことができる。

$$\chi_\mu \chi^\mu = \chi'_\mu \chi'^\mu$$

これは S, S' において光速 c が等しいという要請を含んでいる。

もし S, S' において光速が違えば $c=1$ となると互体が NG。

2つの座標系の間は次の変換で与えられる。

$$\chi'^\mu = \alpha^\mu_\nu(v) \chi^\nu, \quad \chi'_\mu = \alpha^\nu_\mu(v) \chi_\nu$$

ここで、 $\alpha^\mu_\nu(v)$ は v の関数。この形は同次形のローレンツ変換と呼ばれる。

より一般的には、非同次形のローレンツ変換（ポアノン変換）を考えることができる。

3次元の回転より、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ を不変に保つ 度量 とし考えるのができる。
このとき 4次元時空において考えることができる。つまり Lorentz 度量と Minkowski space である。

$$s^2 = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

を不変に保つ 4次元版の一般化された回転とみなせる。

具体的には、次のように行列形式で書くことができる。

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^1 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 \\ \alpha_1^0 & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^0 & \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし}, \alpha_{ij} \quad \alpha_\lambda^\mu \alpha_\mu^\lambda = \delta_\lambda^\mu$$

の関係を満足。この行列 A の直交性は $x_\mu x^\mu$ の保存性が示される。

Proof ベクトルを表す意味で、 $\vec{x}' = A\vec{x}$ を書く。 s^2 の保存性は $\vec{x}'^t \vec{x}' = \vec{x}^t \vec{x}$ を書くことができる。すなはち、

$$\begin{aligned} \vec{x}'^t \vec{x}' &= (A\vec{x})^t (A\vec{x}) \\ &= \vec{x}^t A^t A \vec{x} \\ &\equiv \vec{x}^t \vec{x} \end{aligned}$$

が成立する必要がある。すなはち、

$$\vec{x}^t (A^t A - E) \vec{x} = 0 \Rightarrow \underline{A^t A = E}$$

これは A が直交行列であることを示す。A の行列式は 1 または -1 である。

$$|E| = 1 = |A^t A| = |A|^2 \quad \therefore \underline{|A| = \pm 1}$$

ローレンツ変換の下で不変な量は 0 階のテンソル（スカラ）として理解される。例として。

① 4-R元の体積要素 d^4x

② 4元ベクトルのスカラ積 $A \cdot B = A^\mu B^\mu$

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

Lorentz tensor of rank 1
= time component

ローレンツ変換の下で座標 x^μ を同じ变换に従う量と 4元ベクトルと呼ぶ。例として。

- $\partial'^\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \partial^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \partial^\mu_\nu \partial^\nu : \text{微分演算子}$

- 4元運動量 $p^\mu = (E, \vec{p})$, $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ($c=1$)

- 4元電流 $j^\mu = (e, \vec{j})$, e : 電荷密度, \vec{j} : 磁流密度ベクトル

$p_{||} T$ from Schrödinger equation とある
つまり $T = e j^\mu$ は Maxwell 方程式の解ですか？

- 4元ポテンシャル $A^\mu = (A^0, \vec{A})$

A^0 : スカラーポテンシャル, \vec{A} : ベクトルポテンシャル

\rightarrow Schrödinger eq. の

保存律をこの $j^\mu = \partial_\nu A^\nu$ によって示す。

ローレンツ変換の下で 2 階のテンソルとして変換の例としては。

- 電磁場テンソル $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$

などが挙げられる。

これらの定式化の重要な点は、

(i) 全ての慣性系において光速が一定であることを保証すること

(ii) 座標変換の下で方程式の共変性が明示的に分ること

➡ 变換性が同じテンソルの形で方程式が書かれる。

これはどうやら特殊相対論の基本原理である。

1.3.1 Improper and Proper Rotations

パリヤ変換は座標の反転に対応するが、時間についてはどうじみていい。
 一方で、時間反転(鏡像)は時間反転を起すが、もちろん座標は反転しない。
 これらの変換は次のような行列で表わしができる。

$$\text{TL} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これらの行列は一般化された回転には対応しない。たとえば、パリヤ変換とは平面に関する 180° の鏡映に等しい。

このようなパリヤ変換や時間反転は "improper transformation" と呼ばれる。

これらの変換を表わす行列を M と書くと、 M は次の条件に満たす特徴付くられる：

$$\text{Det } M = -1 \quad (*) \quad \rightarrow \text{行列式の "Det" は大文字の "det" とは区別する??}$$

一方、proper Lorentz transformation を表す行列 R は \rightarrow 小文字の \det が出て正面考慮する。

$$\text{Det } R = +1$$

を満たす。この proper と improper の違いは次の通りで表わすことができる。

① Proper Lorentz 変換

無限小変換の連続とに表わしができる。

② Improper transformation

離散変換である、無限小変換から得るにはできない。

(*) $\text{Det } M = -1$ という条件は十分条件ではあるが必要条件ではない。つまり、improper であれば $\det M = -1$ であることは限りない。たとえば、座標と時間の反転は improper であるが $\det M = +1$ である。一方、 $\text{Det } R = +1$ は proper であるための必要条件となる。つまり、proper であれば $\det R = +1$ が成り立つ。

1.3.2 Particle Symmetries

粒子・場・current に対する便利な分類がある。この分類は proper, improper 以及 ローレンツ変換の下での性質の違いに注目したもの。
これらの量が持つ角運動量・パリティ・量子数によって区別されることが多い。

$$\Rightarrow J^P$$

これらの呼び方とその分類の表にまとめた：

Name	J^P	質量をもつ構造を持つ粒子の独立成分の数
Scalar	0^+	1
Pseudoscalar	0^-	1
Vector	1^-	3 (also called a polar vector)
Axial vector	1^+	3 (also called a pseudovector)
Rank-2 tensor	2^\pm	5

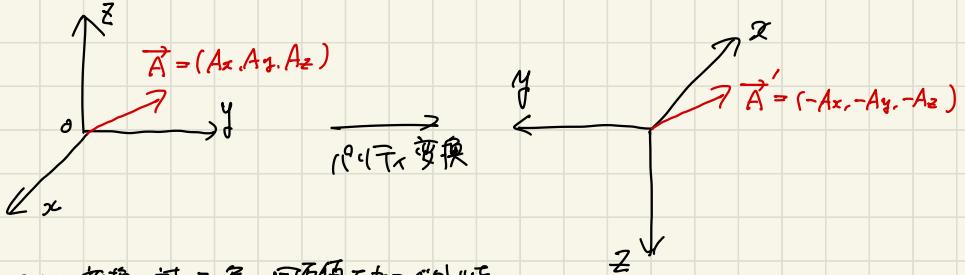
J は角運動量の第3成分、 P はパリティ変換の下での固有値を表す。

表には 内部構造 をもたない 粒子の 独立成分 を示した。 \Rightarrow 多くの 粒子は 内部自由度を持ったもの だといえ、 π -meson は 全体で 擬スカラ (0^-) であるが、内部自由度として アイソスピニ を持つ。また、massless の 粒子は 2つの偏光(分極) の 状態をもたない。

→ なぜ massless の 粒子は 2つの状態をもたないのか？

→ 質量 0 だと 成分が 消えるなどの 特例が ある。

Polar Vector



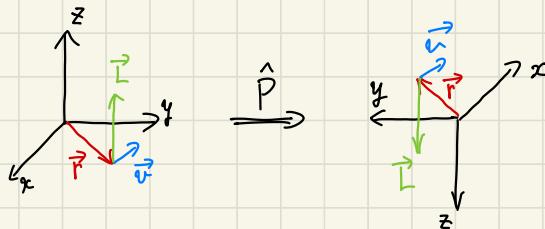
このように、parity変換に対して負の固有値をもつベクトルは
極性ベクトルと呼ぶ。これが本来のベクトルであると解釈される。

具体的には 位置ベクトル、速度ベクトル、運動量ベクトルなどはこれに相当する。

$$\hat{P}V = -V$$

一方、parity変換に対して正の固有値を持つベクトルも存在する。このようにベクトル pseudovector (日本語では擬ベクトル、軸性ベクトルなどと呼ばれる。) がある。parity変換によってベクトル自身が
反転するようなベクトルを指す。

たとえば、角運動量ベクトル $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ などはこの例である。下図のように、角運動量ベクトル \vec{L} は
parity変換に対して正の固有値 +1 を持つ。



例として、π中間子は $J^P = 0^-$ と表わすことができる、pseudoscalar particle (擬スカラーパーティクル) と呼ばれる。場の理論においては pion is pseudoscalar field から構成される。

ローレンツ群について。

?

一般的に、整数スピン J の質量有利粒子は $2J+1$ 個の独立成分を持つ。このことは massless の粒子においては修正される。たとえば、光子は massless のベクトル粒子であり 2つの偏光状態を持つ (\Rightarrow vector ではなく 3つの独立成分を持つはずだが、massless のために、修正されている。) このことについては後の章で触れる。

Fermion は半整数スピンを持つ構造を作っている。これは角運動量の性質からよく理解されないが、ローレンツ群についての構造は持っていない。そのため、Lorentz 群の下での変換則には従わない。 \Rightarrow spinors (スピナー、スピーラー) と呼ばれる。

Fermion operator はローレンツ群ではないが、ある特定の bilinear combination においては τ -行列の構造を有する。 \rightarrow §15.6 で説明する。

?

\rightarrow 双一次形式と呼ばれるもの。この表現にはローレンツ群について振舞う。
詳しくは §15.6

④ Exercise 1.2

4次元のスカラ-積 $A \cdot B$, 微小体積要素 d^4x もローレンツスカラ-であることを確認。

$A \cdot B = A_\mu B^\mu$ である。 A_μ, B^μ を見てこれ

$$A'_\mu = \delta_\mu^\nu A_\nu, \quad B'^\mu = \delta^\mu_\nu B^\nu$$

である。 $A' \cdot B'$ を見てと。

$$\begin{aligned} A' \cdot B' &= A_\mu^\nu A_\nu A_\rho^\mu B^\rho \\ &= A_\mu^\nu A_\rho^\mu A_\nu B^\rho \\ &= \delta^\nu_\rho A_\nu B^\rho \\ &= A_\rho B^\rho \\ &= \underline{A \cdot B} \end{aligned}$$

スカラ-積 $A \cdot B$ は ローレンツ変換の下でスカラ-。

$d^4x = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ である。 $dx'^\mu = \delta^\mu_\nu dx^\nu$ す。

$$\begin{aligned} d^4x' &= g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\rho dx^\rho) (\delta^\nu_\sigma dx^\sigma) \\ &= g_{\mu\nu} \delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma \\ &= g^{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \\ &= g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \\ &= \underline{d^4x} \end{aligned}$$

微小体積要素もローレンツスカラ-である。

⑥ Exercise 1.3

(a) ダランベール演算 $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ がスカラーアルゴリズムであることを確認。

(b) A_μ が 4 元ベクトルであり、 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ が反対称の 2 階テンソルであることを確認。

(a) $\partial_\mu, \partial^\mu$ の変換はこれ

$$\partial'_\mu = \alpha^\nu_\mu \partial_\nu, \quad \partial'^\mu = \alpha^\mu_\nu \partial^\nu$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \alpha^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \alpha^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)$$

Σ 変換下で \square は、

$$\begin{aligned} \square' &= \partial'_\mu \partial'^\mu = (\alpha^\nu_\mu \partial_\nu)(\alpha^\mu_\tau \partial^\tau) \\ &= \alpha^\nu_\mu \alpha^\mu_\tau \partial_\nu \partial^\tau \\ &= \delta^\nu_\tau \partial_\nu \partial^\tau \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \\ &\stackrel{\text{□}}{=} \square \end{aligned}$$

これで \square がスカラーアルゴリズムである。

(b) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ の変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial'_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A'_\mu = (\alpha^\sigma_\mu \partial_\sigma)(\alpha^\rho_\nu A_\rho) - (\alpha^\sigma_\nu \partial_\sigma)(\alpha^\rho_\mu A_\rho) \\ &= \alpha^\sigma_\mu \alpha^\rho_\nu \partial_\sigma A_\rho - \alpha^\sigma_\nu \alpha^\rho_\mu \partial_\sigma A_\rho \quad \text{第2項} \\ &= \alpha^\sigma_\mu \alpha^\rho_\nu \partial_\sigma A_\rho - \alpha^\rho_\nu \alpha^\sigma_\mu \partial_\rho A_\sigma \quad \sigma \leftrightarrow \rho \in C_E \\ &= \alpha^\sigma_\mu \alpha^\rho_\nu (\partial_\sigma A_\rho - \partial_\rho A_\sigma) \\ &\stackrel{\text{□}}{=} \alpha^\sigma_\mu \alpha^\rho_\nu F_{\sigma\rho} \end{aligned}$$

したがって、 $F_{\mu\nu}$ は ローレンツ変換下で 2 階対称テンソルである。

1.3.3 Group Structure of Lorentz Transformations.

同次形のローレンツ変換は群を構成する。 \Rightarrow 同次ローレンツ群、ローレンツ群と呼ばれる。

$$\gamma^a = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

この群は 6つのパラメータもつ、4次元のリー群である。 $(\text{Lie 群} \rightarrow \text{Ch.5})$

3次元の直交群 $O(3)$ はこの同次ローレンツ群の部分群である。

平行移動の群がこのローレンツ群に加えられると、10個のパラメータもつ。

非同次のローレンツ群、Poincaré group (ポアニカレ群) となる。

proper orthochronous Poincaré group は improper なローレンツ変換を含まない。^(*)

物理法則はこの群の変換の下で不变である。

セミ後半

① ローレンツ群、Lie 群、ポアニカレ群について。

② 二つの群についての問題

◦ proper, improper について。

$(m+n)$ 次元 実ベクトル空間において 内積が

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m - x_{m+1} y_{m+1} - \cdots - x_{m+n} y_{m+n}$$

で定義されると、内積を不変にする 1 次復線の全体は $O(n, m) \times O(m, n)$ 。

4 次元 $(3+1)$ 次元 の ミンコフスキーモード空間におけるローレンツ群 $O(3, 1)$ を書ける。つまり、内積

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

を保持する 1 次復線の集合である。4 次元の実直交行列はで、その独立成分は 6 つである。

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{20} & A_{30} \\ A_{01} & A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{03} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

したがって、 $A^{-1} = A^t$ 且し $AA^t = E$ となる。

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{01} \\ -A_{10} & A_{00} \end{pmatrix} \quad (\because A \text{ が直角行列} \Rightarrow \det A = 1)$$

$\det A = 1$ かつ $A^{-1} = (A^t)$ であるから $(A^t)^{-1} = A$ である。

$$\boxed{AA^t = E} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & A_{10} \\ A_{01} & A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{00}A_{00} + A_{01}A_{10} = 1 \\ A_{00}A_{10} + A_{01}A_{11} = 0 \\ A_{10}A_{00} + A_{11}A_{01} = 0 \\ A_{10}A_{10} + A_{11}A_{11} = 1 \end{cases}$$

成り立つ。

$$\det A = 1 \rightarrow A_{00}A_{11} - A_{01}A_{10} = 1$$

$d=2 \rightarrow d=3 \rightarrow d=4$ で 同じように書いてみよう。

$$3\text{次元の回転} + \text{Lorentz boost.} + \text{時間変換}$$

$$\begin{matrix} 3 & 3 & 4 \\ (t, \vec{r}, z) \in \mathbb{R}^3 & (t, \vec{r}) & (t, \vec{r}, z) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (t, \vec{r}, \vec{v}) \in \text{平行運動.} \end{matrix}$$

(ii) $d=2$ のとき、直角座標の独立パラメータはいつでもあること。

$$A^T A = E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\det A| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_{11}A_{11} + A_{21}A_{21} = 1 & \cdots (1) \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} = 0 & \cdots (2) \\ A_{12}A_{11} + A_{22}A_{21} = 0 & \cdots (3) \\ A_{12}A_{12} + A_{22}A_{22} = 1 & \cdots (4) \end{cases} \quad A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad \cdots (5)$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad \cdots (5)$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}}$$

どこまでX³が消えてきたかを元。

②と③は全く同じ式で5つまで2つしかないので。

①式。

$$(A_{11})^2 = 1 - (A_{21})^2 \quad \cdots (6) \quad \text{④式。}$$

$$A_{11} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2}$$

②式。

$$A_{21} = -\frac{A_{11}A_{12}}{A_{22}} \quad \cdots (7)$$

$$A_{12} = \pm \sqrt{1 - (A_{22})^2} \quad \cdots (7)$$

⑦→⑥式。

$$(A_{11})^2 = 1 - \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2 (A_{11})^2$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} \quad \cdots (8)$$

$$(A_{11})^2 \left(1 + \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2\right) = 1$$

$A_{22} = \alpha \neq 1$ の場合はどうなる。

(ii) $d=2$ のとき、直交行列の独立パラメータが 1 つであることを示す。

$$A^T A = E$$

$$|A| = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1 \quad \dots (5)$$

$$\begin{cases} A_{11}A_{11} + A_{21}A_{21} = 1 & \dots (1) \\ A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} = 0 & \dots (2) \\ A_{11}A_{12} + A_{22}A_{21} = 0 & \dots (3) \\ A_{12}A_{12} + A_{22}A_{22} = 1 & \dots (4) \end{cases}$$

$$A_{11}A_{12} = A_{11}A_{22} - 1$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}}$$

どこまで文字が消えてきたかを示す。

②と③は全く同じ式で書いてあること分かる。

①式。

$$(A_{11})^2 = 1 - (A_{21})^2 \quad \dots (6)$$

②式

$$A_{21} = -\frac{A_{11}A_{12}}{A_{22}} \quad \dots (7)$$

⑦ → ⑥式

$$(A_{11})^2 = 1 - \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2 (A_{11})^2$$

$$(A_{11})^2 \left(1 + \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2\right) = 1$$

$$A_{11} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{A_{12}}{A_{22}}\right)^2} \quad \dots (8)$$

④式。

$$(A_{12})^2 = 1 - (A_{21})^2$$

$$A_{12} = \pm \sqrt{1 - (A_{21})^2} \quad \dots (9)$$

⑤式。 $A_{21} = \pm \sqrt{1 - (A_{11})^2}$

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} \quad \dots (10)$$

$A_{22} = A_{11}$ の値が定まっている。

⑨式 A_{12} が定められる。 A_{12}, A_{21} が既知でわかれば ⑧式 A_{11} が定められる。 A_{11}, A_{12}, A_{22} が既知でわかれば ⑩式 A_{21} が定められる。 A_{21} が既知でわかれば ⑨式 A_{12} が定められる。

(T=2×2, 2×2 直交行列の独立性
1個+7個 = 8 個である。)

これは、2次元平面の回転が 2つのパラメータだけで決まるからである。

(ii) $d = 3$ である。 3×3 直交行列の独立成分が 3つであること。

$$A^t A = E$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

○ 非対角成分

$$\text{U} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32} = 0} \\ \underline{A_{11}A_{13} + A_{21}A_{23} + A_{31}A_{33} = 0} \\ \underline{A_{12}A_{13} + A_{22}A_{23} + A_{32}A_{33} = 0} \end{array} \right.$$

$$\text{diag} \left\{ \begin{array}{l} A_{11}A_{11} + A_{21}A_{21} + A_{31}A_{31} = 1 \\ A_{12}A_{12} + A_{22}A_{22} + A_{32}A_{32} = 1 \\ A_{13}A_{13} + A_{23}A_{23} + A_{33}A_{33} = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{L} \left\{ \begin{array}{l} \underline{A_{12}A_{11} + A_{22}A_{21} + A_{32}A_{31} = 0} \\ \underline{A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31} = 0} \\ \underline{A_{13}A_{12} + A_{23}A_{22} + A_{33}A_{32} = 0} \end{array} \right.$$

$$|\det A| = 1$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 1 \rightarrow A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = 1$$

$$\rightarrow A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) = 1$$

○ 対角成分

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12}A_{11} + A_{22}A_{21} + A_{32}A_{31} = 0 \\ A_{13}A_{11} + A_{23}A_{21} + A_{33}A_{31} = 0 \\ A_{13}A_{12} + A_{23}A_{22} + A_{33}A_{32} = 0 \\ \\ A_{11}A_{11} + A_{21}A_{21} + A_{31}A_{31} = 1 \\ A_{12}A_{12} + A_{22}A_{22} + A_{32}A_{32} = 1 \\ A_{13}A_{13} + A_{23}A_{23} + A_{33}A_{33} = 1 \end{array} \right.$$

$$A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} = 0 \quad \dots ① \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0 \quad \dots ② \\ a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} = 0 \quad \dots ③ \end{array} \right.$$

$$a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} = 1 \quad \dots ④$$

$$a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} = 1 \quad \dots ⑤$$

$$a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} = 1 \quad \dots ⑥$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = 1 \quad \dots ⑦$$

④, ⑤, ⑥ から

$$a_{11} = \pm \sqrt{1 - (a_{21})^2 - (a_{31})^2} \quad \dots ④$$

$$a_{12} = \pm \sqrt{1 - (a_{22})^2 - (a_{32})^2} \quad \dots ⑤$$

$$a_{13} = \pm \sqrt{1 - (a_{23})^2 - (a_{33})^2} \quad \dots ⑥$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{a_{12}}(a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31}) \\ &= -\frac{1}{a_{13}}(a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}) \end{aligned}$$

$$\frac{a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31}}{a_{12}} = \frac{a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}}{a_{13}}$$

$$\rightarrow a_{13}(a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31}) = a_{12}(a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31})$$

$$\rightarrow a_{21}(a_{13}a_{12} - a_{12}a_{13}) = a_{31}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

$(m+n)$ 次元 実ベクトル空間において 内積が

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m - x_{m+1} y_{m+1} - \cdots - x_{m+n} y_{m+n}$$

で定義される。すなはち、内積を不変にする 1 次復線の全体は群 $O(n, m)$ である。

4 次元 (3+1 次元) の ミンコフスキイ 空間におけるローレンツ群は $O(3, 1)$ と書ける。つまり、内積

$$\langle x, y \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

を保持する 1 次復線の集合である。4 次元の 實直交行列は 6 個である。

ローレンツ 変換を表す 行列を A と書く。 A は 16 個の成分を持つ、 4×4 の正方形である。

Lie 群としては、ミンコフスキイ 計量を $g = g_{\mu\nu}$ と書いて

$$A^t g A = g$$

を満たす A にて 定義される。 A^t は A の転置を表す。

ローレンツ 群の 単位元(恒等変換) 近傍の 要素を

$$A = 1 + X$$

と書く。 $T = e^X$ 、 X の 1 次子群を取る。

$$(1 + X^t) g (1 + X) = g$$

$$\rightarrow g + X^t g + g X = g$$

$$\therefore \underline{X^t g + g X = 0} \quad (X: \text{Lie 代数})$$

を得る。

$O(3,1)$ 为 Lie 群 (連續群) 的子群, 單位元 近似 简便之

$$A = I + X$$

$$\text{设 } \varepsilon < \varepsilon, A^T g A = g \quad (1)$$

$$(I + X^t) g (I + X) = g$$

$$\Rightarrow g + X^t g + g X + X^t g X = I$$

$$\Rightarrow X^t g + g X = 0$$

$$\Rightarrow (X^t)_{\mu\nu} g^{\nu\nu} + g_{\mu\nu} X^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow (X^t)_{\mu\nu} g^{\nu\nu} + g_{\mu\nu} X^{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow (i) \mu = \nu = 0$$

$$(X^t)_{00} g^{00} + g_{00} X^{00} = 0$$

$$\therefore (X^t)_{00} + X^{00} = 0$$

$$X_{00} + X_{00} = 0$$



$$(ii) \mu = \nu = i$$

$$(X^t)_{ii} g^{ii} + g_{ii} X^{ii} = 0$$

$$\therefore (X^t)_{ii} + X^{ii} = 0$$

$$X_{ii} + X_{ii} = 0$$

$$(iii) \mu \neq \nu \neq 0 \quad (\mu, \nu = i, j, k)$$

$$(X^t)_{ij} + X^{ij} = 0$$

$$X_{j\{i} + X^{i\}j} = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & X_{01} & X_{02} & X_{03} \\ X_{10} & 0 & X_{12} & X_{13} \\ X_{20} & -X_{12} & 0 & X_{23} \\ X_{30} & -X_{13} & -X_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \mu = 0, \nu = i \quad \text{or} \quad \mu = i, \nu = 0$$

$$(X^t)_{0i} g^{ii} + g_{00} X^{0i} = 0$$

$$(X^t)_{i0} g^{00} + g_{ii} X^{i0} = 0$$

$$-(X^t)_{0i} + X^{0i} = 0$$

$$(X^t)_{i0} - X^{i0} = 0$$

$$-X_{00} + X^{00} = 0$$

$$X_{01} = X^{10}$$

- ② (1) の文献を見ると、ローレンツ群 Lie 代数は完全反対称テンソルだという記述がある。したがて、16 成分の行列要素が完全反対称であれば、独立成分は 6 つである。

これを確認しようと見てみたが、うまくいかない。具体的には

$$X^{tg} + gX = 0$$

から X の要素 $X_{\mu\nu}$ が完全反対称であるかどうかを確認する。

1.4 Klein-Gordon Equation

特殊相対論とローレンツ変換について復習しておき、1粒子 Schrödinger 方程式の相対論的拡張物を検討していく。

最初ランダルがアプローチは相対論的なエネルギーの表式

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

から始めることである。 $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ を用いれば、この表式は

$$\hbar^2 \omega^2 = \hbar^2 c^2 \vec{k}^2 + m^2 c^4$$

と書き換えることができる。ここで、 ω は周波数、 \vec{k} は波数ベクトルである。これでエネルギーと波数ベクトルは次のように4元ベクトルとして書きこむことある。

$$\begin{cases} p^\mu = (E, \vec{p}) \\ k^\mu = (\omega, \vec{k}) \end{cases}$$

さらに、自然単位系 $\hbar = c = 1$ となる。上に導いた関係式は

$$\begin{cases} p_\mu p^\mu = m^2 \\ k_\mu k^\mu = m^2 \end{cases}$$

と書きこむことができる。

ここで、普段の量子力学において使われている置き換元

$$E = \hbar\omega \rightarrow -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \quad (= i\hbar \frac{\partial}{\partial t})$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (= -i\hbar \vec{\nabla})$$

を代入すると、

$$p_\mu p^\mu = m^2$$

Σ 縮約の記法を書き下す。

$$p^0 p^0 - p' p' - p^2 p^2 - p^3 p^3 = m^2$$

演算子 $\rightarrow \left[\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \right)^2 \nabla^2 \right] \phi = m^2 \phi$

$$\rightarrow \left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nabla^2 \right] \phi = m^2 \phi$$

$$\therefore \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = m^2 \phi$$

ダランベール演算子 $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_r^2 - \partial_\theta^2$ を用いて書けば最終的に

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - m^2 \phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\therefore (\square + m^2) \phi = 0$$

が得られる。この方程式は Klein-Gordon 方程式と呼ばれてる。

ダランベール演算子 \square は $\square = \partial_r^2 - \partial_\theta^2$ でわかるように既に見た。したがって、 ϕ がスカラーフィールならば方程式の共変性が確かめられる。つまり、Klein-Gordon 方程式が起因する方程式は量子数 $J^P = 0^+$ の粒子となることになる。これはスカラーボンに対応する。

KG eq. は $\square = \partial_r^2 - \partial_\theta^2$ の下で共変な方程式であるが、相対論的な 1 粒子の波动方程式として用いる際に重大な問題が生じる。自由粒子 KG 方程式の平面波解として次の形を仮定する：

$$\phi(\vec{r}, t) \simeq e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}$$

↓
 3 次元時間
 ↓
 4 次元時間

$\therefore \vec{p} \cdot \vec{x}$

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = \vec{p}_\mu x^\mu = E t - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

を表す。直接、代入法で分かるところの平面波は $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ の時 KG eq. の解となる。しかし、与えられた3次元運動量 \vec{p} に対する解の式が得られない。

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

の2通りの場合が可能である。

～ 平面波解の確認～

$$\phi(x,t) = e^{-ip \cdot x} \quad \text{ただし, } (\square + m^2) \phi = 0 \text{ を確認する。}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \exp(-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left[-iE \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) \right]$$

$$= (-iE)^2 \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

$$\nabla^2 \phi = \nabla \left[\nabla \left(\exp(-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}) \right) \right]$$

$$= \nabla \left[i\vec{p} \exp(-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}) \right]$$

$$= (i\vec{p}) \cdot (i\vec{p}) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

$$= -\vec{p}^2 \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

$$\therefore \square^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi(x,t)$$

$$= (-E^2 + \vec{p}^2) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

$$= - (E^2 - \vec{p}^2) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x})$$

KG eq. の解が得られる。

$$(\square + m^2) \phi(x,t) = 0$$

$$\Rightarrow (-E^2 + \vec{p}^2 + m^2) \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) = 0$$

$$\exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) \neq 0 \text{ とし}$$

$$\phi(x,t) = \exp(-i\vec{p} \cdot \vec{x}) \text{ が解で}$$

条件式 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ が成り立つ

$$\underline{E^2 = \vec{p}^2 + m^2}$$

の条件が満たされる。

負エネルギー解は单纯に無視可能とは言えない。なぜなら、負エネルギー解は現実の系において、 $t=t_0$ に矛盾を導く。振り返る（In retrospect），負エネルギー解は反粒子描像に結び付く。

so what first appeared to be a disaster will prove to be a highly desirable aspect of the theory. → 何点は問題では無いを主張している？

どう説く？？ しかし、より深く反問題が生じる。

Schrödinger 方程式は内部の系統でそれによって対応物があり、KG eq. によって自由粒子の確率密度流の保存則を導く事ができる。

Exercise 1.4 17'.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{J} \cdot \vec{\dot{J}} = 0$$

が得られる。なぜ？

$$\begin{cases} \vec{P} = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial_t} \phi = i \left[\phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} - (\frac{\partial \phi^*}{\partial t}) \phi \right] \\ \vec{J} = -i\phi^* \vec{\nabla} \phi = -i \left[\phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi \right] \end{cases}$$

4元流ベクトル \vec{j}^μ を

$$\vec{j}^\mu = (\vec{P}, \vec{J}) = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi = i \left[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi \right]$$

とし導入すると、2.1節の議論

$$\partial_\mu \vec{j}^\mu = 0$$

という表式が得られる。

\hat{p}^2 の空間成分は、Schrödinger eq. のもとと同じであるが、第0成分 P は ϕ の時間微分を含む。これは、KG eq. が $dt = \sqrt{1 - \frac{P^2}{m^2}}$ で2階でなく3次式となる。その結果、 P が正である必要はない。これは Schrödinger eq. の帰結で $P = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ が自然的である。このことは、自由粒子解についてあらわに見えていくべきである。

$$\phi(x, t) = \exp(-ip \cdot x) \quad , \quad E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

よって、 $\rho = i \phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi = i(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi)$

から ρ は次のようにならねばならない。

$$\begin{aligned} \rho &= i \left[\exp(ip \cdot x) \frac{\partial}{\partial t} \exp(-ip \cdot x) - \left[\frac{\partial}{\partial t} \exp(ip \cdot x) \right] \cdot \exp(-ip \cdot x) \right] \\ &= i \left[\exp(ip \cdot x) \cdot (-iE) \exp(-ip \cdot x) - (iE) \exp(ip \cdot x) \exp(-ip \cdot x) \right] \\ &= i(-2iE) \\ &= 2E \quad ? \quad \rightarrow \underline{\rho \propto E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \end{aligned}$$

この部分は確認下さい。比例するからOK。

$E < 0$ であると、実数 ρ = エネルギー密度

→ どこまでも下がってはいけない。

ρ : 確率密度を解釈できない!!

同時に、歴史的及経緯に沿って Dirac が“どうして”これらの問題を回避して複数的な運動方程式を得たのかを見ていく。既に明らかになつてた KG eq. の問題点は $\nabla \cdot \vec{R} = 2$ のことが原因である。

(1) 2種の形の エネルギー・運動量関係式

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

が 負のエネルギー解を許すこと。

(2) KG eq. が 時間に亘って 2 階でないこと。

これは、確率密度が $\partial/\partial t$ を含むために ρ の値が負にならざり得ない。

1つ目の問題点が 負エネルギー解に対して 解釈を与えたとき、意味のあるものへと換わる。2つ目の問題点を回避する $T=0$ では、運動方程式より 時間に亘る線形の ものを考慮となる。 $(\rightarrow \text{Dirac equation})$

Dirac 方程式について考入する前に、まずはこのゼロニクレオトの共轭性を 故事的なところから 時間 t における結果を導くが、同時に、厳密には「性質」といふべきである。 Schrödinger eq. : $i\hbar\partial_t \psi_p(t) = E_p \psi_p(t)$ と エネルギー・運動量関係式 : $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ が組みまとまると、運動量空間での方程式は 次のように書き換えられる： $\downarrow E \geq 0$ を用いて

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi_p(t) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \psi_p(t)$$

time development → A

しかし、この方程式の両辺を Fourier 変換（ $= 2\pi/\lambda$ ）座標空間の 非局所的な方程式へ 置き換えると、これが得まる。これは、積分核 K は

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \int d^3x' K(x-x') \psi(x', t)$$

と書くことができる。これは、積分核 K は

$$K(x-x') = \int \frac{d^3p}{8\pi^3} e^{i\vec{p} \cdot (x-x')} \frac{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}{\downarrow}$$

である。

非局所的になっている。

（用いるには、専門が必要）

しかし（専門知識）対象は
扱うことができない。

この式は χ のコンタクト波長 \hbar/mc が小正に限り、重要なものである。
 その中で、 $\delta\psi(x,t)$ は (x,t) での中の値に依存する。この (x,t) は
 原点 $(0,0)$ から見て光円錐の外側の座標である。このためコンタクト波長 \hbar/mc
 程度の領域内に存在するような粒子を記述しようとすると、因果律を破る可能性がある。

→ ?

1.5 Dirac equation

空間と時間が同時に扱われるためには、その微分は相対論的波動方程式において
 同じ階数を現わさべきである。既に、見たように、時間に関する 1 階の方程式は
 負の確率をもつて困難を回避する必要がある。

1.5.1. Linear equation in ∇ and $\partial/\partial t$

空間・時間 $\vec{E} = \vec{p}$ は 1 階の方程式は次の置換によって得られる：

$$\underline{E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$$

(ただし 2 次元で算術して...)。

ここで、 $\vec{\alpha}, \beta$ はまだ決定される量である。されば、今まで通りの $E \rightarrow i\partial/\partial t, \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$
 の置き換えを代入すると、Dirac の波動方程式 が簡単な Dirac 方程式と呼ばれる。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} &= H\psi(x,t) = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi(x,t) \\ &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi(x,t) \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} = \alpha^k \partial_k$, $k=1,2,3$ である。この方程式が、波動方程式として
 妥当なものであるためには

- (1) Lorentz 不変であり、正しいエネルギー関係式 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ と矛盾しないこと。
 - (2) 連続の方程式と矛盾せず、ゆがみ確率密度として解釈できること
- が条件となる。(4つ!!)

多くの場所で示す中で「 α 」は、この要請は $\vec{\alpha}$ 、 β の数で満たさなければ満足されない。また、 $\vec{\alpha}$ 、 β を交換しても 4×4 行列で各次の条件を満たさなければ、上に満たす要請が満足されない。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \{\alpha_i, \beta\} &= \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
最低限、2の条件を
満たせばいい。

慣習的、(1通りの方法)

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\tau} \\ \vec{\tau} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を選択。ここで、 $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ は Pauli 矢量

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

でよい。ただし

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を表している。そこで、具体的に書き下せば、

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で満たされる。

Dirac 方程式の現れる演算子は 4×4 行列 γ^{μ} の trace、運動方程式
 4×4 行列 $\gamma^{\mu} \psi = 0$ となる。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_1^\dagger \ \psi_2^\dagger \ \psi_3^\dagger \ \psi_4^\dagger)$$

† はエルミート共役である。この演算子はローレンツ変換下で不変である。
 また ψ は 4×1 spinor に通じた複素数 4×1 である。
 \Rightarrow 難しい $\S 1.5.5$ で。

このように、Dirac 波動関数は β や α^k が作用する空間の 4 成分列 ψ で表される。
 一方、各々の ψ_i の 4 成分は順番に Hilbert 空間の要素である。
 したがって Dirac 方程式は 4つの微分方程式を同時に扱う行列の方程式である。

1.5.2. The Dirac current

自由粒子に対する Dirac 方程式は時間方向で線形であるが、明確に正値である確率密度が存在することは驚くべきことである。

Dirac 方程式の两边に左から ψ^\dagger を掛けよ

$$i \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi = -i \psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + m \psi^\dagger \beta \psi$$

を得る。次に、Dirac 方程式全体の左辺を後でとる。左辺の ψ^\dagger は ψ と同一である。

$$\text{Hermitian conjugate: } -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i (\partial_k \psi^\dagger) \alpha^k + m \psi^\dagger \beta$$

$$\text{右辺の } \psi^\dagger \text{ は } \psi \text{ と同一: } -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = i (\partial_k \psi^\dagger) \alpha^k \psi + m \psi^\dagger \beta \psi$$

$$\text{したがって, } \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^\dagger, \beta = \beta^\dagger \text{ である. } [\langle \beta \psi \rangle^\dagger = \psi^\dagger \beta^\dagger = \psi^\dagger \beta]$$

以上を計算すると.

$$i\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\psi^+ \alpha^k \partial_k \psi + m\psi^+ \beta \psi$$

$$-i\frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = i(\partial^k \psi^+) \alpha_k \psi + m\psi^+ \beta \psi$$

$$i\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -i\psi^+ \alpha^k \partial_k \psi - i(\partial^k \psi^+) \alpha_k \psi$$

$$\rightarrow \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = -\psi^+ \alpha^k \underline{\partial_k \psi} - (\underline{\partial^k \psi^+}) \alpha_k \psi$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\psi^+ \psi) &= -\psi^+ \alpha^k (\underline{\partial_k \psi}) - (\underline{\partial^k \psi^+}) \alpha_k \psi \\ &= -\psi^+ \alpha^k (\partial_k \psi) - (\partial_k \psi^+) \alpha^k \psi \\ &= -\partial_k (\psi^+ \alpha^k \psi) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\underline{\psi^+ \psi}) + \partial_k (\psi^+ \alpha^k \psi) = 0$$

$$\underbrace{\therefore \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{J} \cdot \vec{j}}_{\downarrow} = 0 \quad (P = \psi^+ \psi, j^k = \psi^+ \alpha^k \psi)$$

∴ 結果は P が正値となる。 \vec{j} は \vec{J} を含まない。

∴ これは Dirac 方程式が「微分に限りで線形である」との結果である。

∴ 線形性はもう一つの異常は境界条件によってくる。

P. j についての連続性は Schrödinger 方程式の解 ψ_r に対して、 ψ_r の ψ_l と

連続でなければならない。しかし、Dirac 方程式では \vec{j}_l は \vec{j}_r を含まないから ψ_r の ψ_l と連続でない。連続の式は 4 点式で $j = (P, \vec{j})$ で表すのがよろしい。

$$\partial_P j^M = 0$$

の形で表すことができる。

1.5.3 Interaction with an Electromagnetic Field

Dirac 粒子の電磁場との相互作用は、非相対論的量子力学の方法で組み込むことができる。

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \quad (\text{classical})$$

$$\rightarrow i(p_\mu + q A_\mu) \quad (\text{quantum-mechanical}, c=1)$$

ここで、 $A_\mu = (A^0, \vec{A})$ は 4 元電場ベクトルである。 $p_\mu = (E, \vec{p})$ は 4 元運動量、 q は 電荷である。これで、Dirac 方程式は

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [\not{D} \cdot (-i\not{\nabla} - q\vec{A}) + qA^0 + \beta m] \psi$$

となる。Kf eq. 1: 電磁場相互作用を組み込むのも同様の方法をとる。

(Ch. 2 で 説明するが)、この代入の形は 電磁場 の 局所ゲージ不変性の 要請から 決定される。

1.5.4. Covariant Notation

Dirac 方程式の共変性を調べるには 空間と時間の対称的な形式を導入する方が 便利である。 γ -行列を次のように定義する：

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \gamma^0 \alpha^i \quad (i=1,2,3)$$

これらは 反対換関係

$$\{ \gamma^M, \gamma^N \} = \gamma^M \gamma^N + \gamma^N \gamma^M = 2g^{MN}$$

を満たす。ただし、 g^{MN} は マトリックスである。 g^{MN} の性質は？

$$\{ \gamma_\mu, \gamma^\nu \} = 2\delta_\mu^\nu$$

と書くべきである。

γ -矩阵的 α, β 和 $\gamma^0 = \beta, \gamma^i = \gamma^\alpha \alpha^i$ 的關係和 γ^0, γ^i 的關係。

具体的取值是怎樣的？

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1^{(2)} & 0 \\ 0 & -1^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau^i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix}$$

τ_i 是 Pauli 矩陣。

~ Note ~

表示 γ 為 $\gamma^\mu = U \gamma_{\text{Dirac}}^\mu U^\dagger$ 。但此式子僅對 γ^0 成立。

④ Majorana 表示

$$\gamma_{\text{Majorana}}^\mu = U \gamma_{\text{Dirac}}^\mu U^\dagger, \quad U = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \tau_2 \\ \tau_2 & -1 \end{pmatrix}$$

⑤ chiral 表示

$$\gamma_{\text{chiral}}^\mu = U \gamma_{\text{Dirac}}^\mu U^\dagger, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma_{\text{Dirac}}^\mu$ 是 γ 級別的 γ 矩陣。

$$\Gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad \gamma^5 = \gamma_5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

Σ 実数取扱。

$$\gamma^{ijk} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_k \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{0k} = i \alpha^k = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これらはすべて確かめられる。 γ 行列と 4 元ベクトルの内積はよく現れるので特別な記法で規定される。

$$\underline{A} \equiv \gamma_\mu A^\mu = \gamma^0 A^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{A} = \gamma^1 A^1 + \gamma^2 A^2 + \gamma^3 A^3$$

$$p \equiv \gamma_\mu p^\mu = E \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} = E \gamma^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3$$

$$\begin{aligned} i\phi &\equiv i\psi = i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\gamma^\mu \partial_\mu = i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \\ &= i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3}, \end{aligned}$$

行列の Tr と det の操作下で頻繁に使うことである。

γ 行列には便利なトライアル関数の公式や定理がある。 $(\Rightarrow \text{RER})$

以下、記法を用いて Dirac 方程式は γ のどうぞ形式にて書き直すことができる：

$$i \left(\gamma^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \psi - m \psi = 0$$

$$(i\phi - m)\psi = (i\phi - m)\psi = 0$$

$$(\not{p} - m)\psi = 0$$

$\not{a} = \gamma^0$, m は 4×4 単位行列の積とて理解し、 \not{p} は 4 元運動量演算子とて理解する。

電磁場の相互作用を含む方程式は

$$(\gamma^\mu - qA^\mu - m)\psi = 0$$

と書くべきである。 ($A^\mu = \gamma_\mu A^\mu$)

$(\gamma^\mu - qA^\mu - m)\psi = 0$ (正確な形は)

Dirac の性質

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \gamma^0 \alpha^i \quad \gamma_5 = \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -1 \quad (\gamma^0)^\dagger = 1 \quad (\gamma^5)^\dagger = 1$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma_0 \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$$

(A) $\bar{A}B = A \cdot B - i \sigma_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$

(B) γ_μ の奇数個の積、 $\text{tr } \Rightarrow 0$

(C) $\text{tr } \gamma^5 = 0$

(D) $\text{tr } I_4 = 4$

(E) $\text{tr } AB = 4A \cdot B$

(F) $\text{tr } A_1 A_2 A_3 A_4 = 4(A_1 \cdot A_2 A_3 \cdot A_4 - A_1 \cdot A_3 A_2 \cdot A_4 + A_1 \cdot A_4 A_2 \cdot A_3)$

(G) $\text{tr } \gamma_5 AB = 0$

(H) $\text{tr } \gamma_5 AB CD = 4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A^\mu B^\nu C^\rho D^\sigma$

(I) $\gamma_\mu A^\mu \gamma^\nu = -2A^\nu$

(J) $\gamma_\mu A^\mu B^\nu \gamma^\lambda = 4A^\nu B^\lambda$

(K) $\gamma_\mu A^\mu B^\nu \gamma^\lambda = -2B^\nu A^\lambda$

Expres は反対称でない、 $A^\mu = \gamma_\mu A^\mu$

Exercise 1.5 & 1.6 にはかなりの量の演習問題が載せてある。

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (1.73)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (1.74)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (1.75)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.86)$$

$$\gamma^{i\bar{i}} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^{\bar{i}}] = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

$$\gamma^{i\bar{k}} = i\alpha^k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

$\gamma_i, \alpha_i, \beta, \gamma^\nu, \gamma^5, \sigma^{i\bar{i}}$ も問題に含まれる

$$\gamma^i, \gamma^{\bar{i}}, \sigma^i \text{ 及び } A = -A^\dagger$$

⋮

Exercise 1.6 の確認もできる。

出てきた関係式を使えば簡単に!!

Dirac 方程式を
2年後に専門3.

1.5.5. Dirac 方程式の共変性

Dirac 方程式は適切な確率密度流 \bar{f}^μ を導き、正(+)エネルギー関係式を含んでいる。反対に、方程式のローレンツ変換の下で共変性が説明できる。そこで、4成分を持つ波動関数の意味について述べる。

まず、方程式の共変性について見ていく。 p^μ, A^μ は4元ベクトルであるから、電磁場を入れることによっては共変性については考へる必要はない。(ただし、我々は单纯な方程式 $(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) = 0$ の自由 Dirac 粒子の方程式)

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(x) = \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x) = 0$$

を考える。特殊相対論の原理が要請されるところでは、Lorentz 変換(すなはちアライム位の座標系へ移して)も Dirac 方程式が同じ形を保つことである：

$$\left(i\gamma'^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0$$

ここで、 $\psi(x) \in \psi'(x')$ は同じ物理状態を意味し、 $x \in x'$ (すなはちローレンツ変換によって互いに変換される)。

この例では2つの系の間に ユーティリティ変換 として等しいことを示す。すなはち、 $\gamma \in \gamma'$ 区間を取除く、変換後の Dirac 方程式を γ^μ が満たす代数が満たす。

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0$$

の表現は Unitary の自由度を持つ
この意味で、 $\gamma \in \gamma'$ と区別しない。

と書く。さて、 $\psi \in \psi'$ の変換は次のような線形変換であることを仮定する：

$$\psi'(x') = S \psi(x)$$

ここで、S は 4×4 行列であり、系の相対速度、向量に依存するか、座標に依存しない。

どうかの系も特別な系ではないので、逆変換は必ず存在する。つまり、

$$\psi(x) = S^{-1}\psi'(x')$$

となる S^{-1} が存在する。この逆変換の表現を用いて、Sに作用する δ を求めよう。

元の Dirac 方程式は \mathcal{D} の形で書くことができる：

$$\begin{aligned} & \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi(x) = 0 \\ & i \gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi'(x') - m S^{-1} \psi'(x') = 0 \quad \downarrow \quad \psi = S^{-1} \psi' \\ & i S \gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi'(x') - m \psi'(x') = 0 \quad \downarrow \quad \text{左から } S \\ & \left(i S \gamma^\mu S^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0 \quad \downarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \alpha_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \\ & \left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0 \end{aligned}$$

最終式で

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m \right) \psi'(x') = 0$$

と比較すると、恒等式

$$S \gamma^\mu S^{-1} \alpha_\mu = \gamma^\mu$$

が得られる。これは 平行演算子 S の定義 と呼ぶ。我々は S は Dirac 波動関数に対する変換演算子として導入した上で、上述の恒等式は波動関数の D -レジン変換の性質を決定する。すなはち S の像 ψ' は (元の Dirac 方程式の) 変換性を定める。この S の形 (\leftarrow solution?) はまだよくわからないところであった。

Properな D-レジン変換については、有限の変換は無限小変換をつみて得られる。

$T=2\pi\hbar$ 、又軸まわりの角速度 θ の回転込み次の通りです。

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\theta \gamma^2} \psi(x)$$

$$:= \text{def}, \quad \gamma^{ik} = \sum_{j,l} \begin{pmatrix} \delta_{jk} & 0 \\ 0 & \delta_{il} \end{pmatrix} \text{ です。}$$

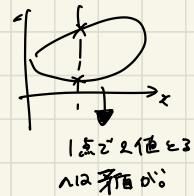
$\psi'(x') = S \psi(x) \quad [C_1(105)]$ の実現則に従う $(S \text{ は } S)^M S^{-1} \delta_{kl}^M = \delta^{kl}$
 (これは決まる) 変換される量を Dirac spinor と呼ぶ。(\neq Dirac, bispinor, Lorentz spinor)
 \rightarrow Pauli spinor とは区別です。

この構造から、Dirac 方程式は量子力学と特殊相対論の要請を一度に満たすことができます。
 bispinor の構造を持つ必要があります。

$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\theta \gamma^2} \psi(x)$ において指標が $\frac{\theta}{2}$ を含むが、 $\psi(x)$ が元の値に戻るためには $\theta = 2\pi$ で
 4π の回転分が求められます。 $\therefore n = \pm 1/2$ 。 Dirac theory においては 物理的な観測量 ψ ではなく ψ'
 の偶数べきで構成されている必要があります。

$\psi^\dagger \gamma^0$ という組合せはよく現れる。そこで、随伴アダム (ル $\bar{\psi}(x)$) を

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$



はまるで定義する。ローレンツ変換の下では。

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) S^{-1}$$

ここで振る舞う。 j^M, γ^M の表式をみ、

$$\rho = \psi^\dagger \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$$

\uparrow

$$\gamma^0 \gamma^0 = I_4$$

$$j^i = \psi^\dagger \alpha^i \psi = \psi^\dagger \gamma^0 j^i \psi = \bar{\psi} j^i \psi$$

\therefore $\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn} j^i j^l j^m = \bar{\psi} j^m \psi$ です。

1.5.6 Bilinear Covariants.

四元数のテンソルとしての性質を持つ $\bar{\psi}$ と ψ の Bilinear form は Bilinear covariants と呼ぶ。例として Dirac current j^μ を考へる。

j^μ は D-レーベン換算下では

$$j'^\mu = \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi'$$

と変換される。 $\psi'(x) = S\psi(x)$, $\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)S^{-1}$ である。

$$\begin{aligned} j'^\mu &= (\bar{\psi} S^{-1} \gamma^\mu S \psi) \\ &= \bar{\psi} S^{-1} (S \gamma^\nu S^{-1} \alpha_\nu^\mu) S \psi \quad \leftarrow S \gamma^\mu S^{-1} \alpha_\nu^\mu = \gamma^\mu \\ &= \alpha_\nu^\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \\ &= \alpha_\nu^\mu j^\nu \\ \therefore \underline{j'^\mu = \alpha_\nu^\mu j^\nu} \end{aligned}$$

である。つまり Dirac current は proper to Lorentz 変換下で vector として振る舞うことが分かる。 j^μ の D-レーベン換算下での完全な特性を知るためには、improper to Lorentz 変換の下での振る舞いを見ておく必要がある。

八次元変換の下では、つまり $S = \gamma^0$ である。

$$j^0 \rightarrow j^0, \quad j^k \rightarrow -j^k$$

と振る舞う。これは即ち、 j^μ は 軸性ベクトルではなく、極性ベクトルとして振る舞うことが分かる。

γ 行列が 16 個の線形独立な 4×4 行列を構成できると言える。これらは クラス十代数を構成している。

Exercise 1.7

次のことを証明せよ.

- (i) $\bar{\gamma}_5 \psi$ が D -レーニングである
 (ii) $\bar{\gamma}_5 \gamma_5 \psi$ が D -レーニング・擬スカラーアクションである
 (iii) $\bar{\gamma}_5 \gamma^\mu \psi$ が D -レーニング・2階アントラクションである

D -レーニング変換を与える行列を S とする. すなはち, S は properな変換である.

すなはち, $[S, T] = 0$ が成立する。

- (i) $\bar{\gamma}_5 \psi$ が D -レーニングスカラーアクション

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_5 \psi &\rightarrow \bar{\gamma}'_5 \psi' = (\bar{\gamma}_5 S^{-1} S \psi) \\ &= \underline{\bar{\gamma}_5 \psi},\end{aligned}$$

- (ii) $\bar{\gamma}_5 \gamma_5 \psi$ が D -レーニング・擬スカラーアクション

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_5 \gamma_5 \psi &\rightarrow \bar{\gamma}'_5 \gamma_5 \psi' = \bar{\gamma}_5 S^{-1} \gamma_5 S \psi \\ &= \bar{\gamma}_5 S^{-1} (-S \gamma^5) \psi \\ &= -\underline{\bar{\gamma}_5 \gamma^5 \psi},\end{aligned}$$

- (iii) $\bar{\gamma}_5 \gamma^\mu \psi$ が D -レーニング・2階アントラクション

$$\bar{\gamma}_5 \gamma^\mu \psi = \bar{\gamma} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi \rightarrow \bar{\gamma}' \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi'$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_5 S^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu S \psi &\Rightarrow \bar{\gamma}' = \frac{i}{2} \{ \bar{\gamma}_5 S^{-1} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) S \psi \} \\ &= \frac{i}{2} \alpha_\sigma^\mu \alpha_\rho^\nu \bar{\gamma} [\gamma^\sigma, \gamma^\rho] \psi = \underline{\alpha_\sigma^\mu \alpha_\rho^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho} \\ &= \bar{\gamma}_5 S^{-1} (S \gamma^\mu S^{-1} \alpha_\sigma^\mu) (S \gamma^\rho S^{-1} \alpha_\rho^\nu) S \psi \\ &= \bar{\gamma} \gamma^\mu S^{-1} \alpha_\sigma^\mu S \gamma^\rho S^{-1} \alpha_\rho^\nu S \psi \\ &= \bar{\gamma} \alpha_\sigma^\mu \alpha_\rho^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \psi \\ &= \underline{\alpha_\sigma^\mu \alpha_\rho^\nu \bar{\gamma} \gamma^\mu \gamma^\rho \psi}\end{aligned}$$

Exercise 1.8

(a) パリテ度標

パリテ度標は $\psi'(x) = S\psi(x)$ の形をSにすれば、 $S = \gamma r^0$ とみなし可.

S を定めると

$$S\gamma^{\mu}S^{-1}\alpha_{\mu}^{\nu} = \gamma^{\nu}$$

である。 α_{μ}^{ν} がパリテ度標のとき、 S がどうなれば可かを考える。パリテ度標の逆度標は自分自身なので。

$$S\gamma^{\mu}S^{-1} = \alpha_{\mu}^{\nu}\gamma^{\nu}$$

$$\rightarrow \begin{cases} S\gamma^0S^{-1} = \alpha_0^0\gamma^0 = \gamma^0 \\ S\gamma^iS^{-1} = \alpha_i^i\gamma^i = -\gamma^i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\gamma^0S^{-1} = \gamma^0 \\ S\gamma^iS^{-1} = -\gamma^i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S\gamma^0 - \gamma^0 S = 0 \\ S\gamma^i + \gamma^i S = 0 \end{cases}$$

二つ条件を満たすかつ $S = \gamma^0$ は不可能である。 γ を任意の定数として $S = \gamma r^0$ の自由度がある。 $r^0 = \gamma^0 + \gamma$ 、 $S = \gamma r^0$ でわかるように分子は。

(b) (a) の結果, Fermion & Anti-Fermion が 逆符号の内部粒子で構成される場合がある.

次節の内容だが, 静的に入り出る Dirac 粒子は 4 個の Fermion & AntiFermion の解

$$U^{(1)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(2)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(3)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(4)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. このとき 内部粒子密度 $\bar{S} = \gamma \gamma^0 = \gamma^0 (\gamma=1)$ の作用によると、

$$\begin{aligned} \gamma^0 U^{(1)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \gamma^0 U^{(2)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= U^{(1)}(\vec{p}=0) & &= U^{(2)}(\vec{p}=0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma^0 U^{(3)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \gamma^0 U^{(4)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\ &= -U^{(3)}(\vec{p}=0) & &= -U^{(4)}(\vec{p}=0) \end{aligned}$$

となる. \bar{S} は 4 個の固有値が 反対の符号になつて分かれかかる.

(c) Dirac 粒子に対する 荷電失役変換の 演算子の形を求める。 141, (1.123) の
式(141)は如何なる作用を調べる。

$\text{Q}^{\text{H}} \text{Int} \quad (i\phi - qA - m)\psi = 0 \quad | \text{は作用下結果}, m \text{を変える} \Rightarrow q \rightarrow -q \text{ なら} \psi \text{を}\psi^* \text{とす}.$

$$(i\phi - qA - m)\psi(x) = 0$$

↓ 荷電失役変換

$$(i\phi + qA - m)\psi^*(x), \quad \psi^*(x) = S^c \psi(x), \quad S^c: \text{荷電失役演算子}$$

が求められる。

$$(i\phi - qA - m)\psi(x) = 0 \quad \text{の} \quad \text{左} \text{, 右} \text{を} \text{書き下して},$$

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi(x) = 0$$

とすると、両辺の 複素共役をとると。

$$[(\gamma^\mu)^*(-i\partial_\mu - qA_\mu) - m]\psi^*(x) = 0$$

$$\rightarrow [-(\gamma^\mu)^*(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]\psi^*(x) = 0$$

となる。 ψ, γ^μ は $\pm = \pm 1$ の複数 $L = L^{-1}$ で $\psi \rightarrow \psi' = L\psi, \gamma^\mu \rightarrow \gamma'^\mu = L\gamma^\mu L^{-1}$ の自由度がある。
 $\exists z^*, \pm = \pm 1$ の複数 (共役演算子) L で $L^{-1}L = 1$ かつ $L^* = L$ である。

$$0 = L[-(\gamma^\mu)^*(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]L^{-1}L\psi^*(x)$$

$$= [-L(\gamma^\mu)^*L^{-1}(i\partial_\mu + qA_\mu) - m]L\psi^*(x)$$

を得る。 $L^{-1} = L^*$ 。

$$-L(\gamma^\mu)^*L^{-1} = \gamma^\mu$$

を満たす L を用いて、 $\psi(x)$ への 荷電失役変換 (次式で与えられる)。

$$\psi^*(x) = L\psi^*(x)$$

$$-\gamma^{\mu}(\gamma^{\mu})^{\dagger}\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} \quad \dots \textcircled{1}$$

因為 γ^{μ} 在標準表示下是 γ^{μ} 的具體的形態之等式。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow -\gamma^{\mu}(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^{\mu}\gamma^{\mu}$$

$$\Leftrightarrow \gamma^{\mu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}(\gamma^{\mu})^{\dagger} = 0$$

$$\mu=0 \text{ 或 } \infty \quad (\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0 \quad \text{且}$$

$$\gamma^0\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^0 = 0$$

由 $\gamma^{\mu} = c\gamma^i$ ($c \in \mathbb{C}$) 得出 $\gamma^0 = 0$.

$$\mu=i=1, 2, 3 \text{ 或 } \infty.$$

$$(\gamma^1)^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\dagger} = \gamma^1 \quad (\gamma^2)^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^2$$

$$(\gamma^3)^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{\dagger} = \gamma^3$$

由 $\gamma^{\mu}\gamma^{\mu} = 0$.

$$\gamma^1\gamma^1 + \gamma^2\gamma^2 + \gamma^3\gamma^3 = 0 \Rightarrow \gamma^1 = c\gamma^0 \quad (c \in \mathbb{C})$$

$$\gamma^2\gamma^2 - \gamma^1\gamma^1 = 0 \Rightarrow \gamma^2 = c\gamma^0$$

$$\gamma^3\gamma^3 + \gamma^1\gamma^1 = 0 \Rightarrow \gamma^3 = c\gamma^0$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma^1 = c\gamma^0 \\ \gamma^2 = c\gamma^0 \\ \gamma^3 = c\gamma^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma^{\mu} = c\gamma^0 \quad (c \in \mathbb{C})$$

因此 $\gamma^{\mu} = c\gamma^0$, $\gamma^0 = \gamma^2$ 與 $\gamma^1 = \gamma^3$.

$\psi^0(x) = \gamma^2 \psi^0(x)$ 是 Dirac spinor 且適用 γ^2 .

$$U^{(1)}(\vec{p}) = \gamma^2 (U^{(1)}(\vec{p}))^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}^\dagger$$

$$= i N \begin{pmatrix} -\frac{p_-}{E+m} \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = i (-U^{(2)}(\vec{p}))$$

$$U^{(2)}(\vec{p}) = \gamma^2 (U^{(2)}(\vec{p}))^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}^\dagger$$

$$= i N \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i U^{(2)}(\vec{p})$$

$$U^{(1)}(\vec{p}) = \gamma^2 (U^{(1)}(\vec{p}))^\dagger$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\dagger$$

$$= i N \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{-p_3}{E+m} \\ \frac{-p_+}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$= i (-U^{(1)}(\vec{p}))$$

$$U^{(2)}(\vec{p}) = \gamma^2 (U^{(2)}(\vec{p}))^\dagger$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\dagger$$

$$= i N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$= i U^{(2)}(\vec{p})$$

$$(\tau = e^{i\omega t}, \quad i = e^{\frac{1}{2}\pi i} \quad (\text{if } \zeta < 0, \quad -i = e^{\frac{3}{2}\pi i}) \quad \in \mathbb{R} \cup \{0\}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_+^{(\alpha)}(x) = -\psi_-^{(\alpha)}(x) \quad [\psi_-^{(\alpha)}(x)] \\ \psi_-^{(\alpha)}(x) = +\psi_+^{(\alpha)}(x) \quad [-\psi_+^{(\alpha)}(x)] \end{array} \right.$$

由上式得 $\psi_+(x) = \psi_-(x)$.

(d) 静止 Dirac spinor は 2nd 乗算子

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

↑ 固有値で $\gamma^5 = \pm i\sigma_3$ 。

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(1)}(\vec{p}=0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} U^{(1)}(\vec{p}=0)$$

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(2)}(\vec{p}=0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} U^{(1)}(\vec{p}=0)$$

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(3)}(\vec{p}=0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} U^{(1)}(\vec{p}=0)$$

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(4)}(\vec{p}=0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=} = -\frac{1}{2} U^{(4)}(\vec{p}=0)$$

∴ 4 種類、(c) で示した荷電共役演算子は \not{L}_3 の固有値の符号を直すことを確認。

$$\text{荷電共役演算子 } \not{U}^{(k)} = i\gamma^2 \text{ で } \not{U}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{の} \quad \text{式}$$

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 (U^{(c)} U^{(k)*}(\vec{p}=0)) = \frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(c)} U^{(k)}(\vec{p}=0)$$

$$= \frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(k)}(\vec{p}=0)$$

$$= -\frac{1}{2} U^{(4)}(\vec{p}=0)$$

$$= -\frac{1}{2} (U^{(c)} U^{(4)*}(\vec{p}=0))$$

$$\frac{1}{2} \not{L}_3 (U^{(c)} U^{(2)*}(\vec{p}=0)) = \frac{1}{2} \not{L}_3 U^{(c)} U^{(2)}(\vec{p}=0)$$

$$= \frac{1}{2} \not{L}_3 (-U^{(3)}(\vec{p}=0))$$

$$= -\frac{1}{2} U^{(3)}(\vec{p}=0)$$

$$= -\frac{1}{2} (U^{(c)} U^{(2)*}(\vec{p}=0))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_3 \left(U^{(c)} U^{(s)\dagger} (\vec{p}=0) \right) &= \frac{1}{2} \sum_3 U^{(c)} U^{(s)} (\vec{p}=0) \\ &= \frac{1}{2} U^{(s)} (\vec{p}=0) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(U^{(c)} U^{(s)} (\vec{p}=0) \right)}_{\text{アダムゼン}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_3 \left(U^{(c)} U^{(q)\dagger} (\vec{p}=0) \right) &= \frac{1}{2} \sum_3 U^{(c)} U^{(q)} (\vec{p}=0) \\ &= \frac{1}{2} U^{(q)} (\vec{p}=0) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(U^{(c)} U^{(q)} (\vec{p}=0) \right)}_{\text{アダムゼン}} \end{aligned}$$

アダムゼン

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{正エントリー} \\ \text{負エントリー} \end{array}$$

ターンゼン

荷電�俠変換はアインと入れ換ひ変換して解釈することができる。

1.5.7. Solutions of the Dirac equation for Free Particles

ここで、Dirac 方程式の explicit な解を確認する。すなはち、静止した自由エルミテ粒子を考える。
 \Rightarrow 波動関数は全空間で同一である必要がある。

そのため、Dirac 方程式 (= 2 つずつ 空間 微分) の解は無限個である。

$$H\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \simeq \beta m \psi = \begin{pmatrix} m & m \\ m & -m \\ -m & m \\ m & -m \end{pmatrix} \psi$$

となる。(Pauli-Dirac 表示) この対応には 4 つの解がある。

2 つの 正エネルギー 解

$$U^{(1)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(2)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 つの 負エネルギー 解

$$U^{(3)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U^{(4)}(\vec{p}=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらは次の通りで与えられるが、平面波となるため:

$$\left. \begin{array}{l} \psi_+^{(\alpha)}(x) = U^{(\alpha)}(\vec{p}=0) e^{-imt} \quad (\alpha=1,2, \text{ positive energy}) \\ \psi_-^{(\alpha)}(x) = U^{(\alpha+2)}(\vec{p}=0) e^{imt} \quad (\alpha=1,2, \text{ negative energy}) \end{array} \right\}$$

KG_{ef} で出る下の負のエネルギー 解は $\psi_-^{(1)}$ と $\psi_-^{(2)}$ である。

$U^{(1)}(\vec{p}=0)$, $U^{(2)}(\vec{p}=0)$ の 2つの解は 非相対論的極限で $\vec{p}^2 \gg 1$ の解に対応する。

下下の 相対論的解は $\vec{p} \ll \sqrt{E+m}$ の下での解を意味する。

\Rightarrow 負エネルギー解は 反粒子として理解される。

並進運動で $\vec{p} \ll \sqrt{E+m}$ の Fermion に対する固有状態は 次で与えられる。

$$U^{(1)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} \quad U^{(2)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{(1)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \end{pmatrix} \quad U^{(2)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

平面波解としては 次の通りに対応する。

$$\psi_{+}^{(\alpha)}(x) = U^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot x} \quad \psi_{-}^{(\alpha)}(x) = U^{(\alpha)}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot x}$$

ここで、2成分式で

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

規格化定数

$$N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$$

$\propto \sqrt{E}$

$$U^{(1)}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} = U^{(2)}(-\vec{p}) e^{-i(-\vec{p}) \cdot \vec{x}}$$

$$\underbrace{U^{(2)}(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}}_{\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{正エネルギー-反粒子 spinor} \end{array}} = \underbrace{U^{(3)}(-\vec{p}) e^{-i(-\vec{p}) \cdot \vec{x}}}_{\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{負エネルギー-粒子 spinor} \end{array}}$$

と ψ_1, ψ_2, ψ_3 は \vec{p} の基底関数である。 ($1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$ の関係は Exercise 1.8(d) に記載。)

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & p_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_3 & p_- \\ p_+ & p_3 \end{pmatrix}$$

1a) Exercise 1.9 の問題。

これらを元に ψ の次の関係式を導く。

$$\star U^{(\alpha)}(\vec{p})$$

$$\star U^{(\beta)}(\vec{p})$$

$$\left. \begin{array}{l} (\not{p} - m) U^{(\alpha)}(\vec{p}) = 0 \\ \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0 \\ \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p}) U^{(\beta)}(\vec{p}) = \delta_{\alpha\beta} \\ U^{(\alpha)}(\vec{p}) \bar{U}^{(\beta)}(\vec{p}) = \bar{U}^{(\beta)}(\vec{p}) U^{(\alpha)}(\vec{p}) = 0 \\ U^{(\alpha)}(\vec{p}) U^{(\beta)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\not{p} + m) U^{(\alpha)}(\vec{p}) = 0 \\ \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0 \\ \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p}) U^{(\beta)}(\vec{p}) = -\delta_{\alpha\beta} \\ U^{(\alpha)}(\vec{p}) \bar{U}^{(\beta)}(\vec{p}) = \frac{E}{m} \delta_{\alpha\beta} \end{array}$$

直交性
規格化

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1,2} U^{(\alpha)}(\vec{p}) \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{2m} \\ \sum_{\alpha=1,2} U^{(\alpha)}(\vec{p}) \bar{U}^{(\alpha)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} - m}{2m} \end{array} \right\}$$

$\gamma^5 \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad \alpha, \beta = 1, 2$ とする。完全性条件と行列方程式を導入。

\vec{p} はスピンの量子化軸と同じ方向にとると： $\vec{p} = (0, 0, p)$
 これらのスピンはハミルトン演算子の固有状態である。

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\tau} & 0 \\ 0 & \vec{\tau} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\tau} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\tau} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\vec{p}} = \vec{p}/|\vec{p}|.$$

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^{(\alpha)}(\vec{p}) = S_\alpha u^{(\alpha)}(\vec{p}), \quad \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} v^{(\alpha)}(\vec{p}) = -S_\alpha v^{(\alpha)}(\vec{p})$$

∴ ハミルトン子数 (\Rightarrow 固有値) は $S_1 = +\frac{1}{2}, S_2 = -\frac{1}{2}$ である。

物理的には helicity は運動量方向の Fermion のスピンの射影である。自由 Dirac 粒子では helicity は定数である。Helicity は空間回転によって不変量であるが、質量ある Fermion は常に ローレンツ不変質量 である。

Exercise 1.9

(a) 直角性關係

$$\bar{U}^{(x)}(\vec{p}) U^{(p)}(\vec{p}) = \bar{U}^{(y)}(\vec{p}) U^{(p)}(\vec{p}) = 0$$

Σ 說明可見。

$$\bar{U}^{(x)}(\vec{p}) = (U^{(x)}(\vec{p}))^\dagger \gamma^0$$

$$= N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_3}{E+m} & \frac{p_-}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= N \left(1 \ 0 \ -\frac{p_3}{E+m} \ -\frac{p_-}{E+m} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{U}^{(y)}(\vec{p}) U^{(y)}(\vec{p}) = N \left(1 \ 0 \ \frac{-p_3}{E+m} \ \frac{-p_-}{E+m} \right) N \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= N^2 \left(\frac{p_-}{E+m} - \frac{p_-}{E+m} \right)$$

$$= 0$$

化成同標系下可證。

(b) spinor の 積極 (七 ローレンツ) 不変である。

$$U^{(\kappa)\dagger}(\vec{p}) U^{(\kappa)}(\vec{p}) = \frac{E}{m}$$

と復元される。ただし γ^5 は

$$\psi' = S \psi$$

と復元される。ただし S は

$$\begin{aligned} (\psi')^\dagger &= (S\psi)^\dagger \\ &= \psi^\dagger S^\dagger \\ &= \psi^\dagger S^{-1} \end{aligned}$$

す

$$\begin{aligned} (U^{(\kappa)\dagger})^\dagger (U^{(\kappa)})^\dagger &= (U^{(\kappa)})^\dagger S^{-1} S (U^{(\kappa)}) \\ &= \underbrace{(U^{(\kappa)})^\dagger U^{(\kappa)}}_{\rightarrow} \end{aligned}$$

と復元される。ローレンツ不変である。

(C)

$$\vec{F} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & -p_3 \end{pmatrix}, \quad (\vec{F} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$$

不符.

$$\vec{F} \cdot \vec{p} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} p_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p_3$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & -p_3 \end{pmatrix}}_{\Rightarrow} = \begin{pmatrix} p_3 & p_- \\ p_+ & -p_3 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{p})^2 = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - i p_2 \\ p_1 + i p_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_3 p_3 + (p_1 - i p_2)(p_1 + i p_2) & p_3(p_1 - i p_2) - (p_1 - i p_2)p_3 \\ (p_1 + i p_2)p_3 - p_3(p_1 + i p_2) & (p_1 + i p_2)(p_1 - i p_2) + p_3 p_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_3^2 + p_1^2 + p_2^2 & p_3 p_1 - i p_3 p_2 - p_1 p_3 + i p_2 p_3 \\ p_1 p_3 + i p_2 p_3 - p_3 p_1 - i p_3 p_2 & p_3^2 + p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\vec{p}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Rightarrow}$$

(d) Dirac spinor 有 2 部分 $\psi = (U_A \ U_B)^T$ 及 $\frac{1}{\theta} \epsilon$.

非相对论的极限 \vec{p} 上的上分支 ψ 变成的表达式是 $\psi = \chi^{(\alpha)}$.

正弦波解(2)

$$U^{(\alpha)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

$\chi^{(\alpha)}$ 是什么?

($E=p^2/2m$)

$$U_A = N \chi^{(\alpha)}$$

$\chi^{(\alpha)}$ 是什么?

$$U_B = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} U_A$$

是吗? $U_A = U_B$ 且 $\chi^{(\alpha)}$ 是什么, 非相对论的极限是?

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} \Rightarrow \frac{|U_B|^2}{|U_A|^2} = \frac{\vec{p}^2}{(E+m)^2} \xrightarrow{\text{单位向量}} \frac{(cp)^2}{(E+mc^2)^2}$$

$$\xrightarrow{E \ll 1} \frac{c^2 p^2}{m^2 c^4} \xrightarrow{p=mv} \frac{v^2}{c^2} \ll 1$$

是吗? U_A (upper 分支) 不匹配吗?

负弦波解(2).

$$U^{(\alpha)}(\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(\alpha)} \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} U_B \\ U_B \end{pmatrix}$$

是吗.

$$U_A = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{E+m} U_B$$

是吗? 正弦波解(2) 是吗. ($\frac{|U_A|^2}{|U_B|^2} \ll 1$)

1.6 Prescription for Negative-Energy States

Lorentz 不変及波動方程式を構成して...

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial^\mu \partial^\nu + m^2) \phi(\vec{x}, t) = 0 \\ (i \not{\partial} - m) \psi(\vec{x}, t) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \cdots \text{Klein-Gordon 方程式} \\ \cdots \text{Dirac 方程式} \end{array}$$

が得られた。

良やかで $\epsilon = 3$

課題

KG eq.

Lorentz 不変性が分かる形

$$(\square + m^2) \phi = 0$$

② 確率密度 ρ が正値でない

$$\rho = i \left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right]$$

確率密度 ρ が正値には

① 負エネルギー解の解釈

Dirac eq.

$$\rho = \psi^\dagger \psi$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad E < 0$$

Dirac 方程式の負エネルギー解の解釈を考えることで、KG eq. の課題の解決策を見つけることができる。これらの考察は Dirac eq. や KG eq. を超えた、相対論的場の量子論の必要性を示すことになる。

① Dirac 方程式に於ける負エネルギー解の解釈

② KG 方程式の ρ に関する考察

以上で見えてく。

No.2

1.6.1 Dirac Hole Theory and Negative-Energy Solutions.

Dirac 方程式の負エネルギー解の問題点:

電磁場との相互作用により、正エネルギーでも電子ほどや。

負のエネルギー状態へ落ち込み、これが起らう。(←計算がでまつ?)

しかし、このまま過程は実際観測されない 原子物質の安定性に反する。

($E \Rightarrow 0$ となるまでは安定でない、全て電子が負エネルギーの状態に移る)。

しかし、このままでは物質の安定性に反する。)

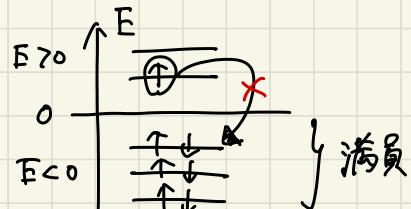
この問題を解決するため、Dirac は

負エネルギー状態は満たされてない。

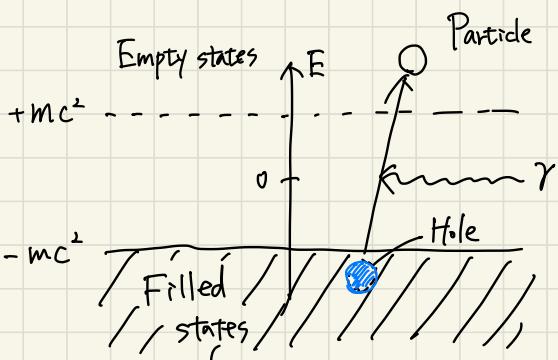
という仮定をした。これは電子が fermion なので、Pauli の排他律によって遷移が禁止されるはず、という考え方に基づく。

これをいふと、満員にならない負エネルギー状態の集合を “Fermi sea” と呼ぶ

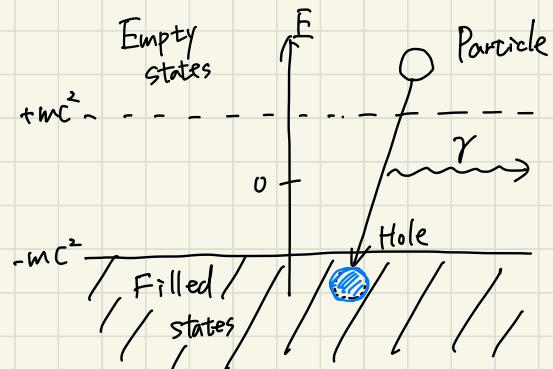
もし、この Fermi sea が “静か背景” の
うちからでなければ観測には現れないだろう。



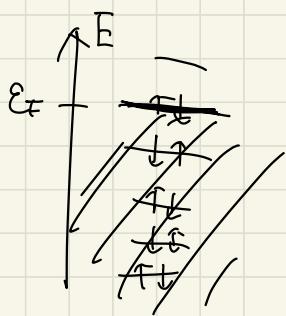
しかし、この Fermi sea は “量子力学的な真空へゆき” ではなく “静か背景” と
みなす。ギリギリを越えるエネルギーで何らかにて粒子生成・消滅が起らう。



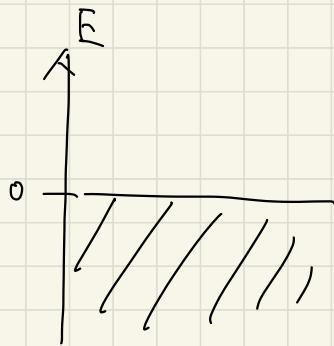
γ による崩壊時に、fermion & antifermion が生じる。



対消滅も起きる。



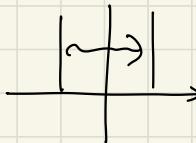
Fermi sea



Dirac sea.

- 多体の問題にはまってしまってない。
- 反粒子の存在を予言。
- 革新的なアドヴァンス!

- Klein paradox ...



クエスチョンはなんでもいい

No. 3

Dirac はこのアヘンを電子へ適用し、陽電子の存在を予言。後に、
陽電子は観測され、理論的偉大な功績の一つとして記される。

492

CARL D. ANDERSON

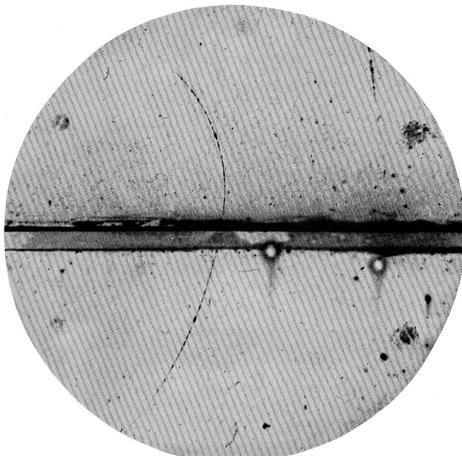


Fig. 1. A 63 million volt positron ($H_B = 2.1 \times 10^6$ gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ($H_B = 7.5 \times 10^6$ gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

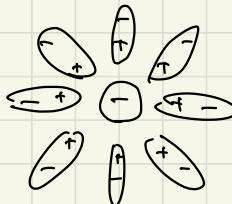
[C. D. Anderson, "The Positive Electron", Phys. Rev. 43 (1933) 491] §4

1.6.2 真空の偏極

ここまで、1粒子 Schrödinger 方程式の共鳴的対応物を探し、Dirac 方程式を得た。Dirac 方程式は多くの実験データに良好に適合している。しかし、Dirac の空孔理論には見られるように、Dirac 方程式は 1 粒子の方程式ではない。

例として量子電磁気学における 真空偏極を見よ。

たとえば、裸の正エネルギー電子を Fermi sea へ投げ入れ、その電荷を測定するなどを考える。量子力学的な観点エネルギーについて、Fermi sea は 仮想的な電子-陽電子の励起を伴いつながらやらざるを以て、投げ込まれた電子によって 虚構電性の媒質は偏極可能となるべき予想される。



投げ込まれた電子に対する偏極しての媒質の様子

電子は仮想的な陽電子を引き付けるため、その電荷は遠くからは隠されてしまつて見えて、巨視的にはプロトでは有効電荷を見ることができ、より近づいてみると裸の電子の電荷を見ることができ。

→ 真空が偏極した、と言う。

真空偏極の効果は小であるが、しっかりと見ることができる。このようす Fermi sea 中の電子の裸の電荷は実験的には観測される。

→ 量子場の発散問題を扱う際に重要 (renormalization)

KG 方程式・Dirac 方程式が「正当な」1 粒子方程式であるためには条件が必要である。これらが満たされないとそこには色々な現象が見られるとしている。

量子統計物理学において扱われる、典型的なエネルギーは キルト $2mc^2$ (= 比較的大きい) である。ここで、Dirac 方程式は多体系の方程式として扱う必要がある。

No.5

1. 6. 3 Partial Rescue of the Klein-Gordon Equation

Dirac 方程式は KG 方程式における問題点「確率密度が負になること」を解決した。

このモデルでは Dirac の空孔理論において導入された、粒子 \leftrightarrow 反粒子の対応が KG 方程式の確率密度の解釈に用いられてきたことを見る。

\Rightarrow KG 方程式が Dirac 方程式と同等に重要なものであることがわかる。

$$\begin{cases} \text{KG 方程式} \rightarrow \text{Bosons} \\ \text{Dirac 方程式} \rightarrow \text{Fermions} \end{cases}$$

電磁場を入れて KG 方程式 (2) を見てみる。

$$[(i\partial^\mu - qA^\mu)^2 - m^2] \phi = 0$$

[問] この乗式は正確ですか？ $[(i\partial^\mu - qA^\mu)(i\partial_\mu - qA_\mu) - m^2] \phi = 0$ の方が適切に思える。

連続の方程式は

$$j^\mu = \phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi (i\partial^\mu + qA^\mu) \phi^*$$

(2) で見てみる。

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

が成り立つ。（証明は別ページ） したがって、KG 方程式の複素表現形式を用いた：

$$[(i\partial^\mu + qA^\mu)^2 - m^2] \phi^* = 0$$

\Rightarrow No. 8 になります。

No. 6

前ページの KG 方程式へ導出

エネルギー関係式

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$$

すな

$$0 = [-E^2 + \vec{p}^2 + m^2] \phi$$

$$E \rightarrow i\partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} = -i(d_x, d_y, d_z) \text{ は方程式}.$$

$$0 = [-(i\partial_t)(i\partial_t) + (-i\vec{\nabla})(-i\vec{\nabla}) + m^2] \phi$$

$$0 = [\partial_t \partial_t - \vec{\nabla}^2 + m^2] \phi$$

$$0 = [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi$$

$$0 = [-(i\partial_\mu)(-i\partial^\mu) + m^2] \phi$$

$$0 = [p_\mu p^\mu - m^2] \phi \quad \dots \text{ KG 方程式}$$

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - qA^\mu = i\partial_\mu - qA_\mu$$

$$\underline{0 = [(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2] \phi}$$

$$\therefore iD_\mu = i\partial_\mu - qA_\mu \text{ は方程式}$$

$$0 = [D_\mu D^\mu + m^2] \phi$$

$$P_\mu = (E, -\vec{p})$$

$$(i\partial_t, i\vec{\nabla})$$

共役ペア

$$P_\mu = (E, -\vec{p})$$

$$\rightarrow (i\partial_t, i\vec{\nabla})$$

$$\rightarrow iD_\mu$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \vec{p} = -i\vec{\nabla} \\ -\vec{p} = i\vec{\nabla} \end{array} \right)$$

この方程式が導入 (=?) Lorentz 不変性が明確な形になら。

$$\phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi \neq 0$$

$$\phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi^* (-i\partial^\mu - qA^\mu) \phi^* = 0$$

$$\phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi + \phi^* (-i\partial^\mu - qA^\mu) \phi^* = 0$$

No.?

Q \hat{J}^M の表式

$$0 = [(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2] \phi$$

$$0 = \phi^* [(i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) - m^2] \phi \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 = [(i\partial_\mu + qA_\mu)(i\partial^\mu + qA^\mu) - m^2] \phi^*$$

$$0 = \phi [(i\partial_\mu + qA_\mu)(i\partial^\mu + qA^\mu) - m^2] \phi^* \quad \dots \textcircled{2}$$

① - ② ∞ つづく。

$$\begin{aligned}
 0 &= \phi^* (i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi (i\partial_\mu + qA_\mu)(i\partial^\mu + qA^\mu) \phi^* \\
 &= \phi^* (i\partial_\mu - qA_\mu)(i\partial^\mu \phi - qA^\mu \phi) - \phi (i\partial_\mu + qA_\mu)(i\partial^\mu \phi^* + qA^\mu \phi^*) \\
 &= \phi^* \left[i\partial_\mu i\partial^\mu \phi - iq\partial_\mu (A^\mu \phi) - iqA_\mu \partial^\mu \phi + q^2 A_\mu A^\mu \phi \right] \\
 &\quad - \phi \left[i\partial_\mu i\partial^\mu \phi^* + iq\partial_\mu (A^\mu \phi^*) + iqA_\mu \partial^\mu \phi^* + q^2 A_\mu A^\mu \phi^* \right] \\
 &= -\phi^* \partial_\mu \partial^\mu \phi + \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi^* \\
 &\quad - iq \left[\phi^* \partial_\mu (A^\mu \phi) + \phi^* A_\mu \partial^\mu \phi + \phi \partial_\mu (A^\mu \phi^*) + \phi A_\mu \partial^\mu \phi^* \right] \\
 &= \partial_\mu (-\phi^* \partial^\mu \phi + \phi \partial^\mu \phi^*) \\
 &\quad - iq \left[\phi^* \partial_\mu (A^\mu \phi) + \phi^* (\partial_\mu \phi) A^\mu + \phi \partial_\mu (A^\mu \phi^*) + \phi (\partial_\mu \phi^*) A^\mu \right] \\
 &= \partial_\mu (-\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu} \phi) - iq \left[\cancel{\partial_\mu (A^\mu \phi \phi^*)} - (\cancel{\partial_\mu \phi^*}) \cancel{A^\mu \phi} + \cancel{\phi (\partial_\mu \phi^*)} \cancel{A^\mu} \right. \\
 &\quad \left. + \cancel{\partial_\mu (A^\mu \phi^* \phi)} - (\cancel{\partial_\mu \phi}) \cancel{A^\mu \phi^*} + \cancel{\phi^* A^\mu} (\cancel{\partial_\mu \phi}) \right] \\
 &= \partial_\mu (-\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu} \phi - 2iqA^\mu \phi \phi^*) \\
 &= i\partial_\mu \left(i\phi^* (\partial^\mu \phi) - i(\partial^\mu \phi^*) \phi - qA^\mu \phi \phi^* - qA^\mu \phi \phi^* \right) \\
 &= i\partial_\mu \left[\phi^* (i\partial^\mu \phi - qA^\mu \phi) - (i\partial^\mu \phi^* + qA^\mu \phi^*) \phi \right] \\
 &= i\partial_\mu [\phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi (i\partial^\mu + qA^\mu) \phi^*] \\
 \rightarrow i\partial_\mu j^M, \quad j^M &= \phi^* (i\partial^\mu - qA^\mu) \phi - \phi (i\partial^\mu + qA^\mu) \phi^*
 \end{aligned}$$

No.8

元の KG 方程式とその複素共役を比較すると、4元ボテンシャルの符号が変化して、3つに分かれ： $\Rightarrow A^\mu \rightarrow -A^\mu = (-A^0, -\vec{A})$

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\gamma \partial^\mu - q A^\mu)^2 - m^2] \phi = 0 \quad \text{... (a)} \\ [(\gamma \partial^\mu + q A^\mu)^2 - m^2] \phi^* = 0 \quad \text{... (b)} \end{array} \right.$$

このときの A^μ の符号変化は “電荷の符号変化” と呼ばれます。これは、KG 方程式の重要な対称性を表しています：

ϕ が電荷 q をもつ KG 方程式の解であるとき、

ϕ^* は同じ質量 m で、電荷 $-q$ の解である。

\Rightarrow 荷電共役対称性

前回の Exercise 1.8 (c), (d) で見た操作に对应し、粒子・反粒子に関連する。

ϕ^* ：荷電共役及波動関数 ($j_c^\mu = (P_c, \vec{j}_c)$ を持つ)

$$P_c = -P$$

$$\vec{j}_c = -\vec{j}$$

このときの $P \cdot \vec{j}$ (又 (a) の計算される j^μ の成分) を表す。

このことは KG 方程式を解釈するために重要なポイント。

KG · Dirac eq は本質的に 粒子解と反粒子解を持つ。

\Rightarrow KG equation (2 だけ) $P \cdot \vec{j}$ はそれが “電荷密度”、“荷電密度” と解釈されるべきもへとは。しかし、 P が正定値でないこれがむしろ自然。

No. 9

複素共役の操作は 中に含まれる 全ての 振動数 & 運動量 の 符号を 反対に する。

つまり、

KG 方程式・負エネルギー解の複素共役・電荷 γ



KG 方程式 *・正エネルギー解・電荷 $-\gamma$

これらが対応がある。(下の図)

$$[(i\partial^{\mu} - qA^{\mu})^2 - m^2] \phi_+ = 0$$

$$[(i\partial^{\mu} - qA^{\mu})^2 - m^2] \phi_- = 0$$



$$\phi_{\pm}, \{ p, \vec{j}, m \}$$

$$[(i\partial^{\mu} + qA^{\mu})^2 - m^2] \phi_+^* = 0$$

$$[(i\partial^{\mu} + qA^{\mu})^2 - m^2] \phi_-^* = 0$$



$$\phi_{\pm}^*, \{ p_c, \vec{j}_c, m \}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_+ & \xrightarrow{\text{Complex conjugate}} & \phi_+^* = \phi_- \\
 \phi_- & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \phi_-^* = \phi_+ \\
 \text{with } p, \vec{j}, m & & \text{with } p_c = -p, \vec{j}_c = -\vec{j}, m
 \end{array}$$

これらのアーティ \bar{P} は Dirac 方程式に適用され、“時間後進”の挙動を示す。

多くの文献で 説明されてますが、KG 方程式は 1 階 微分方程式の組に 分けられる。 (後ろで 説明する。)

No. 1BD1

② KG 方程式を 2つの階の微分方程式の組に分けよ。

$$\text{KG 方程式} : [(\imath D_\mu - g A_\mu)(\imath D^\mu - g A^\mu) - m^2] \phi(r, t) = 0$$

∴ 2つ、簡単だから、 $D_\mu \equiv$

$$\imath D_\mu \equiv \imath D_\mu - g A_\mu, \quad \imath D^\mu \equiv \imath D^\mu - g A^\mu$$

で定義しておく。 D_μ, D^μ を用いると KG 方程式は

$$[(\imath D_\mu)(\imath D^\mu) - m^2] \phi = 0$$

$$\Rightarrow [D_\mu D^\mu + m^2] \phi = 0$$

$$\Rightarrow [D_0 D_0 - \vec{D}^2 + m^2] \phi = 0 \quad \cdots ①$$

∴ $\vec{D}^2 < 0$ だから $\vec{D}^2 \neq 0$, ∴ 2つ、

$$\begin{cases} D_0 D_0 = D_0 D_0 = (D_0 + i \vec{A}_0)(D_0 - i \vec{A}_0) \\ \vec{D}^2 = D^i D^i = (D^i + i \vec{A}^i)(D^i - i \vec{A}^i) \end{cases}$$

を表す。

① をもう少し変形すると。

$$① \Rightarrow [D_0 D_0 + m^2] \phi = \vec{D}^2 \phi$$

$$\Rightarrow m^2 \left[1 + \frac{1}{m^2} D_0 D_0 \right] \phi = \vec{D}^2 \phi$$

$$\Rightarrow m^2 \underbrace{\left(1 + \frac{i}{m} D_0 \right) \left(1 - \frac{i}{m} D_0 \right)}_{\sim \text{の部分に注目する}} \phi = \vec{D}^2 \phi$$

～の部分に注目すると。

$$\underbrace{m^2 \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right)}_{\text{左辺}} \phi = \vec{D}^2 \phi$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \phi \quad \Rightarrow \quad \therefore \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \phi \\ &= \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \left(\phi - \frac{i}{m} D_0 \phi\right) \quad = \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \phi \\ &= \phi - \frac{i}{m} D_0 \phi + \frac{i}{m} D_0 \phi - \left(\frac{i}{m}\right)^2 D_0 D_0 \phi \quad \left(D_0 \text{ と } \bar{D}_0 \text{ の実数部が合はる。} \right) \\ &= \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \left(\phi + \frac{i}{m} D_0 \phi\right) \\ &= \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \phi \end{aligned}$$

∴ 2式。

$$\begin{cases} 2m^2 \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \psi = \vec{D}^2 \phi & \cdots ② \\ 2m^2 \left(1 + \frac{i}{m} D_0\right) \chi = \vec{D}^2 \phi & \cdots ③ \end{cases}$$

2式の方程式は普通に解かれてる。したがって、 ψ, χ は存在する。

$$\begin{cases} \psi \equiv \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i}{m} D_0\right] \phi & \cdots ④ \\ \chi \equiv \frac{1}{2} \left[1 - \frac{i}{m} D_0\right] \phi & \cdots ⑤ \end{cases}$$

である。したがって、 $\frac{1}{2}$ は定数である。 $\phi = \psi + \chi$ となる。

④, ⑤ を用いて ②, ③ を整理すると。

$$\begin{aligned} 2m^2 \left(1 - \frac{i}{m} D_0\right) \psi &= \vec{D}^2 \phi & \therefore i D_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) + m \psi \quad \cdots ⑥ \\ \psi - \frac{i}{m} D_0 \psi &= \frac{1}{2m^2} \vec{D}^2 \phi & \text{同様に } ② \text{ は} \\ i D_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) + m \psi \end{aligned}$$

$$2m \left(1 + \frac{i}{m} D_0 \right) \chi = \vec{D}^2 \phi$$

$$\chi + \frac{i}{m} D_0 \chi = \frac{1}{2m} \vec{D}^2 \phi$$

$$i D_0 \chi = \frac{1}{2m} \vec{D}^2 \phi - m \chi$$

$$\underbrace{i D_0 \chi = \frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) - m \chi}_{\text{... (7)}}$$

よって、KG 方程式 (2)

$$\begin{cases} i D_0 \psi = -\frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) + m \psi \\ i D_0 \chi = \frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) - m \chi \end{cases} \quad \text{... (8)}$$

この時間 1 階の微分方程式の組合せ方程は、すなはち、 ψ, χ が成り立つ
2 種の方程式

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi(x, t) \\ \chi(x, t) \end{pmatrix}$$

を定義すると (8) は $\partial_t \Psi + i H \Psi = 0$ となる。

$$(T_{01}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) + m \psi \\ \frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\psi + \chi) - m \chi \end{pmatrix} = -\frac{\vec{D}^2}{2m} \begin{pmatrix} \psi + \chi \\ -(\psi + \chi) \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \psi \\ -\chi \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\vec{D}^2}{2m} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \right] + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\vec{D}^2}{2m} (T_3 + iT_2) \Psi + m T_3 \Psi$$

$$\text{f}, \quad \underbrace{i D_0 \Psi = \left[-\frac{\vec{D}^2}{2m} (T_3 + iT_2) + m T_3 \right] \Psi}_{\text{... (9)}} \quad \text{... (9)}$$

今、得した $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$ は常に存在する。K方程式は $D\mu = d\mu + i\gamma A\mu$

を用いて表すと、俠道から j^M は

$$j^M = i [\phi^* D^M \phi - \phi (D^M \phi)^*]$$

$$\left[\begin{aligned} &= i [\phi^* (d^M + i\gamma A^M) \phi - \phi (d^M + i\gamma A^M)^* \phi^*] \\ &= \phi^* (i d^M - \gamma A^M) \phi - \phi (i d^M + \gamma A^M) \phi^* \\ &= (1, 129) \end{aligned} \right]$$

と書く。ただし j^0 は

$$\phi = \psi + \chi, \quad D\phi = \frac{m}{r} (\psi - \chi)$$

を用いて。

$$j^0 = P = i [(\psi^* + \chi^*) \frac{m}{r} (\psi - \chi) - (\psi + \chi) \left(\frac{m}{r} (\psi - \chi) \right)^*]$$

$$= i \left[\frac{m}{r} (\psi^* + \chi^*) (\psi - \chi) + \frac{m}{r} (\psi + \chi) (\psi^* - \chi^*) \right]$$

$$= m \{ \psi^* \psi - \psi^* \chi + \chi^* \psi - \chi^* \chi + \psi \psi^* - \psi \chi^* + \chi \psi^* - \chi \chi^* \}$$

$$= 2m (\psi^* \psi - \chi^* \chi) \quad \cdots (10)$$

$$\left[\text{∴ 結果は正しい。} \quad j^M \equiv \frac{i}{2m} [\phi^* D^M \phi - \phi (D^M \phi)^*] \quad r(17-12=3) \right]$$

$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$ の実部は正負の電荷の解を有し、(10)の結果は電荷密度を解釈するに相当。 $(\because \psi^* \psi > \chi^* \chi \Rightarrow p > 0, \psi^* \psi < \chi^* \chi \Rightarrow p < 0 \Rightarrow \text{捕獲})$

$\Psi(t, \vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}$ の成分、すなはち ψ , χ の満たす方程式は次のよう書き換えられる。

$$\int i D_0 \psi = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 (\psi + \chi) + m\psi \quad \dots \textcircled{8a}$$

$$i D_0 \chi = \frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 (\psi + \chi) - m\chi \quad \dots \textcircled{8b}$$

$\Psi(t, \vec{r})$ は平面波に比例する形

$$\Psi(t, \vec{r}) = N \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{-i p_m \vec{x}^M} = N \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad \dots \textcircled{11}$$

を仮定する。N は規格化定数、A, B は複素数とする。また、自由粒子の場合を考える。⑪ ≡ ⑧a, ⑧b は代入すると。

$$i D_0 \psi = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 (\psi + \chi) + m\psi$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= i D_0 t (N A e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}}) \\ &= i N A (-i E) e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= N A E e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \underline{E \psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 N(A+B) e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} + m N A e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= -\frac{1}{2m} N(A+B) (i \vec{p})^2 e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} + m N A e^{-i Et + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \\ &= \underline{\frac{|p|^2}{2m} (\psi + \chi) + m \psi} \end{aligned}$$

同様に 17 ⑧b も。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= E \chi, \quad (\text{右辺}) = \underline{-\frac{|p|^2}{2m} (\psi + \chi) - m \chi} \end{aligned}$$

$$(89) \quad \underbrace{E \psi}_{\downarrow}$$

$$(89) \quad \underbrace{E \chi}_{\downarrow}$$

$$(T_{III}) = \underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m}(\psi + \chi)}_{\downarrow} + m\psi$$

$$(T_{III}) = -\underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m}(\psi + \chi)}_{\downarrow} - m\chi$$

$$\left. \begin{array}{l} iD_0\psi = -\frac{1}{2m}\vec{D}^2(\psi + \chi) + m\psi \\ iD_0\chi = \frac{1}{2m}\vec{D}^2(\psi + \chi) - m\chi \end{array} \right\} \dots \begin{array}{l} (89) \\ (8b) \end{array}$$

$$(E_{II}) = i\partial + \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \underbrace{E \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}}_{\downarrow}$$

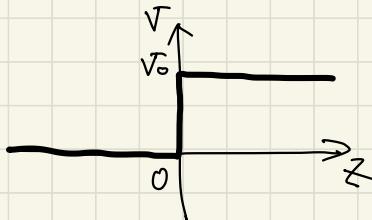
$$\begin{aligned} (T_{III}) &= -\frac{1}{2m}\vec{D}^2(T_3 + iT_2)\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + mT_3\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{|\vec{p}|^2}{2m}(T_3 + iT_2)\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} + mT_3\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}}_{\downarrow} \end{aligned}$$

$$\therefore \underbrace{E}_{\downarrow} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + m > 0$$

○ Klein paradox

1次元の階段ボテンシャルで見たる Dirac 粒子の反射を考へる。
粒子の運動方向に y 軸をとり、ボテンシャル V は 次のようなものを考へる：

$$V(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ V_0 & z \geq 0 \end{cases}$$



すなはち、 $z \leq 0$ において自由 Dirac 粒子の平面波解を求める
Dirac 方程式は

$$(\gamma^0 \partial_t - i \gamma^1 \partial_x - m I_4) \psi = 0$$

$\psi = U e^{-i p_\mu x^\mu}$, $p^\mu = (E, 0, 0, p)$ (U : 4成分ベクトル) を仮定すると。

$$(\gamma^0 \partial_t + i \gamma^1 \partial_x - m I_4) U e^{-i E t + i p x} = 0$$

標準表示

$$\gamma^\mu = \left[\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \right]$$

左端, 右端

$$\left[i \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - m \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right] U e^{-i p_\mu x^\mu} = 0$$

$$\left[i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U_L \\ U_F \end{pmatrix} e^{-i p_\mu x^\mu} = 0$$

$$\left[i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_{\pm} \\ u_F \end{pmatrix} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} = 0$$

$$\left[i \begin{pmatrix} -iE & -iE \\ iE & iE \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & +ip \\ -ip & +ip \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_E \\ u_F \end{pmatrix} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} = 0$$

\Rightarrow $u_E, u_F \neq 0$.

$$i(-i)E u_{\pm} + i^2 p \tau_3 \cdot u_F - mu_{\pm} = 0$$

$$E u_E - p \tau_3 \cdot u_F - mu_{\pm} = 0$$

$$(E-m)u_E - p \tau_3 u_F = 0$$

$$(i^2 E - m) u_F - i^2 p \tau_3 \cdot u_{\pm} = 0$$

$$-(E+m) u_F + p \tau_3 \cdot u_{\pm} = 0$$

$$(E+m) u_F - p \tau_3 u_{\pm} = 0$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$(E-m) u_{\pm} - p \tau_3 u_F = 0$$

$$p \tau_3 u_{\pm} - (E+m) u_F = 0$$

2. 目次

$$u_F = \frac{p \tau_3}{E+m} u_{\pm}$$

解き方。 $u_{\pm} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ or \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow

$$u_{\pm} = \begin{cases} \chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} = \chi_s \quad (s=\uparrow, \downarrow)$$

$$\psi \propto \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{p\sigma_3}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-ip_z x^m} = \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{p\sigma_3}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt - ipz}$$

と表す。

$$U = \begin{pmatrix} U_{\uparrow} \\ U_{\downarrow} \end{pmatrix}$$

(2) スピン波数 s, s' に対して、

$$\bar{\psi}(s') \psi(s) = \delta_{ss'}$$

とすると ψ は規格化されてゐる。進行方向に並向の平面波解

$$\psi(-p) \propto \begin{pmatrix} \chi_s \\ -\frac{p\sigma_3}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt - ipz}$$

とすると、 $U = p_z \hat{z}$ 、入射平面波 ψ_i は

$$\underline{\psi_i} = A \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{p\sigma_3}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt + ipz} + B \begin{pmatrix} \chi_s \\ -\frac{p\sigma_3}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt - ipz}$$

と表せる。(直行波($+p$) & 反射波($-p$)の重ね合せ)

又方向へ進む自由 Dirac 粒子の平面波解を求めておき、式で示すと

エネルギー $E \in \mathbb{R}$ とする V_0 は $E - V_0$ の形で λ, γ ほどの式で、
Dirac 方程式の

$$[i\gamma^0 \partial_t - \gamma^0 V_0 + i\gamma^3 \partial_3 - m I_4] \psi = 0$$

と書ける。透過平面波を

$$\psi = v e^{-iEt + i\frac{\gamma^3}{\hbar} z}$$

$$v \in \mathbb{C}, \quad (p^\mu = (E, 0, 0, \vec{p}))$$

$$\begin{pmatrix} -i^2 E - V_0 & & \\ -i^2 E - V_0 & & \\ i^2 E + V_0 & & \\ i^2 E + V_0 & & \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & +iq & & \\ -iq & -iq & & \\ & & 0 & \\ & +iq & & \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_F \\ v_F \\ v_F \end{pmatrix} e^{-iEt + i\frac{\gamma^3}{\hbar} z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} E - V_0 - m & -\gamma_3 q \\ \gamma_3 q & -E + V_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_F \end{pmatrix} e^{-iEt + i\frac{\gamma^3}{\hbar} z} = 0$$

$$\begin{cases} (E - V_0 - m) v_L - q \gamma_3 v_F = 0 \\ q \gamma_3 \cdot v_L - (E - V_0 + m) v_F = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$v_F = \frac{q \gamma_3}{E - V_0 + m} v_L$$

と得る。

$$v_L = \chi_s \quad l = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\psi \propto \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{g\Gamma_3}{E-V_0+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt+iqx}$$

である。 $\bar{\psi}(s) \psi(s) = \delta_{ss}$ ($s \geq 0$ の範囲で) すなはち、

$\chi = -\infty$ における粒子の入射と反射の部分、通過平面波 ψ_0 は

$$\psi_t = C \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{g\Gamma_3}{E-V_0+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt+iqx}$$

と表す。 $s \geq 0$ の χ と ψ のエネルギー関係式

$$(E-V_0)^2 = g^2 + m^2$$

を満たす。

$s \geq 0$ の ψ_i 、 ψ_f の連続性から、

$$\psi_i|_{z>0} = \psi_f|_{z>0}$$

が要求される。 $\chi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{g}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

各成分から、

$$\left\{ \begin{array}{l} A+B = C \quad \cdots ① \\ \frac{p}{E+m}A + \frac{-p}{E+m}B = \frac{q}{E-V_0+m}C \quad \cdots ② \end{array} \right.$$

立得る。 $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ を求めよ。

① \rightarrow ② 代入せよ。

$$\frac{p}{E+m}A + \frac{-p}{E+m}B = \frac{q}{E-V_0+m} \cdot (A+B)$$

$$\left(\frac{p}{E+m} - \frac{q}{E-V_0+m} \right)A = \left(\frac{p}{E+m} + \frac{q}{E-V_0+m} \right)B$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\frac{p}{E+m} - \frac{q}{E-V_0+m}}{\frac{p}{E+m} + \frac{q}{E-V_0+m}} = \frac{p(E-V_0+m) - q(E+m)}{p(E-V_0+m) + q(E+m)}$$

E, V_0, m の大小関係が分かりやすい形にするため、分子・分母を $p(E-V_0+m)$ で割る。

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \frac{q}{p} \frac{E+m}{E-V_0+m}}{1 + \frac{q}{p} \frac{E+m}{E-V_0+m}} = \frac{1-r}{1+r}$$

$$\therefore \frac{B}{A} = \frac{1-r}{1+r}$$

ΣΣΣ'

$$r = \frac{q}{p} \frac{E+m}{E-V_0+m}$$

$\approx E_0$

① → ② が成り立つ。

$$\frac{p}{E+m}A + \frac{-p}{E+m}(C-A) = \frac{q}{E-V_0+m}C$$

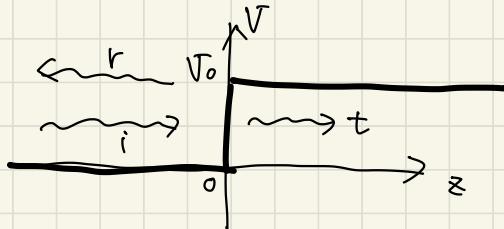
$$\frac{2p}{E+m}A = \left(\frac{p}{E+m} + \frac{q}{E-V_0+m} \right) C$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\frac{2p}{E+m}}{\frac{p}{E+m} + \frac{q}{E-V_0+m}} = \frac{2p(E-V_0+m)}{p(E-V_0+m) + q(E+m)}$$

$$= \frac{2}{1 + \frac{q}{p} \frac{E+m}{E-V_0+m}} = \frac{2}{1+r}$$

$$\therefore \frac{C}{A} = \frac{2}{1+r}$$

入射波・反射波・透過波を同時に表示させよう。



反射率 R、透過率 T は如何にして求められるか。

$$R = \frac{|j^3_r|}{|j^3_i|}, \quad T = \frac{|j^3_t|}{|j^3_i|}$$

$$\gamma^r j^3 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r_3 \\ r_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j^3_i = \bar{\psi}_i \gamma^3 \psi_i$$

$$= \gamma_i^+ \gamma^0 \gamma^3 \gamma_i^- \quad \Rightarrow \quad \chi_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^T A \left(1 \ 0 \ \frac{P}{E+m} \ 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{P}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^T A \left(1 \ 0 \ \frac{P}{E+m} \right) \begin{pmatrix} \frac{P}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^T A \left(\frac{P}{E+m} + \frac{P}{E+m} \right)$$

$$= \underline{A^T A \frac{2P}{E+m}}$$

$$j^3_r = \bar{\psi}_r \gamma^3 \psi_r = \bar{\psi}_r^+ \gamma^0 \gamma^3 \psi_r^-$$

$$= B^T B \left(1 \ 0 \ \frac{-P}{E+m} \ 0 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{P}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= B^T B \left(1 \ 0 \ \frac{-P}{E+m} \ 0 \right) \begin{pmatrix} -\frac{P}{E+m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{-B^T B \frac{2P}{E+m}}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{j}_t^3 &= \vec{q}_t^+ \vec{q}_t^0 \vec{q}_t^- = q_t^+ q_t^0 q_t^- \\
 &= C^* C \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{q}{E-V_0+m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= C^* C \left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{q}{E-V_0+m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q}{E-V_0+m} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \underline{C^* C \frac{\frac{2q}{E-V_0+m}}{1}}
 \end{aligned}$$

1x1結果を用ひる。

$$R = \frac{|j_r^3|}{|j_r^3|} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \cdot \frac{\frac{2P}{E+m}}{\frac{2P}{E+m}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

$$T = \frac{|j_r^3|}{|j_r^3|} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \frac{\frac{2q}{E-V_0+m}}{\frac{2q}{E+m}} = \frac{|C|^2}{|A|^2} \cdot \frac{q}{P} \frac{E+m}{E-V_0+m} = \frac{4r}{(1+r)^2}$$

$\Rightarrow R, T$ の結果を意味する。 $T+R \in \mathbb{C}$ が成立する。

$$T+R = \frac{1-2r+r^2+4r}{(1+r)^2} = \frac{1+2r+r^2}{(1+r)^2} = 1$$

すなはち、 $T+R=1$ の形の確率保証が満たされていることが見える。

\therefore 2. ゲームの満足度エネルギー関係式、 r の定義を考へる。

$$f^2 = (E-V_0)^2 - m^2, \quad r = \frac{q}{P} \frac{E+m}{E-V_0+m}$$

つまり、 $(E-V_0)^2 - m^2$ の正負によって f が複素数の実数かの場合分けが生じる。

$$(i) |E - V_0| < m \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f^2 = (E - V_0)^2 - m^2 < 0 \quad \text{すなはち } f \text{ は純虚数。}$$

なぜか、 $e^{-iEt + i\frac{\pi}{2}}$ の因子で > 0 の「指数的」減衰がで
平面波は正確に透過される。

$$(ii) |E - V_0| > m \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f^2 = (E - V_0)^2 - m^2 > 0 \quad \text{すなはち } f \text{ は実数。 } f > 0 \text{ となる。}$$

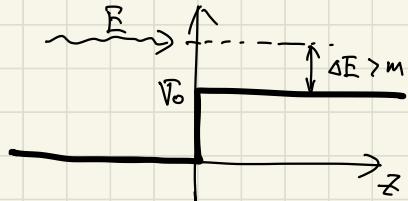
$$f = \sqrt{(E - V_0)^2 - m^2} \quad \text{とすると、} \alpha \in \mathbb{R} \text{ が成立する。}$$

$$r = \frac{q}{p} \frac{E + m}{E - V_0 + m} \quad \text{すなはち、} E, V_0 \text{ の大小関係で } r \text{ の符号が決まる。}$$

$$(ii-a) |E - V_0| > m \Rightarrow E - V_0 > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$r = \frac{q}{p} \frac{E + m}{E - V_0 + m} > 0$$

すなはち、確率の値 $T + R = 1$ を満足する。



$$(ii-b) |E - V_0| > m \Rightarrow E - V_0 < 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

すなはち、

$$r = \frac{q}{p} \frac{E + m}{E - V_0 + m} = \frac{q}{p} \frac{E + m}{-|E - V_0| + m} < 0$$

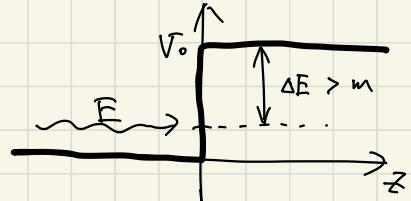
すなはち、反射率の値を取る。すなはち $T < 0$

を意味し、 $R > 1$ を与える。

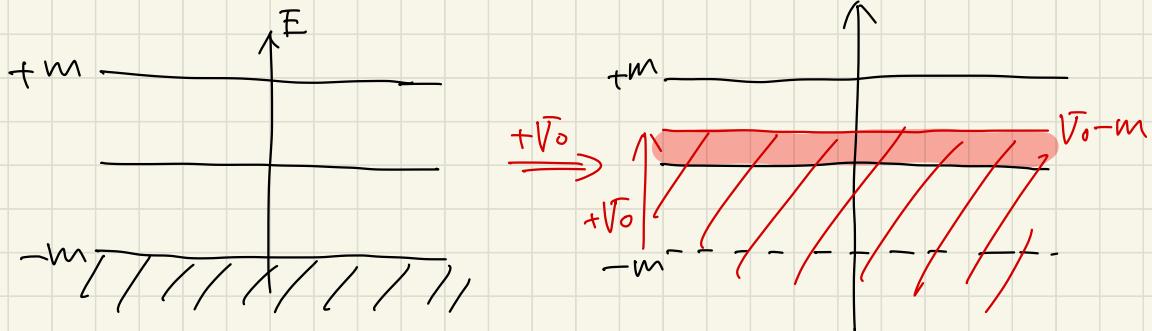
つまり、入射した波よりも多くの反射波が

生じることを意味し、一見して矛盾するように思える。

これを Klein paradox と呼ぶべきものである。



これは負エネルギー解による寄りであると考えられる。



V_0 の作用下で、負エネルギーを有する解の一部が正の解と同等に扱われるとしてよいと考えられる（赤い部分）。

chiral 表示 izz, 7 矩阵

$$\gamma^{\mu} = \left[\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_5 \\ \Gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$[\gamma^{\mu} d_{\mu} - m I_4] \psi = 0$$

$$\psi = U e^{-i P_{\mu} x^{\mu}}, \quad P_{\mu} = (E, 0, 0, p)$$

$$[\gamma^0 d_0 + \gamma^3 d_3 - m I_4] U e^{-i Et + i p z} = 0$$

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + i \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_5 \\ \Gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} - m \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} U_L \\ U_F \end{pmatrix} e^{-i Et + i p z} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & i \cdot (-iE) - i \cdot \Gamma_3 \cdot (ip) \\ i \cdot (-iE) + i \Gamma_3 \cdot (ip) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L \\ U_F \end{pmatrix} e^{-i P_{\mu} x^{\mu}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & E + \Gamma_3 p \\ E - \Gamma_3 p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_L \\ U_F \end{pmatrix} e^{-i P_{\mu} x^{\mu}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m U_L + (E + \Gamma_3 p) U_F = 0 \\ (E - \Gamma_3 p) U_L - m U_F = 0 \end{cases}$$

$$U_L = \chi_s \quad \text{and} \quad U_F = \epsilon_s.$$

$$U_F = \frac{m}{E + \Gamma_3 p} U_L$$

∴

$$\psi_{x<0}(p) = N \left(\frac{\chi_s}{\frac{m}{E + \Gamma_3 p} \chi_s} \right) e^{-iEt + ipz}$$

V_0 のエネルギーの項を省略する ($E < V_0$ のとき)

$$[i\gamma^0 \partial_t + i\gamma^3 \partial_3 - m \mathbf{I}_4 - \underline{\gamma^0 V_0}] \psi = 0$$

$$\psi = v e^{-iEt + iqz} \quad (p_\mu = (E, \mathbf{v}, q))$$

$$\left[i \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ -iE & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_3 q \\ \Gamma_3 q & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & V_0 \\ V_0 & 0 \end{pmatrix} \right] v e^{-ip_\mu x^\mu} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & E - V_0 + \Gamma_3 q \\ E - V_0 - \Gamma_3 q & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_F \\ v_F \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} = 0$$

$$\begin{cases} -mv_F + (E - V_0 + \Gamma_3 q)v_F = 0 \\ (E - V_0 - \Gamma_3 q)v_F - mv_F = 0 \end{cases}$$

$$v_F = \chi_s (= \text{定数})$$

$$v_F = \frac{m}{E - V_0 + \Gamma_3 q} v_F = \frac{m}{E - V_0 + \Gamma_3 q} \chi_s$$

($\Gamma_3 \gg \Gamma_1$),

$$\psi_{x>0}(p) = N' \left(\frac{\chi_s}{\frac{m}{E - V_0 + \Gamma_3 q} \chi_s} \right) e^{-iEt + iqz}$$

ただし $z=0$ の接続条件。

$$\begin{cases} \psi_i = A U(p) + B U(-p) \\ \psi_r = C V(q) \end{cases}$$

よって,

$$\psi_i|_{z=0} = \psi_r|_{z=0}$$

$$\text{左辺}, \chi_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad P_3 P \chi_S = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{m}{E+p} \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{m}{E-p} \\ 0 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{m}{E-V_0+q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=C & \dots \textcircled{1} \\ A \frac{m}{E+p} + B \frac{m}{E-p} = C \frac{m}{E-V_0+q} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

左辺, 右辺ともに A, B, C の比が決まっている。

$\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$ より代入して,

$$A \frac{1}{E+p} + B \frac{1}{E-p} = (A+B) \frac{1}{E-V_0+q}$$

$$A \left(\frac{1}{E+p} - \frac{1}{E-V_0+q} \right) + B \left(\frac{1}{E-p} - \frac{1}{E-V_0+q} \right) = 0$$

$$\frac{A}{B} = - \frac{\frac{1}{E-p} - \frac{1}{E-V_0+q}}{\frac{1}{E+p} - \frac{1}{E-V_0+q}} = - \frac{(E+p)(E-V_0+q) - (E+p)(E-p)}{(E-p)(E-V_0+q) - (E+p)(E-p)}$$

$$\frac{A}{B} = - \frac{(E+p)(E-V_0+q-E+p)}{(E-p)(E-V_0+q-E-p)} = \frac{(p+E)(q+p-V_0)}{(p-E)(q-p-V_0)}$$

$$A \frac{1}{E+p} + (C-A) \frac{1}{E-p} = C \cdot \frac{1}{E-V_0+q}$$

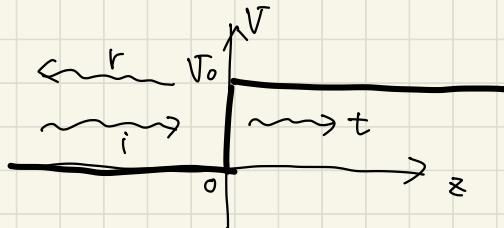
$$A \left(\frac{1}{E+p} - \frac{1}{E-p} \right) = C \left(\frac{1}{E-V_0+q} - \frac{1}{E-p} \right)$$

$$\frac{C}{A} = \frac{\frac{1}{E+p} - \frac{1}{E-p}}{\frac{1}{E-V_0+q} - \frac{1}{E-p}} = \frac{(E-p)(E-V_0+q) - (E+p)(E-V_0+q)}{(E+p)(E-p) - (E+p)(E-V_0+q)}$$

$$= \frac{(E-V_0+q)(E-p-E-p)}{(E+p)(E-p-E+V_0-q)} = \frac{(E-V_0+q)(-2p)}{(E+p)(-q+V_0-p)} \quad (< 0)$$

右の Current j^3 は $j^3 = \bar{\psi} \gamma^3 \psi = \psi^\dagger \gamma^3 \psi$ で求められるから、

入射波 (i)、反射波 (r)、透過程波 (t) を図のように示す。



$$j_i^3 = A^* A U(p) \gamma^0 \gamma^3 U(p) \quad (\leftarrow U \text{は規格化 (7本と \(\bar{7}\) 本).})$$

$$= A^* A U(p) \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\gamma}_3 \\ \bar{\gamma}_3 & 0 \end{pmatrix} U(p)$$

$$= A^* A U(p) \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_3 & 0 \\ 0 & -\gamma_3 \end{pmatrix} U(p)$$

$$= A^* A U(p) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} U(p)$$

$$= A^* A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{E+p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{m}{E+p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^* A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{E+p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{m}{E+p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A^* A \left(1 - \left(\frac{m}{E+p} \right)^2 \right) = A^* A \frac{E^2 + 2EP + p^2 - m^2}{(E+p)^2} = \cancel{p^2 + m^2} + 2EP + \cancel{p^2 - m^2}$$

$$\therefore j_i^3 = \underbrace{A^* A \frac{2P}{E+p}}_{\neq 0} \quad (>0)$$

$$j_r^3 = B^* B \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{E-p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{m}{E-p} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= B^* B \left[1 - \left(\frac{m}{E-p} \right)^2 \right] = B^* B \frac{E^2 - 2EP + p^2 - m^2}{(E-p)^2} = B^* B \frac{\cancel{p^2 + m^2} - 2EP + \cancel{p^2 - m^2}}{(E-p)^2}$$

$$\therefore j_r^3 = \underbrace{B^* B \frac{2P}{p-E}}_{\neq 0} \quad (<0)$$

$$\cancel{E^2 = p^2 + m^2} \quad E > P \Leftrightarrow \boxed{p-E < 0}$$

$$\begin{aligned}
 j^3_{+} &= C^* C \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{m}{E - V_0 + q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m/(E - V_0 + q) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= C^* C \left[1 - \left(\frac{m}{E - V_0 + q} \right)^2 \right] \\
 &= \underbrace{C^* C \frac{(E - V_0 + q)^2 - m^2}{(E - V_0 + q)^2}}_{(> 0)} \quad (> 0)
 \end{aligned}$$

$(E - V_0)^2 = q^2 + m^2$
 $(E - V_0)^2 > m^2$

反射率 R, 透過程 T

$$R = \frac{|j^3_{-r}|}{|j^3_{-i}|}, \quad T = \frac{|j^3_{+}|}{|j^3_{-i}|}$$

≈ 73%

$$R = \frac{BB^* - \frac{2P}{E-P}}{AA^* - \frac{2P}{E+P}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \frac{E+P}{E-P}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{(P+E)(q+p-V_0)}{(P-E)(q+p-V_0)}$$

≈ 71%

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{(E-P)^*}{(P+E)^*} \frac{(q-p-V_0)^2}{(q+p-V_0)^2} \cdot \cancel{\frac{E+P}{E-P}} = \frac{E-P}{E+P} \frac{(q-p-V_0)^2}{(q+p-V_0)^2} \\
 \therefore R &= \underbrace{\frac{E-P}{E+P} \frac{(q-p-V_0)^2}{(q+p-V_0)^2}}_{(> 0)} \quad (> 0)
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{CC^T}{AA^T - \frac{2P}{E+P}} \cdot \frac{(E-V_0+f)^2 - m^2}{(E-V_0+f)^2} \quad \left(\frac{C}{A} = \frac{(E-V_0+f)(-2P)}{(E+P)(-f+V_0-P)} \right)$$

$$= \frac{\cancel{2P}}{(E+P)^2} \cdot \frac{\cancel{E+P}}{\cancel{2P}} \cdot \frac{(E-V_0+f)^2}{(-f+V_0-P)^2} \cdot \frac{(E-V_0+f)^2 - m^2}{(E-V_0+f)^2}$$

$$= \frac{2P}{E+P} \frac{(E-V_0+f)^2 - m^2}{(p+f-V_0)^2} \quad (>0)$$

$R-T \in \mathbb{R}$

$$R-T = \frac{E-p}{E+p} \frac{(q-p-V_0)^2}{(q+p-V_0)^2} - \frac{2P}{E+P} \frac{(E-V_0+f)^2 - m^2}{(p+f-V_0)^2}$$

$$= \frac{(E-p)(q-p-V_0)^2 - 2P(E-V_0+f)^2 + 2Pm^2}{(E+P)(q+p-V_0)^2} \quad E^2 = p^2 + m^2$$

$$(分子) = (E-p)[(q-V_0)^2 - 2P(q-V_0) + p^2] - 2P[(q-V_0)^2 + 2E(q-V_0) + E^2] + 2Pm^2$$

$$= (E-p)(\cancel{q^2-2qV_0+V_0^2-2pq+2pV_0+p^2}) - 2P(\cancel{q^2-2qV_0+V_0^2+2Eq-2EV_0+E^2}) + 2P(\cancel{E^2-p^2})$$

$$= E(\cancel{q^2-2qV_0+V_0^2-2pq+2pV_0+p^2} - \cancel{4pq+4pV_0})$$

$$- P(\cancel{q^2-2qV_0+V_0^2-2pq+2pV_0+p^2} + \cancel{2q^2-2qV_0+2V_0^2+2P})$$

$$= E(q^2 + p^2 + V_0^2 - 6Pq + 6PV_0 - 2qV_0)$$

$$- P(3q^2 + 3p^2 + 3V_0^2 - 4qV_0 - 2qp + 2pV_0)$$

$$R-T \in \mathbb{Z}$$

$$R-T = \frac{E-p}{E+p} \frac{(q-p-V_0)^2}{(q+p-V_0)^2} - \frac{2p}{E+p} \frac{(E-V_0+q)^2 - m^2}{(p+q-V_0)^2}$$

$$= \frac{(E-p)(q-p-V_0)^2 - 2p(E-V_0+q)^2 + 2pm^2}{(E+p)(q+p-V_0)^2} \quad E^2 = p^2 + m^2$$

$$(分子) = (E-p) \left[(q-V_0)^2 - 2p(q-V_0) + p^2 \right] - 2p \left[(q-V_0)^2 + 2E(q-V_0) + E^2 \right] + 2pm^2$$

$$= (E-p) \left(q^2 - 2qV_0 + V_0^2 - 2pq + 2pV_0 + p^2 \right) + 2p \left(q^2 - qV_0 + V_0^2 + 2Eq - 2EV_0 + E^2 \right) - 2p(E^2 - p^2)$$

$$= E(q^2 - 2qV_0 + V_0^2 - 2pq + 2pV_0 + p^2) - p(q^2 - 2qV_0 + V_0^2 - 2pq + 2pV_0 + p^2) + 2p(q^2 - qV_0 + V_0^2 + 2Eq - 2EV_0 + E^2) - 2pE^2 + 2p^3$$

$$= E\cancel{q^2} - 2E\cancel{qV_0} + E\cancel{V_0^2} - 2\cancel{Eq}\cancel{q} + 2E\cancel{pV_0} + \cancel{Ep^2} - \cancel{pq^2} + 2\cancel{pV_0} - p\cancel{V_0^2} + 2\cancel{p^2q} - 2p\cancel{V_0} - \cancel{p^3} + 2\cancel{p^2q} + 2\cancel{pV_0} + 2\cancel{pV_0^2} + 4\cancel{Eq}\cancel{q} + 4\cancel{pV_0} + \cancel{4p^2E} - \cancel{4p^2E^2} + 2\cancel{p^3}$$

$$= E\cancel{q^2} - 2E\cancel{qV_0} + E\cancel{V_0^2} - 2\cancel{Eq}\cancel{q} + 2E\cancel{pV_0} + \cancel{Ep^2} - \cancel{pq^2} + 2\cancel{pV_0} - p\cancel{V_0^2} + 2\cancel{p^2q} - 2p\cancel{V_0} - p^3 + 2\cancel{p^2q} - 2\cancel{p^2V_0} + 2\cancel{pV_0^2} + 4\cancel{Eq}\cancel{q} - 4\cancel{pE}\cancel{V_0} + 2\cancel{pE^2} - 2\cancel{p^2E^2} + 2\cancel{p^3}$$

$$= E\cancel{q^2} - 2E\cancel{qV_0} + E\cancel{V_0^2} + 2\cancel{Eq}\cancel{q} - 2\cancel{pE}\cancel{V_0} + E\cancel{p^2} + \cancel{pq^2} + p\cancel{V_0^2} + 2\cancel{p^2q} - 2\cancel{p^2V_0} + p^3$$

$$= E(q^2 + V_0^2 + p^2 - 2qV_0 + 2pq - 2pV_0) + p(V_0^2 + q^2 + p^2 + 2pq - 2pV_0)$$

$$= E(q^2 - 2EqV_0 + EV_0^2 - 6Eq^2 + 6EpV_0 + Ep^2 - 3pq^2 + 4pqV_0 - 3pV_0^2 + 2p^2q - 2p^2V_0 - 3p^3)$$

$$= E(q^2 + V_0^2 + p^2 - qV_0)$$

$$1 - R = 1 - \frac{E - p}{E + p} \frac{(q - p - V_0)^2}{(q + p - V_0)^2}$$

$$= \frac{(E + p)(q + p - V_0)^2 - (E - p)(q - p - V_0)^2}{(E + p)(q + p - V_0)^2}$$

$$(1-R) = (E + p)[(q - V_0)^2 + 2p(q - V_0) + p^2] - (E - p)[(q - V_0)^2 - 2p(q - V_0) + p^2]$$

$$= (q - V_0)^2 (E + p - E + p) + 2p(q - V_0)(E + p + E - p) + p^2(E + p - E + p)$$

$$= 2p(q - V_0)^2 + 2pE(q - V_0) + 2p^3$$

$$= 2p[(q - V_0)^2 + 2E(q - V_0) + p^2] \quad E^2 = p^2 + m^2$$

$$= 2p[(q - V_0)^2 + 2E(q - V_0) + E^2 - m^2]$$

$$= 2p[(q - V_0 + E)^2 - m^2]$$

$$\therefore 1 - R = T$$

$$R + T = 1$$

$R - T \in \mathbb{Z}$ 且为偶数。

$$\begin{aligned}
R - T &= \frac{p - E}{p + E} \frac{(q - p - V_0)^2}{(q + p - V_0)^2} - \frac{2p}{E + p} \frac{(E - V_0 + f)^2 - m^2}{(p + q - V_0)^2} \\
&= \frac{(p - E)(q - p - V_0)^2 - 2p(E - V_0 + f)^2 + 2pm^2}{(E + p)(q + p - V_0)^2} \\
&= \frac{(p - E)(q^2 - 2q(p + V_0) + (p + V_0)^2) - 2p(E^2 - 2E(V_0 - q) + (V_0 - q)^2) + 2pm^2}{(E + p)(q + p - V_0)^2} \\
(P \neq) &= (p - E)(q^2 - 2q(p + V_0) + (p + V_0)^2) \\
&\quad - 2p(E^2 - 2E(V_0 - q) + (V_0 - q)^2) + 2p(E^2 - p^2) \\
&= (p - E)(q^2 - 2q(p + V_0) + (p + V_0)^2) + 4pE(V_0 - q) - 2p(V_0 - q)^2 - 2p^3 \\
&= (p - E)q^2 - 2q(p - E)(p + V_0) + (p - E)(p^2 + 2pV_0 + V_0^2) + 4pEV_0 - 4pEq \\
&\quad - 2p(V_0^2 - 2qV_0 + q^2) - 2p^3 \\
&= p^2f^2 - Ef^2 - 2f(p^2 + pV_0 - Ep - EV_0) + (p^3 + 2p^2V_0 + pV_0^2 - Ep^2 - 2EPV_0 - EV_0^2) \\
&\quad + 4PEV_0 - 4PEf^2 - 2pV_0^2 + 4p^2V_0 - 2p^2q^2 - 2p^3 \\
&= \cancel{pf^2} - \cancel{Ef^2} - \cancel{2f(p^2 + pV_0 - Ep - EV_0)} + \cancel{2f^2V_0 + 2qEV_0 + p^2V_0 + pV_0^2 - Ep^2} \\
&\quad - \cancel{2EPV_0 - EV_0^2} + \cancel{4PEV_0 - 4PEf^2} - \cancel{2pV_0^2} + \cancel{4p^2V_0} - \cancel{2p^2q^2} - \cancel{2p^3} \\
&= - \cancel{p^2f^2} - \cancel{Ef^2} - \cancel{Ep^2} - \cancel{2f^2p^2} + \cancel{2f^2pV_0} - \cancel{2p^2f^2} + \cancel{2qEV_0} - \cancel{p^3} \\
&\quad + \cancel{2p^2V_0} - \cancel{pV_0^2} + \cancel{2EPV_0} - \cancel{EV_0^2} \\
&= E(-f^2 - p^2 - V_0^2 - 2pq + 2qV_0 + 2pV_0) \\
&\quad + p(-q^2 - p^2 - V_0^2 + 2pV_0 - 2qp + 2qV_0) \\
&= -(f^2 + p^2 + V_0^2 + 2qp - 2pV_0 - 2qV_0)(E + p) \quad R < 0. \\
&= -(q + p - V_0)^2(E + p) \quad R = -(R) \\
\therefore \underline{R - T = -1} \quad (T = R + 1) \quad R = (R)^{(R)} \quad R - (R) = T - 1
\end{aligned}$$

Na 10

電荷のない粒子はどうや? : 2つを區別する必要がある:

((1) 中性粒子と中性粒子の反粒子は電磁相互作用以外の
相互作用によって区別される。

例) K_0 中間子: 反粒子 \bar{K}^0 と中性粒子で同じ電荷 $Q=0$ で $\neq \pm e$. これは
ストレインス $K^0: S=1, \bar{K}^0: S=-1 \neq \pm e$,
これが強い相互作用で区別できる。

(2) 自分自身が反粒子であるような中性粒子

例) π^0, γ (?

以上のギュンゲルの粒子には適応できない。しかし、荷電粒子の波動関数には
複素関数が要求される。[中性粒子は $\psi^+ = \psi^-$: 実関数 ψ]

→ 荷電粒子はそれ自身を区別可能な反粒子を持ち、対応する相対論的
波動方程式はこれらを区別する自由度をもつ。中性粒子には存在しない自由度。
↪ 自分自身が反粒子であるような中性粒子。

この粒子-反粒子の自由度の拡張は KG 方程で成立し分离能もしくは、
複素関数へと通常の KG 方程式 $(\square + m^2)\phi = 0$ を拡張すればよい。

実の波動関数に対しては中性粒子であると解釈がよくいく。

→ P, \vec{J} がゼロ $\Rightarrow \psi$

このように、charged · uncharged bosons (= 1 つで KG 方程式)
質の連続の式がある。

"charge" が一般化される。

荷: charge

1.6.4 Backward in time prescription

歴史的には負エネルギー解の解釈と陽電子の予言は Dirac の空孔理論によることでわかった。

しかし、Bosons (= フーリエの解釈以上手くいかなかった) \Rightarrow Pauli の排他律

Feynman が 1947 年、2 番目の解釈が提案された。

\Rightarrow 粒子・反粒子の対称性を利用して (Fermi sea)、Pauli の排他律 (= 保有する)

この解釈は負エネルギーの Fermions & Bosons (= フーリエ 正確率振幅を与える)。

基本的にはアインシュタイン時代に紹介 (EPR、レーベンフロム) の：

時間的に逆方向へ伝播する 負エネルギー 粒子は、

時間的に順方向へ伝播する 正エネルギー 粒子

反粒子の解釈で置き換わる。

\Rightarrow 負エネルギー 粒子は 時間逆の方向伝播する。

この記述せんじ Fermions & Bosons (= フーリエ 適用可能で、観測量として)

$$\exp(-i(-E)(t)) = \exp(-iEt)$$

という形で現れる。このセクションで、この解釈の正当性を説明し、次のセクションで具体的な確率振幅の計算を示す。

反粒子の解と何が?

$$\phi(E, \theta)$$



$$\phi_c = \phi^*(E_c, \theta_c)$$

} Dirac eq.

} KG eq.



負エネルギー解、逆行



正エネルギー解、順行。

③ 順行・逆行・粒子・反粒子

④ ~~Klein paradox~~

追記

1.6.1 及 1.6.2 の内容について

Dirac の空孔理論

- (i) 負のエネルギー状態は既に占有されており、排他律から負エネルギーへの遷移が禁じられるというアイデアを持ち込んだこと。
- (ii) 何らかのエネルギー=(-)は、負エネルギーを占有している粒子が正エネルギー状態へ遷移したとき、負エネルギーの“穴”は反対符号の電荷をもつ粒子(=反粒子)とみなせるというアイデアを提案したこと。

⇒ 陽電子の予言と発見、対消滅の説明

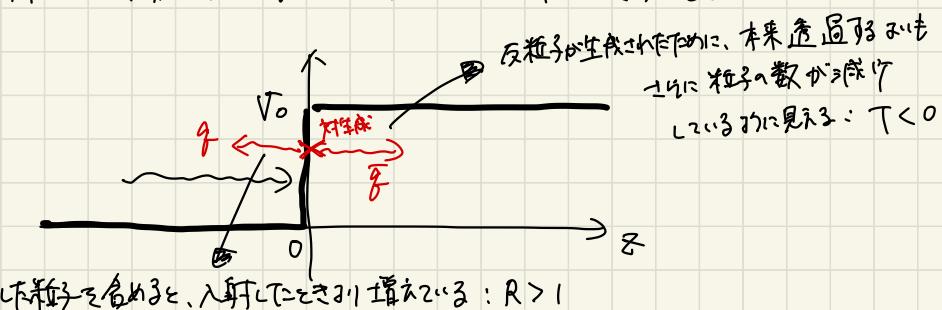
問題点

- (i) 1 粒子の議論ではないこと。
- (ii) Dirac sea を占領している電子の相互作用が考慮されていないこと。
- (iii) 多くのニヒリズムが予測されるが、具体的な計算手段が与えられていないこと。

⇒ 理論の方で解決される。

Klein paradox は Dirac の空孔理論で予想される、粒子・反粒子の生成及び対消滅による説明である：

Klein paradox では $|E - V_0| > m$ の $E - V_0 < 0$ の場合 $V_0 > E + m$ かつ $R > 1$ 、 $T < 0$ の事が下。これは、十分大きなボテンシャル $V_0 (> E + m)$ をもつて粒子・反粒子の生成が起こるための理解である。半径 R の $V = 0$ の < 0 領域へ進み $R > 1$ で、反粒子は $V = V_0$ で $V_0 > 0$ へ進み $T < 0$ を与える。



1.6.3 Partial Rescue of the Klein-Gordon Equation 内容について。

○ Klein-Gordon 方程式

$$\text{エネルギー-関係式} : E^2 = p^2 + m^2$$

演算子に置換式。
 ↕

$$\text{4元運動量 } p^\mu = (p^0, \vec{p}) \text{ で書く}$$

$$\underline{E \rightarrow i\partial_t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$$

$$(E^2 - \vec{p}^2 - m^2) \phi = 0$$

$$[i\partial_t \partial_t - (-i\vec{\nabla})^2 - m^2] \phi = 0$$

$$(p_\mu p^\mu - m^2) \phi = 0$$

$$[-\partial_t \partial_t + \vec{\nabla}^2 - m^2] \phi = 0$$

演算子に置換式。

$$\underline{[\square + m^2] \phi = 0}$$

$$(p^0 = i\partial_0 = \partial_0, p^i = i\partial_i = -i\partial_i)$$

$$(\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial_0 - \partial_i \partial_i, \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$$

○ 電磁場を入れた KG 方程式

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu, \quad q: \text{電荷}, A^\mu: \text{電磁ポテンシャル}$$

$$\Leftrightarrow i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - qA^\mu$$

修正 Klein-Gordon 方程式は

p^μ, p_μ を置換式

$$[(i\partial^\mu - qA^\mu)(i\partial_\mu - qA_\mu) - m^2] \phi = 0$$

共変微分 $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \in \text{導入}$

$$[D_\mu D^\mu + m^2] \phi = 0$$

Klein-Gordon 方程式は時間に関して 2 階の方程式とします。

元の Schrödinger 方程式は時間に関して 1 階の方程式であります。

追加の自由度が生じてきます。 (たとえば、初期条件を $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t=0)$ に必要になります。)

⇒ 元の KG 方程式の解中にについて、その複素共役 ϕ^* も解となる
べし 追加の自由度が表れています。

ここで、 ϕ は質量 m 、電荷 q の粒子を表す。 ϕ^* は質量 m 、電荷 $-q$
の粒子を表すように振舞う。 つまり、粒子解 中に対する反粒子解
といふ解がされる。

（この追加の自由度は KG 方程式を 2つの時間 1 階の方程式に分解するのに
ても確認できる。 それは、2成分のそれぞれを電荷 q 、 $-q$ を表す解
に対応させる。）

Klein-Gordon 方程式はエネルギー-動量式 $E^2 = p^2 + m^2$ と出発点としていて、本質的に $E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \equiv \pm E_p$ という正負のエネルギーを持つ解を含んでいます。 実際、2成分列ベクトル

$$\underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix}$$

を用いて分解した KG 方程式

$$iD_t \underline{\Psi} = \left[-\frac{1}{2m} \vec{D}^2 (\tau_3 + i\tau_2) + m\tau_3 \right] \underline{\Psi}$$

において自由粒子を仮定し ($D_t \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{D}^2 \rightarrow \vec{p}^2$), $\underline{\Psi} \propto \exp[-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})]$ の平面波を代入すると、

$$(左辺) \propto i(-iE) \underline{\Psi} = E \underline{\Psi}$$

$$(右辺) \propto \left[-\frac{1}{2m} \vec{p}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \underline{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{p}^2}{2m} + m & \frac{\vec{p}^2}{2m} \\ -\frac{\vec{p}^2}{2m} & -\frac{\vec{p}^2}{2m} - m \end{pmatrix} \underline{\Psi}$$

$$\text{ただし}, E = \pm \left(\frac{p^2}{2m} + m \right) = \pm E_p の解を含むことを分母.$$

$\Rightarrow E = \pm E_p$ に対する固有関数は次で与えられる.

$$+E_p: \Psi(x,t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} E_p+m \\ m-E_p \end{pmatrix} e^{-iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad \dots (1)$$

$$-E_p: \Psi(x,t) = \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \begin{pmatrix} m-E_p \\ E_p+m \end{pmatrix} e^{+iE_pt+i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad \dots (2)$$

ここで, $E = \pm E_p$ は常に $p = \bar{p}^T T_3 \bar{\Psi}$ かつ $p = \pm (i \bar{\epsilon} \bar{r})$ に規格化している.

\Rightarrow 電荷の正負に エネルギーの正負を 対応付けてある. といふこと.

これら 電荷の正負と エネルギーの正負が対応するという仮定を取ると、何が起るかを考える。 Ψ の方程式から 保険流の表式が

$$\vec{f} = \frac{1}{2im} \left[\Psi^+ (1+r_i) \vec{\nabla} \Psi - (\vec{\nabla} \Psi^+) (1+r_i) \Psi \right]$$

であることを今みよ。この表式へ、 $E = \pm E_p$ の 固有関数 (上式) を代入してみると、

$$(i) E = +E_p$$

$$\vec{f} = \frac{1}{2im} \cdot \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \left\{ (E_p+m \quad m-E_p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} i\vec{p} \begin{pmatrix} E_p+m \\ m-E_p \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + i\vec{p} \cdot (E_p+m \quad m-E_p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p+m \\ m-E_p \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\vec{p}}{8m^2 E_p} \cdot 2 \cdot (E_p+m \quad m-E_p) \begin{pmatrix} 2m \\ 2m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4m^2 E_p} \cdot 2m (E_p+m + m - E_p)$$

$$= \frac{\vec{p}}{E_p}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad E &= -E_p \\
 \vec{f} &= \frac{1}{2im} \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \frac{1}{2(mE_p)^{1/2}} \left\{ (m-E_p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} (\vec{p}) \begin{pmatrix} m-E_p \\ E_p+m \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + i \vec{p} (m-E_p) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m-E_p \\ E_p+m \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{\vec{p}}{fm \cdot mE_p} \cdot 2 \cdot (m-E_p) \begin{pmatrix} m-E_p+E_p+m \\ m-E_p+E_p+m \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\vec{p}}{4m^2 E_p} \cdot 2m (m-E_p+E_p+m) \\
 &= \underline{\frac{\vec{p}}{E_p}}
 \end{aligned}$$

と(1)'. 同じ結果を導く。つまり、 $E = \pm E_p$ の解に対して異なる符号 $p = \pm 1$ の規格化を課すのが、 \vec{f} が同じ表式となる。

では、 \vec{f} が電荷の符号を含めてつじつなが合う形に整理すれば、負のエネルギー $E = -E_p$ をもつ解をどう扱うに扱うべきか。

最終的な保存法則式は(1)と $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ と(2)で “よって”、前(1)-(2)の $\vec{p}' \equiv -\vec{p}$ とすべきだと分かる。この符号反転をどうして解釈するかというステップがかかる。“時間逆行”とするアビアが提案された。つまり、

電荷 q をもつ負のエネルギー粒子は、逆符号の電荷 $-q$ を持つ正エネルギー粒子が時間逆行しているものとみなせる。

△△△△△

$$\frac{e^{iEpt - i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{E = -E_p \text{ の形}} = \underline{e^{-i(+E_p)(-t) + i(-\vec{p}) \cdot \vec{x}}}$$

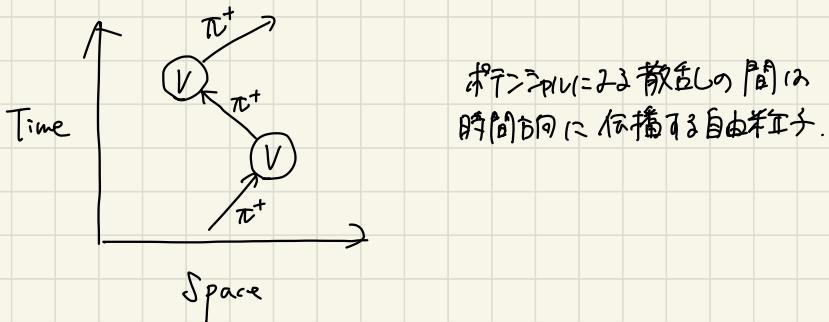
正エネルギー成“時間逆行”の形

ただし、電荷の符号は逆。(逆符号の電荷の運動が逆向きになることを含む。)

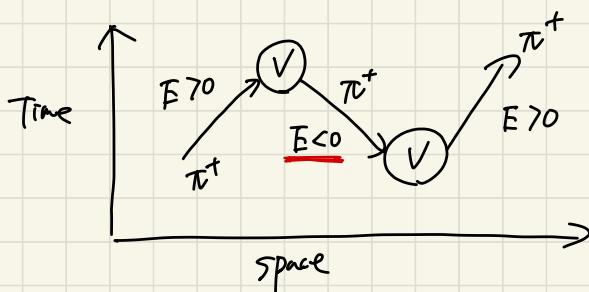
これがいて、KG方程式に含まれる負エネルギー解は逆符号の電荷の逆行として解釈することができる。(解釈の1つで、1961年ワイスコットが提案)

No. 12

非相対論的量子力学における π^+ の 2次の散乱は次のようになります。

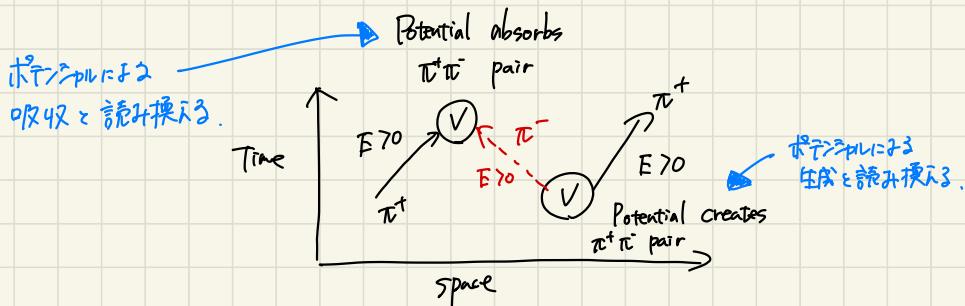


相対論的量子力学版の Feynman 图には以下が記載されています。次の図がダイアグラムを示す。



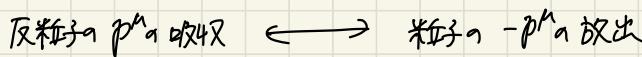
このダイアグラムの中の反 π^+ は時間につれて後ろ方向へと散乱していきます。

そこで、この解釈では時間後方的に散乱される粒子に対しては、負のエネルギー"を割り当てます。そこで、この粒子は“時間前進的”に散乱され、"正のエネルギー"をもつ“反粒子”に等しいと解釈できます。それを示すのが下の図です。

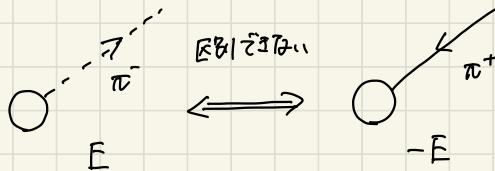


No.13

セイタイヤグラム.



が等価でないことはない。ただし、RAFTER 計算は区別していない。



正エネルギーを持つ、 π^- の反粒子の軌跡

負エネルギーを持つ π^+ の並進の軌跡

次のセクション（§1.7）で、具体的な例を挙げ。その前に、時間依存的
運動方程式による 1 次の確率振幅を計算する。

始状態 $|i\rangle$ から終状態 $|f\rangle$ の $V(\vec{x}, t)$ は時間範囲によらず、1 次確率振幅は

$$a_{fi} = -i \int d^3x \int dt \phi_f^*(\vec{x}) e^{iEt} V(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) e^{-iEt}$$

$-\infty \rightarrow \infty$

で計算される。[時間の積分範囲は ~~かくわい~~？, 空間の全空間]

簡略化

$$V(\vec{x}, t) \simeq V_0(\vec{x}) e^{\pm i\omega t}$$

とし、

$$V_{fi} = -i \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V_0(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})$$

を定義する。Dirac の δ 関数の積分表示

$$\int dy e^{ixy} = 2\pi \delta(x)$$

を用ひる。

No. 14

$$A_{fi} = V_{fi} \int dt e^{i(E_f - E_i \pm \omega)t} = 2\pi V_{fi} \delta(E_f - E_i \pm \omega)$$

乞う。[ω は？ f -関数は 総状態の状態密度 $P(E_f)$ で $\int dE_f$ の積分？]

$\Rightarrow E_f = E_i \pm \omega$ は 減衰なし 遷移 (2) が成立。

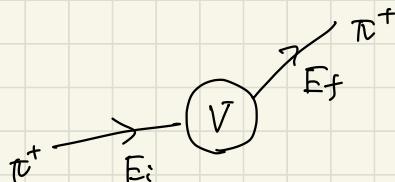
$$\left. \begin{array}{l} V_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \Rightarrow \text{入射} - \text{供給} \quad (E_f = E_i + \omega) \\ V_0(\vec{r}) e^{+i\omega t} \Rightarrow \text{入射} - \text{吸收} \quad (E_f = E_i - \omega) \end{array} \right.$$

例として 単純な π^+ 中性子の散乱を見る。簡単のため $V_{fi} = 1$ とする。

$$V \simeq e^{-i\omega t}$$

とすると。

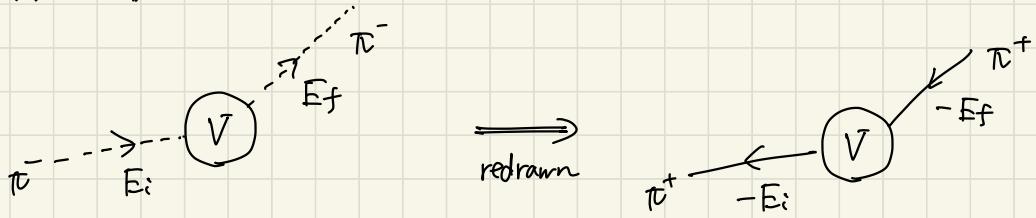
(1) π^+ 散乱



始状態 : $\psi_i = N_i e^{-i\vec{p}_i \cdot \vec{x}}$, $\vec{p}_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i)$

終状態 : $\psi_f = N_f e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{x}}$, $\vec{p}_f^\mu = (E_f, \vec{p}_f)$

振幅 : $A_{fi} \simeq \int dt \psi_f^\dagger e^{-i\omega t} \psi_i = \int dt e^{i(E_f - E_i - \omega)t} = 2\pi \delta(E_f - E_i - \omega)$

(2) π^- 散乱= つまり、始状態・終状態は \approx Raft に説明換わる。

$$p_i^M = (-E_f, -\vec{p}_f), \quad p_f^M = (-E_i, -\vec{p}_i)$$

確率振幅は、

$$\begin{aligned} A_{fi} &= \int dt (N_f e^{-ip_f \cdot x})^* e^{-i\omega t} (N_i e^{-ip_i \cdot x}) \\ &= \int dt N_f^* N_i e^{i(p_f \cdot x - \omega t - p_i \cdot x)} \\ &\simeq \int dt e^{i(-E_i - \omega + E_f)t} \\ &= 2\pi \delta(-E_i + E_f - \omega) \end{aligned}$$

なぜなら (つまり、反粒子を取ると) $E_f = E_i + \omega$ だから。

さて、ここで用いられる Feynman 球面は 2 次元の球面を表す。"entry" と "exit" という言葉は 時間に対してではなく、ポテンシャルに対しての言葉とみなすのが正しい。なぜなら、ポテンシャルの行列要素を計算すると、参照されるべき球面。

$$\Rightarrow \int \psi_2^* V \psi_1 dx$$

行列要素の計算に用いる次元

初期

反粒子

 ψ_1

initial state

final state

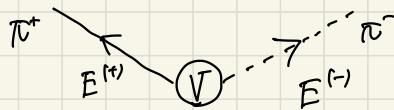
 ψ_2

final state

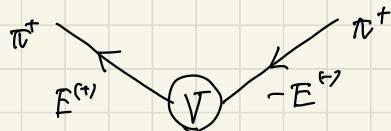
initial state

No. 16

(3) 3目例), $V = e^{-i\omega t}$ の生成を考へる。



このダイアグラムは反粒子と粒子には軽視可い。



この図は二つであります。この過程に対する $\omega = E^{(+)} + E^{(-)}$ です。

Exercise 1.10

2目 粒子のダイアグラムを考へる。

$$\text{始状態: } p_i^A = (-E^(-), -\vec{p}^{(-)})$$

$$\text{終状態: } p_f^A = (E^{(+)}, \vec{p}^{(+)})$$

と書く。同様に i 次の過程振幅の時間成部分に注目する。

$$Af_i \sim \int dt (e^{-iE^{(+)t}})^* e^{-i\omega t} e^{-i(-E^(-))t}$$

$$= \int dt e^{i(E^{(+)})^* + E^(-) - \omega)t}$$

$$= 2\pi \delta(E^{(+)})^* + E^(-) - \omega)$$

$$\rightarrow \underline{\omega = E^{(+)}} + E^(-)$$

生成過程で反粒子 → 粒子と統計換入式が入る。

April, 30th, 2021

1.6 負エネルギー状態の扱い

ローレンツ不変な波動方程式がどうかに構成されるかを見てきた。

こちらの方程式は正しいエネルギー表現を組み込む。Dirac 方程式の場合には「密度」をカレントに対して質の解釈が得体下。

負のエネルギー解について理解する必要がある。なぜなら、それは無視すべきではないから。

負のエネルギー解に対する解釈を与えることはダメかと思われた KG eq. を見直すことにつながる。また、こちらの考察は最終的に Dirac eq. や KG eq. を越えた相対論的量の理論を我々に要求することになる。

1.6.1 Dirac の空孔理論と負エネルギー解

tumble: 倒れ込む
崩壊する
消滅する
枝び散らす

oblivion: 消滅
忘却
忘却される
状態

Dirac 方程式の負エネルギー解は重要な問題を持ったので思われる。

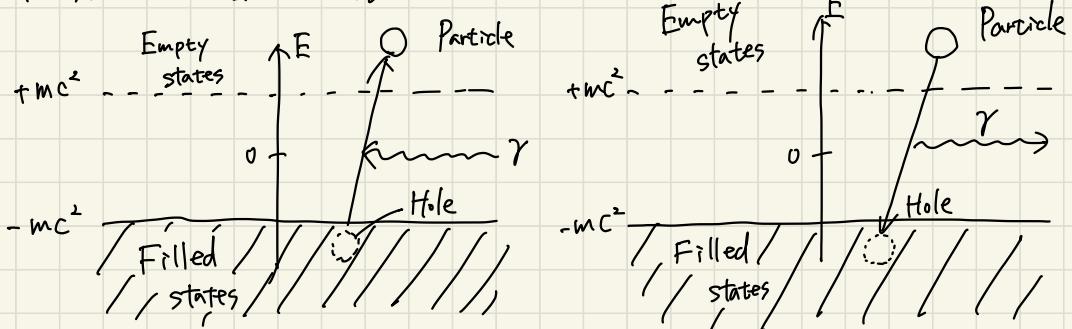
輻射場との相互作用によって正エネルギーを持つ全ての電子が、極めて短い時間に負エネルギー状態の中で崩壊するような計算をすることが簡単である。

この結果は明らかに、観測されない原子物質の安定性に反している。

Dirac は負エネルギー状態は全て満たされてると仮定することで、この問題を解決した。

そして、電子が Fermion であるから、Pauli の排他律は正エネルギーの電子が負エネルギー状態へ遷移することを禁止した。この負エネルギー状態によって満たされた集合は Dirac の海と呼ばれている。もし、この Dirac の海が静かなものであれば、この形状を変えてバウゲラウトが観測可能な結果として現れるに違くない。（ただし、一般相対論では質量の絶対値が空間の曲率を決定する。例外である。）

しかし、この Dirac の海は静かなものではない。なぜなら、量子力学的な真空の変動が存在するからである。Dirac 方程式によれば、正エネルギー状態と負エネルギー状態の間のギャップは Fermion の静止質量の 2倍: $2mc^2$ である。



レフ=ゲーテ、仮想的反復動もしくは現実の物理的なプロセスによって真空中に
エネルギー=状態空間では Fermion の負エネルギーの海から励起エネルギー占有エレー
ンジの正エネルギーの状態へと移るこれがでます。ここで、Dirac の海に“空孔”を
形成していくことを示す。この時は 真空の粒子=空孔による励起は正エネルギーの
Fermion と、別の Fermion には反対の charge を持つて並ぶ複数の空孔を生じる。
この負エネルギーの空孔を antifermion と言う。

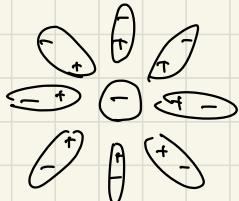
Dirac はこのアドバンスを電子へと適用し、陽電子の存在を予言した。その後の
陽電子の発見は、粒り強い 負エネルギーへの執着を やがては不確実性原理から
理論的最も偉大な成功へと変えた。

既に述べたように、このアドバンス（生成・消滅）は 仮想的反復動=空孔の
度動力 (\leftarrow ほんのわずかな間にだけ存在する。これは量子力学的な不確定性原理に起因)
や 実粒子=空孔を作り出すことができる。(\leftarrow これは外部からエネルギーを貰って作る)。
これら2つのアドバンス観測可能である。
Dirac の空孔理論は 倍電荷効果 $\gamma_C = 2$ で構成される。

1.6.2 真空偏極

1種子 Schrödinger 方程式の実験的対応物を探し始め、Dirac 方程式を得たのがでした。
そして、Dirac 方程式は多くの実験データと関連付けられてきた。(電子のスピン、磁気モーメント、
原子のスビン-軌道結合、陽電子の存在) しかし、空孔理論の解釈は明らかに
Dirac 方程式が 1種子の方程式ではないことを示しています。なぜなら、真空の粒子=空孔励起は
本質的に多体系の方程式であるからである。

例として 量子電磁力学での 真空偏極と呼ばれる現象を考へてみる。試して、正エネルギーを
持つ素の電子を Fermi sea へ投げ入れて、その電荷を測定しようと考へる。零点エネルギーのため
に、Fermi sea は 仮想的反電子-陽電子励起を伴う反復動を起こす。
しかし、何らかの誘電媒質の中に埋め込まれた試電荷は、その媒質を偏極させる。



偏極(?)の媒質

中に入ると、電子は 仮想的反電子-陽電子を 優先的に引き引く。
この陽電子は 電荷の見方と その電荷を守りつつ どうか
見えづらい。
巨視的大見方と 有効電荷が見え、極端な場合では
並ぶのは 素の電荷が見えようがない。

このような状況を「真空中の偏極」 $(T=0)$ と呼んでいます。このように「真空中の偏極」の意味は、はるかに見えないといえます。（§6.4）

試験電荷が常に Fermi sea の中に位置しているため、裸の電荷というより「有効電荷」と呼ぶべき量が実質的には測定式であります。これは、量子場の理論論では「 β 」を除く問題を「 β 」を除むことに重要である（ \rightarrow 繰り出力：renormalization）。

私たちが KG eq. 及び Dirac eq. を「正真正銘の 1 粒子方程式」として扱うには、正エネルギーと負エネルギーのギャップが $2mc^2$ 程度のままである限りに限りなく、相速度が速い必要がある。

どうぞおなじみの Sitterbewegung や Klein paradox などの現象が生じるとされてます。

素粒子物理において最も典型的なエネルギーは、 $2mc^2$ に比べて大きい。（電子も重い粒子に対して）そこで、Dirac 方程式は多粒子の方程式として扱われなければなりません。非相対論的な多体問題は第二量子化の方法を用いたエントラップメント法がある。相対論的な量子力学においても同様の問題に出くわす。そのときは、相対論的な量子場の理論と構築されるべきです。

1.6.3 Partial Rescue of the Klein-Gordon Equation

歴史的経緯に沿って、我々は Dirac 方程式が KG eq. に比べて負の確率密度解釈という重要な問題点を克服してきたを見てきた。この辺りでは、Dirac の空孔理論について導入された「粒子-反粒子対応」が KG 方程式に比べて負の確率密度解釈に対して用ひえどりでありますとすると説明できます。この解釈は何か？ KG eq. は相対論的双波動方程式で Dirac eq. は使用可能な代物ではありません。

KG または 1 粒子 boson に対して、Dirac は Fermion に対して適用可能な方程式ではありません。高エネルギーではアビスがありますが、これらを組み合わせて 1 粒子方程式として解釈するには不十分であることは明白です。

最終的に電磁場を入めた KG equation は次の形になります。

$$[(\gamma^\mu \partial_\mu - q A^\mu)^2 - m^2] \phi = 0$$

電磁場が存在する中で、連続方程式が成り立つ。

$$\partial_\mu j^\mu = 0,$$

$$\text{with } j^\mu = \phi^* (\gamma^\mu \partial_\mu - q A^\mu) \phi - \phi (\gamma^\mu \partial_\mu - q A^\mu) \phi^*$$

この形の KG eq. の複素共役をとる。演算子は全て実である、 $i \rightarrow -i$, $\phi \rightarrow \phi^*$

とくに、

$$\begin{aligned} & [(\imath \partial^M - g A^M)(\imath \partial^N - g A^N) - m^2] \phi^* = 0 \\ & \rightarrow [(-\imath \partial^M - g A^M)(-\imath \partial^N - g A^N) - m^2] \phi^* = 0 \\ & \rightarrow [(\imath \partial^M + g A^M)(\imath \partial^N + g A^N) - m^2] \phi^* = 0 \\ & \therefore \underbrace{[(\imath \partial^M + g A^M)^2 - m^2] \phi^* = 0}_{\Rightarrow} \end{aligned}$$

となる。 ϕ, ϕ^* はともに KG eq. を満たす。

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\imath \partial^M - g A^M)^2 - m^2] \phi = 0 \\ [(\imath \partial^M + g A^M)^2 - m^2] \phi^* = 0 \end{array} \right.$$

4ベクトルの符号を変える： $A \rightarrow -A = (-A^0, -\vec{A})$ は 粒子の電荷の符号と反転するにに対応する。 $\phi = \phi^*$ 、KG eq. は必ず対称性に気がつく。

ϕ の電荷 g を KG eq. の解であるとき、 ϕ^* は同じ質量、電荷 $-g$ の解である。

この対称性を charge conjugate (C) ; 荷電共役 と呼ぶ。そして、この対称性に 対応する 演算子 粒子 \leftrightarrow 反粒子 を関係付けた。 ϕ^* は 荷電共役の波動関数と呼ばれる。荷電共役解の密度 ρ_c 、かた \vec{j}_c は元の解 ρ 、

$$\rho_c = -\rho, \quad \vec{j}_c = -\vec{j}$$

とし関係にある。 ρ, \vec{j} は $[(\imath \partial^M - g A^M)^2 - m^2] \phi = 0$ の計算から得られる。具体的には、この KG eq. の解 ϕ を用いて次のように求められる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \imath \phi^* \overleftrightarrow{\partial_t} \phi = \imath \left[\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right] \\ \vec{j} = -\imath \phi^* \overleftrightarrow{\nabla} \phi = -\imath \left[\phi^* (\vec{\nabla} \phi) - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi \right] \end{array} \right.$$

よりは KG eq. の連続域の解釈と矛盾しないのか?" となる。 KG eq. と Dirac eq. は本質的に粒子と反粒子の解を含む。 KG eq. カテゴリ専門的な密度 P は確率密度ではなくむしろ電荷密度として解釈されるべきである。 そうすれば、 P が正負の値をとることに自然(むしろ当然であるべき)である。 同様にして、 \vec{J} は荷電粒子を解釈される。 被素共役の操作は全て中に関する振動数の符号と運動量を並符号にする。 これで、 KG eq. の負エネルギー解の荷電共役版の方程式の正エネルギー解において電荷の符号を逆としたものとなる。

$$\begin{array}{ll} [(\imath \partial^M - g A^M)^2 - m^2] \phi_+ = 0 & [(\imath \partial^M + g A^M)^2 - m^2] \phi_+^* = 0 \\ [(\imath \partial^M - g A^M)^2 - m^2] \phi_- = 0 & [(\imath \partial^M + g A^M)^2 - m^2] \phi_-^* = 0 \end{array}$$

↓

$$\phi_{\pm}, \{ p, \vec{j}, m \} \qquad \qquad \qquad \phi_{\pm}^*, \{ p_c, \vec{j}_c, m \}$$

ϕ_{\pm} ϕ_{\pm}^*

Complex conjugate

$$\begin{array}{ccc} \phi_{\pm} & \xrightarrow{\text{Complex conjugate}} & \phi_{\mp}^* = \phi_{\pm} \\ \phi_{\mp}^* & \xrightarrow{\text{Complex conjugate}} & \phi_{\pm}^* = \phi_{\pm} \\ \text{with } p, \vec{j}, m & & \text{with } p_c = -p, \vec{j}_c = -\vec{j}, m \end{array}$$

負エネルギー解を解釈すると、負エネルギー解の被素共役は "逆符号" の正エネルギー解と解釈される。 これが平行には Dirac 方程式へも応用される。 そこで、負エネルギーに対する "時間後進" の描像を与える。

様々にとて説明されてはいるが、 KG 方程式は 2 成分の列ベクトルの形の波動方程式に対する時間に亘る 1 階の方程式へ書き直すことができる。 どちらの成分は 粒子-反粒子の対称性を持つことから要求される。 そして、この内部自由度はスピンではなく電荷を表す。 Dirac 方程式 + 時間に亘る 1 階の方程式であるが、 波動関数については 4 成分を要求する。 おなじくに言えば、 粒子-反粒子の各々に対して 2 のスピン自由度を許すためである(ただし、 spin $\frac{1}{2}$ の粒子に対して)。

変化のない粒子たちにおけるはどうなるか? 我々はこのことについて 2 のクラスを区別する必要がある。

- (1) 中性粒子・中性反粒子は 電磁相互作用以外の 相互作用によって区別される。
- (2) 中性粒子たち、自分自身が反粒子である。

(1) の例としては、 中性 K^0 中間子がある。 K^0 の反粒子は K^0 であるがどうか 同じ electric charge を持つ。 ただし、 実 $1/3$ strangeness を持つ。 $K^0 : S=1, E^0 : S=-1$ 、 これは強い相互作用で区別される。

(2) には π^0 や γ (\rightarrow などの相手) が自身の反粒子でなく、
上のギロニに適用できない。しかし、荷電粒子は複素数の波動関数を要求する。
(電荷なしの粒子は $\psi = \phi\psi$ として実の波動関数がとられる。)

先述のギロニを考へると、これは驚くことではない。つまり、荷電粒子は反粒子と区別は
できずである。そして、対応する相対論的波動方程式はその反粒子が自身に等しい中性粒子
($= \pi^0$ など) の自由度を取り入れる必要がある。この自由度の拡張は、KG 方程式 $\square\phi = 0$ から
 $\square/\phi = 0$ で線形の方程式に帰属し、2成分波動関数を考えることもしくは、元の KG 方程式に
 $(\square + m^2)\phi = 0$ に角 ℓ の複素波動関数を採用することで達成できる。しかし、実波動関数に
対しては p_ℓ^α は恒等的に 0 にはならない。これは既に中性粒子に対しては起らべきことである。
($\therefore p_\ell^\alpha$ が電荷密度、電気的 current を解釈するなら、中性粒子に対して 0 とはならない。)
このように、KG 方程式において荷電 boson と 非荷電 boson の両方に対して、質の
連続条件が満足する。したがって、KG 方程式を reject する大きな理由はやはり関係がない。

1.6.4. Backward in Time Prescription

歴史的には、負エネルギー解の解釈と陽電子の予言は Dirac の空孔理論による。この理論では、この解釈は boson に対するものである。しかし、boson は排斥律に従わなければならぬ。

負エネルギー解に対しては、2つ目の解釈が存在する。Schrodinger-Stückelberg-Feynman の名に因る。この解釈によると、

彼らの功績は Fermion と排斥律に従うが、粒子-反粒子の対称性を持つ出でたことである。このアプローチは 負エネルギー解の 1つ目の解釈が Fermion と boson の両方に對して正しい確率振幅を与えた。基本的にアプローチは既に前のセクションで導入されていて、Stückelberg-Feynman のレシピは次のようである：

時間的に逆方向へ伝播する負エネルギー解は、粒子は、

時間的に順方向へ伝播する 正エネルギー解の、

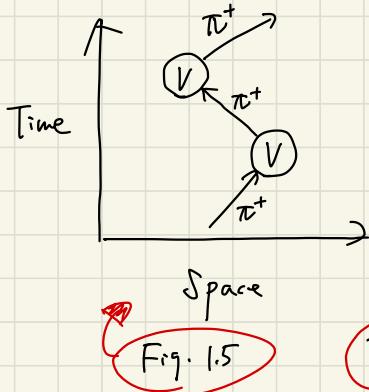
反粒子の解で置き換える。

\Rightarrow 負エネルギー解は 時間逆の順方向伝播。

この方法で Fermion と bosons の両方に適用できる。その結果、

$\exp[-i(-E)(-t)] = \exp(-iEt)$ を与える。このセクションでは、この方法の正確さを示す例を挙げる。次のセクションで、Stückelberg-Feynman の方法を具体的な計算について説明する。

非相対論的量子力学において π^+ の 2 次散乱は 図 1.5 のようである。(Fig. 1.5)



自由粒子が 時間前進的方向へ伝播していく。
相対論的量子力学の Stückelberg-Feynman パーティクルでは、次のようなダイアグラムも許容される。 (Fig. 1.6)

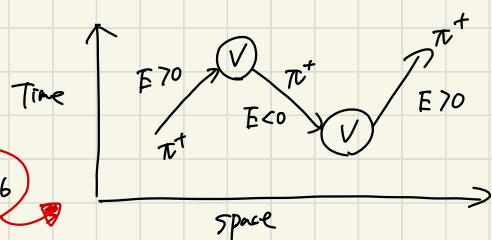
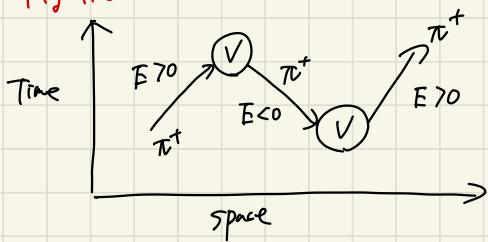


Fig. 1.6

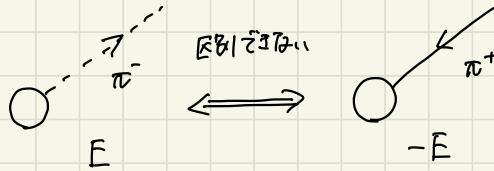


このダイアグラムには π^+ の時間的に逆方向へ散乱がされている。我々が見せんでは時間後方的な散乱には負のエネルギーが割り当てられる。この Fig. 1.6 は次に示す Fig. 1.7 のように再解釈される。

つまり、時間後方的な負エネルギー粒子の伝播は正エネルギーを持つ反粒子との時間前方的な伝播に等価であるということ。

このようないくつかのダイアグラムにおいては、反粒子の4元運動量の放出は、粒子の4元運動量の吸收と物理的に区別できない。同様に反粒子の4元運動量の吸収は粒子の4元運動量の放出に等価となる。

この処市せんは次の二つの過程を含んでる； 全ての反粒子の4元運動量と電荷の符号を逆にして、粒子だけに置き換えたところ。これら、反粒子の線が表す始状態、終状態も入れ換える。つまり、矢印の向きを逆にする。たとえば、次に示すのは2つの過程は物理的に区別するとはできない。



正エネルギーを持つ、π⁻の反粒子の動的

負エネルギーを持つ π⁺の並進の軌跡
として解釈可能である。

次のセクションでは、このアドミンのローレンツ不变な擾動論について確率振幅を計算するためには、動前後、実際に Stückelberg-Feynman の形で非相補論的又時間依存的な 1 次の擾動論の場合について見ておく。

1 次の振幅は、

$$A_{fi} = -i \int d^3x \int dt \phi_f^*(\vec{x}) e^{iE_f t} V(\vec{x}, t) \phi_i(\vec{x}) e^{-iE_i t}$$

で、単純な周期ボテンシャル

$$V(\vec{x}, t) \simeq V_0(\vec{x}) e^{\pm i\omega t}$$

を仮定。こうして、

$$V_{fi} = -i \int d^3x \phi_f^*(\vec{x}) V_0(\vec{x}) \phi_i(\vec{x})$$

を定義。Dirac δ-function の積分表示

$$\int dy e^{ixy} = 2\pi \delta(x)$$

を用いると、1 次の遷移振幅は

$$A_{fi} = V_{fi} \int dt e^{i(E_f - E_i \pm \omega)t} = 2\pi V_{fi} \delta(E_f - E_i \pm \omega)$$

と表すことができる。ただし、 $E_f = E_i \pm \omega$ を満たさない遷移は消える。

このことは、外場 $e^{-i\omega t}$ の $i\omega n$ のエネルギーを 系に与え、 $e^{i\omega t}$ の 系に取り戻す から $i\omega n$ のエネルギーを 吸収 していることを意味する。

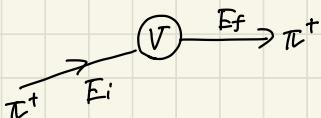
いくつもの π 中間子の单纯な散乱について、これらがどのくらい正確であるか見てみよう。

簡単のため、 $V_{fi} = 1$ とし、

$$V \simeq e^{-i\omega t}$$

とする。これは、系との1次の相互作用(=1)エネルギーが時間で移る(=相当する)。

(1) π^+ 散乱



始状態の正エネルギー-平面波は $\psi_i = N_i e^{-ip_i \cdot x}$ である。 N_i は規格化因子で、

4元運動量 $p_i^{\mu} = (E_i, \vec{p}_i)$ である。 $(p_i \cdot x = E_i t - \vec{p}_i \cdot \vec{x})$

終状態は $\psi_f = N_f e^{-ip_f \cdot x}$, $p_f^{\mu} = (E_f, \vec{p}_f)$ である。今は時間依存性のみを取扱う。1Rの遷移振幅は

$$\begin{aligned} A_{fi} &\simeq \int dt \psi_f^+ e^{-i\omega t} \psi_i = \int dt e^{+i(E_f t - E_i t - \omega t)} \\ &= 2\pi \delta(E_f - E_i - \omega) \end{aligned}$$

となる。すると、 $\hbar\omega$ のエネルギー-を変じてた、 π 中間子が散乱する。

これらがエネルギー- $E_f = E_i + \omega$ の関係が実現される。

(2) π^- scattering



点線は反粒子を表しており、左の図に並んでいたダイアグラムに直すのが簡単である。

ここで、粒子の運動量は

$$p_i^{\mu} = (-E_i, -\vec{p}_i), \quad p_f^{\mu} = (-E_f, -\vec{p}_f)$$

となる。

ゆえに、遷移振幅は

$$A_{fi} \simeq \int e^{i(-E_i - \omega + E_f)t} dt = 2\pi \delta(-E_i + E_f - \omega)$$

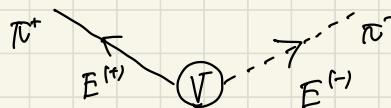
(なぜか、始状態を右側に、終状態を左側に) とすると、 E_i, ω, E_f の順が $-E_i + E_f - \omega$ となる。なぜか、 $E_f = E_i + \omega$ の条件が得られる。この起因には粒子と反粒子に対してよくなることがある。 \Rightarrow 粒子の波動関数が反粒子と逆である過程でどちらが始状態であり、どちらが終状態であるかを決めるルールを注意深く見てみる。

なぜか、"entry" と "exit" という言葉は、Feynman の記法においては時間的な持つてある。この間に、矢印の先端が相互作用に対して "内向き" か "外向き" つかれて区別される。exit と entry は 波動関数が得る要素 1 が現れるときに、その順番のために参照される。具体的には、

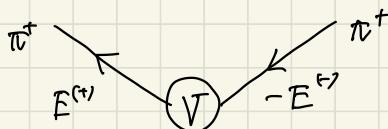
$$\int q_2^* V q_1 dx$$

という表式にはじめは、entry state は q_1 、exit state は q_2 に相当する。粒子に対して、entry state は 始状態 (過去)、exit state は 終状態 (将来) に相当する。反粒子に対してはこの対応が逆になる。

(3) 3次例、 $V = e^{-i\omega t}$ の場合に生成を考える。



このダイアグラムは反粒子と粒子は転換可能な。



これが3次例である。この過程は射出 $\omega = E^{(+)} + E^{(-)}$ となる。



Exercise 1.10

1.7 Feynman Diagrams (propagator method)

今後この章では量子場の理論の範囲での物理的アロスを考える。いくつか例について、さきほど
デカルト Feynman の時空描像を用いることは便利である。ここでアーロー法は propagator method
と呼ばれ、厳格な立場の理論を用いてはいけないが、しばしば正確で直感的である満足できる結果を
導く。詳しい説明は Bjorken and Drell (1964) に、発見的な取り扱い方法は Aitchison
and Hey (1982) に示されている。ここで説明は後者に依っている。

1.7.1 Electromagnetic $\pi^+ K^+$ Scattering

K^+ による π^+ の電磁相互作用による散乱について、その振幅の構成を概観する。
 (K^+ , π^+ はどちらも スピニゼロの Bosons である。強相互作用が支配的ではなく、低エネルギー)
 で $\pi^+ - K^+$ 系を考へるのも教育的である。

振幅を構成すれば、ここで propagator としてアーロー法を採用する。
 電磁相互作用を積重的的に扱うとき、 $e^2/4\pi$ やパルス等々が用いられる。
 自然単位系では (Appendix A 参照)

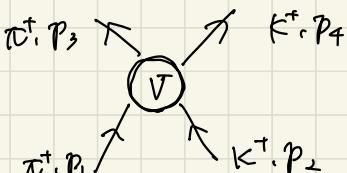
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$$

という値が得られる。ただし、 $\alpha=1/3$ 標助展開は十分速く収束し、定数 α の直次の
べきを考へればよいことを注意。

我々は 2 のステップを行く。

- (1) K^+ に対するベクトルポテンシャル A^μ を計算する。
- (2) K^+ のポテンシャル A^μ の下での π^+ 相互作用を計算する。

すなはち、4元ベクトルポテンシャルの下での一般的な π^+ への方程式を作り、
 この相互作用は因式的に次のようにならなくてはならない。



これらの粒子が「 π^0 」なら Bosons である。私たちは KG 方程式で対応する。

minimal substitution を用いる。

$$\Rightarrow [(\imath \partial^\mu - g A^\mu)(\imath \partial_\mu - g A_\mu) - m^2] \phi = 0$$

であり、これは \mathcal{L} の形に書き換える可能：

$$(\Box + m^2) \phi = -V \phi, \quad V = \imath e (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2$$

\Rightarrow Exercise 1.11 (a)

∴ では 最低次の項を計算する。尚且、上記の ポテンシャル の 1 項のみとする。

1: \mathcal{R} の散乱振幅は

$$A = -i \int d^4x \psi_3^+ V \psi_1$$

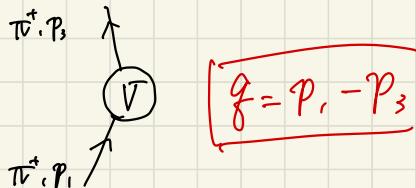
定義がある。

であり、平面波状態は

$$\psi_i = N_i e^{-ip_i \cdot x}, \quad \psi_3 = N_3 e^{-ip_3 \cdot x}$$

平面波状態を考慮。

つまり、 N_1, N_2 は規格化定数。左にある diagram は
→ 具体的にどうやって決めるか？ これが、重要な点！



と表される。ポテンシャル 平面波 具体的の表式を代入すると、

$$A = -i \int d^4x N_3 e^{+ip_3 \cdot x} i e (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) N_1 e^{-ip_1 \cdot x}$$

$$= N_1 N_3 e \int d^4x e^{+ip_3 \cdot x} (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) e^{-ip_1 \cdot x}$$

となる。計算結果、 \Rightarrow Exercise 1.11 (c)

電磁場に対する反応
具体的なポテンシャル
がわかる。

$$A = -i \int d^4x j_\mu(\pi^*) A^\mu, \quad j_\mu(\pi^*) = i e [\psi_3^+ (\partial_\mu \psi_1) - (\partial_\mu \psi_3^+) \psi_1]$$

と書ける。 j_μ は EM transition current と呼ばれる。

平面波に対する、 $\hat{f}_\mu(\vec{x})$ の表現は評価可能となる? \Rightarrow Exercise 1. 11 (b)

$$A = -ieN_1N_3(p_1 + p_3)_\mu \int d^4x A^\mu e^{-ifx}$$

△のとき、4元運動量移行は

$$\boxed{f \equiv p_1 - p_3}$$

である。1x1から、ベクトルポテンシャル A^μ が決まれば Π^μ 、散乱振幅は計算で3.

Exercise 1.11

(a) KG ist ~~der~~ nach minimal substitution " $(\square + m^2)\phi = -V\phi$ " zu $\Sigma \in \text{PDE}$.

$$[(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial^\mu - eA^\mu) - m^2]\phi = 0 \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow (i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial^\mu - eA^\mu) - m^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow i\partial_\mu(i\partial^\mu\phi - eA^\mu\phi) - eA_\mu(i\partial^\mu\phi - eA^\mu\phi) - m^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_\mu\partial^\mu\phi - ie\partial_\mu(A^\mu\phi) - ieA_\mu\partial^\mu\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi - m^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow -\square\phi - ie[\partial_\mu A^\mu + A_\mu\partial^\mu]\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi - m^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow (\square + m^2)\phi = -ie[\partial_\mu A^\mu + A_\mu\partial^\mu]\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi$$

$$\Rightarrow (\square + m^2)\phi = -\underbrace{\{ie[\partial_\mu A^\mu + A_\mu\partial^\mu] - e^2A_\mu A^\mu\}}_{\equiv V}\phi$$

$$\therefore (\square + m^2)\phi = -V\phi, \quad V \equiv \underbrace{ie(\partial_\mu A^\mu + A_\mu\partial^\mu) - e^2A_\mu A^\mu}_{\equiv V}$$

(b) $t \rightarrow \pm\infty$ で $A_0 \rightarrow 0$, $|\vec{A}| \rightarrow 0$ で $|\vec{A}| \rightarrow 0$ と仮定する。

$$\int d^4x e^{i p_f \cdot x} (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) e^{-i p_i \cdot x} = -i (p_f + p_i)_\mu \int d^4x e^{i p_f \cdot x} A^\mu e^{-i p_i \cdot x}$$

を確認する。

左辺の積分について部分積分を実行する。

$$\begin{aligned} & \int d^4x e^{i p_f \cdot x} \underbrace{\partial_\mu (A^\mu e^{-i p_i \cdot x})}_{\text{添え}} + \int d^4x e^{i p_f \cdot x} A^\mu \partial_\mu e^{-i p_i \cdot x} \\ &= \left[e^{i p_f \cdot x} \cdot A^\mu e^{-i p_i \cdot x} \right]_0^\infty - \int d^4x (i p_f)_\mu A^\mu e^{-i p_i \cdot x} + \int d^4x e^{i p_f \cdot x} A^\mu \cdot (-i p_i)_\mu \\ &\quad \Downarrow \left(\because A^0 = 0, \vec{A} = 0 \atop t \rightarrow \pm\infty, |\vec{x}| \rightarrow \infty \right) e^{i p_f \cdot x} \\ &= -i \int d^4x (p_f)_\mu e^{i p_f \cdot x} A^\mu e^{-i p_i \cdot x} - i \int d^4x (p_i)_\mu e^{i p_f \cdot x} A^\mu e^{-i p_i \cdot x} \\ &= -i (p_f + p_i)_\mu \int d^4x e^{i p_f \cdot x} A^\mu e^{-i p_i \cdot x} \end{aligned}$$

//

(C)

$$A = N_1 N_3 e \int d^4x e^{i p_3 \cdot x} (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) e^{-i p_1 \cdot x} \quad \dots (2)$$

#5

$$A = -i \int d^4x j_\mu(\pi^+) A^\mu, \quad j_\mu(\pi^+) = ie \left[\psi_3^* (\partial_\mu \psi_1) - (\partial_\mu \psi_3^+) \psi_1 \right]$$

を確認可。

(2) を書き換へる。

$$\begin{aligned} A &= -i \int d^4x N_3 e^{i p_3 \cdot x} ie (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) N_1 e^{-i p_1 \cdot x} \\ &= -i \int d^4x \left\{ \psi_3^* \cdot ie \partial_\mu (A^\mu \psi_1) + \psi_3^* ie A^\mu \partial_\mu \psi_1 \right\} \\ &= -i \int d^4x \left\{ \underbrace{\psi_3^* ie \partial_\mu A^\mu \psi_1}_{+ \psi_3^* ie A^\mu \partial_\mu \psi_1} + \underbrace{\psi_3^* ie A^\mu \partial_\mu \psi_1}_{+ \psi_3^* ie \partial_\mu A^\mu \psi_1} \right\} \end{aligned}$$

左端

$$\begin{aligned} ie \partial_\mu (\psi_3^* A^\mu \psi_1) &= ie \partial_\mu (\psi_3^* A^\mu) \psi_1 + ie \psi_3^* A^\mu \partial_\mu \psi_1 \\ &= \underbrace{ie \psi_3^* \partial_\mu A^\mu \psi_1}_{+ ie A^\mu \partial_\mu \psi_3^* \psi_1} + ie \psi_3^* A^\mu \partial_\mu \psi_1 \\ &= ie \partial_\mu (\psi_3^* A^\mu \psi_1) - ie A^\mu \partial_\mu \psi_3^* \psi_1 \end{aligned}$$

右端

$$\begin{aligned} A &= -i \int d^4x \left\{ ie \partial_\mu (\psi_3^* A^\mu \psi_1) - ie A^\mu \partial_\mu \psi_3^* \psi_1 + ie A^\mu \psi_3^* \partial_\mu \psi_1 \right\} \\ &= -i \int d^4x \cdot ie \partial_\mu (\psi_3^* A^\mu \psi_1) - i \int d^4x \left[ie (\psi_3^* \partial_\mu \psi_1 - \psi_1 \partial_\mu \psi_3^*) A^\mu \right] \\ &= \boxed{e \psi_3^* A^\mu \psi_1} - i \int d^4x j_\mu(\pi^+) A^\mu \\ &= \boxed{-i \int d^4x j_\mu(\pi^+) A^\mu} \quad \text{(?: } A^\mu \text{ は } \boxed{\text{P 在してボテンシャル?}} \text{ ？)} \end{aligned}$$

時空の境界を消さる?

$\nabla \cdot A^M$ は K^+ によって生じるベクトルポテンシャル A^M を決める必要がある。

ローレンツ・ガーベー方程式、Maxwell eqs. (2)

A^M 漸近方程式の
形式で書く。T₀ の。

$$\partial_\mu A^M = 0$$

$$\square A^M = j^M(K^+)$$

A^M は Fourier 变換して、ローレンツの方程式を解いて A^M を求める。

と書くべきだ。 $j^M(K^+)$ は K^+ によって生じる current である。ここで議論する K^+ によって生じるベクトルポテンシャルの中の K^+ 散乱と計算に名づけられる進めるべきものだ。 j^M のかたちの表式は K^+ に対する transition current の類似のものであると期待される：

$$j^M(K^+) = i\epsilon [\psi_4^*(\partial^M \psi_2) - (\partial^M \psi_4^*) \psi_2]$$

このときの ψ_2, ψ_4 は K^+ の始・終状態の平面波を入れると、

$$j^M(K^+) = e N_2 N_4 (p_2 + p_4)^M e^{i(p_4 - p_2) \cdot x}$$

となる。したがって、Maxwell 方程式 $\square A^M = j^M(K^+)$ は j^M が上記で定めた形で最も簡単な A^M)

として決まる。したがって、

$$A^M = \frac{-j^M(K^+)}{g^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{← ローレンツの方程式で } j^M \text{ は} \\ \text{最も簡単な } A^M \end{array} \right)$$

$$g^M = \underline{(p_1 - p_3)^M = (p_4 - p_2)^M}$$

$$\rightarrow p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

である。運動量の保存定律

$$A^{\mu} = \frac{-j^{\mu}(k^+)}{q^2} \quad \text{and} \quad A = -i \int d^4x j^{\mu}(x^+) A^{\mu} \quad \text{の式代入で}\}$$

$\alpha \propto 1/R$ の特別な場合は

$$\begin{aligned} A_{\pi^+ k^+} &= i \int d^4x j^{\mu}(x^+) \frac{1}{q^2} j^{\mu}(k^+) \\ &= i e^2 N_1 N_2 N_3 N_4 (p_1 + p_3)_{\mu} (p_2 + p_4)^{\mu} \\ &\quad \times \frac{1}{q^2} \int d^4x e^{i(p_3 - p_1) \cdot x} e^{i(p_4 - p_2) \cdot x} \end{aligned}$$

ここで、指數関数の積合は4次元のS-関数を定義する：

$$\int d^4x e^{i(x \cdot y)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(y)$$

ここで、これは4元運動量の保存則を含んでいます。 $(p_2 + p_4)^{\mu}$ が添字で計算していることを明示的に書き下すべきです。次式を得る。

$$\begin{aligned} A_{\pi^+ k^+} &= -i N_1 N_2 N_3 N_4 (p_1 + p_3)_{\mu} \underbrace{j^{\mu\nu} (p_2 + p_4)_{\nu}}_{= (p_2 + p_4)^{\mu}} \cdot \left(-\frac{i}{q^2}\right) e^2 \\ &\quad \times \int d^4x e^{i(p_3 - p_1 + p_4 - p_2) \cdot x} \\ &= -i N_1 N_2 N_3 N_4 \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{\times e(p_1 + p_3)_{\mu} \left(-\frac{q^{\mu\nu}}{q^2}\right) e(p_2 + p_4)_{\nu}} \\ &= -i (2\pi)^4 N_1 N_2 N_3 N_4 \underbrace{\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{M_{\pi^+ k^+}} \end{aligned}$$

$\approx 2''$

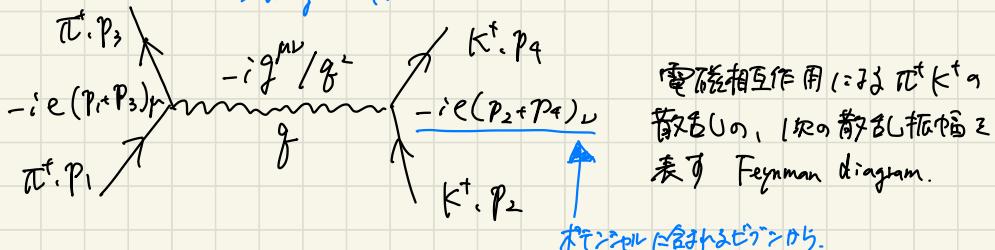
$$M_{\pi^+ k^+} = e^2 (p_1 + p_3)_{\mu} \left(\frac{-q^{\mu\nu}}{q^2}\right) (p_2 + p_4)_{\nu}$$

ここで Feynman の共役振幅を書いた。

：のところ Feynman diagram は便利な形で表される。そして、 $\text{fut} = \text{f}_{12}$
 (1<2) の 2 バルクは規則に従って行列要素と diagram を結びます = 次式。

- 各外線 (external line) について、規格化因子 N が付く。
 - 相互作用及 仮想光子 (波線) の交換について媒介子。
- ローレンツゲージ下では、photon propagator $-ig^{\mu\nu}/g^2$ について結びつけられている。
- diagram は 2つの頂点が現れたときは、 $-ie(p_1 + p_3)_\mu$ の形の因子を対応させよ。
- \Rightarrow 頂点における、光子と粒子の結合は、このオーダーには e に比例する。
 また、多くの運動量の因子は各頂点で光子と結合する前に、4元ベクトルの形で書かれてる必要がある。
- 上記の因子が何で分けられる、高次の diagram につけるべき合計を何で置くか。
 - 4元運動量の係数は常に 複数 である。 $\Rightarrow \cancel{(\pi^k)^{(4)}}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$
これを明示的に書くことはほとんどない。

\hookrightarrow diagram 中に書くことを勧める。



光子の propagator は?

$$(\text{st} : \quad f^M = \frac{-j^M(k^*)}{g^2}) \quad \text{の } f^M \text{ はローレンツゲージについての有効Tマトリクス}.$$

他のゲージでは Higgs の形の場合は異なるが、物理的な量は
 ゲージの選択方に依らない。 $\rightarrow E, B$ これが。

2nd : Feynman diagram は 2 種類の仮想光子 (virtual photon) を持つ。
 $g^2 (= g_F g^A)$ は mass squared of the virtual photon である。

この説明については次ページ。

仮想光子と呼ばれる理由と、 q^2 が 仮想光子の 2乗質量と呼ばれる理由を説明する。
現実の光子は自由場の Maxwell 方程式

$$\square A^\mu = 0$$

を満たす、平面波 $e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}$ は解となる

$$(; q_0 q^0 - \vec{q} \cdot \vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} = 0$$

$$\Rightarrow q_0 q^0 - \vec{q} \cdot \vec{q} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{q^2 = 0} \quad (q^2 = q_\mu q^\mu)$$

を満たす。これは、エネルギー-運動量の関係式 $p_\mu p^\mu = m^2 q^2$ 実光子は 0 質量であることを意味する。しかし、相互作用をする光子は

$$\square A^\mu = j^\mu$$

を満たす。しかし、 $q^2 \neq 0$ を導く。この状態を指して、相互作用をする光子は 仮想的 である。もし $q^2 < 0$ でないなら off mass shell であると呼ばれる。ところが $q^2 \neq 0$ の q^2 は 2乗質量 (mass squared) と呼ぶ。

ただし、4元運動量 (E, \vec{p}) と 時空座標を表すベクトル (t, \vec{x}) を比較する場合でも異なる。

$$\begin{array}{ll} q^2 > 0 & \cdots \text{timelike} \\ q^2 < 0 & \cdots \text{spacelike} \end{array} \quad } \quad \text{virtual photon}$$

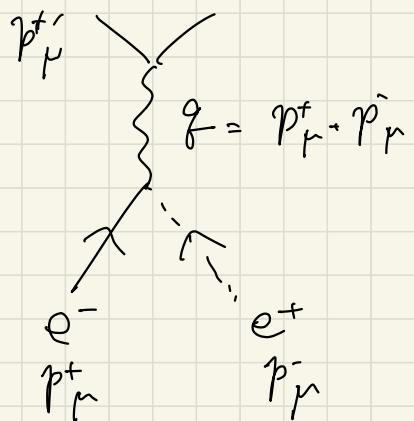
$$q^2 = 0 \quad \cdots \text{(lightlike)} \quad } \quad \text{real photon}$$

例えで、 $e^+ e^-$ の正面衝突の実験は 大きなエネルギー-運動量、運動量が 0 の 仮想光子が生じる。そのため、この光子は timelike の粒子となる。

逆に、深非弾性電子散乱においては、仮想光子は エネルギーがもたらす運動量を多く持つが、spacelike の粒子となる。

example) e^+e^-

$$q_\mu = (\omega - \omega', \vec{p} - \vec{p}')$$



○ 箱を決めて規格化する。

○ KG eq. で光子の相互作用をみて

vertex $\sim p_\mu$ が ~ 3

$\propto q_\mu = \text{ネル}$

Dirac eq. で光子の相互作用をみて

$$q_\mu = p_\mu^+ + p_\mu^-$$

○ Born 近似. , 平面波 \Rightarrow 平面波.

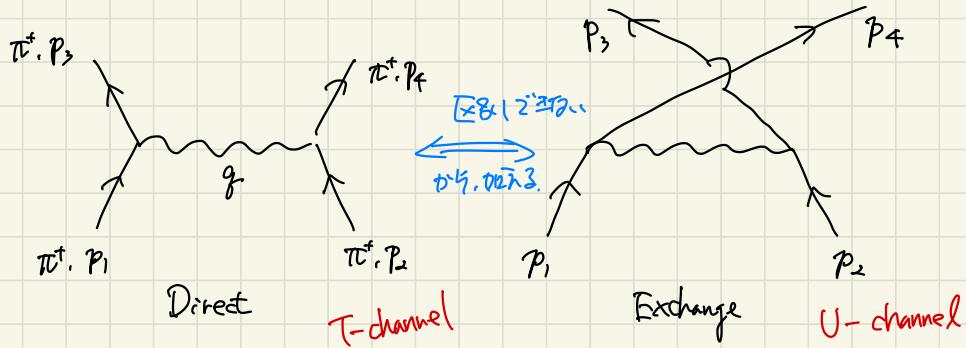
$$\left\{ \begin{array}{l} p_\mu p^\mu = m^2 \\ p_\nu p^\nu \neq m^2 \end{array} \right.$$

1.7.2 Electromagnetic $\pi^+ \pi^+$ Scattering

Feynman の 図式的ない方法の 強さは、行列要素中の 因子と ダイアグラムの 各部分とを 結ぶ 規則が とても 一般化されてること、 ダイアグラムから 行列要素へと 戻ることも 可能である こと。

- 行列要素 \Leftrightarrow ダイアグラムの 間の 対応規則 成整備されてる
- なので、 行列要素 \rightarrow ダイアグラム の逆の 操作が 可能である。

以上で $\pi^+ \pi^+$ 散乱 を用いて 説明する。 まず、 electromagnetic of first order 相互作用で 考える。 この過程には 2つの diagram の寄与がある：



ここで、 2つの 粒子は 同じ "Bosons Type" 2の ダイアグラムに 対する 扇面積は 同符号で 足し合って \rightarrow 交換の 対称性を 保つ。 \exists

$$A = A_{\text{direct}} + A_{\text{exchange}}$$

先ほどの Feynman rules を用いるべく、 $D \rightarrow \gamma^- \gamma^+$ 下で、 散乱振幅の 表式 (は $R \propto F \gamma_1 = 72.3$) :

$$A_{\pi^+ \pi^+} = -i (2\pi)^4 N_c N_s N_3 N_4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) M_{\pi^+ \pi^+},$$

$$M_{\pi^+ \pi^+} = \frac{-e^2 (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu}{(p_2 - p_4)^2} + \frac{-e^2 (p_1 + p_4)_\mu (p_2 + p_3)^\mu}{(p_2 - p_3)^2}$$

分子の δ^2 は?
 積み込みが何? //

（ 以下、 運動量の $+,-$ の 符号が どうなる? //

◎ $A_{\pi^+\pi^+}, M_{\pi^+\pi^+}$ の確率.

A_{direct}

$$\begin{aligned}
 A_{\text{direct}} &= \frac{N_c N_s N_3 N_4}{\text{normalization factor}} \cdot \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 - p_1 + p_4 - p_2)}{\text{4-momentum conserves}} \\
 &\times \left[-ie(p_1 + p_3)_\mu \right] \times \left[\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} \right] \times \left[-ie(p_2 + p_4)_\nu \right] \\
 &\xrightarrow{\pi^+: p_1 \rightarrow \pi^+: p_3 \text{ おまけ}} \xrightarrow{\text{virtual photon}} \xrightarrow{\pi^+: p_2 \rightarrow \pi^+: p_4 \text{ おまけ}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -i (2\pi)^4 N_c N_s N_3 N_4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \\
 &\times e^\mu (p_1 + p_3)_\mu - \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} (p_2 + p_4)_\nu \\
 &= -i (2\pi)^4 N_c N_s N_3 N_4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \underline{M_{\text{direct}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{M_{\text{direct}}} &= e^\mu (p_1 + p_3)_\mu - \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} (p_2 + p_4)_\nu \\
 &= \frac{-e^\mu (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\nu}{(p_2 - p_4)^\nu} \quad \left[\begin{array}{l} q^\mu = (p_1 - p_3)^\mu = (p_4 - p_2)^\mu \\ \rightarrow q_\mu q^\mu = (p_1 - p_3)^\mu = (p_4 - p_2)^\mu \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

同様に $\sim 1/2$. A_{exchange}

$$A_{\text{exchange}} = N_c N_s N_3 N_4 \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_1 + p_3 - p_2)$$

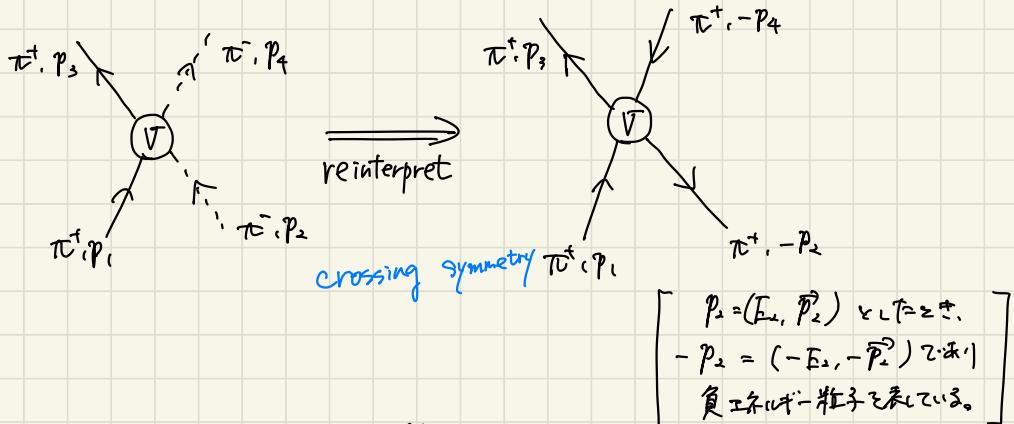
$$\times \left[-ie(p_1 + p_4)_\mu \right] \left[\frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} \right] \left[-ie(p_2 + p_3)_\nu \right]$$

$$= -i (2\pi)^4 N_c N_s N_3 N_4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \underline{M_{\text{exchange}}}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{M_{\text{exchange}}} &= \frac{-e^\mu (p_1 + p_4)_\mu (p_2 + p_3)^\nu}{(p_2 - p_3)^\nu} \quad \left[\begin{array}{l} q^\mu = (p_1 - p_4)^\mu = (p_3 - p_2)^\mu \\ \rightarrow q_\mu q^\mu = (p_1 - p_4)^\mu = (p_3 - p_2)^\mu \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

1.7.3 Electromagnetic $\pi^+\pi^-$ Scattering

次に、2つ Feynmann の方法と $\pi^+\pi^-$ 散乱に適用する。また、Stückelberg-Feynman の方法に基づき、 $\pi^+\pi^-$ の散乱の図を次のように解釈し直す。



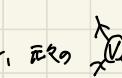
さて、左はどの $\pi^+\pi^+$ と右は 同様に並んでいくこと)

で左は π^+ の必要はない。解釈し直すことで得られた散乱は $\pi^-\pi^+$ 散乱を表していい。ただし、振幅 $A_{\pi^+\pi^-}$ は運動量を置き換えることで得られる。

$$M_{\pi^+\pi^-}(p_1, p_2, p_3, p_4) = M_{\pi^+\pi^+}(p_1, -p_4, \underbrace{p_3, -p_2}_{\text{放出}}) \quad \text{入射}$$

$$= \frac{-e^2(p_1 + p_3)_\mu(-p_4 - p_2)^\mu}{(-p_4 + p_2)^2} + \frac{-e^2(p_1 - p_2)_\mu(-p_4 + p_3)^\mu}{(p_4 + p_3)^2}$$

他の因子は変更をうけない。この方法、粒子-反粒子の振幅と対応する粒子-粒子の振幅が得る方法は、crossing symmetry といふ名前で呼ばれてる。この方法は実用上の計算においても役立つ。(Exercise 3.5(e))

$M_{\pi^+\pi^-}$ と $M_{\pi^+\pi^+}$ の頂点の因子を検証し、次の  のダイアグラムと比較する。
以上の計算で得られた $M_{\pi^+\pi^-}$ 表式から 2つのダイアグラムを再構成できる。これで、頂点同士の相対的な符号は π^+K^+ と $\pi^+\pi^-$ とで変わっていることを注意しておく。これは 同符号の電荷が反発し、異符号の電荷が引き合うという一般的な性質を反映している。

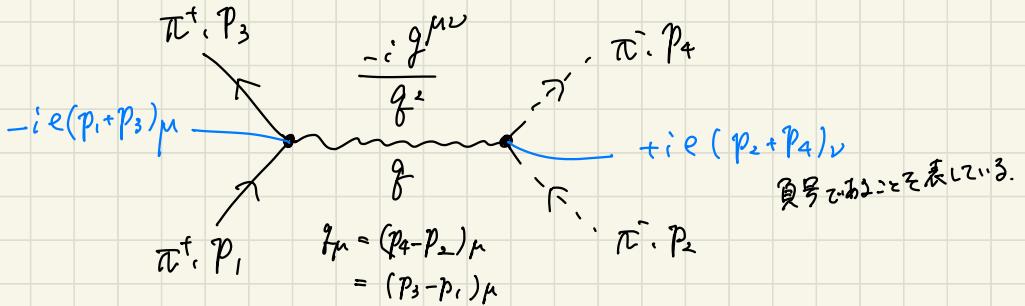
$$M_{\pi^+\pi^-}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{-e^2(p_1 + p_3)_\mu (-p_4 - p_2)^\mu}{(-p_4 + p_2)^2} + \frac{-e^2(p_1 - p_2)_\mu (-p_4 + p_3)^\mu}{(p_4 + p_3)^2}$$

① $g^2 = (-p_4 + p_2)^2$
 $= (-p_4 + p_2)_\mu (-p_4 + p_2)^\mu$ と書くと、頂点でこの因子を分解する。

$$A_{1st} = (\text{規格化}, \delta^{(4)}) \cdot [-e(p_1 + p_3)_\mu] \cdot \frac{-i g^{\mu\nu}}{g^2} \cdot [-e(p_4 + p_2)_\nu]$$

$$= (\dots) \underbrace{[-i e(p_1 + p_3)_\mu]}_{\text{図示}} \cdot \frac{-i g^{\mu\nu}}{g^2} \underbrace{[+i e(p_4 + p_2)_\nu]}_{\text{図示}}$$

と書くと、(T=2)で、 $\pi^+\pi^-$ ディアグラムを考慮したときである。



② 同様に、 $g^2 = (p_4 + p_3)_\mu (p_4 + p_3)^\mu$ と書いて 頂点の因子を分解する。

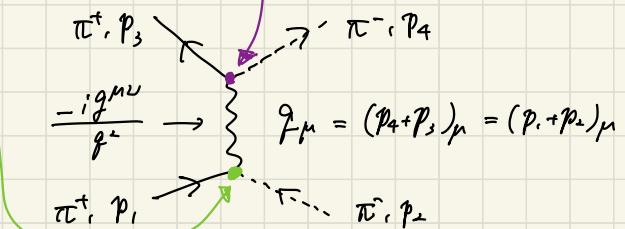
$$A_{2nd} = (\dots) \left[i e(p_1 - p_2)_\mu \cdot \frac{-i g^{\mu\nu}}{g^2} \cdot i e(-p_4 + p_3)_\nu \right] \quad (\leftarrow \text{頂点の相手の符号は} \\ \text{同じ}, (+,+), (-,-) \text{または} (-,+))$$

$$= (\dots) \underbrace{[-i e(p_1 - p_2)_\mu]}_{\text{図示}} \cdot \frac{-i g^{\mu\nu}}{g^2} \cdot \underbrace{[-i e(-p_4 + p_3)_\nu]}_{\text{図示}}$$

これは、次のππダイアグラムが書かれている。
 ここで、各頂点において電荷の符号に注意する。

$$\left[e^{-ip \cdot x} \text{粒子の入射} \right. \\ \left. (\text{放出は } (e^{-ip \cdot x})^\dagger = e^{ip \cdot x}) \right]$$

反粒子は $p \rightarrow -p$ とする。



ここで、理論と物理的な観測量に結び付いたために、私たちが得た
「伝播関数」は測定可能な物理量を構成するのに用いられなければならぬ。
たとえば、微分断面積など。

それには単純であるが、現在、教育的なギロツ文脈の中ではそれほど有益ではない。
たとえば Ch. 3 で扱うところ。

1.8 Loops, Trees, and Infinities

ここまで例えてきた ダイアグラム は議論を限定して下。高次のダイアグラムは
多くの1次で表される種類のプロセスとバージョンを組み合わせて構成する
ことができる。たとえば、2つの光子を交換するプロセスは $\propto (\propto e^4)$ に比例
し、その寄与は右下に示したように他のダイアグラムに比例して表すことができる。
これらは特に $1/\epsilon - 1/\epsilon^2$ のダイアグラムは

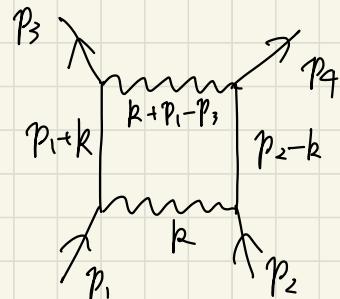
loop diagram と呼ばれる。一方で、今は

見てきたような loop を含まないものは tree diagram

と呼ばれる。多くの相互作用などで見られる tree

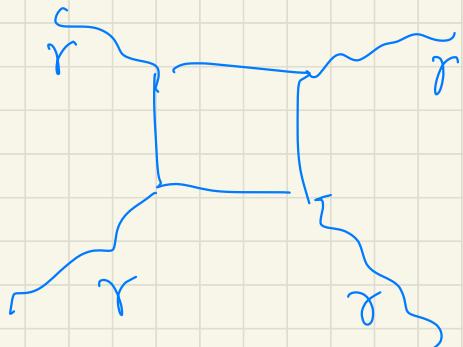
ダイアグラムがおもじよ結果を与えるため、

強い相互作用やこれに正確な結果を
望む場合には loop を含んで高次のダイアグラム
も必要となる。



このダイアグラムに対して整備された Feynman ルールは高次のダイアグラムに対しても
一般化が可能である。(しかし、ここで新たに車両が生じる。それは、外線に
対して全体の4元運動量の保存からではなく loop 内の運動量を決定せざる
問題である。つまり、各頂点での運動量保存を考えると上図のように loop
運動量 k が生じる。この k に対する全の k の積分 $\int dk$ を
含むことによって、この法則は Feynman ルールの基本のも、この方法
(不正確といふべき) が成り立つ。しかし、(これはさて) このルールの積分は発散して
しまう。つまり、1次の運動量ではよい結果を予測できる理論でも高次になると
自分自身が発散を食ってしまうのである。

この困難は renormalization と次元正則化などの方法によって解決される。



3点の相互作用の半径
z-t, tree diagram で
12の組合せ=12ループが現れる。