0.0.1 Grassmann 数の取り扱い

Grassmann 代数

数 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ が互いに反交換であるとき

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i\eta_j + \eta_j\eta_i = 0, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{0.0.1}$$

数 $\{\eta_1, \ldots, \eta_N\}$ は Grassmann 代数の生成子である，もしくは Grassmann 代数を生成するという．この反交換性から

$$\eta_i^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{0.0.2}$$

が従う．一般的な Grassmann 代数の要素 $f(\eta)$ は η_i の冪級数により定義される

$$f(\eta) = f_0 + \sum_i f_i\eta_i + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} f_{ij}\eta_i\eta_j + \cdots + f_{i\ldots N}\eta_1\cdots\eta_N. \tag{0.0.3}$$

この級数は Grassmann 数の反交換性から有限項で打ち切られることが特徴である．

例として

$$g(\eta) = e^{-\sum_{i,j=1}^N \eta_i A_{ij}\eta_j} \tag{0.0.4}$$

を考える．右辺の指数関数は級数によって定義されている．異なる Grassmann 数の二次の項は互いに交換するので[*1] $g(\eta)$ を次のように書き換えることができる

$$\begin{aligned}
g(\eta) &= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^N \eta_i A_{ij}\eta_j\right] && (0.0.6)\\
&= \exp\left(-\eta_1 A_{11}\eta_1 - \eta_1 A_{12}\eta_2 - \cdots - \eta_N A_{NN}\eta_N\right) && (0.0.7)\\
&= \exp\left(-\eta_1 A_{11}\eta_1\right)\exp\left(-\eta_1 A_{12}\eta_2\right)\cdots\exp\left(-\eta_N A_{NN}\eta_N\right) \quad (\because [\eta_i\eta_j, \eta_k\eta_l] = 0) && (0.0.8)\\
&= \prod_{i,j=1}^N e^{-\eta_i A_{ij}\eta_j} && (0.0.9)\\
&= \prod_{i,j}(1 - \eta_i A_{ij}\eta_j) && (0.0.10)\\
&= \prod_{\substack{i,j \\ i\neq j}}(1 - \eta_i A_{ij}\eta_j) \quad (\because \eta_i^2 = \eta_j^2 = 0). && (0.0.11)
\end{aligned}$$

次に $2N$ 個の Grassmann 数を考えそれらを

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_N \tag{0.0.12}$$

と書く．これらは Grassmann 代数の生成子である

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\} = \{\bar{\eta}_i, \eta_j\} = \{\eta_i, \bar{\eta}_j\} = 0. \tag{0.0.13}$$

[*1] 例えば $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$ を考えてみると

$$\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4 = -\eta_1\eta_3\eta_2\eta_4 = \eta_1\eta_3\eta_4\eta_2 = -\eta_3\eta_1\eta_4\eta_2 = \eta_3\eta_4\eta_1\eta_2 \tag{0.0.5}$$

となることから分かる．

これらの関数

$$h(\eta, \bar{\eta}) = e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} \tag{0.0.14}$$

を考えると $g(\eta)$ と同様に

$$h(\eta, \bar{\eta}) = \prod_{i,j=1}^{N} (1 - \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j) \tag{0.0.15}$$

を得る．このとき対角成分が残ること，つまり $\bar{\eta}_i A_{ii} \eta_i \neq 0$ であることが $g(\eta)$ の場合とは異なっている．

Grassmann 数の積分

Grassmann 数の積分は次の二つの要請を出発点とする[*2]

1.

$$\int d\eta_i = 0, \quad \int d\eta_i \, \eta_i = 1, \tag{0.0.16}$$

2.

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = \{\eta_i, d\eta_j\} = 0. \tag{0.0.17}$$

この定義をもとに次の積分 $I[A]$ を考える

$$I[A] \equiv \int \prod_{l=1}^{N} d\bar{\eta}_l d\eta_l e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j}. \tag{0.0.18}$$

右辺の被積分関数は次の形へ書き換えることができる

$$\begin{aligned} e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} \bar{\eta}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \eta_j \right) && (0.0.19) \\ &= \exp\left(-\bar{\eta}_1 \sum_{j=1}^{N} A_{1j} \eta_j \right) \exp\left(-\bar{\eta}_2 \sum_{j=1}^{N} A_{2j} \eta_j \right) \cdots \exp\left(-\bar{\eta}_N \sum_{j=1}^{N} A_{Nj} \eta_j \right) && (0.0.20) \\ &= \prod_{i=1}^{N} \epsilon^{-\bar{\eta}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \eta_j}. && (0.0.21) \end{aligned}$$

さらに $\bar{\eta}_i^2 = 0$ および

$$e^{-\bar{\eta}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \eta_j} = \left(1 - \bar{\eta}_i \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \eta_j \right) \tag{0.0.22}$$

より，指数関数部分は次のように展開される

$$e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j} = (1 - \bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1})(1 - \bar{\eta}_2 A_{2i_2} \eta_{i_2}) \cdots (1 - \bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}). \tag{0.0.23}$$

[*2] この要請は，多くの教科書で一致している．Rothe の “Lattice Gauge Theories An Introduction”，久後の “ゲージ場の量子論 I”,Peskin&Schroeder の “An Introduction to Quantum Field Theory”,Schwartz の “Quantum Field Theory and the Standard Model” では同様の定義を出発点として議論をしている．

ここで $i_l = 1 \ldots, N$ $(l = 1, \ldots, N)$ については和を取っている．$I[A]$ の積分速度がすべての Grassmann 数 $\eta_1, \ldots, \bar{\eta}_N$ を含むので，被積分関数としてはすべての Grassmann 数の積になっている部分だけを考えればよい[*3]．したがって考えるべき項は

$$K(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N} (-\bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1})(-\bar{\eta}_2 A_{2i_2} \eta_{i_2}) \cdots (-\bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}) \tag{0.0.24}$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N} \eta_{i_1} \bar{\eta}_1 \eta_{i_2} \bar{\eta}_2 \cdots \eta_{i_N} \bar{\eta}_N A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{Ni_N} \quad (\because \{\bar{\eta}_i, \eta_j\} = 0) \tag{0.0.25}$$

となる．ここで和の記号は $i_l = 1, \ldots, N$ についてとっている．さらに Grassmann 数の積は i_l, i_m の入れ換えについて反交換であるので，この表式は

$$K(\eta, \bar{\eta}) = \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \cdots \eta_N \bar{\eta}_N \sum_{i_1, \ldots, i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N} A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{Ni_N} \tag{0.0.26}$$

と書くことができる．ここで $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ は添え字に関して完全反対称かつ $\epsilon_{12\ldots N} = 1$ とした N 階テンソルである．実はこの和の記号の部分は行列 A の行列式の定義となっている．したがって

$$K(\eta, \bar{\eta}) = \det(A) \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \cdots \eta_N \bar{\eta}_N \tag{0.0.27}$$

を得る．最終的な積分 $I[A]$ は次のように計算される

$$I[A] = \left[\prod_{i=1}^{N} d\bar{\eta}_i d\eta_i \eta_i \, \bar{\eta}_i \right] \det(A) = \det(A). \tag{0.0.28}$$

次にこの応用として以下のような積分を考える

$$I_{i_1 \ldots i_l i'_1 \ldots i'_l}[A] \equiv \int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta) \eta_{i_1} \eta_{i_2} \cdots \eta_{i_l} \bar{\eta}_{i'_1} \bar{\eta}_{i'_2} \cdots \bar{\eta}_{i'_l} e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j}. \tag{0.0.29}$$

ここで積分測度を省略して表現するために

$$\mathcal{D}(\bar{\eta}\eta) \equiv \prod_{i=1}^{N} d\bar{\eta}_i d\eta_i \tag{0.0.30}$$

という記号を導入した．積分測度同士も反交換であるため，その順序 $d\bar{\eta}_i d\eta_i$ には注意しておく．

この積分を求めるために 2 つのステップを経由する．まず生成汎関数 $Z[\rho, \bar{\rho}]$ と呼ばれるものを導入する．次に Grassmann 数での微分を定義する．これらを用いることで，求めたい積分は生成汎関数 $Z[\rho, \bar{\rho}]$ の $\rho, \bar{\rho}$ による微分として統一的に理解される．

生成汎関数は次式で定義される

$$Z[\rho, \bar{\rho}] \equiv \int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta) e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j + \sum_{i=1}^{N} (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\eta}_i \eta_i)}. \tag{0.0.31}$$

ここで $\rho_i, \bar{\rho}_i$ は $\eta_i, \bar{\eta}_i$ とともに Grassmann 代数を生成する Grassmann 数である．$Z[\rho, \bar{\rho}]$ は次の形に書き換えることができる（証明は後述）

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \left[\int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta) e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}'_i A_{ij} \eta'_j} \right] e^{\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j}. \tag{0.0.32}$$

[*3] 例えば $\bar{\eta}_1 \eta_2 \eta_3$ のような項は $\prod_i d\bar{\eta}_i d\eta_i$ のうち $i = 1, 2, 3$ 以外の積分によってゼロとなる．

ここで A^{-1}_{ij} は A の逆行列の要素であり

$$\eta'_i = \eta_i - \sum_{k=1}^{N} A^{-1}_{ik}\rho_k, \tag{0.0.33}$$

$$\bar{\eta}'_i = \bar{\eta}_i - \sum_{k=1}^{N} \bar{\rho}_k A^{-1}_{ik} \tag{0.0.34}$$

と書いた．$\eta_i, \bar{\eta}_i \to \eta'_i, \bar{\eta}'_i$ への変数変換によって積分測度は変わらないので $[\cdots]$ の積分は

$$\int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta) e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}'_i A_{ij} \eta'_j} = \int \mathcal{D}(\bar{\eta}'\eta') e^{-\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\eta}'_i A_{ij} \eta'_j} = \det(A) \tag{0.0.35}$$

と計算される．このことから生成汎関数 $Z[\rho, \bar{\rho}]$ は

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det(A) e^{\sum_{i,j=1}^{N} \bar{\rho}_i A^{-1}_{ij} \rho_j} \tag{0.0.36}$$

と書くことができる．

次に Grassmann 数の（偏）微分を導入する．そのために次の要請をおく．

1. $f(\eta)$ が η_i に依存していないときは

$$\partial_{\eta_i} f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta) = 0. \tag{0.0.37}$$

2. $f(\eta)$ が η_i に依存するときは，Grassmann 数の反交換関係を用いて η_i を一番左へ移し，左から作用する微分（左微分）を次で定義する

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_i = 1. \tag{0.0.38}$$

同様に右からの微分（右微分）は次で定義する

$$\eta_i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_i} = 1. \tag{0.0.39}$$

このとき

$$\int d\eta_i f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta) \tag{0.0.40}$$

が成立する．つまり積分と微分の演算は Grassmann 数においては等価な操作となる．また Grassmann 数の反交換関係を用いることで

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} f(\eta) = 0 \tag{0.0.41}$$

であることも確認できる．$Z[\rho, \bar{\rho}]$ の計算の準備として具体例を二つ見ておく．$\eta_j, \bar{\rho}_j$ を Grassmann 代数の生成子として $E(\bar{\rho}) = e^{-\sum_{j=1}^{N} \bar{\rho}_j \eta_j}$ を考える．$\eta_j, \bar{\rho}_j$ が通常の c-数であれば $\bar{\rho}_i$ での微分は

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} E(\bar{\rho}) = \eta_i E(\bar{\rho}) \tag{0.0.42}$$

である．Grassmann 数の場合は

$$E(\bar{\rho}) = \prod_{j=1}^{N} (1 + \bar{\rho}_j \eta_j), \tag{0.0.43}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} E(\bar{\rho}) = \eta_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) \tag{0.0.44}$$

となる．このとき右辺の相乗には $(1+\bar{\rho}_i\eta_i)$ を加えてもよい．同様に右部分の例もみておくと

$$e^{\sum_{j=1}^N \bar{\eta}_j\rho_j}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_i} = \bar{\eta}_i e^{\sum_{j=1}^N \bar{\eta}_j\rho_j} \tag{0.0.45}$$

が得られる[*4]．

ここまでの生成汎関数の定義と Grassmann 数の微分の定義から，はじめに求めたかった積分 I は $A[\rho,\bar{\rho}]$ を用いて

$$I_{i_1\dots i_l i'_1\dots i'_l}[A] = \left[\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_l}}Z[\rho,\bar{\rho}]\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_1}}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_2}}\cdots\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_l}}\right]\Bigg|_{\rho=\bar{\rho}=0} \tag{0.0.46}$$

と書ける．生成汎関数 $Z[\rho,\bar{\rho}]$ の具体的な表式を用いてこの微分を計算する．$Z[\rho,\bar{\rho}]$ は

$$\begin{aligned}
Z[\rho,\bar{\rho}] &= \det(A)\prod_{i=1}^N e^{\bar{\rho}_i\sum_{j=1}^N A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.47)\\
&= \det(A)(1+\bar{\rho}_1)(1+A^{-1}_{1j_1}\rho_{j_1})(1+\bar{\rho}_2)(1+A^{-1}_{2j_2}\rho_{j_2})\cdots(1+\bar{\rho}_N)(1+A^{-1}_{Nj_N}\rho_{j_N}) && (0.0.48)\\
&= \det(A)(1+A^{-1}_{1j_1}\rho_{j_1}+\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_1A^{-1}_{1j_1}\rho_{j_1})\cdots(1+A^{-1}_{Nj_N}\rho_{j_N}+\bar{\rho}_N+\bar{\rho}_NA^{-1}_{Nj_N}\rho_{j_N}) && (0.0.49)
\end{aligned}$$

と展開できる．ここで $j_k=1,\dots,N$ $(k=1,\dots,N)$ に関して和を取っている．

I を計算するとき $\bar{\rho}_{i_l},\rho_{i'_l}$ での微分をとったあとに $\rho=\bar{\rho}=0$ とする．このことを考えると，最終結果に寄与するのは $\bar{\rho}_{i_l},\rho_{i'_l}$ の積の部分のみである．これを取り出し，改めて $\tilde{Z}[\rho,\bar{\rho}]$ と書く

$$\tilde{Z}[\rho,\bar{\rho}] = \det(A)\sum_{\{k_i\}'}\bar{\rho}_{i_1}A^{-1}_{i_1k_1}\rho_{k_1}\cdots\bar{\rho}_{i_l}A^{-1}_{i_lk_l}\rho_{k_l}. \tag{0.0.50}$$

和の記号に含まれる $\{k_i\}'$ は $\{k_i\}=(k_1,\dots,k_l)$, $k_i=1,\dots,N$ の全ての組み合わせのうち，$k_i=i'_l\dots,i'_l$ かつ $k_i\neq k_j$, $(i,j=1,\dots,l)$ のものに対して和を取るという意味である．具体的に書き下せば

$$\begin{aligned}
\sum_{\{k_i\}'}\bar{\rho}_{i_1}A^{-1}_{i_1k_1}\rho_{k_1}\cdots\bar{\rho}_{i_l}A^{-1}_{i_lk_l}\rho_{k_l} &= \underbrace{\bar{\rho}_{i_1}A^{-1}_{i_1i'_1}\rho_{i'_1}\bar{\rho}_{i_2}A^{-1}_{i_2i'_2}\rho_{i'_2}\bar{\rho}_{i_3}A^{-1}_{i_3i'_3}\rho_{i'_3}\cdots\bar{\rho}_{i_l}A^{-1}_{i_li'_l}\rho_{i'_l}}_{\{k_i\}=(i'_1,i'_2,i'_3,\dots,i'_l)} && (0.0.51)\\
&\quad+\underbrace{\bar{\rho}_{i_1}A^{-1}_{i_1i'_2}\rho_{i'_2}\bar{\rho}_{i_2}A^{-1}_{i_2i'_1}\rho_{i'_1}\bar{\rho}_{i_3}A^{-1}_{i_3i'_3}\rho_{i'_3}\cdots\bar{\rho}_{i_l}A^{-1}_{i_li'_l}\rho_{i'_l}}_{\{k_i\}=(i'_2,i'_1,i'_3,\dots,i'_l)} && (0.0.52)\\
&\quad+\cdots && (0.0.53)\\
&\quad+\underbrace{\bar{\rho}_{i_1}A^{-1}_{i_1i'_l}\rho_{i'_l}\bar{\rho}_{i_2}A^{-1}_{i_2i'_{l-1}}\rho_{i'_{l-1}}\cdots\bar{\rho}_{i_{l-1}}A^{-1}_{i_{l-1}i'_2}\rho_{i'_2}\bar{\rho}_{i_l}A^{-1}_{i_li'_1}\rho_{i'_1}}_{\{k_i\}=(i'_l,i'_{l-1},\cdots,i'_2,i'_1)} && (0.0.54)
\end{aligned}$$

を表している．この和は $(i'_1,i'_2,\dots,i'_l)$ の全ての置換についての和となっているので，置換 P を

$$P:\begin{pmatrix} i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_l\\ i'_{P_1} & i'_{P_2} & \cdots & i'_{P_l}\end{pmatrix} \tag{0.0.55}$$

として $\tilde{Z}[\rho,\bar{\rho}]$ は

$$\tilde{Z}[\rho,\bar{\rho}] = \det(A)\sum_P A^{-1}_{i_1i'_{P_1}}\cdots A^{-1}_{i_li'_{P_l}}\bar{\rho}_{i_1}\rho_{i'_{P_1}}\bar{\rho}_{i_2}\rho_{i'_{P_2}}\cdots\bar{\rho}_{i_l}\rho_{i'_{P_l}} \tag{0.0.56}$$

[*4] 微分の結果 $\bar{\eta}_i$ が前にあることが気になるかもしれないが $\bar{\eta}_j\rho_j$ が他の Grassmann 数と交換することから，$\bar{\eta}_i$ の位置は前でも後ろでもよい．

と書ける．このときの和は全ての置換 P に対してとっている[*5]．この和の形は Grassmann 数が反交換であることを用いると

$$F_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i'_1 i'_2 \dots i'_l}(\rho, \bar{\rho}) \equiv \bar{\rho}_{i_1}\rho_{i'_1}\bar{\rho}_{i_2}\rho_{i'_2}\cdots\bar{\rho}_{i'_l}\rho_{i'_l} \tag{0.0.58}$$

を定義することで

$$\tilde{Z}[\rho, \bar{\rho}] = \det(A)\left[\sum_P (-1)^{\sigma_P} A^{-1}_{i_1 i'_{P_1}} \cdots A^{-1}_{i_l i'_{P_l}}\right] F_{i_1 i_2 \dots i_l}^{i'_1 i'_2 \dots i'_l}(\rho, \bar{\rho}) \tag{0.0.59}$$

と書ける．ここで $(-1)^{\sigma_P}$ は置換の符号関数と呼ばれ，置換 P が偶置換であれば $+1$, 奇置換であれば -1 を与える[*6]．

これで生成汎関数（のうち微分で残る寄与を持つ）$\tilde{Z}[\rho, \bar{\rho}]$ の表式が求められた．これに微分を作用させることで

$$\begin{aligned}
I_{i_1 \dots i_l i'_1 \dots i'_l}[A] &= \int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta)\eta_{i_1}\eta_{i_2}\cdots\eta_{i_l}\bar{\eta}_{i'_1}\bar{\eta}_{i'_2}\cdots\bar{\eta}_{i'_l} e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j} && (0.0.60)\\
&= \left.\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_1}}\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}_{i_l}} Z[\rho, \bar{\rho}] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_1}}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_2}}\cdots\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\rho_{i'_l}}\right]\right|_{\rho=\bar{\rho}=0} && (0.0.61)\\
&= \xi_l \det(A)\sum_P (-1)^{\sigma_P} A^{-1}_{i_1 i'_{P_1}} \cdots A^{-1}_{i_l i'_{P_l}}, \quad \xi_l \equiv (-1)^{l(l-1)/2} && (0.0.62)
\end{aligned}$$

を得る．ξ_l は Grassmann 数 $\bar{\rho}_{i_l}\rho_{i'_l}$ の入れ替えから生じるマイナスを集めたものである[*7]．

ここで導いた公式

$$\begin{aligned}
I_{i_1 \dots i_l i'_1 \dots i'_l}[A] &= \int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta)\eta_{i_1}\eta_{i_2}\cdots\eta_{i_l}\bar{\eta}_{i'_1}\bar{\eta}_{i'_2}\cdots\bar{\eta}_{i'_l} e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j} && (0.0.63)\\
&= \xi_l \det(A)\sum_P (-1)^{\sigma_P} A^{-1}_{i_1 i'_{P_1}} \cdots A^{-1}_{i_l i'_{P_l}}, \quad \xi_l \equiv (-1)^{l(l-1)/2} && (0.0.64)
\end{aligned}$$

は Grassmann 数を扱う際に有用なものである．最も簡単な $l = 1$ の場合は次の結果を与える

$$\int \mathcal{D}(\bar{\eta}\eta)\eta_i\bar{\eta}_j e^{-\sum_{i,j=1}^N \eta_i A_{ij}\eta_j} = \det(A)A^{-1}_{ij}. \tag{0.0.65}$$

このとき $i_1 \to i,\ i'_1 \to j$ として上記の公式を適用した．より一般の相関関数への応用ついては Rothe の p.30-p.31 に説明が詳しい．必要になった際に再び参照する．

[*5] 「全ての置換 P についての和」とは，たとえば置換 P が

$$P : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \tag{0.0.57}$$

で与えられたとき $(i, j, k) = (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$ という i, j, k の組すべてに対する和をとることを意味する．つまり置換 P の上段は固定された数であり，下段の値を変えたものに対して和を取るという意味である．

[*6] σ_P は置換 P の転倒数と呼ばれる．与えられた置換を昇順に並べ替えるときに数字を入れ換えた数である．偶置換であれば偶数，奇置換であれば奇数となる．

[*7] 例えば $\bar{\rho}_1\rho_1\bar{\rho}_2\rho_2\bar{\rho}_3\rho_3$ を微分するには左側に $\bar{\rho}_i$ を右側に ρ_i を集める必要がある．最終的に $\bar{\rho}_1\bar{\rho}_2\bar{\rho}_3\rho_1\rho_2\rho_3$ にするのに必要な入れ換えは 3 回 $(= 3 \cdot 2/2 = 3)$ である．同様に $\prod_{i=1}^l \bar{\rho}_i\rho_l$ の場合，入れ換えの総数は $l(l-1)/2$ 回となる．

省略した証明

$$
\begin{aligned}
& e^{-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\eta}'_i A_{ij}\eta'_j} e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.66)\\
&= e^{-\sum_{i,j=1}^{N}(\bar{\eta}_i-\sum_{k=1}^{N}\bar{\rho}_k A^{-1}_{ki})A_{ij}(\eta_j-\sum_{l=1}^{N}A^{-1}_{jl}\rho_l)} e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.67)\\
&= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{N}\left(\bar{\eta}_i-\sum_{k=1}^{N}\bar{\rho}_k A^{-1}_{ki}\right)\left(A_{ij}\eta_j-\sum_{l=1}^{N}A_{ij}A^{-1}_{jl}\rho_l\right)\right] e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.68)\\
&= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j+\sum_{i,j,l=1}^{N}\bar{\eta}_i A_{ij}A^{-1}_{jl}\rho_l+\sum_{i,j,k=1}^{N}\bar{\rho}_k A^{-1}_{ki}A_{ij}\eta_j-\sum_{i,j,k,l=1}^{N}\bar{\rho}_k A^{-1}_{ki}A_{ij}A^{-1}_{jl}\rho_l\right] e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j}\\
&= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j+\sum_{i,l=1}^{N}\bar{\eta}_i\delta_{il}\rho_l+\sum_{j,k=1}^{N}\bar{\rho}_k\delta_{kj}\eta_j-\sum_{j,k,l=1}^{N}\bar{\rho}_k\delta_{kj}A^{-1}_{jl}\rho_l\right] e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.69)\\
&= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j+\sum_{i=1}^{N}\bar{\eta}_i\rho_i+\sum_{j=1}^{N}\bar{\rho}_j\eta_j-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j\right] e^{\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\rho}_i A^{-1}_{ij}\rho_j} && (0.0.70)\\
&= \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{N}\bar{\eta}_i A_{ij}\eta_j\right]\exp\left[\sum_{i=1}^{N}(\bar{\eta}_i\rho_i+\bar{\rho}_i\eta_i)\right]. && (0.0.71)
\end{aligned}
$$