Chapter 5

Symmetry and Group theory

Ch.5 Symmetry and Group Theory.

5.1.1 Basic Principle.

群Gとは、積演算$(\cdot)$が定義され、以下の性質を満たす集合である。

1. x, yがGに含まれるとき、$x\cdot y$もGの要素。
2. 任意のGの要素xに対して、$e\cdot x = x\cdot e = x$を満たす要素eがGに含まれる。
   このときのeのことを単位元と呼ぶ。
3. Gに含まれる全てのxに対して、逆元x^{-1}が存在する。逆元とは$x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1} = e$を満たす要素のこと。
4. 積は結合法則を満たす：$x.y.z \in G$に対し、$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

(注) 積演算とは通常のかけ算ではなく、要素を組み合わせるときのルールのこと。
結合則は定義から要請されるが、交換則を満たすことは要請されない。

$\Rightarrow$
- 要素同士が積に関して交換する $\Longrightarrow$ Abelian
- 〃 交換しない $\Longrightarrow$ non-Abelian

群の要素の数 … order (位数)
- 有限 … 離散群
- 無限 … 連続群

連続的に変化するパラメータαによって群の要素がラベルされるとき、連続群と呼ぶ。

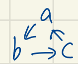
連続パラメータが1つではなく、複数の場合：$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$のとき、
$\Rightarrow$ n-パラメータ群と呼ぶ。

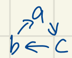
例) 置換群 S_n

例として a, b, c 3つの要素の置換について考える。これは $3! = 6$ 通りの独立な並べ替えの方法が存在する.

1. $(\ ) \equiv 1$: $(abc) \to (abc)$
2. (12) : $(abc) \to (bac)$
3. (23) : $(abc) \to (acb)$
4. (13) : $(abc) \to (cba)$
5. (321) : $(abc) \to (cab)$
6. (123) : $(abc) \to (bca)$

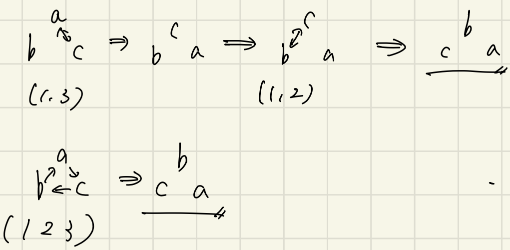
2.〜4. 3つのうち、2つの要素を交換.

5. サイクリックな置換 

6. 反サイクリックな置換 

これらの操作の間に積 A·B を定義する. この積は順番が意味をもち、Bの置換の後にAの置換を実行するものとして定義する.

$$(12)\cdot(13) = (123)$$

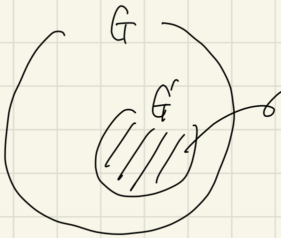


$\Rightarrow (1,2)\cdot(1,3) = (123).$

ここでは全てを示さないが、任意の組み合わせも6個のうちのどれかの操作に一致する.
単位元の存在 ($= (\ ) \equiv I$), 逆元の存在も確認できる.

5.1.2 Subgroups.

群を構成している要素の中で、いくつかの部分集合が同じ積演算の下で群の定義を満たすことも考えられる。
そのような部分集合のことを"部分群"と呼ぶ。



この中で G と同じ積演算の下、群の定義を満たす。
⇒ G の部分群

例) 実数の集合
実数は和に関して群をなす。0を含む整数の集合は実数の部分集合であり、和に関して群をなすので実数の部分群となっている。

例) 置換群 S_3
置換群 S_3 の要素のうち、$\{1, (12)\}$, $\{1, (23)\}$ などは置換群 S_2 をなす。これは S_3 の部分群である。他にも $A_3 = \{1, (123), (321)\}$ も群の構造をもつ。

Exercise 5.2
位数が2の群の積表は次のようになる。

	e	a
e	e	a
a	a	$a^2 = e$

位数が2の群はこのような積表を書くことができる。

逆元が自分自身

Exercise 5.3

S_3の要素について積表 A·B をつくる.

A \ B	$\mathbb{1}$	(12)	(23)	(31)	(321)	(123)
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	(12)	(23)	(31)	(321)	(123)
(12)	(12)	$\mathbb{1}$	(321)	(123)	(23)	(31)
(23)	(23)	(123)	$\mathbb{1}$	(321)	(13)	(12)
(31)	(31)	(321)	(123)	$\mathbb{1}$	(12)	(23)
(321)	(321)	(31)	(12)	(23)	(123)	$\mathbb{1}$
(123)	(123)	(23)	(31)	(12)	$\mathbb{1}$	(321)

$(31)\cdot(23) = (123)$

$(23)\cdot(31) = (321)$

なので <u>non-Abelian</u>

違うので
非アーベル

Abel群.

5.1.3 Isomorphism and Representations

2つの群 $G(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$, $G'(\alpha_1',\dots,\alpha_N')$ が積表において互いの要素を対応づけることができる場合、これら2つの群は準同型であると呼び、要素の間の対応が1対1のとき、同型であるという。

例) 行列群

置換群の対象をベクトルとして $(a.b.c)$ のように書けば、次の6つの行列は置換群 S_3 の要素と1対1に対応する。

$$D(1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D(12)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D(13)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$D(23)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D(321)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D(123)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

つまり、$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ に対する $D(12)$ の積(←これは行列の意味での積)が (abc) に対する (12) に対応する。したがって、(abc) に対する置換と行列のかけ算が一対一に対応する。このときの、行列 D のことを置換群 S_3 の表現と呼ぶ。

ここからは群は表現行列で扱っていく。群論の強みはここにあり、任意の表現の性質は抽象的な群の構造から決められる。

群の表現の次元は、表現行列の大きさに等しい。逆に、表現行列が $N\times N$ 行列のとき、N 次元表現と呼ばれる。

群の元と表現行列が1対1に対応している表現のこと。

また、群の基本表現とは、忠実な表現のうち最も次元の低い表現のことである。

5.1.4 Reducible and Irreducible Representations.

量子力学的な演算子の行列の要素は基底の取り方によって変わる。 ⇒ 群の表現はユニークではない。

ある群に対し、2つの異なる表現 D, D' があったとする。この2つが相似変換

$$D'(x) = S D(x) S^{-1}$$

$$\phi' = S \phi$$ ← 相似変換は基底も変換される。

によって関係付けられるとき、D と D' は同値であるという。

可約 … 相似変換により D' がブロック対角化されるとき D は可約(reducible)表現と呼ぶ。

$$D'(x) = S D(x) S^{-1} = \begin{pmatrix} D'_1(x) & & & \\ & D'_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ & & & D'_k(x) \end{pmatrix}$$

それぞれの表現が作用する表現空間

既約 … 可約ではない表現のことを既約表現と呼ぶ。

可約な表現はより次元の低い既約表現の直和として表すことができる。

5.2 Lie Groups and Lie Algebras.

Lie groups について見ていく。リー群の目的は、群の要素を有限個のパラメータでラベルし、積をパラメータについても滑らかにつなぐことである。

1-パラメータ 群 $G(\alpha)$ は次式を満たす

$$G(a) \cdot G(b) = G(c)$$

このとき、a, b, c はパラメータ α のある特定の値。c は a, b の解析関数であってもよい。

コンパクト Lie群 はいくつかの特徴をもつ。

→ パラメータの変域が有限であるもの、という認識でよい。

- (i) 任意のコンパクト Lie群の表現は ユニタリー演算子 の表現に等価。⇒ ユニタリ演算子だけを考えればよい。
- (ii) Lie群の多くの局所的性質は、単位元の周りでの無限小変位による要素を考えればよい。

そして、これらの関係は Lie algebra によって定められる。

5.2.1 Commutator Algebra.

コンパクト Lie 群は常にユニタリー演算子によって表わされる。そこで、N-パラメータ Lie群を表す記法として、$U(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ を用いる。

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = e^{i\alpha_1 X_1 + i\alpha_2 X_2 + \dots + i\alpha_N X_N} \equiv e^{i\alpha_a X_a}$$

$(X_a)^\dagger = X_a$ なので $(e^{i\alpha_a X_a})^\dagger = e^{-i\alpha_a X_a}$ より $U^\dagger = U^{-1}$

このとき、a については和をとり、X_a は互いに線形独立なエルミート演算子である。
$\alpha_a X_a$ のすべての組み合わせの集合は線形ベクトル空間を張る。また、X_a はその空間の基底となる。
⇒ X_a : 生成子
生成子は Lie群の独立なパラメータの数だけある。

N-パラメータ Lie群 の特徴： N 個の群の生成子 X_a が交換関係を満たすこと。

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c$$

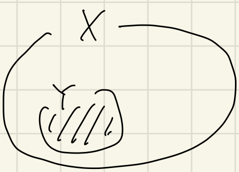
これは、2つの生成子の交換関係も何か別の生成子の線形結合で表せる。
ことを意味する。このようなは、交換関係まで含めて生成子の線形結合で表せる
ベクトル空間のことを「Lie Algebra」と呼ぶ。

また、複素数 f_{abc} のことを構造定数と呼ぶ。
このとき、構造定数は群に対してユニークに決まらない。しかし、一度生成子の基底を決めたら
対応する f_{abc} は一意に決まる。そして、これは単位元近くの群の局所的性質により決定される。

構造定数を決めることは、離散群でいうところの積表を決めることに対応する。
また、Lie群をLie代数を決めることにより定義する。この方法の方が物理的な応用が広い。

5.2.2. Simple and Semisimple Lie Groups

群の生成子の部分集合のうち、全体の元との交換関係が部分集合の元だけの
線形結合で表せるとき(もしくはゼロ)、この部分代数を不変部分代数と呼ぶ。
= イデアル

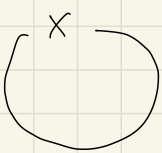


$x \in X$, $y \in Y$ のとき

$[x, y] \in Y$

このような関係をみたす y の集合を不変部分代数と呼ぶ。

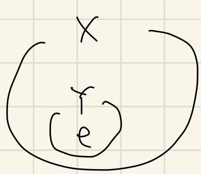
※ すべての代数は2つの自明な部分代数をもつ: 全体, 単位元.



X自身はXの部分代数.

$\Leftrightarrow x_1, x_2 \in X$

$\Rightarrow [x_1, x_2] \in X$

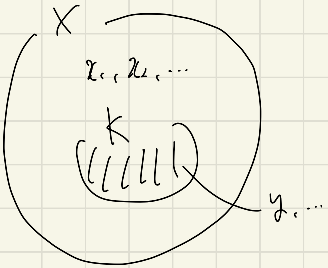


$e \in Y$

$\Rightarrow [e, e] = 0 = 0 \cdot e$

Lie代数のイデアル K とは、Kに含まれる任意の元とLie代数全体の"すべての元"との交換関係が Kに含まれるような部分代数のこと。

$$^\forall x \in X \text{ and } y \in K, \quad [x, y] \in K.$$



$$[x_i, y] \in K, \quad y \in K.$$

非可換 Lie代数のうち、非自明な不変部分代数を持たない $\Longrightarrow$ 単純代数

(対応する群のことを単純群と呼ぶ)

全ての生成子と可換な生成子からなる部分代数
$\Longrightarrow$ Abelian 不変部分代数

Abelian 不変部分代数を含まない代数
$\Longrightarrow$ 半単純(Lie代数)

対応するLie群を半単純Lie群と呼ぶ。

半単純Lie代数に対する構造定数は non-zeroなので、情報を多く含む。

5.2.3 Direct Product Groups

群 G が部分群 H_1, H_2 の直積であるとは次のことを指す.

1. H_1 のすべての要素が H_2 のすべての要素と可換である.
2. すべての G の要素 g が H_1, H_2 の要素 h_1, h_2 の積 $g = h_1 h_2$ として一意に表せる.

このとき, $G = H_1 \times H_2$ と書き, G は H_1 と H_2 の直積であるという。

5.2.4 Structure Constants and Adjoint Representation

交換子はその定義から $[A, B] = -[B, A]$ を満たす.
なので, 次の Jacobi identity を満たす。

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

また, 構造定数は次の関係をみたす:

$$f_{bac} = -f_{abc}$$

$$f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0$$

さらに, コンパクトな半単純群に対しては f_{abc} は完全反対称 (添字の入れ換えについて).
このとき, 行列 T_a の集合を考え, その行列要素を

$$(T_a)_{bc} \equiv -i f_{abc}$$

で定義すると, T_a は群と同じ代数を満たす

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

T_a は随伴表現と呼ばれるもう1つの群の表現であり, 行列の大きさは生成子の数に等しい。

Exercise 5.4

2次元回転は 2x2の行列表現で

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と表せる. $\theta = 0$の単位元の周りでは,

$$U(\theta) \simeq \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と展開できて, 生成子が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の1-パラメータ Lie 群となる.

○ 積

$$U(\theta_1)U(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ -\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \\ -\sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= U(\theta_1+\theta_2)$$

○ 単位元

$$U(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

○ 逆元

$$U(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Exercise 5.5

(a) $[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c$, $[A, B] = -[B, A]$, ヤコビの恒等式から

$\left.\begin{array}{l} f_{bac} = -f_{abc} \\ (f\text{についてのヤコビ恒等式}) \end{array}\right\}$ を導く。

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad 、 \quad [X_b, X_a] = i f_{bac} X_c$$

一方、交換子について、$[X_a, X_b] = -[X_a, X_b]$ なので

$$i f_{abc} X_c = [X_a, X_b] = -[X_b, X_a] = -i f_{bac} X_c$$

$$\Rightarrow \quad i(f_{abc} + f_{bac}) X_c = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{f_{abc} = -f_{bac}} \,/\!/$$

ヤコビ恒等式に代入していくと、

$$[A, B] = i f_{abd} D$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
[[A, B], C] &= [i f_{abd} D, C] \\
&= i f_{abd} [D, C] \\
&= i f_{abd} \cdot i f_{dce} E \\
&= \underline{f_{abd} f_{cde} E} \,/\!/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[B, C], A] &= [i f_{bcd} D, A] \\
&= i f_{bcd} [D, A] \\
&= i f_{bcd} \cdot i f_{dae} E \\
&= \underline{f_{bcd} f_{ade} E} \,/\!/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[[C, A], B] &= [i f_{cad} D, B] \\
&= i f_{cad} [D, B] \\
&= i f_{cad} \cdot i f_{dbe} E \\
&= \underline{f_{cad} \cdot f_{bde} E} \,/\!/
\end{aligned}$$

和を考えて、

$$\underbrace{f_{abd} f_{cde} E + f_{bcd} f_{ade} E + f_{cad} f_{bde} E}_{=0}$$

$$(f_{abd} f_{cde} + f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde}) E = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{f_{bcd} f_{ade} + f_{abd} f_{cde} + f_{cad} f_{bde} = 0} \,/\!/$$

が成り立つ。

$$(T_a)_{bc} = -if_{abc}$$

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$$

$$\Rightarrow (T_a)_{cd}(T_b)_{de} - (T_b)_{cf}(T_a)_{fe}$$

$$= -if_{acd}\cdot(-if_{bde}) - (-if_{bcf})(-if_{afe})$$

$$= -f_{acd}f_{bde} + f_{bcf}f_{afe}$$

$$= f_{cad}f_{bde} + f_{bcf}f_{afe}$$

$$= -f_{abd}f_{cde}$$

$$= if_{abd}\cdot if_{cde}$$

$$= if_{abd}\cdot(-if_{dce})$$

$$= if_{abd}(T_d)_{ce}$$

$$\therefore\ [T_a, T_b]_{ce} = if_{abd}(T_d)_{ce}$$

$$\Rightarrow\ \underline{[T_a, T_b] = if_{abd}T_d}$$

となり，群と同じ代数を満たすことが分かる。

(b)

$$U(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = e^{i\alpha_1 X_1 + i\alpha_2 X_2 + \cdots + i\alpha_N X_N}$$
$$\simeq \left(1 + \sum_a i\alpha_a X_a\right)$$
$$U^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = e^{-(i\alpha_1 X_1 + \cdots + i\alpha_N X_N)}$$
$$\simeq \left(1 - \sum_a i\alpha_a X_a\right)$$

$$U(\beta) \simeq \left(1 + \sum_b i\beta_b X_b\right)$$
$$U^{-1}(\beta) \simeq \left(1 - \sum_b i\beta_b X_b\right)$$

$$U^{-1}(\alpha) U^{-1}(\beta) U(\alpha) U(\beta)$$
$$\simeq \left(1 - \sum_{a_1} i\alpha_{a_1} X_{a_1}\right)\left(1 - \sum_{b_1} i\beta_{b_1} X_{b_1}\right)\left(1 + \sum_{a_2} i\alpha_{a_2} X_{a_2}\right)\left(1 + \sum_{b_2} i\beta_{b_2} X_{b_2}\right)$$

1パラメータの場合を考えると

$$= (1 - i\alpha X)(1 - i\beta Y)(1 + i\alpha X)(1 + i\beta Y)$$

$$\simeq 1 \cancel{- i\alpha X} \cancel{- i\beta Y} \cancel{+ i\alpha X} \cancel{+ i\beta Y}$$
$$\cancel{+ i^2\alpha\beta XY} - i^2\alpha^2 XX \cancel{- i^2\alpha\beta XY}$$
$$- i^2\alpha\beta YX - i^2\beta^2 YY + i^2\alpha\beta XY$$

$$\simeq 1 + \alpha\beta(YX - XY) = 1 + i \cdot i\alpha\beta(XY - YX)$$

$$\equiv U(\gamma) = 1 + \gamma i Z$$

$$\Rightarrow [X, Y] = i f_{abc} Z$$

と書くことができる。 $\Longrightarrow$ $e^{i\alpha X}$ としたXは $[X, Y] \propto Z$ をみたす

ということ。

5.3 Unitary Symmetries

一番の目的は Lie 群のうちの SU(N) 群。

SU(2) の群の要素が N×N のユニタリー行列.
〃 生成子 N^2-1 コの エルミート.

生成子の数 = adjoint の次元.

対応する基本表現は, $\boxed{N^2-1 \text{ 個}}$の 行列式が 1 の $N\times N$ ユニタリー行列.

[$U(N) \to N\times N$ ユニタリー行列, S : special の頭文字で、行列式が 1 の意味.]

これらの群は 単連結で コンパクト, N^2-1 個の 実パラメータをもつ。

追記

- $SU(N)$ は N^2-1 個の生成子 X_a によって特徴付けられる.
- 実数パラメータは N^2-1 個.
- 群の要素 : 基本表現 → $N\times N$ ユニタリー行列, ∞ 個
  随伴表現 → $(N^2-1)\times(N^2-1)$ ユニタリー行列, ∞ 個
- 生成子 : 基本表現 → $N\times N$ エルミート 行列 , N^2-1 個
  随伴表現 → $(N^2-1)\times(N^2-1)$ エルミート行列 , N^2-1 個
- 作用するベクトル空間 (= 表現空間) ⟶ (N^2-1) 次元の ベクトル空間.

※ $N\times N$ の複素行列は $2N^2$ 個のパラメータをもつ.
　ユニタリー性 : $U^\dagger U = 1$ が N^2 個の 束縛条件
　$\det U = 1$: 行列式 が 1 であることが 1つの 束縛条件
を 与えるので, 残る自由度 $= 2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1$ となる.
　コンパクト : パラメータの変域が有限
　連結 : 任意の元が連続的に単位元に移ることができる.

群の要素は $U = e^{i\alpha X}$ $\left(= e^{i\alpha_a X_a}\right)$ の形で書かれる。

多くの場合、群は $U(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ の形ではなく、 トレースレス・エルミートな生成子 X_a と その代数 を 示す形で 表される。

群 $\not\longrightarrow$ $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N) = e^{i\alpha_a X_a}$

↕ 　　　　こっちを示すことが多い。　　　　↕

群のLie代数 ⟶ X_a, $[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c$ 　$\left(X_a^\dagger = X_a,\ \mathrm{tr}\, X_a = 0 \right)$

5.3.1 U(1) Symmetries.

U(1) 対称性は最も単純なユニタリー対称性.

生成子として1つの定数をとる. ⇒ J (時空に依存しないという意味で定数)

このとき、Lie 群は 1-パラメータの大域的位相変換になる:

$$U(\theta) = e^{iJ\theta}$$

θ: 実変数のパラメータ (0〜2π ですべての群を表せるのでコンパクト.)

また、Abel 群となっている. $\left[U(\theta_1)U(\theta_2) = e^{iJ\theta_1}e^{iJ\theta_2} = e^{iJ(\theta_1+\theta_2)} = e^{iJ\theta_2}e^{iJ\theta_1} = U(\theta_2)U(\theta_1) \right]$

U(1) の下での対称性は大域的位相変換を表す.

例) QED でのレプトン数保存

$$L = \int \psi_i^{+} \psi_i \, d^3x$$

として、ハミルトニアン H は $e^{iL\theta}$ の下で不変:

$$e^{iL\theta} H e^{-iL\theta} = H$$

この不変性は QED における、レプトン数保存に関連する.

同様にして、バリオン数 (B), 電荷 (Q) の保存もハミルトニアンのユニタリ変換における不変性からの帰結.

$$e^{iB\alpha} H e^{-iB\alpha} = H, \quad e^{iQ\beta} H e^{-iQ\beta} = H.$$

⇒ Exercise 5.6 (a).

5.3.2 SU(2) Symmetries.

SU(2) … 最も単純な non-Abelian の special unitary な群

◎ 基本表現

$$\psi' = U\psi \quad (5.20)$$

このとき、U : 2×2 行列 , $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$: 2重項

$\left\{ \begin{array}{l} \text{スピン … スピンアップ・スピンダウン} \\ \text{アイソスピン … 中性子・陽子 （など）} \end{array} \right.$ に対応する。

行列 U は $|u\rangle, |d\rangle$ を基底とする Hilbert 空間に作用する線形演算子

$\left\{ \begin{array}{l} \text{スピン … （パウリ）spinor 空間} \\ \text{アイソスピン … isospinor 空間} \end{array} \right.$ に対応する。

◎ 行列 A に対して成り立つ関係式

$$\mathrm{Det}(e^{A}) = e^{\mathrm{Tr}A} \quad (5.22)$$

この関係式から多くのことが分かる。

SU(2)の変換行列 U は次のように表される：

$$U \equiv e^{i\theta_j \frac{\sigma_j}{2}} \quad (5.23)$$

$SU(N) \to N^2-1$
$SU(2) \to 2^2-1 = 3$

このとき、θ_j は実の連続パラメータであり、$\frac{\sigma_j}{2}$ は SU(2) 群の 3つの生成子 ($j=1,2,3$)

まず、行列式が1であること（= special）から

$$\mathrm{Det}\,U = \mathrm{Det}\,e^{i\theta_j\frac{\sigma_j}{2}} = e^{\mathrm{Tr}(i\theta_j\frac{\sigma_j}{2})} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Tr}(\sigma_j) = 0$$

つまり、生成子 σ_j が トレースレス でなければならない。

σ_j と σ_j が可換。

次に U の 逆 と エルミート共役 を考えると、

$$U^{-1} = e^{-i\theta_j\frac{\sigma_j}{2}} \qquad (5.26) \qquad \left(\because\ U^{-1}U = 1 \text{ より } e^{i\theta_j\frac{\sigma_j}{2}}\cdot e^{-\theta_j\frac{\sigma_j}{2}} = \mathbb{1}\right)$$

$$U^{\dagger} = e^{-i\theta_j\frac{\sigma_j^{\dagger}}{2}} \qquad (5.27)$$

となるが、$SU(2)$ の元は ユニタリー行列 なので、

$$U^{\dagger} = U^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-i\theta_j\frac{\sigma_j}{2}} = e^{-i\theta_j\frac{\sigma_j^{\dagger}}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_j^{\dagger} = \sigma_j \qquad (5.28)$$

つまり、生成子 σ_j が エルミート行列（演算子）であることが分かる。

したがって、$SU(2)$ の基本表現の生成子 σ_j は トレースレスでエルミートな 2×2 行列 である。
これらを満たす行列として、Pauli 行列 が 用いられる：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5.29)$$

また、この3つの生成子は 次の 交換関係 を 満たす。交換関係が0でないので、non-Abelian 群となっている。

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2} \qquad (5.30)$$

SU(2) → f_{ijk} （表現には依らない）

この交換関係はSU(2)のLie代数を定める。計算すると分かるように、この基底の下での構造定数は完全反対称3階テンソルとなる。

$$f^{SU(2)}_{ijk} = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \\ -1 & (i,j,k)=(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad \cdots(5.31)$$

○ Pauli行列 $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ は $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$ を満たす生成子

○ SU(2)の基本表現 $\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ に作用する。

SU(2)の場合 $(2J+1)$

一般のN次元表現（= N×N行列での形）は交換関係

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \quad (5.32)$$

← 教科書の右辺、i が抜けている？

を満たす、3つのN×N行列を持ってくることで作れる。

○ 基本表現と同様に、これらN次元表現の行列もトレースレスかつエルミート

○ N成分をもつ多重項はSU(2)のN次元表現 J_i によって変換される。

$$\boxed{[D(J_i), D(J_j)] = i\epsilon_{ijk}D(J_k)}$$

$D(J)$ ← 行列表現

抽象化

SU(N)

↓

群

↓

Lie代数

(Lie環)

ベクトル空間を用意

表現したことになる

ベクトル空間の次元 と 表現の次元

Exercise 5.6 $\to$ (2.87), (2.202)

(a) QEDのハミルトニアン密度がU(1)変換(5.17)の下で不変であることを示し、レプトン数(5.18)が保存量となることを示す。

$L = \int :\psi^\dagger(x)\psi(x): d^3x$ と ψ の交換関係を計算すると、

$$[L, \psi(y)] = \left[\int :\psi^\dagger(x)\psi(x): d^3x,\ \psi(y)\right]$$

$$= \int d^3x\, [:\psi^\dagger(x)\psi(x):,\ \psi(y)]$$

$$= \int d^3x \left[:\psi^\dagger(x)\psi(x):\psi(y) - \psi(y):\psi^\dagger(x)\psi(x): \right]$$

$$= \int d^3x \left[:\psi^\dagger(x)\psi(x):\psi(y) + :\psi^\dagger(x)\psi(y):\psi(x) \right.$$

$$\left. - :\psi^\dagger(x)\psi(y):\psi(x) - \psi(y):\psi^\dagger(x)\psi(x): \right]$$

$:\psi^\dagger\psi: = \psi^\dagger\psi$ を用いた.

$$= \int d^3x \left(\psi^\dagger(x)\{\psi(x), \psi(y)\} - \{\psi^\dagger(x), \psi(y)\}\psi(x) \right)$$

$$= \int d^3x \left[0 - \delta(x-y)\psi(x) \right]$$

$$= \underline{-\psi(y)}$$

$$\therefore \underline{[L, \psi(x)] = -\psi(x)}$$

これを用いると、"場の演算子" $\psi(x)$ は U(1) 変換の下で

$$e^{iL\theta}\psi(x)e^{-iL\theta} \underset{\theta\text{の1次}}{\simeq} (1+iL\theta)\psi(x)(1-iL\theta)$$

$$\underset{\theta\text{の1次}}{\simeq} \psi(x) + iL\theta\psi(x) - \psi(x)\cdot iL\theta$$

$$= \psi(x) + i\theta[L, \psi(x)]$$

$$= \psi(x) - i\theta\psi(x)$$

$$\simeq \underline{\psi(x)e^{-i\theta}} \qquad \swarrow 1-i\theta \sim e^{-i\theta}$$

と変換する.

proof $:\psi^\dagger\psi:\psi = \psi^\dagger\psi\psi$ か?

$$:\psi^\dagger_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2):\psi_\gamma(x_3)$$

$$= :(u^\dagger_\alpha(x_1)+v^\dagger_\alpha(x_1))(u_\beta(x_1)+v_\beta(x_2)):(u_\gamma(x_3)+v_\gamma(x_3))$$

$$= :(u^\dagger_\alpha(x_1)u_\beta(x_1)+u^\dagger_\alpha(x_1)v_\beta(x_2)+v^\dagger_\alpha(x_1)u_\beta(x_1)+v^\dagger_\alpha(x_1)v_\beta(x_2)):(u_\gamma(x_3)+v_\gamma(x_3))$$

$x_1\to x$
$x_2\to x$
$x_3\to y$

$$\Rightarrow :(u^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+u^\dagger_\alpha(x)v_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)v_\beta(x):(u_\gamma(y)+v_\gamma(y))$$

$$=[u^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+u^\dagger_\alpha(x)v_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)v_\beta(x)](u_\gamma(y)+v_\gamma(y))$$

$x_1\to x$
$x_2\to y$
$x_3\to x$

$$\Rightarrow :(u^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+u^\dagger_\alpha(x)v_\beta(y)+v^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)v_\beta(y)):(u_\gamma(x)+v_\gamma(x))$$

$$=[u^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+u^\dagger_\alpha(x)v_\beta(y)+v^\dagger_\alpha(x)u_\beta(x)+v^\dagger_\alpha(x)v_\beta(y)](u_\gamma(x)+v_\gamma(x))$$

この結果から 正規積が作用する部分が既に正規積なら $:\psi^\dagger\psi: = \psi^\dagger\psi$ と扱ってよい。

End

$\psi^\dagger$に対する変換は

$$[L,\psi^\dagger(x)] = \int dy\,[:\psi^\dagger(y)\psi(y):,\psi^\dagger(x)]$$

$$= \int dy\,(:\psi^\dagger(y)\psi(y):\psi^\dagger(x) - \psi^\dagger(x):\psi^\dagger(y)\psi(y):)$$

$$= \int dy\,[:\psi^\dagger(y)\psi(y):\psi^\dagger(x) + :\psi^\dagger(y)\psi^\dagger(x):\psi(y)$$
$$- :\psi^\dagger(y)\psi^\dagger(x):\psi(y) - \psi^\dagger(x):\psi^\dagger(y)\psi(y):]$$

$$= \int dy\,(:\psi^\dagger(y)\{\psi(y),\psi^\dagger(x)\} - \{\psi^\dagger(x),\psi^\dagger(y)\}\psi(y))$$

$$= \int dy\,\psi^\dagger(y)\delta(x-y)$$

$$= \psi^\dagger(x)$$

$$e^{iL\theta}\psi^\dagger(x)e^{-iL\theta} \simeq (1+iL\theta)\psi^\dagger(x)(1-iL\theta)$$

$$\simeq \psi^\dagger(x) + iL\theta\psi^\dagger(x) - \psi^\dagger iL\theta$$

$$= \psi^\dagger(x) + i\theta[L, \psi^\dagger]$$

$$= \psi^\dagger(x) + i\theta\psi^\dagger$$

$$\simeq \underline{\psi^\dagger(x)e^{i\theta}}$$

ハミルトニアン(密度)として相互作用を含めた p.95 (2.202) を考えると、(2.88), (2.203) より

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x\,(\mathcal{H}_{free} + \mathcal{H}_{int}) = \int d^3x\left[\bar{\psi}(-i\gamma^\mu A_\mu + m)\psi + e_0\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi\right]$$

となる。U(1) 変換を行うと、

$$e^{iL\theta}He^{-iL\theta}$$

$$= e^{iL\theta}\int dx\,\mathcal{H}\,e^{-iL\theta}$$

$$= \int dx\, e^{iL\theta}\Big[\underbrace{\psi^\dagger\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi}_{①} + \underbrace{e_0\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu A_\mu\psi}_{②}\Big]e^{-iL\theta}$$

① $\psi^\dagger\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi$

$$e^{iL\theta}\psi^\dagger\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi e^{-iL\theta}$$

$$= e^{iL\theta}\psi^\dagger e^{-iL\theta}e^{iL\theta}\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi e^{-iL\theta}$$

$$= \psi^\dagger e^{i\theta}\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)e^{iL\theta}\psi e^{-iL\theta}$$

$$= \psi^\dagger e^{i\theta}\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi e^{-i\theta} = \underline{\psi^\dagger\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi}$$

② $e_0 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi$

$$e^{iL\theta} e_0 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi e^{-iL\theta}$$

$$= e^{iL\theta} e_0 \psi^\dagger e^{-iL\theta} e^{+iL\theta} \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi e^{-iL\theta}$$

$$= e_0 e^{iL\theta} \psi^\dagger e^{-iL\theta} \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu e^{iL\theta} \psi e^{-iL\theta}$$

$$= e_0 \psi^\dagger e^{i\theta} \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi e^{-i\theta}$$

$$= \underline{e_0 \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu A_\mu \psi}$$

したがってハミルトニアンは

$$e^{iL\theta} H e^{-iL\theta} = \int d^3x\, e^{iL\theta} \left(\bar{\psi}(-i\not{\partial} + m)\psi + e_0 \bar{\psi} \not{A} \psi \right) e^{-iL\theta}$$

$$= \int d^3x \left[\bar{\psi}(-i\not{\partial} + m)\psi + e_0 \bar{\psi} \not{A} \psi \right]$$

$$= H$$

より <u>U(1) 変換の下で不変である。</u>

このとき、

$$e^{iL\theta} H e^{-iL\theta} = H$$

の両辺を θ で微分すると、

$$iLe^{iL\theta} H e^{-iL\theta} + e^{iL\theta} H (-iL) e^{-iL\theta} = 0$$

さらに $\theta \to 0$ とすると

$$iLH - iHL = 0 \iff \underline{[L, H] = 0}$$

したがって、ハイゼンベルグ方程式から L は保存量であることが分かる。$\left(\frac{dL}{dt} = 0 \right)$

(b) SU(2)の生成子の基本表現で最も一般的な形は αを実数, βを複素数として

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & -\alpha \end{pmatrix}$$

で与えられることを示す。

SU(2)生成子の基本表現の要請は (1) トレースレス (2) エルミート の2つ.
a, b, c, d を複素数として

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) トレースレス

$$\mathrm{Tr}\,\sigma = 0 \iff a + d = 0$$

(2) エルミート

$$\sigma^\dagger = \sigma \iff \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff a^* = a, \quad c^* = b, \quad b^* = c, \quad d^* = d$$

$\iff$ a, d が実数, b, c が互いに複素共役.

これより,

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ a, d \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad a\text{に対して}, \ d = -a$$

$$\begin{cases} b^* = c \\ c^* = b \end{cases} \Rightarrow \quad b\text{に対して}, \ c = b^*$$

したがって,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{C} \quad \text{となる.}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Re}(\beta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Im}(\beta) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

行列式が1の2×2ユニタリー行列の最も一般的な形が

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2+|b|^2=1, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

であることを示す。

要請される条件は (1) 行列式が1 (2) ユニタリー

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

とおく。

(1) 行列式が1

$$\det U = 1 \iff ad - bc = 1$$

(2) ユニタリー

$$U^\dagger = U^{-1} \iff \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \frac{1}{\det U}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (\because \det U = 1)$$

$$\iff a^* = d, \quad c^* = -b$$
$$b^* = -c, \quad d^* = a$$

これより、$\underline{d = a^*, \quad c = -b^*}$, $\det U = ad - bc = aa^* + bb^*$
$= \underline{|a|^2 + |b|^2 = 1}$

したがって、

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2+|b|^2=1, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

となる。

Group Theory of Angular Momentum.

SU(2)の例として角運動量を見ていく.
重要になるのは ルートとウエイト, カルターディンキン method.

ルートとウエイトを用いた方法の基本的なアイデアは, 特定の線形結合を作ることで群の生成子を2組のグループに分けるというもの.

1つ目のグループ … エルミート演算子(エルミート行列)から構成され, 既約表現の多重項の量子数を与えるように対角化されているもの.
例) J_3 これは軌道角運動量が $+1, 0, -1$ の3重項を用いて対角化されている. それぞれの量子数 $+1, 0, -1$ を対角成分にもった行列となっている.

2つ目のグループ … 昇降演算子(はしご演算子)と呼ばれるものから構成される. 量子数の異なる多重項の間を行き来するために用いる.
例) $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ 軌道角運動量の昇降演算子で, $J_3 = \pm 1, 0$ の間の状態をつなぐ役割をもつ.

これら2つのグループをどのように構成していくかを示す.

1. 群の生成子の中から, 全ての生成子と可換な非線形関数(演算子)を構成できる.
   このような非線形関数は **カシミヤ演算子** と呼ばれる.
   カシミヤ演算子の個数は Lie代数の階数(rank)に等しく, $SU(N)$ の場合 $N-1$ 個
   カシミヤ演算子が重要なのは, 既約表現をラベルするための<u>量子数を与えるから。</u>

※ 一般に non-Abelian 群の生成子は交換しない : $[X_a, X_b] = if_{abc}X_c$. しかし, X_a の組み合わせをつくると すべての X_a と可換な演算子 = カシミヤ演算子 が作れる (例としては, $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ など.)
また, Schur's Lemma (シューアの補題) と呼ばれるものがある

Schur's Lemma

既約表現のすべての行列と可換な行列は $A = a\mathbb{1}$ という (定数)×(単位行列) の形しか存在しない

⇒ C をカシミヤ演算子として, $C\mathbb{1} = c\mathbb{1}$ の固有値方程式が成立つことを意味し, 既約表現をラベルする量子数を与える.
単位行列

$\{X_1, X_2, X_3\}$
$\boxed{J_3}$ J^2
全 回

2. 生成子 X_a は 線形ベクトル空間の基底を張る.
このとき, (a) エルミート (b) 互いに交換する (c) 対角化されている
の条件を満たす集合を X_a の線形結合によりつくることができる.

この条件を満たす演算子の最大個数を その Lie 代数の階数 (rank) と呼ぶ。
また、そのような演算子

$$H_a \ (a=1, \dots, l) \qquad (5.33)$$

は Lie 代数の部分空間であり, $\{H_1, \cdots, H_l\}$ のことを カルタン部分代数 と呼ぶ.
カルタン部分代数に属する演算子は対角化されているので、その表現の下で l 個の
固有値方程式を与える:

$$H_i \psi^{(j)}_{m_i} = m_i \psi^{(j)}_{m_i} \qquad (i=1, \dots, l) \qquad (5.34)$$

このとき, j はその既約表現をラベルする量子数であり, カシミヤ演算子の固有値から得られる.
また, 固有値 m_i は固有状態 $\psi^{(j)}_{m_i}$ の ウエイト と呼ばれる. この固有値(ウエイト)は
カシミヤ演算子のときとは異なり, 加算的である.

一般に カルタン部分代数 $\{H_1, H_2, \cdots, H_l\}$ の それぞれの ウエイトを 並べたベクトル

$$\vec{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_l) \qquad (5.35)$$

を ウエイト・ベクトル と呼ぶ。このウエイトベクトルの基底 [$\hat{m}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ など]
が張る空間のことを ウエイト空間 と呼ぶ。さらに, ウエイト空間にウエイトベクトルを
描いて得られる図形のことを ウエイト図 と呼ぶ. [l 次元空間の図となる]

特に、随伴表現 での ウエイトのことを ルート, ウエイト図のことを ルート図 と呼ぶ。

ウエイトの 縮退度 は, その表現の中で同じウエイトをもつ異なる固有ベクトルの数を表す.

証明なし

特殊ユニタリ群 $SU(N)$ は N^2-1 個の生成子をもつ. また、$N-1$ 個の生成子を同時対角化可能.

$\Rightarrow$ $SU(N)$ のランクは $l=N-1$ であり、$N-1$ 個のカシミヤ演算子を持つことを表す.

残りの $N^2-1-(N-1) = N^2-N$ 個の生成子は l 次元ウエイト空間を移動する

[つまり、カルタン部分代数の固有ベクトルを変える] 昇降演算子としての役割を持つ.

具体例 : $SU(2)$

$SU(2)$ は生成子を $N^2-1 = 4-1 = 3$ 個もつ. [基本表現であれば Pauli 行列]

生成子のうち対角化できるのは $N-1=1$ 個. [第3成分を対角化するのが慣習 : σ_z, J_z]

このことから、$SU(2)$ はランク1の Lie 群.

角運動量の代数を例にとる.

◎ 生成子の満たす代数

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

◎ カルタン部分代数 H_a $(a=1,\dots,l)$ ただし、$SU(2)$ では $l=1$

$$H_1 = J_3 \quad (5.36)$$

◎ 固有値方程式

$$J_3\psi_m^{(J)} = m\psi_m^{(J)} \quad (\text{肩の } J \text{ は表現を表す}) \quad (5.37)$$

このとき、ウエイトが $m = J_3$ に相当する (= 磁気量子数)

◎ カシミヤ演算子

$$C = J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \quad (5.38)$$

固有値方程式は

$$C\psi^{(J)} = J(J+1)\psi^{(J)}$$

SU(2)はランク1なので、カシミヤ演算子は J^2 だけ。その量子数は J となる.
J は角運動量の和を表し、異なる既約表現をラベルする量子数。

角運動量 J に対して、ウエイト $m=J_3$ は $(2J+1)$ 個の値をもつ なので、J でラベルされる SU(2)の既約表現は $(2J+1)$ 次元の行列 となる.
$(2J+1)$ 次元のベクトルに作用する行列からなる.

◎ 昇降演算子

$N^2-N = 4-2 = 2$ 個の カルタン部分代数ではない生成子は、次のように構成できる:

$$J_+ = J_1 + iJ_2 \qquad (5.40)$$

$$J_- = J_1 - iJ_2 \qquad (5.41)$$

ここまでの演算子を合わせて次の代数関係が成立つ:

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_3^2$$
$$[J_+, J_-] = 2J_3 \qquad [J^2, J_i] = 0 \qquad (5.42)$$

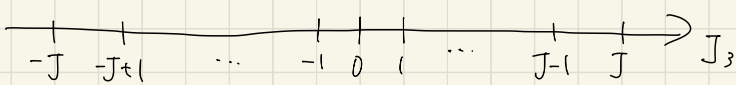
$$J_\pm |J, J_3\rangle = \sqrt{(J \pm J_3 + 1)(J \mp J_3)}\, |J, J_3 \pm 1\rangle \qquad (5.43)$$

ただし、 $J_+|J_3 = J\rangle = 0 \quad , \quad J_-|J_3 = -J\rangle = 0 \qquad (5.44)$

昇降演算子 $J_\pm$ は $(2J+1)$ 次元の多重項の間を行き来できるが、異なる既約表現には移ることができない。

◎ SU(2)のウエイト図

J_3 が角運動量のとき、SU(2)の既約表現においてそれぞれのウエイト m の縮退度は 1.
なので、SU(2)の既約表現のウエイト図は1次元の線とサイトを合わせたものになる:



$m = 2J+1$ 通り $\rightarrow$ $J_3 = 2J+1$ 通り.

SU(2)の既約表現は次に示す highest-weight algorithm によって構成していける.

1. それぞれの既約表現において，その表現の"最高ウエイト"と呼ばれるウエイトが存在。ウエイト図の中でただ1つの格子点を有している.

2. 2つの既約表現が同じ最高ウエイトをもつとき，それらの既約表現は等価.

具体的に SU(2)の直積を考えながら見ていく。その前に表現の直積について説明。

◎ Direct Product of Representations.

$m \times m$ 行列 A と $n \times n$ 行列 B があるとき，A と B の直積とは

$$A \otimes B = C \qquad (5.45)$$

と表される. C は $mn \times mn$ 行列であり，その要素が

$$C_{ik,jl} = a_{ij} b_{kl} \qquad (5.46)$$

で与えられるもののこと。

[$C_{ik,jl}$ の記法は形式的なものとして理解]

具体例　A, B が共に 2×2 行列のとき.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

という行列が A と B の直積である.

$A\otimes B$が作用する空間（mn行のベクトル）を 直積空間 と呼ぶ.
また、ウエイトは加算的な量子数だったので、直積表現のウエイトは元の表現のウエイトの和.

[角運動量の合成などの文脈で考えることになる]

- 直積表現 $D^{(1)}\otimes D^{(2)}$ は一般に可約な表現.
- 有限群もしくはコンパクトな単純Lie群の直積は既約表現の直和に分解できる.

$$D^{(1)}\otimes D^{(2)} = \sum_i \Gamma_i D^{(i)} = \Gamma_1 D^{(1)} + \Gamma_2 D^{(2)} + \cdots$$

このとき、Γ_i は既約表現 $D^{(i)}$ が直和の中にいくつ含まれるかを表す.
$\Longrightarrow$ Clebsch - Gordan series

$SU(2)$ の場合は 2つの球面調和関数の積、ウィグナーのD関数として知られるものになる.

○ 角運動量の合成
角運動量の2つの既約表現の直積を考えると、ウエイト図の格子点は縮退する.
これは、直積のウエイト J_3 が元の既約表現の J_3 の和となるから。

具体例

$J=\frac{3}{2}$ と $J=1$ の直積は、 $J=\frac{3}{2}$ に対して $J_3=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2}$,
$J=1$ に対して $J_3=\pm1, 0$ があるので、ウエイトが $J_3=\frac{1}{2}$ となる組み合わせに

$$J_3=\frac{1}{2} = \frac{3}{2}-1 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}+0$$

の和の組み合わせが可能. つまり、$J_3=\frac{1}{2}$の状態は3重に縮退する.

ウエイト図を系統的につくることができる方法の1つが 最高ウエイトの方法と呼ばれるもの。

○ 最高ウエイトの方法 (highest weight algorithm)

1. 直積表現として可能な最大の J_3 の値をJにとる： $J = J_3$ [e.g. $\frac{3}{2} \otimes 1$ なら $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ が最大]

2. J_- を用いて $J=J_3$ から 1ずつJの値が小さい状態をつくる。
   このとき、$J=J_3$ に対して縮退度が $2J+1$ となることに注意。

3. 次に最大の値 $J=J_3$ を除いて、次に値の大きい J_3 をJにとる。

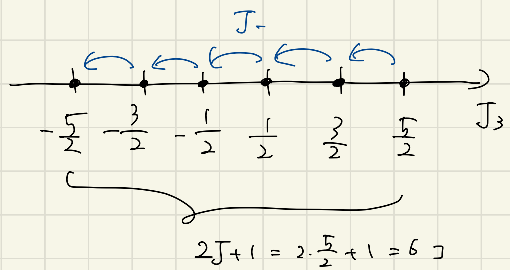
4. 同様に $2J+1$ 個の状態を J_- によりつくる。

5. 以上を繰り返し行い、状態が作れなくなったら終了。

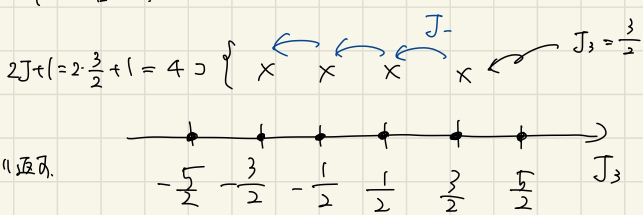
例　$J=\frac{3}{2} \otimes J=1$

最大 $J_3=\frac{5}{2}$.

$J_3=\frac{5}{2}$ から J_- を用いて状態をつくる。



次に $J_3=\frac{3}{2}$ として同じことをする。このとき作ることになる状態は縮退しているので、×印で書く。



次に、$J_3=\frac{1}{2}$ として同じことを繰り返す。

次を考えると状態が残らないので
これで終わり。

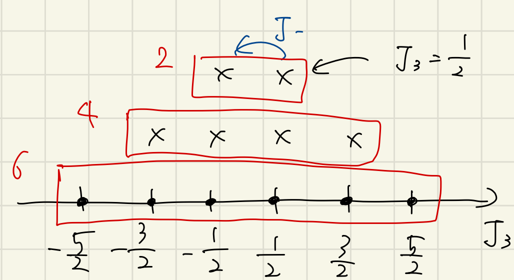


Fig 5.2 は $J_3=\frac{5}{2}$ も×印で書いたものになっている。

この結果は普通次のように書かれる.

$$\underbrace{\mathbf{4}}_{J=\frac{3}{2}\Rightarrow 2J+1=4} \otimes \overbrace{\mathbf{3}}^{J=1\Rightarrow 2J+1=3} = \underbrace{\mathbf{6}}_{J=\frac{5}{2}\Rightarrow 2J+1=6} \oplus \overbrace{\mathbf{4}}^{J=\frac{3}{2}} \oplus \underbrace{\mathbf{2}}_{J=\frac{1}{2}}$$

$\otimes$, $\oplus$ は直積, 直和を. 太字の数字は $SU(2)$ の $(2J+1)$ 次元既約表現の意味.

ここまで $SU(2)$ の特に角運動量を例に説明してきたのは次の理由.

1. 便利な専門用語を慣れた考え方(角運動)と結びつけるため.
2. $SU(N)$ への一般化を考えるのに必要だから。

高次の話題の前に 随伴表現 と 強い相互作用の内部対称性(isospin)としての $SU(2)$ について見る.

Adjoint Representation (随伴表現)

- 角運動量 $J=1$ の場合を考えると、$SU(2)$ の $2J+1=3$ 次元表現に対応。
- 表現空間の多重項は生成子のうちの1つの固有値により区別される。
- 3つの生成子のうち、J_3 を対角化する表現行列および基底は次のようになる。

$$J_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad J_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&i&0\\-i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad J_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

基底(J_3 の固有値でラベルする) $|J, J_3\rangle$

$$|1,1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad |1,0\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad |1,-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$SU(2)$ の独立なパラメータの数は $N^2-1=3$ であり、この表現は $SU(2)$ の3つの生成子。
なので、この表現は $SU(2)$ の<u>随伴表現</u>となっている [表現の次元 = 生成子の数]

- J_1, J_2, J_3 が $SU(2)$ の代数を満たすことは確認できる。(⇒ Exercise 5.7)
- これよりも次元の低い表現(つまり、基本表現)は高次の直積をつくるときに使われる。

例 $\mathbf{2}\otimes\mathbf{2}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{3}$

Exercise 5.7

まず (5.14) $(T_a)_{bc} \equiv -if_{abc}$ により構成される行列が $SU(2)$ の代数を満たすことを確かめる.

(i) T_1 $(a=1)$

$f_{abc} = \epsilon_{abc}$ より. $\epsilon_{123} = 1$, $\epsilon_{132} = -1$ 他は 0 :

$$T_1 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) T_2 $(a=2)$

$\epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$ 他は 0 :

$$T_2 = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) T_3 $(a=3)$

$\epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = -1$ 他は 0 :

$$T_3 = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以上3つの行列の交換関係は例えば次のように計算できる.

$$[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot 1 \cdot T_3 = \underline{if_{123}T_3}$$

他の組み合わせの交換関係も同様にして、

$$[T_1, T_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = i f_{132} T_2$$

$$[T_2, T_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = i f_{231} T_1$$

$$[T_2, T_1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (-1) \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i f_{213} T_3$$

$$[T_3, T_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = i f_{321} T_1$$

$$[T_3, T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = i f_{312} T_2$$

と計算できるので、T_i は $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ を満たす $SU(2)$ の生成子である。

これらを J_3 が対角化されるような基底に変換する。

求めるのは J_3 を次のように対角化する直交変換 P :

$$P^{-1} J_3 P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

そこで、固有値方程式

$$J_3\vec{x} = \lambda\vec{x} \iff \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を解く。非自明な解の条件 $|J_3 - \lambda I| = 0$ より

$$-\lambda^3 + \lambda = 0 \qquad \therefore\ \underline{\lambda = 0, \pm 1}$$

を得るので、$\lambda = 0, \pm 1$ に対する固有ベクトルは次のようにとれる：

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda = 0) \qquad\qquad (\lambda = 1) \qquad\qquad (\lambda = -1)$$

Pが複素行列なので エルミート共役を用いる。

これらを用いて J_3 を対角化する直交変換 P は $J_3 = P^{-1}T_3P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ を見込んで、

$$P = [\vec{x}_2\ \ \vec{x}_3\ \ \vec{x}_1] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。$J_1 = P^{-1}T_1P$, $J_2 = P^{-1}T_2P$, $J_3 = P^{-1}T_3P$ を計算すると、
(P がエルミート行列なので $P^{-1} = P^{\dagger}$)

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},\quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得るので、J_3 を対角化する基底がとれていることが分かる。
これが (5.51) に相当する。 //

◎ Isotopic Spin.

SU(2)の別の例として、中性子と陽子の生成消滅演算子について考える.

$$P^\dagger \equiv a^\dagger_{\text{proton}} \qquad N \equiv a_{\text{neutron}}$$

$$P \equiv a_{\text{proton}} \qquad N^\dagger \equiv a^\dagger_{\text{neutron}}$$

これらはFermionを表す演算子なので、反交換関係に従う：

$$\{P_{p,s},\, P^\dagger_{p',s'}\} = \delta_{pp'}\delta_{ss'} \qquad \{N_{p,s},\, N^\dagger_{p',s'}\} = \delta_{pp'}\delta_{ss'}$$

$$\{P, N\} = 0,\quad \{P^\dagger, N^\dagger\} = 0,\quad \{P^\dagger, N\} = 0,\quad \{P, N^\dagger\} = 0$$

◎ 全体の粒子数を変えない演算子

$$P^\dagger_\alpha N_\alpha,\quad N^\dagger_\alpha P_\alpha,\quad P^\dagger_\alpha P_\alpha,\quad N^\dagger_\alpha N_\alpha \qquad (5.54)$$

このとき、α は量子数（運動量・スピン）についてのラベルであり、同じ文字については和を表す.

◎ 4つの独立な演算子

$$B = P^\dagger_\alpha P_\alpha + N^\dagger_\alpha N_\alpha \qquad (5.55)$$

$$T_+ = P^\dagger_\alpha N_\alpha \qquad T_- = N^\dagger_\alpha P_\alpha \qquad (5.56\,a)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\left(P^\dagger_\alpha P_\alpha - N^\dagger_\alpha N_\alpha\right) \qquad (5.56\,b)$$

陽子・中性子のみからなる系を考えると、演算子 $B, T_\pm, T_3$ は次のように解釈できる.

T^*（$*$：複素共役）をつくるには、P, N がどうなるべきか。

B … 核子の総数、バリオン数演算子（他の演算子と交換するので、保存量）
T_+ … N を消し、P をつくる演算子
T_- … P を消し、N をつくる演算子
T_3 … P が N に比べていくら過剰かを表す演算子

さらに、T_3 は電荷演算子 $Q = P_\alpha^\dagger P_\alpha$ を用いると次のように書ける。

$$T_3 = Q - \frac{B}{2} \qquad (5.57)$$

proof

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}\left(P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P_\alpha^\dagger P_\alpha + P_\alpha^\dagger P_\alpha - P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha\right) \\ &= \underline{Q - \frac{B}{2}} \end{aligned}$$

以上、$T_\pm$, T_3 は次の代数関係を満たす： [Exercise 5.8 で確認する。]

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm \ , \quad [T_+, T_-] = 2T_3 \qquad (5.58)$$

これは角運動量の代数と同じであり、他の性質も $SU(2)$ の随伴表現 J と同じ関係を満たす。

$$\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{T}_+\hat{T}_- + \hat{T}_-\hat{T}_+\right) + \hat{T}_3^2 \qquad (5.59)$$

（$\hat{T}^2$ はカシミヤ演算子）

$$T_\pm = T_1 \pm i T_2 \qquad \left[\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}(T_+ + T_-) \\ T_2 &= \frac{1}{2i}(T_+ - T_-) \end{aligned}\right] \qquad (5.60)$$

$$\hat{T}^2 \psi = T(T+1)\psi \qquad \hat{T}_3 \psi = T_3 \psi \qquad (5.61)$$

量子数 T の多重項は $2T+1$ の状態をもち、T_3 の値でラベルされる。（角運動量と同じ）

◎ ここまでに示した $T_\pm, T_3$ から構成される $SU(2)$ の下での対称性を $SU(2)$ isospin と呼ぶ.
(これらを生成子とする変換の下で Hamiltonian が不変)

◎ $T_\pm$ は $N \leftrightarrow P$ の間を変換するので、$SU(2)$ 対称性は陽子と中性子を入れ換えたときの, 系のエネルギーの不変性と解釈できる.
[$T_\pm$ は T_3 の固有値を変える. これは、$N \to P$, $P \to N$ とする変換に対応している.]

◎ 原子核物理の charge independence hypothesis の群論的な表現.

◎ 陽子・中性子はこの抽象的な空間で反対の"スピン"(=isospin)の射影をもつので、$SU(2)$ 対称性はこの空間での回転不変性として表すことができる.

$\Longrightarrow$ isospin 対称性 = isospace の等方性

◎ 角運動量と isospin の群論的扱いが同じなので、片方のアイデアはもう片方の理論にそのまま用いられている.

* 角運動量の選択則
* Clebsch-Gordan 係数

◎ アイソスピンは強い相互作用においては良い対称性だが、弱い相互作用, 電磁気相互作用では破れている.

◎ アイソスピンは今では基本的な対称性とは考えられていない.

◎ 角運動量と同様に $SU(2)_{isospin}$ の高次元表現を考えることができる.
$T=1$, $T_3 = 0, \pm 1$ のものは $SU(2)_{isospin}$ の3次元表現であり $(\pi^\pm, \pi^0)$ に対応する.
isovector multiplet を構成する。

Conjugate Representation

SU(2) isospin の 基本表現 として、反核子 ($\bar{n}, \bar{p}$) を用いることを考える。
SU(2) では 2つの表現が可能

$$\mathbf{2} \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} , \quad \bar{\mathbf{2}} \equiv \begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$$

数字は 表現の次元、$\bar{\mathbf{2}}$ のバーは 反核子を区別するためのもの。
[$\bar{\mathbf{2}}$ は $\mathbf{2}^*$ と書くこともある。 また、各々の成分は SU(2) の下で同じ変換に従うようにとってある。]

$\bar{\mathbf{2}}$ は **共役表現** と呼ばれる。 SU(2) では $\underbrace{\text{基本表現}}_{\mathbf{2}}$ と $\underbrace{\text{その共役表現}}_{\bar{\mathbf{2}}}$ は等価。
ただし、$N > 2$ の 一般の $SU(N)$ に対しては そうとは限らない。

SU(2)	$\mathbf{2} \sim \bar{\mathbf{2}}$
SU(N) (N > 2)	$\mathbf{N} \not\sim \bar{\mathbf{N}}$

- 実表現
  基本表現と共役表現が等しい表現のこと ; SU(2) での $\mathbf{2}$ と $\bar{\mathbf{2}}$ など

- 複素表現
  基本表現と共役表現が等価でない表現のこと : SU(3) での $\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ など

追記 SU(2)の共役表現 $\bar{2}$ について.

追加

SU(2)の生成子 T_a が満たす代数 $[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c$ の両辺の複素共役をとると、

$$[T_a^*, T_b^*] = -i\epsilon_{abc}T_c^*$$

これは、共役表現の生成子 T_a^* が満たすべき代数関係となる。この T_a^* は元の T_a の基底を取り換えただけであることが簡単に確かめられる。つまり、

$$P^{-1}T_aP = -T_a^* \qquad (a=1,2,3)$$

を満たす直交行列 P が存在する。$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき、実際に求めると、

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かる。実際

$$P^{-1}\sigma_1 P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1^*$$

$$P^{-1}\sigma_2 P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2^*$$

$$P^{-1}\sigma_3 P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_3^*$$

となり、$[T_a^*, T_b^*] = -i\epsilon_{abc}T_c^*$ を満たす基底へ変換できる。この基底を

$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}$ と書くことにすると、元の基底での表示は逆変換 $P^{-1}\bar{\psi}$ で得られるので $\bar{2}$ の二重項の基底を $(p \ \ n)^t$ とした表示は、

$$\bar{2} : \quad P^{-1}\bar{\psi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -\bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix}}$$

となり p.180の式を再現する.

Exercise 5.8

(a) (5.58)の交換関係 $[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$, $[T_+, T_-] = 2T_3$ を確認する.

$$[T_3, T_+] = \frac{1}{2}(P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha) P_\beta^\dagger N_\beta - P_\beta^\dagger N_\beta \frac{1}{2}(P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{P_\alpha^\dagger P_\alpha P_\beta^\dagger N_\beta}_{①} \underbrace{- N_\alpha^\dagger N_\alpha P_\beta^\dagger N_\beta}_{②} \underbrace{- P_\beta^\dagger N_\beta P_\alpha^\dagger P_\alpha}_{③} \underbrace{+ P_\beta^\dagger N_\beta N_\alpha^\dagger N_\alpha}_{④} \Big]$$

① $P_\alpha^\dagger P_\alpha P_\beta^\dagger N_\beta$

$$= P_\alpha^\dagger (\delta_{\alpha\beta} - P_\beta^\dagger P_\alpha) N_\beta$$

$$= P_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta} N_\beta - P_\alpha^\dagger P_\beta^\dagger P_\alpha N_\beta$$

$$= \underline{P_\alpha^\dagger N_\alpha - P_\alpha^\dagger P_\beta^\dagger P_\alpha N_\beta}$$

② $-N_\alpha^\dagger N_\alpha P_\beta^\dagger N_\beta$

$$= -P_\beta^\dagger N_\alpha^\dagger N_\alpha N_\beta$$

$$= +P_\beta^\dagger N_\alpha^\dagger N_\beta N_\alpha$$

$$= P_\beta^\dagger (\delta_{\alpha\beta} - N_\beta N_\alpha^\dagger) N_\alpha$$

$$= P_\beta^\dagger N_\beta - P_\beta^\dagger N_\beta N_\alpha^\dagger N_\alpha$$

$$= P_\beta^\dagger N_\beta - P_\beta^\dagger N_\beta (1 - N_\alpha N_\alpha^\dagger)$$

$$= \underline{P_\beta^\dagger N_\beta N_\alpha N_\alpha^\dagger}$$

③ $-P_\beta^\dagger N_\beta P_\alpha^\dagger P_\alpha$

$$= P_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger N_\beta P_\alpha$$

$$= \underline{P_\alpha^\dagger P_\beta^\dagger P_\alpha N_\beta}$$

④ $P_\beta^\dagger N_\beta N_\alpha^\dagger N_\alpha$

$$= P_\beta^\dagger N_\beta (1 - N_\alpha N_\alpha^\dagger)$$

$$= \underline{P_\beta^\dagger N_\beta - P_\beta^\dagger N_\beta N_\alpha N_\alpha^\dagger}$$

①, ②, ③, ④ の結果から,

$$[T_3, T_+] = \frac{1}{2}(P_\alpha^\dagger N_\alpha + P_\alpha^\dagger N_\alpha) = P_\alpha^\dagger N_\alpha = \underline{T_+}$$

$$[T_3, T_-] = \frac{1}{2}(P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha) N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger P_\beta \cdot \frac{1}{2}(P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\alpha^\dagger N_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(\underbrace{P_\alpha^\dagger P_\alpha N_\beta^\dagger P_\beta}_{①} \underbrace{- N_\alpha^\dagger N_\alpha N_\beta^\dagger P_\beta}_{②} \underbrace{- N_\beta^\dagger P_\beta P_\alpha^\dagger P_\alpha}_{③} + \underbrace{N_\beta^\dagger P_\beta N_\alpha^\dagger N_\alpha}_{④})$$

① $P_\alpha^\dagger P_\alpha N_\beta^\dagger P_\beta$

$$= (1 - P_\alpha P_\alpha^\dagger) N_\beta^\dagger P_\beta$$

$$= N_\beta^\dagger P_\beta - P_\alpha P_\alpha^\dagger N_\beta^\dagger P_\beta$$

② $-N_\alpha^\dagger N_\alpha N_\beta^\dagger P_\beta$

$$= -N_\alpha^\dagger(\delta_{\alpha\beta} - N_\beta^\dagger N_\alpha) P_\beta$$

$$= -N_\alpha^\dagger P_\alpha + N_\alpha^\dagger N_\beta^\dagger N_\alpha P_\beta$$

$$= -N_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\beta^\dagger N_\alpha^\dagger N_\alpha P_\beta$$

$$= -N_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\beta^\dagger (1 - N_\alpha N_\alpha^\dagger) P_\beta$$

$$= -N_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\beta^\dagger P_\beta + N_\beta^\dagger N_\alpha N_\alpha^\dagger P_\beta$$

$$= -2 N_\alpha^\dagger P_\alpha + N_\beta^\dagger P_\beta N_\alpha N_\alpha^\dagger$$

③ $-N_\beta^\dagger P_\beta P_\alpha^\dagger P_\alpha$

$$= -N_\beta^\dagger(\delta_{\alpha\beta} - P_\alpha^\dagger P_\beta) P_\alpha$$

$$= -N_\beta^\dagger P_\beta + N_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger P_\beta P_\alpha$$

$$= -N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger P_\alpha P_\beta$$

$$= -N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger (1 - P_\alpha P_\alpha^\dagger) P_\beta$$

$$= -N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger P_\beta + N_\beta^\dagger P_\alpha P_\alpha^\dagger P_\beta$$

$$= -2 N_\beta^\dagger P_\beta + P_\alpha P_\alpha^\dagger N_\beta^\dagger P_\beta$$

④ $N_\beta^\dagger P_\beta N_\alpha^\dagger N_\alpha$

$$= N_\beta^\dagger P_\beta (1 - N_\alpha N_\alpha^\dagger)$$

$$= N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger P_\beta N_\alpha N_\alpha^\dagger$$

①, ②, ③, ④ より.

$$[T_3, T_-] = \frac{1}{2}(N_\alpha^\dagger P_\alpha + N_\alpha^\dagger P_\alpha - 2N_\alpha^\dagger P_\alpha - 2N_\alpha^\dagger P_\alpha)$$

$$= -N_\alpha^\dagger P_\alpha$$

$$= -T_-$$

したがって. $[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$

$[T_+, T_-] = 2T_3$ を確認する.

$$[T_+, T_-]$$

$$= T_+T_- - T_-T_+$$

$$= P_\alpha^\dagger N_\alpha N_\beta^\dagger P_\beta - N_\beta^\dagger P_\beta P_\alpha^\dagger N_\alpha$$

$$= P_\alpha^\dagger (\delta_{\alpha\beta} - N_\beta^\dagger N_\alpha) P_\beta - N_\beta^\dagger (\delta_{\alpha\beta} - P_\alpha^\dagger P_\beta) N_\alpha$$

$$= P_\alpha^\dagger P_\alpha - P_\alpha^\dagger N_\beta^\dagger N_\alpha P_\beta - N_\beta^\dagger N_\beta + N_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger P_\beta N_\alpha$$

$$= P_\alpha^\dagger P_\alpha - N_\beta^\dagger N_\beta - \cancel{N_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger P_\beta N_\alpha} + \cancel{N_\beta^\dagger P_\alpha^\dagger P_\beta N_\alpha}$$

$$= \underline{2T_3}$$

$$\therefore \quad \underline{[T_+, T_-] = 2T_3} \;/\!/$$

(b) $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \ , \quad \phi \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$

が 2成分 $\vec{\phi}$ の SU(2) 回転で不変であることを示す.

2成分 SU(2) 回転 U は エルミートな 2×2行列の生成子 $t_a = \frac{\sigma_a}{2}$ $(a=1,2,3)$ を用いて. $U = e^{i\theta^a t_a}$
と表せる. ϕ, $\phi^\dagger$ の変換は

$$\phi \to \phi' = U\phi$$

$$\phi^\dagger \to (\phi')^\dagger = (U\phi)^\dagger = \phi^\dagger U^\dagger = \phi^\dagger U^{-1}$$

となるので, $\mathcal{L}$ の変換を考えると.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}' &= (\partial_\mu \phi')^\dagger (\partial^\mu \phi') - \mu^2 (\phi'^\dagger \phi') - \lambda (\phi'^\dagger \phi')^2 \\
&= (\partial_\mu \phi)^\dagger U^{-1} U (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger U^{-1} U \phi) - \lambda (\phi^\dagger U^{-1} U \phi)^2 \\
&= (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\
&= \underline{\mathcal{L}} \,/\!/
\end{aligned}$$

となる。したがって、上記の $\mathcal{L}$ は SU(2) 回転の下で不変である.

内部変換のNoether currentは作用の変分を考えると、

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \right]$$

$$\begin{cases} \phi \to e^{i\theta^a t_a} \phi \simeq \phi + i\theta^a t_a \phi \\ \phi^\dagger \to \phi^\dagger e^{-i\theta^a t_a} \simeq \phi^\dagger - \phi^\dagger i\theta^a t_a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) \longrightarrow & (\partial_\mu \phi^\dagger - \partial_\mu \phi^\dagger \cdot i\theta^a t_a)(\partial^\mu \phi + i\theta^a t_a \partial^\mu \phi) \\ = & (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi \\ & + O(\theta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^\dagger \phi \to & (\phi^\dagger - \phi^\dagger i\theta^a t_a)(\phi + i\theta^a t_a \phi) \\ = & \phi^\dagger \phi + \cancel{\phi^\dagger i\theta^a t_a \phi} - \cancel{\phi^\dagger i\theta^a t_a \phi} + O(\theta^2) \\ = & \phi^\dagger \phi \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S \to S' \simeq & \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \right] \\ & + \int d^4x \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi \right] \\ = & S + \underline{\int d^4x \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi \right]} \end{aligned}$$

$\underline{\qquad}$ の部分を全微分の形で書き換えると、

$$\int d^4x \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi - (\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi \right]$$

$$= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left[\phi^\dagger i\theta^a t_a (\partial^\mu \phi) \right] - \phi^\dagger i\theta^a t_a (\partial_\mu \partial^\mu \phi) \right.$$

$$\left. - \partial^\mu \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \phi \right] + (\partial^\mu \partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \phi \right\}$$

$$= \int d^4x \cdot \partial_\mu \left[\phi^\dagger i\theta^a t_a (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \phi \right]$$

$$+ \underline{\int d^4x \left[(\partial^\mu \partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \phi - \phi^\dagger i\theta^a t_a (\partial_\mu \partial^\mu \phi) \right]}$$

$$\underline{\qquad} = \left[(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \phi - \phi^\dagger i\theta^a t_a \partial_\mu \phi \right] \rightsquigarrow 0$$

$$- \int d^4x \left[\underbrace{(\partial_\mu \phi^\dagger) i\theta^a t_a \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi^\dagger i\theta^a t_a (\partial_\mu \phi)}_{=0} \right]$$

$$= 0$$

したがって.

$$S \to S' = S + \int d^4x \ \theta^a \partial_\mu j_a^\mu (x) \equiv 0 \quad (\Leftarrow \text{対称性})$$

$$\underline{j_a^\mu (x) \equiv \phi^\dagger i t_a (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) i t_a \phi} \ //$$

これが 保存カレント. である.

保存電荷は $Q_a = \int d^3x \, j_a^0 (x)$

$$Q_a = \underline{\int d^3x \left[\phi^\dagger i t_a (\partial^0 \phi) - (\partial^0 \phi^\dagger) i t_a \phi \right]} \ //$$

となる.

5.3.4 Representation Dimentionality : Young Diagrams

9/24

SU(N)の基本表現の直積として得られる高次の表現の次元を求める方法としてヤング図を用いる方法が知られている。

次元の小さい表現の直積により高次の表現を構成できる。たとえば、前回の $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$ などをウエイト図を用いて構成する方法を見てきた。

しかし、単純な場合を除いてその表現もしくは表現の次元を求めるのは大変になる。というのは、SU(2), SU(3) などの場合は対応できるが、一般のSU(N)に対するウエイト図を作るのは難しくなる。

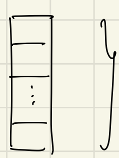
そこで、ヤング図を用いた方法が知られている。これは、テンソル解析でのテクニックを図形的に使えるようにしたもの。なぜこの方法が有用であるかについては、ここでは触れない。[Lichtenberg(1978)]、ここでは、どのように用いるかという点について説明する。

◎ Young Diagrams

まず、SU(N)の基本表現 N を1つの箱で表す。

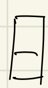
$$N = \square$$

その共役表現 $\bar{N}$ は N−1 個の □ を縦に並べて表す

$\bar{N} =$  N−1 個

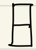
このような箱で表した図形をヤング図と呼ぶ。

例)

SU(2) : $\square = 2 = \bar{2}$　　SU(3) : $\square = 3$　 $= \bar{3}$

SU(2)では 2 と $\bar{2}$ が同じヤング図に対応するので実表現であると分かる. 一方, SU(3) は $3 \neq \bar{3}$ である.

1行だけで表されるヤング図 : <u>完全対称表現</u> 

1列だけで表されるヤング図 : <u>完全反対称表現</u>  など

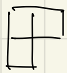
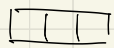
複数の列 or 行をもつヤング図 : <u>混合表現</u> 

と呼ばれる. 波動関数の対称性に関わるもので、Exercise 5.14 で触れる.

前回扱った、SU(3) での整数組 (p, q) はそれぞれ、

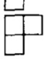
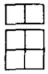
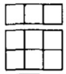
$$p = (1行目と2行目の箱の数の差), \quad q = (2行目と3行目の箱の数の差)$$

として与えられる. 例 :

 $= (0, 0) = 1$,  $= (1, 1) = 8$,  $= (3, 0) = 10$

(※ p.188 Table 5.4 も参照)

Table 5.4
Some $SU(3)$ Representations

Young Diagram	Dimension	(p, q)	$\langle F^2 \rangle$
	**1**	(0, 0)	0
	**3**	(1, 0)	$\frac{4}{3}$
	$\bar{\mathbf{3}}$	(0, 1)	$\frac{4}{3}$
	**8**	(1, 1)	3
	**6**	(2, 0)	$\frac{10}{3}$
	$\bar{\mathbf{6}}$	(0, 2)	$\frac{10}{3}$
	**10**	(3, 0)	6
	$\overline{\mathbf{10}}$	(0, 3)	6
	**27**	(2, 2)	8

$\boxed{\ }$ $\boxed{\ }$

$a=1,2,3$ $b=1,2,3$

→ 対称

$\boxed{a|b}$

$a \leftrightarrow b$ で対称

→ 反対称

$\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline\end{array}$ $a \leftrightarrow b$ で反対称

$\boxed{\ }$ $\boxed{\ }$ $\boxed{\ }$

$a=1,2,3$ $b=1,2,3$ $c=1,2,3$

$\boxed{a|b|c}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}$

$1 \leftrightarrow 1$ 対称

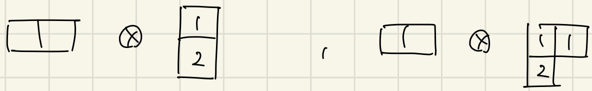
$1 \leftrightarrow 2$ 反対称を表す.

$\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline\end{array}$

これらを準備として、SU(N) 表現の直積 をヤング図を用いて取り扱う方法を示す:

1. 積をつくりたい2つのヤング図を描く。このとき、2つ目のヤング図には 行の番号を書く.

例)



2つ目のヤング図の それぞれの箱を、以下の規則に従って 1つ目のヤング図につける.
このとき、可能なヤング図をすべてつくる。

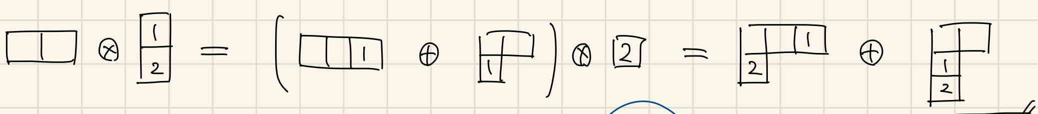
a. 下の行に進むときに、1行に含まれる箱の数が 増加しない (= proper diagrams)
b. それぞれの列(縦)は最大で N 個の箱まで。
c. 2つ目のヤング図に振った番号を i として、

$$\begin{cases} \text{右端の列から順に見たとき、}(i\text{ と書かれた箱の数}) \leq (i-1\text{ と書かれた箱の数}) \\ \text{上端の行から順に見たとき、}(i\text{ と書かれた箱の数}) \leq (i-1\text{ と書かれた箱の数}) \end{cases}$$

の両方を満たす (具体例は後述)

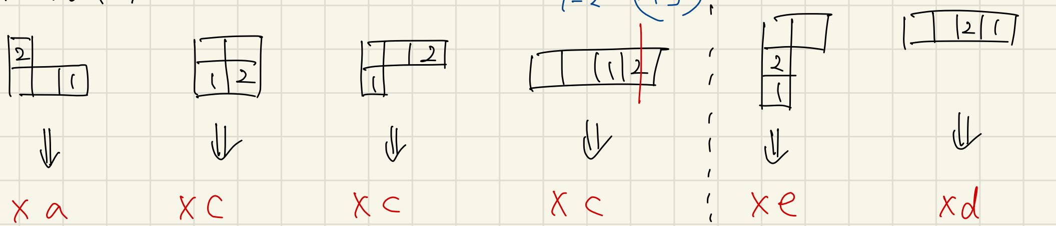
d. 行の中で 左 → 右 とみたとき、箱の中の数が減少しない.
e. 列の中で 上 → 下 とみたとき、箱の中の数が増加する.

例)



$i-1=1$ … 0
$i=2$ … 1

考えられるヤング図:



2. 得られたヤング図が 直積の結果得られる既約表現となる.

複雑な例は Exercise 5,12 で扱う。

◎ Dimensionality of Diagrams

得られたヤング図から、そのヤング図の次元を求める方法がある。これは、一般の SU(N) に対して有効。

1. ヤング図に、次のルールに沿って番号を振る.
   - 一番左上の箱に N (for SU(N))、そこから右下に向けた対角線にも N を書く.
   - 1つ右隣の対角線上に $N+1$ を書く.
   - 右隣がなくなるまで続ける.
   - 最初の対角線の左隣の対角線上に $N-1$ を書く.
   - 同様に左隣がなくなるまで続ける.

例)

N	$N+1$	$N+2$
$N-1$	N	$N+1$
$N-2$	$N-1$	N
$N-3$		

次元を計算するときに分子として用いる数 n を、箱に書かれた全ての数の積として定義。

$$n \equiv \prod_{\text{boxes}} (\text{numbers in boxes})$$

例)

SU(3) :

3	4	5
2	3	

$\Longrightarrow \quad n = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 360$

2. ヤング図を構成しているそれぞれの箱に対して "hook" (という数) を定義する。

hook は次のように決める。

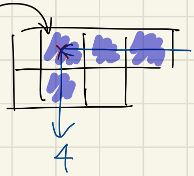
その箱のある行の一番右端から入り、その箱を角として曲がり、その箱のある列の一番下に抜けていく経路を考える。この経路に含まれる箱の総数が、その箱の hook.

すべての箱に対して、この hook を求めたら、この hook の全ての積を "分母" と定義する。

$$d \equiv \prod_{\text{boxes}} (\text{hooks})$$

例)

この箱の hook が 4



同様に求めると、

5	4	3	1
3	2	1	

(箱の中の数は その箱の hook)

このときの分母 d は $\quad d = 5\cdot4\cdot3\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1 = 360$

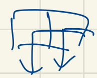
3. 1. 2. の結果を用いて、ヤング図の次元は

$$\mathrm{Dim} = \frac{n}{d}$$

として求められる。

$$\square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|}\hline N & N+1 \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}$$

SU(N) の基本表現の直積に適用すると、



$$\mathrm{Dim}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array}\right) = \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline N & N+1 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\mathrm{Dim}\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right) = \frac{\begin{array}{|c|}\hline N \\ \hline N-1 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}} = \frac{N(N-1)}{2}$$

SU(2), SU(3) の場合はそれぞれ

$$2\otimes2 = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} = 3\oplus1, \quad 3\otimes3 = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} = 6\oplus\bar{3}$$

に対応する。

一般の SU(N):

$$\square \otimes \square = \frac{N(N+1)}{2} \oplus \frac{N(N-1)}{2}$$

ここまで、2つの表現の直積を考えていた。複数の直積は順番に計算していくことで求まる.

基本表現3つの直積:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \left(\ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \right) \otimes \square$$

$$= \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{1,1,1} \oplus \ydiagram{2,1}$$

それぞれのヤング図に対して次元を求めると次のように書ける. (→ Exercise 5.12)

$$\square \otimes \square \otimes \square = \frac{1}{3}N(N+1)(N-1) \oplus \frac{1}{3}N(N+1)(N-1)$$
$$\oplus \frac{1}{6}N(N+1)(N+2) \oplus \frac{1}{6}N(N-1)(N-2)$$

SU(2)の場合

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$$

→ spin $\frac{1}{2}$ の合成

SU(3)の場合

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$ (→ Exercise 5.12)

→ QCDで大切な役割をもつ.

Exercise 5.12

(a) SU(N) 基本表現 3つの直積の次元.

ヤング図は次のようになる：

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \left(\ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \right) \otimes \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}$$

$$= \ydiagram{3} \oplus \begin{ytableau} \ & \ \\ 1 \end{ytableau} \oplus \ydiagram{1,1,1} \oplus \begin{ytableau} \ & 1 \\ \ \end{ytableau}$$

それぞれのヤング図の次元は.

1. $\ydiagram{3}$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{3}\right) = \frac{\begin{ytableau} N & N+1 & N+2 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 3 & 2 & 1 \end{ytableau}} = \frac{1}{6} N(N+1)(N+2)$$

2. $\ydiagram{2,1}$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{2,1}\right) = \frac{\begin{ytableau} N & N+1 \\ N-1 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 3 & 1 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{1}{3} N(N+1)(N-1)$$

3. $\ydiagram{1,1,1}$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{1,1,1}\right) = \frac{\begin{ytableau} N \\ N-1 \\ N-2 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 3 \\ 2 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{1}{6} N(N-1)(N-2)$$

したがって、

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = \frac{1}{6} N(N+1)(N+2) \oplus \frac{1}{3} N(N+1)(N-1) \oplus \frac{1}{3} N(N+1)(N-1) \oplus \frac{1}{6} N(N-1)(N-2)$$

(b) $SU(3)$の $3 \otimes \bar{3}$ をヤング図を用いて求め、次元も求める.

$\square = 3$, $\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \end{array} = \bar{3}$ だったので

$$3 \otimes \bar{3} \rightarrow \square \otimes \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \cancel{\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & 1 & 2 \\ \hline \end{array}} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1} \end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \cancel{\begin{array}{|c|c|}\hline \ & 2 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1} \end{array}}$$

$$= \underline{\begin{array}{|c|c|}\hline \ & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1} \end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}$$

次元を求めると.

$$\mathrm{Dim}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\ } \\ \cline{1-1} \end{array} \right) = \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{2} \\ \cline{1-1} \end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} \\ \cline{1-1} \end{array}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3} = 8$$

$$\mathrm{Dim}\left(\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline \end{array} \right) = \frac{\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

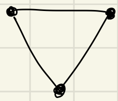
したがって,

$$\underline{3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1}$$

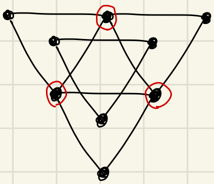
として直積の既約分解が得られる.

(c) $3 \otimes 3$ をグラフを用いた方法で構成する.

3 :

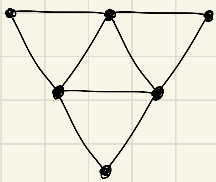


$\Rightarrow$ $3 \otimes 3$:

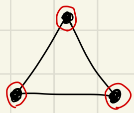


： 縮退している部分

$\Rightarrow$



$\oplus$

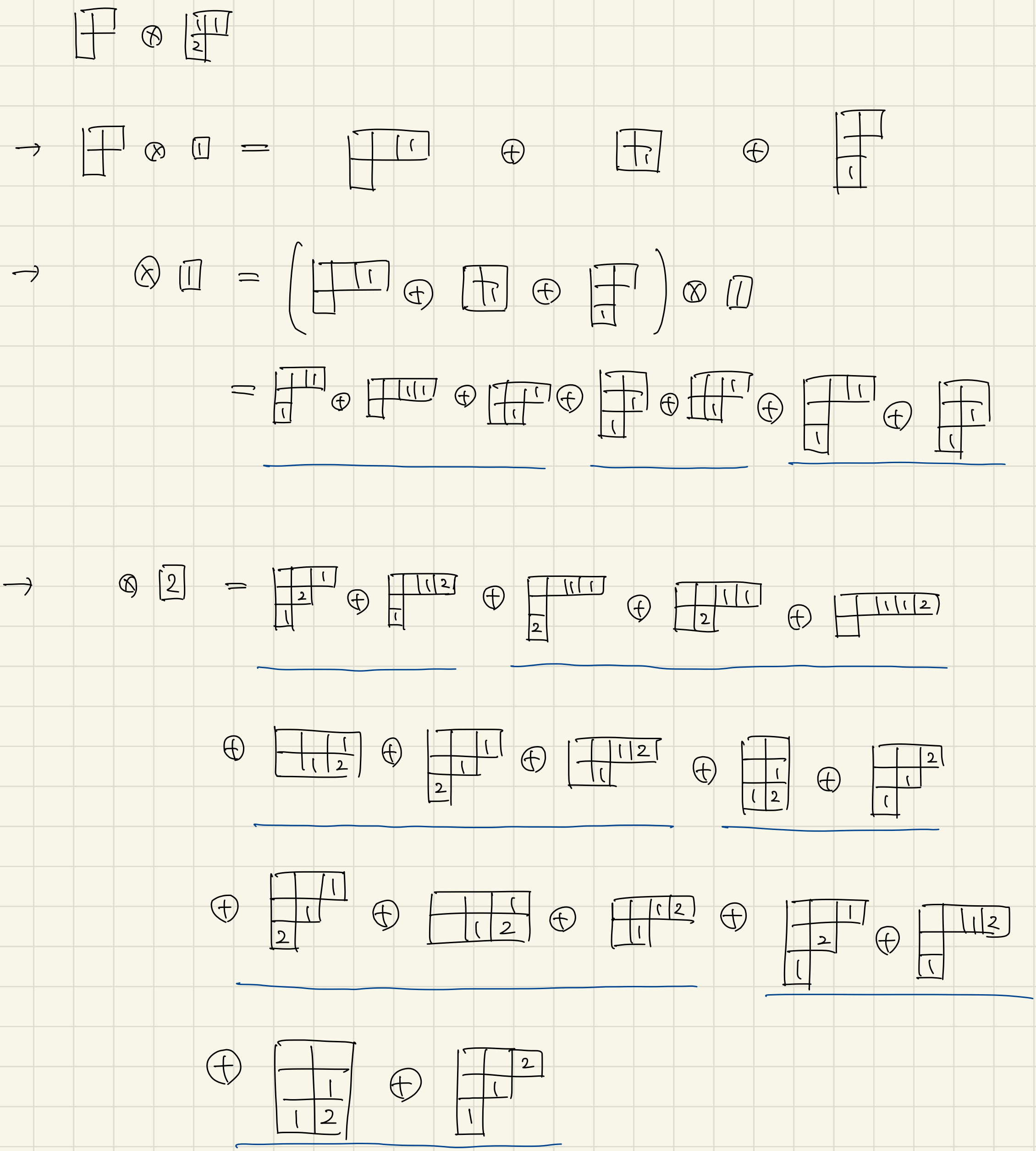


$$6 \qquad \oplus \qquad \bar{3}$$

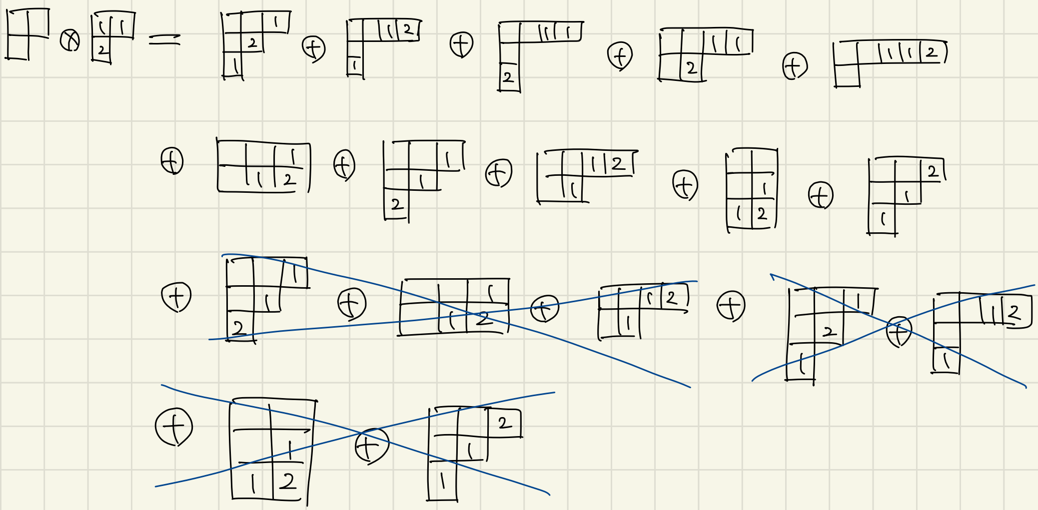
よって, $3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3}$ が得られる.

(d) ヤング図を用いて SU(3)の $8 \otimes 8$ を構成する.

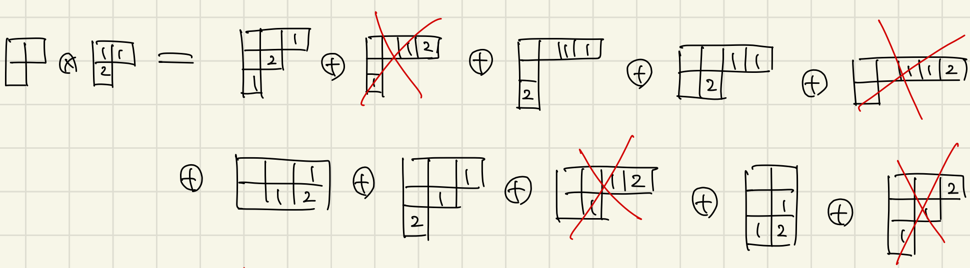
(b)の結果から, $8 =$  であることが分かる. 直積は

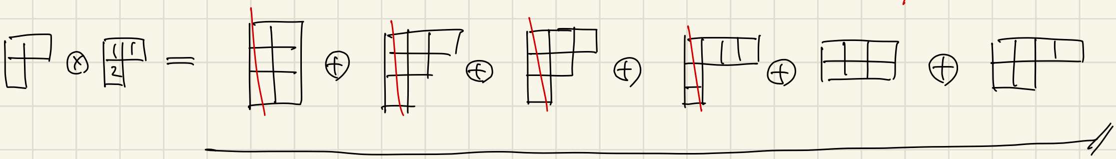


この時点で重複しているものは消す：（∵可能なすべてのヤング図を求めたいから）



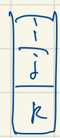
さらにヤング図のルールに違反しているグラフを消す。（c. のルールに違反している）





これが求めたいヤング図となる。

それぞれの次元を求めると、



$i, j, k = 1, 2, 3$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{2,2,2}\right) = \frac{\begin{ytableau} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{ytableau}} = \frac{4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2}{4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2} = 1$$

$$\ydiagram{2,2,2}$$

$$\ydiagram{1,1,1} \to 1$$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{3,2,1}\right) = \frac{\begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{\cancel{3}\cdot4\cdot\cancel{5}\cdot2\cdot\cancel{3}}{\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 8$$

$$\frac{\begin{ytableau} 3 & 4 \\ 2 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 3 & 1 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{\cancel{3}\cdot4\cdot2}{\cancel{3}} = 8$$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{4,1,1}\right) = \frac{\begin{ytableau} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 \\ 1 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 \\ 1 \end{ytableau}} = \frac{\cancel{3}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot5\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 10, \quad (p.q) = (3,0)$$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{3,3}\right) = \frac{\begin{ytableau} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{ytableau}} = \frac{\cancel{3}\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\cdot5\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 10, \quad (p.q) = (0,3)$$

$$\Rightarrow \overline{10}$$

$$\mathrm{Dim}\left(\ydiagram{4,2}\right) = \frac{\begin{ytableau} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{ytableau}}{\begin{ytableau} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{ytableau}} = \frac{3\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot\cancel{2}\cdot3}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}} = 27, \quad (p.q) = (2,2)$$

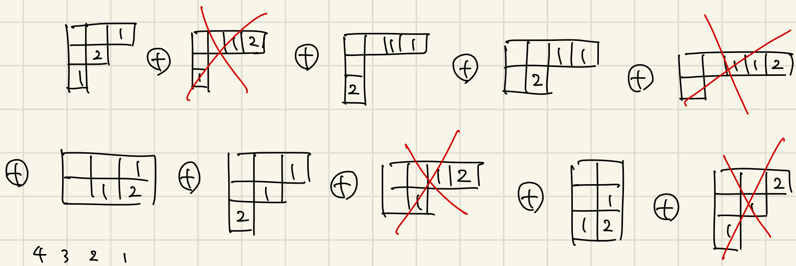
したがって、

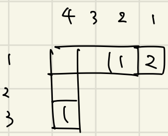
$$\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{2,2,2} \oplus \ydiagram{3,2,1} \oplus \ydiagram{3,2,1} \oplus \ydiagram{4,1,1} \oplus \ydiagram{3,3} \oplus \ydiagram{4,2}$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \overline{10} \oplus 27$$

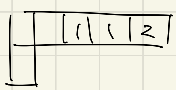
となる。

落としたヤング図





1列： 1 … 0個 2 … 1個 } → この時点でout.



1列： 1 … 0個 2 … 1個 } → out.

他も同様.

→ 6通り.

$v^a,\ v^b$ $\quad V^{ab}$ $\quad v^a v^b + v^b v^a$ $\quad a \leftrightarrow b$ sym.

$a=1,2,3,\ b=1,2,3$ $\quad V^{ab}$ $\quad v^a v^b - v^b v^a$ $\quad a \leftrightarrow b$ antisym.

$v^a,\ v^b,\ v^c$ $\quad \epsilon_{abc} v^a v^b$ $\quad (c=1,2,3)$

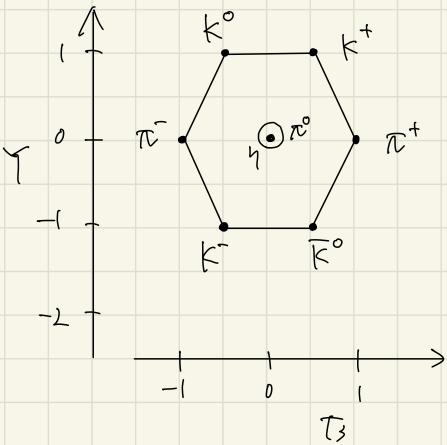
$\epsilon_{abc} v^a v^b v^c \quad (=|\rangle) = \mathbb{1}$

5.3.5 SU(3) Flavor Multiplets and the Quark Model.

Appendix B (次ページ・次々ページ) に示してあるハドロンを $Y-T_3$ 平面に図示すると次のようになる:

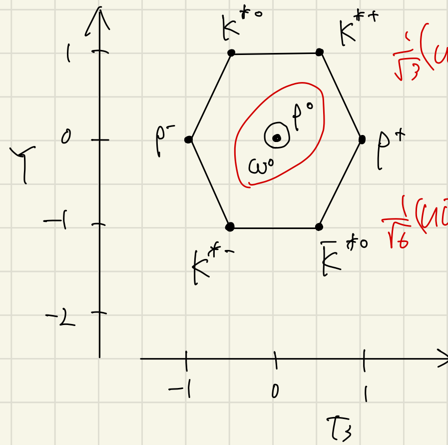
π Octet

$8\ (B=0,\ J^P=0^-)$



ρ Octet

$8\ (B=0,\ J^P=1^-)$



$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})$

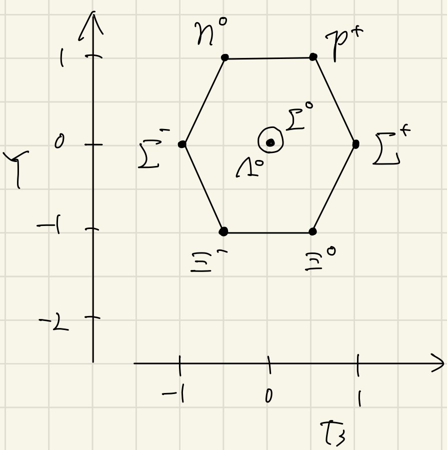
$\phi = s\bar{s}$

$\frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s})$

$\omega^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u}+d\bar{d})$

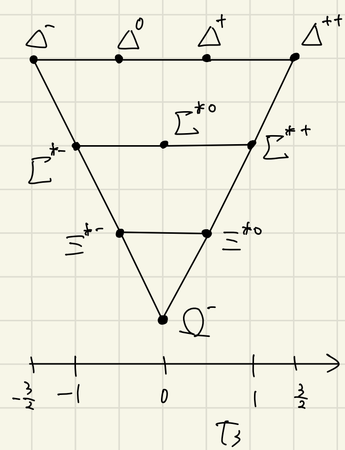
N Octet

$8\ (B=1,\ J^P=\frac{1}{2}^+)$



Δ Decuplet

$10\ (B=1,\ J^P=\frac{3}{2}^+)$



$3\otimes\bar{3}=8\oplus1$, $3\otimes3\otimes3=1\oplus8\oplus8\oplus10$ の $8, 10$ を J^P で分類

APPENDIX B

Hadronic Properties

In this appendix we list some basic properties of selected baryons and mesons. A more extensive listing may be found in the data compilation of Hernández et al. (1990).

Table B.1
Properties of Selected Baryons

baryon 8

baryon 10

Particle	Mass (MeV)	J^P	Valence Quarks	Flavor $SU(3)$
p	938.3	$\frac{1}{2}^+$	uud	**8**
n	939.6	$\frac{1}{2}^+$	udd	**8**
Σ^+	1189.4	$\frac{1}{2}^+$	uus	**8**
Σ^0	1192.5	$\frac{1}{2}^+$	uds	**8**
Λ	1115.6	$\frac{1}{2}^+$	uds	**8**
Σ^-	1197.4	$\frac{1}{2}^+$	dds	**8**
Ξ^0	1314.9	$\frac{1}{2}^+$	uss	**8**
Ξ^-	1321.3	$\frac{1}{2}^+$	dss	**8**
Δ^{++}	1230.6	$\frac{3}{2}^+$	uuu	**10**
Δ^+	1234.9	$\frac{3}{2}^+$	uud	**10**
Δ^0	1232.5	$\frac{3}{2}^+$	udd	**10**
Δ^-	1232	$\frac{3}{2}^+$	ddd	**10**
$\Sigma^+(1385)$	1382.8	$\frac{3}{2}^+$	uus	**10**
$\Sigma^0(1385)$	1383.7	$\frac{3}{2}^+$	uds	**10**
$\Sigma^-(1385)$	1387.2	$\frac{3}{2}^+$	dds	**10**
$\Xi^0(1530)$	1531.8	$\frac{3}{2}^+$	uss	**10**
$\Xi^-(1530)$	1535.0	$\frac{3}{2}^+$	dss	**10**
Ω^-	1672.4	$\frac{3}{2}^+$	sss	**10**

15

Table B.2
Properties of Selected Mesons

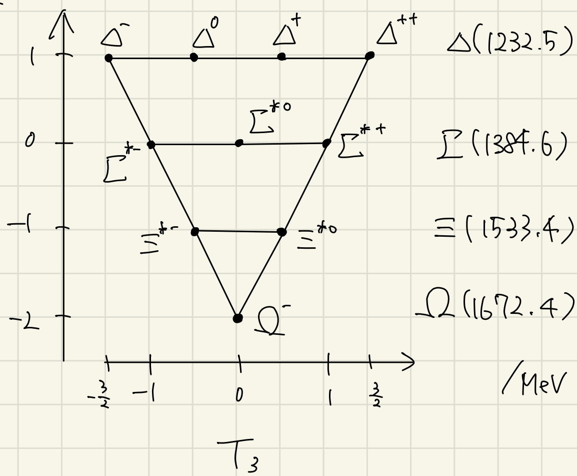
Particle	Mass (MeV)	J^P	Valence Quarks	Flavor $SU(3)$
π^+, π^-	139.6	0^-	$u\bar{d}\,(d\bar{u})$	$\mathbf{8}$
π^0	135.0	0^-	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\mathbf{8}$
K^+, K^-	493.7	0^-	$u\bar{s}\,(s\bar{u})$	$\mathbf{8}$
$K^0, \overline{K}^0$	497.7	0^-	$d\bar{s}\,(s\bar{d})$	$\mathbf{8}$
η	548.8	0^-	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\mathbf{8}$
η'	957.5	0^-	$s\bar{s}$	$\mathbf{1}$
ρ^+, ρ^-	770.0	1^-	$u\bar{d}\,(d\bar{u})$	$\mathbf{8}$
ρ^0	770.0	1^-	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\mathbf{8}$
K^{*+}, K^{*-}	892.1	1^-	$u\bar{s}\,(s\bar{u})$	$\mathbf{8}$
$K^{*0}, \overline{K}^{*0}$	896.2	1^-	$d\bar{s}\,(s\bar{d})$	$\mathbf{8}$
ω	782.0	1^-	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	$\mathbf{8}$
ϕ	1019.4	1^-	$s\bar{s}$	$\mathbf{1}$
D^+, D^-	1869.3	0^-	$c\bar{d}\,(d\bar{c})$	$\bar{\mathbf{3}}\,(\mathbf{3})$
$D^0, \overline{D}^0$	1864.6	0^-	$c\bar{u}\,(u\bar{c})$	$\bar{\mathbf{3}}\,(\mathbf{3})$
D_s^+, D_s^-	1969.4	0^-	$c\bar{s}\,(s\bar{c})$	$\bar{\mathbf{3}}\,(\mathbf{3})$
B^+, B^-	5271.2	0^-	$u\bar{b}\,(b\bar{u})$	$\mathbf{3}\,(\bar{\mathbf{3}})$
$B^0, \overline{B}^0$	5275.2	0^-	$d\bar{b}\,(b\bar{d})$	$\mathbf{3}\,(\bar{\mathbf{3}})$
η_c	2980	0^-	$c\bar{c}$	$\mathbf{1}$
J/ψ	3096.9	1^-	$c\bar{c}$	$\mathbf{1}$
Υ	9460.3	1^-	$b\bar{b}$	$\mathbf{1}$

66

これらはSU(3)の既約表現に対応している。なので、SU(3)のウエイト図と同じ図形を与えている。このことは、flavor SU(3)がこれらの状態の分類をするときによい対称性であることを示している。ただし、完全な対称性ではない。

同じ表現に属する状態の質量は近い値をとる。(下図参照)
例として $J=\frac{3}{2}$ のバリオン10重項を示した。
横の数字はisospin多重項での平均質量。
およそ20%程度の範囲で一致している。
これはflavor SU(3)が強い相互作用において良い近似であることを意味する。

Δ Decuplet
$10 \ (B=1, \ J^P = \frac{3}{2}^+)$



SU(3)の基本表現は(u,d,s)から構成されていたので、以上のメソン・バリオンはクォークの自由度で表すことができる。

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

であったので、

$$\text{baryons} = qqq,$$

$$\text{mesons} = q\bar{q}$$

と予想できる。

$$\frac{\Delta}{\Sigma} = 0.89 \qquad \frac{\Delta}{\Xi} = 0.80$$

$$\frac{\Delta}{\Omega} = 0.74 \qquad \frac{\Sigma}{\Omega} = 0.83$$

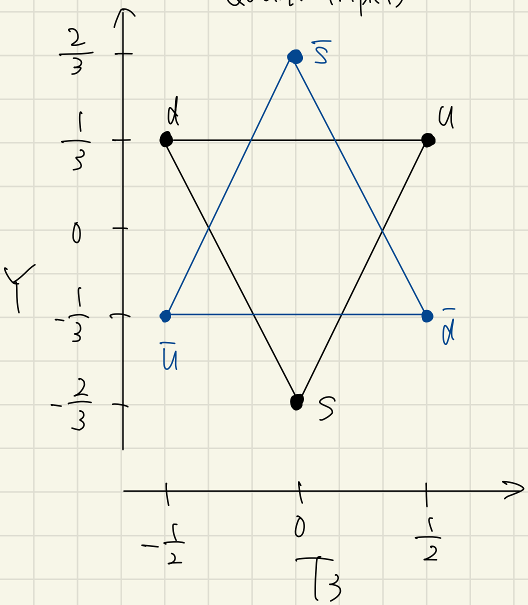
・±10%ぐらい
・経験的なもの

→ quarkがフレーバーを選ぶのかな??

⊕ 原理からくる対称性ではない。
⊕ u,d,sが近いのが偶然

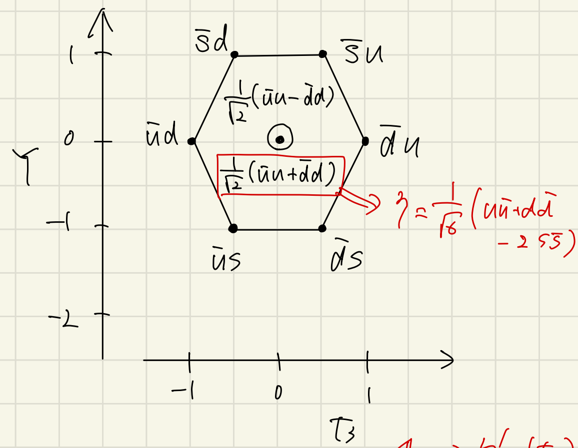
これらクォークで書いた π Octet, N Octet, Δ Decuplet を以下に示す.

Quark Triplets



π Octet

$8\ (B=0,\ J^P=\underline{0^-})$

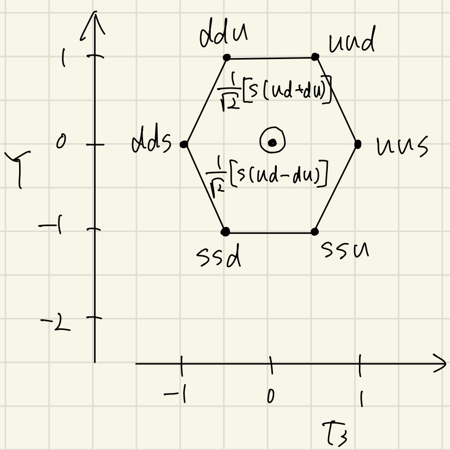


$\underline{1} \Rightarrow \eta'$ (大)

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s})$

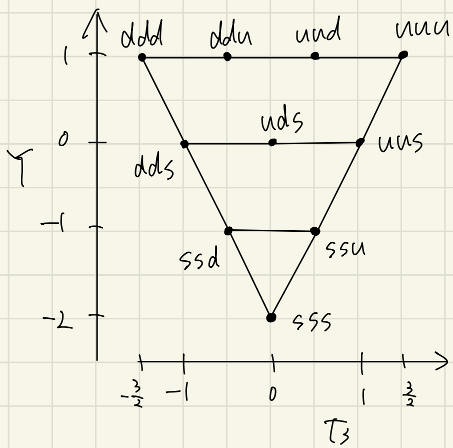
N Octet

$8\ (B=1,\ J^P=\frac{1}{2}^+)$



Δ Decuplet

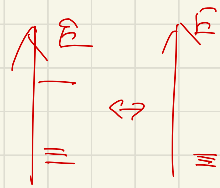
$10\ (B=1,\ J^P=\frac{3}{2}^+)$



- SU(3) flavor 8, 10 と quark の基本表現
- ρ octet は π octet と同じ (スピン・パリティが違う)

- flavor SU(3) は基本的な対称性でなく、SU(3) color からの帰結.
- QCDの color 場 [・ massless quark ⇒ すべてのフレーバーと結合
  ・ クォーク質量がフレーバーの情報をもつ]
  ↳ 強い相互作用に関わる

colorがみえない



5.3.6. SU(4) and SU(6) Quark Models

チャームクォークの発見により、SU(4)への一般化が提案されたことがあったが (u, d, s)に比べて大きく質量が異なるためにうまくいかなかった。 $\left[\begin{array}{l} u \sim d \lesssim 5\ \mathrm{MeV},\ s \sim 93\ \mathrm{MeV} \\ c \sim 1.27\ \mathrm{GeV} \end{array} \right]$

Isospin SU(2) は質量にして数%, flavor SU(3) は 20% 程度の範囲で成り立つ対称性。しかし、チャームクォークは ~GeV 程度の質量であり、SU(3) → SU(4) への拡張は有用なものとはならなかった。同様に t, b を含める拡張も却下された。

u, d, s クォークにスピン自由度を加えた SU(6) クォークモデルはうまくいっているクォークモデルの1つである.
このアイデアは $J=\frac{1}{2}$ バリオン8重項と $J=\frac{3}{2}$ バリオン10重項の間の質量差がそれほど大きくないところからきたもの. このことは、2つの多重項を1つの多重項に結びつけ、SU(3)よりも大きな群の既表現として変換するようにすればよいことを示す. 結局, $SU(3)_{flavor} \times SU(2)_{spin}$ を部分群にもつ SU(6) を考えることが提案された。

?

$$\begin{array}{c} u \\ d \\ s \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} u\uparrow \\ u\downarrow \\ d\uparrow \\ d\downarrow \\ s\uparrow \\ s\downarrow \end{pmatrix}$$

ヤング図を用いた方法の結果から

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = \underline{56} \oplus 70 \oplus 70 \oplus 20$$

として 3クォーク × 2 spin に基づく SU(6) では 56 表現が自然に出てくる. これは、spin-$\frac{1}{2}$ octet と spin-$\frac{3}{2}$ decuplet の組み合わせから要求される表現となっている.

$$\mathrm{Octet} \times \left(2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 = 2\right) + \mathrm{Decuplet} \times \left(2 \tfrac{3}{2} + 1 = 4\right) = \underline{56}$$

→ ・Hyperon (s由来)

形式的な分解を書くなら,

$$56 \longrightarrow \underset{8 \cdot \frac{1}{2}}{(8, 2)} \oplus \underset{10 \cdot \frac{3}{2}}{(10, 4)}$$

・$\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{2}$ の違いは spin補正.

と書ける. $(SU(3)_{flavor}, SU(2)_{spin})$

軽い理由が違う. (NG bosons)

メソンに対しても同様の書き方で.

$$6 \otimes \bar{6} = \underline{35} \oplus 1$$

が得られる. これも, pseudoscalar meson 8 と vector meson 9 が作る表現として予想されるものになっている.

SU(6) クォークモデルは成功を収めているが, 相対論的な場合に正しくないことが知られている.
非相対論的な場合については Ch. 12 のときに触れる.

spin-spin

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

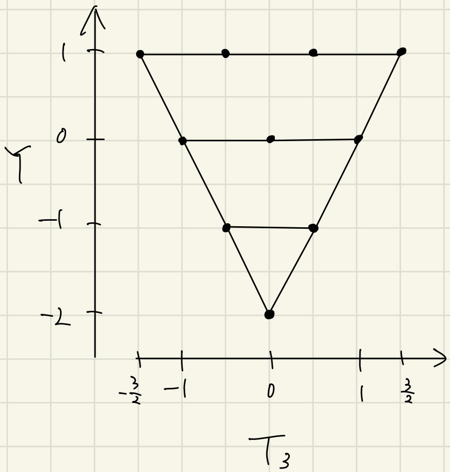
5.4 Topological Properties

ここまでの Lie 群の議論は群多様体のトポロジカルな性質に触れていた。
つまり, 空間の性質を群のパラメータの変化によって定義していた。たとえば, 連結性の概念はトポロジカルなものである. このようなトポロジカルな性質は Lie 代数によって決まらない大域的な性質である。そして, 群多様体のトポロジーはゲージ場の理論において重要な役割を果たす。この点については Ch. 13 で触れる.

Exercise 5.13

B=1 のバリオン10重項のクォークでの表示を求める。さらに、適切な置換をつくり、flavor 波動関数をつくる。

10 表現は SU(3) の基本表現 3 を 3つかけたものとして得られる。 $Y-S_3$ 平面に示したのが以下の図。



$$10 \left(B=1,\ J^P = \frac{3}{2}^+\right)$$

クォーク組成を決めるには、(u, d, s) の量子数に注目する。

flavor	f	u	d	s
baryon number	B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3rd comp. of isospin	T_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Strangeness	S	0	0	−1

$T_3 = \frac{3}{2}$ uuu このとき、 $Y = 1+0 = 1$ ∴ $(\frac{3}{2}, 1) \Rightarrow$ uuu

$T_3 = +1$ uus このとき、 $Y = 1-1 = 0$ ∴ $(1, 0) \Rightarrow$ uus

$T_3 = +\frac{1}{2}$ uud このとき、 $Y = 1+0 = 1$ ∴ $(\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow$ uud

uss $Y = 1-2 = -1$ $(\frac{1}{2}, -1) \Rightarrow$ uss

$T_3 = 0$ uds このとき $Y = 1-1 = 0$ $(0, 0) \Rightarrow$ uds

sss $Y = 1-3 = -2$ ∴ $(0, -2) \Rightarrow$ sss

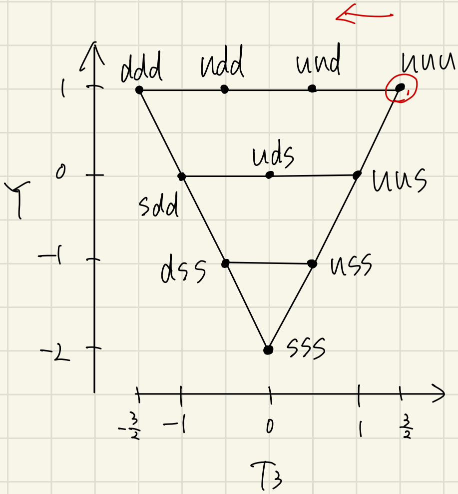
$T_3 = -\frac{1}{2}$ udd このとき $Y = 1-0 = 1$ $(-\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow$ udd

dss $Y = 1-2 = -1$ $(-\frac{1}{2}, -1) \Rightarrow$ dss

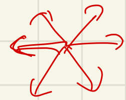
$T_3 = -1$ sdd このとき $Y = 1-1 = 0$ $(-1, 0) \Rightarrow$ sdd

$T_3 = -\frac{3}{2}$ ddd このとき $Y = 1-0 = 1$ $(-\frac{3}{2}, 1) \Rightarrow$ ddd

したがって、バリオン10重項のクォーク構成は以下のように決まる。



$10\ (B=1,\ J^P=\frac{3}{2}^+)$



SU(3)の10表現は横向きのヤング図 $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ (3,0)で表される。これは完全対称な波動関数を与える。
なので、上記のクォークの組から完全対称な波動関数をつくればよい。

$uuu \equiv \psi_u(x_1)\psi_u(x_2)\psi_u(x_3)$, $\psi_f(x)$: flavorがfの波動関数 と書くことにすると、

<u>$Y=1$</u>

$$uuu \to uuu, \quad uud \to \frac{1}{\sqrt{3}}(uud+udu+duu)$$

$$udd \to \frac{1}{\sqrt{3}}(udd+dud+ddu), \quad ddd \to ddd$$

<u>$Y=0$</u>

$T_{u\to d}(uuu)$
$= udu + duu + uud$

$$uus \to \frac{1}{\sqrt{3}}(uus+usu+suu)$$

$$uds \to \frac{1}{\sqrt{6}}(uds+usd+dus+dsu+sdu+sud)$$

$$sdd \to \frac{1}{\sqrt{3}}(sdd+dsd+dds)$$

$\underline{Y=-1}$

$$uss \to \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu) \quad , \quad dss \to \frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$$

$\underline{Y=-2}$

$$sss \to sss$$

が baryon 10 の flavor 波動関数となる.

Exercise 5.14

バリオン10重項に関連する自由度が　空間・スピン・フレーバーだけと仮定すると、基底状態がパウリの排他原理を破ることを示す。

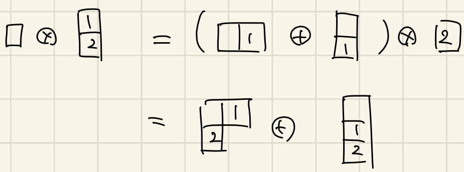
10重項の波動関数を次のように変数分離して表す：

$$\psi_{decuplet} = \psi_{space}\,\psi_{spin}\,\psi_{flavor}$$

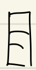
Exercise 5.13で見たように ψ_{flavor} は粒子の入れ換えに対して完全対称である。また、基底状態のとき、軌道角運動量 $L=0$ より、ψ_{space} も粒子の入れ換えで対称となる。
さらに、$J=\frac{3}{2}$ であることから、$\psi_{spin} \propto |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ となるので、ψ_{spin} も対称。
以上から $\psi_{space}\psi_{spin}\psi_{flavor}$ は粒子の入れ換えについて対称となる。これは、バリオンがfermionであることに矛盾し、パウリの排他律を破ってしまうことになる。

この矛盾を解決するために、追加の自由度として $SU(3)$ を考える（color $SU(3)$）。
このとき、color $SU(3)$ singlet があれば　バリオン10表現がパウリ原理を満たすことを示す。

$SU(3)$の1重項は

$3 \otimes \bar{3} \rightarrow$ 

$\Rightarrow \quad 8 \oplus 1$

より、 のヤング図で表される反対称な表現となる。したがって、10重項波動関数を

$$\psi_{decuplet} = \psi_{space}\,\psi_{spin}\,\psi_{flavor}\,\psi_{color}$$

と書くことにすると、全体として反対称な波動関数となり、パウリの排他律を満たすことができる。

(b) パウリの排他律を満たすように、陽子のフレーバー・スピン波動関数を構成せよ.

陽子は N-Octet ($B=1$, $J^P=\frac{1}{2}^+$) の uud に対応する ($\because$ $T_3=\frac{1}{2}$, $Y=1$)

基底状態では ψ_{space} が対称であったので、フレーバースピン $\psi_{spin}\cdot\psi_{flavor}$ も対称である必要がある。($\because$ ψ_{color} が反対称)

また、uud で $J=\frac{1}{2}$ であるので、ud の2体系はスピン1重項 $J=0$ から構成される。$\psi_{spin}\cdot\psi_{flavor}$ が対称であることを考えると、ψ_{spin}, ψ_{flavor} はそれぞれ次の反対称関数となる.

$$\psi_{spin} = \uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow \quad , \quad \psi_{flavor} = ud - du$$

これらの直積は

$$u_\uparrow d_\downarrow - u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow + d_\downarrow u_\uparrow$$

となる。ここに、$u_\uparrow$ をかけたもの

$$(u_\uparrow d_\downarrow - u_\downarrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow + d_\downarrow u_\uparrow)\times u_\uparrow$$

が $u \Leftrightarrow d$ の入れ換えで完全対称であるように置換を作る。(d, u, u の入れ換え)

$u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow$

$\Rightarrow$ $u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow + u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow + d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow$

$-u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow$

$\Rightarrow$ $-u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow$

$-d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow$

$\Rightarrow$ $-d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow$

$d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow$

$\Rightarrow$ $d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow + u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow + u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow$

これらを加えて規格化することで、陽子の基底状態 flavor-spin 波動関数を得る:

$$p \propto 2u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow + 2u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow + 2d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow$$

$$\therefore \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{18}}\left(2u_\uparrow d_\downarrow u_\uparrow + 2u_\uparrow u_\uparrow d_\downarrow + 2d_\downarrow u_\uparrow u_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\downarrow u_\uparrow d_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - d_\uparrow u_\downarrow u_\uparrow - u_\downarrow d_\uparrow u_\uparrow - u_\uparrow u_\downarrow d_\uparrow\right)$$