

## Chapter 6

Weak and

Electromagnetic Interactions

# Chapter 6. Weak and Electromagnetic Interactions.

11種 (= 12)

gauge bosons, leptons, hadrons



leptons

charged leptons	: gravitational, weak, electromagnetic
uncharged leptons	: weak, electromagnetic

○ 3世代ある

$$\begin{bmatrix} e^- & \mu^- & \tau^- \\ \bar{e}_e & \bar{\mu}_\mu & \bar{\nu}_\tau \end{bmatrix}$$

○ レプトニン数の保存

○ レプトニン数の保存

例)  $(N_e + N_{\bar{e}}) - (N_\mu + N_{\bar{\mu}})$  加減可

これは,  $e^- = e^+$ ,  $\bar{e}_e = \bar{e}_e$  が互いに反粒子であることを意味している。

中性ベクトル中間子の崩壊幅の測定から、レプトンの世代は3つしかないと示唆している。これは宇宙論による制限と符合致する。しかし、レプトニン数は3世代もつか、その質量分布はなぜか、各世代ごとのレpton数はなぜか、という問題には納得できぬ答えがない。

ハドロンは4つの基本的相互作用の影響を受ける。そこで、これらは強・相互作用による区別される。

ハドロン

ハドロン (半整数スピン)	ハドロン数の保存は近似的に成立する。
カクタ (整数スピン)	$\times 1/2$ 整数の強・相互作用の下では保存しない - 般に

さて、重力はあまり考慮しない。  
 キーノーは深くは関係はない  
 えまさか 良く理解されてない

QEDは既に場の理論の典型的な形とし導入された。

$\Rightarrow$  ch. 10 でハドロンの強相互作用を考へる

$\Rightarrow$  ch. 6, 9 でレプトン・ハドロンの弱相互作用、電磁相互作用について見ていく。

## 6.1 QED : Prototype Quantum Field Theory

これから説明する 弱相互作用・強相互作用・場の量子論 が何ぞ多くのことを得られる。

QEDにおける事柄を見てみたいと重要。

charged lepton の理論において、自由場の運動方程式は Dirac equation である。  
 Lagrangian density は

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (\not{D} - m) \psi(x)$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_0 \in$  Euler-Lagrange equation は  $\not{D}$  が Dirac 算符が得られる。

$\mathcal{L}_0$  は 大域的  $U(1)$  位相変換の下で不変である：

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha}$$

$\alpha$  は  $x$  に依存しない定数。  $\Rightarrow \mathcal{L}_0$  a 对称性の 保存則をもつ。すな

Dirac current :  $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$

(は保存カレントだね！)

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0$$

3. electrical charge  $Q$  及運動の恒量です。

$$Q = \int d^3x J^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x)$$

$\Rightarrow$  大域的対称性は大域的 ( $\leftarrow$  spaceに関して積合したといふ意味) 及電荷の保存を導く。

自由場のラグランジアン密度は局所  $U(1)$  変換の下で不变である。

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x)$$

これは  $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x) (i\cancel{D} - m) \psi(x)$  に含まれる  $\cancel{D}$  の形。

local な  $U(1)$  変換性を得るために  $\mathcal{L}_0$  を変更可能。しかし追加で新しい場を考へる必要がある。

微分を共変微分に置き換える：

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + i g A^\mu \equiv D^\mu$$

$g$ : 電荷,  $A^\mu$ : ベクトル・ポテンシャル

自由場のラグランジアン密度は次のように書き換わる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}(x) &= i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (\partial_\mu + i A_\mu) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i \cancel{D} - m) \psi(x), \end{aligned}$$

このように構成したラグランジアン密度は局所ゲージ変換の下で不变である：

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{i}{q} \partial_\mu \alpha(x)$$

確立

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} \quad \text{へ} \dots$$

$$\begin{aligned}
 L(x) &\rightarrow \underline{L}(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} \cdot i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g A_\mu) e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\
 &= \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} ; \gamma^\mu (i \partial_\mu \alpha(x) \psi(x) + e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi(x)) \\
 &\quad + \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)} ; [i g (A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x))] e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\
 &\quad - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
 &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu (- \partial_\mu \alpha(x) \psi(x)) + \bar{\psi}(x) ; \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \\
 &\quad - \bar{\psi}(x) g A_\mu(x) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \partial_\mu \alpha(x) \psi(x) \\
 &\quad - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
 &= \bar{\psi}(x) ; \gamma^\mu (\partial_\mu + i g A_\mu(x)) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
 &= \underline{L}(x)
 \end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$  の代数  $\leftrightarrow$  local  $U(1)$   $\longrightarrow$  global  $U(1)$  ... 合致可

$$\begin{array}{c}
 \alpha^2 \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi \\
 \uparrow \\
 \underline{L} = m \bar{\psi} \psi
 \end{array}$$

$$m = E = L^1$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int d^4x \underline{L} = 0 \\
 m &= L^{-2} \rightarrow \text{有限で不可逆} \\
 &= 
 \begin{cases}
 m & (\bar{\psi} \psi)^2 \\
 -2 & -6
 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{自由場} : L_0 = \bar{\psi}(x) (i\not\partial - m) \psi(x)$$

$$U(1)\text{不變} : L(x) = \bar{\psi}(x) (i\not\partial - m) \psi(x)$$

$$= \bar{\psi}(x) (i\not\partial - m) \psi(x) - g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)$$

$$\in \text{Lagrange}, \quad L(x) = L_0 + L_{\text{int}} \quad \leftarrow \frac{g}{\theta} < \infty, \quad L_{\text{int}} \text{ は}$$

$$\underbrace{L_{\text{int}} = -g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu A_\mu(x) \psi(x)}_{\rightarrow}$$

$\propto \frac{1}{\theta}$  附近.

$\therefore$  相互作用は  $V^{\mu\nu}$  と粒子の間に相互作用  $\propto \theta$  の飛行子.

$A_\mu$  は粒子生成・消滅演算子とみなされる.

1. fermion 場は対称、局所位相変換性をもつが、新たな massless field の導入は必要とする。elementary は  $\psi(x)$  で、ベクトルボソン  $\propto A_\mu$

2. 局所位相変換の不変性は動力学的意味を持つ

今回の例で言えば、fermion 場と vector boson (gauge) field  $A_\mu$  の間の相互作用を定める。

- 新たに生じる場はベクトル場。 $\Rightarrow L$  の  $\psi$ -部変換で微分項がキャリル項のように導入。
- massless (たぶん、自然的対称性を破坏しない限り質量を獲得する)
- ベクトル場対称性を D-カルテシアン座標系で  $\Rightarrow$  gauging symmetry
- 導入された場は gauge boson field と呼ばれる。(量子はゲージ粒子と呼ぶ)

Local な対称性を考えると何が嬉しい?

1. 実験による観測が決まっている。

$F = \epsilon_{ijk} F_{ij}$ . QED の U(1) charge symmetry が「 $\psi \leftarrow e^{-i\phi} \psi$ 」湯は、  
雁見渕において光子場を含む。

2. gauging symmetry は gauging ではなく対称性が exact で、独立。

$\Rightarrow$  対応する理論のくり返し可能性が、二つ以上対称性を要求する。

(何)か二つに結合するゲージ場を考へて調べよう。

global が exact だと、local が解釈が可能となる?

QED の展開は 数学的に収束しないと考へられてる。

$\alpha$  のべきが急速に収束する。

フレーバーの混合が起きる。

## 6.2 Phenomenology of the Weak Interactions

### 6.2.1 Fermi Current, Current Lagrangian

$$L_F = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J_\alpha^+(x) \quad \dots \text{Fermi Lagrangian density.}$$

$$G = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad \dots \text{Fermi constant.}$$

$\Rightarrow$  current-current theory. ( $\because$  2つの反応が直接的である)。

Weak current  $J^\alpha$  は elementary の 2 次元の 粒子の 総和 物質。  
leptonic part  $l^\alpha$ , hadronic part  $h^\alpha$  で構成される。

$$J^\alpha(x) = l^\alpha(x) + h^\alpha(x)$$

3つの相互作用を含むこと。[：中性全2 近接相互作用。]

1. Leptonic :  $l^\alpha l_\alpha^+$  による 媒介粒子過程

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

2. Hadronic :  $h^\alpha h_\alpha^+$  による 媒介粒子過程  
(non leptonic)

$$A \rightarrow p + \pi^-$$

3. Semileptonic :  $l^\alpha h_\alpha^+ + h^\alpha l_\alpha^+$  による 媒介粒子過程

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

④ leptonic & semileptonic interaction 1: ... 2.

最大のペリテーへ破れと、荷電共役の破れを含む) は、leptonic current は  
 $V-A$  型の形で表される(ただし  $\bar{U}$  は  $U$  の複数形):

$$\begin{aligned} l^\alpha(x) = & \bar{e}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_e(x) + \bar{\mu}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_\mu(x) \\ & + \bar{T}(x) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_T(x) \end{aligned}$$

ここで、 $e, U_e, \mu, U_\mu, T$  はそれぞれ場の演算子を表す。

(leptonic current は  $e, \mu, T$  に対する 3 種類の保存量である。  
(Cross term を除く。)

$U_e$  は  $e$  の状態空間で  $l^\alpha$  の行動要素となる。次要素が得られる:

$$\langle e | l^\alpha | U_e \rangle \simeq \bar{U}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_e$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_e : \text{Dirac spinor for electron} \\ U_\nu : \text{Dirac spinor for neutrino} \end{array} \right.$$

自由場の演算子を仮定。  $\Rightarrow$  相互作用が弱いことに矛盾しない。

P. 210 ~

weak interaction が  $\mathcal{L}_F = -\frac{G}{\sqrt{2}} \bar{J}^\alpha(x) J_\alpha^\dagger(x)$ ,  $J^\alpha(x) = l^\alpha(x) + h^\alpha(x)$

$$l^\alpha(x) = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_f$$

$$\simeq V - A$$

の形で表す。

$$\mathcal{L}_F \simeq (V - A)(V - A)^\dagger$$

$$\simeq VV^\dagger + AA^\dagger - VA^\dagger - AV^\dagger$$

の形で  $V$  (Vector) と  $A$  (axial vector) が定義される。

$V, A$  は 180° 变換の下で 逆変換をする。

$$\overbrace{V - A}$$

であることは明らかである。  
180° 变換の下で  $V - A$  が  $A - V$  となる。

## Exercise 6.2

massless の Dirac 方程式は massless 粒子  $\frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} = 0$  質量に近い粒子に適用可能.

(a) helicity が自由 Dirac 粒子に対しては運動の定数 にとれること、chirality は massless 粒子に 대해서のみ、良い量子数となることを示す。

helicity 演算子は  $\hat{h} = \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix} \circ \hat{p} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$  で定義される。

自由 Dirac 粒子は左ハンドル可換性を満たす。

$$H = \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + p_m \quad \left( \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

次の交換関係を計算する。

$$[H, \hat{h}] = [\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + p_m, \frac{1}{2} \vec{\alpha} \cdot \hat{p}]$$

$$= \frac{1}{2} [\vec{\alpha} \cdot \hat{p}, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}] + \frac{m}{2} [\beta, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}]$$

$$\vec{\alpha} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{すな}\text{ば}$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \hat{p}, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}] = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{=0}$$

$$[\beta, \vec{\alpha} \cdot \hat{p}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & -\vec{\alpha} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{\alpha} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & -\vec{\alpha} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{=0}$$

したがって  $[H, \hat{h}] = 0$  すなはち helicity は自由 Dirac 粒子の運動の定数となる。

chirality operator  $\gamma^5$  は  $H$  と  $\gamma^5$  の積.

$$[H, \gamma^5] = [\vec{\alpha} \cdot \hat{p} + pm, \gamma^5]$$

$$= [\vec{\alpha} \cdot \hat{p}, \gamma^5] + m[\vec{p}, \gamma^5]$$

$$[\vec{\alpha} \cdot \hat{p}, \gamma^5] = \begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \cdot \hat{p} \\ \vec{r} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \vec{r} \cdot \hat{p} \\ \vec{r} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{r} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{r} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{r} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{r} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$m[\vec{p}, \gamma^5] = m \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= m \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= m(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0 \quad (m \neq 0 \text{ かつ } \gamma^5 \neq 0)$$

したがって、 $\gamma^5$  は  $m \neq 0$  のとき  $H$  と  $\gamma^5$  の積。これは  $\gamma^5$  が chirality に運動の角速度を付す。

レバ massless fermion の chirality は 良い量子数 (= たとえば左の)。

$$\gamma^5 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^3] = \frac{i}{2} \gamma^2 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^2$$

$$(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi = (\vec{\sigma} \cdot \hat{p}^0 \vec{\tau} \hat{p}) \psi$$

$$\gamma^\mu \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu$$

$$= [p^1 p^1 + p^3 p^2 + p^1 p^3] \psi$$

$$\gamma^{ik} = \epsilon_{ijk} \left( \begin{matrix} \gamma^k & 0 \\ 0 & \gamma^k \end{matrix} \right)$$

$$= [i \gamma^2 \gamma^3 p^1 + i \gamma^3 \gamma^1 p^2 + i \gamma^1 \gamma^2 p^3] \psi$$

$$\gamma^{ak} = i \alpha^k = i \left( \begin{matrix} 0 & \gamma^k \\ \gamma^k & 0 \end{matrix} \right)$$

$$= [-i \gamma^1 \gamma^3 \gamma^1 p^1 - i \gamma^2 \gamma^3 \gamma^2 p^2 - i \gamma^3 \gamma^1 \gamma^3 p^3] \psi$$

$$\gamma^3, \gamma^2$$

$$= [\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 p^1 + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^2 p^2 + \gamma^5 \gamma^0 \gamma^3 p^3] \psi$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2 \delta^{\mu\nu}$$

$$= \gamma^5 \gamma^0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi$$

$$\gamma^1, \gamma^2$$

$$= \gamma^5 \gamma^0 \gamma^0 p^0 \psi$$

massless Dirac eq.

$$(p-m) \psi = 0$$

$$(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi = \gamma^5 p^0 \psi$$

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$= -i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0$$

$$E = p^0 = \pm |\vec{p}|$$

$$\gamma^5 \gamma^0 = -i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\gamma^5 \gamma^0 \gamma^1 = -i \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0$$

$$(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi = \gamma^5 / |\vec{p}| \psi$$

$$(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) \psi = -\gamma^5 / |\vec{p}| \psi$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left( \vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \psi}_{\gamma^5 \text{ 演算子.}} = \pm \gamma^5 \psi$$

helicity の 演算子

$m = 0$  は  $\pm$  である。  $E > 0$ ,  $E < 0$  の helicity の 正負, かたちで正負と表わす。

(b) chiral rep. 2nd Dirac 表示を求める。

② Pauli-Dirac rep.

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ Chiral rep.

$$\gamma_{ch}^\mu = U \gamma_{Dirac}^\mu U^\dagger, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{ch}^0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_{ch}^i &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau_i & \tau_i \\ -\tau_i & -\tau_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau_i + \tau_i & \tau_i + \tau_i \\ -\tau_i - \tau_i & \tau_i - \tau_i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_G & &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ -\tau_i & 0 \end{pmatrix}}_G \end{aligned}$$

$$\gamma^5_{ch} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_G$$

$$\alpha_{i, ch} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_i & \tau_i \\ \tau_i & -\tau_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\tau_i & 0 \\ 0 & -2\tau_i \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_i & 0 \\ 0 & -\tau_i \end{pmatrix}}_G$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \psi_{\text{Dirac}} = E \psi_{\text{Dirac}}$$

$$\psi_{\text{Dirac}} \rightarrow \psi_{\text{ch}} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \in \frac{\mathbb{C}}{e^{-\frac{E}{c}t}}.$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \cdot \vec{p} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} m \right] \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \\ -m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi - m \chi = E \phi \\ -m \phi - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi = E \chi \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - E) \phi = m \chi \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + E) \chi = -m \phi \end{cases}}_{\longrightarrow}$$

$m \rightarrow 0$  のとき、方程式

$$\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - E) \phi = 0 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + E) \chi = 0 \end{cases}$$

helicity  $\alpha$  固有関数  $\psi_{\text{Dirac}}$

$$\begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \phi = \frac{E}{|\vec{p}|} \phi \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \chi = -\frac{E}{|\vec{p}|} \chi \end{cases} \quad \dots \text{Weyl equation}$$

が得られる。

(c)  $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$  の 舛影演算子との性質は

$$P_{\pm}^2 = P_{\pm}, \quad P_+ + P_- = I, \quad P_+ P_- = 0$$

から 確認でき。

(d)  $\ell^\alpha(x)$  は 左巻きの粒子に対する 寄与であることを示す。

行列要素は  $\bar{U}_1 \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_2$  の形で。3.

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad (2) \quad P_L^2 = P_L \iff \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$$

を 満足する。

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_2 &= \bar{U}_1 \gamma^\alpha 2 P_L U_2 \quad (\because P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)) \\ &= 2 \bar{U}_1 \gamma^\alpha P_L P_L U_2 \quad (\because P_L^2 = P_L) \\ &= 2 \bar{U}_1 P_R \gamma^\alpha U_{2,L} \quad (\because [\gamma^\alpha, \gamma^5] = 0 \text{ 且 } \gamma^\alpha P_L = P_R \gamma^\alpha) \\ &= 2 U_{1,L}^\dagger \gamma_0 \gamma^\alpha U_{2,L} \\ &= 2 U_{1,L}^\dagger P_L \gamma_0 \gamma^\alpha U_{2,L} \quad \left( \begin{array}{l} P_L^\dagger = P_L \\ U_{1,L}^\dagger P_L \\ = (P_L U_{1,L})^\dagger \\ = U_{1,L}^\dagger \end{array} \right) \\ &= 2 \underbrace{\bar{U}_{1,L} \gamma^\alpha U_{2,L}}_{} \end{aligned}$$

従つ、V-A 型の相互作用は left-handed fermion の寄与のみ。

左巻きしか関係ない。

(e)  $\bar{\psi}\psi$ ,  $m\bar{\psi}\psi$  は chiral symmetry を explicit に持つ。

$\psi = \psi_L + \psi_R \equiv L + R$  とおき、

$$\bar{\psi}\psi = \bar{L}R + \bar{R}L, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{L}\gamma^\mu L + \bar{R}\gamma^\mu R$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \bar{L}\gamma^\mu\gamma^5 L + \bar{R}\gamma^\mu\gamma^5 R$$

を示すことがでます。

④  $\gamma^5$  の固有状態 と 質量の固有状態 が一致するものは massless のです。

⑤ ニュートン振動の発見により, massive であることが分かっています。

⑥ 太陽ニュートン問題

} 計算と数が合わない。

⑦ 大気ニュートン問題

⑧ ニュートンの質量 があるとき、

$C, P$   
maximal に近くでいい。 $L \leftrightarrow \cancel{X}$   
 $L_L \leftrightarrow \cancel{X}_e$

$CP$  は近似的に取扱いやすい

↓

T も近似的に取扱いやすい。

### 6.2.2 Hadronic Current

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

Isospin currents :  $V_j^\alpha(x) = \bar{N}(x) \gamma^\alpha \frac{T_j}{2} N(x)$

$j$  : isospin components,  $\alpha$  : Lorentz index,  $T_i$  : Pauli matrices.

$$\begin{aligned} V_i^\alpha(x) &= \bar{N}(x) \gamma^\alpha \frac{T_i}{2} N(x) \\ &= (\bar{p} \quad \bar{n}) \gamma^\alpha \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\bar{p} \gamma^\alpha n + \bar{n} \gamma^\alpha p) \quad \text{for } i=1,2,3. \end{aligned}$$

核子の electromagnetic current は

$$\begin{aligned} J_{EM}^\alpha(x) &= \bar{N}(x) \gamma^\alpha \left( \frac{1+T_3}{2} \right) N(x) \\ &= J_{EM}^\alpha(\text{isoscalar}) + J_{EM}^\alpha(\text{isovector}) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{EM}^\alpha(\text{isoscalar}) = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma^\alpha N = \frac{1}{2} (\bar{p} \gamma^\alpha p + \bar{n} \gamma^\alpha n) \\ J_{EM}^\alpha(\text{isovector}) = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma^\alpha T_3 N = \frac{1}{2} (\bar{p} \gamma^\alpha p - \bar{n} \gamma^\alpha n) \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} J_3^\alpha(x) = J_{EM}^\alpha(\text{isovector}) \\ V_\pm^\alpha(x) = \bar{N}(x) \gamma^\alpha \left( \frac{T_1 \pm iT_2}{2} \right) N(x) \end{array} \right\} \text{isovector current.}$$

Fermi Lagrangian

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G}{\Gamma_2} \bar{J}^\alpha(x) J_\alpha^+(x) \quad (6.11)$$

leptonic part & hadronic part

$$J^\alpha(x) = \underbrace{l^\alpha(x)}_{\downarrow} + \underbrace{h^\alpha(x)}_{\downarrow}$$

$$l^\alpha(x) = \sum_f \bar{U}_f \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) U_{2f} \quad \begin{matrix} \text{left-handed?} \\ \text{= left?} \\ (6.14) \end{matrix}$$

$$h^\alpha(x) \simeq \bar{U}_2 \gamma^\alpha (g_V - g_A \gamma^5) U_2$$

$\Rightarrow V-A$  型 (left-handed a/f)

$$\simeq g_V \bar{V}^\alpha(x) - g_A A^\alpha(x)$$

isovector?

偶々 1 次元

$$l^\alpha(x) \simeq V^\alpha(x) - A^\alpha(x)$$

左 a/f.

$$l^\alpha(x) l_\alpha^+(x) \simeq V V^+ + A A^+ - V A^+ - A V^+$$

$$V^\alpha = \cos \theta_c V^\alpha(\delta S=0) + \sin \theta_c V^\alpha(\delta S=c)$$

$$A^\alpha = (6.34) ??$$

$$h^\alpha = \bar{U} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c)$$

(6.35) ??

$$\begin{pmatrix} u_c \\ d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

Cabibbo - Kobayashi - Masakawa matrix

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ d_c \\ s_c \end{pmatrix}$$

Maki - Nakagawa - Sakata

## 6.3 Problems with the Fermi Phenomenology.

Fermi phenomenology はまだ 3つの問題点がある。

### 1. Unitary Violation

高エネルギーの粒子においてユニタリ性(確率保存)が破れる。

### 2. Intermediate Vector boson (IVB) の導入

1. 解決のために IVB を導入する。massive な粒子である。mass term で gauge invariance を保つ。

### 3. くりこみ不可能性

Fermi theory はくりこみ不可能な理論である。IVB を加えるとくりこみ不可能なままなるべくない。

## 6.4. Renormalization in QED.

### 1. 整取り分類

X ↗ 2. Example: 電荷、質量のくりこみ。

今日で終わらせて、次回に回す。

### 6.3.1 Unitary violation

Fermi 理論は多くの実験データの関係を明らかにされてきたが、高エネルギーにおける破綻可もどう問題を含む。

- $\text{Le} + e \rightarrow e + \nu_e$  散乱 ( $M_e \ll k$ )  
断面積は CM 系のエネルギー  $s$ , Fermi constant の 2乗 ( $\propto$  比例)

$$\text{CM 系: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 k^2}{\pi^2}, \quad \underline{\sigma = \frac{4G^2 k^2}{\pi^2} \simeq G^2 s} \quad (6.39)$$

$$s = E_{\text{cm}}^2 \simeq 2m_e E_{\text{lab}} \quad (\text{重元素の 2乗})$$

- 散乱断面積の部分波展開  
 $S$  波 ( $l=0$ ) の 断面積は  $\pi = \pi$  (性の制限なし),  $\sigma(l=0) \lesssim \frac{1}{s}$

$$\text{断面積の部分波展開: } \sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |f_l|^2 \quad (6.40)$$

$k$ : CM 系の運動量、大きさ。

$\pi = \pi$  性 ( $\propto 1$ ).

$$|f_l| \leq 1 \Rightarrow l=0 : \sigma(l=0) \lesssim \frac{\pi}{k^2} \simeq \frac{1}{s} \quad (6.41)$$

(6.39) & (6.41) で  $\pi = \pi$  上限 (等号成立) か。

$$G^2 s \simeq \frac{1}{s} \Leftrightarrow s^2 \simeq \frac{1}{G^2} \Leftrightarrow E_{\text{cm}}^2 \simeq G^2$$

$$\therefore E_{\text{cm}} \simeq G^{-1/2} \simeq 300 \text{ GeV}$$

この値から  
質量スケールが  
推測できます。

$\pi = \pi$  性が保たれる  $E_{\text{cm}}$  の上限を表す。

$\Rightarrow$  高エネルギーにおける Fermi theory の修正が必要。

$2/16$

## 6.3.2 Intermediate Vector Bosons. (IVB)

QEDの光子の  
アプローチ

Fermi theory の修正案として考へられていて、intermediate vector boson (IVB) の導入。

### ④ Fermi theory

カレント同士の同一点での相互作用を考える。

### ④ Fermi theory with IVB

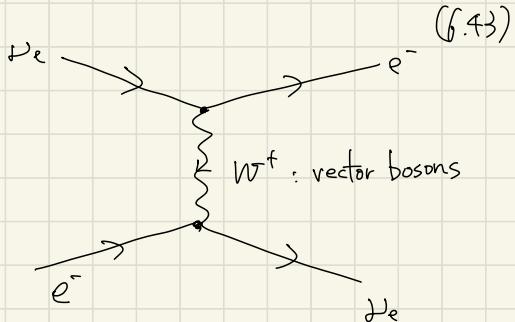
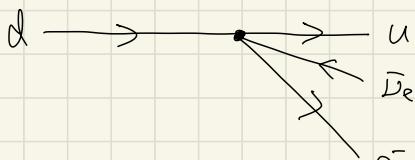
媒介粒子の中間子を導入し、有限の半径での相互作用を考える。

$$\mathcal{L}_F = -\frac{G}{r^2} J^\alpha(x) J_\alpha(x)$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L} = g_W [ J^\alpha(x) W_\alpha^+(x) + J^\alpha(x) W_\alpha^-(x) ]$$

$$G = 1.116 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$



性質	QED	Fermi theory with IVB
媒介子 bosons	$\gamma$ (neutral)	$W^\pm$ (charged), $Z^0$ (neutral)
bosons の質量	0	$\sim 100 \text{ GeV}$ ( $\because$ 弱い相互作用が短距離である)
対称性	C対称性, P対称性を持つ	C, P対称性が最大で破れ。 CP, Tは必ずしも破れないと ( $\because$ 弱い相互作用を引き起こす)
$T = \text{不変性}$	$T = \text{成立} (\because m_\gamma = 0)$	explicitに破れる ( $\because m_{W^\pm, Z} \neq 0$ )

上記のとおり違つて本子では QED & weak interaction はある意味で同じ相互作用。

$\Rightarrow$  ch. 7-9

# 6.3.3 Renormalizability

問題

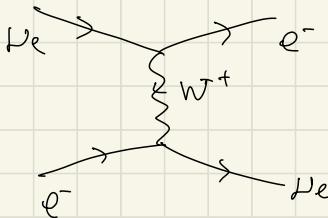
1.  $f_W$  は  $\frac{1}{\text{次元}} \sim R$  元だが、 $G$  は  $[M]^{-2}$  の次元  $\sim k^2$  だ.
2.  $W^\pm$  が 偏極  $\rightarrow$  線波  $\sim k^2$  だ.

$\Rightarrow$  Fermi theory + IVB が不可能.



lowest order :

diagram



微分断面積 (CM 系)

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{2g_W^4 k^2}{\pi^2 M_W^4} \left( \frac{1}{1 - 2q^2/M_W^2 + q^4/M_W^4} \right)$$

$$q^2 \simeq -2k^2(-\cos\theta) \quad (6.44)$$

$g_W$ : coupling constant,  $M_W$ : mass of  $W^\pm$

Fermi theory

Fermi theory with IVB.

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{G^2 k^2}{\pi^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dQ} = \frac{2g_W^4 k^2}{\pi^2 M_W^4} \left( \frac{1}{1 - 2q^2/M_W^2 + q^4/M_W^4} \right)$$

$$\xrightarrow{q^2/M_W^2 \rightarrow 0} \frac{2g_W^4 k^2}{\pi^2 M_W^4}$$

有効理論の考え方

$$\boxed{\frac{g_W^2}{M_W^2} = \frac{G}{\Gamma^2}} \quad \frac{2k^2}{\pi^2} \cdot \left( \frac{g_W^2}{M_W^2} \right)^2 = \frac{G^2 k^2}{\pi^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_W : \text{無次元} \\ G : [M]^{-2} \end{cases}$$

この達成が  $\sim 2$  可能性に相当する.

○ 高エネルギーの断面積

Fermi theory のときと異なり、高エネルギー極限の定数：

$$\sigma = \frac{4G^2 k^2}{\pi} \left( 1 + \frac{4k^2}{m_W^2} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{4G^2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{m_W^2}} = \frac{G m_W^2}{\pi} = \text{const.}$$

Fermi theory の問題を解決している？

- 問題 { 1.  $\mathcal{I}=4$  性を破る  
2. massive vector field は 線波の偏極状態をもつ

#2. 2. 1. 2

$$\textcircled{4} \quad \text{Le} + \overline{\text{Le}} \rightarrow W^+ + W^-$$

$\lambda = 1, 2, 3$  は?

$$\text{偏極状態和} : \sum_{\lambda} \epsilon_{k\lambda}^{\mu*} \epsilon_{k\lambda}^{\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{M^2} \quad (6.48)$$

$$\text{propagator} : W^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + \boxed{q^{\mu} q^{\nu} / M^2}}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (6.49)$$

↓

偏極の線波成分

断面積：

$$\int \alpha(\mu\bar{\mu} \rightarrow W_L \overline{W}_L) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} \text{const.} \quad (\text{横波成分}) \quad (6.50)$$

$$\int \sigma(\mu\bar{\mu} \rightarrow W_L \overline{W}_L) \underset{s \rightarrow \infty}{\simeq} G_F s \quad (\text{線波成分}) \quad (6.51)$$

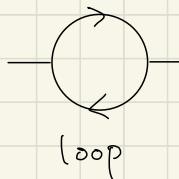
線波成分の  $s$  依存性は 高エネルギーにおける  $\mathcal{I}=4$  性を破る。

## 7.2 ベクトル場の形变と考案

④  $\langle \psi | \psi \rangle$  の可能性について

- IVB の  $\langle \psi | \psi \rangle$  が "高エネルギー" の定数
- Loop ダイアグラムは  $W^{\mu\nu}(q)$  を含む積分となり発散  $\Rightarrow$  紫外発散 (ultraviolet divergences)
- 有限個の定数では打ち消せない。
- Fermi theory は IVB は  $\langle \psi | \psi \rangle$  不可能。

$$W^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{q^\mu q^\nu / M^2}{q^2 - M^2 + i\epsilon} \rightarrow \text{const.} \quad (|q| \rightarrow \infty)$$



$$\int d^4 q \underbrace{W^{\mu\nu}(q)}_{\rightarrow \text{const.}} \rightarrow \infty \quad (\text{紫外発散})$$

⑤ 二等分性について

- 二等分性は、特定の次数で破坏されず、高次の項まで考慮すれば復元可能となる。
- Fermi theory は高次の項が無限 ( $\leftarrow$  値 or 項数?) となる。意味を持たない。
- 二等分性 = 確率保存が破れ子。

④ エーティ性の破れとくりこみ不可能の関係。

エーティ性の破れとくりこみ不可能性は弱い相互作用の現象論とそれが相性がある？

これを考ふる前に、QFT でのくりこみ可能性に対する 1 の基準を示す。

結合定数の次元	くりこみ可能性
$[M]^{-d}$ , $d > 0$	くりこみ不可能
$[M]^d$ , $d > 0$	くりこみ可能。
$[M]^0$	1) 詳細な情報が必要。

1. 結合定数  $\bar{G}$  が無次元ではない。[QED は  $\bar{G}$  が無次元で、くりこみ可能]

↓

IIB の導入により、無次元の結合定数  $g_W$  が得られてから、解決した？

↓ No.

2. massive to vector boson が偏極線形をもつ。

→ 高エネルギー ( $\sim 2 [M]^{-2}$ ) の次元で effective coupling constant が生じる。

→ くりこみ不可能。

QED の場合、光子の線波モードはゲージ不变 ( $\sim$  演算子) である。 $(\because$  QED がゲージ不变  $)$   
Fermi theory は IIB のゲージ不变性を破る。

Q. 弱い相互作用はどうなるくりこみ能?

これは必ずしも置き換える、QED がくりこみを失くす。

## 6.4. Renormalization in QED.

- 1. 積分の分類
- 2. Example: 電荷, 質量 のくりこみ.

- QFT でさえ tree level を越えた計算を考えると 積分が出てくるのは普通.
- 摂動計算が意味のあるものには必ず Divergence、取り除く必要がある。
- しかし Divergence (積分) を取り除く 体系的な方法 : renormalization

積分を扱うほど深い、積分の分類を考えることは有効。

$\Rightarrow$  Feynman diagram の 積分次数 (degree of divergence) に注目する。

### 6.4.1 Classification of Divergences.

- ② a primitive divergent graph :

電荷量積分を有限にすると収束するグラフ  $\Rightarrow$  内線図切断する二つに相当。

- ③ superficial degree of divergence :

$$D(g) = (\text{分子の } k \text{ の次数}) - (\text{分母の } k \text{ の次数})$$

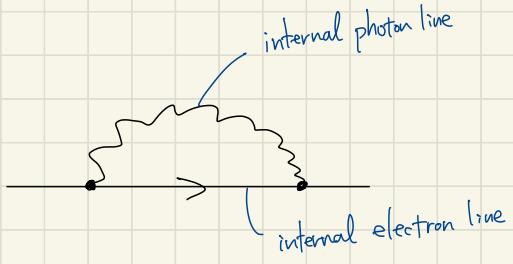
②  $4\pi R$  の QED の場合.

$$D = 4R - 2b - f \quad (6.53)$$

$k$ : loop 積分の数

$b$ : 光子の内線の数

$f$ : 電子の内線の数



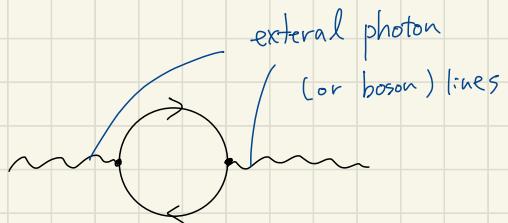
$$D = 4| - 2| - | = 1$$

ただし

$$D = 4 - \frac{3}{2}F - B \quad (6.54)$$

$B$ : 光子・ボソンの外線の数

$F$ : fermion の外線の数



$$D = 4 - \frac{3}{2} \cdot 0 - 2 = 2$$

③ QED の特徴

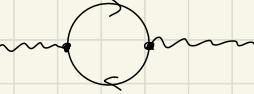
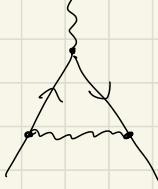
- 外線の本数が発散次数を決定
- 頂点の数 (= 接触の次数) に非依存。
- 結合定数  $\alpha$  が無次元量であることの帰結。
- UV に非可能

"naive power counting" ... ここで用いた, primitively divergent graph は

対して 本数の発散次数を決める方法

UV,  $D(g)$  (2 実際の発散次数 (actual degree of divergence)) とは異なる。

Table 6.3

Graph	B	F	D	Actual Divergence
	0	2	1	対数発散
electron self-energy				
	2	0	2	対数発散
photon self-energy				
	1	2	0	対数発散
vertex				

② 使用可能なくりみ処理の条件

- 理論論でも primitive に発散するグラフの数が有限

⇒ 各グラフのくりみが次数ごとの発散を打ち消す

9

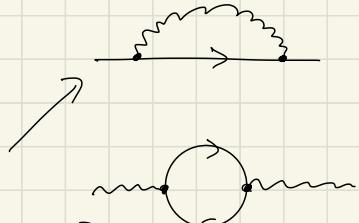
摂動論を用いた予言を可能にする

- 摂動次数を上げても新しい種類の発散が現れない。
- 有限個の実験値によって予測することができます。
- ChPT よりに摂動次数毎にくりみ可能だが、理論なくくりみ不可能という特別な場合もある。

QED に 2 の 条件 を 満たす 理論.

- primitive divergent graph が 有限個

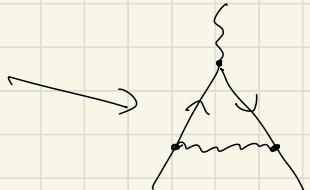
(1) the proper electron self-energy



(2) the proper photon self-energy



(3) the proper vertex

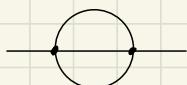


- 各グラフの 素外発散 が 除去可能

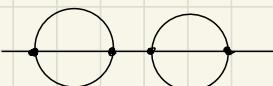
\* "proper" = 1 粒子 既約 (one-particle irreducible: 1PI)

(粒子既約 とは、1つの内線を切断しても 非連続なグラフにはならない。)

1PI :



NOT 1PI :



⇒



切断して 2 つに 連結するには。

1 粒子 可約 な グラフ (Not 1PI) は 1PI と 1PI と 分割 される。

1PI グラフ は primitive divergent graph (=?) 構成される。

全て primitive divergent graph が  $\zeta$  で かわる  $\Rightarrow$  量子論が  $\zeta$  で かわる

### Exercise 6.3

(a) スカラ一場  $\phi^r$  相互作用の見かけの発散次数  $d$

$$D = d - \left[ \frac{d}{2} - 1 \right] E - \left[ d - \frac{r}{2}(d-2) \right] n$$

と表すことを示す。  $d$ : 内部ループ数,  $E$ : 外線の数,  $n$ : 頂点数

[Ref. Peskin, Schroeder, Ch. 10]

見かけの発散次数は 内部ループ数  $k$  の差で表す。

$\text{ループ数} \equiv L$ ,  $\text{ループ構成取 propagator 数} \equiv P \leq 3$

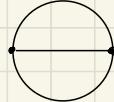
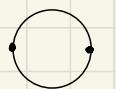
$$D = dL - 2P$$

となる ( $\because dL = S \int dk$ ,  $2 = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$ ).

$\text{ループ数 } L \text{ と 頂点の数 } n \text{ の関係は}$

$$L = P - n + 1$$

$\begin{bmatrix} 2 \text{ の頂点} \in 1 \text{ の propagator を含む。} \\ 2 \text{ のループが 2 本ある。} \end{bmatrix}$



ダイアグラム中の頂点の数と外線の数の関係は。

$$rn = E + 2P$$

$\begin{bmatrix} (\text{頂点の数}) \times (\text{相互作用の次数}) \neq \\ \text{外線と内線} = 7 \text{ 本。内線は 7 本 + 1 本} \\ 2 \text{ の外線} = 7 \text{ 本 + 1 本 = 8 本 = 2 本分の数} \end{bmatrix}$

2式から  $L, P \geq 1$  である。

$$D = d - \left[ \frac{d}{2} - 1 \right] E - \left[ d - \frac{r}{2}(d-2) \right] n$$

$4 \times 2 = 8 \text{ 本} \\ \left. \begin{array}{l} \text{外線 4 本。} \\ \text{内線 4 本} \end{array} \right\} \times 2 \text{ 本} \\ \hookrightarrow \text{外線} = 2 \times 2 = 4 \text{ 本。}$

を得る。

(b) 4次元時空での  $\phi^3, \phi^4, \phi^6$  相互作用, 2次元の  $\phi^1$  相互作用は 何を表しているか。

相互作用中の見かけの発散次数  $\mathcal{D}$  と (a) の結果を用いて表にまとめよ:

相互作用

$\mathcal{D}$

$\phi^3$

$$\mathcal{D} = 4 - E - n$$

$\Rightarrow$  搾取次数を上げると  $\mathcal{D}$  を抑えられる

$\phi^4$

$$\mathcal{D} = 4 - E$$

$\Rightarrow$  外線次数(ゲージ形)に依存。搾取次数に依存しない

$\phi^6$

$$\mathcal{D} = 4 - E + 2n$$

$\Rightarrow$  搾取次数を上げると  $\mathcal{D}$  を抑えられる。

$\phi^r$  (2dim)

$$\mathcal{D} = 2 - 2n$$

$\Rightarrow$  搾取次数を上げると  $\mathcal{D}$  を抑えられる。

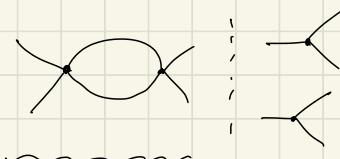
$\phi^6$  相互作用は 4次元時空では  $\mathcal{D} < 0$ 。2次元時空では  $\phi^r$  が可能。

(c) 4次元の  $\phi^4$  理論について。次のグラフの見かけの発散次数はいくつ? 収束可か?



$$E = 6 \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = 4 - 6 = \underline{-2}$$

(PI ゲージ=0 とする。)



これが発散するループを含む。

なぜ、発散するダイアグラムと考えられる。

$$\mathcal{D} = 4 - 4 = 0$$

( $\Rightarrow$  対数発散)

13/16

### Exercise 6.4.

$d$  次元のスカラーエネルギー理論において、 $\phi^r$  の相互作用を考へる。さて、

$$[\phi] = [M]^{\frac{d}{2}-1}, \quad [g] = [M]^{\delta}, \quad \delta = d+r-\frac{rd}{2}$$

となることを示す。

この結果、6.3(a)の結果を書き換える。以下が可能なための必要条件が、coupling constant  $g$  の質量次元が  $\delta \geq 0$  と定められる。

$\phi^r$  を含む Lagrangian density は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - g \phi^r$$

したがって、質量次元は  $\mathcal{L} = [M]^d$  であることを注目する。

$$(第2項) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 = [M]^d$$

$$\Leftrightarrow \phi^2 = [M]^{d-2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\phi}_{\text{}} = [M]^{\frac{d}{2}-1}$$

$$(第3項) = -g \phi^r = [M]^d$$

$$\Leftrightarrow g [M]^{r(\frac{d}{2}-1)} = [M]^d$$

$$\Leftrightarrow g = [M]^{d-r(\frac{d}{2}-1)}$$

$$\therefore g = [M]^{\delta}, \quad \delta = d+r-\frac{rd}{2}$$

$d$ : 次元,  $\phi^r$ : 相互作用のスカラーフィール理論論について、次の発散次数は

$$D = d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E - \left[\cancel{d} - \cancel{\frac{1}{2}(d-2)}\right] n$$

$$= d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E - \delta n$$

と表せる。 $\delta$  の正負の場合分けすると。

$$\delta$$

$$D$$

$$\delta > 0$$

$$d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E - \delta n \quad \text{高次の項を除く} \Rightarrow D < 0 \text{ となる} \\ \text{収束}$$

$$\delta = 0$$

$$d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E$$

収束が可能であることを示す。

$$\delta < 0$$

$$d - \left(\frac{d}{2} - 1\right) E + \delta' n$$

$n \rightarrow \infty$  で発散

$$(-\delta \leq \delta' > 0)$$

つまり、 $\delta \geq 0$  が理論がくりみ可能であるための必要条件となる。

(十分条件ではない)

### Exercise 6.5 [Ryder, 1985]

$$(a) D = 4 - \frac{3}{2}F - B \quad (6.54) \quad \begin{cases} B: 光子\cdot 末\gamma\geq の外線の数 \\ F: fermion の外線の数 \end{cases}$$

を示す (for QED)

$$(6.53) \text{ に於いて, } D = 4k - 2b - f \quad (6.53)$$

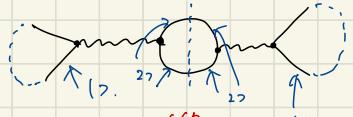
loopの数  $k$ , 光子の内線の数  $b$ , 電子の内線の数  $f$ , 頂点の数  $n$  に従う.

$$k = b + f - n + 1 \quad (a)$$

成り立つ. [ $\because$  各内線に対する運動量を割り当てる ( $\Rightarrow b+f$ ), また頂点ごとの運動量保存から  $n$  個の拘束条件 (=), 総頂点運動量が  $n$  である. つまり, 全体の運動量保存と自由度が 1 増える  $\Rightarrow b+f-(n-1) = b+f-n+1$  が不変な運動量 = loop の数]

次に 頂点ごとに光子の内線と外線の数関係を考へる. QED の場合, 1つの頂点で 4 つ光子の線が 1 つ, 電子の線が 2 つ出る. ( $\because i\bar{\psi}\gamma^\mu(i\epsilon A_\mu)\psi$ ) = 2×2×2×2.

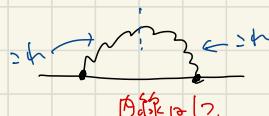
$$\text{電子: } \underbrace{2n}_{\text{頂点ごとの electron line の数}} = \underbrace{F + 2f}_{\text{運動量: 外線は } 1, \text{ 内線は } 2 \text{ の } 2 \times 2 \text{ 通り}} \quad (b)$$



頂点ごとの electron line の数 運動量: 外線は 1, 内線は 2 の 2 × 2 通り.

角筋 (22). 17

$$\text{光子: } \underbrace{n}_{\text{頂点ごとの photon line の数}} = \underbrace{B + 2b}_{\text{運動量: 外線は } 1, \text{ 内線は } 2 \text{ の } 2 \times 2 \text{ 通り}} \quad (c)$$



頂点ごとの photon line の数 運動量: 外線は 1, 内線は 2 の 2 × 2 通り

(6.53) は (a), (b), (c) を代入する.

$$\begin{aligned} D &= 4(b + f - n + 1) - 2b - f \\ &= 2b + 3f - 4n + 4 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}(n - B) + 3(n - \frac{F}{2}) - 4n + 4 \\ &= n - B + 3n - \frac{3}{2}F - 4n + 4 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow = 4 - \frac{3}{2}F - B \\ \hline \end{array} \right\} \text{左端}.$$

$$(b) \quad \mathcal{L}_F = -\frac{G}{12} J^\alpha(x) J^\beta(x) \quad (\text{これは Fermi weak theory の式})$$

$d = 4n + 3$ , 見せしめを満足する

$$D = 2n + 4 - \frac{3}{2} F$$

$$\begin{cases} n: \text{頂点数} \\ F: \text{ fermion loop 種類 } \end{cases}$$

を示すことを示す。

$$D = 4k - f$$

$$\left[ \because \left( \sum k \text{ 種類} \right) - \left( \text{fermion propagator 種類} \right) \right]$$

$k$ : loop 種類,  $f$ : fermion 内線 種類

$$k = f - n + 1$$

$$\left[ \because \text{独立な連節点 種類}: k = \text{内線} - (\text{頂点数}) + (\text{全体の頂点}) \right]$$

$$4n = F + 2f$$

$$\left[ \because \text{頂点} + 4F = \text{内線} + \text{外線} + \text{loop} + \text{頂点} \right]$$

内線  $\approx 2 \times (\text{頂点})$

$k, f \approx$  消えうる。

$$D = 4(f - n + 1) - f$$

$$= 3f - 4n + 4$$

$$= 3(2n - \frac{1}{2}F) - 4n + 4$$

$$= 6n - 4n - \frac{3}{2}F + 4$$

$$= \underbrace{2n - \frac{3}{2}F + 4}_{4}$$

接続次数 (頂点数)  $\approx$  上記で述べた接続の数であるから、

以下が不可能であることはわかる。

## 6.4.2. Example : Charge and Mass Renormalization.

① 什么方法

(1) regularization procedure

規範化是 well-defined 的，即任何形式的計算是可行的。

(2) subtraction procedure

物理的可行別要素為，發散是不可用的。

QED, 2体散乱 ( $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ )

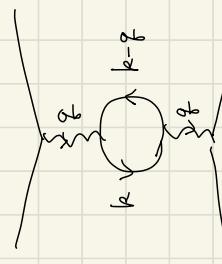


$$\Leftrightarrow J^\mu = e^* \bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(k_1) - g^{\mu\nu} \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1)$$

electron self-energy



photon self-energy



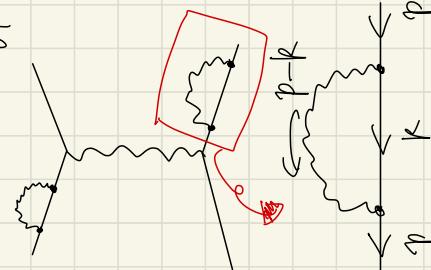
vertex function



$$i\Gamma^\mu(q) = - \int \frac{dk}{(2\pi)^4} + \left( i\epsilon \frac{1}{(k-m)} e^{iq^\mu} - \frac{i}{k-q-m} \right)$$

$$i\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu \approx 0.574 \alpha \gamma^\mu \in \mathcal{O}(1^2)$$

$$-i \int (p) = (-ie)^i \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu i((k+m))}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{\gamma_\mu (p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}{(p-k)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$



• 矛量補正

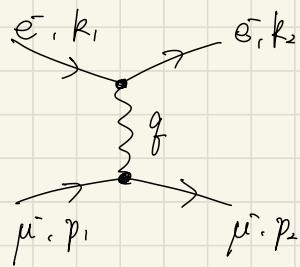
• Pauli-Villars regularization  $\Rightarrow \sim \log(1^2)$

• 真量補正

• Pauli-Villars  $\sim \log(1^2)$

$$① e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \quad (\text{in QED})$$

最後次のダイアグラム

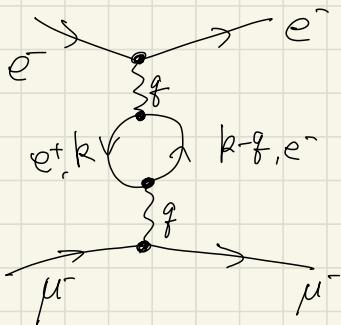


対応する半簡略

$$\begin{aligned} A^{(1)} &\simeq \bar{u}(k_2)(-ie\gamma_\mu)u(k_1) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \\ &\times \bar{u}(p_2)(-ie\gamma_\nu)u(p_1) \\ &\simeq e^2 \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_2)u(p_1) \end{aligned}$$

・  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$  のダイアグラム

このダイアグラムが持つ loop integral



$$i\text{Tr}^{(1)}(q) \simeq \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left( ie\gamma^\mu \frac{i}{k-m} ie\gamma^\nu \frac{i}{k-q-m} \right) \quad (f.56a)$$

$\Rightarrow$  photon propagator に対する補正

$$iD_{\mu\nu}(q) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{q^2} i\text{Tr}^{\alpha\beta}(q) \frac{-ig_{\nu\beta}}{q^2}$$

$$= \frac{---}{q} + \frac{---}{q} \text{---} \frac{---}{q} \quad (f.56b)$$

・ (f.56a)を見ると発散次数は  $D=2 \Rightarrow$  actual deg. of div. = logarithmically.

## ④ Cutoff による正則化

- 積分を有限の  $M^2$  で打ち切る ( $\Rightarrow \int_0^\infty dk \rightarrow \int_0^{M^2} dk$ )
- $M^2$  は依然として形に修正可  $(\Rightarrow \text{subtraction})$
- 発散  $\in$  非観測量に埋め込みで取り除かれる。

## ⑤ 結果

$$A \simeq e^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \chi(f^2) \right] \bar{U}(k_2) \gamma_\mu U(k_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{f^2} \bar{U}(p_2) \gamma_\nu U(p_1). \quad (6.57)$$

$\chi(f^2)$  : 有限かつ  $f^2 \rightarrow 0$  で  $\chi(f^2) \rightarrow 0$  の関数。

- 有効電荷を考へる必要がある。

$$A^{(0)} \simeq [e^2 \bar{U}(k_2) \gamma_\mu U(k_1) - \frac{g^{(\mu\nu)}}{f^2} \bar{U}(p_2) U(p_1)] \quad (6.55)$$

$\uparrow e_R^2$  と書いた形: effective charge.

$$A \simeq [e^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \chi(f^2) \right] \bar{U}(k_2) \gamma_\mu U(k_1) - \frac{g^{\mu\nu}}{f^2} \bar{U}(p_2) \gamma_\nu U(p_1)]. \quad (6.57)$$

$$e_R = e \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \chi(f^2) \right]^{1/2} \xrightarrow{f^2 \rightarrow 0} e \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) \right]^{1/2}$$

\* 表式は photon self-energy の次元正則化の計算から得られた

## ④ 篓散の除去

- Lagrangian に含まれる 質量、結合定数 → bare quantities
- $\langle \psi | \phi | \psi \rangle$  は bare quantity の補正質量 → physical quantity.
- physical quantity は 実験で測定される量  
( $\Rightarrow$  bare quantities の籓散が取れなくてOK)
- $\langle \psi | \phi | \psi \rangle$  可能な五重論  
(この測定量を導入することで、全ての籓散を取除ける理論)

## ⑤ Counterterms

積分を正則化すると  $\Leftrightarrow$  その Lagrangian に 项を加えると

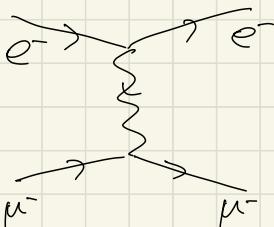
$$(i\cancel{\partial} - m + e\cancel{A}) \psi = 0$$

$$(i\cancel{\partial} - \underline{m_R} + \underline{m_R} - m + e\cancel{A}) \psi = 0$$

$$(i\cancel{\partial} - \underline{m_R} + e\cancel{A} + \underline{\delta m}) \psi = 0$$

$\delta m \equiv m_R - m$  で導入、新しい相互作用を加える=等価。

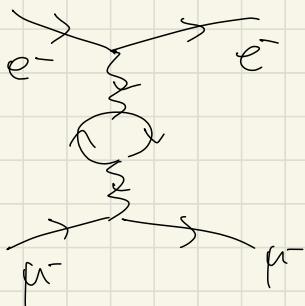
④ 穿散・除去



$$A'' \simeq e^2 \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^\perp} \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1)$$



photon self-energy (:=  $\gamma_5$ 補正.)



$$A \simeq \underline{e^2} \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

bare charge.

$$\times \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^\perp} \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1)$$

physical charge:  $e_R = e \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n C_n(\mu^2) \right] \simeq \frac{e}{1+\alpha}$ .

$q \rightarrow 0$  の表現式を求める。

逆解法。  
bare charge  $\equiv \gamma^\mu$

$$e_R^2 = e^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \right]$$

physical charge  $\equiv$   
で表せる。

$$e^2 = e_R^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_R}{3\pi} \log \left( \frac{M^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha_R^2) \right]$$

した結果 ( $e^2 = e_R^2 [\dots]$ ) を用ひて、 $A$  は  $e_R$  (= 2 表示)。

+ 穿散を除去する式が出来た。 physical charge (= 2 表示)。

$$A \simeq e_R^2 \left[ 1 - \frac{\alpha_R}{15} \frac{1}{m^2} + \mathcal{O}(\alpha_R^2) \right] \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) \frac{-g^{\mu\nu}}{q^\perp} \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1)$$

ところ、 $M^2$  (= 依存LT) は!!

# Computation of $\Pi$ (naive cutoff)

教科書の (6.56a) の 記法: 従う。

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ i e \gamma^\mu \frac{i}{k-m} i e \gamma^\nu \frac{i}{k-q-m} \right]$$

と書く。 ( Peskin & Schroeder では  $i\Pi^{\mu\nu}(q)$  と書く)。

fermion's propagator の  $\Pi$  はありわけ書き、 $\gamma$  行列のトレースを計算すれば。

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{k+m}{k^2-m^2} \gamma^\nu \frac{k-q+m}{(k-q)^2-m^2} \right]$$

$$\text{tr} \left\{ \gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho + m) \gamma^\nu [\gamma^\sigma (k_\sigma - q_\sigma) + m] \right\}$$

$$= \text{tr} \left[ \gamma^\mu \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma (k_\sigma - q_\sigma) + \underbrace{\gamma^\mu \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu m}_{=0} + \underbrace{\gamma^\mu m \gamma^\nu \gamma^\sigma (k_\sigma - q_\sigma)}_{=0} + \gamma^\mu m \gamma^\nu m \right]$$

$$= k_\rho (k_\sigma - q_\sigma) \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma) + m^2 \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu)$$

$$= k_\rho (k_\sigma - q_\sigma) \cdot 4 (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) + m^2 \cdot 4 g^{\mu\nu}$$

$$= 4 (k_\rho k_\sigma - k_\rho q_\sigma) (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) + 4 m^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4 [(k_\rho^M k_\sigma^\nu + k_\sigma^\nu k_\rho^M - g^{\mu\nu} k_\rho^2) + (-k_\rho^\mu q_\sigma^\nu - k_\sigma^\mu q_\rho^\nu + g^{\mu\nu} k \cdot q)] + 4 m^2 g^{\mu\nu}$$

$$= 4 \left\{ k_\rho^\mu (k_\sigma^\nu - q_\sigma^\nu) + k_\sigma^\nu (k_\rho^\mu - q_\rho^\mu) - g^{\mu\nu} [k \cdot (k - q) - m^2] \right\}$$

$$i\pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma^\mu \frac{k^\nu + m^2}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{(k-q)^\mu + m^2}{(k-q)^2 - m^2} \right]$$

$$= -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k^\nu - q^\nu) + k^\nu(k^\mu - q^\mu) - q^{\mu\nu}[k \cdot (k-q) - m^2]}{(k^2 - m^2)((k-q)^2 - m^2)}$$

[cf. Peskin & Schroeder, p.247~p.249]

分子因子は  $\gamma$  矢量の書式を  $\epsilon$  で表現する方法 : Feynman parameter

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k-q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2 - m^2)^2}$$

$$l \equiv k - xq \in \mathbb{R}^4$$

$$l^2 = k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2$$

$$\Rightarrow l^2 - x^2 q^2 + x^2 q^2 = k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2 - x^2 q^2 + x^2 q^2 = \underline{\underline{k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2}}$$

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)((k-q)^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - 2xk \cdot q + x^2 q^2 - m^2)^2}$$

$$= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x((1-x)q^2 - m^2))^2},$$

$$\therefore l = k - xq \in \mathbb{R}^4, \text{ 分子も書式可}.$$

$$\begin{aligned}
& k^\mu (k^\nu - g^{\mu\nu}) + k^\nu (k^\mu - g^{\mu\nu}) - g^{\mu\nu} [k \cdot (k - g) - m^2] \\
&= (k^\mu - x f^\mu + x g^\mu) (k^\nu - x f^\nu + x g^\nu) + (k^\mu - x f^\mu + x g^\mu) (k^\nu - x f^\mu + x g^\mu - g^{\mu\nu}) \\
&\quad - g^{\mu\nu} [ (k - x f + x g) (k - x f + x g - g) - m^2 ] \\
&= (\ell^\mu + x g^\mu) (\ell^\nu + (x-1) f^\nu) + (\ell^\nu + x g^\nu) (\ell^\mu + (x-1) f^\mu) \\
&\quad - g^{\mu\nu} [ (\ell + x g) (\ell + (x-1) f) - m^2 ] \\
&= \ell^\mu \ell^\nu + (x-1) \ell^\mu g^\nu + x g^\mu \ell^\nu + x(x-1) g^\mu g^\nu \\
&\quad + \ell^\nu \ell^\mu + (x-1) \ell^\nu f^\mu + x f^\nu \ell^\mu + x(x-1) f^\nu f^\mu \\
&\quad - g^{\mu\nu} [ \ell^2 + (x-1) \ell f + x g \ell + x(x-1) f^2 - m^2 ] \\
&= 2 \ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x) g^\mu f^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(x-1) f^2) \\
&\quad + \underbrace{(\text{terms linear in } \ell)}_{\ell (= k) \text{ は } \text{斜形} \rightarrow \text{}} \quad \text{(terms linear in } \ell \text{)}
\end{aligned}$$

ブルト座標に移す ( $\ell^0 = i \ell_E^0$ )  
 積分を書き表す  
 項の発散に寄与せず。

$$\begin{aligned}
-g^{\mu\nu} \ell^2 &= -g^{\mu\nu} (\ell^0{}^2 - \ell^1{}^2 - \ell^2{}^2 - \ell^3{}^2) \\
&= -g^{\mu\nu} (-\ell_E^0{}^2 - \ell^1{}^2 - \ell^2{}^2 - \ell^3{}^2) \\
&= +g^{\mu\nu} \ell_E^0{}^2
\end{aligned}$$

$$2\ell^{\mu}\ell^{\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^{-2} \quad \left[ \text{積分の対称性から出でる関係式} \right]$$

$$i\pi^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}$$

$$\times \frac{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\ell_E^{-2} + g^{\mu\nu}\ell_E^{-2} - 2x(-x)g^{\mu}g^{\nu} + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)g^2)}{(\ell_E^{-2} + \Delta)^2}$$

,  $\Delta = m^2 - x(1-x)g^2$  の積分は有限,  $\ell_E = 1$  で打ち切ると

$$i\pi^{\mu\nu}(q) \propto e^2 / 1^2 g^{\mu\nu}$$

∴ 5種類の  $\pi^{\mu\nu}$  が得られる

$$\left( \frac{(73)}{(74)} \approx \frac{\ell_E^{-2}}{\ell_E^4} \approx \frac{1}{\ell_E^2}, \int d^4\ell_E \frac{1}{\ell_E^{-2}} = 2\pi^2 \left( \ell_E^2 d\ell_E \frac{1}{\ell_E^{-2}} = 2\pi^2 \int \ell_E d\ell_E \sim 1^2 \right) \right)$$

(73), (74) 正則化の方法が必要.  $\Rightarrow$  次元正則化 (Dimensional Regularization).  
Pauli - Villars procedure

○ Pauli - Villars procedure.

質量の重い粒子に応じて propagator を手で加え、高運動量の領域で滑らかに cutoff を導入する方法。

$$\text{photon propagator : } \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \longrightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{\underbrace{(k-p)^2 - 1^2 + i\epsilon}}$$

## ④ Dimensional Regularization

・ 時空の次元  $d = 1, 2$  計算し、 $d \rightarrow 4$  の極限を最後に考える方法。

時間 1 次元、空間  $(d-1)$  次元のアインニン積分を考へる。

例)

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}$$

$\Downarrow$   
 $d$  次元単位球の表面積

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

$d$	$\Gamma(d/2)$	$\int d\Omega_d$	
1	$\sqrt{\pi}$	2	$\leftarrow [-1, 1]^n \wedge \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
2	1	$2\pi$	$\leftarrow$ 単位円の周囲
3	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$4\pi$	$\leftarrow$ 単位球の表面積
4	1	$2\pi^2$	$\leftarrow$ 4次元球面の表面積

証明

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{\pi})^d &= \left( \int dx e^{-x^2} \right)^d = \int d^d x \exp \left( - \sum_{i=1}^d x_i^2 \right) \quad |r| = \sqrt{\sum x_i^2} \text{ とおき、変数変換} \\
 &= \int d\Omega_d \int_0^\infty dx r^{d-1} e^{-r^2} = \left( \int d\Omega_d \right) \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty d(r^2) (r^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-r^2} \\
 &= \left( \int d\Omega_d \right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)
 \end{aligned}$$

$\square$   $x^2 = r^2$  を戻す