Chapter 2

Canonical Quantization of Local Field Theory

Chapter 2. Canonical Quantization of Local Field Theories.

古典的な場と相互作用している量子力学的粒子を扱う理論では不十分になってきた。
さらに、真空偏極のようなプロセスのために、1粒子の理論はその妥当性を失った。
場の量子力学的なゆらぎは仮想粒子ー空孔対の生成し、本質的な多体系を導いた。
1つ目の問題（⇒古典場との相互作用では不十分）には古典場を量子化することで解決を図る。電磁場の場合には、その量子化の手続きは量子化されたベクトル場の豊かな描像と0質量の場・粒子＝光子を導いた。この理論は光子が放出または吸収される過程を記述するのに見事に適していた。それは、光子を生成・消滅させる場の演算子を採用したためである。

他の fermions と bosons の場合において、量子力学的な記述を得る方法を非相対論・相対論的な場合の両方について私たちは知っている。
(Schrödinger eq. AND Dirac or Klein-Gordon eq.)
しかし、どちらの場合も波動方程式を量子化するときに、古典場のように扱えるので大きなアドバンテージを持っていることが分かる。この手続きは第二量子化と呼ばれる。第一量子化は適切な境界条件をもった波動方程式を導入することに対応し（⇐？）、第二量子化は波動方程式を古典的な場の方程式として解釈することによって場を量子化することに対応する。

Schrödinger 方程式の第二量子化については簡単な説明で済ませる。これは、新しい物理を伴わないためである。しかし、特に多体系の理論への応用のような場合には、第二量子化による formalism は自然に量子統計性を持つのでかなり扱うのが簡単になる。（第一量子化の方法に比べて。）
同じような状況が相対論的な波動力学の場合にも生じる。Maxwell のときの類推から、Dirac eq. と KG eq. の第二量子化は粒子を生成・消滅させる場の描像を導く。この粒子＝場の量子の生成・消滅は場との結合による物理状態の中での相互作用に伴って生じる。

この第二量子化の方法は1粒子の波動方程式に基づく方法よりも、素粒子物理の考え方に近いものである。

May 21st, 2021

Ch. 2

○ ここまでの方法では不十分になってきた。

↳ 量子力学の単純な相対論的拡張.　↳ 粒子・反粒子の対生成や対消滅、真空偏極　など

そこで、古典的な場の量子化を考えていく。
電磁場の量子化の際に見られたように、粒子の生成と消滅を扱うことができる.

○ Fermion と Boson については 非相対論的 (Schrödinger eq.), 相対論的 (Dirac eq. & KG eq.) のどちらの場合も量子力学的な扱いを知っている.

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Schrödinger eq.} & \not\Rightarrow & \text{第一量子化} \\ \text{Dirac eq. \& KG eq.} & \not\Rightarrow & \text{第二量子化} \end{array}\right.$$

に対応していて、後者の方が場の量子化には都合が良い.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Hamilton-Jacobi} \\ \text{partial diff. eq.}\end{array}} \xrightarrow{\text{1st}} \text{波動方程式} \xrightarrow{\text{2nd}} \text{場}$$

古 → 量 のように。

○ 量子化についての説明は簡単に済ませる. どちらも物理的には同じ.
ただし、第二量子化の方が多体系を扱うには便利.

○ 相対論的波動力学の場合にも第二量子化がうまくいく.
粒子の生成・消滅を記述でき、素粒子物理のアプローチに近い。

May 21st, 2021

Ch. 2

○ ここまでの方法では不十分になってきた。

↳ 量子力学の単純な相対論的拡張.

↳ 粒子・反粒子の対生成や対消滅、真空偏極 など

そこで、古典的な場の量子化を考えていく。
電磁場の量子化の際に見られたように，粒子の生成と消滅を扱うことができる.

ゼミ後修正

○ fermions と bosons に対しては非相対論的・相対論的な量子力学的描像を知っている.

⇒ Schrödinger eq. ・ Dirac eq. & KG eq.

これら2つの場合はどちらも波動方程式の形をしている. このことから, これらの方程式を古典的な場であるかのようにみなして波動方程式を量子化する手法が有効.

⇒ 第二量子化.

○ 第一量子化 … 適切な境界条件を持った波動方程式を導入する

○ 第二量子化 … 波動方程式を古典場の方程式として解釈することで場を量子化する.

↳

$$
\begin{tikzcd}
\text{古典力学 (離散系)} \arrow[r, "\text{量子化}"] \arrow[d, "\text{連続極限}"] & \text{量子力学 (離散系)} \arrow[d, "\text{連続極限}"] \\
\text{古典場の理論} \arrow[r, "\text{量子化}", "\text{第二量子化}"'] & \text{量子場の理論}
\end{tikzcd}
$$

ex) Harmonic Oscillator

○ 量子化についての説明は簡単に済ませる. どちらも物理的には同じ.
ただし，第二量子化の方が多体系を扱うには便利.

○ 相対論的波動力学の場合にも第二量子化がうまくいく.
粒子の生成・消滅を記述でき，素粒子物理のアプローチに近い。

2.1. Quantization in Discrete Mechanics

- 1次元の古典系を考える.
- Lagrangian $L(q,\dot{q}) = T - V$
- q: 一般化座標, $\dot{q}$: 一般化速度, T: 運動エネルギー, V: ポテンシャル

2.1.1 Lagrange Equation of motion

Hamilton's principle から, 古典経路 $q(t)$ の満たす条件:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})dt = 0$$

端点 ($t=t_1, t_2$) では $\delta q = 0$, 1次の変分までで, 作用 S が変化しない。

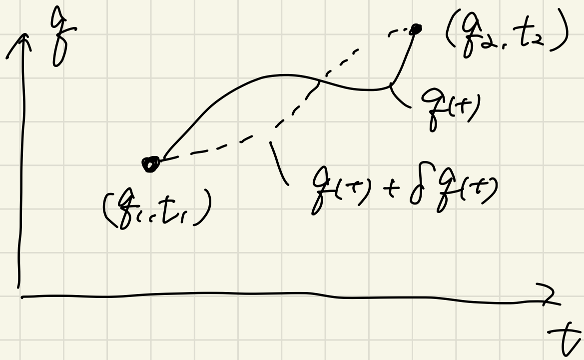
具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q})\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt \\
&\simeq \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right\} dt \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right\} \delta q\, dt
\end{aligned}$$

任意の δq に対して $\delta S = 0$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0} \quad \cdots \text{Euler-Lagrange equation.}$$

$\boxed{\text{Exercise 2.1}}$



$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$ に対しては

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = m\ddot{q} \qquad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dV}{dq}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\ddot{q} + \frac{dV}{dq} = 0}$$

Newton's equation を導く.

Exercise 2.1　Euler-Lagrange equation を ハミルトンの原理から導く.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q,\dot{q})\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}) - L(q,\dot{q}) \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \cancel{L(q,\dot{q})} + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \underline{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}} - \cancel{L(q,\dot{q})} + O(\delta^2) \right\} dt$$

$$\underline{\quad} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\,dt = \underbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2}}_{t_1, t_2 \text{ で } \delta q = 0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underline{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)} \right\} \delta q \cdot dt$$

任意の変分 δq に対して $\delta S = 0$ となるためには、$\underline{\qquad}$ $= 0$ より.

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \qquad \cdots \text{Euler-Lagrange eq.}$$

が従う.

2.1.2. Quantization of the Classical Hamiltonian.

Hamiltonian を導入する. Lagrangian とは 次のルジャンドル変換によって変換される:

$$H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q})$$

一般化運動量 $p \equiv \partial L/\partial \dot{q}$

Hamiltonian を p, q で 微分したものは, Hamilton 方程式を与える.

○ ハミルトンの正準方程式

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} & (p \text{ 微分}) \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} & (q \text{ 微分}) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0 - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}}$$

$$= 0 - \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}$$

Euler Lagrange eq.

$$= -\frac{d}{dt}p$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \qquad \underline{\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}}\,//$$

○ 正準量子化の手続き

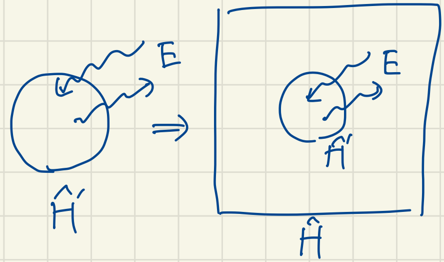
古典量 p, q を 交換関係を満たす量子力学的演算子へ置き換える.

$$p, q \rightarrow \hat{p}, \hat{q}, \quad [\hat{p}, \hat{q}] = -i$$

○ 座標空間での表式

$$q \rightarrow \hat{q} = q \quad , \quad p \rightarrow \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial q}$$

波動力学にはいくつかの"描像"、"表示"がある。



より大きい系を考えることで、孤立系として扱える。

(i) Schrödinger描像

$$i\frac{\partial \psi(\vec r,t)}{\partial t} = \hat H \psi(\vec r,t)$$

- $\hat H$はあらわに時間 t を含まない。(⇒ エネルギーが保存する系を考える。)
- 粒子の力学は 波動関数 ψ に含まれる。
- 波動関数が時間依存性をもち、operator は基本的に時間に依らない。
- 波動関数 ψ の時間発展を解く

(ii) Heisenberg描像

$$\psi_S(t) = e^{-i\hat H t}\,\underline{\psi_S(t=0)} = e^{-i\hat H t}\,\underline{\psi_H} \qquad [\psi_H = \psi_S(t=0)]$$

$$\underline{\hat O_H(t)} = e^{i\hat H t}\hat O_S e^{-i\hat H t}$$

[Schrödinger ope. $\hat O_S$ と Heisenberg ope. $\hat O_H$ の関係]

添字の S, H は各々 Schrödinger描像、Heisenberg描像 での波動関数、演算子を意味する。

- $\hat H$ がエルミートのとき、この変換はユニタリー ⇒ 確率を保存
- 任意の行列要素は S, H、で一致する：

$$\langle \psi_H' | \hat O_H | \psi_H \rangle = \langle \psi_S | \underbrace{e^{-i\hat H t}\cdot e^{i\hat H t}}_{=1} \hat O_S \underbrace{e^{-i\hat H t}\cdot e^{i\hat H t}}_{=1} | \psi_S \rangle$$

$$= \langle \psi_S | \hat O_S | \psi_S \rangle$$

$\hat H$同士は可換。

- 演算子の時間発展を解く。
- Heisenberg方程式

$$\frac{d\hat O_H}{dt} = i[\hat H, \hat O_H(t)]$$

$\hat O_H(t) = e^{i\hat H t}\hat O_S e^{-i\hat H t}$ を t で微分する。

$$\frac{d\hat O_H(t)}{dt} = i\hat H \underline{e^{i\hat H t}\hat O_S e^{-i\hat H t}} - i\,\underline{e^{i\hat H t}\hat O_S \hat H e^{-i\hat H t}}$$

$$= i[\hat H, \hat O_H] \quad //$$

非相対論的量子力学の範囲では 両者の違いは taste と convenience,
相対論的量子場の場合は, Heisenberg 描像の方が好まれる.(もしくは相互作用表示*)

<u>理由</u>

(1) 相対論的場の理論では ψ が複雑になってしまう. また, ψ を扱うよりも operator を扱った方が簡単.

(2) Heisenberg 描像では 場の演算子の中に時間と座標の両方が現れる.
ローレンツ共変性が分かりやすい形になる.

Heisenberg 表示では, p と q の同時刻交換関係は同じ形

$$[p(t), q(t)] = -i$$

を保つ. また, 演算子 $p(t), q(t)$ についての Heisenberg 方程式は 古典力学の Hamilton 方程式と同じ形となる (次ページ);

$$\begin{cases} \dfrac{dp(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q(t)} \\ \\ \dfrac{dq(t)}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p(t)} \end{cases}$$

時間に関して1階の方程式なので, $p(0), q(0)$ を決めればよい. このとき, $t=0$ においても交換関係が成り立つ必要があることに注意.

* 相互作用表示

$$\psi_I(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t}\psi_S(t)$$

$$\hat{O}_I \equiv e^{i\hat{H}_0 t}\hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0 t}$$

時間に依存するポテンシャルを扱う際などに用いる.

確認 （演算子を表す ^ は省略）

$H = H(p, q)$ とし、p, q の級数の形で書けるとする。このとき、$[p, H]$, $[q, H]$ は

$[p, H] = [p, \sum_m h_m q^m]$ ← q の m 乗, $m \geq 1$, $[p, p] = 0$ より, q のべきだけ考える.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_m h_m [p, q^m] \\
&= \sum_m h_m \{ q[p, q^{m-1}] + [p, q^{m-1}] q \} \\
&= \cdots \\
&= \sum_m h_m \cdot m q^{m-1} \underbrace{[p, q]}_{= -i} \\
&= -i \cdot m \sum_m h_m q^{m-1} \\
&= -i \frac{\partial H}{\partial q}
\end{aligned}
$$

$[q, H] = [q, \sum_n h_n p^n]$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_n h_n [q, p^n] \\
&= \sum_n h_n \{ p[q, p^{n-1}] + [q, p^{n-1}] p \} \\
&= \cdots \\
&= \sum_n h_n \cdot n p^{n-1} [q, p] \\
&= i \frac{\partial H}{\partial p}
\end{aligned}
$$

これより,

$$\frac{dp}{dt} = i[H, p] = i \cdot i \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\frac{dq}{dt} = i[H, q] = i(-i)\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

2.1.3 Harmonic Oscillator in the Heisenberg Picture

Heisenberg rep. の説明として、1次元の Harmonic Oscillator を考える.

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$ ← $\omega^2 q^2$ の誤植

ω : 振動数, $m = 1$　　　$[p, q] = -i$ を設定することで量子化

Heisenberg 方程式

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \qquad \underbrace{\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p}$$

$$\downarrow$$

$$\ddot{q} = \frac{dp}{dt}$$

以上, 2式より

$$\underline{\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad , \quad \dot{q} = p}$$

を得る. さらに,

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q + ip), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q - ip)}$$

を導入すると、運動方程式は次のようになる. (導出は次ページ)

$$\dot{a}(t) = -i\omega a(t) \quad , \quad \dot{a}^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t)$$

これらの方程式は

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t} \quad , \quad a^\dagger(t) = a_0^\dagger e^{i\omega t}$$

を解にもつ.

確認

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip)$$

逆に解いて、

$$a + a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(2\omega q) \rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$a - a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(2ip) \rightarrow p = \frac{\sqrt{2\omega}}{2i}(a - a^\dagger)$$

$\dot{p} = -\omega^2 q$, $\dot{q} = p$ に代入する.

○ $\dot{p} = -\omega^2 q$

$$\frac{\sqrt{2\omega}}{2i}(\dot{a} - \dot{a}^\dagger) = -\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$\dot{a} - \dot{a}^\dagger = -\omega^{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}\omega}(a + a^\dagger)$$

$$\therefore \underline{\dot{a} - \dot{a}^\dagger = -i\omega(a + a^\dagger)}$$

• $\dot{q} = p$

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\dot{a} + \dot{a}^\dagger) = \frac{\sqrt{2\omega}}{2i}(a - a^\dagger)$$

$$\dot{a} + \dot{a}^\dagger = \frac{2\omega}{2i}(a - a^\dagger)$$

$$\therefore \underline{\dot{a} + \dot{a}^\dagger = -i\omega(a - a^\dagger)}_{//}$$

この2式から、

$$\dot{a} = -i\omega a(t), \quad \dot{a}^\dagger = i\omega a^\dagger(t)$$

を得る.

このとき、$a, a^\dagger$ に関する交換関係から、次が従う.

$$[a(t), a^\dagger(t)] = [a_0, a_0^\dagger] = 1$$

$$[a(t), a(t)] = [a_0, a_0] = [a^\dagger(t), a^\dagger(t)] = [a_0^\dagger, a_0^\dagger] = 0$$

$a, a^\dagger$ を用いると ハミルトニアン H は、何通りかの方法で書ける。

$$H = \frac{\omega}{2}(a^\dagger a + a a^\dagger) = \frac{\omega}{2}(a_0^\dagger a_0 + a_0 a_0^\dagger)$$
$$= \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2}\right)$$

基礎的な量子力学では、$a_0^\dagger, a_0$ を エネルギー量子 $\hbar\omega$ の生成・消滅演算子とし、
$N = a_0^\dagger a_0$ を数演算子とする。a_0 は基底状態に作用すると 0 を与える。
(この状態を真空と呼んだ。)
$N = a_0^\dagger a_0$ の固有値を n として、N-量子状態の波動関数は

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_0^\dagger)^n \psi_0$$
$$\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega$$

で与えられた。[消滅演算子 $\hat{a}|0\rangle = 0$ において座標表示をとれば求められる]

- 各 n に対応する状態は直交している。

- $a_0^\dagger, a_0$ の行列要素は

$$\langle \psi_{n+1} | a_0^\dagger | \psi_n \rangle = \langle \psi_n | a_0 | \psi_{n+1} \rangle = \sqrt{n+1}$$

より一般的に書くと 次のように書ける。

$$\langle \psi_{n+1} | a^\dagger(t) | \psi_n \rangle = e^{i\omega t} \langle \psi_{n+1} | a_0^\dagger | \psi_n \rangle$$

Harmonic Oscillator は 全ての状態についての固有値、波動関数が
求めることができ、完全に解かれている問題。

○ 数演算子 $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$、$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ の間の交換関係について。

$\hat{a}$、$\hat{a}^\dagger$ の間には次の交換関係が成り立つ。

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1,\quad [\hat{a},\hat{a}]=[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]=0$$

これを用いて $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ との交換関係を作ると、

$$\begin{aligned}[\hat{N},\hat{a}] &= [\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}]\\ &= \hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}]+[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\hat{a}\\ &= 0-\hat{a}\\ &= -\hat{a}\end{aligned}$$

$$[\hat{N},\hat{a}]=-\hat{a}$$

$$\begin{aligned}[\hat{N},\hat{a}^\dagger] &= [\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger]\\ &= \hat{a}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger]+[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]\hat{a}\\ &= \hat{a}^\dagger+0\\ &= \hat{a}^\dagger\end{aligned}$$

$$\therefore [\hat{N},\hat{a}^\dagger]=\hat{a}^\dagger \quad //$$

この交換関係の形から、$\hat{a}^\dagger$、$\hat{a}$ が $\hat{N}$ の固有値を ± 1 だけ変えることが数学的に知られている。

※ $[H_a, E_{\pm\alpha_a}]=\pm\alpha_a E_{\pm\alpha_a}$ の形に一般化できる。

今の場合は $a=1$ で、$\alpha_a=1$ であり、$H_a\to\hat{N}$、$E_{\pm\alpha_a}\to\hat{a}^\dagger,\hat{a}$ に対応する。

確認

$$a^\dagger a + a a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q - ip)\cdot\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q + ip)$$
$$+\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q + ip)\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q - ip)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 + \cancel{i\omega qp} - \cancel{i\omega pq} + \omega^2 q^2 - \cancel{i\omega qp} + \cancel{i\omega pq} + p^2\right)$$
$+p^2$

$$= \frac{1}{\omega}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$$

$$\therefore \underline{H = \frac{\omega}{2}\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right)}$$

$a = a_0 e^{-i\omega t}$, $a^\dagger = a_0^\dagger e^{i\omega t}$ を代入すると.

$$H = \frac{\omega}{2}\left(a_0^\dagger e^{i\omega t} a_0 e^{-i\omega t} + a_0 e^{-i\omega t} a_0^\dagger e^{i\omega t}\right)$$

$$\underline{= \frac{\omega}{2}\left(a_0^\dagger a_0 + a_0 a_0^\dagger\right)} \,//$$

$$a^\dagger a = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q - ip)\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(\omega q + ip)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 + i\omega qp - i\omega pq + p^2\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 + p^2 - i\omega[p, q]\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega}\left(\omega^2 q^2 + p^2 - \omega\right)$$

$$\therefore \underline{H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)} \,//$$

今、扱ったのは1つの振動子についての問題。独立なn個の振動子へと一般化できる。

$$q(t) \to q_i(t) \quad (i=1\ldots n) \qquad p(t) \to p_i(t) \quad (i=1\ldots n)$$

$$\dot{p}_i(t) = i[H, p_i(t)], \qquad \dot{q}_i(t) = i[H, q_i(t)]$$

独立な振動子をとっているので交換関係は次のように一般化される。

$$[p_i(0), q_j(0)] = -i\delta_{ij} \qquad (i,j=1\ldots n)$$

$$[p_i(0), p_j(0)] = [q_i(0), q_j(0)] = 0 \qquad (i,j=1\ldots n)$$

この交換関係は動力学の問題を完全に決定する。

⟶ Heisenberg eq. は同時刻交換関係をすべての時間に渡って保存する。

離散系での正準量子化の概念を場へと拡張する。⟹ $n\to\infty$ の極限

この極限によって、正準量子化された場の力学へと連続的に移る。

- 直感的だが、相対論的場の理論の文脈では自明ではない。
- 実用上は問題なく、十分な正当性をもつ。

独立な n 自由度の調和振動子 $\xrightarrow{n\to\infty}$ 1次元のひもの振動

$q_i(t)$ に関する n 個の連立方程式 $\xrightarrow[\text{空間を連続}]{n\to\infty}$ $\phi(x,t)$ に関する場の方程式

i = 座標

$\phi(x,t)$ が変位、$\partial\phi/\partial t$ が速度

x = 座標

⇓ 次元を上げる

$q_{ij}(t)$ に関する $n\times n$ 個の連立方程式 $\xrightarrow{n\to\infty}$ $\phi(x,y,t)$ に関する場の方程式

↓ さらに…　　⇓

⋮ $\xrightarrow{n\to\infty}$ $\phi(\vec{x},t)$ に関する場の方程式

2.2. General Properties of the Action.

作用 $S = \int d^4x \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ ［自然単位系では無次元］

Lagrangian, Lagrangian density

$$L = \int d^3x \mathcal{L}$$ ［しばしば、$\mathcal{L}$ のことを Lagrangian と呼ぶ］

- 正準量子化
  作用の変分が 0 であるような古典経路を考え、その運動を量子化した。

- Feynman 経路積分
  作用 S が明確な役割を持つ。つまり、確率振幅が e^{iS} に比例するとし、すべての可能な経路について足し合わせたものが確率振幅だと考える。

場が従うべき一般的な条件を列挙しておく。 $\Rightarrow$ 場の理論を構築するときの寄り所となる。

1. $\mathcal{L}$ が局所的 $\Rightarrow$ 各 x^μ において、ϕ, $\partial_\mu\phi$ にのみ依存する。

2. S は全確率保存のために実数である。

3. S は 2階より高階の微分を含む古典的運動方程式を与えない。
   $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ は微分 ∂_μ を 1つの項に 2つまでしか含むことができない。($\because$ Euler-Lagrange eq.)

4. 基本的な保存則を満たすために、S は ポアンカレ群の下で不変。

5. 特別な場合には、S は追加の内部対称性をもつ $U(1)_{charge}$, $SU(3)_{color}$ など

S は自然単位系においては無次元量。$\int d^4x \mathcal{L}$ より $\mathcal{L}$ は $[L^{-4}] = [M^4]$ の次元をもつ。
このことに注目して、場や演算子の次元が決まる。

2.3 Lagrangian Densities for Free Fields.

有限自由度の場合の類推から、場 $\phi(\vec{x},t)$ を量子化する.

1. 古典場の Lagrangian density $\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ を構成する.
   Lagrangian は
$$L = \int \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\, d^3x$$

2. 一般化運動量を定義
$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \quad , \quad \dot{\phi} = \partial_0\phi$$

3. Hamiltonian density $\mathcal{H}$ をルジャンドル変換で構成
$$\mathcal{H}(\pi,\phi) = \mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}$$

   Hamiltonian H は
$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(\pi,\phi)$$

4. 標準的な演算子への置き換え.（ただし, Bosons field, fermion の場合は §2.6）

$$[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)] = 0, \quad [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\pi(\vec{x},t),\phi(\vec{x}',t)] = -i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

場の量子化は, $\mathcal{L}$ の構成, 場の交換関係の設定, 場に対する Euler-Lagrange eq. という手順で行う.

スカラー関数 ϕ に対しての変分 $\phi(x) \to \phi(x)+\delta\phi(x)$ を考えたとき. ハミルトンの原理から場に対する Euler-Lagrange eq. を導く.

$\phi \to \phi + \delta\phi$ に対して、Sの変分は、

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \delta \int_V d^4x \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\
&= \int_V d^4x \, \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\
&= \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right\} \\
&= \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right]_{\partial V}}_{=0} + \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\}
\end{aligned}
$$

任意の変分$\delta\phi$に対して$\delta S = 0$

$$
\therefore \quad \underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0}
$$

自由スカラー場の Lagrangian $\mathcal{L}$ は

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \underline{-m^2 \phi}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)(\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial^\nu \phi + \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi) \cdot g^{\nu\alpha} \overbrace{\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \{ \partial_\alpha \phi \}}^{\delta_{\mu\alpha}} \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi = \underline{\partial^\mu \phi}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -m^2\phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0$$

$$\therefore \quad \left[\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right]\phi = 0$$

Klein-Gordon 方程式を導く

コメント

1. 場の Euler-Lagrange 方程式において、$\partial_\mu \phi$ は有限自由度での速度 $\dot{q}$、ϕ は有限自由度での振幅 q と同じ役割をもつ。

2. 得られた方程式がローレンツ変換な形をしている。Lagrangian がローレンツスカラーとして構成されている。

3. $\mathcal{L}$ に対して $\partial_\mu \Lambda^\mu$ を加えても方程式が変わらない。
これは、$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu$ に対して $\delta S = 0$ を要請して得られる Euler-Lagrange eq. が $\mathcal{L}$ のものと同じということ。（次ページ説明）

4. 重力を考慮しない限り、$\mathcal{L}$ に定数を加えても古典系には影響がない。（次ページ説明）

◎ 3の説明

$$\delta S' = \delta \int d^4x \, \mathcal{L}'(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$= \delta \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu \Lambda^\mu \right\}$$

$$= \int d^4x \, \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \delta \int d^4x \, \partial_\mu \Lambda^\mu$$

Gauss's theorem

$$= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right\} + \delta \underbrace{\oint d^3\sigma_\mu \Lambda^\mu}_{=0}$$

$$= \delta\phi \int d^4x \left\{ \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}}_{=0} \right\}$$

$$\equiv 0$$

◎ 4. の説明

$$\mathcal{L}'(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + C \quad , \quad C : \text{const.}$$

とすると、

$$\delta S' = \delta \int d^4x \, \mathcal{L}'(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$= \int d^4x \{ \delta \mathcal{L} + \underbrace{\delta C}_{=0} \}$$

$$= \underbrace{\int d^4x \, \delta \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}_{\to \text{ Euler-Lagrange eq.}}$$

となり、等価な Euler-Lagrange eq. を与える。

2.3.1 Real Scalar or Pseudoscalar Field

スピン0、実スカラー場

$$\underline{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2}$$

Klein-Gordon 方程式を導くことを確認する。電荷なしスカラー、擬スカラー粒子に対して有効。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left\{\frac{1}{2}(\partial^\nu \phi)(\partial_\nu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)}\left\{\frac{1}{2} g^{\nu\sigma}(\partial_\sigma \phi)(\partial_\nu \phi)\right\}$$

$$= \frac{1}{2} g^{\nu\sigma}\left\{\delta^\mu_\sigma \partial_\nu \phi + \delta_\mu^\nu \partial_\sigma \phi\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{g^{\nu\mu}\partial_\nu \phi + g^{\sigma\mu}\partial_\sigma \phi\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi + \partial^\mu \phi)$$

$$= \underline{\partial^\mu \phi}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \underline{\partial_\mu \partial^\mu \phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \underline{-m^2 \phi}$$

$$\therefore \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

$$\underline{(\Box + m^2)\phi(x) = 0}$$ を得る。

2.3.2 Complex Scalar Field

複素スカラー場は次のように書かれる.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\right) \quad , \quad \phi^\dagger(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\phi_1(x) - i\phi_2(x)\right)$$

※ 2つの自由度があるので, 実スカラー場を2つ導入する (ϕ_1, ϕ_2).

ϕ_1, ϕ_2 は電荷演算子の固有状態ではないが, $\phi^\pm = \phi_1 \pm i\phi_2$ として固有状態を作ることができる.

Lagrangian density は

$$\mathcal{L} = |\partial^\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2$$

このとき, $|\partial^\mu\phi|^2 = (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi)$, $|\phi|^2 = \phi^\dagger\phi$ 　$\phi, \phi^\dagger$ に対して独立な変分を考えることで, $\phi, \phi^\dagger$ についての Klein-Gordon equation を得る.

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi$$

- Equation of ϕ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left\{(\partial^\nu\phi)^\dagger(\partial_\nu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi\right\} \\
&= (\partial^\nu\phi)^\dagger \cdot \frac{\partial(\partial_\nu\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} \\
&= (\partial^\nu\phi)^\dagger \cdot \delta_\mu^\nu \\
&= (\partial^\mu\phi)^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \partial_\mu(\partial^\mu\phi)^\dagger \\
&= \partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi^\dagger$$

したがって, Euler-Lagrange eq. は

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger + m^2\phi^\dagger = 0 \qquad \therefore \underline{(\Box + m^2)\phi^\dagger(x) = 0}$$

$\phi^\dagger$ についての変分では, $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$ を得る.

荷電スカラー, 荷電擬スカラー粒子の記述をするのに適している.
$\phi, \phi^\dagger$ は互いに反対の符号の電荷をもった粒子に対応する.

2.3.3. Dirac Spinor Field

Dirac spinorの共役を $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger \gamma^0$ で定義する。このとき、Lagrangian density

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x)$$

は次のDirac方程式を導く：

$$\underline{(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0}$$

<u>確認</u>

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger(\gamma^0 i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma^0 m)\psi$$
$$= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi$$

$$\boxed{i\partial\!\!\!/ = i\gamma^\mu\partial_\mu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\left\{i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\partial_\nu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi\right\}$$
$$= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\delta^\nu_\mu$$
$$= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \partial_\mu(i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu) = \underline{i\partial_\mu\psi^\dagger\cdot\gamma^0\gamma^\mu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial\psi}\left\{i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\partial_\nu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi\right\} = \underline{-m\psi^\dagger\gamma^0}$$

eq. $\Rightarrow$ $i\underbrace{\partial_\mu\psi^\dagger}\gamma^0\gamma^\mu + m\psi^\dagger\gamma^0 = 0$

$\downarrow \dagger$

$$-i(\gamma^\mu)^\dagger(\gamma^0)^\dagger(\partial_\mu\psi^\dagger)^\dagger + m(\gamma^0)^\dagger(\psi^\dagger)^\dagger = 0$$

$\downarrow$ $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0,\ (\psi^\dagger)^\dagger = \psi$

$$-i(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0(\partial_\mu\psi) + m\gamma^0\psi = 0$$

左から γ^0 をかける

$$-i\gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0(\partial_\mu\psi) + m\gamma^0\gamma^0\psi = 0 \quad (\because \gamma^0(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0 = \gamma^\mu,\ \gamma^0\gamma^0 = 1)$$

$$\underline{\therefore -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\psi = 0} \Longrightarrow \underline{(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0}$$

2.3.4 Massless Vector Field

電磁気相互作用を導入するとき、場の強さを表すテンソル $F^{\mu\nu}$ を次のように定義する:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

ここで、A^μ は 4元ポテンシャル. 自由場の Lagrangian density は

μ, ν : Lorentz index

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

と表される. この $\mathcal{L}$ からは自由場の Maxwell 方程式が従う. 光子のような 0 質量のベクトル粒子の記述に適する.

確認

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\rho\nu})(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu} g^{\rho\nu})$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu)$$

$$-\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu)$$

$$= \underline{-(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -(\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu) = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$ より $\underline{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0}$ $\Rightarrow$ Maxwell 方程式.

書き下してみると、

$$\begin{cases} \partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial^i \partial_\mu A^\mu = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = 0 & \cdots ① \\
\partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial^i \partial_\mu A^\mu = 0 & \cdots ②
\end{cases}
$$

① $\partial_\mu \partial^\mu A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu = 0$

$$\underline{\cancel{\partial_0}\partial^0 A^0} + \partial_i \partial^i A^0 \underline{- \partial^0 \cancel{\partial_0} A^0} - \partial^0 \partial_i A^i = 0$$

$$\partial_i \partial^i A^0 - \partial^0 \partial_i A^i = 0$$

$$-\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}A^0) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\circ\left(\underline{-\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}\right) = 0$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$
$$= \underline{-\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

$$\therefore \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$$

② $\partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial^i \partial_\mu A^\mu = 0$

$$\partial_0 \partial^0 A^i - \vec{\nabla}^2 A^i - \partial^i \partial_0 A^0 + \underline{\partial^i \partial^j A^j} = 0$$

微分を2つ含むので
符号反転は起こらない.

(i) $i = 1$

$$\partial_0 \partial^0 A^1 - \vec{\nabla}^2 A^1 \underline{- \partial^1 \partial_0 A^0} + \underline{\partial^1 \partial^1 A^1 + \partial^1 \partial^2 A^2 + \partial^1 \partial^3 A^3} = 0$$

$A^\mu = (A^0, \vec{A})$, $x^\mu = (x_0, \vec{x})$, $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

に注意して書き下すと

$$\frac{\partial^2 A^1}{\partial t^2} - \left(\cancel{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}_{③} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{④}\right)A^1 + \underline{\frac{\partial^2 A^0}{\partial x \partial t}} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{\frac{\partial A^1}{\partial x}} + \underbrace{\frac{\partial A^2}{\partial y}}_{①} + \underbrace{\frac{\partial A^3}{\partial z}}_{②}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A^1}{\partial t} + \frac{\partial A^0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial A^2}{\partial x}}_{①} - \underbrace{\frac{\partial A^1}{\partial y}}_{③}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\underbrace{\frac{\partial A^1}{\partial z}}_{④} - \underbrace{\frac{\partial A^3}{\partial x}}_{②}\right) = 0$$

ここで、

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ , \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A^3}{\partial y} - \frac{\partial A^2}{\partial z} \\ \frac{\partial A^1}{\partial z} - \frac{\partial A^3}{\partial x} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

なので、

$$-\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\nabla \times \vec{B})_x = \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_x$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \vec{j} = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

となり、$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c = 1$、$\vec{j} = \vec{0}$ の Maxwell 方程式となる.

$\hookrightarrow \nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$

以上から、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

は Maxwell eqs. のうち、$\nabla \cdot \vec{E} = 0$、$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}$ を含む.

[$\nabla \cdot \vec{B} = 0$、$\nabla \times \vec{E} = 0$ は初期条件として方程式に組み込まれている.]

2.3.5 Massive Vector Field

最後のLagrangian density は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu$$

で与えられる。これは、次の方程式（Proca equation）を導き、質量 m のベクトル粒子を記述する。

プロカ

$$(\Box + m^2)A^\mu = 0$$

確認

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) + \frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho$$

として、Lagrange方程式をつくる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}(\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu)(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho) \\
&\quad -\frac{1}{4}(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu} - g^{\sigma\mu}g^{\nu\rho}) \\
&= -\frac{1}{4}\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu \right. \\
&\qquad \left. + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[4\partial^\mu A^\nu - 4\partial^\nu A^\mu\right] \\
&= \underline{-(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}
\end{aligned}$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \underline{-\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left(\frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(\frac{\partial g^{\rho\sigma}A_\sigma}{\partial A_\nu}\cdot A_\rho + A^\rho \delta^\nu_\rho\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(g^{\rho\sigma}\delta_{\nu\sigma}A_\rho + A^\nu\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(g^{\rho\nu}A_\rho + A^\nu\right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2\left(A^\nu + A^\nu\right)$$

$$= \underline{m^2 A^\nu}$$

したがって、Euler-Lagrange方程式は

$$m^2 A^\nu + \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$$

$$\rightarrow \quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = 0$$

$$\rightarrow \quad (\Box + m^2)A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu = 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{(\Box + m^2)A^\mu - \partial^\mu\underbrace{\partial_\nu A^\nu}_{0} = 0}$$

となる。さらに発散をとると、

$$(\Box + m^2)\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\partial^\mu\partial_\nu A^\nu = 0$$

$$\Rightarrow \quad m^2\partial_\mu A^\mu = 0$$

$m \neq 0$の場合に対しては $\partial_\mu A^\mu = 0$ を意味し、$\underline{(\Box + m^2)A^\mu = 0}$ を導く。

Exercise 2.2

(2.34) ⟶ (2.39) の行間を埋める.

スカラー・KG eq. に対応する $\mathcal{L}$ を見つける. スカラー・KG eq. は

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$$

であり、この方程式に対応する $\mathcal{L}$ が

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

となることの確認. ハミルトンの原理から $\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x)$ に対して,

$$\delta S = \delta\int_V d^4x\, \mathcal{L} = \int_V d^4x\, \delta\mathcal{L}$$

$$= \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \right\}$$

$$= \underbrace{\left[\delta\phi \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]_{\partial V}}_{\to 0} + \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right\}\delta\phi$$

$$= \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right\}\delta\phi$$

$$\equiv 0$$

$$\therefore\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$\downarrow$

$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0$ が得られる.

2.4 Quantization of the Real Scalar Field.

場の量子化 : 自由場 ⟶ 相互作用のある場

まずは spin-0 の エルミートな場から始める.

↳ Hamiltonian がエルミートであること ⟺ エネルギーが実で、保存する.

2.4.1 Operators and Equation of Motion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \mathcal{V}(\phi)$$

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{H}_{int}(\phi)$$

- $\mathcal{H}_{int} = 0$ のとき、スピン0の自由場の Lagrangian
- $\mathcal{H}_{int}$ は場の自己相互作用を記述
- $\mathcal{H}_{int}$ は ∂^μ に依らない.（仮定する.）
- Lagrangian と作用は次のようになる：

$$L = \int_\Omega d^3x\, \mathcal{L}(\phi(\vec{x},t), \partial^\mu\phi), \quad S = \int d^4x\, \mathcal{L} = \int L\, dt.$$

Ω : 空間体積　(numerable, denumerable, uncontable, contable)

標準的なやり方：系全体を囲むような体積 Ω をとること.

⇓

有限個の波動関数で扱うことを許す. ⇒ $\int \to \Sigma$ とする.

最終的には $\Omega \to \infty$ の極限をとる (Poincaré invariance を保つ)

有限自由度系から場の理論への直接的な書き換えは、体積Ωを小さな体積τへ分割すること。

このような格子を用いることで、場の量は離散化された各点での値に置き換わる。

$$\phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \phi(\vec{x}_i, t) \equiv \phi_i(t)$$

さらに、一般化座標$q_i(t)$をi番目の格子点における場の量ϕ_iをτでスケールした量として結びつける：

$$q_i(t) = \tau \phi_i(t)$$

また、Lagrangian Lの積分を和に置き換えると、$\Omega = n\tau$の関係から、

$$L = \int_\Omega d^3x \left\{ \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 \right] - V(\phi) \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega d^3x \left[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - 2V(\phi) \right]$$

$$\to \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \tau \cdot \left(\frac{\dot{q}_i}{\tau} \right)^2 - (\text{terms independent of } \dot{q}_i)$$

$$= \frac{1}{2\tau}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 - (\text{terms independent of } \dot{q}_i)$$

これより、一般化運動量$p_i(t)$は

$$p_i(t) \equiv \pi(\vec{x}_i, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i}{\tau} = \dot{\phi}_i(t)$$

となり、連続場での表記

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial^\mu\phi)}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)}$$

に対応している。

ルジャンドル変換により、Hamiltonian は

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

と書ける。$\tau \to 0$ の極限では 場の形式で書いた Hamiltonian の形

$$H = \int d^3x \, \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \mathcal{H}_{int}$$

になる。

Bose場の量子化。

古典系の Hamiltonian の 量子化は π, ϕ を次の交換関係に従う場の演算子に置き換えることで達成できる。

$$[\pi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = 0$$

場の方程式は次のようになる：

$$\dot{\phi} = i[H, \phi], \quad \dot{\pi} = i[H, \pi]$$

Exercise 2.4

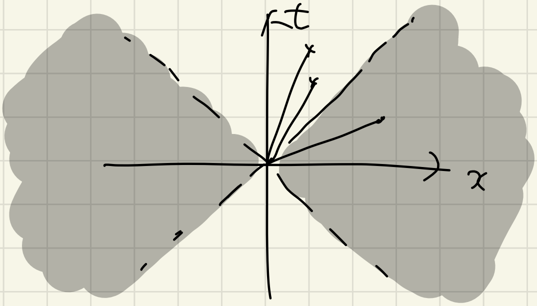
(a) Lorentz 共変性を仮定するとき、自由スカラー場 の $\phi(x), \phi(y)$ の交換関係が 光円錐の外部で 0となることを示す.

$\longrightarrow$ spacelike な 領域 における 離れた 2点間の 測定量は 干渉しない. これは 局所性と 因果律に 合致する.

何を示せばよいのか分からなかった.

ϕ を $a, a^\dagger$ で展開して、計算する. $\longrightarrow$ これが KG場

$(x-y)^2 < 0$ でも $[\phi(x), \phi(y)] \neq 0$ となり NG.



$$[\phi(x_0, x), \phi(y_0, y)]$$

$$\downarrow$$

$$[\phi(x_0, x), \phi(x_0+\Delta t, y)]$$

$$[\phi(x_0, x), \phi(x_0, y) + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t]$$

$$= [\phi(x_0, x), \phi(x_0, y)] + [\phi(x_0, x), \overset{\pi}{\frac{\partial \phi}{\partial t}}\Delta t]$$

$$= [\phi(x_0, x), \phi(x_0, y)] + \Delta t [\phi(x_0, x), \frac{\partial \phi}{\partial t}]$$

$$= \Delta t [\phi(x_0, x), \phi'(x_0, y)]$$

$$= \Delta t \cdot i \delta^3(x-y)$$

ref. Relativistic Quantum Fields, Bjorken Drell (1965)

§16.12 $\cancel{182}$/407 151/407 → (16.23)

$$[\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)] = 0 \quad \text{for} \quad (x-y)^2 < 0$$

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

・有限自由度：$1, \cdots, n$

$\Downarrow$　　$n \to \infty$ の極限.

場の理論

古典系 $\xrightarrow{[\,,\,]}$ 量子系 (Bose)

~~古典系~~ $\xrightarrow{\{\,,\,\}}$ 量子系 (Fermi)

(b) $\dot{\phi} = i[H, \phi]$, $\dot{\pi} = i[H, \pi]$

が $\mathcal{H}_{int} = 0$ のとき, Klein-Gordon 方程式に等価なことを示す.

$\mathcal{H}_{int} = 0$ のとき, Hamiltonian density は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

となる. Hamiltonian H は次のように書ける.

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m^2\phi^2}_{V(\phi)}\right]$$

$$\dot{\pi} = i[H, \pi] = i \cdot i \frac{\delta H}{\delta \phi}$$

$$= -\frac{\delta H}{\delta \phi}$$

Hamiltonian H の ϕ に関する汎関数微分は.

$$(\nabla\phi)^2 = \nabla\phi\cdot\nabla\phi = \nabla(\phi\cdot\nabla\phi) - \phi\cdot\nabla^2\phi$$

を用いると.

π^2 は省いた

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\int d^3x \left\{\nabla(\phi\cdot\nabla\phi) - \phi\cdot\nabla^2\phi + 2V(\phi)\right\}$$

純粋な汎関数微分

$$= \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi}\left[\phi\cdot\nabla\phi\right] - \frac{1}{2}\int d^3x \frac{\delta}{\delta\phi}(\phi\cdot\nabla^2\phi) + \int d^3x \frac{\delta V}{\delta\phi}$$

$$= \underline{\int d^3x \left\{-\frac{1}{2}\nabla^2\phi + \frac{\delta V}{\delta\phi}\right\}} \; ?$$

(結局 Euler Lagrange に代入する計算と同じになるのではないか？)

(C) スピン0の荷電粒子に対しては正準運動量が次の形になる：

$$\Pi = \partial^0\phi^\dagger - iqA^0\phi^\dagger,\quad \Pi^\dagger = \partial^0\phi + iqA^0\phi$$

A: Vector Potential, q: charge.

Hamiltonian density $\mathcal{H}_{int}$ が

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}(A,\phi) - q^2(A^0)^2\phi^\dagger\phi$$

$$,\ \mathcal{L}_{int} = -iqA^\mu(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi) + q^2A^2\phi^\dagger\phi$$

となることを示す.

$$\mathcal{L} = |\partial^\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\xrightarrow[\text{substitution}]{\text{minimal}} [(\partial_\mu - iqA_\mu)\phi][(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi^\dagger] - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= (\partial_\mu\phi - iqA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger + iqA^\mu\phi^\dagger) - (\cdots)$$

$$= (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger) \underline{+ iq(\partial_\mu\phi)A^\mu\phi^\dagger - iqA_\mu\phi(\partial^\mu\phi^\dagger)} + q^2A^2\phi\phi^\dagger - (\cdots)$$

$$= (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger) - m^2|\phi|^2 \underline{- iqA_\mu(\phi^\dagger\overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi)} + q^2A^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= \underbrace{\mathcal{L}_0}_{\text{自由場}} + \underbrace{\mathcal{L}_0^\gamma}_{\gamma\text{-interaction}} + \underbrace{\mathcal{L}_{int}}_{\phi\text{-interaction}}$$

Hamiltonian $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H} = \Pi\dot{\phi} + \Pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L}$$ より構成できて.

$$\mathcal{L}_{int} = -iqA_\mu(\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_\mu}\phi) + q^2A^2\phi^\dagger\phi$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger - \mathcal{L}$$

$$= \pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger - (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^\dagger) + m^2\phi\phi^\dagger - \mathcal{L}_{int} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= \pi(\pi^\dagger - iqA^0\phi) + \pi^\dagger(\pi + iqA^0\phi^\dagger)$$

$$= \pi\pi^\dagger + \pi^\dagger\pi - iq\pi A^0\phi + iq\pi^\dagger A^0\phi^\dagger - (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$$?

$\dot{\phi}\dot{\phi} +$

2.4.2 Fourier Expansion of Field Operators

場の演算子 ϕ, π は交換関係によって規定される.
もう少し調べるために, 演算子を固定した時刻における Fourier series に展開する.

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} q_{\vec{k}}(t)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} p_{-\vec{k}}(t)$$

有限体積 Ω 内での場の方程式の時間発展は 離散 Fourier 和で表せる.
この有限和は $\Omega\to\infty$ の極限で積分になる:

$$\frac{1}{\Omega}\sum_{\vec{k}} \xrightarrow[\Omega\to\infty]{} \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k$$

ϕ, π が実場であることから, これらの演算子はエルミートである:

$$\phi = \phi^\dagger, \qquad \pi = \pi^\dagger$$

それゆえ,

$$\phi^\dagger = \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} q^\dagger_{\vec{k}}(t) = \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i(-\vec{k})\cdot\vec{x}} q^\dagger_{\vec{k}}(t)$$

$\vec{k} \to \vec{k}' = -\vec{k}$ とする.

$$= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} q^\dagger_{-\vec{k}'}(t)$$

$$= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} q_{\vec{k}}(t)$$

$\vec{k}', \vec{k}$ は朱る添字

$\therefore$ $\underline{q_{\vec{k}}(t) = q^\dagger_{-\vec{k}}(t)}$ 　同様に, $\underline{p_{\vec{k}}(t) = p^\dagger_{-\vec{k}}(t)}$

ここで,

$$\omega \equiv \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + \tilde{m}^2}$$

を定義する（$\tilde{m}$ が何かはまだ分からないが，自由場に対しては $\tilde{m} = m$ とする）

さらに，2つの演算子を定義する：

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} = \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} \left(q_{\vec{k}}(t) + \dfrac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t) \right) \\ a^{\dagger}_{\vec{k}} = \sqrt{\dfrac{\omega}{2}} \left(q_{-\vec{k}}(t) - \dfrac{i}{\omega} p_{\vec{k}}(t) \right) \end{cases}$$

これら，$a_{\vec{k}}, a^{\dagger}_{\vec{k}}$ を用いると，$q_{\vec{k}}(t)$，$p_{-\vec{k}}(t)$ は

$$q_{\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left(a_{\vec{k}}(t) + a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) \right)$$

$$p_{-\vec{k}}(t) = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(a_{\vec{k}}(t) - a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) \right)$$

となる．最終的な ϕ，π の Fourier 展開は次のように書くことができる：

$$\phi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} -i \left(\frac{\omega}{2\Omega} \right)^{1/2} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

- この運動量空間での展開は自由場・相互作用場のどちらにも対しても有効．

$\Longrightarrow$ Fourier 級数の完全性にしか依存していないため．

- $a_{\vec{k}}(t)$，$a^{\dagger}_{\vec{k}}(t)$ が $\begin{cases} \text{自由場} \longrightarrow a(0)e^{i\omega t} \\ \text{相互作用有り} \longrightarrow a_{\vec{k}}(t) \end{cases}$ こいつを求めればよい!!

確認

(1) $\{a_{\vec{k}}(t),\ a^{\dagger}_{\vec{k}}(t)\} \longrightarrow \{q_{\vec{k}}(t),\ p_{-\vec{k}}(t)\}$

$$a_{\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{\vec{k}}(t) + \frac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t)\right) \quad \cdots ①$$

$$a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{-\vec{k}}(t) - \frac{i}{\omega} p_{\vec{k}}(t)\right) \quad \cdots ②$$

① + [② で $\vec{k} \to -\vec{k}$] より

$$a_{\vec{k}}(t) + a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{\vec{k}}(t) + q_{\vec{k}}(t) + \frac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t) - \frac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot 2 q_{\vec{k}}(t)$$

$$\therefore\ \underline{q_{\vec{k}}(t) = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}\left(a_{\vec{k}}(t) + a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t)\right)}$$

① − [② で $\vec{k} \to -\vec{k}$]

$$a_{\vec{k}}(t) - a^{\dagger}_{-\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q_{\vec{k}}(t) - q_{\vec{k}}(t) + \frac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t) + \frac{i}{\omega} p_{-\vec{k}}(t)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \cdot i \frac{2}{\omega} p_{-\vec{k}}(t)$$

$$= i \sqrt{\frac{2}{\omega}}\, p_{-\vec{k}}(t)$$

$$p_{-\vec{k}}(t) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a_{\vec{k}}(t) - a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t)\right)$$

$$\therefore\ \underline{p_{-\vec{k}}(t) = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(a_{\vec{k}}(t) - a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t)\right)}$$

(2) $\{ q_{\vec{k}}(t), p_{-\vec{k}}(t) \} \to \{ \phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}, t) \}$

$$\phi(\vec{x}, t) = \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} q_{\vec{k}}(t)$$

$$= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left(a_{\vec{k}}(t) + a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) \right)$$

$$= \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \underline{\sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{-\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$\vec{k} \to -\vec{k}$, $\sum_{\vec{k}}$ はすべての$\vec{k}$についての和なので OK.

$$= \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{\dagger}_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \;//$$

$$\pi(\vec{x}, t) = \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} p_{-\vec{k}}(t)$$

$$= \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} (-i) \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(a_{\vec{k}}(t) - a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) \right)$$

$$= -i \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\omega}{2\Omega} \right)^{1/2} a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \underline{- (-i) \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\omega}{2\Omega} \right)^{1/2} a^{\dagger}_{-\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$\vec{k} \to -\vec{k}$ とし、$\sum_{\vec{k}} \to \sum_{\vec{k}'}$ とする.

$$= -i \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\omega}{2\Omega} \right)^{1/2} \left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^{\dagger}_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right) \;//$$

次に $a_{\vec{k}}(t)$ の交換関係を導く：

$$\phi(\vec{x},t) = \Omega^{-1/2}\int d^3\vec{k}\, q_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad \Pi(\vec{x},t) = \Omega^{-1/2}\int d^3\vec{k}\, p_{-\vec{k}}(t)\, e^{\underbrace{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$\vec{k}\to-\vec{k}$ としている。

$$\Updownarrow \text{ inverse} \qquad\qquad \Updownarrow \text{ inverse}$$

$$q_{\vec{k}}(t) = \Omega^{-1/2}\int d^3\vec{x}\, \phi(\vec{x},t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \qquad p_{\vec{k}}(t) = \Omega^{-1/2}\int d^3\vec{x}\, \Pi(\vec{x},t)\, e^{\underbrace{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

として、$q_{\vec{k}}(t)$、$p_{\vec{k}}(t)$ を表すと、

$$\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}\, d^3\vec{x} = \Omega\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

より、$p_{\vec{k}}(t)$ と $q_{\vec{k}'}(t)$ の交換関係は

$$[p_{\vec{k}}(t), q_{\vec{k}'}(t)] = \frac{1}{\Omega}\iint d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}'\, \underline{[\Pi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t)]}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}$$

$$= \frac{1}{\Omega}\iint d^3\vec{x}\, d^3\vec{x}' \left(-i\,\underline{\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'}$$

$$= \frac{-i}{\Omega}\int d^3\vec{x}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}$$

$$= \frac{-i}{\Omega}\int d^3\vec{x}\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}$$

$$\therefore\ \underline{[p_{\vec{k}}(t), q_{\vec{k}'}(t)] = -i\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}}$$

同様に $\underline{[p_{\vec{k}}(t), p_{\vec{k}'}(t)] = [q_{\vec{k}}(t), q_{\vec{k}'}(t)] = 0}$

これらを用いると、

$$[a_{\vec{k}}(t), a^{\dagger}_{\vec{k}'}(t)] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$[a_{\vec{k}}(t), a_{\vec{k}'}(t)] = [a^{\dagger}_{\vec{k}}(t), a^{\dagger}_{\vec{k}'}(t)] = 0$$ を得られる。

- 場の演算子 $\phi(\vec{x},t)$ とその共役運動量 $\pi(\vec{x},t)$ を座標と運動量で展開した。

- 生成消滅演算子と同様の関係が得られた。

- Klein–Gordon 場を量子化された振動子で置き換えることができた。

Fourier 級数の完全性を見ておきたい!!

2.4.3 Wavefunctions

Hamiltonian を 自由場と相互作用に分ける：

$$H = H_0 + H_{int} = \int d^3x\, \mathcal{H}_0 + \int d^3x\, \mathcal{H}_{int}$$

$N_{\vec{k}} \equiv a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}$ とすれば、Hamiltonian は

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

となると予想される。そして、実際にこの表式は正しい。
相互作用パートは少し複雑になるが、ϕ と π の $a, a^\dagger$ による展開の表式は用いることができる。

固有ベクトルは

$$\psi_0 \propto |0\rangle$$

$$\psi_1 \propto a^\dagger_{\vec{k}} |0\rangle$$

$$\psi_2 \propto a^\dagger_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}'} |0\rangle$$

$|0\rangle$ is defined by

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0$$

として構成され、次の固有値方程式を満たす：

$$N_{\vec{k}} |\psi\rangle = n_{\vec{k}} |\psi\rangle \quad , \quad E = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} \left(n_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

・ $[a^\dagger_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] = 0$ より

$$a^\dagger_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}'} |0\rangle = a^\dagger_{\vec{k}'} a^\dagger_{\vec{k}} |0\rangle$$

⇒ 2粒子の入れ換えに対して対称.

⇒ Klein-Gordon 場は Bose-Einstein 統計に従う.

2.4.4 Removal of Zero-Point Energy

Klein-Gordon 場の量子化において，真空でのエネルギーが発散するという問題が生じる！

$$E_0 = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_{\vec{k}} \longrightarrow \infty$$

これは無限個の振動子による零点エネルギーに対応する.

次のようなアイデアにより対処する；

- 理論において意味を持つのは "エネルギー差" である.
- 真空でのエネルギー期待値を差し引いておくことで解消できる.
- 物理的には真空を基準にしてエネルギーを測ることに対応する.

このアイデアを達成するために，"正規順序積" (normal order product) というものを導入する

Q が生成演算子と消滅演算子の積で表されているとする.
このとき，Q の正規順序を $:Q:$ と書く. 具体的にはすべての生成演算子を消滅演算子の左に配置したものを意味する.

Boson に対する演算子については次のようになる：

$$:aa^\dagger: = a^\dagger a, \quad :a^\dagger a^\dagger: = a^\dagger a^\dagger, \quad :a^\dagger a: = a^\dagger a$$

[これは交換関係に関連するもので、Fermion 場においては1回の交換につき、−1 が1つ出る.]

このとき、この正規順序積 $:Q:$ の期待値は 0 になるという性質をもつ：

$$\langle 0| :Q: |0\rangle = 0$$

Proof：

このような積は一番左に生成演算子もしくは消滅演算子をもつ.
もし、それが消滅演算子であれば真空に作用した期待値は 0 となり、

$$\langle 0| :Q: |0\rangle = 0$$

そうでなく、もし生成演算子のときは正規順序積の定義から、その演算子より左の演算子もまた、生成演算子である. このとき、生成演算子だけでは $\langle 0|$ の状態から $|0\rangle$ をつくることはできないので、全体の期待値 $\langle 0|:Q:|0\rangle$ は 0 となる.

単調増加だと原点には戻れない.

ここで、調和振動子の Hamiltonian を考えると次のように書くことができる：

$$H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}a^\dagger a + \frac{1}{2}a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \omega\left(\frac{1}{2}a^\dagger a + \frac{1}{2}aa^\dagger\right)$$
$$= \frac{\omega}{2}\left(a^\dagger a + aa^\dagger\right)$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$
$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$
$$a^\dagger a + 1 = aa^\dagger$$

正規順序積は、

$$:H: = \frac{1}{2}\omega :(a^\dagger a + aa^\dagger): = \frac{1}{2}\omega(2a^\dagger a) = \underline{\omega a^\dagger a}$$

したがって、Hamilonian から零点エネルギーを消去することができている。

- 場の理論では明示せずに、正規順序化された Lagrangian から始めることがある。

- これは、始めから真空の零点エネルギーを取り除くためである。

- Ch. 3 において Dyson-Wick 縮約や S行列要素を考えるときに正規順序積を扱うことになる。

- 真空を基準に測るための系統的な方法が正規順序積？

Exercise 2.5

(a) $\dot{\phi} = i[H, \phi]$, $\dot{\pi} = i[H, \pi]$ は自由場に対して $a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}} e^{-i\omega t}$ を与えることを示す。

$$\dot{\phi} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2}\left(a_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)\right]$$

$$= \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2}\left(\frac{da_{\vec{k}}(t)}{dt} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \frac{da^\dagger_{\vec{k}}(t)}{dt} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

一方、$i[H, \phi]$ を計算すると、

$i[H, \phi]$

$\omega \equiv \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \rightarrow \omega' \equiv \omega_{\vec{k}'}$

$$= i\left[\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}\left(a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\right), \sum_{\vec{k}'} (2\omega\Omega)^{-1/2}\left(a_{\vec{k}'}(t) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{k}'}(t) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)\right]$$

$$= i\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'} \omega_{\vec{k}} (2\omega'\Omega)^{-1/2}\left\{\underbrace{[a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}(t)]}_{①} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + \underbrace{[a^\dagger_{\vec{k}} a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}(t)]}_{②} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right\}$$

$$① = a^\dagger_{\vec{k}}[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] + [a^\dagger_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] a_{\vec{k}} = -\delta_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}}$$

$$② = a^\dagger_{\vec{k}}[a_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] + [a^\dagger_{\vec{k}}, a^\dagger_{\vec{k}'}] a_{\vec{k}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a^\dagger_{\vec{k}}$$

$$= i\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'} \omega_{\vec{k}} (2\omega'\Omega)^{-1/2}\left(-\delta_{\vec{k}\vec{k}'} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{x}} + \delta_{\vec{k}\vec{k}'} a^\dagger_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}}\right)$$

$$= i\sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2}\left(-a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

$a_{\vec{k}}$, $a^\dagger_{\vec{k}}$ を比較すると、

$$\underline{\frac{da_{\vec{k}}(t)}{dt} = -i\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}} \,//, \quad \frac{da^\dagger_{\vec{k}}(t)}{dt} = +i\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}}$$

したがって、$a_{\vec{k}}(t)$の形式解は $a_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}(0)$ として、

$$a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}} e^{-i\omega t}$$

となる。

(b) 自由場のHamiltonian

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

から、振動子の生成・消滅演算子を用いて書き下す。

$$[\pi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t)] = -i\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[\pi(\vec{x},t), \phi(\vec{x}',t')] = -i\,\delta_{tt'}\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')$$

因果律.

2.7.1 ×

2.7.2.

2.7.3.

2.6 Quantization of the Dirac Field

スピン $\frac{1}{2}$ をもつ Dirac 場の Lagrangian density :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) - \mathcal{H}_{int}$$

$\psi(x)$: 4成分 spinor, $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma_0$, $(i\partial\!\!\!/ - m) = i\gamma_\mu\partial^\mu - I_4 m$: 4×4 行列.

※ p.60 (2.46) が自由な Dirac 方程式を導くことは確認した.

2.6.1 Operators and Equations of Motion

α 番目の ψ に対する共役運動量 :

$$\boxed{\pi_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha(x)} = i\psi^\dagger_\alpha(x)}$$

※ $\mathcal{H}_{int}$ は $\partial^\mu\psi$ に依存しないとした. $\Longleftrightarrow$ 相互作用が局所的であること.
$\bar{\psi}(x)$ に対する共役運動量は 0. ($\because$ $\mathcal{L}$ は $\bar{\psi}$ の微分を含まない)
~~4成分 spinor ψ が多数存在する場合を考えている. $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$~~ ~~それぞれが 4-spinor~~

追記 : α は ψ の成分 $\alpha = 1, 2, 3, 4$ を表している単純な index.

確認

$$\pi_\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha(x)}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_\alpha(x)}\left\{\bar{\psi}(\underline{i\gamma_0\partial^0} + i\gamma_i\partial^i - m)\psi - \mathcal{H}_{int}\right\}$$

$\partial^0\psi$ を含むのはこの項

$$= \frac{\partial}{\partial\dot{\psi}_\alpha(x)}\left\{\psi^\dagger\gamma_0 i\gamma_0\underline{\partial^0\psi}\right\}$$

$$= \bar{\psi}_\alpha i\gamma_0\gamma_0$$

$\downarrow \gamma_0^2 = 1$

$$= \underline{i\bar{\psi}_\alpha}$$

Hamiltonian density $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha i\psi_\alpha^\dagger \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L}$$

実際に計算すると、次のようにいくつかの形が得られる：

$$\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\gamma_j\partial^j + m)\psi + \mathcal{H}_{int} \quad \text{— ①}$$

$$= \psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi + \mathcal{H}_{int} \quad \text{— ②}$$

$$= i\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi + \mathcal{H}_{int} \quad \text{— ③}$$

$$\equiv \underline{\mathcal{H}_{free} + \mathcal{H}_{int}}$$

確認 (Exercise 2.7)

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha i\psi_\alpha^\dagger \dot{\psi}_\alpha - \mathcal{L} \quad \leftarrow \text{定義}$$

$$= i\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad \leftarrow \psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots)^t,\ \psi^\dagger = (\psi_1^\dagger, \psi_2^\dagger, \cdots)$$

で書き直した.

$$= i\psi^\dagger \gamma_0\gamma_0 \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad \leftarrow \gamma_0\gamma_0 = 1$$

$$= \underline{\bar{\psi}\, i\cancel{\gamma_0}\partial^0\psi} - \bar{\psi}(\underline{i\cancel{\gamma_0}\partial^0} + i\gamma_i\partial^i - m)\psi + \mathcal{H}_{int}$$

← Dirac 方程式

$$= \underline{\bar{\psi}(-i\gamma_i\partial^i + m)\psi + \mathcal{H}_{int}} \quad \text{— ①}$$

$$= \psi^\dagger(-i\gamma_0\gamma_i\partial^i + \gamma_0 m)\psi + \mathcal{H}_{int}$$

$$= \underline{\psi^\dagger(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\psi + \mathcal{H}_{int}} \quad \text{— ②} \quad \leftarrow \begin{cases} \gamma_0\gamma_i = \alpha_i \\ \gamma_0 = \beta \end{cases}$$

$$= \psi^\dagger i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathcal{H}_{int} \quad \leftarrow \text{Dirac 方程式}$$

$$= \underline{i\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t}\psi + \mathcal{H}_{int}} \quad \text{— ③} \quad \leftarrow \text{最初の式に戻っている.}$$

Fermi 場の量子化 : ψ, Π の間に同時刻反交換関係 $\{\ ,\ \}$ を設定.

$$\boxed{\begin{aligned} &\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \Pi_\beta(\vec{x}',t)\} = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{\alpha\beta} \\ &\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta(\vec{x}',t)\} = \{\Pi_\alpha(\vec{x},t), \Pi_\beta(\vec{x}',t)\} = 0 \end{aligned}}$$

(α, β : 場の index)

$\Pi_\alpha(x) = \Pi_\alpha(\vec{x},t) = i\psi_\alpha^\dagger(\vec{x},t)$ より, ψ, Π の反交換関係は $\psi, \psi^\dagger$ の反交換関係に書き換えられる ($\Pi \to i\psi^\dagger$ とする) :

$$\boxed{\begin{aligned} &\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}',t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\delta_{\alpha\beta} \\ &\{\psi_\alpha(\vec{x},t), \psi_\beta(\vec{x}',t)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(\vec{x},t), \psi_\beta^\dagger(\vec{x}',t)\} = 0 \end{aligned}}$$

運動方程式は Heisenberg 方程式から得られる :

$$\dot{\psi} = i[H, \psi] \ , \quad \dot{\psi}^\dagger = i[H, \psi^\dagger]$$

このとき, H は $\mathcal{H}$ の空間積分である : $H = \int d^3 \mathcal{H}$

⑨ (2.90) が $\mathcal{H}_{int}=0$ のとき、自由粒子の Dirac 方程式を導くこと.

$$H=\int d^3x\,\mathcal{H}=\int d^3x\, i\psi^\dagger\dot{\psi}=\int d^3x\sum_\alpha i\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha$$

$$[H,\psi_\beta]=\left[\int d^3y\sum_\alpha i\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha,\ \psi_\beta\right]$$

$$=\int d^3y\sum_\alpha i\left(\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha\psi_\beta-\psi_\beta\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha\right)$$

$$=\int d^3y\sum_\alpha i\left\{\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha\psi_\beta+\psi^\dagger_\alpha\psi_\beta\dot{\psi}_\alpha-\psi^\dagger_\alpha\psi_\beta\dot{\psi}_\alpha-\psi_\beta\psi^\dagger_\alpha\dot{\psi}_\alpha\right\}$$

$$=\int d^3y\sum_\alpha i\left(\psi^\dagger_\alpha\{\dot{\psi}_\alpha,\psi_\beta\}-\{\psi^\dagger_\alpha,\psi_\beta\}\dot{\psi}_\alpha\right)$$

$$=\int d^3y\sum_\alpha i\left[\psi^\dagger_\alpha\underbrace{\left\{\frac{1}{i}(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi_\alpha,\psi_\beta\right\}}_{=0}-\delta^3(x-y)\delta_{\alpha\beta}\dot{\psi}_\alpha\right]$$

$$=\int d^3y\sum_\alpha i\left(-\delta^3(x-y)\delta_{\alpha\beta}\dot{\psi}_\alpha\right)$$

$$=-i\dot{\psi}_\beta(x)$$

$$=-(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi_\beta(x)$$

$$\therefore\quad \dot{\psi}=i[H,\psi]=-i(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi(x)$$

$$\Rightarrow\quad i\dot{\psi}(x)=(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}+\beta m)\psi(x)$$

となり Dirac 方程式が導かれることが分かる.

2.6.2 Fourier Expansion of Field Operators

- Dirac 場の演算子も Fourier 級数で展開
- 展開するための基底として、2成分 spinor 空間の基底 $u_{\vec{p}s}$, $v_{\vec{p}s}$ を導入.

$u_{\vec{p}s}$, $v_{\vec{p}s}$ は次を満たす 2成分（実際は4成分を含む）spinor :

$$(\not{p} - m)u_{\vec{p}s} = 0 \qquad (\not{p} + m)v_{\vec{p}s} = 0 \qquad (2.92)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\, u_{\vec{p}s} = s\, u_{\vec{p}s} \qquad \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\cdot\hat{\vec{p}}\, v_{\vec{p}s} = s\, v_{\vec{p}s} \qquad (2.93)$$

これらは Dirac 方程式を導入した文脈で、正エネルギー解 ($u_{\vec{p}s}$), 負エネルギー解 ($v_{\vec{p}s}$) を表すために用いた 2成分 spinor ;

$$\underbrace{\psi}_{4成分} = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}}_{2成分\times 2}$$

これ ⇒ { large component. $E>0$ / small component. $E<0$ }

$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma}$: Pauli 行列, $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$, $s = \pm\frac{1}{2}$ ヘリシティの固有値

$\vec{p}$ に対するエネルギー E_p : $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$

(p.27〜 (1.123) を参考)

- $\vec{p}$ に対して $u_{\vec{p},\pm\frac{1}{2}}$, $v_{\vec{p},\pm\frac{1}{2}}$ は 2成分 spinor 空間で正規直交完全系を成す.

  (p.29, (1.125), (1.126))

なので、Fermion 場の演算子 $\psi(x,t)$ を展開できる:

$$\underbrace{\psi(\vec{x},t)}_{4\text{成分}\cdot\text{operator}} = \Omega^{-1/2} \underbrace{\sum_{\vec{p}s}}_{\text{全ての}\vec{p},\,s\,(=\pm\frac{1}{2})\text{について和をとる.}} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{E_p}}}_{\text{規格化, 数}} \Big(\underbrace{a_{\vec{p}s}(t)}_{1\text{成分}\cdot\text{operator}} \underbrace{u_{\vec{p}s}}_{\substack{\text{bispinor}\cdot\text{number} \\ (\text{形式上2成分, 実質4成分})}} \underbrace{e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{\text{数}} + \underbrace{b^{\dagger}_{\vec{p}s}(t)}_{1\text{成分}\cdot\text{operator}} \underbrace{v_{\vec{p}s}}_{\substack{\text{bispinor}\cdot\text{number} \\ (\text{形式上2成分, 実質4成分})}} \underbrace{e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{\text{数}} \Big) \quad (2.94)$$

$u_{\vec{p}s}, v_{\vec{p}s}$ は C-数なので、展開係数 $a(t), b^{\dagger}(t)$ が Hilbert space の operators.

$\Pi_\alpha(x) = i\psi^{\dagger}_\alpha(x)$ より、$\psi^{\dagger}(x)$ を一般化された場の運動量演算子として用いる.

(2.94) [$\psi(\vec{x},t)$ の展開式] の エルミート共役をとって、

$$\boxed{\psi^{\dagger}(\vec{x},t) = \Omega^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(a^{\dagger}_{\vec{p}s}(t) u^{\dagger}_{\vec{p}s} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}s}(t) v^{\dagger}_{\vec{p}s} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)} \quad (2.95)$$

$\psi, \psi^{\dagger}$ の反交換関係より a, b に対する次の関係が従う:

$$\boxed{\begin{gathered} \{ a_{\vec{p}s}(t), a^{\dagger}_{\vec{p}'s'}(t) \} = \{ b_{\vec{p}s}(t), b^{\dagger}_{\vec{p}'s'}(t) \} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}\delta_{ss'} \\ \{ a_{\vec{p}s}(t), a_{\vec{p}'s'}(t) \} = \{ b_{\vec{p}s}(t), b_{\vec{p}'s'}(t) \} = 0 \end{gathered}}$$

- この運動量空間での展開は 基底の完全性にしか依存していない。
ゆえに、相互作用 のある場に対しても有効.

○ 自由場のとき

・ Hamiltonian

$$H_{free} = \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} - b_{\vec{p}s} b^\dagger_{\vec{p}s} \right) E_{\vec{p}}$$

$$b_{\vec{p}s} b^\dagger_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} = 1$$

$$-b_{\vec{p}s} b^\dagger_{\vec{p}s} = b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} - 1$$

constant

消去する

(∵ エネルギー差に意味あり)

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} \right) E_{\vec{p}}$$

・ 3-momentum operator

$$\vec{P} = \int d^3x \, \psi^\dagger (-i\vec{\nabla}) \psi$$

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} - b_{\vec{p}s} b^\dagger_{\vec{p}s} \right) \vec{p}$$

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} - 1 \right) \vec{p}$$

$\sum_{\vec{p}s} \vec{p} = 0$ とした。

(∵ 全ての $\vec{p}$ についての和は相殺)

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} \right) \vec{p}$$

・ charge

$$Q = \int d^3x \, \psi^\dagger g \psi$$

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b_{\vec{p}s} b^\dagger_{\vec{p}s} \right) g$$

定数を取り除いた。

$$= \sum_{\vec{p}s} \left(a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} - b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s} \right) g$$

◦ 自由場に対する運動方程式

$$\dot{a}_{\vec{p}s}(t) = i[H, a_{\vec{p}s}(t)] = -iE_p a_{\vec{p}s}(t)$$

$$\dot{b}_{\vec{p}s}(t) = i[H, b_{\vec{p}s}(t)] = -iE_p b_{\vec{p}s}(t)$$

$$\Longrightarrow \quad a_{\vec{p}s}(t) = a_{\vec{p}s}(0)e^{-iE_pt} = a_{\vec{p}s}e^{-iE_pt}$$

$$b_{\vec{p}s}(t) = b_{\vec{p}s}(0)e^{-iE_pt} = b_{\vec{p}s}e^{-iE_pt}$$

◦ 相互作用のある場に対しても $a, b^\dagger$ による展開は有効

◦ 自由場とは異なり、$a_{\vec{p}s}(t)$, $b_{\vec{p}s}(t)$の表式が複雑になる。

以上から次のことが結論付けられる。

◦ 演算子 $a^\dagger_{\vec{p}s}$ ($a_{\vec{p}s}$) は helicity s, 4元運動量 $p^\mu = (E_p, \vec{p})$ の正エネルギー粒子を生成(消滅)する。

◦ 演算子 $b^\dagger_{\vec{p}s}$ ($b_{\vec{p}s}$) は helicity s, 4元運動量 $p^\mu = (E_p, \vec{p})$ の正エネルギー反粒子を生成(消滅)する。

⇒ H_{free} (2.97) において、$a^\dagger a$ and $b^\dagger b$ はそれぞれエネルギー $E_p > 0$ の粒子の生成・消滅に対応していた。

(2.98) から 3元運動量についてもそうであった。

一方、電荷 Q (2.99) については、a, b は逆符号の生成・消滅を表していた。
これは 粒子－反粒子 に相当する。

Exercise 2.8

(a) $\not{p}\gamma_0 + \gamma_0\not{p} = 2E = 2p_0$ を示す. このとき, p は4元運動量.

$\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$ より

$$
\begin{aligned}
\not{p}\gamma_0 + \gamma_0\not{p} &= \gamma_\mu p^\mu \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_\mu p^\mu \\
&= p^\mu \gamma_\mu \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_\mu p^\mu \\
&= p^\mu \{\gamma_\mu, \gamma_0\} \\
&= p^\mu 2 \delta^{\mu 0} \\
&= 2p^0 \\
&= 2E
\end{aligned}
$$

↓ $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

g : Minkowski計量.

(b) $(\not{p}+m)\gamma^0(\not{p}+m) = 2E(\not{p}+m)$ を示す.

$$
\begin{aligned}
(\not{p}+m)\gamma^0(\not{p}+m) &= (\not{p}+m)(\gamma_0\not{p} + \gamma_0 m) \\
&= \not{p}\gamma_0\not{p} + \not{p}\gamma_0 m + m\gamma_0\not{p} + m\gamma_0 m \\
&= \not{p}\gamma_0\not{p} + m\,2E_0 + m^2\gamma_0 \\
&= \underline{\gamma_\mu p^\mu \gamma_0 \gamma_\mu p^\mu} + m^2\gamma_0 + 2mE
\end{aligned}
$$

↓ 展開

↓ (a)の結果

↓ $\not{p} = \gamma_\mu p^\mu$

—— を考える. $\{\gamma^\mu, \gamma^0\} = 2g^{\mu 0}$ より.

$$\gamma^\mu\gamma^0 + \underline{\gamma^0\gamma^\mu} = 2g^{\mu 0} \Longrightarrow \underline{\gamma^0\gamma^\mu} = 2g^{\mu 0} - \gamma^\mu\gamma^0$$

—— に $\gamma^0\gamma^\mu = 2g^{\mu 0} - \gamma^\mu\gamma^0$ を代入して.

$$p^\mu \gamma_\mu \gamma_0 \gamma_\nu p^\nu = p^\mu \gamma_\mu (2g^{\nu 0} - \gamma^\nu \gamma^0) p^\nu$$
$$= p^\mu \gamma_\mu 2 g^{\nu 0} p^\nu - p^\mu \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^0 p^\nu$$
$$= 2E p^\mu \gamma_\mu - p^\mu g_{\mu\nu} \gamma^0 p^\nu$$
$$= 2E \not{p} - \gamma^0 p_\nu p^\nu$$
$$= 2E \not{p} - m^2 \gamma^0$$

に戻せば,

$$(\not{p}+m)\gamma^0(\not{p}+m) = \gamma_\mu p^\mu \gamma_0 \gamma_\mu p^\mu + m^2\gamma_0 + 2mE$$
$$= 2E\not{p} - m^2\gamma^0 + m^2\gamma_0 + 2mE$$
$$= 2E(\not{p}+m)$$

が分かる.

(c) 行列 $\Lambda_\pm(p)$ を

$$\Lambda_+(p) \equiv \sum_s u_{ps} \bar{u}_{ps}, \quad \Lambda_-(p) \equiv -\sum_s v_{ps} \bar{v}_{ps}$$

で定義するとき, その要素が

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad (\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$

と書けることを示す. また, $\Lambda_\pm(p)$ のそれぞれが 正・負 エネルギー状態への射影となっていることを示す.

このとき, $u_{p\alpha}$, $\bar{u}_{p\alpha}$ が それぞれ次のように表せることを用いてよい.

$$u_{p\alpha} = \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E)}} u_{0\alpha}(m), \quad \bar{u}_{p\alpha} = \bar{u}_{0\alpha}(m) \cdot \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}$$

$u_{0\alpha}(m)$, $\bar{u}_{0\alpha}(m)$ は 静止系の spinor である.

①

$\Lambda_+(p)$ を計算する. rest spinors $u_{0\alpha}, v_{0\alpha}$ は Ch. 1.5 ((1.121a), (1.121b) より)

$$u_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と得られているので これを用いると

$$\Lambda_+(p) = \sum_{s=1}^{2} \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E)}} u_{0s}(m) u_{0s}^\dagger \gamma_0 \frac{\not{p}+m}{\sqrt{2m(m+E)}}$$

$$= \sum_{s=1}^{2} \frac{1}{2m(m+E)} (\not{p}+m) u_{0s} u_{0s}^\dagger \gamma_0 (\not{p}+m)$$

$$\sum_{s=1}^{2} u_{0s} u_{0s}^\dagger = u_{01} u_{01}^\dagger + u_{02} u_{02}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ 0\ 0\ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0\ 1\ 0\ 0)$$

$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1+\gamma_0}{2}}$$

より

$$\Lambda_+(p) = \frac{1}{2m(m+E)} (\not{p}+m) \frac{1+\gamma_0}{2} \gamma_0 (\not{p}+m)$$

$\gamma_0^2 = 1$

$$= \frac{1}{2m(m+E)} (\not{p}+m) \frac{1+\gamma_0}{2} (\not{p}+m)$$

$$= \frac{1}{2m(m+E)} \frac{1}{2} \left\{ 2E(\not{p}+m) + \underline{(\not{p}+m)(\not{p}+m)} \right\}$$

$$\underline{\quad\quad} = \not{p}\not{p} + 2m\not{p} + m^2 = \gamma_\mu p^\mu \gamma_\nu p^\nu + 2m\not{p} + m^2$$

$$= p^2 + m^2 + 2m\not{p} = \underline{2m^2 + 2m\not{p}}$$

これを用いて.

①

$$\Lambda_+(p) = \frac{1}{2m(m+E)}\frac{1}{2}\left\{2E(\not{p}+m) + 2m^2 + 2m\not{p}\right\}$$

$$= \frac{1}{2m(m+E)}\left(E\not{p} + Em + m^2 + m\not{p}\right)$$

$$= \frac{1}{2m(m+E)}\left\{m(m+\not{p}) + E(m+\not{p})\right\}$$

$$= \frac{1}{2m(m+E)}(\not{p}+m)(m+E)$$

$$= \underline{\frac{\not{p}+m}{2m}}$$

したがって、

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \qquad (\alpha,\beta = 0,\cdots,3)$$

v_{ps}の形が
これで良いのか？

同様に Λ_- を求める。

$$\Lambda_-(p) = -\sum_{s=1}^{2} v_{ps}\bar{v}_{ps} \overset{?}{=} -\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{2m(m+E)}(\not{p}+m)v_{0s}v_{0s}^{\dagger}\gamma_0(\not{p}+m)$$

$$= \frac{-1}{2m(m+E)}(\not{p}+m)\underline{\left(\sum_{s=1}^{2} v_{0s}v_{0s}^{\dagger}\right)}\gamma_0(\not{p}+m)$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1-\gamma_0}{2}}$$

$$\Lambda_-(p) = \frac{-1}{2m(m+E)}(\not{p}+m)\frac{1-\gamma_0}{2}\gamma_0(\not{p}+m)$$

$$= \underline{\frac{1}{2m(m+E)}(\not{p}+m)\frac{1-\gamma_0}{2}(\not{p}+m)}$$

$$-\frac{(1-\gamma_0)\gamma_0}{2}$$

$$= -\frac{\gamma_0-1}{2}$$

$$= \frac{1-\gamma_0}{2}$$

①

$$= (\not{p}+m)\frac{1-\gamma_0}{2}(\not{p}+m)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\not{p}+m)(\not{p}+m) - (\not{p}+m)\gamma_0(\not{p}+m)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2m^2+2m\not{p} - 2E\not{p} - 2Em\right)$$

$$= m^2 - Em + m\not{p} - E\not{p}$$

$$= \not{p}(m-E) + m(m-E)$$

$$= (m-E)(\not{p}+m)$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda_-(p) = \frac{1}{2m(m+E)}\cdot(m-E)(\not{p}+m)$$

$$= \frac{(m-E)(\not{p}+m)}{2m(m+E)}$$

となり $\Lambda_-(p)$ の表式が求められていてみん。

②

(1) 射影演算子 $\Lambda_+ \equiv \sum_s u_{\vec{p}s}\bar{u}_{\vec{p}s}$, $\Lambda_- \equiv -\sum_s v_{\vec{p}s}\bar{v}_{\vec{p}s}$ が

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta},\quad (\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$$ と書けることを示す.

※ Hintの方法とは別のやり方.

p.27, 28の(1.123)式の $u^{(s)}(\vec{p})$, $v^{(s)}(\vec{p})$ の表式を用いると,

$$\Lambda_+ = \sum_{s=1}^{2} N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} \cdot N\left(\chi^{(s)\dagger} \quad \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)\dagger}\right)\gamma_0 \qquad (\because \vec{\sigma}^\dagger = \vec{\sigma},\ \bar{u} = u^\dagger\gamma_0)$$

$$= \sum_{s=1}^{2} N^2 \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}\left(\chi^{(s)\dagger} \quad -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)\dagger}\right) \qquad \left(\because \gamma_0 = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{2} N^2 \begin{pmatrix} \chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} & -\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{(E+m)^2}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} \end{pmatrix}$$

ここで, $N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \rightarrow N^2 = \frac{E+m}{2m}$, $\sum_{s=1}^{2}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} = I_2$

$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = \vec{p}^2 = E^2 - m^2$ より

$$\Lambda_+ = \frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix} I_2 & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & -\frac{E^2-m^2}{(E+m)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E-m) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m \end{pmatrix} = \frac{1}{2m}\left(\gamma_\mu p^\mu + m\right)$$

$$\therefore (\Lambda_+)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta} \quad //$$

②

$\Lambda_- \equiv -\sum_s v_{\vec{p}s}\bar{v}_{\vec{p}s}$ も同様に計算すると..

$$\Lambda_- = -\sum_{s=1}^{2} N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} N \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)\dagger} \quad \chi^{(s)\dagger} \right)\gamma_0$$

$$= -\sum_{s=1}^{2} N^2 \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \left(\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)\dagger} \quad -\chi^{(s)\dagger} \right)$$

$$= -\sum_{s=1}^{2} N^2 \begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{(E+m)^2}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} & -\chi^{(s)}\chi^{(s)\dagger} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{E+m}{2m} \begin{pmatrix} \frac{E^2-m^2}{(E+m)^2} & -\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & -I_2 \end{pmatrix}$$

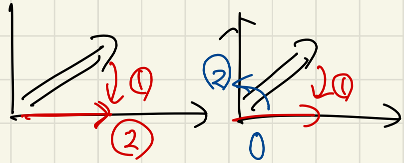
$$= -\frac{1}{2m} \begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -(E+m) \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2m}\left(\gamma_\mu p^\mu - m I_4\right)$$

$$= \frac{-\not{p}+m}{2m}$$

$\therefore\ (\Lambda_-)_{\alpha\beta} = \left(\frac{-\not{p}+m}{2m}\right)_{\alpha\beta}$ と書くことができる。 //

$(\Lambda_+)^2$, $(\Lambda_-)^2$ を計算すると



$$
\begin{aligned}
(\Lambda_+)^2 &= \left(\frac{\not p+m}{2m}\right)\left(\frac{\not p+m}{2m}\right) \\
&= \frac{(\not p+m)(\not p+m)}{4m^2} \\
&= \frac{\not p\not p+\not p m+m\not p+m^2}{4m^2} \\
&= \frac{p^2+2m\not p+m^2}{4m^2} \\
&= \frac{2m(m+\not p)}{4m^2} \\
&= \frac{\not p+m}{2m} \\
&= \underline{\Lambda_+}
\end{aligned}
$$

$\Lambda_+^2=\Lambda_+$ を満たす.

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_+\cdot\Lambda_- \\
&= \frac{\not p+m}{2m}\cdot\frac{-\not p+m}{2m} \\
&= \frac{1}{4m^2}\left(-\not p\not p+\cancel{\not p m}-\cancel{\not p m}+m^2\right) \\
&= \frac{1}{4m^2}\left(-m^2+m^2\right) \\
&= \underline{0}
\end{aligned}
$$

$\not p\not p=p^2=m^2$

同様に Λ_-^2 は

$$
\begin{aligned}
\Lambda_-^2 &= \left(\frac{-\not p+m}{2m}\right)^2 = \frac{(-\not p+m)(-\not p+m)}{4m^2} = \frac{p^2-m\not p-m\not p+m^2}{4m^2} \\
&= \frac{2m^2-2m\not p}{4m^2} = \frac{m-\not p}{2m} = \underline{\frac{-\not p+m}{2m}}
\end{aligned}
$$

$\Lambda_-^2=\Lambda_-$ を満たす.

これらは $\Lambda^2=\Lambda$ を満たすので射影演算子となっていることが分かる.

◎ 射影演算子の性質

今回の場合

$$\Lambda_+^2 = \Lambda_+ \ , \ \Lambda_-^2 = \Lambda_-$$

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = 1 \ , \ (\Lambda_+)(\Lambda_-) = 0$$

一般の場合　$(i = 1, \cdots, j = 1, \cdots)$

$$\sum_i \Lambda_i = 1$$

$$(\Lambda_i)(\Lambda_j) = 0$$

$$(\Lambda_i)^2 = \Lambda_i$$

◎ 射影となること.

$\Lambda_+ u_{ps} = u_{ps}$, $\Lambda_+ v_{ps} = 0$ となることを確かめる.

$$\Lambda_+ = \frac{\not{p} + m}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i + m I_4 \right)$$

$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

$\downarrow$

$p_i = -\vec{p}$

を用いた.

$$= \frac{1}{2m}\left\{ \begin{pmatrix} E & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m \end{pmatrix}}$$

$$u_{ps} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

として.

$$\Lambda_+ u_{ps} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} \left[(E+m) - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m}\right]\chi^{(s)} \\ \left[(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}) + \frac{-E+m}{E+m}\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right]\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} \frac{E^2+2mE+m^2-\vec{p}^{\,2}}{E+m}\chi^{(s)} \\ \frac{E+m-E+m}{E+m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} \frac{2m(m+E)}{E+m}\chi^{(s)} \\ \frac{2m}{E+m}(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{m+E}\chi^{(s)} \end{pmatrix} = \underline{u_{\vec{p}s}} \,//$$

$$\therefore \underline{\Lambda_+ u_{ps} = u_{ps}} \,//$$

$$\Lambda_+ v_{ps} = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E+m & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -E+m \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} \left[\frac{E+m}{E+m}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\right]\chi^{(s)} \\ \left[\frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{E+m} + (-E+m)\right]\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{p}^2 + (-E+m)(E+m)}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$-E^2+m^2$

$E^2 = m^2 + \vec{p}^2$

$\underline{-\vec{p}^2 = m^2 - E^2}$

$$= \frac{N}{2m}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\vec{p}^2 - \vec{p}^2}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{0} /\!/$$

$$\therefore \underline{\Lambda_+ v_{ps} = 0} /\!/$$

射影演算子としての性質をもつ。

Exercise 2.9

(a) 次の式 (2.97)〜(2.99) を確かめよ.

(2.97) $$H_{\text{free}} = \sum_{\vec{p}s} (a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s}) E_p$$

(2.98) $$\vec{P} = -i\int d^3x\, \psi^\dagger \nabla \psi = \sum_{\vec{p}s} (a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} + b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s}) \vec{p}$$

(2.99) $$Q = \int d^3x\, q\, \psi^\dagger \psi = \sum_{\vec{p}s} (a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} - b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s}) q.$$

● (2.97) の確認

$$H_{\text{free}} = \int d^3x\, \mathcal{H}_{\text{free}} = \int d^3x\, i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (\because (2.88))$$

から計算できるので (2.94), (2.95) を代入する.

H_{free}

$$= \int d^3x\, i\, \Omega^{-1/2} \sum_{ps} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(a^\dagger_{ps}(t) u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{ps}(t) v^\dagger_{ps} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$
$$\times\, \Omega^{-1/2} \sum_{p's'} \sqrt{\frac{m}{E_{p'}}} \left(\dot{a}_{p's'}(t) u_{p's'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + \dot{b}^\dagger_{p's'}(t) v_{p's'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right)$$

$$= i\Omega^{-1} \int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)\left(\dot{a}_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + \dot{b}^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right)$$

(2.100) より $\dot{a}_{ps} = -iE_p a_{ps}$, $\dot{b}^\dagger_{ps} = +iE_p b^\dagger_{ps}$ を用いて. ← (c) の問いの結果を使ってしまっている.

$$= i\Omega^{-1} \int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)\left(-iE_{p'} a_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + iE_{p'} b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right)$$

(…)(…) を展開する.

$$= i\Omega^{-1}\int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \left(a^\dagger_{ps} u^\dagger_{ps} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{ps} v^\dagger_{ps} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)\left(-iE_{p'} a_{p's'} u_{p's'} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} + iE_{p'} b^\dagger_{p's'} v_{p's'} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} \right)$$

$$= \frac{i}{\Omega}\int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \Big(\underbrace{-i a^\dagger_{ps} a_{p's'} u^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{①} \underbrace{+ i a^\dagger_{ps} b^\dagger_{p's'} u^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{②}$$

$$\underbrace{- i b_{ps} a_{p's'} v^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{③} \underbrace{+ i b_{ps} b^\dagger_{p's'} v^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}}}_{④} \Big)$$

まず、① + ④ を考える。

① + ④

$$\rightarrow \frac{i}{\Omega}\int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_p E_{p'}}} (-i) \left(a^\dagger_{ps} a_{p's'} u^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{-i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} - b_{ps} b^\dagger_{p's'} v^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} \right)$$

$$\int d^3x\, e^{\mp i(\vec{p}-\vec{p}')\cdot\vec{x}} = \Omega\delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \quad u^\dagger_{ps} u_{ps'} = v^\dagger_{ps} v_{ps'} = \frac{E_p}{m}\delta_{ss'} \quad (\because (1.125)\ p.29)$$

を用いると

$$= \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \left(a^\dagger_{ps} a_{p's'} u^\dagger_{ps} u_{p's'} \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} - b_{ps} b^\dagger_{p's'} v^\dagger_{ps} v_{p's'} \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'} \right)$$

↓ $\vec{p}'$ について和をとる。

$$= \sum_{ps}\sum_{s'} \frac{mE_p}{E_p} \left(a^\dagger_{ps} a_{ps'} u^\dagger_{ps} u_{ps'} - b_{ps} b^\dagger_{ps'} v^\dagger_{ps} v_{ps'} \right)$$

↓ $u^\dagger_{ps} u_{ps'} = \frac{E_p}{m}\delta_{ss'}$

$v^\dagger_{ps} v_{ps'} = \frac{E_p}{m}\delta_{ss'}$

$$= \sum_{ps}\sum_{s'} m \left(a^\dagger_{ps} a_{ps'} \frac{E_p}{m}\delta_{ss'} - b_{ps} b^\dagger_{ps'} \frac{E_p}{m}\delta_{ss'} \right)$$

↓ s' について和をとる。

$$= \underline{\sum_{ps} E_p \left(a^\dagger_{ps} a_{ps} - b_{ps} b^\dagger_{ps} \right)}$$

を得る。

次に ② + ③ を考える。

② + ③ 　　$\boxed{\text{次ページに再計算済}}$

$$\longrightarrow \frac{i}{\Omega}\int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\left(i\,a^\dagger_{ps} b^\dagger_{p's'} u^\dagger_{ps} v_{p's'} e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} - i\,b_{ps} a_{p's'} v^\dagger_{ps} u_{p's'} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}\right)$$

$$\int d^3x\, e^{\mp i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} = \Omega\,\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}$$ を用いると

$$\Rightarrow i^2 \sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\left(a^\dagger_{ps} b^\dagger_{p's'} u^\dagger_{ps} v_{p's'} \delta_{\vec{p},-\vec{p}'} - b_{ps} a_{p's'} v^\dagger_{ps} u_{p's'} \delta_{\vec{p},-\vec{p}'}\right)$$

これで計算するといける と思う

さらに, $\boxed{v_{-ps}} = -v_{ps}$, $\boxed{u_{-ps}} = -u_{ps}$ を用いると 　(∵ (1.123) p.28)

$v_{-ps} = \gamma_0 v_{ps}$ 　 $u_{-ps} = \gamma_0 u_{ps}$

$$\Rightarrow i^2 \sum_{ps}\sum_{s'} \frac{mE_p}{E_p}\left(a^\dagger_{ps} b^\dagger_{ps'} u^\dagger_{ps}(-v_{ps'}) - b_{ps} a_{ps'} v^\dagger_{ps}(-u_{ps'})\right)$$ (∵ p'について和をとった)

要確認.

$$= \sum_{ps}\sum_{s'} m\left(a^\dagger_{ps} b^\dagger_{ps'} u^\dagger_{ps} v_{ps'} - b_{ps} a_{ps'} v^\dagger_{ps} u_{ps'}\right)$$

$u^\dagger u = v^\dagger v = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta}$

$$= \sum_{ps}\sum_{s'}\left(a^\dagger_{ps} b^\dagger_{ps'} \underline{u^\dagger_{ps}\, m v_{ps'}} - b_{ps} a_{ps'} v^\dagger_{ps}\, m u_{ps'}\right)$$

$\longrightarrow$?

- u, v の直交性は $\underline{\bar{u}_{ps} v_{ps'} = \bar{v}_{ps} u_{ps'} = 0}$ であり 適用できない. (γ_0)

- Dirac 方程式 (2.92) を用いても $m v_{ps'} = -\not{p}\, v_{ps'}$, $m u_{ps'} = \not{p}\, u_{ps'}$ であり 先に進まない.

$m v_{ps'} = -\gamma_\mu p^\mu v_{ps'}$

$m u_{ps'} = \gamma_\mu p^\mu u_{ps'}$

$\{a, b\} = 0$

$\{a, b^\dagger\} = \{a^\dagger, b\} = 0$

②＋③

$$\longrightarrow \frac{i}{\Omega}\int d^3x \sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\left(i\,a^\dagger_{ps}b^\dagger_{p's'}u^\dagger_{ps}v_{p's'}e^{-i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} - i\,b_{ps}a_{p's'}v^\dagger_{ps}u_{p's'}e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}}\right)$$

$$\int d^3x\, e^{\mp i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} = \Omega\,\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}$$ を用いると

$$\Rightarrow i^2\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\left(a^\dagger_{ps}b^\dagger_{p's'}u^\dagger_{ps}v_{p's'}\delta_{\vec{p},-\vec{p}'} - b_{ps}a_{p's'}v^\dagger_{ps}u_{p's'}\delta_{\vec{p},-\vec{p}'}\right)$$

$$= i^2\sum_{ps}\sum_{s'}\frac{mE_{p'}}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\left(a^\dagger_{ps}b^\dagger_{-ps'}\underline{u^\dagger_{ps}v_{-ps'}} - b_{ps}a_{-ps'}\underline{v^\dagger_{ps}u_{-ps'}}\right)$$

＿＿ の部分を考える。 u・v の表式として (1.123) の具体形を用いると、

$$\underline{u^\dagger_{ps}v_{-ps'}} = N\begin{pmatrix}\chi^{(s)\dagger} & \chi^{(s)\dagger}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}\frac{\vec{\sigma}\cdot(-\vec{p})}{E+m}\chi^{(s')} \\ \chi^{(s')}\end{pmatrix}$$

$$= N^2\left(\chi^{(s)\dagger}\frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s')} + \chi^{(s)\dagger}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s')}\right)$$

$$= \underline{0}$$

$$\underline{v^\dagger_{ps}u_{-ps'}} = N^2\begin{pmatrix}\chi^{(s)}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m} & \chi^{(s)\dagger}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^{(s')} \\ \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s')}\end{pmatrix}$$

$$= \underline{0}$$

したがって、＿＿ $= 0$ となり、Hamiltonianの表式として次式を得る。

$$\underline{H_{free} = \sum_{ps}E_p\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} - b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)}$$

• (2.98) の確認

同様の計算から、

$$P = -i\int d^3x\ \psi^\dagger \vec{\partial}\psi$$

a.b は a(t).b(t) のこと.

$$= -i\int d^3x \frac{1}{\Omega}\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\Big(\underbrace{a^\dagger_{ps}u^\dagger_{ps}e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{①} + \underbrace{b_{ps}v^\dagger_{ps}e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{②}\Big)\Big(\underbrace{a_{p's'}u_{p's'}e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}}(i\vec{p}')}_{③} + \underbrace{b^\dagger_{p's'}v_{p's'}e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}}(-i\vec{p}')}_{④}\Big)$$

$$= \sum_{ps}\Big(\underbrace{a^\dagger_{ps}a_{ps}}_{①\times③} - \underbrace{b_{ps}b^\dagger_{ps}}_{②\times④}\Big)\vec{p} + \sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{E_pE_{p'}}}\Big(\underbrace{-a^\dagger_{ps}b^\dagger_{p's'}u^\dagger_{ps}v_{p's'}\delta_{p,-p'}}_{①\times④}$$

$$+ \underbrace{b_{ps}a_{p's'}v^\dagger_{ps}u_{p's'}\delta_{p,-p'}}_{②\times③}\Big)\vec{p}'$$

$$= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} - b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)\vec{p} + \sum_{ps}\sum_{s'}\frac{m}{E_p}\Big(-a^\dagger_{ps}b^\dagger_{-ps'}\underbrace{u^\dagger_{ps}v_{-ps'}}_{=0} + b_{ps}a_{-ps'}\underbrace{v^\dagger_{ps}u_{-ps'}}_{=0}\Big)\times\vec{p}$$

$$= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} - b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)\vec{p}$$

• (2.99) の確認.

同様の計算から

$$Q = \int d^3x\ q\,\psi^\dagger\psi$$

$$= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} + b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)q + \sum_{ps}\sum_{s'}\frac{m}{E_p}\Big(a^\dagger_{ps}b^\dagger_{ps'}\underbrace{u^\dagger_{ps}v_{-ps'}}_{=0} + b_{ps}a_{ps'}\underbrace{v^\dagger_{ps}u_{-ps'}}_{=0}\Big)q$$

$$= \sum_{ps}\left(a^\dagger_{ps}a_{ps} + b_{ps}b^\dagger_{ps}\right)q$$

(b) (2.97)の Hamiltonian の表式は a, b に対して反交換関係

$$\{a_{ps}, a^{\dagger}_{p's'}\} = \{b_{ps}, b_{p's'}^{\dagger}\} = \delta_{pp'}\delta_{ss'}$$

を課すことで得られる。仮に、a, b に交換関係を設定したとすると、

$$H_{free} = \sum_{ps} (a^{\dagger}_{ps} a_{ps} - b_{ps} b^{\dagger}_{ps}) E_p$$

$$= \sum_{ps} [a^{\dagger}_{ps} a_{ps} - (b^{\dagger}_{ps} b_{ps} + 1)] E_p$$

仮定 $[b_{ps}, b^{\dagger}_{p's'}] = \delta_{pp'}\delta_{ss'}$

となり、定数を取り除いても、つまり $\sum_{ps}(-E_p)$ の部分を切り捨てても、

エネルギーへの負の寄与の部分 : $\sum(-b^{\dagger}_{ps} b_{ps}) E_p$ を取り除くことができない。

したがって、Dirac 場は交換関係による量子化とは矛盾してしまう。

(c) 自由場の Hamiltonian の表式 $H_{free} = \sum_{ps} (a^{\dagger}_{ps} a_{ps} + b^{\dagger}_{ps} b_{ps}) E_p$ を認めると、

$$\dot{a}_{ps}(t) = i [H, a_{ps}(t)]$$

$$= i \left[\sum_{p's'} (a^{\dagger}_{p's'} a_{p's'} + b^{\dagger}_{p's'} b_{p's'}) E_{p'}, a_{ps}(t) \right]$$

$$= i \sum_{p's'} E_{p'} \{ a^{\dagger}_{p's'} [a_{p's'}, a_{ps}] + [a^{\dagger}_{p's'}, a_{ps}] a_{p's'} \}$$ ← a, b は独立とした。

$$= i \sum_{p's'} E_{p'} \left(a^{\dagger}_{p's'} a_{p's'} a_{ps} - a^{\dagger}_{p's'} a_{ps} a_{p's'} + a^{\dagger}_{p's'} a_{ps} a_{p's'} - a_{ps} a^{\dagger}_{p's'} a_{p's'} \right)$$

$$= i \sum_{p's'} E_{p'} \left[\underbrace{a^{\dagger}_{p's'} \{a_{p's'}, a_{ps}\}}_{=0} - \underbrace{\{a^{\dagger}_{p's'}, a_{ps}\}}_{=\delta_{pp'}\delta_{ss'}} a_{p's'} \right]$$

$$= -i \sum_{p's'} E_{p'} \delta_{pp'} \delta_{ss'} a_{p's'}$$

$$= -i E_p a_{ps}(t)$$ //

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_{ps}(t) &= i[H, b_{ps}(t)] \\
&= i\Big[\sum_{p's'} (a^\dagger_{p's'} a_{p's'} + b^\dagger_{p's'} b_{p's'}) E_{p'},\ b_{ps}\Big] \\
&= i \sum_{p's'} E_{p'} \{ b^\dagger_{p's'} [b_{p's'}, b_{ps}] + [b^\dagger_{p's'}, b_{ps}] b_{p's'} \} \\
&= i \sum_{p's'} E_{p'} (\underline{b^\dagger_{p's'} b_{p's'} b_{ps}} - \underline{b^\dagger_{p's'} b_{ps} b_{p's'}} + \underline{b^\dagger_{p's'} b_{ps} b_{p's'}} - \underline{b_{ps} b^\dagger_{p's'} b_{p's'}}) \\
&= i \sum_{p's'} E_{p'} [b^\dagger_{p's'} \{ b_{p's'}, b_{ps} \} - \{ b^\dagger_{p's'}, b_{ps} \} b_{p's'}] \\
&= i \sum_{p's'} (- E_{p'} \delta_{pp'} \delta_{ss'} b_{p's'}) \\
&= \underline{-i E_p b_{ps}(t)} \ //
\end{aligned}
$$

したがって、自由場の Heisenberg 方程式

$$
\begin{cases}
\dot{a}_{ps}(t) = -i E_p a_{ps}(t) \\
\dot{b}_{ps}(t) = -i E_p b_{ps}(t)
\end{cases}
\qquad (2.100)
$$

を得る。

2.6.3 Wavefunctions

- For fermions

$a^\dagger$: 生成演算子

a : 消滅演算子

- For antifermions

$b^\dagger$: 生成演算子

b : 消滅演算子

としてそれぞれの演算子が対応している。

- Hilbert space は真空にこれらの演算子を作用させることで構成できる。

数演算子を定義：

$$N_+(\vec{p}, s) = a^\dagger_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} \quad , \quad N_-(\vec{p}, s) = b^\dagger_{\vec{p}s} b_{\vec{p}s}$$

それぞれ、+ , − は fermion , anti-fermion を表す。

この数演算子を用いて Hamiltonian を書くと

$$H = \sum_{\vec{p}s} E_p \left[N_+(\vec{p}, s) + N_-(\vec{p}, s) \right]$$

となる。

- 状態は $a_{\vec{p}s}|0\rangle = b_{\vec{p}s}|0\rangle = 0$ によって定義される真空に対して、

$$|0\rangle \ , \ a^\dagger_{\vec{p}s}|0\rangle \ , \ b^\dagger_{\vec{p}s}|0\rangle \ , \ldots$$

と表される。

- 同一粒子の2粒子状態に対して、反交換関係は次の性質をもたらす。

$$\begin{cases} a^\dagger_{\vec{p}s} a^\dagger_{\vec{p}'s'}|0\rangle = - a^\dagger_{\vec{p}'s'} a^\dagger_{\vec{p}s}|0\rangle & \cdots \text{反対称性} \\ a^\dagger_{\vec{p}s} a^\dagger_{\vec{p}s}|0\rangle = 0 & \cdots \text{排他原理} \end{cases}$$

2.7 Quantization of the Electromagnetic Field

- 電磁場は明確な観測量を持つので，場の量子化は単純に行えるように見える.
- 実はそうではない.
  問題は，電磁場は 4元ポテンシャル A^μ ($\mu=0,1,2,3$) と結びついている一方で
  量子化されるべき力学変数が 2つの横波しか持たないこと.

この 4成分から，正しく量子化された2つの成分へと数を減らすという複雑さは
現在もなお Maxwell 場についての考察が続けられている理由の1つである.

この困難は光子の質量がゼロであること，古典電磁気学のゲージ不変性に
密接に関連している.

一般的な量子場の枠組みを考えるとき，電磁場のゲージ不変性は重要になる.

復

2.7.1 Gauge Invariance in Classical Electrodynamics

Maxwell より前の電磁場：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \qquad \text{(ガウスの法則)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(ファラデーの法則)}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{(単磁荷が存在しない)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J} \qquad \text{(アンペールの法則)}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

(復)

Maxwell は $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=0$ が恒等的に成り立つことから、

$$\nabla\cdot\vec{j}=\nabla\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})=0$$

が常に成り立つことに注目。一方、電荷の保存から $\nabla\cdot\vec{j}=0$ は $\rho=\text{const.}$ のときだけ。ρ が時間変化するときでも電荷の保存が保たれるために "変位電流" の項をアンペールの法則に加えた.

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{j}\quad\Longrightarrow\quad\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

したがって、Maxwell eqs. として現在の形になる：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}$$

連続の式は局所的な電荷の保存を意味する.

⇒ どこかで電荷が消え、別の場所で同じ量の電荷が生成されるという "大域的" には電荷を保存する過程も禁止するということ.

⇒ 特殊相対論の原理に反する過程となってしまうので禁止される

⇒ 局所的な電荷保存は重要な役割を持つ.

復

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{A} \ , \ \vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

として ベクトルポテンシャル $\vec{A}$, スカラーポテンシャル ϕ を導入すると Maxwellの方程式は次の2階の連立偏微分方程式に書き換えることができる;

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) &= -\rho \\ \vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\vec{J} \end{aligned} \tag{2.114}$$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$ を用いた.

Maxwell方程式の解は この連立方程式を $\vec{A}$, ϕ について解けばよいことになる.

$\Longrightarrow$ 古典電気学の gauge invariance を用いて この方程式を分解する.

Gauge transformations.

上記の $\vec{A}$, ϕ の形は自由度をもち, Maxwell eqs. を保つような $\vec{A}$, ϕ に対する変換が gauge transformation と呼ばれる.

恒等式 $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = 0$ より,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad (\chi : \text{任意のスカラー関数})$$

という $\vec{A}$ に対する変換は $\vec{B}$ に影響を与えない. この $\vec{A}$ に対する変換の下で $\vec{E}$ が変更を受けないためには ϕ は

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

と変換される. このような χ を用いた変換で $\vec{A}\rightarrow\vec{A}'$, $\phi\rightarrow\phi'$ と変換をしても $\vec{B}\rightarrow\vec{B}' = \vec{B}$, $\vec{E}\rightarrow\vec{E}' = \vec{E}$ となり Maxwell eqs. は変更されない。

復

Loretz gauge : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

このように、$\vec{A}, \phi$ の関係を決めることを fixing gauge と呼ぶ.

この gauge は (2.114) から 次の方程式を導く:

$$\vec{\nabla}^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\rho$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{J}$$

- $\phi, \vec{A}$ に対する独立な波動方程式が得られる.
- ローレンツ共変性が分かりやすい形になる.

Coulomb gauge : $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

この gauge は 次の方程式を導く:

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\rho \quad \Longrightarrow \quad \phi(x,t) = \int \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \vec{J}$$

スカラーポテンシャル $\phi(\vec{x},t)$ が直ちに $\rho(\vec{x},t)$ と結び付くことから coulomb gauge と呼ばれる.

- transverse gauge

… $\vec{A}$ の方程式に現れる $\vec{J}$ は $\vec{\nabla}\times\vec{J}_{\parallel} = 0$ を満たす縦波成分と, $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{\perp} = 0$ を満たす横波成分に分けられ, $-\vec{J}_{\perp}$ のみ寄与するため.

- radiation gauge

… 横波の放射場はベクトルポテンシャルによってのみ記述されるため.
ベクトルポテンシャルのみを考えればよいときに便利.

㊗復

4元ベクトルの記法を用いれば、いま導入した gauge 変換は単純な形になる：

$$A^\mu \to A'^\mu \equiv A^\mu - \partial^\mu \chi$$

$A^\mu = (\phi, \vec{A})$, $\partial^\mu = (\partial^0, -\vec{\nabla})$ $\left(\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \ \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \right)$

これを用いると 2つの gauge condition は

Lorentz gauge : $\partial_\mu A^\mu = 0$

Coulomb gauge : $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

と書ける。

Covariance of the Maxwell Equations

ダランベール演算子 $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ を導入することで、Lorentz gauge を採ったときの Maxwell 方程式は次のように書ける：

$$\Box \vec{A} = \vec{J}, \quad \Box \phi = \rho$$

さらに、4元ベクトル A^μ を用いれば Lorentz gauge condition を合わせて、

$$\Box A^\mu = j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

と書くことができ、連続の式は

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

と書くことができる。

Maxwell eq. は gauge invariance ⇒ Lorentz gauge の下で共変な形

⇒ すべての gauge で共変 ⇒ 明らかではない。
しかし、

復

$\vec{B}$, $\vec{E}$ の 6 成分をポテンシャルと結びつけて、共変な形の Maxwell 方程式を求める。

2階の反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ を導入する:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

行列で書けば

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

計量テンソルとの縮約は次のようになる。

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} F^{\sigma\rho} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

さらに、双対テンソルを次式で定義する。

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、$\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$ は完全反対称の4階テンソル。

$$\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$$

をみたす。

$$\epsilon_{0123} = g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\rho} g_{3\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{0123}$$

より、左の関係が従う。

復

これらの2階のテンソルを用いると Maxwell 方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu , \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

と書くことができる. Lorentz index が同じなので Lorentz 変換の下で共変であることは分かる.

○ $F^{\mu\nu}$ の gauge 不変性

$$\begin{aligned}
F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
&= \underline{F^{\mu\nu}}
\end{aligned}$$

2.7.2 Gauge Invariance in Quantum Mechanics.

・量子力学におけるゲージ不変性

電荷 q を持ち、速度 $\vec{v}$ で電磁場中を運動する粒子の受けるLorentz力：

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

このローレンツ力は古典的 Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

によって表される。 $\vec{p}$ ：運動量，$\vec{A}$：ベクトルポテンシャル，ϕ：スカラーポテンシャル

このHamiltonianを量子化することで得られる Schrödinger 方程式：

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + q\phi\right]\psi(\vec{x}, t) = i\frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t}$$

このことから，電磁場中を運動する荷電粒子の Schrödinger eq. は，
次の置き換えによって得られる：

$$\vec{\nabla} \to \vec{D} \equiv \vec{\nabla} - iq\vec{A}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi$$

もしくは，

$$\partial^\mu \to D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu$$

このとき，$A^\mu = (\phi, \vec{A})$， $D^\mu = (D^0, D^i) = (D^0, -\vec{D})$ としないと整合性がつかない。

次ページで説明

○ 共変微分の4元ベクトル成分の符号について。

テキスト

$$\vec{\nabla} \to \vec{D} \equiv \vec{\nabla} - iq\vec{A} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \to D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi$$

共変形式

$$\partial^\mu \longrightarrow D^\mu \equiv \partial^\mu + iqA^\mu$$

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad D^\mu = (D^0, \vec{D})$$

としている。微分の記法を思い出すと、

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (-\partial^1, -\partial^2, -\partial^3)$$

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}) = (\phi, A^1, A^2, A^3)$$

を用いると

4元ポテンシャルは上付き。

$$\vec{\nabla} \to \vec{D} \equiv \vec{\nabla} - iq\vec{A} \nearrow \begin{array}{l} D_i = \partial_i - iqA^i \\ -D^i = -\partial^i - iqA^i \end{array} \quad \therefore D^i = \partial^i + iqA^i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to D^0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi = \partial^0 + iqA^0$$

したがって、 $\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) = (-\partial^1, -\partial^2, -\partial^3)$

に対応させて、 $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3) = (-D^1, -D^2, -D^3)$ （$\vec{D}$ を下付きと理解する）

と決めればつじつまが合う。ただし $A^\mu = (\phi, \vec{A}) = (\phi, A^i)$ に注意する。

このように導入された D^μ を共変微分と呼ぶ。

古典電磁場に対するゲージ変換 (p.76, (2.115)) に対応して、ゲージ変換を次のように書くとする:

$$\psi(\vec{x},t) \longrightarrow \psi'(\vec{x},t) \qquad \vec{D} \to \vec{D}' = \vec{\nabla} - iq\vec{A}'$$

※ $\psi'(\vec{x},t)$ の形はこの時点では分からない。

$$D^0 \to D'^0 = \frac{\partial}{\partial t} + iq\phi'$$

A, ϕ が
$A' = A + \nabla\chi$
$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$
と変換されている

Schrödinger 方程式は次のように変換される:

$$\frac{1}{2m}(-i\vec{D}')^2\psi'(\vec{x},t) = iD'^0\psi'(\vec{x},t)$$

このとき、Schrödinger 方程式が不変であるには、つまりゲージ不変であるためには、

$$\psi'(\vec{x},t) = e^{iq\chi(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t)$$

という変換が要求される。 → (Exercise 2.11)

したがって、

$$\phi \to \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}(\vec{x},t) \qquad \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla\chi(\vec{x},t)$$

$$\psi(\vec{x},t) \to e^{iq\chi(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t)$$

の下で Schrödinger eq. は不変。このことから、量子力学に電磁場を入れるために "minimal substitution" が採用される。

$\Rightarrow$ $\partial_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu$ として電磁場を入れると $\psi \to e^{iq\chi}\psi$ という変換を含めて、Schrödinger eq. はゲージ不変性を保ったまま電磁場が導入される。

※ gauge invariance が minimal substitution を要請するのではない。この minimal substitution が gauge invariance を達成する最も単純な形ということ。

Exercise 2.11

Schrödinger 方程式 $\frac{1}{2m}(-i\vec{D})^2\psi(\vec{x},t) = iD^0\psi(\vec{x},t)$ が、

gauge 変換 : $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi$ の下で不変であることを確認する.

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

$$\psi \to \psi' = e^{iq\chi}\psi$$

○ 左辺

$$\frac{1}{2m}(-i\vec{D})^2\psi$$

$$\to \frac{1}{2m}(-i\vec{D}')^2\psi'$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-i(\vec{\nabla}-iq\vec{A}')\right]\left[-i(\vec{\nabla}-iq\vec{A}')\right]e^{iq\chi}\psi$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-i(\vec{\nabla}-iq\vec{A}-iq\vec{\nabla}\chi)\right]\left[-i(\vec{\nabla}-iq\vec{A}-iq\vec{\nabla}\chi)\right]e^{iq\chi}\psi$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-i\vec{\nabla}+i^2(q\vec{A}+q\vec{\nabla}\chi)\right]\left[\underline{-i\vec{\nabla}(e^{iq\chi}\psi)}+i^2q(\vec{A}+\vec{\nabla}\chi)e^{iq\chi}\psi\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\qquad} = -i\cdot iq\vec{\nabla}\chi e^{iq\chi}\psi - ie^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi$$

$$= \underline{-i^2q\vec{\nabla}\chi\cdot e^{iq\chi}\psi - ie^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi}\,/\!/$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-i\vec{\nabla}+i^2(q\vec{A}+q\vec{\nabla}\chi)\right]\left[\cancel{-i^2q\vec{\nabla}\chi e^{iq\chi}\psi} - ie^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^2q\vec{A}e^{iq\chi}\psi + \cancel{i^2q\vec{\nabla}\chi e^{iq\chi}\psi}\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left[-i\vec{\nabla}+i^2(q\vec{A}+q\vec{\nabla}\chi)\right]\left(-ie^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^2q\vec{A}e^{iq\chi}\psi\right]$$

⟶ 次ページ

$$= \frac{1}{2m}\left[-i\vec{\nabla} + i^2\left(q\vec{A} + q\vec{\nabla}\chi\right)\right]\left(-i\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^2 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\Big[-i\vec{\nabla}\left(-i\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi\right) - i\vec{\nabla}\left(i^2 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi\right) + i^2\left(q\vec{A} + q\vec{\nabla}\chi\right)\left(-i\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^2 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2m}\Big[\, i^2\cdot iq\,\cancel{\vec{\nabla}\chi\cdot e^{iq\chi}}\,\vec{\nabla}\psi + i^2 e^{iq\chi}\vec{\nabla}^2\psi - i^3 q\,\vec{\nabla}\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi - i^3 q\vec{A}\cdot\cancel{iq\vec{\nabla}\chi}\cdot e^{iq\chi}\psi - i^3 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\cdot\vec{\nabla}\psi - i^3 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi - i^3 q\,\cancel{\vec{\nabla}\chi}\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^4 q^2\vec{A}\cdot\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi + i^4 q^2\,\cancel{\vec{\nabla}\chi}\cdot\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi\Big]$$

$$= \frac{1}{2m}\Big[\, i^2 e^{iq\chi}\vec{\nabla}^2\psi - i^3 q\,\vec{\nabla}\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi - i^3 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\cdot\vec{\nabla}\psi - i^3 q\vec{A}\, e^{iq\chi}\vec{\nabla}\psi + i^4 q^2\vec{A}\cdot\vec{A}\, e^{iq\chi}\psi\Big]$$

$$= \frac{1}{2m}e^{iq\chi}\Big[-i\vec{\nabla}\left(-i\vec{\nabla}\psi\right) - i\vec{\nabla}\left(i^2 q\vec{A}\psi\right) - iq\vec{A}\left(i^2\vec{\nabla}\psi - i^3 q\vec{A}\psi\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2m}e^{iq\chi}\Big[-i\vec{\nabla}\left(-i\vec{\nabla}\psi - q\vec{A}\psi\right) - q\vec{A}\left(-i\vec{\nabla}\psi - q\vec{A}\psi\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2m}e^{iq\chi}\Big[\left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\left(-i\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi\Big]$$

$$= \underline{\frac{1}{2m}e^{iq\chi}\left(-i\vec{D}\right)^2\psi}$$

○ 左辺

$$i D^0 \psi(\vec{x}, t)$$

$$\to i D'^0 \psi'$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial t} + iq\left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right)\right] e^{iq\chi} \psi$$

$$= i\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{iq\chi}\psi\right) + iq\left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) e^{iq\chi}\psi\right]$$

$$= i\left(\cancel{iq\frac{\partial \chi}{\partial t} e^{iq\chi}\psi} + e^{iq\chi}\frac{\partial \psi}{\partial t} + iq\phi e^{iq\chi}\psi - \cancel{iq\frac{\partial \chi}{\partial t} e^{iq\chi}\psi}\right)$$

$$= i e^{iq\chi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + iq\phi\psi\right)$$

$$= \underline{i e^{iq\chi} D^0 \psi}$$

したがって、Schrödinger 方程式はゲージ変換の下で次のように変換される：

$$\frac{1}{2m} e^{iq\chi}(-i\vec{D})^2 \psi = i e^{iq\chi} D^0 \psi$$

$e^{iq\chi} \neq 0$ より

$$\underline{\frac{1}{2m}(-i\vec{D})^2 \psi = i D^0 \psi}$$

と変換されることが分かるので、ゲージ不変性が確認できた。

2.7.3 Gauge invariance and the Photon Mass

光子の質量は様々な観測から、

$$M_\gamma < 6\times 10^{-22}\ \mathrm{MeV}/c^2$$

$$\left(\begin{array}{l}\sim 6\times10^{-22}\times 1.78\times 10^{-30}\ \mathrm{kg}\\ \sim \underline{10.68\times 10^{-52}\ \mathrm{kg}}\end{array}\right)$$

とされている。

0質量のベクトル粒子の Lagrangian density は $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ に比例する。一方、質量をもつベクトル粒子の Lagrangian density は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

Note 228

となる。(2.133)で見たように $F^{\mu\nu}$ はゲージ不変なので、Lagrangian に含まれる Maxwell 場 ($F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$) はゲージ不変である。

しかし、質量項に対してはそうではない。つまり、ゲージ変換の下で

$$A^\mu A_\mu \to (A^\mu - \partial^\mu \chi)(A_\mu - \partial^\mu \chi) \neq A^\mu A_\mu$$

となり、不変とはならない。このことから、光子場の gauge invariance と 0質量であるという特性は深く関連している。

$\Longrightarrow$ 光子は $M_\gamma \sim 0$ なので電磁相互作用はゲージ不変といえる。

ゲージ不変性とLagrangianに含まれる質量項の関係は，ゲージ不変性を他の理論へ一般化するときに問題となる．

$$W^{\pm},\ Z \quad \boxed{\underbrace{SU(2)}_{3}\times\underbrace{U_Y(1)}_{1}}$$ 電弱

⟹ 自然界で観測される0質量のbosonは光子だけ。

このことから，弱い相互作用がゲージ場と結合するとき，Lagrangianがゲージ不変であれば，対応するLagrangian densityは質量項を持たない。

⟹ 弱い相互作用における光子の対応物（⟺ 媒介するベクトルボソン）はmasslessでなければならない。

Lagrangianのゲージ不変性を破ることで質量は獲得できるが，ゲージ不変性を破らずに質量を得る機構がある．本質的には，場の理論のLagrangianと場の理論の真空状態は同じ不変性を持つ必要はない。

（⟹ 自発的対称性の破れとmasslessのGoldstone bosonsの出現を導く．）

そして，特定の理論においては抜け穴が存在し，ヒッグス機構と呼ばれる．

→ Goldstone粒子を消去し，vector particleに質量を与える．

このとき，gauge invarianceは保たれたままである．Chs. 8-9で説明する．

Lagrangianはゲージ不変性を保ったまま，vector bosonが質量を獲得する機構が明らかになった。⟹ ヒッグス機構．

June 4th, 2021

2.7.4. States of Polarization and the Coulomb Gauge.

◦ Maxwell 場の共変性は 4元ベクトルにより表現されていた。

そこで、次のような 4次元の基底を考える：

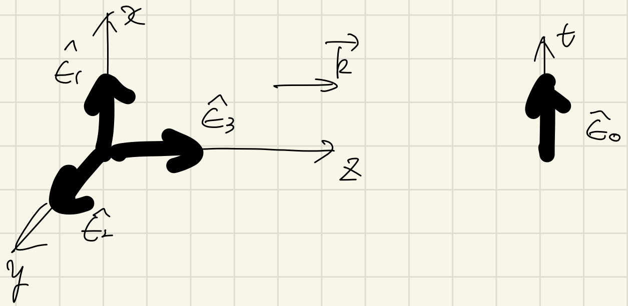
$$\hat{\epsilon}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また、光子の伝播方向を z 軸方向に選ぶ：

$$k^\mu = (k, 0, 0, k), \quad k \cdot \hat{\epsilon}_1 = k \cdot \hat{\epsilon}_2 = 0$$

$\hat{\epsilon}_1$, $\hat{\epsilon}_2$ は spacelike であり、光子の伝播方向とは垂直である。（横波）
$\hat{\epsilon}_3$ は spacelike で縦波の方向を表す。$\hat{\epsilon}_0$ は timelike であり偏極を表す。

共変的な量子電磁場においては、これら全ての状態の偏極が含まれるべきである。



しかし、次のような事実がある；

(1) 古典場は横波であり、このことは独立な偏極状態が2つしかないことを示す。

(2) ベクトル場は独立な偏極状態として3つの状態をもつ。（2や4ではない！）

1. 出発点は Maxwell 方程式 $\Rightarrow$ ローレンツ共変な理論

2. 物理的な結果とその共変性は ゲージの選択に依らない。

3. 古典的な Maxwell 場において、ゲージの選択は自由。
クーロンゲージの選択は 0 質量ベクトル粒子に対して独立自由度を2つに減らす。

4. 質量をもつベクトル粒子は 3つの偏極状態をもつ。
$\rightarrow$ A_0 が独立ではないことに対応。

5. 光子場は 4つの偏極状態を持つように見えるが、自由な光子の縦成分と横成分は物理量への寄与を考えたときに打ち消し合う。したがって、量子化されるのは横波だけでよい。

$\Rightarrow$ Maxwell 場は クーロンゲージを用いて量子化される。

$\Rightarrow$ $\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$

この条件式が Lorentz invariance を破る。が、観測量においては invariance は回復する。

$k^0 \longrightarrow \phi$ に対応し、共役運動量がゼロ。$\longrightarrow$ 自由度として見えない。

2.7.5 Quantization in the Coulomb Gauge

局所ゲージ変換を与える関数 $\chi(x)$ は

$$A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi, \quad \psi \to e^{ie\chi}\psi$$

と書ける。このとき、ゲージ条件として Coulomb ゲージ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

を採用する。

○ Lagrangian $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathcal{H}_{int}$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \mathcal{H}_{int}$$

- $F_{\mu\nu}$の定義から $F_{00} = F^{00} = 0$
- $\partial_0 A_0$ を含まないので、$\pi^0 = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{A}_0 = 0$
- 特定のゲージを選んだのでゲージ不変性はなくなっている。

$\partial_0 A^0$ が含まれていないため、A^0は non-zero でもよい。

Coulomb ゲージの下でのスカラーポテンシャル：

$$A^0(x,t) = \int \frac{\rho(\vec{x}',t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

$\boxed{\text{自由場}\ (\rho=0,\ \vec{J}=0)}$ では $A^0=0$　さらに、Coulomb ゲージ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ の2つの条件からベクトルポテンシャルのうち独立成分は2つ。

$$(\underset{\downarrow}{A^0}_{0},\ \underbrace{A^1, A^2, A^3}_{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0})$$

共役運動量 :

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0$$

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = -\dot{A}^k + \partial^k A^0 = E^k$$

A^0 を0へとまでも。

↓ というギロン.

Lagrangian density : $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{H}_{int} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \mathcal{H}_{int}$

Hamiltonian density : $\mathcal{H} = \pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E} \cdot \vec{\nabla} A_0 + \mathcal{H}_{int}$

Hamiltonian : $H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x\, (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \int d^3x\, \mathcal{H}_{int}$

次ページ

Exercise 2.12

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \underset{\sim}{\mathcal{H}_{int}}$$

contain no derivative

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{(1 - \delta_{\mu\nu}\delta_{\nu\mu})(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$+ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\left(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\gamma}g^{\mu\delta}\partial_\gamma A_\delta\right)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)$$

$$+ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\left(g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - g^{\nu\gamma}g^{\mu\delta}\delta_{\mu\gamma}\delta_{\nu\delta}\right)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{(\cdots) - (\cdots) + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(g^{\mu\mu}g^{\nu\nu} - g^{\nu\mu}g^{\mu\nu})\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{(\cdots) - (\cdots) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}\Big\{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) + (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu)\Big\}$$

$$= -\frac{1}{4}(4\partial^\mu A^\nu - 4\partial^\nu A^\mu)$$

$$= \underline{-(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = \underline{0}$$

$$E = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\pi^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_k)} = -(\partial^0 A^k - \partial^k A^0) = -\dot{A}^k + \partial^k A^0 = \underline{E^k}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F_{01}F^{01} + F_{02}F^{02} + F_{03}F^{03} + \cdots\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-2\left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right) + 2\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2\right)\right]$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) - \mathcal{H}_{int}} \qquad (2.154)$$

$$\dot{A}^k = \partial^k A^0 - E^k$$

$$\dot{A}_j g^{jk} = g^{jk}\partial_j A^0 - g^{jk}E_j$$

$$\boxed{\dot{A}_j = \partial_j A^0 - E_j}$$

$$\mathcal{H} = \pi^k \dot{A}_k - \mathcal{L}$$

$$= E^k \dot{A}_k - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) + \mathcal{H}_{int}$$

$$= E^k\left(\partial_k A^0 - E_k\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) + \mathcal{H}_{int}$$

$$= -E^k E_k + E^k \partial_k A^0 - \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right) + \mathcal{H}_{int}$$

$$= \vec{E}^2 - \frac{1}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\vec{B}^2 + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}A^0 + \mathcal{H}_{int}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \vec{E}\cdot\vec{\nabla}A^0 + \mathcal{H}_{int}} \qquad (2.155)$$

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

Coulomb gauge. ← free field

$$= \frac{1}{2}\int d^3x\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \left[\vec{E}\cdot A_0\right] - \int d^3x\, \overset{\overset{0}{\parallel}}{A_0}\ \text{or}\ \overset{\overset{0}{\parallel}}{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)} + \int d^3x\,\mathcal{H}_{int}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\int d^3x\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \int d^3x\,\mathcal{H}_{int}}$$

・量子化の手続き $\Longrightarrow$ "交換関係" の設定 (∵ boson場)

● 独立成分

このときは 相互作用なし で考えている.

$$[A^\mu(\vec{x},t),\ A^\nu(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\pi^i(\vec{x},t),\ \pi^j(\vec{x}',t)] = 0$$

$$[\pi^i(\vec{x},t),\ A^0(\vec{x}',t)] = 0$$

manifest $\Rightarrow$ 目に見える形に

このとき、スカラーポテンシャル A^0 は 力学変数ではないので いずれの成分とも交換する.

● 非可換成分

$$[\pi^i(\vec{x},t),\ A^j(\vec{x}',t)] = [E^i(\vec{x},t),\ A^j(\vec{x}',t)] = i\,\delta^{tr}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}')$$

このとき、"transverse δ-function" を導入した.

k-space での commutation relation を設定し、F.T.

$$\boxed{\delta^{tr}_{ij}(\vec{x}-\vec{x}') \equiv \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}$$

… 波数ベクトルが $\vec{k} = (k, 0, 0, k)$ のとき

dynamical ではないので可換

$$\delta^{tr}_{00}(\vec{x}-\vec{x}') = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left(\delta_{00} - \frac{k^2}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = 0$$

$$\delta^{tr}_{33}(\vec{x}-\vec{x}') = 0$$

$j \backslash i$	0	1	2	3
0				$\delta^{(3)}$
1			0	
2				
3	$\delta^{(3)}$			

$$(i,j) = (0,1),\ (0,2),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,3) \to 0$$

dynamical なので $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$

$$\delta^{tr}_{03} = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left(\delta_{03} - \frac{k^2}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = -\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\delta^{tr}_{30} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$\Longrightarrow$ 直交している成分同士は 非可換になる、という δ-関数.

$$[E^i(\vec{x},t),\ A^j(\vec{x}',t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\to\quad [E^i(\vec{x}',t),\ A^j(\vec{x}',t)] = i\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}')$$

$$\xrightarrow{\mathrm{div}}\quad [E^i(x',t),\ \vec{\nabla}\cdot A(\vec{x},t)] = i\partial^i\delta^3(\vec{x}'-\vec{x}') \neq 0.$$

$\to$ 矛盾

そこで、
$$[A^i(\vec{x},t),\ E^j(\vec{x}',t)] = -i\Delta^{ij}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

と仮定し、$\vec{\nabla}\cdot$ をとると

$$[\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x},t),\ E^j(\vec{x}',t)] = \underbrace{-i^2}_{=1}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\sum_i \Delta_{ij}k_i\right)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$\Longrightarrow\quad \Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{|\vec{k}|^2}$$ とするべき。

この巧妙な交換関係は $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ の要請からの帰結. ((2.157d)の両辺が div less)

◦ 場の演算子を展開

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} \left(\vec{a}_{\vec{k}}(t)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \vec{a}^{\dagger}_{\vec{k}}(t)\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

operator

(+ で線形結合を作っているので. $A^{\dagger} = A$ となり, $\vec{A}$ が実数であることが保障される.)

⇒ charge = 0 の粒子

このとき, $\omega \equiv \omega_{\vec{k}} = |\vec{k}|$, $k^2 = k_\mu k^\mu = 0$, Ω は空間体積

Coulomb gauge 条件 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ は

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} \left[a_{\vec{k}}(t)\,(+i\vec{k})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{\dagger}_{\vec{k}}(t)\,(-i\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] = 0$$

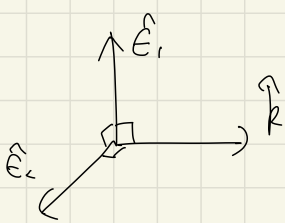
$$\Longleftrightarrow \boxed{\vec{a}_{\vec{k}}(t)\cdot\vec{k} = 0 ,\quad a^{\dagger}_{\vec{k}}(t)\cdot\vec{k} = 0}$$

を導く.

⇒ $\vec{A}(\vec{x},t)$ の展開の表式は 波数 $\vec{k}$ に対する 横波の偏光を含む.

そこで, 実数の偏光ベクトル $\hat{\epsilon}_1$, $\hat{\epsilon}_2$, 波数ベクトル $\hat{k}$ を次で定める:

$$\boxed{\hat{\epsilon}_1\cdot\hat{k} = \hat{\epsilon}_2\cdot\hat{k} = 0 ,\quad \hat{\epsilon}_i\cdot\hat{\epsilon}_j = \delta_{ij} ,\quad \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}}$$



$$\hat{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{\epsilon}_1 \pm i\,\hat{\epsilon}_2\right)$$

を導入しておくと便利。

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\epsilon}_1,\ \hat{\epsilon}_2 \ \cdots \ \text{直線偏光} \\ \hat{e}_+,\ \hat{e}_- \ \cdots \ \text{円偏光} \end{cases} \qquad \left(\begin{aligned} &\hat{e}_+ \text{ ; 右巻き円偏光} \\ &\hat{e}_- \text{ ; 左巻き円偏光} \end{aligned} \right)$$

- 円偏光状態は helicity の固有状態
- $\hat{e}_{\pm}$ は 光子の角運動量 を ± 1 に 射影する 射影演算子.
- 直線偏光は 2つの helicity の 状態の 混合.

spin-1 粒子に対する 射影0の 状態は, 光子の場合 存在しない. $\Leftarrow$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$

- ゲージ を 選ぶ 自由度は ゲージ不変性 を 保つが
- その代わりに, 0質量場であることを 課す.

z成分 $\to 0$ となるはずだが、
その部分がない。

$$\text{spin-1} \to \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ があるが, 光子の場合 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ の 制約により ± 1 のみ。

- ゲージ不変性 を 保障するが massless を 導く.

- spin-1 粒子は $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ がないので, $0, \pm 1$ の 3成分 をもつ.
  ゲージ不変性は 自明ではないが massive になる.

(Higgs mechanism がない)

$\vec{a}_k(t)$ を 偏光ベクトル $\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2, \hat{k}$ で展開：

展開係数

$$\vec{a}_{\vec{k}}(t) = \sum_{\lambda=1,2} a_{\vec{k}\lambda}(t)\,\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}$$

$$= \underline{a_{\vec{k}1}(t)\,\hat{\epsilon}_{\vec{k}1} + a_{\vec{k}2}(t)\,\hat{\epsilon}_{\vec{k}2}} \qquad (\vec{k}\text{ は固定})$$

$\vec{A}$ を $a_{\vec{k}\lambda}(t)$ を用いて書き直す：

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\lambda=1,2}\sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2}\left(a_{\vec{k}\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^{+}_{\vec{k}\lambda}\hat{\epsilon}_{\vec{k}\lambda}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right)$$

Π についても同様の展開の表式が構成できる.

$a^{+}_{\vec{k}\lambda}(t), a_{\vec{k}\lambda}(t)$ について逆に解いて, 交換関係 $[a_{\vec{k}\lambda}(t), a^{+}_{\vec{k}'\lambda'}(t)]$ などを作ると.

$$\begin{cases} [a_{\vec{k}\lambda}(t), a^{+}_{\vec{k}'\lambda'}(t)] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \\ [a_{\vec{k}\lambda}(t), a_{\vec{k}'\lambda'}(t)] = [a^{+}_{\vec{k}\lambda}(t), a^{+}_{\vec{k}'\lambda'}(t)] = 0 \end{cases}$$

を得ることができる. ((2.157) の交換関係を用いる.)

○ 自由場のエネルギー・<u>運動量</u>

$$\begin{cases} H = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int d^3x\ :(\vec{E}^2 + \vec{B}^2): = \sum_{\vec{k}} \omega_k \sum_{\lambda=1,2} a^{+}_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda} \\ \vec{P} = \displaystyle\int d^3x\ :\vec{E}\times\vec{B}: = \sum_{\vec{k}} \vec{k} \sum_{\lambda=1,2} a^{+}_{\vec{k}\lambda}a_{\vec{k}\lambda} \end{cases}$$

このとき, ポインティングベクトルが運動量に等価であることを用いた.

○ 光子のヘリシティ固有状態の構成.

$$\boxed{a^\dagger_{\vec{k},s=\pm}(t) = \vec{a}^\dagger_{\vec{k}}(t)\cdot\hat{e}_{\pm} \quad , \quad a_{\vec{k},s=\pm}(t) = \vec{a}_{\vec{k}}(t)\cdot\hat{e}_{\mp}}$$

これら、ヘリシティを量子数とする場の演算子の間の交換関係は

$$\boxed{\begin{gathered}[a_{ks}(t), a^\dagger_{k's'}(t)] = \delta_{kk'}\delta_{ss'} \\ [a_{ks}(t), a_{k's'}(t)] = [a^\dagger_{ks}(t), a^\dagger_{k's'}(t)] = 0\end{gathered}}$$

[$s = \pm 1$ … 光子の偏光状態を表す]

○ 横波の偏光状態を用いることで、KG場と同様の量子化ができた。

○ 対応する調和振動子の代数も同様に従う.

○ $a^\dagger_{ks}$ が helicity s の光子の生成、a_{ks} が 同様に光子の消滅.

○ Lorentz・gauge invariance が失われている.

⟹ S 行列 (物理量の段階) では回復する.

○ Lorentz 共変性を残したまま量子化することも可能.

このとき、負ノルムが現れる.

⟹ 問題になる

2.8 Noether theorem

☆ Lagrangian の持つ対称性には、対応する保存則が存在する。

2.8.1 Conservation of 4-Momentum

座標の変換 : $x_\mu \to x_\mu' = x_\mu + a_\mu$ (a_μ : 微小変換)

- $\mathcal{L}$ の変化量 (一般の $\mathcal{L}$ に対して)

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) = \underline{a^\mu \partial_\mu \mathcal{L}}$$

- $\mathcal{L}$ の変化量 (ϕ, $\partial_\mu\phi$ に依存し、明示的に x_μ に依存しない)

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)$$

このとき、$\delta\phi \equiv \phi(x') - \phi(x) = a^\mu\partial_\mu\phi$ ($\leftarrow$ a^μ の1次)

$$\delta(\partial_\mu\phi) \equiv \partial_\mu\phi(x') - \partial_\mu\phi(x) = a^\nu\partial_\nu(\partial_\mu\phi)$$

Euler-Lagrange eq. を用いると、

$$\delta\mathcal{L} = \left(\partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}\right)a^\mu\partial_\mu\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}a^\mu\partial_\mu(\partial_\nu\phi)$$

$$= \underline{\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi)}a^\mu\partial_\mu\phi\right)}$$

これらを等置すると、

$$a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} a^\mu \partial_\mu \phi \right)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$g^{\mu\nu} a_\nu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} a^\nu \partial_\nu \phi \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_\nu \partial_\mu (g^{\mu\nu} \mathcal{L}) = a_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_\nu \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0$$

for $^\forall a_\nu$,

$$\partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}}_{\Downarrow \ \boxed{\text{保存量}}} \right) = 0$$

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0}$$

◎ Θ^{00}

$$\Theta^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\phi})}\dot{\phi} - g^{00}\mathcal{L} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \underline{\mathcal{H}}$$

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \int d^3x\, \Theta^{00} \quad \Longrightarrow \quad \Theta^{00} : \text{エネルギー密度}$$

◎ Θ^{0k}

$$\Theta^{0k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^k \phi = \dot{\phi}\,\partial^k \phi$$

$$p^k = m\,\dot{\phi} = \int d^3x\, \tilde{p}^k$$

$$\Rightarrow \quad p^k = m\,\partial^k \dot{\phi}$$

2.8.2 Conservation of Isospin Current

p と n を同じ粒子の異なる状態とみなす。このとき、区別している量子数は電荷となる。
このように、p.n を電荷という量子数が違う同じ粒子とみなすとき、isospin 対称性がある という。
$\Longrightarrow$ $m_p = m_n$ を仮定することになる。

アイソスピン空間でのスピノルとして次のように書く：

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

※ p, n は 4成分をもつ Dirac スピノル。なので、ψ は 8つの自由度を持つことになる。

∘ Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{p}(i\partial\!\!\!/ - m)p + \bar{n}(i\partial\!\!\!/ - m)n$$

同じ m を用いることに注意。∵ isospin sym. を仮定

$$= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$$

∘ 大域的 isospin 回転

$$\psi \longrightarrow e^{\frac{i}{2}\tau^a \alpha_a}\psi \qquad (a = 1.2.3,\ \tau^a : \text{Pauli 行列})$$

α_a : 座標に依存しない定数
$\Rightarrow$ すべての時空点において同じ回転を施す変換を表す。 ($\alpha_a(x)$ として局所的な変換も考えることができ、Yang-Mills 場を導く)

α_a, τ^a は 座標, Dirac空間には独立

$\Longrightarrow$ isospin rotation の下で $\mathcal{L}$ は不変であることが要請される.

α_a が連続パラメータなので, 連続的な変換の下での対称性には保存則が存在。

∘ Noether theorem

$$\psi(x) \longrightarrow e^{\frac{i}{2}\tau^a\alpha_a}\psi = \left(1+\frac{i}{2}\tau^a\alpha_a\right)\psi + \mathcal{O}(\alpha_a^2)$$

$$\approx \psi + \underline{\frac{i}{2}\tau^a\alpha_a\psi}$$

$$\equiv \psi + \underline{\delta\psi} \qquad \Rightarrow \quad \delta(\partial_\mu\psi) = \frac{i}{2}\tau^a\alpha_a\partial\psi$$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi)$$

$$= \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\right)\frac{i}{2}\tau^a\alpha_a\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{i}{2}\tau^a\alpha_a\partial_\mu\psi$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\tau^a\alpha_a\psi\right)$$

$$\equiv 0$$

Lagrangian の不変性は次の保存則を導く;

$$\partial_\mu\left(\frac{i}{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\tau^a\alpha_a\psi\right) = 0$$

Dirac current, EM current との対応から, $J_\mu{}^a$ を次式で定義する.

$$J_\mu{}^a = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\tau^a}{2}\alpha_a\psi = \underline{\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\tau^a\psi}$$

$$\frac{\bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi}{\partial(\partial_\mu\psi)}$$

$$= \bar{\psi}\gamma_\mu g^{\nu\mu}\partial_\nu\psi$$

$$= \gamma_\mu g^{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}$$

$$= \gamma^\nu\delta_{\nu\mu} = \gamma^\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{J_\mu{}^a = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau^a}{2}\psi}$$

$$\begin{cases} J_\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi & \longrightarrow \text{Dirac} \\ J_\mu^a = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2}\psi & \longrightarrow \text{isospin} \end{cases}$$

一般に、生成子を表す行列 t^a に対して、Noether current は

$$\boxed{J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} t^a_{ij} \phi_j}$$

となる。 isospin transformation では、 $t^a = \tau^a/2$

$[t^a, t^b] = i\epsilon^{abc}t^c$
SU(2) の代数に従う。

2.8.3 Conserved Charge

○EM

$$j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$$

$$\rightarrow Q_e = \int d^3x\, \rho(x) = \int d^3x\, j^0(x)$$

$$\dot{Q}_e = \int d^3x\, \dot{j}^0(x) = \int d^3x\, (-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) = -\int_S dS\, \vec{j}\cdot\vec{n} = 0$$

$$= i[H, Q]$$

保存流 $\partial_\mu J^\mu = 0 \longrightarrow \dot{Q} = 0 \quad \left(Q = \int d^3x\, J^0\right)$

$$\Longleftrightarrow [H, Q] = 0$$

という対応が存在する。

Exercise 2.4

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \qquad (2.46)$$

が 大域的 $U(1)$ 回転 $\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x)$ で不変であること

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x), \qquad \psi^\dagger(x) \to (e^{i\alpha}\psi(x))^\dagger = e^{-i\alpha}\psi^\dagger(x)$$

$$\bar{\psi}(x) \to (e^{i\alpha}\psi(x))^\dagger\gamma_0 = e^{-i\alpha}\psi^\dagger(x)\gamma_0$$

したがって、

$$= e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)$$

$$\mathcal{L} \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)e^{i\alpha}\psi(x)$$

$$= e^{-i\alpha}e^{+i\alpha}\bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x)$$

$$= \underline{\mathcal{L}}$$

Noether current は

$$J_\mu = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}a\psi = -i(\bar{\psi}i\gamma^\mu a\psi) = \underline{a\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

$$\dot{Q} = \partial_0\int d^3x\, a\bar{\psi}\gamma^0\psi = \partial_0 a\underbrace{\int d^3x\,\psi^\dagger\psi}_{=1} = \partial_0 a = \underline{0}$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$ より $Q = a\int d^3x\,\psi^\dagger\psi$ は保存量

Exercise 2.15

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial^\mu\phi^1)(\partial_\mu\phi^1) + (\partial^\mu\phi^2)(\partial_\mu\phi^2)\right] - \frac{1}{2}m_1^2\phi_1^2 - \frac{1}{2}m_2\phi_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi^a)(\partial_\mu\phi^a) - \frac{1}{2}m_a^2\phi_a^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi_a\phi_a)^2 \qquad - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

(a)

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ の微小変換の下で，$m_1 = m_2 = m$ とするとき．$\mathcal{L}$ が不変であること．

$\alpha \ll 1$ のとき

$$U = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\alpha^2+O(\alpha^3) & -\alpha+O(\alpha^3) \\ \alpha+O(\alpha^3) & 1-\frac{1}{2}\alpha^2+O(\alpha^3) \end{pmatrix}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\alpha$$

$$\partial_\mu\phi^a \to i\cancel{t}\alpha\,\partial_\mu\phi^a$$

$$-\frac{1}{2}m^2($$

$$\cancel{t^a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \qquad U = e^{it\alpha}$$

$$\hookrightarrow \quad t^a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$ とすることで $U = \exp(it\alpha)$ と整合する．

◎ 運動項

$$\begin{cases} \phi^1 \to \phi^1 + i(t)_{1j}\alpha\phi^j = \phi^1 - i\alpha\phi^2 \\ \phi^2 \to \phi^2 + i(t)_{2j}\alpha\phi^j = \phi^2 + i\alpha\phi^1 \end{cases}$$

⇙ この先の議論には i が変わるだけなので変更されない．

$$\begin{cases} \partial_\mu\phi^1 \to \partial_\mu\phi^1 - i\alpha\partial_\mu\phi^2 \\ \partial_\mu\phi^2 \to \partial_\mu\phi^2 + i\alpha\partial_\mu\phi^1 \end{cases}$$

$$(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi^2)$$

$$\to (\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) - 2i\alpha(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^2) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi^2) + 2i\alpha(\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi^1)$$

$$= \underline{(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi^2)} \,//$$

(c) 質量項 ($\phi_1^2 + \phi_2^2$)

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 \longrightarrow (\phi_1 - i\alpha\phi_2)^2 + (\phi_2 + i\alpha\phi_1)^2$$

$$\simeq \phi_1^2 - 2i\alpha\phi_1\phi_2 + \phi_2^2 + 2i\alpha\phi_2\phi_1$$

$$= \underline{\phi_1^2 + \phi_2^2} \;/\!/$$

(d) H_{int} ($(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$)

$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \text{invariant}$ より $\underline{H_{int} \to H_{int}}$ //

したがって $\mathcal{L}$ は invariant //

Noether current は、

$$J_\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} (t)_{ab} \phi^b$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_1)} = \partial^\mu \phi_1 , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_2)} = \partial^\mu \phi_2 \qquad \text{より}$$

$$J_\mu = -i\,\partial^\mu\phi_1\, t_{12}\,\phi^2 - i\,\partial^\mu\phi_2\, t_{21}\,\phi^1$$

$$= -i\,\partial^\mu\phi_1 \cdot i\,\phi^2 - i\,\partial^\mu\phi_2 \cdot (-i)\,\phi^1$$

$$= \partial^\mu\phi_1 \cdot \phi^2 - \partial^\mu\phi_2 \cdot \phi^1$$

$$= \underline{\phi^2 \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi^1} \;/\!/$$

(b)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial^\mu\phi^2)\right] + \frac{m}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2$$

を $\phi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 \pm i\phi_2)$ で導入し、$\phi_\pm$ で書き直す.

① 運動項

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_+ + \phi_-) \\ \phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\phi_+ - \phi_-) \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_\mu\phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\phi_+ + \partial_\mu\phi_-) \\ \partial_\mu\phi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\partial_\mu\phi_+ - \partial_\mu\phi_-) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial_\mu\phi^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_+)^2 + (\partial_\mu\phi_-)^2 + 2(\partial_\mu\phi_+)(\partial_\mu\phi_-)\right] - \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_+)^2 + (\partial_\mu\phi_-)^2 - 2(\partial_\mu\phi_+)(\partial_\mu\phi_-)\right] \\
&= 2(\partial_\mu\phi_+)(\partial_\mu\phi_-)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi^1)(\partial^\mu\phi^1) + (\partial_\mu\phi^2)(\partial_\mu\phi^2)\right] = \underline{(\partial_\mu\phi_+)(\partial^\mu\phi_-)}$$

② $\phi_1^2 + \phi_2^2$

$$\begin{aligned}
\phi_+\phi_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \\
&= \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \phi_+\phi_-, \qquad \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2+\phi_2^2)^2 = \lambda|\phi_+\phi_-|^2$$

$\phi_+ \rightarrow \underline{e^{i\alpha}\phi_+}$ のとき, $\phi_- = (\phi_+)^*$ より

$$\phi_- \rightarrow (e^{i\alpha}\phi_+)^* = \underline{e^{-i\alpha}\phi_-}$$

㊂ 運動項

$$(\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi^-)$$

$$\to \quad (\partial_\mu e^{i\alpha}\phi^+)(\partial^\mu e^{-i\alpha}\phi^-)$$

$$= \underline{(\partial_\mu \phi^+)(\partial^\mu \phi^-)} \,//$$

㊂ 質量項

$$\phi_+\phi_- \longrightarrow e^{i\alpha}\phi_+ e^{-i\alpha}\phi_- = \underline{\phi_+\phi_-} \,//$$

したがって、大域的 $U(1)$ 回転の下で不変となる。

Noether current は

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi_+)(\partial^\mu \phi_-) + \phi_+\phi_- - \lambda(\phi_+\phi_-)^2$$

$$\to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_+)} = \partial^\mu \phi_-, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_-)} = \partial^\mu \phi_+ \quad \text{より}$$

$$e^{i\alpha} = 1 + i\alpha$$

$$J_\mu = -i\,\partial^\mu \phi_- \cdot \alpha \cdot \phi^+ - i\,\partial^\mu \phi^+ \alpha\, \phi^-$$

$$= \underline{-i\,\partial^\mu(\phi_+\phi_-)} \,// \qquad (?)$$

2.9 Interactions between field

$\mathcal{H}_{int}$ には $\partial_\mu \phi$ が含まれないとしてきた $\longrightarrow$ 運動量は自由場のまま.

(i) no coupling

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

(ii) $\partial_\mu \to \partial_\mu + i e_0 A_\mu$ (minimal substitution)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$- e_0 \bar{\psi} A\!\!\!/ \psi$$

共変微分に置き換えることで現れる項

m_0, e_0 は物理的な m, e ではない

$\Downarrow$

くりこみを要する.

$\Downarrow$

$$\boxed{\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{H}_{int} = -e_0 \bar{\psi} A\!\!\!/ \psi = -e_0 \bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu \psi}$$

(iii) 運動方程式

$$\begin{cases} (i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi(x) = e_0 A\!\!\!/(x)\psi(x) \\ \partial_\nu F^{\mu\nu}(x) = e_0 \bar{\psi}(x)\gamma^\mu \psi(x) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ $e - \gamma$ の間での相互作用を含めた方程式となる.

Exercise 2.16

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e_0\bar{\psi}\not{A}\psi$$

自由場と相互作用場に分けると計算がかんたん。