0.1 インスタントンに関するノート

Contents

0.1.1 Euclidean SU(2) Yang-Mills configurations

インスタントンとは，ユークリッド化[*1]された場の方程式の解のなかでも**有限作用・局在性**を満たす解のことを指す．もっとも単純な $(3+1)$ 次元の実スカラー場を例にとる．ミンコフスキー計量を

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+---) \tag{0.1.1}$$

と決めると作用の表式は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Min}} &= \int dx_0 \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - m^2\phi(x)\right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - m^2\phi\right] \end{aligned} \tag{0.1.2}$$

この作用から導かれる古典的な運動方程式は次のようになる：

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\phi(x) + m^2\phi(x) = 0 \tag{0.1.3}$$

話をユークリッド時空へ進めるために，ミンコフスキー時空での時間座標 x_0 を純虚数へと解析接続しユークリッド時空の座標の第 4 成分を次式で導入する：

$$(x_4)_{\mathrm{Euc}} \equiv i(x_0)_{\mathrm{Min}} \tag{0.1.4}$$

簡単のために $x_4 = ix_0$ と書くが上式の意味であることを覚えておく．空間座標はミンコフスキー時空とユークリッド時空で共通である：

$$\begin{aligned} (x_1)_{\mathrm{Euc}} &\equiv (x_1)_{\mathrm{Min}} \\ (x_2)_{\mathrm{Euc}} &\equiv (x_2)_{\mathrm{Min}} \\ (x_3)_{\mathrm{Euc}} &\equiv (x_3)_{\mathrm{Min}} \end{aligned} \tag{0.1.5}$$

さらに，のちの便宜のためユークリッド時空での作用 S_{Euc} を次式で定義する：

$$S_{\mathrm{Euc}} \equiv -i\,(S_{\mathrm{Min}})_{\mathrm{continued}} \tag{0.1.6}$$

このときの continued の文字は，右辺のミンコフスキー時空における作用 S_{Min} を上記の x_4 で書き直したものを意味する．これにしたがえば，ユークリッド時空での作用の表式は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{Euc}} &= (-i)\int(-idx_4)\int d^3x_{\mathrm{Euc}}\left[\frac{1}{2}\partial^\mu\phi(x)\partial_\mu\phi(x) - m^2\phi(x)\right] \\ &= -\int d^4x_{\mathrm{Euc}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial(-ix_4)}\right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - m^2\phi\right] \\ &= \int d^4x_{\mathrm{Euc}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_4}\right)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + m^2\phi\right] \end{aligned} \tag{0.1.7}$$

この作用から導かれる古典的運動方程式は次のようになる：

$$(\partial_4^2 + \nabla^2)\phi(x) - m^2\phi(x) = 0 \tag{0.1.8}$$

[*1] ユークリッド化の手続きについては後述する．

具体的な解を求めるために，ユークリッド時空での SU(2) Yang-Mills 場 $A_\mu^a(x)$ を考える[*2]．以降はユークリッド時空での議論に限るので $A_\mu^a(x)$ のような表記は以下の意味を表すものとして話を進める：

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{0.1.9}$$

ゲージ場 $A_\mu(x)$ およびその強さ $G_{\mu\nu}(x)$ は Pauli 行列 $\sigma_a \, (a = 1, 2, 3)$ を用いて次式で定義する：

$$A_\mu(x) \equiv \sum_{a=1}^{3} g \frac{\sigma_a}{2i} A_\mu^a(x) \tag{0.1.10}$$

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv \sum_{a=1}^{3} g \frac{\sigma_a}{2i} G_{\mu\nu}^a(x) \tag{0.1.11}$$

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \tag{0.1.12}$$

◆ check

$$\begin{aligned}
[A_\mu(x), A_\nu(x)] &= \left[\sum_a g \frac{\sigma_a}{2i} A_\mu^a(x), \sum_b g \frac{\sigma_b}{2i} A_\nu^b(x) \right] \\
&= \sum_{a,b} g^2 A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \left(\frac{1}{i} \right)^2 \left[\frac{\sigma_a}{2}, \frac{\sigma_b}{2} \right] \\
&= \sum_{a,b} g^2 A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \frac{1}{i} \epsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2}
\end{aligned} \tag{0.1.13}$$

$$\partial_\mu A_\nu(x) = \sum_c g \frac{\sigma_c}{2i} \partial_\mu A_\nu^c(x) \tag{0.1.14}$$

$$\partial_\nu A_\mu(x) = \sum_c g \frac{\sigma_c}{2i} \partial_\nu A_\mu^c(x) \tag{0.1.15}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}(x) &= \sum_c \left[g \frac{\sigma_c}{2i} \partial_\mu A_\nu^c(x) - g \frac{\sigma_c}{2i} \partial_\nu A_\mu^c(x) + \frac{1}{i} g^2 \epsilon_{abc} \frac{\sigma_c}{2} A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \right] \\
&= \sum_c g \frac{\sigma_c}{2i} \left[\partial_\mu A_\nu^c(x) - \partial_\mu A_\nu^c(x) + g \epsilon_{abc} A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \right] \\
&\equiv \sum_c g \frac{\sigma_c}{2i} G_{\mu\nu}^c(x)
\end{aligned} \tag{0.1.16}$$

$$G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g \epsilon_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \tag{0.1.17}$$

[*2] QCD への適用を考えるには，ゲージ群をカラー SU(3) へと拡張する．SU(2) が SU(3) の部分群であることを利用して議論することになる．

いま，2 成分実スカラー場を SU(2) の基本表現にとると，

$$\text{fundamental rep. of SU(2)} \ : \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_x(x) \end{pmatrix} \tag{0.1.18}$$

局所 SU(2) 変換のもとでのスカラー場 $\phi(x)$ の変換性は

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(x)\phi(x) \tag{0.1.19}$$

となる．これにともない，場の微分が

$$\partial_\mu \phi(x) \to \partial_\mu \phi'(x) = (\partial_\mu U(x))\phi(x) + U(x)\partial_\mu \phi(x) \tag{0.1.20}$$

となるため，スカラー場の運動項は Lagrangian の局所ゲージ不変性を破る．そこで，スカラー場に対する共変微分 $D_\mu \phi(x)$ を次の変換性を満たすように定める：

$$D_\mu \phi(x) \to D'_\mu \phi'(x) = U(x) D_\mu \phi(x) \tag{0.1.21}$$

このような変換性をみたす共変微分を構成するには，次のような形を考えればよい：

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + A_\mu(x)\phi(x) \tag{0.1.22}$$

このとき，$A_\mu(x)$ は SU(2) に値をとるローレンツベクトルであり，ゲージ変換の下で次のように変換する：

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) + U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{0.1.23}$$

このことは以下のようにして確認できる．

◆ check

x は省略する．

$$\begin{aligned} D_\mu \phi \underset{\text{gauge transf.}}{\to} D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu + A'_\mu) U\phi \\ &= U\partial_\mu \phi + (\partial_\mu U)\phi + A'_\mu U\phi \\ &= U\left[\partial_\mu \phi + U^{-1}(\partial_\mu U)\phi + U^{-1} A'_\mu U \phi\right] \quad (\because UU^{-1} = \mathbf{1}) \\ &= U\left[\partial_\mu + U^{-1}(\partial_\mu U) + U^{-1} A'_\mu U\right]\phi \\ &\equiv U\left[\partial_\mu + A_\mu\right]\phi \quad (\because D_\mu \phi \to U D_\mu \phi) \end{aligned} \tag{0.1.24}$$

この要請から，A_μ の変換性が次のように決定できる：

$$\begin{aligned} A_\mu &= U^{-1}(\partial_\mu U) + U^{-1} A'_\mu U \\ \Rightarrow U A_\mu U^{-1} &= (\partial_\mu U) U^{-1} + A'_\mu \\ \Rightarrow A'_\mu &= U A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U) U^{-1} \end{aligned} \tag{0.1.25}$$

さらに，

$$UU^{-1} = \mathbf{1} \Leftrightarrow (\partial_\mu U) U^{-1} + U(\partial_\mu U^{-1}) = 0 \tag{0.1.26}$$

を用いて右辺第 2 項を書き換えると，

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + U \partial_\mu U^{-1} \tag{0.1.27}$$

と書くことができる．

以上のゲージ場によって構成されるミンコフスキー時空での Yang-Mills 作用は次のようになる：

$$S_{\mathrm{YM}}^{(\mathrm{Min})} = -\frac{1}{4}\int d^4x_{\mathrm{Min}}\, G^a_{\mu\nu}(x_{\mathrm{Min}})G^{a\mu\nu}(x_{\mathrm{Min}}) \tag{0.1.28}$$

上述の方法により，ユークリッド時空での Yang-Mills 作用は次のようになる：

$$S_{\mathrm{YM}}^{(\mathrm{Euc})} = -iS_{\mathrm{YM}}^{(\mathrm{Min})} = (-i)\left\{-\frac{1}{4}\int d^3x_{\mathrm{Euc}}(-idx_4)\, G^a_{\mu\nu}(x_{\mathrm{Euc}})G^{a\mu\nu}(x_{\mathrm{Euc}})\right\} \tag{0.1.29}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_{\mathrm{YM}} &= \frac{1}{4}\int d^4x_{\mathrm{Euc}}G^a_{\mu\nu}(x_{\mathrm{Euc}})G^{a\mu\nu}(x_{\mathrm{Euc}}) \\ &= \frac{1}{4}\int d^4x\, G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \qquad (0.1.30) \\ &= -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right] \quad (\mathrm{Tr}(\sigma_a\sigma_b) = 2\delta_{ab}) \qquad (0.1.31)\end{aligned}$$

このとき現れる $-1/g^2$ の因子は，行列値の場の強さ $G_{\mu\nu}(x)$ に含まれる結合定数 g/i によるものである．実際，$G_{\mu\nu}(x)$ の定義に立ち返ると，

$$G_{\mu\nu}(x) \equiv \sum_{a=1}^{3} g\frac{\sigma_a}{2i}G^a_{\mu\nu}(x) \tag{0.1.32}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right] &= \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_a g\frac{\sigma_a}{2i}G^a_{\mu\nu}\right)\left(\sum_b g\frac{\sigma_b}{2i}G^{b\mu\nu}\right)\right] \\ &= \left(\frac{g}{2i}\right)^2\sum_{a,b}G^a_{\mu\nu}G^{b\mu\nu}\mathrm{Tr}(\sigma_a\sigma_b) \\ &= \left(\frac{g}{2i}\right)^2\sum_{a,b}G^a_{\mu\nu}G^{b\mu\nu}2\delta_{ab} \quad (\because \mathrm{Tr}(\sigma_a\sigma_b) = 2\delta_{ab}) \\ &= -\frac{g^2}{2}\sum_a G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \qquad (0.1.33) \\ \therefore \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right] &= -\frac{g^2}{2}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu} \qquad (0.1.34)\end{aligned}$$

の関係が得られる．行列値の場の強さ $G_{\mu\nu}(x)$ を用いて作用を表せば，$\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right]$ に加えて，$-2/g^2$ の因子が現れることが分かる．

この作用から得られる運動方程式の解を調べていく[*3]．変分原理から次の Yang-Mills 方程式が得られる：

$$D_\mu G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu G_{\mu\nu} + [A_\mu, G_{\mu\nu}] = 0 \tag{0.1.35}$$

Yang-Mills instanton とは，この方程式における，**作用が有限で局在化した解**を指す．この解を導くために次のステップで話を進める：

Step1. $S_{\mathrm{YM}} = 0$ の解を考える．これは，pure gauge と呼ばれる解 $A_\mu(x)$ を導く．
Step2. 次に S_{YM} が有限となるゲージ場 $A_\mu(x)$ （configuration：配位） を考える．
Step3. このような有限作用の配位が，トポロジカルな指数によって分類可能であることを確認する．
Step4. より具体的に，Belavin, Polyakov たちによって導かれたインスタントンの具体的な形を導く．

[*3] 導出は次ページ．

check

Yang-Mills 作用 S_{YM} から変分原理を用いて Yang-Mills 方程式を導く：

$$S_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\,\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right] \tag{0.1.36}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \delta S_{\mathrm{YM}} &= -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left[(\delta G_{\mu\nu})G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}(\delta G_{\mu\nu})\right] \\ &= -\frac{1}{g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}(\delta G_{\mu\nu})\right]\end{aligned} \tag{0.1.37}$$

このとき，トレースの可換性 $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ を用いた．ここで，

$$\begin{aligned}\delta G_{\mu\nu} &= \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \\ &= \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu]\end{aligned} \tag{0.1.38}$$

および，

$$G_{\nu\mu} = -G_{\mu\nu},\ \mathrm{Tr}[ABC] = \mathrm{Tr}[BCA] = \mathrm{Tr}[CAB] \tag{0.1.39}$$

を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}(\delta G_{\mu\nu})\right] &= \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}(\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu])\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu(G_{\mu\nu}\delta A_\nu) - \partial_\mu G_{\mu\nu}\delta A_\nu - \partial_\nu(G_{\mu\nu}\delta A_\mu) + \partial_\nu G_{\mu\nu}\delta A_\mu\right] + \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}([\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu])\right] \\ &= 2\partial_\mu\left(\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right]\right) - 2\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right] + 2\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}[A_\mu, \delta A_\nu]\right] \\ &= 2\partial_\mu\left(\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right]\right) - 2\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right] + -2\mathrm{Tr}\left[[A_\mu, G_{\mu\nu}]\delta A_\nu\right]\end{aligned} \tag{0.1.40}$$

が得られる．したがって， 変分条件 $\delta S_{\mathrm{YM}} = 0$ から，

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{YM}} &= -\frac{1}{g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}(\delta G_{\mu\nu})\right] \\ &= -\frac{1}{g^2}\int d^4x\left\{2\partial_\mu\left(\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right]\right) - 2\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu G_{\mu\nu}\delta A_\nu\right] - 2\mathrm{Tr}\left([A_\mu, G_{\mu\nu}]\delta A_\nu\right)\right\} \\ &= \frac{2}{g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu G_{\mu\nu}\delta A_\nu + [A_\mu, G_{\mu\nu}]\delta A_\nu\right) \\ &= \frac{2}{g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left\{\left(\partial_\mu G_{\mu\nu} + [A_\mu, G_{\mu\nu}]\right)\delta A_\nu\right\} \equiv 0 \quad (\text{for }\forall\,\delta A_\nu)\end{aligned} \tag{0.1.41}$$

$$\therefore \partial_\mu G_{\mu\nu} + [A_\mu, G_{\mu\nu}] = 0 \tag{0.1.42}$$

◆ **Step1.** $S_{\rm YM}=0$ の解を考える．これは，pure gauges と呼ばれるゲージ場 $A_\mu(x)$ を導く．
$S_{\rm YM}=0$ が成り立つ必要十分条件は

$$G_{\mu\nu}(x)=0 \tag{0.1.43}$$

である．この条件は $G_{\mu\nu}(x)$ のゲージ変換の表式を見れば明らかにゲージ不変である[*4]．さらに，$G_{\mu\nu}=0$ を満たすゲージ場 $A_\mu(x)$ は無限に構成することができる．具体的には，$A_\mu(x)=0$ のゲージ場からゲージ変換

$$A'_\mu(x)=U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x)+U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)\underset{A_\mu(x)=0}{=}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{0.1.45}$$

によって得られる $A'_\mu(x)$ もまた $G_{\mu\nu}(x)=0$ を満たすゲージ場となる．このような形で与えられるゲージ場

$$A_\mu(x)=U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \tag{0.1.46}$$

を **pure gauges** と呼ぶ．いまの場合，$U(x)$ は時空の各点に与えられた 2×2 表現の SU(2) の要素である．

◆ check

pure gauges $A_\mu(x)=U(x)\partial_\mu U^{-1}(x)$ が $G_{\mu\nu}(x)=0$ を満たすゲージ場となっていることの確認．

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}(x)\to G'_{\mu\nu}(x)&=\partial_\mu(U\partial_\nu U^{-1})-\partial_\nu(U\partial_\mu U^{-1})+[U\partial_\mu U^{-1},U\partial_\nu U^{-1}]\\
&=(\partial_\mu U)\partial_\nu U^{-1}+U\partial_\mu\partial_\nu U^{-1}-(\partial_\nu U)\partial_\mu U^{-1}-U\partial_\nu\partial_\mu U^{-1}\\
&\quad+U\partial_\mu U^{-1}U\partial_\nu U^{-1}-U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\mu U^{-1}\\
&=(\partial_\mu U)\partial_\nu U^{-1}-(\partial_\nu U)\partial_\mu U^{-1}+U(-U^{-1}\partial_\mu U)\partial_\nu U^{-1}-U(-U^{-1}\partial_\nu U)\partial_\mu U^{-1}\\
&=(\partial_\mu U)\partial_\nu U^{-1}-(\partial_\nu U)\partial_\mu U^{-1}-(\partial_\mu U)\partial_\nu U^{-1}+(\partial_\nu U)\partial_\mu U^{-1}\\
&=0
\end{aligned} \tag{0.1.47}$$

$$\therefore G'_{\mu\nu}(x)=0 \tag{0.1.48}$$

[*4]

$$G_{\mu\nu}(x)=0\to G'_{\mu\nu}(x)=U(x)G_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)=0 \tag{0.1.44}$$

◆ **Step2.** $S_{\rm YM}$ が有限となるゲージ場 $A_\mu(x)$ （configuration : 配位） を考える.
次に有限の作用をもつゲージ場を求める. Yang-Mills 作用 $S_{\rm YM}$ の表式

$$S_{\rm YM} = -\frac{1}{4g^2}\int d^4x {\rm Tr}\left[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right] \tag{0.1.49}$$

から，これが有限であるためには 4 次元 Euclid 時空の境界で $G_{\mu\nu} \to 0$ となればよい. いいかえれば，3 次元球面 $S_3^{(\rm phy)}$ 上で $G_{\mu\nu} \to 0$ となればよい[*5]. 実際には，作用が 4 次元の積分なので $G_{\mu\nu}$ は $1/r^2$ よりも速く 0 に収束する関数であればよい.
$G_{\mu\nu} = 0$ の条件はゲージ場 A_μ が pure gauges に近づくことに対応する. つまり，

$$\lim_{r\to\infty} A_\mu(x) = \lim_{r=\infty} U\partial_\mu U^{-1} \tag{0.1.50}$$

の条件に言い換えることができる. ここで，U は $S_3^{(\rm phy)}$ 上のみで定義された SU(2) に値をもつ群の関数である. この条件はまだ不完全である. なぜなら，右辺の ∂_μ を極座標で書き下すと動径方向の微分が現れるのに対し，U が $S_3^{(\rm phys)}$ 上のみで定義された関数なので動径方向の微分が定義できないからである. この問題はゲージ場 $A_\mu(x)$ の動径成分をゲージ変換によって消去することで解決できる. 具体的には次のようなゲージ関数をとればよいことが確かめられる :

$$\tilde{U}(x) = {\rm P}\exp\left(\int_0^r dr' A_r(x')\right) \tag{0.1.51}$$

このとき， P は経路順序積を意味する.

◆ check

ゲージ関数 $\tilde{U}(x)$ によるゲージ変換によって，ゲージ場の動径成分 A_r を消去することができることの確認.

$$\begin{aligned}
A'_r(x) &= \tilde{U}A_r(\tilde{U})^{-1} + \tilde{U}\partial_r(\tilde{U})^{-1} \\
&= \tilde{U}A_r(\tilde{U})^{-1} - \partial_r\tilde{U}(\tilde{U})^{-1} \\
&= \tilde{U}A_r(\tilde{U})^{-1} - \tilde{U}A_r(\tilde{U})^{-1} \quad \left(\because \tilde{U}(x) = {\rm P}\exp\left(\int_0^r dr' A_\mu(x')\right)\right) \\
&= \tilde{U}(A_r - A_r)(\tilde{U})^{-1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{0.1.52}$$

このゲージ関数を用いたゲージ変換によって $A'_r(x) = 0$ とすることができるので，作用が有限であるための条件は次のように書くことができる :

$$A'_\mu(x)\big|_{S_3^{(\rm phy)}} = U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\partial_\mu U^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \tag{0.1.53}$$

ここで，$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ は 3 つのパラメータ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ でパラメータ付けされた $S_3^{(\rm phy)}$[*6] 上で定義された群の関数を意味する. このとき，$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ は $S_3^{(\rm phy)}$ 上のみで定義された関数であることに注意する. なので $U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ は一般のゲージ変換に用いることはできず，また $U(x)$ の境界での値ではないことにも注意する.
この関係式によって，有限作用を与えるゲージ場 $A_\mu(x)$ と $S_3^{(\rm phy)}$ 上での SU(2) 関数 $U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ が結びつく. この $U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ の選び方には任意性が残るが，それらの $U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ はホモトピーによって分類することができる.

まず，$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ が SU(2) の行列であることから，$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ は $S_3^{(\rm phy)}$ を SU(2) へと移す写像と考えることができる. 一方で，SU(2) の要素は

$$\begin{aligned}
U &= ia_1\sigma_1 + ia_2\sigma_2 + ia_3\sigma_3 + a_4\mathbf{1} \\
&= a_4\mathbf{1} + i\vec{a}\cdot\vec{\sigma} \quad (a_4^2 + |\vec{a}|^2 = 1)
\end{aligned} \tag{0.1.54}$$

[*5] これから，4 次元ユークリッド時空の部分空間を表す場合には，$S_3^{(\rm phy)}$ のように (phy) の添え字を付ける.
また，n 次元球面のことを S_n と書く. 例えば，3 次元空間内に存在する通常の球の表面は 2 次元球面 S_2 と表す.
[*6] 3 次元球面は 3 つのパラメータでパラメータ付けすることができる. 具体的には，4 次元時空内で極座標をとったときの 3 つの角度変数に相当する.

として 4 つの実数 $a_4, \vec{a}$ を用いて表すことができる．実パラメータ a_μ に対する制限 $a_4^2 + |\vec{a}|^2 = 1$ から， SU(2) の要素 U は 4 次元空間内の単位球面と等価であることが分かる．そこでこの球面を，物理的な 4 次元空間の境界 $S_3^{(\mathrm{phy})}$ と区別するために $S_3^{(\mathrm{int})}$ と書く．つまり，$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は $S_3^{(\mathrm{phy})}$ から $S_3^{(\mathrm{int})}$ への写像を与えることが分かる．ホモトピーの言葉を使えばこの写像は $\pi_3(S_3)$ と表すことができ，これは加群 Z に同相である．したがって，$S_3^{(\mathrm{phy})} \mapsto S_3^{(\mathrm{int})}$ は整数のインデックス Q によって分類される無限個のホモトピークラスに分類することができる．この Q は Pontryagin index と呼ばれる．$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は 4 次元時空の境界におけるゲージ場 $A_\mu(x)$ と対応がついていたのでゲージ場 $A_\mu(x)$ もまた，整数のインデックスによって分類されることになる．このとき，ゲージ場は整数によって特徴づけられる「ホモトピーセクター」に分類されるという．このような呼び方をするのは $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とゲージ場 $A_\mu(x)$ との分類を区別するためである．
もう 1 つ重要な点をあげておく．異なるホモトピークラスやホモトピーセクターに属する $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ や $A_\mu(x)$ は**作用を有限に保ったままの**連続的な変形によって互いに移り変わることができない．これは，各ホモトピーを特徴づける Pontryagin index が整数であることによる．この点についてはインスタントンを量子化する際に再び議論する．

ここで導入した Pontryagin index Q は U やゲージ場 A_μ を用いて具体的に表すことができる．結果を先に示しておく：

$$
\begin{aligned}
Q &\equiv \int Q(x) d^4x \\
&= -\frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu}\right]
\end{aligned}
\tag{0.1.55}
$$

ここで，$\tilde{G}_{\mu\nu}$ は**双対 (dual)** と呼ばれるもので，4 成分完全反対称テンソル $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ を用いて次式で定義される：

$$
\tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}
\tag{0.1.56}
$$

この式で与えられる積分がホモトピー指数となることを確かめる．証明は少し冗長になるが，基本的なアイデアは Q が $S_3^{(\mathrm{phy})}$ から $S_3^{(\mathrm{int})}$ への巻き付き数を与えるということである．

□ **1st** この積分を $S_3^{(\mathrm{phy})}$ の表面積分に書き換える．
まず，次の恒等式を示す．

Identity

$$
D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu\tilde{G}_{\mu\nu}} + [A_\mu, \tilde{G}_{\mu\nu}] = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]\right\} = 0
\tag{0.1.57}
$$

proof

$$
\begin{aligned}
D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} + [A_\mu, \tilde{G}_{\mu\nu}] \quad (\tilde{G}_{\mu\nu}\text{に対する共変微分}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta} + \left[A_\mu, \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}\right] \quad (\because \tilde{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha, A_\beta]\right] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta - \partial_\mu\partial_\beta A_\alpha) + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left([\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] + [A_\alpha, \partial_\mu A_\beta]\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha]
\end{aligned}
\tag{0.1.58}
$$

ここで，各項を分けて考える．$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の反対称性を用いることでいくつかの項をまとめることができる．

$$\begin{aligned}
\text{第 1 項} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\beta A_\alpha \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta \quad (2\text{ 項目で}\alpha \leftrightarrow \beta\text{とした}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta \quad (2\text{ 項目で}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}\text{の}\alpha\text{と}\beta\text{を交換した}) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta
\end{aligned} \tag{0.1.59}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\alpha, \partial_\mu A_\beta] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}[A_\beta, \partial_\mu A_\alpha] \quad (2\text{ 項目で}\alpha \leftrightarrow \beta\text{とした}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] \quad (2\text{ 項目で}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}\text{の}\alpha \leftrightarrow \beta, \text{交換関係の中身を交換した}) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta]
\end{aligned} \tag{0.1.60}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 3 項} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\beta A_\alpha] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] \quad (2\text{ 項目で}\alpha \leftrightarrow \beta\text{とした}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] \quad (2\text{ 項目で}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}\text{において}\alpha \leftrightarrow \beta\text{とした}) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, \partial_\alpha A_\beta]
\end{aligned} \tag{0.1.61}$$

$$\begin{aligned}
\text{第 4 項} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta] - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\beta A_\alpha] \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta] - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}[A_\mu, A_\alpha A_\beta] \quad (2\text{ 項目で}\alpha \leftrightarrow \beta\text{とした}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta] + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta] \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[A_\mu, A_\alpha A_\beta]
\end{aligned} \tag{0.1.62}$$

したがって，

$$D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + [\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]\right\} \tag{0.1.63}$$

さらに第 2 項目は

$$\begin{aligned}
\text{第 2 項} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\partial_\mu A_\alpha, A_\beta] \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\beta(\partial_\mu A_\alpha) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta - \epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}A_\alpha(\partial_\mu A_\beta) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\alpha A_\beta)
\end{aligned} \tag{0.1.64}$$

と変形できるので，

$$D_\mu \tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]\right\} \tag{0.1.65}$$

以上で，恒等式の 1 つ目の等号を示すことができた．次に，恒等式最後の等号を示す．さらに変形を続けていくと，

$$\begin{aligned}
\{\cdots\} &= \partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + A_\alpha\partial_\mu A_\beta + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta] + [A_\mu, A_\alpha A_\beta] \\
&= \partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + (\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta - (\partial_\alpha A_\beta)A_\mu + A_\mu A_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta A_\mu \\
\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\{\cdots\} &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta)A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta) \\
&\quad + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\mu A_\alpha A_\beta - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta A_\mu \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + (\partial_\alpha A_\mu)A_\beta\right] \\
&\quad + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\alpha\partial_\mu A_\beta + A_\mu\partial_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\mu A_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\mu A_\beta)
\end{aligned} \tag{0.1.66}$$

全ての項が $\alpha \leftrightarrow \mu$ の入れ換えに対して対称な形になる．$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ の反対称性から，このような項はすべての添え字に対して和をとると打ち消すのでゼロとなる[*7]．したがって，

$$D_\mu\tilde{G}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left\{\partial_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) + [A_\mu, \partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta]\right\} = 0 \tag{0.1.68}$$

が得られる．これが恒等式の最後の等号である．

end

この恒等式を用いると

$$\begin{aligned}
-16\pi^2 Q(x) &= \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + (A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\tilde{G}_{\mu\nu}\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{G}_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu\tilde{G}_{\mu\nu} - A_\nu A_\mu\tilde{G}_{\mu\nu}\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{G}_{\mu\nu} + A_\mu(A_\nu\tilde{G}_{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu}A_\nu)\right] \quad (\because \text{トレースの循環性}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\tilde{G}_{\mu\nu} + A_\mu[A_\nu, \tilde{G}_{\mu\nu}]\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu)\tilde{G}_{\mu\nu} - (\partial_\nu A_\mu)\tilde{G}_{\mu\nu} - A_\mu\partial_\nu\tilde{G}_{\mu\nu}\right] \quad (\because \text{恒等式}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu)\tilde{G}_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu\tilde{G}_{\mu\nu})\right]
\end{aligned} \tag{0.1.69}$$

ここで，$\tilde{G}_{\mu\nu}$ を展開すると，

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta A_\alpha + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta - \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\beta A_\alpha \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta + \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)
\end{aligned} \tag{0.1.70}$$

[*7] 例えば $\alpha \leftrightarrow \beta$ の入れ換えに対して対称な $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha)$ のような量を考える．α, β についての和を書き下すと，

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{\mu\nu 12}(A_1A_2 + A_2A_1) + \epsilon_{\mu\nu 21}(A_2A_1 + A_1A_2) + \epsilon_{\mu\nu 13}(A_1A_3 + A_3A_1) + \epsilon_{\mu\nu 31}(A_3A_1 + A_1A_3) \\
&+\epsilon_{\mu\nu 14}(A_1A_4 + A_4A_1) + \epsilon_{\mu\nu 41}(A_4A_1 + A_1A_4) + \epsilon_{\mu\nu 23}(A_2A_3 + A_3A_2) + \epsilon_{\mu\nu 32}(A_3A_2 + A_2A_3) \\
&+\epsilon_{\mu\nu 24}(A_2A_4 + A_4A_2) + \epsilon_{\mu\nu 42}(A_4A_2 + A_2A_4) + \epsilon_{\mu\nu 34}(A_3A_4 + A_4A_3) + \epsilon_{\mu\nu 43}(A_4A_3 + A_3A_4) \\
= &(A_1A_2 + A_2A_1) - (A_2A_1 + A_1A_2) + (A_1A_3 + A_3A_1) - (A_3A_1 + A_1A_3) \\
&(A_1A_4 + A_4A_1) - (A_4A_1 + A_1A_4) + (A_2A_3 + A_3A_2) - (A_3A_2 + A_2A_3) \\
&(A_2A_4 + A_4A_2) - (A_4A_2 + A_2A_4) + (A_3A_4 + A_4A_3) - (A_4A_3 + A_3A_4) \\
= &0
\end{aligned} \tag{0.1.67}$$

このように，必ず符号を入れ換えた組み合わせが現れて打ち消す．

を得るので，これを用いて

$$
\begin{aligned}
-16\pi^2 Q(x) &= \mathrm{Tr}\left[(\partial_\mu A_\nu)\tilde{G}_{\mu\nu} - \partial_\nu(A_\mu \tilde{G}_{\mu\nu})\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta) - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\left[A_\mu(\partial_\alpha A_\beta + A_\alpha A_\beta)\right]\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + A_\nu A_\alpha A_\beta)\right] \quad (3\text{ 項目で}\mu \leftrightarrow \nu\text{とした}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta) - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu\partial_\mu\partial_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + A_\nu A_\alpha A_\beta)\right] \\
&\qquad (2\text{ 項目は}\mu \leftrightarrow \alpha\text{の入れ換えに対して対称なのでゼロ}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\right]
\end{aligned} \tag{0.1.71}
$$

最終辺の第 3 項目は次のようにまとめることができる：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right] &= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu A_\alpha(\partial_\mu A_\beta)\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\alpha)A_\beta A_\nu + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\beta)A_\nu A_\alpha\right] \quad (\because\text{ トレースの循環性}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\right] \quad (\because\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\text{の反対称性}) \\
&= 3\mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\right]
\end{aligned} \tag{0.1.72}
$$

$$
\therefore \text{第 3 項} = \mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\right] = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta)\right] \tag{0.1.73}
$$

この結果を用いて，最終的な表式として次式を得る：

$$
\begin{aligned}
-16\pi^2 Q(x) &= \mathrm{Tr}\left[2\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu A_\alpha A_\beta) + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)A_\alpha A_\beta\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[2\partial_\mu(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta)\right]\right\}\left(= \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}\right]\right)
\end{aligned} \tag{0.1.74}
$$

この結果を

$$
Q(x) = \partial_\mu j_\mu(x) \tag{0.1.75}
$$

と書くと，

$$
j_\mu(x) \equiv -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[A_\nu(\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta)\right] \tag{0.1.76}
$$

というカレントを定義でき，Pontryagin index Q が次のような面積分で表される：

$$
Q = \int Q(x)d^4x = \int \partial_\mu j_\mu(x)d^4x = \oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu j_\mu(x) \tag{0.1.77}
$$

さらに，いま考えている有限の作用を与える配位では，$S_3^{(\mathrm{phy})}$ において $G_{\mu\nu} = 0$ である．これは，$\tilde{G}_{\mu\nu}$ に対して

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta + \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta \\
&= 0 \\
\Leftrightarrow \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta &= -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta
\end{aligned} \tag{0.1.78}
$$

を導く．この関係式を用いると，

$$
\begin{aligned}
Q &= \oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu\left(-\frac{1}{8\pi^2}\right)\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[A_\nu(\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta)\right] \\
&= \oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu\left(-\frac{1}{8\pi^2}\right)\mathrm{Tr}\left[A_\nu(-\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\alpha A_\beta)\right] \\
&= \oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu\frac{1}{24\pi^2}\mathrm{Tr}\left[\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu A_\alpha A_\beta\right] \\
&= +\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[A_\nu A_\alpha A_\beta\right]
\end{aligned} \tag{0.1.79}
$$

最後に，$S_3^{(\mathrm{phy})}$ での A_μ の漸近形

$$\left[A'_\mu(x)\right]_{S_3^{(\mathrm{phy})}} = U(\partial_\mu U^{-1}) \tag{0.1.80}$$

を代入することで，

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[U(\partial_\nu U^{-1})U(\partial_\alpha U^{-1})U(\partial_\beta U^{-1})\right] \\ &= -\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] \quad (\because U(\partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\mu U)U^{-1} = 0) \end{aligned} \tag{0.1.81}$$

を得る．これで，Pontryagin index Q を群の積分の形式で書き表すことができた．具体的な計算に進むためには，群積分の測度を決定する必要がある．群の測度 $d\mu(U)$ は SU(2) の場合，$U(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ の十分近傍においては

$$d\mu(U) = \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \tag{0.1.82}$$

と書くことができる．このとき，$\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ が連続群，今の場合は SU(2) ，の変換の下で不変となるように決める必要がある．つまり，

$$U' = \tilde{U}U \tag{0.1.83}$$

として SU(2) に値をとる固定された要素 $\tilde{U}$ を用いて $U(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \to U'(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)$ と変換されたとき，$d\mu(U)$ が不変でなければならない：

$$\begin{aligned} d\mu(U) &\equiv \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= d\mu(U') \quad (U' = \tilde{U}U) \\ &= \rho(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 \end{aligned} \tag{0.1.84}$$

このように決定した $d\mu(U)$ は不変測度と呼ばれる．ここでは $\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ の一般的な形の証明はせず[*8]，次のような $\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ が不変測度の要請を満たすことを確かめる．

$$\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right] \tag{0.1.85}$$

具体的な変換は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} &U(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \to U'(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3) = \tilde{U}U(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ &U = \tilde{U}^{-1}U', \quad U^{-1} = (U')^{-1}\tilde{U} \end{aligned} \tag{0.1.86}$$

この変換の下で，$\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ は次のように変換される．

$$\begin{aligned} \rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right] \\ &\underset{\xi\to\xi'}{=} \epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_p}\frac{\partial\xi'_p}{\partial\xi_i}(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_q}\frac{\partial\xi'_q}{\partial\xi_j}(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_r}\frac{\partial\xi'_r}{\partial\xi_k}\right] \\ &= \epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[(U')^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi'_p}(U')^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi'_q}(U')^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi'_r}\right] \times \frac{\partial\xi'_p}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi'_q}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi'_r}{\partial\xi_k} \end{aligned} \tag{0.1.87}$$

ここで，

$$\epsilon_{ijk}\frac{\partial\xi'_p}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi'_q}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi'_r}{\partial\xi_k} = \epsilon_{pqr}\det\left|\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}\right| \tag{0.1.88}$$

[*8] Creutz に詳しく書かれている．

は $(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\to(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)$ への変換のヤコビアンになっているので,

$$\rho(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)=\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_p}\frac{\partial\xi'_p}{\partial\xi_i}(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_q}\frac{\partial\xi'_q}{\partial\xi_j}(U')^{-1}\tilde{U}\tilde{U}^{-1}\frac{\partial U'}{\partial\xi_r}\frac{\partial\xi'_r}{\partial\xi_k}\right] \tag{0.1.89}$$

であることを考えると,$\rho(\xi_a,\xi_2,\xi_3)$ は

$$\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\rho(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)\det\left|\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}\right| \tag{0.1.90}$$

と変換している.測度 $d\xi_1d\xi_2d\xi_3$ の変換と合わせると,群の不変測度が確かに

$$\begin{aligned}\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3 &\underset{\xi\to\xi'}{=} \underbrace{\rho(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)\det\left|\frac{\partial\xi'}{\partial\xi}\right|}_{\rho(\xi_a,\xi_2,\xi_3)\text{ の変換}}\underbrace{\det\left|\frac{\partial\xi}{\partial\xi'}\right|d\xi'_1d\xi'_2d\xi'_3}_{d\xi_1d\xi_2d\xi_3\text{の変換}}\\ &= \rho(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)d\xi'_1d\xi'_2d\xi'_3\\ \because d\mu(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= d\mu(\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3)\end{aligned} \tag{0.1.91}$$

となり,群の変換のもとで不変となることが確認できる.

以上の群積分に関する準備をふまえて Q の積分を実行する.その結果 Q が $S_3^{(\mathrm{phy})}$ から $s_3^{(\mathrm{int})}$ への巻き付き数を与えることを確認する.もう一度 Q の表式を思い出すと,

$$Q=-\frac{1}{24\pi^2}\oint d\sigma_\mu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] \tag{0.1.92}$$

であり,U は $S_3^{(\mathrm{phy})}$ 上で定義された SU(2) 行列である.群の不変測度は

$$\begin{aligned}d\mu(U)&=\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3\\ &=\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right]d\xi_1d\xi_2d\xi_3\end{aligned} \tag{0.1.93}$$

と書き表され,このときの U も SU(2) 行列である.ただし,(ξ_1,ξ_2,ξ_3) によって決まる行列である.

まず,ξ は群の空間を記述するパラメータであり,2×2 の行列 U は ξ_i が変化することで変化し,その微分が不変測度 $d\mu(U)$ の表式にあらわれているものである.これとは対照的に,Q は場の配位 $A_\mu(x)$ によって記述される量である.Q の表式にあらわれる U とは,$A_\mu(x)$ の $S_3^{(\mathrm{phy})}$ における境界条件として導入されたゲージ関数であり,その微分は $S_3^{(\mathrm{phy})}$ 上で定義されている.ここで,Q の表式にあらわれる U が $S_3^{(\mathrm{phy})}$ 上で定義されている SU(2) 行列であることから,U は座標の関数でありかつ,群のパラメータ (ξ_1,ξ_2,ξ_3) の関数である.つまり,U を通して $S_3^{(\mathrm{phy})}$ の座標と群のパラメータ (ξ_1,ξ_2,ξ_3) が張る空間 $S_3^{(\mathrm{int})}$ が関連付く.このことを考慮すると,Q を x_μ での表式から ξ_i での表式に書き換えることができる.

$$\begin{aligned}Q&=-\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}}d\sigma_\mu\left\{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x_\nu}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right]\right\}\\ &=-\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}}d\sigma_\mu\left\{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_\alpha}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_\beta}\right]\right\}\\ &=-\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}}d\sigma_\mu\left\{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial\xi_k}\right]\frac{\partial\xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\xi_k}{\partial x_\beta}\right\}\end{aligned} \tag{0.1.94}$$

この積分はデカルト座標で書かれた面積分であり,Q がトポロジカルに不変な量であることから,面積分を実行する閉曲面は連続的に変形可能である.そこで,$x_\mu=\pm\infty,\mu=1,2,3,4$ とした 4 次元直方体の表面*9を境界 $S_3^{(\mathrm{phy})}$ にとり計算を実行する.

*9 3 次元での直方体の表面を考え,それを 4 次元に拡張することでイメージすることはできる.絵に描くのは難しい.

いま準備した超立方体の 1 つ目の面 $x_4=-\infty$ をとると，この面上での面積分は

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{24\pi^2}\oint_{S_3^{(\mathrm{phy})}} d\sigma_\mu \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right]\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_\beta} \\ &\xrightarrow[x_4=-\infty]{} -\frac{1}{24\pi^2}\int dx_1dx_2dx_3\,\epsilon_{mnl}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right]\frac{\partial \xi_i}{\partial x_m}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_n}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l} \end{aligned} \tag{0.1.95}$$

ここで，

$$\epsilon_{mnl}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_m}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_n}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}dx_1dx_2dx_3=\epsilon_{ijk}d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \tag{0.1.96}$$

であるので[*10]，$x_4=-\infty$ からの寄与は，

$$\longrightarrow -\frac{1}{24\pi^2}\int dxi_1d\xi_2d\xi_3\,\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right] \tag{0.1.97}$$

と書くことができる．これは，SU(2) 上での積分となっている．他の面での寄与も同様にして群での積分に書き換えることができるので，すべての $S_3^{rm(phy)}$ からの寄与の和は

$$\begin{aligned} Q &\propto \int d\xi_1d\xi_2d\xi_3\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_j}U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right] \\ &\propto \int d\xi_1d\xi_2d\xi_3\rho(\xi_1,\xi_2,\xi_3) \\ &\propto \int d\mu(U) \end{aligned} \tag{0.1.98}$$

という不変測度の形で書くことができる[*11]．Q はもともとは場の変数 A_μ で書かれた量だったが，作用が有限となるという条件 $A_\mu(x)|_{S_3^{(\mathrm{phy})}}\to U\partial_\mu U^{-1}$ から，群上の積分として書くことができるようになる．

ホモトピー理論によれば，$S_3^{(\mathrm{phy})}$ に渡る積分を実行すると，それに対応して群の空間 $S_3^{(\mathrm{int})}$ を群のパラメータは整数回数だけ覆うことになる．そして，Q はこの回数（整数）に比例することが期待される．さらにいえば，この整数と Q が一致するように Q の表式に現れる数係数が $(-16\pi^2)^{-1}$ と決められている．このことを以下で確認していく．

ゲージ関数として次のような形を採用する．

$$U_1(x)=\frac{x_4+ix_j\sigma_j}{|x|}=\sum_\mu \hat{x}_\mu s_\mu \tag{0.1.99}$$

ここで，$s_\mu=(i\sigma_i,\mathbf{1})$ $(\mu=1,2,3,4,i=1,2,3)$ であり，$\hat{x}_\mu=x_\mu/|x|$ とした．このゲージ関数は SU(2) の要素としての資格をもち，対応する $S_3^{(\mathrm{phy})}$ 上の点を $S_3^{(\mathrm{int})}$ に移す関数としての意味をもつ[*12]．このとき，$S_3^{(\mathrm{phy})}$ を 1 回積分したときの Q の値は 1 になるべきである．そこで，実際に Q の表式

$$Q=-\frac{1}{24\pi^2}\oint d\sigma_\mu\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] \tag{0.1.100}$$

に代入して計算する．

[*10] 実際に，$i,j,k=1,2,3$ とし，$(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(x,y,z),(x_1,x_2,x_3)=(r,\theta,\phi)$ としてみると，極座標と直交座標の間の変換に伴うヤコビアンが得られる．

[*11] ここでは比例するという意味で $\propto$ を用いた．実際には，4 次元空間中の超立方体の面の数は 24 個であるので，1 つの面の寄与を 24 倍したものとなる．

[*12] January,5th,2022 のノート参照．

まず，U がユニタリー行列であるので，

$$U^{-1} = U^{\dagger} = \hat{x}_4\mathbf{1} - i\hat{x}_j\sigma_j \tag{0.1.101}$$

を用いて $(\partial_\nu U)U^{-1}$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{x_4}{|x|}\mathbf{1} + i\frac{x_j\sigma_j}{|x|}\right) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j\right) + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{|x|}\right)\left(x_4\mathbf{1} + i\boldsymbol{x}_j\sigma_j\right) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j\right) + \left(-\frac{x_\nu}{|x|^3}\right)\left(x_4\mathbf{1} + i\boldsymbol{x}_j\sigma_j\right) \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\left(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j\right) - \frac{x_\nu}{|x|}U\right)
\end{aligned} \tag{0.1.102}$$

より，

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu U)U^{-1} &= \frac{1}{|x|}\left(\left(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j\right) - \frac{x_\nu}{|x|}U\right)U^{-1} \\
&= \frac{1}{|x|}\left(\left(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j\right)U^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|}UU^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{|x|}(\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j)U^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|^2}\mathbf{1}
\end{aligned} \tag{0.1.103}$$

さらに，$\nu = i = 1,2,3$ と $\nu = 4$ で場合分けすると

$$[\nu = i = 1,2,3] \quad (\partial_i U)U^{-1} = \frac{1}{|x|}i\sigma_i U^{-1} - \frac{x_i}{|x|^2} = \frac{1}{|x|}\left(i\sigma_i U^{-1} - \frac{x_i}{|x|}\mathbf{1}\right) \tag{0.1.104}$$

$$[\nu = 4] \quad (\partial_4 U)U^{-1} = \frac{1}{|x|}U^{-1} - \frac{x_4}{|x|^2}\mathbf{1} = \frac{1}{|x|}\left(U^{-1} - \frac{x_4}{|x|}\mathbf{1}\right) \tag{0.1.105}$$

が得られる．

◆ check

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{|x|}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\rho x_\rho)^{-1/2} \\
&= -\frac{1}{2}(x_\rho x_\rho)^{-3/2} 2\delta_{\nu\rho}x_\rho \\
&= -\frac{x_\nu}{|x|^3}
\end{aligned} \tag{0.1.106}$$

以上 $(\partial_\nu U)U^{-1}, (\partial_\alpha U)U^{-1}, (\partial_\beta U)U^{-1}$ の表式を $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] \\
&= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{1}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\left((\delta_{\nu 4}\mathbf{1} + i\delta_{\nu j}\sigma_j)U^{-1} - \frac{x_\nu}{|x|}\mathbf{1}\right)\left((\delta_{\alpha 4}\mathbf{1} + i\delta_{\alpha j}\sigma_j)U^{-1} - \frac{x_\alpha}{|x|}\mathbf{1}\right)\left((\delta_{\beta 4}\mathbf{1} + i\delta_{\beta j}\sigma_j)U^{-1} - \frac{x_\beta}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]
\end{aligned} \tag{0.1.107}$$

ここでは $\mu = 1,2,3$ と $\nu = 4$ とで場合分けして計算する．

◆ $\mu=4$ のとき

このとき，$\nu,\alpha,\beta=1,2,3$ のいずれかになるので，次のように書くことができる[13]．

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{4\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&=-\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[(\partial_p U)U^{-1}(\partial_q U)U^{-1}(\partial_r U)U^{-1}\right]\quad (p,q,r=1,2,3)\\
&=-\epsilon_{pqr}\frac{1}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\left(i\sigma_p U^{-1}-\frac{x_p}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_q U^{-1}-\frac{x_q}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_r U^{-1}-\frac{x_r}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]
\end{aligned}\tag{0.1.109}$$

括弧内を考えてみると，まず，x_p,x_q,x_r の 2 つ以上の積となる項は ϵ_{pqr} の反対称性からゼロとなる．

$$\epsilon_{pqr}\frac{1}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[i\sigma_p U^{-1}\frac{x_q x_r}{|x|^2}\mathbf{1}\right]=i\epsilon_{pqr}\frac{x_p x_r}{|x|^5}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p U^{-1}\right]=0,\quad \text{etc}\ldots\tag{0.1.110}$$

また，x_p,x_q,x_r と 2 つのパウリ行列との積になる項は，パウリ行列が持つ添え字 p,q,r がトレースの可換性から対称となるためゼロとなる．

$$\epsilon_{pqr}\frac{1}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[i\sigma_p U^{-1}i\sigma_q U^{-1}\cdot\left(-\frac{x_r}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]=\epsilon_{pqr}\frac{x_r}{|x|^4}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p U^{-1}\sigma_q U^{-1}\right]=0,\quad \text{etc}\cdots\tag{0.1.111}$$

したがって，残るのは 3 つのパウリ行列の積と x_p,x_q,x_r の積となる項である．

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{4\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&=-\epsilon_{pqr}\frac{1}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[i^3\sigma_p U^{-1}\sigma_q U^{-1}\sigma_r U^{-1}-\frac{x_p x_r x_q}{|x|^3}\mathbf{1}\right]\\
&=-\epsilon_{pqr}\frac{-i}{|x|^6}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p(x_4-ix_i\sigma_i)\sigma_q(x_4-ix_j\sigma_j)\sigma_r(x_4-ix_k\sigma_k)\right]-\epsilon_{pqr}\frac{x_p x_q x_r}{|x|^6}\mathrm{Tr}\left[\mathbf{1}\right]\\
&=\frac{i}{|x|^6}\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[(x_4\sigma_p-ix_i\sigma_p\sigma_i)(x_4\sigma_q-ix_j\sigma_q\sigma_j)(x_4\sigma_r-ix_k\sigma_r\sigma_k)\right]-2\epsilon_{pqr}\frac{1}{|x|^6}x_p x_q x_r\\
&=\frac{1}{|x|^6}i\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[(x_4\sigma_p-ix_i\sigma_p\sigma_i)(x_4\sigma_q-ix_j\sigma_q\sigma_j)(x_4\sigma_r-ix_k\sigma_r\sigma_k)\right]\quad (\because p,q,r\ \text{の対称性から，第 2 項はゼロ})
\end{aligned}\tag{0.1.112}$$

第 1 項目を展開すると項の数が多くなるので順番に計算していく．

$$\begin{aligned}
&(x_4\sigma_p-ix_i\sigma_p\sigma_i)(x_4\sigma_q-ix_j\sigma_q\sigma_j)\\
&=x_4^2\sigma_p\sigma_q-ix_4x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j-ix_4x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q+i^2x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j
\end{aligned}\tag{0.1.113}$$

$$\begin{aligned}
&(x_4\sigma_p-ix_i\sigma_p\sigma_i)(x_4\sigma_q-ix_j\sigma_q\sigma_j)(x_4\sigma_r-ix_k\sigma_r\sigma_k)\\
&=(x_4^2\sigma_p\sigma_q-ix_4x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j-ix_4x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q+i^2x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j)(x_4\sigma_r-ix_k\sigma_r\sigma_k)\\
&=(x_4^3\sigma_p\sigma_q\sigma_r-ix_4^2x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r-ix_4^2x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r+i^2x_4x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r)\\
&\quad+(-ix_4^2x_k\sigma_p\sigma_q\sigma_r\sigma_k+i^2x_4x_jx_k\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k+i^2x_4x_ix_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k-i^3x_ix_jx_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k)\\
&=x_4^3\underbrace{\sigma_p\sigma_q\sigma_r}_{\sigma^3}-ix_4^2(\underbrace{x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r+x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r+x_k\sigma_p\sigma_q\sigma_r\sigma_k}_{\sigma^4})\\
&\quad-x_4(\underbrace{x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r+x_jx_k\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k+x_ix_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k}_{\sigma^5})+i\underbrace{x_ix_jx_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k}_{\sigma^6}
\end{aligned}\tag{0.1.114}$$

[13] 1 つ目の等号で負号が出てくることに注意．これは，$\epsilon_{1234}=1$ として完全反対称テンソルを定義することによる．このように符号を決めると

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{1234}=+1\\
&\epsilon_{1243}=-1\quad(3\leftrightarrow 4)\\
&\epsilon_{1423}=+1\quad(2\leftrightarrow 4)\\
&\epsilon_{4123}=-1\quad(1\leftrightarrow 4)
\end{aligned}\tag{0.1.108}$$

として，$\epsilon_{4pqr}=-\epsilon_{pqr}$ とした反対称テンソルとして扱う必要がある．このときの ϵ_{pqr} は $\epsilon_{pqr}=+1$ とした通常のレヴィ・チビタ記号である．

○ σ^3 の項

$$\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_r\right] = 2i\epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr} = 12i \quad (\because (p,q,r)=(1,2,3),\ldots \text{の組み合わせが 6 通り}) \tag{0.1.115}$$

○ σ^4 の項

$$\begin{aligned}\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\right] &= x_j\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\right]\\ &= 2x_j\epsilon_{pqr}(\delta_{pq}\delta_{jr}+\delta_{pr}\delta_{qj}-\delta_{pj}\delta_{qr})\\ &= 2x_j\epsilon_{ppj}+2x_j\epsilon_{pjp}-2x_j\epsilon_{jrr}=0 \end{aligned}\tag{0.1.116}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\right] &= x_i\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\right]\\ &= 2x_i\epsilon_{pqr}(\delta_{pi}\delta_{qr}+\delta_{pr}\delta_{iq}-\delta_{pq}\delta_{ir})\\ &= 2x_i\epsilon_{iqq}-2x_i\epsilon_{rir}+2x_i\epsilon_{ppi}=0 \end{aligned}\tag{0.1.117}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_k\sigma_p\sigma_q\sigma_r\sigma_k\right] &= x_k\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_r\sigma_k\right]\\ &= 2x_k\epsilon_{pqr}(\delta_{pq}\delta_{rk}+\delta_{pk}\delta_{qr}-\delta_{pr}\delta_{qk})\\ &= 2x_k\epsilon_{ppk}+2x_k\epsilon_{kqq}-2x_k\epsilon_{rkr}=0 \end{aligned}\tag{0.1.118}$$

$$\therefore \epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_j\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r+x_i\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r+x_k\sigma_p\sigma_q\sigma_r\sigma_k\right]=0 \tag{0.1.119}$$

○ σ^5 の項

$$x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r+x_jx_k\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k+x_ix_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k \tag{0.1.120}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\right]\\ &= x_ix_j\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\right]\\ &= 2ix_ix_j\epsilon_{pqr}(\delta_{pi}\epsilon_{qjr}+\delta_{qj}\epsilon_{pir}+\delta_{jr}\epsilon_{piq}-\delta_{qr}\epsilon_{pij})\\ &= 2ix_ix_j(\epsilon_{iqr}\epsilon_{qjr}+\epsilon_{pjr}\epsilon_{pir}+\epsilon_{pqj}\epsilon_{piq}-\epsilon_{pqq}\epsilon_{pij})\\ &= 2ix_ix_j(-2\delta_{ij}+2\delta_{ij}-2\delta_{ij}-0)\\ &= -4ix_ix_i \end{aligned}\tag{0.1.121}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_jx_k\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k\right]\\ &= x_jx_k\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k\right]\\ &= 2ix_jx_k\epsilon_{pqr}(\delta_{pq}\epsilon_{jrk}+\delta_{jr}\epsilon_{pqk}+\delta_{rk}\epsilon_{pqj}-\delta_{jk}\epsilon_{pqr})\\ &= 2ix_jx_k(\epsilon_{ppr}\epsilon_{jrk}+\epsilon_{pqj}\epsilon_{pqk}+\epsilon_{pqk}\epsilon_{pqj}-\delta_{jk}\epsilon_{pqr}\epsilon_{pqr})\\ &= 2ix_jx_k(0+2\delta_{jk}+2\delta_{kj}-6\delta_{jk})\\ &= -4ix_jx_j \end{aligned}\tag{0.1.122}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_ix_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k\right]\\ &= x_ix_k\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}[\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k]\\ &= 2ix_ix_k\epsilon_{pqr}(\delta_{pi}\epsilon_{qrk}+\delta_{qr}\epsilon_{pik}+\delta_{rk}\epsilon_{piq}-\delta_{qk}\epsilon_{pir})\\ &= 2ix_ix_k(\epsilon_{iqr}\epsilon_{qrk}+\epsilon_{prr}\epsilon_{pik}+\epsilon_{pqk}\epsilon_{piq}-\epsilon_{pkr}\epsilon_{pir})\\ &= 2ix_ix_k(2\delta_{ik}+0-2\delta_{ik}-2\delta_{ik})\\ &= -4ix_kx_k \end{aligned}\tag{0.1.123}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\epsilon_{4pqr}\mathrm{Tr}\left[x_ix_j\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r+x_jx_k\sigma_p\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k+x_ix_k\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_r\sigma_k\right]\\ &= -4ix_ix_i-4ix_jx_j-4x_kx_k\\ &= -12ix_ix_i \quad (i=1,2,3) \end{aligned}\tag{0.1.124}$$

○ σ^6 の項

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[x_i x_j x_k \sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k\right] \\
&= x_i x_j x_k \epsilon_{pqr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k\right] \\
&= x_i x_j x_k \epsilon_{pqr}(\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{rk} - \delta_{pi}(\delta_{qr}\delta_{jk} - \delta_{qk}\delta_{jr}) - \delta_{qj}(\delta_{pr}\delta_{ik} - \delta_{pk}\delta_{ir}) - \delta_{rk}(\delta_{pq}\delta_{ij} - \delta_{pj}\delta_{iq}) + \epsilon_{pir}\epsilon_{qjk} - \epsilon_{pik}\epsilon_{qjr}) \\
&= x_i x_j x_k(\epsilon_{ijk} - \epsilon_{irr}\delta_{jk} + \epsilon_{ikj} - \epsilon_{rjr}\delta_{ik} + \epsilon_{kji} - \epsilon_{ppk}\delta_{ij} + \epsilon_{jik} + \epsilon_{pqr}\epsilon_{pir}\epsilon_{qjk} - \epsilon_{pqr}\epsilon_{pik}\epsilon_{qjr}) \\
&= x_i x_j x_k(\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk} + \epsilon_{pqr}\epsilon_{pir}\epsilon_{qjk} - \epsilon_{pqr}\epsilon_{pik}\epsilon_{qjr})
\end{aligned} \tag{0.1.125}
$$

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{pqr}\epsilon_{pir}\epsilon_{qjk} - \epsilon_{pqr}\epsilon_{pik}\epsilon_{qjr} \\
&= 2\delta_{qi}\epsilon_{qjk} + 2\delta_{pj}\epsilon_{pik} \\
&= 2\epsilon_{ijk} + 2\epsilon_{jik} = 0
\end{aligned} \tag{0.1.126}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \epsilon_{4pqr}\mathrm{Tr}\left[x_i x_j x_k \sigma_p\sigma_i\sigma_q\sigma_j\sigma_r\sigma_k\right] &= x_i x_j x_k(\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk} - \epsilon_{ijk}) \\
&= -2x_i x_j x_k \epsilon_{ijk} \\
&= 0 \quad (\because i,j,k \text{ の入れ換えで対称})
\end{aligned} \tag{0.1.127}
$$

以上の結果をまとめると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{4\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] \\
&= \frac{i}{|x|^6}\left(12ix_4^3 + 12ix_4x_ix_i\right) \\
&= -\frac{12x_4}{|x|^6}(x_4^2 + x_ix_i) \quad (i=1,2,3 \text{ について和をとる}) \\
&= -\frac{12x_4}{|x|^4}
\end{aligned} \tag{0.1.128}
$$

ここまでで，次の関係式を用いた．

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad (i,j,k = 1,2,3) \tag{0.1.129}$$

$$\epsilon_{ipq}\epsilon_{ilm} = \delta_{pl}\delta_{qm} - \delta_{pm}\delta_{ql} \tag{0.1.130}$$

$$\epsilon_{pjk}\epsilon_{qjk} = 2\delta_{pq} \tag{0.1.131}$$

$$\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n\right] = 2\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} - \delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}) - \delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) - \delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \epsilon_{ijm}\epsilon_{kln} - \epsilon_{ijn}\epsilon_{klm}\right] \tag{0.1.132}$$

◆ $\mu=1,2,3$ のとき

このとき，ν,α,β は 4 と μ 以外の添え字になるので，$\mu\to i=1,2,3$ として次のように書き直すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{i\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&=\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_4 U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]+\epsilon_{i\nu4\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_4 U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&\quad+\epsilon_{i\nu\alpha4}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_4 U)U^{-1}\right]\\
&=\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[4\alpha\beta\right]+\epsilon_{i\nu4\beta}\mathrm{Tr}\left[\nu4\beta\right]+\epsilon_{i\nu\alpha4}\mathrm{Tr}\left[\nu\alpha4\right]\quad((\partial_\nu U)U^{-1}\to\nu\text{などと略記した})\\
&=\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}[4\alpha\beta]+\epsilon_{i4\beta\nu}\mathrm{Tr}[\nu4\beta]+\epsilon_{i4\nu\alpha}\mathrm{Tr}\left[\nu\alpha4\right]\quad(\because\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\text{の反対称性})\\
&=\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}[4\alpha\beta]+\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[\beta4\alpha\right]+\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[\alpha\beta4\right]\quad(\text{添え字を }\alpha,\beta\text{ に書き直した})\\
&=3\epsilon_{i4\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[4\alpha\beta\right]\quad(\because\text{トレースの循環性})\\
&=\epsilon_{i4\alpha\beta}\frac{3}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}-\frac{x_4}{|x|}\right)\left(i\sigma_\alpha U^{-1}-\frac{x_\alpha}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_\beta U^{-1}-\frac{x_\beta}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]\quad(i,\alpha,\beta=1,2,3)\\
&=-\epsilon_{4ijk}\frac{3}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}-\frac{x_4}{|x|}\right)\left(i\sigma_j U^{-1}-\frac{x_j}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_k U^{-1}-\frac{x_k}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]\quad(i,\alpha\to j,\beta\to k=1,2,3)\\
&=\epsilon_{ijk}\frac{3}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\left(U^{-1}-\frac{x_4}{|x|}\right)\left(i\sigma_j U^{-1}-\frac{x_j}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_k U^{-1}-\frac{x_k}{|x|}\mathbf{1}\right)\right]\quad(\because\epsilon_{4ijk}=-\epsilon_{ijk},\epsilon_{1234}=+1,\epsilon_{123}=+1)
\end{aligned}
\tag{0.1.133}
$$

$\mu=4$ の場合と同様にトレースを計算する．実際に，括弧内を展開すると，

$$
\begin{aligned}
&\left(U^{-1}-\frac{x_4}{|x|}\right)\left(i\sigma_j U^{-1}-\frac{x_j}{|x|}\mathbf{1}\right)\left(i\sigma_k U^{-1}-\frac{x_k}{|x|}\mathbf{1}\right)\\
&=-U^{-1}\sigma_jU^{-1}\sigma_kU^{-1}-\frac{i}{|x|}\left(x_kU^{-1}\sigma_jU^{-1}+x_jU^{-1}\sigma_kU^{-1}\right)\\
&\quad+\frac{x_jx_k}{|x|^2}U^{-1}-\frac{x_4}{|x|}\sigma_jU^{-1}\sigma_kU^{-1}+\frac{ix_4}{|x|^2}\left(x_k\sigma_jU^{-1}+x_j\sigma_kU^{-1}\right)-\frac{x_4x_jx_k}{|x|^3}\mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{0.1.134}
$$

トレースの循環性も含めると，$j\leftrightarrow k$ の入れ換えに対して<u>対称ではない</u>のは第 1 項のみである．したがって，第 1 項だけがゼロにならないので計算をする．

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{i\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&=\epsilon_{ijk}\frac{3}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[-U^{-1}\sigma_jU^{-1}\sigma_kU^{-1}\right]\\
&=-\epsilon_{ijk}\frac{3}{|x|^3}\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{|x|^3}(x_4-ix_p\sigma_p)\sigma_j(x_4-ix_q\sigma_q)\sigma_k(x_4-ix_r\sigma_r)\right]\\
&=-\frac{3}{|x|^6}\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[(x_4-ix_p\sigma_p)\sigma_j(x_4-ix_q\sigma_q)\sigma_k(x_4-ix_r\sigma_r)\right]
\end{aligned}
\tag{0.1.135}
$$

ここでも項が多くなるので，順番に計算していく．

$$
\begin{aligned}
&(x_4-ix_p\sigma_p)\sigma_j(x_4-ix_q\sigma_q)\sigma_k(x_4-ix_r\sigma_r)\\
&=(x_4-ix_p\sigma_p)(x_4\sigma_j-ix_q\sigma_j\sigma_q)(x_4\sigma_k-ix_r\sigma_k\sigma_r)\\
&=(x_4-ix_p\sigma_p)(x_4^2\sigma_j\sigma_k-ix_4x_r\sigma_j\sigma_k\sigma_r-ix_4x_q\sigma_j\sigma_q\sigma_k+i^2x_qx_r\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r)\\
&=x_4(x_4^2\sigma_j\sigma_k-ix_4x_r\sigma_j\sigma_k\sigma_r-ix_4x_q\sigma_j\sigma_q\sigma_k+i^2x_qx_r\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r)\\
&\quad-ix_p(x_4^2\sigma_p\sigma_j\sigma_k-ix_4x_r\sigma_p\sigma_j\sigma_k\sigma_r-ix_4x_q\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k+i^2x_qx_r\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r)\\
&=x_4^3\underbrace{\sigma_j\sigma_k}_{\sigma^2}-ix_4^2(\underbrace{x_r\sigma_j\sigma_k\sigma_r+x_q\sigma_j\sigma_q\sigma_k+x_p\sigma_p\sigma_j\sigma_k}_{\sigma^3})\\
&\quad-x_4(\underbrace{x_qx_r\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r+x_px_r\sigma_p\sigma_j\sigma_k\sigma_r+x_px_q\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k}_{\sigma^4})+i\underbrace{x_px_qx_r\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r}_{\sigma^5}
\end{aligned}
\tag{0.1.136}
$$

それぞれの項のトレースを計算していく．

○ σ^2 の項

$$\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[x_4^3\sigma_j\sigma_k\right] = x_4^3\epsilon_{ijk}2\delta_{jk} = 0 \tag{0.1.137}$$

○ σ^3 の項

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[-ix_4^2(x_r\sigma_j\sigma_k\sigma_r + x_q\sigma_j\sigma_q\sigma_k + x_p\sigma_p\sigma_j\sigma_k)\right]\\
&= -ix_4^2\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[x_r\sigma_r\sigma_j\sigma_k + x_q\sigma_j\sigma_q\sigma_k + x_p\sigma_p\sigma_j\sigma_k\right]\\
&= -ix_4^2\epsilon_{ijk}\cdot 2i(x_r\epsilon_{rjk} + x_q\epsilon_{jqk} + x_p\epsilon_{pjk})\\
&= 2x_4^2(x_r\epsilon_{ijk}\epsilon_{rjk} + x_q\epsilon_{ijk}\epsilon_{qkj} + x_p\epsilon_{pjk})\\
&= 2x_4^2(2x_r\delta_{ir} - 2x_q\delta_{iq} + 2x_p\delta_{ip})\\
&= 4x_4^2(x_i - x_i + x_i)\\
&= 4x_ix_4^2
\end{aligned} \tag{0.1.138}$$

○ σ^4 の項

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[-x_4(x_qx_r\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r + x_px_r\sigma_p\sigma_j\sigma_k\sigma_r + x_px_q\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k)\right]\\
&= -x_4\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[x_qx_r\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r + x_px_r\sigma_p\sigma_j\sigma_k\sigma_r + x_px_q\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k\right]\\
&= -x_4\epsilon_{ijk}\left[2x_qx_r(\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{qk}\delta_{jr} - \delta_{jk}\delta_{qr}) + 2x_px_r(\delta_{pj}\delta_{kr} + \delta_{jk}\delta_{pr} - \delta_{pk}\delta_{jr}) + 2x_px_q(\delta_{pj}\delta_{qk} + \delta_{jq}\delta_{pk} - \delta_{pq}\delta_{jk})\right]\\
&= -2x_4\epsilon_{ijk}(4x_jx_k - \delta_{jk}x_px_p)\\
&= -8x_4x_jx_k\epsilon_{ijk} + 2x_4\delta_{jk}\epsilon_{ijk}x_px_p\\
&= -8x_4x_jx_k\epsilon_{ijk} \quad (\because \delta_{jk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ijj} = 0)\\
&= 0 \quad (\because j \leftrightarrow k \text{ の入れ換えで対称})
\end{aligned} \tag{0.1.139}$$

○ σ^5 の項

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}\left[i(x_px_qx_r\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r)\right]\\
&= ix_px_qx_r\epsilon_{ijk}\mathrm{Tr}[\sigma_p\sigma_j\sigma_q\sigma_k\sigma_r]\\
&= ix_px_qx_r\epsilon_{ijk}\left[2i(\delta_{pj}\epsilon_{qkr} + \delta_{qk}\epsilon_{pjr} + \delta_{kr}\epsilon_{pjq} - \delta_{qr}\epsilon_{pjk})\right]\\
&= -x_px_qx_r\left(\epsilon_{ipk}\epsilon_{qkr} + \epsilon_{ijq}\epsilon_{pjr} + \epsilon_{ijr}\epsilon_{pjq} - \delta_{qr}\epsilon_{ijk}\epsilon_{pjk}\right)\\
&= -x_px_qx_r\left[-(\delta_{iq}\delta_{pr} - \delta_{ir}\delta_{pq}) + (\delta_{ip}\delta_{qr} - \delta_{ir}\delta_{qp}) + (\delta_{ip}\delta_{rq} - \delta_{iq}\delta_{rp}) - 2\delta_{qr}\delta_{ip}\right]\\
&= -4x_px_qx_r(\delta_{ip}\delta_{rq} - \delta_{iq}\delta_{rp} - \delta_{qr}\delta_{ip})\\
&= 4(x_rx_ix_r + x_ix_rx_r - x_ix_rx_r)\\
&= 4x_ix_rx_r \quad (r = 1,2,3)
\end{aligned} \tag{0.1.140}$$

以上の結果をまとめると，$i = 1,2,3$ として次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{i\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right]\\
&= -\frac{3}{|x|^6}(4x_ix_4^2 + 4x_ix_rx_r)\\
&= -\frac{12x_i}{|x|^6}(x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\\
&= -\frac{12x_i}{|x|^4}
\end{aligned} \tag{0.1.141}$$

以上から，$\mu = 1,2,3,4$ に対して

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[(\partial_\nu U)U^{-1}(\partial_\alpha U)U^{-1}(\partial_\beta U)U^{-1}\right] = -\frac{12x_\mu}{|x|^4} \tag{0.1.142}$$

が成り立つ．

check

Q を計算するために必要な Pauli 行列の積のトレースについてまとめておく.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\right] &= 0 && (0.1.143)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\right] &= 2\delta_{ij} && (0.1.144)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\right] &= 2i\epsilon_{ijk} && (0.1.145)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\right] &= 2(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{jk}\delta_{il}-\delta_{ik}\delta_{jl}) && (0.1.146)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\right] &= 2i(\delta_{ij}\epsilon_{klm}+\delta_{kl}\epsilon_{ijm}+\delta_{lm}\epsilon_{ijk}-\delta_{km}\epsilon_{ijl}) && (0.1.147)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n\right] &= 2\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}-\delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln}-\delta_{kn}\delta_{lm})-\delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\right.\\
&\qquad \left.-\delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\epsilon_{ijm}\epsilon_{kln}-\epsilon_{ijn}\epsilon_{klm}\right] && (0.1.148)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\right] = 0 \tag{0.1.149}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\right] &= \mathrm{Tr}\left[\delta_{ij}\mathbf{1}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k\right]\\
&= 2\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{0.1.150}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\right] &= \mathrm{Tr}\left[\sigma_i(\delta_{jk}\mathbf{1}+i\epsilon_{jkp}\sigma_p)\right]\\
&= i\epsilon_{jkp}\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_p\right]\\
&= 2i\epsilon_{jkp}\delta_{ip}\\
&= 2i\epsilon_{ijk}
\end{aligned} \tag{0.1.151}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{ij}\mathbf{1}+i\epsilon_{ijp}\sigma_p)(\delta_{kl}\mathbf{1}+i\epsilon_{klq}\sigma_q)\right]\\
&= \mathrm{Tr}\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\mathbf{1}+i\delta_{ij}\epsilon_{klq}\sigma_q+i\delta_{kl}\epsilon_{ijp}\sigma_p+i^2\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\sigma_p\sigma_q\right]\\
&= 2\delta_{ij}\delta_{kl}-\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}2\delta_{pq}\\
&= 2\delta_{ij}\delta_{kl}-2\epsilon_{ijp}\epsilon_{klp}\\
&= 2(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})
\end{aligned} \tag{0.1.152}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{ij}\mathbf{1}+i\epsilon_{ijp}\sigma_p)(\delta_{kl}\mathbf{1}+i\epsilon_{klq}\sigma_q)\sigma_m\right]\\
&= \mathrm{Tr}\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\sigma_m+i\delta_{ij}\epsilon_{klq}\sigma_q\sigma_m+i\delta_{kl}\epsilon_{ijp}\sigma_p\sigma_m+i^2\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\sigma_p\sigma_q\sigma_m\right]\\
&= i\delta_{ij}\epsilon_{klq}\mathrm{Tr}\left[\sigma_q\sigma_m\right]+i\delta_{kl}\epsilon_{ijp}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_m\right]-\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_m\right]\\
&= 2i\delta_{ij}\epsilon_{klq}\delta_{qm}+2i\delta_{kl}\epsilon_{ijp}\delta_{pm}-2i\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\epsilon_{pqm}\\
&= 2i\delta_{ij}\epsilon_{klm}+2i\delta_{kl}\epsilon_{ijm}-2i\epsilon_{ijp}\epsilon_{qmp}\epsilon_{klq}\\
&= 2i\delta_{ij}\epsilon_{klm}+2i\delta_{kl}\epsilon_{ijm}-2i(\delta_{iq}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jq})\epsilon_{klq}\\
&= 2i(\delta_{ij}\epsilon_{klm}+\delta_{kl}\epsilon_{ijm}-\delta_{iq}\delta_{jm}\epsilon_{klq}+\delta_{im}\delta_{jq}\epsilon_{klq})\\
&= 2i(\delta_{ij}\epsilon_{klm}+\delta_{kl}\epsilon_{ijm}-\delta_{jm}\epsilon_{kli}+\delta_{im}\epsilon_{klj})
\end{aligned} \tag{0.1.153}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{ij}\mathbf{1}+i\epsilon_{ijp}\sigma_p)(\delta_{kl}\mathbf{1}+i\epsilon_{klq}\sigma_q)(\delta_{mn}\mathbf{1}+i\epsilon_{mnr}\sigma_r)\right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\mathbf{1}\right. \\
&\quad +i\delta_{ij}\epsilon_{klq}\delta_{mn}\sigma_q+i\epsilon_{ijp}\delta_{kl}\delta_{mn}\sigma_p+i\delta_{ij}\delta_{kl}\epsilon_{mnr}\sigma_r \\
&\quad +i^2\delta_{ij}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnr}\sigma_q\sigma_r+i^2\epsilon_{ijp}\delta_{kl}\epsilon_{mnr}\sigma_p\sigma_r+i^2\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\delta_{mn}\sigma_p\sigma_q \\
&\quad \left.+i^3\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnr}\sigma_p\sigma_q\sigma_r\right] \\
&= 2\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} \\
&\quad +i^2(\delta_{ij}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_q\sigma_r\right]+\epsilon_{ijp}\delta_{kl}\epsilon_{mnr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_r\right]+\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\delta_{mn}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\right]) \\
&\quad +i^3\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnr}\mathrm{Tr}\left[\sigma_p\sigma_q\sigma_r\right] \\
&= 2\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}+2i^2(\delta_{ij}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnq}+\delta_{kl}\epsilon_{ijp}\epsilon_{mnp}+\delta_{mn}\epsilon_{ijp}\epsilon_{klp})+2i^4\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}\epsilon_{mnr}\epsilon_{pqr} \\
&= 2\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} \\
&\quad -2(\delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln}-\delta_{kn}\delta_{lm})+\delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})+\delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})) \\
&\quad +2\epsilon_{ijp}\epsilon_{klq}(\delta_{mp}\delta_{nq}-\delta_{mq}\delta_{np}) \\
&= 2\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}\right. \\
&\quad -\delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln}-\delta_{kn}\delta_{lm})-\delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})-\delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}) \\
&\quad \left.+\epsilon_{ijm}\epsilon_{kln}-\epsilon_{ijn}\epsilon_{klm}\right]
\end{aligned} \tag{0.1.154}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n\right] \\
&= 2\left[\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}-\delta_{ij}(\delta_{km}\delta_{ln}-\delta_{kn}\delta_{lm})-\delta_{kl}(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})-\delta_{mn}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\epsilon_{ijm}\epsilon_{kln}-\epsilon_{ijn}\epsilon_{klm}\right]
\end{aligned} \tag{0.1.155}
$$

一般に $2k$ $(k=1,2,3\dots)$ 個の積の場合を考える.

$$
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{2k-1}}\sigma_{i_{2k}}\right] \quad (k=1,2,3,\dots) \tag{0.1.156}
$$

もちろん，$k=1,2$ の場合は次の関係式を再現しなければならない.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\right] &= 2\delta_{i_1i_2} \\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\right] &= 2(\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}+\delta_{i_1i_4}\delta_{i_2i_3}-\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2i_4})
\end{aligned} \tag{0.1.157}
$$

実際に計算する手順を頭に浮かべながら一般式を変形していく.
まずは，k 個の，2 つのパウリ行列の積に分けて $\sigma_{i_r}\sigma_{i_s}=\delta_{i_ri_s}\mathbf{1}+i\epsilon_{i_ri_si_t}\sigma_{i_t}$ を利用して次数を下げる.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_{2k-1}}\sigma_{i_{2k}}\right] \quad (\sigma\text{に関して }2k\text{ 次}) \\
&= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{i_1i_2}\mathbf{1}+i\epsilon_{i_1i_2j_1}\sigma_{j_1})(\delta_{i_3i_4}\mathbf{1}+i\epsilon_{i_3i_4j_2}\sigma_{j_2})\cdots(\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}\mathbf{1}+i\epsilon_{i_{2k-1}i_{2k}j_k}\sigma_{j_k})\right] \quad (\sigma\text{に関して }k\text{ 次}) \\
&= 2\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\cdots\delta_{i_{2k-1}i_{2k}}
\end{aligned} \tag{0.1.158}
$$

これを展開する際，それぞれの括弧から 1 つの項を取ってくることを考慮すると σ の 0 次の項から，σ の k 次までの項がすべて現れることが分かる.

漸化式のような形になることを予想．そこで，順番に考えてみる．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\sigma_{i_1}] &= 0 && (0.1.159)\\
\mathrm{Tr}[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}] &= \mathrm{Tr}\left[\delta_{i_1i_2}\mathbf{1} + i\epsilon_{i_1i_2i_3}\sigma_{i_3}\right]\\
&= 2\delta_{i_1i_2} && (0.1.160)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{i_1i_2}\mathbf{1} + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\sigma_{j_1})\sigma_{i_3}\right]\\
&= i\epsilon_{i_1i_2j_1}\mathrm{Tr}[\sigma_{j_1}\sigma_{i_3}] && (0.1.161)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{i_1i_2}\mathbf{1} + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\sigma_{j_1})\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\right]\\
&= \delta_{i_1i_2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_3i_4}\right] + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{j_1}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\right] && (0.1.162)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{i_1i_2}\mathbf{1} + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\sigma_{j_1})\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\right]\\
&= \delta_{i_1i_2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\right] + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{j_1}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\right] && (0.1.163)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\sigma_{i_6}\right] &= \mathrm{Tr}\left[(\delta_{i_1i_2}\mathbf{1} + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\sigma_{j_1})\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\sigma_{i_6}\right]\\
&= \delta_{i_1i_2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\sigma_{i_6}\right] + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{j_1}\sigma_{i_3}\sigma_{i_4}\sigma_{i_5}\sigma_{i_6}\right] && (0.1.164)
\end{aligned}$$

どうやら，規則性があるように見えます．添え字を一般化して書き下してみると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[\sigma_{i_1}] &= 0 && (0.1.165)\\
\mathrm{Tr}[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}] &= 2\delta_{i_1i_2} && (0.1.166)\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\right] &= \delta_{i_1i_2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\right] + i\epsilon_{i_1i_2j_1}\mathrm{Tr}[\sigma_{j_1}\sigma_{i_3}] && (0.1.167)\\
&\vdots\\
\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_n}\right] &= \delta_{i_1i_2}\mathrm{Tr}\left[\sigma_{i_3}\cdots\sigma_{i_n}\right] + i\epsilon_{i_1i_2j}\mathrm{Tr}\left[\sigma_j\sigma_{i_3}\cdots\sigma_{i_n}\right] && (0.1.168)
\end{aligned}$$

以上の計算の結果，Q は次のようになる．

$$Q = -\frac{1}{24\pi^2}\int d\sigma_\mu\left(-\frac{12x_\mu}{|x|^4}\right) \tag{0.1.169}$$

4 次元空間の球座標をとれば，

$$d\sigma_\mu = d\Omega x_\mu|x|^2 \tag{0.1.170}$$

と変換されるので，積分は

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2\pi^2}\int d\Omega x_\mu|x|^2\frac{x_\mu}{|x|^4}\\
&= \frac{1}{2\pi^2}\int d\Omega\\
&= 1 && (0.1.171)
\end{aligned}$$

となる．これは，ゲージ関数 U の ansatz の解釈に一致する．また，Q の表式にあらわれていた $-1/(16\pi^2)$ という因子が巻き付き数を与えるための規格化因子であることも確認できたことになる．

ここまで，Yang-Mills 作用を有限にするゲージ場の配位の性質について議論してきた．ここからは，具体的なゲージ場 $A_\mu(x)$ を求める．これが Yang-Mills instanton と呼ばれるゲージ配位である．次の恒等式

$$-\int d^4x\mathrm{Tr}\left[\left(G_{\mu\nu} \pm \tilde{G}_{\mu\nu}\right)^2\right] \geq 0 \tag{0.1.172}$$

$$\mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right] = \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}] \tag{0.1.173}$$

から，次の作用 S に対する不等式

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q| \tag{0.1.174}$$

もしくは

$$-\int d^4x \mathrm{Tr}\left[G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right] \geq \mp \int d^4x \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G_{\mu\nu}] \tag{0.1.175}$$

が得られる．ここで，

$$S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}[G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}] \tag{0.1.176}$$

$$Q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}G_{\mu\nu}] \tag{0.1.177}$$

である．$Q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ だが，常に成り立つ不等式を考えるために Q の絶対値をとっている．この不等式

$$S \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q| \tag{0.1.178}$$

の等号成立条件すなわち，

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \pm G_{\mu\nu} \tag{0.1.179}$$

がそれぞれ，自己双対条件（self-dual），反自己双対条件（anti self-dual）である：

$$\begin{cases} \tilde{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} & \cdots \text{self-dual(SD)} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} = -G_{\mu\nu} & \cdots \text{anti self-dual(ASD)} \end{cases} \tag{0.1.180}$$

proof

1 つ目の恒等式

$$\begin{aligned}
&-\int d^4x \mathrm{Tr}\left[\left(G_{\mu\nu} \pm \tilde{G}_{\mu\nu}\right)^2\right] \\
&= -\int d^4x \mathrm{Tr}\left[\left(g\frac{\sigma_a}{2i}G^a_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}g\frac{\sigma_a}{2i}G^a_{\alpha\beta}\right)^2\right] \\
&= -\frac{g}{(2i)^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\left[\left(\sigma_a G^a_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_a G^a_{\alpha\beta}\right)^2\right] \\
&= +\frac{g^2}{4}\int d^4x \mathrm{Tr}\left[\left(\sigma_a G^a_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_a G^a_{\alpha\beta}\right)^2\right] \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{0.1.181}$$

2 つ目の恒等式: $\mathrm{Tr}[G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}] = \mathrm{Tr}[\tilde{G}_{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}]$

$$\begin{aligned}
(\text{r.h.s}) &= \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\delta}G_{\lambda\delta}\right] \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\mathrm{Tr}[G_{\alpha\beta}G_{\lambda\delta}] \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\lambda})\mathrm{Tr}\left[G_{\alpha\beta}G_{\lambda\delta}\right] \quad (\because \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\lambda\delta} = 2(\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\lambda})) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Tr}[G_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}] - \mathrm{Tr}[G_{\alpha\beta}G_{\beta\alpha}]\right) \\
&= \mathrm{Tr}[G_{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}] \quad (\because G_{\alpha\beta} = -G_{\beta\alpha}) \\
&= (\text{l.h.s})
\end{aligned} \tag{0.1.182}$$

ここで導出した SD および ASD 条件は，Pontoryagin index Q のクラスに属するゲージ場のうち，作用の最小値を与えるゲージ配位を定める条件である．一方，すでに求めている作用の停留条件つまり Yang-Mills 方程式 $\partial_\mu G_{\mu\nu} + [A_\mu, G_{\mu\nu}] = 0$ は，作用の停留点（極値）を与えるゲージ配位を定める．したがって SD(ASD) なゲージ配位は Yang-Mills 方程式を満たすが，Yang-Mills 方程式を満たすゲージ配位が必ずしも SD(ASD) であるとは限らない（以下）．

$$\text{SD(ASD) 条件} : \tilde{G}_{\mu\nu} = \pm G_{\mu\nu} \quad \cdots (A)$$
$$\bigcirc \Downarrow \quad \Uparrow \triangle$$
$$\text{Yang-Mills 方程式} : D_\mu G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_{\mu\nu} + [A_\mu, G_{\mu\nu}] = 0 \quad \cdots (B)$$

ここでは，Yang-Mills 方程式 (B) を直接解くのではなく，SD(ASD) 条件 (A) を満たすゲージ配位を求めることを目指す．このようにして求めたゲージ配位は自動的に Yang-Mills 方程式を満たすものであり，作用を最小化する．これが，instanton と呼ばれるゲージ配位となる．ここで説明するのは，'t Hooft 1976, Wilczeck 1977, Corrigan and Fairlie 1977, Jackiw *et al.* 1977,1978 によって導かれた方法である．

求めるゲージ配位を次の ansatz に仮定する．

$$A_\mu(x) = i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu(\ln\phi(x)) \tag{0.1.183}$$

このように仮定し，SD 条件を満たすスカラー関数 $\phi(x)$ を求める．$\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$ はパウリ行列を要素にもつ次の 4×4 行列である．

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & +\sigma_3 & -\sigma_2 & -\sigma_1 \\ -\sigma_3 & 0 & +\sigma_1 & -\sigma_2 \\ +\sigma_2 & -\sigma_1 & 0 & -\sigma_3 \\ +\sigma_1 & +\sigma_2 & +\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.1.184}$$

この行列は't Hooft symbol η を用いて次のように書くこともできる．

$$\bar{\Sigma}_{\mu\nu} = \bar{\eta}_{i\mu\nu}\frac{\sigma_i}{2}, \quad i = 1,2,3 \tag{0.1.185}$$

ここで，'t Hooft symbol は以下で定義される．

$$\bar{\eta}_{i\mu\nu} = -\bar{\eta}_{i\nu\mu} = \begin{cases} \epsilon_{i\mu\nu}, & \mu,\nu = 1,2,3 \\ -\delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ +\delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases}, \quad \eta_{i\mu\nu} = -\eta_{i\nu\mu} = \begin{cases} \epsilon_{i\mu\nu}, & \mu,\nu = 1,2,3 \\ +\delta_{i\mu}, & \nu = 4 \\ -\delta_{i\nu}, & \mu = 4 \end{cases} \tag{0.1.186}$$

$\eta_{i\mu\nu}, \bar{\eta}_{i\mu\nu}$ の満たす性質については別のノートでまとめる．$\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$ は添え字 μ,ν について反対称かつ ASD である：

$$\bar{\Sigma}_{\nu\mu} = -\bar{\Sigma}_{\mu\nu}, \quad \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\alpha\beta} = -\bar{\Sigma}_{\mu\nu} \tag{0.1.187}$$

また，次の関係式を満たす[*14]．

$$\left[\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}, \bar{\Sigma}_{\nu\rho}\right] = i\left(\delta_{\mu\nu}\bar{\Sigma}_{\sigma\rho} + \delta_{\rho\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu} - \delta_{\mu\rho}\bar{\Sigma}_{\sigma\nu} - \delta_{\nu\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\rho}\right) \tag{0.1.188}$$
$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\beta\sigma} = \delta_{\mu\sigma}\bar{\Sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\Sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu} \tag{0.1.189}$$

以上を用いると，上記の ansatz から field tensor $G_{\mu\nu}$ は次のように計算できる．

$$G_{\mu\nu} = i\bar{\Sigma}_{\nu\sigma}(\partial_\mu\partial_\sigma\ln\phi - \partial_\mu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}(\partial_\nu\partial_\sigma\ln\phi - \partial_\nu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}(\partial_\sigma\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi) \tag{0.1.190}$$

双対をとった $\tilde{G}_{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\bar{\Sigma}_{\beta\alpha}(\partial_\alpha\partial_\sigma\ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{\alpha\beta}(\partial_\sigma\ln\phi)(\partial_\sigma\ln\phi)\right] \tag{0.1.191}$$
$$= i\bar{\Sigma}_{\nu\alpha}(\partial_\alpha\partial_\mu\ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\mu(\ln\phi)) - (\text{第 1 項目で}\mu\leftrightarrow\nu\text{とした項}) + i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\sigma(\ln\phi) \tag{0.1.192}$$

[*14] これらは証明なしに用いる．cf.Rajaraman,1987

proof

$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ に ansatz の形を代入する．

$$\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu \left(i\bar{\Sigma}_{\nu\rho}\partial_\rho \ln\phi\right) = i\bar{\Sigma}_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\rho \ln\phi \tag{0.1.193}$$

$$\partial_\nu A_\mu = \partial_\nu \left(i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}\partial_\sigma \ln\phi\right) = i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma \ln\phi \tag{0.1.194}$$

$$\begin{aligned}[A_\mu, A_\nu] &= \left[i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}\partial_\sigma \ln\phi, i\bar{\Sigma}_{\nu\rho}\partial_\rho \ln\phi\right] \\ &= i^2\left[\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}, \bar{\Sigma}_{\nu\rho}\right]\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\rho(\ln\phi) \\ &= i^3(\delta_{\mu\nu}\bar{\Sigma}_{\sigma\rho} + \delta_{\rho\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu} - \delta_{\mu\rho}\bar{\Sigma}_{\sigma\nu} - \delta_{\sigma\nu}\bar{\Sigma}_{\mu\rho})\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\rho(\ln\phi) \\ &= -i(\delta_{\mu\nu}\bar{\Sigma}_{\sigma\rho} + \delta_{\rho\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu} + \delta_{\mu\rho}\bar{\Sigma}_{\nu\sigma} + \delta_{\sigma\nu}\bar{\Sigma}_{\rho\mu})\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\rho(\ln\phi) \quad (\because \bar{\Sigma}_{\mu\nu} = -\bar{\Sigma}_{\nu\mu})\end{aligned} \tag{0.1.195}$$

これより，$G_{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} &= i\bar{\Sigma}_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\rho \ln\phi - i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\sigma \ln\phi - i(\delta_{\mu\nu}\bar{\Sigma}_{\sigma\rho} + \delta_{\rho\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu} + \underbrace{\delta_{\mu\rho}\bar{\Sigma}_{\nu\sigma}}_{(a)} + \underbrace{\delta_{\sigma\nu}\bar{\Sigma}_{\rho\mu}}_{(b)})\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\rho(\ln\phi) \\ &= i\bar{\Sigma}_{\nu\sigma}(\partial_\mu\partial_\sigma \ln\phi - \underbrace{\partial_\mu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)}_{(a)}) - i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}(\partial_\nu \ln\phi\partial_\sigma \ln\phi - \underbrace{\partial_\nu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)}_{(b)}) \\ &\quad -i\delta_{\mu\nu}\underbrace{\bar{\Sigma}_{\sigma\rho}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)}_{\sigma\leftrightarrow\rho\text{の対称性からゼロ}} - i\delta_{\rho\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\rho(\ln\phi) \\ &= i\bar{\Sigma}_{\nu\sigma}(\partial_\mu\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\mu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\mu\sigma}(\partial_\nu \ln\phi\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\nu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)\end{aligned} \tag{0.1.196}$$

これより双対な field strength $\tilde{G}_{\mu\nu}$ を作れば，

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[i\bar{\Sigma}_{\beta\sigma}(\partial_\alpha\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\alpha\sigma}(\partial_\beta\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\beta(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - i\bar{\Sigma}_{\alpha\beta}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)\right] \\ &= \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\beta\sigma}(\partial_\alpha\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) \\ &\quad +\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}\bar{\Sigma}_{\alpha\sigma}(\partial_\beta\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\beta(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) \quad (\because \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\beta\alpha}) \\ &\quad -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\alpha\beta}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi) \\ &= i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\left[\bar{\Sigma}_{\beta\sigma}(\partial_\alpha\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) - \frac{1}{2}\bar{\Sigma}_{\alpha\beta}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)\right]\end{aligned} \tag{0.1.197}$$

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\beta\sigma} = \delta_{\mu\sigma}\bar{\Sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\Sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu}$ より，1 項目，2 項目は それぞれ

$$\begin{aligned}(1\text{ 項目}) &= (i\delta_{\mu\sigma}\bar{\Sigma}_{\nu\alpha} + \delta_{\nu\sigma}\bar{\Sigma}_{\alpha\mu} + \delta_{\alpha\sigma}\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\bar{\Sigma}_{\beta\sigma})(\partial_\alpha\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)) \\ &= i\left(\bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu \ln\phi - \bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\mu(\ln\phi)\right) - i\left(\bar{\Sigma}_{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu \ln\phi - \bar{\Sigma}_{\mu\alpha}\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\nu(\ln\phi)\right) \\ &\quad +i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}(\partial_\sigma\partial_\sigma \ln\phi - \underline{\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\alpha(\ln\phi)})\end{aligned} \tag{0.1.198}$$

$$(2\text{ 項目}) = -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Sigma}_{\alpha\beta}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi) = \underline{i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi)} \quad (\because \bar{\Sigma}_{\mu\nu}\text{ is ASD}) \tag{0.1.199}$$

となり，下線部分が打ち消すので $\tilde{G}_{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\mu\nu} &= i\left(\bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu \ln\phi - \bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\mu(\ln\phi)\right) - i\left(\bar{\Sigma}_{\mu\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu \ln\phi - \bar{\Sigma}_{\mu\alpha}\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\nu(\ln\phi)\right) + i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\sigma \ln\phi \\ &= i\left(\bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu \ln\phi - \bar{\Sigma}_{\nu\alpha}\partial_\alpha(\ln\phi)\partial_\mu(\ln\phi)\right) - (\mu\leftrightarrow\nu) + i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\sigma\partial_\sigma \ln\phi\end{aligned} \tag{0.1.200}$$

以上のように，$G_{\mu\nu}, \tilde{G}_{\mu\nu}$ を ansatz に含まれているスカラー関数 $\phi(x)$ で表すことができた．いま，$G_{\mu\nu}$ に対して self-dual の条件 $G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$ を課すと $\phi(x)$ は次の 2 式を満たすことが要求される．

$$
\begin{cases}
\partial_\mu\partial_\sigma \ln\phi - \partial_\mu(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi) = \partial_\sigma\partial_\mu \ln\phi - \partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\mu(\ln\phi) \quad \cdots(\mathrm{A}) \\
\partial_\sigma\partial_\sigma \ln\phi = -\partial_\sigma(\ln\phi)\partial_\sigma(\ln\phi) \quad \cdots(\mathrm{B})
\end{cases}
$$

(A) は偏微分が可換であることから自動的に満たされる．$\phi(x)$ を決定するには (B) を解けばよい．(B) はさらに次のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
\partial_\sigma\partial_\sigma \ln\phi + (\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) = 0 \\
\partial_\sigma\left(\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\phi\right) + +(\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) = 0 \\
\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\partial_\sigma\phi + \partial_\sigma\phi\left(-\frac{1}{\phi^2}\right)\partial_\sigma\phi + +(\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) = 0 \\
\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\partial_\sigma\phi - \left(\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\phi\right)\left(\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\phi\right) + (\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) = 0 \\
\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\partial_\sigma\phi - (\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) + (\partial_\sigma \ln\phi)(\partial_\sigma \ln\phi) = 0 \\
\therefore \frac{1}{\phi}\partial_\sigma\partial_\sigma\phi = 0
\end{aligned} \tag{0.1.201}
$$

$\phi(x)$ が全ての x において正則であるとき，この方程式は次のラプラス方程式に等価であり

$$
\partial_\sigma\partial_\sigma\phi = 0 \tag{0.1.202}
$$

この解は，$\phi = \mathrm{const.}$ であり対応するゲージ配位は $A_\mu = 0$ となる[*15]．$\phi(x)$ が特異点を持つ場合，非自明な解が得られる．最も簡単な例として，

$$
\phi(x) = \frac{1}{|x|^2} \tag{0.1.203}
$$

を考える．$x \neq 0$ においては，この $\phi(x)$ が解であることは次のように確認できる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\phi}\partial_\sigma\partial_\sigma\phi(X) &= \frac{1}{\frac{1}{|x|^2}}\partial_\sigma\left(-\frac{1}{|x|^4}2x_\sigma\right) \\
&= |x|^2\left[-\frac{2}{|x|^4}\partial_\sigma x_\sigma - 2x_\sigma\partial_\sigma\left(\frac{1}{|x|^4}\right)\right] \\
&= |x|^2\left(-\frac{8}{|x|^4} + 8|x|^2\frac{x_\sigma x_\sigma}{|x|^8}\right) \\
&= |x|^2\left(-\frac{8}{|x|^4} + \frac{8}{|x|^4}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{0.1.204}
$$

$x = 0$ では，$\phi(x) = 1/|x|^2$ は $\delta^4(x)$ の特異性を持つ．そこで，

$$
\partial_\sigma\partial_\sigma\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = -4\pi^2\delta^4(x) \tag{0.1.205}
$$

[*15] 証明略

を確認する．原点を含む 4 次元領域 V での体積積分を考えると，

$$\begin{aligned}\int_V \partial_\sigma\partial_\sigma\left(\frac{1}{|x|^2}\right)dV &= \oint_S\left[\partial_\sigma\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\right]dS_\sigma \quad (S_3\text{表面上の面積分})\\ &= \int d\Omega|x|^3\frac{x_\sigma}{|x|}\frac{x_\sigma}{|x|}\frac{\partial}{\partial|x|}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\\ &= \int d\Omega\left(-2|x|^3\frac{1}{|x|^3}\right)\\ &= -2\int d\Omega\\ &= -4\pi^2\end{aligned} \tag{0.1.206}$$

一方で，$-4\pi^2\delta^4(x)$ を積分した結果は

$$\begin{aligned}\int_V \partial_\sigma\partial_\sigma\left(\frac{1}{|x|^2}\right)dV &= -4\pi^2\int_V \delta^4(x)dV\\ &= -2\pi^2\end{aligned} \tag{0.1.207}$$

となり一致する．したがって，

$$\phi(x) = \frac{1}{|x|^2} \tag{0.1.208}$$

は $(1/\phi)\Box\phi = 0$ の解となる．一般化された解の形

$$\phi(x) = 1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i^2}{|x_\mu - a_{i\mu}|^2} \tag{0.1.209}$$

が一般の N-instanton 配位を与える $\phi(x)$ であり，**'t Hooft ansatz** と呼ばれる．この $\phi(x)$ から，インスタントンゲージ配位 $A_\mu(x)$ は

$$A_\mu(x) = i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu(\ln\phi(x)) \tag{0.1.210}$$

として構成することができる．

◆ 1-instanton 解

今求めた't Hooft ansatz から，1 インスタントン解つまり，$N = 1$ の場合のゲージ配位 $A_\mu(x)$ を構成する．$N = 1$ とした'tHooft ansatz は $y_\mu \equiv x_\mu - a_{i\mu} = (x - a_1)_\mu$, $y^2 \equiv y_\mu y_\mu$ とおくことで，

$$\phi(x) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{y^2} \tag{0.1.211}$$

と書くことができるので $A_\mu(x)$ は次のようになる．

$$A_\mu(x) = i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\partial_\nu(\ln\phi(x)) \tag{0.1.212}$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu\ln\phi(x) &= \frac{1}{\phi(x)}\partial_\nu\phi(x)\\ &= \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(1+\frac{\lambda_1^2}{y^2}\right)\\ &= \frac{1}{\phi}\lambda_1^2 2y_\nu\left(-\frac{1}{y^4}\right)\\ &= -\frac{2y_\nu\lambda_1^2}{y^2(y^2+\lambda_1^2)} \quad \left(\because \phi = 1+\frac{\lambda_1^2}{y^2}\right)\end{aligned} \tag{0.1.213}$$

$$A_\mu(x) = -2\lambda_1^2 \bar{\Sigma}_{\mu\nu} \frac{y_\nu}{y^2(y^2+\lambda_1^2)} \tag{0.1.214}$$

得られたゲージ場（1-instanton 配位）は $y=0$ に特異点を持つことが分かる．この特異点はゲージ変換によって取り除くことができることを確認する．さらに，このゲージ変換を与えるゲージ関数が

$$U_1(y) = \frac{y_4 + i y_i \sigma_i}{|y|} \tag{0.1.215}$$

であることも確認する．まず，

$$U_1(y)^{-1} \partial_\mu U_1(y) = -2i \bar{\Sigma}_{\mu\nu} \frac{y_\nu}{y^2} \tag{0.1.216}$$

であることから，ゲージ場 $A_\mu(x)$ が

$$A_\mu(x) = -2\lambda_1^2 \bar{\Sigma}_{\mu\nu} \frac{y_\nu}{y^2(y^2+\lambda_1^2)} = U_1(y)^{-1}(\partial_\mu U_i(y)) \frac{\lambda_1^2}{y^2+\lambda_1^2} \tag{0.1.217}$$

と書ける．このとき，$U_1(y)$ を用いた $A_\mu(x)$ のゲージ変換が

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U_1(y) A_\mu(x) U_1(y)^{-1} + U_1(y)(\partial_\mu U_1(y)^{-1}) \tag{0.1.218}$$

となる．このゲージ変換を $U_1(y)$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
A'_\mu(x) &= U_1(y) A_\mu(x) U_1(y)^{-1} + U_1(y)(\partial_\mu U_1(y)^{-1}) \\
&= (\partial_\mu U_1) U_1^{-1} \left(\frac{\lambda_1^2}{y^2+\lambda_1^2} - 1 \right) \quad (\because \partial_\mu U U^{-1} + U \partial_\mu U^{-1} = 0) \\
&= -(\partial_\mu U_1) U_1^{-1} \frac{y^2}{y^2 \lambda_1^2} \\
&= -2i \Sigma_{\mu\nu} \frac{y_\nu}{y^2+\lambda_1^2} \quad (\because \text{proof-5})
\end{aligned} \tag{0.1.219}$$

となり，$y=0$ での特異性を消去することができる．

proof

$U_1(y)=(y_4+iy_i\sigma_i)/|y|$ に対して次が成り立つ.

$$U_1(y)^{-1}\partial_\mu U_1(y)=-2i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\frac{y_\nu}{y^2} \tag{0.1.220}$$

$$U_1(y)\partial_\mu U_1(y)^{-1}=-2i\Sigma_{\mu\nu}\frac{y_\nu}{y^2} \tag{0.1.221}$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu U_1(y)=\frac{\partial U_1(y)}{\partial y_\mu}&=\frac{\partial}{\partial y_\mu}\left(\frac{y_4+iy_i\sigma_i}{|y|}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial y_\mu}\left(\frac{1}{|y|}\right)(y_4+iy_i\sigma_i)+\frac{1}{|y|}\frac{\partial}{\partial y_\mu}(y_4+iy_i\sigma_i)\\&=-\frac{y_\mu}{|y|^3}(y_4+iy_i\sigma_i)+\frac{1}{|y|}\frac{\partial}{\partial y_\mu}(y_4+iy_i\sigma_i)\end{aligned} \tag{0.1.222}$$

・$\mu=4$

$$\frac{\partial}{\partial y_4}U_1(y)=-\frac{y_4}{|y|^3}(y_4+iy_i\sigma_i)+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{|y|}\left[1-\frac{y_4}{|y|^2}(y_4+iy_i\sigma_i)\right] \tag{0.1.223}$$

・$\mu=1,\ 2,\ 3$

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu}U_1(y)=-\frac{y_\mu}{|y|^3}(y_4+iy_i\sigma_i)+\frac{1}{|y|}i\sigma_\mu=\frac{1}{|y|}\left[i\sigma_\mu-\frac{y_\mu}{|y|^2}(y_4+iy_i\sigma_i)\right]\quad(\mu=1,2,3) \tag{0.1.224}$$

$U_1(y)^{-1}$ との積を作れば,

・$\mu=4$

$$\begin{aligned}U_1(y)^{-1}\partial_4 U_1(y)=U_1(y)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_4}U_1(y)&=\frac{y_4-iy_i\sigma_i}{|y|}\frac{1}{|y|}\left[1-\frac{y_4}{|y|^2}(y_4+iy_i\sigma_i)\right]\\&=\frac{1}{|y|^2}\left[(y_4-iy_i\sigma_i)-\frac{y_4}{|y|^2}(y_4-iy_i\sigma_i)(y_4+iy_j\sigma_j)\right]\\&=\frac{1}{|y|^2}(y_4-iy_i\sigma_i-y_4)\quad(\because U_1^{-1}U_1=\mathbf{1})\\&=-\frac{iy_i\sigma_i}{|y|^2}\end{aligned} \tag{0.1.225}$$

・$\mu=1,2,3$

$$\begin{aligned}U_1(y)^{-1}\partial_\mu U_1(y)=U_1(y)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_\mu}U_1(y)&=\frac{1}{|y|^2}\left[(y_4-iy_i\sigma_i)i\sigma_\mu-\frac{y_\mu}{|y|^2}(y_4-iy_i\sigma_i)(y_4+iy_j\sigma_j)\right]\\&=\frac{1}{|y|^2}\left[iy_4\sigma_\mu-i^2y_i\sigma_i\sigma_\mu-y_\mu\right]\\&=\frac{1}{|y|^2}(iy_4\sigma_\mu+iy_i\epsilon_{i\mu j}\sigma_j)\\&=\frac{iy_4\sigma_\mu+iy_i\epsilon_{i\mu j}\sigma_j}{|y|^2}\end{aligned} \tag{0.1.226}$$

この結果が $-2i\bar{\Sigma}_{\mu\nu}\dfrac{y_\nu}{y^2}$ に一致することを確認する.

◆ **Step3.** 有限作用の配位が, トポロジカルな指数によって分類可能であることを確認する.

◆ **Step4.** Belavin, Polyakov たちによって導かれたインスタントンの具体的な形を導く.

't Hooft symbol に関連する公式

パウリ行列 σ_i を用いた四元数 $\tau^{\pm}_{\mu}$ を以下で定義する．

$$\tau^{\pm}_{\mu} = (\vec{\sigma}, \mp i) \tag{0.1.227}$$

パウリ行列が

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + i\epsilon_{abc}\sigma_c \tag{0.1.228}$$

を満たすことから以下が従う．

$$\tau^{+}_{\mu}\tau^{-}_{\nu} = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{a\mu\nu}\sigma_a \tag{0.1.229}$$

$$\tau^{-}_{\mu}\tau^{+}_{\nu} = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{a\mu\nu}\sigma_a \tag{0.1.230}$$

ここで，'t Hooft symbol $\eta, \bar{\eta}$ を以下で導入した．

$$\eta_{a\mu\nu} = \epsilon_{a\mu\nu} + \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} - \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4} \tag{0.1.231}$$

$$\bar{\eta}_{a\mu\nu} = \epsilon_{a\mu\nu} - \delta_{a\mu}\delta_{\nu 4} + \delta_{a\nu}\delta_{\mu 4} \tag{0.1.232}$$

't Hooft symbol $\eta(\bar{\eta})$ は Lorentz indices に対して自己双対 (反自己双対) であり，どちらも完全反対称である．

$$\eta_{a\mu\nu} = \tilde{\eta}_{a\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{a\rho\sigma}, \quad \eta_{a\mu\nu} = -\eta_{a\nu\mu} \tag{0.1.233}$$

$$\bar{\eta}_{a\mu\nu} = -\tilde{\bar{\eta}}_{a\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\eta}_{a\rho\sigma}, \quad \bar{\eta}_{a\mu\nu} = -\bar{\eta}_{a\nu\mu} \tag{0.1.234}$$

以下にいくつかの公式を証明なしに示す．

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{b\mu\nu} = 4\delta_{ab} \tag{0.1.235}$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\mu\rho} = 3\delta_{\nu\rho} \tag{0.1.236}$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\mu\nu} = 12 \tag{0.1.237}$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{0.1.238}$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{b\mu\rho} = \delta_{ab}\delta_{\nu\rho} + \epsilon_{abc}\eta_{c\nu\rho} \tag{0.1.239}$$

$$\eta_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\mu\nu} = 0 \tag{0.1.240}$$

$\bar{\eta}_{a\mu\nu}$ に対しては

$$\bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{a\rho\sigma} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{0.1.241}$$

以外，$\eta_{a\mu\nu}$ と同様の公式が成り立つ．