第 1 章

導入

このノートは,

1.1　概論

座標変換が

$$x = x(X, Y, Z), \quad y = y(X, Y, Z), \quad z = z(X, Y, Z) \tag{1.1.1}$$

のように与えられているとき，ラグランジアンは形を変えるが，オイラーラグランジュ方程式の形は変わらない．では，座標変換が位置座標の微分にも依存しているときはどうなるであろうか？つまり，

$$x = x(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}), \quad y = y(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}), \quad z = z(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) \tag{1.1.2}$$

の場合を感 g 蓌える．このとき，オイラーラグランジュ方程式は形が変わってしまう．そこで，新たな形の方程式を見つける必要がある．一つのアイデアとして，座標と運動量が混ざる次のような変換を考える．

$$\vec{x} = \alpha\vec{X} - \beta\vec{P}, \quad \vec{p} = \alpha\vec{P} + \beta\vec{X}, \quad \text{and} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{1.1.3}$$

ここで,

$$\vec{x} = (x, y, z), \quad \vec{X} = (X, Y, Z) \tag{1.1.4}$$

などと書いた．この変換を**正準変換**という．この変換は位置と運動量が独立であるかのように取り扱っており，相空間での運動を描写することに対応する．

運動方程式を探すため，ニュートンの運動方程式を思い出せば,

$$\vec{p} = m\dot{\vec{x}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla V(x). \tag{1.1.5}$$

これ方程式を，座標と運動量に関する連立の運動方程式とみなせばよいのでは，という考えが浮かぶ．そこで，ハミルトニアンを定義する．

$$H \equiv H(\vec{x}, \vec{p}) = E = T + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x) \tag{1.1.6}$$

このような関数を定義すれば、ニュートンの運動方程式は次のような連立方程式に帰着する．

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \nabla V \tag{1.1.7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \dot{\vec{x}}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = -\dot{\vec{p}} \tag{1.1.8}$$

最後の形式をハミルトンの運動方程式という．ここで，微分の表記に

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{\partial H}{\partial p_y} \\ \frac{\partial H}{\partial p_z} \end{pmatrix} \tag{1.1.9}$$

などを用いた．

ラグランジアンは座標間の変換について有効であり，オイラーラグランジュ方程式は時間に 2 階微分方程式で形を変えない．

ハミルトニアンは位置の微分も含む変換について有効，つまりラグランジュ関数よりも守備範囲が広い（その分，デメリットもある）．これは時間について 1 階の微分方程式となり変換において形を変えない．

ハミルトン方程式が正準変換について形を変えないことを示す．

$$\vec{x} = \alpha\vec{X} - \beta\vec{P}, \quad \vec{p} = \alpha\vec{P} + \beta\vec{X}, \quad \text{and} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \tag{1.1.10}$$

から

$$\vec{X} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{p}, \quad \vec{P} = -\beta\vec{x} + \alpha\vec{p} \tag{1.1.11}$$

と逆に解くことができる。これらより、

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial P_j} = -\beta\delta_{ij}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \alpha\delta_{ij} \tag{1.1.12}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \alpha\delta_{ij}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial X_j} = \beta\delta_{ij} \tag{1.1.13}$$

これより、正準方程式は新たな変数を用いて次のように書き換えることができる。

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial P_i} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial P_i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}\right) \tag{1.1.14}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}(-\beta\delta_{ij}) - \frac{\partial H}{\partial p_j}\alpha\delta_{ij}\right) \tag{1.1.15}$$

$$= -\beta\frac{\partial H}{\partial x_i} + \alpha\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.1.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial X_i} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial X_i}\right) \tag{1.1.17}$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}(\alpha\delta_{ij}) - \frac{\partial H}{\partial p_j}\beta\delta_{ij}\right) \tag{1.1.18}$$

$$= \alpha\frac{\partial H}{\partial x_i} + \beta\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.1.19}$$

ここで、

$$\dot{X}_i = \alpha\dot{x}_i + \beta\dot{p}_i, \quad \dot{P}_i = -\beta\dot{x}_i + \alpha\dot{p}_i \tag{1.1.20}$$

を用いることで

$$\dot{X}_i - \frac{\partial H}{\partial P_i} = \alpha\left(\dot{x}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \beta\left(\frac{\partial H}{\partial x_i} + \dot{p}_i\right) = 0 \tag{1.1.21}$$

$$\dot{P}_i + \frac{\partial H}{\partial X_i} = \alpha\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) + \beta\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} - \dot{x}_i\right) = 0 \tag{1.1.22}$$

(1.1.23)

最後の等号において、旧変数においてハミルトン方程式がなりたつことを用いた。このことから、ある座標系においてハミルトン方程式が成り立つときその座標系と正準変換で結ばれる座標系においてはハミルトン方程式の形は変わらないことがわかる。

【例題】放物運動
ラグランジュ関数は

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{1.1.24}$$

となるから、オイラーラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} = 0 \tag{1.1.25}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} = 0 \tag{1.1.26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{z} + mg = 0 \tag{1.1.27}$$

となり、力学での結果と一致する。ハミルトン関数及び、ハミルトンの運動方程式を用いると

$$H = \frac{1}{2m}(\dot{p_x}^2 + \dot{p_y}^2 + \dot{p_y}^2) + mgz \tag{1.1.28}$$

なので、運動量についての正準方程式から

$$\dot{p_x} + \frac{\partial H}{\partial x} = \dot{p_x} = 0 \tag{1.1.29}$$

$$\dot{p_y} + \frac{\partial H}{\partial y} = \dot{p_y} = 0 \tag{1.1.30}$$

$$\dot{p_z} + \frac{\partial H}{\partial z} = \dot{p_z} + mg = 0 \tag{1.1.31}$$

が直ちに得られる。これは、z 軸 方向以外の運動量が保存していることを示している。このように、正準方程式は保存量を明らかにするという性質がある。
【問題】相互作用ポテンシャル $V(\vec{x_1} - \vec{x_2})$ の 2 粒子系の運動方程式を導け。質点の質量を m_1, m_2 とする。
ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x_1}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x_2}}^2 - V(x_1 \vec{-} x_2) \tag{1.1.32}$$

となるので、オイラーラグランジュ方程式から

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x_1}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x_1}} = m_1\ddot{\vec{x_1}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{x_1}} = 0 \tag{1.1.33}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x_2}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x_2}} = m_2\ddot{\vec{x_2}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{x_2}} = 0 \tag{1.1.34}$$

ここの、ポテンシャルを座標で偏微分した項の符号はポテンシャルの引数が $x_1 \vec{-} x_2$ であることから $\vec{x_1}$ と $\vec{x_2}$ の方程式で符号が逆になっている。
これらを重心座標と相対座標に変換した式のほうがより簡単にラグランジアンを作ることができる。

1.2 変分原理とラグランジュ方程式

1.2.1 D'Alembert の原理と仮想仕事の原理

仮想仕事の原理

力 $\boldsymbol{F_i} = (X_i, Y_i, Z_i)$ が質点に働き、平衡状態にあるとき

$$\sum_i \boldsymbol{F_i} = 0 \rightarrow \delta W = \sum_i \boldsymbol{F_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0 \tag{1.2.1}$$

$$\rightarrow \delta W = \sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \tag{1.2.2}$$

が成り立つ。ここで $\delta \boldsymbol{r}$ とは束縛条件に反しない仮想的な変位のこと → 仮想変位

※ 2/09 追記　δW のことを仮想仕事と呼ぶ。実際には行わないが束縛条件に反しなので可能な仕事のこと。一方、普通の仕事は実際に変位を起こし、それに伴った仕事を指している。詳しくは力学の本を参考に。

つまり、つり合いの状態においては、外力の仮想変位に対する仕事は 0 となる

→　仮想仕事の原理、と呼ぶ。

より一般的に質点系が動く場合を考える。質量 m_i の各質点に力 $\boldsymbol{F_i}$ がはたらきそれらが運動を行っているとき、外力 $\boldsymbol{F_i}$ の和は質点系の全運動量の時間変化に等しい:

$$\sum_i \boldsymbol{F_i} = \sum_i \dot{\boldsymbol{p_i}} \tag{1.2.3}$$

このとき、$-\sum_i \dot{\boldsymbol{p_i}}$ を一つの力とみなし、両辺に加えることで

$$\sum_i (\boldsymbol{F_i} - \dot{\boldsymbol{p_i}}) = 0 \tag{1.2.4}$$

となる。この左辺が表す力はつり合いの状態にあるから仮想仕事 δW はもちろん 0 となり

$$\sum_i (\boldsymbol{F_i} - \dot{\boldsymbol{p_i}}) \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0 \tag{1.2.5}$$

となる。これが *D′Alembert* の原理 である。

※ 2/09 追記　もう少ししっかり書いておきます。D'Alembert（ダランベール）の原理とは物体がつりあいの状態になく、運動をしている場合でもその物体の持つ全運動量の時間微分に負号を付けたものを新たな力とみなすことで、動力学を静力学の問題へと帰着できるという考え方。このとき、物体とともに動く座標系に移ったということではないことに注意が必要。

1.2.2 変分法の説明

関数…数に対して数を対応させるもの

汎関数…関数に対して数を対応させるもの

関数の極値問題は微分法を用いた。では汎関数の極値問題を扱うにはどうすればよいか？

→　変分法

解析力学では特に定積分の形で表された汎関数を扱うことになる。なので、定積分で表された汎関数の極値を与えるような関数はどのようにして求めることができるか、という問題を考える。この問題には Euler と Lagrange が独立に取り組み、それぞれが異なる考え方により同じ方程式を発見した。

(1)Euler の方法

・定積分は和の極限として表現することができた。

・導関数は差の分数として表現することができた。（差分の勾配）

独立変数として x をもつ関数 $y = y(x)$, この関数の導関数 $y' = \frac{dy}{dx}$ および x を変数にもつ関数

$$F = F(y, y', x) \tag{1.2.6}$$

を考え、この F の $y(a) = \alpha$ から $y(b) = \beta$ までの x による定積分を

$$I = \int_a^b F(y, y', x)dx \tag{1.2.7}$$

とする。定積分 I（つまり汎関数）の値を停留値にするような関数 $y = y(x)$ を求めることが目標である。区間 $[a, b]$ を小区間に分割して横軸を

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = b \tag{1.2.8}$$

とし、それぞれに対応する縦軸を

$$y_0 = \alpha, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} = \beta \tag{1.2.9}$$

とする。このとき、$y_k = y(x_k)$ のことである。まず、導関数 $y'(x)$ を置き換える。

$$y'(x_k) \equiv z_k \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=x_k} \tag{1.2.10}$$

$$= \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{1.2.11}$$

各区間における導関数を差の分数、つまり差分の勾配で近似し、それを z_k とおいた。次に定積分は和で置き換える。

$$I = \int_a^b F(y, y', x)dx \tag{1.2.12}$$

$$\cong \sum_{i=0}^{n} F(y_i, y'_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.2.13}$$

※このときに二重極限を用いているので、数学的にはこれによって得られる結果が必ずしも収束しない。→ z_k を表すときに既に近似を用いているにもかかわらず、積分を和で近似している。

ここで y_k と y_{k+1} との差は Δx を小さくすることでいくらでも小さくすることができるから $y_k \to y_{k+1}$ と置き換えてもよい。（よくないだｒ。。。）このとき、I は

$$I \to I = \sum_i F(y_{i+1}, z_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.2.14}$$

I が停留値をとることは y_k を変化させたときに I が変化しないことつまり、I を y_k で偏微分したものが各 k に対して 0 となることと同値であるから、$y_k \to y_{k+1}$ で I を偏微分して

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial y_{k+1}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}\right)_{i=k}(x_{k+1} - x_k) + \left(\frac{\partial F}{\partial z_k}\right)_{i=k}\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_{k+1}}\right)_{i=k}(x_{k+1} - x_k) \\
&\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial z_k}\right)_{i=k+1}\left(\frac{\partial z_k}{\partial y_{k+1}}\right)_{i=k+1}(x_{k+1} - x_k) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}\right)_{i=k}(x_{k+1} - x_k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right)_{i=k}\frac{1}{x_{k+1} - x_k}(x_{k+1} - x_k) \\
&\quad + \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right)\left(-\frac{1}{x_{k+1} - x_k}\right)(x_{k+1} - x_k) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial y_{k+1}}\right)_{i=k}(x_{k+1} - x_k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right)_{i=k} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k}\right)_{i=k+1}
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

両辺 $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ でわって

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) - \frac{\Delta \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)}{\Delta x} \right]_{i=k} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.2.16}$$

これが I が停留値を持つため必要十分条件である。$\Delta x \to 0$ の極限においてこの差分方程式は微分方程式になり、x_k は区間 $[a, b]$ の任意の点を取ることになるから差分方程式は全区間で成り立つ必要がある。

$$\to \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \tag{1.2.17}$$

この微分方程式がオイラー・ラグランジュ方程式と呼ばれるものであり、停留値を求めたい汎関数を F として代入すれば、その汎関数を停留値にするような関数 y についての微分方程式が得られる。これが Euler の考えである。

次に紹介するのは Laglange の方法である。

(2)Laglange の方法

・定積分 I が停留値をとっているならば、I を少しだけ変化させても値は変わらないはずである。$\to$ この考えのもと、δI という定積分の変分と呼ばれる量を考え定式化した。

※ 2/07 追記

このとき、$\delta I = 0$ という条件式を「変分原理」と呼ぶ。この考えが大変重要になってくる。

汎関数

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx \tag{1.2.18}$$

の停留値を与える関数を $y = y(x)$ とする。このとき、x を少しだけずらした関数 $\bar{y}$ についても I は停留値をとらなければならない。そこで、任意の実数 ε と連続可微分な関数 $\phi(x)$ を用いて

$$\bar{y} = y(x) + \varepsilon \phi(x) \tag{1.2.19}$$

として新たな関数 $\phi(x)$ を定義する。

※ 2/07 追記

このとき $\phi(a) = \phi(b) = 0$ という条件だけつけておく。すなわち、考えている区間において端の値だけ固定して関数の変分を考えるということ。

いま定義した $\bar{y}$ ともとの関数 y との差 $\bar{y} - y$ を関数 y の変分と呼び、δy と、δ をつけて表す。あとで用いるが、定積分についても同様に変分を考えることができる。

$$\to \delta y = \bar{y} - y = \varepsilon \phi(x) \tag{1.2.20}$$

このとき、δ と d は似ているが異なるものであることを注意しておく。しかし、δ を一つの演算としてみると d（微分演算）と可換であることが示される。

一般に関数 $f(x)$ の変分は新たな関数 $\varepsilon\phi(x)$ を与える。この新たな関数の導関数は求めることができる。一方、$f(\bar{x})$ と $f(x)$ はそれぞれ導関数を求めることができて、これらの差は導関数 $f(x)'$ の変分と考えることができる。

$$\text{前者：} \quad \frac{d}{dx}\delta y = \frac{d}{dx}\left[\bar{f}(x) - f(x)\right] = \frac{d}{dx}\varepsilon\phi(x) = \varepsilon\phi'(x) \tag{1.2.21}$$

$$\text{後者：} \quad \delta\frac{d}{dx}f(x) = \bar{f}'(x) - f'(x) = (y' + \varepsilon\phi') - y' = \varepsilon\phi'(x) \tag{1.2.22}$$

したがって、変分の導関数と導関数の変分が等しいことが分かる。このことを用いると汎関数 I の変分が考えやすくなる。ここで I の変分とは被積分関数の中の y を $\bar{y}$ にした時の変分を表す。

$$\begin{aligned}\to \delta I &= \int_a^b F(\bar{y}, \bar{y}', x)dx - \int_a^b F(y, y', x)dx \\ &= \int_a^b \bar{F}dx - \int_a^b Fdx \\ &= \int_a^b \left[\bar{F}'(x) - F(x)\right] \\ &= \int_a^b \delta F(x)dx\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

これは定積分の変分が変分の定積分に等しいことを示している。求めたい条件は $\delta I = 0$ であった。そこで、具体的に $\delta F(x)$ を計算すればよいことになる。

$$\begin{aligned}\delta F(x) &= F(y + \varepsilon\phi, y' + \varepsilon) - F(y, y', x) \\ &= F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\phi + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\phi' - F(y, y', x) + o(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi + \frac{\partial F}{\partial y'}\phi'\right) + o(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

$$\tag{1.2.25}$$

これにより、定積分の変分は

$$\delta I = \delta\int_a^b Fdx = \int_a^b \delta Fdx \cong \varepsilon\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\phi + \frac{\partial F}{\partial y'}\phi'\right)dx \tag{1.2.26}$$

となる。ここで、第二項について部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\phi' dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\phi\right] - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\phi dx \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\phi dx\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

ここで、二つ目の等号において $\phi(a) = \phi(b) = 0$ を用いた。したがって、定積分の変分は

$$\delta I = \varepsilon\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\phi dx \tag{1.2.28}$$

$\phi(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続可微分な任意関数であるとき、[ ] 内が 0 になるとき、この定積分は 0 となる。

$$\to \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{1.2.29}$$

これは I が停留値をとるための必要十分条件である。

Euler と Lagrange は互いに独立にこの方程式を見つけた。また、これらの式は物理的な意味をまだ伴ってはいない。

1.2.3 変分原理と D'Alembert の原理

そこで、変分原理の式において仮想仕事 δW を入れてみる（(23) 式のところ)。

idea

力学の運動は D'Alembert の原理を満たすように動く。
$\rightarrow \quad \delta W = \quad \sum_i (\boldsymbol{F_i} - \dot{\boldsymbol{p_i}}) \cdot \delta \boldsymbol{r_i} = 0$
ではこの原理を満たす質点の位置はどのように表すことができるのか？
$\rightarrow$ この原理はつりあいの条件つまり平衡点の条件を表しているから、変分原理の示すところと同じ。つまり、δW の定積分を先ほどまで扱っていた関数 δF と置き換え、停留値を与えた関数 $y = y(x)$ を質点の位置をあたえるベクトル関数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ とみなしてみるのだ。
解析力学の一つの醍醐味がここだと思う。数学的な原理である変分原理が、物理的な意味を持つ D'Alembert の原理と同じ考えによって同一視されることで物理の根幹に対して意味を与えることができるようになる。（詳しくは適当に本を読んで自分なりの解釈を作ってください。）

なので δW の時間積分を考える。（δI の表式を見返してみると、独立変数による定積分になっていることが分かると思う。）

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\boldsymbol{F_i} - \frac{d}{dt}(m_i \boldsymbol{v_i}) \right] \cdot \delta \boldsymbol{r_i} dt \tag{1.2.30}$$

まず第 1 項は力 $\boldsymbol{F_i}$ がポテンシャル U をもつ保存力であるとすると

$$\begin{aligned}
(\text{第 1 項}) &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \boldsymbol{F_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r_i}} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} dt \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt \\
&= -\delta \int_{t_1}^{t_2} U dt
\end{aligned} \tag{1.2.31}$$

2 つ目の等号において $\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r_i}}$ とは各 $\boldsymbol{r_i}$ の成分での偏微分のことで、$\nabla_i U$ のこと。
続いて、第 2 項は

$$\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= -\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{d}{dt}(m \boldsymbol{v_i}) \cdot \delta \boldsymbol{r_i} dt \\
&= -\left[\sum_i m_i \boldsymbol{v_i} \cdot \delta \boldsymbol{r_i} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \boldsymbol{v_i} \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r_i}) dt
\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

積分区間の端での仮想変位 $\delta \boldsymbol{r_i}$ は 0 であるから一つ目のかっこが 0 となり（このことを境界項が 0 になる、などと言う）、さらに d と δ が可換なので

$$\begin{aligned}
(\text{第 2 項}) &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \boldsymbol{v_i} \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r_i}) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \boldsymbol{v_i} \delta \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{r_i} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \frac{1}{2} m_i \delta (\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_i}) dt \\
&= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i v_i^2 dt
\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

したがって、仮想仕事の時間積分は運動エネルギー $T=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2$ も用いると

$$\begin{aligned}\int\delta W dt &= \int_{t_1}^{t_2}\sum(\boldsymbol{F_i}-\dot{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{i}})\cdot\boldsymbol{r_i}dt \\ &= -\delta\int_{t_1}^{t_2}Udt+\delta\int_{t_1}^{t_2}\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2dt \\ &= \delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

という形に書き換わる。つまり、仮想仕事の時間積分はある定積分の変分に等しい。そこで、$L\equiv T-U$ として Lagrangian（ラグランジアン または ラグランジュ関数）と呼ばれる量を定義すると、D'Alembert の原理から仮想仕事が常に 0 となるので

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta W dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\delta I=0 \tag{1.2.35}$$

となる。このラグランジアンを時間で積分した定積分 I のことを特に 作用 と呼ぶ。この $\delta I=0$ という形はうえで述べたように変分原理と同じ形をしているから被積分関数であるラグランジアンはオイラー・ラグランジュの方程式を満たす。ゆえにラグランジアンを構成する $x_i,\dot{x}_i,t$ について（$x\to x_1,y\to x_2,z\to x_3$ のように書き、まとめて x_i と書くことがしばしばある）

$$\underline{\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)=0} \tag{1.2.36}$$

が成り立ち、これを ラグランジュの運動方程式 と呼ぶ。

1.2.4 まとめ

力学の現象（静力学、動力学）について成り立つものとして D'Alembert の原理を導入した。
$\to\delta W$：仮想仕事
これの時間積分を考える $\Leftrightarrow$ この状態を保ったまま物理を時間発展させること
$\to$ これを満たす $x_i,\dot{x}_i$ が力学の現象と言える。

$$\int\delta W dt=\cdots=\delta\int(T-U)dt \tag{1.2.37}$$

新たな物理量ラグランジアンを定義すると

$$\begin{aligned}\int\delta W dt &= \delta\int Ldt \\ &= \delta I \\ &= 0 \\ &\to\delta I=0\end{aligned} \tag{1.2.38}$$

変分原理の形をしているから被積分関数 L についてオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \tag{1.2.39}$$

が成り立つ。この微分方程式、ラグランジュの運動方程式（ラグランジュ方程式）の定める $x_i,\dot{x}_i$ こそが力学の現象である、ということ。

1.3 仮想変位と変分

重心座標と相対座標のエネルギーは授業でみたので、ラグランジアンは簡単に書くことができて、（重心と相対に関する）運動方程式を簡単にみちびくことができる。

今日は仮想変位とハミルトンの原理の話をします。

仮想変位 $\Leftarrow$ 系の力学的構造、つまり釣り合いを調べる方法のこと。表記としては δ で表すことにする。

仮想仕事が 0 となることがつり合いの言い換え、としているが仮想変位を微小にとっている意味がないのでは？ $\to$ つり合いはその条件でしか成り立たないから？つまり、力と束縛力の合力が 0 にならない？

滑らかな束縛とは、束縛力が仕事をしないような状況を指す。シーソーについて適応してみると、力のモーメントのつり合いの条件が得られる。仮想仕事の原理が成り立つのは、平衡状態の近傍であることに注意。

ダランベールの原理に向かうことにする。n 個の質点の運動方程式 $m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F_i} \quad i = 1, 2, \dots, N$

これらを個々の質点とともに動く座標系からみると

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_i} + (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}) = 0 \tag{1.3.1}$$

となる。運動方程式の上では加速度が 0 となり見かけの力、慣性力が生じる。このように、各質点とともに動くことで新たな力を導入し静力学とみなそうという考え方。

動力学的状態は作用するすべての力と慣性力が釣り合っている状態とみなすと静力学と考えることができる。$\Rightarrow$ ダランベールの原理

動力学系の仮想仕事の原理が

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}})) \cdot \delta\boldsymbol{r_i} = 0 \tag{1.3.2}$$

と書き表せる。

1.3.1 変分法

定積分

$$I = \int_a^b f\left(x, y, y' = \frac{dy}{dx}\right) dx \tag{1.3.3}$$

は関数 $y = y(x)$ の形を変化させると一般に値が変化する。このとき、積分区間を固定したとき積分 I が停留値をとるための（$y = y(x)$ に対する）条件は何か？

定積分の変分を考える。

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx \tag{1.3.4}$$

これが 0 となる条件を求めることに帰着する。そのために、微小変位の仮想変位と、仮想変位の微小変位が等しいということを示した。このことを用いると定積分は書き換えることができて

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx \tag{1.3.5}$$

境界での仮想変位が 0 であることから、定積分が 0 となり

$$= \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}\delta y dx \tag{1.3.6}$$

これが任意の $\delta y, dx$ に対して成り立つためには

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{1.3.7}$$

でなければならない。これをオイラー方程式という。

問題 ベルヌーイの最速下降線を求める。

問題は、２つの定点をとったときにその間を結ぶ経路の中でどの経路が最も早く他方の点に到達するかという問題である。その答えとしてはサイクロイド曲線となる：

$$x = a(1-\cos\theta),\quad y = a(\theta - \sin\theta) \tag{1.3.8}$$

ではこれを変分法を用いて求める。初速度を０とし、エネルギー保存則を考える。

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx \qquad \to v = \sqrt{2gx} \tag{1.3.9}$$

これより、曲線上を ds 進むのにかかる時間 dt が求められる。

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}dx \tag{1.3.10}$$

これを足していくことでかかる時間を計算することができる。つまり、dt を積分する。

$$t = \int dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gx}}dx \tag{1.3.11}$$

オイラーの方程式に代入することで

$$\frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} \equiv \sqrt{\frac{1}{2a}} \tag{1.3.12}$$

を得る。整理して y を求める。

$$y'^2 = \frac{x(1+y'^2)}{2a} \tag{1.3.13}$$

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \tag{1.3.14}$$

これを積分する。

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{x'}{2a-x'}}dx' \tag{1.3.15}$$

において $x' = a(1-\cos\theta)$ とすればサイクロイド曲線の表式（パラメータ表示）が得られる。$dx' = a\sin\theta d\theta$ より

$$y = \int_o^\theta \sqrt{\frac{a(1-\cos\theta')}{2a - a(1-\cos\theta')}}a\sin\theta' d\theta' \tag{1.3.16}$$

$$= \int_0^\theta a\sqrt{\frac{1-\cos\theta'}{1+\cos\theta'}}\sin\theta' d\theta' \tag{1.3.17}$$

$$= a\int_0^\theta \sqrt{\frac{(1-\cos\theta')^2}{1-\cos^2\theta'}}\sin\theta' d\theta' \tag{1.3.18}$$

$$= a\int_0^\theta \frac{1-\cos\theta'}{\sin\theta'}\sin\theta' d\theta' \tag{1.3.19}$$

$$= a\int_0^\theta (1-\cos\theta')d\theta' \tag{1.3.20}$$

$$\to x = a(1-\cos\theta),\quad y = a(\theta-\sin\theta) \tag{1.3.21}$$

蜃気楼についての変分法を用いた考察

問　空気中の屈折率 n は高さ y に対して次のような依存性を仮定する。

$$n = n_0(1-\alpha y) \tag{1.3.22}$$

このとき光の経路を求めよ。初期条件として光の射出角を θ とする。

1.3.2　作用積分の変分原理

なぜ $L = T - U$ の変分をとると運動方程式が出てくるのかを説明する。
質点系が t_1 から t_2 の間に P_1 から経路 C を通って P_2 に移ることを考える。このときの経路 C の仮想変位を考える。

$$\text{仮想変位：} \bar{PP'} = (\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.3.23}$$

このとき、この系全体の運動エネルギーは

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) \tag{1.3.24}$$

と表すことができる。このとき、元の経路 C と仮想変位させた経路 C' についての運動エネルギー T の時間積分を考える：

$$\text{経路 } C: \quad \int_{t_1}^{t_2} T dt \tag{1.3.25}$$

$$\text{経路 } C': \quad \int_{t_1}^{t_2} T' dt \tag{1.3.26}$$

経路が異なれば一般に運動エネルギーの値は異なるのでこの積分の値は区別する必要がある。ここで、この運動エネルギーの時間積分の変分を考える：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} (T' - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \tag{1.3.27}$$

まず、このようにして**積分の変分を運動エネルギーの差の積分として定義した**。さらに、経路が異なれば一般に速度も異なるはずであるから速度の仮想変位 $\delta \boldsymbol{v}$ をそれぞれの経路における速度の差として定義する。そうすると、速度の変分と位置の変分の時間微分が等しいという結論が得られる。すなわち、

$$\delta \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(\delta x_i) \tag{1.3.28}$$

つまり、位置の仮想変位を導入することによって速度や運動エネルギーの仮想変位を定義してやろうという考え。このように速度の仮想変位を定義すると運動エネルギーの仮想変位は（今までは位置に対して仮想変位という言葉を用いていたが、以降は一般的な物理量に対しても仮想変位という言葉を用いることにする。）

$$\delta T = \delta \left(\sum_i \frac{m_i}{2}(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) \right) \tag{1.3.29}$$

$$= \sum_i m_i (u_i \delta u_i + v_i \delta v_i + w_i \delta w_i) \tag{1.3.30}$$

$$= \sum_i m_i \left(u_i \frac{d}{dt}(\delta x_i) \right) + \left(v_i \frac{d}{dt}(\delta y_i) \right) + \left(w_i \frac{d}{dt}(\delta z_i) \right) \tag{1.3.31}$$

となるので、これを時間で積分する。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i \left[m_i\left(u_i\frac{d}{dt}(\delta x_i)\right)+\left(v_i\frac{d}{dt}(\delta y_i)\right)+\left(w_i\frac{d}{dt}(\delta z_i)\right)\right]dt \tag{1.3.32}$$

$$= \left[\sum_i m_i(u_i\delta x_i + v_i\delta y_i + w_i\delta z_i)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{1.3.33}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\sum_i m_i(\dot{u}_i\delta x_i + \dot{v}_i\delta y_i + \dot{w}_i\delta z_i)dt \tag{1.3.34}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\sum_i m_i(\dot{u}_i\delta x_i + \dot{v}_i\delta y_i + \dot{w}_i\delta z_i)dt \tag{1.3.35}$$

$$\tag{1.3.36}$$

このとき、一つ目の等号において部分積分を行い、境界での仮想変位が 0 であることから表面項は 0 となることを用いた。さらに動力学におけるダランベールの原理

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i + (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}))\cdot\delta\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} = 0 \tag{1.3.37}$$

を用いることでこの積分は

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\sum_i (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)dt \tag{1.3.38}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\delta W dt \tag{1.3.39}$$

これより、

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta W)dt = 0 \tag{1.3.40}$$

が得られる。この表式は力学におけるエネルギーと仕事の関数に似ている。このとき、ポテンシャルが保存力場であるとき $\delta W = -\delta U$ であるから

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad L \equiv T - U \tag{1.3.41}$$

と書き換えることができる。この式は変分法の形になっているので L という量についてオイラーの方程式を用いると次のような関係式が得られる：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) \tag{1.3.42}$$

この方程式を具体的な力学系について書き下してみると運動方程式が得られることが分かった。このことを発見したことに意味がある。このことを言葉で言えば

ハミルトンの原理

> $L = T - U$ の停留値をとる運動が実際に起こる運動である、ということができる。これを唱えたのがハミルトンなので、このことを**ハミルトンの原理**と呼ぶ。

また、式 (1.3.42) を**オイラー・ラグランジュ方程式**と呼ぶ。
量子力学は作用 $S = \int L dt$ が停留値をとらないところでの物理を表す。という考え。

1.4 ラグランジュ関数（ラグランジアン）の具体的な形

ラグランジュ関数は次のような関数であった。

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = T(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) - V(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \tag{1.4.1}$$

今回はここに書いたように、ポテンシャルが位置の微分にも依存しているような場合を考える。
$\Rightarrow$ 具体的には荷電粒子の従う運動方程式を定めるラグランジュ関数を求める。

1.4.1 電磁場中を運動する粒子のラグランジアン

変分原理の応用として電磁場中の粒子を表すラグランジアンを求める。

電場 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t)$、磁束密度 $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t)$ の電磁場中を質量 m、電荷 q の粒子が運動しているとき、その粒子の従う運動方程式は次で表される。

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = q(\vec{E}(x, y, z, t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(x, y, z, t)) \tag{1.4.2}$$

以降、必要がない場合は () の中の変数は省略し、相対論的効果は考えないことにする。(※相対論的な場合を考えても面白そうではあるが。)
変分原理が表す式は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad = 0 \tag{1.4.3}$$

$$\leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0 \tag{1.4.4}$$

$$\leftrightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt \tag{1.4.5}$$

である。この式の表すポテンシャル U の形は現段階では分からないが、運動エネルギー T はすでに知っている $\frac{1}{2}mv^2$ なので (1.4.5) の右辺は計算できる。(1.4.5) の右辺を R とおく:

$$R = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt \tag{1.4.6}$$

$$\begin{aligned}
R &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v} \right) dt = m \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \delta(\vec{v}) dt \\
&= m \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(\delta(\vec{r})) dt \\
&= m \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot d(\delta(\vec{r})) \\
&= m \left[\delta\vec{r} \cdot \vec{v} \right]_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} \delta\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v}) dt
\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

(1.4.7) の第 1 項は $t = t_1, t_2$ での変分が 0 であることから 0 となる。第 2 項に運動方程式 (1.4.2) を代入すれば

$$R = -m \int_{t_1}^{t_2} \delta\vec{r} \cdot \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) dt = - \int_{t_1}^{t_2} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \delta\vec{r} dt \tag{1.4.8}$$

となる。さらに電場 $\vec{E}$、磁束密度 $\vec{B}$ をスカラーポテンシャル $\phi(x,y,z,t)$ とベクトルポテンシャル $\vec{A}(x,y,z,t)$ を用いて書き換える。

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.4.9}$$
$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} \tag{1.4.10}$$

を (1.4.8) に代入して

$$\begin{aligned} R &= -\int_{t_1}^{t_2} q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right]\cdot\delta\vec{r} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} q\nabla\phi\cdot\delta\vec{r}dt + \int_{t_1}^{t_2} q\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right]\cdot\delta\vec{r}dt \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

ここで、(1.4.11) の第 1 項を (a)、第 2 項を (b) とおきそれぞれを計算する。
まず、(b) を計算する。

$$\begin{aligned} &(\text{(}b\text{) の第 2 項}) \\ &= \left[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})\right]\cdot\delta\vec{r} \\ &= \left[\dot{y}(\nabla\times\vec{A})_z - \dot{z}(\nabla\times\vec{A})_y\right]\delta x + \left[\dot{z}(\nabla\times\vec{A})_x - \dot{x}(\nabla\times\vec{A})_z\right]\delta y + \left[\dot{x}(\nabla\times\vec{A})_y - \dot{y}(\nabla\times\vec{A})_x\right]\delta z \\ &= \left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right]\delta x + \left[\dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \dot{x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]\delta y \\ &\quad + \left[\dot{x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \dot{y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\right]\delta z \\ &= -\left(\dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial x}\delta y + \dot{y}\frac{\partial A_z}{\partial y}\delta z + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\delta x + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x}\delta x + \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x}\delta z + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}\delta x + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y}\delta y + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\delta y + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\delta z\right) \\ &\quad + \delta x\left(\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + \delta y\left(\dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \\ &\quad + \delta z\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \\ &= -\left[\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\delta x + \left(\dot{x}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\delta y + \left(\dot{x}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_z}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\delta z\right] \\ &\quad + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\delta z\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_y}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\delta z\right)\dot{y} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial A_z}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_z}{\partial z}\delta z\right)\dot{z} \\ &= -\left(\dot{x}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right)\cdot\delta\vec{r} + \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\delta z\right)\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

(1.4.12) (1.4.13)

ここで、

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.4.14}$$
$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\delta z = \delta\vec{A}$$

を用いると (1.4.13) は

$$= -\left(\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\cdot\delta\vec{r} + \delta\vec{A}\cdot\vec{v} \tag{1.4.15}$$

したがって (b) は

$$(b) = \int_{t_1}^{t_2} q \left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \delta\vec{r} + \left(\frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot \delta\vec{r} - \delta\vec{A} \cdot \vec{v} \right] dt \tag{1.4.16}$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} q \left[\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \delta\vec{r} - \delta\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right] dt$$

また (a) は

$$(a) = q\int_{t_1}^{t_2} \nabla\phi \cdot \delta\vec{r}dt = q\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z \right) dt \tag{1.4.17}$$
$$= q\int_{t_1}^{t_2} \delta\phi dt$$

となる。したがって、R は

$$R = q\int_{t_1}^{t_2} \delta\phi dt + q\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \delta\vec{r} - \delta\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right) dt \tag{1.4.18}$$
$$= \delta\int_{t_1}^{t_2} q\phi dt + q\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \delta\vec{r}) - \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) \cdot \vec{A} - \delta\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}} \right] dt$$
$$= \delta\int_{t_1}^{t_1} q\phi dt - q\int_{t_1}^{t_2} \delta(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}})dt$$
$$= \delta\int_{t_1}^{t_2} q(\phi - \dot{r} \cdot \vec{A})dt$$

これが左辺

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} U dt \tag{1.4.19}$$

に等しいから、結局

$$U = q\phi - q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \tag{1.4.20}$$

とわかる。したがってラグランジアンは

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\ \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} \tag{1.4.21}$$

と求められる。今求めた (1.4.21) をオイラー・ラグランジュの方程式に代入すると確かに荷電粒子の従う運動方程式 (1.4.2) が得られる。しかし、勘違いしてはいけないのはラグランジアンを求めるときにその運動方程式をもとに構築していったところである。つまり、初めから運動方程式を知っておりそれに合致するようなラグランジアンを作り上げているということ。もし、(1.4.21) のラグランジアンが全く別の考え方から導かれるのであれば荷電粒子の運動方程式が電場、磁束密度の存在にかかわらず得られることになる。

ここで、逆にこのようにして作られたラグランジュ関数からもとの運動方程式が得られるかを確認する。

x 成分だけを考えることにすると

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + eA_x \tag{1.4.22}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) \tag{1.4.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = e\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \tag{1.4.24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{1.4.25}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right) + e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\left(\dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.4.26}$$

$$m\ddot{x} = \left(-e\frac{\partial A_x}{\partial t} - e\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + e\left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y} - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\dot{z}\right] \tag{1.4.27}$$

$$m\ddot{x} = E_x + \left(e\vec{v} \times \vec{B}\right)_x \tag{1.4.28}$$

確かに、電磁場中の荷電粒子の運動方程式が得られる。
もう一つの話題として、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルに対してゲージ変換をほどこすとラグランジアンは形を変えるが運動方程式は形を変えない。つまり、ゲージ変換に対して荷電粒子の運動方程式が共変であることが簡単に示せるということである。具体的なゲージ変換の形だけ示しておく。
スカラーポテンシャル $\phi(x,y,z,t)$、ベクトルポテンシャル $\vec{A}(x,y,z,t)$ に対して適当なスカラー関数 $\chi(x,y,z,t)$ を用いた次の変換をゲージ変換と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\\ \vec{A}' &= \vec{A} + \frac{\partial \chi}{\partial \vec{x}}\end{aligned} \tag{1.4.29}$$

２式目はベクトルポテンシャルの各成分に関する変換を表す。

例題

ゲージ変換に対して
(1) 運動方程式が不変になることを示せ。
(2) ラグランジュ関数の変換性を調べよ。

(2) について検討する。

$$L \to L' = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\left(\phi - \frac{\partial X}{\partial t} + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{A} + \nabla X)\right) \tag{1.4.30}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} + e\left(\frac{\partial X}{\partial t} + \boldsymbol{r}\cdot\nabla X\right) \tag{1.4.31}$$

最後の項を**全微分項**とよぶ。この全微分項は作用積分 S において表面項となり消えるため、運動方程式に現れることがない。つまり、私たちには観測することができない。

問

3 次元中心力ポテンシャル $V = 1/2m\omega_0^2 r^2$ の場において質量 m、電荷 e の荷電粒子が $+z$ 方向の磁束密度 B を受けて運動する。（詳解力学演習 p.p.131,{3.1} に同様の問題が載っている。）
(1)$A_x = -1/2By,\ A_y = 1/2Bx$ となることを示す。
(2) ラグランジュ関数を書き下し、運動方程式を求めよ。
(3) (2) で求めた運動方程式の一般解を求めよ。

(1) 与えられたベクトルポテンシャルが題意の磁束密度を与えることを確かめる。ベクトルポテンシャルを

$$\boldsymbol{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right) \tag{1.4.32}$$

というベクトルとすれば、このベクトルの回転 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) &(1.4.33)\\ &= \left(0, 0, \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B\right) &(1.4.34)\\ &= (0, 0, B) &(1.4.35)\end{aligned}$$

となり、題意の磁束密度を与えることがわかる。

(2) 電磁場のラグランジュ関数はポテンシャルが存在する場合、次のような表式で与えられる：

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - [e(\phi - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}) + V(r)] \tag{1.4.36}$$

今回考えている状況ではスカラーポテンシャルは存在せず、力学的なポテンシャルとして中心力ポテンシャルが存在する。したがってラグランジュ関数 L は

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}eBy\dot{x} + \frac{1}{2}eBx\dot{y} - \frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2 + z^2) \tag{1.4.37}$$

となる。このラグランジュ関数に対してオイラーラグランジュ方程式を用いることで

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{1}{2}eBy\ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - \frac{1}{2}eB\dot{y}\ , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}eB\dot{y} - m\omega_0^2 x &(1.4.38)\\ &\Rightarrow m\ddot{x} - eB\dot{y} + m\omega_0^2 x = 0 &(1.4.39)\\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{1}{2}eBx\ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y} + \frac{1}{2}eB\dot{x}\ , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2}eB\dot{y} - m\omega_0^2 y &(1.4.40)\\ &\Rightarrow m\ddot{y} + eB\dot{x} + m\omega_0^2 y = 0 &(1.4.41)\\ &\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -m\omega_0^2 z &(1.4.42)\\ &\Rightarrow m\ddot{z} + m\omega_0^2 = 0 &(1.4.43)\end{aligned}$$

これら 3 つの運動方程式が得られる。
(3)　(2) で求めた運動方程式の一般解を求める。まず、z 方向の運動方程式は単振動を表すから 1.4.43 の一般解は初期条件によって定まる 2 つの定数 C, γ を用いて

$$z = C\cos(\omega_0 t + \gamma) \tag{1.4.44}$$

となる。次に x, y 方向の運動方程式を考える。それぞれの方程式の両辺を m で割り、新しく

$$a \equiv \frac{eB}{m} \tag{1.4.45}$$

とおくと、(1.4.39), (1.4.41) はそれぞれ

$$\ddot{x} - a\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1.4.46}$$
$$\ddot{y} + a\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \tag{1.4.47}$$

と書き直すことができる。
ここで、(1.4.47) $\times\, y$ − (1.4.47) $\times\, x$ を作ると

$$\ddot{x}y - \ddot{y} - a(y\dot{y} + x\dot{x}) = 0 \tag{1.4.48}$$
$$\tag{1.4.49}$$

となるので、これを変形すると

$$\ddot{x}y + \dot{x}\dot{y} - \dot{x}\dot{y} - \ddot{y}x - a(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \tag{1.4.50}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}y - x\dot{y}\right) - \frac{a}{2}\frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2\right) = 0 \tag{1.4.51}$$
$$(\dot{x}y - x\dot{y}) - \frac{a}{2}(x^2 + y^2) = 0 \quad (\text{積分定数を } 0 \text{ とした}) \tag{1.4.52}$$

ここで、xy 平面上の極座標をとり

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1.4.53}$$

とするとこれらの時間微分は

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \tag{1.4.54}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \tag{1.4.55}$$

なので、これらを用いて左辺と右辺を計算すると

$$\begin{aligned}（\text{左辺}）&= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)r\sin\theta - (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)r\cos\theta \\ &= r\dot{r}\sin\theta\cos\theta - r\dot{r}\sin\theta\cos\theta - r^2\dot{\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= -r^2\dot{\theta}\end{aligned} \tag{1.4.56}$$
$$\begin{aligned}（\text{右辺}）&= \frac{a}{2}(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) \\ &= \frac{a}{2}r^2\end{aligned} \tag{1.4.57}$$

したがって

$$-r^2\dot{\theta} = \frac{a}{2}r^2 \tag{1.4.58}$$
$$\dot{\theta} = -\frac{a}{2} = -\frac{eB}{2m} \tag{1.4.59}$$

となり、xy 平面上で粒子の運動する軌道面の回転する速度、つまり角速度が一定となることがわかる。
続いて、(1.4.47) $\times\, \dot{x}$ + (1.4.47) $\times\, \dot{y}$ を作ると

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \omega_0^2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 0 \tag{1.4.60}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2\right) + \omega_0^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) = 0 \tag{1.4.61}$$

両辺を時間で積分して、積分定数を $k^2(>0)$ とすると

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega_0^2(x^2 + y^2) = k^2 \tag{1.4.62}$$

さっき計算しておいた $\dot{x},\dot{y}$ を代入すると

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\omega_0^2r^2=k^2 \tag{1.4.63}$$

$$\dot{r}^2=k^2-(\omega_0^2+\dot{\theta}^2)r^2 \tag{1.4.64}$$

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{k^2-(\omega_0^2+\dot{\theta}^2)r^2} \tag{1.4.65}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{k^2-(\omega_0^2+\dot{\theta}^2)r^2}}=dt \tag{1.4.66}$$

ここで、$\omega'^2=\omega_0^2+\dot{\theta}^2,\quad r=\frac{k}{\omega'}\sin\varphi$ とおくと

$$\frac{\frac{k}{\omega'}\cos\varphi}{\sqrt{k^2-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=dt \tag{1.4.67}$$

両辺積分し、積分定数を β とおくと

$$\frac{1}{\omega'}\varphi=t+\beta \tag{1.4.68}$$

$$\varphi=\omega't+\omega'\beta \tag{1.4.69}$$

$\omega'\beta\to\beta$ と置きなおして

$$\varphi=\omega't+\beta \tag{1.4.70}$$

を得るから、r は時間 t の関数として

$$r=\frac{k}{\omega'}\sin(\omega't+\beta) \tag{1.4.71}$$

と求められる。したがって、x,y はそれぞれ

$$x=\frac{k}{\omega'}\sin(\omega't+\beta)\cos\left(\frac{a}{2}\right) \tag{1.4.72}$$

$$y=-\frac{k}{\omega'}\sin(\omega't+\beta)\sin\left(\frac{a}{2}\right) \tag{1.4.73}$$

と求めることができる。円運動をしながら単振動を行うという振る舞いを見せる。
・ゲージ固定（ベクトルポテンシャルの形を決めて、磁束密度を決めてやること）
私たちの観測にかかるのはあくまで $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ であり、ポテンシャルには自由度が存在する。このとき、ゲージを決めてやることで電磁場を制限できる。
次のようなゲージを考えてみる：

$$A_x=0,\ A_y=Bx,\ A_z=0 \tag{1.4.74}$$

このようなポテンシャルは実は前回の磁束密度と等しいものを与える。ではラグランジアンはどうであろうか。計算すると

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+eBx\dot{y}-\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2+y^2+z^2) \tag{1.4.75}$$

となる。しかし、実際にオイラーラグランジュ方程式を書き下すと運動方程式は同じになる。このように計算したラグランジアンの差を計算すると（スカラー関数の）全微分の形になる。これがゲージ変換に対する本質である。
運動方程式にかからない変化を許すということは、理論をきれいな形に書き換える自由度が存在するということ。これにより、電磁波を記述するようにポテンシャルを選ぶことができる。
今回の問題を異なる座標系を選んでもよい、というのがラグランジュ関数をつかうメリットである（もちろん、得られる方程式は等価なものであるが、座標系が異なるので形は異なることに注意する。このことから、最も解くことが容易な座標系の座標で記述することが重要になる。）

1.4.2 一般化座標とラグランジュの運動方程式

各々の座標にまとめて通し番号を付けたのではなく、**自由度の数**だけ座標を用意してそれらの作る高次元空間の 1 点と考えること。
自由粒子ではありがたみがない。なにが大切かというと、**束縛条件（拘束条件）**が存在するときに威力を発揮する。例えば 2 重振り子の場合を考えると、2 つの棒の長さが一定だとする、自由度はそれぞれの角度つまり 2 となる。
よくよく考えると N 個の自由粒子を考えると意味がない。それよりも、拘束条件を含めた新たな座標をとって（この座標が一般化座標)、運動方程式もしくはラグランジュ関数を求めたほうがよい。例でいえば、剛体の運動が考えられる。剛体を構成する各粒子の位置と回転角という膨大な数の自由度が存在する。しかし、剛体という拘束条件を入れると自由度は最大でも 6 つまで落ちる。これが一般座標を導入する明らかなメリットの一つである。

1.5 第 6 回ノート

前回までは、一般化座標を導入した。系の自由度が拘束条件により減ることを利用して、記述する座標の数を減らそうという考えであった。
一般化座標

$$(q_1, \ldots, q_f) \quad , \ f \leq (\text{系の自由度}) \tag{1.5.1}$$

では、このように自由度を減らした一般化座標だけで議論を進めてもよいのであろうか？これを確認する。
次のように座標変換を与えることにする：

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_f, t), y_i = y_i(q_1, \ldots, q_f, t), z_i = z_1(q_1, \ldots, q_f, t) \quad , (i = N) \tag{1.5.2}$$

このとき、仮想仕事を一般化座標を用いて考える。このとき、考慮しなけらばならないのは拘束条件を破らないように仮想変位を行わせるということである。
仮想仕事は

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \tag{1.5.3}$$

なので仮想変位

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_f}\delta q_f \tag{1.5.4}$$

$$\Rightarrow \delta x_i = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.5.5}$$

となる。これを仮想仕事の表式に代入すると

$$\delta W = \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{f} X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{f} Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{i}^{n}\sum_{j}^{f} Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.5.6}$$

$$\equiv Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots + Q_f \delta q_f \tag{1.5.7}$$

となる。このとき、各座標の仮想変位でくくった。最後の表式は新しい仮想仕事を定義したことになる。このとき Q_j は

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \left[X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] \tag{1.5.8}$$

で与えられ、これを**一般化力**とよぶ。　力がポテンシャルをもつとき、力はポテンシャルの勾配によって表せた。一方、仮想仕事の表式を一般化座標で書けばポテンシャル U を $U = U(q_1, \ldots, q_f)$ として

$$\delta W = -\delta U \tag{1.5.9}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_f}\delta q_f \right)$$

となる。これを一般化力の定義と比較することで、一般化力は一般化座標で記述されたポテンシャルの一般化座標での勾配の負号に等しいことがわかる。つまり、

$$Q_r = -\frac{\partial U}{\partial q_r}, \quad (r = 1, \ldots, f) \tag{1.5.10}$$

ここでハミルトンの原理を使う。

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad \text{L} = T - U \tag{1.5.11}$$

ここで、元の座標を一般化座標で書き換えると

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_1}{\partial q_j}\dot{q} + \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad \dot{y}_i = \sum_j \frac{\partial y_1}{\partial q_j}\dot{q} + \frac{\partial y_1}{\partial t}, \quad \dot{z}_i = \sum_j \frac{\partial x_1}{\partial q_j}\dot{q} + \frac{\partial z_1}{\partial t} \tag{1.5.12}$$

これを運動エネルギーの形に代入すると

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\left(\sum_j \frac{\partial x_1}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_j \frac{\partial x_2}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\sum_j \frac{\partial x_3}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_3}{\partial t} \right)^2 \right] \tag{1.5.13}$$

これの変分をとると

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j \right) \tag{1.5.14}$$

時間微分と変分（仮想変位）を入れ替えて積分を実行する：

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \tag{1.5.15}$$

結果、

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left\{ \frac{d}{dt}(\text{運動エネルギー}) \right\} \right] dt \tag{1.5.16}$$

と仮想仕事の表式を合わせることで

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{1.5.17}$$

ポテンシャルがある場合、一般化力はポテンシャルの勾配であり、さらにポテンシャルが座標の微分に依存しない場合、右辺のポテンシャルは左辺に組み込むことができ、一般化座標においても同様のラグランジアンを定義することで同じ形式のオイラーラグランジュの方程式を得ることができる。なお、一般化力が非保存力を含む場合は一般化力の表示にその外力を考えればよい。

例題 1　単振り子

力学的に時間変化する変数は角度だけなので、極座標をとり角度に関するオイラー・ラグランジュ方程式を作ればよい。振り子の長さを l、鉛直方向と振り子のなす角度を θ、重りの質量を m、最下点を位置エネルギーの基準に取るとラグランジュ関数 L は次のようになる：

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{1.5.18}$$

これより、オイラーラグランジュ方程式を作ると角度について次の微分方程式を得る：

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin\theta = 0 \tag{1.5.19}$$

例題 2　惑星の公転運動

運動エネルギーと重力によるポテンシャル（位置エネルギー）を考えてラグランジュ関数を書き下せばよい：

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + G\frac{Mm}{r} \tag{1.5.20}$$

これらから、角運動量保存と動径方向の方程式を得られこれらを解けば、重力の作用による運動を求めることができる。

例題 3　二重振り子

二つの質点の位置が (x, y) で決まることから自由度は 4 であるが、質点をつなぐ距離が一定という条件から自由度は 2 まで減少する。そこで、一般化座標を角度の θ, φ に取る。
角度方向の微小変化を考える。角度の変化が微小であることを仮定すると運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m'(l\dot{\theta} + l'\dot{\varphi})^2 \tag{1.5.21}$$

位置エネルギーは角度が微小ということから 2 次項までとって

$$\begin{aligned} U &= mgl(1-\cos\theta) + m'g\{l(1-\cos\theta) + l'(1-\cos\varphi)\} \\ &\simeq \frac{1}{2}(m+m')gl\theta^2 + \frac{1}{2}m'gl'\varphi^2 \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

続きは課題のコピーを参照

1.6 第 8 回ノート

束縛条件のある問題の具体例を見る。特に、時間とともに条件が変化するような状況を考えるさいにラグランジュの方法が有効となる。

例題

鉛直に固定された半径 a の滑らかな円周上を質量 m の質点が頂上から初速度 0 で滑り落ちる。抗力の大きさと斜面を離れる点を求めよ。

中心を原点に取った 2 次元の極座標をとるとラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta \tag{1.6.1}$$

となる。さらに、拘束条件が時間とともに変化することからこのラグランジアンに未定乗数を加える：

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta - \lambda(r-a) \tag{1.6.2}$$

これは、一般化座標を r, θ から r, θ, λ に増やしたことに対応する。λ を未定乗数、$r-a$ の部分が拘束条件となる。物理的には λ は抗力に対応する。ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} r: & m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + \lambda = 0 \\ \theta: & m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - mgr\sin\theta = 0 \\ \lambda: & r = a \end{cases} \tag{1.6.3}$$

となる。ラグランジアンは物理を表現していて、運動方程式の段階までくると拘束条件が現れる。これらを連立して解けばよい。
一つ目と二つ目の式を連立し、積分することで

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta \to \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(1-\cos\theta) \tag{1.6.4}$$

を得る。一つ目と三つ目の式から

$$\begin{aligned} \lambda &= -ma\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \\ &= -2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta \\ &= mg(3\cos\theta - 2) \\ \therefore \cos\theta &= \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

を得る。ラグランジュ関数は拘束条件と物理を含んでいる。運動方程式の段階までくると、拘束条件を考慮した解を得られる。**ここめっちゃ重要**

1.6.1 保存則と保存量

循環座標というものが出てくる。まず、保存量とは何か。
時間的に変化しない量のことである。なぜ大切か。時間的に変化しないということは、その物質、物理量の普遍的、本質的な性質であるから。
一般化座標 q_i に共役な一般化運動量というものを次で定義する。

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.6.6}$$

これはたいていの場合、運動量に対応する。ラグランジアンを構成するポテンシャルが座標の微分に依存しない場合は普段の運動量に相当する。もし、$L(q,\dot{q})$ がある特定の座標 q_j を含んでいないとき保存則がわかる。

$$\frac{dp_j}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{1.6.7}$$

ここで、二つ目の等号においてはオイラーラグランジュ方程式を用いた。つまり、ラグランジュ関数に含まれない座標がある場合、それは保存量の存在を示している。このように、ラグランジュ関数に含まれない座標のことを**循環座標**と呼ぶ。

例題 1

ポテンシャル中の 1 粒子。ただし、ポテンシャルは z にしかよらない場合
ラグランジュ関数は

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-V(z) \tag{1.6.8}$$

この形から直ちに x,y が循環座標となり x,y 方向の運動量が保存すると考えられる。実際に運動方程式を書き下してみると

$$\to\begin{cases} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=0 \\ m\ddot{z}=-\frac{\partial V}{\partial z}\end{cases} \tag{1.6.9}$$

となる。したがって保存量は

$$p_x=m\dot{x},\quad p_y=m\dot{y} \tag{1.6.10}$$

となっていることがわかる。

例題 2

円筒座標系を用いて今見た問題を書き換える。
一般化座標は (ρ,ϕ,z) にとる。ラグランジュ関数は

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)-V(z) \tag{1.6.11}$$

循環座標は ϕ となることは関数の形を見ればわかる。オイラーラグランジュ方程式を作れば

$$\begin{cases} \phi: & m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi})=0 \\ \rho: & m\ddot{\rho}-m\rho\dot{\phi}^2=0 \\ z: & m\ddot{z}=-\frac{dV}{dz}\end{cases} \tag{1.6.12}$$

これより $m\rho^2\dot{\phi}$ が保存量となる。これは角運動量の z 成分に対応する。つまり、角度方向にポテンシャルが依存していないとき角運動量が保存するということが分かった。

例題３

２次元の中心力ポテンシャル

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \tag{1.6.13}$$

となる。オイラーラグランジュ方程式を書き下せば

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \\ m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr}) = 0 \end{cases} \tag{1.6.14}$$

θ に共役な運動量、この場合は角運動量

$$mr^2\dot{\theta} \tag{1.6.15}$$

が保存量になることがわかる。いまの二つの方程式を連立することで一つの方程式

$$m\ddot{r} - \frac{p_\theta}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = 0 \tag{1.6.16}$$

$$m\ddot{r} = -\frac{dU_{eff}(r)}{dr} \tag{1.6.17}$$

という 1 次元の問題に帰着することができる。

例題４

３次元中心力ポテンシャルの場合
ラグランジュ関数は

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - V(r) \tag{1.6.18}$$

となる。循環座標は ϕ である。オイラーラグランジュ方程式を書けば

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \tag{1.6.19}$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\phi}^2\sin^2\theta = -\frac{dV}{dr} \tag{1.6.20}$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - mr^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{1.6.21}$$

ここから、角運動量の z 成分が保存量となることは明らか。しかし、このオイラーラグランジュ方程式からは自明ではない保存量が得られる。それが角運動量の大きさの 2 乗という量である。具体的には

$$L^2 = (mr^2\dot{\theta})^2 + (mr^2\dot{\phi})^2\sin\theta \tag{1.6.22}$$

である。時間で微分して、運動方程式を適宜に用いることで保存量となることつまり、時間微分が 0 となることがわかる。
では、どのようにして出てくるのか。二つ目の式を r に関する常微分方程式に変形することで出てくる。

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{\text{eff}}(r)}{dr}, \quad V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{1.6.23}$$

と仮定する。この L^2 に既知の形として上述の式を代入することで V_{eff} の形を上のように仮定したときに 1 次元の問題に帰着できることが分かる。２次元の場合と対応がつく。

1.6.2 ネーターの定理

女性の数学者であり、保存量と対称性に密接にかかわる数学の定理である：

系の対称性は保存則を生み出す

無限小座標変換　$q_j \to q'_j = q_j + \delta q_j$　を考える。このとき、δq_j を次のように書く。

$$\delta q_j \equiv \varepsilon F_j(q,t) \tag{1.6.24}$$

関数 F は任意の関数である。
系の対称性とはすなわち、**ラグランジュ関数の不変性**のことである。具体的にはこのような無限小変換を施してラグランジュ関数が変化しないことを要請するのである。

$$\begin{aligned}
\delta L &\equiv L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t) \\
&= L(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \\
&= \underbrace{L(q+0, \dot{q}+0, t)}_{\text{テイラー展開 0 次項}} + \underbrace{\sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right)}_{\text{テイラー展開 1 次項}} - L(q, \dot{q}, t) \\
&= \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right)\delta q_j + \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \right) \equiv 0
\end{aligned} \tag{1.6.25}$$

第 1 項はオイラーラグランジュ方程式から 0 となる。また第 2 項は

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \tag{1.6.26}$$

を逆に用いた。この差分が 0 であることを要請すると ( ) の中が保存量となる。つまり、

$$Q \equiv \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} F_j(q,t) \tag{1.6.27}$$

具体的に見てみると
循環座標の場合を考えてみる。ラグランジアンの中に座標 q_i が存在しないとするとその座標 q_i を変化させてもラグランジアンは変化しない。このことから無限小変換は

$$q'_j = \begin{cases} q_j & (j \neq i) \\ q_j + \varepsilon & (j = i) \end{cases} = q_j \varepsilon \delta_{ji} \qquad (j = 1, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots, 3N) \tag{1.6.28}$$

と表すことができる。これをネーターの定理に適応すると保存量は

$$Q = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta_{ji} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \tag{1.6.29}$$

という、一般化運動量となることがわかる。

課題

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r) \tag{1.6.30}$$

が z 軸周りの回転

$$\begin{cases} x' = x\cos\phi - y\sin\phi \\ y' = x\sin\phi + y\cos\phi \\ z' = z \end{cases} \tag{1.6.31}$$

に対して無限小の回転を考えることで、角運動量が保存量として得られることを示せ。また、x, y 軸方向についても考えよ。

例）

ラグランジュ関数に対して無限小変換を行い、その結果をポテンシャルまで含めて丁寧にテイラー展開する。もとのラグランジュ関数との差をとり、オイラーラグランジュ方程式を用いると角運動量の時間微分という項が残る。ラグランジュ関数が無限小変換について不変であることを要請する、つまりこの差が 0 であることを要請すると角運動量の時間微分が 0 であることがわかり、角度に対する無限小変換による保存量が角運動量であることがわかる。

角度が微小として

$$\begin{cases} x' = x - \varepsilon y \\ y' = y + \varepsilon x \\ z' = z \end{cases} \tag{1.6.32}$$

と変換を書く。具体的にテイラー展開を用いて計算することで出てくる。

1.7 第 9 回ノート

大切なのは、対称性と保存量の存在の対応。
(2) 平行移動
質点系が同じ方向に変位する状況を考える。このとき、何の保存量が現れるか。その方向を $\boldsymbol{n}$ とすると

$$\delta \boldsymbol{r}_i \equiv \boldsymbol{n} \tag{1.7.1}$$

が系全体の平行移動を表す。これをネーターの定理に代入する。

$$Q = \sum_i^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} \tag{1.7.2}$$

これは $\boldsymbol{n}$ 方向の全運動量が保存することを示している。
(3) 回転運動
全粒子が一定の角速度で回転する状況を考える。適当な原点の周りに回転する質点を考えるとその微小変換は

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_i = \varepsilon \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_i \tag{1.7.3}$$

となる。ネーターの定理から

$$\begin{align} Q &= \sum_i^N \boldsymbol{p}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}) \tag{1.7.4} \\ &= \boldsymbol{n} \cdot \sum_i^N \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{1.7.5} \\ &= \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{L} \tag{1.7.6} \end{align}$$

ここで $\boldsymbol{L}$ は回転軸周りの系の全角運動量をあらわす。

1.7.1 正準方程式

ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{1.7.7}$$

ここで、一般化運動量 $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ を用いると、一般化運動量は $q, \dot{q}, t$ の関数であることがわかる。ここで、ラグランジュ関数の微小変化を考える。

$$\begin{align} dL &= \sum_j^f \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.7.8} \\ &= \sum_j^f (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{1.7.9} \end{align}$$

この段階では独立変数がラグランジュ形式 $(q_j, \dot{q}_j, t)$ のまま。ここで、**ルジャンドル変換**を考える。ルジャンドル変換とは、考えている関数の独立変数を、その関数の変数での偏微分に置き換えるという変換。関数として、どちらかが求められれば、もう片方を復元できるという性質を持つように独立変数を変える変換のこと。しかし、必ずしも関数を行き来できるとは保

証されない。

$$d\left(\sum_j^f p_j\dot{q}_j - L\right) = \sum_j^f (dp_j\dot{q}_j + p_j d\dot{q}_j) - dL \tag{1.7.10}$$

$$= \sum_j^f (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.7.11}$$

このとき、はじめに考えた量

$$\sum_j^f p_j\dot{q}_j - L \tag{1.7.12}$$

の独立変数は p, q, t となっている。つまり、求めたかった関数がこれである。次の関数

$$H(p,q,t) = \sum_j^f p_j\dot{q}_j - L(q,\dot{q},t) \tag{1.7.13}$$

を**ハミルトン関数**または**ハミルトニアン**と呼ぶ。つまり、速度を運動量に書き換えたということ。座標 - 運動量空間に移るということでもある。

もっと明確にはラグランジュ関数

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \tag{1.7.14}$$

を変数 $\dot{q}_j$ に関してルジャンドル変換を行うといえばよい。このとき、新たな変数は

$$\frac{\partial L(q_j,\dot{q}_j,t)}{\partial \dot{q}_j} \equiv p_j \tag{1.7.15}$$

であり、これを p_j と置く。このとき、L に代わって得られる関数は

$$H(q_j,p_j,t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_j,\dot{q}_j(p_j),t) \tag{1.7.16}$$

となる。この関数の微分形は

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.7.17}$$

ルジャンドル変換の変数変換の式、オイラーラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j \tag{1.7.18}$$

$$\frac{d}{dt}p_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

を用いると

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.7.19}$$

を得る。$H(q_j,p_j,t)$ の全微分の形と比較することで、正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \tag{1.7.20}$$

が得られることもわかる。

次に考えるのはハミルトン関数 $H(q,p,t)$ の変分である。注意するのは、独立変数が q,p,t であるということ。

$$\delta H = \sum_j^f \dot{q}_j \delta p_j + \sum_l p_l \sum_j \left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial p_j} \delta p_j \right) \tag{1.7.21}$$

$$- \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \sum_j \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_l \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \sum_j \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial p_j} \delta p_j \tag{1.7.22}$$

$$= \sum_j \dot{q}_j \delta p_j + \sum_j \left\{ \sum_l \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial p_j} \left(p_l - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right\} \delta p_j \tag{1.7.23}$$

$$= - \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \left\{ \sum_l \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_j} \left(p_l - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \right\} \delta q_j \tag{1.7.24}$$

$$\equiv \sum_j \dot{q}_j \delta p_j - \sum_j \dot{p}_j \delta q_j \tag{1.7.25}$$

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_j} \tag{1.7.26}$$

この 2 組の方程式を**ハミルトンの正準方程式**と呼ぶ。
変分原理を用いるなら、この方法よりも逆ルジャンドル変換の表式

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - H(q_j, p_j, t) \tag{1.7.27}$$

に対して適応したほうがスマートである。このとき、最小作用の原理

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt = 0 \tag{1.7.28}$$

を考えればよくなる。このとき、δq_j の変分だけを考えていることに注意する。つまり、運動量の変分 δp_j についてはその係数を 0 とみなせるとは限らなくなる。しかし、この場合でもルジャンドル変換の変換の表式より運動量の変分の係数は 0 であることが分かり結局、座標の変分についての係数が 0 という条件でよくなる。これより、正準方程式を得ることができる。
ハミルトン関数の物理的な意味は**エネルギー**である。このことを示しておく。
運動エネルギー

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \tag{1.7.29}$$

一般化座標への座標変換

$$x_i = x_i(q_i, \ldots, q_j, t), \quad \dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{1.7.30}$$

を考える。このとき、運動エネルギーを一般化座標を用いて書き換えると

$$T \to \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{x}_k \tag{1.7.31}$$

このとき、変換が時間に陽に依存しないという仮定を用いている。一般化運動量を用いるとハミルトン関数はルジャンドル変換の形から

$$H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - U) = T + U \tag{1.7.32}$$

が導くことができる。
これらの結果を用いると、質点系が**保存力の作用**を受けて、**時間によらないような拘束条件**に従って運動するときには

$$H = T + U = (\text{一定}) \tag{1.7.33}$$

となる。

1.8 第１０回ノート

ハミルトン関数の例

例 1　自由粒子

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{1.8.1}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\therefore H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

このように座標と運動量で書けばよい。ハミルトン関数は時間 t を陽に含まないため時間微分が 0 となり、エネルギー保存がわかる。正準方程式を用いて書き下すと運動量が保存することがわかる。

保存力を受けるような場を考えるときでもやることは同じ。

例 3　中心力場におけるハミルトン関数

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) \tag{1.8.2}$$

$$p_r = m\dot{r}, p_\theta = mr^2\dot{\theta}, p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$$

ルジャンドル変換を実行すればよい：

$$H = \sum_j p_j\dot{q}_j - L \tag{1.8.3}$$

一般化運動量の定義から座標の微分を消去すれば求めるべきハミルトン関数を得ることができる。

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right) + U(r) \tag{1.8.4}$$

この表式を見ると循環座標 ϕ であることがわかる。これより ϕ 方向の一般化運動量つまり、z 軸周りの角運動量が保存量となることがわかる。
角運動量を極座標で計算してみると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} &(1.8.5)\\
&= mr\boldsymbol{e}_r \times (v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\phi\boldsymbol{e}_\phi) &(1.8.6)\\
&= m(-rv_\phi\boldsymbol{e}_\theta + rv_\theta\boldsymbol{e}_\phi) &(1.8.7)\\
\Rightarrow L_r &= 0 &(1.8.8)\\
L_\theta &= -mrv_\phi = -mr^2\sin\theta\dot{\phi} = -\frac{p_\phi}{\sin\theta} &(1.8.9)\\
L_\phi &= mrv_\theta = mr^2\dot{\theta} = p_\theta &(1.8.10)
\end{aligned}$$

これらを用いると角運動量の２乗を計算することができて、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}^2 &= L_r^2 + L_\theta^2 + L_\phi^2 &(1.8.11)\\
&= p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} &(1.8.12)
\end{aligned}$$

となるから、ハミルトン関数が動径方向の運動エネルギー、遠心力ポテンシャル、中心力ポテンシャルを用いて表すことができる。

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2m}\frac{\boldsymbol{L}^2}{r^2} + U(r) \tag{1.8.13}$$

例４　荷電粒子のハミルトン関数

ハミルトン関数は

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\phi \tag{1.8.14}$$

となる。これは、荷電粒子のラグランジュ関数をルジャンドル変換することで求めることができる。

導出

荷電粒子のラグランジュ関数 L は

$$L(x_j, \dot{x}_j) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + e\dot{\boldsymbol{r}}_j \cdot \boldsymbol{A} - e\phi \tag{1.8.15}$$

であったから。このとき、ルジャンドル変換のための共役な運動量は

$$p_j = m\dot{x}_j + eA_j \tag{1.8.16}$$

であるので、これを用いてラグランジュ関数をルジャンドル変換すると

$$H(x_j, p_j) = \sum_j p_j \dot{x}_j - L \tag{1.8.17}$$

$$= \frac{1}{m}\sum_j p_j\left(p_j - eA_j\right) - \sum_j \left(\frac{1}{2m}\left(p_j - eA_j\right)^2 + \frac{e}{m}(p_j - eA_j)A_j - e\phi\right) \tag{1.8.18}$$

$$= \frac{1}{2m}\sum_j (p_j - eA_j)^2 + e\phi \tag{1.8.19}$$

というように求めることができる。

1.9 第 11 回ノート

正準変換

ハミルトンの運動方程式：正準方程式とは次のような体系であった。

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \tag{1.9.1}$$

$$H = \sum_r p_r \dot{q}_r - L \tag{1.9.2}$$

が座標の時間微分の依存していてもよいことが示される。つまり、

$$Q_r = Q_r(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}; t) \tag{1.9.3}$$

という変換においても **正準方程式は** 形を変えない。式で言えば

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_r}, \qquad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_r} \tag{1.9.4}$$

$$\bar{H} = \sum_r P_r \dot{Q}_r - L \tag{1.9.5}$$

が成り立つことである。

このような変換を見つける体系的な方法を探すことを考える。そのために、まずは正準方程式がどのような経緯のもとから得られたかを考え直す必要がある。これはラグランジュ関数に対して変数変換を行ったルジャンドル変換の表式

$$L = \sum_r p_r \dot{q}_r - H \tag{1.9.6}$$

の時間積分、つまり作用積分の変分が 0 となる、という要請から得られたものである。これをハミルトンの原理、もしくは最小作用の原理と呼んだ。ここに立ち返って考えてみることにする。

いま述べた条件式とは

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_r p_r \dot{q}_r - H \right) dt = 0 \tag{1.9.7}$$
$$when \quad \delta q_i = 0, \quad at \quad t_1 = t_2 = 0$$

である。この作用積分が $(p, q) \leftrightarrow (P, Q)$ の変換において不変である、という条件は実は**厳しすぎる。**いま、求めたいのは正準方程式の段階まで来たときに形を変えないような変換だからである。そこで、積分区間の両端における座標の変分が 0 であることに注目すると、ある関数の時間微分は時間積分によって表面項となり両端の値が変化しないことから 0 である。つまり、変分の式については次のような自由度が存在する:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_r p_r \dot{q}_r - H(q, p; t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_r P_r \dot{Q}_r - \bar{H}(Q, P; t) + \frac{d}{dt} F(\{q_i\}, \{Q_i\}; t) \right] dt \tag{1.9.8}$$

このとき、座標を変数にもつ関数 F のことを **母関数** と呼ぶ。独立変数として $\{q_i\}, \{Q_i\}$ を持つような母関数をとくに I 型の母関数という。以降、$\{q_i\}$ などは簡単に q_i と書くことにする。

F の全微分の形に変形する（両辺に dt をかける）と

$$dF = \sum_r p_r dq_r - \sum_r P_r dQ_r - (H - \bar{H}) dt \tag{1.9.9}$$

となるので関数 F の独立変数が確かに q_i, Q_i, t となることもわかる。この全微分の表式から変数の間に次の関係があることも直ちにわかる：

$$p_r = \frac{\partial}{\partial q_r} F(q_i, Q_i; t) \tag{1.9.10}$$

$$P_r = -\frac{\partial}{\partial Q_r} F(q_r, Q_r; t) \tag{1.9.11}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial}{\partial t} F(q_r, Q_r; t) \tag{1.9.12}$$

この関係から、母関数があらわに時間に依存しないとき正準方程式だけでなくハミルトン関数も形を変えないことがわかる。以降、母関数を W と書き、型を区別するために W_1 などと書く。

1.9.1 正準変換と母関数

今から行う議論は、うえで見てきた最も簡単な母関数についてのものである。具体的な関数形は必ずしも上述のように簡単なものにはならない。しかし、母関数の独立変数と関数形には関係がないので、座標と運動量の関係式はそれぞれの型の母関数について成り立つ一般的なものである。**I 型の母関数**

I 型の母関数は次のように定義される。

$$W_1 = W_1(q, Q; t) = \sum_r q_r Q_r \tag{1.9.13}$$

このとき、各変数の間には次のような変換がある。

I 型の母関数

$$p_r = \frac{\partial W_1}{\partial q_r} \tag{1.9.14}$$

$$P_r = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_r} \tag{1.9.15}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_1}{\partial t} \tag{1.9.16}$$

母関数に具体的な関数形を与えることで座標と運動量の表式が決まり、ハミルトン関数及び、正準方程式がどのような形になるかがわかる。

II 型の母関数

II 型の母関数は次のように定義される。

$$W_2 = W_2(q, P; t) = W_1 + \sum_r P_r Q_r \tag{1.9.17}$$

独立変数の入れ替えを行う、一種のルジャンドル変換とみることもできる。W_2 の独立変数が (q, P, t) であることは母関数の全微分をとることで確認できる。

$$dW_2 = \sum_r p_r dq_r - \sum_r P_r dQ_r - (H - \bar{H})dt + \sum_r P_r dQ_r + \sum_r Q_r dP_r \tag{1.9.18}$$

$$= \sum_r p_r dq_r + \sum_r Q_r dP_r - (H - \bar{H})dt \tag{1.9.19}$$

このことから、座標と運動量は次のような変換に従うことがわかる。

II 型の母関数

$$p_r = \frac{\partial W_2}{\partial q_r} \tag{1.9.20}$$

$$Q_r = \frac{\partial W_2}{\partial P_r} \tag{1.9.21}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \tag{1.9.22}$$

具体的な関数形を定めることでハミルトン関数の形を決めることができる。

III 型の母関数

III 型の母関数は次のように定められる。

$$W_3 = W_3(Q, p; t) = W_1 - \sum_r p_r q_r \tag{1.9.23}$$

これも母関数の全微分をとることで、独立変数が何であるかを確かめることができる。

$$dW_3 = \sum_r p_r dq_r - \sum_r P_r dQ_r - (H - \bar{H})dt - \sum_r p_r dq_r - \sum_r q_r dp_r \tag{1.9.24}$$

$$= -\sum_r P_r dQ_r - \sum_r q_r dp_r - (H - \bar{H})dt \tag{1.9.25}$$

その結果から得られる各変数の間の関係式は次のようになる。

III 型の母関数

$$P_r = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_r} \tag{1.9.26}$$

$$q_r = -\frac{\partial W_3}{\partial p_r} \tag{1.9.27}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_3}{\partial t} \tag{1.9.28}$$

IV 型の母関数

IV 型の母関数は次のように定義される。

$$W_4 = W_4(p, P; t) = W_1 + \sum_r P_r Q_r + \sum_r p_r q_r \tag{1.9.29}$$

全微分の形と変数間の関係式は次のようになる。

$$dW_4 = \sum_r p_r dq_r - \sum_r P_r dQ_r - (H - \bar{H})dt \tag{1.9.30}$$

$$+ \sum_r P_r dQ_r + \sum_r Q_r dP_r - \sum_r p_r dq_r - \sum_r q_r dp_r \tag{1.9.31}$$

$$= \sum_r Q_r dP_r - \sum_r q_r dp_r - (H - \bar{H})dt \tag{1.9.32}$$

IV 型の母関数

$$Q_r = \frac{\partial W_4}{\partial P_r} \tag{1.9.33}$$

$$q_r = -\frac{\partial W_4}{\partial p_r} \tag{1.9.34}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_4}{\partial t} \tag{1.9.35}$$

I 型の母関数のルジャンドル変換を考えれば、どの型の母関数与えられても正準変数同士の変換をすぐに再現することができる。
使うためには具体的な例を見たほうが良い。

期末の問題
1.(3) 座標 $x(t)$ に対応する運動量を $p(t)$ として、ある正準変換 $(x,p) \to (X,P)$ によってハミルトン関数が $H \to \bar{H} = \alpha P$ のように変換されたとする。この正準変換の母関数と、α の具体的な形を求めよ。

解答 調和振動子のハミルトン関数は題意から

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{1.9.36}$$

と与えられる。このハミルトン関数に対してある正準変換を行って

$$H \to \bar{H} = \alpha P \tag{1.9.37}$$

というハミルトン関数が得られたとすると、正準変数同士の間には次のような変換を仮定してもよい：

$$p = \sqrt{2m\alpha P}\cos Q \tag{1.9.38}$$

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha P}{k}}\sin Q \tag{1.9.39}$$

逆に、このような変換が与えられればハミルトン関数は $\bar{H} = \alpha H$ へと変換されることはすぐにわかる。このような正準変換を与える母関数として I 型の母関数を選ぶことにすると、正準変数およびハミルトン関数の間には次のような変換規則がある。

$$p_r = \frac{\partial W_1}{\partial q_r} \tag{1.9.40}$$

$$P_r = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_r} \tag{1.9.41}$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial W_1}{\partial t} \tag{1.9.42}$$

今回の場合はハミルトン関数があらわに時間を含まないので 3 つ目の等式は時間微分の項が 0 となる。(1.9.39), (1.9.39) より、

$$P = \frac{k}{2\alpha}q^2\frac{1}{\sin^2 Q} \equiv -\frac{\partial W_1}{\partial Q} \tag{1.9.43}$$

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2m\alpha P}\cos Q \\ &= \sqrt{mk}q\frac{1}{\sin^2 Q} \equiv \frac{\partial W_1}{\partial q} \end{aligned} \tag{1.9.44}$$

まず、p についての等式 (1.9.45) から

$$W_1 = \frac{\sqrt{mk}}{2}q^2\frac{\cos Q}{\sin Q} \tag{1.9.45}$$

が得られる。また、P についての等式から

$$\frac{d}{dQ}\left(\frac{\cos Q}{\sin Q}\right) = -\frac{1}{\sin^2 Q} \tag{1.9.46}$$

であることを用いて

$$W_1 = \frac{k}{2\alpha}q^2\frac{\cos Q}{\sin Q} \tag{1.9.47}$$

を得る。これらの母関数が等しいためには

$$\frac{\sqrt{mk}}{2} = \frac{k}{\alpha} \tag{1.9.48}$$

であればよく、

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.9.49}$$

と定まる。したがって、このような正準変換の母関数は

$$W_1 = \frac{\sqrt{mk}}{2}q^2\frac{\cos Q}{\sin Q} \tag{1.9.50}$$

であり、定数 α の値は

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.9.51}$$

である。

母関数はこのように正準変換ありきで形を決めるもの、という認識が正しいような気がする。とりあえず次に進むことにする。

1.10 正準変換と不変量

正準変換に対する不変量を知っておくことは大切なこと（らしい)。なので、ここでは、正準変換によって不変な量、つまり正準方程式が何を保存量として持つのかを考えることにする。

1.10.1 ポアソン括弧式

正準変換に対して代表的な保存量として**ポアソン括弧**がある。まずは、定義を述べ、その性質と量子力学との対応を見ていく。
まず、ポアソン括弧の定義は次のようなものである。

u, v を正準変数の任意関数

$$u = u(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f) \tag{1.10.1}$$
$$v = v(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f) \tag{1.10.2}$$

としたとき、次の量を**ポアソン括弧**と呼ぶ。

$$(u, v) \equiv \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \tag{1.10.3}$$

この式の出所を説明する。任意関数 $F(p_j, q_j, t)$ の時間変化を見る。

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial F}{\partial t} && (1.10.4) \\ &= \sum_j \left(-\frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} && (1.10.5) \\ &= (F, H) + \frac{\partial F}{\partial t} && (1.10.6) \end{aligned}$$

このとき、２つ目の等号では正準方程式を用いた。関数 F があらわに時間 t を含まないとき、時間による偏微分は消えるから

$$\rightarrow \frac{dF}{dt} = (F, H) \tag{1.10.7}$$

が得られる。さらに、任意関数 F として $F = q_j, F = p_j$ とすると正準方程式が

$$\frac{dq_j}{dt} = (q_j, H), \quad \frac{dp_j}{dt} = (p_j, H) \tag{1.10.8}$$

と表される。
この定義から次のいくつかの諸性質が得られる。

ポアソン括弧の満たす諸関係

$$(u,v) = -(u,v), \quad (u,u) = 0 \tag{1.10.9}$$
$$(u_1+u_2, v_1+v_2) = (u_1,v_1)+(u_1,v_2)+(u_2,v_1)+(u_2,v_2) \tag{1.10.10}$$
$$(u,vw) = v(u,w)+w(u,v) \tag{1.10.11}$$
$$U = U(u_1,\dots,u_k), \quad V = V(u_1,\dots,u_k) \quad u_j\text{は } \{q_f\},\{p_f\} \text{ の関数} \tag{1.10.12}$$
$$(U,V) = \sum_{p,\lambda} \frac{\partial U}{\partial u_p}\frac{\partial V}{\partial u_\lambda}(u_p,u_\lambda)$$
$$(u,(v,w))+(v,(w,u))+(w,(u,v)) = 0 \tag{1.10.13}$$

このポアソン括弧を用いると保存量を容易に見出すことが可能となる。ある物理量 $F(p,q)$ がハミルトン関数 H とポアソン括弧について可換であるとき、その物理量 $F(p,q)$ は保存量となることがわかる。以下にこのことを示す。
正準変数を引数とする物理量 $F(p,q)$ がハミルトン関数 $H(p,q)$ と可換である、すなわち $(F,H)=(H,F)$ のとき

$$(F,H) = -(H,F) \tag{1.10.14}$$
$$= -(F,H) \tag{1.10.15}$$
$$\therefore (F,H) = 0 \tag{1.10.16}$$
$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = (F,H) = 0 \tag{1.10.17}$$

したがって、$F(p,q)$ は保存量であることがわかる。また、上で示した性質の一つヤコビの恒等式から保存量同士のポアソン括弧も保存量となることがわかる。
今のポアソン括弧の簡単な例として角運動量が保存量となることを簡単に示すことができる。(→授業の課題)

1.10.2 ポアソン括弧と正準変換

続いて、ポアソン括弧が正準変換に対して不変であることを示す。少し面倒な証明となるが書いておくことにする。
示すのは次のことである：

$$\begin{aligned}(u,v)_{p,q} &= \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j}\right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial Q_j}\right) \\ &= (u,v)_{P,Q}\end{aligned} \tag{1.10.18}$$

変換

$$q_j = q_j(Q_i,P_i), \quad p_j = p_j(Q_i,P_i) \tag{1.10.19}$$

を考える。証明の途中で、この変換が正準変換であるという条件を課す。変数変換の公式

$$\frac{\partial u}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\right) \tag{1.10.20}$$

などを用いて $(u,v)_{p,q}$ を書き換えると

$$\begin{aligned}
(u,v)_{p,q} &= \sum_j \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \times \sum_l \left(\frac{\partial v}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial v}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} \right) \right\} \\
&\quad - \sum_j \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) \times \sum_l \left(\frac{\partial v}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_j} \right) \right\} \\
&= \sum_k \sum_l \left\{ \frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial Q_l} \times \underbrace{\sum_j \left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right)}_{(1)} + \frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_l} \underbrace{(Q_k, P_l)_{p,q}}_{(2)} \right\} \\
&\quad + \sum_k \sum_l \left\{ \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_l} \underbrace{(P_k, Q_l)_{p,q}}_{(3)} + \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial P_l} \underbrace{(P_k, P_l)_{p,q}}_{(4)} \right\}
\end{aligned} \tag{1.10.21}$$

続いて (1)〜(4) の部分を考える。先ほど定義した変換が正準変換であることを要請することで、母関数を導入する。⇒ 正準変換であればその変換を生じるような母関数が存在し、それを用いようという考え。

例えば一つ目のポアソン括弧 (1) は次のように変形される。
II 型の母関数 を W_2 として導入すると

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial W_2}{\partial P_k}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\underbrace{\left(\frac{\partial W_2}{\partial q_j}\right)}_{p_j} = \frac{\partial p_j}{\partial P_k} \tag{1.10.22}$$

という関係がわかる。また、IV 型の母関数を W_4 として導入すると

$$\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial W_4}{\partial P_k}\right) = \frac{\partial}{\partial P_k}\underbrace{\left(\frac{\partial W_4}{\partial p_j}\right)}_{-q_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_k} \tag{1.10.23}$$

したがって

$$\begin{aligned}
(1) = (Q_k, Q_j)_{q,p} &= \sum_j \left(\frac{\partial p_j}{\partial P_k}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial P_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} \right) \\
&= \frac{\partial Q_k}{\partial P_k} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.10.24}$$

となる。ほかのポアソン括弧 (2)〜(4) も同様に変形することができて

$$(2) = (Q_k, P_l)_{q,p} = \delta_{kl} \tag{1.10.25}$$
$$(3) = (P_k, Q_l)_{q,p} = -\delta_{lk} \tag{1.10.26}$$
$$(4) = (P_k, P_l)_{q,p} = 0 \tag{1.10.27}$$

を得るからポアソン括弧は

$$\begin{aligned}
(u,v)_{q,p} &= \sum_{l,k} \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_l}\delta_{kl} - \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_l}\delta_{kl} \right) \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial Q_k}\frac{\partial v}{\partial P_k} - \frac{\partial u}{\partial P_k}\frac{\partial v}{\partial Q_k} \right) \\
&= (u,v)_{Q,P}
\end{aligned} \tag{1.10.28}$$

これにより、ポアソン括弧が正準変換において不変な量であることが分かった。

1.11 ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式

最後に書くのは**ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式**と呼ばれるものである。これは、量子論につながるための重要な方程式である。アイデアとしては、正準方程式においてハミルトン関数が定数であれば正準方程式はとても簡単なものになる。では、そのような正準変換は可能であるか、可能であればそのような変換を与える母関数はどのようなものであるかという問題に解答を与える。
では、次のような正準変換を考える。

$$(q,p)\to(Q,P),\quad H\to\bar{H}=const. \tag{1.11.1}$$

このとき、ハミルトン関数が定数に移されるような正準変換を考えるといったが、その定数は物理的には系のエネルギーに対応するため、基準を変えることで 0 に取ることができる。したがって、これから探すのは次のような正準変換となる。

$$p_j=\frac{\partial W}{\partial q_J},\quad Q_j=\frac{\partial W}{\partial P_j},\quad \bar{H}=H+\frac{\partial W}{\partial t}=0 \tag{1.11.2}$$

このとき、新たなハミルトン関数が 0 であることから新たな変数における正準方程式については次の式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\frac{dP_j}{dt}&=-\frac{\partial\bar{H}}{\partial Q_j}=0\\ \frac{dQ_j}{dt}&=\frac{\partial\bar{H}}{\partial P_j}=0\end{aligned} \tag{1.11.3}$$

つまり、新しい正準変数は定数となる。以上のことから、求める母関数 W が満たすべき方程式が得られる：

ハミルトン・ヤコビの偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}W(q_j,\alpha_j,t)+H\left(q_j,\frac{\partial W}{\partial q_j},t\right)=0 \tag{1.11.4}$$

このとき、α_j は $\dot{P}_j$ を積分して得られた $P_j=\alpha_j$ のことである。また、変換前のハミルトン関数は引数として座標と、運動量の代わりに母関数の座標微分をもつ。
この偏微分方程式を解けば求める母関数がわかるというものである。解法を説明してもなかなか抽象的で難しくなってしまうので、ここでは例題を解く様子を記しておく。

例題

1 次元調和振動子の運動をハミルトン・ヤコビの偏微分方程式を用いて解け

解答
1 次元調和振動子のハミルトン関数は次のようになる：

$$H(q,p)=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m^2\omega^2q^2 \tag{1.11.5}$$

ハミルトン関数が時間にあらわに時間に依存しないから変数分離の形にすることができて

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H=0 \tag{1.11.6}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-H\equiv -E \tag{1.11.7}$$

となる。両辺を積分し、積分定数をハミルトンの主関数 S としておくと、次のように表される。

$$W(q,P) = S(q,P) - Et = S(q,P) - Ht \tag{1.11.8}$$

ここで、母関数があらわに時間に依存しないとするとハミルトン・ヤコビの偏微分方程式は次のようになる。

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \tag{1.11.9}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\omega^2 q^2 \equiv E \tag{1.11.10}$$

このとき、新たなハミルトン関数を定数として E とおいてある。これを S について解くことを考える。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2}m^2\omega^2 q^2\right) \tag{1.11.11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m^2\omega^2 q^2\right)} \tag{1.11.12}$$

$$\therefore S = \int^q \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}m^2\omega^2 q'^2\right)}dq' \tag{1.11.13}$$

ここでハミルトン関数が定数 E に変換されることから正準方程式を考えると

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = 0 \tag{1.11.14}$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = 0 \tag{1.11.15}$$

ゆえに、新たな正準変数は定数となることがわかる。これらを α, β とおく。

$$P = \alpha, \quad Q = \beta \tag{1.11.16}$$

さらに、新たなハミルトン関数の値としておかれた定数の値は任意に選べることからこれを α とする：

$$\bar{H} = E = \alpha \tag{1.11.17}$$

このとき、II 型の母関数 における変数変換の表式から

$$p = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial P} \tag{1.11.18}$$

なので、母関数が