

Chapter 3

Perturbation Theory and

Evaluation of the S-Matrix

Ch. 3 Perturbation Theory and Evaluation of the S-Matrix.

- 具体的な物理量（たとえば微分断面積）を計算するには、始状態 \rightarrow 終状態 との遷移振幅が必要。
- 遷移振幅は S-行列要素 (S-matrix elements) と呼ばれる。
- S-matrix elements の計算方法を見ていこう。

3.1 Interaction Representation

① 離散粒子の運動論

(1) 厳密に解くこと のではなく理想的な問題を達成。
= 解析的 or 數値的

(2) 実際、解くため問題を ((1)の問題に近いもの) を選ぶ。

近似的に、解くため問題を “解いてる問題” (すなはち展開によって扱う)。

② 場の理論へ運動論

(1) 出発点となるのは、相互作用のない、自由場。 (ex.) $(\partial_\mu \phi^\mu + m^2) \phi(x) = 0$)

(2) 場の間の相互作用が十分に弱いときは、解くため問題を
自由場による展開によって扱う := パーティクル。

(描像)

量子力学の形式は2種類の表示 (representation) がある。

行列要素を構成していくときに便利なのが“相互作用表示”(interaction rep.)

この“相互作用表示”は簡単に説明。

④ Interaction representation.

Hamiltonian は相互作用部分 H_{int} とそれ以外（自由場部分） H_0 に分けられる：

$$H = \int d^3x H_0 + \int d^3x H_{\text{int}} = H_0 + H_{\text{int}}$$

この H に対する Schrödinger 方程式を考える：

$$\boxed{i \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t} = H^S \Psi_S(t)}$$

ここで、添字の S は Schrödinger rep. を意味する。

この “ $\Psi_S(t)$ ” は Schrödinger rep. における 演算子 F_S , 状態ベクトル $\Psi_S(t)$ に対して
次の通り交換で定義される 新しい表示を考える：

$$\boxed{\Psi_I(t) \equiv e^{i H_0^S t} \Psi_S(t), \quad F_I \equiv e^{i H_0^S t} F_S e^{-i H_0^S t}}$$

これらは 新しい定義された $\Psi_I(t), F_I$ を “相互作用表示” と呼ぶ。

Heisenberg rep. と似ているが、指標の角のハミルニアンが自由場の H_0 で
あることを注意。

(相互作用を除く)

相互作用表示 \hat{H}_I の三つ等式: \hat{H}_I

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_I &= \hat{H}_0^I + \hat{H}_{\text{int}}^I \\
 &= e^{i\hat{H}_0^S t} (\hat{H}_0^S + \hat{H}_{\text{int}}^S) e^{-i\hat{H}_0^S t} \quad \downarrow \quad F_I = e^{i\hat{H}_0^S t} F_S e^{-i\hat{H}_0^S t} \\
 &= e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_0^S e^{-i\hat{H}_0^S t} + e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_{\text{int}}^S e^{-i\hat{H}_0^S t} \\
 &= \underbrace{\hat{H}_0^S + e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_{\text{int}}^S e^{-i\hat{H}_0^S t}}_{\hat{H}_I^S} \quad \checkmark \quad \hat{H}_0^S \text{は自己自身と} \\
 &\text{交換可。}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \hat{H}_I = \hat{H}_0^I + \hat{H}_{\text{int}}^I \quad \forall I \in \mathbb{C}.$$

$$\boxed{\hat{H}_0^I = \hat{H}_0^S, \quad \hat{H}_{\text{int}}^I = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_{\text{int}}^S e^{-i\hat{H}_0^S t}}$$

この表式を合わせて、 $\Psi_I(t)$ 、 F_I の 従う方程式は iR922 :

$$\boxed{i \frac{\partial \Psi_I(t)}{\partial t} = \hat{H}_{\text{int}}^I \Psi_I(t), \quad \frac{dF_I}{dt} = i [\hat{H}_0^I, F_I]}$$

- \Rightarrow ↓
- 状態の変化 $\Psi_I(t)$ は $\hat{H}_{\text{int}}^I = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{H}_{\text{int}}^S e^{-i\hat{H}_0^S t}$ の下で Schrödinger eq. は従う。
 - 演算子 F_I は $\underline{\hat{H}_0^I = \hat{H}_0^S}$ の下で Heisenberg eq. は従う。
 $(\Rightarrow \text{自由エネルギーの時間変化} = 0)$
 表示に作り出す同じ $t = \tau$ の \hat{H}_0 を $t = 0$ に)

〈 離出 ① 〉

$$; \frac{\partial \bar{\Psi}_I(\tau)}{\partial t} = H_{\text{int}}^I \bar{\Psi}_I(\tau)$$

$$\bar{\Psi}_I(\tau) = e^{iH_0^S \tau} \bar{\Psi}_S(\tau) \quad \tau + i^\circ \text{微分}.$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}_I(\tau)}{\partial t} = iH_0^S e^{iH_0^S \tau} \bar{\Psi}_S(\tau) + e^{iH_0^S \tau} \cdot \frac{\partial \bar{\Psi}_S(\tau)}{\partial t}$$

∴

$$i \frac{\partial \bar{\Psi}_I(\tau)}{\partial t} = -e^{iH_0^S \tau} H_0^S \bar{\Psi}_S(\tau) + e^{iH_0^S \tau} \cdot i \frac{\partial \bar{\Psi}_S(\tau)}{\partial t}$$

$$= e^{iH_0^S \tau} \left(-H_0^S \bar{\Psi}_S(\tau) + H^S \bar{\Psi}_S(\tau) \right)$$

$$= e^{iH_0^S \tau} (-\cancel{H_0^S} + \cancel{H^S} + H_{\text{int}}^S) \bar{\Psi}_S(\tau)$$

$$= e^{iH_0^S \tau} H_{\text{int}}^S \bar{\Psi}_S(\tau)$$

$$= \underbrace{e^{iH_0^S \tau} H_{\text{int}}^S}_{\text{}} e^{-iH_0^S \tau} \cdot \underbrace{e^{iH_0^S \tau} \bar{\Psi}_S(\tau)}_{\text{}}$$

$$= H_{\text{int}}^I(\tau) \bar{\Psi}_I(\tau)$$

$$\therefore ; \frac{\partial \bar{\Psi}_I(\tau)}{\partial t} = H_{\text{int}}^I \bar{\Psi}_I(\tau)$$

<導出②>

$$\frac{dF_I}{dt} = i [H_0^I, F_I]$$

$$F_I = e^{iH_0^S t} F_S e^{-iH_0^S t}$$

⇒ t τ 微分 3.

$$\begin{aligned}\frac{dF_I}{dt} &= i H_0^S e^{iH_0^S t} F_S e^{-iH_0^S t} + e^{iH_0^S t} F_S (-iH_0^S) e^{-iH_0^S t} \\&= i e^{iH_0^S t} (H_0^S F_S - F_S H_0^S) e^{-iH_0^S t} \\&= i \left(e^{iH_0^S t} H_0^S \underbrace{e^{-iH_0^S t} e^{+iH_0^S t}}_{=} F_S e^{-iH_0^S t} \right. \\&\quad \left. - e^{iH_0^S t} F_S \underbrace{e^{-iH_0^S t} e^{+iH_0^S t}}_{=} H_0^S e^{-iH_0^S t} \right) \\&= i (H_0^I F_I - F_I H_0^I) \\&= i [H_0^I, F_I]\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dF_I}{dt} = i [H_0^I, F_I]$$

↔

2. Schrödinger

$$④ i \frac{\partial \Psi_S(t)}{\partial t} = H_S \Psi_S(t)$$

$$\dot{F}_S = 0$$

Schrödinger rep.

$$⑤ i \frac{\partial \Psi_H(t)}{\partial t} = 0$$

$$\dot{F}_H = i [H_H, F_H]$$

Heisenberg rep.

$$\left(\because H_H = e^{iHt} H_S e^{-iHt} = H_S, \quad \Psi_S(t) = e^{-iHt} \Psi_H \right)$$

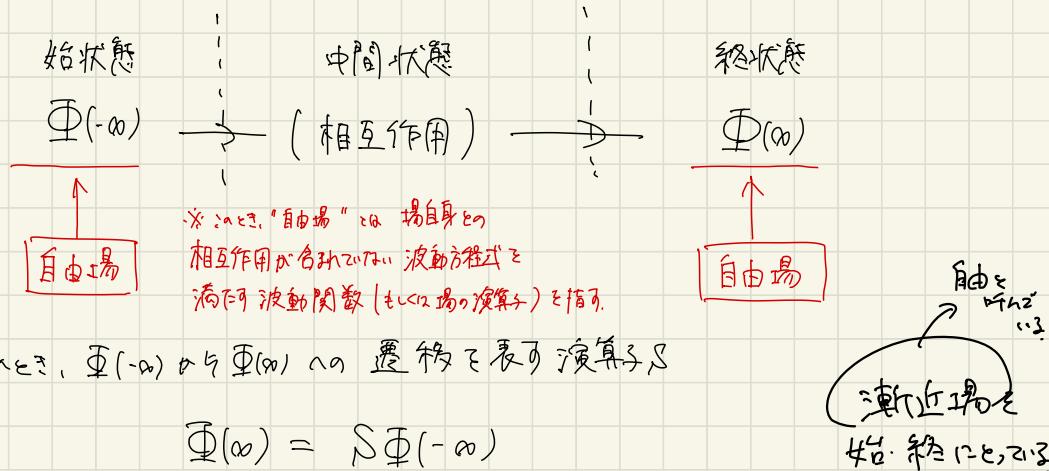
$$⑥ i \frac{\partial \Psi_I(t)}{\partial t} = H_{int}^I(t) \Psi_I$$

$$\dot{F}_I = i [H_0, F_I]$$

Interaction rep.

$$\left(\because F_I(t) = e^{iH_0 t} F_S e^{-iH_0 t}, \quad \Psi_I(t) = e^{iH_0 t} \Psi_S(t) \right)$$

3.2 Definition of the S-Matrix.



次に、時間発展演算子 $U(t, t_0)$ の極限として表せよ：

$$S = \lim_{\begin{array}{l} t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty \end{array}} U(t, t_0)$$

相互作用表示の状態ベクトル $\Phi(t)$ は次の方程式(= 行差)：

※ 相互作用表示を表す
添字 I は省略可。

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = V(t) \Phi(t) \quad (3.15)$$

さて、 $V(t)$ は

$$V(t) \equiv H_{int}^I(t) = e^{iH_0t} \left(\int d^3x H_{int}^S \right) e^{-iH_0t}$$

相互作用表示のハミルトンの
相互作用部分。

である。

この $V(t)$ を用いる $\mathcal{U}(t, t_0) \Phi(t_0)$ の形式解は 次のようになります：

$$\Phi(t) = \mathcal{U}(t, t_0) \Phi(t_0) = \exp\left(-i \int_{t_0}^t V(t') dt'\right) \Phi(t_0)$$

この形式解は一般的な $V(t)$ に対して

$$[V(t), V(t')] \neq 0$$

であると、非可換な演算子 A, B に対して。

$$e^{A+B} \neq e^A e^B$$

$\begin{cases} \text{時間} \rightarrow \text{依存する演算子} \rightarrow \text{一般に} \\ \text{異なる時刻} \rightarrow \text{異なる自己自身と} \\ \text{交換する} \times \text{は限らない。} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{交換しない演算子に対する指數法則} \\ \text{成り立たない。} \end{cases}$

であることを正しくつなぐ。

正しくは、時間順序積 T を用いて

$$\boxed{\mathcal{U}(t, t_0) = T \left[\exp\left(-i \int_{t_0}^t V(t') dt'\right) \right]}$$

の形となります。したがって、 T は次の操作を表す。

$$T(V(t_1) V(t_2) \dots V(t_n)) = \delta_p V(t_\alpha) V(t_p) \dots V(t_s) V(t_r)$$

であるとき、 $t_\alpha \geq t_p \geq \dots \geq t_s \geq t_r$ 、 δ_p は Bosons では $+1$ で $\delta_p = -1$

Fermions では $+1$ は 入れ替えるが 偶(奇) $\rightarrow +1 (-1)$ となる。

(時間 $t_1 > t_2 > \dots > t_r$ としますが並べ替えるとどう操作)

この表式は (3.15) を t で積分し、逐次的(=代入順)で計算が可能となる。(次回→)

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = (-i) V(t) \Phi(t)$$

$$\rightarrow \Phi(t) - \Phi(t_0) = (-i) \int_{t_0}^t dt' V(t') \Phi(t')$$

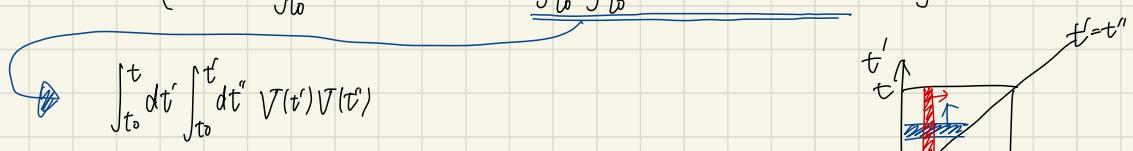
$$\underline{\Phi(t)} = \underline{\Phi(t_0)} + (-i) \int_{t_0}^t dt' V(t') \Phi(t')$$

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt' V(t') \left[\underline{\Phi(t_0)} + (-i) \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t'') \Phi(t'') \right]$$

⋮

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt' V(t') \Phi(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} dt' dt'' V(t') V(t'') \Phi(t_0) + \dots$$

$$= \left[1 + (-i) \int_{t_0}^t dt' V(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} dt' dt'' V(t') V(t'') + \dots \right] \Phi(t_0)$$



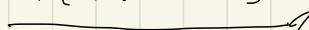
$$\int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'')$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'') + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t'}^t dt' V(t') V(t'')$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'') + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt'' \int_{t'}^t dt' V(t'') V(t') \quad (t' \rightarrow t'', t'' \rightarrow t')$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t''} dt'' \Theta(t'' - t') V(t') V(t'') + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t'}^t dt'' \Theta(t'' - t') V(t'') V(t')$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t''} dt'' \left[\Theta(t'' - t') V(t') V(t'') + \Theta(t' - t'') V(t'') V(t') \right]$$

$$= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t''} dt'' T [V(t') V(t'')]$$


- 一般のn回の積分も同様に議論できる。 $T [\exp(-i \int_{t_0}^t V(t') dt')]$ は最も簡単な場合

[再掲]

$$U(t, t_0) = T \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \int d^3x H_{\text{int}}(\vec{x}, t') \right) \right]$$

この表式より 演算子 S は

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} T \left[1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V(t') dt' + \dots + \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^t V(t') dt' \right)^n \dots \right]$$

と書くべきである。

この表式は 遷移振幅に対する 機動計算の出发点となる。

④ L_{int} が \hbar の倍数と合つたときに

$$V(t) = H_{\text{int}}(t) = -L_{\text{int}} = - \int d^3x L_{\text{int}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S &= T \left[\exp \left(-i \int d^3x H_{\text{int}} \right) \right] \\ &= T \left[\exp \left(i \int d^3x L_{\text{int}} \right) \right] \\ &= T \left[\exp(iA) \right], \quad A \equiv \int d^3x L_{\text{int}} \end{aligned}$$

と書ける。

〈具体例〉

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n = \lim_{T \rightarrow \infty} T \left[\left(1 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^T V(t) dt \right) + \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{2!} \int_{t_0}^T dt' \int_{t_0}^{t'} V(t') V(t'') dt'' + \dots \right]$$

$\vdash n = 2$ の場合

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{1}{i} \int_{t_0}^T V(t) dt'$$

$$S_2 = T \left[\left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{2!} \int_{t_0}^T dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'') \right]$$

$$= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^T dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \theta(t' - t'') V(t') V(t'') + \int_{t_0}^T dt' \int_{t'}^T dt'' \theta(t'' - t') V(t'') V(t') \right]$$

$$= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{2} \left[\int_{t_0}^T dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'') + \int_{t_0}^T dt' \int_{t'}^T dt'' V(t'') V(t') \right]$$

上式は計算される。 $(n=3 \text{ は } 3! = 6 \text{ 項の積が生じる。})$

※ 時間順序積の定義。

上式の S_2 の場合を考慮する。

$$S_2 = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{1}{2} T \left[\int_{t_0}^T dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t') V(t'') \right]$$

ここで、 dt', dt'' の積分は T 構成作用の前で実行される。 [...] に含む時間依存性は t ではなく時間順序を意味する $t=t_0, t=t_1, \dots$ である。 t', t'' の積分は $V(t') V(t'')$ が T 構成作用の後で、実行される。

④ S-行列の要素

状態 $|\Phi\rangle$ は 完全系 $\{|\alpha\rangle\}$ を用いて展開できる: $|\Phi(+\infty)\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | \Phi(+\infty)\rangle$

$$|\Phi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha | \Phi\rangle$$

$$\rightarrow \langle \beta | \Phi(+\infty) \rangle = \sum_{\alpha} \underbrace{\langle \beta | \alpha \rangle}_{\text{重複}} \underbrace{\alpha | \Phi(+\infty) \rangle}_{\text{delta}} \\ = \langle \beta | \Phi(+\infty) \rangle$$

したがって、状態 $\Phi(-\infty)$ から、完全系のうちの 1 つの状態 $|\beta\rangle$ への 遷移振幅は

$$A = \langle \beta | \Phi(+\infty) \rangle = \langle \beta | S | \Phi(-\infty) \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \beta | S | \alpha \rangle \langle \alpha | \Phi(-\infty) \rangle$$

$$\downarrow | \Phi(-\infty) \rangle \in |\alpha\rangle \text{ の展開}$$

$$= S_{\beta\alpha} \Phi_{\alpha}(-\infty) + S_{\beta\alpha_2} \Phi_{\alpha_2}(-\infty) + \dots$$

つまり、これで、演算子 S の 行列要素が

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \beta | S | \alpha \rangle$$

と決まる。 \Rightarrow **S-行列** もしくは **散乱行列** と呼ぶ。

④ 場の理論では、解いたる状況設定に適した漸近状態を見つけられ難い。

⑤ これが触れてない。

⑥ S 行列要素を求める。

1. S を 演算子とみなす (ex.) $S = \underbrace{S_0 + S_1 + S_2 + \dots}_{\text{演算子}}$

2. 初状態・終状態に対する漸近状態を定める (\rightarrow 完全系の展開)

3. 用いて完全系の基底について S の 行列要素を求める。

3.3. Interaction Picture Fourier Expansions

今更下で散乱行列 S の定義は相互作用表示を用いて以下。

$t \rightarrow \pm\infty$ における漸近状態を相互作用表示で扱う必要がない。

また、特に相互作用表示での漸近状態を完全系で展開するのが便利。

漸近状態については自由場を考慮してから相互作用表示へ自由場は

Heisenberg 表示へ平行してそのまま用いることが可能であるが便利。

相互作用表示での演算子は自由場の運動方程式へ従う：

$$\frac{dF^I}{dt} = i [H_0, F^I]$$

これは、自由場の状態は Heisenberg 表示と等価。

① Heisenberg picture

$$H^H = H_0 + H_{int}^H \quad (= \text{左})$$

$$\frac{dO_H}{dt} = i [H^H, O_H]$$

$$O_H = e^{iHt} O_S e^{-iHt}$$

$$\Downarrow H_{int}^H = 0 \quad (\text{自由場})$$

$$H^H = H_0, \quad O_H = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}$$

$$\frac{dO_H}{dt} = i [H_0, O_H]$$

② Interaction picture

$$H^I = H_0 + H_{int}^I \quad (= \text{右})$$

$$\frac{dF_I}{dt} = i [H_0, F_I]$$

$$F_I = e^{iH_0 t} I_S e^{-iH_0 t}$$

Heisenberg picture の議論のうち、自由場の場合 のキーポイントを記す。

○ スカラ - 場の演算子 $\phi(x)$

○ Spin- $\frac{1}{2}$ 場の演算子 $\psi(x)$

○ 光子場の演算子 $\hat{A}(x)$



○ 相互作用表示での Fourier 展開を考へる。



Heisenberg 表示(自由場)の Fourier 展開

$$|x\rangle \rightarrow |p\rangle$$

座標表示

運動量表示

これらの情報のまとめ

※いい。

つまり、運動量空間

での Fourier 展開

を考え。

④ spin-0 field

$$\begin{aligned} \circ \phi(x) &= \sum_{\vec{k}} \left[(2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} + (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \right] \\ &= \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} \left[\underline{a_{\vec{k}} e^{-ikx}} + \underline{a_{\vec{k}}^+ e^{-ikx}} \right] \end{aligned}$$

$$= \underline{\phi(x)} + \underline{\phi^\dagger(x)}$$

$$\circ \underline{\phi(x)} = \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}} e^{-ikx} \quad \dots \text{positive-frequency part}$$

$$\circ \underline{\phi^\dagger(x)} = \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}}^+ e^{ikx} \quad \dots \text{negative-frequency part}$$

$$\circ \Pi(x) = \sum_{\vec{k}} -i \left(\frac{\omega}{2\Omega} \right)^{1/2} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t} - a_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\omega t} \right)$$

$$k = (t, \vec{k}), \quad k = (\omega, \vec{k}), \quad \omega \equiv \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$$

$$a_{\vec{k}} \equiv a_{\vec{k}}(t_0), \quad a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}} e^{-i\omega t}, \quad m : \text{物理的質量}$$

④ spin- $\frac{1}{2}$ field

$$\begin{aligned}\psi(x) &= Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \left(a_{\vec{p}s} u_{\vec{p}s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\omega t} + b_{\vec{p}s}^+ v_{\vec{p}s} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} + i\omega t} \right) \\ &= Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \left(a_{\vec{p}s} u_{\vec{p}s} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + b_{\vec{p}s}^+ v_{\vec{p}s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right) \\ &= \underline{U(x)} + \underline{V(x)}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \quad \underline{U(x)} = Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} a_{\vec{p}s} u_{\vec{p}s} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ \circ \quad \underline{V(x)} = Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} b_{\vec{p}s}^+ v_{\vec{p}s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdots \text{positive-frequency part} \\ \cdots \text{正エネルギー-粒子・消滅演算子} \\ \cdots \text{negative-frequency part} \\ \cdots \text{正エネルギー-反粒子・生成演算子} \end{array}$$

$$\psi^\dagger(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_0 = \bar{U}(x) + \bar{V}(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \circ \quad \bar{U}(x) = Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} a_{\vec{p}s}^+ u_{\vec{p}s}^+ \gamma_0 e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\ \circ \quad \bar{V}(x) = Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} b_{\vec{p}s} v_{\vec{p}s}^+ \gamma_0 e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \end{array} \right. \begin{array}{l} \cdots \text{正エネルギー-粒子・生成演算子} \\ \cdots \text{正エネルギー-反粒子・消滅演算子} \end{array}$$

* 自由場 ψ の定義. $a_{\vec{p}s}(t) = a_{\vec{p}s} e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} - i\omega t}$, $a_{\vec{p}s} \equiv a_{\vec{p}s}(t=t_0)$ で用いられる.

$$b_{\vec{p}s}^+(t) = b_{\vec{p}s}^+ e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i\omega t}, \quad b_{\vec{p}s}^+ \equiv b_{\vec{p}s}^+(t=t_0)$$

$$g \text{ fm}^{-2}, \quad \omega = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0, \quad m: \text{physical mass}$$

$$\circ \quad \psi^+(x) = U^+(x) + V^+(x)$$

$$= Q^{-1/2} \sum_{\vec{p}s} \sqrt{\frac{m}{\omega}} \left(a_{\vec{p}s}^+ u_{\vec{p}s}^+ e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + b_{\vec{p}s} v_{\vec{p}s}^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\Rightarrow \text{-般化運動量} \quad (\Pi(x) = i\psi^+(x))$$

④ photon field

$$\circ \vec{A}^i(x) = \vec{A}^-(x) + \vec{A}^+(x)$$

$$= \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} (a_{\vec{k}\lambda} \hat{e}_{\vec{k}\lambda} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}\lambda}^+ \hat{e}_{\vec{k}\lambda}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}})$$

$$\circ \vec{A}^i(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} \sum_{\vec{k}} (2\omega\Omega)^{-1/2} a_{\vec{k}\lambda} \hat{e}_{\vec{k}\lambda} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$$

$$a_{\vec{k}\lambda}(t) = a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega t}, \quad a_{\vec{k}\lambda} \equiv a_{\vec{k}\lambda}(t=t_0) \quad r\omega \equiv |\vec{k}|$$

- positive-frequency term \Rightarrow 消滅演算子

- negative-frequency term \Rightarrow 生成演算子

\Rightarrow 正規順序について代わりに ϵ の定義で示唆する

演算子で positive · negative は分離されない、正規順序演算子.

各項について、 $(\underline{\text{negative}}) \cdot (\underline{\text{positive}})$ という並びで与えられるべき.

* Fermionの場合 入れ替えて回数が奇数の (-1) の因子が必要となる.

このとき、Wick's theorem が成立する.

次回は 6/25

July 2nd, 2021

3.5 Example : Self-Coupled Scalar field

スピ=0 の実スカラ-場を例にします。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}},$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} : (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2) : \quad (3.65a)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}} = : \left(-\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}g_0\phi^3 + \frac{1}{4!}f_0\phi^4 \right) : \quad (3.65b)$$

- f_0, g_0 は くり込まれていてない結合定数

- physical mass: $m \propto \sqrt{\epsilon - m_0}$ の関係

$$\delta m^2 = m^2 - m_0^2 \quad (3.66)$$

- 弱結合を仮定: $\mathcal{O}(\delta m^2) \simeq \mathcal{O}(f_0^2) \simeq \mathcal{O}(g_0^2)$

※ π 中間子の議論の出発点として有用。

Hamiltonian density に対しては 正規順序積を 言っていきます。

真空状態からの発散するエネルギーの寄与は除いてある。

真空を基準としたエネルギーは 次のように定義します。

$$H_0 = \sum_k \omega a_k^\dagger a_k, \quad \omega \equiv \omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (3.67)$$

② 全体の流れ

$$\mathcal{H}_{int} = : -\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4 :$$

③ ④ ①, ②



① ϕ^4 : vertices

$\left\{ \begin{array}{l} 1st\text{-order} \\ 2nd\text{-order} \end{array} \right.$

② ϕ^4 : matrix elements

$\left\{ \begin{array}{l} 1st\text{-order} \\ 2nd\text{-order} \end{array} \right.$

→ Exercise 3.3



③ $\delta m^2 \phi^2$: vertices

3rd order

($\delta m^2 \phi^2$: matrix elements)



④ ($g_0 \phi^3$: vertices)

$g_0 \phi^3$: matrix elements

2nd-order (g_0^2)

→ Exercise 3.4
(a), (b)

+ 3.6 Differential Cross Sections

→ Exercise 3.4

(c)

3.5.1 : $\phi^f(x)$: Vertices

ϕ^f 場のみの相互作用を考へる。 ($\Leftrightarrow \delta m^\perp = g_0 = 0$)

また、以降は 相互作用表示を採用するもへとし、相互作用表示の定義 (3.16)

$$H_{\text{int}}^I(t) = e^{iH_0 t} \left(\int H_{\text{int}}^S d^3x \right) e^{-iH_0 t} \quad (3.16)$$

は Schrödinger 表示の H_{int}^I に含まれる場の演算子 $\phi(0, \vec{x})$ を自由な Heisenberg 極の演算子 $\phi(x)$ で置き換えることを意味する。

* ここで $\phi(x)$ は

$$H_0 = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\partial\phi)^2 + m^2\phi^2)$$

の下での運動方程式を満たすという意味で “free” と呼ぶ。

この理解の下で、 $\delta m^\perp = g_0 = 0$ の下で 相互作用 Hamiltonian は次式

数係数を省略

$$V(t) = \int d^3x H_{\text{int}}^I \stackrel{\downarrow}{\sim} \int : \phi^f(x) : d^3x$$

S_i を求めれば、 $: \phi^f(x) :$ の T -積 $\Rightarrow T(: \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) :)$ の必要。

Wick's theorem

$$T(: \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) :) \stackrel{\downarrow}{=} : \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) : + (\text{可能な縮約の全ての組み合わせ})$$

$$= : \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) : + 0 \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{同一時空点, } x \\ \downarrow \end{array} \quad : \phi(x)\phi(x) :$$

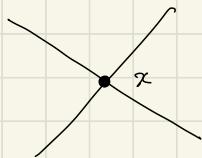
$$= : \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) :$$

$$\stackrel{\text{---}}{=} T(: \phi(x)\phi(x) : - : \phi(x)\phi(x) :$$

$$= \underline{0}$$

このように計算される。これが ϕ^f の 1st-order の寄与である。

これは、時空点 x における 4 頂点に対応。(↓)



- 2nd-order : S_2

2nd-order の寄手は $T(\phi^4(x) \phi^4(y))$ を計算するところだ。

Wick's theorem を用いて、 T -積を縮約で表すことを考える。

簡単のため、 $\phi(x) \rightarrow \phi_x$, $\phi(y) \rightarrow \phi_y$ のように書くことにし、 $T(\phi_x^4 \phi_y^4)$ を書き下す。

$$T(\phi_x^4 \phi_y^4) = : \phi_x^4 \phi_y^4 :$$

$$+ : \overbrace{\phi_x \phi_x \phi_x \phi_x} \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y :$$

$$+ (\text{other contractions})$$

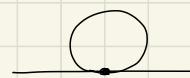
ここで、 S_2 の寄手を考えたときと同様に、同一時空点において現れる正規積に対して縮約をとると 0 になることがあり、異なる時空点での縮約の寄手のみが残る。

* このとき、同一時空点での縮約はループグラフに対するもの: →

正規順序積がとれても相互作用にあつてはこのような寄手は

省略される。物理的には真空の構造へと寄手を diagram とする。

T -積の計算に戻り、異なる時空点での縮約、寄手を考えると次のようになつた。

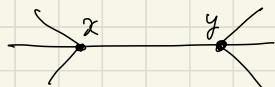


tadpole diagram
おたまじくし 図

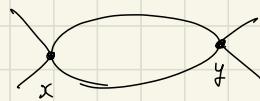
$$T(\phi_x^4 \phi_y^4) = : \phi_x^4 \phi_y^4 :$$



$$+ 16 \overline{\phi_x \phi_y} : \phi_x^3 \phi_y^3 :$$



$$+ 72 (\overline{\phi_x \phi_y})^2 : \phi_x^2 \phi_y^2 :$$



$$+ 96 (\overline{\phi_x \phi_y})^3 : \phi_x \phi_y :$$



$$+ 24 (\overline{\phi_x \phi_y})^4$$



右側には対応する diagram を書いて。

各項へ係數については次ページで説明。 (いくつかの重複及び一般的性質を示す)

○ 頂点の数：相互作用の次数 (S_n, n)

○ 内線の数：縮約の数 $(\overline{(\phi_x \phi_y)^+} : \phi_x^2 \phi_y^2 :)$

○ 外線の数：縮約されていない演算子の数 $(\overline{(\phi_x \phi_y)^-} : \underline{\phi_x^2 \phi_y^2} :)$

○ \hat{H}_{int}^I が正規順序のとき、同一時刻の演算子の縮約は寄与しない。 $(: \overline{\phi_x \phi_x} : = 0)$

各項に現れる係數について。これは、同じ寄与を与える異なる縮約の場合の数。

次ページで見ていく。

- $\phi_x \phi_y$

$$\therefore \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x :: \phi_y \phi_y \phi_y \phi_y ::$$

このように、各 ϕ_x に対して ϕ_x の「縮約が」互通)。 ϕ_x 自体は「互換が」互通)。

$\therefore 4 \times 4 = 16$ 直線の $\phi_x \phi_y$ が可能。これは同じ寄与を表す点

16 $\phi_1 \phi_2 : \phi_1^3 \phi_2^3 :$ と読みます。

- $$\bullet \quad (\overline{\phi_x \phi_g})^2$$

$$:\phi_x\phi_x\phi_x\phi_x::\phi_y\phi_y\phi_y\phi_y:$$

$$\text{縮約可} \rightarrow \phi_2 \in 4\text{通中由}5\text{通} \rightarrow 4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{通})$$

1目の ϕ_1 に対して ϕ_2 をえらび(4通り), もう1つの ϕ_1 に対して ϕ_2 をえらび(3通り) $\rightarrow 4 \times 3 = 12$ (通り)

$$\therefore 6 \times 12 = 72 \text{ 直し} \Rightarrow 72 (\phi_x \phi_y)^2 : \phi_x^2 \phi_y^2 :$$

- $$\bullet \quad (\overbrace{\phi_x \phi_y}^3)^3$$

420 の 45 32 の 約分の 42 と 32 の → 4(3 = 4 直)

各 d_x に対して 累積約数 ϕ_2 をえらぶ $\longrightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り

$$\therefore 4 \times 24 = 96 \text{ 通过} \Rightarrow 96 (\phi_1 \phi_2)^3 : \phi_1 \phi_2 :$$

- $$\bullet \quad (\overbrace{\phi_x \phi_y}^4)^4$$

备中₁ = 对₂ 约束的₂ 中₂ 之₁ 为₁ → 4! = 24 通₁)

$$24 \left(\overbrace{\phi_1 \phi_2}^{\text{---}} \right)^4$$

3.5.2 Matrix Elements for a : ϕ^4 : Interaction

相互作用を表す項の下積が分かる。S-行列要素を計算する。

- $1+2 \rightarrow 3+4$ といふ 2体散乱
- 相互作用は ϕ^4 の項を含む, ϕ の 1st-order, 2nd-order を含む。

② 1st-order

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{-i \int_0}{4!} \int d^4x \langle 34 | : \phi_x^4 : | 12 \rangle$$

運動量 k_i の 構子の生成演算子 a_i^\dagger と a_i^\dagger と書く。 $|34\rangle, |12\rangle$ は R の方程式:

$$|12\rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle, \quad \langle 34 | = \langle 0 | a_3 a_4$$

($\Gamma = \Gamma'$)

$$\langle 34 | : \phi_x^4 : | 12 \rangle = \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_x^4 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

$\phi_x = \phi(x)$ は a, a^\dagger を用いて展開可能である。したがって、 ϕ_x^4 は a, a^\dagger の積で与えられる(= 323式), non-zero の寄与を持つのは $a_3^\dagger a_4^\dagger a_1 a_2$ に比例する項だけ。したがって、 $: \phi_x^4 :$ の項からこの組合せを導くと項数 $4! = 24$ 通り得られる。

これらを用いると S-行列要素は

⇒ Exercise 3.3

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{-i \int_0}{4\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} \frac{1}{Q^2} \int d^4x e^{i(-k_1 - k_2 + k_3 + k_4) \cdot x}$$

となる。ここで、 ω_i, k_i は 漸近粒子の 振動数と 4元運動量。

χ 積合を実行すれば、

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(-k_1 - k_2 + k_3 + k_4)$$

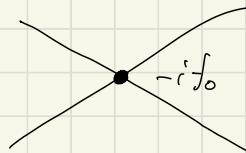
を得る。

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{(2\pi)^4}{Q^2} \delta^{(4)}(-k_1 - k_2 + k_3 + k_4) \frac{1}{4} (w_1 w_2 w_3 w_4)^{-1/4} M$$

LP

と表す。ただし、 M (は振幅であり)

$$M = -if_0$$



である。これに付随する Feynman diagram は 運動量空間で示されたが、運動量空間の diagram (は、座標空間の diagram と幾何学的に同じだが、その意味は違う)。

運動量空間の Feynman diagram は 行列要素を完全に表している。（それは χ で積合される。）

④ 基本的な Feynman rules (f_0 は 1st-order, $\frac{1}{4!} f_0 \phi^4$: 1:2:3 2体結合)

- 1本の外線に対して、因子 1 は 1つず。
- 1つの 4点頂点に対して、因子 $-if_0$ を持つ。

次回→で Exercise 3.3 を確認。

Exercise 3.3

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{-i f_0}{4!} \int d^4 x \langle 34 | : \phi_x^4 : | 12 \rangle \quad (3.69)$$

Wick's theorem と ϕ の展開表式 (3.28) を用いて評価可.

結果 (3.71) の導かれることを示す.

テラクト部分を取り出して考える.

$$\langle 34 | T(:\phi_x^4:) | 12 \rangle$$

Wick's theorem

$$\stackrel{\downarrow}{=} \langle 34 | : \phi_x^4 : | 12 \rangle \quad (\because \text{同時刻の場の演算子は零}, \phi_x^\dagger \phi_x = 0 \text{ です。})$$

(つまり、縮約をとれば、項が消えます。)

$$= \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_x^\dagger \phi_x \phi_x \phi_x : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

\vdots

$$\phi_x = \phi(x) = \alpha(x) + \alpha^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_k \left(a_k e^{-ik \cdot x} + a_k^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

で、もし、このように ϕ_x の形で書く

$$a_3^\dagger a_4^\dagger a_1 a_2$$

比例可能な項の項だけ

$$\text{ex.) } \phi_x^4 \propto a_3 a_4^\dagger a_1 a_2 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_3 a_4 a_3 a_4^\dagger a_1 a_2 a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_3 a_3 a_4 a_4^\dagger a_1 a_1^\dagger a_2 a_2^\dagger | 0 \rangle \quad \begin{matrix} \downarrow & a_2^\dagger | 0 \rangle \\ & = | k_2 \rangle \end{matrix} \\ &= \langle 0 | a_3 a_3 a_4 a_4^\dagger a_1 a_1^\dagger | k_2 \rangle \quad \begin{matrix} \downarrow & a_2 | k_2 \rangle = | 0 \rangle \end{matrix} \\ &= \langle 0 | a_3 a_3 a_4 a_4^\dagger a_1 a_1^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$= \dots \quad (a_1, a_2 \text{ が同様})$$

$$= \langle 0 | a_3 a_3 | 0 \rangle$$

$$= 0,$$

となる。 $\phi_x = \phi(x)$ を展開する : ϕ_x^4 : は 4 次式である。

$$\begin{aligned} :\phi_x^4: &= \left[\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} (a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{+ikx}) \right] \times \left[\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} (a_\ell e^{-i\ell x} + a_\ell^+ e^{+i\ell x}) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} (a_m e^{-imx} + a_m^+ e^{+imx}) \right] \times \left[\frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}} (a_n e^{-inx} + a_n^+ e^{+inx}) \right]; \end{aligned}$$

と展開される。この式は \sum の 4 つ $a_3^+ a_4^+ a_1 a_2$ と $a_3 a_4 a_1^+ a_2^+$ の積を表す組合せである。

$4! = 24$ 通り。各 a, a^+ は量子数が異なった時交換不能で全て同じ寄与を持つ。

ただし、

$$:\phi_x^4: = 4! \left(\frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \right)^4 (w_1 w_2 w_3 w_4)^{-1/2} \underbrace{a_3^+ a_4^+ a_1 a_2}_{\text{正規化係数に並べ替えて} \atop \text{正規化係数に並べ替えて} \atop \text{正規化係数に並べ替えて} \atop \text{正規化係数に並べ替えて}} + (\dots)$$

となる赤線部は non-zero の寄与を持つ。(ただし、

$$\langle 34 | :\phi_x^4: | 12 \rangle = 4! \cdot \frac{1}{4\Omega^4} \frac{1}{\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}} e^{i(k_3+k_4-k_1-k_2) \cdot x}$$

(; $\langle 0 | a_3 a_4 a_3^+ a_4^+ a_1 a_2 a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle = 1$)

となる。S-行列要素は

$$\begin{aligned} \langle 34 | S | 12 \rangle &= \frac{-if_0}{4!} \int d^4x \langle 34 | :\phi_x^4: | 12 \rangle \\ &= -if_0 \cdot \frac{1}{4!} \cdot 4! \cdot \frac{1}{4\Omega^4} \frac{1}{\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}} \int d^4x e^{i(k_3+k_4-k_1-k_2) \cdot x} \\ &= \frac{-if_0}{4\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}} \frac{1}{\Omega^4} \int d^4x e^{i(k_3+k_4-k_1-k_2) \cdot x} \quad \dots \quad (3.70) \\ &= \frac{-if_0}{4\sqrt{w_1 w_2 w_3 w_4}} \frac{1}{\Omega^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \\ &\equiv \frac{(2\pi)^4}{Q^4} \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \cdot \frac{1}{4} (w_1 w_2 w_3 w_4)^{-1/2} M \quad \dots \quad (3.71) \end{aligned}$$

ここで、 $M = -if_0$ となることを示す。

$$\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

ここで 完全に 細約が なされた 部分の 2 個の non-zero の 寄与 を見てみる。

$$\langle 0 | a_3 a_4 : \overbrace{\phi_x \phi_x}^{} \overbrace{\phi_x \phi_x}^{} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

では どうぞ。

$$\begin{aligned} a_3 \phi_x &= \langle 0 | a_3 \phi_x | 0 \rangle = \langle 0 | a_3 \frac{1}{k \sqrt{2\omega R}} (a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{+ikx}) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega R}} e^{+ik_3 x} \end{aligned}$$

C-数

では どうぞ。

細約を 取った 4 (直角), どれも 同じ 寄与

$$\frac{1}{4Q^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} e^{i(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \cdot x}$$

で どうぞ。

$$\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_x^\dagger a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle = 4! \cdot \frac{1}{4Q^2 \sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4}} e^{i(k_3 + k_4 - k_1 - k_2) \cdot x}$$

が 得られる。

② 2nd-order ($1+2 \rightarrow 3+4$, : ϕ_x^4 : interaction)

S 行列要素 (2 次式)

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = - \frac{f_0^2}{2! 4! 4!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \langle 34 | T(\phi_1^4 \phi_2^4) | 12 \rangle$$

S 行列の定義で指數関数
 が現れるとの展開係数

$\phi(x_1) \rightarrow \phi_1$
 $\phi(x_2) \rightarrow \phi_2$ ← 書く

→ 時間的部分を取り出すと. $\langle 34 | = \langle 0 | a_3 a_4, | 12 \rangle = a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$ となる

$$\langle 34 | T(\phi_1^4 \phi_2^4) | 12 \rangle$$

$$= \langle 0 | a_3 a_4 T(\phi_1^4 \phi_2^4) a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T(a_3 a_4 \phi_1^4 \phi_2^4 a_1^\dagger a_2^\dagger) | 0 \rangle$$

a, a^\dagger は時間依存 (3.28)
 (3.29)

Wick's theorem により (\dots) を可能な限り縮約して、non-zero の寄与を持つ部分を考慮する。

場の演算子には正規化負荷が付けてあるので、同一時空点の縮約は 0:

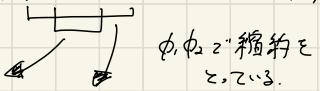
$$[\phi_1, \phi_2] = 0, [\phi_2, \phi_1] = 0$$

したがって時空点同士の ϕ の縮約は (3.55), (3.56) 通り

$$[\phi_1, \phi_2] = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4 k$$

$$\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle$$

\downarrow $\left(\begin{array}{c} \text{左} \\ \text{右} \end{array} \right) \rightarrow \langle 34 | S | 12 \rangle$ は対称性をもつ。



$$\frac{-f_0^2}{2!4!4!} \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{i d_{x_1}^{q_0}}{(2\pi)^4} \frac{i d_{x_2}^{q_0}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq_0 \cdot (x_1 - x_2)}}{q_0^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{e^{-iq_0 \cdot (x_1 - x_2)}}{q_0^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\times \underbrace{\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle}_{\text{Red}}$$

\approx 真空期待値の部分に Wick's theorem を用い、独立化を簡約する。
Rの3通り：

$$b_3 x_1 + k_3 x_1 - k_2 x_2 - k_1 x_2$$

$$(1) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle \quad \left[a_3, a_4 = x_1, x_1 \right]$$

$$(2) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle \quad \left[a_3, a_4 = x_1, x_2 \right]$$

$$(3) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle \quad \left[a_3, a_4 = x_2, x_1 \right]$$

Example.

$$= \frac{1}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} e^{ik_3 \cdot x_1} e^{ik_4 \cdot x_2} e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2}$$

$$= \frac{1}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} e^{i(k_3 - k_1) \cdot x_1} e^{i(k_4 - k_2) \cdot x_2}$$

\therefore

$$\phi_x a_k^+ = \langle 0 | \phi(x) a_k^+ | 0 \rangle = (2\omega_k \Omega)^{-1/2} e^{-ik \cdot x}$$

$$a_k \phi_x = \langle 0 | a_k \phi(x) | 0 \rangle = (2\omega_k \Omega)^{-1/2} e^{+ik \cdot x}$$

乞用。

$\phi_1 \phi_2$ の 積分と 合成関数

$$\rightarrow \frac{\int_0^2}{2!4!4!} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \frac{1}{(2\pi)^8} \frac{1}{4Q^2} \left(w_1 w_2 w_3 w_4 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

$$\times \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{-i q_1 \cdot (x_1 - x_2)} e^{-i q_2 \cdot (x_1 - x_2)} e^{i (k_3 - k_1) \cdot x_1} e^{i (k_4 - k_2) \cdot x_2}$$

$$= \frac{\int_0^2}{2!4!4!} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \frac{1}{(2\pi)^8} \frac{1}{4Q^2} \left(w_1 w_2 w_3 w_4 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

$$\times \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{i (k_3 - k_1 - q_1 - q_2) \cdot x_1} e^{i (k_4 - k_2 + q_1 + q_2) \cdot x_2}$$

ここで、 x_1, x_2 の 積分は δ -関数で与えられる：

$$\rightarrow (2\pi)^8 \underbrace{\delta^{(4)}(k_3 - k_1 - q_1 - q_2)}_{\delta^{(4)}(k_3 - k_1 - k_2 + k_4) \text{ 全体の運動量保存}} \underbrace{\delta^{(4)}(k_4 - k_2 + q_1 + q_2)}_{\underbrace{q_2 = k_2 - k_4 - q_1}_{\alpha = 2 \neq 0}}$$

ここで、 δ -関数を α の形で書き換えて、 q_2 の 積分を 実行：

$$\rightarrow (\text{factors}) \times \int d^4 q_1 \frac{1}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k_2 - k_4 - q_1)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

積分変数 $q_1 \in \mathbb{R}^4$ に 依る： $q_1 \rightarrow k$, $k_2 - k_4 = k_3 - k_1 \equiv q$ $\in \mathbb{R}^4$.

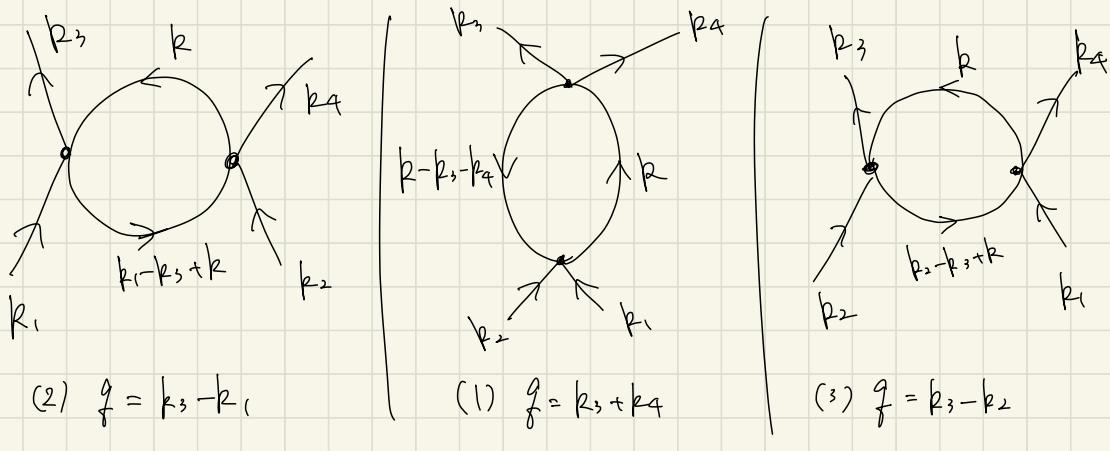
(3.79)

$$\begin{aligned} f_1'(q) &= \frac{f_0^2}{2!4!4!4Q^2} (\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4)^{-1/2} f^{(4)}(k_4+k_3-k_1-k_2) \\ &\times \int d^4 k \left(\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \end{aligned}$$

を得る。この組合せを考慮して上式の寄与を求めておこう。 $[q = k_3 - k_1]$

先ほど示した2つの独立な縮約は上式に2つある $k = k_3 - k_2, k_3 + k_4$
 とある。

⇒ 運動量空間の頂点で異なる運動量保存の仕方を表している。



$$t - q_p = \text{エネルギー}$$

$$S - q_p = \text{エネルギー}$$

$$U - q_p = \text{エネルギー}$$

- 同じ頂点では $e^{(k_3-k_1)\cdot x_1}, e^{(k_4-k_2)\cdot x_2}$ と表す。

- 図の下の始状態の運動量、上の終状態の運動量
- 内線の運動量は δ -関数を満たす運動量に対する等価。

可変への縮約は二通りと同じ寄与をもつ。

二通りの寄与をもつ組み合わせがいくつあるかという問題はアリ。

今の場合は $(4!)^2$ 通りの寄与が生じる。最終的には δ 行列要素は

$$\langle 34 | S(12) \rangle = \frac{f_0^2}{2!4!4!} \frac{1}{4Q^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-\frac{1}{2}} \delta^4(k_1 + k_3 - k_4 - k_2)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(4!4! \int d^4 k \left[\underbrace{q = k_3 - k_1}_{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right] + 4!4! \int d^4 k \left[\underbrace{q = k_3 - k_2}_{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \right. \\ & \quad \left. + 4!4! \int d^4 k \left[q = k_3 + k_4 \right] \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{Q^2} \delta^{(4)}(k_1 + k_3 - k_4 - k_2) \frac{1}{4} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-\frac{1}{2}} M$$

$$M = \frac{f_0^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ \left[q = k_3 - k_1 \right] + \left[q = k_3 - k_2 \right] + \left[q = k_3 + k_4 \right] \right\}$$

≈ 773. 2421.

② 相応する Feynman rules

- 運動量 q , base 粒子 内線図の因子 $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$ をもつ
- 4 元 運動量, 保存律は決まります。base 粒子のルートは決ります。
因子 $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ をもつ。

❶ loop 積分の発散と ζ の ζ

(3.81) に含まれる k の 積分は 発散可 \Rightarrow ultraviolet divergence

$k \rightarrow \infty$ で ζ 振る舞いは

$$M \rightarrow \int_0^1 \frac{\sqrt{k}}{k^a} \simeq \log 1$$

この ζ の発散を含む 積分は QFT でよく現れる。

Ch. 6 で “詳しいことは 説かねが、4 次元 2 次の 自己相互作用を 含む λ スカラーフィールドの理論” は、
有限個の 觀測量 を用いて 発散を 取り除くことがでよ。

\Rightarrow くり込み可能

② 全体の流れ

$$J\phi_{rat} = : -\frac{1}{2} f m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4 :$$

③ ④ ①, ②

① ϕ^4 : vortices

✓
 { 1st-order
2nd-order

② ϕ^4 : matrix elements

{ 1st-order
2nd-order

→ Exercise 3.3

③ $f m^2 \phi^2$: vortices

3rd order

($f m^2 \phi^2$: matrix elements)

④ ($g_0 \phi^3$: vortices)

$g_0 \phi^3$: matrix elements

2nd-order (g_0^2)

→ Exercise 3.4
(a), (b)

+ 3.6 Differential Cross Sections

→ Exercise 3.4
(c)

3.5.3 Mass Counterterm

相互作用：

$$V = \int d^3x : -\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2(x) + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4(x) :$$

特に 3 次の寄与を見ると、 f_0^2 の項は mass term を加えた形で

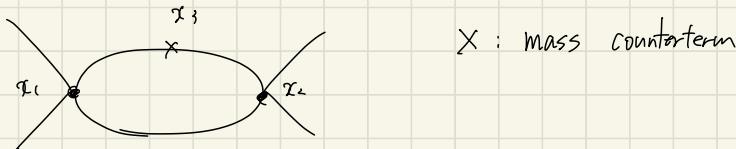
$$T(:\phi^4(x)::\phi^4(x_2)::\phi^2(x_3)::) (= T(\phi_1^4:\phi_2^4:\phi_3^2))$$

が得られる。 $1+2 \rightarrow 3+4$ の過程を考慮すると、2 項点より 4 の外線が

non-zero の寄与 (= 2 次の mass) 次の形で縮約が考えられる：

$$T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 :: \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 :: \phi_3 \phi_3 ::)$$

このように寄与は diagram によって書き表される



④ Feynman rules

- 1) 0 次の boson の mass counterterm は 2 次の因子 δm^2 を加える。

3.5.4 : $\phi^3(x)$: interaction

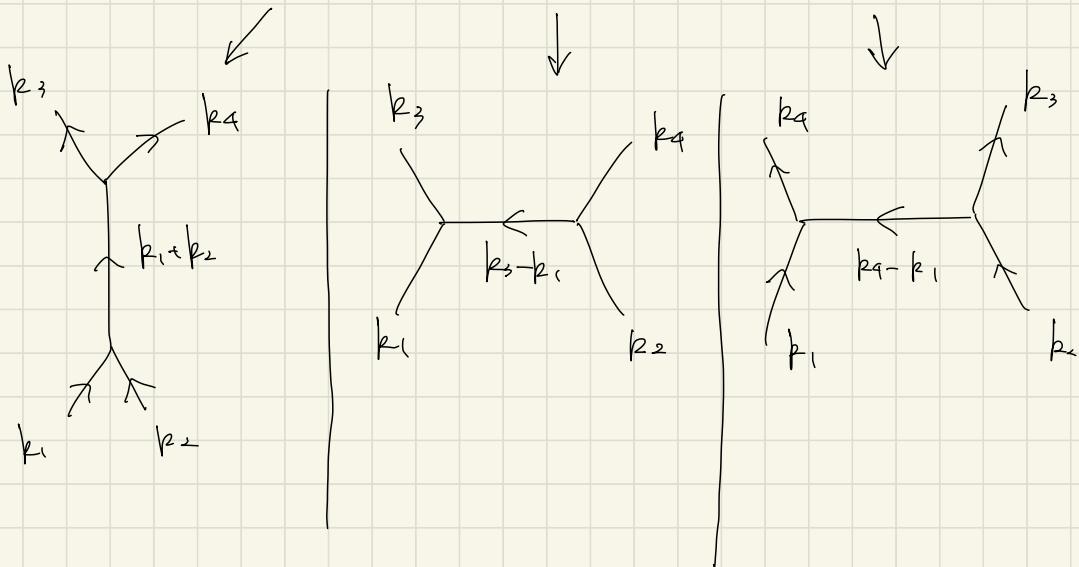
$\frac{1}{3!} g_0 : \phi^3(x) : \rightarrow 2\text{R}_0 \text{才} \Rightarrow \text{寄存}。 g_0^2 \in \text{常数} \text{且} f_0 = 0, f_1 = 0 \approx 0.$

§ 行列要素は

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{-g_0^2}{2! 3! 3!} \int d^4x_1 d^4x_2 \langle 34 | T(: \phi^3(x_1) : \phi^3(x_2)) | 12 \rangle$$

先に結果を示す。(Exercise 3.4)

$$M = -i g_0^2 \left[\frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(k_3-k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(k_4-k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]$$



◎ 3点頂点 Feynman rules

◦ 3点頂点の頂点因子 $-ig_0 \in 10 \text{ 加入}.$

3.5.5 Feynman Rules for Scalar fields

ここまでの結果から得た Feynman rules

① self-coupled, real spin-0

$$H_0 = \frac{1}{2} : (\partial^\mu \phi^2 + m^2 \phi^2) :, H_{\text{int}} = : \left(-\frac{1}{2} g_m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4 \right) :$$

1. Boson の外線 (\rightarrow) : 対称因子 + 1

2. Boson 3 点頂点 (\perp) : 対称因子 $-if_0$

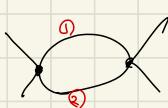
3. Boson 4 点頂点 (\times) : 対称因子 $-if_0$

4. Boson 内線 ($\overbrace{\rightarrow}$) : 対称因子 $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$ (4 元運動量: $\frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$)

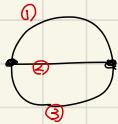
5. Mass counterterm vertex (\times) : 対称因子 ifm^2

6. Boson loop (\circlearrowleft) : 対称因子 $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$

7. 因子 $\frac{1}{2!}$, しかし、頂点を決めておいて、等しい内線ループ数



$L=2$



$L=3$.

以上 2 つの diagram が 伝播関数 M と 1 对 1 関係 を与える 規則。

Exercise 3.4

(1) (3.82) の ϕ^3 (2nd-order) の結果を慎重に Feynman rule を用いて場合と比較。

ϕ^3 の 2nd-order を計算する。

$$\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{-g^2}{2!3!3!} \int d^4x_1 d^4x_2 \underbrace{\langle 34 | T(:\phi^3(x_1)\phi^3(x_2):) | 12 \rangle}_{\text{Feynman rule}}$$



$$\langle 34 | T(:\phi_1\phi_2\phi_3:\phi_4\phi_5\phi_6:) | 12 \rangle$$

$$= \overline{\phi_1\phi_2} \langle 34 | T(:\phi_1\phi_3:\phi_4\phi_5:) | 12 \rangle$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} d^4k \langle 34 | T(:\phi_1\phi_3:\phi_4\phi_5:) | 12 \rangle$$

$$\hookrightarrow \text{縮約} \rightarrow 3 \times 3 = 9 \text{ 項} \quad \text{ただし, } \frac{3}{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \times \frac{3}{\phi_5\phi_6\phi_7\phi_8} = 9 \text{ 項)$$

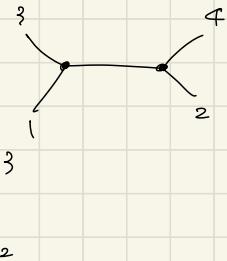
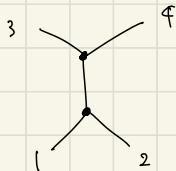
$$\langle 34 | S | 12 \rangle$$

$$= \frac{-g^2}{2!3!3!} \times 9 \int d^4x_1 d^4x_2 \int i \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \times \langle 34 | T(:\phi_1\phi_3:\phi_4\phi_5:) | 12 \rangle$$

$$= \frac{-9i g^2}{2!3!3!} \int d^4x_1 d^4x_2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \underbrace{\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1\phi_3 :\phi_4\phi_5 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle}_{\text{Feynman rule}}$$

各項の縮約を考えると、前述の 4 点の 2nd-order (= 3! + 3 緩約) に等しい。つまり、

$$\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$



$$\rightarrow \begin{cases} (1) (3, 4), (1, 2) \text{ が 同じ頂点} \\ (2) (3, 1), (4, 2) \text{ が 同じ頂点} \\ (3) (3, 2), (4, 1) \text{ が 同じ頂点} \end{cases}$$

⑨ 独立な 3 つを 7 つが生じる。

これらが何通り入るか数えると、

$$(1) (3, 4) \text{ が } \phi_1 a, \phi_1 b \rightarrow 2 \text{ 通り} \\ (1, 2) \text{ が } \phi_2 a, \phi_2 b \rightarrow 2 \text{ 通り} \\ 1 \leftrightarrow 2 \text{ の version } \rightarrow 4 \text{ 通り} \quad \left. \right\} = 8 \text{ 通り}$$

具体的な、 $\langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$

$$\left. \begin{array}{l} \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \\ \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \\ \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \end{array} \right\} 4 \text{ 通り} + (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$$

$$= 8 \text{ 通り}.$$

(2), (3) は 2 つ同じ頂点に 8 通り存在する。

したがって、独立な総数の 2 倍となる。

$$(1) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \quad \times 8$$

$$(2) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \quad \times 8$$

$$(3) \quad \langle 0 | a_3 a_4 : \underbrace{\phi_1 \phi_1 :: \phi_2 \phi_2}_{\text{}} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \quad \times 8$$

$$(1) \left\langle 0 \left(a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 : : \phi_2 \phi_2 : a_1^\dagger a_2^\dagger / 0 \right) \right\rangle$$

$$\rightarrow \frac{1}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4) e^{i(k_3+k_4) \cdot x_1} e^{i(-k_1-k_2) \cdot x_2}$$

$$\rightarrow \int d^4x_1 d^4x_2 \int d^4k \frac{e^{-i k(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} e^{i(k_3+k_4) \cdot x_1} e^{i(-k_1-k_2) \cdot x_2}$$

$$= (\dots) \int d^4x_1 d^4x_2 \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(k_3+k_4-k_1) \cdot x_1} e^{i(k-k_1-k_2) \cdot x_2}$$

$$= (\dots) (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \delta^{(4)}(k-k_1-k_2)$$

$$= (\dots) (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\rightarrow \frac{-9i g_0^2}{2! 3! 3!} \frac{1}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{-9i g_0^2}{2! 3! 3!} \cdot \frac{1}{4\Omega^2} (2\pi)^4 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \cdot \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

8 直線の寄与が不正確

$$\rightarrow J_1 = \frac{-9i g_0^2}{2! 3! 3!} \cdot \frac{(2\pi)^4}{4\Omega^2} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{4\Omega^2} \delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2) \frac{1}{4} (\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4)^{-1/2} M_1$$

と整理すると

$$M_1 = -i g_0^2 \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

です。

$$(2) \left\langle 0 \left(a_3 a_4 : \underbrace{\phi_1 \phi_1}_{\square} : \underbrace{\phi_2 \phi_2}_{\square} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \right) \right\rangle$$

$$(3) \left\langle 0 \left(a_3 a_4 : \underbrace{\phi_1 \phi_1}_{\square} : \underbrace{\phi_2 \phi_2}_{\square} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \right) \right\rangle$$

左の図と右の図は計算結果を比較する。(3, 4)

$$M = -ig^2 \left[\frac{1}{(k_1+k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(k_3-k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{1}{(k_4-k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \right]$$

が確定が終わる。

(2) の 寄与

$$\left\langle 0 \left(a_3 a_4 : \underbrace{\phi_1 \phi_1}_{\square} : \underbrace{\phi_2 \phi_2}_{\square} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \right) \right\rangle$$

$$\rightarrow e^{i(k_3-k_1)x_1} e^{i(k_4-k_2)x_2} e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$= e^{i(k_3-k_1-k_2)x_1} e^{i\underbrace{(k_4-k_2+k)}_{\square} x_2}$$

$$\delta^{(4)}(k_3-k_1+k_4-k_2) \delta^{(4)}(\underbrace{k_4-k_2+k}_{\square})$$

$$k = k_2 - k_4 = \underbrace{k_3 - k_1}_{\square}$$

(3) の 寄与

$$\left\langle 0 \left(a_3 a_4 : \underbrace{\phi_1 \phi_1}_{\square} : \underbrace{\phi_2 \phi_2}_{\square} : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \right) \right\rangle$$

$$\rightarrow e^{i(k_3-k_2)x_1} e^{i(k_4-k_1)x_2} e^{-ik(x_1-x_2)}$$

$$\rightarrow \delta^{(4)}(k_3-k_2-k) \delta^{(4)}(\underbrace{k_4-k_1+k}_{\square})$$

$$k = \underbrace{k_1 - k_4}_{\square}$$

(不補)

ϕ^4 2nd-order

$$\langle 34 | : \phi_1^4 : , \phi_2^4 : | 12 \rangle$$

8行4列要素は $\langle 34 | S | 12 \rangle = \frac{1}{2! 4! 4!} \int \dots$

$$\Rightarrow \langle 0 | a_3 a_4 : \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 : , \phi_2 \phi_2 \phi_2 \phi_2 : | a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\phi_1} \\ \boxed{\phi_2} \end{array} \rightarrow 4 \times 4 = 16 \text{通り}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\phi_1} \\ \boxed{\phi_2} \end{array} \rightarrow 3 \times 3 = 9 \text{通り}$$

∴ $a = 3$, $\phi_1^a \phi_1^b \phi_1^c \phi_1^d \phi_2^a \phi_2^b \phi_2^c \phi_2^d$

と $\sqrt{N! N!} \approx \sqrt{2\pi N} \cdot N^{N/2}$,

$$1\text{回目: } \begin{array}{c} \boxed{\phi_1^c} \\ \boxed{\phi_2^b} \end{array} \Rightarrow 2\text{回目: } \begin{array}{c} \boxed{\phi_1^d} \\ \boxed{\phi_2^a} \end{array}$$

$$1\text{回目: } \begin{array}{c} \boxed{\phi_1^d} \\ \boxed{\phi_2^a} \end{array} \Rightarrow 2\text{回目: } \begin{array}{c} \boxed{\phi_1^c} \\ \boxed{\phi_2^b} \end{array}$$

で重複して2回数えている。これは、縮約で1つ下回数に係る重複。

今の場合 2で割ればOK。

$$\Rightarrow 16 \times 9 \div 2 = 8 \times 9 \text{通り}$$

つまり、2つの縮約 $(\phi_1 \phi_2)^2$ で2通り、残りの縮約は独立で3通りとなる
:= $8 \times 9 \times 3$ 通りの縮約。

$$\text{ただし, } 8 \times 9 \times 3 = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (4!)^2 \text{ の寄与です。}$$

3つの独立な diagram あります。

$\nabla T = \vec{p}^* > 0$, M の表現は ζ ,

$$M = \frac{f_0^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ [f = k_3 - k_1] + [f = k_3 - k_2] + [f = k_3 + k_4] \right\}$$

が得られる。 \therefore これが $[..]$ は

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{(k-f)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

を表す。

$$(b) H_{int} = -\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2 + \frac{1}{3!} g_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4;$$

の相互作用の diagram の係数に対する一般的な規則：

(i) 頂点が n 個のグラフに対して、因子 $n!$

[この因子は Δ 行列要素の n 次の展開係数 $|h|$ を打ち消す]

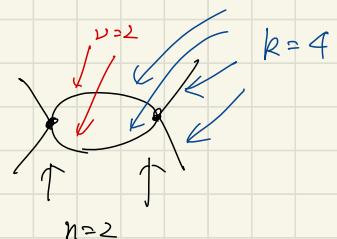
(ii) 同じ場を k とある頂点につき、因子 $k!$

[H_{int} に含まれる ϕ のべきの係数を打ち消す]

(iii) 外線が決めていたときに、内線の縮約をする方法で
幾何学に等価な数 U に対して、因子 U^n

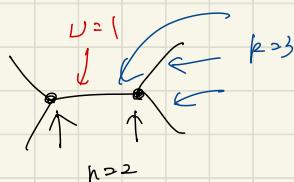
Example 1. ϕ^4 2nd-order

$$C = \frac{2! 4! 4!}{2!} = 4! 4!$$



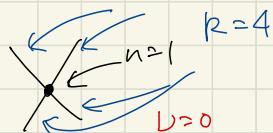
Example 2. ϕ^3 2nd-order

$$C = \frac{2! 3! 3!}{1!} = 2! 3! 3!$$



Example 3. ϕ^4 1st-order

$$C = \frac{1! 4!}{0!} = 4!$$



(c) 実験室系における boson 2体散乱の微分断面積を求める。

ここで、始状態・終状態は平面波でないと、体積 Ω の中央
2E個の粒子が存在するように規格化する。

$$d\sigma = \left(\frac{\text{rate}}{\text{unit volume}} \right) \times \left(\frac{\text{number of final states}}{\text{initial particle flux} \times \text{target particle density}} \right)$$

物理的意味をもたらす。

部分を削除して除いた。

ここで 微分断面積は定義される。次の順に考える。

① 体積あたりの 速度率 (rate) を求める。

② 終状態の状態数を求める。

③ 入射アーティクス (= 入射ビーム速度 × 粒子数密度) と 標的の密度を求める。

① $1+2 \rightarrow 3+4$ の 2体散乱の 速度振幅は $(1.153a)$ で求めて。

$$A_{f\leftarrow i} = -i (2\pi)^4 N_1 N_2 N_3 N_4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) / M$$

ここで、 N_i は 始・終状態の 平面波の規格化定数、 p_i は 運動、 M は 不変振幅。

体積あたりの 速度率 R は

$$R = \frac{|A_{f\leftarrow i}|^2}{\Omega T} \quad (\Omega: \text{体積}, T: \text{時間間隔})$$

と書ける。 R のように表す：

$$R = \frac{1}{\Omega T} (2\pi)^8 (N_1 N_2 N_3 N_4)^2 \underbrace{\delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}_{\delta\text{-関数の乗算} \Rightarrow} |M|^2$$

$\delta\text{-関数の乗算} \Rightarrow$

ここで、2つのf-関数うち1つを積分で書く

$$R = \frac{|M|^2}{\sqrt{T}} (2\pi)^4 \left(N_1 N_2 N_3 N_4 \right)^2 f^{(4)}(p_3, p_4 - p_1, -p_2) \int d^4x e^{i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot x}$$

ここで、1つ目のf-関数は、 $p_3 + p_4 - p_1 - p_2 = 0$ のときの全体の値で
もT=0のときが分りやすくなるから、計算する。

$$\int d^4x e^{i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot x} \rightarrow \int d^4x e^{i0 \cdot x} = \int d^4x$$

よって、これは \sqrt{T} に等しい。 $(T \neq 0)$

$$R = |M|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \left(N_1 N_2 N_3 N_4 \right)^2$$

次に平面波の規格化定数を決める。平面波を

$$\psi(x, t) = N e^{-ip \cdot x}$$

とすると、確率密度 $P = i(\psi^\dagger \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^\dagger)$ は

$$\begin{aligned} P &= iN^2 [e^{ip \cdot x} (-iE) e^{-ip \cdot x} - e^{-ip \cdot x} (iE) e^{ip \cdot x}] \\ &= 2EN^2 \end{aligned}$$

ここで、体積 Ω で $2E$ の規格化は

$$\int \rho dV = 2E \Leftrightarrow 2EN^2 \Omega = 2E$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}$$

でよい。

これを用いて“最終的な遷移率 $R_{f \leftarrow i}$ ”

$$R_{f \leftarrow i} = |M|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_i - p_2) \cdot \frac{1}{\Omega^4}$$

$$= \frac{(2\pi)^4}{\Omega^4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_i - p_2) |M|^2 //$$

です。

② 始・終状態の状態数

周期境界条件下、体積 Ω 、運動量空間 $d^3 p$ 内に含む 1 粒子状態の数

$$dN = \frac{\Omega d^3 p}{(2\pi)^3}$$

今、体積 Ω あたり $2E$ 個の粒子を入れて規格化しているが、 $\frac{1}{\Omega} \rightarrow 2E/\Omega$

$$\propto T^3 = \propto E^3$$

$$dN = \frac{\Omega d^3 p}{(2\pi)^3 (2E)}$$

と書ける。終状態の 4 元運動量を p_3, p_4 とすると

$$(\text{Number of final states}) = \frac{\Omega d^3 p_3}{(2\pi)^3 (2E_3)} \cdot \frac{\Omega d^3 p_4}{(2\pi)^3 (2E_4)} //$$

$$\propto T^3$$

③ 最後に入射率とターゲット粒子密度を考える。

(initial particle flux) \times (target particle density)

$$= \left(|\vec{V}_i| \times \frac{2E_1}{\Omega} \right) \times \frac{2E_2}{\Omega}$$

$$= |\vec{V}_i| \frac{4E_1 E_2}{\Omega^2}$$

以上 ①②③ で、 $1+2 \rightarrow 3+4$ の 2 体散乱の微分断面積は

$$d\sigma_{Lab} = \frac{(2\pi)^4}{\Omega^4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) |M|^2$$

$$\times \frac{\frac{\Omega d^3 p_3}{(2\pi)^3 (2E_3)}}{\frac{\Omega d^3 p_4}{(2\pi)^3 (2E_4)}} \cdot \frac{|\vec{V}_i| \frac{4E_1 E_2}{\Omega^2}}$$

$$= \frac{2\pi}{|\vec{V}_i|} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1 E_2} \cdot |M|^2 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_3}{2E_3} \frac{d^3 p_4}{2E_4}$$

が得られる。したがって (3.83a) 式と $n=2$ の TFD 表式との比較ができる。

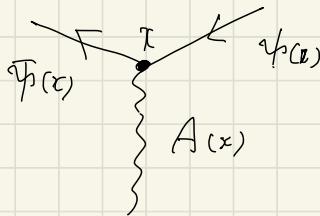
[参考: Schwartz, "Quantum Field Theory and the Standard model", p.56~]

3.7 Example : Spinor Electrodynamics

QED 为 Fermion 的基本的及相互作用及次的形式驱动场：

$$V = e \bar{\psi} A \psi = e \bar{\psi} \gamma^\mu A^\mu \psi$$

如图所示顶点表示下图 (2) 所示：



3.7.1 Some diagrams in QED

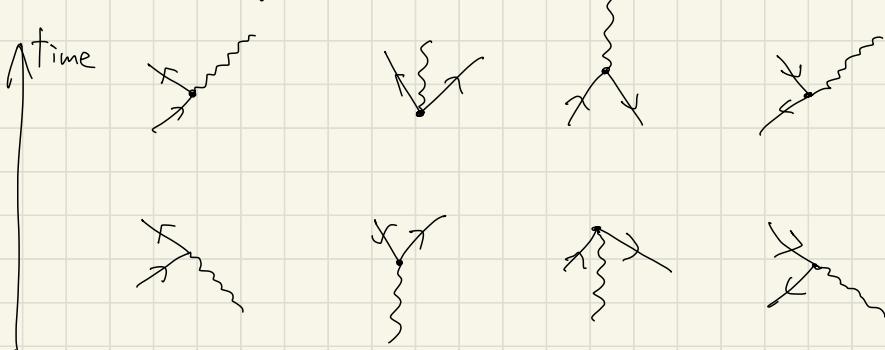
$$\psi(x) = u(x) + v(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{u}(x) \gamma_0 = \bar{u}(x) + \bar{v}(x)$$

$$A^\mu(x) = A(x) + A'(x)$$

用此相互作用之展开可得：

$$V = :e(\bar{u} + \bar{v})\gamma^\mu(A_\mu + A'_\mu)(u + v)$$

⇒ 相互作用形式之系数之考之于 Wick's theorem
1st-order 的部分之展开之图示：



3.7.2. 2nd-order e^-e^- scattering.

2次の電子散乱過程を考える。

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle = \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4x d^4y \langle 34 | T(\bar{\psi}(x) \psi(x); \bar{\psi}(y) \psi(y)) | 12 \rangle$$

漸近状態 $\propto c$

$$|12\rangle = a_{k_1 s_1}^\dagger a_{k_2 s_2}^\dagger |0\rangle \equiv a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle$$

$$|34\rangle = a_{k_3 s_3}^\dagger a_{k_4 s_4}^\dagger |0\rangle \equiv a_3^\dagger a_4^\dagger |0\rangle$$

を採用し、ボテンシャルをつける

$$\bar{\psi}(x) = e : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) :$$

を考へる。

2nd-order の S行列要素(2次式で計算する)は:

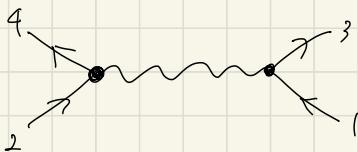
$$\begin{aligned} \langle 34 | S_2 | 12 \rangle &= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4x d^4y \\ &\times \langle 0 | a_3 a_4 T\left(: \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x); : \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) : \right) a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

真空期待値として寄与が成るのは可変の演算子が縮約をとれる場合のみ:

形式的に行き 2通り:

$$\begin{aligned} \langle 34 | S_2 | 12 \rangle &= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4x d^4y \left[\langle 0 | a_4 a_3 : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x); : \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle 0 | a_4 a_3 : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x); : \bar{\psi}(y) \not{A}(y) \psi(y) : a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \right] \end{aligned}$$

各項目は次の独立なグラフに対応している：



(a) t -channel



(b) u -channel

○ 第1項目：(a)

$A_{\mu}(2) = A_{\mu}(x) \gamma^{\mu}$ において $A_{\mu}(2)$ fermion 2 番の 演算子, γ 行列と可換。
注意が必要なのは γ 行列と fermion 2 番の 演算子の順番。

2'. 結果を示すと 第1項目は; $\Omega \approx 2\pi/7\pi$ である。

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle_1 = \frac{i^2 e^2}{2 \Omega} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \\ \times (\bar{U}_{k_4 s_4} \gamma_\mu U_{k_2 s_2})(\bar{U}_{k_3 s_3} \gamma_\mu U_{k_1 s_1}) \int d^4 x d^4 y e^{i(k_4 - k_2 - k) \cdot x} e^{i(k_3 - k_1 + k) \cdot y}$$

ここで、第1項目の意味は $\langle \rangle_1$ と書き、 Ω は空間体積、 E_n は各状態エネルギー、 k_n, s_n は各々の粒子の運動量、 γ の量子数を表す。

具体的な形は $\approx 2, 7\pi$ 。

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle_1 = \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle 0 | A_4 A_3 : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(y) : \bar{\psi}(y) \gamma^\mu \psi(x) : A_1^\dagger A_2^\dagger | 0 \rangle$$

$\approx 2\pi$.

$$A^\mu(x) A^\nu(y) = i D_F^{\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu} e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}$$

を用ひる。また

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi}_4 \psi_4(x) \rangle &= \langle 0 | \bar{\psi}_4 \psi_4(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \bar{\psi}_{k_4 s_4} \left(\sum_{k_3} Q^{-1/2} [a_{k_3}^+ \bar{U}_{k_3} e^{+ik_3 \cdot x} + b_{k_3}^- U_{k_3}^* e^{-ik_3 \cdot x}] \right) | 0 \rangle \\
&= Q^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{E_4}} \sum_{k_3} \delta_{k_4 k_3} \delta_{s_4 s_3} \bar{U}_{k_3} e^{ik_3 \cdot x} \\
&= \underline{Q^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{E_4}} \bar{U}_{k_4 s_4} e^{ik_4 \cdot x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_3 \psi_3(y) &= Q^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{E_3}} \bar{U}_{k_3 s_3} e^{+ik_3 \cdot y} \\
\bar{\psi}_r a_r^+ &= Q^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{E_r}} U_{k_r s_r} e^{-ik_r \cdot x} \\
\bar{\psi}_2 a_2^+ &= Q^{-1/2} \sqrt{\frac{m}{E_2}} U_{k_2 s_2} e^{-ik_2 \cdot y}
\end{aligned}$$

计算过程：

$$\begin{aligned}
\langle 34 | S_2 | 12 \rangle &= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle 0 | \bar{\psi}_4 a_3 : \bar{\psi}_3 \not{A}(x) \psi_2 : : \bar{\psi}_2(y) \not{A}(y) \psi_1 : a_1^+ a_2^+ | 0 \rangle \\
&= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle 0 | \bar{\psi}_4 \not{A}(x) \gamma_\mu \not{p}_2(x) a_2^+ \bar{a}_3 \not{\bar{p}}(y) \gamma_\nu \not{p}_1(y) a_1^+ A^\mu(y) A^\nu(y) | 0 \rangle \\
&= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{m^2}{Q^2} (E_1 E_2 E_3 E_4)^{-1/2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{AB}}{k^2 + i\epsilon} \\
&\quad \times (\bar{U}_{p_3 s_3} \gamma_\mu U_{p_2 s_2}) \cdot (\bar{U}_{k_3 s_3} \gamma_\nu U_{k_1 s_1}) \times e^{i(k_4 - k_2) \cdot x} e^{i(k_3 - k_1) \cdot y} \\
&= \frac{e^2}{2 Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{AB}}{k^2 + i\epsilon} \int d^4 x d^4 y (\bar{U}_{p_3 s_3} i \gamma_\mu U_{p_2 s_2})(\bar{U}_{k_3 s_3} i \gamma_\nu U_{k_1 s_1}) \\
&\quad \times e^{i(k_4 - k_2 - k) \cdot x} e^{i(k_3 - k_1 + k) \cdot y}
\end{aligned}$$

$\int d^4 x d^4 y \approx \text{常数}$

$$\begin{aligned}
\int d^4 x d^4 y e^{i(k_4 - k_2 - k) \cdot x} e^{i(k_3 - k_1 + k) \cdot y} &= (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_4 - k_2 - k) \delta^{(4)}(k_3 - k_1 + k) \\
&\rightarrow (2\pi)^8 \delta^{(4)}(k_4 - k_2 + k_3 - k_1) \delta^{(4)}(k_3 - k_1 + k)
\end{aligned}$$

2'.

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle_1 = \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int d^4 k \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (\bar{U}_{k353} i\gamma_\mu U_{k252}) (\bar{U}_{k353} i\gamma_\nu U_{k151}) \\ \times \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_2 - k_1) \delta^{(4)}(k_3 - k_2 + k)$$

$$= \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(k_3 - k_2)^2 + i\epsilon} (\bar{U}_{k354} i\gamma_\mu U_{k152}) (\bar{U}_{k353} i\gamma_\nu U_{k151})$$

$$k_4 + k_3 - k_2 - k_1 = 0, \quad \gamma^\mu = g^{\mu\nu} \gamma_\nu \quad \text{用} \quad ?$$

$$= \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \frac{-i}{(k_4 - k_2)^2 + i\epsilon} (\bar{U}_{k354} i\gamma_\mu U_{k252}) (\bar{U}_{k353} i\gamma^\mu U_{k151}) \\ \times \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_2 - k_1)$$

Σ723。

○ 第二項目 : (b)

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle_2 = \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle 0 | \overbrace{A_4 A_3}^{\bar{U}_3 \bar{\psi}(x)} : \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) : ; \overbrace{\bar{U}_4(y) \not{A}(y) \psi(y)}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(y) \not{A}(y)} : A_1^+ A_2^+ | 0 \rangle$$

$$= \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \langle 0 | \underbrace{\bar{U}_3 \bar{\psi}(x)}_{\bar{U}_4 \bar{\psi}(x)} \overbrace{A_4 \gamma_\mu \psi(x) \not{A}(y) \gamma_\nu \psi(y)}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(x) \not{A}(y) \psi(y)} \overbrace{A_1^+ A_2^+}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(x) \not{A}(y) A_2^+} A^{\mu}(x) A^{\nu}(y) | 0 \rangle$$

$$= - \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \overbrace{\bar{U}_3 \bar{\psi}(x)}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(x)} \overbrace{\gamma_\mu \not{A}(x) A_2^+}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(x) \not{A}(x) A_2^+} \cdot \overbrace{\bar{U}_4 \bar{\psi}(y)}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(y) \not{A}(y)} \overbrace{\gamma_\nu \not{A}(y) A_1^+}^{\bar{U}_4 \bar{\psi}(y) \not{A}(y) A_1^+} \cdot A^{\mu}(x) A^{\nu}(y)$$

$$= - \frac{i^2 e^2}{2} \int d^4 x d^4 y \frac{m^2}{Q^2} \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (\bar{U}_{k353} \gamma_\mu U_{k252}) \cdot (\bar{U}_{k354} \gamma_\nu U_{k151})$$

$$\times e^{i(k_3 - k_2 - k) \cdot x} \cdot e^{i(k_4 - k_1 + k) \cdot y}$$

$$= - \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int d^4 k \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} (\bar{U}_{k353} i\gamma_\mu U_{k252}) (\bar{U}_{k354} i\gamma_\nu U_{k151}) \\ \times \delta^{(4)}(k_3 - k_2 + k_4 - k_1) \delta^{(4)}(k_4 - k_1 + k)$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2 \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \int d^4 k \frac{-i \not{q}^\mu}{k^2 + i\epsilon} (\bar{u}_{k353} i\gamma_\mu u_{k252}) (\bar{u}_{k454} i\gamma^\mu u_{k151}) \\
&\quad \times \delta^{(4)}(k_3 - k_2 + k_4 - k_1) \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_2 - k_1) \\
&= - \frac{(2\pi)^4 e^2}{2Q^2 \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \cdot \frac{-i}{(k_3 - k_2)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_{k353} i\gamma_\mu u_{k252}) \cdot (\bar{u}_{k454} i\gamma^\mu u_{k151}) \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_2 - k_1)
\end{aligned}$$

$\chi \in \mathcal{Y}_2$ の意味についての「特徴づけ」、 $2 \geq 5+3 = 2^2$ で $k_3 \neq k_4$ と $k_1 \neq k_2$ 。

左端式で、2nd-order の S-matrix elements は

$$\langle 34 | S_2 | 12 \rangle$$

$$= 2 \cdot (\langle 3 | S_2 | 12 \rangle_1 + \langle 34 | S_2 | 12 \rangle_2)$$

$$= 2 \cdot \frac{(2\pi)^4}{2Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_1 - k_2)$$

$$\times \left\{ \frac{-i e^2}{(k_4 - k_1)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_{k454} i\gamma_\mu u_{k151}) (\bar{u}_{k353} i\gamma^\mu u_{k252}) - \frac{-i e^2}{(k_3 - k_2)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_{k353} i\gamma_\mu u_{k252}) \cdot (\bar{u}_{k454} i\gamma^\mu u_{k151}) \right\}$$

$$\equiv \frac{(2\pi)^4}{Q^2} \frac{m^2}{\sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \delta^{(4)}(k_4 + k_3 - k_1 - k_2) \times M$$

となる。

$$M = -i e^2 \left[\frac{(\bar{u}_{k454} i\gamma_\mu u_{k151}) (\bar{u}_{k353} i\gamma^\mu u_{k252})}{(k_4 - k_1)^2 + i\epsilon} - \frac{(\bar{u}_{k353} i\gamma_\mu u_{k252}) (\bar{u}_{k454} i\gamma^\mu u_{k151})}{(k_3 - k_2)^2 + i\epsilon} \right]$$

でない、これが不対称性である。

散乱断面積との関連を考えると、 $|M|^2 = M^\dagger M$ を計算する必要が生じる。

その後の計算方法が提案されてる。

○ Trace Techniques and the Lepton tensor.

偏極したビームを放つことは「なし」(か、放つことはある。でも)。偏極しないスピニが「あり」(か、ない)。

まことに、粒子の状態として、始状態についてはスピニ状態に対する平均を、終状態については和をとる。偏極していない、ビームを放つ。つまり、不偏振幅の $2\pi |M|^2$ はスピンによって平均して量 $\overline{|M|^2}$ を算出し、こちらを用いる。

$$|M|^2 \rightarrow \overline{|M|^2} = \frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \sum_{spins} |M|^2$$

ここで、 \sum_{spins} は 終状態のスピニ状態の全ての組み合せについて和がとられる。 $\Rightarrow \sum_{S_1=1,2} \sum_{S_2=1,2}$

ただし、 M^2 ではなく $|M|^2$ は和でとられることに注意可。

偏光について、粒子の散乱断面積を求めるために、Dirac 波動方程式が用いられる：

$$\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{ss} \bar{U}_{R's} \gamma_\mu U_{Rs} \bar{U}_{Rs} \gamma_\nu U_{Rs'}$$

Lepton tensor = 呼びかけの量に相当する。

\bar{U} は 構ベクトル、 γ は 4×4 の行列、 U は 総ベクトル である。全体として Lorentz indices は 3つで 7つある。

Dirac indices は 4つある tr の形で書く複数個。 tr 公式を用ひ、 $\gamma^2 = 1$ から簡単な表式に持ち込むこととする。

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{ss'} (\bar{\psi}_{ks'})^\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha p} (\psi_{ks})_p (\bar{\psi}_{ks})_\tau (\gamma_\nu)_{rs} (\psi_{ks'})_s \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{s'} (\psi_{ks'})_s (\bar{\psi}_{ks'})^\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha p} \underbrace{\sum_s (\psi_{ks})_p (\bar{\psi}_{ks})_\tau (\gamma_\nu)_{rs}}_{= \left(\frac{k+m}{2m}\right)_{pr}}} \\
&\quad = \left(\frac{k+m}{2m}\right)_{\delta s} \quad = \left(\frac{k+m}{2m}\right)_{pr} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2m} (k+m)_{\delta s} (\gamma_\mu)_{\alpha p} (k+m)_{pr} (\gamma_\nu)_{rs} \\
&\Rightarrow \frac{1}{8m^2} \sum_{\alpha p r s} (k+m)_{\delta s} (\gamma_\mu)_{\alpha p} (k+m)_{pr} (\gamma_\nu)_{rs}
\end{aligned}$$

∴ 由上， Γ 次數為偶數的公式適用。

$$\begin{cases} \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_p \gamma_r) = 4(g_{\mu\nu} g_{pr} + g_{\mu r} g_{\nu p} - g_{\mu p} g_{\nu r}) \\ \text{tr}(\gamma \text{次數為奇數個}) = 0 \end{cases}$$

證： $\text{tr}[(k+m)\gamma_\mu (k+m)\gamma_\nu]$ 設展開方法。

$$\begin{aligned}
&= \text{tr}[(k+m)\gamma_\mu k \gamma_\nu + \gamma_\mu (k+m)\gamma_\nu] \\
&= \text{tr}[k\gamma_\mu k \gamma_\nu + \underline{m\gamma_\mu k \gamma_\nu} + \underline{k'\gamma_\mu \gamma_\nu m} + \gamma_\mu \gamma_\nu m^2] \\
&\quad = 0 \quad = 0 \\
&= \text{tr}[k\gamma_\mu k \gamma_\nu + m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{tr} (k' \gamma_\mu k \gamma_\nu) \\
&= \text{tr} (k' \gamma_\rho \gamma_\mu k^\alpha \gamma_\alpha \gamma_\nu) \\
&= k' k^\alpha \text{tr} (\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu) \\
&= k' k^\alpha \cdot 4 (g_{\rho\rho} g_{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha} g_{\rho\nu} - g_{\rho\alpha} g_{\mu\nu}) \\
&= \underline{4 (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k'_\alpha k^\alpha g_{\mu\nu})} \quad \text{J.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{8m^2} \left\{ 4 (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - k'_\alpha k^\alpha g_{\mu\nu}) + 4m^2 g_{\mu\nu} \right\} \\
&= \frac{1}{2m^2} \left[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + (m^2 - k'_\alpha k^\alpha) g_{\mu\nu} \right]
\end{aligned}$$

$\approx 2''$

$$\begin{aligned}
g^2 &= (k - k')^2 = (k_\mu - k'_\mu)(k^\mu - k'^\mu) \\
&= \underbrace{k_\mu k^\mu}_{= m^2} - k_\mu k'^\mu - k'_\mu k^\mu + \underbrace{k'_\mu k'^\mu}_{= m^2} \\
&= 2m^2 - 2 k_\mu k'^\mu
\end{aligned}$$

$$\therefore \underline{m^2 - k_\mu k'^\mu = \frac{1}{2} g^2}$$

∴ $m^2 - k_\mu k'^\mu$.

$$\underline{L_{\mu\nu} = \frac{1}{2m^2} \left(k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + \frac{1}{2} g^2 g_{\mu\nu} \right)}$$

∴ $L_{\mu\nu}$ 表示 $1/2m^2 g^2$.

偏極してての fermion-fermion の 断面積は 2つの子の 2つの 種類を含む。

2種類。

$$\overline{|M|} \simeq L^\mu L_{\mu\nu}'$$

の 2つが 2つを含む。

e^-e^- 散乱、断面積

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ} \right) = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left(\frac{1 + \cos^4(\frac{\theta}{2})}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} + \frac{1 + \sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)} \right)$$

参考までに Exercise 3.5 ~ 3.7 で確認する。

7.16, 2021

3.9. Feynman Rules for Electrodynamics

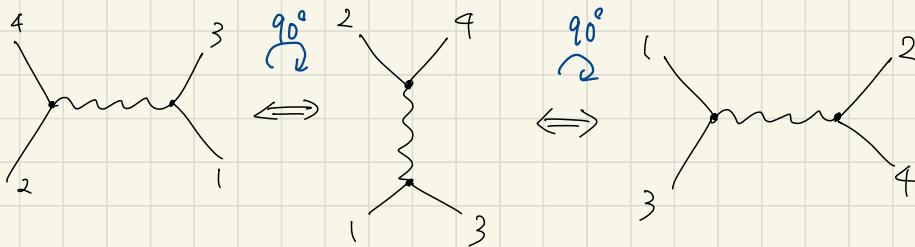
ダイアグラムと不変振幅とを対応付ける規則が存在する. \Rightarrow Feynman rules

- 量子電磁気学における Feynman rules.

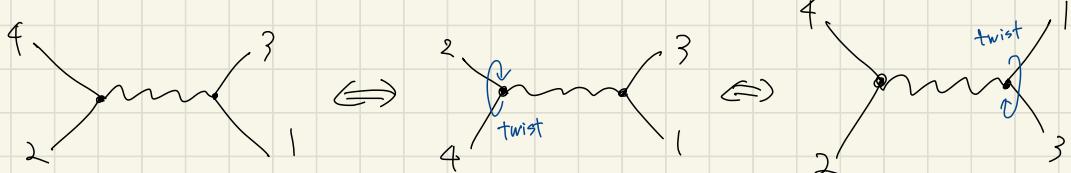
1. 考えている相互作用に対して矛盾しない運動量空間でのダイアグラムを全て描く。ただし、幾何学的に区別できるものを描くとい、運動量空間においては、線がラベル付けされる。

木 等価なグラフ

- 外線の方向を固定したまま回転させてグラフ



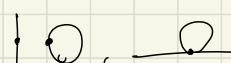
- 外線を固定したままひねってグラフ



木 除外されるグラフ

- つまむつていうか、真空泡グラフ
- 始点と終点が同じループグラフ。

* Excluded



$$\begin{aligned} \text{Excluded: } & \phi^{(2)} \phi^{(2)} = T(\phi^{(2)} \phi^{(2)}) - : \phi^{(2)} \phi^{(2)} : \\ & = \phi^{(2)} \phi^{(2)} - \phi^{(2)} \phi^{(2)} \\ & = 0 \end{aligned}$$

- 行列要素に含まれる因子の順番はダイアグラムの矢印に従って決める。

Diagrams

2. 外線に限りない規則

2-A. boson·antiboson の外線 : |

2-B. 入射(消滅) fermion : U_{ps}

放出(生成) antifermion : U_{ps}

放出(生成) fermion : \bar{U}_{ps}

入射(消滅) antifermion : \bar{U}_{ps}

2-C. 入射光子に対する偏光因子 : ϵ_μ

放出光子 (=に対する偏光因子 : ϵ_μ^\dagger)

3. 内線に限りない規則 (仮想粒子の取り扱い)

3-A. 運動量 p , 質量 m の fermion の内線

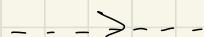
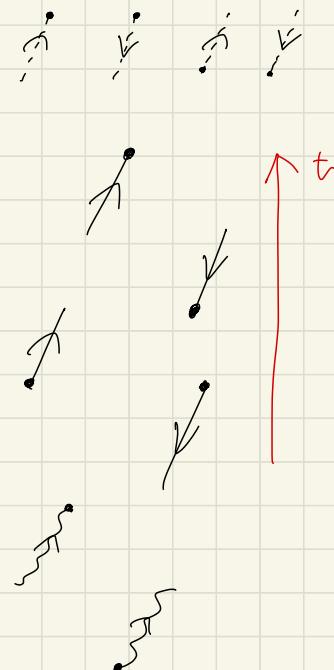
$$iS_F(p) = \frac{i(p+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p-m+i\epsilon}$$

3-B. 運動量 k , 質量 m の $\Delta^2 = 0$ 粒子の内線

$$i\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

3-C. 運動量 q の光子の内線

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\nu}(q) &= \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \left[-g^{\mu\nu} + (1-\beta) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 + i\epsilon} \right] \\ &= \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad (\text{Feynman gauge: } \beta=1) \end{aligned}$$

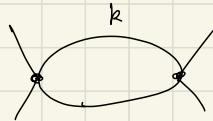


* 物理的取結果は gauge 依存性に
左右される。

4. ルーパー符号に関する規則)

4-A. ルーパー運動量 k (\leftarrow 全体の運動量保存から決まる)

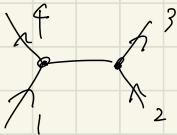
$$\int \frac{dk}{(2\pi)^4}$$



4-B. 閉じた fermion ルーパー符号、

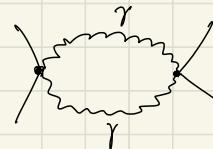
① 因子 -1 を持つ ② γ 行列のトースをとる

4-C. 同種の fermion 外線 2 箇で交換したとき、どうなる
異符号場合に因子 -1 (?)



4-D. 閉じルーパー、2つだけ光子の内線を含む場合

因子 $\frac{1}{2}$



5. 電荷 e 質量 m の粒子の頂点因子

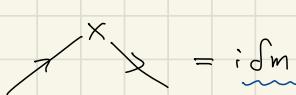
5-A. Spinor electrodynamics

i. 3点頂点



$$= -ie\gamma_\mu$$

ii. 質量項



$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi}(i\not{d} - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\not{d} - m_R + \underline{m}_R - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\not{d} - m_R + \underline{m})\psi \end{aligned}$$

\underline{m} が部分的に生じる電荷をルーパー電荷と相殺せよ。

5-B. Spin-0 boson electrodynamics

i. 3点頂点

$$p_{-\rightarrow}^{\mu} p_{\rightarrow}^{\nu} = -ie(p + p')_\mu \quad p_{-\rightarrow}^{\mu} p_{\rightarrow}^{\nu} = ie^2 g_{\mu\nu}$$

iii. 4点頂点

$$p_{-\rightarrow}^{\mu} p_{\rightarrow}^{\nu} = 2ie^2 g_{\mu\nu}$$

0 (1) つかの補足説明

* 各頂点で 4 元運動量が保存している。

ここで生じるループ運動量に関する積分 $\int d^4k$ は発散する。

tree level を越えた計算では意味のないものには、これまで、 $\langle \rangle$ と $\langle \rangle_{\text{cut}}$ で発散を取引除く必要がある。

$\rightarrow (\gamma^\mu)_{\text{exp}} : \text{Dirac indices} \in \text{閉ループ}.$

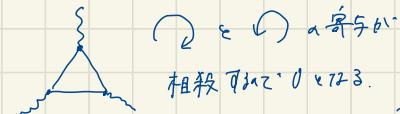
* ルール 4-B (γ 行列はトレースなし) は典型的な閉ループの行列要素を書くと確認できる。

物理的にはループ中の個々 fermion の全ての偏光状態を組み合せてあることに相当する。

* ルール 4-B, 4-C の -1 は Fermi-Dirac 統計を反映

* 奇数個の頂点を持つ fermion の閉ループは恒等的 (= 0) である。(: Furry's theorem)

これは電磁力学の荷電共役不変性に由来する。

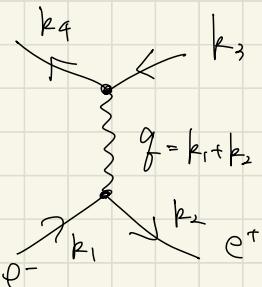
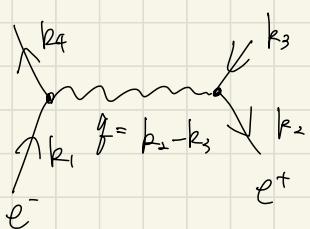


* Feynman rule で直接 Lagrangian density の読み取り方法は Exercise 3.9 & 3.10 を扱う。

ただし、この頂の寄りが 0 とならない場合もあり anomaly と呼ばれる効果につながる。

例) e^-e^+ 散乱の 散乱振幅 (Bhabha scattering)

運動量空間で独立な 2つと 2つ:



2つの 独立な 2つの寄与が 求められる。

$$M = \bar{U}_{k_2 s_2} (-i e \gamma_\mu) U_{k_3 s_3} \frac{i}{(k_2 - k_3)^2} \bar{U}_{k_4 s_4} (-i e \gamma^\mu) U_{k_1 s_1}$$

$$- \bar{U}_{k_2 s_2} (-i e \gamma_\mu) U_{k_1 s_1} \frac{i}{(k_1 + k_2)^2} \bar{U}_{k_4 s_4} (-i e \gamma^\mu) U_{k_3 s_3}$$

重心系での 断面積は

$$\left| \frac{d\sigma}{dQ^2} \right| = \frac{\alpha^2}{8 E^2} \left(\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)$$

これがわかる。ここで、レプトン質量は エネルギーに比べ十分小さくして無視してよい。
 \Rightarrow 高エネルギーでの実験を考へる。

HPAの Exercise T 難題で。

$$\begin{cases} M_e = 0.511 \text{ MeV} \\ M_\mu = 106 \text{ MeV} \end{cases}$$

Exercise 3.5

(a) (3.83) に示されてる cross section の 表式 が 終状態 p₃, p₄ 2 体の崩壊 $1+2 \rightarrow 3+4$ に対する

$$d\sigma = \frac{d \text{Lips}}{F} |M|^2$$

の形に書き直すことを説明する。ただし、F は 入射 フラックス 因子である。Exercise 3.4 (c) で定義したもの。
Lorentz invariant phase space (Lips) は 次式で定義される：

$$d \text{Lips} = \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{p_3 dE_3}{E_4} \delta(-E_3 - E_4 + E_1 + E_2) dQ$$

$1+2 \rightarrow 3+4$ の 反応 に対する 実験室系での 断面積 $d\sigma_{\text{lab}}$ ($\rightarrow d\sigma$ の 倍数) は

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{2\pi}{|\vec{Q}_1|} \left(\frac{1}{4\pi^2} \right) (4E_1 E_2)^{-1} |M|^2 \delta^{(4)}(p'_3 + p'_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p'_3}{2E_3} \frac{d^3 p'_4}{2E_4} \\ &\approx \frac{1}{|\vec{Q}_1|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} |M|^2 \delta^{(4)}(p'_3 + p'_4 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p'_3 d^3 p'_4}{4E'_3 E'_4} \end{aligned}$$

ここで p'_3 と p'_4 は エネルギーと 3 次運動量の 部分に 分けて考え、 $d^3 p'_4$ の 積分を 実行することを考える。

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{|\vec{Q}_1|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} |M|^2 \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) d^3 p_3 d^3 p_4}_{\vec{p}_q + \vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 0} \\ &= \frac{1}{|\vec{Q}_1|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \frac{1}{4E_3 E_4} |M|^2 \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) d^3 p_3 \Big|_{\vec{p}_q + \vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 0} \\ &= \frac{1}{|\vec{Q}_1|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \frac{1}{4E_3 E_4} |M|^2 \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) dQ_3 |\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3| \Big|_{\vec{p}_q + \vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 0} \end{aligned}$$

ここで、 $E_3^2 = |\vec{p}_3|^2 + m^2 \Rightarrow E_3 dE_3 = |\vec{p}_3| d|\vec{p}_3| \quad \text{且し} \quad d|\vec{p}_3| \equiv dE_3$ は 変換式。

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|\vec{Q}_1|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \frac{1}{4E_3 E_4} |M|^2 \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) dQ_3 p_3 E_3 dE_3 \Big|_{\vec{p}_q + \vec{p}_3 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 0} \\ &\quad \text{dQ} \equiv dQ_3, \quad p_3 \equiv |\vec{p}_3| \end{aligned}$$

$$d\sigma = \frac{1}{|M|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{E_1 E_2} \frac{1}{4E_3 E_4} |M|^2 \int (E_3 + E_4 - E_1 - E_2) dQ p_3 E_3 dE_3 \Big|_{\vec{p}_3 + \vec{p}_4 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = 0}$$

$$= \frac{1}{|M|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{p_3 dE_3}{E_4} \int (E_3 + E_4 - E_1 - E_2) dQ \cdot |M|^2$$

且 E_3 取值范围 $\in F = |M| \cdot 4E_1 E_2 \in [0, \infty)$

$$= \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p_3 dE_3}{E_4} \int (E_3 + E_4 - E_1 - E_2) dQ \cdot |M|^2$$

$$= \underbrace{\frac{dLips}{F} |M|^2}_{\rightarrow}$$

答： $\frac{dLips}{F} |M|^2$

(b) 重心系での dLips の表式

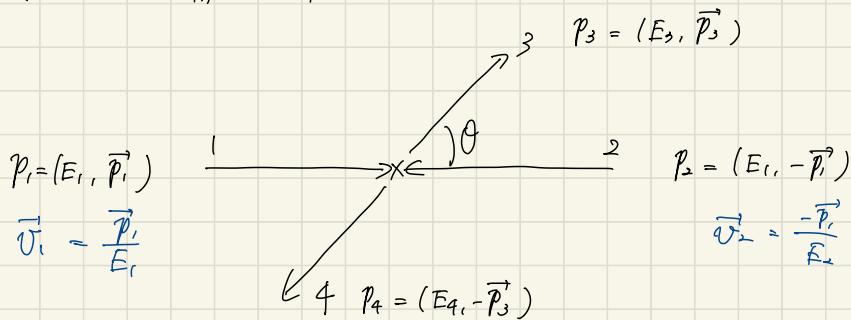
$$dLips = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p}{E_1 + E_2} d\Omega , \quad F = 4p(E_1 + E_2) \quad (p = |\vec{P}|)$$

と

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|M|^2}{[4\pi(E_1 + E_2)]^2}$$

と $\frac{1}{E_1 + E_2}$ で表すことを確認可.

重心系で 1+2 \rightarrow 3+4 散乱を \vec{P}_1 で書く.



$p \equiv |\vec{P}_1|$ を書く. 工条件、関係式、運動量保存から

$$\begin{cases} E_3^2 = m_3^2 + p^2 \\ E_4^2 = m_4^2 + p^2 \end{cases}, \quad p = |\vec{P}_1| = |\vec{P}_3|$$

$= |\vec{P}_1|$, (3, 4) が重心系での断面積 $d\Gamma_{CM}$ は $R \propto p^2$ となる.

$$d\Gamma_{CM} = \frac{2\pi}{|\vec{P}_1 - \vec{P}_3|} \frac{1}{8\pi^3} 2^{-4} (E_3 E_4 E_1 E_2)^{-1} |M|^2 \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) d^3 p_3 d^3 p_4$$

$$= \frac{1}{|\vec{P}_1 - \vec{P}_3|} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{E_3 E_4} \delta^{(4)}(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) |M|^2$$

$$= \frac{1}{|\vec{P}_1 - \vec{P}_3|} \frac{1}{(4\pi)^4} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{d^3 p_4}{E_3 E_4} \delta(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) |M|^2 \Big|_{\vec{P}_3 + \vec{P}_4 - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = 0}$$

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3 E_4} f(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) |M|^2 \Big|_{\vec{P}_3 + \vec{P}_4 - \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = 0}$$

看略

$$= \frac{1}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{\vec{P}_3 \cdot d\vec{P}_3}{E_3 E_4} dQ f(E_3 + E_4 - E_1 - E_2) |M|^2$$

$$E_3^2 = m_b^2 + \vec{p}^2 \Rightarrow E_3 dE_3 = pdp \quad (\text{同様に, } E_4 dE_4 = pdp)$$

$$= \frac{1}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{pdE_3}{E_4} f(f(E_3)) \cdot |M|^2 dQ$$

$$f(E_3) \equiv E_3 + E_4 - E_1 - E_2$$

$$\therefore \int dE_3 f(f(E_3)) = \int \frac{1}{|df(E_3)|}$$

$$\frac{df}{dE_3} = 1 + \frac{dE_4}{dE_3} = 1 + \frac{dE_4}{dp} / \frac{dE_3}{dp} = 1 + \frac{p}{E_4} \cdot \frac{E_3}{p} = \frac{E_3 + E_4}{E_4}$$

∴ 用いよ。

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{p}{E_3 + E_4} |M|^2 dQ$$

$$= \frac{1}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|} \frac{1}{4E_1 E_2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p}{E_3 + E_4} |M|^2 dQ$$

→ $|\vec{V}_1 - \vec{V}_2| = \sqrt{(\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)}^{1/2}$

$$= \sqrt{|\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{p^2}{m_1^2} + \frac{p^2}{m_2^2} - 2 \cdot \frac{p^2}{m_1 m_2} \cos\theta}^{1/2}$$

$$\vec{V}_1 = \frac{\vec{p}_1}{m} \quad (\text{non-relativistic})$$

∴ 用いよ。計算は 1 次元でよい。この表記は

$$\vec{V}_1 = \frac{\vec{p}_1}{E_1} \quad (\text{relativistic})$$

∴ 変えて計算。 $m \rightarrow E$ 置き換え

$$\begin{aligned} \frac{(m_1 + m_2)^2}{(m_1 m_2)^2} &= p \left\{ \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_1 m_2} \right\}^{1/2} \\ &= p \cdot \left(\frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2}{m_1^2 m_2^2} \right)^{1/2} = p \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \longrightarrow p \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2| \cdot 4E_1 E_2 &= p \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \cdot 4E_1 E_2 \\
 &= 4p(E_1 + E_2) \\
 &\approx p \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot 4E_1 E_2 = 4p(E_1 + E_2)
 \end{aligned}$$

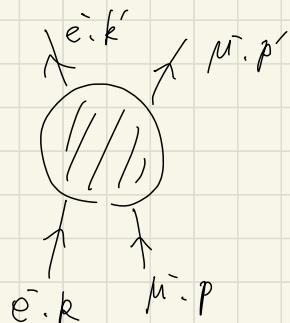
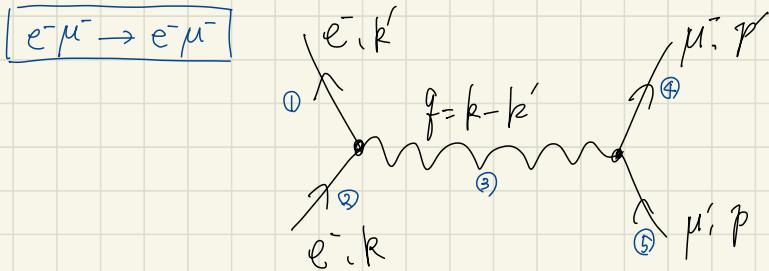
$$d\Gamma_{\text{CM}} = \frac{1}{4p(E_1 + E_2)} \cdot \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p}{E_1 + E_2} |M|^2 d\Omega$$

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{|M|^2}{64(E_1 + E_2)^2} = \frac{|M|^2}{[8(E_1 + E_2)]^2}, \quad \text{とくに} \rightarrow \text{等式}.$$

(c) lepton tensor の表現による説明 (Feynman diagram)

(d) $e^- \bar{\mu} \rightarrow e^- \bar{\mu}$ の最低次 amplitude を書け.

最低次のゲラーランゲ方程式に挿入:



Feynman rules は、矢印、不変量幅を書き下すと $= R$ の形になる。

$$M = +1 \cdot \overline{U}(k') (-ie\gamma_\mu) U(k) \frac{-i\gamma^\mu}{q^2 + i\epsilon} \overline{U}(p') (-ie\gamma_\nu) U(p) \frac{i\gamma^\nu}{q^2 + i\epsilon} \overline{U}(p') (-ie\gamma_\nu) U(p) \frac{i\gamma^\nu}{q^2 + i\epsilon} \overline{U}(p') (-ie\gamma_\nu) U(p) \frac{i\gamma^\nu}{q^2 + i\epsilon}$$

各部の因子なし。

計算を進めていくと負がくこと
 がほとんどで注意。
 これは vertex
 1=出発点 Lorentz
 index と当たる。

$$\therefore M = +i \frac{e^2}{t} \left[\bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) \frac{1}{(k-k')^2 + i\epsilon} \bar{U}(p') \gamma^\nu U(p) \right]$$

Mandelstam variables を用いて $(k-k')^2 = t$ とおけば。 $\epsilon = 0$ のとき。

$$M = i \frac{e^2}{t} \left[\bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) \bar{U}(p') \gamma^\nu U(p) \right]$$

となる。式の平均は、 t 不变振幅の2乗

$$\overline{|M(e\bar{\mu} \rightarrow e\bar{\mu})|^2} = \frac{1}{(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)} \sum_{\text{spins}} M^\dagger M = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{\text{spins}} M^\dagger M$$

となる。 M^\dagger は

$$M^\dagger = -i \frac{e^2}{t} \left[\bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) \bar{U}(p') \gamma^\nu U(p) \right]^\dagger$$

$$= -i \frac{e^2}{t} (\bar{U}(p') \gamma^\nu U(p))^\dagger \cdot (\bar{U}(k') \gamma_\mu U(k))^\dagger$$

$$= -i \frac{e^2}{t} \bar{U}(p) \gamma^\nu U(p') \cdot \bar{U}(k) \gamma_\mu U(k')$$

$$\begin{aligned} & (\bar{U}(k) \gamma_\mu U(k'))^\dagger \\ &= U^\dagger(k') (U^\dagger(k) \gamma_\mu)^+ \\ &= U^\dagger(k') (\gamma_0 \Gamma)^+ U(k) \\ &= U^\dagger(k') \Gamma^T \gamma_0 U(k) \\ &= U^\dagger(k') \gamma_0 \Gamma^T \gamma_0 U(k) \\ &= \bar{U}(k') \gamma_0 \Gamma^T \gamma_0 U(k) \end{aligned}$$

となる。

$$\overline{|M|^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{\text{spins}} -i^2 \frac{e^4}{t^2} \bar{U}(p) \gamma^\nu U(p') \bar{U}(k) \gamma_\mu U(k')$$

$\Gamma = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$

$$\times \bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) \bar{U}(p') \gamma^\nu U(p)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{\text{spins}} \bar{U}(p) \gamma^\nu U(p') \bar{U}(k) \gamma_\mu U(k') \times \bar{U}(k') \gamma_\mu U(k) \bar{U}(p) \gamma^\nu U(p)$$

$$= \frac{e^4}{t^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{\text{tot}} \bar{U}_+(k) \gamma_\mu U_{+}(k') \bar{U}_{+}(k') \gamma_\nu U_{+}(k) \right] \left[\frac{1}{2} \sum_{\text{tot}} \bar{U}_s(p) \gamma^\mu U_s(p') \bar{U}_s(p') \gamma^\nu U_s(p) \right]$$

$$= \frac{e^4}{t^2} L_{\mu\nu} L'^{\mu\nu}$$

トーリン公式。縮約を用いて $L_{\mu\nu} L'^{\mu\nu}$ を計算すれば。

$$L_{\mu\nu} L^{\mu\nu}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{\text{tr}} \bar{U}_t(k) \gamma_\mu U_t(k') \bar{U}_{t'}(k') \gamma_\nu U_{t'}(k) \right] \left[\frac{1}{2} \sum_{\text{ss}} \bar{U}_s(p) \gamma^\mu U_s(p') \bar{U}_{s'}(p') \gamma^\nu U_{s'}(p) \right]$$

↓
ニの計算と並んで spinor の規格化を仮定する
振幅もこの規格化で計算すれば、断面積も同じ規格化
用いる。

$$= \frac{1}{2m_e^2} \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - (k' \cdot k) g_{\mu\nu} \right] \cdot \frac{1}{2m_p^2} \left[p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} \right]$$

$$= \frac{1}{4m_e^2 m_p^2} \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - (k' \cdot k) g_{\mu\nu} \right] \left[p'^\mu p^\nu + p^\mu p'^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} \right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4m_e^2 m_p^2} \left\{ \begin{aligned} &k'_\mu p'^\mu k_\nu p^\nu + k'_\mu p^\mu k_\nu p'^\nu + k_\mu k'_\nu p'^\mu p^\nu + k_\mu p'^\mu k_\nu p'^\nu \\ &- p \cdot p' (k'^\nu p_\nu + k^\nu k'_\nu) - k' \cdot k (p'_\nu p^\nu + p_\nu p'^\nu) \\ &+ (k \cdot k')(p' \cdot p) \underbrace{g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}}_{=4} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4m_e^2 m_p^2} \left\{ \begin{aligned} &2 (k' \cdot p') (k \cdot p) + 2 (k' \cdot p) (k \cdot p') \\ &- 2 (p \cdot p') (k \cdot k') - 2 (k' \cdot p) (p' \cdot p) + 4 (k \cdot k') (p' \cdot p) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$L^2 = t^2$, t^2 .

$$|\overline{M}|^2 = \frac{e^4}{t^2} \frac{1}{4m_e^2 m_p^2} \left[2 (k' \cdot p') (k \cdot p) + 2 (k' \cdot p) (k \cdot p') \right]$$

$$S \equiv (k+p)^2, \quad t \equiv (k-k')^2, \quad U \equiv (p-p')^2 \quad \in \text{用いて書き換える。}$$

となる。レプトノ質量が「零」(=ゼロ)小小さいと近似を用いる。

$$S = (k+p)^2 = k^2 + 2k \cdot p + p^2 \approx 2k \cdot p = 2k' \cdot p'$$

$$k^2 = m_e^2 \approx 0, p^2 = m_p^2 \approx 0$$

$$t = (k-k')^2 \approx -2k \cdot k' = -2p \cdot p'$$

$$u = (k-p')^2 \approx -2k \cdot p' = -2k' \cdot p$$

と表せる。

$$\begin{aligned} \overline{M^2} &\approx \frac{1}{4m_e^2 m_p^2} \frac{e^4}{t^2} \left[2 \cdot \frac{s}{2} \frac{s}{2} + 2 \left(-\frac{u}{2} \right) \left(-\frac{u}{2} \right) \right] \\ &= \frac{e^4}{8m_e^2 m_p^2} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right) \end{aligned}$$

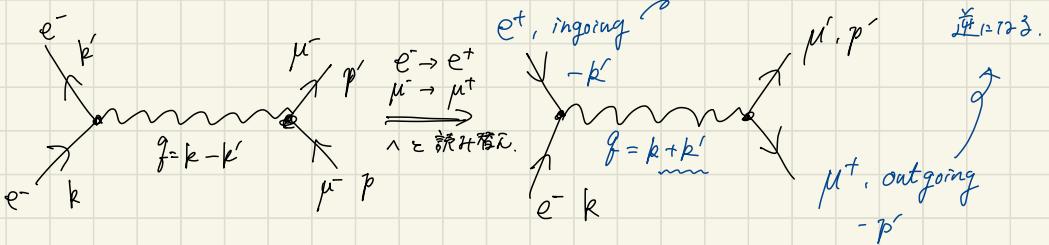
と書くべきである。

(e) Crossing symmetry を利用して、 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 反応における不変振幅の計算

$$\overline{|M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} = \frac{e^4}{4m_e^2 m_\mu^2} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right)$$

とみにえを確認する。

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ の反応について。始状態と終状態の粒子を反対粒子に入れ替える。
ダイヤグラムにおいては $p \leftrightarrow -p'$ と置くことに相当。 反粒子軌跡には \bar{s} で運動量の向きが逆になる。



≈ 入出力換え。 Mandelstam variables は s, t, u で
置き換え、 不変振幅の計算

$$\overline{|M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2} = \frac{e^4}{8m_e^2 m_\mu^2} \left(\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right)$$

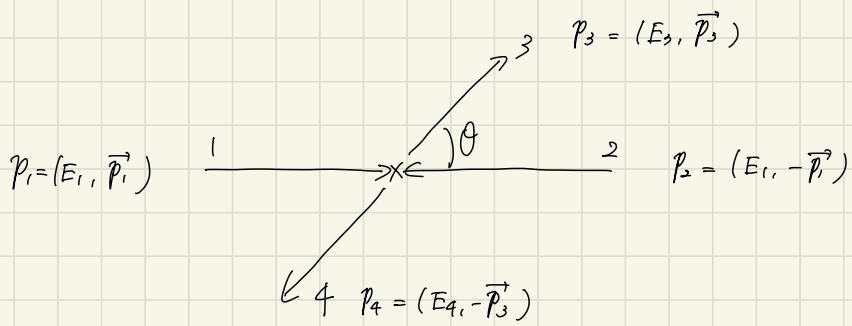
とみにえを確認する。

(f) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ の微分断面積が

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ} \right)_{\text{cm}} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad , \quad \tau = \int \frac{d\sigma}{dQ} d\Omega = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

とみにえを確認する。

もう一度重心系を考へよ。



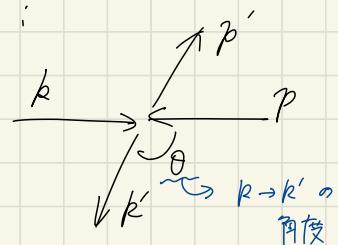
Mandelstam variables は

$$s = (k+p)^2, \quad t = (k-k')^2, \quad u = (k-p')^2$$

k, p, k', p' は平行な運動量をもつ

$$k = (E, \vec{k}), \quad p = (E, -\vec{k})$$

$$k' = (E, \vec{k}'), \quad p' = (E, -\vec{k}')$$



である。運動量保存より $|k| = |\vec{k}| = |k'|$ である。散乱角 θ は $\pi/2$ である ($= 90^\circ$)。

$$s = (k+p)^2$$

$$= (k_\mu + p_\mu)(k^\mu + p^\mu)$$

$$= k_\mu k^\mu + k_\mu p^\mu + p_\mu k^\mu + p_\mu p^\mu$$

$$= m^2 + m^2 + 2k_\mu p^\mu$$

$$\approx 2(E^2 - \vec{k} \cdot \vec{p})$$

$$= 2(E^2 - k^2 \cos \theta)$$

$$\approx 2(k^2 + k'^2)$$

$$= \underline{4k^2}$$

である。

$$t = (k-k')^2$$

$$= (k_\mu - k'_\mu)(k^\mu - k'^\mu)$$

$$= k_\mu k^\mu - k_\mu k'^\mu - k'_\mu k^\mu + k'_\mu k'^\mu$$

$$= m_e^2 + m_\mu^2 - 2k_\mu k'^\mu$$

$$\approx -2(E^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}')$$

$$\approx -2(k^2 - k \cdot k' \cos \theta)$$

$$= \underline{-2k^2(1-\cos\theta)}$$

$$u = (k-p')^2$$

$$= (k_\mu - p'_\mu)(k^\mu - p'^\mu)$$

$$= k_\mu k^\mu + p'_\mu p'^\mu - 2k_\mu p'^\mu$$

$$\approx -2(k^2 - k \cdot k' \cos(\pi-\theta))$$

$$= -2k^2(1+\cos\theta)$$

→

$$\frac{T^2 + U^2}{S^2} = \frac{4k^4((-cos\theta)^2 + 4k^4(1+cos\theta)^2)}{16k^4}$$

$$= \frac{1}{4} (1 - 2cos\theta + cos^2\theta + 1 + 2cos\theta + cos^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + cos^2\theta)$$

微分断面積 12.

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ}\right)_{CM} = \frac{|M|^2}{[8\pi(E_1 + E_2)]^2} = \frac{1}{64\pi^2 \underbrace{(E_1 + E_2)^2}_{\|M\|^2}} \underbrace{\frac{e^4}{8m_e^2 m_p^2}}_{\text{11}} \frac{1}{2} ((+cos^2\theta))$$

となる。 $\left(\frac{d\sigma}{dQ}\right)_{CM}$ 表式 A: spin-0 粒子と γ の散乱。

不変振幅の計算で用いた spinor の規格化を
整合させよう。 $d\Gamma_{CM}$ の表式に代入。 $E \rightarrow E/m \geq 73$

Exercise 3.6

$$(3.(d)) \quad M = \bar{U}_{k_2 s_2} (-ie\gamma_p) U_{p_3 s_3} \frac{i}{(p_2 - p_3)^2} \bar{U}_{k_3 s_3} (-ie\gamma^\mu) U_{p_1 s_1}$$

$$- \bar{U}_{k_2 s_2} (-ie\gamma_p) U_{p_1 s_1} \frac{i}{(p_1 + p_2)^2} \bar{U}_{k_1 s_1} (-ie\gamma^\mu) U_{p_3 s_3}$$

で Wick 定理から確かめる。

考る真空期特徴 (3.91) の類推から、

$$\langle 34 | T (: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : : \bar{\psi}(y) A(y) \psi(y) :) | 12 \rangle \\ = \langle 0 | a_3 b_4 T (: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : : \bar{\psi}(y) A(y) \psi(y) :) a_1^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle$$

ここで、 e^+ が生じて生成・消滅演算子の片方を b (= 反粒子) としている。

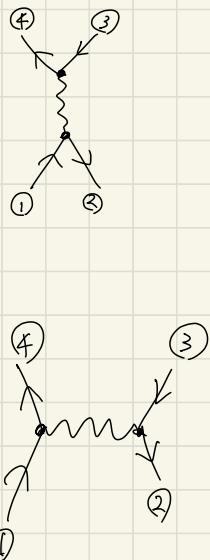
独立な寄与を与えるのは 次の 2 つの縮約：

① $\langle 0 | a_4 b_3 T (: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : : \bar{\psi}(y) A(y) \psi(y) :) a_1^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle$

② $\langle 0 | a_4 b_3 T (: \bar{\psi}(x) A(x) \psi(x) : : \bar{\psi}(y) A(y) \psi(y) :) a_1^\dagger b_2^\dagger | 0 \rangle$

これが positive · negative frequency 展開である。

縮約である。



$$(1) \langle 0 | \overbrace{a_4}^{\square} \overbrace{b_3}^{\square} T(: \overbrace{\bar{\psi}(x)}^{\square} \overbrace{A(x)}^{\square} \psi(x) : : \overbrace{\bar{\psi}(y)}^{\square} \overbrace{A(y)}^{\square} \psi(y) :) \overbrace{a_1^+}^{\square} \overbrace{b_2^+}^{\square} | 0 \rangle$$

$$\overbrace{a_4}^{\square} \overbrace{\bar{\psi}(x)}^{\square} = Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_4}} \overline{U}_{p4s4} e^{ip_4 \cdot x} \quad \overbrace{b_3}^{\square} \overbrace{\psi(y)}^{\square} = Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_3}} V_{p3s3} e^{ip_3 \cdot y}$$

$$\overbrace{\psi(y)}^{\square} \overbrace{a_1^+}^{\square} = Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_1}} U_{p1s1} e^{-ip_1 \cdot y} \quad \overbrace{\bar{\psi}(y)}^{\square} \overbrace{b_2^+}^{\square} = Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m}{E_2}} \overline{V}_{p2s2} e^{-ip_2 \cdot y}$$

$$\begin{aligned} \overbrace{A(x)}^{\square} \overbrace{A(y)}^{\square} &= \gamma_\mu \overbrace{A^\mu(x)}^{\square} \overbrace{A^\nu(y)}^{\square} \\ &= \gamma_\mu \gamma_\nu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} \quad (\text{:: (3.57)}) \end{aligned}$$

J¹.

$$\langle 0 | \overbrace{a_4}^{\square} \overbrace{b_3}^{\square} T(: \overbrace{\bar{\psi}(x)}^{\square} \overbrace{A(x)}^{\square} \psi(x) : : \overbrace{\bar{\psi}(y)}^{\square} \overbrace{A(y)}^{\square} \psi(y) :) \overbrace{a_1^+}^{\square} \overbrace{b_2^+}^{\square} | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | \overbrace{a_4}^{\square} \overbrace{\bar{\psi}(x)}^{\square} \gamma_\mu \overbrace{A^\mu(x)}^{\square} \overbrace{b_3}^{\square} \overbrace{\psi(x)}^{\square} \overbrace{\bar{\psi}(y)}^{\square} \overbrace{b_2^+}^{\square} \gamma_\nu \overbrace{A^\nu(y)}^{\square} \overbrace{\psi(y)}^{\square} \overbrace{a_1^+}^{\square} | 0 \rangle$$

$$\sim \overline{U}_{p4s4} \gamma_\mu V_{p3s3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \overline{V}_{p2s2} \gamma_\nu U_{p1s1} e^{i(p_4 + p_3 - k) \cdot x} e^{i(-p_1 - p_2 + k) \cdot y}$$

$$\sim \overline{U}_{p4s4} \gamma_\mu V_{p3s3} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \overline{V}_{p2s2} \gamma_\nu U_{p1s1} \delta^{(4)}(p_4 + p_3 - p_1 - p_2)$$

2. Rの「 $\frac{1}{2}e^2$ 」と「 $\frac{1}{2}e^2$ 」。

$(2\pi)^4$

$$\langle 34 | S_z | 12 \rangle = \frac{i^2 e^2}{2} \overline{U}_{p4s4} \gamma_\mu V_{p3s3} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \overline{V}_{p2s2} \gamma_\nu U_{p1s1} \delta^{(4)}(p_4 + p_3 - p_1 - p_2)$$

$$\langle 34 | \lambda_2 | 12 \rangle = \frac{i^2 e^2}{2} \overline{U}_{p_4 s_4} \gamma_\mu V_{p_3 s_3} \frac{-i g^{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \overline{V}_{p_2 s_2} \gamma_\nu U_{p_1 s_1} \not{f}^{(4)}(p_4 + p_3 - p_1 - p_2)$$

$$= -\frac{(2\pi)^4}{2} \overline{U}_{p_4 s_4} (-i e \gamma_\mu) V_{p_3 s_3} \frac{i}{(p_1 + p_2)^2} \overline{V}_{p_2 s_2} (-i e \gamma^\nu) U_{p_1 s_1}$$

$$\times \not{f}^{(4)}(p_4 + p_3 - p_1 - p_2)$$

証明1) (3.104) 第2項の符号が得られず $\lambda_2 = 0$ 。 (今複数子順序 4321 や (3.104) の 2143 の順序では 4回の置換で符号は同じで、符号は自動的に消す。)

同様にして $a, b \in \gamma_\mu$ の縮約を
計算すれば、(3.104) も得られる。

Exercise 3.7

(3.103) の 散乱断面積の表式

$$\left(\frac{d\sigma}{dQ^2} \right) = \frac{\alpha'^2}{8E^2} \left(\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{2}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)} + \frac{1 + \sin^4(\theta/2)}{\cos^4(\theta/2)} \right)$$

が (3.97) の 不対称振幅

$$M = -ie^2 \left[\frac{\bar{U}_{k4s4}(-i\gamma_\mu) U_{k2s2} \bar{U}_{k3s3}(-i\gamma^\mu) U_{k1s1}}{(k_4 - k_2)^2 + i\epsilon} - \frac{\bar{U}_{k3s3}(-i\gamma_\mu) U_{k2s2} \bar{U}_{k4s4}(-i\gamma^\mu) U_{k1s1}}{(k_3 - k_2)^2 + i\epsilon} \right]$$

が不対称振幅と示す。

この 不対称振幅に注目し、それを平均して得た 2乗振幅 $\overline{|M|^2}$ は、

$$\overline{|M|^2} = \binom{1}{2}^2 \sum_{\text{spins}} M^\dagger M$$

$$\epsilon = e \epsilon \gamma_3.$$

$$M^\dagger = +ie^2 \left[\frac{\bar{U}_{k4s4}(-i\gamma_\mu) U_{k2s2} \bar{U}_{k3s3}(-i\gamma^\mu) U_{k1s1}}{(k_4 - k_2)^2} \right]^+ \quad (A)$$

$$- \left[\frac{\bar{U}_{k3s3}(-i\gamma_\mu) U_{k2s2} \bar{U}_{k4s4}(-i\gamma^\mu) U_{k1s1}}{(k_3 - k_2)^2} \right]^+ \quad (B)$$

$$(A) = [\bar{U}_{k3s3}(-i\gamma^\mu) U_{k1s1}]^+ [\bar{U}_{k4s4}(-i\gamma_\mu) U_{k2s2}]^+$$

=

$$= -i \frac{e^2}{t} (\bar{U}(p)\gamma^\mu u(p))^+ \cdot (\bar{U}(k')\gamma_\mu u(k))^+$$

$$= -i \frac{e^2}{t} \bar{U}(p)\gamma^\mu u(p) \cdot \bar{U}(k')\gamma_\mu u(k')$$

Exercise 3.9

Feynman rules の中で用いられる プロペクトーは Lagrangian density から直接読み取る事ができる。

(1) Lagrangian density は 場の 2 次の項以外を全て取り除く。

たとえば、スカラーア場であれば残る項は $(\partial^\mu \phi)^+ (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$ となる。

(2) 場 ϕ を平面波 e^{ikx} に置き換えて、演算子を作用させる。
その後、平面波 e^{ikx} を除いた部分を K として K を得る。

スカラーア場の場合には

$$\begin{aligned} & (\partial^\mu e^{ikx})^\dagger (\partial_\mu e^{ikx}) - m^2 e^{-ikx} e^{ikx} \\ &= (ik_\mu)^\dagger (ik^\mu) e^{-ikx} e^{ikx} - m^2 e^{-ikx} e^{ikx} \\ &= k_\mu k^\mu - m^2 \equiv K \quad \therefore K = k_\mu k^\mu - m^2 \end{aligned}$$

• virtual particle
⇒ on the mass shell
を満たさなくてよい。

(3) 運動量空間でのプロペクトーは $\tilde{\alpha}(k)$ の逆 $\tilde{\alpha}(k)$ である: $P = K^{-1}$
逆数・逆行列を記す。

不純の係数を決めるためには $PK = K^{-1}K = 1$ を用いる。

スカラーア場に対する P は

$$P = \Delta(k) = \frac{1}{k^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\epsilon > 0)$$

すなはち、分母に含むれる $i\epsilon$ の形の入力方は k 積分を実行した後の境界条件から決める。

(A) この方法を用いて (3.62), (3.63), (6.49) の解き方を述べて置かねど.

$$(2.44) \quad \mathcal{L} = |\partial^\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \quad \Rightarrow \quad (3.62) \quad \Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$(2.46) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\partial^\mu - m) \psi(x) \quad \Rightarrow \quad (3.63) \quad S_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$(2.49) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \quad \Rightarrow \quad (6.49) \quad W^{\mu\nu}(q) = \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M^2}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$$

◎ (2.44) の解説.

例題 見たところ.

$$\begin{aligned} & |\partial^\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \\ &= (\partial^\mu \phi)^* (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \\ &\xrightarrow{\phi = e^{ik \cdot x}} (ik^\mu e^{ik \cdot x})^* (ik^\mu e^{ik \cdot x}) - m^2 e^{-ik \cdot x} e^{ik \cdot x} \\ &= k_\mu k^\mu e^{-ik \cdot x} e^{ik \cdot x} - m^2 \\ &= \underline{k^2 - m^2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow K = k^2 - m^2$$

$$\rightarrow P = K^{-1} = \frac{1}{k^2 - m^2} \quad \therefore (3.62) \quad \Delta_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

⑩ (2.4b) Dirac 方程の導出

$$\begin{aligned}
 L &= \bar{\psi}(x)(i\phi - m)\psi(x) \\
 &= \bar{\psi}^+ \gamma_0(i\phi - m)\psi \\
 &\rightarrow e^{-ikx} \gamma_0(i\gamma_\mu \partial^\mu e^{ikx} - me^{ikx}) \\
 &= e^{-ikx} \gamma_0 i \gamma_\mu i K^\mu e^{ikx} - \gamma_0 m \\
 &= -\gamma_0 \gamma_\mu k^\mu - \gamma_0 m \\
 &= -\gamma_0 (\not{k} + m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow PK &= (a\not{k} + b)(\not{k} - m) \\
 &= a\not{k}\not{k} - ma\not{k} + b\not{k} - mb \\
 &= a\not{k}^2 I_4 - ma\not{k} + b\not{k} - mbI_4 \\
 &\equiv I_4
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\not{k}^2 - mb = 1 \\ -ma + b = 0 \\ a\not{k}^2 - m^2 a = 1 \end{cases} \quad \text{[方程式], fermion の 特性方程式}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\not{k}^2 - m^2} \\ b = \frac{m}{\not{k}^2 - m^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S_F(p) &= \frac{\not{k}}{\not{p}^2 - m^2} + \frac{m}{\not{p}^2 - m^2} \\
 &= \frac{\not{p} + m}{\not{p}^2 - m^2} \\
 \rightarrow \frac{\not{k} + m}{\not{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} &\left(= \frac{1}{\not{k} - m + i\varepsilon} \right)
 \end{aligned}$$

以上が証明。

$$\begin{aligned}
 L &= \bar{\psi}(i\phi - m)\psi \\
 \bar{\psi} &= e^{ikx} \\
 \bar{\psi} &\stackrel{i}{\longrightarrow} e^{ikx} (i\phi - m) e^{-ikx} \\
 \bar{\psi} &= (-i \cdot i \not{k} - m) e^{ikx - i\phi x} \\
 &= (\not{k} - m)
 \end{aligned}$$

$$K = \not{k} - m \quad \approx 0.$$

$$P = a\not{k} + b \quad \text{[方程式]} \quad PK = 1 \quad \text{[方程式]}$$

$$(a, b : (-\infty, \infty), \frac{(\not{k} + m)}{\not{k}^2 - m^2 + i\varepsilon} \text{ 実数解})$$

$$\begin{aligned}
 \not{k} &= \gamma_\mu \not{k}^\mu \\
 &= \begin{pmatrix} E & \not{p} \cdot \not{k} \\ -\not{p} \cdot \not{k} & -E \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \not{k}\not{k} &= \begin{pmatrix} E & \not{p} \cdot \not{k} \\ -\not{p} \cdot \not{k} & -E \end{pmatrix}^2 \\
 &= \begin{pmatrix} E^2 - (\not{p} \cdot \not{k})^2 & 0 \\ 0 & E^2 - (\not{p} \cdot \not{k})^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} E^2 - \not{p}^2 & 0 \\ 0 & E^2 - \not{p}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{p^2 I_4}{E^2 - \not{p}^2}}}$$

⑩ (2.49) massive gauge 楊-米子場

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \\
 &= -\frac{1}{4} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \\
 &= -\frac{1}{4} (\cancel{\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu} - \cancel{\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu} - \cancel{\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu} + \cancel{\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu}) + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \\
 &= -\frac{1}{4} (2 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2 \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \\
 &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - m^2 A^\mu A_\mu)
 \end{aligned}$$

場是平面波 $\propto e^{ikx}$, 微分是作用下。

$$-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \rightarrow -(-ik_\mu)(ik^\nu) \underbrace{g_{\mu\nu}}_{\substack{\text{Ansatz} \\ \text{Lorentz index反映}}} = -k^2 g_{\mu\nu}$$

$$m^2 A^\mu A_\mu \rightarrow m^2 g_{\mu\nu}$$

$$\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \rightarrow (-ik_\mu)(ik_\nu) = k_\mu k_\nu$$

$$\Rightarrow K_{\mu\nu} = (-k^2 + m^2) g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$$

$$\therefore h(x) \nabla^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu} - NT_{\mu\nu} \text{ 与 } K_{\mu\nu} \text{ 有 } W_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}^{-1} \nabla^\mu K_{\nu\rho}^{-1} K^{\rho\sigma} = G_{\mu\nu}$$

它要請教。

$$\therefore h(x) \nabla^\mu \nabla^\nu T_{\mu\nu} = a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu \quad \text{与 } K_{\mu\nu} \text{ 同形式且相等。}$$

$$W_{\mu\nu} K^{\nu\rho}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu) [(-k^2 + m^2) g^{\nu\rho} + k^\nu k^\rho] \\
 &= a (-k^2 + m^2) g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} + a k^\nu k^\rho g_{\mu\nu} + b (-k^2 + m^2) k_\mu k_\nu g^{\nu\rho} + b k_\mu k_\nu k^\nu k^\rho \\
 &= a (-k^2 + m^2) \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\nu}^{\rho} + a k_\mu k_\nu^{\rho} + b (-k^2 + m^2) k_\mu k_\nu^{\rho} + b k^2 k_\mu k_\nu^{\rho} \\
 &\equiv \mathcal{E}_{\mu}^{\nu\rho}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a (-k^2 + m^2) = 1 \\ a + b (-k^2 + m^2) + b k^2 = 0 \quad m^2 b^2 = -a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{-k^2 + m^2} \\ b = \frac{-1/m^2}{-k^2 + m^2} \end{cases}$$

∴ $\mathcal{E}_{\mu\nu}^{\nu\rho}$, $W_{\mu\nu} \rightarrow \text{常数}$

$$W_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{-k^2 + m^2} + \frac{-k_\mu k_\nu / m^2}{-k^2 + m^2} = \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2}$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{ε 不是零。}
 \end{aligned}$$

(b) (2.48) の場合を考へよ。

$$\begin{aligned}
 (2.48) \quad \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4} (2 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2 \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) \\
 &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu)
 \end{aligned}$$

同様に 12. 平面波を考へよ。

$$-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \rightarrow -k^2 g_{\mu\nu}, \quad +\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \rightarrow k_\mu k_\nu$$

よし、

$$K_{\mu\nu} = -k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$$

$$P_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - \Xi P_{\mu\nu} = \alpha g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu \quad \Rightarrow \text{P3は恒定解}.$$

$$\begin{aligned}
 P_{\mu\nu} K^{\mu\nu} &= (\alpha g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \\
 &= -\alpha k^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} k^\nu k^\mu - b k^2 k_\mu k_\nu g^{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu k^\mu k^\nu \\
 &= -\alpha k^2 \delta_\mu^\mu \delta_\nu^\nu + \alpha k_\mu k^\mu - b k^2 k_\mu k^\mu + \cancel{b k^2 k_\mu k^\mu} \\
 &= -\alpha k^2 \delta_\mu^\mu + \alpha k_\mu k^\mu \\
 &\equiv f_\mu^\mu \quad [\Leftrightarrow \alpha (-k^2 \delta_\mu^\mu + k_\mu k^\mu) = \delta_\mu^\mu]
 \end{aligned}$$

この条件は α, b の選び方では満たすことができる。

$$\text{したがって } K_{\mu\nu} = -k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu \quad \text{は inverse で持つべきが命題}.$$

(C) (2.48) a Lagrangian density 12.7(c) "gauge fixing term" えどん:

$$(2.48) \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\beta} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

⇒ 2.8.12c, 3-C 7の 12.8.7-9- も再現する ⇒ 確認する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\beta} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left(-\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \frac{1}{3} \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow K_{\mu\nu} = -k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - \frac{1}{3} k_\mu k_\nu$$

$$D_{\mu\nu} = a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu \quad \text{と} \quad a < b.$$

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu} K^{\mu\rho} &= (a g_{\mu\nu} + b k_\mu k_\nu) \left[-k^2 g^{\mu\rho} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) k^\mu k^\rho \right] \\ &= -a k^2 g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} + a \left(1 - \frac{1}{3}\right) g_{\mu\nu} k^\mu k^\rho - b k^2 k_\mu k_\nu g^{\mu\rho} \\ &\quad + b \left(1 - \frac{1}{3}\right) k_\mu k_\nu k^\mu k^\rho \\ &= -a k^2 g^{\mu\rho} + a \left(1 - \frac{1}{3}\right) k_\mu k^\rho - b k^2 k_\mu k^\rho + b k^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) k_\mu k^\rho \\ &= g_\mu^\rho \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a k^2 = 1 \\ a \left(1 - \frac{1}{3}\right) - b k^2 + b k^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(1 - \frac{1}{3}\right) - b k^2 \frac{1}{3} = 0 \\ b = \frac{3}{k^2} a \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{-1}{k^2} (3-1) \\ = \frac{1}{k^2} (1-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{k^2} \\ b = \frac{1-3}{k^4} \end{cases}$$

⇒ 12.11. $D_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[-g_{\mu\nu} + (-3) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right]$

を再現する。

Exercise 3.10

頂点に関する Feynman rules 及び相互作用 L から読み取る方法を立てる。

(1) iL_{int} を書き下し、場の演算子を平面波に置き換える。

場の演算子が 1 点で 1 回以上作用する場合、その点で考へねる可変の置換の項を含める。

(2) 直動量空間での結果を求め、外線に結びつける因子を除く。

Example

(2.4) (1) \mathcal{L} の相互作用項 (スカラ -)

$$iL_{\text{int}} = -ig A^\mu (\phi^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial} \mu \phi) = -ig A_\mu [\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi]$$

$$\rightarrow iL_{\text{int}} = g A_\mu [\phi^\dagger (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi]$$

$$\phi = N_1 e^{-ip_1 \cdot x}, \quad \phi^\dagger = N_2 e^{ip_2 \cdot x}, \quad A_\mu = \epsilon_{k\mu}^+ e^{ik \cdot x}$$

实用化。

$$\begin{aligned}
 iL_{\text{int}} &= g \epsilon_{k\mu}^+ e^{ik \cdot x} [N_2 e^{ip_2 \cdot x} (\partial^\mu N_1 e^{-ip_1 \cdot x}) - (\partial^\mu N_2 e^{ip_2 \cdot x}) N_1 e^{-ip_1 \cdot x}] \\
 &= g \epsilon_{k\mu}^+ e^{ik \cdot x} N_1 N_2 (-i p_1^\mu - i p_2^\mu) e^{i(p_2 - p_1) \cdot x} \\
 &= \underline{g \epsilon_{k\mu}^+ N_1 N_2} \underline{(-i p_1^\mu - i p_2^\mu)} e^{i(k - p_1 + p_2) \cdot x}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{vertex factor : } \frac{-ig(p_1 + p_2)^\mu}{\cancel{e}}$$

(a) §3.9 の Feynman rules を確認する。

$$(2.201) \quad \mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{d} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$(f.65) \quad (i\cancel{d} - m_R + eA + \delta m)\psi = 0$$

Exercise 2.4(c) $\mathcal{L}_{\text{int}} = -ig A^\mu (\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) + g^2 A^2 \phi^\dagger \phi$

(A-i) $\bar{\psi} A \psi$ が 2 項目。

$$(2.201) \text{ が } \mathcal{L} \text{ に含まれる } \mathcal{L}_{\text{int}} \text{ は } (2.203) \text{ で示される。} \quad (\because \text{minimal substitution})$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e_0 \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi$$

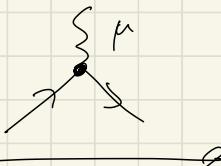
$$\rightarrow i\mathcal{L}_{\text{int}} = -ie_0 \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi$$

$$\psi = N_1 e^{-ik_r \cdot x}, \quad \bar{\psi} = \bar{N}_2 e^{ik_r \cdot x}, \quad A_\mu = \epsilon_{k\mu}^+ e^{ik_r \cdot x}$$

で計算する。

$$i\mathcal{L}_{\text{int}} = N_1 \bar{N}_2 \epsilon_k^+ \underbrace{(-ie_0 \gamma_\mu)}_{\text{Vertex}} e^{i(k - k_r + k_e) \cdot x}$$

Vertex : $-ie_0 \gamma_\mu \iff$



(A-11) $\bar{\psi} \not{D}_m \psi$ a 2 積合.

(6.65) 由 \not{D}_m 相互作用 (δm) Lagrangian 12.

$$L_{int} = \delta m \bar{\psi} \psi$$

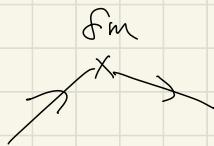
$$\Rightarrow i L_{int} = i \delta m \bar{\psi} \psi$$

$$\psi = N_1 e^{-ik_1 \cdot x}, \quad \bar{\psi} = \bar{N}_2 e^{ik_2 \cdot x}, \quad A_\mu = \epsilon^*_{k\mu} e^{ik \cdot x}$$

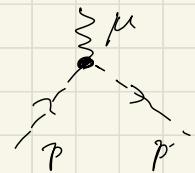
電磁場.

$$i L_{int} = \underbrace{i \delta m}_{\text{vertex}} N_1 \bar{N}_2 e^{i(k-k_1+k_2)x}$$

vertex : $i \delta m$



(B-i) 例題として $\bar{e}(p+p')\mu \Leftrightarrow$



(B-ii) Bosons 相互作用 Lagrangian の (3.65 b) の

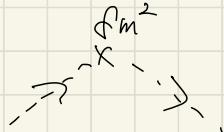
$$\text{Lint} = \underbrace{\frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2}_{\text{Lagrangian}} - \frac{1}{3!} g_0 \phi^3 + \frac{1}{4!} f_0 \phi^4$$

$$i\text{Lint} = \frac{i}{2} \delta m^2 \phi^2$$

$$\phi_1 = N_1 e^{-ik_1 \cdot x}, \quad \phi_2 = N_2 e^{-ik_2 \cdot x} \quad \text{Lagrangian}$$

$$i\text{Lint} = \frac{i}{2} N_1 N_2 \delta m^2 e^{-i(k_1+k_2) \cdot x} + \underbrace{\frac{i}{2} N_2 N_1 \delta m^2 e^{-i(k_1+k_2) \cdot x}}_{k_1 \leftrightarrow k_2 \text{ かつ } k_1 + k_2} \\ = N_1 N_2 \underbrace{\left(i \delta m^2 \right)}_{\text{Lagrangian}} e^{-i(k_1+k_2) \cdot x}$$

Vertex : $i \delta m^2 \Leftrightarrow$



$$(B-iii) Exercise 2.4(c) \quad \text{Lint} = -ig A^\mu (\phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) + \underbrace{g^2 A^2 \phi^\dagger \phi}_{\text{Interaction term}}$$

第二項 の 用い方.

$$i\text{Lint} = i g^2 A A^\dagger \phi^\dagger \phi$$

$$A_\mu = \epsilon_{\mu\nu}^+ e^{ik \cdot x} \quad A_\nu = \epsilon_{\mu\nu}^+ e^{ik \cdot x}, \quad \phi = N_1 e^{-ik_1 \cdot x}, \quad \phi^\dagger = N_2 e^{ik_2 \cdot x}$$

で何がどう入る?

$$iL_{\text{int}} = i g^2 A A \phi^\dagger \phi$$

$$A_\mu = \epsilon_{k\mu}^\dagger e^{ik \cdot x} \quad A_\nu = \epsilon_{k\nu}^\dagger e^{ik \cdot x}, \quad \phi = N_1 e^{-ik_1 \cdot x}, \quad \phi^\dagger = N_2 e^{ik_2 \cdot x}$$

所以有

$$\begin{aligned} iL_{\text{int}} &= ig^2 \epsilon_{k\mu}^\dagger \epsilon_{k\nu}^\dagger g_{\mu\nu} N_1 N_2 e^{i(k+k') \cdot x} e^{-ik_1 \cdot x} e^{+ik_2 \cdot x} \\ &\quad + ig^2 \epsilon_{k\mu}^\dagger \epsilon_{k\nu}^\dagger g_{\mu\nu} N_1 N_2 e^{i(k+k') \cdot x} e^{+ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x} \\ &= \epsilon_{k\mu}^\dagger \epsilon_{k\nu}^\dagger N_1 N_2 \underbrace{(2ig^2 g_{\mu\nu})}_{(2ie^2 g_{\mu\nu})} e^{i(k+k'+k_2-k_1) \cdot x} \end{aligned}$$

