Chapter 4

Path integral

Quantization

Chapter.4 Path Integral Quantization

4.1 Nonrelativistic Path Integral

経路積分とは、古典的なハミルトニアン $H(p,q)$ から Hilbert space の演算子・状態ベクトルを用いずに遷移振幅を求める方法である。

通常の量子力学において、遷移振幅は次式で与えられる： [時刻 t' に位置 q' にいた粒子を t'' に q'' で見い出す確率振幅]

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')} | q' \rangle$$

$|q'\rangle$ → Schrödinger rep. の基底ケット

$$= \langle q'' | q', t' ; t'' \rangle \quad \text{の意味.}$$

ここで、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ は時間に依存しないと仮定する。

Hilbert space において、演算子 $\hat{p}$, $\hat{q}$ 及び対応する固有値は次の関係に従う：

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \qquad [\hat{q}, \hat{p}] = i$$

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \qquad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

$$\langle q'' | q' \rangle = \delta(q'' - q') \qquad \langle p'' | p' \rangle = 2\pi\,\delta(p'' - p')$$

$$\langle p | q \rangle = e^{-ipq} \qquad \langle q | \hat{p} | p \rangle = p \langle q | p \rangle$$

→ p, q の変換関数がこのようにとられていることに注意。

次に、時間間隔 $t''-t'$ を N 分割することを考える。このときの各ステップの長さは等しく、

$$\epsilon \equiv (t'' - t')/N$$

にとるものとする。

このようにして time interval を分割すると遷移振幅は次のように書くことができる：

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | e^{-i\epsilon N \hat{H}} | q' \rangle \qquad \left(\epsilon = \frac{t''-t'}{N} \right)$$

$\exp(-i\epsilon N\hat{H}) \simeq 1 - i\epsilon N \hat{H}$

$$= \langle q'' | (1 - i\epsilon \hat{H})^N | q' \rangle$$

$$= \langle q'' | (1 - i\epsilon \hat{H})(1 - i\epsilon \hat{H}) \cdots \cdots (1 - i\epsilon \hat{H}) | q' \rangle$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \, |q\rangle\langle q| = 1$$

$$= \langle q'' | (1 - i\epsilon \hat{H}) \underline{\int dq_{N-1} |q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|} (1 - i\epsilon \hat{H}) \underline{\int dq_{N-2} |q_{N-2}\rangle\langle q_{N-2}|} (1 - i\epsilon \hat{H})$$

$$\times \cdots \times \underline{\int dq_1 |q_1\rangle\langle q_1|} (1 - i\epsilon \hat{N}) | q' \rangle$$

座標空間での完全系 $\int dq \, |q\rangle\langle q| = 1$ を用いた。

運動量空間での完全系 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = 1$ を用いると上式の被積分因子の1つは

$$\langle q_2 | (1 - i\epsilon \hat{H}) | q_1 \rangle = \langle q_2 | \int \frac{dp_1}{2\pi} |p_1\rangle\langle p_1| (1 - i\epsilon \hat{H}) | q_1 \rangle$$

$$= \int \frac{dp_1}{2\pi} \langle q_2 | p_1 \rangle \langle p_1 | (1 - i\epsilon \hat{H}) | q_1 \rangle$$

このように書くことができる。さらに、ハミルトニアン演算子 $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$ と古典ハミルトニアンは

$$\langle p | \hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) | q \rangle = \langle p | q \rangle H(p, q)$$

により関係付く。

[このとき、p と q の cross product (e.g. $pq - qp$) が含まれる場合にはオーダリングの処方が必要となる。今はそのような状況は考慮から外す。]

この表式を用いると遷移振幅の一素片は次のように書き換えることができる：

$$\langle q_2|(1-i\epsilon\hat{H}(\hat{p},\hat{q}))|q_1\rangle = \int\frac{dp_1}{2\pi}\langle q_2|p_1\rangle\langle p_1|(1-i\epsilon\hat{H}(\hat{p},\hat{q}))|q_1\rangle$$

$\hat{p},\hat{q}\to p,q.$

$$= \int\frac{dp_1}{2\pi}\langle q_2|p_1\rangle\langle p_1|q_1\rangle(1-i\epsilon H(p_1,q_1))$$

$$= \int\frac{dp_1}{2\pi}e^{-ip_1q_1}e^{+ip_1q_2}(1-i\epsilon H(p_1,q_1))$$

$$= \int\frac{dp_1}{2\pi}e^{ip_1(q_2-q_1)}(1-i\epsilon H(p_1,q_1))$$

最終的な振幅の表式は次のようになる：

$$\langle q'',t''|q't'\rangle = \langle q''|(1-i\epsilon\hat{H})\int dq_{N-1}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|(1-i\epsilon\hat{H})\int dq_{N-2}|q_{N-2}\rangle\langle q_{N-2}|(1-i\epsilon\hat{H})$$

$$\times\cdots\times(1-i\epsilon\hat{H})\int dq_1|q_1\rangle\langle q_1|(1-i\epsilon\hat{N})|q'\rangle$$

[$(1-i\epsilon\hat{H})$の前に pの完全系を挿入している.]

$$= \langle q''|\int\frac{dp_{N-1}}{2\pi}|p_{N-1}\rangle\langle p_{N-1}|(1-i\epsilon\hat{H})\int dq_{N-1}|q_{N-1}\rangle\langle q_{N-1}|\int\frac{dp_{N-2}}{2\pi}|p_{N-2}\rangle\langle p_{N-2}|(1-i\epsilon\hat{H})$$

$q''=q_N$

$$\times\int dq_{N-2}|q_{N-2}\rangle\langle q_{N-2}|\times\cdots\times\int\frac{dp_1}{2\pi}|p_1\rangle\langle p_1|(1-i\epsilon\hat{H})|q_1\rangle\langle q_1|$$

$$\times\int\frac{dp_0}{2\pi}|p_0\rangle\langle p_0|(1-i\epsilon\hat{H})|q'\rangle$$

$q'=q_0$

$$= \int\frac{dq_1dp_1}{2\pi}\int\frac{dq_2dp_2}{2\pi}\times\cdots\times\int\frac{dq_{N-1}dp_{N-1}}{2\pi}\times\int\frac{dp_0}{2\pi}$$

$$\times\exp\left[i\sum_{n=0}^{N-1}p_n(q_{n+1}-q_n)\right]\prod_{n=1}^{N-1}\left[1-i\epsilon H(p_n,q_n)\right]\times\left[1-i\epsilon H(p_0,q_0)\right]$$

ハミルトニアンの相乗を $N\to\infty$ の極限で指数関数に変えると、

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left[1-i\frac{\Delta t}{N}H(p_n,q_n)\right] = \exp\left[-i\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}H(q_n,p_n)\right]$$

したがって、

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle = \int dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{dp_1}{2\pi} \cdots \frac{dp_{N-1}}{2\pi}$$

$$\times \exp\left[i \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{p_n (q_{n+1} - q_n)}{\Delta t} - H(p_n, q_n) \right\} \right]$$

・ p_0 の積分は 値が 固定されているから

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \delta(p_0 - p') = 1$$

結果としては変わらない。

このとき、

$$t_n = t' + n\Delta t, \quad q_n = q(t_n), \quad p_n = p(t_n)$$

と書いた。$\Delta t \to 0$ $(N \to \infty)$ の極限で

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \dot{q}(t_n)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) \Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \int_{t'}^{t''} f(t) dt$$

より、

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle = \int [\mathcal{D}q][\mathcal{D}p] \exp\left[i \int_{t'}^{t''} dt \left(p\dot{q} - H(p, q) \right) \right]$$

ただし、

$$[\mathcal{D}q] = \prod_{i=1}^{N-1} dq_i \quad , \quad [\mathcal{D}p] = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dp_i}{2\pi}$$

$i=0$ の積分は？

$\because$ 端点は値が固定されているから。

である。この積分を経路積分 (path integral) もしくは、

汎関数積分 (functional integral) と呼ぶ。

[$\Rightarrow$ 位相空間 (phase space.) での経路積分の表式]

○ $N=3$ の場合

$$\langle q''t''|q't'\rangle = \langle q''|(1-i\epsilon\hat{H})^3|q'\rangle$$

$$= \langle q''|(1-i\epsilon\hat{H})\underline{\int dq_2 |q_2\rangle\langle q_2|}(1-i\epsilon\hat{H})\underline{\int dq_1 |q_1\rangle\langle q_1|}(1-i\epsilon\hat{H})|q'\rangle$$

$$= \langle q''|\underline{\int \frac{dp_2}{2\pi}|p_2\rangle\langle p_2|}(1-i\epsilon\hat{H})\underline{\int dq_2 |q_2\rangle\langle q_2|}\underline{\int \frac{dp_1}{2\pi}|p_1\rangle\langle p_1|}(1-i\epsilon\hat{H})\underline{\int dq_1 |q_1\rangle\langle q_1|}$$

$$\times \underline{\int \frac{dp_0}{2\pi}|p_0\rangle\langle p_0|}(1-i\epsilon\hat{H})|q'\rangle$$

$$= \int\frac{dq_2 dp_2}{2\pi}\int\frac{dq_1 dp_1}{2\pi}\int\frac{dp_0}{2\pi}\langle q''|p_2\rangle\langle p_2|q_2\rangle(1-i\epsilon H(p_2,q_2))$$

$$\times \langle q_2|p_1\rangle\langle p_1|q_1\rangle(1-i\epsilon H(p_1,q_1)) \times \langle q_1|p_0\rangle\langle p_0|q'\rangle(1-i\epsilon\hat{H}(p_0,q_0))$$

$$= \int\frac{dq_2 dp_2}{2\pi}\int\frac{dq_1 dp_1}{2\pi}\int\frac{dp_0}{2\pi} e^{iq''p_2 - ip_2q_2} e^{iq_2p_1 - iq_1p_1} e^{iq_1p_0 - ip_0\underset{q'=q_0}{\underbrace{q_0}}}$$

$$\times (1-i\epsilon H(p_2,q_2))(1-i\epsilon(p_1,q_1))(1-i\epsilon\hat{H}(p_0,q_0))$$

$$= \int\frac{dq_2 dp_2}{2\pi}\frac{dq_1 dp_1}{2\pi}\frac{dp_0}{2\pi}\exp\left[ip_2(\underset{q''=q_3}{\underbrace{q_3}}-q_2)+ip_1(q_2-q_1)+ip_0(q_1-q_0)\right]$$

$$\times \prod_{n=0}^{N-1}\left[1-i\epsilon H(p_n,q_n)\right]$$

$$= \int\frac{dq_2 dp_2}{2\pi}\frac{dq_1 dp_1}{2\pi}\frac{dp_0}{2\pi}\exp\left[i\sum_{i=0}^{2}p_i(q_{i+1}-q_i)\right]\times\prod_{i=0}^{2}\left[1-i\epsilon H(p_i,q_i)\right]$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{2}dq_i\right)\left(\prod_{i=0}^{2}\frac{dp_i}{2\pi}\right)\exp\left[\sum_{i=0}^{2}\left\{ip_i(q_{i+1}-q_i)-i\Delta t\cdot H(p_i,q_i)\right\}\right]$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{2}dq_i\right)\left(\prod_{i=0}^{2}\frac{dp_i}{2\pi}\right)\exp\left[i\Delta t\sum_{i=0}^{2}\left\{\frac{p_i(q_{i+1}-q_i)}{\Delta t}-H(p_i,q_i)\right\}\right]$$

この経路積分は、相空間の固定された2点 (q',t'), (q'',t'') をつなぐすべての経路に対する和となっている。

より多くの自由度を持つ場合への拡張は単純。q, p をベクトルとして再定義すればよい。

$$\langle q_1'' q_2'' \cdots q_n'', t'' | q_1' q_2' \cdots q_n', t' \rangle$$

$$= \int \prod_i [\mathcal{D}q_i][\mathcal{D}p_i] \cdot \exp\left[i \int_{t'}^{t''} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p, q) \right) dt \right]$$

ここで、

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{D}q_i &= \prod_{j=1}^{N-1} dq_{i_j} = dq_{i_1} dq_{i_2} \cdots dq_{i_{N-1}} \\ \mathcal{D}p_i &= \prod_{j=0}^{N-1} \frac{dp_{i_j}}{2\pi} = \frac{dp_{i_1}}{2\pi} \frac{dp_{i_2}}{2\pi} \cdots \frac{dp_{i_{N-1}}}{2\pi} \end{aligned} \right] \rightarrow t' \to t'' \text{ を } N \text{分割したことによる離散化}$$

$$\prod_i [\mathcal{D}q_i][\mathcal{D}p_i] = \underbrace{\mathcal{D}q_1 \mathcal{D}q_2 \cdots \mathcal{D}q_n}_{n\text{コ}} \times \underbrace{\mathcal{D}p_1 \cdot \mathcal{D}p_2 \cdots \mathcal{D}p_n}_{n\text{コ}}$$

n 自由度（n 粒子系）を考えたことによる一般化.
（non-relativistic なので Bose 粒子として考えている）

特別な場合として、古典的ハミルトニアンが次の形の場合を考える：

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m^2} + V(q)$$

運動量の積分は解析的に実行できる。

$$\int [\mathcal{D}p] \exp\left\{ i\int_{t'}^{t''} dt \left[p\dot{q} - H(p,q)\right] \right\}$$

$$= i\int_{t'}^{t''} dt \left[p\dot{q} - \frac{p^2}{2m} - V(q)\right]$$

$$= i\int_{t'}^{t''} dt \left[-\frac{1}{2m}\left(p^2 - 2mp\dot{q}\right) - V(q)\right]$$

$$= i\int_{t'}^{t''} dt \left\{-\frac{1}{2m}\left(p - m\dot{q}\right)^2 + \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right\}$$

$$= i\int_{t'}^{t''} dt \left[-\frac{1}{2m}\left(p - m\dot{q}\right)^2\right] + i\int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q)\right]$$

$\exp\{\cdots\}$

$$\int [\mathcal{D}p] = \int\cdots\int \underbrace{\frac{dp_0}{2\pi}\frac{dp_1}{2\pi}\cdots\cdots\frac{dp_{N-1}}{2\pi}}_{N\text{コ}} \exp\left\{ i \sum_{i=0}^{N-1}\left[\Delta t \frac{-1}{2m}\left(p_i - m\dot{q}_i\right)^2\right]\right\}$$

Nコ : $p_0 \sim p_{N-1}$

時間間隔を分割した.

$$\times \exp\left[i\int_{t'}^{t''} dt\, L(q,\dot{q})\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{i\Delta t/2m}}\right)^N \exp\left[i\int_{t'}^{t''} dt\, L(q,\dot{q})\right]$$

$$= \left(\frac{2m\pi}{4\pi^2 \cdot i\Delta t}\right)^{N/2} \exp\left[i\int_{t'}^{t''} dt\, L(q,\dot{q})\right]$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i\Delta t}\right)^{N/2} \exp\left[i\int_{t'}^{t''} dt\, L(q,\dot{q})\right]$$

$\int [\mathcal{D}p]$ を実行した結果。 この結果が正当化されるには、
離散量から連続量への極限を考える必要がある。つまり、$\lim_{N\to\infty}$ が加わる。

ここで、古典 Lagrangian を

$$L(q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-V(q)$$

とした。

さらに作用積分を

$$S=\int_{t'}^{t''}L(q,\dot{q})\,dt$$

で定義すると、遷移振幅に対する Feynman の path integral の公式として、

$$\langle q''t''|q't'\rangle = N_0\int[\mathcal{D}q]\,e^{iS[q(t)]}$$

[配位空間(configuration space)での経路積分の表示となる。]

と書くことができる。N_0 は通常は発散してしまう定数であるが、規格化の際に打ち消し合うので物理的な結果には寄与しない。

時間順序化された演算子の行列要素に対する Feynman 振幅は、

残るのは場(座標)の積分。

$$\langle q''t''|T(\underbrace{q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)}_{\text{Hilbert space の operator}})|q't'\rangle = \underline{N_0}\int[\mathcal{D}q]\,\underbrace{q(t_1)q(t_2)\cdots q(t_n)}_{c\text{-数の積分}}\,e^{iS}$$

∫[𝒟p]は実行することで factor out する。

$$= N_0\int \underbrace{dq_1dq_2\cdots dq_{N-1}}_{\text{測度}}\cdot\overbrace{q_1q_2\cdots q_N}^{c\text{数の積}}\times\exp\left[i\sum_{i=1}^{N-1}\Delta t\cdot L(q_n)\right]$$

⇒ 具体的な問題で見てみないと分からない。　$N\to\infty$ を考える。

4.2 Path Integral for Field theory.

変数の数を無限にとることで、場の理論へと拡張することができる.
まず、簡単のため 1つの Boson 場について説明する.

[多粒子系の Boson 場への一般化は単純だが、Fermion 場への拡張は Grassmann variable の積分を含むので少し複雑。 $\Longrightarrow$ §4.5 − §4.7]

単体の Boson 場に対しては、座標の役割は場の演算子に取って替わられる：

$$\underbrace{\hat{\phi}(x)}_{\text{Field operator}}|\phi\rangle = \underbrace{\phi(x)}_{\text{固有値}}|\phi\rangle$$

固有状態

このとき、$\phi(x)$ が空間座標 ($\vec{x}$) の C-数関数となっている. このとき、t_1 において 1つの場の固有状態から t_2 における別の場の固有状態への遷移振幅は.

$$\langle\phi_2 t_2|\phi_1 t_1\rangle = \langle\phi_2|e^{-i\hat{H}\cdot(t_2-t_1)}|\phi_1\rangle$$

と表される。このとき、$\hat{H}$ は時間に依存してないと仮定する。 先の例との類推から、
Feynman path integral は

$$\langle\phi_2 t_2|\phi_1 t_1\rangle = \overbrace{N_0}^{\text{factor}}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\underbrace{[\mathcal{D}\phi]}_{\text{場(座標)の経路積分}}\exp\left[i\overbrace{\int_1^2\mathcal{L}\,d^4x}^{\text{作用積分}}\right]$$

と書ける。このとき、古典 (QFT ではないという意味) Lagrangian density は $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial^\mu\phi(x))$ であり、

$$\int_1^2 d^4x \equiv \int_{t_1}^{t_2}dt\int_{\text{space}}d^3x, \quad \phi_2(x) \equiv \phi(x, t_2), \quad \phi_1(x) \equiv \phi(x, t_1)$$

の意味で用いた。

このときの積分 $\int[\mathcal{D}\phi]$ は 汎関数積分 と呼ばれる。

⇒ 汎関数空間上での積分であり、通常の積分の無限積のような意味。

この表式を使う前に この式が実際的な意味をもつような近似について説明が必要。

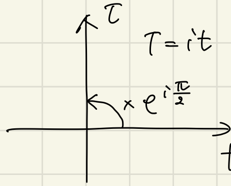
もう1つ、演算子のT積についての Feynman振幅 の表式は、

A_0 の共役運動量が 0 になるとき、ゴースト場を入れる必要あり。

$$\langle \phi_2 t_2 | T(\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)) | \phi_1 t_1 \rangle$$

$$= N_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \underbrace{[\mathcal{D}\phi]}_{\text{測度}} + \underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)}_{\text{C-数についての積分になる}} \exp\left(i\int_1^2 \mathcal{L}\, d^4x\right).$$

このとき、右辺の $\phi(x_n)$ は C-数値関数である。



$T=it$ として時間軸を虚軸へ。
practicalには、$t=-i\tau$ とする。

4.2.1. Evaluation of Integrals in Euclidian Space.

経路積分を評価するとき、時間を虚数軸へ回転させることがしばしば行われる。
これは Minkowski space から Euclid space への変換に対応する。（$g_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$ の計量の変換）

時間発展演算子 $\exp(-i\hat{H}t)$ は

$$\exp(-i\hat{H}t) \xrightarrow[T=it]{} \exp\left(-i\hat{H}(-i\tau)\right) = \exp(+i^2\hat{H}\tau)$$
$$= \exp(-\hat{H}\tau)$$

と変換される。物理的な propagation ではないが、$\exp(-\hat{H}\tau)$ は数学的に well defined な演算子となる。また、その固有値を $\exp(-E\tau)$ として計算できる。
このようにして、"$\exp(-\hat{H}\tau)$" の固有値が求められたら、$\hat{H}$ の固有値 E は

$$E = -\frac{1}{\tau}\ln(e^{-E\tau})$$

として求められる。

このことから、$\exp(-\hat{H}\tau)$ の固有値を求めることは、$\hat{H}$ の固有値を求めることに等価となる。
故に、Minkowski $\longleftrightarrow$ Euclid の変換で得られる情報は変わらない。
[$t \to \tau$ への回転において、極がないことを仮定している]

一度、$\exp(-\hat{H}\tau)$ の固有値が得られれば、$\exp(-i\hat{H}t)$ の固有値を求めることができる。

場の理論におけるこの処方は『Wick rotation』と呼ばれる。Euclid と Minkowski の間の関係は

t：実時間と呼び
τ：虚時間

$$x_E = (\vec{x}, \underline{x_4 \equiv \tau}) \qquad \underbrace{d^4x}_{\text{Minkowski timespace 4-volume.}} = -i\, d^4x_E$$

$$k_E = (\vec{k}, \underline{k_4 = -ik_0}) \qquad \underbrace{d^4k}_{\text{Minkowski 4-momentum volume.}} = i\, d^4k_E$$

$$x_E^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -x^2 = -(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

$$k_E^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = -k^2 = -(k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)$$

Wick rotation により、Minkowski space での Lorentz invariance は Euclid space での O(4) invariance に置き換わる。
また、計量を $g_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1 \cdots 4)$ と書く。$\delta_{\mu\nu}$ に関しては添字の上下は区別しない。

次に場の変換を確認すると、

1. Minkowski space での実スカラー場 $\phi(x)$ は $O(4)$ Euclid space でもスカラー場である：

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x_E)$$

⇒ $\phi(x)$ の x を x_E に置き換える。

2. massive なベクトル場 $A^\mu(x)$ は次の関係により接続される：

$$A^k(x) \longrightarrow A^k(x_E) \quad (k=1,2,3)$$

$$A^0(x) \longrightarrow i A_4(x_E)$$

3. 一般の gauge 場については少々複雑。⇒ 共変 gauge をとるとよい。

以上の処方を用いれば、Euclid space での propagator は直接的に得られる：

- Minkowski での自由スカラー場に対する Feynman propagator

$$\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\epsilon \to 0^+)$$

- $O(4)$ Euclid での自由スカラー場に対する Feynman propagator

$$\Delta_E(x_E) = -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik_E\cdot x_E}}{k_E^2 + m^2}$$

$\Bigg[$ $k^2 - m^2 + i\epsilon \to -k_E^2 - m^2 + i\epsilon \to -(k_E^2 + m^2)$ ($\because d^4k_E$ で極がない)

$d^4k \to i d^4k_E$ より $-i$ の因子がつく。また、$k\cdot x$ は $-ix_4 \times ik_4 = x_4 \cdot k_4$ より そのまま $\Bigg]$
$= x_0 \cdot k_0$

Euclid space では $i\epsilon$ は必要ない。これは、実積分が極を持たないためである。

さらに、Euclid spaceでのダランベール演算子は次のようになる：

$$\Box_E = \vec{\nabla}^2 + \partial_4^2 = -\Box$$

そして、先述のpropagatorは波動方程式

$$(\Box_E - m^2)\, G_E(x) = i\delta^{(4)}(x)$$

の解である。

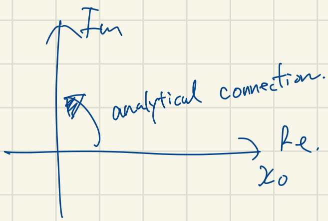
$$\left[\begin{aligned} &\Box_E\, e^{-ik_E\cdot x_E} = (-ik_E)^2 = -k_E^2 \\ \Rightarrow\ &(\Box_E - m^2)\, e^{-ik_E\cdot x_E} = -(k_E^2 + m^2) \end{aligned}\right.$$

となることから、Fourier変換を用いて求めることができる。]

$t = -i\tau$

$x_4 = i x_0$

$x_4 \in$



$$\langle \Omega | T\{ \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\} | \Omega \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}\phi]\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\, e^{iS[\phi]}}{\int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS[\phi]}}$$

計算に必要になるのは Green's function.

$$G^{(n)}(x_1 x_2 \cdots x_n) = \langle 0 | T\{ \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\cdots\hat{\phi}(x_n)\} | 0 \rangle$$

これを計算するには、生成汎関数を

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1\, d^4x_2 \cdots d^4x_n\, G^{(n)}(x_1 \cdots x_n)\, J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_n)$$

とし

$$i^{-n} \left. \frac{\delta^{(n)} Z}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}$$

を計算する。（⇒形式的には。）

このような Z として、

$$Z = e^{iW[J]} = N \int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS[\phi, J]}$$

$$= N \int [\mathcal{D}\phi] \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \phi(x) J(x) \right] \right\}$$

気になるポイントは、

$$\int [\mathcal{D}p][\mathcal{D}q]\, e^{i(pq - H[q])}$$

$$= N \int [\mathcal{D}q]\, e^{iS[q]}$$

○ 量子力学における path integral は $\lim_{N\to\infty}$ の下で書き下すことができる.

○ QFTに移行したとき, $p\to\pi$, $q\to\phi$ の対応をしっかりと考えて,

configuration space での経路積分 $N\int[\mathcal{D}\phi]\,e^{iS[\phi]}$ がどうやって得られるか.

$\Longrightarrow$ 坂本さん. p.161~

$$
{}_H\langle\phi_F,t_F|\phi_I,t_I\rangle_H=\int\underbrace{[\mathcal{D}\pi]}_{\prod_{t,\vec{x}}d\pi}\int_{\phi(t_I,\vec{x})=\phi_I(\vec{x})}^{\phi(t_F,\vec{x})=\phi_F(\vec{x})}\underbrace{[\mathcal{D}\phi]}_{\prod_{t,\vec{x}}d\phi}
$$

$$
\times\exp\left\{i\int_{t_I}^{t_F}dt\int d^3\vec{x}\left[\pi(t,\vec{x})\dot{\phi}(t,\vec{x})-\mathcal{H}(\pi,\phi)\right]\right\}
$$

指数関数の中身を平方完成して,

$$
\pi\dot{\phi}-\frac{1}{2}\pi^2=-\frac{1}{2}(\pi-\dot{\phi})^2+\frac{1}{2}\dot{\phi}^2
$$

$\tilde{\pi}=\pi-\dot{\phi}$ で π 積分を実行し, 現れた(発散する)定数は

ϕ 積分の測度に取り込む.

$$
\Longrightarrow\quad\int_{\phi_I}^{\phi_F}\underline{[\mathcal{D}\phi]}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_I}^{t_F}dt\int d^3\vec{r}\,\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\right\}
$$

$\Rightarrow$ 形式的に $\mathcal{D}\phi$ と
書いているだけで, 先述の $\mathcal{D}\phi$ とは定義が違う。
しかし, Green's function を考える段階で
キャンセルするので, 問題ない.

最終的な、T 積の期待値の path integral は、

$$
{}_H\langle \phi_F, t_F | T\{\hat{\phi}_H(t_1)\cdots\hat{\phi}_H(t_n)\} | \phi_I, t_I \rangle_H
$$

$$
= \int_{\phi_I}^{\phi_F} [\mathcal{D}\phi]\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right\}
$$

が配位空間 (configuration space) での Feynman path integral の表式。

4.2.2. Coupling to External Sources.

QFT においては

系に対する全ての力学的情報は 任意の外場に対する真空の応答から引き出すことができる

と説明される。この responce は 真空から真空への遷移振幅として定められる：

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle_J \equiv \langle \text{vacuum}(t=+\infty) | \text{vacuum}(t=-\infty) \rangle_J$$

この期待値は $t=-\infty$ で基底状態であった系が $t=+\infty$ で基底状態であるような振幅を測っている。また、外場 J は遠い過去と未来においては スイッチオフ されている。
通常、Jは局在化した座標の c-数値関数にとられる。

ⓐ Generating Functionals

外場 $J(x)$ の効果を取り入れるためには、$\mathcal{L}$ に $\phi(x)J(x)$ の項を加えればよい。つまり、

$$\langle \phi_2 t_2 | \phi_1 t_1 \rangle_J \equiv N_0 \int_{\phi_1}^{\phi_2} [\mathcal{D}\phi] \exp\left[i \int_1^2 d^4x \left(\mathcal{L} + \phi(x)J(x) \right) \right]$$

source field を加える。

とする。このとき、Feynmann の path integral の表式を用いた。
[configuration space での表示]

ユニタリー性により、真空をつなぐ振幅は 位相因子にしかなり得ない。そこで、
2つの 生成汎関数 $Z[J]$, $W[J]$ を次式で導入する：

$$\boxed{Z[J] \equiv e^{iW[J]} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J}$$

この表式より いくつか重要な結果が得られる。

$$\ln Z[J] = iW[J]$$

$$\frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = i \frac{\delta W[J]}{\delta J}.$$

まず、$Z[J]$ を汎関数 Taylor 級数で展開すると、

$$\boxed{Z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n\ G^{(n)}(x_1x_2\cdots x_n)J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)}$$

このときの展開係数 $G^{(n)}(x_1x_2\cdots x_n)$ が n点 Green's functions である。（ただし、座標空間での表示）

= n本の外線をもつ Feynman diagrams の和

同様に、$iW[J]$ も展開することができて、

$$\boxed{iW=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int d^4x_1 d^4x_2\cdots d^4x_n\ G_c^{(n)}(x_1x_2\cdots x_n)\ J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_n)}$$

このときの展開係数 $G_c^{(n)}$ は 連結n点 Green's functions と呼ばれる。

= n本の外線をもった"連結した" Feynman diagrams の和

したがって、vacuum-vacuum 振幅

$$\langle 0^+|0^-\rangle_J=Z[J]$$

は 系の Green's functions の生成汎関数 であり、

$$W[J]=-i\log Z[J]$$

は 連結 Green's functions の生成汎関数 となっている。

Green's functions は系の時間発展を決定するので、Z, iW の Taylor 展開の表式は、外場が存在する中での vacuum-vacuum 振幅を考えることで、QFTの dynamics が決定されることを意味している。

これは path integral に特有のものではないが、このアイデアを実現するには path integral の方法が適していることを見ていく。

Exercise 4.1

$W[J]$ がスカラー場 ϕ^4 理論に対して、2点と4点の連結ダイアグラムのみを生成することを確認する。

ϕ^4 理論の Lagrangian density は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{f_0}{4!}\phi^4 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 , \quad \mathcal{L}_{int} = -\frac{f_0}{4!}\phi^4$$

と書ける。

$$Z[J] = N\int[\mathcal{D}\phi]\, e^{iS[\phi,J]} = N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left\{ i\int d^4x\left[\mathcal{L} + \phi(x)J(x)\right]\right\}$$

Lagrangian density を決める

$\downarrow$

Minkowski 作用を考える.

$\downarrow$

Euclid化する

$\downarrow$

経路積分を実行.

$\downarrow$

$Z = e^{iW} = \exp\{\cdots\}$ の形

$\downarrow$

$W[J]$ が決定できる

$\downarrow$

汎関数微分から $G_c^{(n)}$ を求める?

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \exp\left[\frac{-if_0}{4!}\int d^4x \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4\right] \times \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\right.$$

経路積分から Feynman diagram を得るためにカギとなるのは、Green's functions に対する生成汎関数と古典的な作用積分との間の関係である。

$$Z[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J = e^{iW[J]} = N \int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS[\phi, J]}$$

この部分が $\langle \phi_2 t_2 | \phi_1 t_1 \rangle$ からの拡張。$t_2 \to +\infty$, $t_1 \to -\infty$ とし、この極限で真空が漸近状態

ただし、$S[\phi, J] = \int d^4x \left[\mathcal{L} + \phi(x) J(x) \right] = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt} \int d^3\vec{x} \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \phi(x) J(x) \right]$

このとき、規格化定数 N は $W \to 0\ (J \to 0)$ となるようにとるものとする。
また、この表式における functional integral は <u>Euclid space で評価するもの。</u>

↳ この結果得られるのは Euclid での生成汎関数であるが $\tau = it$ の解析接続により Minkowski での量に戻すものとして理解する。

Minkowski と Euclid の対応から vacuum-vacuum 振幅に対する Euclidian functional integral は次のようになる：

$$Z[J] = N \int [\mathcal{D}\phi] \exp\left[-\frac{1}{\hbar} \left\{ S_E[\phi] - \int d^4x_E\, \phi(x_E) J(x_E) \right\} \right]$$

このとき、E は Euclidian 量を表し、ここだけ $\hbar$ をあらわに書いた。また、Euclidian 作用は

$$S_E[\phi] \equiv -iS[\phi]$$

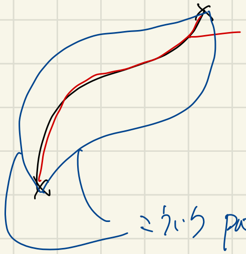
と書いていて、$S[\phi]$ は Minkowski 作用において $x_0 \to -ix_4$ としたものである。

⇒ 修論用にまとめておく必要あり。

この形から、Euclidian functional integral は 4次元の（古典的な）統計力学において、温度 T を $\hbar$ に置き換えたときの分配関数に似ている。

⟶ $\boxed{\text{坂本 p.193〜 §8.8.2}}$

Minkowski space : それぞれのpathの, path integralに対する寄与は 古典経路周りを除いた部分で激しく振動する位相因子をもつ.



こういう path は e^{iS} の位相因子が激しく振動する. (∵ $S \gg \hbar = 1$ となり, $\cos S + i\sin S$ が振動)

Euclidian space : 位相因子の代わりに Boltzmann 因子を 各経路が持つことになる。
ただし、古典的経路による寄与が支配的。
∵ Euclidian action を最小とするため。 ⇒ instanton と呼ぶ。

正確には、古典作用を最小とするような経路 x のこと.

◎ Functional Calculus.

$$Z[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J = e^{iW[J]} = N \int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS[\phi, J]} \tag{4.36}$$

ただし、 $S[\phi, J] = \int d^4x \left[\mathcal{L} + \phi(x) J(x) \right]$

(4.36) と (4.35) が Green's functions の生成汎関数であることから, その Green's functions は これら経路積分の汎関数微分から求めることができる.

汎関数積分は 関数に対して 1つの数を対応させる. (なので、積分は関数空間に渡ってとられる。)
これは、通常の関数が 1つの数 x に対して 1つの数 $f(x)$ を 対応付けることに注意

汎関数微分（変分）は偏微分の一般化として表すことができる。
関数の微小変化量を次の和で書いたとき、

$$df = \sum_i C_i dz_i = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}\right) dz_i$$

係数 C_i を偏微分（係数）とみなすことができる。同様にして、汎関数 $F(u)$ の変化量 $\delta F(u)$ を考えたとき、この変化量は次の形で表すことができる：

$$\delta F(u) = \int C(x, u)\, \delta u\, dx$$

このとき、汎関数微分を

$$\frac{\delta F(u)}{\delta u(x)} \equiv C(x, u)$$

で定義する。ここで、$C(x, u)$ は u の汎関数であり、u は連続変数 x に依存している。
この対応関係から、汎関数微分は通常の微分と同様の特徴をもっている。

例）極限としての定義

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \frac{F[f(x) + \epsilon \delta^{(4)}(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon} \right\}$$

これが極限を用いた汎関数微分の定義である。

Exercise 4.2

limitによる定義を用いて以下を示す。

(i) $$\frac{\delta \int f(x)dx}{\delta f(y)} = 1$$

$$\frac{\delta \int f(x)dx}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int \{ f(x) + \epsilon\delta^{(4)}(x-y) \} dx - \int f(x)dx}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon \cdot \int \delta^{(4)}(x-y)dx}{\epsilon}$$

$$= \int \delta^{(4)}(x-y)dx$$

$$= \underline{1}$$

(ii) $$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta^{(4)}(x-y)$$

defより、

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[J(y) + \epsilon\delta^{(4)}(x-y)] - J(y)}{\epsilon}$$

$$= \underline{\delta^{(4)}(x-y)}$$

(iii) $$\frac{\delta \int G(x,y) f(y) dy}{\delta f(z)} = G(x,z)$$

defより、

$$\frac{\delta \int G(x,y) f(y) dy}{\delta f(z)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int G(x,y)[f(y) + \epsilon\delta^{(4)}(y-z)]dy - \int G(x,y) f(y) dy}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int G(x,y)\delta^{(4)}(y-z)dy = \underline{G(x,z)}$$

(iv) $$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} = i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\exp\left[i\int d^4x\,(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))\right]$$

generating functional

$$Z[J] = N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}+\phi(x)J(x)\right)\right]$$

を用いると def より

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathcal{L}+\phi(x)\left(J(x)+\epsilon\delta^{(4)}(x-y)\right)\right]\right\}\right.$$
$$\left. - N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left\{i\int d^4x\left[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)\right]\right\}\right)\times\frac{1}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times N\int[\mathcal{D}\phi]\left[e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x)) + i\epsilon\int d^4x\,\phi(x)\delta^{(4)}(x-y)}\right.$$
$$\left. - e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))}\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times N\int[\mathcal{D}\phi]\left\{e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x)) + i\epsilon\phi(y)} - e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))}\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times N\int[\mathcal{D}\phi]e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))}\times\left(\underline{\underline{e^{i\epsilon\phi(y)}}} - 1\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times N\int[\mathcal{D}\phi]e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))}\times\underline{\underline{i\epsilon\phi(y)}}$$

$$= iN\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)e^{i\int d^4x(\mathcal{L}+\phi(x)J(x))}$$

両辺の規格化 N を落とすと、

$$\underline{\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} = i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}+\phi(x)J(x)\right)\right]}$$

が得られる。

(v) $$\frac{\delta^{(2)} Z[J]}{\delta J(y)\delta J(z)} = (i)^2 \int [\mathcal{D}\phi]\phi(y)\phi(z) \exp\left[i\int d^4x \left(\mathcal{L} + \phi(x)J(x)\right)\right]$$

(iv) の結果を用いて、

$$\frac{\delta^{(2)} Z[J]}{\delta J(y)\delta J(z)} = \frac{\delta}{\delta J(z)}\left(\frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)}\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\times\left(i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\exp\left\{ i\int d^4x \left[\mathcal{L} + \phi(x)\left(J(x) + \epsilon\delta^{(4)}(x-z)\right)\right]\right\} - i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\exp\left\{ i\int d^4x\left[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)\right]\right\}\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\left\{ e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)] + i\epsilon\int d^4x\phi(x)\delta^{(4)}(x-z)} - e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)]}\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\times i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)]}\left(e^{i\epsilon\phi(z)} - 1\right)$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\cancel{\epsilon}}\times i\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)]}\times i\cancel{\epsilon}\phi(z)$$

$$= (i)^2\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\phi(z)e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)]}$$

$$\therefore\ \frac{\delta^{(2)} Z[J]}{\delta J(y)\delta J(z)} = (i)^2\int[\mathcal{D}\phi]\phi(y)\phi(z)e^{i\int d^4x[\mathcal{L}+\phi(x)J(x)]}$$

が得られる。

この結果はどう解釈できるか？

$$\frac{\delta J(y)}{\delta J(x)} = \delta(x-y)$$ から、

$$\frac{\delta \int f(x)\,dx}{\delta f(y)} = \int \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)}\,dx = \int \delta(x-y)\,dx = 1$$

$$Z[J] = \int [D\phi]\, e^{i\int d^4x\,[\mathcal{L} + \phi(x)J(x)]}$$

$$\to \frac{\delta Z[J]}{\delta J(y)} = \int [D\phi]\, i\phi(y)\, e^{i\int d^4x\,[\mathcal{L} + \phi(x)J(x)]}$$

$$\to \frac{\delta^{(2)} Z[J]}{\delta J(y)\delta J(z)} = \int [D\phi]\, i\phi(x)\, i\phi(z)\, e^{i\int d^4x\,[\mathcal{L} + \phi(x)J(x)]}$$

のように通常の微分と同様に作用している。

Green's functions

(4.35), (4.36) から、演算子の T-積の行列要素 (Green's function) は source に関して path integral を汎関数微分し $J \to 0$ とおくことで得られる。

(4.35a), (4.35b) … $Z[J] \equiv e^{iW[J]} \equiv \langle 0^+ | 0^- \rangle_J$ の汎関数展開

$$\begin{cases} Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \, \underbrace{G^{(n)}(x_1, \cdots, x_n)}_{\text{Green's function}} J(x_1) \cdots J(x_n) & (4.35a) \\ iW = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n \, G_c^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) J(x_1) \cdots J(x_n) & (4.35b) \end{cases}$$

一方、$Z[J]$ は vacuum-to-vacuum の期待値でもあるので、経路積分で書くことができる。

$$Z[J] = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J = N \int [D\phi] \, e^{iS[\phi, J]} \qquad (4.36)$$

ここで、$S[\phi, J] = \int d^4x \left[\mathcal{L} + \phi(x) J(x) \right]$

Z を $J()$ で汎関数微分して、$J \to 0$ とすれば得られる。

特に、

$\hat{\phi}$: operator

$$\begin{cases} i^{-n} \left[\dfrac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \right]_{J=0} \propto \langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle \\ \qquad = G^{(n)}(x_1 x_2 \cdots x_n) \\ i^{1-n} \left[\dfrac{\delta^{(n)} W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \right]_{J=0} = \langle 0 | T(\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle_c \\ \qquad = G_c^{(n)}(x_1 x_2 \cdots x_n) \end{cases}$$

このとき、比例係数は物理的には重要ではない。また、添字の c は連結ダイアグラムを意味する。

経路積分の表式と比較すると、Green's function は path integral から次のように構成できることが分かる。

$$G^{(n)}(x_1 x_2 \cdots x_n) \simeq \int [\mathcal{D}\phi]\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \exp\left(i\int d^4x\, \mathcal{L}\right)$$

このとき残っている不定性は Euclidian space で実際に path integral を評価するときに決まるものとして理解する。

全て

Feynman propagator による描像 ($G^{(n)}(x_1 x_2 \cdots x_n)$) は古典的な伝播が支配的な物理過程 (= tree level) に加えて loop に含まれる量子効果も含んでいる。

汎関数積分による描像 (右辺 : $\int [\mathcal{D}\phi]\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \exp\left(i\int d^4x\, \mathcal{L}\right)$) は、

古典経路によって支配的な振幅と、量子効果を古典経路からのズレとして含む。

2021. 8. 4

4.3 Evaluation of Path Integrals

量子力学における経路積分の方法は直感的でエレガント。しかし、無限次元の積分を評価できなければ、実用的なものとはならない。
この章では path integral をどのように計算するかについてみていく。

経路積分が2次の指数関数($\exp(-ax^2)$)を含む場合は、ガウス積分を一般化することで計算ができる(⇒ Exercise 4.5)。

例 一般の2次式に対するガウス積分

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ に対して、

$$Q(x) = \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

とする。このとき、

$$\int (dx)\, e^{-Q(x)} = e^{\frac{1}{2}(\vec{b}, A^{-1}\vec{b}) - c} \cdot \left(\mathrm{Det}\, A\right)^{-1/2}$$

※後で補足あり

ここで、

$$(dx) \equiv \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}}, \quad \mathrm{Det}\, A = \prod_{i=1}^{n} a_i \quad (a_i \text{ は } A \text{ の固有値})$$

※ Gauss積分の係数とキャンセルさせるため。

また、$\vec{x}$ は $Q(\vec{x})$ を最小化するベクトルである：

$$\vec{x} = -A^{-1}\vec{b}$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + C$$

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_{kj} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i A_{ik} + b_k$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_{ki} x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_{ki} x_i + b_k$$

$A_{ik} = A_{ki}$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ki} x_i + b_k$$

$$= (A\vec{x})_k + b_k \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\vec{x} = -A^{-1}\vec{b}} \Rightarrow \underline{\vec{x} = -A^{-1}\vec{b}}$$

$\mathrm{Det}\, A$ という因子は行列 A の行列式であり、行列 A の固有値 a_i の積に等しい：

$$\mathrm{Det}\, A = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

ここまでは数学的な計算の結果。

〈補足〉

$$\int (dx)\, e^{-Q(\vec{x})} = \exp\left[\frac{1}{2}(\vec{b}, A^{-1}\vec{b}) - c\right](\mathrm{Det}\, A)^{-1/2}$$ となること.

計算するのは

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}) - c\right\}$$

$\vec{x}, \vec{b}$ を n 行の縦ベクトルとし、内積をベクトルと行列の積として書く：

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \vec{x}^t = (x_1 \cdots x_n),\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) \to -\frac{1}{2}\vec{x}^t A\vec{x},\quad (\vec{b}, \vec{x}) \to \vec{b}^t\vec{x}\ (= \vec{x}^t\vec{b})$$

この記法を用いると、指数関数の中身を次のように書ける：

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{x}^t A\vec{x} - \vec{b}^t\vec{x} - c\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} + A^{-1}\vec{b})^t A(\vec{x} + A^{-1}\vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{b}^t A^{-1}\vec{b} - c\right\}$$

平方完成に対応。
右辺を展開すれば、左辺に一致することが確かめられる。

$\vec{y} = \vec{x} + A^{-1}\vec{b}$ とおけば、

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{y}^t A\vec{y}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\vec{b}^t A^{-1}\vec{b} - c\right\}$$

となる。$\vec{y}$ と $\vec{x}$ はヤコビアンが1の線形変換なので、$\int dx_1 \cdots dx_n = \int dy_1 \cdots dy_n$ とできる。

A が複素対称行列なので、ユニタリ行列を用いて対角化できる。対角化した基底を

$\vec{x}' = (x_1, \ldots, x_n)^t$ と書き直すと、

$$\underbrace{\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\right\}}_{\text{解析的に実行できるGauss積分}} \underbrace{\exp\left\{\frac{1}{2}\vec{b}^{\,t} A^{-1} \vec{b} - c\right\}}_{\vec{x}\text{に依存しない項}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{a_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{a_2}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{a_n}} \exp\left\{\frac{1}{2}\vec{b}^{\,t} \vec{A} \vec{b} - c\right\} \quad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}} \exp\left\{\frac{1}{2}\vec{b}^{\,t} \vec{A} \vec{b} - c\right\}$$

$$= (\mathrm{Det}\,A)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(\vec{b}, A^{-1}\vec{b}) - c\right\} \quad \cdots (4.48a)$$

が得られる。

具体例として自由スカラー場を考える。

Lagrangian density : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_\mu\phi(x)][\partial^\mu\phi(x)] - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$

classical action functional : $S[\phi] = \int d^4x\, \mathcal{L} = -\frac{1}{2}\int d^4x\, \underline{\phi(x)\,(\Box + m^2)\,\phi(x)}$

$\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ に対して部分積分を実行し、表面項をゼロとして落としている。

Euclidian action : $S_E[\phi] = \frac{i}{2}\int d^4x_E\, \phi(x_E)\left(-\Box_E + m^2\right)\phi(x_E)$

これらから、Euclidian generating functional を作ると

$$Z[J] = N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left(iS[\phi, J]\right)$$

$$= N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\left[\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) + \phi(x)J(x)\right]\right\}$$

$x_4 = T = ix_0$

$$\Rightarrow N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left\{-\frac{1}{2}\int \underline{d^4x_E}\left[\phi(x_E)(\underline{-\Box_E} + m^2)\phi(x_E) + \phi(x_E)J(x_E)\right]\right\}$$

$$= N\int[\mathcal{D}\phi]\exp\left(-Q[\phi, J]\right)$$

ただし、
$$Q[\phi, J] = \frac{1}{2}(\phi, A\phi) - (b, \phi)$$

$$A = -\Box_E + m^2, \qquad b = J(x_E)$$

このとき、有限自由度ベクトルの内積 $(\vec{u}, \vec{v})$ を関数空間での内積

$$(\phi_1, \phi_2) = \int d^4x\, \phi_1^*(x)\phi_2(x) \qquad (\phi_1^* = \phi_1 \text{ より上式})$$

として書いた。

ガウス積分の結果を用いて計算をし、両辺の対数をとると、

$$Z[J] = e^{iW[J]} = N\int [\mathcal{D}\phi] \exp\left\{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi) - (b, \phi)\right\}$$

$$= N\cdot(\mathrm{Det}A)^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}(b, A^{-1}b)\right\}$$

測度の係数の違いはNに含めている。

$$\Rightarrow \ln Z[J] = iW[J] = \frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + \ln\left[N(\mathrm{Det}A)^{-1/2}\right]$$

このとき、$\mathrm{Det}A$ は運動量空間で

$$\mathrm{Det}A = \prod_{k_E}(k_E^2 + m^2)$$

演算子の行列式という形が出てくるが、これはその演算子の固有値の積として理解する。

であり発散するが、$N = (\mathrm{Det}A)^{1/2}$ ととり、$W[J]$の中でキャンセルさせる。

$\vec{b} = J(x_E)$, $A = -\Box_E + m^2$ であることを用いると、$W[J]$は次式となる：

$$W[J] = \frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E\, J(x_E)\underline{\Delta_E(x_E - y_E)}J(y_E) \quad \cdots (4.57)$$

A^{-1}の逆はプロパゲーター　後ろで補足あり。

Minkowski space $[\,d^4x_E = id^4x,\ d^4y_E = id^4y\,]$

$$W[J] = -\frac{1}{2}\int d^4x d^4y\ J(x)\Delta(x-y)J(y) \quad \cdots (4.58)$$

(4.35b)の展開と比較して、2点 Green's function (connected) が Feyman propagator と等しいことが分かる。

$$G_c^{(2)}(x, y) = i\Delta(x-y)$$

◎ 自由場に対して、path integral が canonical method と同じ結果を導くことを確認できた。

◎ 連結ダイアグラムの生成関数も求めることができた。

〈補足〉

$$iW[J] = \frac{1}{2}(b, A^{-1}b) + \ln\left[\cancel{(\mathrm{Det}A)^{1/2}} \cdot \cancel{(\mathrm{Det}A)^{-1/2}}\right]$$

次のように形式的に求められる。

$$A = -\Box_E + m^2, \qquad (\Box_E - m^2)\Delta_E(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \quad \cdots (4.31) \text{より}$$

$$iW[J] = \frac{1}{2}\int d^4x_E \; J(x_E) A^{-1} J(x_E)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x_E \int d^4y_E \; J(x_E) \underline{A^{-1}\delta^{(4)}(x_E - y_E)} J(y_E)$$

$$(\Box_E - m^2)\Delta_E(x_E - y_E) = i\delta^{(4)}(x_E - y_E)$$

$$-A \cdot \Delta_E(x_E - y_E) = i\delta^{(4)}(x_E - y_E)$$

$$-A^{-1} \cdot A \cdot \Delta_E(x_E - y_E) = iA^{-1}\delta^{(4)}(x_E - y_E)$$

$$\therefore \quad \frac{-1}{i}\Delta_E(x_E - y_E) = A^{-1}\delta^{(4)}(x_E - y_E)$$

$$iW[J] = \frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E \; J(x_E) \, i\Delta_E(x_E - y_E) \, J(y_E)$$

$$\therefore \quad W[J] = \frac{1}{2}\int d^4x_E \int d^4y_E \; J(x_E)\Delta_E(x_E - y_E) J(y_E) \qquad (4.57)$$

4.4. Feynman Diagrams.

次に経路積分と Feynman Diagrams の関係を見る。
Lagrangian density が次のように分けることができると仮定する：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}' + \phi(x) J(x)$$

$\mathcal{L}_0$ ： 自由場（として扱う部分），$\mathcal{L}'$ ： $\mathcal{L}_0$ に対して摂動として扱う相互作用部分

作用もこれに対応させて次のように分ける：

$$S = S_0^J + S' = \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + \phi(x) J(x)\right) + \int d^4x\, \mathcal{L}'$$

この分解を用いて生成汎関数は次のように書くことができる：

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}'\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] \exp\left(iW_0[J]\right)$$

$$= \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}'\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] \int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS_0^J[\phi]}$$

発散する数因子をこの中に含めている。

このとき，

$$e^{iW_0[J]} \equiv \int [\mathcal{D}\phi]\, e^{iS^J[\phi]}$$

とし，ϕ の汎関数で与えられる $\mathcal{L}'$ の部分を J に関する汎関数微分で書き換えている（以下）。

$$\because \quad \left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{iW_0[J]} = -i\frac{\delta}{\delta J(y)} \int [\mathcal{D}\phi] \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_0 + i\int d^4x\, \phi(x) J(x)\right]$$

$$= \int [\mathcal{D}\phi]\, \phi(y) \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_0 + i\int d^4x\, \phi(x) J(x)\right]$$

exp( )の中のとき，

$\int \mathcal{L}'$ を与える。

$$\exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}'\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\right] e^{iW_0[J]} = \int [\mathcal{D}\phi] \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}'(\phi)\right] \exp\left[i\int d^4x\, \mathcal{L}_0^J\right]$$

Example : ϕ^4 potential.

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad \mathcal{L}' = \frac{-f_0}{4!}\phi^4.$$

$$\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi^* - m^2|\phi|^2$$

生成汎関数は

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \exp\left[i\int d^4x\,\frac{-f_0}{4!}\left(-i\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right]$$

さっきの結果を用いた。
(=自由場パート)

$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta(x-y)J(y)\right] \qquad (4.65)$$

この指数関数を結合定数 f_0 が小さいとして展開していくことで、ϕ^4 スカラー理論に対する摂動論を得ることができる。

Exercise 4.3

(4.65) を展開することで、ϕ^4 スカラー理論の摂動が canonical method と同じ結果を与えることを確かめる。

生成汎関数 $Z[J] = e^{iW[J]} = \exp\left[\frac{-if_0}{4!}\int d^4z \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4\right] \times \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$

を f_0 の1次まで展開すると

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \left[1 + \frac{-if_0}{4!}\int d^4z \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 + O(f_0^2)\right] \times \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$J(z)$ での汎関数微分を実行する。結果を先に示すと、次のようになる。

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)} \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$
$$= -\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$
$$= \left\{i\Delta(0) + \left[\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right]^2\right\} \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$
$$= \left\{-3i\Delta(0)\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) - \left[\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right]^3\right\} \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J\Delta J\right]$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$
$$= \left\{-3[\Delta(0)]^2 + 6i\Delta(0)\left[\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right]^2 + \left[\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right]^4\right\} e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J\Delta J}$$

◎ 1階汎関数微分

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\,[J(x)+\epsilon\delta(x-z)]\Delta(x-y)[J(y)+\epsilon\delta(y-z)]} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\,[J(x)\Delta(x-y)J(y)+\epsilon J(x)\Delta(x-y)\delta(y-z)+\epsilon\delta(x-z)\Delta(x-y)J(y)+O(\epsilon^2)]} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\, e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\,\cdot\,\epsilon[J(x)\Delta(x-y)\delta(y-z)+\delta(x-z)\Delta(x-y)J(y)]} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\, e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\,\cdot\,\epsilon[J(x)\Delta(x-y)\delta(y-z)+\delta(x-z)\Delta(x-y)J(y)]} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\, e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,\cdot\,\epsilon J(x)\Delta(x-z)+\frac{-i}{2}\int d^4y\,\epsilon\cdot\Delta(z-y)J(y)} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

同じ

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\, e^{-i\int d^4x\,\epsilon\cdot J(x)\Delta(x-z)} - e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y} \times J(x)\Delta(x-y)J(y)\right\}$$

$$= \frac{1}{i}\lim_{\epsilon\to0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\int d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}\left[\cancel{1} - i\epsilon\int d^4x\, J(x)\Delta(x-z)\right] - \cancel{e^{\frac{-i}{2}\int d^4x\,d^4y\; J(x)\Delta(x-y)J(y)}}\right\}$$

$$= \frac{-i}{i} \lim_{\epsilon \to 0} \int d^4x' \, J(x') \Delta(x'-z) \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x d^4y \, J(x) \Delta(x-y) J(y) \right]$$

$$= - \int d^4x' \, J(x') \Delta(x'-z) \exp\left[\frac{-i}{2} \int d^4x d^4y \, J(x) \Delta(x-y) J(y) \right]$$

$$\to \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J}$$

$$= \frac{1}{i} \left(-\frac{i}{2} \int \Delta J \right) e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J} + \frac{1}{i} \left(-\frac{i}{2} \int J \Delta \right) e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \Delta J \, e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J} - \frac{1}{2} \int J \Delta \, e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J}$$

$$= - \int J \Delta \, e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta J}$$

$$= - \int d^4x' \, J(x') \Delta(x'-z) \, e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \, J(x) \Delta(x-y) J(y)}$$

② 2階汎関数微分

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^2 e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[-\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\, e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right]$$

$$= \frac{-1}{i}\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\cdot\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$+ \frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right]\cdot e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \frac{-1}{i}\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\cdot\left[-i\int d^4x''\, J(x'')\Delta(x''-z)\right]\cdot e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$- \frac{1}{i}\underline{\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right]}\, e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{\int d^4x'\left[J(x')+\epsilon\,\delta(x'-z)\right]\Delta(x'-z) - \int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right\}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int d^4x'\,\epsilon\,\delta(x'-z)\Delta(x'-z)$$

$$= \underline{\Delta(0)}$$

$$= \left[\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\int d^4x''\, J(x'')\Delta(x''-z) + i\Delta(0)\right] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \underline{\left[i\Delta(0) + \left(\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right)^2\right] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}} \quad //$$

⑩ 3階汎関数微分

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^3 e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left\{\left[i\Delta(0) + \left(\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right)^2\right] e^{-\frac{i}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}\right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[i\Delta(0) + \left(\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right)^2\right]} \times e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

$$+ \left[i\Delta(0) + \left(\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right)^2\right] \cdot \underbrace{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}}_{= -\int J\Delta \cdot e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\left(\int d^4x_1\, J(x_1)\Delta(x_1-z)\right)\left(\int d^4x_2\, J(x_2)\Delta(x_2-z)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{\delta}{\delta J(z)}\int d^4x_1\, J(x_1)\Delta(x_1-z)\right] \cdot \int d^4x_2\, J(x_2)\Delta(x_2-z)$$

$$+ \frac{1}{i}\int d^4x_1\, J(x_1)\Delta(x_1-z) \cdot \frac{\delta}{\delta J(z)}\left[\int d^4x_2\, J(x_2)\Delta(x_2-z)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\Delta(0)\int d^4x_2\, J(x_2)\Delta(x_2-z) + \frac{1}{i}\int d^4x_1\, J(x_1)\Delta(x_1-z)\cdot\Delta(0)$$

$$= \underline{\frac{2}{i}\Delta(0)\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)}$$

$$= -i2\Delta(0)\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\, e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

$$-\left[i\Delta(0) + \left(\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z)\right)^2\right]\cdot\int d^4x''\, J(x'')\Delta(x''-z)\, e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

$$= \underline{\left[-3i\Delta(0)\int d^4x'\, J(x')\Delta(x'-z) - \left(\int d^4x''\, J(x'')\Delta(x''-z)\right)^3\right] e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}} \quad //$$

⑾ 4 階汎関数微分

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\left\{\left[-3i\Delta(0)\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) - \left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^3\right] e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}\right\}$$

$$= \underbrace{\left\{-\frac{3i}{i}\Delta(0)\frac{\delta}{\delta J(z)}\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) + i\frac{\delta}{\delta J(z)}\left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^3\right\}}_{[\cdots]\text{に}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\text{を作用}} e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

$$+ \underbrace{\left[-3\Delta(0)\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) + i\left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^3\right]}_{\frac{1}{i}\text{をかけた.}} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}}_{\exp\text{に}\frac{\delta}{\delta J}\text{を作用}}$$

$$\frac{\delta}{\delta J(z)}\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z) = \Delta(0)$$

$$\frac{\delta}{\delta J(z)}\left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^3 = 3\Delta(0)\left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^2$$

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y)} = -i\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\, e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

より.

$$= \left[-3[\Delta(0)]^2 + 3i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^2 + 3i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^2 + \left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^4\right]$$

$$\times e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \left[-3[\Delta(0)]^2 + 6i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-y')\right)^2 + \left(\int d^4x'' J(x'')\Delta(x''-z)\right)^4\right] e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta J}$$

//

したがって,

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 e^{-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)}$$

$$= \left[-3\left[\Delta(0)\right]^2 + 6i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^2 + \left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^4\right]$$

$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

が分かる。これより,f_0の1次までの $Z[J] = e^{iW[J]}$ が次のようになる:

$$Z[J] = e^{iW[J]}$$

$$= \left\{1 - \frac{if_0}{4!}\int d^4z\left(-3\left[\Delta(0)\right]^2 + 6i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^2 + \left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^4\right)\right\}$$

$$\times \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x d^4y\, J\Delta J\right]$$

この $Z[J]$ から 2点関数 $\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle$ を計算してみる。

(4.43)より

$$\langle 0|T\{\phi_1\phi_2\}|0\rangle = -\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0}$$

を計算する。

このとき、$J(x)$ の汎関数微分のあとに $J\to 0$ として残る項を考えると、

$$Z[J] = \Big\{ \underset{①}{\underline{1}} - \frac{i f_0}{4!}\int d^4z \Big(-3\underbrace{[\Delta(0)]^2}_{0} + \underbrace{6i\Delta(0)\Big(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\Big)^2}_{②} + \underbrace{\Big(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\Big)^4}_{0} \Big) \Big\}$$
$$\times \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x d^4y\, J\Delta J\right]$$

なので、青線部を計算する。

①

$$\frac{\delta}{\delta J(x_1)} \exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$$= -i\int d^4x' J(x')\Delta(x'-x_1)\exp\left[\frac{-i}{2}\int d^4x d^4y\, J(x)\Delta(x-y)J(y)\right]$$

$$\frac{\delta}{\delta J(x_2)}(\cdots)$$

$$= \frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left[-i\int d^4x' J(x')\Delta(x'-x_1)\right]\exp[\cdots] \underbrace{- i\int d^4x' J(x')\Delta(x'-x_1)\frac{\delta}{\delta J(x_1)}(\cdots)}_{=0\ (J\to 0)\ 省略する.}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{ -i\int d^4x'[J(x')+\epsilon\delta(x'-x_2)]\Delta(x'-x_1) + i\int d^4x' J(x')\Delta(x'-x_1)\right\}\exp[\cdots]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[-i\int d^4x'\epsilon\delta(x'-x_2)\Delta(x'-x_1)\right]\exp[\cdots]$$

$$= \underline{-i\Delta(x_2-x_1)} \quad (J\to 0)$$

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle = -\frac{\delta^2 Z}{\delta J\delta J}\Big|_{J=0} = \underline{\underline{i\Delta(x_2-x_1)}} + \cdots$$

② 微分するのは

$$-\frac{if_0}{4!}\int d^4z\cdot 6i\Delta(0)\left(\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\right)^2 \times \exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$$=\frac{f_0}{4}\int d^4z\,\Delta(0)\int d^4x\,d^4y\,J(x)\Delta(x-z)J(y)\Delta(y-z)\quad\times\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$$-\frac{\delta^2}{\delta J\delta J}=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)$$ として順に計算をすると。

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\left(\cdots\right)$$

$$=\Big\{\frac{f_0}{i4}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,\Delta(0)\delta(x-x_1)\Delta(x-z)J(y)\Delta(y-z)$$

$$+\frac{f_0}{i4}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,\Delta(0)J(x)\Delta(x-z)\delta(y-x_1)\Delta(y-z)\Big\}\times\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$$+\frac{f_0}{4}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,\Delta(0)J(x)\Delta(x-z)J(y)\Delta(y-z)\cdot\underline{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]}$$

$$= -\int d^4x' J(x')\Delta(x'-z)\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$\Rightarrow$ $J\to 0$ で 0 となるので計算しない。

$$=\Big\{\frac{f_0}{i4}\int d^4y\,d^4z\,\Delta(0)\,\delta(x_1-z)J(y)\Delta(y-z)+\frac{f_0}{i4}\int d^4x\,d^4z\,\Delta(0)J(x)\Delta(x-z)\Delta(x_1-z)\Big\}$$

$$\times\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$$+\cdots$$

$$=-\frac{if_0}{2}\int d^4x\,d^4z\,\Delta(0)\Delta(x_1-z)J(x)\Delta(x-z)\times\exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]\quad+\cdots$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)^2(\cdots)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\left(-\frac{i f_0}{2}\int d^4x\, d^4z\, \Delta(0)\Delta(x_1-z)J(x)\Delta(x-z) \times \exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right] + \cdots\right)$$

$$= -\frac{f_0}{2}\int d^4x\, d^4z\, \Delta(0)\Delta(x_1-z)\delta(x-x_2)\Delta(x-z) \times \exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right]$$

$$= -\frac{f_0}{2}\int d^4z\, \Delta(0)\Delta(x_1-z)\Delta(x_2-z) \times \exp\left[\frac{-i}{2}\int J\Delta J\right] \underbrace{+ \cdots}_{J=0\text{ で }0\text{ となる.}}$$

$$\xrightarrow{J=0} \underline{-\frac{f_0}{2}\Delta(0)\int d^4z\, \Delta(x_1-z)\Delta(x_2-z)} //$$

したがって, f_0 の 1次までのオーダーで

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle = G^{(2)}(x_1,x_2) = -\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0}$$

$$\underline{= i\Delta(x_2-x_1) - \frac{f_0}{2}\Delta(0)\int d^4z\, \Delta(x_1-z)\Delta(x_2-z) + \mathcal{O}(f_0^2)} //$$

座標表示のプロパゲーターを用いて, 書き下すと.

$$\Delta(x_2-x_1) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}}{k^2-m^2+i\epsilon}$$

$$\int d^4z\, \Delta(x_1-z)\Delta(x_2-z)$$

$$= \int d^4z \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x_1-z)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{e^{-iq\cdot(x_2-z)}}{q^2-m^2+i\epsilon}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^8}\int d^4z\, d^4p\, d^4q \cdot \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip\cdot x_1 - iq\cdot x_2} e^{iz\cdot(p+q)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, d^4q \frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip\cdot x_1 - iq\cdot x_2}\delta(p+q)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}$$

$$\rightarrow -\frac{f_0}{2}\frac{\Delta(0)}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}$$

これより、

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle = G^{(2)}(x_1,x_2)$$

$$= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2-m^2+i\epsilon} - \frac{f_0}{2}\frac{\Delta(0)}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{e^{-ip\cdot(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2+i\epsilon)^2}$$

$$= i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{k^2-m^2+i\epsilon}\left[1 + \frac{if_0\Delta(0)}{2}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\right]$$

として、canonical での T積の計算を再現することがわかる.

4点関数も同様に $\left.\dfrac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\delta J(x_3)\delta J(x_4)}\right|_{J=0}$ を計算することで求められ

4.5 Grassmann Variables

古典極限をとることを考えたとき、boson 場と fermion 場には根本的な違いが存在する。
それは、各々の場が次のような代数で定義されていることによる。

$$[b, b^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b = \hbar \qquad (\text{boson})$$

$$\{a, a^\dagger\} = aa^\dagger + a^\dagger a = \hbar \qquad (\text{fermion})$$

形式的には古典極限は $\hbar \to 0$ とすることで得られる
(より正確には、$\hbar$ が古典作用よりも小さくなること)

この極限において boson 場は交換する c-数の場を導く:

$$bb^\dagger = b^\dagger b \qquad (\hbar \to 0)$$

一方で、fermi 場に対しては $a, a^\dagger$ が反交換なために $\hbar \to 0$ において単純な極限は得られない。つまり、反交換な c-数を導く

$$aa^\dagger = -a^\dagger a \qquad (\hbar \to 0)$$

"古典極限" においても交換する c-数による古典力学は得られない。
このような反交換な c-数のことを "Grassmann variables" と呼ぶ。
また、これらの従う特別な代数のことを Grassmann algebra と呼ぶ。

Grassmann variables の従う性質については Exercise 4.4, 4.5 で扱う。

4.6 Fermions in the Path Integral

Fermions を含む場合の経路積分を考える。Bosonの場合との類似として構成していけるが、ちょっとにおいて fermi場が Grassmann algebra に従うことに注意する。
これらは、"notoriously objects that make strong men quail"* (Coleman, 1975)
だが Grassmann variable 上で経路積分を構成していくことは可能である。

* 屈強な男をもひるませるような悪名高い物体 というように比喩している

fermi場、その共役場を η, η^* と書く。fermions を含む作用の部分は高々2次までしか含まない。
したがって、興味があるのは次のような作用である：

$$S_f = (\eta^*, A\eta)$$

ここでは Bose粒子系との対応 と Feynman diagram によって場の理論が定義されるという方針から、
具体的な計算を避けて Fermion の経路積分の表式 (4.71) を導いている。
(4.71) を実際の Grassmann variable での path integral は Exercise 4.5 で説明する。

まず、Bose粒子系からの類推により、Fermion 場に渡る経路積分を次式で定義する：

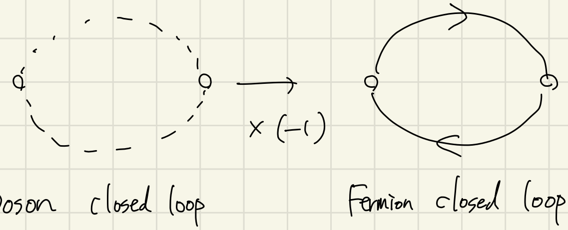
$$Z = \langle 0^+ | 0^- \rangle \equiv e^{iW} = N \int [d\eta^*][d\eta]\, e^{iS_f}$$

ここで、N は規格化の定数、$[d\eta^*], [d\eta]$ はそれぞれ η^*, η に関する経路積分の測度。
一方、Complex Bose fields (= 複素スカラー場) については、エルミート内積を $(z^*, y) = \int d^4x\, z^* y$ として、

$$\int [dz^*][dz]\, e^{-i(z^*, Az)} = [\mathrm{Det}(iA)]^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(iA)}$$

を得る。(⇒ Exercise 4.5 (b))　このとき、実スカラー場のときに $[\mathrm{Det}(iA)]^{-1/2}$ だったのが $[\mathrm{Det}(iA)]^{-1}$ となるのは
$[dz]$ と $[dz^*]$ の寄与による。

Fermionの作用 $S_f = (\psi^\dagger, A\psi)$ の形は、連結ダイアグラム W として閉じた 1-loop を含む。
このとき、同型のBosonの作用をFermionに置き換えることで変更されるのは、-1の因子を各fermion閉ループに付加することに対応する。



Wへの寄与は全てがone-loopを含むので、Boson → Fermionの置き換えで、$W \to -W$ に対応する。これは、

$$[\mathrm{Det}(iA)]^{-1} \longrightarrow [\mathrm{Det}(iA)]$$

への置き換えに対応する。

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Boson}: & e^{iW}_{(B)} \propto [\mathrm{Det}(iA)]^{-1} \\ \text{Fermion}: & \underline{e^{iW}_{(F)}} = e^{-iW}_{(B)} \propto \dfrac{1}{e^{iW}_{(B)}} = \underline{[\mathrm{Det}(iA)]} \end{array}\right]$$

したがって、少々乱暴ではあるが、Fermion場のpath integralを

$$\int [d\psi^\dagger][d\psi]\, e^{i(\psi^\dagger, A\psi)} \equiv \mathrm{Det}(iA)$$

と定義すれば正しいFeynman rulesが得られると結論できる。

Fermionのpath integralについてはExercise 4.5 (c) で扱う。

Exercise 4.4

まずは 1-Grassmann variable θ の場合から考える. θ は $\{\theta, \theta\} = 0 \iff \theta^2 = 0$ を満たす.

(a) グラスマン数の関数が有限項の級数で展開できる.

$$p(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \theta^n = p_0 + p_1\theta^1 + p_2\theta^2 + \cdots$$

と展開されたとすると, $\{\theta, \theta\} = 0$ より θ^2 より高次の項はすべて 0 となる. したがって.

$$p(\theta) = p_0 + p_1\theta + \underbrace{p_2\theta^2 + \cdots}_{=0}$$

$$= \underline{p_0 + p_1\theta}$$

の形で表される. p_0, p_1 は可換なc-数.

(b) 左微分と積分が等しいこと : $\displaystyle\int d\theta\, p(\theta) = \frac{\vec{d}}{d\theta} p(\theta) = p_1$

微分と積分は次の関係を満たす演算として定義する :

$$\frac{\vec{d}}{d\theta}\theta = \theta\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta} = 1 \quad , \quad \int d\theta = 0, \quad \int d\theta\,\theta = 1$$

$\Rightarrow \int d\theta\, p(\theta) = \int d\theta\, p(\theta + \eta)$ の要請から得られる.

このとき,

$$\frac{\vec{d}}{d\theta}p(\theta) = \frac{\vec{d}}{d\theta}(p_0 + p_1\theta) = 0 + p_1\frac{\vec{d}}{d\theta}\theta = \underline{p_1}$$

$$\int d\theta\, p(\theta) = \int d\theta\,(p_0 + p_1\theta) = p_0\int d\theta + p_1\int d\theta\,\theta = 0 + p_1 = \underline{p_1}$$

したがって.

$$\underline{\int d\theta\, p(\theta) = \frac{\vec{d}}{d\theta}p(\theta)}$$

※ $\int d\theta\, p(\theta) = \int d\theta\, p(\theta+\lambda)$ について、

$$(\text{左辺}) = \int d\theta\,(p_0 + p_1\theta) = \int d\theta\, p_0 + \int d\theta\, p_1\theta$$

$$(\text{右辺}) = \int d\theta\,(p_0 + p_1(\theta+\lambda)) = \int d\theta\, p_0 + \int d\theta\, p_1(\theta+\lambda) = \int d\theta\, p_0 + \int d\theta\, p_1\theta + \int d\theta\, p_1\lambda$$

$$(\text{左辺}) = (\text{右辺}) \iff \int d\theta\, p(\theta) = \int d\theta\, p(\theta+\lambda)$$

$$0 = p_1 \int d\theta\,\lambda$$ （λはθと独立な任意のGrassmann数）

$$\iff \underline{\int d\theta = 0}$$

なので $\int d\theta\,\theta$ の値は不定性を持つ。文献によっては $\int d\theta\,\theta = i$ とすることもあるが、ここでは

$$\int d\theta\,\theta = 1$$

とした。

追記

- Ryder (1985)

$$\int dC_i = 0,\quad \int dC_i C_i = 1$$

$$\left(C_i \frac{\partial}{\partial C_i} + \frac{\partial}{\partial C_i} C_i\right) f = 1$$

- Rajaraman (1982)

$$\int da\, 1 = 0,\quad \int da\, a = 1$$

- Schwartz (2014)

$$\int d\theta\,(a+b\theta) \equiv a\int d\theta + b\int d\theta\,\theta$$

$$\int d\theta\,\theta \equiv 1$$

$$\Rightarrow \int d\theta\,(a+b\theta) = b$$

$$\frac{d}{d\theta}(a+b\theta) \equiv b$$

(c) Grassmann 数の積分において変数変換を行うとき次のようになること：

$$\int d\theta' p(\theta') = \int d\theta \left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)^{-1} p[\theta'(\theta)]$$

$\theta' = \theta'(\theta) = \alpha\theta$ と仮定する。左辺は

$$\int d\theta' p(\theta') = \int d\theta' p[\theta'(\theta)]$$

$$= \int d\theta' [p_0 + p_1 \theta'(\theta)]$$

$$= \int d\theta' (p_0 + p_1 \alpha \theta)$$

$$= p_1 \alpha \int d\theta' \theta$$

一方、θ' のまま計算すると、

$$\int d\theta' p(\theta') = \int d\theta' (p_0 + p_1 \theta')$$

$$= p_1$$

この2式が一致するためには、

$$\alpha \int d\theta' \theta = 1 \iff d\theta' = \frac{1}{\alpha} d\theta$$

と変換すればよい。また、$\frac{d\theta'}{d\theta} = \alpha$ より

$$d\theta' = \left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)^{-1} d\theta$$

と書くことができるので、

$$\underline{\int d\theta' p(\theta') = \int d\theta \left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)^{-1} p[\theta'(\theta)]} \quad //$$

が得られる。

(d) Grassmann variables の積 $\theta_1\theta_2\cdots\theta_k$ に対する θ_i の右(左)微分を確認する.

$$\frac{\vec{d}}{d\theta_i}(\theta_1\theta_2\cdots\theta_i\cdots\theta_k)$$

$$= \frac{\vec{d}}{d\theta_i}(-\theta_1\theta_2\cdots\theta_i\theta_{i-1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k)$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{\vec{d}}{d\theta_i}\left((-1)^{i-1}\theta_i\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i-1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k\right)$$

$$= (-1)^{i-1}\left(\frac{\vec{d}}{d\theta_i}\theta_i\right)\theta_1\cdots\theta_k$$

$$= \underline{(-1)^{i-1}\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i-1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k} \,//$$

$$\frac{d}{d\theta_2}\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4$$

$$= -\frac{d}{d\theta_2}\theta_2\theta_1\theta_3\theta_4$$

$$= -\theta_1\theta_3\theta_4$$

左微分も同様にして.

$$(\theta_1\theta_2\cdots\theta_k)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}$$

$$= (-\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i+1}\theta_i\cdots\theta_k)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}$$

$$= \cdots$$

$$= \left((-1)^{k-i}\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i-1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k\theta_i\right)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_i}$$

$$= \underline{(-1)^{k-i}\theta_1\theta_2\cdots\theta_{i-1}\theta_{i+1}\cdots\theta_k} \,//$$

$$(\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_2}$$

$$= -\theta_1\theta_3\theta_2\theta_4\theta_5\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_2}$$

$$= \theta_1\theta_3\theta_4\theta_2\theta_5\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_2}$$

$$= -\theta_1\theta_3\theta_4\theta_5\theta_2\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta_2}$$

$$= -\theta_1\theta_3\theta_4\theta_5$$

交換の回数 : $k-i=3$

(e) n-変数の Grassmann variables の積分は次式で定義：

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = 0 \quad (i,j=1,\dots,n) \qquad \int d\theta_i = 0 \quad (i=1,\dots,n)$$

$$\int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij} \quad (i,j=1,\dots,n)$$

注意点

2-Grassmann variables を考えると，

$$p(\theta_1,\theta_2) = p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_3\theta_1\theta_2$$

が関数の一般形．$\theta_1\ \theta_2$ での積分を考えると，

$$\int d\theta_1 d\theta_2\, P(\theta_1,\theta_2) = \int d\theta_1 d\theta_2 (p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_3\theta_1\theta_2)$$

$$= \int d\theta_1 \left[\int d\theta_2 (p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_3\theta_1\theta_2) \right]$$

$$= \int d\theta_1 \left(p_2 + p_3 \int d\theta_2 \theta_1\theta_2 \right)$$

$$= \int d\theta_1 \left(p_2 - p_3 \int d\theta_2 \theta_2\theta_1 \right)$$

$$= \int d\theta_1 (p_2 - p_3\theta_1)$$

$$= \underline{-p_3}$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_1}\frac{\vec{\partial}}{\partial\theta_2} f(\theta_1,\theta_2) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}(p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + \underbrace{p_3\theta_1\theta_2}_{= -p_3\theta_2\theta_1})\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_1}(p_2 - p_3\theta_1)$$

$$= \underline{-p_3}$$

一方，$\int d\theta_2 d\theta_1$ は，

$$\int d\theta_2 d\theta_1 \, f(\theta_1, \theta_2) = \int d\theta_2 \left[\int d\theta_1 \left(p_0 + p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_1 \theta_2 \right) \right]$$

$$= \int d\theta_2 \left(p_1 + p_3 \theta_2 \right)$$

$$= \underline{p_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} f(\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(p_0 + p_1 \theta_1 + p_2 \theta_2 + p_3 \theta_1 \theta_2 \right) \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(p_1 + p_3 \theta_2 \right)$$

$$= \underline{p_3}$$

変数の順序に注意が必要。

(f) 多変数積分における変数変換.

$$\int d\theta_n' \cdots d\theta_1' \, p(\theta') = \int d\theta_n \cdots d\theta_1 \left[\mathrm{Det}\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right) \right]^{-1} p[\theta'(\theta)]$$

$\theta' = A\theta$ (A : $n\times n$ matrix) として変数変換を考えると、

θ'の関数 $p(\theta')$ は $p[\theta'(\theta)]$ と θの関数で書き表わせる。$p(\theta')$ のうち、$\int d\theta_n' \cdots d\theta_1'$ の積分を実行して残るのは $\theta_1' \theta_2' \cdots \theta_n'$ の項のみ。そこで、$n=2$ の場合を具体的に考えると、

$$\begin{aligned} p(\theta') \propto \theta_1' \theta_2' &= (A_{11}\theta_1 + A_{12}\theta_2)(A_{21}\theta_1 + A_{22}\theta_2) \\ &= A_{11}A_{22}\theta_1\theta_2 + A_{12}A_{21}\theta_2\theta_1 \\ &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\theta_1\theta_2 \\ &= \left[\det\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\right]\theta_1\theta_2 \end{aligned}$$

non-zeroの寄与

と被積分関数は変換される: $p(\theta') = p[\theta'(\theta)] \propto \left[\det\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\right] p(\theta)$

変数変換で値が変化していないためには、$d\theta_2' d\theta_1'$ は

$$d\theta_2' d\theta_1' = \left[\det\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\right]^{-1} d\theta_2 d\theta_1$$

と変換することが分かる。したがって、一般のnに対しても次式が成立つ.

$$\underline{\int d\theta_n' \cdots d\theta_1' \, p(\theta) = \int d\theta_n \cdots d\theta_1 \left[\det\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\right]^{-1} p[\theta'(\theta)]}$$

※ 一般のnについては、

$$\det A = \sum \mathrm{sgn}(\sigma)\, \theta_{1\sigma(1)} \theta_{2\sigma(2)} \cdots \theta_{n\sigma(n)}$$

として $\theta_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\theta_j$ を $\theta_n' \cdots \theta_1'$ に代入して求めることで $\left[\det\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right)\right]$ が得られる.

Exercise 4.5

(a) 通常の可換な数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対して、

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x, Ax)\right] = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,A}}$$

Aの非対称成分は寄与しないので、Aは対称行列とする。対称行列は直交行列Pを用いて対角化できる。

$$x \to y = Px \quad , \quad A \to A' = P^{-1}AP$$

このとき、変換のヤコビアンはPの行列式であり $|\det P| = 1$ したがって、

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x, Ax)\right] = \int \frac{dy_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dy_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i \lambda_i y_i\right]$$

$$= \int \frac{dy_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dy_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i y_i^2\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$= \frac{1}{(\det A')^{1/2}}$$

$$A' = P^{-1}AP$$

$$\det A' = \det(P^{-1}AP) = \det(PP^{-1}A) = \det A$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}$$

$z^* z$

(b) 可換な複素変数 z に対して、

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n}{\sqrt{\pi}} \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n^*}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-(z^*, Az)\right] = \frac{1}{\mathrm{Det} A}$$

$$\begin{cases} z_i = (a_i + i b_i)/\sqrt{2} \\ z_i^* = (a_i - i b_i)/\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{\partial z_i}{\partial a_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial z_i}{\partial b_i} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial a_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\partial z_i^*}{\partial b_i} = \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

として $dz_i dz_i^* \to da_i db_i$ の変換を考える。

$$z = \frac{}{\sqrt{2}}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_i}{\partial a_i} & \frac{\partial z_i}{\partial b_i} \\ \frac{\partial z_i^*}{\partial a_i} & \frac{\partial z_i^*}{\partial b_i} \end{vmatrix} = \left| -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} \right| = 1$$

より。

$$\int \frac{dz_1}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n}{\sqrt{\pi}} \frac{dz_1^*}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{dz_n^*}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-(z^*, Az)\right]$$

↓ H は対角化されているとする。（固有値を λ_i ）

$$= \int \frac{da_1}{\sqrt{\pi}} \frac{db_1}{\sqrt{\pi}} \cdots \frac{da_n}{\sqrt{\pi}} \frac{db_n}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\sum_i \frac{\lambda_i}{2}(a_i^2 + b_i^2)\right]$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}}}_{da_1 db_1} \cdot \cdots \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}}^2}_{da_n db_n}$$

$$= \frac{2^n}{\det A} \quad (?)$$

(c) n-Grassmann数とその共役変数 : $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\bar{\theta} = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n)$

θ_i, $\bar{\theta}_i$ は独立な代数の生成子 : $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$, $\{\theta_i, \bar{\theta}_j\} = 0$, $\{\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j\} = 0$
θ_i, $\bar{\theta}_i$ のそれぞれの中で積分は定義されている.

$p_0 + p_1 \theta = \Theta$
$\downarrow$
$p_0^* + p_1^* \bar{\theta} = \bar{\Theta}$

$\Theta \bar{\Theta} \neq 0$.

このとき, 次式を確認.

$$\int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \cdots d\theta_n d\bar{\theta}_n \, e^{(\bar{\theta}, A\theta)} = \operatorname{Det} A$$

A は対角化されているとすると,

$$e^{(\bar{\theta}, A\theta)} = e^{\bar{\theta}_1 A_{11} \theta_1 + \bar{\theta}_2 A_{22} \theta_2 + \cdots} = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{\theta}_i A_{ii} \theta_i\right] = \underline{\prod_{i=1}^{n} \exp(\bar{\theta}_i A_{ii} \theta_i)}_{\,//}$$

(A_{ii} は A の固有値)

$\{d\theta_i, d\bar{\theta}_j\} = 0$ より

$$\begin{aligned}
& d\theta_i d\bar{\theta}_i d\theta_j d\bar{\theta}_j \\
&= d\theta_i (-d\theta_j d\bar{\theta}_i) d\bar{\theta}_j \\
&= (d\theta_j d\theta_i) d\bar{\theta}_i d\bar{\theta}_j \\
&= d\theta_j d\theta_i (-d\bar{\theta}_j d\bar{\theta}_i) \\
&= \underline{d\theta_j (d\bar{\theta}_j d\theta_i) d\bar{\theta}_i}_{\,//}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow [d\theta_i d\bar{\theta}_i, d\theta_j d\bar{\theta}_j] = 0$

($\Leftrightarrow$ $d\theta_i d\bar{\theta}_j$ は Grassmann-odd という)

これより, $d\theta_i d\bar{\theta}_i$ のペアを1つとって, 独立に積分が計算できる.

$$\begin{aligned}
& \int d\theta_i d\bar{\theta}_i \exp(\bar{\theta}_i A_{ii} \theta_i) \\
&= \int d\theta_i d\bar{\theta}_i (1 + \bar{\theta}_i A_{ii} \theta_i) \\
&= \int d\theta_i (A_{ii} \theta_i) = \underline{A_{ii}}_{\,//}
\end{aligned}$$

したがって, $\displaystyle\int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 \cdots d\theta_n d\bar{\theta}_n \exp[(\bar{\theta}, A\theta)] = \prod_{i=1}^{n} A_{ii} = \underline{\operatorname{Det} A}_{\,//}$ となる. //

4.7 Ghost fields.

経路積分を簡単に評価できるのは Gauss 型の経路積分に限られる。
なので、作用の主要な部分を Gauss 型へ変形することで、その部分の積分は実行し、
残りの部分を摂動として扱うという方法がとられる。

以下で示すが、指数の前に何らかの因子があることで経路積分を Gauss 積分の形へ
変形できない場合がある。

このような場合に、Fermion の経路積分の結果を用いて指数の前の因子を
扱うことができる。その際、架空の ghost fields が導入される。

$\boxed{\text{例}}$ 微分相互作用を含む場合

対応する経路積分は次の形

$$e^{iW} = N\int [d\phi] (\mathrm{Det}\,K)^{1/2} e^{iS}$$

$$(\mathrm{Det}\,K)^{1/2} = \left[\mathrm{Det}(K^{1/2})\right]$$

(固有値においてはこれで計算できる)

このとき、K は線形演算子。この形は $(\mathrm{Det}\,K)^{1/2}$ があるせいで簡単に扱うことが
できない。
そこで、この行列式の因子が仮想的な Fermion 場の経路積分の結果として
得られたものと解釈することで、次のように書くことができる:

$$(\mathrm{Det}\,K)^{1/2} = \int [d\eta][d\eta^*] \exp\left[i\left(\eta_a^*, K^{1/2}_{ab}\eta_b\right)\right]$$

このとき、$K^{1/2}$ は行列 K の平方根。

したがって、全体の経路積分は次のようになる。

$$e^{iW} = N\int [d\xi][d\eta][d\eta^*] \exp\left[iS + i\left(\eta_a^* K_{ab}^{1/2} \eta_b\right)\right]$$

このとき、導入された場 η が ghost field である。

- ghost 場は単に数学的な取り扱いのために導入されたものであり、物理的な結果には寄与しない。

- 非可換ゲージ場の量子化において現れる同様の ghost field (Faddeev – Popov ghost) は重要。

- 物理的には、Fermion の役割は path integral に拘束条件を課すこと。

  * Pauli の排他原理

  * §7.4 で導入する Faddeev - Popov ghost は "負の自由度"

    ⇒ Boson field からの物理的に意味を持たない自由度 (縦波の偏光など) とキャンセルし、物理的観測量に寄与しないようになる。

  * ゴーストを取り入れたゲージでは、ゴースト場は S 行列のユニタリ性に本質的に関係する。

gauge fixing をする場合に自由度として導入。