Chapter 7

Yang-Mills Fields

Ch. 7 Yang-Mills Fields

ヤンとミルズのアイデア

- 大域的な位相不変性を局所的な不変性に拡張できないか?

例) isospin 対称性

核子は isospin の "up" と "down" の状態に対応。
陽子・中性子のどちらを up・down を割り当てるかは自由。
しかし、この選択は大域的なものになる。 ⇒ どこかで決めたら、他の時空点でも同じになる。

各時空点において、isospin の位相を自由に選ぶことはできないのか?

⟶ isospin invariance を local なものに拡張できないのか?

- QED では可能 ⟹ non-Abelian の場合にも適応可能.
- non-Abelian field の場合について見ていく。

7.1. Local Non-Abelian Gauge Invariance.

◦ 群の生成子 T_i （以下の Lie代数に従う）

$$[T_j, T_k] = i f_{jkl} T_l \qquad (7.1)$$

← 加えた.

◦ 場（n成分）

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix} \qquad (7.2)$$

◦ 場の変換（場に対する gauge 変換）

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-i\vec{T}\cdot\vec{\theta}(x)} \Psi(x) \equiv U(\vec{\theta})\Psi(x) \qquad (7.3)$$

$\vec{T} = (T_1, \cdots, T_N)$ ： 群の生成子の行列表現，$n\times n$ 行列

$\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ ： 座標 x の関数で，一般化された角度を表す 実パラメータ.

ヤン・ミルズの original の仕事では SU(2) isospin を扱っているが，① コンパクト ② 半単純 な Lie群 は OK.

● vector fields $A^{j}_{\mu}(x)$ を導入 (= gauge fields)

- Lagrangian が (7.3) の変換で不変になるだけの場が必要.
- photon の対応物だが, non-Abelian の場合はその性質が大きく異なる.

◦ 場の微分の変換

$$\partial_\mu \Psi(x) \longrightarrow \partial_\mu \Psi'(x) = U(\vec{\theta})\, \partial_\mu \Psi(x) + \left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right) \Psi(x) \tag{7.4}$$

Lagrangian に含まれる運動項が (7.3) で不変ではない。

● 共変微分 D_μ を導入:

$$D_\mu \Psi(x) \longrightarrow D_\mu' \Psi'(x) = U(\vec{\theta})\, D_\mu \Psi(x) \tag{7.5}$$

(⇒ このように変換する $D_\mu \Psi(x)$ を考える)

D_μ : $n \times n$ 行列, $\Psi(x)$ に作用する.

Lagrangian が D_μ の特定の組み合わせを通して微分を含むとき,
e.g.) $(D_\mu \Psi)^\dagger (D_\mu \Psi)$ など

Lagrangian は (7.3) の local な変換で不変.

○ 共変微分の形式

gauge fields $A_\mu^i(x)$ を含んだ形となる：

$$D_\mu \Phi(x) = \left(\partial_\mu + igA_\mu(x)\right)\Phi(x) \qquad (7.6)$$

$$A_\mu(x) \equiv \vec{T}\cdot\vec{A}_\mu(x) = T_i A^i_\mu(x)$$

$$\vec{A}_\mu(x) \equiv \left(A^1_\mu(x), A^2_\mu(x), \cdots, A^N_\mu(x)\right) \qquad (7.7)$$

$$\vec{T} \equiv (T_1, T_2, \dots, T_N)$$

g : coupling constant

$A_\mu(x)$ の変換則：

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

$$= UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1} \qquad (7.8)$$

→ Exercise7.1

微小変換：

$$U(\vec{\theta}) \simeq 1 - i\vec{T}\cdot\vec{\theta}$$

$$A'^{\,j}_\mu(x) = A^j_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^j(x) + f_{jkl}\,\theta^k(x)A^l_\mu(x) \qquad (7.9)$$

○ 変換の性質は群の構造（＝構造定数 f_{abc}）に依存する。

Exercise 7.1　以下の式の導出を確認する.

$$\partial_\mu \Psi(x) \to \partial_\mu \Psi'(x) = U(\vec{\theta})\,\partial_\mu \Psi(x) + \left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right)\Psi(x)$$

$\to$ not gauge invariant.

$$D_\mu \Psi(x) = \left(\partial_\mu + igA_\mu(x)\right)\Psi(x)$$ とすると.

$$D_\mu \Psi(x)$$

$$\to D'_\mu \Psi'(x) = \left(\partial_\mu + igA'_\mu(x)\right)U(\vec{\theta})\Psi(x)$$

$$= U(\vec{\theta})\partial_\mu\Psi(x) + \left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right)\Psi(x) + igA'_\mu(x)U(\vec{\theta})\Psi(x)$$

$$= U(\vec{\theta})\left(\partial_\mu + \underline{U^{-1}(\vec{\theta})\left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right) + igU^{-1}(\vec{\theta})A'_\mu(x)U(\vec{\theta})}\right)\Psi(x)$$

$$= U(\vec{\theta})\left(\partial_\mu + \underline{igA_\mu(x)}\right)\Psi(x)$$

$$= U(\vec{\theta})\,D_\mu\Psi(x)$$

$$igA_\mu(x) = U^{-1}(\vec{\theta})\left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right) + igU^{-1}(\vec{\theta})\underline{\underline{A'_\mu(x)}}U(\vec{\theta})$$

$$U^{-1}(\vec{\theta})A'_\mu(x)U(\vec{\theta}) = A_\mu(x) - \frac{1}{ig}U^{-1}(\vec{\theta})\left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right)$$

$$A'_\mu(x) = U(\vec{\theta})A_\mu(x)U^{-1}(\vec{\theta}) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right)U^{-1}(\vec{\theta}) \quad \to (7.8)$$

$$U(\theta)U^{-1}(\vec{\theta}) = \mathbb{1} \Rightarrow \partial_\mu\left(U(\theta)U^{-1}(\vec{\theta})\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\partial_\mu U(\theta)\right)U^{-1}(\vec{\theta}) + U(\vec{\theta})\partial_\mu U^{-1}(\vec{\theta}) = 0$$

$$= U(\vec{\theta})A_\mu(x)U^{-1}(\vec{\theta}) - \frac{i}{g}U(\vec{\theta})\partial_\mu U^{-1}(\vec{\theta})$$

$$A'_\mu(x) = U(\vec{\theta}) A_\mu(x) U^{-1}(\vec{\theta}) + \frac{i}{g}\left(\partial_\mu U(\vec{\theta})\right) U^{-1}(\vec{\theta})$$

$U(\vec{\theta}) \simeq 1 - i\vec{T}\cdot\vec{\theta}$ とすると $\vec{\theta}$ の1次までで、

$$A'_\mu(x) = (1 - i\vec{T}\cdot\vec{\theta}) A_\mu(x) (1 + i\vec{T}\cdot\vec{\theta}) + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu(1 - i\vec{T}\cdot\vec{\theta})\right](1 + i\vec{T}\cdot\vec{\theta})$$

$$= A_\mu(x) - i\vec{T}\cdot\vec{\theta} A_\mu(x) + i A_\mu(x) \vec{T}\cdot\vec{\theta}$$

$$+ \frac{i}{g}(-i\vec{T}\cdot\partial_\mu\vec{\theta})(1 + i\vec{T}\cdot\vec{\theta})$$

$$= A_\mu(x) - i\vec{T}\cdot\vec{\theta} A_\mu(x) + i A_\mu(x) \vec{T}\cdot\vec{\theta} + \frac{1}{g}\vec{T}\cdot\partial_\mu\vec{\theta}$$

ここで、

$$A'_\mu(x) = \vec{T}\cdot\vec{A}'_\mu(x) = T_i A'^i_\mu(x)$$

なので、群の生成子との縮約の添字をあらわに書くと、

$$T_i A'^i_\mu(x) = T_i A^i_\mu(x) - i T_j \theta^j(x) T_i A^i_\mu(x) + i T_i A^i_\mu(x) T_j \theta^j(x)$$

$$+ \frac{1}{g} T_i \partial_\mu \theta^i(x)$$

$$= T_i A^i_\mu(x) - i(T_j T_i - T_i T_j)\theta^j(x) A^i_\mu(x) + \frac{1}{g} T_i \partial_\mu \theta^i(x)$$

$$= T_i A^i_\mu(x) - i \cdot i T_k f_{kji} \theta^j(x) A^i_\mu(x) + \frac{1}{g} T_i \partial_\mu \theta^i(x)$$

$$= T_i \left(A^i_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^i(x) + f_{ikl}\theta^k(x) A^l_\mu(x) \right)$$

$$\therefore\ A'^j_\mu(x) = A^j_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^j(x) + f_{jkl}\theta^k(x) A^l_\mu(x) \quad \rightarrow (7.9)\ //$$

∘ Lagrangian

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4} F^i_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_i}_{\text{運動項}} + \underbrace{\mathcal{L}_{matter}}_{\text{fermionだけの項}} + \underbrace{\mathcal{L}_{int}(\Psi^j, D_\mu \Psi^j)}_{\text{相互作用項}} \qquad (7.11)$$

(自由場 + 自己相互作用)　　(fermion と gauge field の結合)

項	gauge invariance	
$F^j_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_j$	○	
$\mathcal{L}_{matter}$	○	→ Ψ だけで表される
$\mathcal{L}_{int}(\Psi^j, D_\mu\Psi^j)$	○	→ Ψ, $D_\mu\Psi$ だけで表される.
$A^j_\mu A^\mu_j$	×	→ mass term が禁止.
$F_{\mu\nu}$	×	

・field tensor (field strength) $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} \equiv F^j_{\mu\nu} T_j = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \qquad (7.10a)$$

$$F^j_{\mu\nu} = \partial_\mu A^j_\nu - \partial_\nu A^j_\mu - g f_{jkl} A^k_\mu A^l_\nu \qquad (7.10b)$$

カラーの添字をベクトルとして書くこともある.

$$\vec{F}_{\mu\nu} = (F^1_{\mu\nu}, F^2_{\mu\nu}, \cdots, F^N_{\mu\nu}) \qquad (7.12a)$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} = F^j_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_j \underset{?}{=} 2\,\mathrm{Tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad (7.12b)$$

Exercise 7.2

(a) (7.8)のゲージ場の変換が量子力学でのゲージ変換と矛盾していないことを確認.

$$(7.8)\quad A_\mu' = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}$$

$$(2.147)\quad A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x) , \quad \psi \to e^{ig\chi(x)} \psi$$

(2.147)における $e^{ig\chi(x)}$ が U に対応。

$$(7.8) \to \quad e^{ig\chi(x)} A^\mu e^{-ig\chi(x)} - \frac{i}{g} e^{ig\chi(x)} \partial^\mu e^{-ig\chi(x)}$$

$$= A^\mu - \frac{i}{g} (-ig \partial^\mu \chi(x)) e^{ig\chi(x)} e^{-ig\chi(x)}$$

$$= A^\mu - \partial^\mu \chi(x)$$

$\to$ (2.147)

(b) (7.10b) を (7.10a) から示す.

(7.10a) $\quad F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^{j} T_j$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

$$= \partial_\mu A_\nu^j T_j - \partial_\nu A_\mu^j T_j + ig[A_\mu^j T_j, A_\nu^k T_k]$$

$$= \partial_\mu A_\nu^j T_j - \partial_\nu A_\mu^j T_j + ig A_\mu^j A_\nu^k [T_j, T_k]$$

$$= \partial_\mu A_\nu^j T_j - \partial_\nu A_\mu^j T_j + ig A_\mu^j A_\nu^k \cdot i f_{ljk} T_l$$

$$= \partial_\mu A_\nu^j T_j - \partial_\nu A_\mu^j T_j - g f_{ljk} A_\mu^j A_\nu^k T_l$$

$l \to j$, $j \to k$, $k \to l$ と書き直す.

$$= \partial_\mu A_\nu^j T_j - \partial_\nu A_\mu^j T_j - g f_{jkl} A_\mu^k A_\nu^l T_j$$

$$= (\partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j - g f_{jkl} A_\mu^k A_\nu^l) T_j$$

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j - g f_{jkl} A_\mu^k A_\nu^l \quad \longrightarrow \quad \underline{(7.10b)}$$

(c) U(1) field $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ は共変微分を用いて

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu]$$

と書けることを示す。また、このことから、non-Abelian の場合には (7.10a) の形が要求されることを示す。

共変微分は $D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + iqA_\mu)\psi(x)$ と書けるので、

$$\frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu]\psi$$

$$= \frac{1}{iq}(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x)$$

$$= \frac{1}{iq}\left[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu)\psi(x) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi(x)\right]$$

$$= \frac{1}{iq}\left[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu\psi(x) + iqA_\nu\psi(x)) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu\psi(x) + iqA_\mu\psi(x))\right]$$

$$= \frac{1}{iq}\Big\{\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\psi(x)} + iq\,\partial_\mu(A_\nu\psi(x)) + iqA_\mu\partial_\nu\psi(x) + i^2q^2A_\mu A_\nu\psi(x)$$
$$- \left[\cancel{\partial_\nu\partial_\mu\psi(x)} + iq\,\partial_\nu(A_\mu\psi(x)) + iqA_\nu\partial_\mu\psi(x) + i^2q^2A_\nu A_\mu\psi(x)\right]\Big\}$$

$$= \frac{1}{iq}\Big[iq\,\partial_\mu A_\nu\cdot\psi(x) + \cancel{iqA_\nu\partial_\mu\psi(x)} + \cancel{iqA_\mu\partial_\nu\psi(x)} - \cancel{q^2A_\mu A_\nu\psi(x)}$$
$$- iq\,\partial_\nu A_\mu\cdot\psi(x) - \cancel{iqA_\mu\partial_\nu\psi(x)} - \cancel{iqA_\nu\partial_\mu\psi(x)} + \cancel{q^2A_\nu A_\mu\psi(x)}\Big]$$

$$= \frac{1}{iq}iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi(x)$$

$$= \underline{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}\psi(x)$$

$$= \underline{F_{\mu\nu}}\cdot\psi(x) \qquad \therefore\ \underline{F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu]}\,_{//}$$

次に non-Abelian の場合を考える. non-Abelian の場合も $F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$ を表せるとすると, $F_{\mu\nu}$ がどのような形になるか。

$$\frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]\Psi(x)$$

$$= \frac{1}{ig}\left[(\partial_\mu + igA_\mu)(\partial_\nu + igA_\nu)\Psi(x) - (\partial_\nu + igA_\nu)(\partial_\mu + igA_\mu)\Psi(x)\right]$$

A_μ, A_ν の順番に注意

$$= \frac{1}{ig}\Big\{\cancel{\partial_\mu\partial_\nu\Psi(x)} + ig\,\partial_\mu(A_\nu\Psi(x)) + igA_\mu\partial_\nu\Psi(x) + i^2g^2A_\mu A_\nu\Psi(x)$$

$$- \left[\cancel{\partial_\nu\partial_\mu\Psi(x)} + ig\,\partial_\nu(A_\mu\Psi(x)) + igA_\nu\partial_\mu\Psi(x) + i^2g^2A_\nu A_\mu\Psi(x)\right]\Big\}$$

$$= \frac{1}{ig}\Big\{ig\,\partial_\mu A_\nu\cdot\Psi(x) + ig\cancel{A_\nu\partial_\mu\Psi(x)} + ig\cancel{A_\mu\partial_\nu\Psi(x)} + i^2g^2A_\mu A_\nu\Psi(x)$$

$$-ig\,\partial_\nu A_\mu\cdot\Psi(x) - \cancel{igA_\mu\partial_\nu\Psi(x)} - ig\cancel{A_\nu\partial_\mu\Psi(x)} - i^2g^2A_\nu A_\mu\Psi(x)\Big\}$$

$$= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Psi(x) + ig(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu)\Psi(x)$$

$$= \left\{\underline{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]}\right\}\Psi(x)$$

$$\Downarrow$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \qquad (7.10a)$$

//

||

(d) (7.5) $D_\mu\Psi(x) \to D'_\mu\Psi'(x) = U(\theta) D_\mu\Psi(x)$ と (c) の結果を用いて、

QEDの $F_{\mu\nu}$ はゲージ不変だが、non-Abelian theory の $F^i_{\mu\nu}$ はゲージ不変でないことを示す。
このとき、$F^i_{\mu\nu}$ は adjoint rep. のように変換される。

(i) QEDの場合。(Abelianの場合)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad A_\mu \to A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}$$

より、

$$U(x) = e^{ig\chi(x)}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu\left(U A_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} U\partial_\nu U^{-1}\right) - \partial_\nu\left(U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U\partial_\mu U^{-1}\right) \\
&= \partial_\mu U\cdot A_\nu U^{-1} + U\partial_\mu(A_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g}\partial_\mu U\cdot\partial_\nu U^{-1} - \cancel{\frac{i}{g}U\cdot\partial_\mu\partial_\nu U^{-1}} \\
&\quad - \partial_\nu U\cdot A_\mu U^{-1} - U\cdot\partial_\nu(A_\mu U^{-1}) + \frac{i}{g}\partial_\nu U\cdot\partial_\mu U^{-1} + \cancel{\frac{i}{g}U\cdot\partial_\nu\partial_\mu U^{-1}} \\
&= \cancel{\partial_\mu U\cdot A_\nu U^{-1}} + U\partial_\mu A_\nu\cdot U^{-1} + \cancel{U A_\nu\partial_\mu U^{-1}} - \cancel{\frac{i}{g}\partial_\mu U\cdot\partial_\nu U^{-1}} \\
&\quad - \cancel{\partial_\nu U\cdot A_\mu U^{-1}} - U\partial_\nu A_\mu\cdot U^{-1} - \cancel{U A_\mu\partial_\nu U^{-1}} + \cancel{\frac{i}{g}\partial_\nu U\cdot\partial_\mu U^{-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu U\cdot A_\nu U^{-1} + U A_\nu\partial_\mu U^{-1} \\
&= ig\partial_\mu\chi(x) U U^{-1} A_\nu + U A_\nu(-ig\partial_\mu\chi(x))U^{-1} \\
&= ig\partial_\mu\chi(x) A_\nu - ig\partial_\mu\chi(x) A_\nu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\partial_\nu U\cdot A_\mu U^{-1} - U A_\mu\partial_\nu U^{-1} \\
&= -ig\partial_\nu\chi(x) U U^{-1} A_\mu + ig\partial_\nu\chi(x) U U^{-1} A_\mu \\
&= -ig\partial_\nu\chi(x) A_\mu + ig\partial_\nu\chi(x) A_\mu \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{i}{g}\partial_\mu U\cdot\partial_\nu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\nu U\cdot\partial_\mu U^{-1} \\
&= -\frac{i}{g} ig\partial_\mu\chi\cdot U\cdot(-ig)\partial_\nu\chi U^{-1} + \frac{i}{g} ig\partial_\nu\chi(x) U(-ig)\partial_\mu\chi(x) U^{-1} = 0
\end{aligned}
$$

したがって、

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U \partial_\mu A_\nu \cdot U^{-1} - U \partial_\nu A_\mu \cdot U^{-1}$$

$$= U U^{-1} \partial_\mu A_\nu - U U^{-1} \partial_\nu A_\mu$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$= \underline{F_{\mu\nu}} \,/\!/$$

$F_{\mu\nu}$ がゲージ不変であることが分かる。

(ii) non-Abelian の場合.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad , \quad A_\mu \to A_\mu' = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}$$

$$F_{\mu\nu}' = \partial_\mu A_\nu' - \partial_\nu A_\mu' + ig[A_\mu', A_\nu']$$

$$= \underline{\partial_\mu\left(UA_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\nu U^{-1}\right) - \partial_\nu\left(UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}\right)}$$

$$\underline{+ ig\left[UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U\partial_\mu U^{-1}, UA_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\nu U^{-1}\right]}$$

● 自由場部分

$$\to \partial_\mu U \cdot A_\nu U^{-1} + U \partial_\mu (A_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g} \partial_\mu U \cdot \partial_\nu U^{-1} - \frac{i}{g} U \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} U^{-1}$$
$$- \partial_\nu U \cdot A_\mu U^{-1} - U \partial_\nu (A_\mu U^{-1}) + \frac{i}{g} \partial_\nu U \cdot \partial_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} U \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} U^{-1}$$

$$= \partial_\mu U \cdot A_\nu U^{-1} + U \partial_\mu A_\nu \cdot U^{-1} + U A_\nu \partial_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} \partial_\mu U \cdot \partial_\nu U^{-1}$$
$$- \partial_\nu U \cdot A_\mu U^{-1} - U \partial_\nu A_\mu \cdot U^{-1} - U A_\mu \partial_\nu U^{-1} + \frac{i}{g} \partial_\nu U \cdot \partial_\mu U^{-1}$$

$$= U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) U^{-1} + U(A_\nu \partial_\mu U^{-1} - A_\mu \partial_\nu U^{-1}) + (\partial_\mu U \cdot A_\nu - \partial_\nu U \cdot A_\mu) U^{-1}$$
$$+ \frac{i}{g}(\partial_\nu U \cdot \partial_\mu U^{-1} - \partial_\mu U \cdot \partial_\nu U^{-1})$$

● 自己相互作用部分

$$\to ig \underbrace{[UA_\mu U^{-1}, UA_\nu U^{-1}]}_{①} + ig \cdot \left(-\frac{i}{g}\right) \underbrace{[UA_\mu U^{-1}, U\partial_\nu U^{-1}]}_{②}$$
$$+ ig\left(-\frac{i}{g}\right) \underbrace{[U\partial_\mu U^{-1}, UA_\nu U^{-1}]}_{③} + ig\left(-\frac{i}{g}\right)^2 \underbrace{[U\partial_\mu U^{-1}, U\partial_\nu U^{-1}]}_{④}$$

① $[UA_\mu U^{-1}, UA_\nu U^{-1}] = UA_\mu U^{-1} UA_\nu U^{-1} - UA_\nu U^{-1} UA_\mu U^{-1}$

$$= U(A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu) U^{-1}$$

$$= \underline{U[A_\mu, A_\nu] U^{-1}} \quad //$$

$$ig \cdot \frac{i^2}{g^2}$$

$$-i \frac{1}{g}$$

② $[UA_\mu U^{-1}, U\partial_\nu U^{-1}]$

$$= UA_\mu U^{-1}U\partial_\nu U^{-1} - U\partial_\nu U^{-1}\cdot UA_\mu U^{-1}$$

$$= UA_\mu\partial_\nu U^{-1} - U\partial_\nu U^{-1}\cdot UA_\mu U^{-1}$$

③ $[U\partial_\mu U^{-1}, UA_\nu U^{-1}]$

$$= U\partial_\mu U^{-1}UA_\nu U^{-1} - UA_\nu U^{-1}U\cdot\partial_\mu U^{-1}$$

$$= U\partial_\mu U^{-1}UA_\nu U^{-1} - UA_\nu\partial_\mu U^{-1}$$

$\partial_\mu(UU^{-1}) = 0$

$\Leftrightarrow \partial_\mu U\cdot U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1} = 0$

②+③

$$\to U(A_\mu\partial_\nu U^{-1} - A_\nu\partial_\mu U^{-1}) + U(\partial_\mu U^{-1}\cdot UA_\nu - \partial_\nu U^{-1}\cdot UA_\mu)U^{-1}$$

$$= U(A_\mu\partial_\nu U^{-1} - A_\nu\partial_\mu U^{-1}) + (-\partial_\mu U\cdot A_\nu + \partial_\nu U\cdot A_\mu)U^{-1}$$

④ $[U\partial_\mu U^{-1}, U\partial_\nu U^{-1}]$

$$= U\partial_\mu U^{-1}\cdot U\partial_\nu U^{-1} - U\partial_\nu U^{-1}U\partial_\mu U^{-1}$$

$$= -\partial_\mu U\cdot\partial_\nu U + \partial_\nu U\cdot\partial_\mu U^{-1}$$

以上を合わせて、自己相互作用部分は、

$$ig\,\underbrace{U[A_\mu, A_\nu]U^{-1}}_{①} + \underbrace{\left[U(A_\mu\partial_\nu U^{-1} - A_\nu\partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\nu U\cdot A_\mu - \partial_\mu U\cdot A_\nu)U^{-1}\right]}_{②+③}$$

$$-\frac{i}{g}(\underbrace{\partial_\nu U\cdot\partial_\mu U^{-1} - \partial_\mu U\cdot\partial_\nu U}_{④})$$

$F'_{\mu\nu}$

$$
\begin{aligned}
&= U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)U^{-1} + U(A_\nu \partial_\mu U^{-1} - A_\mu \partial_\nu U^{-1}) + (\partial_\mu U \cdot A_\nu - \partial_\nu U \cdot A_\mu)U^{-1} \\
&\qquad + \frac{i}{g}(\partial_\nu U \cdot \partial_\mu U^{-1} - \partial_\mu U \cdot \partial_\nu U^{-1}) \\
&\quad + ig\, U[A_\mu, A_\nu]U^{-1} + \left[U(A_\mu \partial_\nu U^{-1} - A_\nu \partial_\mu U^{-1}) + (\partial_\nu U \cdot A_\mu - \partial_\mu U \cdot A_\nu)U^{-1} \right] \\
&\qquad - \frac{i}{g}(\partial_\nu U \cdot \partial_\mu U^{-1} - \partial_\mu U \cdot \partial_\nu U) \\
&= U(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu])U^{-1} \\
&= U \cdot F_{\mu\nu} U^{-1}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \underline{F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}}$$

と変換する。行列要素で見ると、

$$\underbrace{(F'^{i}_{\mu\nu} T_i)_{lm}}_{\text{Lie代数の行列}} = \underbrace{(U)_{lp}}_{\text{Lie群}} \underbrace{(F^{j}_{\mu\nu} T_j)_{pq}}_{\text{Lie代数}} \underbrace{(U^{-1})_{qm}}_{\text{Lie群}}$$

$$\Rightarrow \quad X' = A X A^{-1} \quad (\underset{\text{Lie群}}{A \in G},\ \underset{\text{Lie代数}}{X \in \mathfrak{g}})$$

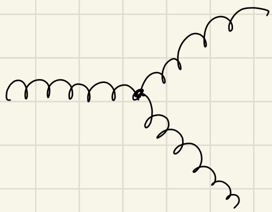
という変換の形になる。これは随伴表現の変換則。

7.2 Properties of Yang-Mills Fields.

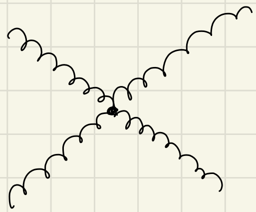
ヤン・ミルズ場の重要な性質：

1. 局所対称性がゲージ場 $A_\mu(x)$ と物質場 $\Psi(x)$ の相互作用を決める.

2. 物質場 $\Psi(x)$ がない場合も自己相互作用を含む： $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$



3-point vertex



4-point vertex

- 光子のときとは大きく異なるポイント.

3. Exercise 7.2 で見たように、ゲージ場はゲージ群の随伴表現として変換する.

4. ゲージ群 G がより単純な群の直積に分解できないとき、
ヤン・ミルズ理論には1つの結合定数 g のみ。

5. もし、ゲージ群 G が直積へ分解できたら、その数だけ結合定数が必要。

理論	ゲージ群	結合定数の個数	
Glashow-Salam-Weinberg	$SU(2)\times U(1)$	2	$\Rightarrow$ Ch.9
Yang-Mills	$SU(N)$	1	

6. ヤン・ミルズ理論はくりこみ可能 (∵ local gauge invariance)
ただし、アノマリーの困難を含む → §9.3

7. ヤン・ミルズ場は massless vector field でなければならない
(∵ 質量項が gauge invariance をやぶる)

· ヤン・ミルズ理論 (SU(3)color) のゲージ場であるグルーオンは massless だが、直接の証拠はない。 ⇒ ch.10

· 初期の頃、massless boson は光子だけなのに、複数個の massless boson が予測された。
→ ∘ gauging する対称性を見誤っていた。
∘ Goldstone and Higgs modes が知られていなかった。 ⇒ Ch.8

7.3 Path-Dependant Representations.

- 異なる時空点 x, x' でのゲージ場 $A_\mu(x)$ をつなぐ変換 "平行移動" を考えることができる.
- このような変換はゲージ群の元であり、異なる時空点の系を結ぶゲージ変換となる.

① 実スカラー場 $\phi(x)$

$$\left(\because \ \phi(x+dx) = \phi(x) + dx_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \phi(x) \quad \Rightarrow dx_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = 0 \right)$$

$x \to x+dx$ の変化の下での不変性:

$$dx_\mu \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_\mu} \equiv dx_\mu \partial^\mu \phi(x) = 0 \qquad (7.13)$$

② 複素場 $\phi(x)$ with $U(1)$ gauge field

$$dx_\mu D^\mu \phi(x) \equiv dx_\mu [\partial^\mu + igA^\mu(x)]\phi(x) = 0 \qquad (7.14)$$

→ 平行移動

③ ヤン・ミルズ場に拡張

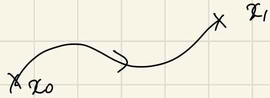
$$A^\mu(x) = A^\mu{}_i(x) T^i \qquad (7.15)$$

$$A^\mu{}_i(x) = 2\mathrm{Tr}(T_i A^\mu) \qquad (7.16)$$

微分方程式 (7.14) の形式解：

$$\psi(x_1) = P e^{ig\int_\gamma A_\mu(x) dx^\mu} \psi(x_0) \qquad (7.17)$$

γ : $x_0 \to x_1$ の経路



P : path-ordering operator

$$U_\gamma(x_0, x_1) = P e^{ig\int_{x_0}^{x_1} A_\mu(x) dx^\mu} \qquad (7.18)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x_1) = U_\gamma(x_0, x_1)\psi(x_0) \qquad (7.19)$$

を満たす gauge transf. になる : path-dependent rep. of a gauge group element

確認

$$dx_\mu [\partial^\mu + igA^\mu(x)]\psi(x) = 0$$

$$\to dx_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + igA^\mu(x)\psi(x)dx_\mu = 0$$

$$\to d\psi(x) = -igA^\mu(x)\psi(x)dx_\mu$$

$$\to \frac{d\psi(x)}{\psi(x)} = -igA^\mu(x)dx_\mu$$

$$\to \log\frac{\psi(x_1)}{\psi(x_0)} = -ig\int_{x_0}^{x_1} A^\mu(x)dx_\mu$$

$$\frac{\psi(x_1)}{\psi(x_0)} = e^{-ig\int_{x_0}^{x_1} A_\mu(x)dx^\mu}$$

※ [青木慎也, 格子上の場の理論]

共変微分の形を確認したが、$(\partial_\mu + igA_\mu)\psi$ だったので違いはない。

$U_\gamma(x_i, x_f) = Pe^{ig\int_\gamma A_\mu dx^\mu}$ として理解しておく。

⑩ ゲージ変換性

$$U_\gamma(x_0, x_1) \longrightarrow U'_\gamma(x_0, x_1) = G(x_1)\, U_\gamma(x_0, x_1)\, G^{-1}(x_0) \qquad (7.20)$$

$$\mathrm{Tr}\left(U_\gamma(x_0, x_1) \right) = \text{gauge invariant} \qquad (7.21)$$

⑪ temporal gauge and axial gauge

(7.18)のゲージ変換により、ゲージ場を扱いやすい形へ変換することが可能.

0 : Lorentz index, i : color index

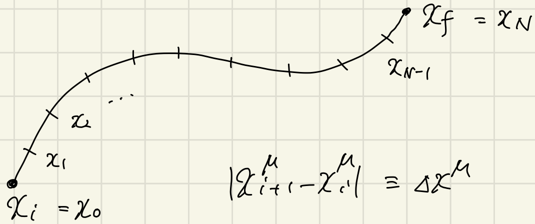
$$\begin{cases} A^0_i(x) = 0 & \text{temporal gauge} \\ A^3_i(x) = 0 & \text{axial gauge} \end{cases}$$

Exercise 7.3

(a) (7.20), (7.21) を示す.

$$U_\gamma(x_i, x_f) = P\exp\left(ig\int_{x_i}^{x_f} A_\mu(x)dx^\mu\right)$$ と書くことにする.

$x_i \to x_f$ の経路 γ を次のように分割し、離散化した表式を考える.



$$|x^\mu_{i+1} - x^\mu_i| \equiv \Delta x^\mu$$

$x^\mu_i = x^\mu_0 + i\Delta x^\mu$ として、γ に沿って分割する.

$$U_\gamma(x_i, x_f) = \lim_{N\to\infty} e^{igA_\mu(x_0)\cdot\Delta x^\mu} e^{igA_\mu(x_1)\Delta x^\mu} \cdot \cdots \cdot e^{igA_\mu(x_{N-1})\Delta x^\mu}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \exp\left(igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right)$$

$\downarrow$ N が十分大きい $\Leftrightarrow$ $\Delta x \ll 1$ とした.

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \left[1 + igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]$$

この表式に対してゲージ変換を考えると,

$$1 + igA'_\mu(x_n)\Delta x^\mu = 1 + ig\left(\underline{G(x_n)A_\mu(x_n)G(x_n)^{-1}} - \frac{i}{g}\underline{G(x_n)\partial_\mu G(x_n)^{-1}} \right)\Delta x^\mu$$

ここで、$G(x_{n+1})^{-1} = G(x_n+\Delta x)^{-1} = G(x_n)^{-1} + \frac{\partial G(x_n)^{-1}}{\partial x_n^\mu}\Delta x^\mu + O(\Delta x^2)$ より

$$\underline{G(x_n)A_\mu(x_n)G(x_n)^{-1}\cdot\Delta x^\mu}$$

$$= G(x_n)A_\mu(x_n)\left[G(x_n+\Delta x)^{-1} - \frac{\partial G(x_n)^{-1}}{\partial x_n^\mu}\cdot\Delta x^\mu + O(\Delta x^2) \right]\Delta x^\mu$$

$$= \underline{G(x_n)A_\mu(x_n)G(x_{n+1})^{-1}\Delta x^\mu + O(\Delta x^2)}$$

$$\underline{G(x_n)\partial_\mu G(x_n)^{-1}\cdot\Delta x^\mu}$$

$\frac{\partial G(x_n)^{-1}}{\partial x_n^\mu}\Delta x^\mu$ について解いた。

$$= G(x_n)\left(G(x_{n+1})^{-1} - G(x_n)^{-1} + O(\Delta x^2) \right)$$

$$= G(x_n)G(x_{n+1})^{-1} - G(x_n)G(x_n)^{-1} + O(\Delta x^2)$$

$$= \underline{-1 + G(x_n)G(x_{n+1})^{-1} + O(\Delta x^2)}$$

と評価できる。したがって、

$$\begin{aligned}
1 + igA'_\mu(x_n)\Delta x^\mu &= 1 + ig\left(G(x_n)A_\mu(x_n)G(x_{n+1})^{-1}\Delta x^\mu - \frac{i}{g}\left(-1 + G(x_n)G(x_{n+1})^{-1}\right) \right) + O(\Delta x^2) \\
&= ig\,G(x_n)A_\mu(x_n)G(x_{n+1})^{-1}\Delta x^\mu \\
&\qquad + ig\cdot\left(-\frac{i}{g}\right)G(x_n)G(x_{n+1})^{-1} + O(\Delta x^2) \\
&= \underline{G(x_n)\left[1 + igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]G(x_{n+1})^{-1} + O(\Delta x^2)}
\end{aligned}$$

これを離散化したゲージ変換の表式に戻すと、

$$U_\gamma'(x_i,x_f) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left[1+igA'_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left\{G(x_n)\left[1+igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]G(x_{n+1})^{-1}+\mathcal{O}(\Delta x^2)\right\}$$

$$= G(x_i)\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N-1}\left[1+igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]G(x_N)^{-1}$$

$$= \underline{G(x_i)\,U_\gamma(x_i,x_f)\,G(x_f)^{-1}} \quad \cdots (7.20)$$

と変換することが分かる. [青木慎也, 格子上の場の理論]

(b) $A^\mu(x) = A^\mu{}_i(x)\,T^i$ (7.15)

$A^\mu{}_i(x) = 2\,\mathrm{Tr}(T_i A^\mu)$ (7.16) 書き換える.

(7.15)の両辺に T_j をかけて ゲージ群の空間でトレースをとる.

$$T_j A^\mu(x) = T_j A^\mu{}_i(x)\,T^i$$

$$= A^\mu{}_i(x)\,T_j T^i$$

$$\mathrm{Tr}(T_j A^\mu(x)) = A^\mu{}_i(x)\,\mathrm{Tr}(T_j T^i)$$

$$= A^\mu{}_i(x)\cdot\frac{1}{2}\delta_{ij}$$

規格化 : $\mathrm{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$

$$= \frac{1}{2}A^\mu{}_j$$

$$\Rightarrow \underline{A^\mu{}_j = 2\,\mathrm{Tr}(T_j A^\mu(x))} \quad \cdots (7.16)$$

Exercise 7.4

$SU(2)$, $SU(3)$の場合について. $A_\mu(x) = A_\mu^i(x) T^i$ を書き下す.

◎ $SU(2)$

$$T_i = \frac{\sigma_i}{2}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_\mu(x) = A_\mu^i T_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3(x) & A_\mu^1(x) - iA_\mu^2(x) \\ A_\mu^1(x) + iA_\mu^2(x) & -A_\mu^3(x) \end{pmatrix}$$

◎ $SU(3)$

$T_i = \frac{\lambda_i}{2}$, λ_i : Gell-Mann行列 $(i = 1 \sim 8)$

$$\Rightarrow \quad A_\mu(x) = A_\mu^i T_i$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{3}} & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{A_\mu^8}{\sqrt{3}} & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix}$$

7.4 Path Integral Quantization

- ヤン・ミルズ場の量子化 $\begin{cases} \text{path integral} & ◎ \\ \text{canonical procedure} & △ \end{cases}$

なぜ path integral が用いられるのか.

◎ ゲージ固定の拘束条件が必要だから. → path integral の方が適している.

∵ 古典力学とのつながりが明確

ただし、ゲージ場の量子化は大変なタスク.

7.4.1 Gauge-Fixing Requirements
7.4.2 Faddeev-Popov Procedure
$\Big\}$ について見る.

7.4.1 Gauge-Fixing Requirements

SU(2) Yang-Mills field :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{i} F_{i}^{\mu\nu} \quad (i=1,2,3) \qquad (= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int})$$

$$F_{\mu\nu}^{i} = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i - g f_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k \quad , \quad f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

generating functional for free field :

$$Z[J] = \int [\mathcal{D}A_\mu] \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_0 + i \int d^4x \, J_\mu^i(x) A_i^\mu(x) \right) \quad (7.23)$$

$\mathcal{L}_0$:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)(\partial^\mu A^\nu_i - \partial^\nu A^\mu_i)$$

$$= \frac{1}{2} A_\mu^i (g^{\mu\nu} \Box - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu^i$$

$J_\mu^i(x)$ $(i=1,2,3)$: source field.

$$\xrightarrow{\text{path integral}} \quad J[Z] \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\, K}} \exp(J \cdot K^{-1} J)$$

問題点 : $K_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu \partial_\nu$ が 逆演算子をもたない。

理由 : ヤン・ミルズ作用が local なゲージ変換で不変なため。
ゲージ変換によって変換可能なので無限の自由度をもってしまう。

$\Rightarrow$ ゲージ変換による自由度を制限すること : gauge fixing.

※ path integral の formulation では、すべての可能性を足し合わせるので
発散してしまう。これを回避するために fixing.

gauge fixing condition :

$$f_i(A_\mu)=0 \quad (i=1,2,3) \qquad (7.25)$$

[ゲージ場で張られる空間で、超曲面を指定することに相当]

よく使われる方法が Faddeev-Popov method

補足

path integral では全ての可能な配位を考慮することから困難が生じる.

Canonical method では. ゲージ場の時間発展を記述する完全系の基底を見つける困難に対応.

(あるtで交換関係を設定しても、別の時刻tではゲージ変換の自由度のために.

設定した交換関係が成り立たないことが起こる.)

7.4.2 Faddeev – Popov Procedure.

The Faddeev – Popov ansatz :

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int [\mathcal{D}A_\mu]\, \underbrace{\mathrm{Det}\left(\frac{\delta f}{\delta \theta}\right) \delta[f_i(A_\mu)]}_{} \times \exp\left(i\int d^4x \left[\mathcal{L} + J_\mu^i A^\mu_i\right]\right)$$

この因子の導入により、余分な自由度を消去できる。

$\delta[f_i(A_\mu)]$: gauge fixing condition を引数とする δ-関数

$$\left(\frac{\delta f}{\delta \theta}\right)_{ij} \equiv \frac{\delta f_i}{\delta \theta_j}$$

: gauge fixing condition f の ゲージ変換のパラメータ θ での変分。

㊟ Abelian gauge / non-Abelian gauge with axial gauge

Faddeev-Popov determinant は ゲージ場の path integral の外に出せる。

(non-Abelian の任意のゲージについては、そうとは言えない)

$$\Rightarrow \quad \int [d\eta][d\eta^*]\, e^{i(\eta^*_i K \eta)} \equiv \mathrm{Det}\,(iK)$$

行列式を Fermi-Dirac ghost field η, η^* の path integral に置換できる。

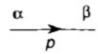
theory	Faddeev–Popov procedure
Abelian gauge	OK
Non-Abelian with axial gauge	OK
Non-Abelian with other gauges	ghost interactions (interal loop)

- ヤン・ミルズ理論の完全な Feynman rules は ghost の内線も含む.
  - ghost loop として現れる
  - ghost・antighost は区別
  - Fermi–Dirac 統計に従う.

→ Fig 10.16 (次ページ)

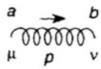
- Axial gauge は ghost を含まないので便利だが, 高次の計算では Lorentz 不変性が破れているので扱いづらい.
  - 重要な計算では ghost を含む計算が行われる.
  - ghost と非物理的なゲージ偏極が, 物理的なスペクトルと分離することを説明するのは繊細な仕事になる.

Fermion Propagator



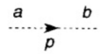
$$\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}\delta_{\alpha\beta}$$

Gluon Propagator



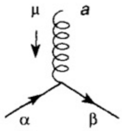
$$-i\left[g_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\epsilon}\right]\frac{\delta_{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

Ghost Propagator



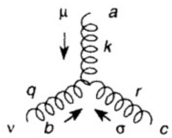
$$\frac{i\delta_{ab}}{p^2 + i\epsilon}$$

Fermion Vertex



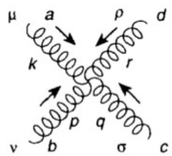
$$\tfrac{1}{2} i g \gamma_\mu \lambda^a_{\alpha\beta}$$

Triple Vertex



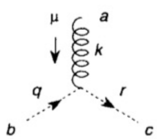
$$g f_{abc}\big[g_{\mu\nu}(k-q)_\sigma + g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu + g_{\sigma\mu}(r-k)_\nu\big]$$

Quartic Vertex



$$\begin{aligned} -ig^2\big[& f_{abe}f_{cde}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \\ &+ f_{ace}f_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \\ &+ f_{ade}f_{cbe}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})\big] \end{aligned}$$

Ghost Vertex



$$g f_{abc} r_\mu$$

Fig. 10.16 Feynman rules for QCD (Buras, 1980). The parameter α in the gluon propagator specifies the gauge; the indices α and β label quark colors; a, b, c, d, e label gluon or ghost colors; $\lambda^a_{\alpha\beta}$ is an element of the color matrix λ^a; f_{abc} is an $SU(3)$ structure constant; μ, ν, ρ, σ denote Lorentz indices; and the 4-momenta are specified by p, k, q, and r.

Exercise 7.5

Abelian gauge fields と axial gauge の non-Abelian gauge に対して.

Faddeev-Popov determinant がゲージ場に依存しないことを示す.

Faddeev-Popov determinant は gauge fixing condition $f_i(A_\mu)=0$ から計算できる.

◎ Abelian gauge fields

例として. Lorentz gauge を考えると.

$$f(A) = \partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

ゲージ変換は $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(x) \Rightarrow A_\mu = -\partial_\mu \chi + A'_\mu$

したがって、ゲージ変換のパラメータ $\chi(x)$ による変分は、

$$\frac{\delta f}{\delta \chi} = \frac{\delta}{\delta \chi}\left(-\partial_\mu \partial^\mu \chi\right) = -\partial_\mu \partial^\mu$$

$$\Rightarrow \det\left(\frac{\delta f}{\delta \chi}\right) = \det\left(-\partial_\mu \partial^\mu\right) \rightarrow A_\mu \text{ に依存しない.}$$

このように、Abelian gauge fields に対して、Faddeev-Popov determinant はゲージ場に依らないので A_μ の path integral の外に出すことができる.

◎ non-Abelian gauge with axial gauge

axial gauge condition は

$$f_i(A_\mu) = A_i^3 = 0 \qquad (i=1,2,3)$$

微小ゲージ変換を考えて、θ_i 依存性をみると (7.9) より

$$A'^{\,j}_{\mu}(x) = A^{j}_{\mu}(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^{j}(x) + f_{jkl}\,\theta^k(x) A^l_\mu(x) \qquad (7.9)$$

$$f_j(A'_\mu) = A'^{\,j}_{3}(x)$$
$$= A^{j}_{3}(x) + \frac{1}{g}\partial_3\theta^{j}(x) + f_{jkl}\,\theta^k(x) A^l_3(x)$$
$$= \underbrace{0 + \frac{1}{g}\partial_3\theta^{j}(x) + 0 = 0}_{\text{axial gauge condition}}$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta\theta}\right)_{ij} = \frac{\delta f_i(A_\mu)}{\delta\theta_j} = \frac{1}{g}\partial_3\,\delta^{ij} \;//$$

このことから、Faddeev-Popov determinant は "axial gauge" での non-Abelian gauge では、ゲージ場に依らない。

したがって、ゲージ場の path integral の外に出すことができる。