1　第一回ノート 9/11

1.1　基本的なことがら

・線形空間

実数や複素数のように加減乗除の四則演算が定義された集合のことを「体（field）」と呼ぶ（体の定義はもっと厳密にあるが、簡単にはこのような解釈でよい）。実数全体の集合を $\mathbb{R}$、複素数の全体を $\mathbb{C}$ で表し。実数体、複素数体と呼ぶ。

集合 V と係数体 K が次の公理を満たすとき、集合 V を体 K 上の線形空間あるいは、ベクトル空間（vector space）という。

$$x, y, z \in V,\ a, b \in K \tag{1.1}$$

1.和の満たす公理

(1)$x + y = y + x$

(2)$(x + y) + z = x + (y + z)$

(3)$x + 0 = x$　　となるゼロベクトル 0（単位元）が存在.

(4) 任意の x に対して $x + (-x) = 0$ となる逆ベクトル $-x$（逆元）が存在.

2.スカラー倍の満たす公理　(1.2)

(5)$a(x + y) = ax + by$

(6)$(a + b)x = ax + bx$

(7)$(ab)x = a(bx)$

(8)$1x = x$

線形空間の元 x をベクトルと呼ぶ。

〜質問〜

・本質的な線形空間の公理ってどれなのだろうか。

⇒ これら 8 個の公理は全部必要。もっと言えば、足し算や掛け算という”演算”自体を明確に提示しておく必要がある。集合論を認めてそれを土台にして線形空間を構築していく必要があるので、数学的にはもっとしっかりと言う必要がある。

・部分空間

V を体 K 上の線形空間とする。V の部分集合 U が和とスカラー倍について閉じているとき、すなわち $x, y \in U$ のとき $ax + by \in U$ のとき U は V の部分空間であるという。

・線形独立

$\{\boldsymbol{v}_i\}$ を k 個のベクトルの集合とする。

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_k\boldsymbol{v_k} = \boldsymbol{0}$$

を満足するのが $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ の場合だけに限られるとき、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は線形独立または一次独立（linearly independent）であるという。これらのベクトルが線形独立でないとき、これらは線形従属であるという。

線形独立なベクトルの組み $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ が一意的に

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v^n\boldsymbol{e}_n$$

と書けるとき、$\{\boldsymbol{e}_i\}$ を V の基底という。係数 v^i は基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分という。
$\Rightarrow$ このとき、”基底”の定義をもっと明確に示しておくほうが良い。

基底とは (1) その線形空間の生成系であり、(2) 互いが一次独立であるようなベクトルの集合のこと。

また、V の元 $\boldsymbol{v}$ が”一意に”決まるということも強調しておく。
基底の個数をそのベクトル空間の次元といい、

$$\dim V = n$$

のようにあらわす。
・線形写像
V, W を体 K 上の線形空間とする。V から W への写像 $f : V \to W$ が

$$f(a\boldsymbol{X}_1 + b\boldsymbol{X}_2) = af(\boldsymbol{X}_1) + bf(\boldsymbol{X}_2)$$

を満たすならば写像 f を線形写像（linear mapping）という。とくに、$V \to V$ の線形写像のことを線形変換と呼ぶ。$\Rightarrow$”変換”という言葉を用いるときに、逆変換について言及しておくとよい。今回で言えば、逆変換が存在するための条件など。
線形写像 $f : V \to W$ に対して

$$f(V) = \{f(\boldsymbol{X}) | \boldsymbol{X} \in V\} \tag{1.3}$$
$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{X} \in V | f(\boldsymbol{X}) = 0\} \tag{1.4}$$

をそれぞれ f の像（image）、核 (kernel) という。像および核はそれぞれ W, V の部分集合となっている。
・双対空間
対 K 上の線形空間 V に対して、その双対空間を導入する。V から K への線形写像全体の集合を V^* とする。V^* の元 f, g に対して

$$(1)[f+g](\boldsymbol{X}) = f(\boldsymbol{X}) + g(\boldsymbol{X}) \quad (\boldsymbol{X} \in V, f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X}) \in K) \tag{1.5}$$
$$(2)[af](\boldsymbol{X}) = a \cdot f(\boldsymbol{X}) \quad (a \in K, \boldsymbol{X} \in V)$$

によって、V^* 上に和とスカラー倍を定義すると、V^* は対 K 上の線形空間となる。このとき、V^* を V の双対空間（dual space）という。
３次元ベクトルの要素が実数から任意に選べるのと同様に、この３次元ベクトルを実数に対応させる線形写像もまた、その要素を任意に選ぶことができる。そこで、そのような線形写像”全体”という表現を用いている。

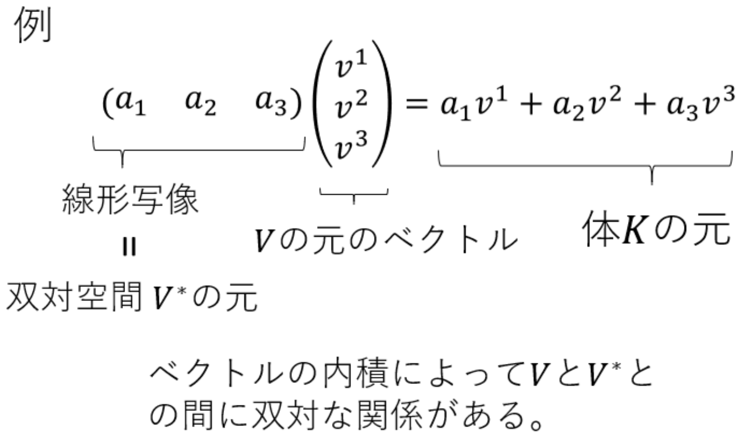

図１　３次元数ベクトルと線形写像による例

～質問～

このような場合は、線形空間に対して数を対応させる写像を決めると双対空間が決まるものなのか？それとも、双対空間というものを用意して、その二つの線形空間の間に数を対応させる写像を与えるのか？

$\rightarrow$ 双対空間というものがいまいちわかっていない。

$\Rightarrow$ まず、双対空間を最も抽象的に表すのが

$$V^* = \{f : V \to K \quad \text{linear}\}$$

である。この、元に対して一種の線形的な性質を規定したものが双対空間と呼ばれるものである。私がイメージしていたのは、その中の一つに”表現”を与えて自分の知っている行列の計算に同一視したものであったということ。さらに、ベクトル空間のなかに暗に標準基底を与え、双対基底を考えていた。ベクトル空間に標準基底を与え、双対基底をとるとどんな表現かにはよらず、対応する数（スカラー）が定まる。これを“計算”するために行列という“表現”をとったという認識。

量子力学ではブラ・ケットがこれに対応するらしい。

V の基底を $\{\boldsymbol{e}_i\}$、V^* の基底を $\{\boldsymbol{e}^{*j}\}$ と表すことにする。$\boldsymbol{e}^{*j}$ は線形写像であるから、$\boldsymbol{e}^{*j}(\boldsymbol{e}_i)$ を指定する、つまり双対空間の基底によってもとの線形空間の基底が体 K のどんな元（数）に対応するかを決めることによって、$\boldsymbol{e}^{*j}$ を完全に決めることができる。特に、次の関係式で定義される基底、双対基底 (dual space) が基本となる。

$$\boldsymbol{e}^{*j}(\boldsymbol{e}_i) = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

先の 3 次元の数ベクトルの場合で言えば、双対基底は各成分が $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ という三つの線形写像のことになる。このとき、ベクトルのほうは標準的な基底 $\{{}^t(1,0,0),{}^t(0,1,0),{}^t(0,0,1)\}$ をとった。

V^* の元 f は $\{\boldsymbol{e}^{*j}\}$ で展開できる：

$$f = \sum_j f_j \boldsymbol{e}^{*j}$$

V のベクトル

$$\boldsymbol{X} = \sum_i x^i \boldsymbol{e}_i$$

に対して f の作用は

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{X}) &= \sum_j f_j \boldsymbol{e}^{*j} \left(\sum_i x^i \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_{i.j} f_j x^i \boldsymbol{e}^{*j}(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i.j} \delta^i_j f_j x^i \\ &= \sum_i f_i x^i \end{aligned} \tag{1.6}$$

となる。つまり、ベクトル $\boldsymbol{X}$ に対する線形写像 f の作用は内積とみなせる。→ 先に内積を定義してない？ ⇒ このとき、“内積”という言葉は使わないほうが良い。２つのベクトルの元から数を作る写像という認識。群

集合 G の任意の二つの要素 g, h に対し、G の元 $g \cdot h$ を指定する演算 $\cdot$ が与えられ、次の三つの条件を満たすとき、G を群（group）という。⇒ 演算という言葉を用いたときに、すでに G の中で閉じていることを言っている。

(1) 結合法則 (1.7)
　G の任意の元 g, h, k に対して $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$
(2) 単位元の存在
　G の元 e が存在し、G の任意の元 g に対して $g \cdot e = e \cdot g = g$
(3) 逆元の存在
　G の任意の元 g に対して、G の元 g^{-1}が存在し $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

演算 $g \cdot h$ のことを積と呼び、$\cdot$ を省略して書かないことも多い。上記の定義から単位元はただ一つ存在し、逆元は一意に決まることが示せる。
e のほかにもう一つ (2) をみたす元 e' があったとすると

$$ge' = e'g = g$$

となるが、これを (2) と比べると結局 $e' = e$ であることが結論される。
次に (3) について考える。(3) をみたすもう一つの元 g'^{-1} があったとすると

$$gg'^{-1} = e$$

この両辺に左から g^{-1} をかけると

$$g^{-1}gg'^{-1} = g^{-1}e$$

この左辺は $(g^{-1}g)g'^{-1} = eg'^{-1} = g'^{-1}$、右辺は $g^{-1}e = g^{-1}$ となるからこれで $g'^{-1} = g^{-1}$ が言えたことになる。群 G においてさらに

(4) 交換法則 (1.8)
　G の任意の元 g, h, k に対して $g \cdot h = h \cdot g$

が満たされるとき、とくに群 G を可換群、もしくはアーベル群という。
群をなす集合に含まれる要素の個数を、その群の位数という。位数が有限な群を有限群、位数が無

限の群を無限群という。

・部分群

群 G の部分集合 H において、同じ積の定義で H が群をつくるとき、群 H を G の部分群（sub group）という。

具体的に調べるときに有用な、H が G の部分群であるための必要十分条件を与えておく。

$$(1)a, b \in H \Rightarrow ab \in H \tag{1.9}$$
$$(2)a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \tag{1.10}$$

群 G 自身や、単位元 e もそれぞれ部分群となるが自明な部分群と呼ばれ、あまり面白くない。

・剰余類

元 a は群 G に含まれるが、部分群 H には含まれないとする。このとき、

$$\text{集合 } H = \{e, H_1, \ldots, H_{n-1}\} \text{ に対し、} aH = \{a, aH, \ldots, aH_{n-1}\} \text{ を } H \text{ の左剰余類}$$

という。→ 部分群 H に対して、左から $a \notin H$ を作用させた集合のこと。

同様にして右剰余類 Ha が定義される。重要なのは、aH の元はすべて異なり H に含まれない、また、aH は一般に群になるとは限らないということ。このようにして、異なる n 個の元をもつ集合 H と aH が得られる。もし、$G = H + aH$ でなければ G の元のうち a とは異なる b を用いて、再び剰余類を生成できる。G が有限群であればこの手順により有限個の剰余類を用いて

$$G = H + aH + bH + \cdots + cH$$

と書くことができる。（このときの $+$ は集合としての和を表していることに注意。）この表式からわかるように群 G, H の位数がそれぞれ m, n のとき

$$m = n \times (\text{整数})$$

である。

・因子群（商群）

「群 G の部分群を H、G の任意の元を a とし aHa^{-1} の集合を考えるとこれは再び G の部分群である。」この教科書の言い方には二つの解釈の余地がある。１つ目は

$$aHa^{-1} = \left\{ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1}, \ldots\right\} = \left\{ah_ia^{-1} | h_i \in H\right\}$$

が G の部分群となる、という意味。２つ目は

$$H' = \left\{a_1Ha_1^{-1}, a_2Ha_2^{-1}, \ldots\right\} = \left\{aHa^{-1} | a \in G\right\}$$

が G の部分群となる、という意味。まず、このことを確かめておく。

集合 H が群 G の部分群であることの必要十分条件は

$$(1)a, b \in H \Rightarrow ab \in H \tag{1.11}$$
$$(2)a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H \tag{1.12}$$

この条件を確認すれば、２つの条件から H は G と同じ単位元を持つことが示せる。

１つ目の解釈の場合に部分群の条件を満たすか確認する。aHa^{-1} の元 ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1} をとるとこれらの積は

$$ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} = ah_1eh_2a^{-1} = a(h_1h_2)a^{-1} \in aHa^{-1}$$

したがって、(1) を満たす。このとき、１つ目の等号で $a \in G$ を用い、最後の $\in$ は H が部分群であることから成り立つ。次に (2) を確認する。ah_1a^{-1} の逆元を考えると

$$\left(ah_1a^{-1}\right)^{-1} = \left(h_1a^{-1}\right)^{-1}a^{-1} = ah_1^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$$

より、(2) も成り立つ。したがって、１つ目の解釈の場合確かに aHa^{-1} は G の部分群となる。
２つ目の解釈について (1),(2) を確認する。H' が G の部分群であることを確認するためには H' 内に G と同じ演算が定義されている必要がある。しかし、H' の元を見ると、元どうしの間に G と同じ積の演算を適用することができない。→G に入っている演算“積”は要素の間にはたらくが、集合の間にははたらかないということ。したがって、いまの教科書の記述は１つ目の解釈を指していることが分かった。
特に、任意の元 $a \in G$ に対して $aHa^{-1} = H$ ならばこの集合 aHa^{-1} は不変部分群 (invariant group) または正規部分群 (normal divisor) という（このときの等号は集合として等しいことを表す)。定義としてまとめると次のようになる；
【定義】G の部分群 H で、すべての $g \in G$ に対して

$$gHg^{-1} = H$$

が成り立つとき、H を G の正規部分群という。
この定義は次のように言い換えることができる。
H を G の正規部分群とすると

$$gHg^{-1} = H \tag{1.13}$$

が成り立つが、この両辺に右から g をかけて

$$gH = Hg \tag{1.14}$$

となる。逆に (**??**) の両辺に右から g^{-1} をかけると (**??**) が得られる。(**??**) と (**??**) を合わせて

$$H \text{ が } G \text{ の正規部分群} \Leftrightarrow \text{すべての } g \text{ に対して } gH = Hg$$

が得られる。
群 G の正規部分群 H について、H の剰余類の全体は再び群を作る。これを因子群あるいは商群といい、G/H で表す。⇒ 今の言葉での説明を詳しく検討する。
まず、上述の結果から正規部分群 H とは次を満たすような群 G の部分群のことであった：

$$gH = Hg,\ \ g \in G \quad (\text{このときの等号は集合として等しいことを意味する})$$

これを踏まえて G の H による剰余類を作る。（このとき、H が正規部分群であることから右剰余類、左剰余類という区別は意味がなくなっている。）
$a, b, \ldots, c \in G$ かつ $\notin H$ として集合

$$G/H = \{aH, bH, \ldots, cH\}$$

を作ったときに、この集合が再び群となるということを主張している。このとき、この群に入っている演算がどんなものであるか注意が必要である。このときの積は次のようなものである。

$$aH \cdot bH = (ab)H \quad (a, b \in G)$$

つまり、積はあくまでも G の元どうしについてはたらいている。この積のもとに H の剰余類全体が群となることを確かめる。そうすることで、正規部分群という条件が必要になる理由も明確になる。
まず、

H が G の正規部分群であるとき $a, b \in G$ に対して

$$aHb = abH$$

が成り立つ。
この式をもう少し詳しく考える。Hb から元 hb をとると、H が正規部分群であることからある $h' \in H$ が存在して、$hb = bh'$ となる。したがって、$ahb = abh'$ となり、$aHb \subset abH$ 同様にして $aHb \supset abH$ もいえるから、結局 $aHb = abH$ が成り立つ。（この等号は集合として等しいことを表す。）
続いて次の命題を説明する。

H が部分群ならば、$H^2 = H$ が成り立つ。

このとき H^2 とは

$$H^2 = HH = \{hh' | h, h' \in H\}$$

の意味である。
【証明】　単位元 e は H に含まれるから、$h \in H$ に対して

$$h = he \in H^2$$

したがって、$H \subset H^2$。逆に H は群であるから $h, h' \in H$ に対して $hh' \in H$ したがって $H^2 \subset H$.
以上から $H = H^2$
これら

$$aHb = abH, \;\; H^2 = H$$

を用いることで、

$$aHbH = abHH = abH^2 = abH$$

となる。特に、$b = a^{-1}$ のとき

$$aHa^{-1}H = aa^{-1}H = eH = H$$

である。このことは、演算

$$aHbH = abH$$

によって G/H が群を作ることを表している。
単位元は $eH = H$ によって得られる剰余類であり、逆元は aH を H（$=$ 単位元）に写す $a^{-1}H$ である。重要なのは、“正規部分群”の剰余類が群をなしているということ。
この構造の本質は積が可換であるかどうか、ということ。そのため次のことが成り立つ。

G が可換群のとき、G の任意の部分群 H は正規部分群となる。

簡単な例として整数の作る加群 $\mathbb{Z}$ がある。ここでは、これ以上詳しくは立ち入らないことにする。
・群の同型
G, G' を群とし、$a \in G, b \in G'$ とする。写像 $f : G \to G'$ が

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

を満たすとき f を $G \to G'$ への準同型写像という。さらに、準同型写像 f が 1 対 1 の対応をもつとき、f を同型写像といい、G と G' は同型であるという。

2　第二回ノート 9/18

2.1　基本的なことがら（続き）

・Lie 群

群の元 R が r 個のパラメーター $a^1, a^2, \ldots, a^r$ に依存しているとする：

$$R(a) = R(a^1, a^2, \ldots, a^r)$$

このとき、次の条件をみたすとき、この群をリー群（Lie group）という。

(1) 単位元が存在する　(2.1)

(2) 逆元が存在する

(3) 与えられた a, b に対して

$R(c) = R(a)R(b)$

ここでパラメーター c はパラメーター a, b の実関数

$c^k = \phi_k(a^1, \ldots, a^r, b^1, \ldots, b^r)$ $(k = 1, \ldots, r)$

(4) 結合則が成り立つ

(5) パラメーター間の関係を示す関数ϕ_kは各パラメーターについて何回でも微分可能である。

(1)〜(4) は今までの群の定義であり、(5) が Lie 群の条件である。演算を決めることによって群を特徴づけることができる。

・リー代数（Lie algebra）

リー群の元 $R(a)$ において、$R(0)$ が単位元 1 になるようにパラメーター $a = (a^1, \ldots, a^r)$ をとる。$R(a)$ のパラメーター a に関する無限小変換、すなわち a が微小な場合、$R(a)$ は

$$R(a) = 1 + \sum_{\rho=1}^{r} a^\rho X_\rho \tag{2.2}$$

$$X_\rho = \frac{\partial R(a)}{\partial a^\rho}|_{a=0}$$

と表すことができる。X_ρ は生成子（generator）、または無限小演算子と呼ばれる。これが可能になるのは $R(a)$ が連続パラメーターによって定められているからである。

続いて二つの無限小変換

$$R(a) = 1 + X_p, \ \ R(b) = 1 + X_q \tag{2.3}$$

について考える。先のリー群の条件 (3) から

$$R(a)R(b) = R(c) = 1 + \sum_{\alpha}^{r} C^\alpha X_\alpha \tag{2.4}$$

$$R(b)R(a) = R(c') = 1 + \sum_{\alpha}^{r} C'^\alpha X_\alpha$$

と書くことができる。$\rightarrow$ 一般には可換群ではないのでこの二つの結果は異なる。
したがって、

$$[R(a), R(b)] \equiv R(a)R(b) - R(b)R(a) \tag{2.5}$$

$$= \sum_{\alpha}^{r} \left(C^{\alpha} - C'^{\alpha}\right) X_{\alpha} \tag{2.6}$$

一方、(**??**) を (**??**) に代入して

$$[R(a), R(b)] = (1 + X_p)(1 + X_q) - (1 + X_q)(1 + X_p) \tag{2.7}$$

$$= X_p X_q - X_q X_p \tag{2.8}$$

$$= [X_p, X_q] \tag{2.9}$$

(**??**), (**??**) を比較すると、生成子どうしの交換子は生成子の線形結合

$$[X_p, X_q] = \sum_{\alpha}^{r} C_{pq}^{\alpha} X_{\alpha}$$

で表されることがわかる。$\rightarrow$ ここらへんのところが、何が言いたいのかよくわからない。リー代数、交換子のところを聞きたい。
係数 C_{pq}^{α} は構造定数と呼ばれる。

・ユークリッド空間
私たちが普段よく扱う空間のこと。一般の次元に拡張して定義する。実数全体の作る空間を $\mathbb{R}$ とする。$\mathbb{R}$ の m 個の直積空間

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

を $\mathbb{R}^m$ と書く。$\mathbb{R}^m$ において、二点

$$\begin{aligned} x &= (x^i) = (x^1, \ldots, x^m) \\ y &= (y^i) = (y^1, \ldots, y^m) \end{aligned} \tag{2.10}$$

の距離 $d(x, y)$ が

$$d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{m} (x^i - y - i)^2 \right]^{1/2}$$

で定義されているとき、m 次元ユークリッド空間という。$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^m, \mathrm{E}^{\mathrm{m}}$ などと書く。もう少し一般化した空間を考える。
・距離空間
ユークリッド空間は距離空間の一つの例である。ユークリッド空間の抽象的な特徴を取り出し、より抽象化された距離空間を定義する。

集合 X の任意の二つの元（点）x, y に対して、実数 $d(x,y)$ が一意に決まり、次の 4 条件

(2.11)

(1)$d(x,y) \geq 0$
(2)$d(x,y) = d(y,x)$
(3)$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$
(4)$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

をみたすとき、集合 X を距離 d に関する距離空間（metric space）という。

・内積

m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ は実数全体 $\mathbb{R}$ のベクトル空間となる。$\mathbb{R}^m$ の 2 点 x, y をベクトルとみて内積を

$$(x,y) = \sum_{i}^{m} x^i y^i$$

と定義すると、距離 $d(x,y)$ は

$$d(x,y) = (x-y, x-y)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2}$$

で与えられる。また $|\boldsymbol{x}| = (x,x)^{1/2}$ をベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さという。幾何的なベクトルを考えたとき、二つのベクトルのなす角を θ と定義し、普通の内積を与えると、直行する二つのベクトル同士の内積は 0 となる。そこで、

$$(x,y) = 0$$

のとき、二つのベクトル x, y は直行していると考える。

・位相空間

位相空間はこれから扱う中で最も一般的な空間である。のちに、もう一つ重要な空間として多様体も考える。

距離空間も一般的ではあるがすべての空間がその構造の中に距離を持っているわけではない。そこで、空間を特徴づける抽象的な性質を取り出してさらに一般化された空間を考える。今までにあげてきた空間は次のように並べることができる。

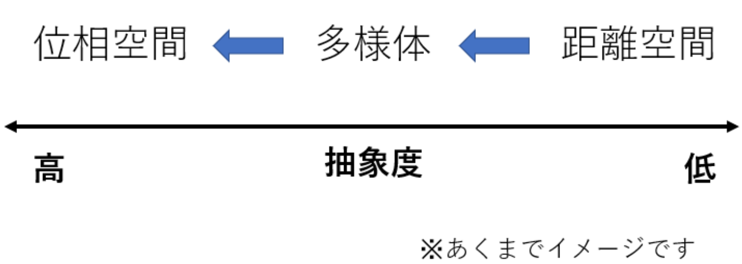

図 2　抽象化された空間の例

位相空間の定義を与える。

集合 X の部分集合を元とする集合を X の部分集合族という。集合 X において、次の三つの条件を満たす部分集合族が与えられているとする。

(1) 空集合$\varnothing$と集合 X 自身は Y の元 :$\varnothing \in Y, X \in Y$ (2.12)

(2)$Y_1 \in Y, Y_2 \in Y$ ならば、その共通部分も Y に属する：

$Y_1 \in Y, Y_2 \in Y \Rightarrow Y_1 \cap Y_2 \in Y$

Y から任意個の Y_λをとってくるとき、その和集合も Y に属する：

$\cup Y_\lambda \in Y$

このとき、Y は X に位相を定めるといい、X を位相空間（topological space）という。

$\Rightarrow$ X に位相を入れるというのは、集合 X の中に上記の条件を満たす部分集合族 Y を指定するということ。

具体的な例で確認しておく。

(例) 距離空間はその中に位相空間を定めることができる。$\Rightarrow$ 距離空間には”近傍”という概念により位相が入る。

X を距離空間とする。点 $a \in X$ と正の数 $\varepsilon > 0$ に対して X の部分集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X | d(x, a) < \varepsilon\}$$

を定義する。これを a の ε 近傍 (neighbourhood) という。X 中の ε 近傍から作られる部分集合族 Y は条件 (1)～(3) を満たすので、距離空間 X に位相を定める。

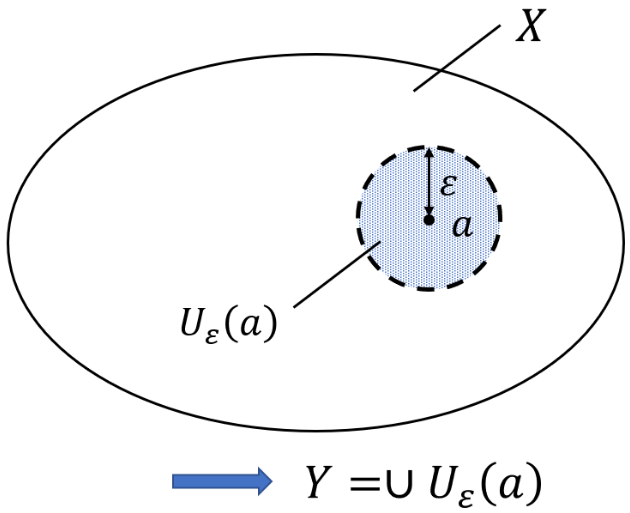

図 3　距離空間中の ε 近傍

・同相写像

二つの位相空間 X, Y を考え、X から Y への写像を f とする。

(1) 単射（1 対 1 写像）

写像 $f : X \to Y$ において、X の相異なる任意の二つの元 x, x' に対して $f(x) \neq f(x')$ が成り立つとき、f を単射 (injection) または 1 対 1 写像 (one − to − one) という。

(2) 全射（上への写像）

写像 $f : X \to Y$ について Y の任意の元 y に対して $f(y) = x$ となる X の元 x が存在するとき、f を全射 (surjection) または上への写像 (onto mapping) という。Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が少なくとも一つ存在することを主張している。

(3) 全単射（１対１対応）

写像 $f : X \to Y$ が単射かつ全射であるとき、f を全単射 (bijection) または１対１（の）対応 (one − to − one correspondence) という。

(4) 連続写像

Y の任意の開集合 U に対し、逆像 $f^{-1}(x)$ が X の開集合であるとき、f を連続写像 (continuous mapping) という。

これらの概念を用いて同相写像を定義する。

(5) 同相写像

写像 $f : X \to Y$ において f が全単射で、f と f^{-1} がともに連続であるとき f を同型写像という。このとき、X と Y は同相または位相空間として同相という。

⇒ 位相空間についての最低限の知識は見てきたけど、これらを自由自在に使えるかといわれると自信がない。位相空間における連続の定義と解析学における連続の定義の同値性とか、同相というのがどれぐらい有用な概念なのかがいまいちわからない。

3　第三回ノート 9/25

3.1　外積の作る空間

直交座標系 (x, y) と曲線座標系 (u, v) との間の座標変換が

$$u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y)$$

で与えられているとき、２重積分の変換公式は

$$\iint_D F(u, v)dudv = \iint_R F\left[\phi(x, y), \psi(x, y)\right] \left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}\right| dxdy \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}\right| = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

で与えられた。これを微分形式を用いて書き換える。

・外積

２変数 x, y の微分 dx, dy の外積を次で定義する。

$$\begin{aligned} &(1) dx \wedge dx = 0, dy \wedge dy = 0 \\ &(2) dx \wedge dy = -dy \wedge dx \end{aligned} \tag{3.3}$$

ベクトル積の拡張になっていることがわかる。

・外微分

座標変換が

$$u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y)$$

で与えられているとき、微分 du, dv は

$$du = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy \tag{3.4}$$

$$dv = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \tag{3.5}$$

で与えられる。この計算を 1 つの演算として一般化してみる。
普通の関数（ここでは $\phi(x,y),\psi(x,y)$）を 0 次外微分形式（または微分 0-形式、0-形式）と呼ぶ。0-形式に外微分 d を作用させて (**??**), (**??**) のようにして得られた du, dv を同様に 1-形式と呼ぶ。さらに、このような 1-形式どうしで外積をとると

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\wedge dx + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}dx\wedge dy + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}dy\wedge dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx\wedge dy \end{aligned} \tag{3.6}$$

のように計算できる。このとき、1-形式どうしの外積 $dx\wedge dy$ を同じく 2-形式とよぶ。
重積分の変数変換と比べると 2-形式を作る外積の計算は 2 重積分の変数変換に対応することがわかる。また、ベクトルの外積の拡張としてとらえると $dx\wedge dy$ は向きまでも考慮した一般化された演算であることがわかる。
・外積の作る空間
p-ベクトル空間
外積 $\wedge$ が作る空間を構成していく。実数 $a,b,c,\ldots$ からなる実数体 $\mathbb{R}$ において、元 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ の集合を用いて作られる $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間を L で表す。
記号の定義として空間 $\mathbb{R}$ を $\Lambda^0 L$、空間 L を $\Lambda^1 L$ とする。

$$\Lambda^0 L = \mathbb{R}, \Lambda^1 L = L$$

この記号のもとに $p = 2,3,\ldots$ に対して $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\Lambda^p L$ を構成していく。これを L 上の $p-$ ベクトル空間という。
$2-$ ベクトル空間 $\Lambda^2 L$ は和（線形結合）

$$\sum_{i=m}^{n} a_i(\alpha_i \wedge \beta_i)$$

の全体からなり ($\Rightarrow$ 線形結合で表せるもの全体の集合ということ)、次の条件が成り立つものとする。

$$\begin{aligned} &(1)(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)\wedge\beta = a_1(\alpha_1\wedge\beta) + a_2(\alpha_2\wedge\beta) \\ &(2)\alpha\wedge(b_1\beta_1 + b_2\beta_2) = b_1(\alpha\wedge\beta_1) + b_2(\alpha\wedge\beta_2) \\ &(3)\alpha\wedge\alpha = 0 \\ &(4)\alpha\wedge\beta + \beta\wedge\alpha = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(1), (2) は基底の計算に係数が関係しないことを表している。また、(3), (4) は外積の性質を表す。
$\alpha\wedge\beta$ をベクトル α と β の外積と呼ぶ。α と β が一次従属ならば $\beta = c\alpha$ として

$$\alpha\wedge\beta = \alpha\wedge(c\alpha) = c(\alpha\wedge\alpha) = 0$$

α と β が一次独立ならば $\alpha\wedge\beta \neq 0$ である。$\Rightarrow$ 外積の拡張になっていることがわかる。
・基底

ベクトル空間 L の基底を $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n$ とする。1− ベクトル α, β は

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma^i, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \sigma^j$$

のように基底と成分を用いて展開できる。これらの外積をとると

$$\alpha \wedge \beta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sigma^i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \sigma^j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \left(\sigma^i \wedge \sigma^j \right)$$

となる。このとき、係数は基底の計算にはかかわらないという (1), (2) を用いた。さらに、外積の性質 (3), (4) を用いると

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i<j} \left(a_i b_j - a_j b_i \right) \left(\sigma^i \wedge \sigma^j \right)$$

と書き換えられる。このようにして、2− ベクトル空間 $\Lambda^2 L$ の元は外積 $\wedge$ の線形結合で表されるから

$$\left(\sigma^i \wedge \sigma^j \right), \quad 1 \leq i < j \leq n$$

が $\Lambda^2 L$ の基底を作る。$\Rightarrow$ 基底の条件としてもう一つ確認しておくべきなのは、これらが互いに一次独立であるかどうかということ。このことは添え字に関する $1 \leq i < j \leq n$ の条件から成り立つことがわかる。$\Lambda^2 L$ の次元は $n \times n$ 行列の上半分の三角成分の数に等しいから、

$$\dim \Lambda^2 L = \frac{n(n-1)}{2} =_n \mathrm{C}_2 = \binom{n}{2}$$

となる。

・$p-$ ベクトル

同様にして、空間 $\Lambda^p L$ を構成していくことができる。

空間 $\Lambda^p L$ は

$$\sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots \left(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_p} \right)$$

の全体からなる。このような和を $p-$ ベクトル という。確認しておくと、$i_1, i_2, \ldots$ がさきの $i, j, \ldots$ に対応している。一般の p 個の変数を表すためにはローマ字の２６個では足りないから。この書き方を省略して

$$\sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1, \ldots, i_p} \left(\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_p} \right)$$

と書くことにする。各 α_{i_k} は L の基底を用いて展開できる。また、

$$\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_p}$$

については次の条件が成り立つものとする。

(1) $(\alpha a + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)$ (3.8)
　同じことが各α_iを一次結合で置き換えたときも成り立つ。

(2) $\alpha_i = \alpha_j \ (i \neq j)$ ならば、$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$

(3) 任意の２つのα_iとα_jを交換すると$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$の符号が変わる

L の基底 $\sigma^1, \ldots, \sigma^n$ に対しては、$\Lambda^n L$ の基底は

$$\sigma^{h_1} \wedge \sigma^{h_2} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}, \quad 1 \leq h_1 < \cdots < h_p \leq n \tag{3.9}$$

で与えられる。このとき、$p \leq n$ を満たしていることがわかる。(**??**) の基底を簡単に次のように書く。

$$\sigma^H = \sigma^{h_1} \wedge \sigma^{h_2} \wedge \cdots \wedge \sigma^{h_p}, \quad H = \{h_1, \ldots, h_p\} \tag{3.10}$$

(**??**) より、$p-$ ベクトル空間 の次元 $\dim \Lambda^p L$ は

$$\dim \Lambda^p L = \sum_{l=1}^{n-p+1} \sum_{k=1}^{l} k = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

であることがわかる。とくに、$\dim \Lambda^n L = 1$ であり、$p > n$ に対しては単に $\Lambda^p L = 0$ とする。
・外積
より一般的に外積の規則をまとめておく。μ を $p-$ ベクトル、ν を $q-$ ベクトル とする。$p+q > n$ ならば $\mu \wedge \nu = 0$、$p+q \leq n$ ならば $\mu \wedge \nu$ は $\Lambda^{p+q} L$ のベクトルを与える:

$$\wedge : \Lambda^p L \times \Lambda^q L \to \Lambda^{p+q} L$$

この外積の演算は次の基本的な性質をみたす。

(1) 分配法則 $(\lambda_1 + \lambda_2) \wedge \mu = \lambda_1 \wedge \mu + \lambda_2 \wedge \mu$ (3.11)
(2) 結合法則 $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$ (3.12)
(3) 反対称性 $\mu \wedge \nu = (-1)^{pq}\, \nu \wedge \mu$ (3.13)

教科書 p.35 には外積の応用として行列式の計算、ベクトル解析との対応が載っている。

3.2 微分形式

・外微分形式
n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ を考える。まず、点 P における 1-形式を

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(P) dx^i \tag{3.14}$$

と定義する。和とスカラー倍について閉じるので 1-形式は $\mathbb{R}$ 上の n 次元線形空間 L をつくる。このとき、$\{dx^i\}$ は基底となる。この線形空間での外積を用いて $\Lambda^p L$ を構成する。$\Lambda^p L$ の元は

$$\sum_{h_1} \sum_{h_2} \cdots \sum_{h_p} a_{h_1, \ldots, h_p} dx^{h_1} \wedge \cdots \wedge dx^{h_p} \tag{3.15}$$

$\Rightarrow a_{h_1} a_{h_2} \ldots a_{h_p} \to a_{h_1, \ldots, h_p}$ と書いている？
(**??**) を点 P における p 次微分形式 あるいは p -形式 という。(**??**) を

$$\sum a_H dx^H \tag{3.16}$$

と書くこともある。

$\mathbb{R}$ 中の開領域を U とする。U 上の $p-$ 形式 は、U の各点で $p-$ 形式 をつくりこれらを滑らかにつなぐことで構成できる。関数 $a_H(x^1,\ldots,x^n)$ は滑らかであるとして U 上の $p-$ 形式 は

$$\omega = \sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_p}(x^1,\ldots,x^n)dx^{h_1}\wedge dx^{h_p} \tag{3.17}$$

U の各点で外積代数が作れるから、U 上の外微分形式に対して次のような拡張ができる。

$p-$ 形式ωと $q-$ 形式η

$$\omega = \sum a_H dx^H, \quad \eta = \sum b_K dx^K \tag{3.18}$$

に対して $(p+q)-$ 形式 $\omega\wedge\eta$ は

$$\omega\wedge\eta = \sum a_H b_K dx^H \wedge dx^K \tag{3.19}$$

で与えられる。

$\Rightarrow$ (**??**) の $dx^H\wedge dx^K$がどうなっているのか具体的に書き下してみたほうがよい

U 上の $p-$ 形式の 全体を

$$F^p(U), \quad 0\le p\le n \tag{3.20}$$

とかく。例えば $F^0(U)$ は U 上の滑らかな関数全体の集合を表す。これをまとめると次のようになる。

$p-$ 形式	基底	次元
$0-$ 形式	1	
$1-$ 形式	dx^i	n
$2-$ 形式	$dx^i\wedge dx^j$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-$ 形式	$dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n$	1

$1-$ 形式 は普段のベクトル場、$2-$ 形式 は軸性ベクトル場（普段のベクトルの外積によって得られるベクトル場のことで、例えば角運動量ベクトルやモーメントなど）と解釈できる。

・外微分

外微分 d は $p-$ 形式 を $(p+1)-$ 形式 にする線形写像である：

$$d: F^p(U)\to F^{p+1}(U) \tag{3.21}$$

これを次の性質をもつ作用素として定義する。

(1) $d(\omega+\eta) = d\omega + d\eta$ (3.22)

(2) λを $p-$ 形式として (3.23)

$d(\lambda\wedge\mu) = (d\lambda)\wedge\mu + (-1)^p\,\lambda\wedge(d\mu)$

(3) 任意のωに対して (3.24)

$d(d\omega) = 0$

(4) 任意の f に対して (3.25)

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

(3.26)

これらの規則から $p-$ 形式 $\to (p+1)-$ 形式 を求められる。

(例 2)λ, μ を次のような $1-$ 形式 とする。

$$\lambda = a(x^1, x^2, x^3)dx^1, \quad \mu = b(x^1, x^2, x^3)dx^2$$

このとき、$d(\lambda \wedge \mu)$ を計算してみよ。
(例 3)$\mathbb{R}^3$ の中の $2-$ 形式 $\alpha = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ について、外微分を計算してみよ。

この計算からわかるように、0,1,2-形式に対する外微分の作用はベクトル解析における ∇ の作用に対応している。
f を 0-形式、ω を 1-形式、A を 3-形式また、ϕ をスカラー場、$\boldsymbol{A}$ をベクトル場、$\boldsymbol{S}$ を軸性ベクトル場として

$$df \Leftrightarrow \nabla\phi \tag{3.27}$$
$$d\omega \Leftrightarrow \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.28}$$
$$dA \Leftrightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{S} \tag{3.29}$$

$d(d\omega) = 0$ は偏微分方程式や常微分方程式における積分可能条件を与える。

・ポアンカレの補題
$d(d\omega)=0$ についてもう少し考える。この等式を言い換えると
$\Rightarrow p-$ 形式ω は $\omega=d\alpha$ であるような $(p-1)-$ 形式α が存在すれば $d\omega=0$ である。
この命題をポアンカレの補題という。
このとき $d\omega=0$ をみたすような微分形式 ω を閉形式という。さらに、ある微分形式 η に対して $\omega=d\eta$ と書ける微分形式 ω のことを完全形式という。完全形式であれば必ず閉形式であるが、その逆は必ずしも成り立たない。このことは後でもう一度議論する。

3.3 星印作用素（ホッジ作用素）

外微分の計算では星印作用素 $*$ と呼ばれる作用素を用いるとより簡潔に表現できるようになる。
・内積
L を n 次元の線形空間として、一般的な内積を定義する。内積は $L\times L\to\mathbb{R}$ の写像、すなわちベクトルの対から数を与える演算で次の 3 つの条件をみたすものと定義する。

(1) 対称性 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$ (3.30)
(2) 双線形性 $(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2,\beta)=a_1(\alpha_1,\beta)+a_2(\alpha_2,\beta)$ (3.31)
$(\alpha,b_1\beta_1+b_2\beta_2)=b_1(\alpha,\beta_1)+b_2(\alpha,\beta_2)$
(3) 正則性 $\forall\beta,(\alpha,\beta)=0\Rightarrow\alpha=0$ (3.32)

３次元ユークリッド空間での標準内積や４次元ミンコフスキー空間での内積などはこれら 3 つの条件を満たしている。この 3 つの条件を満たすように $p-$ ベクトル の内積まで拡張する。
２つの $p-$ ベクトル$\lambda=\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_p,\ \mu=\beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_p$ に対して

$$(\lambda,\mu)=|(\alpha_i,\beta_j)| \tag{3.33}$$

$|(\alpha_i,\beta_j)|:(\alpha_i,\beta_j)$ を行列成分にもつ行列の行列式
このとき、各 α_i,β_i が規格化直交基底（もしくは計量が決まっている空間の基底）であれば、それらの内積は容易に求めることができて 2 つの $p-$ ベクトル どうしの内積も計算できる。
$\Rightarrow$ 空間の基底同士の内積の値がすでに決められているから、求めたい行列式のもとになる行列の成分が簡単に求められるため。
・星印作用素（ホッジ作用素）
$p-$ ベクトル空間 Λ^pL から $(n-p)-$ ベクトル空間 $\Lambda^{n-p}L$ への一次変換を表す作用素を導入する。
$p-$ ベクトル空間 Λ^pL の元 λ を固定して、次のような写像

$$\mu\to\lambda\wedge\mu,\ \ \mu\in\Lambda^{n-p}L \tag{3.34}$$

を考える。これは $\Lambda^{n-p}L$ から Λ^nL（１次元ベクトル空間）への一次変換となる。
$\Rightarrow\Lambda^pL$ の元 λ が固定されているから、μ の関数のようにみることができる。
σ を Λ^nL の正規直交基底 $\sigma=\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\cdots\wedge\sigma^n$ とすると（次元が 1 なので基底は唯一、これ。）

$$\lambda\wedge\mu=f_\lambda(\mu)\sigma=f_\lambda(\mu)\sigma^1\wedge\sigma^2\wedge\cdots\wedge\sigma^n \tag{3.35}$$

と書ける。ここで、$f_\lambda(\mu)$ は $\Lambda^{n-p}L$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。(λ をパラメーターにもつ μ の関数のように書いている。) このとき、

$$f_\lambda(\mu) = (\beta_\lambda, \mu) \tag{3.36}$$

となるような $\Lambda^{n-p}L$ 中のベクトル β_λ が一意に存在することを示すことができる。つまり、μ の関数である $f_\lambda(\mu)$ と同じ値を返すように μ を用いた内積を作ることができるということ。
⇒ どうやって示すか?
この $(n-p)-$ ベクトルβ_λ を $*\lambda \in \Lambda^{n-p}L$ と書くと、(**??**), (**??**) をまとめて

$$\lambda \wedge \mu = (*\lambda, \mu)\sigma \tag{3.37}$$

とかける。作用素 $*$ は $\Lambda^p L$ から $\Lambda^{n-p}L$ への線形写像となっていることを確認されたい。
つまり、$\lambda \in \Lambda^p L$ に対して $*\lambda \in \Lambda^{n-p}L$ を対応させる線形写像ということ。
$*\lambda$ を計算するために $\Lambda^p L$ の標準基底

$$\lambda = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p \tag{3.38}$$

に対する $*\lambda$ を求めればよい。
⇒ この書き方があまりよくない気がする。
これは線形代数の知識を仮定している。標準的な基底がどのように写されるかを見ることで、その写像の表現を知ることができる。(**??**) に λ を代入するのだが、外積の性質から μ としては

$$\mu = \sigma^K, \quad K = \{p+1, \dots, n\} \tag{3.39}$$

の場合だけでよいことがわかる。(**??**), (**??**) を (**??**) に代入すると

$$(\text{左辺}) = \lambda \wedge \mu = \sigma \tag{3.40}$$

$$(\text{右辺}) = (*\lambda, \sigma^{p+1} \wedge \cdots \wedge \sigma^n)\sigma \tag{3.41}$$

となり、結局 $*\lambda$ は

$$*\lambda = c\sigma^{p+1} \wedge \cdots \wedge \sigma^n \tag{3.42}$$

の形であることがわかる(そんなに自明ではない気がしたけど、どうだろう)。定数 c は $c = (\sigma^K \wedge \sigma^K) = \pm 1$ で与えられ、次の公式を得る。
$H = \{1, \dots, p\}, K = \{p+1, \dots, n\}$ として

$$*\sigma^H = (\sigma^K, \sigma^K)\sigma^K \tag{3.43}$$

今と同じ計算を $\lambda = \sigma^K$ に対して実行してみる。⇒ わからんな。。。
具体的な計算例は教科書 p.42,43 を参考。この具体的な計算をやるとわかるが、基底のウェッジ積の順番が大きくかかわる、つまり空間の向きが大切になってくる。例えば λ として

$$\lambda = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \tag{3.44}$$

をとると、$*\lambda$ は

$$*\lambda = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \tag{3.45}$$

となるが、λ として

$$\lambda = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 \tag{3.46}$$

をとると $*\lambda$ は

$$*\lambda = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \tag{3.47}$$

となることが計算からわかる。このとき、$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ と内積を定義した。このことは逆に、内積（空間の計量）を決めることでホッジ作用素の作用を決めることができるとも解釈することができる。

p.50 の演習問題 [8] を解く。

4 演習問題

演習問題 [8]

次のような 4 次元ベクトル空間

$$(dx^i, dx^j) = \delta^{ij} \ \ (i,j=1,2,3), \ \ (dx^i, dx^4) = 0 \ \ (i=1,2,3), \ \ (dx^4, dx^4) = -1 \tag{4.1}$$

を用意し、4×4 行列 $(F_{\mu\nu})$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & B_2 & -E_1 \\ B_3 & 0 & -B_1 & -E_2 \\ -B_2 & B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

に対して $2-$ 形式$F = -\sum_{\mu,\nu} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ を定義する。また $3-$ 形式 J を $J = \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - (j_1 dx^2 \wedge dx^3 + j_2 dx^3 \wedge dx^1 + j_3 dx^1 \wedge dx^2) \wedge dx^4$ とする。

(1)$dF = 0, d * F = J$ はマクスウェルの方程式と等価であることを示せ。

F を書き下すと

$$F = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 + (E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3) \wedge dx^4 \tag{4.3}$$

となるから dF は外微分の計算から

$$\begin{aligned} dF &= (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &\quad + (\partial_4 B_1 - \partial_3 E_2 + \partial_3 E_2)\, dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + (\partial_4 B_2 - \partial_2 E_3 + \partial_3 E_1)\, dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^4 \\ &\quad + (\partial_4 B_3 - \partial_2 E_1 + \partial_1 E_2)\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 \\ &\equiv 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

この結果より $dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n$ の係数が 0 に等しいとすることで

$$\frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial B_1}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right) = 0 \\ &\frac{\partial B_2}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^4} = \boldsymbol{0} \\ &\frac{\partial B_3}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

が得られる。
続いて $d*F$ を計算するために $*F$ を求めたい。F を構成している基底は 6 通りなので、それらの基底について $*$ の作用をまず調べておく。ホッジ作用素の定義を忠実に計算することで求めることができる。続きは黒板で解説しようと思う。
この $*$ の作用を求めることができれば、あとは外微分の規則にしたがって計算をするだけになる。その結果、電場に関するガウスの法則とアンペール・マクスウェルの法則を含むことが確認できる。
(2) ポアンカレの補題、その逆を用いることでポテンシャルの存在をいうことができ、電場と磁束密度をポテンシャルで表現することができる。

4.1 微分方程式への応用

・積分因子
1 階 1 次の微分方程式

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{4.7}$$

を考える。これは次の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{4.8}$$

と等価であり、次のようにして解くことができる。
(a) $\omega = Pdx + Qdy$ がある関数 ϕ を用いて

$$d\phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{4.9}$$

と書けるならば ω は完全または積分可能という。この微分方程式の一般解は $\phi(x,y) =$ 定数 であり、積分可能条件

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial} \tag{4.10}$$

が成り立つ。この条件は偏微分が順序によらないことを表している。（詳しくはノート）
(b) ω が完全ではない場合
微分方程式全体にある関数 $\mu(x,y)$ をかけて

$$\mu(x,y)\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = d\phi(x,y) = 0 \tag{4.11}$$

とできるとき、$\mu(x,y)$ のことを積分因子とよぶ。(**??**) が成り立つための必要十分条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \tag{4.12}$$

である。（さきほどの条件と比べれば $P \to \mu P$ と置き換えたものととらえることができる。つまり、偏微分に関する条件であるとみることができる。）
このとき、$\phi(x,y) =$ 定数 を微分形式で書けば

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = 0 \tag{4.13}$$

となる。(**??**) と比べると

$$\mu = \frac{1}{P}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{Q}\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{4.14}$$

であるような関数が存在すればよい。
（例２）積分因子を見つけることで次の方程式を完全形にし、一般解を求めよ。

$$2xydx + (1+y)x^2dy = 0$$

実は (**??**) の方程式は積分因子を見つけることで必ず積分することができる。しかし、次の場合の方程式は必ずしも積分因子を持たない。

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

4.2　微分形式（続き）

・フロベニウスの条件
前ページで提示した問題をさらに一般化して考える。
$\mathbb{R}^n$ の原点 O の近傍で $1-$ 形式 ω を考える。ω は原点 O において 0 にはならないとする。どのような条件下において、$\omega = fdg$ を満たす関数 f, g（$0-$ 形式）が存在するか。
$1-$ 形式 $\omega = \sum_i f_i dx^i$ は原点 O で 0 にならないとし、さらに

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

を満たす $1-$ 形式 θ が存在するものとする（自分の外微分が自分と何か別の $1-$ 形式 との外積で表すことができるということ。外積は $p-$ 形式 を $(p+1)-$ 形式 に移す写像であった）。このとき、原点の近傍において $\omega = fdg$ を満たす関数 f, g が存在することを示すことができる（つまり、このような時 ω はある関数の外微分で表すことができるということ）。
$\Rightarrow$ 証明の仕方については触れていない。
逆に、もし $\omega = fdg$ ならば、f は原点 O の近傍で 0 にならないから

$$d\omega = df \wedge dg = df \wedge \frac{\omega}{f} = \frac{df}{f} \wedge \omega \equiv \theta \wedge \omega \tag{4.15}$$

$$\theta \equiv \frac{df}{f} = d\log|f|$$

と書ける。さらに、$d\omega = \theta \wedge \omega$ であれば（話が最初の仮定に戻ったことに注意）、外積の性質から

$$\omega \wedge d\omega = \omega \wedge \theta \wedge \omega = 0 \tag{4.16}$$

$$\Rightarrow \omega \wedge d\omega = 0 \tag{4.17}$$

が成り立つ。この条件式をフロベニウスの条件 (Frobenius condition) という。まとめると

$$\Rightarrow 1-\text{形式 }\omega\text{が与えられたとき、}\omega \wedge d\omega = 0 \text{ であれば}$$

$$d\omega = \theta \wedge \omega \text{ となる}\theta\text{が存在し、}\omega = fdg \text{ となるような関数 } f, g \text{ が存在する。}$$

フロベニウスの条件は $\omega = 0$ に関する積分可能条件とも呼ばれる。教科書 p.46 の例は面白い（ノート参照）。
2-6 の写像、引き戻しに関してはまた出てきたときに戻ろうと思う。簡単にまとめると、外微分を行うための座標系は好きなものを選んでよい、ということを主張している。物理ではこのことを認めて、好き勝手に座標変換を行っている。例としては３次元のデカルト座標を３次元の極座標に変換して計算を行っている。

5　第4回ノート

5.1　多様体

$\Rightarrow$ 局所的にユークリッド空間と同じ構造を持つ空間のこと。大雑把にいえば次のような特徴をもつ空間のことである。

1. 局所的にユークリッド空間の開集合となっている
2. いくつかの局所座標系でおおわれている
3. 座標系の重なっている部分には微分可能な座標変換が存在する

n 次元多様体は空間 M と局所座標近傍 $U_1, U_2, \ldots$ からなる。M の点 P は U_i のどれかに含まれ、各 U_i 上に設けられている座標系で座標

$$(x^1(P), x^2(P), \ldots, x^n(P))$$

を持つ。この U が $\mathbb{R}^n$ に開領域を作る。
局所座標近傍 U 上に座標系 $x^1, x^2, \ldots, x^n$ があり、別の座標系 V には $y^1, \ldots, y^n$ があってそれらが重なりを持つとする。このとき、重なった部分の点 P の V 座標 $\boldsymbol{y}$ を U 座標 $\boldsymbol{x}$ を用いて表すことができる。$\Rightarrow$ 多様体の性質の一つ

$$\Rightarrow y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

このとき x^i の関数 y^i は x^i で何回でも微分可能とする。
これらを定義としてまとめると次のようになる。
【定義】　　空間 M が次の条件を満たすとき、M を n 次元微分可能体という。

1. M は位相空間
2. M は開集合の族 $\{U_i\}$ と、各 U_i から $\mathbb{R}^n$ への写像 $\phi_i(=$ 関数$)$ を持つ
3. $\{U_i\}$ は M を覆う $\Leftrightarrow \cup U_i = M$
4. $\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$ の像 $\phi_j(U_j)$ は開集合で ϕ_j は U_j から $\phi_j(U_j)$ への全射かつ同相写像
5. $U_i \cap U_j \neq 0$ となる i, j に対して $\phi_i(U_i \cap U_j)$ から $\phi_j(U_i \cap U_j)$ への写像 $\phi_j \cdot \phi_i$ は C^n 級（座標変換が n 階微分可能ということ）

2.〜5. を満たす族 $\{(U_i, \phi_i)\}$ を座標近傍系、各要素を座標近傍という。
$\Rightarrow$ 局所的にユークリッド空間に同型なもののことを多様体と呼ぶ。
具体例を見る
【例 1】　　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は 1 つの座標近傍が空間を覆っている特別な場合。つまり、最も簡単な多様体となっている。

次の例のために連結という言葉を導入する。一般に位相空間 X が空集合でない開集合 U_1, U_2 に分割できるとき、その位相空間は連結ではないという。

【例２】　　連結な多様体だけを考えると 1 次元多様体は実軸 $\mathbb{R}$ と円周 S^1 に限られる。
$\mathbb{R}$ は 1 つの座標近傍が全空間を覆う。一方で円周 S^1 には少なくとも 2 つの座標近傍が必要である。$\rightarrow$ それらを $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ と書く。

5.2　リー群と多様体

多様体をリー群と結び付けて考える。そのためにまず、群について復習するとともに、もう少し詳しく見ていくことにする。

5.3　線形リー群

n 次元複素ベクトル空間における正則な 1 次変換全体は群をなし、これを**複素一般線形変換群** $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ という。これは言い換えれば n 次元の複素正則行列全体の集合のことであり、それらが行列の積に関して群をなしているということである。この群は線形変換群の中で最も大きな群である。この群の中の部分群の中で特に、実ベクトル空間における正則な 1 次変換全体が作る群は**実一般線形変換群**と呼ばれ、$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ と表す。また、これらの要素である正則行列の行列式が 1 であるときそれらを特に**複素特殊線形変換群** $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$、**実特殊線形変換群**と呼ぶ。
n 次元複素ベクトル空間の中の 2 つの元つまりベクトル v, u についてこれらの内積を

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i \tag{5.1}$$

で定義する。つまり、 1 つ目のベクトルの各成分の複素共役と 2 つ目のベクトルの各成分の積である。このように内積を定義するとこのベクトル空間の基底は正規直交基底を作っていることになる。
ここで、この内積を保存するような 1 次変換を考える。このような変換のことを**ユニタリー変換**という。変換表列を U とするとベクトルの成分は

$$u'_i = \sum_{i=}^{n} U_{ij} u_j \ , \quad v_i = \sum_{k=}^{n} U_{ik} v_k \tag{5.2}$$

と変換されるから、変換後のベクトル同士の内積が保存されるつまり

$$(u', v') = \sum_{i=1}^{n} u_i'^* v_i' \tag{5.3}$$

であるためには

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ij}^* U_{ik} = \delta_{jk} \tag{5.4}$$

でなければならない。U の**エルミート行列**を $U^\dagger$ とすると

$$(U)_{ij}^\dagger = U_{ji}^* \tag{5.5}$$

を満たすから、行列 $U^\dagger$ と U について

$$U^\dagger U = U U^\dagger = E(\text{単位行列}) \tag{5.6}$$

が成り立つことがわかる。２つ目の等式は次のようにして得られる。

$$U^\dagger U = E \tag{5.7}$$
$$U^\dagger U U^{-1} = U^{-1} \tag{5.8}$$
$$U U^\dagger E = U U^{-1} \tag{5.9}$$
$$U U^\dagger = E \tag{5.10}$$

(**??**) が示すように、変換行列 U のエルミーと行列 $U^\dagger$ が U の逆行列 U^{-1} になっているような行列のことを**ユニタリー行列**という。内積を不変に保つような変換の変換行列はユニタリー行列である。また、ユニタリー行列の全体の集合は行列の積に関して群をなす。このとき、n 次ユニタリー行列のなす群のことを**ユニタリー群**といい $\mathrm{U}(n)$ で表す。さらに制限を加えて行列式が 1 であるようなユニタリー行列全体のなす群を**特殊ユニタリー群**といい、SU(n) と表す。
これを実数の範囲に限定したものが直交群と呼ばれるものである。つまり、直交行列全体のなす群のことである。特に、変換を表す行列の行列式が 1 であるとき**特殊直交群**または**回転群**と呼ぶ。これらはそれぞれ行列の次元を n とするとき $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ と書く。
このほかに、あとで出てくる多様体の説明のために**シンプレティック群**と呼ばれるものを説明しておく。これは次の条件

$$ {}^t AJA = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \qquad (E \text{ は } n \times n \text{ 単位行列}) \tag{5.11}$$

を満たす $2n \times 2n$ 実行列 A の作る群で、$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ と表す。
４次元実ベクトル空間で内積が

$$(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \tag{5.12}$$

で定義されている空間を**ミンコフスキー空間**という。この内積を不変に保つような 1 次変換をローレンツ変換といい、このローレンツ変換全体は行列の積に対して群をなす。これをローレンツ群と呼ぶ。
以上で述べたような線形変換群は**線形リー群**と呼ばれるものである。

5.4 無限小変換とリー代数

線形リー群の単位元 e は恒等変換である。変換行列を関数を並べて物のようにとらえると、単位元の "近く" にある元は微小な変換を表すことになる。例として、以前にも考えた 2 次元回転群 SO(2) を考える。これは 2 次元の座標回転を表すから、その元は t をパラメータとして

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

と表すことができる。パラメータ t が 0 となるとき、$A(0)$ は単位元を表す。また、十分に小さな t に対する変換 $A(t)$ を単位元の近くの元と表現した。t が十分小さいとき、

$$A(t) \simeq A(0) + A'(0)t = A(0) + \frac{dA(0)}{dt} t \tag{5.14}$$

であるから、単位元の近傍にある元の振る舞いは $t = 0$ における微係数 $A'(0)$ によって決まる。このことから、$A'(0)$ のことをパラメータ t に関する**無限小変換**または**接変換**と呼ぶ。このとき、よ

り重要なのは $t=0$ において $A'(0)$ が与えられれば十分大きな t に対しても $A(t)$ を知ることができる。なぜなら、求めた各点について **??** を用いれば逐次求めることができる。しかし、

$$A(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix},\ A'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t\\ \cos t & -\sin t\end{pmatrix},\ A'(0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.15}$$

より、変換 $A(t)$ は次の微分方程式をみたしていることがわかる。

$$\frac{d}{dt}A(t)=XA(t),\quad X=A'(0) \tag{5.16}$$

すなわち、$A(t)$ は上記の線形微分方程式の初期条件 $A(0)=1$ (単位ベクトルの意味) での解であり、X によってその形が一意に決まる。このことから X を SO(2) の**生成子**と呼ぶ。
(**??**) の微分方程式は指数関数の解を与えるが、今の場合は行列の指数関数を与える：

$$A(t)=\exp(tX),\quad X=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

指数関数は無限級数

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!} \tag{5.18}$$

によってあらわすことができるから、(**??**) は級数の形で

$$\exp(tX)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!} \tag{5.19}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{t^{2m}X^{2m}}{(2m)!}+\frac{t^{2m+1}X^{2m+1}}{(2m+1)!}\right] \tag{5.20}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mt^{2m}}{(2m)!}E+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mt^{2m+1}}{(2m+1)!}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.21}$$

ここで、E は単位行列を表し、偶数と奇数番目の項で分けた。三角関数の級数表示と比べればもとの 2 次元回転の行列に一致することがわかる。
もう少し一般化した例として 3 次元回転群 SO(3) を考える。この群は表記の通り行列式が 1 であるような 3×3 直交行列 O である。このことから、

$${}^tOO=1 \tag{5.22}$$

この条件は 9 個の行列成分に 6 個の関係を与えるから、直交行列 O の独立な成分の数すなわち自由度は 3 となる（非対角成分は対称なのでそこで 3 つの関係式を与え、対角成分で 3 つの合計 6 つの関係式を与える)。単位元の近傍にある元を $O=1+M$ と表すと

$${}^tOO=(1+{}^tM)(1+M)=1 \tag{5.23}$$

各行列の成分は微小量であるから 2 次以上の量を無視すると

$$M+{}^tM=0,\quad {}^tM=-M \tag{5.24}$$

すなわち行列 M が交代行列であることがわかる。そこで、その形を一般的に 3 つの独立なパラメータで次のように表す：

$$M=\begin{pmatrix}0 & t^3 & -t^2\\ -t^3 & 0 & t^1\\ t^2 & -t^1 & 0\end{pmatrix} \tag{5.25}$$

と書ける。さらにこれらのパラメータが十分に小さいとき、各パラメータについての 1 次までの展開を考えると変換行列 M は

$$M = \sum_{i=1}^{3} X_i t^i = X_1 t^1 + X_2 t^2 + X_3 t^3 \tag{5.26}$$

となり、各パラメータについての 3 つの無限小変換 X_i が得られる。各 X_i は次のような行列である。

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

これらの無限小変換によって、それぞれのパラメータについて単位元の近傍ではないところでの変換も X_i の次のように指数関数として得られる。

$$\exp(t^1 X_1),\ \exp(t^2 X_2),\ \exp(t^3 X_3) \tag{5.28}$$

これらの変換行列（$\exp(t^i X_i)$ のこと）はそれぞれ SO(3) の部分群 SO(2) であり、**1 助変数部分群**と呼ばれる。これらは、具体的には 3 次元の直交座標軸の周りでの回転を表す行列となっている。重要なことは無限小変換 X_i が与えられたとき、SO(3) の単位元と連続的につながる任意の元は 3 つのパラメータ t^i によって $\exp(\sum_{i=1}^{3} t^i X_i)$ と与えられることである。このときの指数関数の表現はもちろん、実関数における指数法則を満たしている。X_i はこのような意味からも、生成子と呼ばれる。

具体的な例をいくつか見ることができたので、一般論に入る。線形リー群の元である行列の成分のうち独立な成分の数を d とすると、d 個のパラメータ t^i $(i = 1, 2, \ldots, d)$ に対応して d 個の独立な無限小変換 X_i がある。これら無限小変換 X_i が張るベクトル空間のことを線形リー群の**リー代数**と呼ぶ。また、d のことを**リー群の次元**という。n 次元の複素一般線形変換群 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の次元は $d = 2n^2$ であるから（$n \times n$ の成分と、各成分が複素数となるので実部と虚部で 2 倍ということか）、リー代数は n 次の複素正方行列の全体である（各成分がすべて独立な複素数であれば n 次の正方行列で十分となる）。同様に $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ のリー代数は n 次の実正方行列全体の集合である（これらの行列がベクトル空間を作っているということ）。

まとめると、ある変換を表す行列全体の集合がリー群（つまり、連続群）をなすとき、それらの単位元の近傍での様子を調べると無限小変換が得られる。独立なパラメータの数だけそれに対応した独立な無限小変換が得られ、それらの無限小変換の集合がベクトル空間を構成する。このようにして得られたベクトル空間のことをリー代数と呼ぶ。（無限小変換を用いてリー代数を構成するとこんな感じになるのかな。）

リー代数は次のように定義してもよい。

定義

線形リー群 G が与えられたとき、任意の実数 t に対して、

$$\exp(tX) \in \mathrm{G}$$

となる X 全体を G の**リー代数** (Lie algebra) という

　これは先ほどから確認していたように、行列の指数関数を主においた定義の仕方である。この定義は先の定義と同等であることが確認できる。

5.5 接空間

・接ベクトル

多様体 M 上の点を p で表す（このとき、多様体とは簡単な 2 次元の曲面を想像してもらうといいかもしれない）。点 p はパラメータを t として曲線 $p(t)$ を描くとする。いま、$p(t)$ が 1 つの座標近傍にあるとし、そこでの座標を $x^1 \ldots, x^n$ で表す。この座標系では曲線を表す座標は

$$x^i(p(t)) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.29}$$

であり（これは、曲線として $p(t)$ とは異なる $p'(t)$ をとると座標が変わるから、ある意味で $p(t)$ を引数のように書いている？）、この曲線の接ベクトルはパラメータによる微分によって次のように表現できる：

$$\frac{dx^i(p(t))}{dt} \tag{5.30}$$

M 上で定義された実関数 $f(p)$ をとり、$p(t)$ に沿った変化率を考える。この変化率は

$$\frac{df((p(t)))}{dt}$$

であり、先ほど設定した局所座標系を使えば

$$\frac{df((p(t)))}{dt} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i(p(t))}{dt} \tag{5.31}$$

で与えられる。この表式を微分演算子 X

$$X \equiv \sum_i \frac{dx^i(p(t))}{dt} \frac{d}{dx^i}$$

を導入することで

$$\frac{df((p(t)))}{dt} = Xf \tag{5.32}$$

と書き表すことができる。

⇒ 関数 $f(x)$ の $p(t)$ に沿った変化率、すなわち多様体上の曲線に沿った微係数（導関数）は X を f に作用することで得られる。

この X を「点 p において曲線 $p(t)$ によって与えられる方向への M の接ベクトル」と定義する。

X を位置座標に作用させると

$$Xx_i = \sum_j \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \tag{5.33}$$

$$= \sum_j \frac{dx^j}{dt} \delta^i_j \tag{5.34}$$

$$= \frac{dx^i}{dt} \tag{5.35}$$

通常の接ベクトル $\frac{dxi}{dt}$ との関係がわかる。

⇒ 関数に対して作用させると曲線に沿ったその関数の変化率、位置座標に作用させると各点の速度ベクトルに対応するものを与える。

具体例を少しあげる。２次元のユークリッド空間を考える。これは多様体である。x, y を座標軸にとり、またパラメータを t として曲線 $p(t)$ として

$$p(t) = (\cos t, \sin t)$$

をとる。２次元多様体上の（つまり平面上の）関数として $\phi(x, y) = x^2 - 2y$ をとる。$\phi = 0$ は放物線を与える。まず、曲線上の接ベクトルは $p(t)$ の t 微分であるから

$$\frac{dp(t)}{dt} = (-\sin t, \cos t)$$

である。関数 $\phi(x(t), y(t))$ の曲線 $p(t)$ に沿った変化率は

$$\frac{d\phi(p(t))}{dt}$$

であるので局所座標、ここでは (x, y) を使えば

$$\frac{d\phi(p(t))}{dt} = 2x(-\sin t) + (-2)\cos t$$

で与えられる。この結果から微分演算子 X は

$$X = -\sin t \frac{\partial}{\partial x} + \cos t \frac{\partial}{\partial y}$$

とわかる。これを座標に作用させると確かに単純な曲線の接ベクトルが得られる。

6　第５回ノート

・接空間

先の定義の意味での接ベクトル、すなわち微分演算子 X は高次元多様体上では各座標での微分の線形結合として表すことができる：

$$A = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.1}$$

この接ベクトルは空間の任意の点について作ることができる。２次元では二つの座標での微分の線形結合によって作られていたように、n 次元の多様体上では n 個の座標での微分の線形結合によって各点に接ベクトルが与えられる。このとき、こうして作られた接ベクトルはある曲線の接ベクトルとなる。線形結合の係数にあたる a_i を接ベクトルの成分と呼ぶ。

話を少し一般化する。空間の任意の１点 p において、その点を通る曲線は無数に存在し、またそれらは異なるパラメータによって規定されている。それらの曲線それぞれについて点 p における接ベクトルが存在する。ある点でのこれらすべての接ベクトルからなる空間のことを点 p における M 上の**接ベクトル空間**または**接空間**と呼び、

$$T_p(M)$$

と表す。そして、各座標での微分

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{6.2}$$

は接空間 $T_p(M)$ の基底となる（これらの微分演算子の線形結合の張る空間を接空間として定義したが、これらが線形独立であるかは確認していない)。具体的な例を見ることにする。
点 p を通る２つの曲線 $p(\xi), p(\eta)$ があるとする。点 p での各曲線に沿った微分は

$$\frac{d}{d\xi} = \sum_i \frac{dx^i(p(\xi))}{d\xi} \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv X_\xi \tag{6.3}$$

$$\frac{d}{d\eta} = \sum_i \frac{dx^i(p(\eta))}{d\eta} \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv X_\eta \tag{6.4}$$

である。２つの数を a, b とするとこれらの微分演算子の線形結合は

$$a\frac{d}{d\xi} + b\frac{d}{d\eta} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\xi} + b\frac{dx^i}{d\eta} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{6.5}$$

となる。このとき、() の中はある接ベクトルの成分であり、その接ベクトルは同じ点 p を通るある曲線の接ベクトルとなる。したがって、新たなパラメータを ζ とすると、点 p において

$$\frac{d}{d\zeta} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\xi} + b\frac{dx^i}{d\eta} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv X_\zeta \tag{6.6}$$

を満たす曲線 $p(\zeta)$ が存在する。よって、点 p において

$$a\frac{d}{d\xi} + b\frac{d}{d\eta} = \frac{d}{d\zeta} \tag{6.7}$$

または

$$aX_\xi + bX_\eta = X_\zeta \tag{6.8}$$

が成り立つ。これは接ベクトルが張る空間が線形空間であることを示唆している。これら X_μ が各座標での微分の線形結合となるから、接空間の基底は各座標の微分

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} \tag{6.9}$$

が接空間の基底となる（ということらしい)。この節で定義したベクトルは**反変ベクトル**と呼ばれる（基底の座標変換の逆変換によって成分が変換されるベクトルのこと)。

6.1 多様体上の微分形式

ユークリッド空間における外微分形式は以前定義した。これを多様体上での場合に拡張する。
まず、多様体 M 上の滑らかな関数を $0-$ 形式 とする。この関数とは、各点の局所座標の組 $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ からある数を対応させる写像のことを指す（のかな)。これらの作る空間を M 上の $0-$ 形式 の空間といい、$F^0(M)$ で表す。この表現もあいまいで、これらの作る空間というのはどういうこと？
１つ目のイメージ
各点に滑らかな関数をとることができて、ある関数の線形結合もまたどこかの関数に対応するという空間のこと。多様体上で関数がベクトル空間の構造を持つような状況。
２つ目のイメージ
空間の任意の点について無数の滑らかな関数が対応していて、その点におけるある関数どうしの線

形結合がその点のまた別の関数に対応するような構造のこと。関数が設定されている多様体自身がベクトル空間としての構造を持つという状況。
３つ目
または、これらとは全く異なる構造。
この次に M 上の任意の点 P における $1-$ 形式 を定義する。点 P を含む座標近傍 U で局所座標系 $\{x^i\}$ に対して

$$\sum_i a_i dx^i \tag{6.10}$$

を考える。このとき、係数 a_i が共変ベクトルの成分の変換則を満たすとき (**??**) を多様体 M 上の $1-$ 形式 と呼ぶ。すなわち、点 P での別の座標近傍系 $\{y^i\}$ に対する

$$\sum_i b_i y^i \tag{6.11}$$

の成分 b_i との間に

$$a_j = \sum_i b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \tag{6.12}$$

が成り立つときのことを指す。
相対論における共変ベクトルというのは、座標変換とは逆の変換によって成分が変換するベクトルのことを指す。一方、成分が座標変換と同じ変換によって変換を受けるベクトルのことを反変ベクトルと呼ぶ。簡単に書けば

$$\boldsymbol{A}' = X\boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad a'^i = X^i{}_j a^j \quad \text{反変ベクトル} \tag{6.13}$$
$$\boldsymbol{A}' = X\boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad a'^i = (X^{-1})^i{}_j a^j \quad \text{共変ベクトル} \tag{6.14}$$

ということである。このとき、X は座標変換を与える変換行列を表す。具体的に言えば、一般のローレンツ変換において４元ベクトルは反変ベクトルとしてふるまうが、座標の微分は共変ベクトルとして変換する。これと同様のことが $1-$ 形式 ついてもいえるということである。
$1-\mathrm{form}$ が導入されたので、これらの外積によって $p-\mathrm{form}$ を構成していくことができる。点 P での $1-\mathrm{form}$ のつくる線形空間に対してウェッジ積を用いて $p-\mathrm{form}$ を作りそれらの張る線形空間を構成すればそれが $p-\mathrm{form}$ の作る空間になる。局所座標系 $\{x^i\}$ を持つ座標近傍を U とする。U 上の $p-\mathrm{form}:\omega$ は

$$\omega = \sum_{l_1,\ldots,l_p} a_{l_1,\ldots,l_p}(x) dx^{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{l_p} \tag{6.15}$$

と表せる。この座標近傍と重なる別の座標近傍 V の上では、局所座標近傍系 $\{y^i\}$ を使って

$$\omega = \sum_{k_1,\ldots,k_p} b_{k_1,\ldots,k_p}(y) dy^{kl_1} \wedge \cdots \wedge dy^{k_p} \tag{6.16}$$

と表せるとする。このとき、線形結合の係数となっている関数 a^i, b^i の関係は

7　第 6 回 10/30 ノート

7.1　ベクトルとテンソル

反変ベクトル

微分演算子

$$X=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad a^i=\frac{dx^i(p(t))}{dt} \tag{7.1}$$

接空間がどのような空間であったかを確認する。点 P におけるすべての接ベクトルが作る空間を**接ベクトル空間**といい、$T_p(M)$ で表す。各点における接ベクトルは多様体上に曲線を定めることで決まった。なので、点 P における接ベクトル全体というのは点 P を通る曲線すべての集合を考えていることになる。そして、各曲線に対してそれぞれの接ベクトルが決まりそれらすべての線形結合がベクトル空間の公理を満たすということを主張している。このとき、接ベクトルが座標の微分を基底として持っていたことから、接空間も座標の微分を基底に持つことがわかる。天下り的ではあるが、このように基底 $\{\partial/\partial x^i\}$ の線形結合で表されるベクトルのことを**反変ベクトル**という。今の場合で言えば、接空間の元は反変ベクトルであるということ。反変ベクトルについては後でしっかりとした定義を与えると思う。

共変ベクトル

結論から言えば、接ベクトル空間の双対空間の元が反変ベクトルと対をなす**共変ベクトル**と呼ばれるものとなる。$T_p(M)$ の双対空間を、**余接ベクトル空間**と呼び

$$T_p^*(M)$$

で表す。双対空間の定義は、“ベクトル空間の元に作用して定数を与えるような線形写像全体の集合” であった。つまり、

$$\lambda : T_p(M)\to K(\text{適当な係数体}),\quad \lambda\in T_p^*(M) \tag{7.2}$$

である。1-形式 として関数 f（0-形式）の微分 df を考える。局所座標系を用いれば

$$df=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \tag{7.3}$$

となる。この df の $X\in T_p(M)$ への作用を

$$\langle df,X\rangle=Xf \tag{7.4}$$

で定義する。いま、(**??**) において

$$f=x^i,\quad X=\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{7.5}$$

とおくと、双対空間の元 df の X に対する作用は

$$\left\langle dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j \tag{7.6}$$

この式は、双対ベクトル空間の元 $\{dx^i\}$ と反変ベクトルの基底 $\{\partial/\partial x^j\}$ が互いに双対であることを示している。このことから双対空間 $T_p^*(M)$ の基底が

$$dx^1.dx^2,\ldots,dx^n \tag{7.7}$$

であることを示している。このとき、双対空間の元のことを**共変ベクトル**と呼ぶ。
一般の 1-形式 $\omega=\sum\omega_i dx^i$、ベクトル $V=\sum V^i\partial/\partial x^i$ に対しては

$$\langle\omega,V\rangle=\sum_{i,j}\omega_i V^j\left\langle dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\sum_{i,j}\omega_i V^j\delta^i_j=\sum_i\omega_i V^i \tag{7.8}$$

となる。$\langle\ ,\ \rangle$ は $T_p^*(M)$ の元と $T_p(M)$ の元の組から数を作る操作であり、**内積** と呼ばれる：

$$\langle\ ,\ \rangle: T_p^*(M)\otimes T_p(M)\to\mathbb{R} \tag{7.9}$$

と表す。このとき、$\otimes$ は直積（テンソル積）と呼ばれる。
テンソル
ベクトルが定義できたので[*1]次にテンソルを定義することを考える。
(a,b) 型**テンソル**は a 個の双対ベクトルと b 個のベクトルをスカラーに写像する**多重線形写像**である。

$$T:\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{a\text{ 個}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{b\text{ 個}}\to\mathbb{R} \tag{7.10}$$

多重線形写像とは、各ベクトルに対して線形写像であることを意味する。
多様体 M 上の点 P における接空間 $T_p(M)$ とその双対空間 $T_p^*(M)$ に対してこの定義を用いると、点 P における (a,b) 型のテンソル空間を作る：

$$T^a_b=\underbrace{T_p^*(M)\otimes\cdots\otimes T_p^*(M)}_{a\text{ 個}}\otimes\underbrace{T_p(M)\otimes\cdots\otimes T_p(M)}_{b\text{ 個}} \tag{7.11}$$

局所座標を用いればこれは次のように表すことができる：

$$T^a_b=\sum T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}\right)\otimes\left(dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_b}\right) \tag{7.12}$$

$$T^{i_1\cdots i_a}_{j_1\cdots j_b}: a\text{ 個、}b\text{ 個の接空間、余接空間の成分から決まるスカラー量} \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_a}}: a\text{ 個の接ベクトル空間から }x^i\text{の微分をとってきたテンソル積} \tag{7.14}$$

$$dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_b}: b\text{ 個の余接空間から }dx^j\text{をとってきたテンソル積} \tag{7.15}$$

点 P を多様体 M 上で連続的に変化させることで各点にテンソルの成分を定めることができる。このようにして得られるベクトルやテンソルを**ベクトル場**、**テンソル場**と呼ぶ。相対論などで出てくるテンソルと呼ばれるものは、(**??**) の成分のところだけを書き出しているものである。つまり、基底を隠して表現しているのである。多重線形写像であることを強調するために

$$\text{ベクトル}\quad V_i=\sum_{l=1}^{b}V_i^l\frac{\partial}{\partial x^l} \tag{7.16}$$

$$\text{1-形式}\quad \omega_j=\sum_{k=1}^{a}\omega_{jk}dx^k \tag{7.17}$$

[*1] 共変ベクトルと反変ベクトルの２種類を定義した。それらは互いに双対なベクトルであることも見た。

として (a,b) 型テンソル T^a_b を次のようにも書く：

$$T^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}(\omega_1,\ldots,\omega_a;V_1,\ldots,V_b)\equiv\sum T^{i_1\ldots i_a}_{j_1\ldots j_b}\omega_{1i_1}\ldots\omega_{ai_a}V_1^{j_1}\ldots V_b^{j_b} \tag{7.18}$$

このように書けば、各基底における成分は ( ) の中をベクトル空間と双対空間の基底に取ることで表現できる。
以降、多様体 M 上の (a,b) 型テンソル空間を

$$T^a_b(M)$$

とかく。
テンソル積・縮約
テンソル同士の直積によって、高階のテンソルを作るときに用いる。詳しくは教科書 p.66 参照。
縮約とはこの教科書ではテンソル内の添え字について和をとること、としている。縮合と呼ばれる演算を定義している本もあるので注意が必要。詳しくは教科書 p.67 参照。
外微分形式
$(0,r)$ 型の反対称テンソル

$$\omega=\sum T_{i_1\ldots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r} \tag{7.19}$$

は r-形式 であり、これを外微分形式の定義とすることもできる。

8　第 7 回 11/6 ノート

8.1　リー微分

リー微分（Lie derivative）⇒ 多様体上の曲線に沿った微分のこと
積分曲線族
ベクトル場と曲線の関係を再び考察する。X を多様体 M 上のベクトル場とする。多様体上の各点には接ベクトル空間が対応付けられており、ベクトル場とはその各点の接ベクトル空間から 1 つずつベクトルを選んでいることに対応する。次に多様体上の曲線について考える。曲線は多様体上のすべての点において、 1 つの接ベクトルを持つ。このとき、次のような問を考える：

任意のベクトル場が与えられたとき、ある点 P から始めて、曲線上の各点での接ベクトルが常にいま与えられたベクトル場と一致するような曲線が存在するか。

結論としては、 1 階微分が連続なベクトル場に対してはそれは可能であり、そのような曲線を**積分曲線**という。
各点 p を何らかの積分曲線が通るので、積分曲線は多様体 M を埋め尽くす。多様体を覆うこのような曲線の集合のことを**積分曲線族**という。曲線の集合は結局、それ自身、多様体とみなすことができる。
簡単な例として、平面上のベクトル場

$$X=x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x} \tag{8.1}$$

の積分曲線族を図示する。

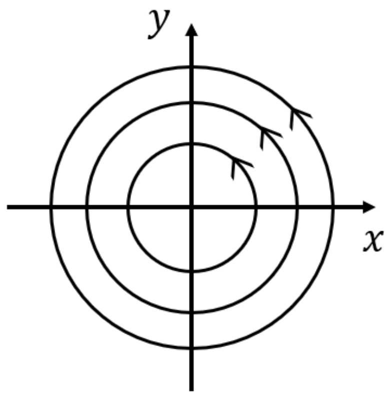

図 4　積分曲線族

一般論に戻る。ベクトル場 X の積分曲線で定義される多様体 M 上の**流れ (flow)** と呼ばれるものが存在する。局所座標系 $\{x^i\}$ をとるとベクトル場 X が

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{8.2}$$

として与えられたとき、このベクトル場に対応する積分曲線族は t をパラメータとして一般に連立微分方程式

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = X_i \qquad (1 = 1, \dots, n) \tag{8.3}$$

の解の族になっている。微分方程式の解の一意性より、すべての i に対して $X^i = 0$ となる点以外では積分曲線どうしは交わらない。上で例としてあげたベクトル場及び、積分曲線族を見ると確かに微分方程式の解の族となっていることがわかる。

このようにして、多様体 M の曲線族で覆われた領域内の各点には、ただ 1 つの曲線が通る。このとき、十分小さな Δt に対して領域内の各点を同じ曲線に沿ってパラメータ距離 Δt つまり、曲線の式においてパラメータを $t \to t + \Delta t$ とした曲線上の点に移動させる写像を定義することができる。ベクトル場が無限回微分可能ならば、この写像は**微分同相写像**である（1 対 1 の対応で写像と逆写像のどちらも無限回微分可能な写像のこと)。

・リー微分

積分曲線がどのようなものか分かったので、次に積分曲線に沿った微分という概念を導入する。

互いに重なり合った座標近傍の族 $\{U_t\}$ には同じベクトル場から作られるいくつかの積分曲線が通っている。点 $p \in U_t$ を、流れ（パラメータ t が変化したときに積分曲線上の点が動く方向）に沿ってパラメータ距離 t だけ進める写像を ϕ_t とする。U_t と積分曲線があれば、微分同相写像の 1 径数変換族

$$\phi_t : U_t \to M \qquad (p \to \phi_t(p)) \tag{8.4}$$

が決まる。このとき、写される先が M となっているのは一般に U_t のなかに点 $\phi_t(p)$ が収まるとは限らないということを表している。

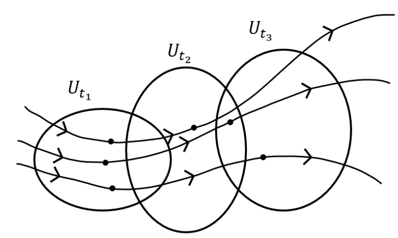

図 5　近傍族 $\{U_{t_i}\}$ と積分曲線　　流れに沿って点が移動した様子も書き込んだ

いま定めた写像 ϕ_t によって積分曲線上の点を移すことができる。移される前の点 p と後の点 $\phi_t(p)$ にはそれぞれ接空間が定義でき、その接空間を多様体 M 上のということをあらわに書き、$T_pM, T_{\phi_t(p)}M$ と表す。T_pM から任意の接ベクトル Y_p を一つ選ぶと、その接ベクトルに対してももともとある積分曲線とは別の積分曲線が得られる。写像 $\phi_t(p)$ は接ベクトル Y_p を $Y_{\phi_t(p)}$ に対応させる写像とみることもできる。テンソル空間の間の同型対応を

$$\tilde{\phi}_t : T^a_b(p) \to T^a_b(\phi_t(p)) \tag{8.5}$$

と書くことにする。ここで微分を導入したいがそのためには**同じ点**での量を比べる必要がある。そこで、まず

$$(\tilde{\phi}_t^{-1}T)(p) = \tilde{\phi}_t^{-1}T(\phi_t(p)) \tag{8.6}$$

はテンソル空間 $T^a_b(p)$ の元であることに注目する。そして、$T(p)$ はもちろん $T^a_b(p)$ の元であるからつぎの定義が可能である。

$$L_XT = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\tilde{\phi}_t^{-1}T)(p) - T(p)\right] \tag{8.7}$$

このようにして得られる (a,b) 型テンソル場 L_XT を T の X に関する**リー微分**と呼ぶ。この意味を少し説明する。写像 ϕ_t によって点 p から移された点 $\phi_t(p)$ でのテンソル $T(\phi_t(p)) \in T^a_b(\phi_t(p))$ を、写像 $\tilde{\phi}_t^{-1}$ によって点 p での (a,b) 型テンソル空間 $T^a_b(p)$ の元

$$(\tilde{\phi}_t^{-1}T)(p) = \tilde{\phi}_t^{-1}T(\phi_t(p)) \in T^a_b(p) \tag{8.8}$$

に引き戻す。こうすることで異なる点でのテンソルどうしを $T^a_b(p)$ 内の元として比べることができる。それらの差を計算し、t で割って $t \to 0$ の極限をとったものを L_XT とした。

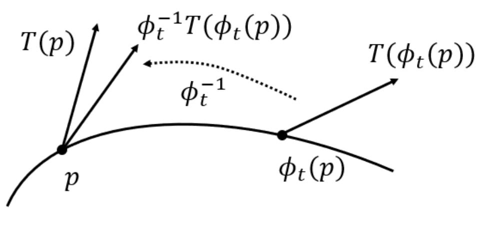

図 6　リー微分　　テンソル $T(p)$ としてベクトルをとった

具体的な計算をやってみる。$t=0$ で点 p を通る曲線を考え、点 $\phi_t(p)$ での座標を

$$x^i(t) = x^i(p) + X^it = x^i(p) + v^it \tag{8.9}$$

で表す。このとき、$i=1,\ldots,n$ でありそれらをまとめて表記している。また、t の 2 次項以上を無視して計算をすすめる。関数 f に対して、

$$\tilde{\phi}_t^{-1} f(p) = f(\phi_t(p)) \tag{8.10}$$

であることは先の説明からわかる。これは、$\tilde{\phi}_t^{-1}$ で f を引き戻した点 p での値は、引き戻す前の f の点 $\phi_t(p)$ における値に等しいということを表している。結局、関数 f は変換されないのでこの関係式は使わないのだが、これらを踏まえて X に関する f のリー微分を計算すると

$$\begin{aligned}
L_X f &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(\phi_t(p) - f(p)\right] \qquad (8.11)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x^i(p)+v^i t) - f(x^i(p))\right]\\
&\sim \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f(x^i(p)) + \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}t - f(x^i(p))\right]\\
&= \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}\\
&= \left(\sum_j \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) f\\
&= \sum_j X^i \frac{\partial}{\partial x^j} f\\
&= Xf
\end{aligned}$$

X に関する f のリー微分はこのようになる。次にベクトル場

$$Y = \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8.12}$$

に対して、X に関するリー微分を求める（ベクトル場のリー微分はよくわからなかった)。
まず、$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ であるから（逆変換はパラメータを逆方向に進めた変換に等しいということ)、

$$x^i(-t) = x^i(p) - X^i t$$

で、その微分の成分は

$$\frac{\partial x^i(-t)}{\partial x^j} = \delta^i_j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} t$$

で与えられる。これらを用いると

$$\begin{aligned}
(\tilde{\phi}_t^{-1} Y)(p) &= \tilde{\phi}_t^{-1} Y(\phi_t(p)) \qquad (8.13)\\
&= \sum_{i,j}\left(\delta^i_j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j}t\right)\eta^j(x(t))\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (8.14)\\
&= \sum_{i,j,k}\left(\delta^i_j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j}t\right)\left(\eta^j + \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k}X^k t\right)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (8.15)
\end{aligned}$$

一つ目の ( ) は逆写像に関する変換、二つ目の ( ) は η の変換に対するテイラー展開である（でい

いのかな)。したがって、

$$L_X Y = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\tilde{\phi}_t^{-1}Y)(p) - Y(p)] \tag{8.16}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^k}X^k - \frac{\partial X^j}{\partial x^k}\eta^k\right) t\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8.17}$$

$$= \sum_{j,k}\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^k}X^k - \frac{\partial X^j}{\partial x^k}\eta^k\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8.18}$$

$$= XY - YX = [X, Y] \tag{8.19}$$

最後の等式は、交換子もしくは交換関係と呼ばれる演算 $[A, B] = AB - BA$ の定義である。
一方、1-形式 ω

$$\omega = \sum \omega_i dx^i \tag{8.20}$$

に対するリー微分 $L_X\omega$ は次のように計算される：

$$(\tilde{\phi}_t^{-1}\omega)(p) = \sum_{i,j}\left(\delta_i^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}t\right)\omega_i(x(t))dx^j \tag{8.21}$$

$$= \sum_{i,j}\left(\delta_i^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}t\right)\left(\omega_i + \sum_k \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k}X^k t\right)dx^j \tag{8.22}$$

$$= \sum_i \omega_i dx^i + \sum_{i,j}\left[X^j\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right]dx^i \tag{8.23}$$

これより、

$$L_X\omega = \sum_{i,j}\left[X^j\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + \omega_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right]dx^i \tag{8.24}$$

となる。ベクトルとは変換に用いた行列が異なっている。微分形式とベクトル場は従う変換が異なるため少し計算が異なる。

9 第 8 回 11/20 ノート

9.1 ハミルトン力学

多様体、微分形式、リー微分を用いてハミルトン力学を表現することを考える。
一般化座標 $q(t)$ に対して、運動エネルギーを T、ポテンシャルエネルギーを V とすると、ラグランジアン（ラグランジュ関数）$L(q, \dot{q})$ は

$$L(q, \dot{q}) = T = V \tag{9.1}$$

で与えられる。座標に共役な運動量 p_j、ハミルトン関数[*2] $H(p, q, t)$ はそれぞれ

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}) \tag{9.2}$$

[*2] ハミルトニアンとも呼ぶが、量子力学のエネルギー演算子と区別するためにここではハミルトン関数と呼ぶことにする

で与えられる。ラグランジュ関数とハミルトン関数は独立な変数が異なるということに注目してほしい。ハミルトン関数を用いると運動方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{9.3}$$

と書くことができる。これを**正準方程式**と呼ぶ。導出や物理的な意味、オイラー・ラグランジュ方程式との違いなどについてはここでは詳しく触れないことにする。

ハミルトニアンベクトル場

(p, q) の組を指定することで一つの点が定まるような二次元多様体のことを**相空間**と呼ぶ。数学の位相空間とは別のものであるから混同しないように。M 上で 2-形式

$$\omega = dp \wedge dq \tag{9.4}$$

を定義する。M 内で運動方程式の解であるような曲線（解曲線と呼ぶ）を考え

$$\{q = f(t), p = g(t)\} \tag{9.5}$$

で表す。その接ベクトルつまり、相空間上の曲線にそった方向微分

$$X = \frac{d}{dt} = \dot{f}\frac{\partial}{\partial q} + \dot{g}\frac{\partial}{\partial p} \tag{9.6}$$

に関する ω のリー微分は

$$L_X \omega = 0 \tag{9.7}$$

を満たす。**??** を満たすベクトル場 X を**ハミルトニアンベクトル場**と呼ぶ。この式 (**??**) は次のようにして証明することができる。リー微分の公式から

$$L_X \omega = d\langle \omega, X \rangle + \langle d\omega, X \rangle \tag{9.8}$$

と書くことができる。ω が 2-形式 であることから (**??**) の第 2 項は 0 となる。また、第 1 項は

$$\begin{aligned} \langle \omega, X \rangle &= \langle dp, X \rangle dq - \langle dq, X \rangle dp \\ &= \frac{dg}{dt}dq - \frac{df}{dt}dp \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= -dH \end{aligned} \tag{9.9}$$

一つ目の等号は内積 $\langle \ \rangle$ が 1-form とベクトル場を実数に対応させせる写像とみることで理解できる。2-form である ω はテンソル積 $\otimes$ を用いて

$$\omega = dp \otimes dq - dq \otimes dp \tag{9.10}$$

と書くことができる。このとき、テンソル積 $\otimes$ は二つのベクトルから一つの実数を与える写像であるからそのことを明示して

$$\omega = dp \otimes dq(X, Y) - dq \otimes dp(X, Y) \tag{9.11}$$

とかく。ここで、X, Y は任意のベクトル場である。このように書いた 2-form とベクトル場の内積 $\langle\ \rangle$ は入力のベクトルが一つ足りないため出力が 1-form となる。引数をあらわに書けば

$$\langle dp \otimes dq(X,\text{-}), X\rangle = \langle dp, X\rangle dq(\text{-}) \tag{9.12}$$

二つ目の等号は $\langle\ ,\ \rangle$ の作用、三つ目の等号は正準方程式を用いた。最後の等式はハミルトン関数の全微分を表している。このとき、ハミルトン関数は陽に時間に依存しないとしている。
これより

$$L_X\omega = d(-dH) = 0 \tag{9.13}$$

となる。逆に、$L_X\omega = 0$ のときつまり、ベクトル場 X がハミルトンベクトル場であるとき解曲線に沿って正準方程式を満たすようなハミルトン関数が存在することを示すことができる。
(**??**) より、$d\langle\omega, X\rangle = 0$ でなければならず、相空間はポアンカレの補題の逆の条件

$U \subset M$ のすべての閉形式は完全形式である

を満足するので

$$\langle\omega, X\rangle = -dH \tag{9.14}$$

を成り立たせるような関数 H が存在するからである。
今の議論をもう少し深く考察してみよう。初めの仮定としては、ベクトル場 X がハミルトニアンベクトル場であること、だけである：ベクトル場 X に対して

$$L_X\omega = 0 \tag{9.15}$$

このことから

$$\begin{aligned} 0\ &= L_X\omega = d\langle\omega, X\rangle \\ &\Rightarrow \langle\omega, X\rangle : \text{closed} \\ &\Rightarrow \langle\omega, X\rangle : \text{exact} \qquad (\because \text{ポアンカレの補題}) \\ &\Rightarrow {}^{\exists}H, \langle\omega, X\rangle = dH \end{aligned} \tag{9.16}$$

ベクトル場 X はもともと運動方程式の解曲線であったので、この結論は次のように解釈することができる。系の運動方程式が積分可能な形（可積分形）であれば解析的に解曲線を知ることができる。しかし、運動方程式の可積分性だけではその系にハミルトニアンが存在するかどうか知ることはできない。そこで、運動方程式を積分することで得られた解曲線 X に沿ったリー微分を計算することで、その系にハミルトニアンが存在するかどうかを判断できるということである。X に沿った 2-form のリー微分が 0 であれば、その系のハミルトニアンを記述することができる。
正準変換
2-形式 $\omega = dp \wedge dq$ を不変に保つ変換を**正準変換** (canonical transformation) という。すなわち、(p, q) から (P, Q) への変換

$$P = P(p, q)\ \ ,\ \ Q = Q(p, q) \tag{9.17}$$

が

$$dp \wedge dq = dP \wedge dQ \tag{9.18}$$

であれば正準変換である。これは相空間内での体積要素を保つ変換と解釈することもできる。教科書には正準変換の例が載っている。正準変換を考える利点は正準変換の許す範囲で変換を行うことで、力学の問題を簡単に解くことができることがあるのである。このとき、運動量や座標という概念は意味をほとんど持たなくなる。

シンプレクティック多様体

先までの説明では自由度が 2 であったが、三次元空間内を運動する粒子は 3 つの座標と 3 つの一般化運動量の合計 6 つの独立変数を持つことになる。つまり、相空間は 6 次元になる。一般には 3 次元 N 粒子系は $6N$ 次元の相空間内の 1 点を指定し、系の時間発展は $6N$ 次元の相空間内を描く曲線として描像される。(**??**) の 2-形式 は

$$\omega = \sum_{j=1}^{3N} dp^j \wedge dq^j \tag{9.19}$$

となる。このような ω をシンプレクティック形式といい、対応する相空間をシンプレクティック多様体と呼ぶ。より、定義らしく書くと、偶数次元の微分可能多様体 M 上の 2-形式 を ω としたとき

(1)　ω は閉形式、$d\omega = 0$

(2)　$\omega^m \equiv \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ は M 上のいたるところで 0 ではない。

ポアソン括弧

ポアソン括弧の説明は教科書を参考に行う。

10　第 9 回 11/27 ノート

10.1　ホモトピー群

ここでは、位相空間をどのように区別すればよいかという問題についての一つの方法を与える。具体的に言えば、位相空間 X, Y が与えられたときにこの二つの位相空間が同相であるかどうかを調べたいということである。では、何を基準として調べればよいだろうか。ここで登場するのが**位相不変量**と呼ばれるものである。ある位相空間に同相な位相空間の間で共通の量を求めることができれば、その量を調べることで逆に位相空間が同相であるかどうかを判別することができる。そのような位相不変量の一つに**基本群**と呼ばれるものがある。基本群についての説明はあとに回すことにする。そのほかにも、位相空間の弧状連結成分も位相不変量の一つである。ここで詳しくは論じないが位相空間はそれ自身を弧状連結な成分に分解することができる。このことは認めていただきたい。位相空間を弧状連結な成分に分解することができても、それらはみな同相とは限らない。なので、別の位相不変量を用いて分類しなければならない。このときに、基本群は有用な手段となる。以下では、感覚的かつやや厳密にホモトピー及び基本群の性質を調べていこうと思う。

・基本群

二つの空間 A、B を考える。これらはすでに弧状連結な成分に分解された位相空間を考えている。このとき、これらの空間の違いは A は穴を持ち B は穴を持っていないことだけとする。この違いをどのように調べればよいだろうか。

その方法の一つとして、空間内にループ（閉じた経路）を考え、連続的に変形させていくことが考えられる。穴のない空間 B では任意のループは 1 点に連続的に縮めることができる。言い換えると、空間 B には実質 1 種類のループしか存在しない。一方、空間 A を考えるとどのようにやっても連続的に 1 点に縮めることのできないループが存在する。縮めることができるループも存在することから、空間 A は実質 2 種類以上のループを持っていることになる。このとき、同じ 1 点に縮めることができるループ全体は同一視してもよいように思える。連続変形によって互いに移り変わることができるループ同士を同値または**ホモトープ**であるという。連続変形の厳密な説明はあとでおこなう。

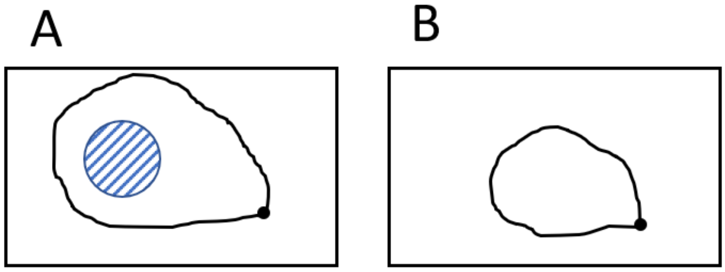

図 7　穴のある空間 A と穴のない空間 B

ホモトープなループを同一視した同値類を**ホモトピー類**とよぶ。空間に穴のない空間 B は 1 つのホモトピー類しか持たないことになる。一方、穴が 1 つある空間 A はループが n を整数として n 回穴の周りをまわるかによってホモトピー類を作ることができる。負の整数は逆回りを表す。今

考えたように、ループのホモトピー類を調べることで空間 A、B を区別することができる。ループの同値類は後で示すように群の構造を持ち、これを**基本群**と呼ぶ。これを高次元に拡張したときのために基本群のことを考えている位相空間 X に対して $\pi_1(X)$ とかくことにする。
いまの書き方から基本群は第 1 次ホモトピー群と呼ばれる。添え字の 1 はループの**次元**を表している。具体的に言えば基本群では 2 次元空間中の穴を囲む 1 次元のループを考えた。同様にして 3 次元の" 穴 "を調べるためには 2 次元の" ループ "つまり閉曲面を考える必要がある。この閉曲面には S^2 つまり球面を用いるのが便利である。考えている 3 次元空間に穴がなければ球面 S^2 は 1 点に縮めることが可能である。このようにして、ループの次元を上げることで第 2 次ホモトピー群 $\pi_2(X)$ が導入される。より高次のホモトピー群を考えることで位相空間 X の性質を調べることができる。このとき、考えている空間の次元とループの次元は関係がない。大切なのは" 穴 "の次元である。例えば 3 次元空間内の 0 次元の穴、つまり点を捕まえるためにはループではだめで、S^2 を考える必要がある。しかし、同じ 3 次元空間内の 1 次元の穴つまり、直線を捕まえるためにはループを考えればよい。このように穴の次元が重要になっている。

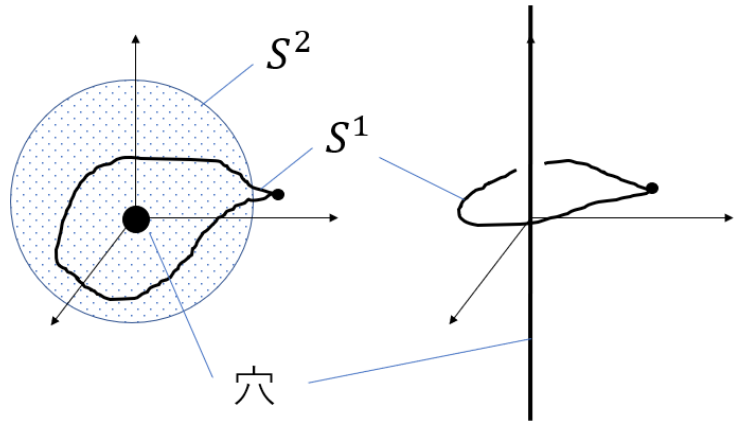

図 8　穴の種類が異なる例

10.2　ホモトピー

・**路とループ**

X を位相空間とし、x_0, x_1 を X 内の 2 点とする。x_0 から x_1 への**路 (path)**$\alpha(t)$ とは、パラメータ t を $t : 0 \to 1$ まで変化させたときに各 t に対して位相空間 X を対応させる写像

$$\alpha(t) \to X \tag{10.1}$$

のことである。このとき、

$$\alpha(0) = x_0 \ , \ \alpha(1) = x_1 \tag{10.2}$$

であることも条件の一つである。特に、

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \tag{10.3}$$

である路 $\alpha(t)$ のことを、位相空間 X における点 x_0 を基点とする**閉路**もしくは**ループ**という。
位相空間内の任意の点 x_0, x_1 を結ぶ路 α が存在すれば、その位相空間 X は**弧状連結**あるいは**経路**

連結という。

２つの路 α, β の積 γ は、α の終点と β の始点が一致するときのみ定義することができて、$\gamma = \alpha * \beta$ と表す。γ に対してパラメーラ t は $t: 0 \to 1$ であり、α, β に対してもそれぞれ $t: 0 \to 1$ である。式で表せば

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ \beta(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases} \tag{10.4}$$

となる。路 $\alpha(t)$ の**逆の路** $\alpha^{-1}(t)$ は点を逆向きにたどる経路であり

$$\alpha^{-1} = \alpha(1-t) \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{10.5}$$

で定義される。

・ホモトープ

x_0 を基点とする 2 つのループ α, β は、次のような連続写像 $H: [0,1] \times [0,1] \to X$ が存在すれば、**ホモトープ**であるという。

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X \tag{10.6}$$
$$H(t,0) = \alpha(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \tag{10.7}$$
$$H(t,1) = \beta(t) \quad (1 \leq t \leq 1) \tag{10.8}$$
$$H(0,s) = H(1,s) = x_0 \tag{10.9}$$

この写像 H は α, β の間の**ホモトピー**と呼ばれる。説明は図を用いると少しだけイメージがしやすい。この式が言っているのは、二つのパラメータを用意して、片方でループ上の移動を表現しもう片方のパラメータで路の変形を表現している。このとき、パラメータが連続量であることから連続変形を表現している。先ほどまであいまいに使っていた連続的に変形するというのは、パラメータ s を連続的に変化させることに対応している。

ホモトープであるという関係は同値関係である。つまり、反射律、対称律、推移律を満足する 2 項関係である。

・基本群

ループの同値類を $[\alpha]$ で表し、α の**ホモトピー類**と呼ぶ。これから説明するのは、位相空間 X の点 x_0 を基点とするループのホモトピー類の集合

$$\pi_1(X, x_0) \tag{10.10}$$

は群をなすこと、である。

群を構成するためにはまず、積を定義する必要がある。ホモトピー類 $[\alpha], [\beta]$ は $\pi_1(X, x_0)$ に属するとする。ホモトピー類の積 $[\alpha] * [\beta]$ を

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \tag{10.11}$$

で定義する。つまり、路 α を連続変形することで得られるすべての路のいずれかと、同じく β を連続変形することで得られる路のうちの一つをつないで得られた路のホモトピー類を積の結果とするということである。

次に単位元を決める。積が定まったので、どのようなものが単位元になるか考えるのは簡単であ

る。新しくループをつなげても元に戻るようなループが単位元である。つまり、点 x_0 を基点とする**定数ループ**として次のようなものを定めればよい：

$$c(t) = x_0 \quad (0 \le t \le 1) \tag{10.12}$$

また、これら定数ループの作るホモトピー類を $[c]$ と表す。
このようにして積と単位元を定義した $\pi_1(X, x_0)$ は群をなす。

1. 結合法則 $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$
2. 単位元 $[c]$ の存在 $[\alpha] * [c] = [\alpha], \quad [c] * [\alpha] = [\alpha]$
3. 逆元 $[\alpha^{-1}]$ の存在 $[\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c], \quad [\alpha^{-1}] * [\alpha] = [c]$

証明としては少し技巧的な方法を用いている。基本的な方針としては、一つのパラメータ t を $0 \to 1$ の範囲で動かしたときに点が路の上を移動し、もう一つ別のパラメータ s を変化させたときに路が別の路に変化するようにパラメータ依存性を決めてやる。こうすることで、連続変形つまりパラメータの連続的な変化により異なる路が得られることからそれらは同じホモトピー類であることを示している。
群 $\pi_1(X, x_0)$ は x_0 を基点とする位相空間 X の**基本群**または**第 1 次ホモトピー群**と呼ぶ。

[例 1] 多様体 X として S^1、円周をとる。このとき、S^1 の基点を x_0 とするホモトピー類の集合 $\pi_1(S^1, x_0)$ は次のように書くことができる：

$$\pi_1(S^1, x_0) = \boldsymbol{Z} \tag{10.13}$$

これは次のことを意味する。円周上のループは時計まわりに n 回、反時計まわりに $|n|$ 回、どちらにも回らない $(n = 0)$ というループからなり、これらは整数 $\boldsymbol{Z}$ で分類されるということ。このことから、$\pi_1(S^1, x_0)$ は整数 $\boldsymbol{Z}$ と同じ群の構造を持つ（加群)。具体的に見れば、時計まわりに 2 周するループと反時計まわりに 3 周するループをつなげて得られるループは反時計まわりに 1 周する $n = -1$ に対応するループとなる。

[例 2] 多様体 X として球面 S^2 をとる。このとき、S^2 上のホモトピー類の集合 $\pi_1(S^2, x_0)$ については次のように書くことができる：

$$\pi_1(S^2, x_0) = 0 \tag{10.14}$$

これは、球面 S^2 での 1 次元ループは必ず 1 点に縮めることができるということを表している。一般に、$\pi_1(X, x_0)$ がただ一つの元からなる群であるとき $\pi_1(X, x_0) = 0$ と表し、群は自明であるという。
以上の考察のとき、ループを単純につなげるだけではだめで、ループの同値類を考えることでそれらが群の構造を持つようになる。

・基点のとりかえ

今までは位相空間 X の中に基点 x_0 を定めることで基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を定義してきた。この基点に対する依存性を取り除くことを考える。やることとしては、基点をとりかえる前と後で得られる基本群 $\pi_1(X, x_1), \pi_1(x, x_2)$ が群として同型であることを確かめる。

位相空間 X 中の点 x_1 を基点とするループを α とする。始点 x_1、終点 x_2 の路 γ をとり、$\gamma^{-1}*\alpha*\gamma$ をつくるとこれは x_2 を基点とするループとなる。
1 つの元 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_1)$ に対して、$[\alpha'] = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \in \pi_1(X, x_2)$ が存在する。この写像つまり、$[\alpha]$ に対して $[\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$ を対応させる写像を P とし

$$P([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] \tag{10.15}$$

とかく。写像 P は

$$P : \pi_1(X, x_1) \to \pi_2(X, x_2) \tag{10.16}$$

である。今やりたいことは写像 P が群 $\pi_1(X, x_1), \pi_2(X, x_2)$ 間の同型写像であることを確かめることである。群の間の写像が同型であるとはその写像が準同型であり、1 対 1 の対応を持つことである。同型であるための必要十分条件は、二つの群の間に

$$fg = 1, \quad gf = 1 \tag{10.17}$$

となる準同型写像

$$f : G \to G', \quad g : G' \to G \tag{10.18}$$

が存在することである（教科書 p.14）。これらを確かめる。まず、基点をとりかえる写像 P が準同型であることを確認する。
$\pi_1(X, x_1)$ の任意の元 $[\alpha], [\beta]$ に対して

$$\begin{aligned} P([\alpha] * [\beta]) &= [\gamma^{-1}] * ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] \\ &= [\gamma^{-1}] * [\alpha] * [\gamma] * [\gamma^{-1}] * [\beta] * [\gamma] \\ &= P([\alpha]) * P([\beta]) \end{aligned} \tag{10.19}$$

これより、P が準同型であることが分かった。さらに、P で写された元 $[\alpha']$ に対して次のように作用する写像 P^{-1} を定義する：

$$\begin{aligned} P^{-1} : \pi_1(X, x_2) &\to \pi_1(X, x_1) \\ P^{-1}([\alpha']) &= [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}] \end{aligned} \tag{10.20}$$

このように定義された P^{-1} は P の逆である（定義から計算すればわかる）。ゆえに

$$P^{-1}P[\alpha] = [\alpha] \tag{10.21}$$

となる。同様にして

$$PP^{-1}[\alpha] = [\alpha] \tag{10.22}$$

が示せるので、めでたく P は同型写像であることがわかる。
このことから、同じ位相空間内であれば基点の違うホモトピー群をとってもよい言い換えれば、ホモトピー群は考えている位相空間 X にのみに依存するということがわかる。そのため、基本群を $\pi_1(X)$ と表し、X の基本群と呼ぶ。この事実から、位相空間の性質を調べるためにホモトピー群を調べることが有用な手段であるということがわかる。
追記　4/6

10.3　高次のホモトピー群

基本群の考えを高次元に拡張することで、空間 X の中の点 x_0 を基点とする高次ホモトピー群 $\pi_n(X, x_0)$ が得られる。群 $\pi_n(X, x_0)$ を構成するために、ループの概念を n 次元 に拡張することから始める。

$\boldsymbol{n}$ ループ

$\mathbb{R}^n$ における n 次元閉立方体を I_n で表す。例えば、

$$I_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \tag{10.23}$$

は 3 次元におけるいわゆる普通の立方体である。さらに連続写像

$$\alpha : I_n \to X \tag{10.24}$$

は立方体 I_n の表面 ∂I_n を点 $x_0 \in X$ に写すとする。このとき、写像 α は X の点 x_0 を基点とする n ループ と呼ばれる。例としては次元の低い $n = 2$ の場合を考えるとわかりやすい。正方形 I_2 の境界を同一視すると 2 ループが得られる。これは 2 次元球面となっている。

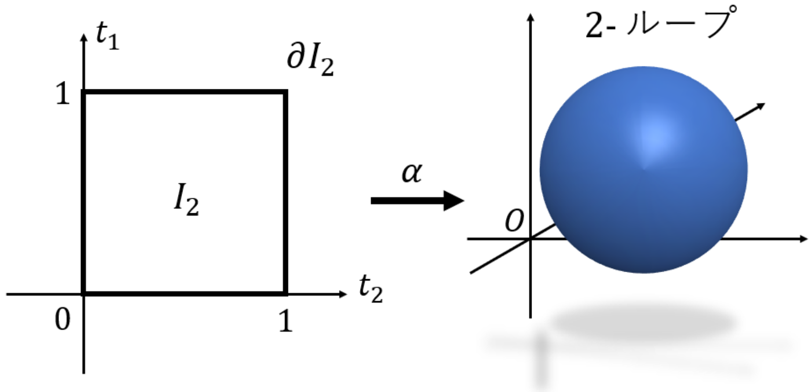

図 9　I_2 の境界を同一視してループを考える

このように考えやすい低い次元での様子をイメージしながら一般化を進めていく。n 次元立方体 I_n の中の点の座標を定めるパラメータを $t_1, t_2, \ldots, t_n$ とする。各 t_i は $0 \leq t_i \leq 1$ であり、$t_i = 0, 1$ は境界 ∂I_n 上の点に相当する。なので、$t_i \in \partial I_n$ ならば

$$\alpha(t_1, \ldots, t_n) = x_0 \quad (t_i \in \partial I_n) \tag{10.25}$$

である。これは、境界の点を同一視していることを表している。さらにここで、定数ループと逆ループも定義しておく。

立方体 I_n を点 x_0 に写す n ループは定数ループとよばれ、c で表す：

$$c : I_n \to x_0 \tag{10.26}$$

n ループ α の逆は α^{-1} と書かれ

$$\alpha^{-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{10.27}$$

によって定義される。一つのパラメータだけを逆向きに変化させることで逆の移動を表現している。

続いて、n ループの積を定義する。α と β を $x_0 \in X$ を基点とする n ループとする。このとき、積 $\gamma = \alpha * \beta$ は $x_0 \in X$ を基点とする n ループであり

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \alpha * \beta(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &= \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}) \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & (\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1) \end{cases}\end{aligned} \tag{10.28}$$

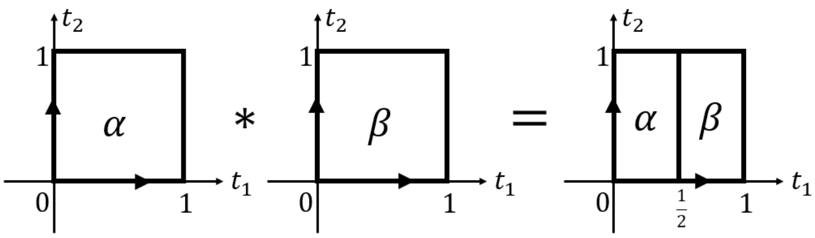

図 10　積の様子を表すホモトープ

ループという具体的な描像は徐々に捨てて、写像という面からホモトピー類をとらえるようにしなければならない。

ホモトープ

位相空間 X の点 x_0 を基点とする 2 つの n ループ α と β は、次の条件を満たす連続写像 $H(s; t_1, t_2, \ldots, t_n), (0 \leq s \leq 1)$ が存在するときホモトープであるといい $\alpha \sim \beta$ と表す。

$$(1) H(0; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \alpha(t_1, \ldots, t_n), H(1; t_1, \ldots, t_n) = \beta(t_1, \ldots, t_n) \tag{10.29}$$

$$(2) t_1, \ldots, t_n \in \partial I_n \rightarrow^{\forall} s, H(s; t_1, \ldots, t_n) = x_0 \tag{10.30}$$

改めて、このような連続写像 H が存在するとき、2 つの n ループ α, β はホモトープであるという。ホモトープは同値関係である。基本群の時と同じように n ループ α にホモトープな同値類を $[\alpha]$ と書きホモトピー類と呼ぶ。基本群の時とは異なり、簡単な図に書いたりすることはできない。

n 次元ホモトピー群

位相空間 X の点 x_0 を基点とする n ループの集合を

$$\pi_n(X, x_0) \tag{10.31}$$

とかく。ホモトピー類 $[\alpha]$ と $[\beta]$ は $\pi_n(X, x_0)$ に属するとする。もちろん、このとき $[\alpha], [\beta]$ は互いにホモトープであるとは限らない。このとき、$\pi_n(X, x_0)$ の元に対して積の演算を次のように定義する。

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \tag{10.32}$$

このように積の演算が定義された $\pi_n(X, x_0)$ は演算 $*$ について群をなす。これを基点 x_0 を持つ位相空間 X の n **次元ホモトピー群**または**第 n 次ホモトピー群**と呼ぶ。基本群の時にすでにみたように、空間 X が弧状連結であるとき、X の 2 点 x_1, x_2 をそれぞれ基点とするホモトピー群 $\pi_n(X_1, x_1), \pi_n(X_2, x_2)$ は群として同型である。つまり、群としての性質が基点の取り方には依存

しないということである。このことから、以降 n 次ホモトピー群は基点とり方を明記せず $\pi_n(X)$ のように書くことにする。

例　基本群の素直な拡張として次が成り立つ。

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \quad (n \geq 1) \tag{10.33}$$

$n = 2$ の場合を簡単に説明する。まず、正方形 I_2 の境界 ∂I_2 を同一視した空間を考えるとそれは、２次元球面に同相である。

$$I_2/\partial I_2 \simeq S^2 \tag{10.34}$$

は連続写像 α によって S^2 がどのように $X = S^2$ に写されるかを表す。パラメータの取り方によって $I_2/\partial I_2 \simeq S^2$ が 1 回 S^2 に覆われるとき X のほうが何回覆われるかということについて整数で類別することができる。このことから整数が作る群と同型となる。

11　第 10 回 2019/4/11 ノート

11.1　空間の変形

写像のホモトピー

路やループのホモトピー同値の考え方を、より一般の写像に拡張する。写像 f, g は、位相空間 X から Y への連続写像とする。2 つの写像 f と g は次のような写像 $H : X \times I \to Y$ が存在すればホモトープであるといい、$f \sim g$ と表す。

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \tag{11.1}$$

このとき、$H(x, t)$ は写像 f と g の間のホモトピーと呼ばれる。これは、$I : [0 : 1]$ の間を変化する 1 つのパラメータによって連続的に写像が移り変われるということを表している。この、写像のホモトピー同値の考え方は空間のホモトピー同値を考えるときにも使うものとなる。

ホモトピー同型

今考えたのは写像のホモトピー同型であった。これを位相空間に対しても拡張する。X と Y を位相空間とし、f と g を連続写像

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to X \tag{11.2}$$

とする。このとき、位相空間 X と Y は

$$\begin{aligned} f \circ g \sim \mathrm{id}_Y \quad &(Y \text{ 上の同相写像と } f \circ g \text{ がホモトピー同値}) \\ g \circ f \sim \mathrm{id}_X \quad &(X \text{ 上の同相写像と } g \circ f \text{ がホモトピー同値}) \end{aligned} \tag{11.3}$$

であれば同じホモトピー型であるといい、$X \simeq Y$ と表す。

同じホモトピー型であることは、位相空間の集合の中で同値関係を与える。つまり、位相空間を分類する方法の 1 つになるということ。特に基本群とホモトピー型の関係において重要なことは同じホモトピー型の 2 つの位相空間は同じ基本群を持つことである。

$$\begin{cases} \text{同じ基本群をもたない} \to \text{同じホモトピー型ではない} \\ \text{位相空間として同型} \to \text{同じ基本群をもつ} \end{cases} \tag{11.4}$$

今説明したものの例を示す。

（例）空間 X は閉曲線 C、空間 Y は閉曲線 C に線分 PQ を付け加えたものとする。このとき、X と Y は同じホモトピー型であることを説明する。そのために写像 $f : X \to Y, g : Y \to X$ をそれぞれ次のようにとる。

$$f(x) = x \ \ (x \in C) \tag{11.5}$$

$$g(y) = \begin{cases} y & (y \in C) \\ P & (y \in \mathrm{PQ}) \end{cases} \tag{11.6}$$

このとき、これらの合成写像がそれぞれの位相空間における恒等写像に等しいまたは、同型であることを確認すればよい。

合成写像 $g \circ f$ を考えると、$f(x)$ によって C 上の任意の点は再び X 中の C に写されその後、g によってふたたび C 上の点に移る。結局、これは X 中の同相写像に等しく

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \tag{11.7}$$

である。次に $f \circ g$ を考える。これは、まず g によって Y 中の点が C 上の点に移る。そして、f によって C 上の点は再び C 上に移される。このとき、Y 中の点でも X に含まれない領域が存在する。ゆえに、これは Y 中の恒等写像とはならないが恒等写像と同型な写像となるので

$$f \circ g \sim \mathrm{id}_Y \tag{11.8}$$

である。以上から、X と Y が同じホモトピー型であることが言える。なので、これらは同じ基本群を持つということもわかる。しかし、X から 1 点を取り除いても X は連結だが Y の PQ から 1 点取り除くと連結ではなくなってしまう。このことから、同じホモトピー型で、同型な基本群を持っていても 2 つの位相空間が同相であるとは限らない。

空間の変形

同じホモトピー型であるような空間の変形が定義できるならば基本群を考えるときに役に立つ。位相空間 X の部分空間を A とする。**縮射 (retraction)** と呼ばれる次のような連続写像が存在すれば A は X の**縮体 (retract)** であるという。

$$\begin{cases} r : X \to A \\ r(a) = a \quad (a \in A) \end{cases} \tag{11.9}$$

A 上の点 a はそのまま A に写され、X 全体が A に写される。このような写像があればこれらはレトラクトを作る。また、位相空間 X の部分空間 A は縮射 $r : X \to A$ と次のようなホモトピー H

$$\begin{cases} r : X \to A \\ H : X \times [0,1] \to X \end{cases} \tag{11.10}$$

が存在するとき、A は X の変形縮体であるという。

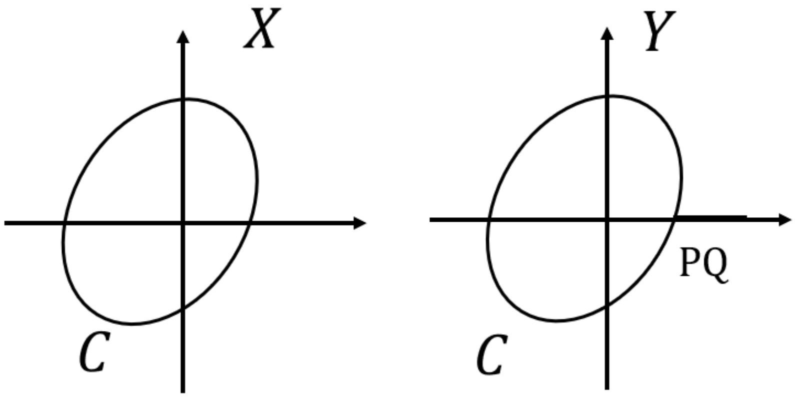

図 11　ホモトピー同値な空間

このような空間の場合は線分 PQ の部分を 1 つの点 P に写して、円周上の点はそのまま写すような写像を考えればよい。これからわかるように、位相空間 X とその変形縮体 A は同じホモトピーでありそれぞれが作るホモトピー群に対して

$$\pi_1(X, a) \simeq \pi_1(A, a) \quad (a \in A) \tag{11.11}$$

とかく。このことを用いると変形縮体の基本群からほかの空間の基本群を容易に求めることができるようになる。

（例）X を n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$、Y を 1 点 $\{O\}$ とする。このとき、Y は X の変形縮体であることを示す。これを示すためにホモトピーとして

$$H\colon \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \tag{11.12}$$
$$H(x,t) = tx \quad (t \in [0,1], x \in \mathbb{R}^n) \tag{11.13}$$

をとる。このホモトピーによって Y は X の変形縮体であることはすぐにわかる。また、Y のホモトピー群は $\pi_1(\{O\}, O)$ でありこれは自明なホモトピー群である。このことから、X のホモトピー群も自明であることがわかる。すなわち、

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, O) = 0 \tag{11.14}$$

このようにして、基本群を簡単に調べることができるようになる。

11.2　欠陥の分類

　今までやってきたホモトピーの話を少し応用してみる。結晶は周期的な原子配列を持つ。完璧に規則的に原子が並んでいるような結晶を完全結晶と呼ぶ。しかし、現実の結晶には**格子欠陥**と呼ばれる格子の幾何学的な乱れが存在する。点欠陥、転位、回位、粒界面など。格子欠陥はその数が少しであっても物理的性質に大きな影響を与える。欠陥を数学的に扱うために**秩序パラメータ**と呼ばれる量を用いる。また、扱っている媒質のことを**秩序媒質**という。この秩序媒質の中に点、線、面状の欠陥が存在する。

秩序パラメータ

３次元空間における線状の欠陥は秩序パラメータの 1 次元ホモトピー群を用いて分類され、点状の欠陥は 2 次元ホモトピー群を用いて分類される。同様にして、２次元の点欠陥は基本群を用いて分類できる。まず、秩序パラメータを数学的に記述することから考える。秩序物質が占める空間を X、秩序パラメータ空間を M で表す。X, M は位相空間である。
欠陥は点、線、面のように X の部分集合 Σ として存在する。秩序パラメータは写像

$$f : X - \Sigma \to M \tag{11.15}$$

によって定義される。つまり、欠陥を取り除いて残る空間が位相的にどんな空間であるかを考えようとしている。欠陥がない様子は Σ が空集合であることに対応する。欠陥の次元が物理空間よりも低いことは明らかである。

位相的安定性

ここで考える安定性とはエネルギーなどとは関係ないものである。媒質の次元を d、欠陥の次元を m とする。このとき、欠陥はホモトピー群

$$\pi_n(M, x_0) \qquad (n = d - M - 1) \tag{11.16}$$

を調べることで分類することができる。もし、$\pi_n(M, x_0) = 0$、すなわち、ホモトピー群が単位元だけからなる自明な群ならば、その欠陥は欠陥のない状態に変形できるので**位相的に不安定である**と言われる。例を使って説明していく。
（例）**２次元の平面スピン**　秩序媒質は $\mathbb{R}^2$ の領域でその各点には大きさが 1 のスピンベクトル $\boldsymbol{S}$

が存在する。$S(\boldsymbol{r})$ は $\mathbb{R}^2$ 上で任意の方向を向き、欠陥のある Σ を除き連続で関数ある。このことから、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ を単位直交ベクトルとして

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{u}\cos\phi(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}\sin\phi(\boldsymbol{r}) \tag{11.17}$$

と書くことができる。秩序パラメータ $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ が場所によらず一定のとき、スピンベクトルは各点で同じ方向を向いておりこれは、強磁性状態を記述していることに対応する。
追記 2019/4/16　この秩序パラメータによる写像は原点を始点とする長さ 1 のベクトルを作るもの。そうしたとき、この原点を始点とする単位ベクトルの動きによって巻き数を数えることができる。これがやりたかったこと（と思われる）。
円 S^1 の基本群は整数 $\mathbb{Z}_1$ と同型である。

$$\pi_1(S^1)=\mathbb{Z} \tag{11.18}$$

この数学公式と 2 次元の平面スピンの状態の分類がどのように関係するか説明する。
媒質中の点 P に孤立した点欠陥があり、それを囲む閉路を C とする。

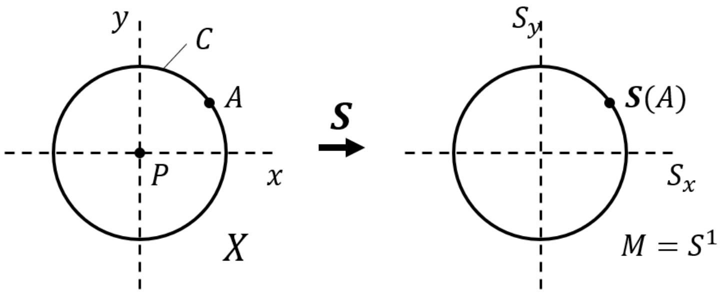

図 12　物理空間 X とそれに対応する秩序パラメータ空間

点 A が閉路 C 上を 1 周するとき、$\boldsymbol{S}(A)$ は秩序パラメータ空間でどのように変化するか。この様子をみるために、スピンベクトルを C 上に描く。

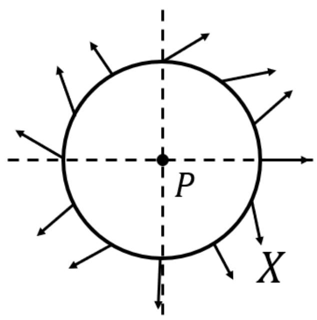

図 13　物理空間 X におけるスピンベクトルの様子

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ は位置 $\boldsymbol{r}$ の連続関数であるから閉曲線に沿って 1 周する角度変化は 2π の整数倍 $2\pi n$ でなければならない。なぜなら、向きを含む連続関数である以上もとの場所に戻ったとき初めの状態と一致しなければならず、そのような制限を課すと矢印の回転は 2π の整数倍となるから。さらに、n

は整数という離散量なので C の大きさ、形が連続的に変わっても n の値は変化しない。したがって、C が点 P を囲む半径 ε の円周に縮んでいくとき、1 周の時のスピンベクトルの角度変化はそのまま変わらない。このことを数学的に表すのが

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \tag{11.19}$$

である。これは、スピンの配位状態が $\mathbb{Z}$ に対応してそれぞれ存在しているということを表す。

第 11 回 2019/4/15 ノート

12　多様体上の積分

12.1　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ での各種積分

$$\text{線積分} \qquad \int_C (Pdx + Qdy + Rdz) \tag{12.1}$$

$$\text{面積分} \qquad \iint_S (Adydz + Bdzdx + Cdxdy) \tag{12.2}$$

$$\text{体積積分} \qquad \iiint_V fdxdydz \tag{12.3}$$

はすでに習っている。この章では微分形式 ω を多様体 M 上で積分することについて考える。このとき、その積分を

$$\int_M \omega \tag{12.4}$$

と書く。この一般化とともに、次のことを示す。ベクトル解析にける積分定理

$$\text{(1) ストークスの定理} \tag{12.5}$$

$$\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{12.6}$$

$$\text{(2) グリーンの定理} \tag{12.7}$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A} dV = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{12.8}$$

等は一般化されたストークスの定理

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \tag{12.9}$$

として統一的に理解できる。

12.2　ユークリッド空間での線積分

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ での線積分を微分形式の復習と合わせてみていく。座標が $\{x^1, \ldots, x^n\}$ であるような $\mathbb{R}^n$ の領域 U 上での 1-形式 を ω とする。1-形式 の集合は n 次元ベクトル空間を作るから

$$\omega = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \cdots + a_n dx^n \tag{12.10}$$

となるような、関数 $a_i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ が存在する。
$\mathbb{R}^n$ の中での線積分を考えるから $\mathbb{R}^n$ 中の曲線が必要である。このとき、曲線を表すにはパラメータを用いるのが便利である。領域 U 内の曲線 γ のパラメータ表示を写像

$$\phi : t \in [0:1] \longmapsto (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)) \tag{12.11}$$

で表す。曲線 γ 上での 1-形式 ω の積分

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \cdots + a_n dx^n) \tag{12.12}$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(a_1(\phi(t)) \frac{dx^1}{dt} + a_2(\phi(t)) \frac{dx^2}{dt} + \cdots + a_n(\phi(t)) \frac{dx^n}{dt} \right) dt \tag{12.13}$$

と定義する。これは、最後の積分を最初の左辺で書くということを表す。
一般論が見通しがよくなるために積分 (**??**) を書き換える。$\mathbb{R}^n$ 上の 1-形式 を $\mathbb{R}$ 上の 1-形式 にする写像を

$$\phi^* : F^1(\mathbb{R}^n) \to F^1(\mathbb{R}) \tag{12.14}$$

とする。これは第 2 章の写像の特別な場合である。
復習
V 上の 1-形式 を別の空間 U 上の 1-形式 にする写像として ϕ^* が定義された：

$$\phi^* : F^1(V) \to F^1(U) \tag{12.15}$$

これを $V \to \mathbb{R}^n, U \to \mathbb{R}$ と読み換える。

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i \tag{12.16}$$

に対して

$$\phi^* \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(\phi(t)) \frac{dx^i}{dt} dt \tag{12.17}$$
$$= f(t) dt \tag{12.18}$$

と書いた。よって、(**??**) は

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 \phi^* \omega \tag{12.19}$$

となる。さらに、(**??**) を書き直してみる。$\Delta^1 = [0:1]$ とおく。これは、標準 1-単体 と呼ばれる（あとで説明する）。
写像 ϕ にある Δ^1 も像が曲線 γ であるので $\phi(\Delta^1) = \gamma$ と書くと (**??**) は

$$\int_{\phi(\Delta^1)} \omega = \int_{\Delta^1} \phi^* \omega \tag{12.20}$$

と表される。これは単なる書き換えであることに注意する。しかし、(**??**) はより見やすい形となっている。
（例）　曲線 γ に対し、線積分

$$\int_\gamma (x^1 dx^1 - x^2 dx^1) \tag{12.21}$$

を求める。1-form として

$$\omega = -x^2 dx^1 + x^1 dx^2 \tag{12.22}$$

積分領域として $\Delta^1 = [0,1]$、積分曲線として

$$\phi(t) = (x^1(t), x^2(t)) = (\cos \pi t, \sin \pi t) \tag{12.23}$$

をとる。このとき、

$$\phi^* \omega = f(t) dt, \quad f(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{dx^i}{dt} \tag{12.24}$$

を用いるために少し計算を進めると

$$\begin{aligned}
\phi^* \omega &= \left(-x^2 \frac{dx^1}{dt} + x^1 \frac{dx^1}{dt} \right) dt && (12.25) \\
&= \dots && (12.26) \\
&= \pi dt && (12.27)
\end{aligned}$$

したがって、

$$\int_\gamma \omega = \int_{\phi(\Delta^1)} \phi^* \omega = \int_0^1 \pi dt = \pi \tag{12.28}$$

と計算される。

12.3 向きづけられた多様体

多様体 M 上での微分形式の積分は、M が向きづけ可能なときだけ定義される。そこで、多様体の向きを調べることにする。

M を単連結[*1]微分可能 n 次元多様体とする。M 上の 2 つの重なり合う局所座標近傍 U と V を考える。U 上には局所座標系 $\{x^1, \dots, x^n\}$ があり、V には局所座標系 $\{y^1, \dots, y^n\}$ がある。U での接空間の基底を $\{e_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$、$V$ での接空間の基底を $\{\tilde{e}_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial y^\mu}\}$

U と V の共通部分にある点 P において接空間 $T_P(M)$ は基底 $\{e_\mu\}$ によって張られていると考えていると考えてもよい。$\{\tilde{e}_\mu\}$ によって張られていると考えてもよい。基底間の変換は

$$\tilde{e}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} e_\nu = \left(\sum_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} e_\nu \right) \tag{12.29}$$

で与えられる。アインシュタインの縮約記法を用いている。

向き可能

多様体 M が**向きづけ可能 (orientable)** とは重なり合う局所座標近傍 U と V に対して、

$$J \equiv \det \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \right) > 0 \quad (1 \le \mu, \nu \le n) \tag{12.30}$$

[*1] 単連結とは、弧状連結であり、自明な群をもつ多様体のこと

となるような U, V の局所座標系 $\{x^\mu\}, \{y^\mu\}$ が存在することである。
2019/4/15 追記
この条件ではまだ定義ができていないように見えるので少し修正を加える。向き付け可能とは、重なり合う 2 つの局所座標近傍に対して

$$J\det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right) < 0 \tag{12.31}$$

となるような U, V の局所座標系 $\{x^\mu\}, \{y^\mu\}$ が存在しないことである。
このようにして多様体に対して向きという概念を導入すると、多様体の上において積分を考えることができる（多様体上の微分形式に対して積分を定義できる）。
ここは少し複雑で、多様体において積分を定義するためにまずは積分の結果が座標の取り方に依存しないということが前提となる要請である。また、多様体の積分を普通の重積分で定義したいという考えがある。さらに、各座標近傍に設定されている座標系の間の変換則がすでに定まっているとする。このとき、多様体上での積分を重積分によって定義することで、ヤコビアンが正という条件が導かれる。これが多様体の向き付け可能性の定義にもかかわってくる。
（例）
n 次元ユークリッド空間は向き付け可能
メビウスの帯は向き付け可能
クラインの壺は向き付け可能
体積要素
n 多様体 M が向き付け可能ならば、M 上のどの点においても 0 とならない n-形式 がある。この n-形式 を

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{12.32}$$

として、体積要素 (volume element)、または体積形式と呼ぶ。体積要素 (**??**) が U で与えられてるとして U に重なる V において V において $\{y^n\}$ で表すと

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{12.33}$$

$$= \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^\alpha} dy^\alpha\right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^\beta} dy^\beta\right) \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial x^n}{\partial y^\gamma} dy^\gamma\right) \tag{12.34}$$

$$= \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial x^1}{\partial y^n} dy^n\right) \wedge \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \cdots + \frac{\partial x^2}{\partial y^n} dy^n\right) \wedge \ldots \tag{12.35}$$

$$= \ldots \quad \text{（相当に面倒な形になる）} \tag{12.36}$$

$$= \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \cdots \wedge dy^n \tag{12.37}$$