线性代数知识点

1、行列式

1. n行列式共有n^2个元素，展开后有$n!$**项**，可分解为2^n行列式；

2. 代数余子式的性质：
   ①、A_{ij}和a_{ij}的大小无关；
   ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
   ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为$|A|$；

3. 代数余子式和余子式的关系：$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$　　　　$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

4. 设n行列式D：
   将D上、下翻转或左右翻转，所得行列式为D_1，则$D_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D顺时针或逆时针旋转90°，所得行列式为D_2，则$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$；
   将D主对角线翻转后（转置），所得行列式为D_3，则$D_3=D$；
   将D主副角线翻转后，所得行列式为D_4，则$D_4=D$；

5. 行列式的重要公式：
   ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
   ②、副对角行列式：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ③、上、下三角行列式（$|$◥$|=|$◣$|$）：主对角元素的乘积；
   ④、$|$◤$|$和$|$◢$|$：副对角元素的乘积$\times(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；
   ⑤、拉普拉斯展开式：$\begin{vmatrix}A & O\\ C & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & C\\ O & B\end{vmatrix}=|A||B|$、$\begin{vmatrix}C & A\\ B & O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}|A||B|$
   ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
   ⑦、特征值；

6. 对于n阶行列式$|A|$，恒有：$|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$，其中$S_k$为$k$阶主子式；

7. 证明$|A|=0$的方法：
   ①、$|A|=-|A|$；
   ②、反证法；
   ③、构造齐次方程组$Ax=0$，证明其有非零解；

④、利用秩，证明$r(A) < n$；

⑤、证明0是其特征值；

2、矩阵

1. A是n阶可逆矩阵：

$\Leftrightarrow |A| \neq 0$（是非奇异矩阵）；

$\Leftrightarrow r(A) = n$（是满秩矩阵）

$\Leftrightarrow A$的行（列）向量组线性无关；

$\Leftrightarrow$齐次方程组$Ax = 0$有非零解；

$\Leftrightarrow \forall b \in R^n$，$Ax = b$总有唯一解；

$\Leftrightarrow A$与E等价；

$\Leftrightarrow A$可表示成若干个初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow A$的特征值全不为0；

$\Leftrightarrow A^T A$是正定矩阵；

$\Leftrightarrow A$的行（列）向量组是R^n的一组基；

$\Leftrightarrow A$是R^n中某两组基的过渡矩阵；

2. 对于n阶矩阵A：$AA^* = A^* A = |A| E$ **无条件恒**成立；

3. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$　　$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$　　$(A^*)^T = (A^T)^*$

$(AB)^T = B^T A^T$　　$(AB)^* = B^* A^*$　　$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4. 矩阵是表格，推导符号为波浪号或箭头；行列式是数值，可求代数和；

5. 关于分块矩阵的重要结论，其中均A、B可逆：

若$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$，则：

Ⅰ、$|A| = |A_1||A_2| \cdots |A_s|$；

Ⅱ、$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$；

②、$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（主对角分块）

③、$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$；（副对角分块）

④、$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

⑤、$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$；（拉普拉斯）

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个$m\times n$矩阵A，总可经过初等变换化为标准形，其标准形是唯一确定的：$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$；

等价类：所有与A等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；

对于同型矩阵A、B，若$r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \sim B$；

2. 行最简形矩阵：

①、只能通过初等行变换获得；

②、每行首个非 0 元素必须为 1；

③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

①、　若$(A,E)\overset{r}{\sim}(E,X)$，则$A$可逆，且$X=A^{-1}$；

②、对矩阵(A,B)做初等行变化，当A变为E时，B就变成$A^{-1}B$，即：$(A,B)\overset{c}{\sim}(E,A^{-1}B)$；

③、求解线形方程组：对于n个未知数n个方程$Ax=b$，如果$(A,b)\overset{r}{\sim}(E,x)$，则$A$可逆，且$x=A^{-1}b$；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，左乘矩阵$A$，$\lambda_i$乘$A$的各行元素；右乘，$\lambda_i$乘$A$的各列元素；

③、对调两行或两列，符号$E(i,j)$，且$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$，例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$；

④、倍乘某行或某列，符号$E(i(k))$，且$E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$，例如：$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且 $E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1 & & k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & -k\\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

5. 矩阵秩的基本性质：

①、$0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

②、$r(A^T)=r(A)$；

③、若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

④、若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

⑤、$\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑥、$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；（※）

⑦、$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；（※）

⑧、如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，则：（※）

Ⅰ、B 的**列**向量全部是齐次方程组 $AX=0$ 解（转置运算后的结论）；

Ⅱ、$r(A)+r(B)\le n$

⑨、若 A、B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$；

6. 三种特殊矩阵的方幂：

①、秩为 1 的矩阵：一定可以分解为**列矩阵（向量）**$\times$**行矩阵（向量）**的形式，再采用结合律；

②、型如 $\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 的矩阵：利用二项展开式；

二项展开式：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^mb^{n-m}$；

注：Ⅰ、$(a+b)^n$ 展开后有 $n+1$ 项；

Ⅱ、$C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$　　$C_n^0=C_n^n=1$

Ⅲ、组合的性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$　　$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$　　$\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$　　$rC_n^r=nC_{n-1}^{r-1}$；

③、利用特征值和相似对角化：

7. 伴随矩阵：

①、伴随矩阵的秩：$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$；

②、伴随矩阵的特征值：$\dfrac{|A|}{\lambda}$ $(AX=\lambda X, A^*=|A|A^{-1}\Rightarrow A^*X=\dfrac{|A|}{\lambda}X)$；

③、$A^*=|A|A^{-1}$、$|A^*|=|A|^{n-1}$

8. 关于A矩阵秩的描述：

①、$r(A)=n$，A中有n阶子式不为 0，$n+1$阶子式全部为 0；（两句话）

②、$r(A)<n$，A中有n阶子式全部为 0；

③、$r(A)\ge n$，A中有n阶子式不为 0；

9. 线性方程组：$Ax=b$，其中A为$m\times n$矩阵，则：

①、m与方程的个数相同，即方程组$Ax=b$有m个方程；

②、n与方程组得未知数个数相同，方程组$Ax=b$为n元方程；

10. 线性方程组$Ax=b$的求解：

①、对增广矩阵B进行初等行变换（**只能使用初等行变换**）；

②、齐次解为对应齐次方程组的解；

③、特解：自由变量赋初值后求得；

11. 由n个未知数m个方程的方程组构成n元线性方程：

①、$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{nm}x_n=b_n \end{cases}$；

②、$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\Leftrightarrow Ax=b$（向量方程，$A$为$m\times n$矩阵，$m$个方程，$n$个未知数）

③、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\beta$（全部按列分块，其中$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$）；

④、$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\beta$（线性表出）

⑤、有解的充要条件：$r(A)=r(A,\beta)\le n$（n为未知数的个数或维数）

4、向量组的线性相关性

1. m个n维列向量所组成的向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成$n\times m$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$；

m个n维行向量所组成的向量组B：$\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_m^T$构成$m\times n$矩阵$B=\begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix}$；

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应；

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有、无非零解；（齐次线性方程组）
②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$ 是否有解；（线性方程组）
③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 是否有解；（矩阵方程）

3. 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是：齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解；（P_{101} 例 14）

4. $r(A^TA)=r(A)$；（P_{101} 例 15）

5. n 维向量线性相关的几何意义：
①、α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$；
②、α,β 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β 坐标成比例或共线（平行）；
③、α,β,γ 线性相关 $\Leftrightarrow$ α,β,γ 共面；

6. 线性相关与无关的两套定理：
若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1}$ 必线性相关；
若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$ 必线性无关；（向量的个数加加减减，二者为对偶）
若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量，构成 n 维向量组 B：

若 A 线性无关，则 B 也线性无关；反之若 B 线性相关，则 A 也线性相关；（向量组的维数加加减减）
简言之：无关组延长后仍无关，反之，不确定；

7. 向量组 A（个数为 r）能由向量组 B（个数为 s）线性表示，且 A 线性无关，则 $r\le s$；
向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A)\le r(B)$；
向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$\Leftrightarrow AX=B$ 有解； $\Leftrightarrow r(A)=r(A,B)$

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)=r(A,B)$

8. 方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在有限个初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots,P_l$，使 $A=P_1P_2\cdots P_l$；

①、矩阵行等价：$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B$（左乘，$P$ 可逆）$\Leftrightarrow Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解

②、矩阵列等价：$A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B$（右乘，$Q$ 可逆）；

③、矩阵等价：$A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B$（$P$、$Q$ 可逆）；

9. 对于矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$：

①、若 A 与 B 行等价，则 A 与 B 的行秩相等；
②、若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，A 与 B 的任何对应的列向量组有相同的线性相关性；
③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；
④、矩阵 A 的行秩等于列秩；

10. 若 $A_{m\times s}B_{s\times n}=C_{m\times n}$，则：

①、C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示，B 为系数矩阵；
②、C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示，A^T 为系数矩阵；（转置）

11. 齐次方程组 $Bx=0$ 的解一定是 $ABx=0$ 的解，**【考试中可以直接作为定理使用，而无需证明】**
①、$ABx=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $Bx=0$ 只有零解；
②、$Bx=0$ 有非零解 $\Rightarrow$ $ABx=0$ 一定存在非零解；

12. 设向量组 $B_{n\times r}:b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可由向量组 $A_{n\times s}:a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性表示为：

$$(b_1,b_2,\cdots,b_r)=(a_1,a_2,\cdots,a_s)K \quad (B=AK)$$

其中 K 为 $s\times r$，且 A 线性无关，则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K)=r$；（B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性）

（必要性：$\because r=r(B)=r(AK)\le r(K), r(K)\le r, \therefore r(K)=r$；充分性：反证法）

注：当 $r=s$ 时，K 为方阵，可当作定理使用；

13. ①、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $Q_{n\times m}$，$AQ=E_m$ $\Leftrightarrow r(A)=m$、Q 的列向量线性无关；

②、对矩阵 $A_{m\times n}$，存在 $P_{n\times m}$，$PA=E_n$ $\Leftrightarrow r(A)=n$、P 的行向量线性无关；

14. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立；（定义）

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=0$ 有非零解，即 $Ax=0$ 有非零解；

$\Leftrightarrow$ $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$，系数矩阵的秩小于未知数的个数；

15. 设 $m\times n$ 的矩阵 A 的秩为 r，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为：$r(S)=n-r$；

16. 若η^*为$Ax=b$的一个解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为$Ax=0$的一个基础解系，则$\eta^*,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关；

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵$\Leftrightarrow A^TA=E$或$A^{-1}=A^T$（定义），性质：
   ①、A的列向量都是单位向量，且两两正交，即$a_i^Ta_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots n)$；
   ②、若A为正交矩阵，则$A^{-1}=A^T$也为正交阵，且$|A|=\pm 1$；
   ③、若A、B正交阵，则AB也是正交阵；
   注意：求解正交阵，千万不要忘记**施密特正交化**和**单位化**；

2. 施密特正交化：$(a_1,a_2,\cdots,a_r)$
   $b_1=a_1$；
   $b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}\cdot b_1$ ……… $b_r=a_r-\frac{[b_1,a_r]}{[b_1,b_1]}\cdot b_1-\frac{[b_2,a_r]}{[b_2,b_2]}\cdot b_2-\cdots-\frac{[b_{r-1},a_r]}{[b_{r-1},b_{r-1}]}\cdot b_{r-1}$；

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；
   对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、A与B等价 $\Leftrightarrow$ A经过初等变换得到B；
   $\Leftrightarrow PAQ=B$，P、Q可逆；
   $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$，$A$、$B$同型；
   ②、A与B合同 $\Leftrightarrow C^TAC=B$，其中可逆；
   $\Leftrightarrow x^TAx$与x^TBx有相同的正、负惯性指数；
   ③、A与B相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP=B$；

5. 相似一定合同、合同未必相似；
   若C为正交矩阵，则$C^TAC=B\Rightarrow A\sim B$，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A为对称阵，则A为二次型矩阵；

7. n元二次型x^TAx为正定：
   $\Leftrightarrow A$的正惯性指数为n；
   $\Leftrightarrow A$与E合同，即存在可逆矩阵C，使$C^TAC=E$；
   $\Leftrightarrow A$的所有特征值均为正数；
   $\Leftrightarrow A$的各阶顺序主子式均大于 0；
   $\Rightarrow a_{ii}>0,|A|>0$；（**必要条件**）

第一章

随机事件

互斥对立加减功，条件独立乘除清；

全概逆概百分比，二项分布是核心；

必然事件随便用，选择先试不可能。

第二、三章

一维、二维随机变量

1）离散问模型，分布列表清，边缘用加乘，条件概率定联合，独立试矩阵

2）连续必分段，草图仔细看，积分是关键，密度微分算

3）离散先列表，连续后求导；分布要分段，积分画图算

第五、六章

数理统计、参数估计

正态方和卡方出，卡方相除变 F，

若想得到 t 分布，一正 n 卡再相除。

样本总体相互换，矩法估计很方便；

似然函数分开算，对数求导得零蛋；

区间估计有点难，样本函数选在前；

分位维数惹人嫌，导出置信 U 方甜。

第七章

假设检验

检验均值用 U-T，分位对称别大意；

方差检验有卡方，左窄右宽不稀奇；

不论卡方或 U-T，维数减一要牢记；

代入比较临界值，拒绝必在否定域！