



Indicaciones

Construcción de una montaña rusa sección 3.1 del Stewart

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente de ascenso 0.8 y la de descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme, no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que se desea que el trayecto sea uniforme, no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo que se desea que los segmentos de recta L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. Para simplificar las ecuaciones, decide situar el origen en P.

Parte 1.

a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a , b y c que aseguren que el trayecto sea suave en los puntos de transición

Sabemos que la curva $f(x)$ debe ser tangente a L_1 y L_2 , por lo que necesitamos su derivada.

$$f'(x) = 2ax + b$$

De aquí, podemos decir que $f'(x)$ evaluada en 0 y 100 (por la distancia horizontal de 100ft) debe dar $4/5$ y $-8/5$ respectivamente, para C , sabemos que es equivalente a la posición vertical vértice de f , es decir, el punto más alto, donde la pendiente tangente es igual a 0

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = b$$

$$x = \frac{b}{2a}$$

Y para obtener c , igualamos $ax + by + c$ con 0 y lo evaluamos al mismo tiempo con 0, esto por que sabemos que pasa por el punto (0,0)

$$\text{Ec. 1. } 2a(0) + b = \frac{4}{5}$$

$$\text{Ec. 2. } 2a(100) + b = -\frac{8}{5}$$

$$\text{Ec. 3. } a(0)^2 + b(0) + c = 0$$

b) Resuelva las ecuaciones del inciso a para a, b y c para hallar una fórmula para f(x)

Ec. 1.

$$\begin{aligned}2a(0) + b &= \frac{4}{5} \\ b &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Ec. 2.

$$\begin{aligned}2a(100) + b &= -\frac{8}{5} \\ 2a(100) &= -\frac{8}{5} - \underbrace{b}_{\text{Sustituimos}} \\ 200a &= -\frac{8}{5} - \frac{4}{5} \\ a &= -\frac{12}{5 \cdot 200} \\ a &= -\frac{3}{250}\end{aligned}$$

Ec. 3.

Sustituimos en $f(0)=0$ para obtener c.

$$\begin{aligned}-\frac{3}{250}(0)^2 + \frac{4}{5}(0) + c &= 0 \\ c &= 0\end{aligned}$$

\therefore podemos concluir que $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = -\frac{3}{250}x^2 + \frac{4}{5}x$$

c) Dibuje L_1 , $f(x)$ y L_2 para verificar gráficamente que las transiciones sean suaves.

tenemos $f(x)$ pero necesitamos obtener L_1 y L_2 .

Ec. $L_1(x)$.

De la forma de la recta $y=mx+b$, tenemos que $m = 4/5$ y como la intersección en el eje y es en 0, $b = 0$.

$\therefore L_1(x) = \frac{4}{5}x$.

Ec. $L_2(x)$.

Necesitamos un punto por el que pase L_2 , y sabemos que tiene un punto que coincide con $f(x)$ cuando x está evaluado en 100, por tanto, resolvemos $f(100)$.

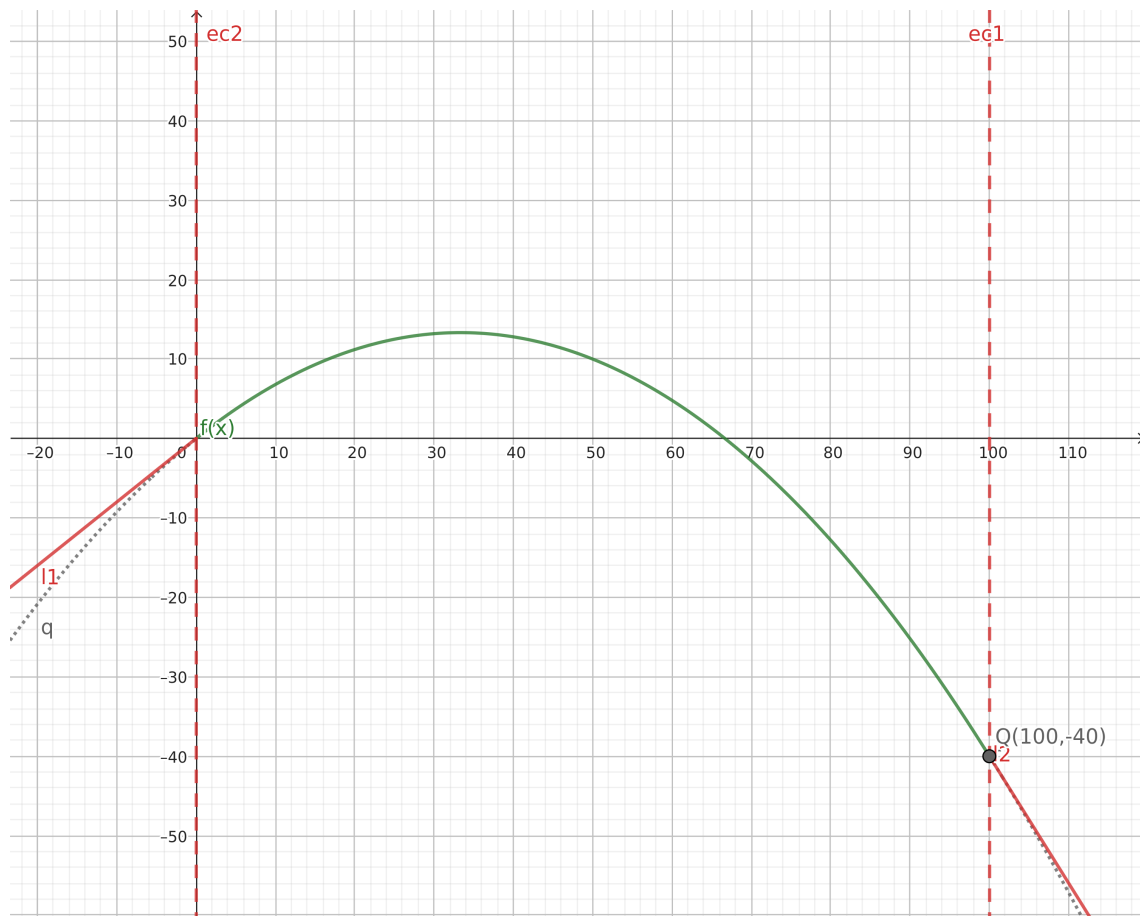
$$\begin{aligned}f(100) &= \underbrace{-\frac{3}{250}(100)^2 + \frac{4}{5}(100)}_{\text{Resolviendo con calculadora.}} \\ f(100) &= -40\end{aligned}$$

Ahora teniendo el punto (100,-40) que es Q, utilizamos la fórmula punto pendiente para obtener L_2 .

$$\begin{aligned} y + 40 &= -\frac{8}{5}(x - 100) \\ y + 40 &= -\frac{8}{5}x + 8(20) \\ y &= -\frac{8}{5}x + 160 - 40 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 120 \end{aligned}$$

$$\therefore L_2(x) = -\frac{8}{5}x + 120.$$

Graficando L_1 , $f(x)$ y L_2 con geogebra:



d) Encuentre la diferencia en la elevación entre P y Q

Sabemos que P está en el punto (0,0) y Q en (100,-40).

\therefore La diferencia de altura es de 40ft

0.1 Parte 2.

La solución del problema 1 puede *parecer* suave, pero es posible que no *sienta* lo suave debido a que la pieza definida como función [consistente en $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$; y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente, usted decide mejorar su diseño utilizando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leq x \leq 90$ y conectarlo con las

funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \text{ Para: } 0 \leq x < 10$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \text{ Para: } 90 \leq x < 100$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones con 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.

Ec. 1 $L_1(0) = g(0)$

Ec. 2 $g(10) = q(10)$

Ec. 3 $q(90) = h(90)$

Ec. 4 $h(100) = L(100)$

Ec. 5 $L_1'(0) = g'(0)$

Ec. 6 $g'(10) = q'(10)$

Ec. 7 $q'(90) = h'(90)$

Ec. 8 $h'(100) = L'(100)$

Ec. 9 $L_1(0) = g(0)$

Ec. 10 $g(10) = q(10)$

Ec. 11 $q(90) = h(90)$

Ec. 12 $h(100) = L(100)$

De aquí, obtenemos primero las derivadas y segundas derivadas de todas las ecuaciones.

$$L_1(x) = \frac{4}{5}x$$

$$L_1'(x) = \frac{4}{5}$$

$$L_1''(x) = 0$$

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$$

$$g'(x) = 3kx^2 + 2lx + m$$

$$g''(x) = 6kx + 2l$$

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

$$q'(x) = 2ax + b$$

$$q''(x) = 2a$$

$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$$

$$h'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

$$h''(x) = 6px + 2q$$

$$L_2(x) = -\frac{8}{5}x + 120$$

$$L_2'(x) = -\frac{8}{5}$$

$$L_2''(x) = 0$$

De aquí, sustituyendo las funciones en el sistema de ecuaciones y evaluando x en sus respectivos puntos, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones de 11 incógnitas.

$$\begin{aligned}
 1000k + 100l + 10m + n &= 100a + 10b + c \\
 300k + 20l + m &= 20a + b \\
 60k + 2l &= 2a \\
 30k + l &= a \\
 729000p + 8100q + 90r + s &= 8100a + 90b + c \\
 24300p + 180q + r &= 180a + b \\
 540p + 2q &= 2a \\
 270p + q &= a \\
 n &= 0 \\
 m &= \frac{4}{5} \\
 l &= 0 \\
 1000000p + 10000q + 100r + s &= -40 \\
 30000p + 200q + r &= -\frac{8}{5} \\
 300p + q &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

b) Resuelva las ecuaciones del inciso a) con un sistema algebraico computarizado para encontrar las fórmulas para q(x), g(x) y h(x).

Utilizando python:

```

from sympy import symbols, Eq, solve
# Definir las incógnitas
a, b, c, k, l, m, n, p, q, r, s = symbols('a b c k l m n p q r s')
# Ecuaciones según las condiciones dadas
eq1 = Eq(1000*k + 100*l + 10*m + n, 100*a + 10*b + c)
eq2 = Eq(300*k + 20*l + m, 20*a + b)
eq3 = Eq(60*k + 2*l, 2*a)
eq4 = Eq(30*k + l, a)
eq5 = Eq(729000*p + 8100*q + 90*r + s, 8100*a + 90*b + c)
eq6 = Eq(24300*p + 180*q + r, 180*a + b)
eq7 = Eq(540*p + 2*q, 2*a)
eq8 = Eq(270*p + q, a)
eq9 = Eq(n, 0)
eq10 = Eq(m, 4/5)
eq11 = Eq(l, 0)
eq12 = Eq(1000000*p + 10000*q + 100*r + s, -40)
eq13 = Eq(30000*p + 200*q + r, -8/5)
eq14 = Eq(300*p + q, 0) # Resolver el sistema de ecuaciones
solution = solve((eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8, eq9, eq10, eq11, eq12, eq13, ...
eq14), (a, b, c, k, l, m, n, p, q, r, s))
# Mostrar la solución
solution

```

que nos arroja:

```
{a: -0.013333333333333333,
b: 0.9333333333333333,
c: -0.4444444444444444,
k: -0.000444444444444444,
l: 0.0,
m: 0.8000000000000000,
n: 0.0,
p: 0.000444444444444444,
q: -0.1333333333333333,
r: 11.73333333333333,
s: -324.444444444444}
```

Que sustituyendo en las funciones $g(x)$, $q(x)$ y $h(x)$ nos da:

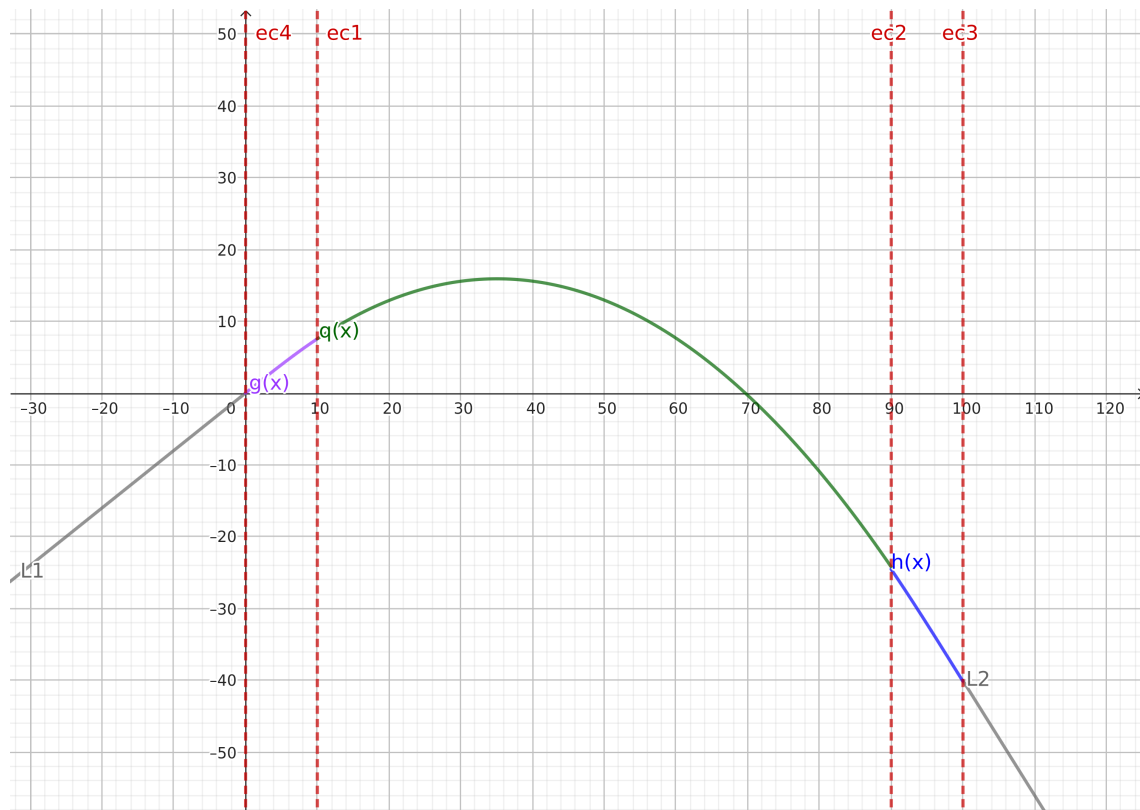
$$g(x) = -0.000444x^3 + 0.8x \text{ cuando } 10 \leq x < 10$$

$$h(x) = 0.000444x^3 - 0.133x^2 + 11.733x - 324.444 \text{ cuando } 90 \leq x < 100$$

$$q(x) = -0.0133x^2 + 0.9333x - 0.4444 \text{ cuando } 10 \leq x < 90$$

c) Dibuje L_1 , $g(x)$, $q(x)$, $h(x)$ y $L_2(x)$ y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso c).

Graficando L_1 , $f(x)$ y L_2 con geogebra:



Aunque a simple vista se vean muy parecidos, es notorio el suavizado que hacen las funciones auxiliares de forma que es muy poco abrupta la transición de ir en línea recta a nuestro ascenso y descenso diseñados para llegar a la segunda recta.

¿Dónde debería un piloto iniciar el aterrizaje? sección 3.4 del Stewart

En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión, que satisface las condiciones siguientes:

- (i) La altura de crucero es h cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.
- (ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.
- (iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.

Establecemos las condiciones para $P(x)$ y la derivada $P'(x)$:

$$\begin{aligned}P(0) &= 0 && \text{(punto de contacto)} \\P(\ell) &= h && \text{(altura inicial)} \\P'(0) &= 0 && \text{(derivada en contacto)} \\P'(\ell) &= 0 && \text{(derivada en inicio)}\end{aligned}$$

Considerando que $x = \ell$, tenemos $P(\ell) = a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + d = h$. De $P(0) = d = 0$. De $P'(0) = c = 0$. Entonces $P(\ell) = a\ell^3 + b\ell^2 = h$ y $P'(\ell) = 3a\ell^2 + 2b\ell = 0$. Ahora empezamos factorizando a la derivada

$$\ell(3a\ell + 2b) = 0$$

y despejamos a b:

$$b = -\frac{3a\ell}{2}$$

En siguiente sustituimos nuestra b en $P(\ell) = h$:

$$\begin{aligned}a\ell^3 + \left(-\frac{3a\ell}{2}\right)\ell^2 &= h \\a\ell^3 - \frac{3a\ell^3}{2} &= h \\a\ell^3 \left(1 - \frac{3}{2}\right) &= h \\-\frac{a\ell^3}{2} &= h \\a &= -\frac{2h}{\ell^3}\end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos a y b en el polinomio:

$$P(x) = -\frac{2h}{\ell^3}x^3 + \frac{3h}{\ell^2}x^2$$

2. Use las condiciones (ii) y (iii) para demostrar que:

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leq k$$

Usamos la condición (ii) (rapidez horizontal constante v) y la condición (iii) (la aceleración vertical no debe exceder k).

La aceleración vertical es la segunda derivada de $P(x)$, y hemos encontrado que:

$$P(x) = -\frac{2h}{\ell^3}x^3 + \frac{3h}{\ell^2}x^2$$

La primera derivada es:

$$P'(x) = -\frac{6h}{\ell^3}x^2 + \frac{6h}{\ell^2}x$$

Y la segunda derivada es:

$$P''(x) = -\frac{12h}{\ell^3}x + \frac{6h}{\ell^2}$$

Evaluamos en $x = \ell$:

$$P''(\ell) = -\frac{12h}{\ell^3}\ell + \frac{6h}{\ell^2} = -\frac{12h}{\ell^2} + \frac{6h}{\ell^2} = -\frac{6h}{\ell^2}$$

Esta es la aceleración vertical en función de x . Sin embargo, debido a que el avión se mueve horizontalmente a velocidad constante v , la aceleración total en función del tiempo es:

$$\text{Aceleración vertical} = P''(x) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = P''(x) \cdot v^2$$

Sustituyendo $P''(\ell)$:

$$\text{Aceleración vertical} = \left(-\frac{6h}{\ell^2}\right)v^2 = -\frac{6hv^2}{\ell^2}$$

Por la condición (iii), sabemos que el valor absoluto de la aceleración vertical no debe exceder k , así que:

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leq k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860 \text{ mi/h}^2$. Si la altitud de crucero de un avión es de 35 000 pies y la rapidez de 300 mi/h , ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?

Para este inciso, usamos la fórmula derivada anteriormente:

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leq k$$

Se nos proporciona $k = 860 \text{ mi/h}^2$, $h = 35,000$ pies, y $v = 300 \text{ mi/h}$. Primero, convertimos la altura h a millas:

$$h = \frac{35,000 \text{ pies}}{5280 \text{ pies}} = 6.6287 \text{ millas}$$

Sustituimos estos valores en la fórmula y despejamos ℓ :

$$\frac{6 \cdot 6.6287 \cdot (300)^2}{\ell^2} = 860$$

Multiplicamos:

$$\frac{6 \cdot 6.6287 \cdot 90,000}{\ell^2} = 860$$
$$\frac{3,579,498}{\ell^2} = 860$$

Despejamos ℓ^2 :

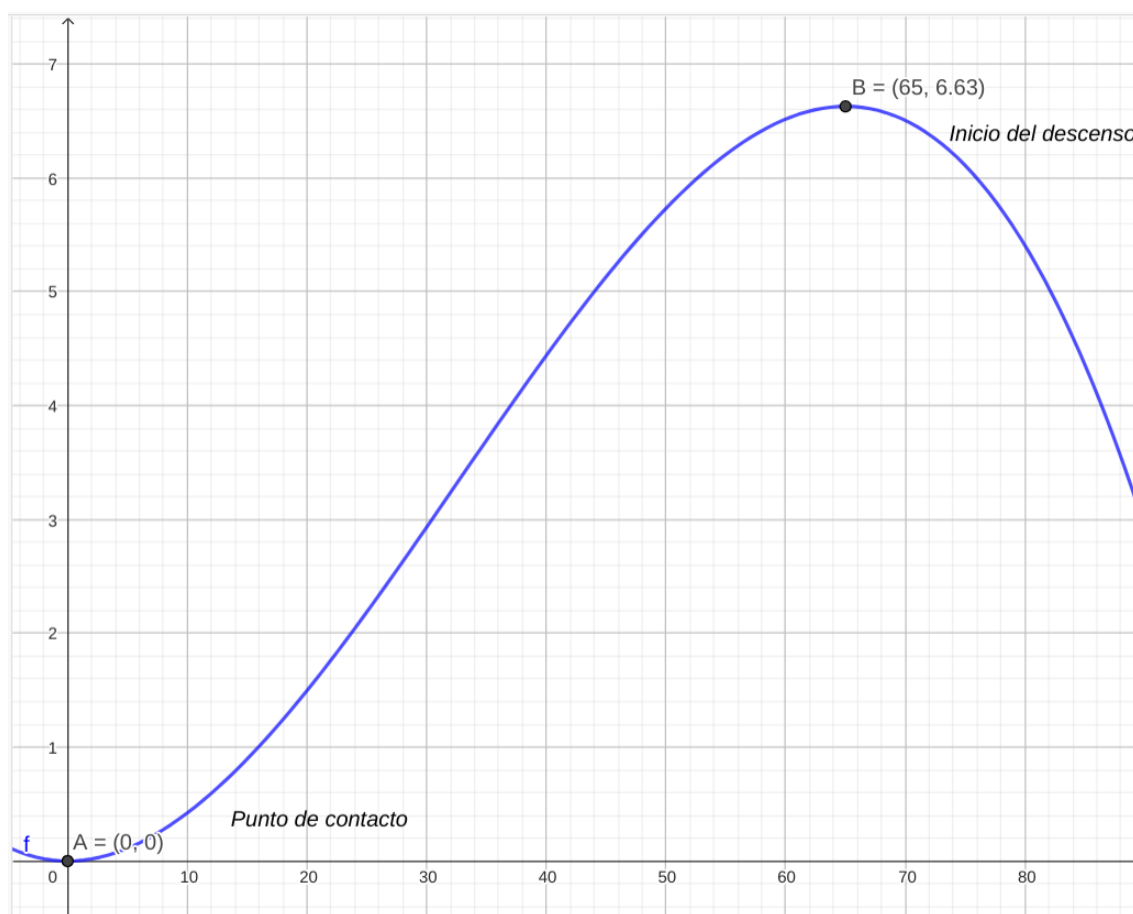
$$\ell^2 = \frac{3,579,498}{860}$$
$$\ell^2 = 4162.20$$

Tomamos la raíz cuadrada:

$$\ell = \sqrt{4162.20} = 64.51 \text{ millas}$$

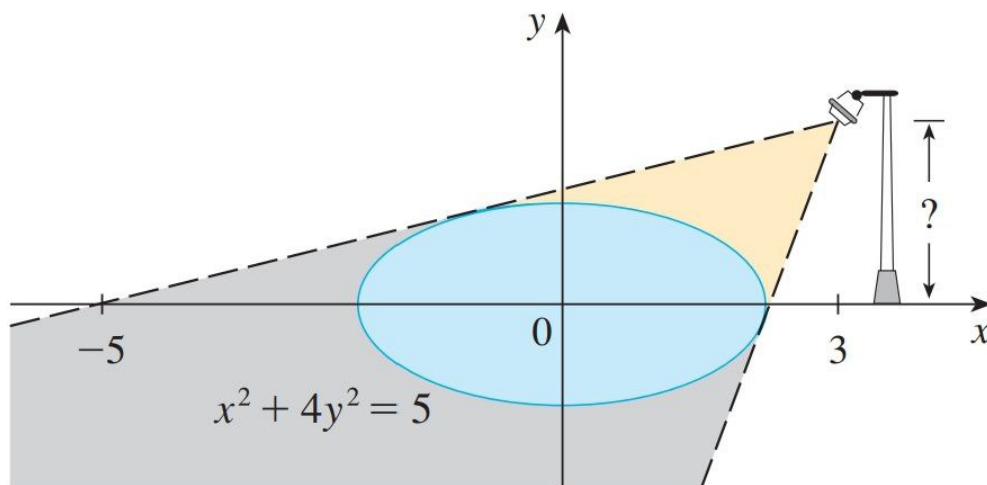
Por lo tanto, el piloto debe iniciar el descenso a 64.51 millas del aeropuerto.

4. Trace la grafica de la trayectoria de aproximación si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.



Ejercicio 80 sección 3.5 del Stewart

En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



Se nos da la ecuación de una elipse:

$$x^2 + 4y^2 = 5$$

Una lámpara está colocada en el punto $(3, h)$ y un punto de intersección de la sombra proyectada se encuentra en $(-5, 0)$. Nuestro objetivo es encontrar el valor de h .

0.2 Paso 1: Ecuación de la recta que conecta los puntos

La pendiente m de la recta que pasa por los puntos $(-5, 0)$ y $(3, h)$ es:

$$m = \frac{h - 0}{3 - (-5)} = \frac{h}{8}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta que conecta estos dos puntos es:

$$y = \frac{h}{8}(x + 5)$$

Paso 2: Sustitución en la ecuación de la elipse

Sabemos que la recta debe intersectar la elipse, por lo que sustituimos la ecuación de la recta $y = \frac{h}{8}(x + 5)$ en la ecuación de la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$:

$$x^2 + 4 \left(\frac{h}{8}(x + 5) \right)^2 = 5$$

Expandiendo el término al cuadrado:

$$x^2 + 4 \left(\frac{h^2}{64}(x + 5)^2 \right) = 5$$

Simplificando:

$$x^2 + \frac{h^2}{16}(x^2 + 10x + 25) = 5$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por 16 para eliminar los denominadores:

$$16x^2 + h^2(x^2 + 10x + 25) = 80$$

Paso 3: Resolver para h

Para resolver h , usamos el hecho de que la recta debe intersectar la elipse. Elegimos el punto $x = 0$ para simplificar el cálculo. Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación:

$$16(0)^2 + h^2(0^2 + 10(0) + 25) = 80$$

Simplificando:

$$25h^2 = 80$$

Despejando h :

$$h^2 = \frac{80}{25} = 3.2$$

Por lo tanto, la altura h es:

$$h = \sqrt{3.2} \approx 1.79$$

Conclusión

La lámpara está colocada aproximadamente a una altura de $h \approx 1.79$ unidades sobre el eje x .

Ejercicio 40 sección 3.1 del Anton-Bivens-Davis

Utilice una herramienta de gráficos para generar los gráficos de f' y f'' sobre el intervalo indicado: luego utilice esos gráficos para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión de f , los intervalos en los que es cóncava hacia arriba o hacia abajo y los intervalos en los que f aumenta o disminuye. Verifique sus estimaciones graficando f .

Función y Derivadas

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{en el intervalo} \quad -5 \leq x \leq 5.$$

Primera Derivada

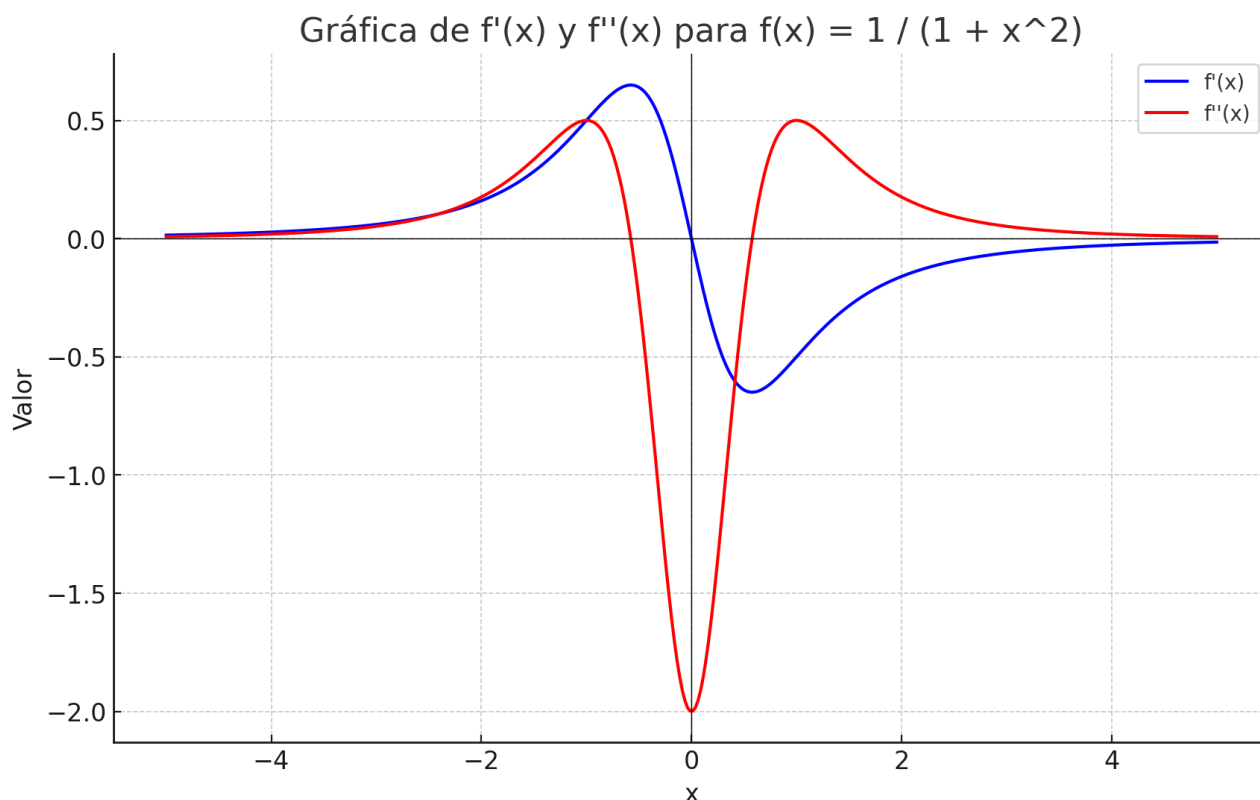
La primera derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) \cdot 0 - 1 \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Segunda Derivada

La segunda derivada de $f(x)$ es:

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2 \cdot (0) - (-2x) \cdot (2(1+x^2)(2x))}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}.$$



Aquí tienes la gráfica de las derivadas primera $f'(x)$ (en azul) y segunda $f''(x)$ (en rojo) de la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en el intervalo $-5 \leq x \leq 5$.

- $f'(x)$ muestra los intervalos donde la función es creciente o decreciente.
- $f''(x)$ permite identificar los puntos de inflexión y la concavidad de la función.

Puedes observar cómo $f'(x) = 0$ en $x = 0$, y cómo $f''(x)$ cambia de signo en los puntos de inflexión $x = \pm\sqrt{3}$.

A partir de los gráficos de $f'(x)$ (azul) y $f''(x)$ (rojo), podemos hacer las siguientes estimaciones:

1. Puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión ocurren cuando la derivada segunda $f''(x)$ cambia de signo. Observando la gráfica roja de $f''(x)$, parece que cambia de signo alrededor de $x \approx \pm 0.577$, lo cual coincide con la fórmula teórica de los puntos de inflexión para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Entonces, los puntos de inflexión son aproximadamente:

$$x \approx \pm 0.577$$

2. Concavidad:

- **Cóncava hacia arriba:** La función $f(x)$ es cóncava hacia arriba cuando $f''(x) > 0$. Observamos en la gráfica que $f''(x)$ es positiva cuando $|x| > 0.577$. Así que la función es cóncava hacia arriba en los intervalos:

$$(-\infty, -0.577) \cup (0.577, \infty)$$

- **Cóncava hacia abajo:** $f(x)$ es cóncava hacia abajo cuando $f''(x) < 0$. Esto ocurre en el intervalo donde $|x| < 0.577$, es decir:

$$(-0.577, 0.577)$$

3. Crecimiento y decrecimiento:

- **Crecimiento:** La función $f(x)$ es creciente cuando $f'(x) > 0$. En la gráfica verde, vemos que esto ocurre para $x < 0$, lo que indica que la función es creciente en el intervalo:

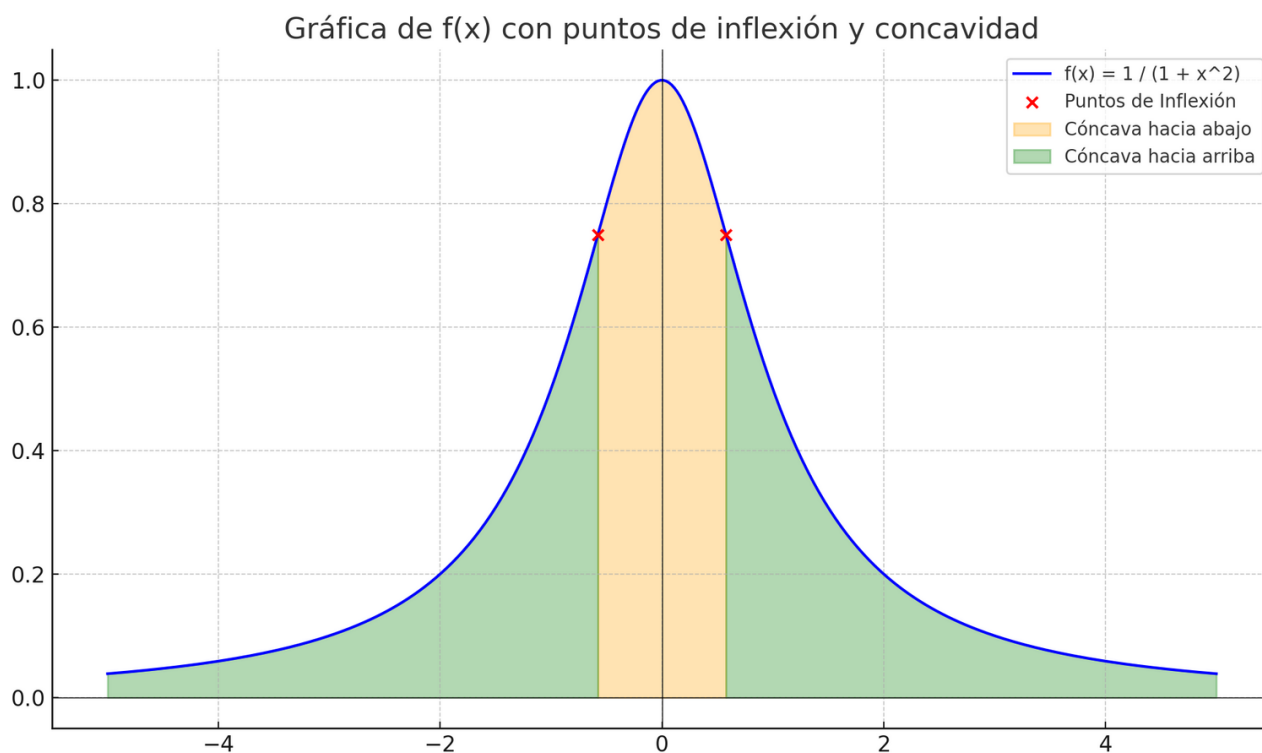
$$(-5, 0)$$

- **Decrecimiento:** La función $f(x)$ es decreciente cuando $f'(x) < 0$. En la gráfica verde, esto ocurre para $x > 0$, lo que indica que la función es decreciente en el intervalo:

$$(0, 5)$$

Resumen:

- **Puntos de inflexión:** $x \approx \pm 0.577$.
- **Concavidad:**
 - Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.577) \cup (0.577, \infty)$.
 - Cóncava hacia abajo en $(-0.577, 0.577)$.
- **Crecimiento:** $(-\infty, 0)$.
- **Decrecimiento:** $(0, \infty)$.



Ejercicio 16 sección 3.7 del Stewart

a)

El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = (4/3)\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\mu m = 10^{-6}m$). Encuentre la razón de cambio promedio de V respecto a r ,

cuando éste cambia de

I) 5 a 8 μm II) 5 a 6 μm III) 5 a 5.1 μm

Tenemos que la razón promedio está dada por:

$$\text{razón promedio} = \frac{\Delta V}{\Delta r}$$

con

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

I. 5 a 8 μm

Con $r = 5\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(5\mu m)^3 = \frac{500}{3}\pi\mu m^3$$

Con $r = 8\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(8\mu m)^3 = \frac{2048}{3}\pi\mu m^3$$

De aquí

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_2 - V_1 = \frac{2048}{3}\pi - \frac{500}{3}\pi = 516\pi\mu m^3 \\ \Delta r &= 8 - 5 = 3\mu m\end{aligned}$$

Y sustituimos en la razón de cambio.

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{516\pi\mu m^3}{3\mu m} \approx 540.35\pi\mu m^2.$$

II. 5 a 6 μm

Con $r = 5\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(5\mu m)^3 = \frac{500}{3}\pi\mu m^3$$

Con $r = 6\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(6\mu m)^3 = 288\pi\mu m^3$$

De aquí

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_2 - V_1 = 288\pi - \frac{500}{3}\pi = \frac{364}{3}\pi\mu m^3 \\ \Delta r &= 6 - 5 = 1\mu m\end{aligned}$$

Y sustituimos en la razón de cambio.

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{\frac{364}{3}\pi\mu m^3}{1\mu m} = \frac{364}{3}\pi\mu m^2 \approx 381.18\pi\mu m^2.$$

III. 5 a 5.1 μm

Con $r = 5\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(5\mu m)^3 = \frac{500}{3}\pi\mu m^3$$

Con $r = 5.1\mu m$

$$V = \frac{4}{3}\pi(5.1\mu m)^3 \approx 555.6472\pi\mu m^3$$

De aquí

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 555.6472 - \frac{500}{3}\pi \approx 32.0492\mu m^3$$
$$\Delta r = 5.1 - 5 = 0.1\mu m$$

Y sustituimos en la razón de cambio.

$$\frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{32.0992\mu m^3}{0.1\mu m} = \frac{364}{3}\mu m^2 \approx 320.492\mu m^2.$$

b)

Halle la razón de cambio instantánea de V respecto a r , cuando $r = 5\mu m$.

Sabemos que la razón de cambio instantánea está dada por la derivada de V respecto a r .

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) \\ &= 3 \cdot \frac{4}{3}\pi r^2 = 4\pi r^2\end{aligned}$$

Como nos interesa la variación instantánea en $r = 5\mu m$

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=5} = 4\pi(5)^2 = 4\pi(25) = 100\pi\mu m^2$$

c)

Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geoméricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13 c).

Sabemos que:

El área superficial de una esfera está dada por $A = 4\pi r^2$

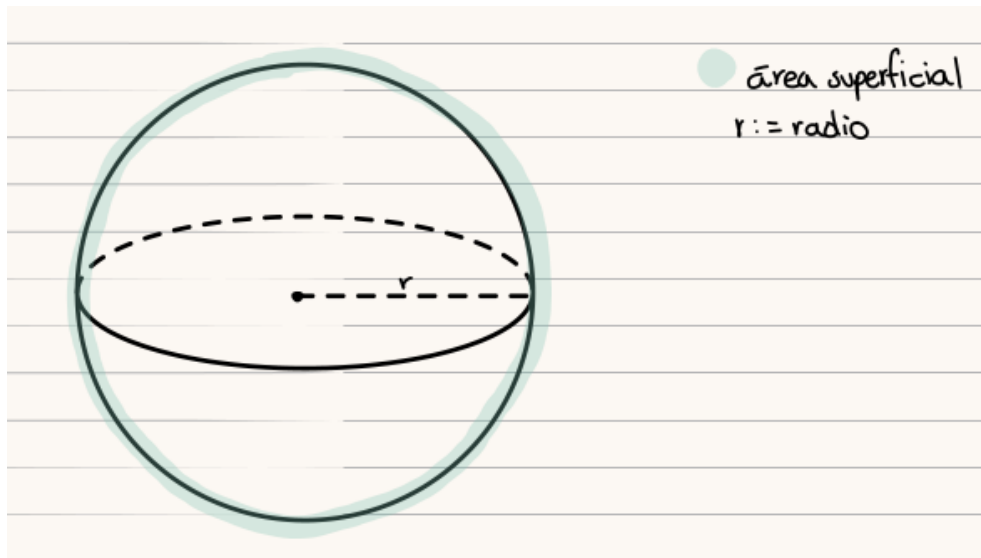
El volumen de una esfera está dado por $V = (4/3)\pi r^3$

También, anteriormente calculamos la razón de cambio instantánea del volumen obteniendo.

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) = 4\pi r^2 = A$$

\therefore la razón de cambio instantánea es igual al área superficial.

Geoméricamente esto es cierto ya que, al aumentar el radio de una esfera, el cambio en su volúmen está directamente relacionado con el área superficial, esto porque el área superficial es lo que envuelve al volumen, lo contiene y parámetros de un área determinan la variación al instante de su volúmen.



Ejercicio 19 sección 3.7 del Stewart

La cantidad de carga, Q , en coulombs c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando a) $t = 0.5$ s y b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere ($1A = 1C/s$)]. ¿En qué momento la corriente es la más baja?

La cantidad de carga $Q(t)$, en coulombs, que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) está dada por la ecuación:

$$Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$$

Debemos encontrar la corriente cuando:

a) $t = 0.5$ s

b) $t = 1$ s

Paso 1: Derivada de la carga con respecto al tiempo

La corriente $I(t)$ es la derivada de la carga $Q(t)$ con respecto al tiempo t :

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Primero, derivamos la función $Q(t)$:

$$\frac{d}{dt} (t^3 - 2t^2 + 6t + 2) = 3t^2 - 4t + 6$$

Por lo tanto, la corriente en función del tiempo es:

$$I(t) = 3t^2 - 4t + 6$$

Paso 2: Sustitución de valores

a) Para $t = 0.5$ s:

$$I(0.5) = 3(0.5)^2 - 4(0.5) + 6 = 3(0.25) - 2 + 6 = 0.75 - 2 + 6 = 4.75 \text{ A}$$

b) Para $t = 1$ s:

$$I(1) = 3(1)^2 - 4(1) + 6 = 3(1) - 4 + 6 = 3 - 4 + 6 = 5 \text{ A}$$

Respuesta

- La corriente cuando $t = 0.5$ s es 4.75 A.
- La corriente cuando $t = 1$ s es 5 A.

Encontrar el momento en que la corriente es más baja

Para encontrar el momento en que la corriente es más baja, necesitamos encontrar el mínimo de la función de corriente $I(t) = 3t^2 - 4t + 6$.

Paso 1: Derivar la función de corriente

Primero, derivamos $I(t)$ con respecto al tiempo t para encontrar los puntos críticos:

$$\frac{dI(t)}{dt} = 6t - 4$$

Paso 2: Encontrar los puntos críticos

Igualamos la derivada a cero para encontrar el valor de t en el cual la corriente puede ser mínima:

$$6t - 4 = 0$$

$$6t = 4$$

$$t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ s}$$

Paso 3: Verificación

Para asegurarnos de que este es un mínimo, podemos evaluar la concavidad usando la segunda derivada:

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} = 6$$

Como la segunda derivada es positiva ($6 > 0$), la función es cóncava hacia arriba, lo que confirma que $t = \frac{2}{3}$ s es un mínimo.

Respuesta

La corriente es más baja en $t = \frac{2}{3}$ s.

Ejercicio 21 sección 3.7 del Stewart

La fuerza F que actúa sobre un cuerpo con masa m y velocidad v es igual a la razón de cambio del momentum o cantidad de movimiento: $F = (d/dt)(mv)$. Si m es constante, esto se convierte en $F = ma$, donde $a = dv/dt$ es la aceleración. Pero en la teoría de la relatividad, la masa de una partícula varía con v como sigue: $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la velocidad de la luz. Demuestre que

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

Partimos de la definición de fuerza como la derivada del momentum:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \quad (2)$$

Donde m es la masa relativista del objeto, y su valor depende de la velocidad v según la fórmula:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Aquí, m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la velocidad de la luz. Nuestro objetivo es derivar la expresión para la fuerza relativista:

$$F = \frac{m_0 a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

donde $a = \frac{dv}{dt}$ es la aceleración.

Aplicación de la regla del producto

Empezamos aplicando la regla del producto a la derivada de $F = \frac{d}{dt}(mv)$:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = v \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

En esta expresión, el primer término representa el cambio de masa con respecto al tiempo, y el segundo término es el término clásico de la fuerza, con m dependiendo de v .

Derivada de la masa relativista

Sabemos que la masa relativista m está dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para encontrar $\frac{dm}{dt}$, aplicamos la regla de la cadena. Derivamos m con respecto a v , y luego multiplicamos por $\frac{dv}{dt}$:

$$\frac{dm}{dt} = m_0 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{2v}{c^2} \right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

Sustitución en la ecuación de la fuerza

Sustituimos $\frac{dm}{dt}$ en la ecuación para la fuerza:

$$F = v \left(\frac{m_0 v}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dv}{dt} \right) + m \cdot \frac{dv}{dt}$$

Usando la expresión para m , podemos escribir la ecuación completa como:

$$F = \frac{m_0 v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Se factoriza $\frac{dv}{dt}$

Podemos factorizar $\frac{dv}{dt}$ de ambos términos:

$$F = m_0 \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left[\frac{v^2}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]$$

Buscamos un denominador común

Para simplificar, encontramos un denominador común en el término entre corchetes. El denominador común es $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$:

$$F = m_0 \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Simplificando el numerador:

$$F = m_0 \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Expresión final

Como $a = \frac{dv}{dt}$, finalmente obtenemos la expresión de la fuerza relativista:

$$F = \frac{m_0 a}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Por lo tanto, la ecuación queda demostrada.