

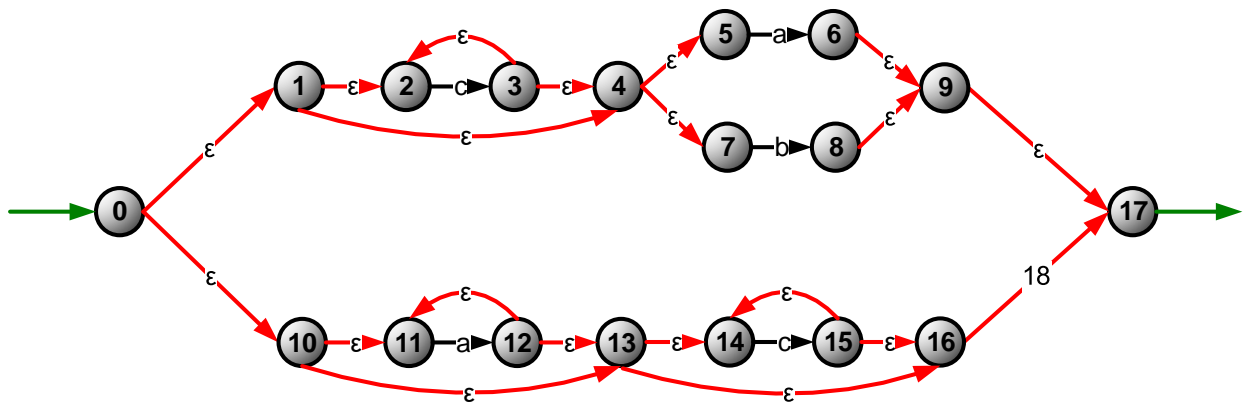
## DE : Mathématiques pour l'informatique version 1

## Solutions

## Exercice 1.

Construire, en respectant à la lettre les règles données en cours, l'automate asynchrone dont le langage est donné par l'expression rationnelle suivante :  $c^*(a+b)+a^*c^*$

## Solution



## Exercice 2. Déterminer l'AF suivant :

		a	b
E	0	0	1
S	1	1	2
	2	2	3
E	3	1	4
S	4	2	5
	5	3	4

Le résultat est attendu sous forme d'un tableau de transitions avec les entrées et les sorties indiquées.

## Solution :

		a	b
E	0 3	0 1	1 4
S	0 1	0 1	1 2
S	1 4	1 2	2 5
S	1 2	1 2	2 3
	2 5	2 3	3 4
	2 3	1 2	3 4
S	3 4	1 2	4 5
S	4 5	2 3	4 5

### Exercice 3

Minimiser l'automate suivant, en détaillant le processus de minimisation (partitions successives). Le résultat est attendu sous forme d'un schéma.

	état	a	b	c
	1	3	4	
	2	3	4	
S	3	5	1	4
S	4	2	6	3
	5	4		
	6		5	
E	7	3	4	

'E' = état initial, ou "d'entrée"

'S' = état terminal, ou "de sortie"

### Solution

Tout d'abord il faut compléter l'automate qui est déjà déterministe :

	état	a	b	c
	1	3	4	P
	2	3	4	P
S	3	5	1	4
S	4	2	6	3
	5	4	P	P
	6	P	5	P
E	7	3	4	P
	P	P	P	P

$\Theta_0 = \{T, NT\}$  avec  $T = \{3, 4\}$ ,  $NT = \{1, 2, 5, 6, 7, P\}$ . 1<sup>re</sup> itération :

sous $\Theta_0$							
	a	b	c	a	b	c	
T	3	5	1	4	NT	NT	T
	4	2	6	3	NT	NT	T
pas de séparation							
NT	1	3	4	P	T	T	NT
	2	3	4	P	T	T	NT
	5	4	P	P	T	NT	NT
	6	P	5	P	NT	NT	NT
	7	3	4	P	T	T	NT
	P	P	P	P	NT	NT	NT
séparation en trois groupes							

$\Theta_1 = \{T, (1, 2, 7), (6, P), 5\}$ . Nommons les sous-groupes en fonction de leur contenu : 34, 127, 6P, 5.

Mai 2018

Itération 2 :

L2, DE Maths pour Info, version 1

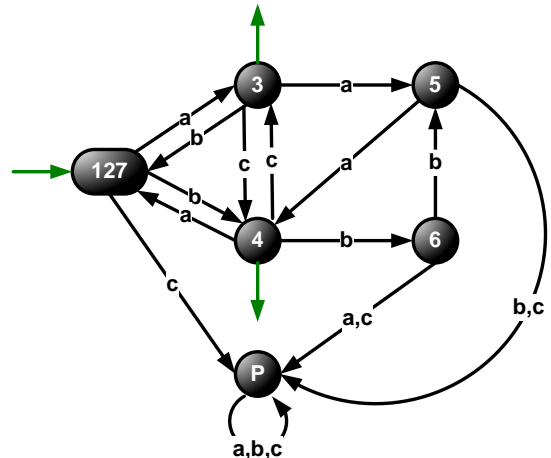
	a	b	c	sous $\Theta_1$			
3	5	1	4	5	127	34	séparation en 2 groupes
4	2	6	3	127	6P	34	
1	3	4	P	34	34	6P	pas de séparation
2	3	4	P	34	34	6P	
7	3	4	P	34	34	6P	
6	P	5	P	6P	5	6P	séparation en 2 groupes
P	P	P	P	6P	6P	6P	

 $\Theta_2 = \{(1,2,7), 3, 4, 5, 6, P\}$ .

Pour le seul groupe composé de plus d'un état restant 127 il est impossible qu'il se sépare car les transitions de ses composantes sont les mêmes. Donc  $\Theta_2 = \Theta_{fin}$ .

La table de transitions de l'automate minimal (et on donne ici le schéma même s'il n'a pas été demandé):

	a	b	c
E	127	3	4
S	3	5	127
S	4	127	6
	5	4	P
	6	P	5
	P	P	P

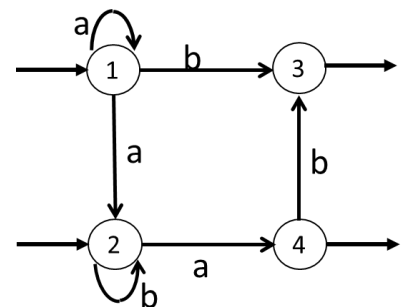


**Exercice 4.** Obtenir sous forme d'une expression rationnelle le langage de l'automate ci-contre :

Vous pouvez utiliser, au choix :

- Soit la méthode d'élimination des états (en éliminant les états dans un ordre arbitraire)
- Soit la méthode de l'arrivée ou celle du départ, avec les équations.

Quelle que soit la méthode utilisée, toutes les étapes intermédiaires doivent apparaître dans votre réponse.



Mai 2018

L2, DE Maths pour Info, version 1

**Solution :**

(i) **Méthode de l'arrivée :**

$$1 = \varepsilon + 1a \quad (\text{eq 1})$$

$$2 = \varepsilon + 2b + 1a \quad (\text{eq 2})$$

$$3 = 1b + 4b \quad (\text{eq 3})$$

$$4 = 2a \quad (\text{eq 4})$$

$$L = 3 + 4$$

Le lemme d'Arden sur eq 1 donne  $1 = \varepsilon a^* = a^*$

Eliminons l'inconnue 4 :  $4 = 2a$ , donc

$$3 = 1b + 2ab = a^*b + 2ab \quad (\text{eq 3'})$$

$$\text{Eq 2 donne } 2 = \varepsilon + 2b + a^*a = 2b + (\varepsilon + a^*a)$$

$$\text{et donc } 2 = (\varepsilon + a^*a)b^* = a^*b^* \quad (\text{en utilisant l'identité } \forall X, XX^* = X^*)$$

Cela nous permet d'obtenir de expressions explicites pour 3 et 4 :

$$3 = a^*b + 2ab = a^*b + a^*b^*ab$$

et puis

$$4 = 2a = a^*b^*a$$

$$\text{Donc } L = 3 + 4 = a^*b + a^*b^*ab + a^*b^*a.$$

(ii) **Méthode du départ (pour ceux qui l'ont vu en TD) :**

$$1 = a1 + b3 + a2 \quad (\text{eq 1'})$$

$$2 = b2 + a4 \quad (\text{eq 2'})$$

$$3 = \varepsilon \quad (\text{eq 3'})$$

$$4 = b3 + \varepsilon \quad (\text{eq 4'})$$

$$L = 1 + 2$$

En utilisant  $3 = \varepsilon$ , on obtient  $4 = b + \varepsilon$

Mettant ceci dans eq 2', on a  $2 = b2 + a4 = b2 + ab + a$ , et avec la seconde version du Lemme d'Arden, on obtient  $2 = b^*(ab+a) = b^*ab + b^*a$

Donc  $1 = a1 + b3 + a2 = a1 + b + ab^*ab + ab^*a$  et avec le Lemme d'Arden,

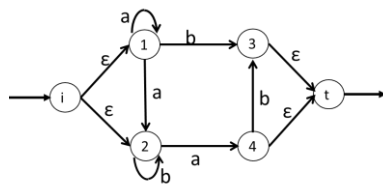
$$1 = a^*(b + ab^*ab + ab^*a) = a^*b + a^*ab^*ab + a^*ab^*a$$

$$L = 1 + 2 = a^*b + a^*ab^*ab + a^*ab^*a + b^*ab + b^*a = a^*b + (a^*a + \varepsilon)b^*ab + (a^*a + \varepsilon)b^*a$$

$$= a^*b + a^*b^*ab + a^*b^*a, \text{ comme auparavant}$$

(iii) **Méthode d'élimination d'états (avec un ordre d'élimination choisi au hasard) :**

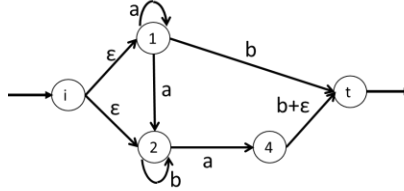
**Initialisation :**



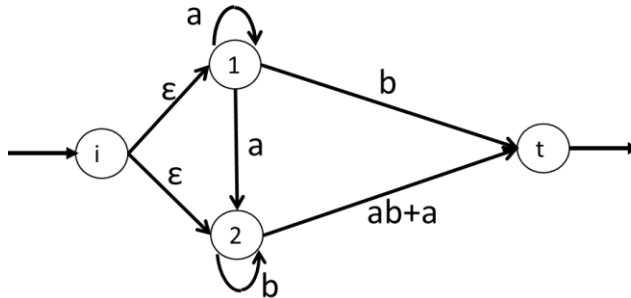
Mai 2018

L2, DE Maths pour Info, version 1

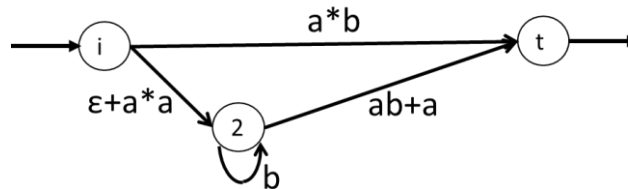
Elimination de 3 :



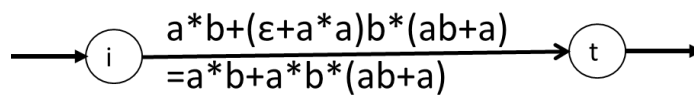
Elimination de 4 :



Elimination de 1 :



Elimination de 2 :



On obtient le même résultat.

**Exercice 5.** Obtenir un AF dont le langage est le complément du langage reconnu par l'AF suivant :

	a	b	
E/S	1	2	3
S	2	--	--
S	3	2	4
S	4	2	--

Résultat : sous forme d'une table de transitions avec les entrées et les sorties indiquées.

Mai 2018

└2, DE Maths pour Info, version 1

**Solution :**

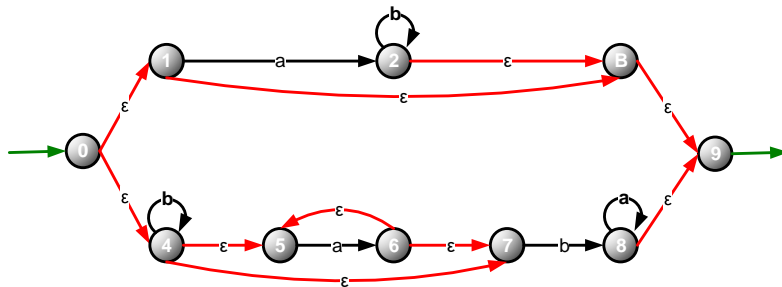
On complète l'AD :

		a	b
E/S	1	2	3
S	2	P	P
S	3	2	4
S	4	2	P
	P	P	P

Puis, on transforme tous les états terminaux en non terminaux et vice versa :

		a	b
E	1	2	3
	2	P	P
	3	2	4
	4	2	P
S	P	P	P

**Exercice 6.** Déterminer l'automate asynchrone suivant :



**Résultat :** sous forme d'une table de transitions avec les entrées et les sorties indiquées

**Solution :** (Attention : il y a une faute de frappe dans le dessin, mais elle est évidente et ne gêne pas. L'état 3 est marqué « B » ).

On peut utiliser une simplification graphique ou non. Voici une solution où on ne l'utilise pas (en l'utilisant, on n'arrivera pas à un ADC plus petit !)

$\varepsilon$ -clôtures:				a	b
0'=0 1 3 4 5 7 9	terminal	ES	0'	2' 6'	4' 8'
2'=2 3 9	terminal	S	2' 6'	6'	2' 8'
4'=4 5 7		S	4' 8'	6' 8'	4' 8'
6'=5 6 7			6'	6'	8'
8'=8 9	terminal	S	2' 8'	8'	2'
		S	6' 8'	6' 8'	8'
		S	8'	8'	P
		S	2'	P	2'
			P	P	P

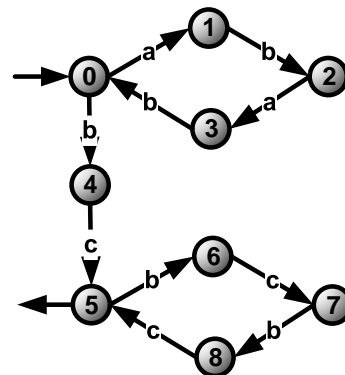
**Exercice 7.** Construire un AF sur l'alphabet  $\{a,b\}$  reconnaissant le langage dont les mots commencent par un nombre paire (y compris 0) de 'ab' suivis d'un nombre impaire de 'bc'. Par exemple, les mots 'bc', 'bcbcbc', 'ababbc', 'ababbcbcbc' appartiennent au langage, tandis que les mots 'bcbc', 'ab', 'abbc', 'bcabab' etc., non.

**Attention :** le 'b' ne peut pas appartenir simultanément à 'ab' et à 'bc', de façon que 'ababc' ne satisfait pas à la condition.

**Remarque.** Bien sûr, « l'alphabet  $\{a,b\}$  » est une erreur, l'alphabet est  $\{a,b,c\}$ .

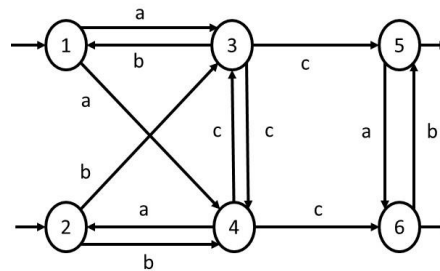
On vous juge suffisamment intelligents pour pouvoir rectifier ce genre d'erreurs évidentes.

**Solution :**

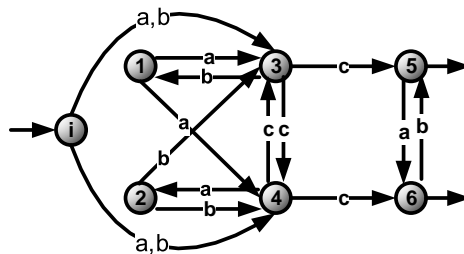


**Exercice 8**

a) Standardiser l'automate suivant :



**Solution :** le nouvel état initial n'est pas terminal car ni 1 ni 2 ne le sont ; les transitions 1a3, 1a4, 2b3, 2b4 engendrent les transitions ia3, ia4, ib3, ib4.



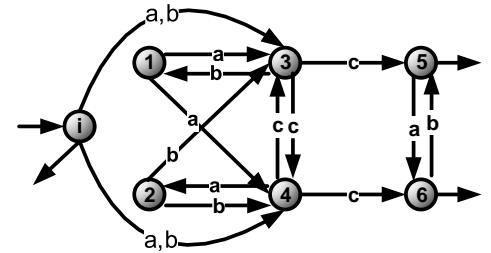
Mai 2018

L2, DE Maths pour Info, version 1

- b) Est-ce que votre automate standardisé reconnaît le mot vide ? (Expliquer la réponse !).  
 Si la réponse est « oui », donner un automate reconnaissant le même langage à l'exception du mot vide.  
 Si elle est « non », donner un automate reconnaissant le même langage plus le mot vide.

**Solution** : non, car  $i$  n'est pas terminal.

Voici l'automate reconnaissant le même langage plus le mot vide :



### 9. Questions de cours :

- a) Soit un automate déterministe complet non minimal A. Pour obtenir l'automate déterministe complet minimal reconnaissant le langage complémentaire à celui reconnu par A, (choisir la réponse correcte) :
- **on doit** minimiser A d'abord et puis effectuer l'opération  $T \leftrightarrow NT$  (transformer chaque état terminal en état non terminal, et chaque état non terminal, en état terminal)
  - **on doit** effectuer l'opération  $T \leftrightarrow NT$  sur A d'abord et minimiser l'automate obtenu
  - **on peut faire l'une ou l'autre des deux méthodes et on obtient la même chose dans les deux cas ?**

**Réponse** : on peut faire l'une ou l'autre des deux méthodes et on obtient la même chose dans les deux cas.

- b) Quel est l'automate minimal équivalent à l'automate suivant :

	état	a	b	c	d
E/S	0	1	2	3	0
S	1	2	3	0	1
S	2	3	0	1	2
S	3	0	1	2	3

Donner une réponse immédiate, **sans effectuer la procédure de minimisation par des partitions successives** mais avec une explication (une phrase ou deux) !

**Réponse** : c'est un ADC dont tous les états sont terminaux. Donc, l'automate minimale est :

