DE Mathématiques pour l'Informatique, solutions

Exercice 1

a) Construire un automate reconnaissant le langage

$$L = \{\left((a+b)(a+b)\right)^* + \left((a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\right)^* \}$$

suivant les règles formelles données dans le cours.

Puis, au choix,

soit

b) déterminiser et
c) minimiser

l'automate obtenu en (a) (c'est assez compliqué !),

soit

b) simplifier graphiquement et déterminiser et
c) minimiser

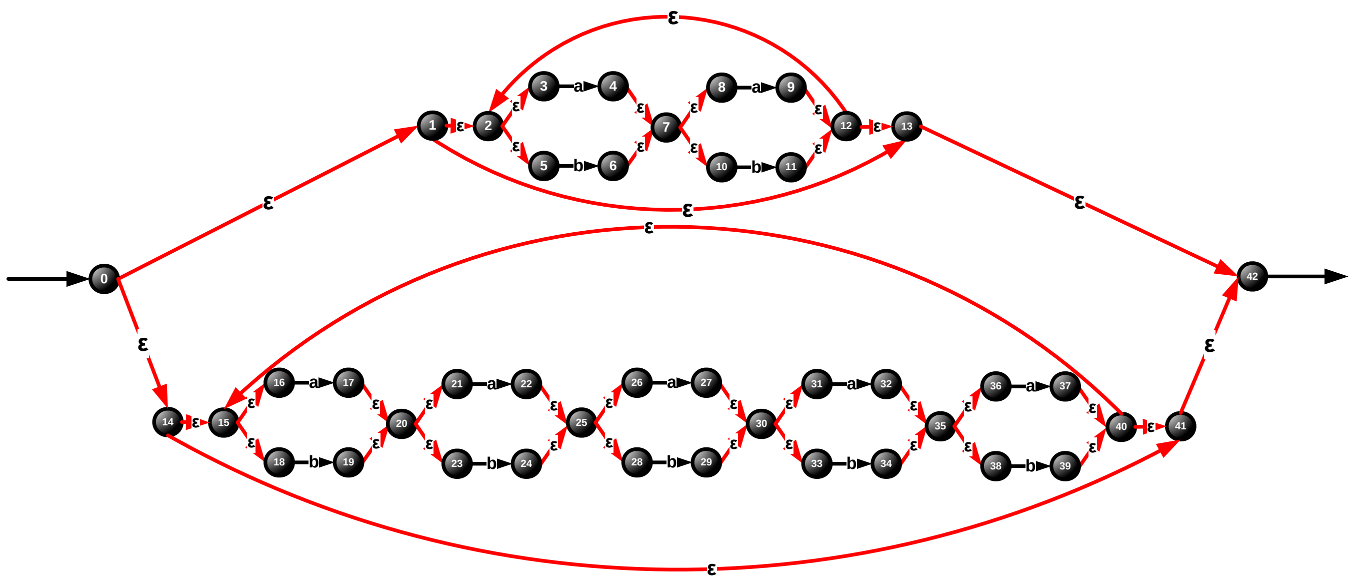
l'automate simplifié graphiquement.

La deuxième proposition est bien plus simple à réaliser.

soit

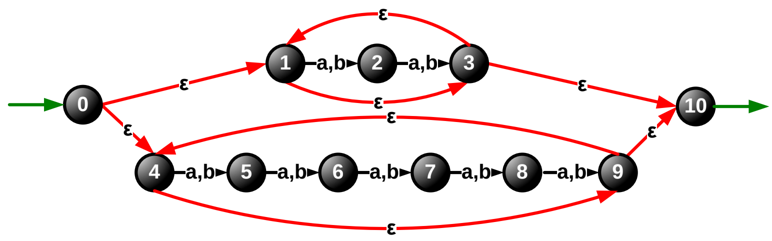
(b+c) produire directement l'automate déterministe complet minimal que vous devriez obtenir en (b), si vous savez le faire *et si vous savez l'expliquer*. Dans ce cas, vous n'êtes pas tenus de faire le (b), mais vous devez toujours faire le (a).

Solution a)



b) simplifions d'abord.
En simplifiant, nous ferons les choses suivantes :

1) Remarquant que les caractères ***a*** et ***b*** ne figurent dans l'expression que dans la combinaison ***a***+***b***, on peut passer de l'alphabet A={***a***,***b***} à deux caractères, à l'alphabet B={« ***a***+***b*** »} à un seul caractère. Sur le dessin, le « ***a***+***b*** » est d'habitude représenté en marquant la flèche comme « ***a***,***b*** ».
2) Nous remplacerons les étoiles « décalées » par des étoiles « rondes » ; aucune transition ε additionnelle n'est nécessaire car les deux étoiles ne se suivent pas. On obtient



Déterminisation (je vous rappelle que le dessin d'un automate simplifié ci-dessus, même 100% correct, ne donne aucun point s'il n'est pas suivi d'une bonne déterminisation) :

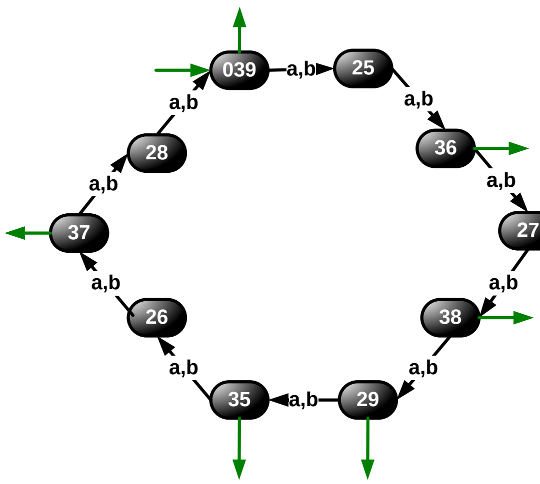
	état en termes d'ε-clôtures	a ou b
E/S	**0'**	**2' 5'**
	2' 5'	**3' 6'**
S	**3' 6'**	**2' 7'**
	2' 7'	**3' 8'**
S	**3' 8'**	**2' 9'**
S	**2' 9'**	**3' 5'**
S	**3' 5'**	**2' 6'**
	2' 6'	**3' 7'**
S	**3' 7'**	**2' 8'**
	2' 8'	**3' 9'**
S	**3' 9'**	**2' 5'**

ε-clôtures	contenu
0'	0 1 3 4 9 10
2'	2
3'	3 10
5'	5
6'	6
7'	7
8'	8
9'	4 9 10

Minimisation

La minimisation se fait de façon classique et assez élémentaire. Ici, je ne donnerai que le résultat. Les états 0 et 3'9', tous les deux appartenant au groupe terminal de la séparation initiale et ayant la même transition (2'5') forment un seul état de l'AM. Tous les autres états se séparent. Il en reste 10 états :

	état de l'AM	a ou b
E/S	**0', 3' 9'**	**2' 5'**
	2' 5'	**3' 6'**
S	**3' 6'**	**2' 7'**
	2' 7'	**3' 8'**
S	**3' 8'**	**2' 9'**
S	**2' 9'**	**3' 5'**
S	**3' 5'**	**2' 6'**
	2' 6'	**3' 7'**
S	**3' 7'**	**2' 8'**
	2' 8'	**0', 3' 9'**



En réalité, cet automate minimal aurait pu être obtenu sans toutes ces opérations. L'ER en question correspond à ce que soient reconnus les mots de longueur multiple de 2 ou multiple de 5 : 0,2,4,5,6,8,10 etc. Le cycle minimal permettant une sortie à tous les multiples de 2 et de 5 est, évidemment, de longueur 10.

Exercice 2

a) Minimiser l'automate suivant, en détaillant le processus de minimisation (partitions successives). Le résultat est attendu sous forme de schéma.

	État	a	b	c
E	1	5	4	2
	2	7	5	1
	4	2	1	5
S	3	--	7	1
	5	6	2	4
S	6	--	7	1
S	7	--	3	4

Solution :

L'automate est déterministe, il faut juste le compléter pour le minimiser :

	État	a	b	c
E	1	5	4	2
	2	7	5	1
	4	2	1	5
S	3	P	7	1
	5	6	2	4
S	6	P	7	1
S	7	P	3	4
	P	P	P	P

La partition initiale : Θ_0={T, NT} où T={6,3,7}, NT={1,2,4,5,P}

Itération 1 :

					sous Θ_0		
		a	b	c	a	b	c
NT	1	5	4	2	NT	NT	NT
	2	7	5	1	T	NT	NT
	4	2	1	5	NT	NT	NT
	5	6	2	4	T	NT	NT
	P	P	P	P	NT	NT	NT
T	3	P	7	1	NT	T	NT
	6	P	7	1	NT	T	NT
	7	P	3	4	NT	T	NT

Résultat : Θ_1={A,B,T} où A={1,4,P}, B={2,5}, T={3,6,7}

Itération 2 :

					sous Θ_1		
		a	b	c	a	b	c
A	1	5	4	2	B	A	B
	4	2	1	5	B	A	B
	P	P	P	P	A	A	A
B	2	7	5	1	T	B	A
	5	6	2	4	T	B	A
T	3	P	7	1	A	T	A
	6	P	7	1	A	T	A
	7	P	3	4	A	T	A

Résultat : Θ_2={C,B,T,(P)} où C={1,4}, B={2,5}, T={3,6,7}

Itération 3 :

					sous Θ_2		
		a	b	c	a	b	c
C	1	5	4	2	B	C	B
	4	2	1	5	B	C	B
B	2	7	5	1	T	B	C
	5	6	2	4	T	B	C
T	3	P	7	1	P	T	C
	6	P	7	1	P	T	C
	7	P	3	4	P	T	C

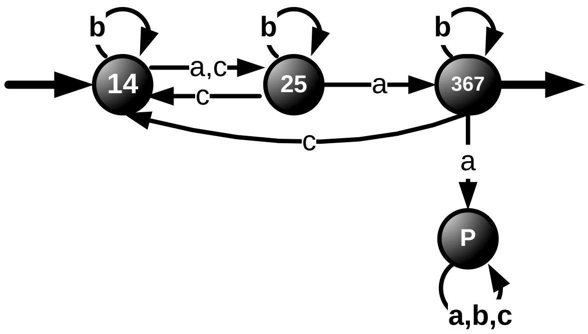
$\Theta_3=\Theta_2=\Theta_{fin}$.

La table de transition finale sera

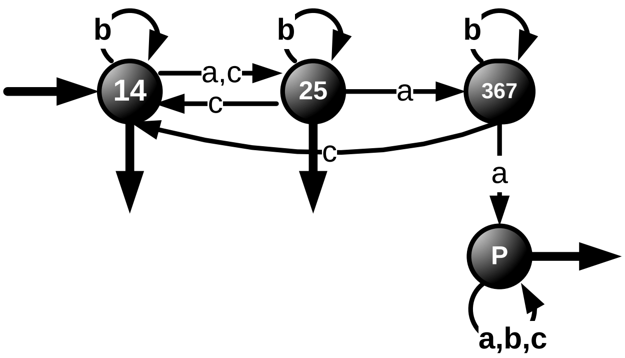
		a	b	c
E	C	B	C	B
	B	T	B	C
S	T	P	T	C
	P	P	P	P

ce qui est la même chose que

		a	b	c
E	14	25	14	25
	25	367	25	14
s	367	P	367	14
	P	P	P	P



b) Obtenir l'automate minimal reconnaissant le langage complémentaire à celui reconnu par l'automate d'origine.
Solution : Il suffit de faire, dans l'automate minimal, tous les états terminaux non terminaux et vice versa :



Exercice 3

Un commerçant reçoit 90 lampes de poche et 135 piles pour ces lampes. Il souhaite les conditionner en lots identiques composés de lampes et de piles utilisant toutes les lampes et toutes les piles.

a) Quel est le nombre de lots qu'il peut conditionner ainsi ? S'il y a plusieurs solutions, donnez-les toutes, et dites quel est le nombre maximal de lots qu'il peut conditionner ainsi.

b) Chaque lampe utilise une pile. Combien y aura-t-il de pile(s) de rechange dans chaque lot (réponse séparée pour chaque solution s'il y en a plusieurs) ?

Précision : quand on dit « conditionner en lots identiques », cela n'exclue pas la possibilité d'avoir un seul lot, au cas où « nombre de lots = 1 » existe comme solution ou parmi les solutions.

Solution :

Soit *n* le nombre de lots, chaque lot contenant *q* lampes et *p* piles. Alors il y a au total *nq* lampes et *np* piles : *nq* = 90, *np* = 135. Donc *n* est un diviseur commun de 90 et 135. Tout diviseur commun de deux entiers est diviseur de leur PGCD. Or, 90 ^ 135 = 45, et les diviseurs de 45 sont 1, 3, 5, 9, 15, 45.

	Les solutions sont donc :	2) nombre de piles de rechange par lot, par solution :
a)	1 lot de 90 lampes et 135 piles chacun	45
b)	3 lots de 30 lampes et 45 piles chacun	15
c)	5 lots de 18 lampes et 27 piles chacun	9
d)	9 lots de 10 lampes et 15 piles chacun	5

e) 15 lots de 6 lampes et 9 piles chacun 3

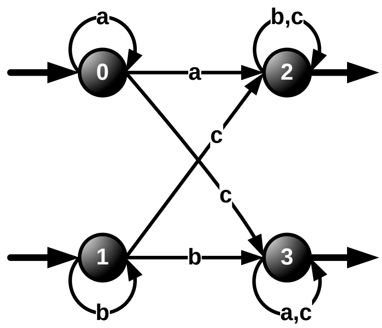
f) 45 lots de 2 lampes et 3 piles chacun 1

Le nombre maximal de lots est la solution (f), c.à.d. 45 lots de 2 lampes et 3 piles

Ceux qui n'ont trouvé que n solutions sur 6 où n<6, ont un pourcentage de n/6 pour la question (a)..

Exercice 4

Trouver, soit par la méthode de l'arrivée, soit par celle d'élimination d'états, l'expression rationnelle représentant le langage reconnu par l'automate ci_contre :



Solution :

Méthode de l'arrivée :

$0=\varepsilon+0a$ => $0=\varepsilon a^*=a^*$

$1=\varepsilon+1b$ => $1=\varepsilon b^*=b^*$

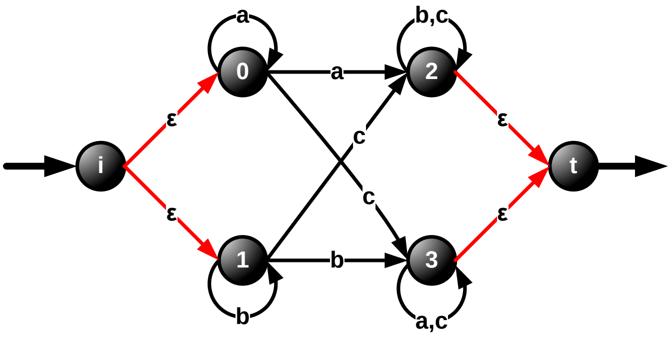
$2=0a+1c+2(b+c)$ => $2=a^*a+b^*c+2(b+c)$ => $2=(a^*a+b^*c)(b+c)^*$

$3=0c+1b+3(a+c)$ => $3=a^*c+b^*b+3(a+c)$ => $3=(a^*c+b^*b)(a+c)^*$

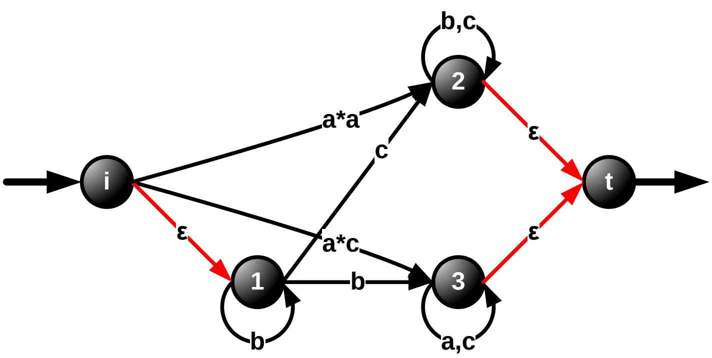
$L=2+3=(a^*a+b^*c)(b+c)^*+(a^*c+b^*b)(a+c)^*$

Méthode d'élimination d'états :

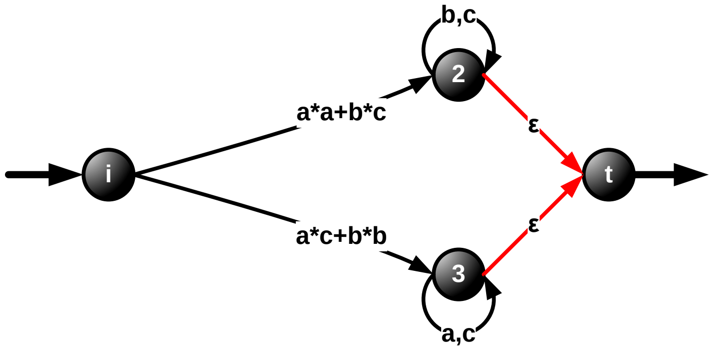
initialisation :



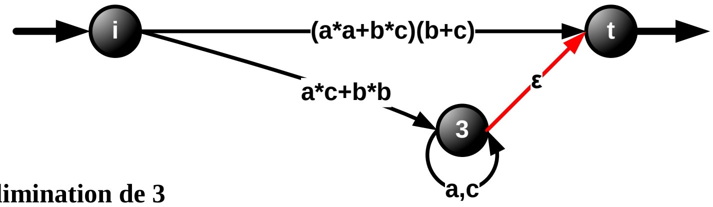
Elimination de 0



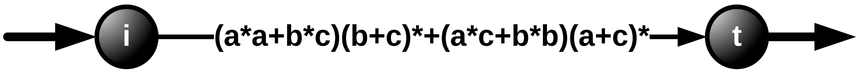
Elimination de 1



Elimination de 2



Elimination de 3



L= (a*a+b*c)(b+c)*+(a*c+b*b)(a+c)*

Exercice 5

Soit un automate sur l'alphabet {a,b} dont le tableau des transitions est :

	état	a	b
E	A	A, B	D
E	B	A	A, B
S	C	--	C
E	D	E	--
S	E	C,E	A, B, D, E

a) Cet automate est-il déterministe ? pourquoi ? (Donner **toutes** les raisons quelque soit votre réponse)

b) Construire un automate **déterministe complet** équivalent à cet automate. Le résultat peut être présenté sous forme d'un tableau de transitions (avec les E/S marquées), vous n'êtes pas tenus de dessiner un schéma.

c) Comment les résultats seront-ils modifiés si l'on enlève la sortie en état C ? (expliquez votre réponse)

Solution

a) Non, car il y a 3 entrées et il y a des transitions multiples libellées par le même caractères sortant du même état (par exemple, AaA et AaB).

b) Déterminisation :

	état	a	b
E	ABD	ABE	ABD
S	ABE	ABCE	ABDE
S	ABCE	ABCE	ABCDE
S	ABDE	ABCE	ABDE
S	ABCDE	ABCE	ABCDE

c) Il n'y aura aucun changement, car toutes les sorties restent telles quelles : même si C n'est plus une sortie, E l'est, et E est présent dans tous les états de sortie de l'automate obtenu en (b).

6 : Questions de cours

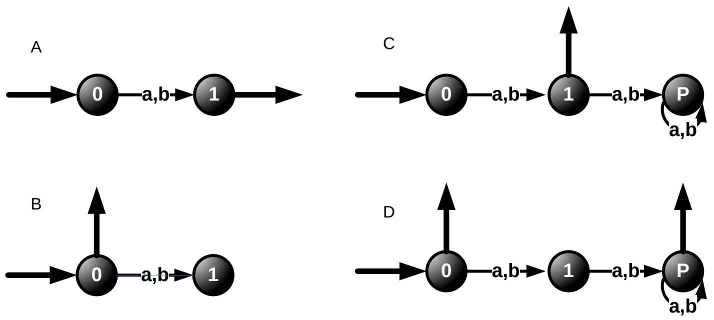
1. Quel langage reconnaît un automate fini déterministe complet dont tous les états sont des états terminaux ?

   Réponse : A*.

2. Quelle erreur risque-t-on de commettre si on ne vérifie pas qu'un automate déterministe soit complet avant de le transformer en un automate reconnaissant le complémentaire du langage ? Formuler la réponse en donnant des exemples des cas où une telle erreur se produirait et en décrivant l'erreur.

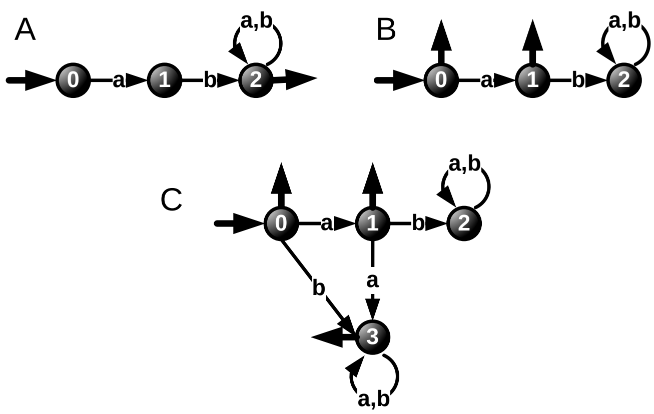
   Réponse : si l'automate déterministe n'est pas complet, alors parmi les mots qu'il ne reconnait pas il y a ceux qui se termineraient dans l'état poubelle de sa version complétée. Ces mots-là devraient être reconnus pas l'automate complémentarisé, mais ce n'est possible que si la poubelle devient une sortie. Or, s'il n'y en a pas…

   Exemple :



L'automate déterministe non complet A reconnait deux mots : 'a' et 'b'.
Son complémentaire doit reconnaitre tous les mots composés de a ou de b, ainsi que le mot vide, sauf les deux mots de longueur 1. Or, l'automate B ne reconnait que le mot vide. En complémentant l'automate A on obtient un automate équivalent déterministe complet C ; l'opération de complémentarisation résulte en l'automate correct D, qui, effectivement, ne reconnait pas uniquement les deux mots 'a' et 'b'.

3. Pour un langage donné, il y a un seul automate fini le reconnaissant **(Oui/Non)** **NON**
4. Pour un langage donné, il y a un seul automate déterministe le reconnaissant (**Oui/Non)** **NON**
5. Pour un langage donné, il y a un seul automate déterministe complet le reconnaissant (**Oui/Non)** **NON**
6. Pour un langage donné, il y a un seul automate minimal le reconnaissant (**Oui/Non**) OUI
7. Soit l'automate A.
   a) L'automate B est-il l'automate reconnaissant le complément $\overline{L}$ du langage L reconnu par A ? Expliquer votre réponse (pas de points s'il n'y a pas d'explication correcte). Si la réponse est « non », essayez de trouver un mot qui fait partie de $\overline{L}$ mais qui n'est pas reconnu par l'automate B, ou un mot qui ne fait pas partie de $\overline{L}$ mais qui est reconnu par B.



   b) Même question pour l'automate C.

   Réponse. Cette question est tout à fait semblable à la question 2.

a) B n'est pas le complément de A parce que A n'est pas complet, même s'il est déterministe. Par exemple, A ne reconnait pas 'b', donc son complémentaire doit le reconnaitre, mais B ne le reconnait pas.

b) Par contre, C est le complémentaire de A, car l'opération de complémentarisation a été appliquée à un automate déterministe complet.