Correction des Travaux Dirigés de Thermodynamique 2016-2017

EFREI – L3 : Enseignant : G. Mawawa

TD du 30/01/17

Exercice 1 : Calcul des coefficients thermoélastiques des gaz réels

I.1- $p(v_N - b) = k_B T$ b > 0 et $b \in R$ et $b \sim vol$

$\alpha = \frac{1}{v_N}\left(\frac{\partial v_N}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{v_N}\frac{k_B}{p} = \frac{k_B}{k_B T + pb}$; $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_N} = \frac{k_B}{p(v_N - b)} = \frac{1}{T}$; $\chi_T = -\frac{1}{v_N}\left(\frac{\partial v_N}{\partial p}\right)_T = \frac{k_B T}{v_N p^2} = \frac{k_B T}{p(k_B T + pb)}$

On montre aisément que $\beta \times \chi_T \times p = \frac{1}{T} \times \frac{k_B T}{p(k_B T + pb)} \times p = \frac{k_B}{k_B T + pb} = \alpha$

I.2- $\alpha = \frac{1}{v_N}\left(\frac{\partial v_N}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T + T_0 - \frac{p}{p_0}T_0}$; $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_N} = \frac{1}{T + T_0 - \frac{v_N}{v_0}T_0} = \frac{p_0}{pT_0}$; $\chi_T = -\frac{1}{v_N}\left(\frac{\partial v_N}{\partial p}\right)_T = \frac{v_0}{v_N p_0} = \frac{T_0}{p_0(T + T_0) - pT_0}$

De même que précédemment, l'identité $\beta \times \chi_T \times p = \alpha$ est bien vérifiée.

Calcul des limites lorsque $p_0 \to \infty$: $\lim_{p_0 \to \infty}(\alpha) = \frac{1}{T + T_0}$; $\lim_{p_0 \to \infty}(\beta) \to \infty$; $\lim_{p_0 \to \infty}(\chi_T) \to 0$

Comme la compressibilité isotherme tend vers zéro, il s'agit dans ces conditions d'une limite incompressible.

Calcul des limites lorsque $T_0 \to \infty$: $\alpha \to 0$; $\beta \to 0$; $\chi_T \to \frac{1}{p_0 - p}$; Pour ce système, on peut dire que la dilatation thermique est négligeable.

Si les deux quantités T_0 et $p_0 \to \infty$; $\alpha \to 0$; $\chi_T \to 0$; β sera fonction de $\frac{p_0}{T_0}$

Exercice 2 : Aires du Diagramme de Clapeyron : Gaz parfait

Données de l'exercice : $pv = RT$; n=1 car il s'agit d'une seule mole de gaz.

Etat	A	B	C	D
Pression	p_A	p_B	p_C	p_D
Volume	v_A	$2v_A$	$2v_A$	v_A
Température	T_A	$T_B = T_A$	$T_C = T_A/2$	$T_D = T_C = T_A/2$

1 : $v_B = 2v_A$, de **A→B**, transformation *isotherme* de gaz parfait. Ce qui implique : $pv = RT = Constante$

On peut donc écrire : $p_A v_A = p_B v_B$, on en déduit : $p_B = \frac{p_A v_A}{v_B} = \frac{p_A v_A}{2v_A} = \frac{p_A}{2}$

De **B→C**, on a une transformation isochore de gaz parfait. Ce qui implique $\frac{p}{T} = \frac{R}{v} = Constante$

On peut donc écrire, $\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_C}{T_C}$, on en déduit : $p_C = \frac{p_B T_C}{T_B} = \frac{\left(\frac{p_A}{2}\right) \times (T_A/2)}{T_A} = \frac{p_A}{4}$

De **C→D,** Transformation isotherme, $p_C v_C = p_D v_D$, on en déduit : $p_D = \frac{p_C v_C}{v_D} = \frac{\frac{p_A}{4}2v_A}{v_A} = \frac{p_A}{2}$

2. Sur l'isotherme T_A, $p = RT_A/v$

$W_{AB} = -\int_A^B p\,dv = -RT_A \int_{v_A}^{v_B} dv/v = -RT_A \ln\left(\frac{v_B}{v_A}\right) = -RT_A \ln(2)$

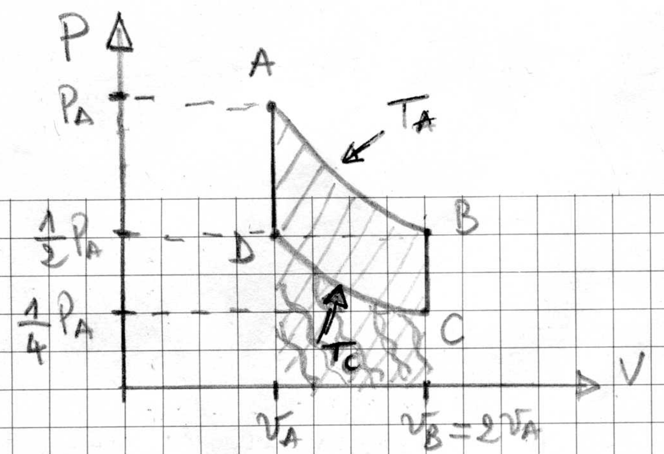
ici, $W_{AB} < 0$

W_{CD} sur l'isotherme T_C, $W_{CD} = RT_C \ln(2)$ $W_{CD} > 0$

Sur les isochores BC et DA, Comme $dv = 0 \Rightarrow W_{BC} = 0$; $W_{DA} = 0$

le Travail total est donné par $W_{cycle} = -R(T_A - T_C)\ln(2) < 0$.

le Travail fourni par le gaz au milieu extérieur est un travail moteur. le cycle est moteur.



Cycle ABCDA

Ce cycle comprend :

- Deux isothermes AB et CD
- Deux isochores BC et DA

On l'appelle aussi cycle de Stirling.

3. L'isotherme AB dessine l'aire $A_1 = \int_A^B p\,dv$ ////

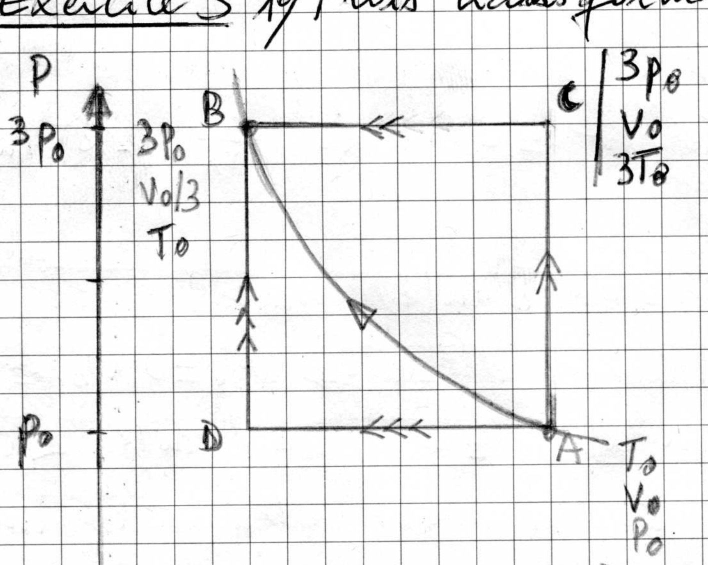
l'isotherme CD dessine l'aire $A_2 = \int_C^D p\,dv$ ≀≀≀

$A_1 > 0$ car $dv > 0$. En revanche $A_2 < 0$ car $dv < 0$

Or $W_{AB} = -A_1$ et $W_{CD} = -A_2$ $\quad W_{cycle} = -A_1 - A_2$

4. Si on inverse le cycle, il devient ADCBA. Tous les signes des aires et des travaux seraient inversés. Le travail global serait positif (reçu par le gaz) et le cycle récepteur. Un cycle moteur tourne dans le sens horaire, par contre le cycle récepteur tourne dans le sens trigonométrique.

Exercice 3 1°/ Trois transformations monothermes de gaz parfait.



Rappel : L'isotherme T_0 d'un gaz parfait se représente par une hyperbole dans le diagramme de Clapeyron. $(p = nRT_0/V)$

en B, à partir de pV = cste, on a $P_B = 3p_0$ et $V_B = \frac{V_0}{3}$

A → C ; à partir de $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V}$ = cste $\Leftrightarrow \frac{P_0}{T_0} = \frac{P_C}{T_C} \Rightarrow T_C = 3T_0$

C → B ; $\frac{V}{T} = \frac{nR}{P}$ = cste $\Rightarrow \frac{V_C}{T_C} = \frac{V_B}{T_C} \Rightarrow T_C = T_0$ isoth.

2. Travaux mécaniques pour chaque transfo.

$$W_1 = -\int_A^B p\,dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_0/3} dV/V = nRT_0 \ln(3) \simeq 1{,}1\, nRT_0$$

$$W_{2ACB} = 0 + \int_{V_0}^{V_0/3} -3p_0\,dV = 2p_0V_0 = 2nRT_0$$

$$W_{3ADB} = \int_{V_0}^{V_0/3} -p_0\,dV + 0 = (2/3)p_0V_0 = (2/3)nRT_0 \simeq 0{,}67\, nRT_0$$

$W_2 > W_1 > W_3$. Le travail est fonction du chemin suivi. Ce n'est pas une fonction d'État.

3. Transferts thermiques correspondants

$$Q_1 = -W_1 = 1{,}1\, nRT_0$$

$$Q_2 = nC_v(T_C - T_0) + nC_p(T_0 - T_C) = -nR(T_C - T_0) = -2\, nRT_0$$

$$Q_3 = nC_p(T_D - T_0) + nC_v(T_0 - T_D) = -(2/3)\, nRT_0 \simeq -0{,}67\, nRT_0$$

$Q_3 > Q_1 > Q_2$ La chaleur dépend elle aussi du chemin suivi et n'est pas une fonction d'État.

4. Variation de l'Énergie Interne.

On applique le principe de l'État Initial et de l'état final. Comme l'état final = même température que l'État initial, cette variation ΔU est nulle.

En référence aux résultats des questions 2 et 3, $\Delta U = W + Q = 0$

Exercice 4

Données

ETAT	A	B	C	D
Pression	$P_1 = 1$ bar	$2P_1$	$2P_1$	P_1
Volume	$V_1 = 10\,l$	V_1	$2V_1$	$2V_1$
Température	$T_1 = 0°C = 273$			

4.1 Cycle ABCD $W_{cycle} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$

$W_{AB} = W_{CD} = 0$ Transfo isochores

$W_{BC} = -2P_1V_1$ $W_{DA} = +P_1V_1 \Rightarrow$ $W_{cycle} = -P_1V_1$

4.2 Transformation isochore de A à B $\Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \text{cste}$.

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow T_B = T_A \times \frac{P_B}{P_A} = T_A \frac{2P_A}{P_A} = 2T_A$$

Donc $T_B = 2T_A = 2 \times 273\,K = 546\,K$.

Or les points B et D sont situés sur une isotherme on en déduit que $T_B = T_D$.

4.3 La masse d'air mise en jeu est donnée par $m = nM$

$$n = \frac{PV}{RT} \text{ ; en A, on a : } n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = \frac{10^5 \times 10}{8{,}31 \times 273} = 440{,}8 \text{ mol}$$

$$m = 440{,}8 \times 29 \times 10^{-3} = 12{,}78 \text{ kg}$$

4.4. Deux formules en fonction de la nature de la Transformation $\delta Q = C_V dT$ isochore ; $\delta Q = C_p dT$ isobare

et Mayer $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$; $C_p = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}$

i/ <u>ISOCHORE de A $\to$ B</u> ; $\delta Q = C_V dT \Rightarrow Q_{AB} = C_V \int_{T_A}^{T_B} dT = C_V (T_B - T_A)$

$$= \frac{nR}{\gamma - 1}(T_B - T_A) = \frac{nRT_B - nRT_A}{\gamma - 1} \quad \text{or } \begin{cases} nRT_B = P_B V_B \\ nRT_A = P_A V_A \end{cases}$$

$$= \frac{V_1}{\gamma - 1}(P_2 - P_1) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

ii) <u>ISOBARE de B $\to$ C</u> ; $\delta Q = C_p dT \Rightarrow Q_{BC} = C_p \int_{T_B}^{T_C} dT = C_p (T_C - T_B)$

$$= \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}(T_C - T_B) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_C V_C - P_B V_B)$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}(4P_1V_1 - 2P_1V_1) = \frac{2\gamma P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

iii) <u>ISOCHORE de C $\to$ D</u> $\quad Q_{CD} = C_V (T_D - T_C) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_D - T_C)$

$$= \frac{V_2(P_1 - P_2)}{\gamma - 1} = \frac{-2V_1 P_1}{\gamma - 1}$$

iv) <u>ISOBARE de D $\to$ A</u> $\quad Q_{DA} = C_p (T_A - T_D) = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1}(T_A - T_D)$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 (V_1 - V_2) = \frac{-\gamma P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

$$Q_{total} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$$

$$= \frac{P_1V_2}{\gamma-1} + \frac{2\gamma P_1V_1}{\gamma-1} - \frac{2V_1P_1}{\gamma-1} - \frac{\gamma P_1V_1}{\gamma-1}$$

$$= \frac{P_1V_1 - 2P_1V_2 + 2\gamma P_1V_1 - \gamma P_1V_2}{\gamma-1} = \frac{-P_1V_2 + \gamma P_1V_1}{\gamma-1}$$

$$= \frac{P_1V_2(\gamma-1)}{\gamma-1} = P_1V_1$$

On montre que $W + Q = 0$ En effet $W = -P_1V_2$

$$-P_1V_1 + P_1V_1 = 0.$$

Exercice n° 5 $P_1 = 1\,atm$; $V_1 = 10\,l$; $P_2 = 3\,atm$; $\gamma = C_p/C_v = 5/3$ $R = 8{,}3$

5.1/ Compression adiabatique $\Rightarrow P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \Leftrightarrow V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

A.N.: $V_2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)^{3/5} = 5{,}16\,l.$

5.2/ On pose $PV^{\gamma} = \text{cste} = A \Rightarrow P = \frac{A}{V^{\gamma}} = AV^{-\gamma}$

$$\Rightarrow W = \int_{V_1}^{V_2} -p\,dV = A\int_{V_1}^{V_2} -V^{\gamma}dV = \left[\frac{A\,V^{1-\gamma}}{\gamma-1}\right]_{V_1}^{V_2} = \left[\frac{PV}{\gamma-1}\right]_1^2$$

$$W = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma-1}$$

A.N. $W = 822\,J$

5.3/ $\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q = W$ en effet $Q = 0$ car processus adiabatique.

$\Delta U = 822\,J$

5.4/ $\Delta U = W = C_v(T_2 - T_1)$ $C_v = \frac{nR}{\gamma-1} \Rightarrow W = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$

D'où l'élévation de Température du gaz

$$T_2 - T_1 = \frac{W(\gamma-1)}{nR}$$

On dispose de 2g d'Hélium ($He = 4$) $\Rightarrow n = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ mole

Ainsi on a $T_2 - T_1 = 132°C$

$\boxed{\text{FIN CORRECTION T.D. du 30/01/2017}}$