RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Układ m równań różniczkowych zwyczajnych z warunkami początkowymi:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, ..., y_m\right), \quad x \in [a,b], \quad y_i\left(a\right) = y_{ia}, \quad i = 1, ..., m$$

W zapisie wektorowym: $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}\right), \quad x \in [a,b], \quad \mathbf{y}\left(a\right) = \mathbf{y}_a$

Twierdzenie (o jednoznaczności rozwiązania) *Jeśli:*

1. *funkcje* f_i *są ciągłe na zbiorze* $\mathbf{D} = \left\{(x, \mathbf{y}) \ : a \leqslant x \leqslant b, \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\right\}$
2. *funkcje* f_i *spełniają warunek Lipschitza względem* $\mathbf{y}$*, tzn.*

$$\exists\, L > 0 \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall \mathbf{y}, \overline{\mathbf{y}} \quad \| f_i(x,\mathbf{y}) - f_i(x,\overline{\mathbf{y}}) \| \leqslant L \, \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}} \|,$$

to dla każdych warunków początkowych $\mathbf{y}_a$ *istnieje dokładnie jedna funkcja* $\mathbf{y}\left(x\right)$*, ciągła, różniczkowalna i spełniająca*

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}(x)\right), \quad \mathbf{y}\left(a\right) = \mathbf{y}_a, \quad x \in [a,b].$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE 2

Stosujemy **metody numeryczne różnicowe** – przybliżona wartość rozwiązania obliczana jest w kolejnych punktach x_n,

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b,$$

gdzie $h_i = x_{i+1} - x_i$ – kolejne kroki metody.

Najpopularniejsze:

- metody jednokrokowe,
- metody wielokrokowe.

Definicja

Metoda jest **zbieżna**, jeśli dla każdego układu równań mającego jednoznaczne rozwiązanie $\mathbf{y}(x)$ zachodzi:

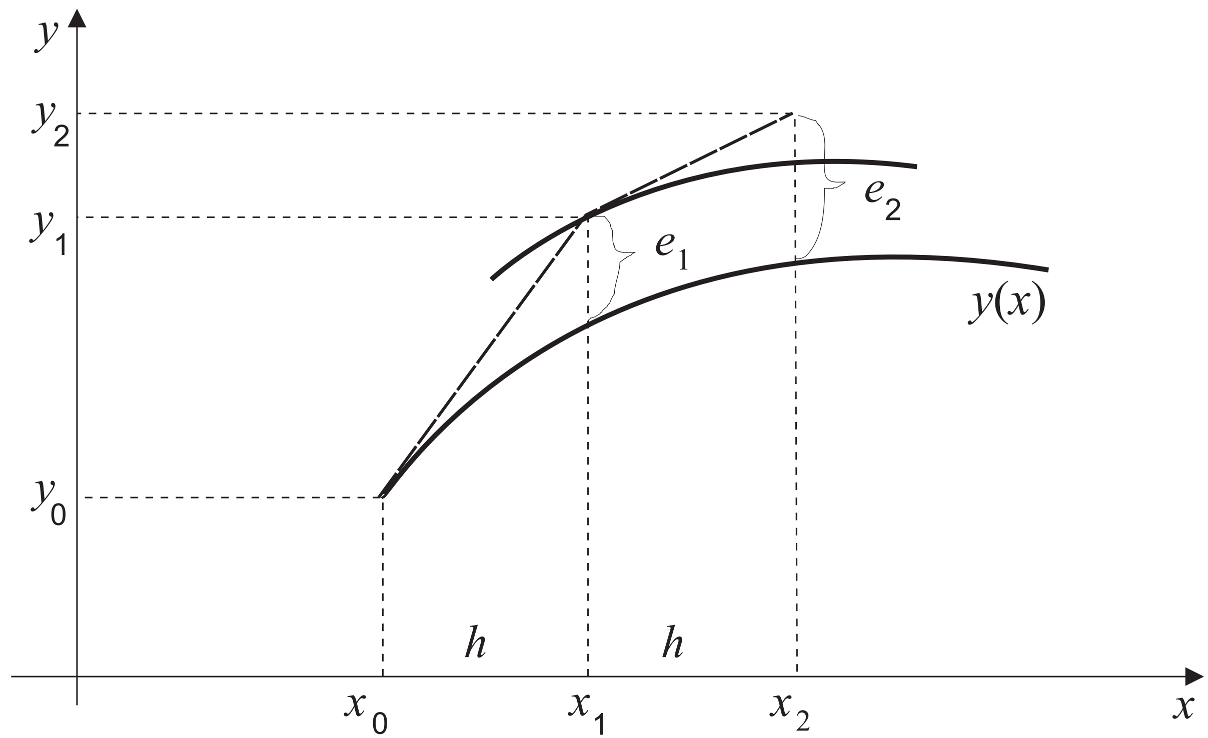
$$\lim_{h \to 0} \mathbf{y}(x_n; h) \to \mathbf{y}(x)$$

gdzie $\mathbf{y}(x_n; h)$ – rozwiązanie przybliżone uzyskane z krokiem h.

PRZYKŁAD – METODA EULERA

Szereg Taylora: $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \cdots$

Metoda Eulera: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$



$$|e_{n+1}| \leqslant M_z \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L} h = \xi_0 h, \quad \text{gdzie} \quad \mathrm{M_z} = \frac{1}{2} \max_{\mathrm{x} \in [\mathrm{a,b}]} |\mathrm{y}''(\mathrm{x})|,$$

PROSTE METODY ZMODYFIKOWANE

Zmodyfikowana metoda Eulera (metoda punktu środkowego):

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n))$$

Metoda Heuna:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))}{2} \\ &= y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right] \end{aligned}$$

(*Interpretacje geometryczne*)

ZMODYFIKOWANA METODA EULERA – Przykład

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h,\ y_n + \frac{1}{2}hf\,(x_n, y_n))$$

Model epidemii*:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -a\,y_1(x)\,y_2(x), \\ y_2'(x) &= a\,y_1(x)\,y_2(x) - b\,y_2(x), \quad (\ y_3'(x) = b\,y_2(x)\ ) \end{aligned}$$

**Kermacka-McKendricka (1972);* y_1 *- podatni,* y_2 *- chorujący,infekujący,* y_3 *- ozdrowieńcy*

Podać równania iteracji z krokiem h_n, z punktu (x_n, y_n), $y_n = [(y_1)_n, (y_2)_n]^T$.

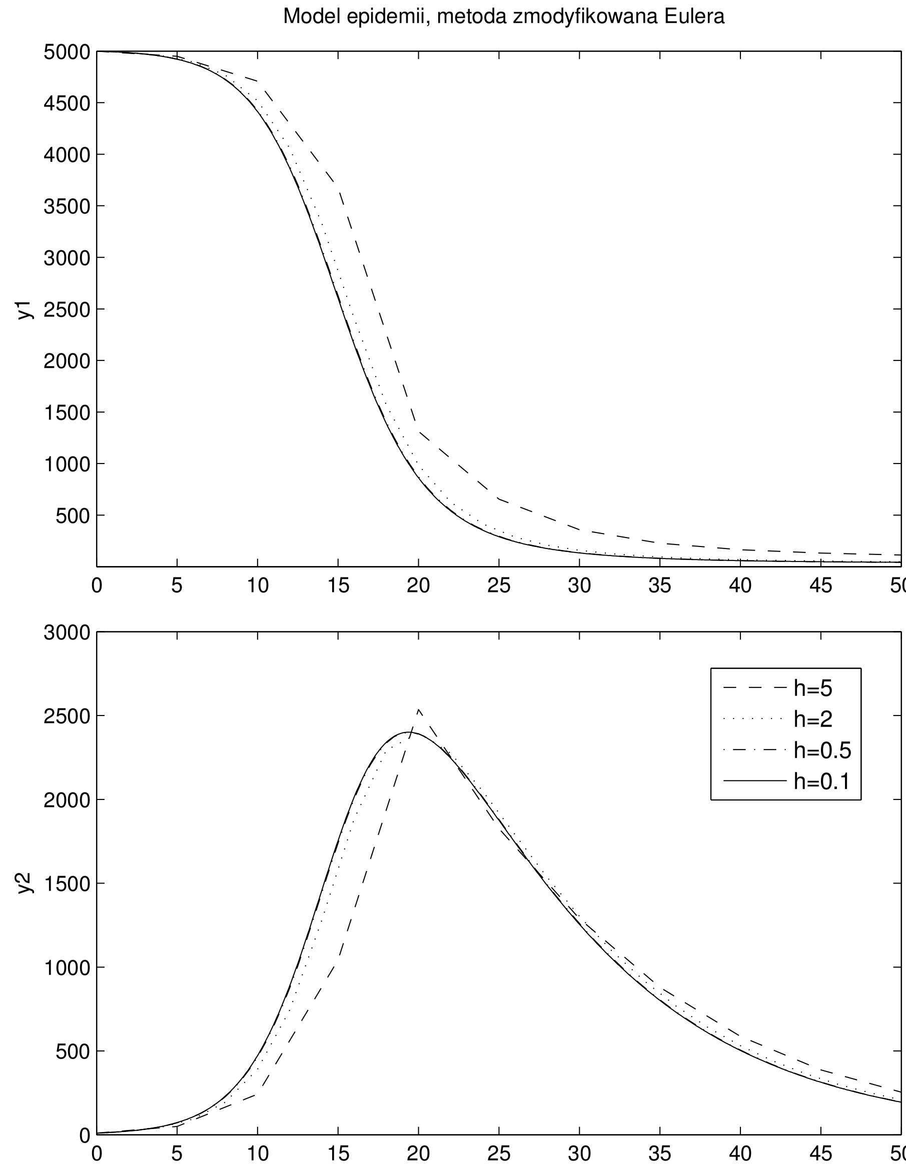
Metoda Eulera z krokiem $\frac{1}{2}h_n$:

$$\begin{aligned} (y_1)_{n+\frac{1}{2}} &= (y_1)_n + \frac{1}{2}h_n[-a(y_1)_n(y_2)_n], \\ (y_2)_{n+\frac{1}{2}} &= (y_2)_n + \frac{1}{2}h_n[a(y_1)_n(y_2)_n - b(y_2)_n] \end{aligned}$$

Równania iteracji:

$$\begin{aligned} (y_1)_{n+1} &= (y_1)_n + h_n\left(-a(y_1)_{n+\frac{1}{2}}(y_2)_{n+\frac{1}{2}}\right), \\ (y_2)_{n+1} &= (y_2)_n + h_n\left(a(y_1)_{n+\frac{1}{2}}(y_2)_{n+\frac{1}{2}} - b(y_2)_{n+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

ZMODYFIKOWANA METODA EULERA – Przykład c.d.



METODY JEDNOKROKOWE

Metody jednokrokowe:

$$y_{n+1} = y_n + h\,\Phi_f\,(x_n, y_n; h), \quad y_0 = y_a, \ (x_n = x_0 + nh, \ n = 0, 1, \ldots)$$

$$\Phi_f\,(x_n, y_n; h) = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \qquad (h \neq 0)$$

Metoda jest zbieżna, gdy $y\,(x_n; h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} y\,(x)$, tzn. gdy

$$y_n \underset{h \to 0}{\longrightarrow} y(x_n), \quad y_{n+1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} y(x_n + h),$$

czyli

$$\Phi_f\,(x_n, y_n; h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)),$$

stąd warunek aproksymacji (warunek zgodności):

$$\Phi_f\,(x, y; 0) = f\,(x, y)$$

Jest to warunek konieczny i dostateczny zbieżności.

BŁĄD APROKSYMACJI

Błąd aproksymacji (lokalny) – błąd powstały w jednym kroku, tj. przy założeniu $y_n = y(x_n)$ (zerowy błąd w punkcie x_n):

$$\begin{aligned} r_n(h) &\triangleq y(x_n + h) - y_{n+1} \\ &= y(x_n + h) - [y_n + h\Phi_f(x_n, y_n; h)] \\ &= y(x_n + h) - [y(x_n) + h\Phi_f(x_n, y(x_n); h)] \end{aligned}$$

Rozwinięcie funkcji $r_n(h)$ w szereg Taylora:

$$r_n(h) = r_n(0) + r_n'(0)\,h + \frac{1}{2} r_n^{(2)}(0)\,h^2 + \cdots$$

Metoda jest rzędu p, jeśli zachodzą równości:

$$r_n(0) = 0, \quad r_n'(0) = 0, \quad \ldots, \quad r_n^{(p)}(0) = 0, \quad r_n^{(p+1)}(0) \neq 0$$

BŁĄD APROKSYMACJI 2

Metoda jest rzędu p, jeśli

$$r_n(0) = 0, \;\; r_n'(0) = 0, \;\; \ldots, \;\; r_n^{(p)}(0) = 0, \;\; r_n^{(p+1)}(0) \neq 0$$

Wtedy

$$r_n(h) = \frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} h^{p+1} + O\left(h^{p+2}\right),$$

$\frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} h^{p+1}$ – część główna błędu aproksymacji,

$O\left(h^{p+2}\right)$ – funkcja rzędu nie niższego niż h^{p+2} ($\frac{O\left(h^{p+2}\right)}{h^{p+2}}$ jest ograniczone w otoczeniu zera).

BŁĄD APROKSYMACJI – Przykład (METODA EULERA)

$$r_n(h) = y(x_n + h) - [y_n + hf(x_n, y_n)]$$

Rozwinięcie w szereg Taylora:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)\,h + \frac{1}{2}y''(x_n)\,h^2 + \dots$$

Z definicji błędu aproksymacji $y_n = y(x_n)$, ponadto $y'(x_n) = f(x_n, y_n)$, stąd

$$y(x_n + h) = y_n + hf(x_n, y_n) + \frac{1}{2}y''(x_n)\,h^2 + \dots$$

$$y(x_n + h) - [y_n + hf(x_n, y_n)] = \frac{1}{2}y''(x_n)\,h^2 + \dots$$

$$r_n(h) = \frac{1}{2}y''(x_n)\,h^2 + O\left(h^3\right)$$

Metoda Eulera jest rzędu pierwszego.

METODY RUNGE-KUTTY (RK)

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i k_i,$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x_n, y_n\right), \\ k_2 &= f(x_n + c_2 h,\ y_n + h a_{21} k_1), \\ &\vdots \\ k_i &= f(x_n + c_i h,\ y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 2, 3, \ldots, m, \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i, \quad i = 2, 3, \ldots, m \right)$$

Maksymalny możliwy rząd metody $p(m)$:

$$\begin{aligned} p\left(m\right) &= m && \text{dla } m = 1, 2, 3, 4 \\ p\left(m\right) &= m - 1 && \text{dla } m = 5, 6, 7 \\ p\left(m\right) &\leqslant m - 2 && \text{dla } m \geqslant 8 \end{aligned}$$

METODY RUNGE-KUTTY (RK) 2

Metoda RK 3-go rzędu (RK3):

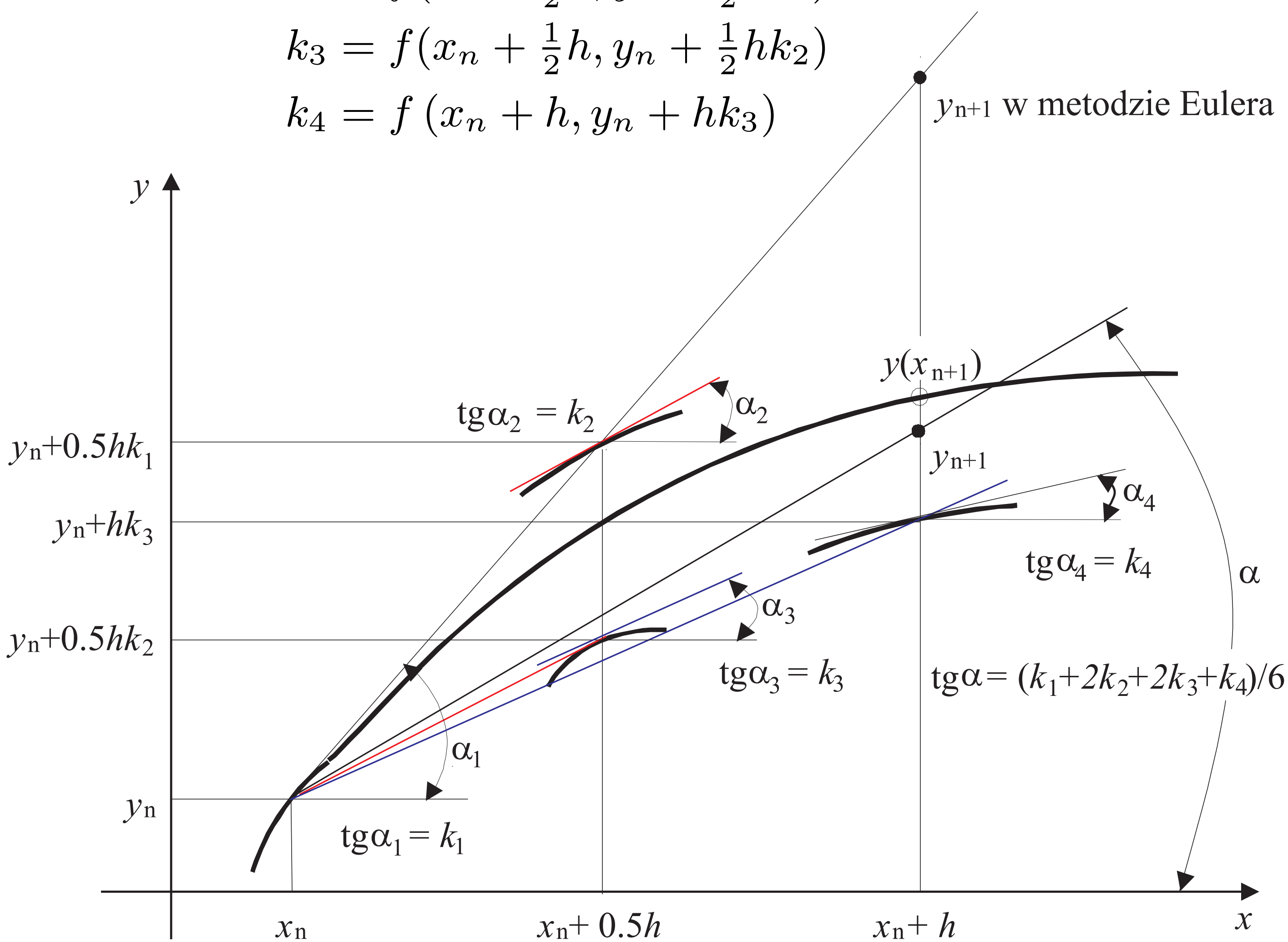
$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right)\\
k_1 &= f(x_n, y_n)\\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1)\\
k_3 &= f(x_n + h, y_n + h(-k_1 + 2k_2))
\end{aligned}
$$

Metoda RK 4-tego rzędu (RK4 "klasyczna"):

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right)\\
k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1)\\
k_3 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2)\\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + hk_3\right)
\end{aligned}
$$

METODA RK4

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{6}h\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f\,(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2)$$
$$k_4 = f\,(x_n + h, y_n + hk_3)$$



METODA RK4 – PRZYKŁAD

Model epidemii:
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -2y_1(x)y_2(x), \\ y_2'(x) &= 2y_1(x)y_2(x) - y_2(x). \end{aligned}$$

Krok metody RK4, z punktu (x_n, y_n), $y_n = [(y_1)_n, (y_2)_n]^T$, z długością h_n:

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= -2(y_1)_n \cdot (y_2)_n, \qquad k_{1,2} = 2(y_1)_n \cdot (y_2)_n - (y_2)_n \\
k_{2,1} &= -2[(y_1)_n + \frac{1}{2}h_n k_{1,1}] \cdot [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{1,2}] \\
k_{2,2} &= 2[(y_1)_n + \frac{1}{2}h_n k_{1,1}] \cdot [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{1,2}] - [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{1,2}] \\
k_{3,1} &= -2[(y_1)_n + \frac{1}{2}h_n k_{2,1}] \cdot [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{2,2}] \\
k_{3,2} &= 2[(y_1)_n + \frac{1}{2}h_n k_{2,1}] \cdot [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{2,2}] - [(y_2)_n + \frac{1}{2}h_n k_{2,2}] \\
k_{4,1} &= -2[(y_1)_n + h_n k_{3,1}] \cdot [(y_2)_n + h_n k_{3,2}] \\
k_{4,2} &= 2[(y_1)_n + h_n k_{3,1}] \cdot [(y_2)_n + h_n k_{3,2}] - [(y_2)_n + h_n k_{3,2}] \\
(y_1)_{n+1} &= (y_1)_n + \frac{1}{6}h_n(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) \\
(y_2)_{n+1} &= (y_2)_n + \frac{1}{6}h_n(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})
\end{aligned}$$

SZACOWANIE BŁĘDU (ZASADĄ PODWÓJNEGO KROKU)

Startujemy dwa razy z punktu x_n, wykonując (metoda rząd p):

1. Jeden krok o długości h – uzyskując punkt $y_n^{(1)}$,

$$y(x_n + h) \;=\; y_n^{(1)} + \underbrace{\frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} \cdot h^{p+1}}_{\text{część główna błędu}} + O\left(h^{p+2}\right)$$

2. Dwa kroki o długości $\frac{h}{2}$ – uzyskując punkt $y_n^{(2)}$.
   Zakładając identyczny błąd aproksymacji w każdym z tych kroków:

$$y(x_n + h) \;\simeq\; y_n^{(2)} + \underbrace{2 \cdot \frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}}_{\text{część główna błędu}} + O\left(h^{p+2}\right)$$

SZACOWANIE BŁĘDU (ZASADĄ PODWÓJNEGO KROKU)

Wyznaczając $\gamma = \frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$ z pierwszego równania i wstawiając do drugiego:

$$y\left(x_n+h\right) = y_n^{(2)} + \frac{h^{p+1}}{2^p}\frac{y\left(x_n+h\right)-y_n^{(1)}}{h^{p+1}} + O\left(h^{p+2}\right)$$

Przekształcamy:

$$\begin{aligned} y\left(x_n+h\right)(1-\frac{1}{2^p}) &= y_n^{(2)} - \frac{y_n^{(1)}}{2^p} + O\left(h^{p+2}\right) \\ &= y_n^{(2)}(1-\frac{1}{2^p}) + \frac{y_n^{(2)}}{2^p} - \frac{y_n^{(1)}}{2^p} + O\left(h^{p+2}\right) \\ &= y_n^{(2)}(\frac{2^p-1}{2^p}) + \frac{y_n^{(2)}-y_n^{(1)}}{2^p} + O\left(h^{p+2}\right) \end{aligned}$$

Mnożąc stronami przez $\frac{2^p}{2^p-1}$, dostajemy dla dwóch kroków $h/2$:

$$y\left(x_n+h\right) = y_n^{(2)} + \frac{y_n^{(2)}-y_n^{(1)}}{2^p-1} + O\left(h^{p+2}\right)$$

SZACOWANIE BŁĘDU (ZASADĄ PODWÓJNEGO KROKU) 2

Przekształcając podobnie uzyskujemy dla jednego kroku o długości h:

$$y\left(x_n + h\right) = y_n^{(1)} \; + \; 2^p \frac{y_n^{(2)} - y_n^{(1)}}{2^p - 1} \; + \; O\left(h^{p+2}\right)$$

Porównanie:

Oszacowanie błędu po pojedynczym kroku o długości h (część główna):

$$\delta_n(h) = 2^p \frac{\left(y_n^{(2)} - y_n^{(1)}\right)}{2^p - 1} \quad \left(\underset{p=4}{=} \; \frac{16}{15}\left(y_n^{(2)} - y_n^{(1)}\right) \right)$$

Oszacowanie błędu po dwóch kolejnych krokach o długości $h/2$:

$$\delta_n\left(2 \times \frac{h}{2}\right) = \frac{y_n^{(2)} - y_n^{(1)}}{2^p - 1} \quad \left(\underset{p=4}{=} \; \frac{1}{15}\left(y_n^{(2)} - y_n^{(1)}\right) \right)$$

METODY RUNGE-KUTTY-FEHLBERGA (RKF)

Dwie metody RK, m-etapowa rzędu p i $m{+}1$-etapowa rzędu $p{+}1$:

Metoda RK rzędu p:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i^* k_i \\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right) \\
k_i &= f(x_n + c_i h,\ y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \qquad i = 2, 3, \dots, m
\end{aligned}
$$

Metoda RK rzędu $p{+}1$:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m+1} w_i k_i \\
k_1 &= f\left(x_n, y_n\right) \\
k_i &= f(x_n + c_i h,\ y_n + h \cdot \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \qquad i = 2, 3, \dots, m+1
\end{aligned}
$$

Współczynniki w_i^* i w_i są różne, ale współczynniki c_i i a_{ij} są równe dla $i = 2, \dots, m$, tzn. **współczynniki k_i są równe dla** $i = 1, \dots, m$.

METODY RUNGE-KUTTY-FEHLBERGA (RKF) 2

- **dla metody rzędu p:**

$$y(x_n + h) = \underbrace{y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m} w_i^* k_i(h)}_{y_{n+1}^{(0)}} + \underbrace{\frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} h^{p+1}}_{\text{część główna błędu}} + O\left(h^{p+2}\right)$$

- **dla metody rzędu $p+1$:**

$$y(x_n + h) = \underbrace{y_n + h \cdot \sum_{i=1}^{m+1} w_i k_i(h)}_{y_{n+1}^{(1)}} + \underbrace{\frac{r_n^{(p+2)}(0)}{(p+2)!} h^{p+2} + O\left(h^{p+3}\right)}_{O\left(h^{p+2}\right)}$$

Odejmując stronami i pomijając "ogon" składający sie z wyrażeń $O\left(h^{p+2}\right)$:

$$\frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} h^{p+1} = h \left[\sum_{i=1}^{m} (w_i - w_i^*) \cdot k_i(h) + w_{m+1} \cdot k_{m+1}(h) \right] = y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}$$

Metody RKF (Rungego-Kutty-Fehlberga) – pary metod włożonych.

METODY RUNGE-KUTTY-FEHLBERGA (RKF) 3

Zwięzły zapis współczynników metody m-etapowej (tablica Butchera):

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
0 & & & & & w_1^* \\
c_2 & a_{21} & & & & w_2^* \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & w_3^* \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
c_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,m-1} & w_m^*
\end{array}
$$

Dla pary metod włożonych, m i m+1 etapowej, mamy jedną tablicę:

$$
\begin{array}{c|cccc|c|c}
0 & & & & & w_1^* & w_1 \\
c_2 & a_{21} & & & & w_2^* & w_2 \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
c_m & a_{m1} & & a_{m,m-1} & & w_m^* & w_m \\
c_{m+1} & a_{m+1,1} & \cdots & a_{m+1,m-1} & a_{m+1,m} & & w_{m+1}
\end{array}
$$

METODY RUNGE-KUTTY-FEHLBERGA (RKF) 4

Parametry pary metod włożonych 1 i 2 rzędu (RKF12):

c_i	a_{ij}		w_i^*	w_i
0			$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{255}{256}$	$\frac{255}{256}$
1	$\frac{1}{256}$	$\frac{255}{256}$		$\frac{1}{512}$

Parametry pary metod włożonych 2 i 3 rzędu (RKF23):

c_i	a_{ij}			w_i^*	w_i
0				$\frac{214}{891}$	$\frac{533}{2106}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{33}$	0
$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		$\frac{650}{891}$	$\frac{800}{1053}$
1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$		$-\frac{1}{78}$

METODY RUNGE-KUTTY-FEHLBERGA (RKF) 5

Parametry pary metod włożonych 4 i 5 rzędu (RKF45):

c_i	a_{ij}					w_i^*	w_i
0						$\frac{25}{216}$	$\frac{16}{135}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					0	0
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{1408}{2565}$	$\frac{6656}{12825}$
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{2197}{4104}$	$\frac{28561}{56430}$
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{50}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$		$\frac{2}{55}$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + \frac{1}{4}h,\ y_n + \frac{1}{4}k_1),\\
k_3 &= f(x_n + \frac{3}{8}h,\ y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2),\quad \ldots \text{ itd. do } \ k_6\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5,\ y_{n+1}^{(1)} = \cdots
\end{aligned}
$$

METODA RK4(5) Dormand-Prince'a*

Matlab solver "ode45" – metody włożone Dormand-Prince'a rzędu 4,5:

c_i	a_{ij}						w_i^*	w_i
0							$\frac{35}{384}$	$\frac{5179}{57600}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						0	0
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					$\frac{500}{1113}$	$\frac{7571}{16695}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				$\frac{125}{192}$	$\frac{393}{640}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{19372}{6561}$	$-\frac{25360}{2187}$	$\frac{64448}{6561}$	$-\frac{212}{729}$			$-\frac{2187}{6784}$	$-\frac{92097}{339200}$
1	$\frac{9017}{3168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5103}{18656}$		$\frac{11}{84}$	$\frac{187}{2100}$
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$		$\frac{1}{40}$

*) J.R. Dormand, P.J. Prince: A family of embedded Runge-Kutta formulae, *Journal of Computational and Applied Mathematics* (6), 1980.

ZMIANA DŁUGOŚCI KROKU

Część główna rzędu metody rzędu p:

$$\delta_n(h) = \gamma \cdot h^{p+1}, \quad \gamma = \frac{r_n^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$$

Zmieniając krok na αh:

$$\delta_n(\alpha h) = \gamma \cdot (\alpha h)^{p+1}$$

$$\delta_n(\alpha h) = \alpha^{p+1} \cdot \gamma h^{p+1} = \alpha^{p+1} \cdot \delta_n(h)$$

Zakładając dokładność ε:

$$|\delta_n(\alpha h)| = \varepsilon$$

$$\alpha^{p+1}|\delta_n(h)| = \varepsilon$$

stąd współczynnik modyfikacji kroku α:

$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon}{|\delta_n(h)|}\right)^{\frac{1}{p+1}}$$

Wzór słuszny dla dowolnej metody z oszacowaniem błędu $\delta_n(h)$.

ZMIANA DŁUGOŚCI KROKU 2

Ze względu na niedokładne szacowanie błędu, współczynnik bezpieczeństwa s:

$$h_{n+1} = s \cdot \alpha \cdot h_n, \quad \text{gdzie } s < 1$$

np. dla RKF45: s=0.9.

Parametry dokładności (parametry użytkownika):

$$\varepsilon = |y_n| \cdot \varepsilon_w + \varepsilon_b,$$

ε_w - dokładność względna, ε_b - dokładność bezwzględna.

Dla układu m równań długość kroku określa równanie z największym błędem, np. dla szacowania błędu wg zasady podwójnego kroku:

$$\delta_n(h)_i = \frac{(y_i)_n^{(2)} - (y_i)_n^{(1)}}{2^p - 1}, \quad \varepsilon_i = \left|(y_i)_n^{(2)}\right| \cdot \varepsilon_w + \varepsilon_b, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\alpha = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\frac{\varepsilon_i}{|\delta_n(h)_i|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

SCHEMAT REALIZACJI METOD RUNGE-KUTTY (RK, RKF)