

Лабораторная работа №2.

Выполнил: Миноцкий Ян (ББСО-01-18)

Вариант: 18

Необходимо найти приближение функции, заданной в точках, многочленом, значения которого совпадают со значениями функции в указанных точках.

x	1	3	5	7	9
y	18	22	20	24	26

Проведём интерполяцию функции многочленами Лагранжа.

Составим функции, которые принимают значения в соответствии с таблицей:

	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
x_1	1	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	0
x_3	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	0	0	0	0	1

Получилось следующее:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)} = \frac{x^4 - 24x^3 + 206x^2 - 744x + 945}{384} \\ \varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)} = \frac{x^4 - 22x^3 + 164x^2 - 456x + 315}{-96} \\ \varphi_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)} = \frac{x^4 - 20x^3 + 130x^2 - 300x + 189}{64} \\ \varphi_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_4-x_5)} = \frac{x^4 - 18x^3 + 104x^2 - 222x + 135}{-96} \\ \varphi_5(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)} = \frac{x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105}{384}\end{aligned}$$

Интерполяционный многочлен будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}f(x) &= \varphi_1(x)f(x_1) + \varphi_2(x)f(x_2) + \varphi_3(x)f(x_3) + \varphi_4(x)f(x_4) + \varphi_5(x)f(x_5) = \\ &= 18 \left(\frac{x^4 - 24x^3 + 206x^2 - 744x + 945}{384} \right) + 22 \left(\frac{x^4 - 22x^3 + 164x^2 - 456x + 315}{-96} \right) \\ &+ 20 \left(\frac{x^4 - 20x^3 + 130x^2 - 300x + 189}{64} \right) + 24 \left(\frac{x^4 - 18x^3 + 104x^2 - 222x + 135}{-96} \right) \\ &+ 26 \left(\frac{x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105}{384} \right) \\ &= \frac{(18 - 88 + 120 - 96 + 26)x^4}{384} + \frac{(-432 + 1936 - 2400 + 1728 - 416)x^3}{384} \\ &+ \frac{(3708 - 14432 + 15600 - 9984 + 2236)x^2}{384} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-13392 + 40128 - 36000 + 21312 - 4576)x}{384} \\
& + \frac{(17010 - 27720 + 22680 - 12960 + 2730)}{384} \\
& = -\frac{5}{96}x^4 + \frac{13}{12}x^3 - \frac{359}{48}x^2 + \frac{239}{12}x + \frac{145}{32}
\end{aligned}$$

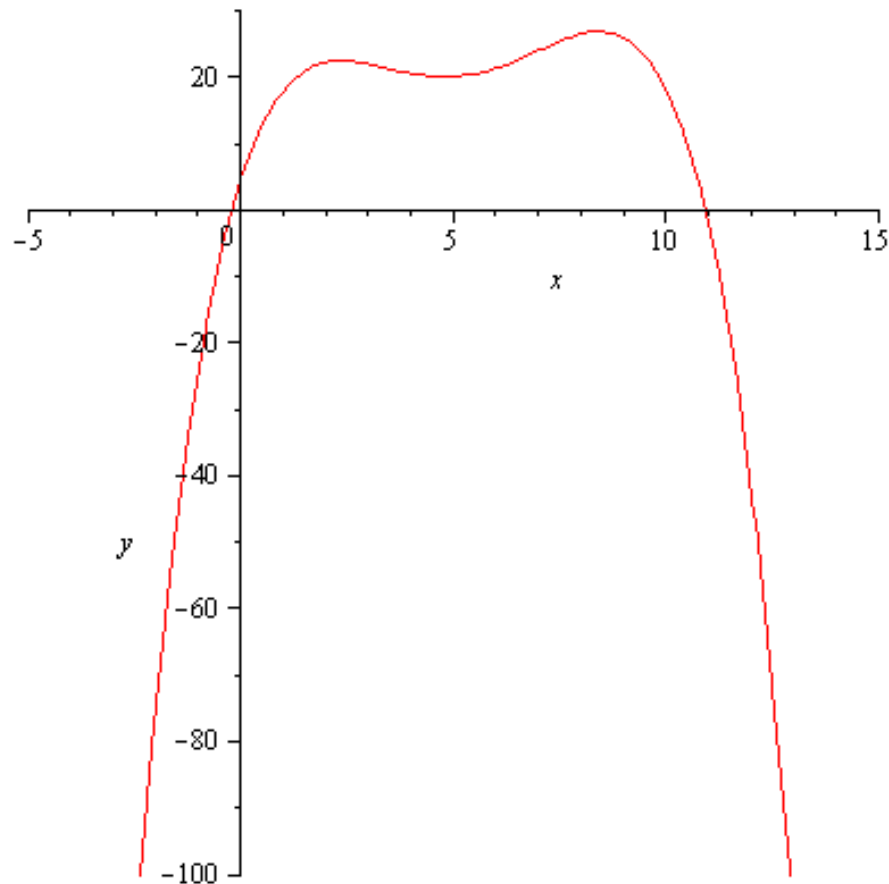
Сравним результаты расчётов с результатами, полученными в Maple:

$it := \text{interp}([1, 3, 5, 7, 9], [0 + n, 4 + n, 2 + n, 6 + n, 8 + n], x)$

$$-\frac{5}{96}x^4 + \frac{13}{12}x^3 - \frac{359}{48}x^2 + \frac{239}{12}x + \frac{145}{32}$$

2) Построим график полученного интерполяционного многочлена:

$\text{plot}(it, x = -5 .. 15, y = 30 .. -100)$



3) Найдём значение функции в точке $x = 6$.

$$\begin{aligned}
\text{Найдём } f(6). \quad f(6) &= -\frac{5}{96}6^4 + \frac{13}{12}6^3 - \frac{359}{48}6^2 + \frac{239}{12}6 + \frac{145}{32} = -\frac{6480}{96} + \frac{2808}{12} - \\
& \frac{12924}{48} + \frac{1434}{12} + \frac{145}{32} = \frac{681}{32}
\end{aligned}$$

$\text{subs}(x = 6, it)$

$$\frac{681}{32}$$