

1) Найти аналитическое выражение для неопределённого интеграла $\int \sin(\ln(18x))$.

Проведём замену переменной:

$$t = \ln(18x)$$

$$\int \frac{1}{18} \sin(t) e^t dt = \frac{1}{18} (\sin(t) e^t - \int e^t \cos(t) dt) = \frac{1}{18} (\sin(t) e^t - (e^t \cos(t) - \int e^t (-\sin(t)) dt))$$

$$\int \sin(t) e^t dt = \sin(t) e^t - (e^t \cos(t) + \int \sin(t) e^t dt)$$

$$\int \sin(t) e^t dt = \sin(t) e^t - e^t \cos(t) - \int \sin(t) e^t dt$$

$$2 \int \sin(t) e^t dt = e^t (\sin(t) - \cos(t))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{18} \int \sin(t) e^t dt &= \frac{1}{18} \left(\frac{e^t \sin t}{2} - \frac{e^t \cos t}{2} \right) \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{\sin(\ln(18x)) e^{\ln(18x)}}{2} - \frac{\cos(\ln(18x)) e^{\ln(18x)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} x (\sin(\ln(18x)) - \cos(\ln(18x))) \end{aligned}$$

Сравним решение с результатом работы Maple.

$n := 18$

18

$f := \sin(\ln(n \cdot x))$

$\sin(\ln(18x))$

$i := \text{int}(f, x)$

$$\frac{x \tan\left(\frac{1}{2} \ln(18x)\right) - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x \tan\left(\frac{1}{2} \ln(18x)\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{1}{2} \ln(18x)\right)^2}$$

Как можно заметить программа выдала ответ в виде записи с тангенсами, но из сравнения графиков в пункте 2 и из подстановки конкретных значений можно понять, что ответ получился тот же, только в другой форме.

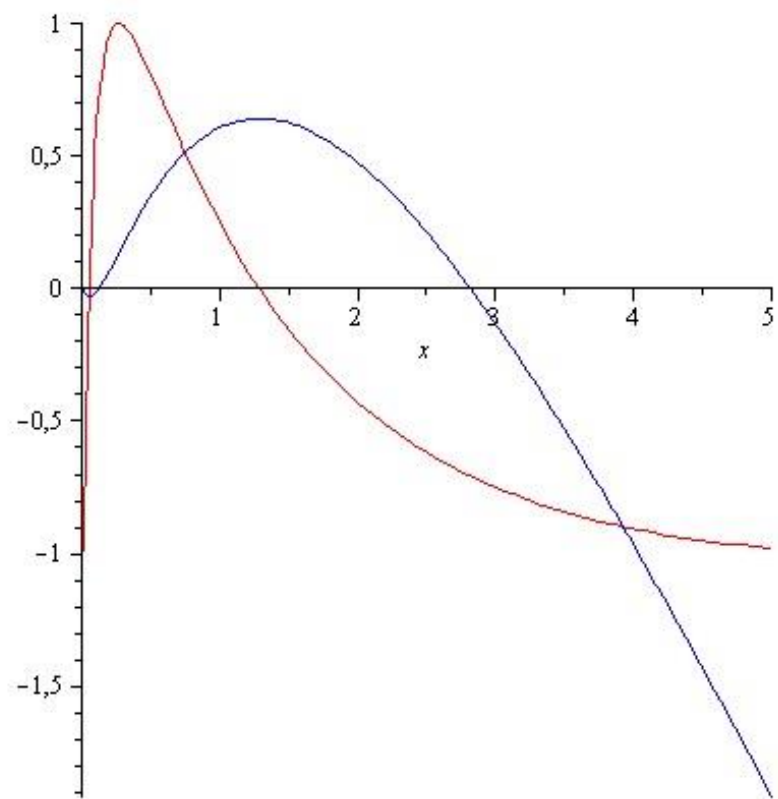
Построим графики функций:

2)

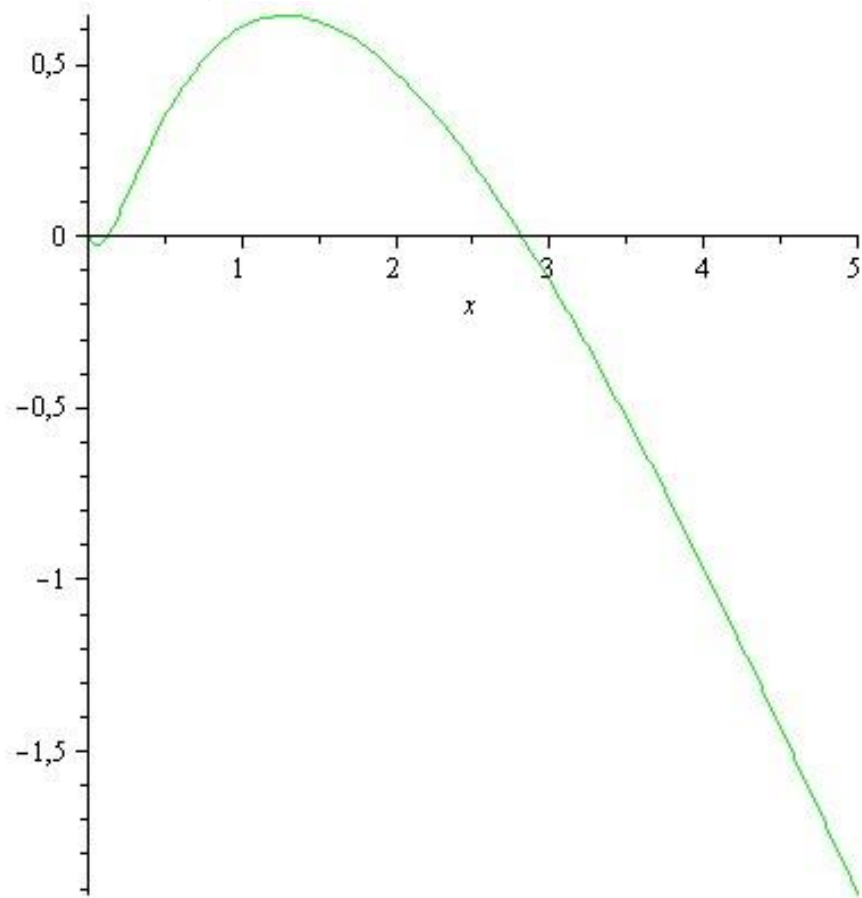
$$i2 := 0.5 \cdot x \cdot \sin(\ln(18 \cdot x)) - 0.5 \cdot x \cdot \cos(\ln(18 \cdot x))$$

$$0.5 x \sin(\ln(18 x)) - 0.5 x \cos(\ln(18 x))$$

`plot([f, i], x = 0..5, color = [red, blue])`



`plot(i2, x = 0..5, color = green)`



$$3) \int_2^{20} \sin(\ln(18x)) = \left(\frac{1}{2} x (\sin(\ln(18x)) - \cos(\ln(18x))) \right) \Big|_2^{20} = 10 \sin(\ln(18 \cdot 20)) - 10 \cos(\ln(18 \cdot 20)) - \sin(\ln(18 \cdot 2)) + \cos(\ln(18 \cdot 2)) = -13,56546840$$

$$\text{evalf}(10 \cdot \sin(\ln(18 \cdot 20)) - 10 \cos(\ln(18 \cdot 20)) - \sin(\ln(18 \cdot 2)) + \cos(\ln(18 \cdot 2)))$$

-13.56546840

evalf(Int(f, x = 2 .. 20 + n))

-13.56546840

$$\int_2^{20} e^{-x^2} \sin(18x) \quad \text{с помощью}$$

метода трапеций.

Согласно методу:

4) Найдём численное значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_{\text{тр}} = h \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right]$$

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{где } n \text{ — количество разбиений}$$

$$I \approx \frac{b - a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

С помощью Microsoft Office Excel получены значения функции в соответствующих точках.

x	f(x)
2	-0,0181650633
3	-0,0000689600
4	0,0000000286
5	0,0000000000
6	0,0000000000
7	0,0000000000
8	0,0000000000
9	0,0000000000
10	0,0000000000
11	0,0000000000
12	0,0000000000
13	0,0000000000
14	0,0000000000
15	0,0000000000
16	0,0000000000
17	0,0000000000

18	0,0000000000
19	0,0000000000
20	0,0000000000

20-2

$h = \frac{1}{18} = 0,0555555556$. С помощью этого метода мы не достигли

необходимой нам точности. При уменьшении параметра h точность увеличилась незначительно. В таком случае попробуем рассчитать численное значение интеграла с помощью метода Симпсона. Согласно методу:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx I_c = \frac{h}{6} (f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x'_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)).$$

$h=0.1$

С помощью Excel я получил таблицу:

x	f(x)	f(x'i)	li
2	-0,0181650633	-0,0107210489	-0,0009970837
2,1	0,0012242343	0,0082748538	0,0006967304
2,2	0,0074801726	0,0021150819	0,0002210899
2,3	-0,0026751034	-0,0039710325	-0,0003463414
2,4	-0,0022212521	0,0002903562	0,0000097134
2,5	0,0016426302	0,0014103475	0,0001275492
2,6	0,0003689322	-0,0004857101	-0,0000375530
2,7	-0,0006792716	-0,0003600055	-0,0000344416
2,8	0,0000527958	0,0002551218	0,0000213558
2,9	0,0002080653	0,0000502285	0,0000056670
3	-0,0000689600	-0,0000909196	-0,0000079713
3,1	-0,0000456418	0,0000073958	0,0000002491
3,2	0,0000310018	0,0000240176	0,0000022068
3,3	0,0000053359	-0,0000076564	-0,0000005802
3,4	-0,0000095224	-0,0000045264	-0,0000004471
3,5	0,0000008008	0,0000029476	0,0000002460
3,6	0,0000021693	0,0000004421	0,0000000546
3,7	-0,0000006648	-0,0000007804	-0,0000000690
3,8	-0,0000003511	0,0000000672	0,0000000023
3,9	0,0000002193	0,0000001533	0,0000000144
4	0,0000000286	-0,0000000451	-0,0000000034
...
19,9	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000

20	0,00000000000	0,00000000000	-
----	---------------	---------------	---

I= -0,0003396131. Так, удалось достичь высокой точности расчёта. И теперь полученный результат совпадает с результатом программы Maple.

$$f2 := e^{-x^2} \sin(n \cdot x)$$

$$e^{-x^2} \sin(18 x)$$

$$\text{evalf}(\text{Int}(f2, x = 2 .. 2 + n))$$

$$-0.0003420139873$$