Лабораторная работа №1.

Выполнил: Миноцкий Ян (ББСО-01-18)
Вариант: 18

1)Найдём точное решение квадратного уравнения:

$5x^2 + 2x - 18 = 0$

$D = 2^2 - 5 * (-18) * 4 = 364$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{364}}{10} = -\frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{91}$$

Сравним полученный результат с результатом, который получился при использовании Maple:

$n := 18$

$$18$$

$solve(5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - n = 0)$

$$-\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{91}, -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{91}$$

2)Теперь найдём приближённое решение этого же уравнения. Так как $9 < \sqrt{91} < 10$, корни уравнения $-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} * 9 < x_1 < -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} * 10$ и $-\frac{1}{5} - \frac{1}{5} * 9 > x_2 \; -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} * 10$. Следовательно $x_1 \in [1{,}6; 1{,}8]$ и $x_2 \in [-2{,}2; \; -2]$. Для нахождения приближённого значения одного из корней используем метод касательных (метод Ньютона). Для этого найдём первую и вторую производные функции $f(x) = 5x^2 + 2x - 18$.

$f'(x) = 10x + 2$

$f''(x) = 10$

Так как график левой части уравнения – парабола, ветви которой направлены вверх, начальное приближение a при нахождении значения положительного корня будет 1,8, в данной точке функция принимает положительное значение и выполняется условие $f(x) \times f''(x) > 0$.

Составим таблицу итераций для нахождения одного из корней уравнения, где a вычисляется по формуле $a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}$, а $d_k = |a_k - a_{k-1}|$. Вычисления будем производить до тех пор, пока d будет меньше 0,001.

Таблица 1 – Таблица значений при вычислении корня квадратного уравнения методом касательных

№	a	f(a)	f '(a)	d
0	1,8	1,8	20	-
1	1,71	0,0405	19,1	0,09
2	1,70788	2,25E-05	19,0788	0,00212
3	1,707878	6,95E-12	19,07878	1,18E-06

Получим, что $x_1 = 1{,}708 \pm 0{,}001$. Теперь найдём приближённое значение второго корня. Для этого найдём значение x в вершине параболы. $x_в = -\frac{b}{2a} = -0{,}2$. Зная, что корни уравнения расположены симметрично относительно вершины, найдём второй корень. $x_2 = x_в - (x_1 - x_в) = -2{,}108 \pm 0{,}001$.

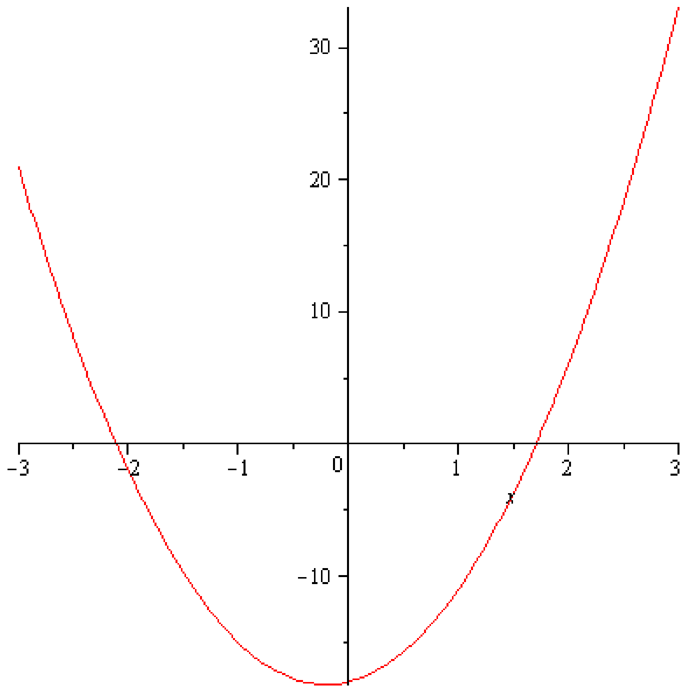
Сравним с результатами Maple:

$fsolve(5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - n = 0)$

$$-2.107878403,\ 1.707878403$$

3)Построим график левой части уравнения:

$plot(5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 18, x = -3 ..3)$



4)Найдём приближённое решение уравнения $x^2e^x - 18 = 0$. Для этого снова воспользуемся методом касательных. Найдём первую и вторую производную:

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$

$f''(x) = e^x(x^2 + 2x) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

Начальное приближение возьмём равное 1. При этом выполняется условие $f(x) \times f''(x) > 0$. Составим таблицу значений при каждой итерации. Обозначения аналогичные обозначениям в задании 2.

Таблица 2 – Решение нелинейного уравнения с помощью метода касательных

№	a	f(a)	f'(a)	d
0	1	-15,2817	8,154845	-
1	2,873943	128,2494	248,0255	1,873943
2	2,356862	40,64626	108,4127	0,517081
3	1,98194	10,50537	57,27049	0,374922
4	1,798506	1,539113	41,26728	0,183434
5	1,76121	0,051184	38,54981	0,037296
6	1,759882	6,23E-05	38,45605	0,001328
7	1,75988	9,25E-11	38,45594	1,62E-06

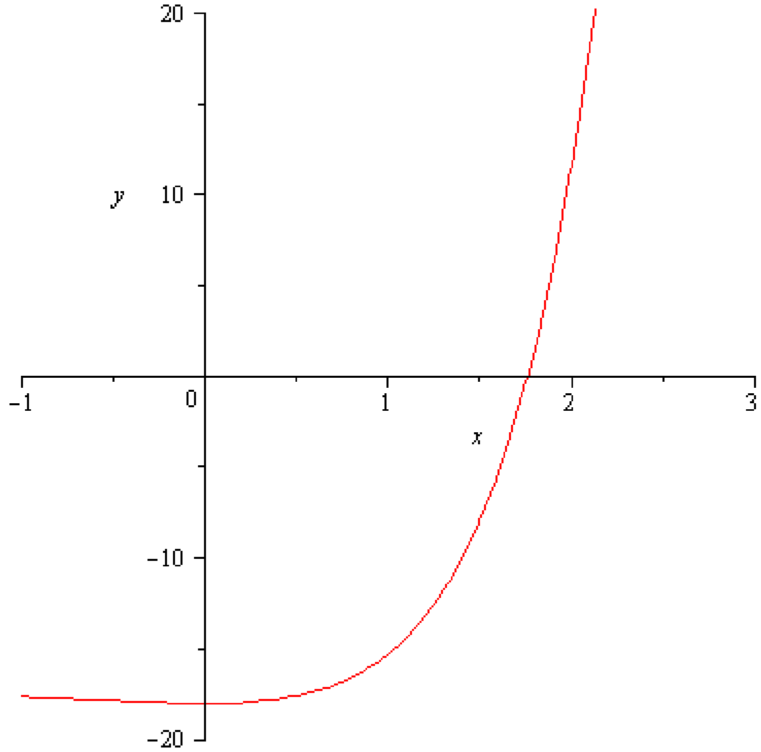
Необходимой нам точности мы достигли уже на 7 итерации. Таким образом, $x = 1{,}760 \pm 0{,}001$.

$fsolve\left(x^2 \cdot e^x - n = 0\right)$

1.759880238

5)Построим график левой части уравнения:

$plot\left(x^2 \cdot e^x - 18, x = -1..3, y = -20..20\right)$



6)Найдём решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -12 + 18 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 29 + 18 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 + 18 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 6 \\ 47 \\ 23 \end{pmatrix}$.

$detA = -2 - 36 + 20 + 3 + 16 - 30 = -29$

Определитель отличен от нуля, значит систему можно решить методом Крамера.

$detA_1 = -6 + 188 + 276 - 23 - 282 + 48 = 201$

$detA_2 = 94 - 36 - 115 - 141 - 30 - 92 = -320$

$detA_3 = -46 - 846 - 120 - 18 + 376 - 690 = -1344$

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = \frac{201}{-29} = -\frac{201}{29}$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = \frac{-320}{-29} = \frac{320}{29}$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = \frac{-1344}{-29} = \frac{1344}{29}$$

$solve(\{2\cdot x1 + 6\cdot x2 - x3 = -12 + n,\ 5\cdot x1 - x2 + 2\cdot x3 = 29 + n,\ -3\cdot x1 - 4\cdot x2 + x3 = 5 + n\}, \{x1, x2, x3\})$

$$\left\{x1 = -\frac{201}{29},\ x2 = \frac{320}{29},\ x3 = \frac{1344}{29}\right\}$$

7)Теперь найдём приближённое решение этой же системы уравнений. Стоит отметить, что приближённое решение нельзя найти с помощью метода Якоби или метода Зейделя. Поэтому просто найдём численное значение полученного в качестве решения набора из обыкновенных дробей.

$$x_1 = -\frac{201}{29} = -6{,}931 \pm 0{,}001$$
$$x_2 = \frac{320}{29} = 11{,}034 \pm 0{,}001$$
$$x_3 = \frac{1344}{29} = 46{,}345 \pm 0{,}001$$

$fsolve(\{2\cdot x1 + 6\cdot x2 - x3 = -12 + n,\ 5\cdot x1 - x2 + 2\cdot x3 = 29 + n,\ -3\cdot x1 - 4\cdot x2 + x3 = 5 + n\}, \{x1, x2, x3\})$

$$\{x1 = -6.931034483,\ x2 = 11.03448276,\ x3 = 46.34482759\}$$