

What is the mathematics?

数学，是研究数量、结构、变化以及空间等概念的一门学科，从某种角度看属于形式科学的一种。数学利用抽象化和逻辑推理，从计数、计算、量度、对物体形状及运动的观察发展而成。数学家们拓展这些概念，以公式化新的猜想，以及从选定的公理及定义出发，严谨地推导出一些定理。

基础数学的知识与运用是个人与团体生活中不可或缺的一环。对数学基本概念的完善，早在古埃及、美索不达米亚及古印度内的古代数学文本便可观见，而在古希腊那里有更为严谨的处理。从那时开始，数学的发展便持续不断地小幅进展，至16世纪的文艺复兴时期，因为新的科学发现和数学革新两者的交互，致使数学的加速发展，直至今日。数学并成为许多国家及地区的教育范畴中的一部分。

今日，数学使用在一些不同的领域中，包括科学、工程、医学、经济学和金融学等。数学对这些领域的应用通常被称为应用数学，有时亦会激起新的数学发现，并导致全新学科的发展，例如物理学的实质性发展中建立的某些理论激发数学家对于某些问题的不同角度的思考。数学家也研究纯粹数学，就是数学本身的实质性内容，而不以任何实际应用为目标。许多研究虽然以纯粹数学开始，但其过程中也发现许多应用之处。

所以，数学更多是注重**逻辑推导**，而不是计算，或者说，**计数**。

Counting

人类的学习一直都是先从**具象**到**抽象**。

自然数 - N

自然数严格的构造是依托于集合论的。这里暂且不表。

现实中有很多东西都是一份份（量子化）的，无法拆分开计数。例如：

- 个/人
- 只/动物
- 本/书本
- 匹/马

为了描述这些东西的**数量**，我们就**发明**了自然数。不过最开始的自然数是没有 0 的，现在为了方便加上去。

0, 1, 2, 3, 4, 5, ... 这些就是自然数 N ，没有 0 的自然数集合的符号使用 N_+

整数 - Z

有了自然数后，人们就发明了**加减**，但是很快，人们发现 $0 - 1$ 的结果不是一个自然数，所以就**发明了负数**这种东西。然后就创造了**整数**。

人们要验证乘法对于整个整数来说，是不是**闭合**的

有理数 - Q

为了补充除法的闭合性，我们**发明**了分数/小数。然后补充进整数，形成了有理数 Q 。

小数

有限小数

- 1.1
- 1.2
- 2.456

无限循环小数

- 1.11111...
- 1.12222...
- 3.33333...

无理数

勾股定理, $a^2 + b^2 = c^2$ 。

$$\sqrt{2} \notin Q$$
$$c^2 = 2$$

无理数的小数 - 无限不循环小数

- 1.12345678910111213...
- $\pi = 3.1415926...$

- e

实数 - R

人们把无理数并入有理数中，得到了**实数**。

实数轴

进制

$$9 + 1 = 10$$

$$1.0 / 3 = 0.3333\dots$$

Calculation

数学中，有个词叫做**记法**，是为了**定义**或是**方便书写/叙述**而生的。

加法 - $+$

有了自然数 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ 后，人们发现了它的可加性。例如：

我们有一个苹果，然后又**捡了一个**，现在一共有**两个**苹果。

于是乎，人们把这个符号定义为 $+$

$$1 + 2 = 3。$$

$$a + b = c, a \in N, b \in N \implies c \in N$$

$$0 + (5 - 2) = 0 - 3$$

减法 - $-$

人类的学习能力一向很强，既然 $1 + 1 = 2$ ，自然，当我们丢失了手中一个果子后，会有 $2 - 1 = 1$ 。

这便是加法的逆运算——**减法**。

$$1 - 2 = ? \implies 2 + ? = 1$$

$$a - b = c, a \in N, b \in N \not\Rightarrow c \in N$$

$$a - b = c, a \in Z, b \in Z \implies c \in Z$$

乘法 - \times

乘法在小学，被描述为

多个相同的自然数相加的简单**记法**

$$2 * \frac{3}{2} = 3$$

$$2 + 2 + 2 = 6 \text{ 记作 } 2 \times 3 = 6。$$

$$3 + 3 = 6 \text{ 记作 } 3 \cdot 2 = 6。$$

除法 - \div

乘法的逆运算。

$$2 \times 3 = 6 \implies 6 \div 3 = 2 \text{ or } 6 \div 2 = 3$$

$$3 \div 2 = 1.5$$

$$3 \div 2 = \frac{3}{2}$$

$$2/1 = 2 = \frac{2}{1}$$

次方 - a^b

乘法在小学，被描述为

多个相同的数相乘的简单**记法**

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ 记作 } 2^3 = 8 \implies 2^3 = 8。$$

$$a^b, b \in N$$

$$2 * 2 * 2 = 2^3$$

$$2^3 * 2^4 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7$$

$$a^b * a^c = a^{b+c}$$

$$a^b / a^b = a^{b-b} = a^0$$

$$1/a^b = a^{0-b} = a^{-b}$$

$$a^b = c$$

$$c^d = a^{b^d} = a^{b*c}$$

$$2 * 2 * 2 = 2^3 = 8$$

$$8^3 = 8 * 8 * 8$$

$$a^2 = c$$

$$c^{(1/2)} = \sqrt{c} = \pm a$$

$$(a^3)^{(1/3)} = 3^{2/3} \implies a = 3^{\frac{2}{3}}$$

对数 - $\log_x n$

次方的逆运算