

L24_Waves and Superposition

波动方程就是一本说明书

你拿到的这个波动方程 $z(y, t) = A \cos(ky - \omega t)$ 包含了关于这个波的所有信息。只要你会“读”，所有问题都能直接从这个公式里找到答案。

“说明书”里的符号	它代表什么物理意义？	英文
z	质点位移 (particle displacement)	质点在 z 轴方向上，距离它自己平衡位置的距离。
y	波的传播坐标 (wave position)	波正在沿着 y 轴传播。
A	振幅 (Amplitude)	质点振动的最大位移。
k	波数 (Wave Number)	与波长 λ (wavelength) 有关, $k=2\pi/\lambda$ 。
ω	角频率 (Angular Frequency)	和我们之前学的SHM里的一样，与周期 T 有关, $\omega=2\pi/T$ 。

重要考点：两种速度，千万别搞混！

这是学波动时最大的陷阱，也是必考点。

1. 波的传播速度 (Wave Propagation Speed, v_{wave})

- 含义：波形（比如一个波峰）在介质中向前移动的速度。它对于一个确定的波是**恒定**的。
- 公式： $v = \frac{\omega}{k}$

2. 质点的振动速度 (Particle Vibration Speed, v_{particle})

- 含义：介质中某一个“点”（比如绳子上的一个小片段）上下振动的速度。它是在**时刻变化**的，和简谐运动一样，在平衡位置时最大，在最高/最低点时为零。
- 公式： $v_{\text{particle, max}} = A\omega$

一句话总结： $v = \omega/k$ 是波跑多快， $v = A\omega$ 是点抖多快。

机械波（绳子上的波）

所有关于吉他弦、绳子振动的问题，都围绕着**3个核心公式**。记住它们，然后像解方程一样把已知条件代入去求未知数就行。

核心公式

1. 波速、频率、波长的关系：这是最基本的公式。

- $v = f\lambda$
 - v = 波速 (m/s)
 - f = 频率 (Hz)，题目通常会直接给你，比如振动源的频率。
 - λ = 波长 (m)

2. 绳子上的波速：波速由绳子自身属性决定。

- $v = \sqrt{T / \mu}$
 - T = 张力 (N)。如果绳子末端挂着一个重物，那么张力 T 就等于重物的重力 mg
 - μ = 线密度 (kg/m)，即每米绳子的质量。

3. standing waves(harmonic waves)：当绳子两端固定形成驻波时，绳长和波长有固定关系。

- $L = n * (\lambda / 2)$
 - L = 绳子的振动长度 (m)。
 - n = 谐波次数 (整数, $n=1, 2, 3\dots$)。
 - $n=1$: 基频 (第1谐波)，绳子上呈现 **半个** 波形。
 - $n=2$: 第2谐波，绳子上呈现 **1个完整** 波形。
 - $n=3$: 第3谐波，绳子上呈现 **1.5个** 波形。

解题思路

- 第1步：分析题目给了什么。是 f , L , n 还是 μ ?
- 第2步：看缺什么，用哪个公式。
 - 给了 L 和 n (谐波)? 马上用公式(3)求出波长 λ 。
 - 有了 λ ，又给了 f ? 马上用公式(1)求出波速 v 。
 - 有了 v ，又给了 μ ? 马上用公式(2)求出张力 T 。
 - 如果问悬挂质量 m ? 用 $T = mg$ 算出来。
- 概念题怎么判断?
 - 问：只改变频率 f ，什么会变?
 - 张力 T 不变， μ 不变 $\rightarrow v$ 不变。根据 $v = f\lambda$ ， v 不变， f 变了，所以 λ 会变
 - 问：只改变悬挂质量 m (即张力 T)，什么会变?
 - T 变了 $\rightarrow v$ 会变。根据 $v = f\lambda$ ，频率 f 不变， v 变了，所以 λ 也必须变。

常见问法

“Fundamental frequency” (基频) 是最简单、最低的那个频率

在作业题里，它特指琴弦或绳子在形成第1谐波 ($n=1$) 时的振动频率。

把它想象成一个音阶里的 "do"。它是所有音符的基础。

- **最简单的振动模式:** 正如我们之前讨论的, 第1谐波 ($n=1$) 是琴弦上最简单的驻波图案, 整个弦形成一个单独的“鼓包”。
- **最低的频率:** 这个最简单的振动模式所对应的频率, 就是这根弦能发出的**最低**的那个音, 也就是基频。
- **谐波的基础:** 所有其他更复杂的振动模式 (第2、第3、第4谐波...) 的频率, 都是这个基频的整数倍。
 - 第2谐波的频率 = $2 \times$ 基频
 - 第3谐波的频率 = $3 \times$ 基频
 - ...依此类推

****所以, 当你看到 "fundamental frequency", 在解题时就直接代入 $n=1$ 即可。**

弦的基频 (f_1) 可以用以下公式计算: $f_1 = v/(2L)$

What is the maximum mass that can be used to still create a coherent standing wave pattern?

为了产生驻波, 至少需要形成基频 (第1谐波, $n=1$)。当 $n=1$ 时, 弦长 L 等于半个波长 ($L=\lambda/2$)。

行波方程 (Traveling Wave Equation)。

解题总纲领

我们的最终目标是建立一个完整的行波方程, 它长这个样子: $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$

这个方程就像波的“身份证”, 里面包含了它的一切信息:

- $y(x, t)$: 在任意位置 x 和任意时间 t 的位移。
- A : **振幅** (Amplitude) - 波有多高。
- k : **波数** (Wavenumber) - 描述波在空间上的重复速度。
- ω : **角频率** (Angular Frequency) - 描述波在时间上的振动速度。
- ϕ : **相位常数** (Phase Constant) - 描述波在 $t=0, x=0$ 时的初始状态。

解题步骤就是把 A, k, ω, ϕ 这四个“空”给填上。

解题四步法

第1步: 找到“简单”的参数 A, ω, k

- **A (振幅):** 题目直接告诉你了。
 - $A = 0.25 \text{ m}$
- **ω (角频率):** 用频率 f 来算。
 - **公式:** $\omega = 2\pi f$
 - **计算:** $\omega = 2\pi * 40 \text{ Hz} = 80\pi \text{ rad/s}$
- **k (波数):** 这个稍微多一步, 它需要波长 λ 。
 - **公式:** $k = 2\pi / \lambda$
 - 为了求 k , 我们得先求 λ 。 λ 需要波速 v ($\lambda = v/f$)。
 - 波速 v 由绳子属性决定 ($v = \sqrt{T/\mu}$)。
 - **计算顺序:**
 1. 先算波速 v : $v = \sqrt{20.48 \text{ N} / 0.02 \text{ kg/m}} = \sqrt{1024} = 32 \text{ m/s}$
 2. 再算波长 λ : $\lambda = v / f = 32 \text{ m/s} / 40 \text{ Hz} = 0.8 \text{ m}$
 3. 最后算波数 k : $k = 2\pi / 0.8 \text{ m} = 2.5\pi \text{ rad/m}$

到这里, 我们的方程已经完成了80%: $y(x, t) = 0.25 \sin(2.5\pi x - 80\pi t + \phi)$ 只剩下关键的 ϕ 了。

第2步: 利用“初始条件”确定 ϕ (最关键的一步)

ϕ 决定了波的“起跑姿势”。题目给了两个初始条件: $t=0, x=0$ 时, 1) $y=0$, 2) 向下运动。

- **使用条件1: $y=0$**
 - 把 $x=0, t=0$ 代入我们不完整的方程: $y(0, 0) = 0.25 \sin(2.5\pi*0 - 80\pi*0 + \phi) = 0.25 \sin(\phi)$
 - 因为题目说此时 $y=0$, 所以: $0.25 \sin(\phi) = 0 \Rightarrow \sin(\phi) = 0$
 - $\sin(\phi) = 0$ 有两种可能: $\phi = 0$ 或者 $\phi = \pi$ 。我们该选哪个? 这就需要条件2。
- **使用条件2: “向下运动”**
 - “向下运动”指的是垂直速度 v_y 是负数。速度是位移的导数。
 - 我们把方程 $y(x, t)$ 对时间 t 求导, 得到速度方程: $v_y(x, t) = -A\omega \cos(kx - \omega t + \phi)$
 - 把 $x=0, t=0$ 代入速度方程: $v_y(0, 0) = -A\omega \cos(\phi)$
 - 因为是向下运动, 所以 $v_y(0, 0)$ 必须是负数。 $-A\omega \cos(\phi) < 0$
 - 因为 A 和 ω 都是正数, 所以 $-A\omega$ 是个负数。要让整个式子为负, $\cos(\phi)$ 必须是正数。
 - **最后抉择:**
 - 如果 $\phi = 0$, 则 $\cos(0) = +1$ (是正数, \checkmark 这就是我们要的!)
 - 如果 $\phi = \pi$, 则 $\cos(\pi) = -1$ (是负数, X)
 - **结论:** $\phi = 0$

第3步: 写出完整的“身份证”方程

现在所有参数都找到了, 把它们组合起来: $y(x, t) = 0.25 \sin(2.5\pi x - 80\pi t)$

第4步：代入题目要求的值，求解！

题目问：在 $x_1 = 0.5 \text{ m}$ 且 $t = 0$ 时的位移 y_1 是多少？直接代入我们最终的方程： $y_1 = y(0.5, 0) = 0.25 \sin(2.5\pi * 0.5 - 80\pi * 0)$ $y_1 = 0.25 \sin(1.25\pi)$

$\sin(1.25\pi)$ 就是 $\sin(5\pi/4)$ ，它的值是 $-\sqrt{2} / 2 \approx -0.707$ 。 $y_1 = 0.25 * (-0.707) \approx -0.177 \text{ m}$

答案 $y_1 = -0.177 \text{ m}$

手指按压后的基频

当手指按在距离吉他顶部 0.169 m 的位置时，弦的有效振动长度 (L') 变为： $L' = L - 0.169 \text{ m}$