Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (als Graph und tabellarischer Übergangsfunktion) an, der über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die folgende Sprache akzeptiert.

(a) Die Menge aller Wörter, die das Teilwort 1010 enthalten.

(b) Die Menge aller Wörter, bei denen die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Zeigen Sie

$$\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v) \quad \text{für alle} \quad u, v \in \Sigma^*$$

auf zweierlei Weise:

(a) Direkt mittels Induktion über $|u|$.

(b) Mit Hilfe der relationalen Schreibweise aus Tutoraufgabe 3 dieses Übungsblatts.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Endliche Automaten können auch in der Kodierung bzw. Dekodierung eingesetzt werden. Sei $\Sigma := \{\mathtt{0}, ..., \mathtt{9}\}$. Wir können eine Liste von Wörtern $w_1, ..., w_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, über ein einziges Wort kodieren, indem wir vor jedes Wort w_i dessen Länge $n_i := |w_i|$ schreiben: $w := n_1 w_1 n_2 w_2 ... n_k w_k$. Das funktioniert nur, wenn $w_1, ..., w_k$ höchstens Länge 9 haben. Ein so erzeugtes Wort w nennen wir *Präfix-Kodierung*. Zum Beispiel können wir $w_1 = \mathtt{512}, w_2 = \varepsilon, w_3 = \mathtt{2024}$ über $w = \mathtt{3512042024}$ kodieren. Weitere Präfix-Kodierungen sind etwa `123456`, ε, oder `2020`. Die Wörter `1234`, `007` und `2024` sind dagegen keine Präfix-Kodierungen.

Wir betrachten nun die Sprache L aller Präfix-Kodierungen.

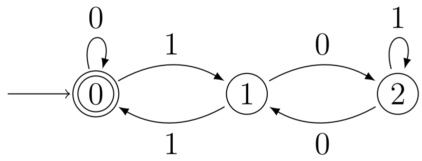
(a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert. Erstellen Sie dafür sowohl eine graphische Darstellung als auch eine formale Beschreibung, in der Sie das Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ angeben. Ihr DFA darf höchstens 20 Zustände haben.

   Hinweis: Beim Zeichnen von DFAs können Sie eine Kante mit Σ beschriften, statt jedes Zeichen des Alphabets einzeln aufzulisten.

(b) Geben Sie einen mengentheoretischen Ausdruck für L an. Sie dürfen nur endliche Mengen verwenden und diese mit Hilfe von endlichen Vereinigungen, endlichen Schnitten, sowie den Operationen auf Sprachen aus Definition 2.3 kombinieren.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M = (\{0,1,2\}, \{0,1\}, \delta, 0, \{0\})$ (Beispiel 3.5 aus der Vorlesung):



Zeigen Sie, dass der DFA genau die Wörter $w \in \{0,1\}^*$ akzeptiert, für die $\#w$ ein Vielfaches von 3 ist. Hierbei definieren wir $\#\varepsilon = 0$ und erlauben führende Nullen. Die Intuition ist, dass sich der Automat genau dann im Zustand n befindet, wenn $\#w \bmod 3 = n$ für das bisher gelesene Wort w gilt.

(a) Zeigen Sie zuerst unter der Annahme, dass sich der Automat nach dem Einlesen eines Wortes w mit $\#w \bmod 3 = n$ im Zustand n befindet, die Aussage $\delta(n, b) = \#(wb) \bmod 3$ für ein beliebiges Zeichen $b \in \{0,1\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie dann $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$.

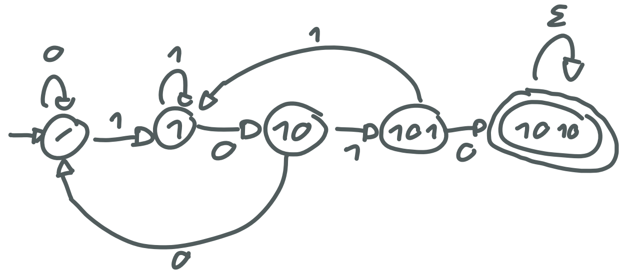
Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (als Graph und tabellarischer Übergangsfunktion) an, der über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ die folgende Sprache akzeptiert.

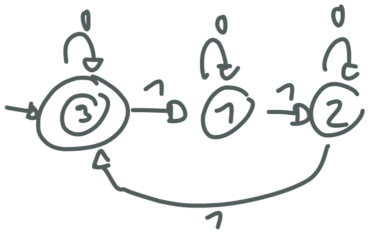
(a) Die Menge aller Wörter, die das Teilwort 1010 enthalten.

(b) Die Menge aller Wörter, bei denen die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist.

a)



b)



Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Zeigen Sie

$$\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v) \quad \text{für alle} \quad u, v \in \Sigma^*$$

auf zweierlei Weise:

(a) Direkt mittels Induktion über $|u|$.

(b) Mit Hilfe der relationalen Schreibweise aus Tutoraufgabe 3 dieses Übungsblatts.

a)

Basis $|u| = 1 \Rightarrow u \in \Sigma$

$$\hat\delta(q,uv) \overset{\hat\delta\,\text{Def}}{=} \hat\delta(\delta(q,u),v) = \hat\delta(\hat\delta(q,u),v) \quad \square$$

Schritt

Annahme $\hat\delta(q,uv) = \hat\delta(\hat\delta(q,u),v)$ mit $|u| = n$

Behauptung $\hat\delta(q,wv) = \hat\delta(\hat\delta(q,w),v)$ mit $|w| = n+1$

$$\hat\delta(q,wv) = \hat\delta(q,xuv) \overset{x\in\Sigma}{=} \hat\delta(q,xs) \overset{\hat\delta\,\text{Def}}{=} \hat\delta(\hat\delta(q,x),s)$$
$$= \hat\delta(\hat\delta(q,x),uv)$$
$$\overset{IA}{=} \hat\delta(\hat\delta(\hat\delta(q,x),u),v)$$
$$\overset{\hat\delta\,\text{Def}}{=} \hat\delta(\hat\delta(q,xu),v)$$
$$= \hat\delta(\hat\delta(q,w),v) \quad \square$$

b)

$$p \xrightarrow{a} q \Leftrightarrow \delta(p,a) = q$$

$$p_1 \xrightarrow{a_1} p_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q \Leftrightarrow \delta(p, a_1 a_2 \dots a_n) = q$$

$$\hat\delta(p_1,uv) = r$$

$$\Rightarrow p_1 \xrightarrow{u_1} p_2 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_n} q_1 \xrightarrow{v_1} q_2 \xrightarrow{v_2} \dots \xrightarrow{v_m} r$$

$$\Rightarrow (p_1 \xrightarrow{u_1} p_2 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_n} q_1) \xrightarrow{v_1} q_2 \xrightarrow{v_2} \dots \xrightarrow{v_m} r$$

$$\Rightarrow \hat\delta(p_1,u) \xrightarrow{v_1} q_2 \xrightarrow{v_2} \dots \xrightarrow{v_m} r$$

$$\Rightarrow \hat\delta(\hat\delta(p_1,u),v) = r$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

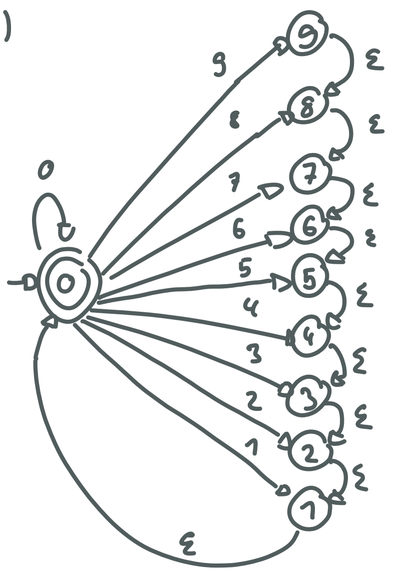
Endliche Automaten können auch in der Kodierung bzw. Dekodierung eingesetzt werden. Sei $\Sigma := \{0, ..., 9\}$. Wir können eine Liste von Wörtern $w_1, ..., w_k$, mit $k \in \mathbb{N}$, über ein einziges Wort kodieren, indem wir vor jedes Wort w_i dessen Länge $n_i := |w_i|$ schreiben: $w := n_1 w_1 \, n_2 w_2 ... n_k w_k$. Das funktioniert nur, wenn $w_1, ..., w_k$ höchstens Länge 9 haben. Ein so erzeugtes Wort w nennen wir *Präfix-Kodierung*. Zum Beispiel können wir $w_1 = 512, w_2 = \varepsilon, w_3 = 2024$ über $w = 3512042024$ kodieren. Weitere Präfix-Kodierungen sind etwa 123456, ε, oder 2020. Die Wörter 1234, 007 und 2024 sind dagegen keine Präfix-Kodierungen.
Wir betrachten nun die Sprache L aller Präfix-Kodierungen.

(a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) an, der L akzeptiert. Erstellen Sie dafür sowohl eine graphische Darstellung als auch eine formale Beschreibung, in der Sie das Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ angeben. Ihr DFA darf höchstens 20 Zustände haben.

Hinweis: Beim Zeichnen von DFAs können Sie eine Kante mit Σ beschriften, statt jedes Zeichen des Alphabets einzeln aufzulisten.

(b) Geben Sie einen mengentheoretischen Ausdruck für L an. Sie dürfen nur endliche Mengen verwenden und diese mit Hilfe von endlichen Vereinigungen, endlichen Schnitten, sowie den Operationen auf Sprachen aus Definition 2.3 kombinieren.

a)

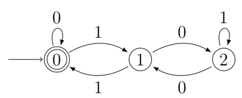


$$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) = \Big(\{0, \dots, 9\},\ \{0, \dots, 9\},\ \delta(q,x) = \begin{cases} x & \text{falls } q = 0 \\ q-1 & \text{sonst} \end{cases},\ 0,\ \{0\} \Big)$$

b) $\{xw \mid 0 \le \#x \le 9 \land w \in \Sigma^x\}^*$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M = (\{0, 1, 2\}, \{0, 1\}, \delta, 0, \{0\})$ (Beispiel 3.5 aus der Vorlesung):



Zeigen Sie, dass der DFA genau die Wörter $w \in \{0, 1\}^*$ akzeptiert, für die $\#w$ ein Vielfaches von 3 ist. Hierbei definieren wir $\#\varepsilon = 0$ und erlauben führende Nullen. Die Intuition ist, dass sich der Automat genau dann im Zustand n befindet, wenn $\#w \bmod 3 = n$ für das bisher gelesene Wort w gilt.

(a) Zeigen Sie zuerst unter der Annahme, dass sich der Automat nach dem Einlesen eines Wortes w mit $\#w \bmod 3 = n$ im Zustand n befindet, die Aussage $\delta(n, b) = \#(wb) \bmod 3$ für ein beliebiges Zeichen $b \in \{0, 1\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie dann $\hat{\delta}(0, w) = \#w \bmod 3$.

a) $\#(wb) \equiv_3 2\#w + \#b$

$n=0$:

$x \equiv_3 0$

$b=0$: $\Rightarrow 2x \equiv_3 0 \Rightarrow 2x+0 \equiv_3 0 \Rightarrow \delta(0,0) = 0$

$b=1$: $\Rightarrow 2x \equiv_3 0 \Rightarrow 2x+1 \equiv_3 1 \Rightarrow \delta(0,1) = 1$

$n=1$:

$x \equiv_3 1$

$b=0$: $\Rightarrow 2x \equiv_3 2 \Rightarrow 2x+0 \equiv_3 2 \Rightarrow \delta(1,0) = 2$

$b=1$: $\Rightarrow 2x \equiv_3 2 \Rightarrow 2x+1 \equiv_3 0 \Rightarrow \delta(1,1) = 0$

$n=2$:

$x \equiv_3 2$

$b=0: \Rightarrow 2x \equiv_3 4 \Rightarrow 2x \equiv_3 1 \Rightarrow 2x+0 \equiv_3 1 \quad \Rightarrow \delta(2,0)=1$

$b=1: \Rightarrow 2x \equiv_3 4 \Rightarrow 2x \equiv_3 1 \Rightarrow 2x+1 \equiv_3 2 \quad \Rightarrow \delta(2,1)=2$

b)

Basis $w \in \Sigma$

$\hat{\delta}(0,w) = \delta(0,w) = \#w \bmod 3 \quad \square$

Schritt

Annahme $\hat{\delta}(0,w) = \#w \bmod 3 \quad$ mit $|w|=n$

Behauptung $\hat{\delta}(0,v) = \#v \bmod 3 \quad$ mit $|v|=n+1$

$$\hat{\delta}(0,v) = \hat{\delta}(0,\overset{b\in\Sigma}{wb}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(0,w),b)$$

$$\overset{IA}{=} \hat{\delta}(\#w \bmod 3, b)$$

$$\overset{a)}{=} \#wb \bmod 3$$

$$= \#v \bmod 3 \quad \square$$