Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ).

Лекции по курсу "Дискретные преобразования сигналов"

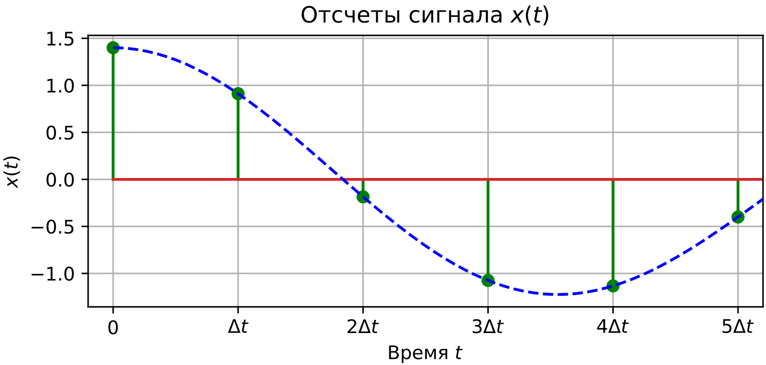
3 марта 2020

ФРТК МФТИ

Оценка спектра сигнала по последовательности отсчетов

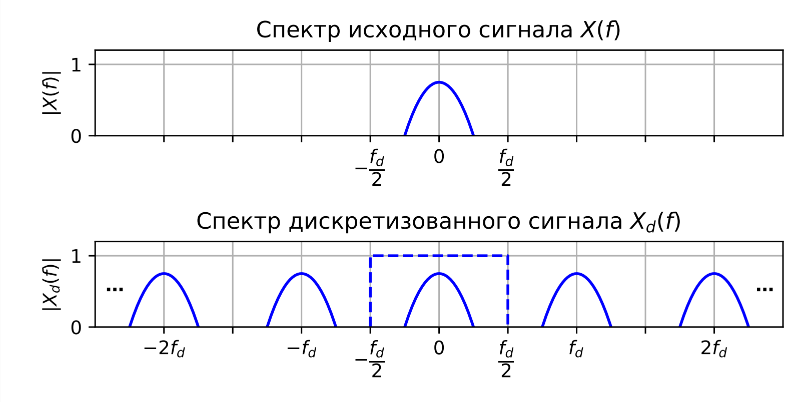
Последовательность отсчетов сигнала

Пусть есть последовательность отсчетов $x(k\Delta t),\ k \in Z$ некоторого аналогового сигнала. Будем считать, что спектр исходного сигнала ограничен интервалом $[-f_d/2;\ f_d/2]$, а соответственно не наблюдается эффект наложения.



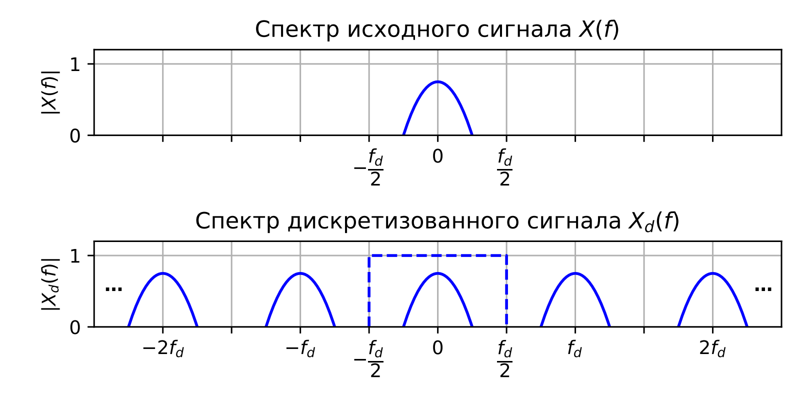
Периодическое повторение спектра

Спектр дискредитированного сигнала $X_d(f)$ представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X(f)$ (спектра аналогового сигнала) с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$.



Периодическое повторение спектра

$$\boxed{X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - mf_d\right).}$$



Представление $X_d(f)$ в виде ряда Фурье по частоте

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-jk(2\pi/f_d)f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-j2\pi fk\Delta t},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d\left(f\right) e^{j2\pi fk\Delta t} df =$$

$$= \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f(k\Delta t)} df = \Delta t x(k\Delta t).$$

Получаем пару ДВПФ (прямое и обратное преобразование)

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi fk\Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi fk\Delta t} df.$$

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

$$X_d(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Сигнал $x(k\Delta t),\ k \in Z$ имеет форму функции дискретного времени и может быть представлен в виде последовательности отсчетов.

Функция $X_d(f)$ принимает комплектные значения, является континуальной и периодической с периодом f_d, а ее главным периодом обычно считают отрезок $[-f_d/2;\ f_d/2]$.

Различные формы записи ДВПФ

Запись ДВПФ через переменную ω (рад/с)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с ($\omega_d = 2\pi/\Delta t$), то

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k \Delta t), \tag{1}$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega. \tag{2}$$

Запись ДВПФ через переменную $\nu = f/f_d$

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t},$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df.$$

Введем нормированные частоты $\nu = f/f_d$ и примем $\Delta t = 1$ ($f_d = 1/\Delta t$). Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi \nu k}, \tag{3}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi \nu k} d\nu. \tag{4}$$

Запись ДВПФ через переменную $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k \Delta t),$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega.$$

Аналогично можно принять $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$ и $\Delta t = 1$, тогда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \tag{5}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \tag{6}$$

Формы записи ДВПФ ($\omega = 2\pi f$, $\nu = f/f_d$, $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$)

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df$$

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j\omega k \Delta t}$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) e^{j\omega k \Delta t} d\omega$$

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta$$

Сходимость ДВПФ

Обратимость пары ДВПФ

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\theta m} \right) e^{j\theta k} d\theta = \hat{x}(k).$$

Нужно показать, что $\hat{x}(k) = x(k)$. Если ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j\theta m}$ равномерно сходится на множестве определения θ, то его можно почленно интегрировать, и тогда

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right).$$

Обратимость пары ДВПФ

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta = \frac{\sin \pi(k-m)}{\pi(k-m)} = \mathbf{1}(k-m) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \neq k. \end{cases}$$

$$\hat{x}(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\theta(k-m)} d\theta \right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-m) = x(k).$$

Достаточное условие существования ДВПФ

Теперь достаточное условие существования ДВПФ можно получить следующим образом:

$$|X(\theta)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \left| e^{-j\theta k} \right| \leq \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \leq \infty}$$

В итоге для абсолютно суммируемых последовательностей отсчетов $x(k)$ ДВПФ существует и формулы обратимы.

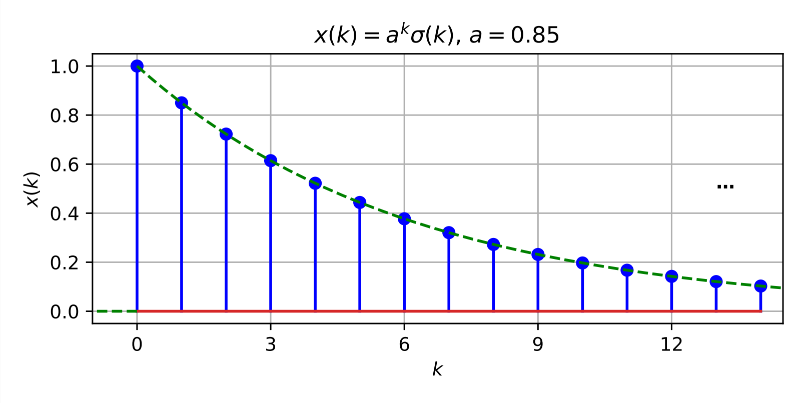
Заметим, что любая последовательность отсчетов конечной длительности является абсолютно суммируемой, а значит для нее можно определить ДВПФ.

Пример 1. $x(k) = a^k \sigma(k)$

$x(k) = a^k \sigma(k)$, где $\sigma(k)$ – дискретная функция включения.

$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k \sigma(k) e^{-j\theta k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\theta k} =$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a e^{-j\theta}\right)^k = \dfrac{1}{1 - a e^{-j\theta}}$ при $|a| < 1$.



Свойства ДВПФ

ДВПФ

Предложим, что для последовательности $x(k)$ ДВПФ спектр будет $X(\nu)$, что символически будем обозначать ;

$$x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu).$$

Пусть также $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$.

Рассмотрим далее свойства ДВПФ.

Линейность ДВПФ

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\alpha x(k) + \beta y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu), \tag{7}$$

где α, β - фиксированные числа.

Это свойство следует непосредственно из соответствующих свойств интеграла и суммы.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}$$

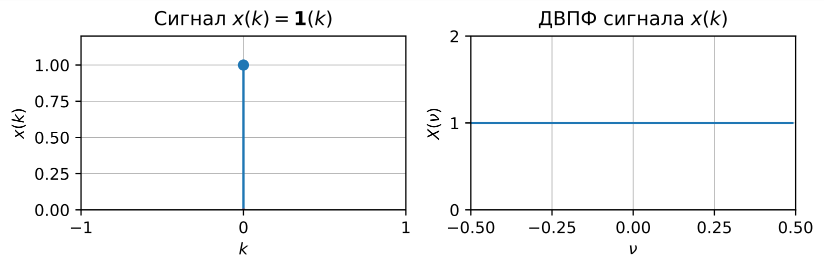
$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu$$

Единичный импульс

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 1 \tag{8}$$

$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(0)e^{0} = 1$



Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

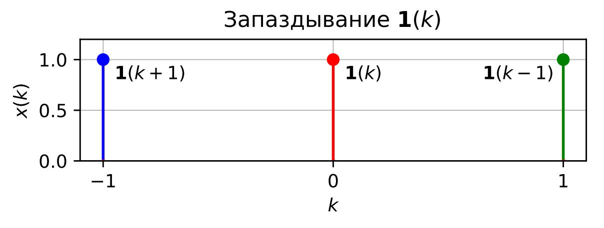
$$x(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \tag{9}$$

При $m > 0$ $x(k-m)$ – это сигнал, запаздывающий относительно сигнала $x(k)$ на m временных отсчетов.

Пример. $x(k) = \mathbf{1}(k)$, $X(\nu) = 1$

$x(k-1) = \mathbf{1}(k-1)$, $Y(\nu) = e^{-j2\pi\nu}$

$x(k+1) = \mathbf{1}(k+1)$, $Z(\nu) = e^{j2\pi\nu}$



Теорема запаздывания

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m} \tag{10}$$

Докажем это свойство.

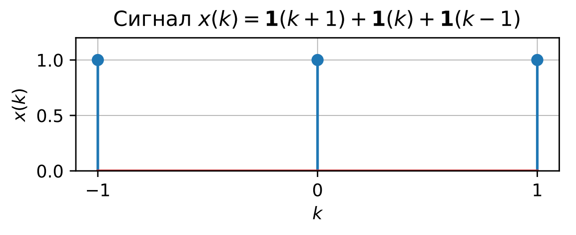
Возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{-j2\pi\nu m}e^{j2\pi\nu k}d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu(k-m)}d\nu = x(k-m).$$

Пример 2. Три единичных импульса.

Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x(k) = \mathbf{1}(k+1) + \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1)$, где

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

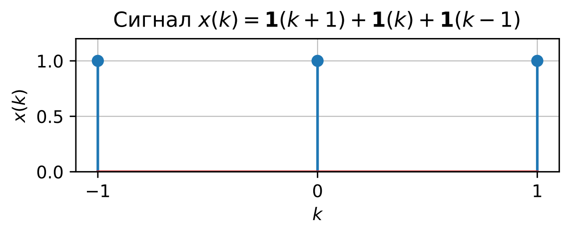


Пример 2. Три единичных импульса.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} =$$

$$= \exp\big(j2\pi\nu\big) + 1 + \exp\big(-j2\pi\nu\big) = 1 + 2\cos(2\pi\nu);$$

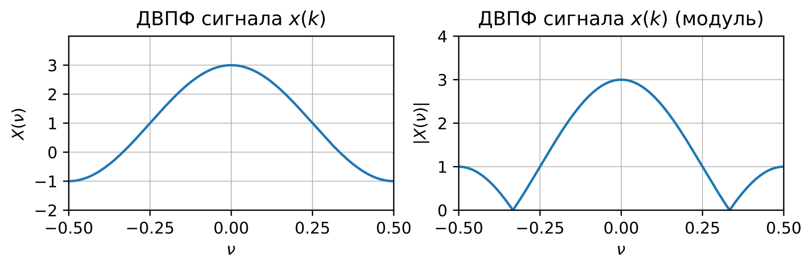


Пример 2. Три единичных импульса.

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k} =$$

$$= \sum_{k=-1}^{1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} =$$

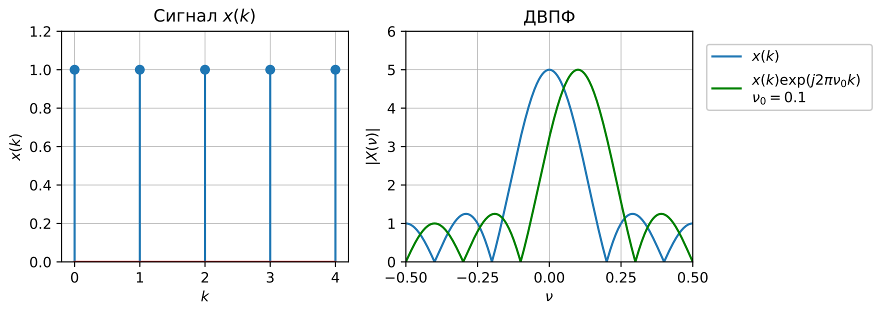
$$= \exp\big(j2\pi\nu\big) + 1 + \exp\big(-j2\pi\nu\big) = 1 + 2\cos(2\pi\nu);$$



Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

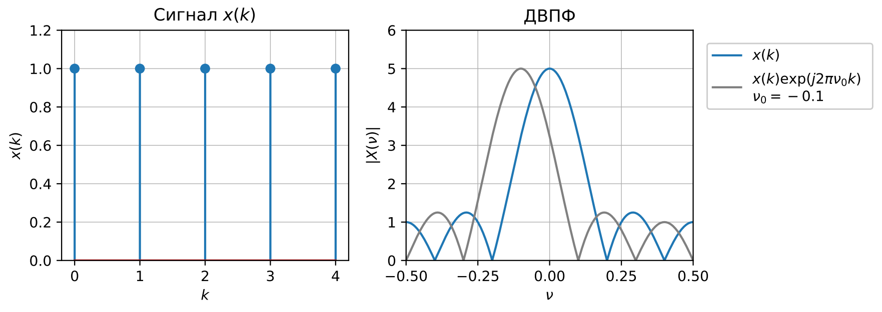
$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0) \qquad (11)$$



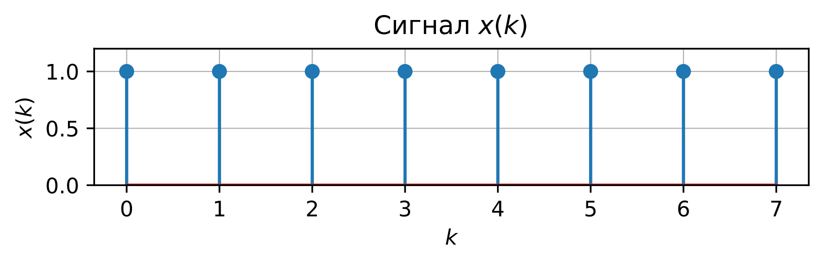
Теорема смещения

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$, то

$$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$$



Пример 3. Последовательность из N импульсов



N=8 последовательных единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k}$$

Пример 3. Последовательность из N импульсов

В точках $\nu = n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = N$$

В точках $\nu \neq n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

Пример 3. Последовательность из N импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$|X(\nu)| = \left|\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}\right|$$

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = 8$$

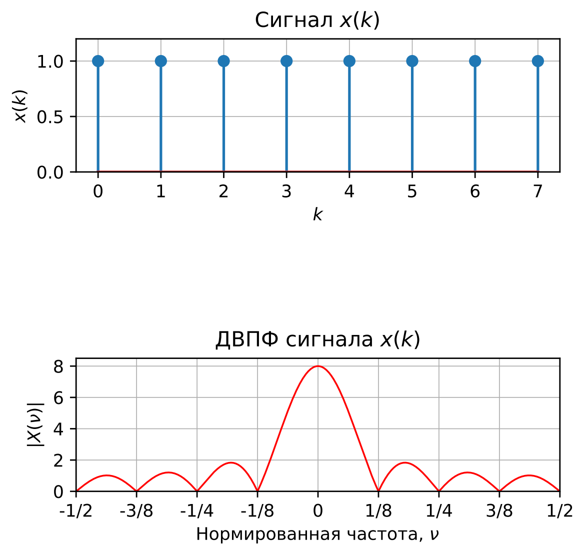
Прямоугольное

окно

ширина главного

лепестка

$\Delta\nu = 2/N$



Равенство Парсеваля. Пример 4.

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \, d\nu \tag{12}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu \tag{13}$$

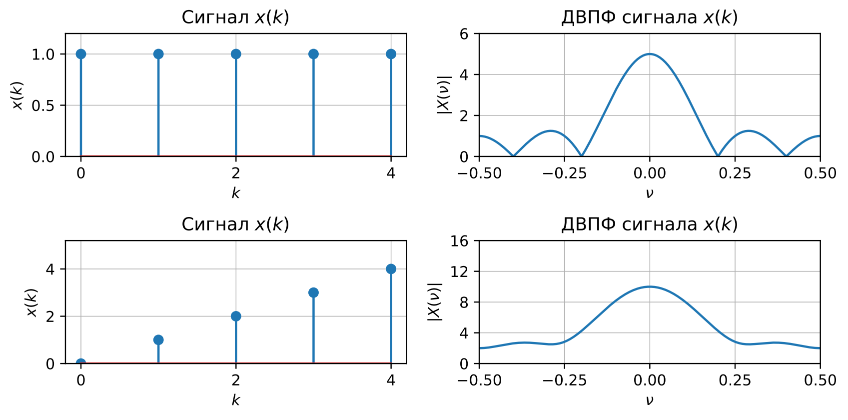
Пример 4. Предположим, что имеется финитная последовательность $x(k) = \{1; \underbrace{1}_{k=0}; 1\}$. Тогда

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = 3$.

При этом $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} |1 + 2\cos(2\pi\nu)|^2 \, d\nu = 3$

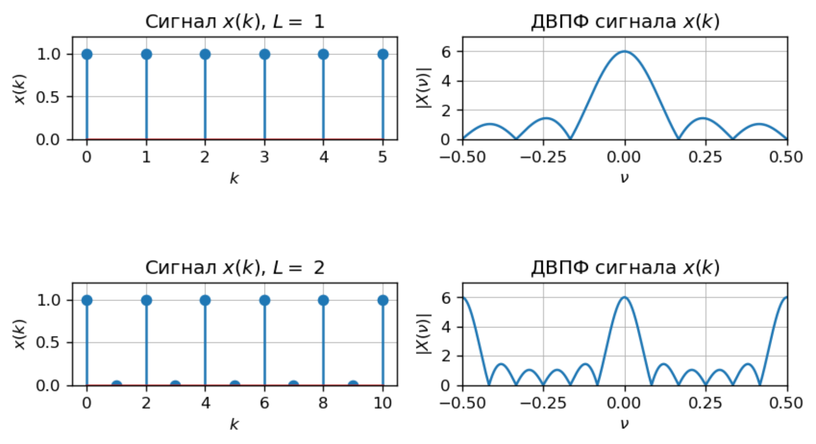
Умножение на k и дифференцирование по частоте

$$kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{j}{2\pi}\frac{dX(\nu)}{d\nu} \quad (14)$$



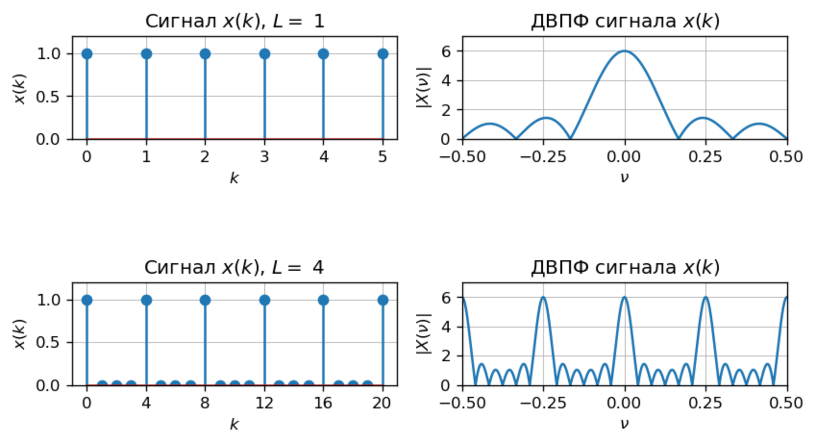
Изменение масштаба. Пример 5.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L) \qquad (15)$$



Изменение масштаба. Пример 5.

$$|X_L(\nu)| = \left| \frac{\sin(6\pi\nu L)}{\sin(\pi\nu L)} \right|.$$



Изменение масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L)$$

Для того, чтобы доказать свойство, вычислим ДВПФ для последовательности в левой части

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-mL)\exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL)\exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\exp(-j2\pi(\nu L)m) = X(\nu L).$$

Теоремы о свертке

Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то

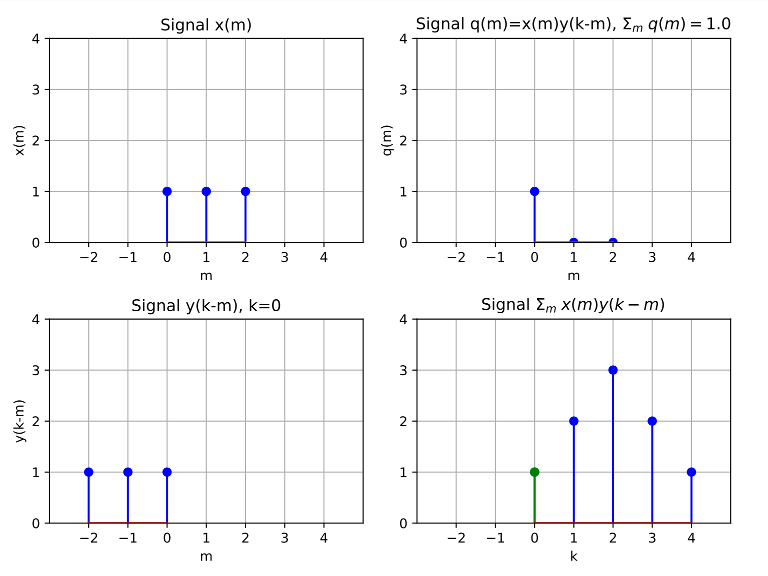
1. $$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)Y(\nu). \tag{16}$$

   В левой части стоит дискретная свертка сигналов, в правой — произведение спектров.

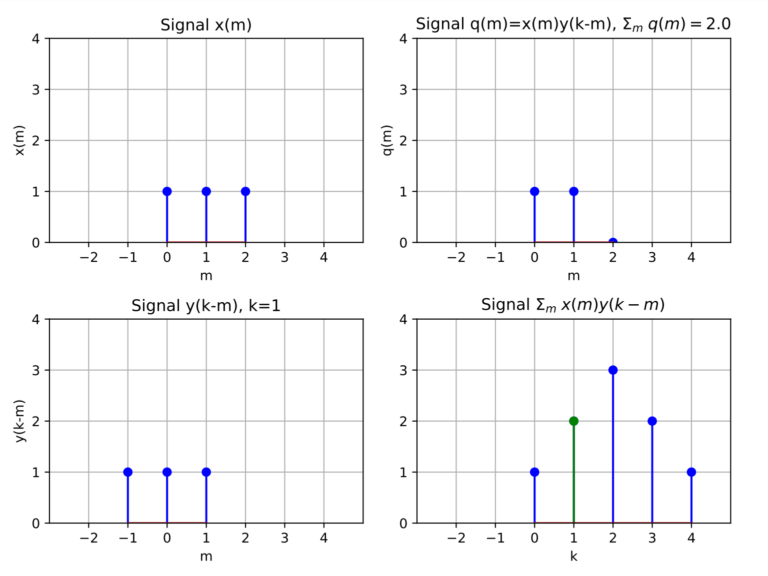
2. $$x(k)y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})Y(\nu-\widetilde{\nu})d\widetilde{\nu} \tag{17}$$

   В левой части стоит произведение сигналов, в правой – свертка (циклическая) спектров.

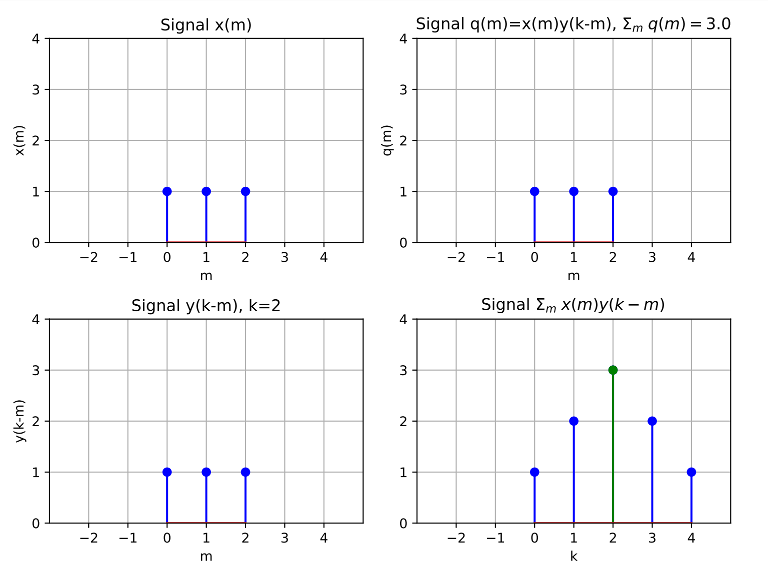
Линейная свертка $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$



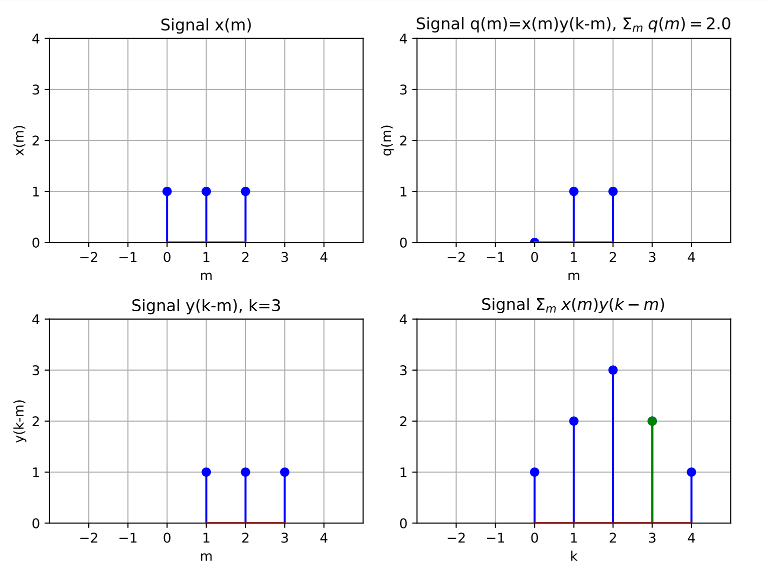
Линейная свертка $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$



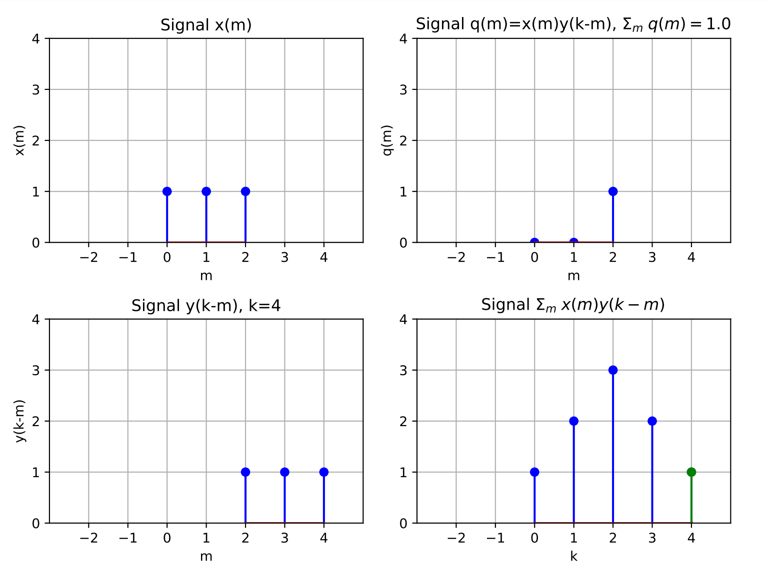
Линейная свертка $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$



Линейная свертка $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$

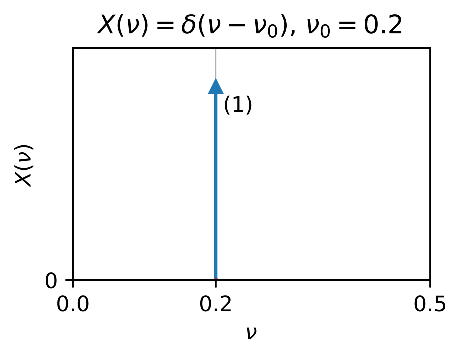


Линейная свертка $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(k-m)$



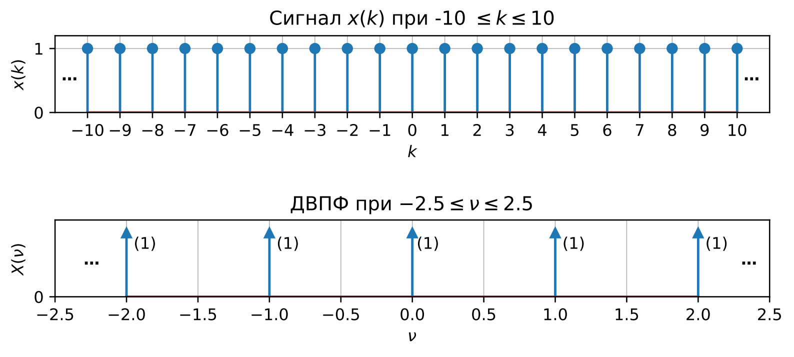
Дельта-функция

Для дельта-функции в точке ν_0 интеграл $\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} \delta(\nu - \nu_0) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда площадь под графиком равна 1 и обозначается на графике как (1).



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) \qquad (18)$$



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k-m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu-n\right)$$

Доказательство

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \right) \exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$$

Периодическая последовательность единичных импульсов

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m)$ – ряд Фурье для периодической (по частоте) последовательности δ-функций с периодом 1:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu m),$$

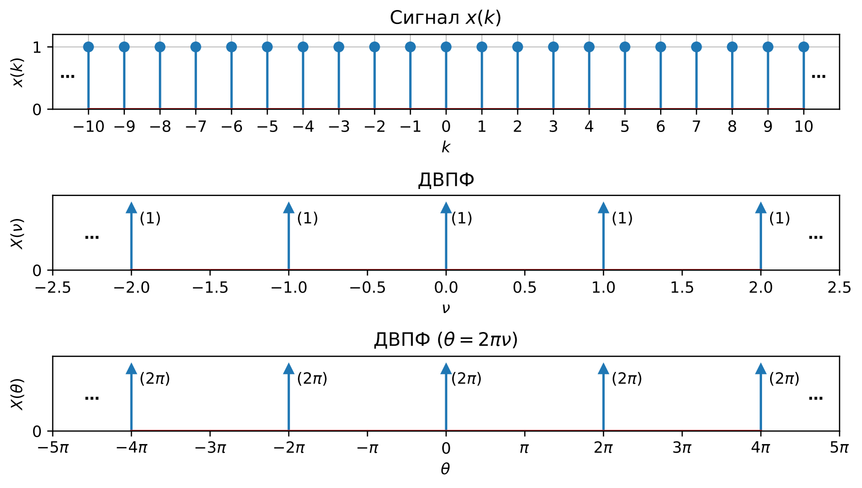
где коэффиценты Фурье

$$C_{-m} = \int_{-1/2}^{1/2} \delta(\nu) \exp(j2\pi\nu m) d\nu = e^0 = 1.$$

Тогда $X(\nu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

Периодическая последовательность единичных импульсов



Периодическая последовательность единичных импульсов

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k-m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu-n\right)$$

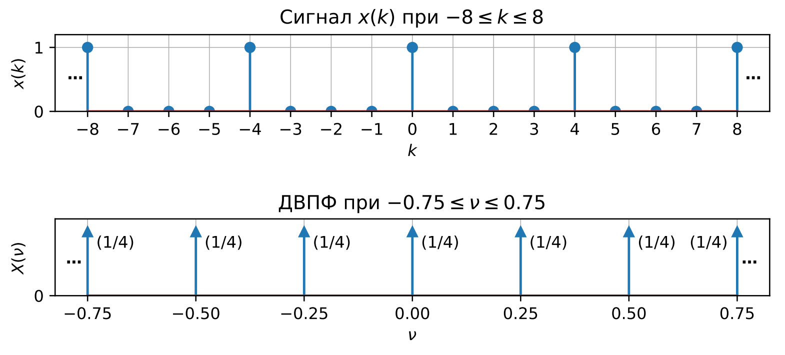
Используя свойство δ-функции $\delta(a\nu-b)=\frac{1}{|a|}\delta(\nu-\frac{b}{a})$, можно получить запись этого свойства в переменных $\theta=2\pi\nu$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k-m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\theta-2\pi n\right). \qquad (19)$$

Важно заметить, что при смене частотных осей здесь изменяется площади δ-функции.

Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - mL\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \tag{20}$$



Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Доказательство (1 способ):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n)$$

по свойству (15) об изменении масштаба

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu L - n)$$

Используя свойство δ-функции $\delta(a\nu - b) = \frac{1}{|a|}\delta(\nu - \frac{b}{a})$ получаем (20).

Последовательность единичных импульсов с периодом L

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - mL\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right)$$

Доказательство (2 способ):

$$X_L(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mL) \right) \exp(-j2\pi\nu k) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right).$$

Последнее равенство верно, поскольку $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm)$ – это ряд Фурье для периодической последовательности δ-функции с площадями $1/L$ и периодом $1/L$.

Последовательность единичных импульсов с периодом L

Последнее равенство верно, поскольку $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi\nu Lm)$ – это ряд Фурье для периодической последовательности δ-функции с площадями $1/L$ и периодом $1/L$.

$$\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{n}{L}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{-m} \exp(-j2\pi\nu Lm),$$

где коэффициенты Фурье

$$C_{-m} = L \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{L}\delta(\nu) \exp(j2\pi\nu Lm) d\nu = 1$$

.

Периодические последовательности в общем виде

Пусть аналоговый периодический сигнал $x(t)$ с периодом T дискредитирован с шагом $\Delta t = T/N$. Тогда на одном периоде $x(t)$ будет содержаться N отсчетов. Далее примем при анализе последовательностей для краткости записи $\Delta t = 1$.

Выделим для последовательности отсчетов $x(k)$ один период

$$x_N(k) = \begin{cases} x(k),\ 0 \le k \le N-1; \\ 0,\ \{k < 0\} \cup \{k \ge N\}. \end{cases} \tag{21}$$

Пусть $x_N(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X_N(\nu)$.

Периодические последовательности в общем виде

Поскольку последовательность $x(k)$ может быть представлена в виде дискретной сверки $x_N(k)$ и $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k - mN)$, а значит

$$X(\nu) = X_N(\nu)\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right). \tag{22}$$

ДВПФ периодической последовательности $x(k)$ имеет дискретную структуру, которой в континуальной записи соответствует некоторый периодический набор δ-функции.

Периодические последовательности в общем виде

Введем периодическую функцию дискретного аргумента $X[n]$, значения которой будут соответствовать площадям дельта-функций в $X(\nu)$ в точках $\nu = n/N$. В таком случае

$$X[n] = \frac{1}{N} X_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k).$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \exp(j2\pi\nu k) d\nu = \int_{0}^{1} X(\nu) \exp(j2\pi\nu k) d\nu =$$

$$= \int_{0}^{1} X_N(\nu) \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{N}\right) \exp(j2\pi\nu k) d\nu =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N(\frac{n}{N}) \exp(j2\pi \frac{n}{N} k)$$

Периодические последовательности в общем виде

$$X[n] = \frac{1}{N} X_N(\frac{n}{N}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi \frac{n}{N} k). \tag{23}$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] \exp\bigl(j2\pi \frac{n}{N} k) \tag{24}$$

Формула (23) определяет прямое, а (24) обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). В ДПФ и частотная (n), и временная (k) переменная дискретна, функция $X[n]$ периодична с периодом N, а в качестве главного периода для отсчетов ДПФ выбирают такой, на котором $n = 0, \dots, N-1$.

Гармонический сигнал

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), \ -\infty < k < +\infty \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right) \tag{25}$$

Доказательство.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - n\right)$$

по теореме смещения (свойство (23))
$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu - \nu_0)$ получаем, что

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\left(k - m\right) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right).$$

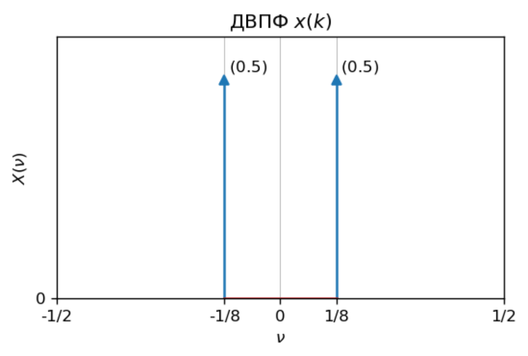
Пример. Косинусоидальный сигнал.

$$\exp\left(j2\pi\nu_0 k\right), \; -\infty < k < +\infty \;\xleftrightarrow{\text{ДВПФ}}\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \nu_0 - n\right)$$

$x(k) = \cos(2\pi k\nu_0)$, где $\nu_0 = 1/8$

$$x(k) = \frac{1}{2}\exp(j2\pi k\nu_0) + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi k\nu_0)$$

$$X(\nu) = 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu + \nu_0 - m)$$



Пример 6.

Предположим, что имеется периодическая последовательность $(\infty < k < +\infty)$

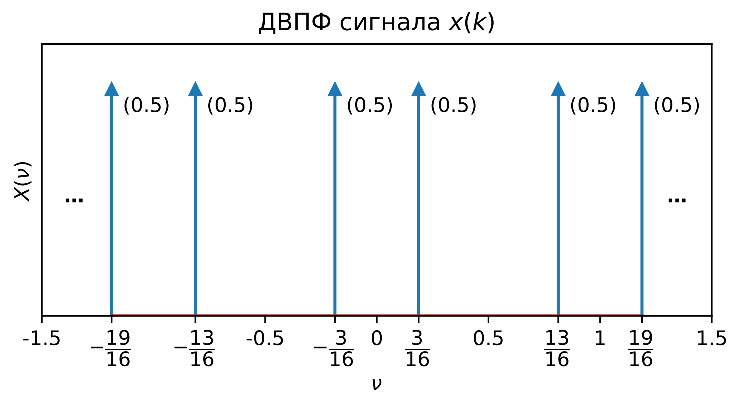
$$x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

Учитывая, что $\cos(2\pi \frac{3}{16}) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi\nu_0 k) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi\nu_0 k)$, получаем для ДВПФ этой последовательности

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$

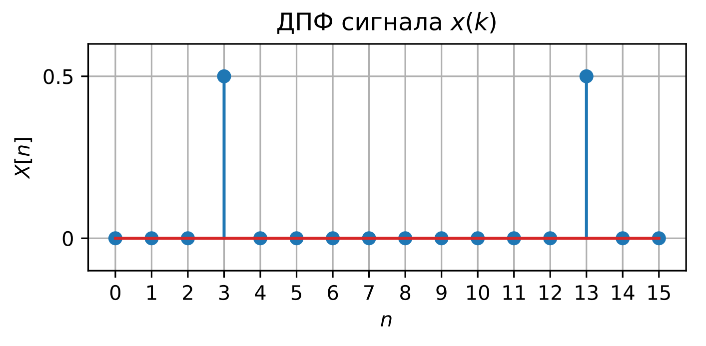
Пример 6.

$$X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(\nu - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \frac{3}{16} - n).$$



Пример 6.

Значения 16-точечного ДПФ $X[n]$. $X[3] = 1/2$, $X[13] = 1/2$, а в остальных точках главного периода $X[n] = 0$.



Пример 6.

Вычислим ДПФ с использованием формулы (23).

$$X[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos(2\pi\frac{3}{16}k)\exp(-j2\pi\frac{n}{N}k) =$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15}\frac{1}{2}\exp\left(j2\pi k(\frac{3}{16}-\frac{n}{16})\right)+\frac{1}{2}\exp\left(-j2\pi k(\frac{3}{16}+\frac{n}{16})\right).$$

Рассмотрим отдельно сумму вида $\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right)$ при условии, что m – целое число, не равное нулю и не кратное 16. В таком случае по формуле суммы геометрической прогрессии

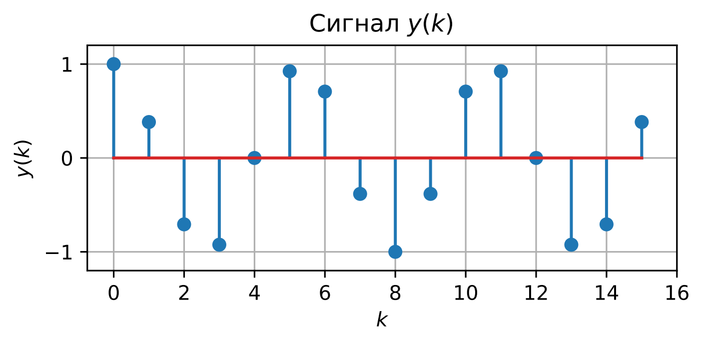
$$\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right) = \frac{1-\exp(j2\pi m)}{1-\exp(j2\pi m\frac{1}{16})} = 0.$$

В случае, когда m либо равно нулю, либо кратно 16, будет выполняться $\sum_{k=0}^{15}\exp\left(j2\pi k\frac{m}{16}\right) = 16.$

Пример 7.

$y(k) = x(k)w(k)$, $x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$

$w(k) = \sum_{n=0}^{15} \mathbf{1}(k-n)$.



Пример 7.

$$w(k) = \sum_{n=0}^{15} \mathbf{1}(k-n).$$

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}.$$

$$x(k) = \cos(2\pi \frac{3}{16} k).$$

$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \frac{3}{16} - m).$$

Пример 7.

Способ 1. По свойству (17) ДВПФ последовательности $Y(\nu)$ может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})W(\nu - \widetilde{\nu})d\widetilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\widetilde{\nu})X(\nu - \widetilde{\nu})d\widetilde{\nu}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1), \ a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1), \ (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0, \ (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

Пример 7.

Способ 2. Аналогично через теорему смещения

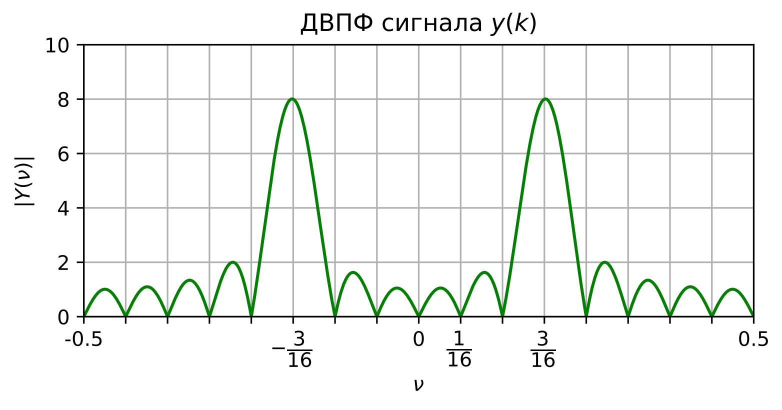
$$y(k) = \left(\frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w(k),$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \frac{3}{16}) + 0.5W(\nu + \frac{3}{16}).$$

$$Y(\nu) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu - \frac{3}{16}) \right) \frac{\sin(N\pi(\nu - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu - \frac{3}{16}))} +$$

$$+ \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(\nu + \frac{3}{16}) \right) \frac{\sin(N\pi(\nu + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(\nu + \frac{3}{16}))}.$$

Пример 7.



ДВПФ сигнала $y(k)$
10
8
6
4
2
0
$|Y(\nu)|$
-0.5
$-\frac{3}{16}$
0
$\frac{1}{16}$
$\frac{3}{16}$
0.5
ν