Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)

Кафедра радиоэлектроники и прикладной информатики

Дискретное во времени преобразование Фурье

Методические указания к лабораторной работе
по курсу ‘‘Дискретные преобразования сигналов’’

Составитель:

Тормагов Т. А.

МФТИ
2017

Содержание

Введение

Данная лабораторная работа посвящена особенностям дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ).

В цифровых системах требуется конечное число отсчетов по времени и по частоте, поэтому на практике используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Однако, можно показать, что ДПФ представляет собой масштабированные отчеты ДВПФ. Исходя из того, понимание свойств и особенностей ДВПФ важно для анализа сигналов в цифровых системах.

Теоретический материал для лабораторной работы представлен в учебных пособиях [1] и [2], а также в самой лабораторной работе.

Практические задания выполняются с помощью моделирования на Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и Matplotlib, либо в среде GNU Octave.

Задание к допуску

1. Ответить на вопросы.

   (a) В чем отличие между аналоговым, дискретным и цифровым сигналом?

   (b) Что такое частота дискретизации?

   (c) Как частота дискретизации связана с интервалом времени между отчетами дискретизованного сигнала?

   (d) Какой вид имеют формулы ДВПФ анализа и синтеза (прямого и обратного преобразования) в нормированных частотах (принять $\Delta t = 1$)?

   (e) Какой период есть у спектра сигнала, дискретизованного с частотой f_d? Чему равен этот период в частотах, нормированных на частоту дискретизации?

2. Вычислите в нормированных частотах ($\Delta t = 1$) ДВПФ следующих последовательностей:

   (a) $x(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1)$;

   (b) $x(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k+1)$;

   (c)
$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ \cos(\frac{\pi}{2}k), & 0 \leq k \leq 3, \\ 0, & k > 3; \end{cases}$$

   (d)
$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ \sin(\frac{\pi}{2}k), & 0 \leq k \leq 3, \\ 0, & k > 3; \end{cases}$$

   (e)
$$x(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ \cos(\frac{\pi}{2}k) + \sin(\frac{\pi}{2}k), & 0 \leq k \leq 3, \\ 0, & k > 3; \end{cases}$$

   (f) $x_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$;

   (g) $x_N(k) = 0,8 \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(m-k)$;

   (h) $x(-1) = -1$, $x(k) = 0$ при $k \neq -1$.

1 Основные свойства ДВПФ

1.1 Теоретическая часть

1.1.1 Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ)

Пусть есть последовательность отсчетов $x(k\Delta t),\ k = 0, 1, 2\dots$. Спектр дискредитированного сигнала представляет собой периодическое повторение исходного спектра $X(f)$ с периодом, равным частоте дискретизации $f_d = 1/\Delta t$. В итоге необходимая спектральная информация будет содержаться в полосе $[-f_d/2;\ f_d/2]$.

$$X_d(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f - mf_d\right).$$

Берем $m = 0$. Тогда по теореме Котельникова для сигнала с финитным спектром:

$$\widehat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f_c\,(t-k\Delta t)}{2\pi f_c\,(t-k\Delta t)};$$

$$\widehat{x}(k\Delta t) = x(k\Delta t).$$

Возьмем преобразование Фурье от $\widehat{x}(t)$:

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(t)\exp\left(-j2\pi ft\right)dt;$$

$$\widehat{X}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\ e^{-j2\pi fk\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi f_c\,(t-k\Delta t)}{2\pi f_c\,(t-k\Delta t)}e^{-j2\pi f(t-k\Delta t)}dt =$$

$$= \Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\ e^{-j2\pi fk\Delta t}\Pi_{2f_c}(f);$$

$$\Pi_{2f_c}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le f_c; \\ 0, & |f| > f_c \end{cases}$$

$$\Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\ e^{-j2\pi fk\Delta t}$$

– это ряд Фурье периодической функции $X_d(f)$:

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{-jk(2\pi/f_d)f} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}e^{-j2\pi fk\Delta t};$$

$$c_{-k} = \frac{1}{f_d}\int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d\left(f\right)e^{j2\pi fk\Delta t}df = \Delta t\widehat{x}(k\Delta t) = \Delta t x(k\Delta t).$$

В итоге получаем формулу ДВПФ последовательности $x(k)$. Пара дискретного во времени преобразования Фурье (ДВПФ) имеет вид:

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{-j2\pi f k \Delta t}, \tag{1}$$

$$x(k\Delta t) = \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df. \tag{2}$$

Отметим, что прямое ДВПФ является континуальной и периодической функцией частоты с периодом, равным частоте дискретизации f_d.

1.1.2 Различные формы записи ДВПФ

Если принять $2\pi f = \omega$, а частоту дискретизации взять в рад/с ($\omega_d = 2\pi/\Delta t$), то

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j\omega k \Delta t), \tag{3}$$

$$x(k\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{\omega_d/2} X(\omega) \exp(j\omega k \Delta t) d\omega. \tag{4}$$

Введем нормированные частоты $\nu = f/f_d$ и примем $\Delta t = 1$ ($f_d = 1/\Delta t$). Тогда пара ДВПФ может быть записана следующим образом:

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}, \tag{5}$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu. \tag{6}$$

Аналогично можно принять $\theta = 2\pi\omega/\omega_d$ и $\Delta t = 1$, тогда

$$X(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j\theta k}, \tag{7}$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta) e^{j\theta k} d\theta. \tag{8}$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера последовательность единичных импульсов $x(k) = \mathbf{1}(k+1) + \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1)$, где

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

ДВПФ такой последовательности $X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-1}^{1} x_2(k)e^{-j2\pi\nu k} = x(-1)e^{j2\pi\nu} + x(0)e^{0} + x(1)e^{-j2\pi\nu} = \exp(j2\pi\nu) + 1 + \exp(-j2\pi\nu) = 1 + 2\cos(2\pi\nu)$

1.1.3 Свойства ДВПФ

Предложим, что для последовательности $x(k)$ ДВПФ спектр будет $X(\nu)$, что символически будем обозначать $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$. Пусть также $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$. Тогда справедливы следующие утверждения – свойства ДВПФ.

1. ***Линейность***.

   Если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)$ и $y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} Y(\nu)$, то и ($\alpha$, β - действительные числа)

   $$\alpha x(k) + \beta y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu).$$

2. ***Теорема запаздывания***.

   $$x(k-l) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)e^{-j2\pi\nu l} \tag{9}$$

   $x(k-l)$ - это сигнал, запаздывающий относительно сигнала $x(k)$. Докажем свойство. Для этого возьмем обратное ДВПФ для правой части выражения:

   $$\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{-j2\pi\nu l}e^{j2\pi\nu k}d\nu = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)e^{j2\pi\nu(k-l)}d\nu = x(k-l).$$

3. ***Теорема смещения***.

   $$x(k)e^{j2\pi\nu_0 k} \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu-\nu_0) \tag{10}$$

4. ***Теорема о свертке***.

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(l-k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu)H(\nu) \tag{11}$$

   В левой части стоит свертка сигналов, в правой – произведение спектров.

   $$x(k)y(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})Y(\nu-\widetilde{\nu})d\widetilde{\nu} \tag{12}$$

   В левой части стоит произведение сигналов, в правой – свертка (циклическая) спектров.

5. ***Равенство Парсеваля***.

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 \, d\nu \tag{13}$$

   $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) \, Y^*(\nu) \, d\nu \tag{14}$$

6. ***Единичный импульс***.

$$\mathbf{1}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{1}(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} 1 \tag{15}$$

7. ***Периодические последовательности***.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-m) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - n) \tag{16}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(k-mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right) \tag{17}$$

$$\exp(j2\pi\nu_0 k), \ -\infty < k < +\infty \ \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - n) \tag{18}$$

8. ***Изменение масштаба***.

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathbf{1}(k-mL) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu L) \tag{19}$$

9. ***Умножение на k и дифференцирование по частоте***.

$$kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \frac{j}{2\pi}\frac{dX(\nu)}{d\nu} \tag{20}$$

1.2 Задание

Таблица 1: Задание по вариантам

Вариант	**N**	**L**	ν_0
11	8	2	1/10
12	9	3	-1/10
13	6	4	1/10
14	7	2	-1/10
15	8	3	-1/10
16	9	4	1/10
17	6	2	-1/10
18	7	3	1/10
19	8	4	-1/10
20	9	2	-1/10
21	6	3	1/10
22	7	4	1/10

1. Получите с помощью моделирования в Octave/Python ДВПФ спектр единичного импульса $\mathbf{1}(k)$ для нормированных частот $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$. Сравните результат со свойством (15).

2. Используя моделирование в Octave/Python, получите ДВПФ спектр двух последовательных единичных импульсов $x_2(k) = \mathbf{1}(k) + \mathbf{1}(k-1)$ для $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$.

   Применяя теорему запаздывания и свойство линейности, получите аналитическое выражение для ДВПФ спектра $X_2(\nu)$ последовательности $x_2(k)$. Сравните результаты.

   Зная аналитическую запись $X_2(\nu)$, вычислите значение интеграла $\int_{-1/2}^{1/2} |X_2(\nu)|^2\, d\nu$. Сравните результат с тем, который получается путем применения равенства Парсеваля.

3. Вычислите и постройте в Octave/Python ДВПФ спектр $X_N(\nu)$ N последовательных единичных импульсов $x_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$ для $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$.

   Получите аналитическую запись $X_N(\nu)$ с использованием теоремы запаздывания (воспользоваться формулой геометрической прогрессии для суммы комплексных экспонент). Сравните результат с непосредственным вычислением ДВПФ спектра в Octave/Python.

4. Рассмотрите последовательность $y(k) = kx_N(k)$. Найдите, используя Octave/Python, ее ДВПФ спектр $Y(\nu)$ для $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$.

   Сравните результат с аналитической записью $Y(\nu)$ (дифференцирование $X_N(\nu)$ по частоте, свойство (20)).

5. Рассмотрите последовательность $z(k)$, получаемую добавлением между каждой парой отсчетов последовательности $x_N(k)$ $L-1$ нулей:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_N(m)\mathbf{1}(k-mL).$$

   Постройте ее ДВПФ спектр в Octave/Python для $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$ и сравните результат с $X_N(\nu L)$ (свойство (19)).

6. Постройте в Octave/Python для $\nu \in [-0,5;\ 0,5]$ ДВПФ спектр $Q(\nu)$ последовательности $q(k) = x_N(k)\exp(j2\pi\nu_0 k)$ для ν_0. Чем отличаются $Q(\nu)$ и $X_N(\nu)$? Как это согласуется с теоремой смещения?

1.3 Контрольные вопросы

1. Пусть $X(\nu)$ – ДВПФ спектр некоторой последовательности $x(k)$. Как нужно изменить последовательность $x(k)$, чтобы ее ДВПФ спектр был сдвинут влево относительно исходного на $\nu_0 = 1/10$?

2. Пусть $X_5(\nu)$ – ДВПФ спектр пяти последовательных единичных импульсов $x_5(k) = \sum_{m=0}^{4} \mathbf{1}(k-m)$, а $Y(\nu)$ – ДВПФ спектр последовательности $y(k) = kx_5(k)$. Пусть также

$$\Phi(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X_5(\widetilde{\nu})Y(\nu-\widetilde{\nu})d\widetilde{\nu},$$

$$\Psi(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} Y(\widetilde{\nu})X_5(\nu-\widetilde{\nu})d\widetilde{\nu}.$$

   Чему равно $\Phi(\nu)$? Выполняется ли $\Phi(\nu) \equiv \Psi(\nu)$?

3. Предположим, что имеется финитная последовательность

$$x(k) = \{1;\ 5;\ \underbrace{2}_{k=0};\ 4;\ 1;\ 1;\ 3\}.$$

Не вычисляя непосредственно ее ДВПФ $X(\nu)$, опередите значения следующих выражений:

(a) $X(0)$;

(b) $X(1/2)$;

(c) $\int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) d\nu$;

(d) $\int_{-1/2}^{1/2} |X(\nu)|^2 d\nu$;

(e) $\int_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{dX(\nu)}{d\nu}\right|^2 d\nu$.

4. Докажите равенство Парсеваля для ДВПФ.

5. Докажите для ДВПФ свойство (20): если $x(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} X(\nu),\ kx(k) \xleftrightarrow{\text{ДВПФ}} \dfrac{j}{2\pi}\dfrac{dX(\nu)}{d\nu}$.

Получите аналогичное свойство для спектра сигнала (последовательности) $k^M x(k)$, где M - натуральное число.

6. Предположим, что аналоговый сигнал $x(t) = \cos(2\pi t f_0)$, $-\infty < t < \infty$, $f_0 = 250$ Гц был дискретизован с частотой дискретизации $f_d = 1$ кГц. Будет ли наблюдаться эффект наложения (aliasing)?

Определить и построить график ДВПФ для отсчетов сигнала $x(t)$ в переменных f и ν:

$$X(f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j2\pi f k\Delta t),$$

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \exp(-j2\pi \nu k).$$

7. Построить графики ДВПФ сигналов (последовательностей) $x_1(k) = \cos(2\pi k\nu_0)$ и $x_2(k) = \sin(2\pi k\nu_0)$, $\nu_0 = 0.2$, $-\infty < k < \infty$

Определить ДВПФ для последовательностей $y_1(k)$ и $y_2(k)$ взвешанных прямоугольной оконной функцией $w(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$, т.е. $y_1(k) = x_1(k)w(k)$ и $y_2(k) = x_2(k)w(k)$ (это можно сделать, зная ДВПФ окна и используя теорему смещения).

2 Связь ДВПФ и ДПФ, интерполяция добавлением нулевых отсчетов

2.1 Теоретическая часть

Установим связь между ДВПФ и ДПФ. Рассмотрим N-точечную последовательность $x(k)$. Ее ДВПФ

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi\nu k\right). \tag{21}$$

Здесь $\nu = f\Delta t = f/f_d$ – нормированная частота. Обратное ДПФ для последовательности $x(k)$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right). \tag{22}$$

Подставив (22) в (21), получим, что

$$\begin{aligned} X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)\right) \exp\left(-j2\pi\nu k\right) = \\ = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right)$. Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$, и знаменателем
$q = \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)$.

В точках $\nu \neq n/N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N = b_1(1-q^N)/(1-q)$ и $\sin\varphi = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})/(2j)$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right) = \frac{1 - \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{1 - \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)} = \\ = \frac{\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)\left(\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)\right)}{\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)\left(\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)\right)} = \\ = \exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)(N-1)\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)} \end{aligned} \tag{24}$$

Подставив формулу для суммы (24) в связь (23), получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X(n)$:

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)} \exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)(N-1)\right). \tag{25}$$

ДПФ для последовательности $x(k)$, имеет следующий вид:

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk\right). \tag{26}$$

Сравнивая с формулой ДВПФ (21), в точках $\nu = n/N$ получаем равенство

$$X(n\Delta\nu) = N\Delta t X(n), \quad \Delta\nu = 1/N. \tag{27}$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X(n)$ равны отсчетам функции $X(\nu)/N\Delta t$, взятым с шагом $\Delta\nu = 1/N$.

Заметим, что если принять $\Delta t = 1$ и рассматривать запись ДПФ без нормирующего множителя $1/N$, то выполняется

$$X(n\Delta\nu) = X(n), \quad \Delta\nu = 1/N. \tag{28}$$

Улучшим качество визуализации ДВПФ при помощи отсчетов ДПФ. Получим M-точечную последовательность — добавим в исходную последовательность $x(k)$ $N - M$ отсчетов, равных нулю:

$$y(k) = \begin{cases} x(k), \ 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, \quad N \leq k \leq M-1. \end{cases} \tag{29}$$

Ее ДПФ M-точечное и определяется формулой (без нормирующего множителя $1/N$)

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right). \tag{30}$$

При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi\nu k). \tag{31}$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек, где выполняется (28), больше, чем в исходной последовательности.

2.2 Задание

1. Рассмотрите N-точечную последовательность $x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$ (последовательность N единичных импульсов). Вычислите с помощью формулы (21) ее ДВПФ. Принять $\Delta t = 1$. Вычислите модуль ДВПФ $|X(\nu)|$.

   Рекомендация. Воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии и провести вычисления аналогично (24). Далее использовать то, что комплексная экспонента по модулю равна единице.

   Определите N-точечное ДПФ без нормирующего множителя $1/N$ для последовательности $x(k)$ с помощью формулы ДПФ.

   Убедитесь, что в таком случае значение ДВПФ в каждой точке $\nu = n/N$ соответствует отсчету ДПФ с номером n.

   Поведите вычисления в Octave/Python (это можно сделать, например, незначительно изменив код программы из примера выше). Добавьте к последовательности такое количество нулей, чтобы значительно улучшить качество визуализации ДВПФ последовательности. Приведите графическую интерпретацию результата.

2. Проделайте аналогичные действия для N-точечной последовательности

$$z(k) = \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right).$$

Как изменяться ДВПФ спектр последовательности с увеличением числа точек N?

3. Рассмотрите две последовательности, каждая из которых состоит из двух косинусоид с разными относительными частотами:

$$x_1(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \cos\left(\frac{17\pi k}{64}\right) = \cos\left(2\pi k\frac{8}{64}\right) + \cos\left(2\pi k\frac{8.5}{64}\right)$$

$$x_2(k) = \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + \cos\left(\frac{21\pi k}{64}\right) = \cos\left(2\pi k\frac{8}{64}\right) + \cos\left(2\pi k\frac{10.5}{64}\right)$$

Предположим, что делается оценка спектра с помощью N=64 точечного ДПФ. Укажите, в каком случае спектральные компоненты будут различимы, а в каком нет. Приведите обоснование результата.

Реализуйте вычисления в Octave/Python, приведите также результат после интерполяции нулевыми отсчетами.

Повторите вычисления для N=128. Как размер прямоугольного временного окна влияет на результат?

4. *Теоретическая часть*

Определить ДВПФ для следующих окон для ДПФ:

(a) прямоугольное

$$w_1 = \begin{cases} 1,\ 0 \le k < N, \\ 0, \{k < 0\} \cup \{k \ge 0\}; \end{cases}$$

(b) треугольное (окно Бартлетта)

$$w_2 = \begin{cases} 1 - \dfrac{2|k - N/2|}{N},\ 0 \le k < N, \\ 0, \{k < 0\} \cup \{k \ge 0\}; \end{cases}$$

(c) Ханна

$$w_3 = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1 - \cos\dfrac{2\pi k}{N}),\ 0 \le k < N, \\ 0, \{k < 0\} \cup \{k \ge 0\}; \end{cases}$$

Определить ширину главного лепестка на нулевом уровне для каждого из окон. Выразить через ДВПФ спектр оконной функции ДВПФ для последовательности $x(k) = \cos(\frac{\pi k}{4}) + \cos(\frac{21\pi k}{64})$, взвешанной окном $w(k)$ (произвольным из $w_1(k)$, $w_2(k)$, $w_3(k)$), $N = 64$.

Практическая часть

Вывести график ДВПФ при $-0.5 \le \nu \le 0.5$ для последовательностей $x(k)w_1(k)$, $x(k)w_2(k)$ и $x(k)w_3(k)$. Объяснить различия между графиками. На всех ли графиках спектральные компонеты различимы?

2.3 Контрольные вопросы

1. Сколько дополнительных нулей нужно добавить к N-точечной последовательности $x(k) = 1$, чтобы получить двукратное увеличение числа отчетов? Сколько для четырехкратного?

2. Почему при добавлении нулевых отсчетов не изменяется ДВПФ?

3. Чему на рассмотренных в задании графиках равно расстояние между отсчетами ДПФ, если по частотной оси расположены нормированные частоты (обозначаемые ν)? Как изменится результат, если на соответствующей оси привести частоты в герцах (обозначаемых f) или в рад/с (обозначаемых ω)?

4. Пусть известно ДВПФ $X(\nu)$ некоторой N-точечной последовательности $x(k)$. Определим M-точечное ДПФ как

$$Y(m) = \frac{1}{M} X(\nu = m/M),\ m = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ M - 1.$$

   Обратное ДПФ от $Y(m)$ обозначим через $y(k)$. Эта M-точечная последовательность как-то связана с $x(k)$. Установить эту связь. Показать, что $x(k)$ может быть полностью восстановлена из $y(k)$, только если $M \geq N$.

Список литературы

[1] Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2007. – 120 с.

[2] Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. – М.: МФТИ, 2007. – 332 с.