Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ). Часть 2.

Лабораторная работа
по курсу “Дискретные преобразования сигналов”

Составитель
Тормагов Т.А.
tormagov@phystech.edu

Окна в цифровом спектральном анализе

Формулы ДВПФ анализа и синтеза

Формула ДВПФ анализа

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k}.$$

Формула ДВПФ синтеза

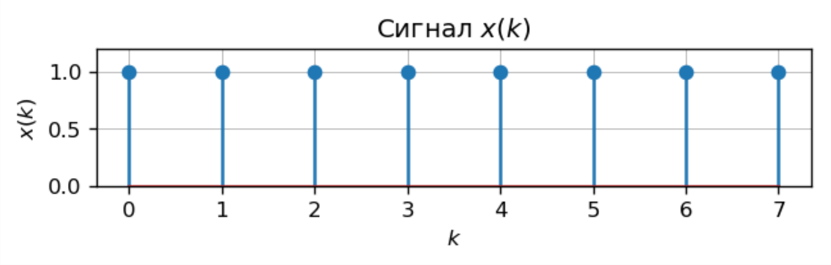
$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu.$$

Период спектральной функции $X(\nu)$ равен 1, для целого n

$$X(\nu + n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi(\nu+n)k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(e^{-j2\pi\nu k} e^{-j2\pi nk}) = X(\nu)$$

Пример. Последовательность импульсов



N=8 последовательных единичных импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k}$$

Пример. Последовательность импульсов

В точках $\nu = n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = N$$

В точках $\nu \neq n$, где n-целое

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}}$$

$$= \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

Пример. Последовательность импульсов

$$x(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \mathbf{1}(k-m)$$

$$|X(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|$$

$$X(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = 8$$

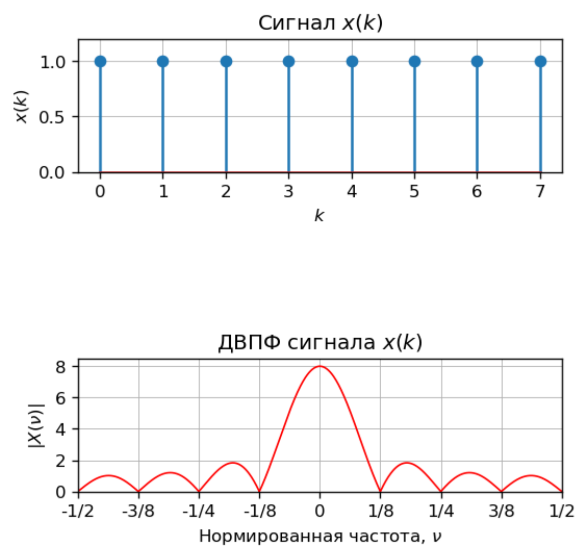
Прямоугольное

окно

ширина главного

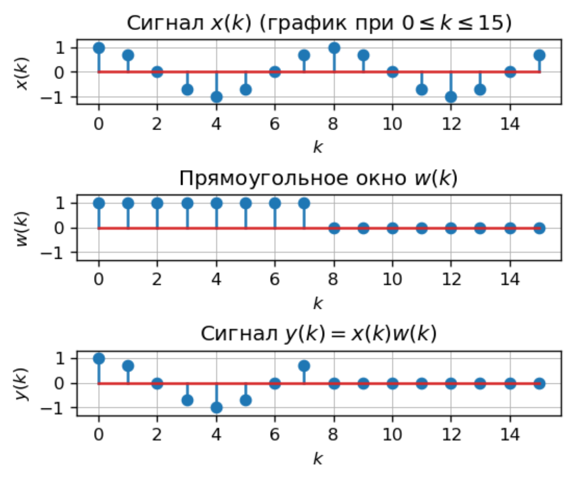
лепестка

$\Delta\nu = 2/N$



Пример. Прямоугольное окно

$x(k) = \cos(2\pi k \nu_0)$,
где $\nu_0 = 1/8$

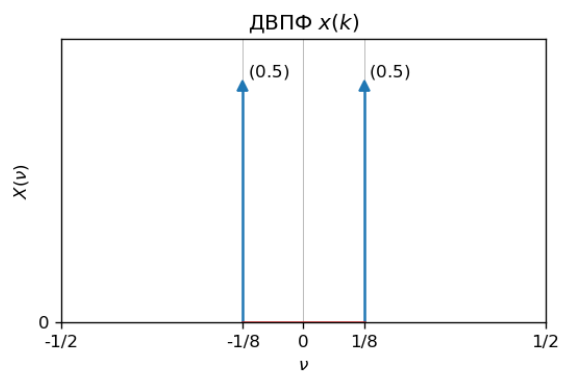


Пример. Прямоугольное окно

$x(k) = \cos(2\pi k \nu_0)$, где $\nu_0 = 1/8$

$$x(k) = \frac{\exp(j2\pi k\nu_0) + \exp(-j2\pi k\nu_0)}{2}$$

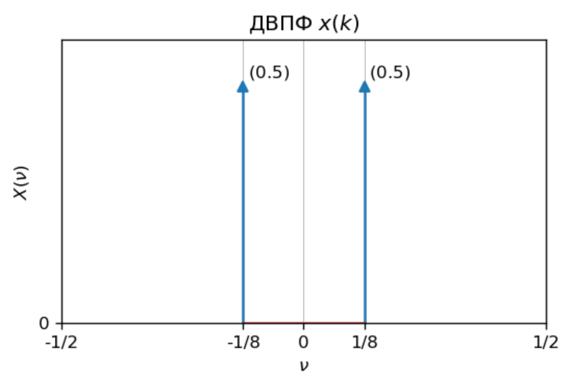
$$X(\nu) = 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\nu + \nu_0 - m)$$



Пример. Прямоугольное окно

Для дельта-функции $\int_{\nu_0-\varepsilon}^{\nu_0+\varepsilon} \delta(\nu - \nu_0) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Тогда площадь под графиком равна 1 и обозначается на графике как (1).

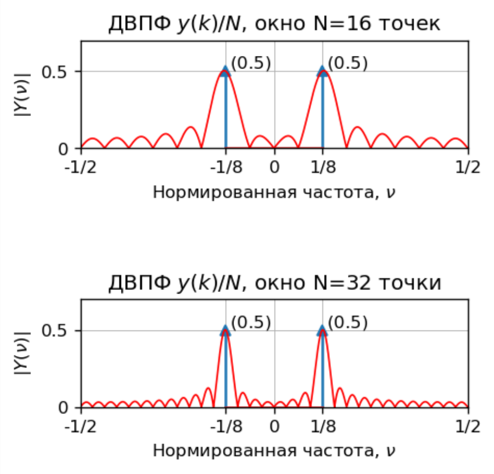
$$X(\nu) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \nu_0 - m)$$



Пример. Прямоугольное окно

$$y(k) = x(k)w(k)$$

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})W(\nu - \widetilde{\nu})d\widetilde{\nu}$$



Пример. Прямоугольное окно

$$y(k) = x(k)w(k)$$

$$Y(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\widetilde{\nu})W(\nu - \widetilde{\nu})d\widetilde{\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\widetilde{\nu})X(\nu - \widetilde{\nu})d\widetilde{\nu}$$

$$X(\nu) = 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0 - m) + 0.5\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu + \nu_0 - m)$$

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu}\frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

Фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(\nu)\delta(\nu - \nu_1)d\nu = \begin{cases} W(\nu_1),\ a < \nu_1 < b, \\ 0.5W(\nu_1),\ (\nu_1 = a) \cup (\nu_1 = b), \\ 0,\ (\nu_1 < a) \cup (\nu_1 > b). \end{cases}$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \nu_0) + 0.5W(\nu + \nu_0)$$

Пример. Прямоугольное окно

Аналогично через теорему смещения:

$$y(k) = x(k)w(k)$$

$$x(k) = \frac{\exp(j2\pi k\nu_0) + \exp(-j2\pi k\nu_0)}{2}$$

$$y(k) = 0.5\exp(j2\pi k\nu_0)w(k) + 0.5\exp(-j2\pi k\nu_0)w(k)$$

$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \nu_0) + 0.5W(\nu + \nu_0)$$

Пример. Прямоугольное окно

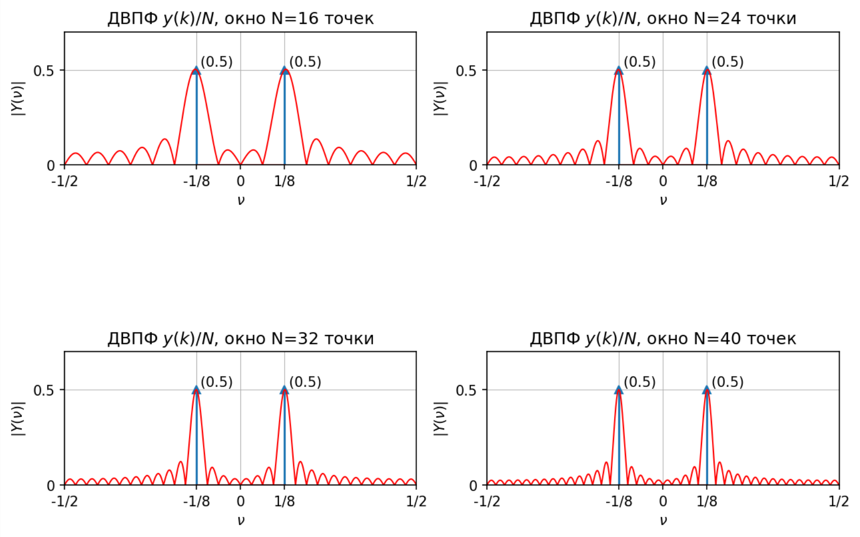
$$Y(\nu) = 0.5W(\nu - \nu_0) + 0.5W(\nu + \nu_0)$$

$$W(\nu) = e^{-j(N-1)\pi\nu} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$$

$$Y(\nu) = 0.5e^{-j(N-1)\pi(\nu-\nu_0)} \frac{\sin(N\pi(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} +$$

$$+0.5e^{-j(N-1)\pi(\nu+\nu_0)} \frac{\sin(N\pi(\nu + \nu_0))}{\sin(\pi(\nu + \nu_0))}$$

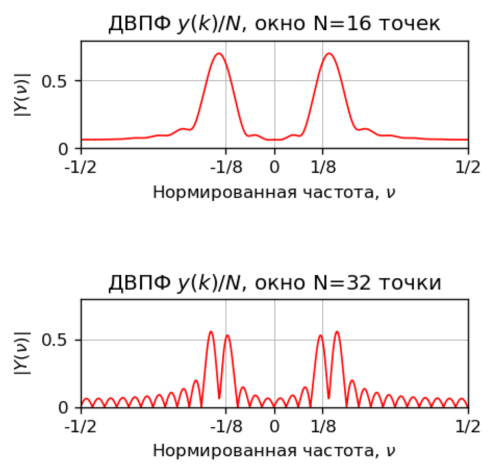
Пример. Прямоугольное окно



Пример. Прямоугольное окно

$$y(k) = x(k)w(k)$$

$x(k) =$
$\cos(2\pi k\nu_0) + \cos(2\pi k(\nu_0 + \frac{1}{32}))$,
где $\nu_0 = 1/8$



ДВПФ и ДПФ

ПФ, ДВПФ, ДПФ

ПФ

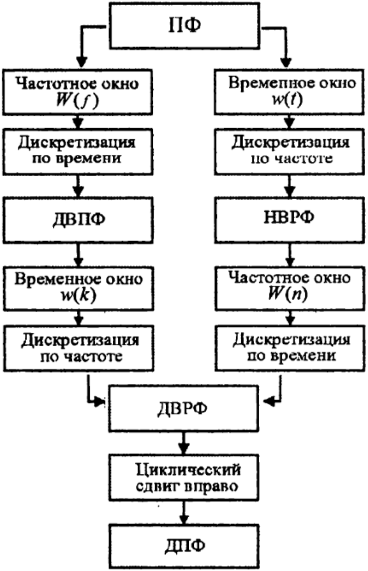
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) exp\left(-j2\pi ft\right) dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) exp\left(j2\pi ft\right) df$$

ДВПФ

$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k},$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu.$$



ПФ, ДВПФ, ДПФ

ДВПФ

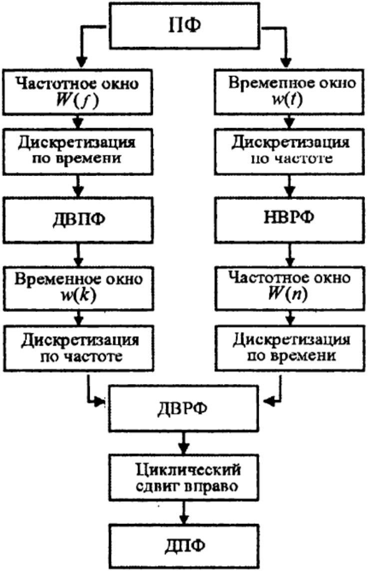
$$X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi\nu k},$$

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu) e^{j2\pi\nu k} d\nu.$$

ДПФ

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N} nk\right),$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j\frac{2\pi}{N} nk\right).$$



Две записи ДПФ

Прямое и обратное дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$X[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Формулы ДПФ без нормирующего множителя 1/N (запись используется в Octave, Python scipy.fftpack, Python numpy.fft):

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n)\exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right).$$

Пример. Прямоугольное окно

$$x(k) = \sum_{m=0}^{9} \mathbf{1}(k-m)$$

ДПФ (без $1/N$)

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

$$X[n] = \sum_{k=0}^{9} \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

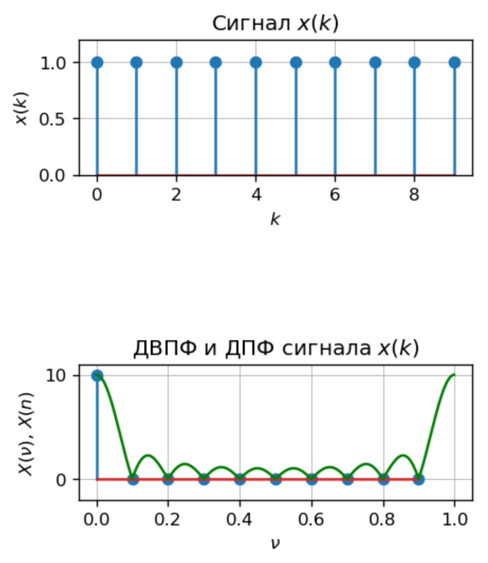
При $n = 0$

$X[0] = N$

При $n \neq 0$

$$X[n] = \frac{1-\exp(-j2\pi n)}{1-\exp(-j\frac{2\pi}{N}n)} = 0$$

видно, что $X[n] = X(\nu = n/N)$



Связь ДВПФ и ДПФ N-точечной последовательности

ДВПФ

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi\nu k\right)$$

ДПФ

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

В точках $\nu = n/N$ получаем равенство

$$X(n/N) = N\Delta t X[n]. \tag{1}$$

Это означает, что коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(\nu)/N\Delta t$, взятым с шагом $\Delta\nu = 1/N$.

Связь ДВПФ и ДПФ N-точечной последовательности

Если принять $\Delta t = 1$ и рассматривать запись ДПФ без нормирующего множителя $1/N$

ДВПФ

$$X(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi\nu k\right)$$

ДПФ

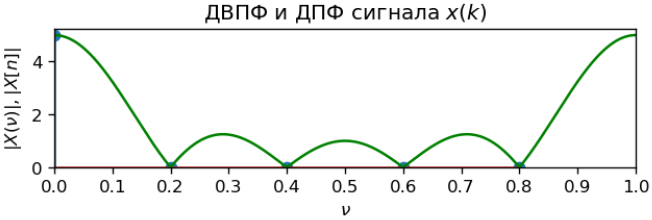
$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}nk\right),$$

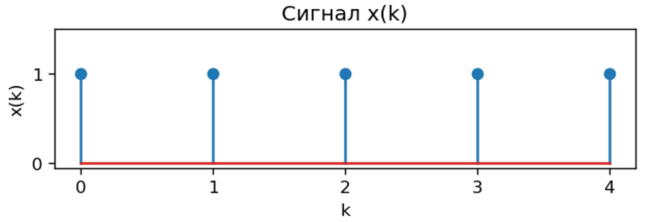
В точках $\nu = n/N$ получаем равенство

$$X(n/N) = X[n]. \qquad (2)$$

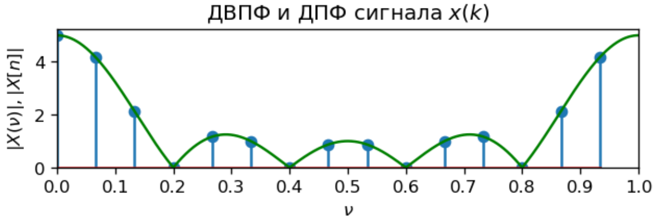
В итоге коэффициенты ДПФ $X[n]$ равны отсчетам функции $X(\nu)$, взятым с шагом $\Delta\nu = 1/N$.

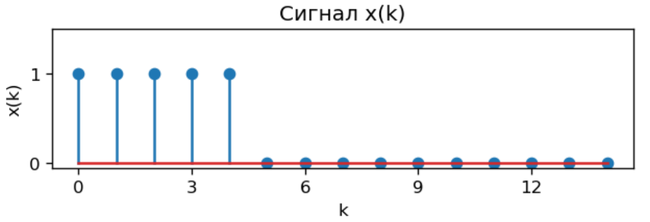
Пример. Добавление нулевых отсчетов (Zero padding)



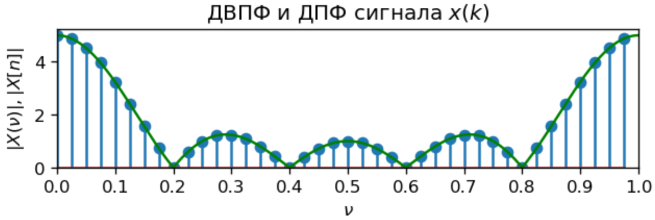


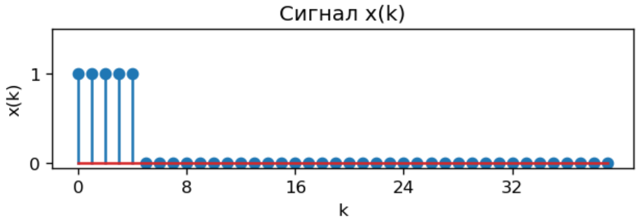
Пример. Добавление нулевых отсчетов (Zero padding)





Пример. Добавление нулевых отсчетов (Zero padding)





Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов.

Добавим в исходную последовательность $x(k)$ M отсчетов ($M > N$), равных нулю:

$$y(k) = \begin{cases} x(k),\ 0 \le k \le N-1; \\ 0,\ \ N \le k \le M-1. \end{cases}$$

ДПФ $y(k)$ (без $1/M$):

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right).$$

При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi\nu k).$$

Интерполяция ДВПФ добавлением нулевых отсчетов.

ДПФ $y(k)$ (без $1/M$):

$$Y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j\frac{2\pi}{M}nk\right).$$

При этом ДВПФ не изменяется:

$$Y(\nu) = \sum_{k=0}^{M-1} y(k) \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi\nu k).$$

С помощью добавления нулевых отсчетов улучшено качество визуализации ДВПФ, поскольку число точек, где выполняется $X(n/M) = X[n]$, больше, чем в исходной последовательности (было N точек, стало M).

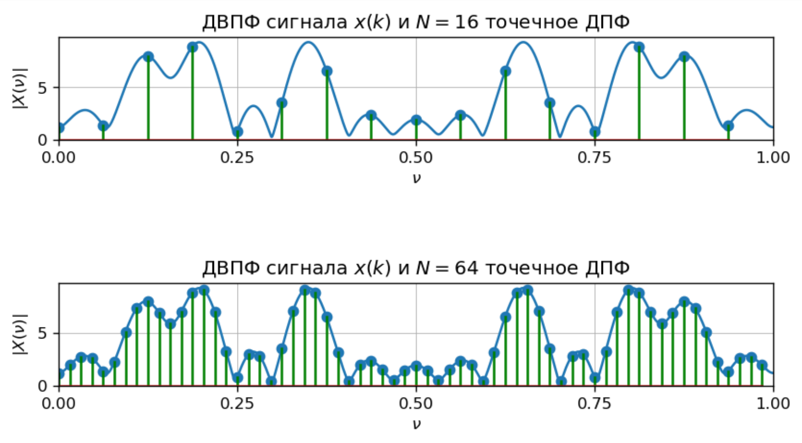
Пример.

Рассмотрим в качестве примера 16–точечную последовательность $(0 \leq k < 16)$

$$x(k) = \sin\left(2\pi \frac{2,1}{16} k\right) + \sin\left(2\pi \frac{3,1}{16} k + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2\pi \frac{5,6}{16} k\right) \quad (3)$$

Ее особенность заключается в том, что относительные частоты входящих в нее синусоид $(\nu_1 = 2,1/16;\ \nu_2 = 3,1/16;\ \nu_3 = 5,6/16\ )$ находятся в промежутках между соседними бинами ДПФ (1 бин $= 1/N$).

Пример.


ДВПФ сигнала $x(k)$ и $N = 16$ точечное ДПФ
$|X(\nu)|$
0
5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
ν
ДВПФ сигнала $x(k)$ и $N = 64$ точечное ДПФ
$|X(\nu)|$
0
5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
ν

Интерполяционная формула восстановления $X(\nu)$ по $X[n]$

Рассмотрим N-точечную последовательность $x(k)$. Ее ДВПФ

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-j2\pi\nu k\right). \tag{4}$$

Здесь $\nu = f\Delta t = f/f_d$ – нормированная частота. Обратное ДПФ для последовательности $x(k)$

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right). \tag{5}$$

Подставив (5) в (4), получим, что

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(j\frac{2\pi}{N}nk\right)\right) \exp\left(-j2\pi\nu k\right) =$$

$$= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \boxed{\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right)}. \tag{6}$$

Интерполяционная формула восстановления $X(\nu)$ по $X[n]$

Рассмотрим отдельно множитель $\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right)$.
Это сумма N членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$, и знаменателем $q = \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)$.

В точках $\nu \neq n/N$, где $q \neq 1$, получаем (используя известные формулы $S_N = b_1(1-q^N)/(1-q)$ и $\sin\varphi = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})/(2j)$):

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)k\right) = \frac{1 - \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{1 - \exp\left(-j2\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)\ \left(\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)\right)}{\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)\ \left(\exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right) - \exp\left(-j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)\right)} =$$

$$= \exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)(N-1)\right) \frac{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)}$$

Интерполяционная формула восстановления $X(\nu)$ по $X[n]$

Подставив формулу для суммы (7) в связь (6), получаем интерполяционную формулу восстановления континуальной функции $X(\nu)$ по коэффициентам ДПФ $X(n)$:

$$X(\nu) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \frac{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)N\right)}{\sin\left(\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)\right)} \exp\left(j\pi\left(\nu - \frac{n}{N}\right)(N-1)\right). \tag{9}$$