AULA 1 – INTRODUÇÃO

Denominamos polinômio na variável x e indicamos por $P(x)$ as expressões do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Obs:

- Chamamos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ e a_n de coeficientes do polinômio;
- Chamamos a_0x^n, a_1x^{n-1}, ..., $a_{n-1}x$ e a_n de termos do polinômio;
- Em especial, chamamos a_n de termo independente, pois ele é independente de x;
- A variável x é um número complexo, ou seja, $x \in \mathbb{C}$.

Grau de um polinômio

O grau de um polinômio é indicado por $gr(P)$ e é igual ao maior expoente da variável x com coeficiente não-nulo.

Valor numérico de um polinômio

Obter o valor numérico de um polinômio $P(x)$ para $x = k$ significa calcular o valor do polinômio quando substituímos x por k. Isto é indicado por $P(k)$.

Raiz de um polinômio

Dizemos que um valor k é raiz do polinômio quando $P(k) = 0$, ou seja, é o valor que quando substituído no lugar do x torna o polinômio igual a 0.

AULA 2 – IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

Dois polinômios são idênticos se, e somente se, os coeficientes dos termos correspondentes forem iguais.

Polinômio identicamente nulo

Um polinômio é identicamente nulo se, se somente se, todos os seus coeficientes forem nulos. Para polinômio nulo não se define grau.

AULA 3 – SOMA E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

Soma de polinômios

A soma de polinômios é realizada somando-se os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

Subtração de polinômios

A subtração de polinômios é realizada subtraindo-se os coeficientes dos termos que apresentam o mesmo grau.

Obs:

- O polinômio resultante da soma ou da diferença entre dois polinômios não tem, necessariamente, grau igual à soma ou diferença dos graus dos polinômios originais.

AULA 4 – MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

A multiplicação de polinômios é feita termo a termo, com a utilização da propriedade distributiva, ou seja, realiza-se a multiplicação convencional de expressões algébricas. Após a realização de todas as multiplicações, agrupam-se os termos de mesmo grau.

Obs:

- O grau do produto de dois polinômios não-nulos é a soma dos graus desses polinômios.

AULA 5 – DIVISÃO DE POLINÔMIOS

A divisão de um polinômio $A(x)$ por um polinômio $B(x)$ pode ser indicada na chave por:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão. O polinômio $A(x)$ é chamado de dividendo e o polinômio $B(x)$ é chamado de divisor. Os quatro polinômios são tais que:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

Analogamente à divisão entre números reais, se o resto $R(x)$ for nulo, dizemos que a divisão é exata e que $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

Obs:

- o grau de $Q(x)$ é igual à diferença dos graus de $A(x)$ e $B(x)$:

$$gr(Q) = gr(A) - gr(B)$$

- o grau de $R(x)$ (para $R(x)$ não-nulo) será sempre menor que o grau do divisor $B(x)$:

$$gr(R) < gr(B)$$

Método da Chave

A divisão entre os polinômios pode ser realizada pelo método da chave que consiste nos seguintes passos:

1. Escrever os polinômios na ordem decrescente de seus expoentes de x;
2. Caso falte algum termo, completar com zero;
3. Dividir o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor e colocar o resultado no quociente;
4. Multiplicar este resultado por cada termo do divisor, inverter o sinal e colocar abaixo do termo correspondente no dividendo;
5. Realizar a soma do dividendo com este polinômio resultante e escrever o resultado abaixo. Este polinômio será um novo dividendo;
6. Se o grau deste polinômio for maior ou igual ao grau do divisor, prosseguir com a divisão, repetindo o procedimento a partir do passo 3. Se o grau deste polinômio for menor do que o grau do divisor, parar o procedimento.

AULA 6 – TEOREMA DO RESTO

O teorema do resto diz que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio $(x - a)$ é igual a $P(a)$.

AULA 7 – TEOREMA DE D'ALEMBERT

Teorema de D'Alembert

Este teorema pode ser entendido como consequência do teorema do resto: a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio $(x - a)$ é exata se, e somente se, $P(a) = 0$.

Teorema

Sendo um polinômio $P(x)$ divisível por $x - a$ e por $x - b$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a) \cdot (x - b)$.

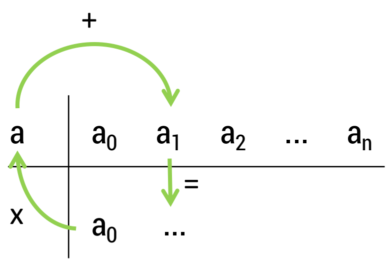
AULA 8 – DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

O dispositivo de Briot-Ruffini é uma forma prática de encontrar o quociente e o resto da divisão de um polinômio $P(x)$, por um binômio $(x - a)$. O dispositivo consiste nos seguintes passos:

1. Escrever o polinômio $P(x)$ na ordem decrescente de seus expoentes de x;
2. Caso falte algum termo, completar com zero;
3. Colocar o valor de a do lado esquerdo da grade e os coeficientes do polinômio $P(x)$ ao lado direito da grade, na ordem decrescente dos expoentes de x;
4. "Descer" o primeiro coeficiente:

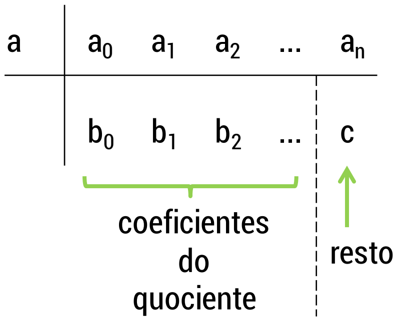
a	a_0	a_1	a_2	...	a_n
	$\downarrow$ a_0				

5. Multiplicar o número de baixo por a, somar o resultado com o próximo coeficiente de $P(x)$ e escrever o resultado diretamente abaixo deste coeficiente:



6. Tomar este resultado obtido e repetir o passo 5 coeficiente a coeficiente, até que se esgotem os coeficientes de $P(x)$;

O último número obtido na linha de baixo será o resto da divisão e os números anteriores serão os coeficientes do quociente da divisão, em ordem decrescente:



Note que, quando dividimos $P(x)$ por um binômio $(x-a)$, o grau do quociente será uma unidade inferior ao grau de $P(x)$.

AULA 9 – BRIOT-RUFFINI PARA DIVISÃO DE P(x) POR (ax-b)

Agora, caso estejamos realizando a divisão de um polinômio $P(x)$ por um binômio do tipo $(ax-b)$, faremos pequenas alterações ao Briot-Ruffini convencional:

- No campo da esquerda da grade colocaremos o valor de $\frac{b}{a}$ para a execução do dispositivo;
- Ao finalizarmos o procedimento, dividiremos os coeficientes do quociente por a;
- O resto permanece inalterado!

AULA 10 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - INTRODUÇÃO

Quando igualamos um polinômio a zero, chegamos a uma equação polinomial (ou equação algébrica):

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Dizemos que a equação tem grau *n*.

Raiz ou zero de uma equação polinomial

Os valores que, quando substituídos no lugar de *x*, tornam a igualdade uma verdade são chamados de raízes ou zeros da equação. Solucionar a equação é encontrar todas as suas raízes, isto é, encontrar os valores que compõem o conjunto solução ou conjunto verdade da equação.

AULA 11 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Teorema fundamental da álgebra

Toda equação algébrica $P(x)=0$ de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

Obs:

- A raiz complexa não necessariamente tem parte imaginária (mas pode ter!). Um número real também é considerado um número complexo.

Decomposição em fatores do 1º grau

Seja $P(x)$ um polinômio de grau $n \geq 1$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

O polinômio $P(x)$ pode ser decomposto em um produto de fatores do 1º grau no formato $(x-x_i)$ onde x_i são suas raízes:

$$P(x) = a_n \cdot (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\ldots\cdot(x-x_n)$$

AULA 12 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Um polinômio na forma fatorada pode apresentar fatores repetidos. Isto indica multiplicidade de raízes.

Se x_k é raiz de multiplicidade m do polinômio $P(x)$, então o fator $(x-x_k)$ aparecerá elevado ao expoente m na forma fatorada de $P(x)$:

$$P(x) = a_n \cdot (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^m$$

AULA 13 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - REDUÇÃO DE GRAU

Dada uma equação polinomial $P(x)=0$ de grau n, se conhecermos uma de suas raízes, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para "reduzir o grau" da equação.

As raízes do quociente obtido também serão raízes do polinômio $P(x)$. Logo, sendo $Q(x)$ o quociente obtido no Briot-Ruffini, para encontrarmos as outras raízes de $P(x)$ basta encontrarmos as raízes de $Q(x)$.

AULA 14 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - RAÍZES COMPLEXAS

Sendo $z=a+bi$ raiz da equação $P(x)=0$, então $\bar{z}=a-bi$ também será raiz dessa equação. Se z for raiz de multiplicidade m, então $\bar{z}$ também será.

Obs:

- As raízes complexas sempre virão aos pares;
- Se uma equação algébrica tem grau ímpar, então ela terá necessariamente pelo menos uma raiz real.

AULA 15 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - RAÍZES RACIONAIS

Seja a equação algébrica $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros. Se o número racional $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si), é raiz dessa equação, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Podemos escrever então um procedimento para encontrar possíveis raízes racionais de $P(x)$:

1. Listar os divisores de a_0 (valores de p);
2. Listar os divisores de a_n (valores de q);
3. Listar todos os possíveis valores de $\frac{p}{q}$;
4. Testar os valores e verificar se são raízes.

AULA 16 – EQUAÇÕES POLINOMIAIS - RELAÇÕES DE GIRARD

Equação do 2º grau

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1 e x_2. Então:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Equação do 3º grau

Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. Então:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Equação do 4º grau

Seja a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, onde $a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4. Então:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$