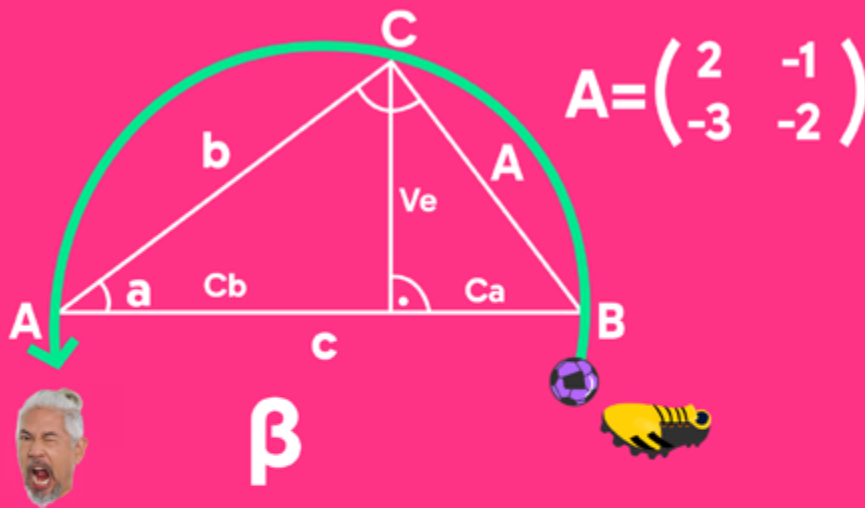




# HORA DO *TREINO DE* MATEMÁTICA



EXERCITAR  
DÁ **JOGO**  
NO ENEM

# COLAR COM QUEM ENTENDE DO ASSUNTO DÁ JOGO NO ENEM

A Descomplica e o iti se juntaram  
e vão descomplicar a Matemática.

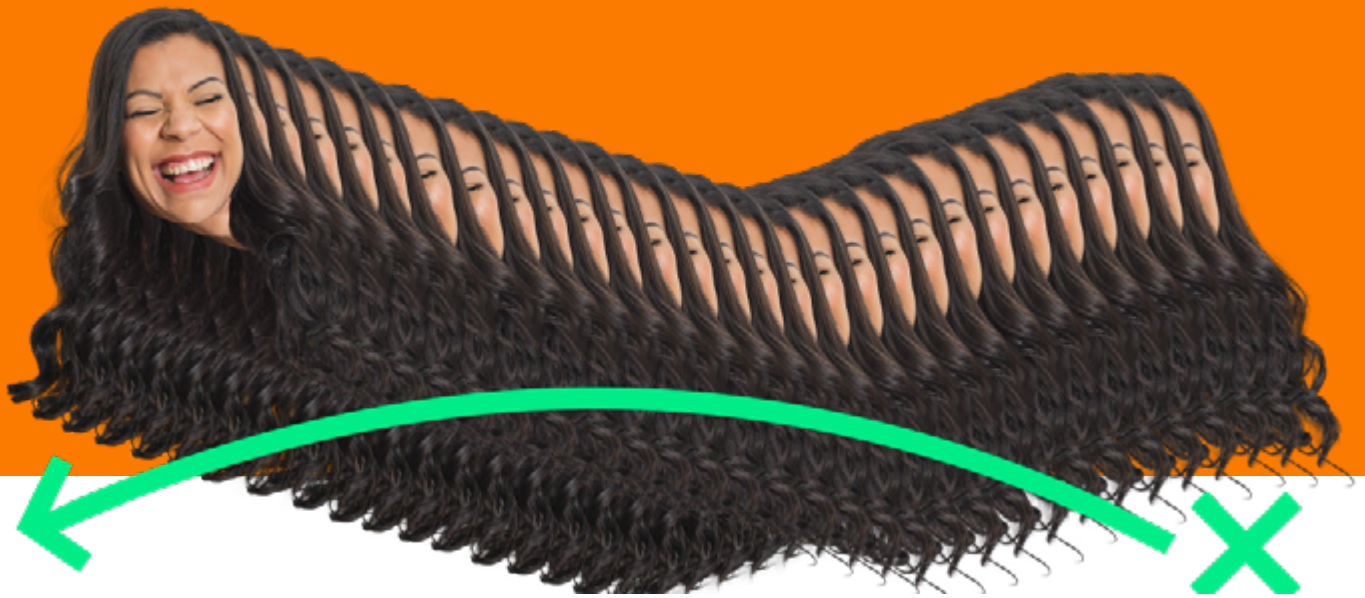
Para isso, analisamos mais de 900 questões  
do Enem e organizamos todos os assuntos  
que mais caem na prova. Assim você sabe  
focar e se prepara pra gabaritar a prova!

Bora calçar a chuteira e começar a aquecer  
porque o jogo tá chegando, viu?

**Bom treino!**



# MATEMÁTICA



## Proporcionalidade

**Esse tópico caiu 7 vezes no ENEM 2017, 8 vezes no ENEM 2018, 14 vezes no ENEM 2019, 8 vezes no ENEM 2020 e 10 vezes no ENEM 2021. Totalizando 47 questões nos últimos 5 anos.**

### Razão

É uma relação entre duas grandezas, expressas na mesma unidade ou não. Assim, a razão entre  $a$  e  $b$  é dada por:

$$\text{Razão} = \frac{a}{b} \text{ ou } a:b$$

## Proporção

É uma igualdade entre razões equivalentes.

$$\text{Proporção: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Lê-se: a está para b assim como c está para d.

## Grandezas

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido numericamente.

Exemplo: preço, tempo, quantidade, ....

### Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao variar uma grandeza, a outra também varia na mesma razão. Por exemplo: se uma grandeza dobra, a outra também irá dobrar. Se uma grandeza reduzir-se à metade, a outra também terá o mesmo efeito.

### Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao variar uma grandeza, a outra também variará na razão inversa. Se uma grandeza dobrar, a outra se reduzirá à metade. Se uma grandeza triplicar, a outra será dividida em três.

## Escala

A escala pode ser definida como a razão entre a medida linear do desenho e a medida linear correspondente na realidade.

$$Escala = \frac{\text{medida do desenho}}{\text{medida real}}$$

- **Obs:** Podemos, também, representar uma escala com dois pontos (:).

## Regra de 3 simples

A regra de 3 simples envolve apenas 2 grandezas. Para resolver um problema utilizando a regra de 3, devemos montar a proporção entre as grandezas (mantendo ou invertendo as razões, a depender se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais, respectivamente) e efetuar os cálculos necessários.

Exemplo: Uma confeitaria produz 100 brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Determine quantos brigadeiros serão produzidos com 10 latas de leite condensado.

Temos que 100 está para 4, assim como x está para 10:

$$\frac{100}{4} = \frac{x}{10}$$

$$4x = 1000$$

$$x = 250$$

## Porcentagem

Porcentagem é uma fração de denominador 100. Logo:

$$\frac{20}{100} = 20 \text{ por cento ou } 20\%$$

$$\frac{3}{100} = 3 \text{ por cento ou } 3\%$$

### Cálculo de uma porcentagem de um número

Se quisermos calcular  $x\%$  de algum número  $y$ , devemos aplicar uma multiplicação. Ou seja:

$$x\% \text{ de } y = x\% \cdot y = \frac{x}{100} \cdot y$$

**Exemplo:** quanto é 10% de 800 ?

$$10\% \text{ de } 800 = \frac{10}{100} \cdot 800 = 80$$

### Regra de 3 no cálculo de porcentagem

Para encontrar a correspondência entre um valor e sua porcentagem, é possível usar a regra de 3 relacionando o valor total ao 100%.

**Exemplo:** quanto é 10% de 800? (calculando, agora, por regra de 3)

Nesse caso, dizemos que 800 está para 100% assim como  $x$  está para 10%. Depois basta multiplicar cruzado.

$$\begin{array}{ccc} 800 & \text{-----} & 100\% \\ x & \text{-----} & 10\% \end{array}$$

$$100x = 8000 \rightarrow x = \frac{8000}{100} \rightarrow x = 80$$

# Estatística

Esse tópico caiu 4 vezes no ENEM 2017, 4 vezes no ENEM 2018, 6 vezes no ENEM 2019, 5 vezes no ENEM 2020 e 11 vezes no ENEM 2021. Totalizando 30 questões nos últimos 5 anos.

## Média aritmética simples

A média aritmética simples de um conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $n$  valores é calculada pelo quociente entre a soma dos valores observados e o número total de valores:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

## Média aritmética ponderada

A média aritmética ponderada de um conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $n$  valores onde cada valor tem seu peso  $p$ , é calculada pela expressão:

$$\overline{X} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

## Moda

É o valor de maior frequência em uma série de dados, o que mais se repete.

## Mediana

Ordenando as observações de uma variável de forma crescente ou decrescente (Rol), a mediana é a observação que ocupa o valor central.

• **obs:** Se o tamanho da amostra for par, então não terá um elemento central. Dessa maneira, precisamos fazer a média aritmética simples entre os dois centrais.

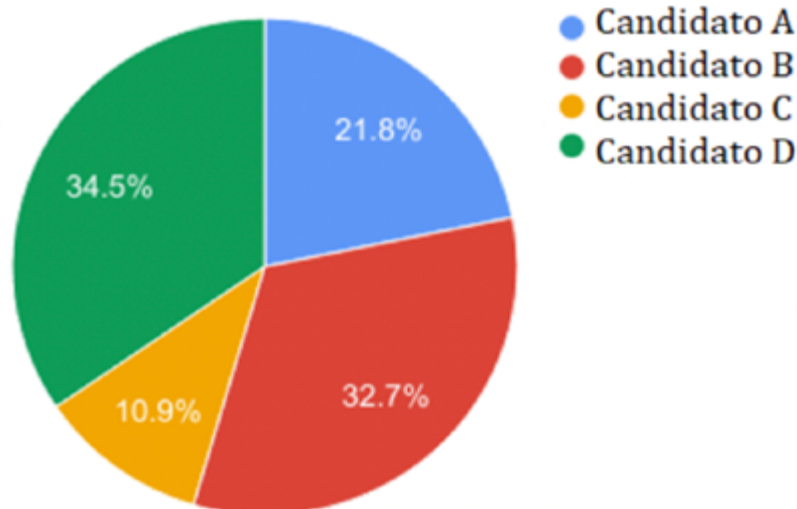
## Gráficos e Tabelas

O tratamento da Informação engloba a leitura de gráficos e tabelas simples. Os tipos mais comuns de gráficos são:

### Gráfico de Setores

O gráfico de setores é feito por uma circunferência e geralmente está associado à porcentagem. Exemplo:

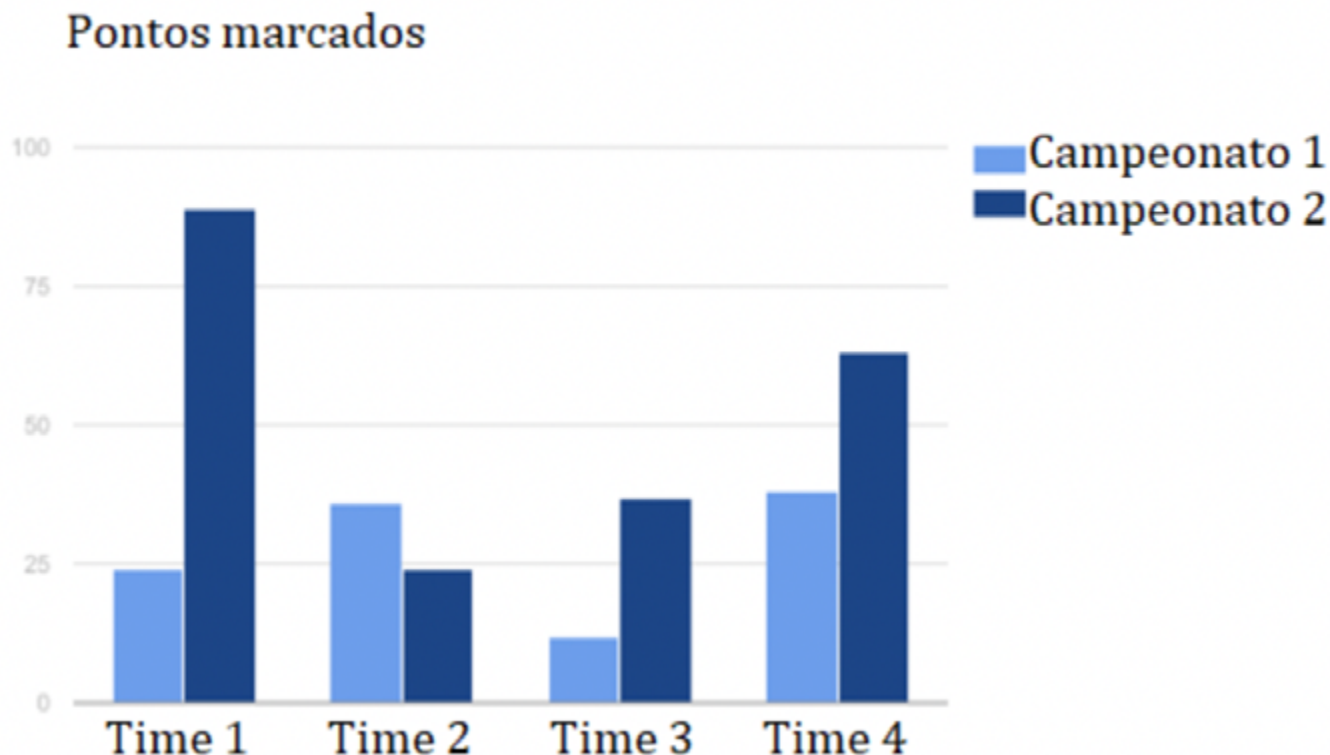
Votos





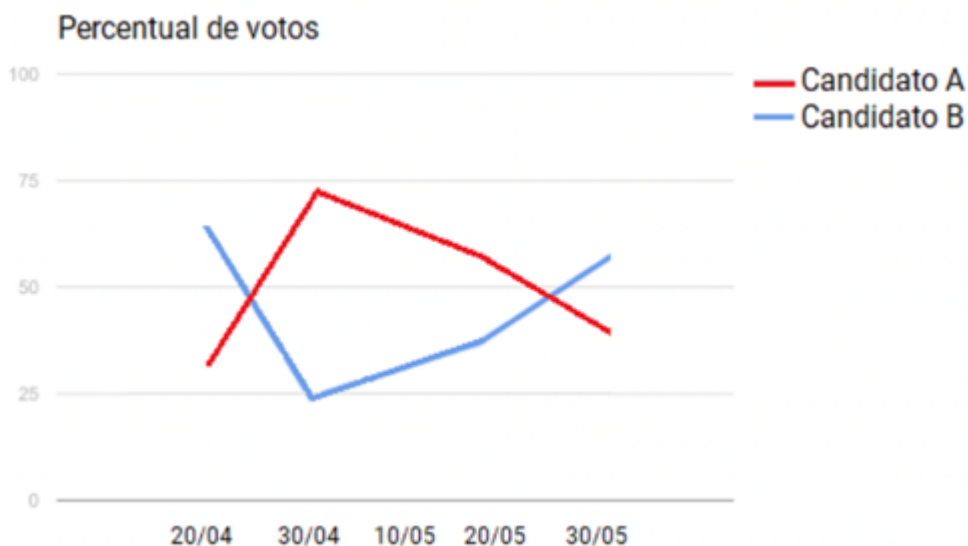
## Gráfico de Barras

O gráfico de barras relaciona parâmetros e categorias, podem existir várias categorias e mais de um parâmetro para cada. Exemplo:



## Gráfico de Linhas

Os gráficos de linhas geralmente estão associados à variação de alguma coisa ao longo do tempo. Exemplo:

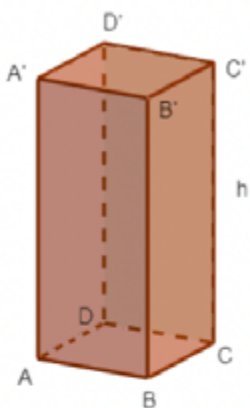


# Geometria Espacial

Esse tópico caiu 4 vezes no ENEM 2017, 3 vezes no ENEM 2018, 4 vezes no ENEM 2019, 9 vezes no ENEM 2020 e 6 vezes no ENEM 2021. Totalizando 26 questões nos últimos 5 anos.

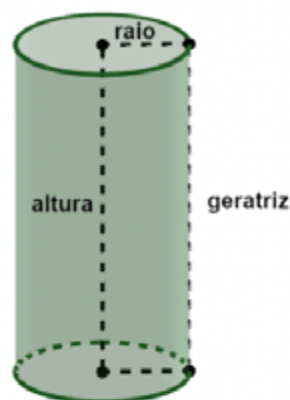
As principais fórmulas para calcular o volume de figuras espaciais são:

**Volume do prisma**



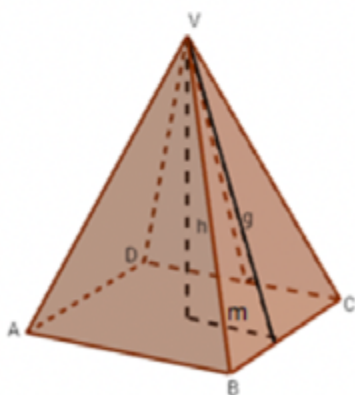
$$V = A_b \cdot h$$

**Volume do cilindro**



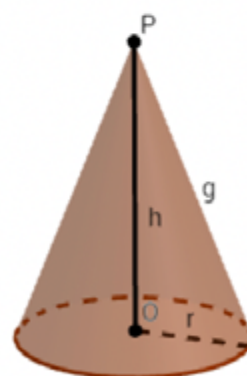
$$V = \pi r^2 h$$

**Volume da pirâmide**



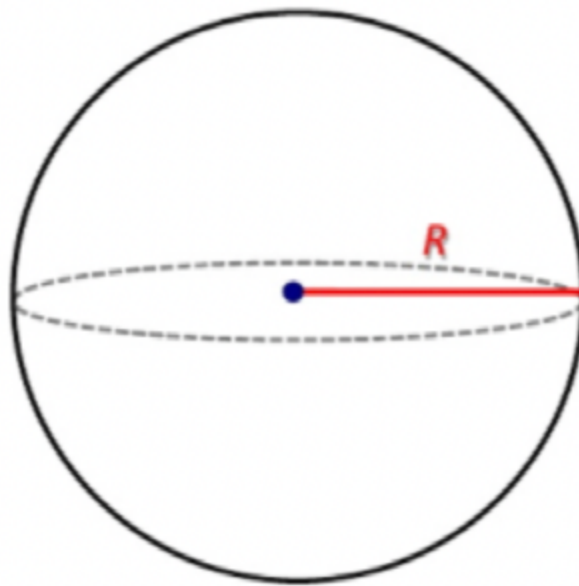
$$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

**Volume do cone**



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

## Volume da esfera

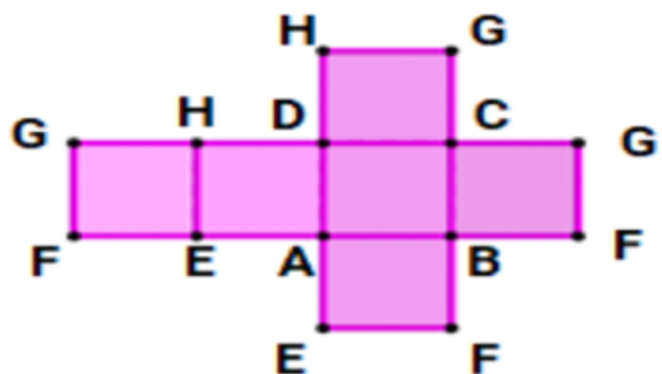
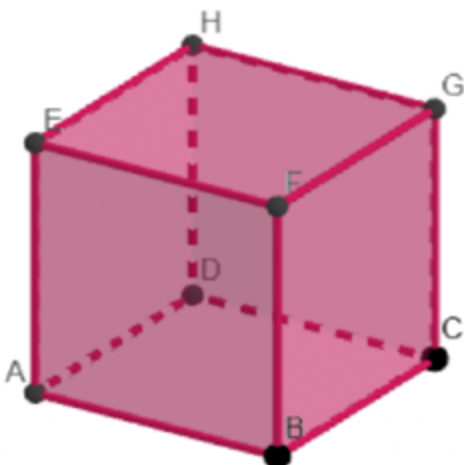


$$V_{esf} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

### Planificação:

A planificação de um sólido geométrico é uma forma de representar as faces que compõem esses sólidos em uma superfície plana.

Exemplo:



# Geometria Plana

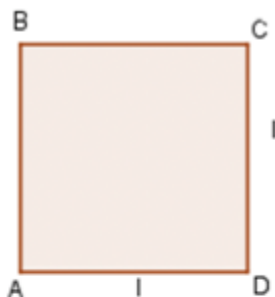
Esse tópico caiu 6 vezes no ENEM 2017, 6 vezes no ENEM 2018, 3 vezes no ENEM 2019, 5 vezes no ENEM 2020 e 2 vezes no ENEM 2021. Totalizando 22 questões nos últimos 5 anos.

**Perímetro:** O perímetro de uma figura plana equivale à soma de todos os lados desta figura.

## Áreas

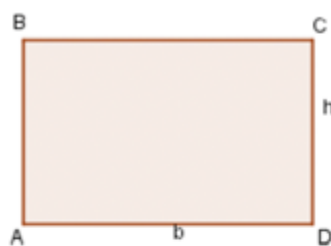
As principais fórmulas para calcular áreas de figuras planas são:

Área do quadrado



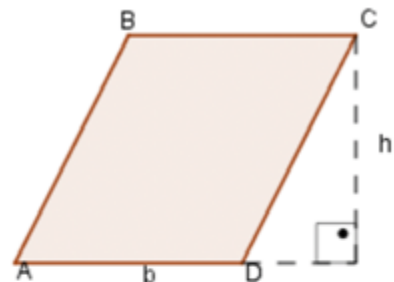
$$A = l^2$$

Área do retângulo



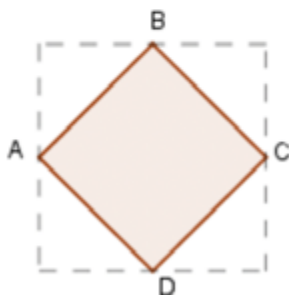
$$A = b \cdot h$$

Área do paralelogramo



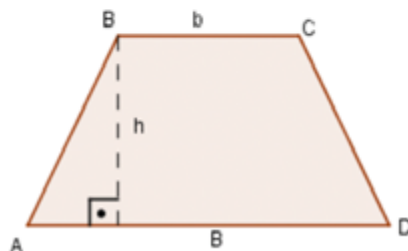
$$A = b \cdot h$$

Área do losango



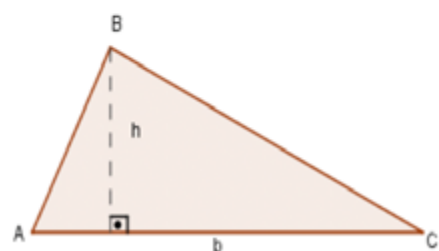
$$A = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

Área do trapézio



$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

Área do triângulo

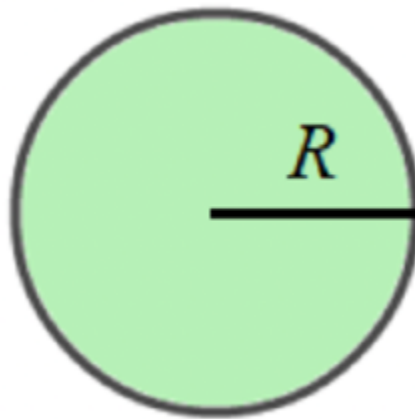


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

## Circunferência e círculo

Vale lembrar que: Circunferência  $\neq$  Círculo!

- Círculo é toda a região do plano delimitada por uma circunferência.
- Circunferência é apenas a linha que dá forma à figura.



**Comprimento da circunferência**

$$C = 2\pi R$$

**Área do círculo**

$$A = \pi R^2$$

# Funções

**Esse tópico caiu 4 vezes no ENEM 2017, 2 vezes no ENEM 2018, 6 vezes no ENEM 2019, 4 vezes no ENEM 2020 e 3 vezes no ENEM 2021. Totalizando 19 questões nos últimos 5 anos.**

Funções são relações estabelecidas entre duas variáveis. Existem diversos tipos de funções, as mais relevantes no vestibular são:

## Função afim

Chama-se de função afim, ou função polinomial do 1º grau, toda função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada pela lei de formação:

$$f(x) = ax + b$$

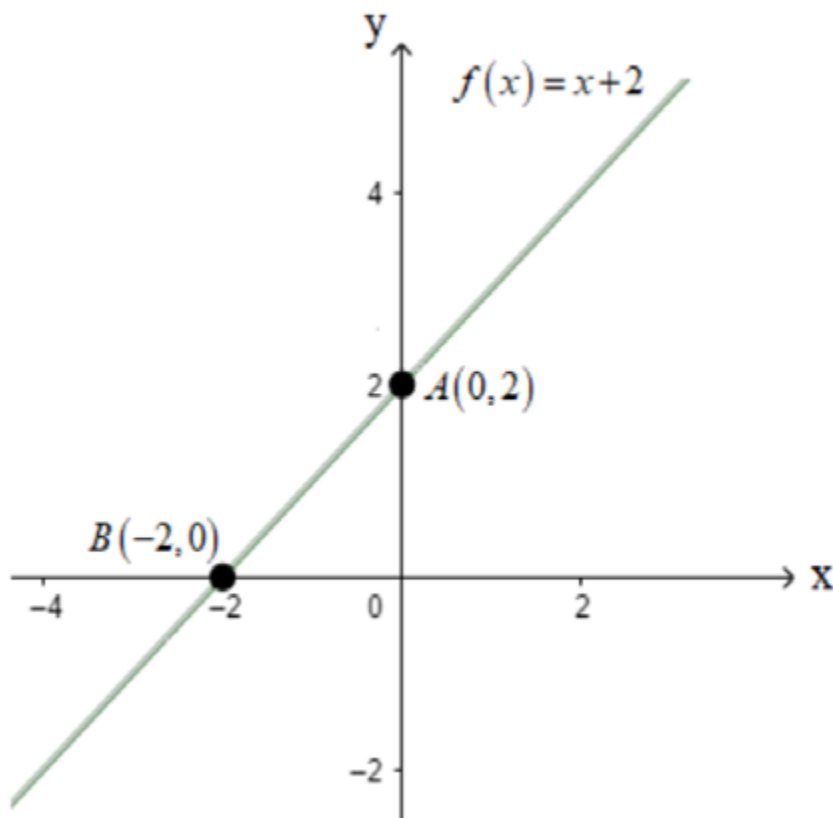
em que  $a$  e  $b$  são números reais, tal que  $a \neq 0$ , chamados de coeficientes numéricos, sendo  $a$  chamado de coeficiente angular e  $b$ , de coeficiente linear.

## Raiz da função

Em uma função afim  $f(x) = ax + b$ , a raiz é o valor de  $x$  quando  $y = 0$ .

## Gráfico

O gráfico de uma função afim é uma reta oblíqua aos eixos  $x$  e  $y$ . Exemplo:



o coeficiente angular é dado por  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  e o coeficiente linear é o ponto em que a reta intercepta o eixo  $y$ .

## Função quadrática

Chama-se de função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, toda função  $f$  de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  dada pela lei de formação:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais e  $a \neq 0$ .

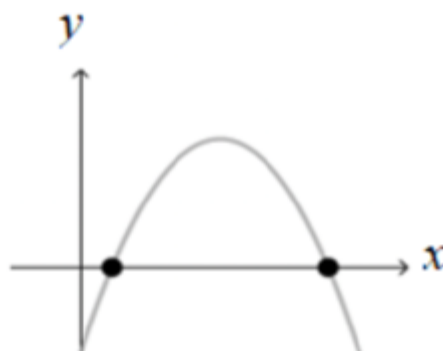
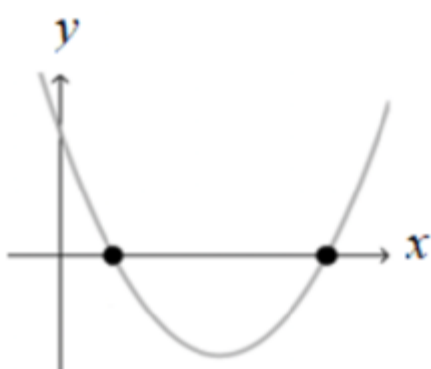
## Raiz da função

As raízes de uma função quadrática são os valores de  $x$  encontrados ao resolver a equação  $f(x) = 0$ . Para resolver essa equação, podemos utilizar a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Gráfico

O gráfico de uma função quadrática tem o formato de uma parábola. Observe os exemplos abaixo de duas parábolas.



## Vértice da parábola

O vértice da parábola possui coordenada a

$$V(x_v, y_v), \text{ onde } x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$



## Função exponencial

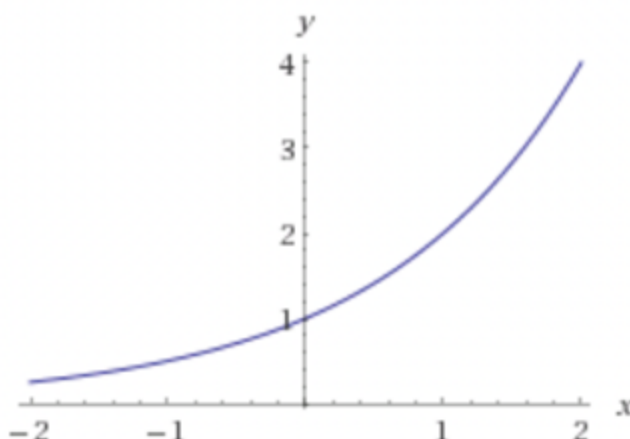
A função exponencial é uma aplicação de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+^*$  que associa a todo número real  $x$  ao resultado da potência  $a^x$ , em que  $a$ , chamada base da função exponencial, é um número real positivo e diferente de 1.

$$f(x) = a^x$$

### Gráfico

Sendo respeitadas todas as restrições, construiremos o gráfico da função exponencial. Dividiremos em casos:

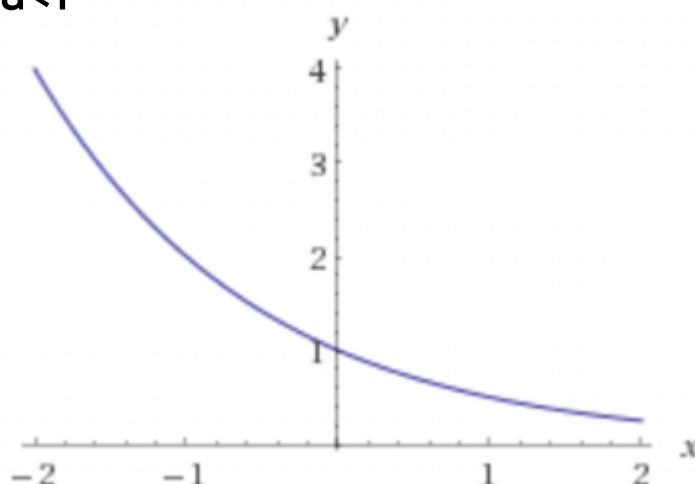
**Função crescente:**  $a > 1$ .



**Ex:**  $f(x) = 2^x$

**Função decrescente:**  $0 < a < 1$

**Ex:**  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



# EXERCÍCIOS ENEM



1. (ENEM 2021) Um parque temático brasileiro construiu uma réplica em miniatura do castelo de Liechtenstein. O castelo original, representado na imagem, está situado na Alemanha e foi reconstruído entre os anos de 1840 e 1842, após duas destruições causadas por guerras.



O castelo possui uma ponte de 38,4 m de comprimento e 1,68 m de largura. O artesão que trabalhou para o parque produziu a réplica do castelo, em escala. Nessa obra, as medidas do comprimento e da largura da ponte eram, respectivamente, 160 cm e 7 cm.

A escala utilizada para fazer a réplica é

- a) 1 : 576.
- b) 1 : 240.
- c) 1 : 24.
- d) 1 : 4,2.
- e) 1 : 2,4.

2. (ENEM 2021) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 de fevereiro de 2015.



Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.



**3.** (ENEM 2019) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma

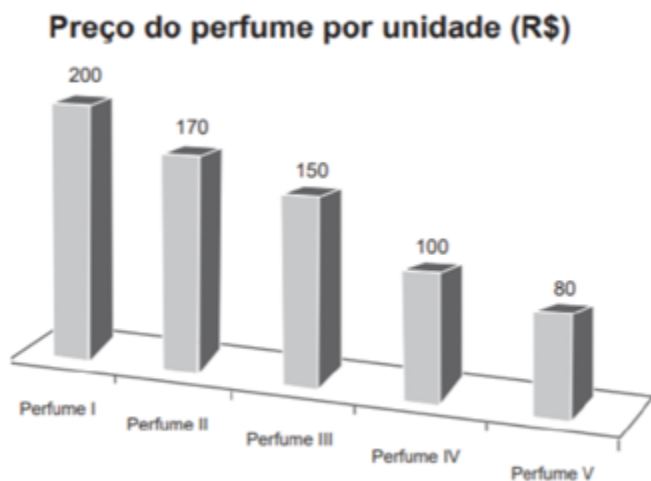
Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais às de nenhum outro colega da sala. Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,

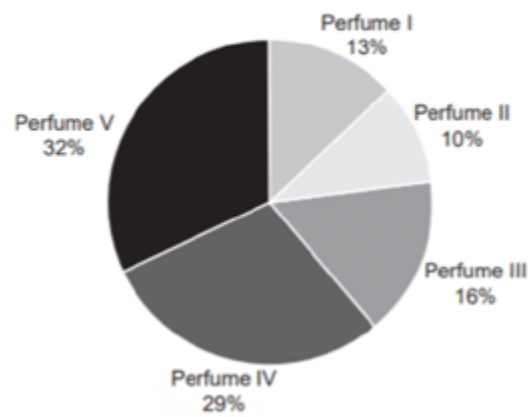
- a) basquete, basquete, basquete, basquete.
- b) futebol, basquete, basquete, basquete.
- c) futebol, futebol, basquete, basquete.
- d) futebol, futebol, futebol, basquete.
- e) futebol, futebol, futebol, futebol.



4. (ENEM 2020) O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro.



Porcentagem da quantidade vendida de cada perfume



Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro. Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) IV.
- e) V.



**5.** (ENEM 2021) Um povoado com 100 habitantes está passando por uma situação de seca prolongada e os responsáveis pela administração pública local decidem contratar a construção de um reservatório. Ele deverá ter a forma de um cilindro circular reto, cuja base tenha 5 metros de diâmetro interno, e atender à demanda de água da população por um período de exatamente sete dias consecutivos. No oitavo dia, o reservatório vazio é completamente abastecido por carros-pipa.

Considere que o consumo médio diário por habitante é de 120 litros de água. Use 3 como aproximação para.

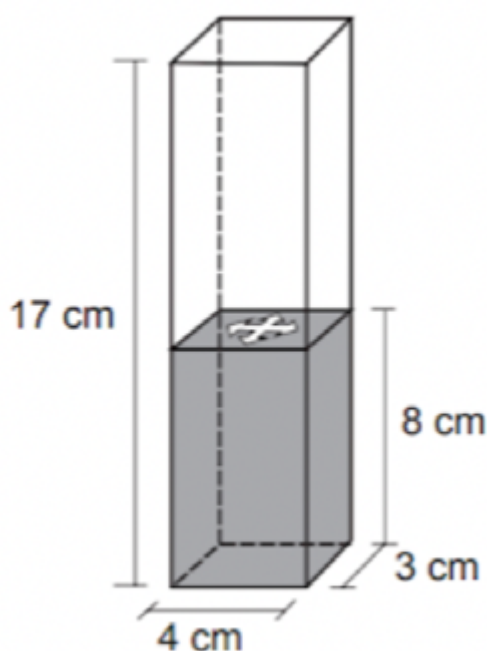
Nas condições apresentadas, o reservatório deverá ser construído com uma altura interna mínima, em metro, igual a

- a) 1,12.
- b) 3,10.
- c) 4,35.
- d) 4,48.
- e) 5,60.





6. (ENEM 2020) Num recipiente com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, colocou-se água até a altura de 8 cm e um objeto, que ficou flutuando na superfície da água. Para retirar o objeto de dentro do recipiente, a altura da coluna de água deve ser de, pelo menos, 15 cm. Para a coluna de água chegar até essa altura, é necessário colocar dentro do recipiente bolinhas de volume igual a  $6 \text{ cm}^3$  cada, que ficarão totalmente submersas.



O número mínimo de bolinhas necessárias para que se possa retirar o objeto que flutua na água, seguindo as instruções dadas, é de

- a) 14.
- b) 16.
- c) 18.
- d) 30.
- e) 34.





7. (ENEM 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro  $d = 40$  cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é  $h = 60$  cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para.



Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

- a) valorização do pacto colonial
- b) defesa dos monopólios régios
- c) formação do sistema metropolitano
- d) abandono da acumulação metalista
- e) eliminação das tarifas alfandegárias



**8.** (ENEM 2020) A fabricação da Bandeira Nacional deve obedecer ao descrito na Lei n. 5.700, de 1º de setembro de 1971, que trata dos Símbolos Nacionais. No artigo que se refere às dimensões da Bandeira, observa-se:

“Para cálculos das dimensões, será tomada por base a largura, dividindo-a em 14 (quatorze) partes iguais, sendo que cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo ( $M$ ). Os demais requisitos dimensionais seguem o critério abaixo:

I. Comprimento da circunferência

será de 20 módulos ( $20M$ );

II. A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos ( $1,7M$ );

III. O raio do círculo azul no meio do losango amarelo será de três módulos e meio ( $3,5M$ ).”

Brasil. Lei n. 5.700, de 1º de setembro de 1971. Disponível em: [www.planalto.gov.br](http://www.planalto.gov.br) Acesso em: 15 set. 2015.

A figura indica as cores da bandeira do Brasil e localiza o quadro externo a que se refere a Lei n. 5.700.



Um torcedor, preparando-se para a Copa do Mundo e dispondo de cortes de tecidos verde (180 cm x 150 cm) e amarelo (o quanto baste), deseja confeccionar a maior Bandeira Nacional possível a partir das medidas do tecido verde.

Qual a medida, em centímetro, do lado do menor quadrado de tecido azul que deverá ser comprado para confecção do círculo da bandeira desejada?

- a) 27.
- b) 32.
- c) 53.
- d) 63
- e) 90.



9. (ENEM 2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas.

Cada um trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de  $X$  a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia  $Y$ , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

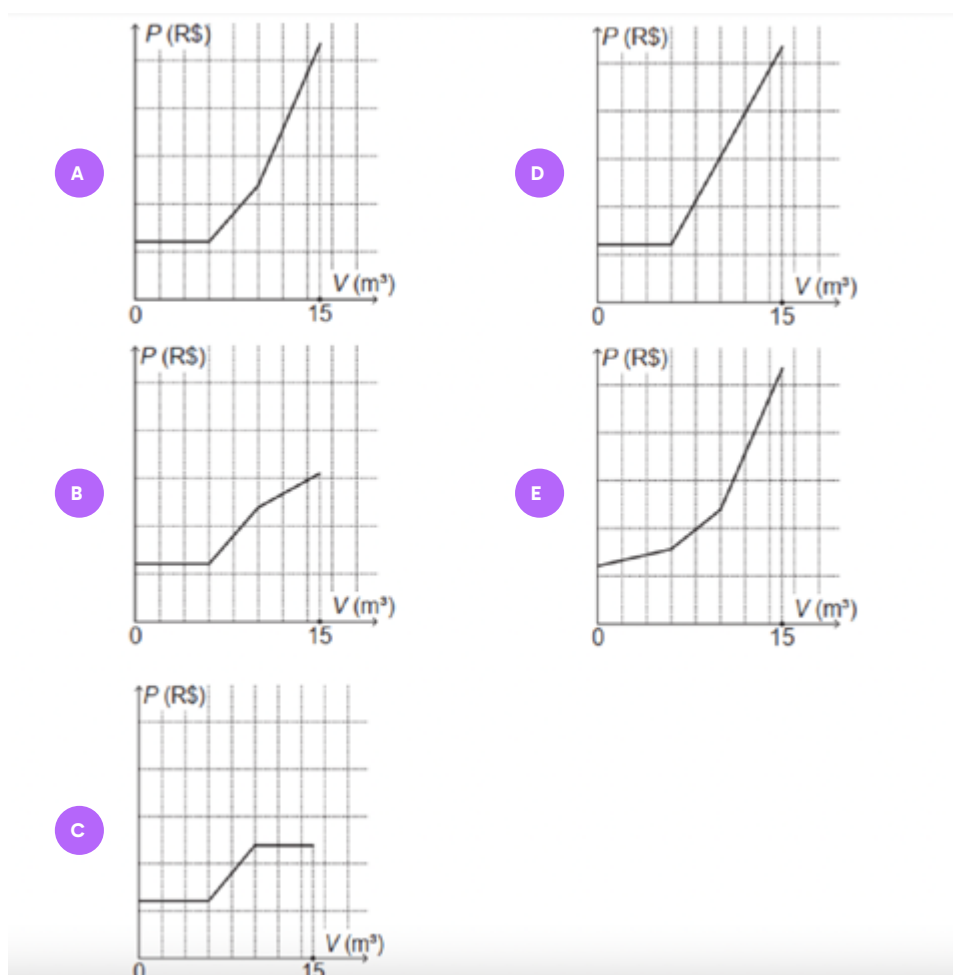
- a)  $Y=80X+920$ .
- b)  $Y=80X+1.000$ .
- c)  $Y=80X+1.080$ .
- d)  $Y=160X+840$ .
- e)  $Y=160X+1.000$ .



**10.** (ENEM 2019) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

- Faixa 1: para consumo de até 6 m<sup>3</sup>, valor fixo de R\$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m<sup>3</sup> e até 10 m<sup>3</sup>, tarifa de R\$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m<sup>3</sup>;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m<sup>3</sup>, tarifa de R\$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m<sup>3</sup>.

Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m<sup>3</sup> por mês. O gráfico que melhor descreve o valor  $P$ , em real, a ser pago por mês, em função do volume  $V$  de água consumido, em metro cúbico, é



# GABARITOS

1. C) A escala é dada pela medida do desenho sobre a medida real, logo, como segue que a resposta é  $\frac{7}{168} = \frac{1}{24} = 1:24$ .

2. D) Os volume em cada reservatório, em bilhões de litros, são iguais a

$$0,2 \cdot 105 = 21$$

$$0,3 \cdot 100 = 30$$

$$0,5 \cdot 25 = 12,5$$

$$0,4 \cdot 80 = 32$$

$$0,6 \cdot 40 = 24$$

Portanto, o reservatório com maior volume é o IV.

3. C) Se o grupo de basquete possui um aluno a mais do que o grupo de futebol, então o número total de alunos é ímpar. Em consequência, sabendo que a mediana divide uma série de dados em duas outras séries com o mesmo número de observações, podemos concluir que o aluno F joga basquete, uma vez que sua altura é a mediana. Portanto, P joga futebol, J joga futebol e M joga basquete.

4. D)

Para resolver essa questão, iremos supor uma quantidade de 100 unidades para cada perfume. Assim, por meio das porcentagens dadas no segundo gráfico, iremos, calcular a quantidade vendida de cada perfume.

- Perfume 1:  $13\% \cdot 100 = 13$  perfumes vendidos.
- Perfume 2:  $10\% \cdot 100 = 10$  perfumes vendidos.
- Perfume 3:  $16\% \cdot 100 = 16$  perfumes vendidos.
- Perfume 4:  $29\% \cdot 100 = 29$  perfumes vendidos.
- Perfume 5:  $32\% \cdot 100 = 32$  perfumes vendidos.

Agora, devemos calcular a receita gerada pela venda dessas perfumes. Para isso, basta multiplicar a quantidade de perfumes vendidos pelo preço do respectivo perfume.

- Perfume 1:  $13 \cdot 200 = 2600$  reais
- Perfume 2:  $10 \cdot 170 = 1700$  reais
- Perfume 3:  $16 \cdot 150 = 2400$  reais
- Perfume 4:  $29 \cdot 100 = 2900$  reais
- Perfume 5:  $32 \cdot 80 = 2560$  reais

5. D) O volume de água necessário para sete dias é  $100 \cdot 7 \cdot 120 = 84000L = 84000dm^3 = 84m^3$

Portanto, se  $h$  é a altura mínima do cilindro, então  $\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot h = 84$   
 $h = 4,48m$

# GABARITOS

**6. A)** Lembrando do Princípio de Arquimedes, segue que o volume total das bolinhas deve corresponder ao volume de líquido que sobe. Como o recipiente está cheio de água até 8 cm de altura, para alcançar os 15 cm de altura, faltam 7 cm. Portanto, se  $n$  é o número de bolinhas que devem ser colocadas no recipiente e cada bolinha tem volume igual a  $6 \text{ cm}^3$ . Então,

$$n \cdot 6 = 4 \cdot 3 \cdot 7 \rightarrow n = 846 \rightarrow n = 14$$

Logo, a resposta correta é a alternativa A.

**7. B)** Desde que a área de cada placa é a soma das áreas de um quadrado de lado 40 cm com um semicírculo de raio  $40/2=20$  cm, podemos concluir que a resposta é

$$10 \cdot \left( 40 \cdot 40 + \pi \cdot \frac{20^2}{2} \right) \cong 10 \cdot 2228 = 22280 \text{ m}^2$$

**8. D)** Considere a figura abaixo.

A questão fala que a bandeira terá (180cm x 150cm).

Agora, com base nos requisitos da questão,

O comprimento será dividido em 20M, tomando que o comprimento é a maior dimensão que é dada por 180cm, podemos calcular o valor de 1 módulo:

$$M = 180/20 = 9 \text{ cm}$$

Outro requisito é que o raio do círculo tem por medida 3,5M,

como o diâmetro é o dobro do raio, então o diâmetro do círculo tem  $2 \times 3,5 = 7M$ .

Como já sabemos que 1 módulo vale 9cm, podemos calcular o valor de 7 módulos:

$$7 \times 9 = 63 \text{ cm}$$

A questão quer saber o lado do menor quadrado de tecido para confeccionar o círculo da bandeira. O quadrado de menor lado terá a mesma medida do diâmetro do círculo que é 63 cm.

**9. D)** O valor total gasto com os diaristas, em reais, é  $(X - 1) \cdot 80 \cdot 2 = 160X - 160$

$$Y = 160X - 160 + 1000$$

$$Y = 160X + 840$$

**10. A)** Considerando os gráficos o único que apresenta a partir do  $10 \text{ m}^3$  um crescimento maior (ou seja, uma reta mais inclinada) é a letra A.

**AGORA É SÓ  
CHUTAR PRO GOL  
E COMEMORAR  
A APROVAÇÃO**

