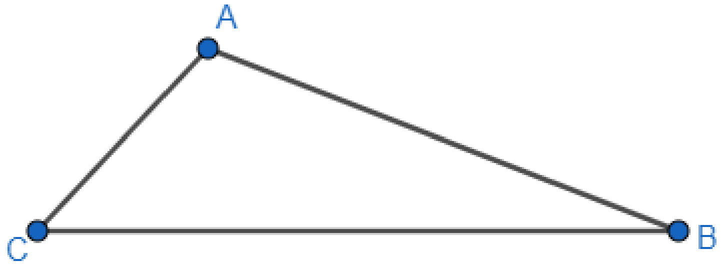
Triângulos: Condição de existência, lei angular, classificação e área

Teoria

Um triângulo é uma figura geométrica constituída a partir de três pontos distintos não colineares e segmentos de reta que os liga.



Na figura acima, temos que A,B e C são chamados de vértices e os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os lados

Condição de existência

A condição de existência de um triângulo é:
Num triângulo ABC, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois e maior que o módulo da diferença, ou seja, considerando a, b e c os lados do triângulo:

$$|b-c| < a < b+c$$
$$|a-c| < b < a+c$$
$$|a-b| < c < a+b$$

Note que o triângulo de lados 5, 12 e 13 (comparando com a fórmula anterior a = 5, b = 12 e c= 13)

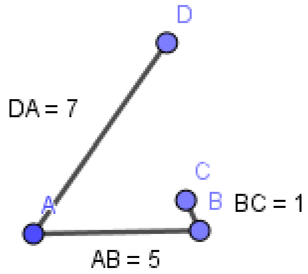
$$|12-13| < 5 < 12+13 = |-1| < 5 < 25 = 1 < 5 < 25$$
$$|5-13| < 12 < 5+13 = |-8| < 12 < 18 = 8 < 12 < 18$$
$$|5-12| < 13 < 5+12 = |-7| < 13 < 17 = 7 < 13 < 17$$

Nesse caso é possível existir um triângulo de lados 5,12 e 13.

No entanto, se os lados fossem 5,1 e 7, teríamos:

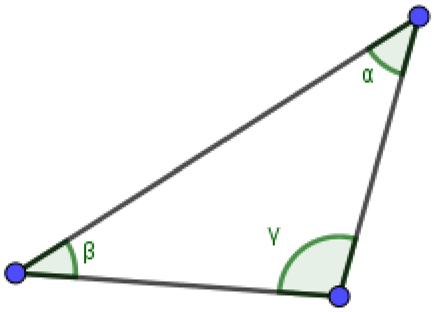
$$|5-1| < 7 < 5+1 = 4 < 7 < 6$$

Como essa desigualdade é falsa, não podemos construir um triângulo cujos lados medem 1, 5 e 7. Ou seja, isso implica em um triângulo que não "fecha":



Lei angular

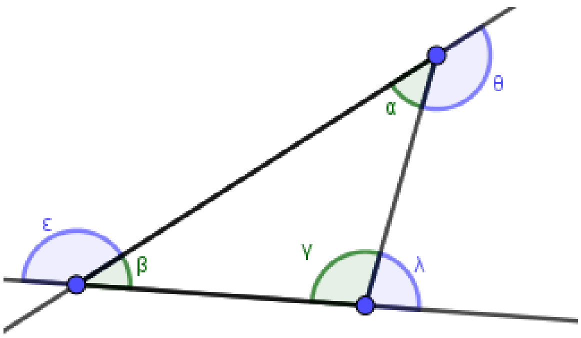
Considere o triângulo abaixo:



Nele temos que α, β e γ são ângulos internos do triângulo. A lei angular dos triângulos diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer vale 180°. Nesse caso, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Teorema do ângulo externo

Observe o triângulo abaixo



Temos que θ, λ e ε são chamados de ângulos externos do triângulo e o teorema do ângulo externo diz que um ângulo externo tem a mesma medida que a soma de dois ângulos internos não adjacentes (ou seja, o que não está ao lado dele). Nesse triângulo, temos que:`

$$\begin{cases} \theta = \beta + \gamma \\ \lambda = \alpha + \beta \\ \varepsilon = \gamma + \alpha \end{cases}$$

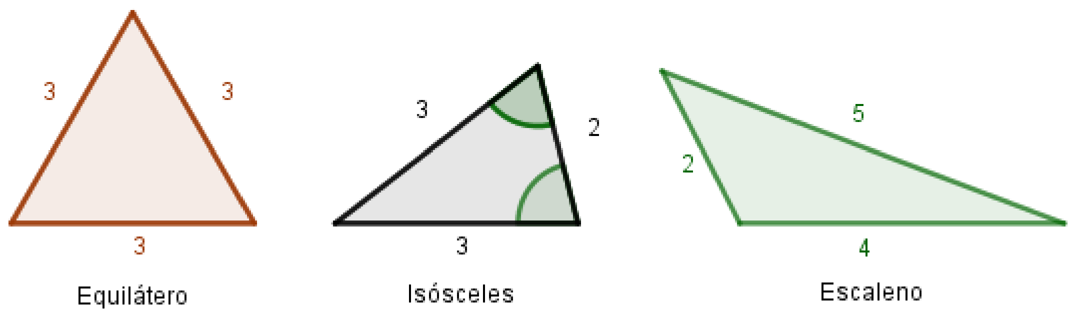
Por que isso vale?
Observe que θ e α, são suplementares, ou seja, $\theta + \alpha = 180° \Rightarrow \theta = 180° - \alpha$.
Vimos na lei angular que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Então, podemos substituir 180° pela soma dos ângulos internos.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 180° \\ \theta = 180° - \alpha \end{array}\right\} \theta = \cancel{\alpha} + \beta + \gamma - \cancel{\alpha} = \beta + \gamma$$

Classificação do triângulo

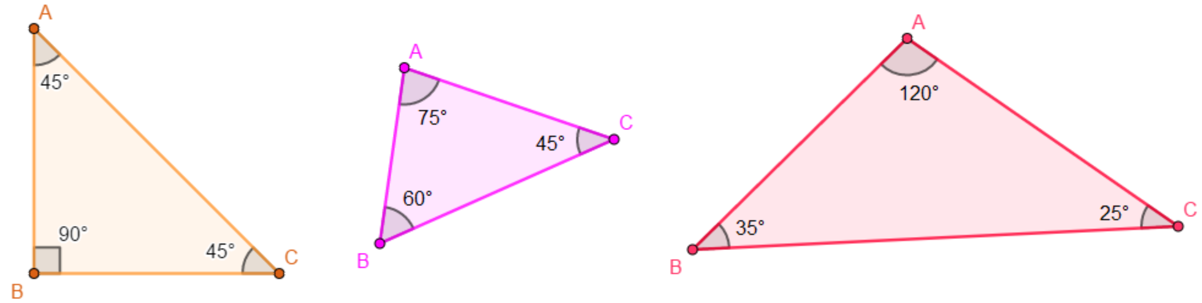
Quanto aos lados

Equilátero: Apresenta os três lados congruentes
Isósceles: Apresenta os dois lados congruentes (e ângulos da base iguais)
Escaleno: Apresenta os três lados diferentes entre si

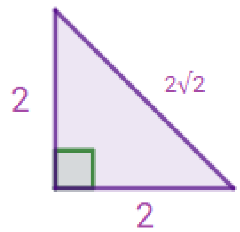


Quanto aos ângulos

Retângulo: Possui um ângulo interno de 90 graus (reto) e dois ângulos agudos.
Acutângulo: Possui três ângulos internos agudos (menor que 90 graus).
Obtusângulo: Possui um ângulo obtuso (maior que 90 graus) e dois ângulos agudos.



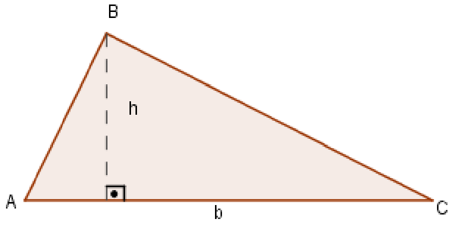
Note que um triângulo é classificado quanto aos lados e quanto aos ângulos.
Exemplo:



O triângulo acima é retângulo e isósceles.

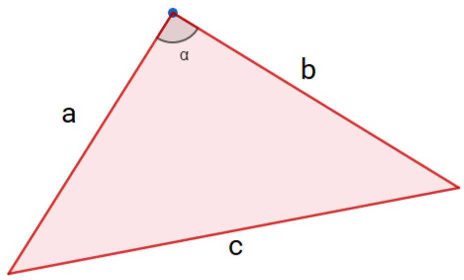
Área do Triângulo

Quando falamos do cálculo da área de uma figura plana, estamos querendo calcular a medida de sua superfície. Seja b a base do triângulo e h a altura dele. Sua área é dada por:



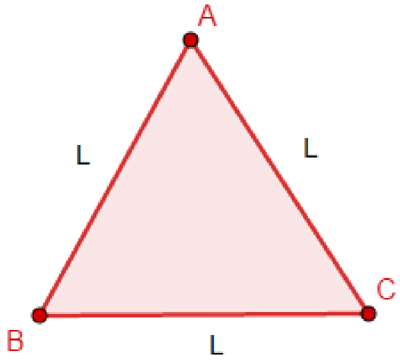
$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$

Uma outra fórmula que nos é muito útil pode ser vista abaixo:



$$\boxed{A = \frac{a \times b \times sen\alpha}{2}}$$

Temos, também, uma fórmula exclusiva para o cálcula da área de triângulos equiláteros:



$$\boxed{A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}}$$

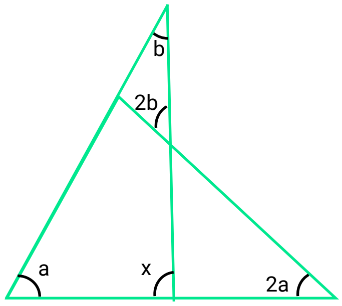
Exercícios

1. Verifique se é possível construir um triângulo com lados cujas medidas valem:

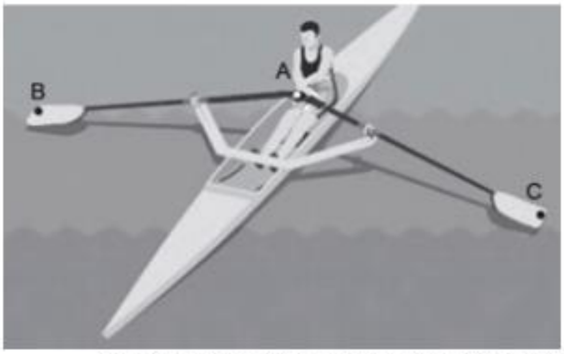
a) 8, 10, 14

b) 5, 8, 18

2. Determine o valor de X em graus:



3. O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida de 170°. O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.

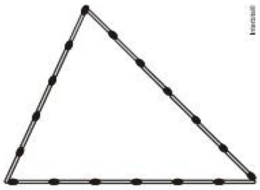
b) acutângulo escaleno.

c) acutângulo isósceles.

d) obtusângulo escaleno.

e) obtusângulo isósceles.

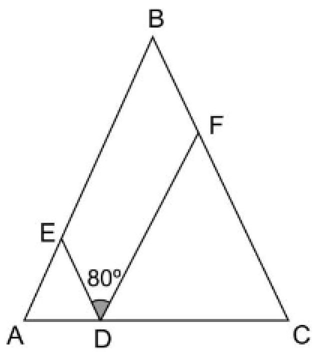
4. Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

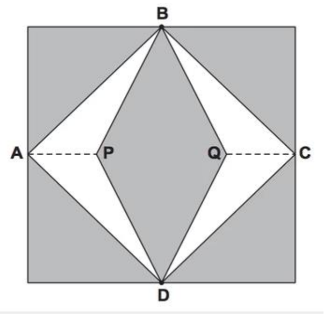
a) 3
b) 5
c) 6
d) 8
e) 10

5. Na figura abaixo, tem-se que $\overline{AD} = \overline{AE}$, $\overline{CD} = \overline{CF}$ e $\overline{BA} = \overline{BC}$. Se o ângulo $E\hat{D}F$ mede 80º, então o ângulo $A\hat{B}C$ mede:



a) 20º
b) 30º
c) 50º
d) 60º
e) 90º

6. Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$50,00 o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50

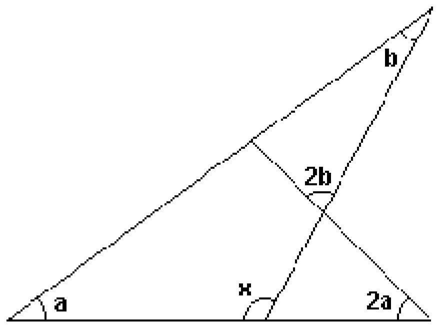
b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00

7. Observe a figura.



Nela, a, 2a, b, 2b, e x representam as medidas, em graus, dos ângulos assinalados. O valor de x, em graus, é:

a) 100

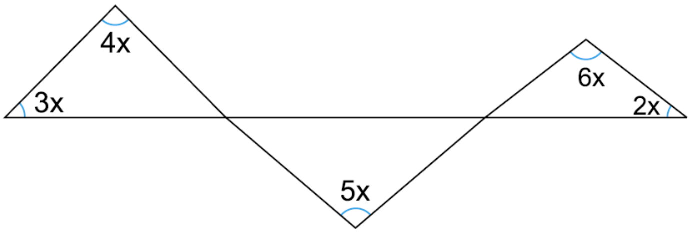
b) 110

c) 115

d) 120

e) 130

8. Na figura abaixo, o ângulo x em graus pertence a qual intervalo?



a) [0,15]

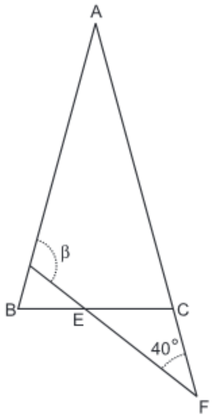
b) [15,20]

c) [20,25]

d) [25,30]

e) [30,35]

9. Na figura, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{CE} = \overline{CF}$. A medida de β é:



a) 90°

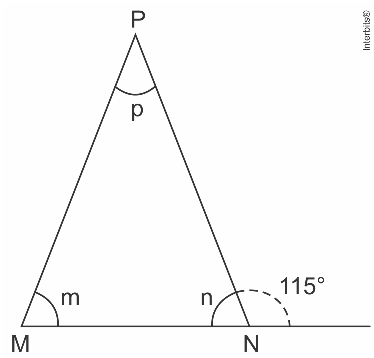
b) 120°

c) 110º

d) 130°

e) 140°

10.



O triângulo PMN acima é isósceles de base $\overline{MN}$. Se p, m e n são os ângulos internos do triângulo, como representados na figura, então podemos afirmar que suas medidas valem, respectivamente,

a) 50°, 65°, 65°

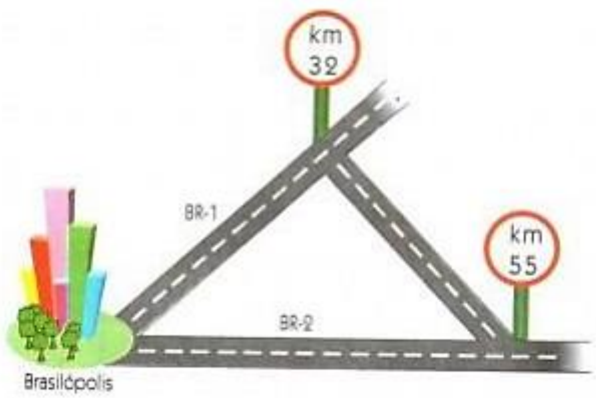
b) 65°, 65°, 50°

c) 65°, 50°, 65°

d) 50°, 50°, 80°

e) 80°, 80°, 40°

11. Deseja-se fazer uma ligação entre o km 32 da BR-1 e o km 55 da BR-2, como mostra a figura.



Sabendo que essa ligação terá um número inteiro de quilômetros, quais as medidas, mínima e máxima, respectivamente, que poderá ter?

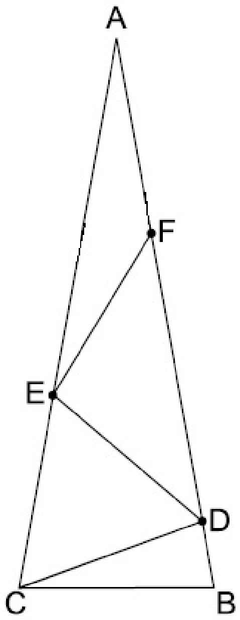
a) 24 km e 86 km

b) 23 km e 87 km

c) 23 km e 86 km

d) 24 km e 87 km

12. Determine a medida do ângulo do vértice A do triângulo isósceles ABC, sabendo que $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$.



a) 15°
b) 20°
c) 25°
d) 30°
e) 35°

Gabaritos

1. **a)** $14 - 10 < 8 < 10 + 14$
$14 - 8 < 10 < 8 + 14$
$10 - 8 < 14 < 10 + 8$
$4 < 8 < 24$
$6 < 10 < 22$
$2 < 14 < 18$
É possível!

b) $18 - 8 < 5 < 18 + 8$
$18 - 5 < 5 < 18 + 5$
$8 - 5 < 18 < 8 + 5$
$10 < 5 < 26$
Não é possível!

2. ΔABC:
$2b + 2 + b + 2^{a} = 180^{o}$
$3^{a} + 3b = 180^{o}$: 3
$A + b = 60^{o}$

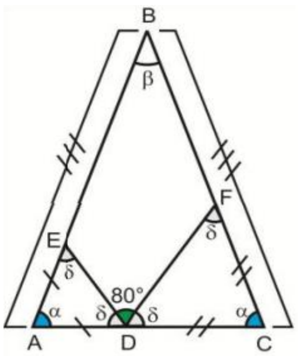
$x + \underbrace{a + b}_{60^{o}} = 180^{o}$

$x = 120^{o}$

3. **E**
Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, temos que o triângulo é isósceles. Como $B\hat{A}C = 170^{o}$, o triângulo é obtusângulo.

4. **A**
O perímetro do triângulo é de 17 palitos. Temos que esse triângulo deve ter um lado medindo 6 palitos. Desse modo, poderemos formar os triângulos com as seguintes medidas de lados, levando em consideração a condição de existência de um triângulo:
6-6-5 ; 7-6-4 ; 8-6-3

5. **A**
Observe a figura:



Sendo o triângulo ABC isósceles (AB = BC), os ângulos da base AC têm a mesma medida α. Os triângulos ADE e DCF são semelhantes porque são isósceles e possuem os ângulos dos vértices congruentes, logo os ângulos de suas bases também são congruentes e medem δ. Analisando a figura ao lado, conclui-se que:

ADE + EDF + FDC = 180

2δ + 80 = 180

2δ = 100

α = 80

2 α = 160

β = 20

6. B

A área da região clara pode ser calculada através do quádruplo da área do triângulo APB, visto que os triângulos APB, APD, CQD e CQB são congruentes, possuindo mesmas áreas.

A área da região clara é igual à área da região sombreada e pode ser calculada através da diferença da área do quadrado pela área clara:

1-0,25=0,75m².

Calcula-se o preço do vitral através do produto da área de cada região pelo preço do m² correspondente.

Preço= 0,25.50 + 0,75.30 = 12,5 + 22,5 = 35 reais.

7. D

Sabemos que X é igual 2a + 2b, pois x é ângulo externo do triângulo que possui os ângulos 2b (oposto pelo vértice) e 2a.

x = 2a+2b

x= 2(a+b)

e sabemos também que a+b+x=180, pois são ângulos de um triângulo.

Agora, substituímos o valor que encontramos de y na primeira, e colocamos nessa:

a+b+x=180

a+b + 2(a+b) = 180

a+b+2a+2b=180

3a+3b=180

simplificamos por 3:

a + b = 60

Agora voltamos na formula la de cima:

x = 2(a+b)

x = 2 . 60

x = 120.

8. B

1º triângulo:

y + 3x + 4x = 180

y + 7x = 180

y = 180 - 7x

2º triângulo:

y + z + 5x = 180

como y = 180 - 7x, então:

180 - 7x + z + 5x = 180

z = 2x

3º triângulo:

z + 6x + 2x = 180

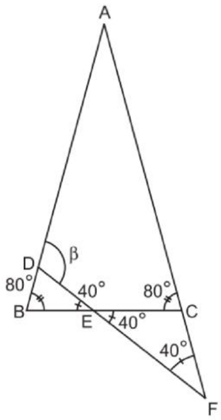
2x + 6x + 2x = 180

10x = 180

x = 18º

9. B

Observe a figura:



O triângulo CEF é isósceles, pois CE = CF. Logo, BÊD = CÊF = CFE = 40. Como ACB é externo ao triângulo CEF, temos ACB = 40 + 40 = 80 graus.

O triângulo ABC é isósceles, pois AB = AC. Logo, ABC = ACB = 80. Como β é externo ao triângulo BDE, temos β = 40 + 80 = 120 graus.

10. A

$n = 180° - 115° \Rightarrow n = 65°$

$PM = PN \Rightarrow m = 65°$

Logo,

$p = 180° - 2 \cdot 65° = 50°$

11. A

Repare que que a ligação é um lado de um trângulo cujos outros dois lados medem 32 e 55. Assim, pela condição de existência de um triângulo qualquer, temos:

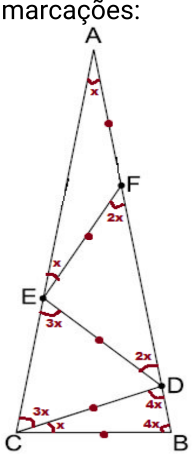
$$|55-32| < x < 55+32$$

$$23 < x < 87$$

Dessa maneira, seu comprimento mínimo é 24 e máximo é 86.

12. B

Como temos vários triângulos isósceles, e pelo teorema do ângulo externo, podemos fazer as seguintes marcações:



- AEF é isósceles então Ê = Â = x.
- O ângulo EFD é externo a AEF, então EFD = 2x.
- EFD é isósceles então EFD = EDF = 2x.
- O ângulo CED é externo a AED, então CED = 3x.
- CDE é isósceles então DEC = ECD = 3x.
- O ângulo CDB é externo a ACD, então CDB = 4x.
- CDB e ABC são isósceles então ACB = CDB = CBD = 4x.

Por fim:

$$4x+4x+x=180$$

$$9x=180$$

$$x=20°$$