AULA 1 – INTRODUÇÃO

Definição

O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, é o conjunto dos pares ordenados $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ de números reais, para os quais estão definidas, de forma específica, algumas operações.

Usualmente, representa-se por z o número complexo $(x,y), \{x,y\} \subset \mathbb{R}$.

Dado um número complexo $z=(x,y)$, dizemos que:

- *x*: parte real de *z*. Indicamos por *Re(z)=x*.
- *y*: parte imaginária de *z*. Indicamos por *Im(z)=y*.

Unidade imaginária

O número $(0,1)$ é chamado de **unidade imaginária** e é representado por ***i***.

$$(0,1)=i$$

Pela definição de números complexos, tem-se:

$$i^2=-1 \Rightarrow i=\sqrt{-1}$$

Números reais

Os **números reais** são os números complexos cuja parte imaginária é zero, ou seja, são os números no formato**:**

$$(x,0)=x$$

Números imaginários

Os **imaginários puros** são os números complexos cuja parte real é zero, ou seja, são os números no formato:

$$(0,y)=y.i$$

Forma algébrica

Os **números complexos** podem ser representados como:

$$z=(x,y)=x+y.i$$

Esta forma é conhecida como forma algébrica do número complexo.

AULA 2 – IGUALDADE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Dois números complexos $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$ são iguais se:

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c \text{ e } b=d$$

Regra prática: parte real igual a parte real e parte imaginária igual a parte imaginária.

AULA 3 – POTÊNCIAS DE i

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$i^{4n}=i^0=1$$

$$i^{4n+1}=i^1=i$$

$$i^{4n+2}=i^2=-1$$

$$i^{4n+3}=i^3=-i$$

Regra prática: a potência i^k será igual a i^r onde *r* é o resto da divisão de *k* por 4.

AULA 4 – SOMA E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Soma de números complexos

Para somarmos números complexos, somamos parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d).i$$

Subtração de números complexos

Para subtrairmos números complexos, subtraímos parte real de parte real e parte imaginária de parte imaginária:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d).i$$

AULA 5 – MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Produto de números complexos

Para multiplicarmos números complexos, realizamos a distributiva normalmente e reagrupamos parte real com parte real e parte imaginária com parte imaginária nos resultados, lembrando que $i^2 = -1$:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc).i$$

Obs:

Para a multiplicação de números complexos valem as propriedades:

- Comutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
- Distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ e $(z_1 + z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

AULA 6 – CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$ é o mesmo número complexo, porém com o sinal invertido na parte imaginária:

$$\bar{z} = a - bi$$

Propriedades dos conjugados

- O conjugado da soma é igual à soma dos conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

- O conjugado da diferença é igual à diferença dos conjugados:

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

- O conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

- O produto de um número complexo por seu conjugado é um número real não negativo:

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 + b^2$$

- A soma de um complexo com seu conjugado é igual a duas vezes sua parte real:

$$z_1 + \overline{z_1} = 2a$$

- A diferença de um complexo com seu conjugado é igual a duas vezes sua parte imaginária:

$$z_1 - \overline{z_1} = 2bi$$

AULA 7 – DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

A divisão de dois números complexos pode ser efetuada representando-se a divisão como uma fração e então multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Com isso, o denominador torna-se um número real e o resultado da divisão é obtido:

$$\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - dbi^2}{c^2 - d^2i^2}$$

$$= \frac{(ac+db) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \Rightarrow$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+db}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)\cdot i$$

AULA 8 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

Plano de Argand-Gauss

A representação geométrica de um número complexo é feita em um plano semelhante ao plano cartesiano, denominado Plano de Argand-Gauss. Neste plano:

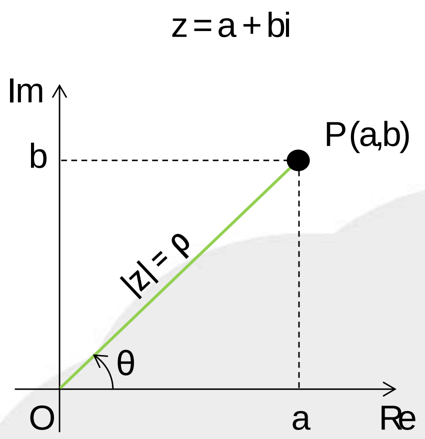
- o eixo **horizontal** representa a parte **REAL** dos números complexos;
- o eixo **vertical** representa a parte **IMAGINÁRIA** dos números complexos;
- chamamos de **AFIXO** o ponto que representa um número complexo no plano.

Definimos ainda:

- Módulo de um número complexo: distância do afixo até a origem do plano;
- Argumento de um número complexo: ângulo formado entre o eixo horizontal e o segmento

que liga a origem ao afixo, medido no sentido anti-horário.

Para um número complexo $z = a + bi$ teremos:



Módulo de um número complexo

O valor do módulo ρ do número complexo $z = a + bi$ pode ser calculado com auxílio do Teorema de Pitágoras, e resulta em:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Obs:

- Como **o módulo** é calculado a partir da soma de dois quadrados, ele **será sempre um número maior ou igual a 0**.

Argumento de um número complexo

O valor do argumento θ do número complexo $z = a + bi$ pode ser calculado com auxílio de relações trigonométricas e resulta em:

$$sen\ \theta = \frac{b}{\rho}$$

$$cos\ \theta = \frac{a}{\rho}$$

Obs:

- O **argumento** será sempre um ângulo tal que $\mathbf{0 \leq \theta < 2\pi}\ rad.$

AULA 9 – FORMA TRIGONOMÉTRICA

Já vimos que:

$$cos\ \theta = \frac{a}{\rho}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{\rho}$$

Portanto, temos que:

$$a = \rho \cdot cos\ \theta$$

$$b = \rho \cdot sen\ \theta$$

E, como $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi \Rightarrow z = \rho \cdot cos\ \theta + \rho \cdot sen\ \theta \cdot i$$

Colocando ρ em evidência, chegamos à **forma trigonométrica** de um número complexo:

$$z = \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$$

AULA 10 – MULTIPLICAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2 tais que $z_1 = \rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i \cdot sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i \cdot sen\ \theta_2)$, então o produto de z_1 e z_2 pode ser facilmente calculado como:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [cos\ (\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen\ (\theta_1 + \theta_2)]$$

AULA 11 – POTENCIAÇÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Como consequência do produto no formato trigonométrico, podemos inferir que ao elevarmos um número complexo $z = \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta)$ao expoente natural *n*, o resultado será dado por:

$$z^n = \rho^n \cdot [cos\ (n \cdot \theta) + i \cdot sen\ (n \cdot \theta)]$$

AULA 12 – DIVISÃO NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2 tais que $z_1 = \rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i \cdot sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i \cdot sen\ \theta_2)$, então o quociente de z_1 e z_2 pode ser facilmente calculado como:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}.[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i.sen(\theta_1 - \theta_2)]$$