AULA 1 – DEFINIÇÃO E REPRESENTAÇÃO

Definição

Matrizes são tabelas de números. Se uma matriz tem *m* linhas e *n* colunas, dizemos que ela é uma matriz de ordem *m* x *n* ou simplesmente é uma matriz *m* x *n* (lê-se *m* por *n*).

Elementos de uma matriz

Os números que compõe a matriz são chamados de elementos e são denotados por a_{ij} onde *i* é o número da linha onde o elemento se encontra e *j* é o número da coluna onde o elemento se encontra.

Representação

As matrizes podem ser representadas:

- Explicitamente: na forma de tabelas entre parênteses ou colchetes. Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Implicitamente: com uma lei que determina cada elemento a_{ij} em função de *i* e/ou *j*. Ex:

$A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} = i + j$

AULA 2 – TIPOS DE MATRIZES

Matriz linha

É a matriz que possui **uma única linha**, ou seja, tem ordem $1 \times n$.

Matriz coluna

É a matriz que possui **uma única coluna**, ou seja, tem ordem $n \times 1$.

Matriz quadrada

É a matriz que possui o **número de linhas igual ao número de colunas**, ou seja, tem ordem $n \times n$. Podemos dizer que a matriz é "quadrada de ordem n".

Nas matrizes quadradas definimos:

- Diagonal principal: elementos para os quais *i* = *j*;
- Diagonal secundária: elementos para os quais *i* + *j* = *n* + *1*.

Matriz identidade

São as **matrizes quadradas** onde a diagonal principal é composta por elementos de valor **1** e todos os outros elementos são **0**. Chamamos estas matrizes de I_n.

Matriz nula

São as matrizes com todos elementos iguais a **0**.

AULA 3 – MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, chamamos de A^t a matriz transposta de A.

As linhas de A serão as colunas de A^t, na ordem original, ou seja, a primeira linha de A será a primeira coluna de A^t, a segunda linha de A será a segunda coluna de A^t e assim por diante.

AULA 4 – IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes serão iguais se tiverem a mesma ordem e se seus elementos de mesma posição forem iguais.

AULA 5 – ADIÇÃO DE MATRIZES

Indica-se a soma de matrizes A e B resultando na matriz C por:

$$C = A + B$$

Para que possamos somar duas matrizes A e B, elas devem ser de mesma ordem. A matriz C, resultado da soma, é uma matriz de mesma ordem de A e B, obtida somando-se os elementos de mesma posição em A e B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Por exemplo, o elemento c_{13} será obtido pela soma de a_{13} com b_{13}:

Propriedades

Assim como a soma de números, a soma de matrizes apresenta algumas propriedades importantes:

- Comutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento oposto: $A + (-A) = 0$
- Elemento neutro: $A + 0 = A$

Além destas propriedades, é importante salientar que a **transposta da soma é igual à soma das transpostas**:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

AULA 6 – SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Indica-se a subtração de matrizes A e B resultando na matriz C por:

$$C = A - B$$

Analogamente à soma, para que a subtração de matrizes possa ser realizada, elas devem ser de mesma ordem. A matriz C, resultado da subtração, é uma matriz de mesma ordem de A e B, obtida subtraindo-se os elementos de mesma posição em A e B:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Por exemplo, o elemento c_{13} será obtido pela subtração de a_{13} com b_{13}:

AULA 7 – MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO POR UMA MATRIZ

Indica-se o produto de um número real k por uma matriz A por:

$$B = k.A$$

A matriz B resultante é obtida pela multiplicação de cada elemento da matriz A por esse número k:

$$b_{ij} = k.a_{ij}$$

Propriedades

A multiplicação de número por matriz apresenta algumas propriedades importantes:

- $a.(b.A) = (a.b).A$
- $a.(A + B) = a.A + a.B$
- $(a + b).A = a.A + b.A$
- $1.A = A$
- $(a.A)^t = a.A^t$

AULA 8 – MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de matrizes não segue uma lógica intuitiva como a soma e a subtração. Na soma e subtração, realizávamos a soma ou subtração de elementos equivalentes das duas matrizes para encontrar o resultado da operação. Já na multiplicação de matrizes, realizaremos operações com LINHAS e COLUNAS para encontrarmos o resultado. Indicaremos o produto de duas matrizes A e B por:

$$C = A.B$$

Como decorrência da definição, o produto de duas matrizes A e B **só vai existir se** o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

$$A_{m\times p} \, . \, B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Além disso, a matriz C resultante sempre terá o mesmo **número de linhas de A** e o **número de colunas de B**:

$$A_{m\times p} \, . \, B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

E, para encontrarmos o elemento c_{ij} realizaremos a soma dos produtos dos elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B. Veja no exemplo abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.x + b.w & \\ & \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & a.y + b.z \\ & \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ c.x + d.w & \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & c.y + d.z \end{bmatrix}$$

AULA 9 – PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

A multiplicação de matrizes apresenta algumas propriedades importantes:

- Associativa: $(A.B).C = A.(B.C)$
- Distributiva pela direita: $(A + B).C = A.C + B.C$
- Distributiva pela esquerda: $C.(A + B) = C.A + C.B$

Se *k* for um número real, podemos dizer que este número "pode transitar" dentro do produto das matrizes:

$$(k.A).B = A.(k.B) = k.(A.B)$$

Além destas propriedades, é importante salientar que a **transposta do produto é igual ao produto das transpostas**:

$$(A.B)^t = A^t.B^t$$

A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes. Seja A uma matriz $m \times n$, então:

$$A.I_n = I_m.A = A$$

Observações importantes

1. A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, ou seja, **não necessariamente** $A.B = B.A$! De fato, $A.B$ normalmente é diferente de $B.A$. Além disso, pode existir $A.B$ e nem existir $B.A$.

2. Se $A.B = 0$, **não podemos deduzir** que $A = 0$ ou $B = 0$. Em matrizes, há diversos casos de matrizes diferentes da matriz nula que, quando multiplicadas, resultam na matriz nula.

AULA 10 – EQUAÇÕES MATRICIAIS

Dada uma equação com uma matriz incógnita X, podemos utilizar todas as propriedades vistas até o momento para resolvê-la. A ideia será a mesma de uma resolução de equações com números reais. A única condição para que possamos utilizar estas propriedades é que a matriz X não esteja multiplicada por outra matriz na equação.

Outra forma possível de resolver a equação matricial é preencher a matriz X com incógnitas, realizar o produto e igualar as matrizes resultantes, chegando a um sistema de equações. Resolvendo o sistema, encontramos as incógnitas e, consequentemente, a matriz X.

AULA 11 – MATRIZ INVERSA

A matriz inversa de uma matriz quadrada A de ordem *n* é a matriz denotada por A^{-1} que, quando multiplicada por ela, resulta na matriz identidade de ordem *n*.

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Obs: a matriz inversa é **única** e é importante observar que o produto de uma matriz por sua inversa pode ser feito **pela direita ou pela esquerda** e o resultado será **o mesmo** em ambos os casos.

Aplicação

As matrizes inversas tem aplicação prática na resolução de sistemas lineares.

Obtenção

Podemos obter a matriz inversa de duas formas:

- Substituir seus elementos por incógnitas, realizar o produto e igualar as matrizes resultantes. Resulta disso um **sistema de equações** que, quando resolvido, nos fornece a matriz inversa procurada.

- Utilizar o conceito de determinante de uma matriz (tema das próximas aulas) para a obtenção da matriz inversa.

AULA 12 – DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

O determinante de uma matriz é um número real associado a ela, calculado segundo algumas regras. Define-se o conceito de determinante de uma matriz para as matrizes quadradas.

Dada uma matriz **A**, indica-se o determinante da matriz pelo número **det A** ou pelo símbolo **|A|.**

Matriz de ordem 1

O determinante de uma matriz de ordem 1 é igual ao seu único elemento.

$$A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$$

Matriz de ordem 2

O determinante de uma matriz de ordem 2 é obtido pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Matriz de ordem 3 - Regra de Sarrus

O determinante de uma matriz de ordem 3 é facilmente obtido por uma regra conhecida como regra de Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

A regra de Sarrus pode ser feita de forma prática copiando-se as duas primeiras colunas à direita da matriz original e calculando-se os produtos dos elementos segundo as retas conforme a figura:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

AULA 13 – COFATOR E TEOREMA DE LAPLACE

Cofator de um elemento

Assim como calculamos o **determinante** de uma **matriz**, podemos calcular o **cofator** de um **elemento**. O cofator de um elemento a_{ij} é definido como:

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j}.D_{ij}$$

D_{ij} é o determinante da matriz obtida pela eliminação da linha e da coluna do elemento a_{ij}.

Teorema de Laplace

Como já comentamos, o Teorema de Laplace nos fornece uma outra forma de calcularmos o determinante de uma matriz.

O Teorema de Laplace diz que o determinante de uma matriz quadrada de ordem n (n ≥ 2) é obtido pela soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos cofatores.

Exemplo de cálculo do determinante tomando-se a primeira coluna da matriz A abaixo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = a_{11}.cof(a_{11}) + a_{21}.cof(a_{21}) + a_{31}.cof(a_{31}) \Rightarrow$$

$$\det A = a_{11}.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}.(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{31}.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Consequência do Teorema de Laplace

Se todos os elementos de uma **linha** ou **coluna** forem iguais a **zero**, então o **determinante** da matriz necessariamente será **zero**.

AULA 14 – TEOREMA DE JACOBI

O Teorema de Jacobi possibilita a simplificação do cálculo de determinantes. O teorema diz que **o determinante** de uma matriz **não se altera** quando **adiciona-se** a uma fila qualquer outra fila paralela a ela, **mesmo que multiplicada por um número**.

Dado um determinante D de ordem n ($n \geq 2$), a utilização sucessiva e conveniente do Teorema de Jacobi possibilita obter um determinante D_1, com uma fila contendo ($n - 1$) **zeros** de modo que:

$$D_1 = D$$

AULA 15 – MATRIZ INVERSA – PARTE II

Conhecidos os conceitos de determinante e cofator, podemos definir uma segunda forma de calcular a matriz inversa de uma matriz A qualquer, enunciada pelo seguinte teorema:

Se M é uma matriz quadrada de ordem n e $\det M \neq 0$, então a inversa de M é

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \bar{M}$$

A matriz $\bar{M}$ é chamada de matriz adjunta da matriz M, e é definida como a matriz transposta da matriz dos cofatores de M, que é a matriz obtida substituindo-se cada elemento de M por seu cofator.

<u>Roteiro para o cálculo da matriz adjunta</u>

1. Calcular o cofator de cada elemento da matriz M;
2. Redesenhar a matriz M com os cofatores no lugar dos elementos;
3. Transpor esta matriz.

<u>Existência da matriz inversa</u>

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. A inversa de M existe, se e somente se, $\det M \neq 0$.

Obs: como consequência disto, se o **determinante** de uma matriz for igual a **zero**, ela **não possui matriz inversa**.