

## 目 录

一、高等数学 .....	1
(一) 函数、极限、连续 .....	1
(二) 一元函数微分学 .....	4
(三) 一元函数积分学 .....	11
(四) 向量代数和空间解析几何 .....	16
(五) 多元函数微分学 .....	24
(六) 多元函数积分学 .....	30
(七) 无穷级数 .....	34
(八) 常微分方程 .....	40
二、线性代数 .....	44
(一) 行列式 .....	44
(二) 矩阵 .....	45
(三) 向量 .....	48
(四) 线性方程组 .....	50
(五) 矩阵的特征值和特征向量 .....	51
(六) 二次型 .....	53
三、概率论与数理统计 .....	55
(一) 随机事件和概率 .....	55
(二) 随机变量及其概率分布 .....	58
(三) 多维随机变量及其分布 .....	60
(四) 随机变量的数字特征 .....	63
(五) 大数定律和中心极限定理 .....	65
(六) 数理统计的基本概念 .....	66
(七) 参数估计 .....	68
(八) 假设检验 .....	70
经常用到的初等数学公式 .....	72
平面几何 .....	76

# 一、高等数学

## (一) 函数、极限、连续

考试内容	公式、定理、概念
函数和隐函数	<p>函数: 设有两个变量 <math>x</math> 和 <math>y</math>, 变量 <math>x</math> 的定义域为 <math>D</math>, 如果对于 <math>D</math> 中的每一个 <math>x</math> 值, 按照一定的法则, 变量 <math>y</math> 有一个确定的值与之对应, 则称变量 <math>y</math> 为变量 <math>x</math> 的函数, 记作: <math>y = f(x)</math></p>
基本初等函数的性质及其图形, 初等函数, 函数关系的建立:	<p>基本初等函数包括五类函数:</p> <p>1 幂函数: <math>y = x^\mu (\mu \in R)</math>;</p> <p>2 指数函数 <math>y = a^x (a &gt; 0 \text{ 且 } a \neq 1)</math>;</p> <p>3 对数函数: <math>y = \log_a x (a &gt; 0 \text{ 且 } a \neq 1)</math>;</p> <p>4 三角函数: 如 <math>y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x</math> 等;</p> <p>5 反三角函数: 如 <math>y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x</math> 等.</p> <p>初等函数: 由常数 <math>C</math> 和基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合步骤所构成, 并可用一个数学式子表示的函数, 称为初等函数.</p>
数列极限与函数极限的定义及其性质, 函数的左极限与右极限	<p>1 <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A</math></p> <p style="text-align: right;">微信公众号: 考研斯基</p> <p>2 <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0) = A + a(x), \text{ 其中 } \lim_{x \rightarrow x_0} a(x) = 0</math></p> <p style="text-align: right;">微信公众号: 考研斯基</p> <p>3(保号定理)</p> <p>设 <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A</math>, 又 <math>A &gt; 0</math> (或 <math>A &lt; 0</math>), 则 <math>\exists</math> 一个 <math>\delta &gt; 0</math>,</p> <p>当 <math>x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)</math>, 且 <math>x \neq x_0</math> 时, <math>f(x) &gt; 0</math> (或 <math>f(x) &lt; 0</math>)</p>
无穷小和无穷大的概念及其	设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$

<p><b>关系, 无穷小的性质及无穷小的比较</b></p> <p>(1) 若 <math>\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0</math>, 则 <math>\alpha(x)</math> 是比 <math>\beta(x)</math> 高阶的无穷小, 记为 <math>\alpha(x) = o(\beta(x))</math>.</p> <p>(2) 若 <math>\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty</math>, 则 <math>\alpha(x)</math> 是比 <math>\beta(x)</math> 低阶的无穷小,</p> <p>(3) 若 <math>\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (c \neq 0)</math>, 则 <math>\alpha(x)</math> 与 <math>\beta(x)</math> 是同阶无穷小,</p> <p>(4) 若 <math>\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1</math>, 则 <math>\alpha(x)</math> 与 <math>\beta(x)</math> 是等价的无穷小, 记为 <math>\alpha(x) \sim \beta(x)</math></p> <p>(5) 若 <math>\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c (c \neq 0), k &gt; 0</math>, 则 <math>\alpha(x)</math> 是 <math>\beta(x)</math> 的 <math>k</math> 阶无穷小</p> <p>常用的等阶无穷小: 当 <math>x \rightarrow 0</math> 时</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\begin{cases} \sin x \\ \arcsin x \\ \tan x \\ \arctan x \\ \ln(1+x) \\ e^x - 1 \end{cases}</math> </td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\begin{cases} x, \\ 1 - \cos x \\ \frac{1}{2}x^2 \\ (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \\ \frac{1}{n}x \end{cases}</math> </td> </tr> </table> <p>无穷小的性质</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) 有限个无穷小的代数和为无穷小</li> <li>(2) 有限个无穷小的乘积为无穷小</li> <li>(3) 无穷小乘以有界变量为无穷小</li> </ul> <p>Th 在同一变化趋势下, 无穷大的倒数为无穷小; 非零的无穷小的倒数为无穷大</p>	$\begin{cases} \sin x \\ \arcsin x \\ \tan x \\ \arctan x \\ \ln(1+x) \\ e^x - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x, \\ 1 - \cos x \\ \frac{1}{2}x^2 \\ (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \\ \frac{1}{n}x \end{cases}$	<p><b>极限存在的两个准则: 单调有界准则和夹逼准则, 两个重要极限:</b></p> <p><b>1 (夹逼定理)</b> 设在 <math>x_0</math> 的邻域内, 恒有 <math>\varphi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)</math>, 且 <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = A</math>, 则 <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A</math></p> <p><b>2 单调有界定理:</b> 单调有界的数列必有极限</p> <p><b>3 两个重要极限:</b></p> <p>(1) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1</math>      (2) <math>\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e</math></p> <p><b>重要公式:</b> <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n &lt; m \\ \infty, n &gt; m \end{cases}</math></p> <p>4 几个常用极限特例</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,</math> </td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}</math> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}</math> </td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc cot} x = 0,</math> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc cot} x = \pi</math> </td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,</math> </td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty,</math> </td> <td style="text-align: center; vertical-align: middle;"> <math>\lim_{x \rightarrow +0^+} x^x = 1,</math> </td> </tr> </table>	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc cot} x = 0,$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc cot} x = \pi$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty,$	$\lim_{x \rightarrow +0^+} x^x = 1,$
$\begin{cases} \sin x \\ \arcsin x \\ \tan x \\ \arctan x \\ \ln(1+x) \\ e^x - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x, \\ 1 - \cos x \\ \frac{1}{2}x^2 \\ (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \\ \frac{1}{n}x \end{cases}$										
$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$										
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc cot} x = 0,$										
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc cot} x = \pi$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$										
$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty,$	$\lim_{x \rightarrow +0^+} x^x = 1,$										
<p><b>极限的四则运算</b></p> <p><math>\lim f(x) = A, \lim g(x) = B</math>. 则</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>(1) <math>\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B</math>;</li> <li>(2) <math>\lim f(x)g(x) = AB</math>;</li> <li>(3) <math>\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)</math></li> </ul>	<p><b>函数连续的概念: 函数间断点的类型: 初等函数的连续性: 闭区间上连续函数的性质</b></p> <p>连续函数在闭区间上的性质:</p> <p>(1) (连续函数的有界性) 设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, 则 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上有界, 即 <math>\exists</math> 常数 <math>M &gt; 0</math>, 对任意的 <math>x \in [a, b]</math>, 恒有 <math> f(x)  \leq M</math>.</p> <p>(2) (最值定理) 设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, 则在 <math>[a, b]</math> 上 <math>f(x)</math> 至少取得最大值与最小值各一次, 即 <math>\exists \xi, \eta</math> 使得:</p>										

$f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad \xi \in [a, b];$ $f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad \eta \in [a, b].$	<p>(3) (介值定理)若函数 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, <math>\mu</math> 是介于 <math>f(a)</math> 与 <math>f(b)</math> (或最大值 <math>M</math> 与最小值 <math>m</math>) 之间的任一实数, 则在 <math>[a, b]</math> 上至少 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>, 使得 <math>f(\xi) = \mu</math>. (<math>a \leq \xi \leq b</math>)</p> <p>(4) (零点定理或根的存在性定理)设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, 且 <math>f(a) \cdot f(b) &lt; 0</math>, 则在 <math>(a, b)</math> 内至少 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>, 使得 <math>f(\xi) = 0</math>. (<math>a &lt; \xi &lt; b</math>)</p>
--	--

## (二) 一元函数微分学

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>导数和微分的概念</b> <b>左右导数</b> <b>导数的几何意义和物理意义</b>	<p>1 导数定义: <math>f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}</math> (1)</p> <p>或 <math>f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}</math> (2)</p> <p>2 函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处的左、右导数分别定义为:</p> <p>左导数: <math>f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}</math>, (<math>x = x_0 + \Delta x</math>) 右导数: <math>f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}</math></p>
<b>函数的可导性与连续性之间的关系, 平面曲线的</b>	<p>Th1: 函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处可微 <math>\Leftrightarrow f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处可导</p> <p>Th2: 若函数 <math>y = f(x)</math> 在点 <math>x_0</math> 处可导, 则 <math>y = f(x)</math> 在点 <math>x_0</math> 处连续, 反之则不成立. 即函数连续不一定可导.</p> <p>Th3: <math>f'(x_0)</math> 存在 <math>\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)</math></p>

<b>切线和法线</b>	<p>设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x = x_0</math> 处可导, 则 <math>f(x)</math> 在 <math>M(x_0, y_0)</math> 处的切线方程: <math>y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)</math></p> <p>法线方程: <math>y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0</math>.</p>
<b>导数和微分的四则运算, 初等函数的导数,</b>	<p>四则运算法则: 设函数 <math>u = u(x)</math>, <math>v = v(x)</math> 在点 <math>x</math> 可导则</p> <p>(1) <math>(u \pm v)' = u' \pm v'</math>      <math>d(u \pm v) = du \pm dv</math></p> <p>(2) <math>(uv)' = uv' + vu'</math>      <math>d(uv) = u dv + v du</math></p> <p>(3) <math>\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0)</math>      <math>d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}</math></p> <p>基本导数与微分表</p> <p>(1) <math>y = c</math> (常数)      <math>y' = 0</math>      <math>dy = 0</math></p> <p>(2) <math>y = x^\alpha</math> (<math>\alpha</math> 为实数)      <math>y' = \alpha x^{\alpha-1}</math>      <math>dy = \alpha x^{\alpha-1} dx</math></p> <p>(3) <math>y = a^x</math>      <math>y' = a^x \ln a</math>      <math>dy = a^x \ln a dx</math></p> <p>特例      <math>(e^x)' = e^x</math>      <math>d(e^x) = e^x dx</math></p> <p>(4) <math>y' = \frac{1}{x \ln a}</math>      <math>dy = \frac{1}{x \ln a} dx</math></p> <p>特例 <math>y = \ln x</math>      <math>(\ln x)' = \frac{1}{x}</math>      <math>d(\ln x) = \frac{1}{x} dx</math></p> <p>(5) <math>y = \sin x</math>      <math>y' = \cos x</math>      <math>d(\sin x) = \cos x dx</math></p> <p>(6) <math>y = \cos x</math>      <math>y' = -\sin x</math>      <math>d(\cos x) = -\sin x dx</math></p> <p>(7) <math>y = \tan x</math>      <math>y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x</math>      <math>d(\tan x) = \sec^2 x dx</math></p> <p>(8) <math>y = \cot x</math>      <math>y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x</math>      <math>d(\cot x) = -\csc^2 x dx</math></p> <p>(9) <math>y = \sec x</math>      <math>y' = \sec x \tan x</math>      <math>d(\sec x) = \sec x \tan x dx</math></p> <p>(10) <math>y = \csc x</math>      <math>y' = -\csc x \cot x</math>      <math>d(\csc x) = -\csc x \cot x dx</math></p> <p>(11) <math>y = \arcsin x</math>      <math>y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math>      <math>d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx</math></p> <p>(12) <math>y = \arccos x</math>      <math>y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math>      <math>d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx</math></p>

<p>(13) <math>y = \arctan x</math>    <math>y' = \frac{1}{1+x^2}</math>    <math>d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx</math></p> <p>(14) <math>y = \operatorname{arc cot} x</math>    <math>y' = -\frac{1}{1+x^2}</math>    <math>d(\operatorname{arc cot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx</math></p> <p>(15) <math>y = shx</math>    <math>y' = chx</math>    <math>d(shx) = chx dx</math></p> <p>(16) <math>y = chx</math>    <math>y' = shx</math>    <math>d(chx) = shx dx</math></p>	<p>(4) <math>(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}</math></p> <p>(5) <math>(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}</math></p> <p>(6) 莱布尼兹公式: 若 <math>u(x), v(x)</math> 均 <math>n</math> 阶可导, 则</p> $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \text{ 其中 } u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$
<p>复合函数, 反函数, 隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法,</p> <p>1 反函数的运算法则: 设 <math>y = f(x)</math> 在点 <math>x</math> 的某邻域内单调连续, 在点 <math>x</math> 处可导且 <math>f'(x) \neq 0</math>, 则其反函数在点 <math>x</math> 所对应的 <math>y</math> 处可导, 并且有 <math>\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}</math></p> <p>2 复合函数的运算法则: 若 <math>\mu = \varphi(x)</math> 在点 <math>x</math> 可导, 而 <math>y = f(\mu)</math> 在对应点 <math>\mu</math> (<math>\mu = \varphi(x)</math>) 可导, 则复合函数 <math>y = f(\varphi(x))</math> 在点 <math>x</math> 可导, 且 <math>y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)</math></p> <p>3 隐函数导数 <math>\frac{dy}{dx}</math> 的求法一般有三种方法:</p> <p>(1) 方程两边对 <math>x</math> 求导, 要记住 <math>y</math> 是 <math>x</math> 的函数, 则 <math>y</math> 的函数是 <math>x</math> 的复合函数. 例如 <math>\frac{1}{y}, y^2, \ln y, e^y</math> 等均是 <math>x</math> 的复合函数. 对 <math>x</math> 求导应按复合函数连锁法则做.</p> <p>(2) 公式法. 由 <math>F(x, y) = 0</math> 知 <math>\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}</math>, 其中, <math>F'_x(x, y), F'_y(x, y)</math> 分别表示 <math>F(x, y)</math> 对 <math>x</math> 和 <math>y</math> 的偏导数</p> <p>(3) 利用微分形式不变性</p>	<p>Th1(费马定理) 若函数 <math>f(x)</math> 满足条件:</p> <p>(1) 函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有 <math>f(x) \leq f(x_0)</math> 或 <math>f(x) \geq f(x_0)</math>,</p> <p>(2) <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处可导, 则有 <math>f'(x_0) = 0</math></p> <p>Th2(罗尔定理) 设函数 <math>f(x)</math> 满足条件:</p> <p>(1) 在闭区间 <math>[a, b]</math> 上连续; (2) 在 <math>(a, b)</math> 内可导, 则在 <math>(a, b)</math> 内 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>, 使 <math>f'(\xi) = 0</math></p> <p>Th3(拉格朗日中值定理) 设函数 <math>f(x)</math> 满足条件:</p> <p>(1) 在 <math>[a, b]</math> 上连续; (2) 在 <math>(a, b)</math> 内可导; 则在 <math>(a, b)</math> 内 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>, 使 <math>\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)</math></p> <p><b>微分中值定理, 必达法则, 泰勒公式</b></p> <p>Th4(柯西中值定理) 设函数 <math>f(x), g(x)</math> 满足条件:</p> <p>(1) 在 <math>[a, b]</math> 上连续; (2) 在 <math>(a, b)</math> 内可导且 <math>f'(x), g'(x)</math> 均存在, 且 <math>g'(x) \neq 0</math> 则在 <math>(a, b)</math> 内 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>, 使 <math>\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}</math></p> <p>洛必达法则:</p> <p>法则 I <math>(\frac{0}{0} \text{ 型})</math> 设函数 <math>f(x), g(x)</math> 满足条件:</p> $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0; f(x), g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的邻域内可导}$ $(\text{在 } x_0 \text{ 处可除外}) \text{ 且 } g'(x) \neq 0; \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 存在(或 } \infty \text{). 则}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$
<p>高阶导数, 一阶微分形式的不变性</p> <p>常用高阶导数公式</p> <p>(1) <math>(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a &gt; 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x</math></p> <p>(2) <math>(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})</math></p> <p>(3) <math>(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})</math></p>	

法则 I' ( $\frac{0}{0}$  型) 设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0; \exists \text{一个 } X > 0, \text{当 } |x| > X$$

时,  $f(x), g(x)$  可导, 且  $g'(x) \neq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在(或  $\infty$ ). 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II ( $\frac{\infty}{\infty}$  型) 设函数  $f(x), g(x)$  满足条件:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty; \quad f(x), g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的邻域内可}$$

导(在  $x_0$  处可除外)且  $g'(x) \neq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  存在(或  $\infty$ ). 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \text{ 同理法则 II' ( $\frac{\infty}{\infty}$  型) 仿法则 I' 可写出}$$

泰勒公式: 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处的某邻域内具有  $n+1$  阶导数, 则对该邻域内异于  $x_0$  的任意点  $x$ , 在  $x_0$  与  $x$  之间至少  $\exists$  一个  $\xi$ , 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$  称为  $f(x)$  在点  $x_0$  处的  $n$  阶泰勒余项. 令  $x_0 = 0$ , 则  $n$  阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x) \cdots \cdots (1)$$

其中  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ ,  $\xi$  在 0 与  $x$  之间.(1)式称为麦克劳林公式

常用五种函数在  $x_0 = 0$  处的泰勒公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\text{或 } = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{x^n}{n!} \sin \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\text{或 } = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{x^n}{n!} \cos \frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或 } = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\xi)^{m-n-1} \text{ 或 }$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

### 函数单调性的判别,

### 函数的极值,

### 函数的图形的凹凸性, 拐点

1 函数单调性的判断:

Th1 设函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  区间内可导, 如果对  $\forall x \in (a, b)$ , 都有  $f'(x) > 0$  (或  $f'(x) < 0$ ), 则函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调增加的 (或单调减少)

Th2 (取极值的必要条件) 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 且在  $x_0$  处取极值,

<b>及渐近线, 用函数图 形描绘函 数最大值 和最小值,</b>	<p>则 <math>f'(x_0) = 0</math>.</p> <p>Th3 (取极值的第一充分条件) 设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 的某一邻域内可微, 且 <math>f'(x_0) = 0</math> (或 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 处连续, 但 <math>f'(x_0)</math> 不存在.)</p> <p>(1) 若当 <math>x</math> 经过 <math>x_0</math> 时, <math>f'(x)</math> 由 “+” 变 “-”, 则 <math>f(x_0)</math> 为极大值;</p> <p>(2) 若当 <math>x</math> 经过 <math>x_0</math> 时, <math>f'(x)</math> 由 “-” 变 “+”, 则 <math>f(x_0)</math> 为极小值;</p> <p>(3) 若 <math>f'(x)</math> 经过 <math>x = x_0</math> 的两侧不变号, 则 <math>f(x_0)</math> 不是极值.</p> <p>Th4 (取极值的第二充分条件) 设 <math>f(x)</math> 在点 <math>x_0</math> 处有 <math>f''(x) \neq 0</math>, 且 <math>f'(x_0) = 0</math>, 则 当 <math>f''(x_0) &lt; 0</math> 时, <math>f(x_0)</math> 为极大值; 当 <math>f''(x_0) &gt; 0</math> 时, <math>f(x_0)</math> 为极小值.</p> <p>注: 如果 <math>f''(x_0) = 0</math>, 此方法失效.</p> <p><b>2 渐近线的求法:</b></p> <p>(1) 水平渐近线 若 <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b</math>, 或 <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b</math>, 则 <math>y = b</math> 称为函数 <math>y = f(x)</math> 的水平渐近线.</p> <p>(2) 铅直渐近线 若 <math>\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty</math>, 或 <math>\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty</math>, 则 <math>x = x_0</math> 称为 <math>y = f(x)</math> 的铅直渐近线.</p> <p>(3) 斜渐近线 若 <math>a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}</math>, <math>b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]</math>, 则 <math>y = ax + b</math> 称为 <math>y = f(x)</math> 的斜渐近线</p> <p style="text-align: right;">微信公众号: 考研斯基</p> <p><b>3 函数凹凸性的判断:</b></p> <p>Th1 (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 <math>f''(x) &lt; 0</math> (或 <math>f''(x) &gt; 0</math>), 则 <math>f(x)</math> 在 I 上是凸的 (或凹的).</p> <p>Th2 (拐点的判别定理 1) 若在 <math>x_0</math> 处 <math>f''(x) = 0</math>, (或 <math>f''(x)</math> 不存在), 当 <math>x</math> 变动经过 <math>x_0</math> 时, <math>f''(x)</math> 变号, 则 <math>(x_0, f(x_0))</math> 为拐点.</p>
---	---

	<p>Th3 (拐点的判别定理 2) 设 <math>f(x)</math> 在 <math>x_0</math> 点的某邻域内有三阶导数, 且 <math>f''(x) = 0</math>, <math>f'''(x) \neq 0</math>, 则 <math>(x_0, f(x_0))</math> 为拐点</p>
<b>弧微分, 曲率的概念, 曲率半径</b>	<p>1. 弧微分: <math>dS = \sqrt{1+y'^2} dx</math>.</p> <p>2. 曲率: 曲线 <math>y = f(x)</math> 在点 <math>(x, y)</math> 处的曲率 <math>k = \frac{ y'' }{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}</math>.</p> <p>对于参数方程 <math>\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}</math>, <math>k = \frac{ \varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t) }{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}</math>.</p> <p>3. 曲率半径: 曲线在点 M 处的曲率 <math>k(k \neq 0)</math> 与曲线在点 M 处的曲率半径 <math>\rho</math> 有如下关系: <math>\rho = \frac{1}{k}</math>.</p> <p style="text-align: right;">微信公众号: 考研斯基</p>

### (三)一元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>原函数和不定积分的概念, 不定积分的基本性质</b>	<p>基本性质</p> <p>1 <math>\int kf(x)dx = k \int f(x)dx</math> (<math>k \neq 0</math> 为常数)</p> <p>2 <math>\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_k(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_k(x)dx</math></p> <p>3 求导: <math>[\int f(x)dx]' = f(x)</math> 或微分: <math>d[\int f(x)dx] = f(x)dx</math></p> <p>4 <math>\int F'(x)dx = F(x) + C</math> 或 <math>\int dF(x) = F(x) + C</math> (<math>C</math> 是任意常数)</p>
<b>基本积分公式</b>	<p><math>\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C</math> (<math>k \neq -1</math>)</p> <p><math>\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C</math>      <math>\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C</math></p> <p><math>\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C</math></p> <p><math>\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C</math> (<math>a &gt; 0, a \neq 1</math>)      <math>\int e^x dx = e^x + C</math></p>

$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	
$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \csc x dx = \ln \csc x - \cot x  + C$	
$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x  + C$	
$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
$\int \tan x dx = -\ln \cos x  + C$	$\int \cot x dx = \ln \sin x  + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right  + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right  + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$	
<b>重要公式</b>	
(1) 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续，则	
$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx$	
$= \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数} \end{cases}$	
(2) 设 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的连续函数， $a$ 为任意实数，则	
$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$	
(3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4}\pi a^2$	

<b>定积分的概念和基本性质, 定积分中值定理</b>	$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases}$
	$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
	$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$
	$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$
	<b>1. 定积分的基本性质</b>
	(1) 定积分只与被积函数和积分限有关, 而与积分变量无关, 即
	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$
	(2) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
	(3) $\int_a^b dx = b - a$
	(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
	(5) $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx (k \text{ 为常数})$
	(6) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
	(7) 比较定理: 设 $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$ , 则 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .
	推论: 1. 当 $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ 时, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ;
	2. $ \int_a^b f(x) dx  \leq \int_a^b  f(x)  dx$
	(8) 估值定理: 设 $m \leq f(x) \leq M, x \in [a, b]$ , 其中 $m, M$ 为常数, 则
	$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

	<p>(9) 积分中值定理: 设 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, 则在 <math>[a, b]</math> 上至少 <math>\exists</math> 一个 <math>\xi</math>,</p> <p>使 <math>\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)</math></p> <p><math>f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx</math> —— 平均值公式</p>
	<p>设函数 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, <math>x \in [a, b]</math>, 则变上限积分</p> <p><b>Th1</b> <math>F(x) = \int_a^x f(t) dt</math> 对 <math>x</math> 可导</p> <p>且有 <math>F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} (\int_a^x f(t) dt) = f(x)</math></p> <p>推论 1 设 <math>F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt</math>, 则 <math>F'(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x)</math>.</p> <p>推论 2 <math>(\int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt)'_x = f[\varphi(x)] \varphi'(x) - f[\phi(x)] \phi'(x)</math></p> <p>推论 3 <math>(\int_a^{\varphi(x)} f(t) g(x) dt)'_x = (g(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt)'_x</math>  <math>= g'(x) \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt + g(x) f[\varphi(x)] \varphi'(x)</math></p> <p><b>Th2</b> 设 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, <math>x \in [a, b]</math>, 则  <math>\int_a^x f(x) dt</math> 是 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上的一个原函数</p> <p><b>Th3</b> 牛顿-莱布尼茨公式: 设 <math>f(x)</math> 在 <math>[a, b]</math> 上连续, <math>F(x)</math> 是 <math>f(x)</math> 的原函数, 则 <math>\int_a^b f(x) dx = F(x) _a^b = F(b) - F(a)</math></p>
不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法	<p><b>1 不定积分:</b></p> <p>分部积分法: <math>\int u dv = uv - \int v du</math> 选择 <math>u, dv</math> 的原则: 积分容易者选 <math>dv</math>, 求导简单者选为 <math>u</math></p> <p>换元积分法: 设 <math>\int f(u) du = F(u) + C</math>,  则 <math>\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] d\varphi(x)</math></p> <p>设 <math>u = \underline{\underline{\varphi(x)}} \int f(u) du = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C</math></p>

## 2. 定积分

换元法: 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 若  $x=\varphi(t)$  满足:

(1)  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续, 且  $\varphi'(t) \neq 0$ .

(2)  $\varphi(a) = a \cdot \varphi(\beta) = b$ . 并且当  $t$  在  $[\alpha, \beta]$  上变化时,  
 $\varphi(t)$  的值在  $[a, b]$  上变化, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

## 分部积分公式

设  $u(x)$ ,  $v(x)$  在  $[a, b]$  上具有连续导函数  $u'(x), v'(x)$ , 则

$$\int_b^a u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_b^a - \int_b^a v(x)u'(x)dx$$

### 3. 定积分不等式证明中常用的不等式

$$(1) a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (2) a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2$$

### (3) 柯西不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right),$$

其中  $f(x)$ ,  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续

有理函数， 三角函数的有理式 和简单无 理函数的 积分，广义 积分和定 积分的应 用	1. 三角函数代换		
	函数 $f(x)$ 含根式	所作代换	三角形示意图
	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	
	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t$	
	$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	

**有理函数积分**

$$(1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$$

$$(2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = -\frac{A}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C (n \neq 1)$$

$$(3) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{dx}{[(x+\frac{p}{2})^2 + \frac{4q-p^2}{4}]^n} \xrightarrow{\frac{x+\frac{p}{2}=u}{2}} \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}$$

$$(4) \int \frac{x+a}{(x^2+px+q)^n} dx = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + (a - \frac{p}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

( \$p^2 - 4q < 0\$ )

**4. 广义积分****(1) 无穷限的广义积分 (无穷积分)**

设 \$f(x)\$ 连续, 则

$$1. \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$2. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

**(2) 无界函数的广义积分 (瑕积分)**

$$1. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, (\text{当 } x \rightarrow b^- \text{ 时}, f(x) \rightarrow \infty)$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, (\text{当 } x \rightarrow a^+ \text{ 时}, f(x) \rightarrow \infty)$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{c+\eta}^b f(x) dx$$

(当 \$x \rightarrow c\$ 时, \$f(x) \rightarrow \infty\$)

**(四) 向量代数和空间解析几何**

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念	1. 向量: 既有大小又有方向的量, 又称矢量.

念, 向量的  
线性运算,

2. 向量的模: 向量 \$\bar{a}\$ 的大小. 记为 \$|\bar{a}|\$.

3. 向量的坐标表示: 若向量用坐标表示

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \{x, y, z\}, \text{ 则 } |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4. 向量的运算法则:

I. 加减运算 设有矢量 \$\bar{a} = \{x\_1, y\_1, z\_1\}\$, \$\bar{b} = \{x\_2, y\_2, z\_2\}\$, 则

$$\bar{a} \pm \bar{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}.$$

II. 数乘运算 数乘运算 \$\underline{\Delta}\$ 矢量 \$\bar{a}\$ 与一数量 \$\lambda\$ 之积 \$\lambda\bar{a}\$,

$$\bar{a} = \begin{cases} |\lambda\bar{a}|\bar{a} & \lambda > 0, \text{ 即与 } \bar{a} \text{ 同向} \\ \bar{0} & \lambda = 0, \text{ 即为零矢量} \\ -|\lambda\bar{a}|\bar{a} & \lambda < 0, \text{ 即与 } \bar{a} \text{ 反向} \end{cases}$$

$$\lambda\bar{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}.$$

1. 矢量的数积 (点积, 内积):

$$\text{矢量 } \bar{a} \text{ 与 } \bar{b} \text{ 的数量积 } \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

$$\text{设 } \bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \text{ 则 } \bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

向量的数  
量积和向  
量积, 向量  
的混合积,

$$2. \text{ 矢量的向量积 (叉积, 外积): 设有两个向量 } \bar{a} \text{ 与 } \bar{b}, \text{ 若 } \exists \text{ 一个矢量 } \bar{c}, \text{ 满足如下条件}$$

- (1) \$|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b})\$;

- (2) \$\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}\$, 即 \$\bar{c}\$ 垂直于 \$\bar{a}, \bar{b}\$ 所确定的平面;

- (3) \$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\$ 成右手系. 则称矢量 \$\bar{c}\$ 为矢量 \$\bar{a}\$ 与 \$\bar{b}\$ 的矢量积, 记 \$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}\$

$$\text{设 } \bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \text{ 则}$$

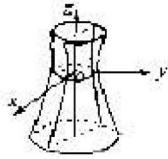
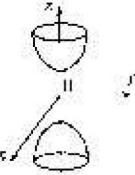
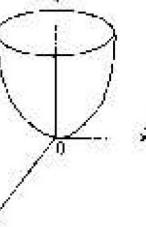
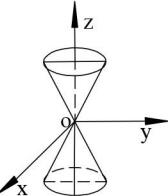
$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$ <p>3 混合积: 设有三个矢量 <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math>, 若先作 <math>\vec{a}, \vec{b}</math> 的叉积 <math>\vec{a} \times \vec{b}</math>, 再与 <math>\vec{c}</math> 作点积 <math>(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}</math>, 则这样的数积称为矢量 <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math> 的混合积, 记为 <math>(a, b, c)</math>, 即 <math>(a, b, c) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}</math>.</p> <p>设 <math>\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}</math>, <math>\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}</math>, <math>\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}</math>,</p> <p>则 <math>(a, b, c) = \begin{vmatrix} x_1 &amp; y_1 &amp; z_1 \\ x_2 &amp; y_2 &amp; z_2 \\ x_3 &amp; y_3 &amp; z_3 \end{vmatrix}</math></p>	<p>(5) <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math> 共面 <math>\Leftrightarrow \exists</math> 不全为零的数 <math>\lambda, \mu, \nu</math>, 使 <math>\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}</math> 或者 <math>(a, b, c) = 0</math></p> <p>2 单位向量: 模为 1 的向量. 向量 <math>\vec{a}</math> 的单位向量记作 <math>\vec{a}^0</math>,</p> $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{ \vec{a} } = \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$ <p>3 向量的方向余弦:</p> $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \text{其中 } \alpha, \beta, \gamma \text{ 为向量 } \vec{a} \text{ 与各坐标轴正向的夹角.}$ <p>4 单位向量的方向余弦: 显然 <math>\vec{a}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}</math>, 且有 <math>\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1</math>.</p>
<p><b>两向量垂直、平行的条件, 两向量的夹角, 向量的坐标表达式及其运算, 单位向量, 方向数与方向余弦,</b></p> <p>1 向量之间的位置关系及结论</p> <p>设 <math>\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}</math>, <math>\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}</math>, <math>\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}</math></p> <p>(1) <math>\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0</math>;</p> <p>(2) <math>\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}</math>;</p> <p>其中 <math>x_2, y_2, z_2</math> 之中有一个为 “0”, 如 <math>x_2 = 0</math>, 应理解为 <math>x_1 = 0</math>;</p> <p>(3) <math>\vec{a}, \vec{b}</math> 不共线 <math>\Leftrightarrow \exists</math> 不全为零的数 <math>\lambda, \mu</math> 使 <math>\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{0}</math>;</p> <p>(4) 矢量 <math>\vec{a}</math> 与 <math>\vec{b}</math> 的夹角, 可由下式求出</p> $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$	<p><b>曲面方程和空间曲线方程的概念, 平面方程, 直线方程, 平面与平面、平面与直线、直线与直线的以及平行、垂直的条件, 点到平面和点到直线</b></p> <p>1 平面方程</p> <p>(1) 一般式方程 <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>, 法矢量 <math>\vec{n} = \{A, B, C\}</math>, 若方程中某个坐标不出现, 则平面就平行于该坐标轴, 例如 平面 <math>Ax + Cz + D = 0 \parallel y</math> 轴</p> <p>(2) 平面的点法式方程 <math>A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad M(x_0, y_0, z_0)</math> 为平面上已知点, <math>\vec{n} = \{A, B, C\}</math> 为法矢量</p> <p>(3) 三点式方程 <math>\begin{vmatrix} x - x_1 &amp; y - y_1 &amp; z - z_1 \\ x_2 - x_1 &amp; y_2 - y_1 &amp; z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 &amp; y_3 - y_1 &amp; z_3 - z_1 \end{vmatrix}</math></p> <p><math>M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)</math> 为平面上的三个点</p>

<p>的距离</p> <p>(4) 截距式方程 <math>\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1</math>, <math>a, b, c</math> 分别为平面上坐标轴上的截距, 即平面通过三点 <math>(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)</math></p> <p>2 直线方程</p> <p>一般式方程(两平面交线): <math>\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 &amp; \text{平面 } \pi_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 &amp; \text{平面 } \pi_2 \end{cases}</math></p> <p>平面 <math>\pi_1</math> 与平面 <math>\pi_2</math> 的法矢量分别为 <math>\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}</math>, <math>\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}</math>, 直线的方向矢量为 <math>\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} &amp; \vec{j} &amp; \vec{k} \\ A_1 &amp; B_1 &amp; C_1 \\ A_2 &amp; B_2 &amp; C_2 \end{vmatrix}</math></p> <p>(2) 标准式方程 <math>\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}</math> <math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 为直线上已知点 <math>\vec{s} = \{l, m, n\}</math> 为直线的方向矢量</p> <p>(3) 两点式方程 <math>\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}</math> 其中 <math>M_1(x_1, y_1, z_1)</math>, <math>M_2(x_2, y_2, z_2)</math> 为直线上的两点</p> <p>(4) 参数式方程 <math>\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}</math> <math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 为直线上已知点, <math>\vec{s} = \{l, m, n\}</math> 为直线的方向矢量</p> <p>3 平面间的关系</p> <p>设有两个平面: 平面 <math>\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0</math> 平面 <math>\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0</math></p> <p>(1) 平面 <math>\pi_1 \parallel</math> 平面 <math>\pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}</math></p> <p>(2) 平面 <math>\pi_1 \perp</math> 平面 <math>\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0</math></p>	<p>(3) 平面 <math>\pi_1</math> 与平面 <math>\pi_2</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> $\cos \theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ <p>4 平面与直线间关系</p> <p>直线 <math>L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}</math></p> <p>平面 <math>\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0</math></p> <p>(1) <math>L \parallel \pi \Leftrightarrow Al + Bm + Cn = 0</math></p> <p>(2) <math>L \perp \pi \Leftrightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}</math></p> <p>(3) <math>L</math> 与 <math>\pi</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> $\sin \theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ <p>5 直线间关系</p> <p>设有两直线: 直线 <math>L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}</math></p> <p>直线 <math>L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}</math></p> <p>(1) <math>L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}</math></p> <p>(2) <math>L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0</math></p> <p>(3) 直线 <math>L_1</math> 与 <math>L_2</math> 的夹角 <math>\theta</math>, 由下式确定</p> $\cos \theta = \frac{ l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 }{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$ <p>6 点到平面的距离: <math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 到平面 <math>\pi: Ax + By + Cz + D = 0</math> 的距离为</p> $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ <p>7 点到直线的距离: <math>M(x_0, y_0, z_0)</math> 到直线</p>
--	---

	$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ 距离为 $d = \frac{ \overrightarrow{M_1 M_0} \times \overrightarrow{M_1 P} }{\overrightarrow{M_1 P}} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$
--	---

<b>球面, 母线平行于坐标轴的柱面, 旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程,</b>	准线为各种形式的柱面方程的求法
	<p>(1) 准线为 <math>\Gamma : \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}</math>, 母线 // <math>z</math> 轴的柱面方程为  <math>f(x, y) = 0,</math>            准线为 <math>\Gamma : \begin{cases} \varphi(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}</math>, 母线 // <math>y</math> 轴的柱面方程为  <math>\varphi(x, z) = 0,</math>            准线为 <math>\Gamma : \begin{cases} \psi(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}</math>, 母线 // <math>x</math> 轴的柱面方程为  <math>\psi(y, z) = 0.</math></p> <p>(2) 准线为 <math>\Gamma : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}</math>, 母线的方向矢量为 <math>\{l, m, n\}</math> 的柱面方程的求法</p> <p>首先, 在准线上任取一点 <math>(x, y, z)</math>, 则过点 <math>(x, y, z)</math> 的母线方程为</p> $\frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n}$ <p>其中 <math>X, Y, Z</math> 为母线上任一点的流动坐标, 消去方程组</p>

<b>常用的二次曲面方程及其图形, 空间曲线的参数方程和一般方程, 空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.</b>	$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ \frac{X - x}{l} = \frac{Y - y}{m} = \frac{Z - z}{n} \end{cases}$ 中的 $x, y, z$ 便得所求的柱面方程	常见的柱面方程
	名称	方程
	圆柱面	$x^2 + y^2 = R^2$
	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
	双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
	抛物柱面	$x^2 = 2py, (p > 0)$
	标准二次方程及其图形	
	名称	方程
	椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ( $a, b, c$ 均为正数)

单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>(<math>a, b, c</math> 均为正数)</p>		<b>多元函数的概念, 二元函数的几何意义, 二元函数的极限和连续的概念,</b> 二元函数 $z = f(x, y)$ 连续, 可导 (两偏导存在) 与可微三者的关系如下: 可导 $\leftarrow$ 可微 $\rightarrow$ 函数连续 “ $\leftarrow \rightarrow$ ” 表示可推出 用全微分定义验证一个可导函数的可微性, 只需验证: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\Delta z - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\rho}$ 是否为0
双叶双曲面	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>(<math>a, b, c</math> 均为正数)</p>		
椭圆的抛物面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ <p>(<math>a, b, p</math> 为正数)</p>		<b>有界闭区域上多元连续函数的性质, 多元函数偏导数和全微分, 全微分存在的必要条件和充分条件,</b> <i>Th1(求偏导与次序无关定理)</i> 设 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ 在区域 $D$ 内连续, 则有 $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ <i>Th2(可微与偏导存在的关系定理)</i> 若 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 点处可微, 则在该点处 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在, 且有 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ <i>Th3(偏导存在与可微的关系定理)</i> 若 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 $P(x, y)$ 上的某领域内存在, 且在 $P(x, y)$ 连续, 则 $z = f(x, y)$ 在 $P(x, y)$ 点处可微
双曲抛物面 (又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ <p>(<math>a, b, p</math> 均为正数)</p>		
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ <p>(<math>a, b, c</math> 为正数)</p>		<b>多元复合函数、隐函数的求导法, 二阶偏导数, 方向导数和梯度,</b> <b>1 复合函数微分法</b> (1) 设 $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ , 则 $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$ (2) 设 $z = f(u, v), u = \varphi(x), v = \psi(x)$ , 则 $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx}$ , 称之为 $z$ 的全导数

## (五)多元函数微分学

考试内容

对应公式、定理、概念

<p>(3) 设 <math>z = f(x, u, v)</math>, <math>u = \varphi(x, y)</math>, <math>v = \psi(x, y)</math>,</p> <p>则 <math>\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}</math></p> <p><b>注:</b> 复合函数一定要设中间变量, 抽象函数的高阶偏导数, 其中间变量用数字 1, 2, 3……表示更简洁.</p> <h3>2 隐函数微分法</h3> <p>(1) 设 <math>F(x, y) = 0</math>, 则 <math>\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}</math></p> <p>(2) <math>F(x, y, z) = 0</math>, 则 <math>\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}</math>, <math>\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}</math></p> <p>(3) 设由方程组 <math>\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}</math> 确定的隐函数 <math>y = y(x)</math>, <math>z = z(x)</math>,</p> <p>则 <math>\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}</math> 可通过解关于 <math>\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}</math> 的线性方程组</p> $\begin{cases} F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = 0 \\ G'_x + G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'_y \frac{dy}{dx} + F'_z \frac{dz}{dx} = -F'_x \\ G'_y \frac{dy}{dx} + G'_z \frac{dz}{dx} = -G'_x \end{cases} \text{ 来求解}$ <p>方向导数和梯度</p> <p>Th1 设 <math>z = f(x, y)</math> 在 <math>M_0(x_0, y_0)</math> 处可微, 则 <math>f(x, y)</math> 在点 <math>M_0(x_0, y_0)</math> 沿任意方向 <math>l = (\cos \alpha, \cos \beta)</math> 存在方向导数且</p> $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cos \beta$ <p>在平面上 <math>l</math> 除了用方向角表示外也可用极角表示:</p> <p><math>l = (\cos \theta, \sin \theta)</math>, <math>\theta</math> 是 <math>l</math> 的极角, <math>\theta \in [0, 2\pi]</math> 此时相应的方向导数的计算公式为 <math>\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin \theta</math></p> <p>Th2 设三元函数 <math>u = f(x, y, z)</math> 在 <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math> 处可微, 则</p> <p><math>u = f(x, y, z)</math> 在点 <math>M_0(x_0, y_0, z_0)</math> 沿任意方向 <math>l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)</math> 存在方向导数且有</p>
---

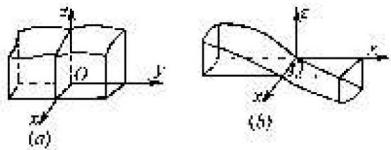
$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos \gamma$ <p>梯度: <math>z = f(x, y)</math> 在点 <math>M_0</math> 的方向导数计算公式可改写成</p> $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l} = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) (\cos \alpha, \cos \beta)$ $= \text{grad}(f(x_0, y_0)) \cdot l =  \text{grad}(f(x_0, y_0))  \cos \langle \text{grad}(f(x_0, y_0)), l \rangle$ <p>这里向量 <math>\text{grad}(f(x_0, y_0)) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)</math> 成为</p> <p><math>z = f(x, y)</math> 在点 <math>M_0</math> 的梯度(向量)</p> <p><math>\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial l}</math> 随 <math>l</math> 而变化 <math>l = \frac{\text{grad}(f(x_0, y_0))}{ \text{grad}(f(x_0, y_0)) }</math> 即沿梯度方向时, 方向导数取最大值 <math> \text{grad}(f(x_0, y_0)) </math></p>
<p><b>1. 曲线的切线及法平面方程</b></p> <p>(1) 曲线 <math>\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}</math> 在 <math>(x_0, y_0, z_0)</math> 处的切线方程: <math>\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}</math></p> <p>法平面方程: <math>x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0</math></p> <p>(2) 空间曲线 <math>\Gamma</math> 的一般式方程为 <math>\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}</math> 则在曲线 <math>\Gamma</math> 的 <math>P(x_0, y_0, z_0)</math> 处的切线方程: <math>\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big _P} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)} \Big _P} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} \Big _P}</math></p> <p>法线方程:</p>

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \Big _p (x-x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} \Big _p (y-y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big _p (z-z_0) = 0$ <p><b>2. 空间曲面在其上某点处的切平面和法线方程</b></p> <p>(1) 设曲面 <math>\Sigma</math> 为显示方程 <math>z = f(x, y)</math>, 则在 <math>\Sigma</math> 上一点 <math>P(x_0, y_0, z_0)</math> 处的切平面方程: <math>\frac{\partial z}{\partial x} \Big _p (x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y} \Big _p (y-y_0) - (z-z_0) = 0</math>.</p> <p>法线方程: <math>\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x} \Big _p} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y} \Big _p} = \frac{z-z_0}{-1}</math></p> <p>(2) 设曲面 <math>\Sigma</math> 为隐式方程 <math>F(x, y, z) = 0</math>, 则在 <math>\Sigma</math> 上一点 <math>P(x_0, y_0, z_0)</math> 的切平面方程: <math>F'_x \Big _p (x-x_0) + F'_y \Big _p (y-y_0) + F'_z \Big _p (z-z_0) = 0</math></p> <p>法线方程: <math>\frac{x-x_0}{F'_x \Big _p} = \frac{y-y_0}{F'_y \Big _p} = \frac{z-z_0}{F'_z \Big _p}</math></p>	<p><b>Th2( 函数取极值的充分条件 )</b></p> <p>设 <math>z = f(x, y)</math> 在 <math>P(x_0, y_0)</math> 点的某邻域内有连续的二阶偏导数, 且 <math>f'_{xx}(x_0, y_0) = 0, f'_{yy}(x_0, y_0) = 0</math></p> $[f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f''_{xx}^2(x_0, y_0) f''_{yy}^2(x_0, y_0) < 0$ <p>则 <math>P(x_0, y_0)</math> 是 <math>z = f(x, y)</math> 的一个极值点。</p> <p>(1) 若 <math>f''_{xx}(x_0, y_0) &gt; 0</math> (或 <math>f''_{yy}(x_0, y_0) &gt; 0</math>), 则 <math>P(x_0, y_0)</math> 为极小值点。</p> <p>(2) 若 <math>f''_{xx}(x_0, y_0) &lt; 0</math> (或 <math>f''_{yy}(x_0, y_0) &lt; 0</math>), 则 <math>P(x_0, y_0)</math> 为极大值点。<b>2 无条件极值</b></p> <p>解题程序:</p> <p>(1) 求出 <math>z = f(x, y)</math> 的驻点 <math>(x_0, y_0)</math>;</p> <p>(2) 用 Th2 判别 <math>(x_0, y_0)</math> 是否为极值点; 是, 则 <math>f(x_0, y_0)</math> 为 <math>z = f(x, y)</math> 的极值。</p> <p><b>3 条件极值 (拉格朗日乘数法)</b></p> <p>1) 由条件 <math>\varphi(x, y) = 0</math>, 求 <math>z = f(x, y)</math> 的极值</p> <p>解题程序:</p> <p>令 <math>F(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)</math>;</p> <p>解方程组 <math>\begin{cases} f'_{xx}(x, y) + \lambda \varphi'_{xx}(x, y) = 0 \\ f'_{yy}(x, y) + \lambda \varphi'_{yy}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}</math> 求驻点 <math>(x_0, y_0)</math>;</p> <p><math>f(x_0, y_0)</math> 即为 <math>f(x, y)</math> 的极值 (存在的话)</p>
<p><b>二元函数的二阶泰勒公式, 多元函数的极值和条件极值, 多元函数的最大值、最小值及其简单应用</b></p> <p><b>1 多元函数的极值</b></p> <p><b>定义:</b></p> <p>设函数 <math>z = f(x, y)</math> 在 <math>P(x_0, y_0)</math> 的某邻域内有定义, 若对于该邻域内异于 <math>P(x_0, y_0)</math> 点的任一点 <math>Q(x, y)</math> 恒有</p> $f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{ (或 } < f(x_0, y_0))$ <p>则称 <math>f(x_0, y_0)</math> 为 <math>f(x, y)</math> 的极小值 (极大值)</p> <p><b>Th1( 取极值的必要条件 )</b></p> <p>设 <math>z = f(x, y)</math> 在 <math>P(x_0, y_0)</math> 点的一阶偏导数存在, 且 <math>P(x_0, y_0)</math> 是 <math>z = f(x, y)</math> 的极值点, 则 <math>\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}</math></p>	

<p>2) 由条件 <math>\varphi(x, y, z) = 0</math>, 求 <math>u = f(x, y, z)</math> 的极值。解题程序: 令 <math>F(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)</math>; 解方程组 <math>\begin{cases} f'_x(x, y, z) + \lambda\varphi'_x(x, y, z) = 0 \\ f'_y(x, y, z) + \lambda\varphi'_y(x, y, z) = 0 \\ f'_z(x, y, z) + \lambda\varphi'_z(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}</math> 若 <math>(x_0, y_0, z_0)</math> 为其解 <math>f(x_0, y_0, z_0)</math> 即为 <math>f(x, y, z)</math> 的极值 (若存在的话) 3) 由条件 <math>\varphi_1(x, y, z) = 0, \varphi_2(x, y, z) = 0</math> 求函数 <math>u = f(x, y, z)</math> 的极值 解题程序: 令 <math>F(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1\varphi_1(x, y, z) + \lambda_2\varphi_2(x, y, z)</math> 以下仿 1), 2)</p>	<p>(2) <math>\iint_D [f(x, y) \pm g(x, y)] d\sigma = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D g(x, y) d\sigma</math></p> <p>(3) <math>\iint_D f(x, y) d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) d\sigma</math>, 其中 <math>D_i</math> 为 <math>D</math> 的构成子域且任两个子域没 有重迭部分 (<math>i = 1, 2, \dots, m</math>)</p> <p>(4) <math>\iint_D d\sigma = A</math>, 其中 <math>A</math> 为 <math>D</math> 的面积。</p> <p><b>(5) (比较定理)</b></p> <p>若在 <math>D</math> 上恒有 <math>f(x, y) \leq g(x, y)</math>, 则 <math>\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D g(x, y) d\sigma</math></p> <p>(6) (估值定理) 设 <math>M, m</math> 分别为 <math>f(x, y)</math> 在闭域 <math>D</math> 上的最大与最小值, <math>A</math> 为 <math>D</math> 的面积, 则 <math>mA \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MA</math></p> <p>(7) (中值定理) 若 <math>f(x, y)</math> 在闭域 <math>D</math> 上连续, <math>A</math> 为 <math>D</math> 的面积, 则在 <math>D</math> 上至少 <math>\exists</math> 一点 <math>(\xi, \eta)</math>, 使 <math>\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta)A</math></p> <p><b>(8) 二重积分的对称性原理</b></p> <p>1) 如果积分域 <math>D</math> 关于 <math>x</math> 轴对称, <math>f(x, y)</math> 为 <math>y</math> 的奇偶函数, 则二重积分 <math>\iint_D f(x, y) d\sigma</math></p> <p><math>= \begin{cases} 0, &amp; f \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数, 即 } f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, &amp; f \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数, 即 } f(x, -y) = f(x, y), \end{cases}</math></p> <p><math>D_1</math> 为 <math>D</math> 在上半平面部分</p> <p>这个性质的几何意义见图(a)、(b)</p>
---	---

## (六) 多元函数积分学

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用</b> <p><b>1 二重积分:</b>  <math>I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i</math>, 其中 <math>d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}</math>,  <math>d_i</math> 为 <math>\Delta\sigma_i</math> 的直径 (<math>i = 1, 2, \dots, n</math>)</p> <p><b>几何意义:</b>  当 <math>z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D</math> 时, 而二重积分 <math>I</math> 表示以 <math>z = f(x, y)</math> 为曲顶, 以 <math>D</math> 为底的柱体体积。</p> <p><b>2 三重积分:</b>  <math>I = \iiint_D F(x, y, z) dv = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \tau_i) \Delta v_i</math>, 其中 <math>d = \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i\}</math>,  <math>d_i</math> 为 <math>\Delta v_i</math> 的直径 (<math>i = 1, 2, \dots, n</math>)</p> <p><b>物理意义:</b>  三重积分 <math>I</math> 表示体密度为 <math>\mu = f(x, y, z)</math> 的空间形体 <math>\Omega</math> 的质量。</p> <p><b>3 性质(只叙述二重积分的性质, 三重积分类似)</b></p> <p>(1) <math>\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma, k</math> 为常数</p>	



2) 如果积分域D关于y轴对称,  $f(x,y)$ 为x的奇偶函数,

$$\text{则二重积分 } \iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$= \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x \text{ 的奇函数, 即 } f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2 \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, & f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数, 即 } f(-x,y) = f(x,y), \end{cases}$$

$D_2$  为  $D$  在右半平面部分

3) 如果  $D$  关于原点对称,  $f(x,y)$  同时为  $x, y$  的奇偶函数,

$$\text{则二重积分 } \iint_D f(x,y)d\sigma$$

$$= \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } x, y \text{ 的奇函数, 即 } f(-x,-y) = -f(x,y) \\ 2 \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma, & f \text{ 关于 } x, y \text{ 为偶函数, 即 } f(-x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

$D_1$  为  $D$  在上半平面部分

$$4) \text{ 如果 } D \text{ 关于直线 } y=x \text{ 对称, 则 } \iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(y,x)d\sigma$$

注: 注意到二重积分积分域  $D$  的对称性及被积函数  $f(x,y)$  的奇偶性, 一方面可减少计算量, 另一方面可避免出差错, 要特别注意的是仅当积分域  $D$  的对称性与被积函数  $f(x,y)$  的奇偶性两者兼得时才能用性质 8.

两类曲线  
积分的概念、性质及  
计算, 两类  
曲线积分  
的关系, 格  
林公式, 平

### 1 平面曲线积分与路径无关的四个等价条件

设函数  $P(x,y), Q(x,y)$  在单连通区域  $D$  上具有一阶连续偏导数, 则  $\int_L Pdx + Qdy$  与路径无关

$$\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$$

面曲线积  
分与路径  
无关的条  
件,

$\Leftrightarrow \int_L Pdx + Qdy = 0, L$  为一简单分段光滑封闭曲线

$\Leftrightarrow$  存在函数  $u(x,y), (x,y) \in D$  使  $du(x,y) = Pdx + Qdy$ , 且

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$$

2 格林公式: 设平面上的有界闭区域  $D$  由分段光滑的曲线  $L$  围成, 函数  $P(x,y), Q(x,y)$  在有  $D$  连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L Pdx + Qdy$$

$$\text{或者 } \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L Pdx - Qdy$$

### 1 高斯(Gauss)公式

设  $\Omega$  是空间中的有界闭区域, 由分块光滑的曲面所  $S$  围成, 函数  $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$  在  $\Omega$  由连续的一阶偏导数, 则

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \quad \text{或}$$

$$\iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

这里  $S$  是  $\Omega$  的整个边界的外侧(即取外法向),  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是  $S$  上点  $(x,y,z)$  处的外法向量的方向余弦.

微信公众号: 考研斯基

二元函数  
全微分的  
原函数, 两  
类曲面积  
分的概念、  
性质及计  
算, 两类曲  
面积分的  
关系, 高斯  
公式, 斯托  
克斯公  
式,

### 2 斯托克斯公式

设  $\Gamma$  为分段光滑的又向闭曲线,  $S$  是以  $\Gamma$  为边界的分块光滑有向曲面,  $\Gamma$  的正向与  $S$  的侧(即法向量的指向)符合右手法则, 函数  $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$  在包含  $S$  的一个空间区域内有连续的一阶偏导数, 则有

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\left( \iint_S \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ P & Q & R \end{vmatrix} \right) = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \quad \text{或}$$

	$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma$ $= \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$
散度和旋度的概念及计算, 曲线积分和曲面积分的应用	<p>1 散度的计算公式 设 <math>\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}</math>, <math>P, Q, R</math> 均可导, 则 <math>\vec{A}</math> 在 <math>P(x, y, z)</math> 点处的散度为 <math>\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}</math></p> <p>2 旋度的计算公式 设有矢量场 <math>\vec{A} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}</math>, 其中 <math>P, Q, R</math> 均有连续的一阶偏导数, 则旋度 <math>\operatorname{rot} \vec{A}</math> 为:</p> $\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

## (七)无穷级数

考试内容	对应公式、定理、概念
常数项级数的收敛与发散的概念, 收敛级数和的概念级数的基本性质与收敛的必要条件	<p>1 级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 的性质:</p> <p>(1) 设 <math>c \neq 0</math> 的常数, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 与 <math>\sum_{n=1}^{\infty} cu_n</math> 有相同敛散性</p> <p>(2) 设有两个数级 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 与 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math></p> <p>若 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s</math>, <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma</math>, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = s \pm \sigma</math>.</p> <p>若 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 收敛, <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 发散, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)</math> 发散.</p>

	<p>若 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 均发散, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)</math> 敛散性不定.</p> <p>注: 添加或去消有限项不影响一个级数的敛散性.</p> <p>设级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 收敛, 则对其各项任意加括号后所得新级数仍收敛于原级数的和</p>
几何级数与 p 级数以及他们的收敛性, 正项级数收敛性的判别法,	<p>正项级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> (<math>u_n \geq 0</math>) 的判敛法</p> <p>(1) 比较判敛法: 设 <math>0 \leq u_n \leq v_n</math>, 若 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 收敛, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 收敛      <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 发散, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 发散</p> <p>(2) 比较法的极限形式: 设 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 及 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 均为正项级数且 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A</math> (<math>v_n \neq 0</math>)</p> <p>1. 若 <math>0 \leq A &lt; +\infty</math>, 且 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 收敛, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 收敛</p> <p>2. 若 <math>0 &lt; A \leq +\infty</math>, 且 <math>\sum_{n=1}^{\infty} v_n</math> 发散, 则 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 发散</p> <p>两个常用的比较级数</p> <p>i) 等比级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, &amp;  r  &lt; 1 \\ \text{发散}, &amp;  r  \geq 1 \end{cases}</math>      ii) <math>p</math>-级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛}, &amp; p &gt; 1 \text{ 时} \\ \text{发散}, &amp; p \leq 1 \text{ 时} \end{cases}</math></p> <p>(3) 比值判别法 (达朗贝尔准则) (适用于通项 <math>u_n</math> 中含有 <math>n!</math> 或关于 <math>n</math> 的若干连乘积形式)</p> <p>设 <math>u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots</math> 对于 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n</math> 来讲      若 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho</math> <math>\begin{cases} \rho &gt; 1 \text{ 时}, &amp; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \\ \rho = 1 \text{ 时}, &amp; \text{方法失效} \\ \rho &lt; 1 \text{ 时}, &amp; \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \end{cases}</math></p>

<p>交错级数与莱布尼兹定理, 任意项级数的绝对收敛与条件收敛,</p>	<p><b>1. 交错级数</b> <math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n &gt; 0)</math> 的判敛法</p> <p>莱布尼兹准则: 若交错级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n &gt; 0)</math> 满足条件:</p> <p>(1) <math>u_n \geq u_{n+1}, (n = 1, 2, \dots);</math> (2) <math>\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,</math></p> <p>则交错级数收敛, 其和 <math>S \leq u_1</math>, 其 <math>n</math> 项余和的绝对值 <math> R_n  \leq u_{n+1}.</math></p>	$= f(x)g(x)$ <p>(3) 设 <math>b_0 \neq 0</math>, 则在 <math>x = 0</math> 的足够小邻域内</p> $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$ <p>利用多项式的长除法可得: <math>C_0 = \frac{a_0}{b_0}, C_1 = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{b_0^2}, \dots</math></p> <p><b>2 幂级数的分析性质:</b></p> <p>设幂级数 <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n</math> 的收敛半径为 <math>R</math>, 则在 <math>(-R, R)</math> 内有</p> <p>(1) <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n</math> 的和函数 <math>f(x)</math> 是连续的。</p> <p>(2) <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n</math> 可逐项微分, 且 <math>f'_x = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'</math></p> $= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ <p>(3) <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n</math> 可逐项积分, 且 <math>\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n) dt</math></p> $= \sum_{n=0}^{\infty} (\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ <p><b>3 函数的幂级数展开</b></p> <p>泰勒级数 设 <math>f(x)</math> 在 <math>x = x_0</math> 的某一邻域内具有任意阶导数,</p> <p>级数: <math>\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots</math></p> <p>称为 <math>f(x)</math> 在 <math>x = x_0</math> 处的泰勒级数。</p>
<p>函数项级数的收敛域与和函数的概念, 幂级数及其收敛半径, 收敛区间(指开区间)和收敛域, 幂级数的和函数,</p>	<p><b>1 幂级数:</b> <math>a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n</math></p> <p>收敛半径, 若 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \left  \frac{a_{n+1}}{a_n} \right  = \rho</math>, 则 <math>R = \frac{1}{\rho}.</math></p> <p><b>2. 函数项级数 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)</math> 收敛域的求法步骤:</b></p> <p>(1) 用比值(或根值)法求 <math>\rho(x)</math>, 即</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ u_{n+1}(x) }{ u_n(x) } = \rho(x) \text{ (或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ u_n(x) } = \rho(x));$ <p>(2) 解不等式方程 <math>\rho(x) &lt; 1</math>, 求出 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)</math> 的收敛区间 <math>(a, b);</math></p> <p>(3) 考察 <math>x = a</math> (或 <math>x = b</math>) 时, <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n(a)</math> (或 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)</math>) 的敛散性</p> <p>(4) 写出 <math>\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)</math> 的收敛域</p>	
<p>幂级数在其收敛区间内的基本性质, 简单幂级数的和函数的求法, 初等幂级数展开式</p>	<p>1 幂级数的四则运算性质:</p> <p>设 <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x)</math>, 其收敛半径分别为 <math>R_1, R_2, R = \min(R_1, R_2)</math>, 则对 <math>\forall x \in (-R, R)</math>, 有</p> <p>(1) <math>\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = f(x) \pm g(x)</math>, 且在 <math>(-R, R)</math> 内绝对收敛</p> <p>(2) <math>(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n</math></p>	

$$\begin{aligned} \text{当 } x_0 = 0 \text{ 时, 级数化为 } & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ & + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \end{aligned}$$

称为麦克劳林级数

Th设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 某领域内具有任意阶导数,

$$\text{则泰勒级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

收敛于 $f(x)$ 的充分条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ,

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)] (x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

4 常见的幂级数展开式:

$$(1) \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots + u^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n, (-1, 1)$$

$$(2) \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \dots + (-1)^n u^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n, (-1, 1)$$

$$(3) e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}, (-\infty, +\infty)$$

$$(4) \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}, (-\infty, +\infty)$$

$$(5) \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}, (-\infty, +\infty)$$

$$(6) \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}, (-1, 1)$$

$$(7) (1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2!} u^2 + \dots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} u^n \dots \quad (\text{随 } a \text{ 的不同})$$

而不同, 但在 $(-1, 1)$ 总有意义)

**函数的傅立叶系数与傅立叶级数, 狄利克雷定理, 函数在 $[-l, l]$ 上的傅立叶级数**

1 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数, 且在 $[-\pi, \pi]$ 或 $[0, 2\pi]$ 上可积, 则

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, (n = 1, 2, \dots)$$

称为 $f(x)$ 的傅立叶系数

$$2 f(x) \text{ 的傅立叶系数为系数的三角级数 } \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\text{称为 } f(x) \text{ 的傅立叶级数, 记为 } f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

3 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数, 且在 $[-l, l]$ 上可积, 则以

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 0, 1, 2, \dots) \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{为系数的三角级数 } \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x)$$

$$\text{称为 } f(x) \text{ 的傅立叶级数, 记为 } f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x).$$

3 狄里赫莱收敛定理: 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足条件:

(1) 除有限个第一类间断点外都连续。微信公众号: 考研斯基

(2) 只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅立叶级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛, 且有

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \begin{cases} f(x), & x \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点;} \\ \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)], & x_0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的第一类间断点;} \\ \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi_0 + 0)], & x = \pm\pi. \end{cases}$$

<p><b>函数在 <math>[0, l]</math> 上的正弦级数与余弦级数.</b></p> <p>1 <math>f(x)</math> 为 <math>[0, l]</math> 上的非周期函数, 令:</p> $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$ <p>则 <math>f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x</math> (余弦级数), 其中:</p> $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$ <p>2 <math>f(x)</math> 为 <math>[0, l]</math> 上的非周期函数, 令:</p> $F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$ <p>则 <math>F(x)</math> 除 <math>x=0</math> 外在区间 <math>[-\pi, \pi]</math> 上为奇函数则 <math>f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x</math> (正弦级数), 其中:</p> $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (n=1, 2, \dots)$
---

### (八) 常微分方程

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>常微分方程的基本概念, 变量可分离的微分方程</b>	<p>1 常微分方程 含有自变量、未知函数及未知函数的某些导数的方程式 称微分方程, 而当未知函数是一元函数时称为常微分方程.</p> <p>2 可分离变量方程 <math>f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0</math> 解法: 两边同除 <math>g_1(y)f_2(x) \neq 0</math>, 得 <math>\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0</math>  <math display="block">\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C</math> </p>
<b>奇次微分方程, 一阶线性微分</b>	<p>1 齐次方程 <math>y' = f(\frac{y}{x})</math></p>

<p><b>方程, 伯努利方程, 全微分方程,</b></p> <p>解法: 令 <math>u = \frac{y}{x}</math>, 则 <math>y = ux</math>, <math>y' = u + x\frac{du}{dx}</math> 于是,</p> <p>原方程</p> $\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = f(u) \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \ln x + C$ <p>2 可化为齐次型的方程 <math>\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)</math></p> <p>解法: (1) 当 <math>c_1 = c_2 = 0</math> 时</p> $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ 属于(2)}$ <p>(2). <math>\begin{vmatrix} a_1 &amp; b_1 \\ a_2 &amp; b_2 \end{vmatrix} = 0</math>, 即 <math>\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda</math> 则</p> $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = g(a_2x+b_2y)$ <p>令 <math>a_2x+b_2y=u</math>, 则 <math>\frac{du}{dx} = a_2+b_2f(u)</math> 属于 (1)</p> <p>(3). <math>\begin{vmatrix} a_1 &amp; b_1 \\ a_2 &amp; b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1, c_2 \text{ 不全为 } 0</math> 解方程组 <math>\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}</math> 求交点 <math>(\alpha, \beta)</math></p> <p>令 <math>x = X + \alpha, y = Y + \beta</math>, 则原方程 <math>\Rightarrow \frac{dy}{dX} = \varphi(\frac{X}{Y})</math> 属于 (2)</p> <p>3 一阶线性方程 <math>y' + p(x)y = q(x)</math></p> <p>解法: 用常数变易法求</p> <p>(1) 求对应齐次方程 <math>y' + p(x)y = 0</math> 的通解 <math>y = Ce^{-\int p(x)dx}</math></p> <p>(2) 令原方程的解为 <math>y = C(x)e^{-\int p(x)dx}</math></p> <p>(3) 代入原方程整理得</p>
--

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}$ (4) 原方程通解 $y = [\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + \tilde{C}]e^{-\int p(x)dx}$ 4 贝努里方程 $y' + p(x)y = q(x)y^n$ , 其中 $n \neq 0, 1$ 解法: 令 $Z = y^{1-n}$ , 则方程 $\Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$ , $\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$ 属于 3 5 全微分方程 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ 为全微分方程 $\Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . 通解为 $\int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = C$	<b>数奇次线性微分方程, 高于二阶的某些常系数奇次线性微分方程</b> 解法: 特征方程: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (I) 当 $\lambda_1, \lambda_2$ 为相异的特征根时, 方程(1)通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ (II) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 通解为 $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}$ (III) 当 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ (复根) 时, 通解为 $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ 2 $n$ 阶常系数齐次线性方程 此种方程的一般形式为 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0$ (*), 其中 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为常数, 相应的特征方程为 $\lambda^n + p_1 \lambda^{(n-1)} + p_2 \lambda^{(n-2)} + \dots + p_n = 0$ 特征根与通解的关系同二阶方程的情形相类似, 具体结果为: (1) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是个 $n$ 相异实根, 则方程 (*) 的通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ (2) 若 $\lambda = \lambda_0$ 为特征方程的 $k (k \leq n)$ 重实根, 则 (*) 的通解中含有: $(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_0 x}$ (3) 若 $\alpha + i\beta$ 为特征方程的 $k (2k \leq n)$ 重共轭复根, 则 (*) 的通解中含有: $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$ 由于我们不能求出一般的三次以上代数方程的根, 也就是说对于三次以上的特征方程一般不能得到齐特征根, 自然也就不能求出三阶以上常系数齐次线性微分方程的通解, 能够求出的只是某些特殊情形
<b>可用简单的变量代换求解的某些微分方程, 可降阶的高阶微分方程, 线性微分方程解的性质及解的结构定理</b> 注: 这里只限于讨论二阶线性方程, 其结论可推广到更高阶的方程, 二阶线性方程的一般形式为 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (8.1) 其中 $p(x), q(x), f(x)$ 均为连续函数, 当右端项 $f(x) \equiv 0$ 时, 称为二阶线性齐次方程, 否则称为非齐次方程. 解的性质与结构(以下性质可推广到任意高阶的线性方程)分以下几种: 1 若 $y_1(x), y_2(x)$ 为齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (8.2) 的两个特解, 则其线性组合 $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 仍为(8.2)的解, 特别地, 若 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关(即 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \lambda$ (常数)), 则(8.2)的通解为 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 2 设 $y_1(x), y_2(x)$ 为非齐次方程(8.1)的两个特解, 则其差 $y_1(x) - y_2(x)$ 为相应齐次方程(8.2)的特解 3 设 $y^*(x)$ 为非齐次方程(8.1)的一个特解, $y(x)$ 为齐次方程(8.2)的任意特解, 则其和 $y^*(x) + y(x)$ 为(8.1)的解, 特别地, 若 $y_1(x), y_2(x)$ 为(8.2)两个线性无关的特解, 则(8.1)的通解为 $y(x) = y^*(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ , 其中 $C_1, C_2$ 为任意常数.	<b>简单的二阶常系数</b> 1 二阶常系数线性齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ (1) 其中 $p, q$ 均为常数

<b>非奇次线性微分方程, 欧拉方程, 微分方程简单应用</b> <p>解法: 通解的求法程序</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1). 求对应齐次方程的通解 <math>Y(x)</math></li> <li>(2). 求出(1)的特解 <math>y^*(x)</math></li> <li>(3). 方程(2)的通解 <math>y = Y(x) + y^*(x)</math></li> </ol> <p>方程(2)特解 <math>y^*(x)</math> 的求法有三种: 微分算子法、常数变易法、待定系数法.</p> <p>2 形如 <math>x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0</math> 的方程成为欧拉方程.</p>	<p>但 <math> A \pm B  =  A  \pm  B </math> 不一定成立</p> <p>(3) <math> kA  = k^n  A , A</math> 为 <math>n</math> 阶方阵</p> <p>(4) 设 <math>A</math> 为 <math>n</math> 阶方阵, 则 <math> A^T  =  A ,  A^{-1}  =  A ^{-1}</math> (若 <math>A</math> 可逆) <math> A^*  =  A ^{n-1} (n \geq 2)</math></p> <p>(5) <math>\begin{vmatrix} A &amp; O \\ O &amp; B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A &amp; C \\ O &amp; B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A &amp; O \\ C &amp; B \end{vmatrix} =  A   B , A, B</math> 为方阵,</p> <p>但 <math>\begin{vmatrix} O &amp; A_{m \times m} \\ B_{n \times n} &amp; O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}  A   B </math>.</p> <p>(6) 范德蒙行列式 <math>D_n = \begin{vmatrix} 1 &amp; 1 &amp; \dots &amp; 1 \\ x_1 &amp; x_2 &amp; \dots &amp; x_n \\ \dots &amp; \dots &amp; \dots &amp; \dots \\ x_1^{n-1} &amp; x_2^{n-1} &amp; \dots &amp; x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j &lt; i \leq n} (x_i - x_j)</math></p> <p>设 <math>A</math> 是 <math>n</math> 阶方阵, <math>\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)</math> 是 <math>A</math> 的 <math>n</math> 个特征值, 则</p> $ A  = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
---	---

## 二、线性代数

### (一) 行列式

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>行列式的概念和基本性质、行列式按行(列)展开定理</b> <p>行列式按行(列)展开定理</p> <p>(1) 设 <math>A = (a_{ij})_{n \times n}</math>, 则 <math>a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases}  A , &amp; i=j \\ 0, &amp; i \neq j \end{cases}</math></p> <p>或 <math>a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases}  A , &amp; i=j \\ 0, &amp; i \neq j \end{cases}</math></p> <p>即 <math>AA^* = A^*A =  A E</math>, 其中</p> $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}) = (A_{ij})^T$ <p>(2) 设 <math>A, B</math> 为 <math>n</math> 阶方阵, 则 <math> AB  =  A  B  =  B  A  =  BA </math></p>	

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>矩阵的概念, 矩阵的线性运算, 矩阵的乘法,</b> <p>矩阵: <math>m \times n</math> 个数 <math>a_{ij}</math> 排成 <math>m</math> 行 <math>n</math> 列的表格 <math>\begin{bmatrix} a_{11} &amp; a_{12} &amp; \cdots &amp; a_{1n} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; \cdots &amp; a_{2n} \\ \cdots &amp; \cdots &amp; \cdots &amp; \cdots \\ a_{m1} &amp; a_{m2} &amp; \cdots &amp; a_{mn} \end{bmatrix}</math> 称为矩阵, 简记为 <math>A</math>, 或 <math>(a_{ij})_{m \times n}</math>. 若 <math>m = n</math>, 则称 <math>A</math> 是 <math>n</math> 阶矩阵或 <math>n</math> 阶方阵.</p> <p>矩阵的线性运算</p> <p>1 矩阵的加法 设 <math>A = (a_{ij}), B = (b_{ij})</math> 是两个 <math>m \times n</math> 矩阵, 则 <math>m \times n</math> 矩阵 <math>C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}</math> 称为矩阵 <math>A</math> 与 <math>B</math> 的和, 记为 <math>A + B = C</math></p>	

<p>2 矩阵的数乘 设 <math>A = (a_{ij})</math> 是 <math>m \times n</math> 矩阵, <math>k</math> 是一个常数, 则 <math>m \times n</math> 矩阵 <math>(ka_{ij})</math> 称为数 <math>k</math> 与矩阵 <math>A</math> 的数乘, 记为 <math>kA</math>.</p> <p>3 矩阵的乘法 设 <math>A = (a_{ij})</math> 是 <math>m \times n</math> 矩阵, <math>B = (b_{ij})</math> 是 <math>n \times s</math> 矩阵, 那么 <math>m \times s</math> 矩阵 <math>C = (c_{ij})</math>, 其中</p> $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ <p>称为 <math>A</math> 与 <math>B</math> 的乘积的乘积, 记为 <math>C = AB</math></p>	<p><b>3 有关 <math>A^{-1}</math> 的结论</b></p> <p><math>A</math> 可逆 <math>\Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow  A  \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;</math>  <math>\Leftrightarrow A</math> 可以表示为初等矩阵的乘积;  <math>\Leftrightarrow A</math> 无零特征值; <math>\Leftrightarrow Ax = 0</math> 只有零解</p>
<p><b>方阵的幂, 方阵乘积的行列式, 矩阵的转置, 逆矩阵的概念和性质, 矩阵可逆的充要条件, 伴随矩阵,</b></p> <p>1) <math>(A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T</math></p> <p>2) <math>(A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}</math>, 但 <math>(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}</math> 不一定成立,</p> <p>3) <math>(A^*)^* =  A ^{n-2} A (n \geq 3), (AB)^* = B^* A^*</math>,</p> <p><math>(kA)^* = k^{n-1} A^* (n \geq 2)</math>. 但 <math>(A \pm B)^* = A^* \pm B^*</math> 不一定成立</p> <p>4) <math>(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*</math></p> <p><b>2 有关 <math>A^*</math> 的结论</b></p> <p>1) <math>AA^* = A^*A =  A E</math></p> <p>2) <math> A^*  =  A ^{n-1} (n \geq 2), (kA)^* = k^{n-1} A^*, (A^*)^* =  A ^{n-2} A (n \geq 3)</math></p> <p>3) 若 <math>A</math> 可逆, 则 <math>A^* =  A A^{-1}, (A^*)^* = \frac{1}{ A }A</math></p> <p>4) 若 <math>A</math> 为 <math>n</math> 阶方阵, 则 <math>r(A^*) = \begin{cases} n, &amp; r(A) = n \\ 1, &amp; r(A) = n-1 \\ 0, &amp; r(A) &lt; n-1 \end{cases}</math></p>	<p><b>1 有关矩阵秩的结论</b></p> <p>1) 秩 <math>r(A) =</math> 行秩 = 列秩;      2) <math>r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n);</math>      3) <math>A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1;</math>      4) <math>r(A \pm B) \leq r(A) + r(B);</math>      5) 初等变换不改变矩阵的秩      6) <math>r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))</math>, 特别若 <math>AB = O</math> 则 <math>r(A) + r(B) \leq n</math></p> <p>7) 若 <math>A^{-1}</math> 存在 <math>\Rightarrow r(AB) = r(B)</math>; 若 <math>B^{-1}</math> 存在 <math>\Rightarrow r(AB) = r(A)</math>;</p> <p style="text-align: center;">微信公众号: 考研斯基</p> <p><b>矩阵的初等变换, 初等矩阵, 矩阵的秩, 矩阵等价, 分块矩阵及其运算</b></p> <p>若 <math>r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B);</math>      若 <math>r(A_{m \times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A);</math></p> <p>8) <math>r(A_{m \times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0</math> 只有零解</p> <p><b>2 分块求逆公式</b></p> $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix};$ $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ <p>这里 <math>A, B</math> 均为可逆方阵</p>

### (三) 向量

考试内容	对应公式、定理、概念
向量的概念, 向量的线性组合和线性表示, 向量的线性相关与线性无关	<p><b>1 有关向量组的线性表示</b></p> <p>(1) <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性相关 <math>\Leftrightarrow</math> 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.</p> <p>(2) 若 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性无关, <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta</math> 线性相关 <math>\Leftrightarrow \beta</math> 可以由 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 惟一线性表示.</p> <p>(3) <math>\beta</math> 可以由 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性表示  <math>\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)</math></p> <p><b>2 有关向量组的线性相关性</b></p> <p>(1) 部分相关, 整体相关; 整体无关, 部分无关.</p> <p>(2) ① <math>n</math> 个 <math>n</math> 维向量  <math>\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n</math> 线性无关 <math>\Leftrightarrow  [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]  \neq 0</math>,  <math>n</math> 个 <math>n</math> 维向量 <math>\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n</math> 线性相关  <math>\Leftrightarrow  [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]  = 0</math>,</p> <p>② <math>n+1</math> 个 <math>n</math> 维向量线性相关.</p> <p>③ 若 <math>\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_s</math> 线性无关, 则添加分量后仍线性无关;  或一组向量线性相关, 去掉某些分量后仍线性相关</p>
向量组的极大线性无关组, 等价向量组, 向量组的秩	<p><b>1 有关向量组的线性表示</b></p> <p>(1) <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性相关 <math>\Leftrightarrow</math> 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.</p> <p>(2) 若 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性无关, <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta</math> 线性相关 <math>\Leftrightarrow \beta</math> 可以由 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 惟一线性表示.</p> <p>(3) <math>\beta</math> 可以由 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性表示  <math>\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)</math></p>

向量组的秩与矩阵的秩之间的关系, 向量空间及相关概念	<p>1 设 <math>r(A_{m \times n}) = r</math>, 则 <math>A</math> 的秩 <math>r(A)</math> 与 <math>A</math> 的行列向量组的线性相关性关系为:</p> <p>(1) 若 <math>r(A_{m \times n}) = r = m</math>, 则 <math>A</math> 的行向量组线性无关.</p> <p>(2) 若 <math>r(A_{m \times n}) = r &lt; m</math>, 则 <math>A</math> 的行向量组线性相关.</p> <p>(3) 若 <math>r(A_{m \times n}) = r = n</math>, 则 <math>A</math> 的列向量组线性无关.</p> <p>(4) 若 <math>r(A_{m \times n}) = r &lt; n</math>, 则 <math>A</math> 的列向量组线性相关</p>
n 维向量空间的基变换和坐标变换, 过渡矩阵	<p>1 基变换公式及过渡矩阵</p> <p>若 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> 与 <math>\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n</math> 是向量空间 <math>V</math> 的两组基, 则基变换公式为</p> $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) C$ <p>其中 <math>C</math> 是可逆矩阵, 称为由基 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> 到基 <math>\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n</math> 的过渡矩阵</p> <p>2 坐标变换公式</p> <p>若向量 <math>\gamma</math> 在基 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> 与基 <math>\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n</math> 的坐标分别是</p> $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \text{ 即}$ $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n, \text{ 则向量坐标变换公式为 } X = CY \text{ 或 } Y = C^{-1}X$ <p>其中 <math>C</math> 是从基 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> 到基 <math>\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n</math> 的过渡矩阵</p>

<b>向量的内积, 线性无关向量组的正交规范化方法</b>	<p>内积: <math>(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \alpha^T \beta = \beta^T \alpha</math></p> <p>Schmidt 正交化 若 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math> 线性无关, 则可构造 <math>\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s</math> 使其两两正交, 且 <math>\beta_i</math> 仅是 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i</math> 的线性组合 (<math>i=1, 2, \dots, n</math>), 再把 <math>\beta_i</math> 单位化, 记 <math>\gamma_i = \frac{\beta_i}{ \beta_i }</math>, 则 <math>\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s</math> 是规范正交向量组. 其中</p> $\beta_1 = \alpha_1,$ $\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$ $\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2$ <p style="text-align: center;">.....</p> $\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}$	<p><b>件</b></p> <p><math>x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}</math>, 其中 <math>D_j</math> 是把 <math>D</math> 中第 <math>j</math> 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式.</p> <p>2 n 阶矩阵 <math>A</math> 可逆 <math>\Leftrightarrow Ax=0</math> 只有零解. <math>\Leftrightarrow \forall b, Ax=b</math> 总有唯一解, 一般地,</p> <p><math>r(A_{m \times n}) = n \Leftrightarrow Ax=0</math> 只有零解.</p>
<b>规范正交基, 正交矩阵及其性质</b>	<p>1 正交基及规范正交基</p> <p>向量空间一组基中的向量如果两两正交, 就称为正交基; 若正交基中每个向量都是单位向量, 就称其为规范正交基</p>	<p><b>非齐次线性方程组有解的充分必要条件, 线性方程组解的性质和解的结构</b></p> <p>1 设 <math>A</math> 为 <math>m \times n</math> 矩阵, 若 <math>r(A_{m \times n}) = m</math>, 则对 <math>Ax=b</math> 而言必有 <math>r(A) = r(A:b) = m</math>, 从而 <math>Ax=b</math> 有解.</p> <p>2 设 <math>x_1, x_2, \dots, x_s</math> 为 <math>Ax=b</math> 的解, 则 <math>k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_s x_s</math> 当 <math>k_1 + k_2 + \dots + k_s = 1</math> 时仍为 <math>Ax=b</math> 的解; 但当 <math>k_1 + k_2 + \dots + k_s = 0</math> 时, 则为 <math>Ax=0</math> 的解. 特别 <math>\frac{x_1 + x_2}{2}</math> 为 <math>Ax=b</math> 的解; <math>2x_3 - (x_1 + x_2)</math> 为 <math>Ax=0</math> 的解.</p> <p>3 非齐次线性方程组 <math>Ax=b</math> 无解 <math>\Leftrightarrow r(A)+1=r(\bar{A}) \Leftrightarrow b</math> 不能由 <math>A</math> 的列向量 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n</math> 线性表示.</p> <p><b>奇次线性方程组的基础解系和通解, 解空间, 非奇次线性方程组的通解.</b></p> <p>1 齐次方程组 <math>Ax=0</math> 恒有解(必有零解). 当有非零解时, 由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量, 因此 <math>Ax=0</math> 的全体解向量构成一个向量空间, 称为该方程组的解空间, 解空间的维数是 <math>n-r(A)</math>, 解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系.</p> <p>2 <math>\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t</math> 是 <math>Ax=0</math> 的基础解系, 即</p> <p>(1) <math>\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t</math> 是 <math>Ax=0</math> 的解;</p> <p>(2) <math>\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t</math> 线性无关;</p> <p>(3) <math>Ax=0</math> 的任一解都可以由 <math>\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t</math> 线性表出.</p> <p><math>k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_t \eta_t</math> 是 <math>Ax=0</math> 的通解, 其中 <math>k_1, k_2, \dots, k_t</math> 是任意常数.</p>
<b>考试内容</b>	<p>对应公式、定理、概念</p> <p>1 克莱姆法则</p> <p>线性方程组 <math>\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}</math>, 如果系数行列式 <math>D =  A  \neq 0</math>, 则方程组有唯一解</p>	<p><b>(五)矩阵的特征值和特征向量</b></p> <p><b>考试内容</b></p> <p>1 设 <math>\lambda</math> 是 <math>A</math> 的一个特征值, 则 <math>kA, aA+bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*</math> 有一个特征值分别为</p>

#### (四)线性方程组

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>线性方程组的克莱姆法则, 奇次线性方程组有非零解的充分必要条件</b>	<p>1 克莱姆法则</p> <p>线性方程组 <math>\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}</math>, 如果系数行列式 <math>D =  A  \neq 0</math>, 则方程组有唯一解</p>

考试内容	对应公式、定理、概念
<b>矩阵的特征值和特征向量的</b>	<p>1 设 <math>\lambda</math> 是 <math>A</math> 的一个特征值, 则 <math>kA, aA+bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*</math> 有一个特征值分别为</p>

<b>概念及性质,</b>	<p><math>k\lambda, a\lambda+b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{ A }{\lambda}</math>, 且对应特征向量相同 (<math>A^T</math> 例外).</p> <p>2 若 <math>\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n</math> 为 <math>A</math> 的 <math>n</math> 个特征值, 则 <math>\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}</math>, <math>\prod_{i=1}^n \lambda_i =  A </math> 从而 <math> A  \neq 0 \Leftrightarrow A</math> 没有特征值.</p> <p>3 设 <math>\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s</math> 为 <math>A</math> 的 <math>s</math> 个特征值, 对应特征向量为 <math>\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s</math>, 若 <math>\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s</math>, 则 <math>A^n\alpha = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \dots + k_sA^n\alpha_s = k_1\lambda_1^n\alpha_1 + k_2\lambda_2^n\alpha_2 + \dots + k_s\lambda_s^n\alpha_s</math></p>	(1) $A^T \quad B^T$ (2) $A^{-1} \quad B^{-1}$ (若 $A, B$ 均可逆) (3) $A^k \quad B^k$ ( $k$ 为正整数) (4) $ \lambda E - A  =  \lambda E - B $ , 从而 $A, B$ 有相同的特征值 (5) $ A  =  B $ , 从而 $A, B$ 同时可逆或同时不可逆 (6) 秩( $A$ ) = 秩( $B$ ), $ \lambda E - A  =  \lambda E - B $ , $A, B$ 不一定相似
<b>相似变换、相似矩阵的概念及性质,</b>	<p>1 若 <math>A \sim B</math>, 则</p> <p>(1) <math>A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*</math>.</p> <p>(2) <math> A  =  B , \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n B_{ii}, r(A) = r(B)</math></p> <p>(3) <math> \lambda E - A  =  \lambda E - B </math>, 对 <math>\forall \lambda</math> 成立</p>	<h3>(六) 二次型</h3>
<b>矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角矩阵,</b>	<p>1 设 <math>A</math> 为 <math>n</math> 阶方阵, 则 <math>A</math> 可对角化 <math>\Leftrightarrow</math> 对每个 <math>k_i</math> 重根特征值 <math>\lambda_i</math>, 有 <math>n - r(\lambda_i E - A) = k_i</math></p> <p>2 设 <math>A</math> 可对角化, 则由 <math>P^{-1}AP = \Lambda</math>, 有 <math>A = P\Lambda P^{-1}</math>, 从而 <math>A^n = P\Lambda^n P^{-1}</math></p> <p>3 重要结论</p> <p>(1) 若 <math>A = B, C = D</math>, 则 <math>\begin{bmatrix} A &amp; O \\ O &amp; C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B &amp; O \\ O &amp; D \end{bmatrix}</math>.</p> <p>(2) 若 <math>A \sim B</math>, 则 <math>f(A) \sim f(B),  f(A)  =  f(B) </math>, 其中 <math>f(A)</math> 为关于 <math>n</math> 阶方阵 <math>A</math> 的多项式.</p> <p>(3) 若 <math>A</math> 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数(重根重复计算)=秩(<math>A</math>)</p>	<p><b>考试内容</b> 对应公式、定理、概念</p> <p>1 <math>n</math> 个变量 <math>x_1, x_2, \dots, x_n</math> 的二次齐次函数 <math>f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j</math>, 其中 <math>a_{ij} = a_{ji}</math> (<math>i, j = 1, 2, \dots, n</math>), 称为 <math>n</math> 元二次型, 简称二次型. 若令</p> <p><b>二次型及其矩阵表示, 合同变换与合同矩阵, 二次型的秩</b> <math>x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} &amp; a_{12} &amp; \cdots &amp; a_{1n} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; \cdots &amp; a_{2n} \\ \cdots &amp; \cdots &amp; \cdots &amp; \cdots \\ a_{n1} &amp; a_{n2} &amp; \cdots &amp; a_{nn} \end{bmatrix}</math>, 这二次型 <math>f</math> 可改写成矩阵向量形式 <math>f = x^T Ax</math>. 其中 <math>A</math> 称为二次型矩阵, 因为 <math>a_{ij} = a_{ji}</math> (<math>i, j = 1, 2, \dots, n</math>), 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵 <math>A</math> 的秩称为二次型的秩.</p>
<b>实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵</b>	<p>1 相似矩阵: 设 <math>A, B</math> 为两个 <math>n</math> 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 <math>P</math>, 使得 <math>B = P^{-1}AP</math> 成立, 则称矩阵 <math>A</math> 与 <math>B</math> 相似, 记为 <math>A \sim B</math>.</p> <p>2 相似矩阵的性质</p> <p>如果 <math>A \sim B</math> 则有</p>	<p><b>惯性定理, 二次型的标准形和规范形</b> 1 惯性定理 对于任一二次型, 不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准型, 其正负惯性指数与所选变换无关, 这就是所谓的惯性定理 2 标准形 二次型 <math>f = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax</math> 经过合同变换 <math>x = Cy</math> 化为</p>

	<p><math>f = x^T Ax = y^T C^T ACy = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2</math> 称为 <math>f</math> (<math>r \leq n</math>) 的标准形. 在一般的数域内, 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的合同变换有关, 但系数不为零的平方项的个数由 <math>r(A)</math> 的秩唯一确定.</p> <p>3 规范形 任一实二次型 <math>f</math> 都可经过合同变换化为规范形 <math>f = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \dots - z_r^2</math>, 其中 <math>r</math> 为 <math>A</math> 的秩, <math>p</math> 为正惯性指数, <math>r-p</math> 为负惯性指数, 且规范型唯一.</p>
用正交变换和配方法化二次型为标准形, 二次型及其矩阵的正定性	<p>1 设 <math>A</math> 正定 <math>\Rightarrow kA(k &gt; 0), A^T, A^{-1}, A^*</math> 正定; <math> A  &gt; 0, A</math> 可逆; <math>a_{ii} &gt; 0</math>, 且 <math> A_{ii}  &gt; 0</math></p> <p>2 <math>A, B</math> 正定 <math>\Rightarrow A+B</math> 正定, 但 <math>AB, BA</math> 不一定正定</p> <p>3 <math>A</math> 正定 <math>\Leftrightarrow f(x) = x^T Ax &gt; 0, \forall x \neq 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow A</math> 的各阶顺序主子式全大于零</p> <p><math>\Leftrightarrow A</math> 的所有特征值大于零</p> <p><math>\Leftrightarrow A</math> 的正惯性指数为 <math>n</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \exists</math> 可逆阵 <math>P</math> 使 <math>A = P^T P</math></p> <p><math>\Leftrightarrow</math> 存在正交矩阵 <math>Q</math>, 使 <math>Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 &amp; &amp; \\ &amp; \ddots &amp; \\ &amp; &amp; \lambda_n \end{pmatrix}</math>,</p> <p>其中 <math>\lambda_i &gt; 0, i = 1, 2, \dots, n</math>. 正定 <math>\Rightarrow kA(k &gt; 0), A^T, A^{-1}, A^*</math> 正定;</p> <p><math> A  &gt; 0, A</math> 可逆; <math>a_{ii} &gt; 0</math>, 且 <math> A_{ii}  &gt; 0</math></p>

### 三、概率论与数理统计

#### (一) 随机事件和概率

考试内容	对应概念、定理、公式
随机事件与样本空间, 事件的关系与运算, 完全事件组	<p>1 事件的关系与运算</p> <p>(1) 子事件: <math>A \subset B</math>, 若 <math>A</math> 发生, 则 <math>B</math> 发生.</p> <p>(2) 相等事件: <math>A=B</math>, 即 <math>A \subset B</math>, 且 <math>B \subset A</math>.</p> <p>(3) 和事件: <math>A \cup B</math> (或 <math>A+B</math>), <math>A</math> 与 <math>B</math> 中至少有一个发生.</p> <p>(4) 差事件: <math>A-B</math>, <math>A</math> 发生但 <math>B</math> 不发生.</p> <p>(5) 积事件: <math>A \cap B</math> (或 <math>AB</math>), <math>A</math> 与 <math>B</math> 同时发生.</p> <p>(6) 互斥事件 (互不相容): <math>A \cap B = \emptyset</math>.</p> <p>(7) 互逆事件 (对立事件): <math>A \cap B = \emptyset</math>, 且 <math>A \cup B = \Omega</math>, 记 <math>A = \bar{B}</math> 或 <math>B = \bar{A}</math></p> <p>2 运算律:</p> <p>(1) 交换律: <math>A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A</math></p> <p>(2) 结合律: <math>(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)</math></p> <p>(3) 分配律: <math>(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)</math></p> <p>3 德摩根律: <math>\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}</math></p> <p>4 完全事件组: <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> 两两互斥, 且和事件为必然事件, 即 <math>A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega</math>.</p>
概率的概念, 概率的基本性质, 古典概率, 几何型概率	<p>1 概率: 事件发生的可能性大小的度量, 其严格定义如下: 概率 <math>P(\cdot)</math> 为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数: 微信公众号: 考研斯基</p> <p>(1) 对任何事件 <math>A</math>, <math>P(A) \geq 0</math>;</p> <p>(2) 对必然事件 <math>\Omega</math>, <math>P(\Omega) = 1</math>;</p> <p>(3) 对 <math>A_1, A_2, \dots, A_n, \dots</math>, 若 <math>A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)</math>, 则 <math>P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)</math>.</p> <p>2 概率的基本性质</p>

<p>(1) <math>P(\bar{A}) = 1 - P(A)</math>;</p> <p>(2) <math>P(A - B) = P(A) - P(AB)</math>;</p> <p>(3) <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)</math>; 特别, 当 <math>B \subset A</math> 时, <math>P(A - B) = P(A) - P(B)</math> 且 <math>P(B) \leq P(A)</math> ;</p> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ - P(AC) + P(ABC);$ <p>(4) 若 <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> 两两互斥, 则 <math>P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)</math>.</p> <p>3 古典型概率: 实验的所有结果只有有限个, 且每个结果发生的可能性相同, 其概率计算公式:</p> $P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$ <p>4 几何型概率: 样本空间 <math>\Omega</math> 为欧氏空间中的一个区域, 且每个样本点的出现具有等可能性, 其概率计算公式:</p> $P(A) = \frac{A \text{ 的度量 (长度、面积、体积)}}{\Omega \text{ 的度量 (长度、面积、体积)}}$	<p>(3) Bayes 公式: <math>P(B_j   A) = \frac{P(A   B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A   B_i)P(B_i)}</math>, <math>j = 1, 2, \dots, n</math></p> <p>注: 上述公式中事件 <math>B_i</math> 的个数可为可列个.</p> <p>(4) 乘法公式:</p> $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2   A_1) = P(A_2)P(A_1   A_2)$ $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2   A_1)P(A_3   A_1 A_2) \cdots P(A_n   A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$ <p>2 事件的独立性</p> <p>(1) A 与 B 相互独立 <math>\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)</math></p> <p>(2) A, B, C 两两独立 <math>\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)</math>; <math>P(BC) = P(B)P(C)</math>; <math>P(AC) = P(A)P(C)</math>;</p> <p>(3) A, B, C 相互独立 <math>\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)</math>; <math>P(BC) = P(B)P(C)</math>; <math>P(AC) = P(A)P(C)</math>; <math>P(ABC) = P(A)P(B)P(C)</math>.</p> <p>3 独立重复试验: 将某试验独立重复 n 次, 若每次实验中事件 A 发生的概率为 p, 则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为:</p> $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$ <p>4 重要公式与结论</p> <p>(1) <math>P(\bar{A}) = 1 - P(A)</math></p> <p>(2) <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)</math></p> $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) \\ - P(AC) + P(ABC)$ <p>(3) <math>P(A - B) = P(A) - P(AB)</math></p> <p>(4) <math>P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)</math>, <math>P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})</math>,</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$ <p>(5) 条件概率 <math>P(\cdot   B)</math> 满足概率的所有性质,</p>
<p><b>概率的基本公式, 事件的独立性, 独立重复试验</b></p> <p>1 概率的基本公式:</p> <p>(1) 条件概率: <math>P(B   A) = \frac{P(AB)}{P(A)}</math>, 表示 A 发生的条件下, B 发生的概率</p> <p>(2) 全概率公式: <math>P(A) = \sum_{i=1}^n P(A   B_i)P(B_i)</math>, <math>B_i B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega</math>.</p>	

<p>例如: . <math>P(\bar{A}_1   B) = 1 - P(A_1   B)</math></p> $P(A_1 \cup A_2   B) = P(A_1   B) + P(A_2   B) - P(A_1 A_2   B)$ $P(A_1 A_2   B) = P(A_1   B)P(A_2   A_1 B)$ <p>(6)若 <math>A_1, A_2, \dots, A_n</math> 相互独立, 则 <math>P(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i)</math>,</p> $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(\bar{A}_i))$ <p>(7)互斥、互逆与独立性之间的关系:</p> <p>A 与 B 互逆 <math>\Rightarrow</math> A 与 B 互斥, 但反之不成立, A 与 B 互斥 (或互逆) 且均非零概率事件 <math>\Rightarrow</math> A 与 B 不独立.</p> <p>(8)若 <math>A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n</math> 相互独立, 则 <math>f(A_1, A_2, \dots, A_m)</math> 与 <math>g(B_1, B_2, \dots, B_n)</math> 也相互独立, 其中 <math>f(\cdot), g(\cdot)</math> 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件, 另外, 概率为 1 (或 0) 的事件与任何事件相互独立.</p>	<p><b>性质</b></p> <p>(1) <math>f(x) \geq 0</math>,</p> <p>(2) <math>\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1</math></p> <p>(3) <math>x</math> 为 <math>f(x)</math> 的连续点, 则 <math>f(x) = F'(x)</math> 分布函数 <math>F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt</math></p>
---	--

## (二)随机变量及其概率分布

考试内容	对应公式、概念、定理
<b>随机变量,</b> <b>随机变量</b> <b>的分布函</b> <b>数的概念</b> <b>及其性质</b>	<p>1 随机变量及概率分布: 取值带有随机性的变量, 严格地说是定义在样本空间上, 取值于实数的函数称为随机变量, 概率分布通常指分布函数或分布律</p> <p>2 分布函数的概念与性质</p> <p>定义: <math>F(x) = P(X \leq x), -\infty &lt; x &lt; +\infty</math></p> <p>性质: (1) <math>0 \leq F(x) \leq 1</math>                          (2) <math>F(x)</math> 单调不减  (3)右连续 <math>F(x+0) = F(x)</math>                  (4) <math>F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1</math></p>
<b>离散型随</b> <b>机变量的</b> <b>概率分布,</b> <b>连续型随</b> <b>机变量的</b> <b>概率密度</b>	<p>1 离散型随机变量的概率分布</p> $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots \quad p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ <p>2 连续型随机变量的概率密度</p> <p>概率密度 <math>f(x)</math>; 非负可积, 且</p>

	<p><b>1 常见分布</b></p> <p>(1) 0-1 分布: <math>P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, k = 0, 1</math></p> <p>(2) 二项分布 <math>B(n, p)</math>:</p> $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$ <p>(3) Poisson 分布 <math>p(\lambda)</math>:</p> $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ <p>(4) 均匀分布 <math>U(a, b)</math>: <math>f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, &amp; a &lt; x &lt; b \\ 0, &amp; \text{其他} \end{cases}</math></p> <p>(5) 正态分布 <math>N(\mu, \sigma^2)</math>:</p> $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty$ <p>(6) 指数分布 <math>E(\lambda)</math>: <math>f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, &amp; x &gt; 0, \lambda &gt; 0 \\ 0, &amp; \text{其他} \end{cases}</math></p> <p>(7) 几何分布 <math>G(p)</math>: <math>P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, 0 &lt; p &lt; 1, k = 1, 2, \dots</math></p> <p>(8) 超几何分布</p> $H(N, M, n): P(X = k) = \frac{C_N^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$ <p>2 随机变量函数的概率分布</p> <p>(1) 离散型: <math>P(X = x_i) = p_i, Y = g(X)</math> 则</p> $P(Y = y_j) = \sum_{g(x_i) = y_j} P(X = x_i)$
--	---

(2) 连续型: $X \sim f_X(x), Y = g(x)$ 则 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx,$ $f_Y(y) = F'_Y(y)$
<b>3 重要公式与结论</b>
(1) $X \sim N(0,1) \Rightarrow \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0) = \frac{1}{2},$
$\Phi(-a) = P(X \leq -a) = 1 - \Phi(a)$
(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ 且 $P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$
(3) $X \sim E(\lambda) \Rightarrow P(X > s + t   X > s) = P(X > t)$
(4) $X \sim G(p) \Rightarrow P(X = m+k   X > m) = P(X = k)$
(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数; 连续型随机变量的分布函数为连续函数, 但不一定为处处可导函数。
(6) 存在既非离散也非连续型随机变量.

$P\{Y = y_j   X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_i}$
1 联合概率密度 $f(x,y):$ (1) $f(x,y) \geq 0$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dxdy = 1$
2 分布函数: $F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u,v) du dv$
3 边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx$
4 条件概率密度: $f_{X Y}(x   y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad f_{Y X}(y   x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$

1 常见二维随机变量的联合分布
(1) 二维均匀分布: $(x,y) \in U(D), f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(D)}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
(2) 二维正态分布: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$
$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$
$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$
2 随机变量的独立性和相关性 $X$ 和 $Y$ 的相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$ $\Leftrightarrow p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}$ (离散型) $\Leftrightarrow f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ (连续型)
$X$ 和 $Y$ 的相关性: 相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 $X$ 和 $Y$ 不相关, 否则称 $X$ 和 $Y$ 相关
两个及两个以上随机变量的联合分布

考试内容	对应公式、概念、定理
多维随机变量及其分布, 二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布	<p>1 二维随机变量及其联合分布  由两个随机变量构成的随机向量 <math>(X, Y)</math>,  联合分布为 <math>F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)</math></p> <p>2 二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布、条件分布  (1) 联合概率分布律 <math>P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}; i, j = 1, 2, \dots</math></p> <p>(2) 边缘分布律 <math>p_{i \cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots</math>  <math display="block">p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \dots</math></p> <p>(3) 条件分布律  <math display="block">P\{X = x_i   Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}</math></p>

<p><b>机变量简单函数的分布</b></p> <p>(1) 离散型:  <math>P(X = x_i, Y = y_i) = p_{ij}</math>, <math>Z = g(X, Y)</math> 则  <math>P(Z = z_k) = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{g(x_i, y_i) = z_k} P(X = x_i, Y = y_i)</math></p> <p>(2) 连续型:  <math>(X, Y) \sim f(x, y), Z = g(X, Y)</math> 则  <math>F_z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy, \quad f_z(z) = F'_z(z)</math></p> <p><b>2 重要公式与结论</b></p> <p>(1) 边缘密度公式:  <math>f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.</math></p> <p>(2) <math>P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy</math></p> <p>(3) 若 <math>(X, Y)</math> 服从二维正态分布 <math>N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)</math> 则有  ① <math>X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).</math>  ② <math>X</math> 与 <math>Y</math> 相互独立 <math>\Leftrightarrow \rho = 0</math>, 即 <math>X</math> 与 <math>Y</math> 不相关.  ③ <math>C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2 + 2C_1 C_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho).</math>  ④ <math>X</math> 关于 <math>Y=y</math> 的条件分布为:  <math>N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2), \sigma_1^2(1 - \rho^2)).</math>  ⑤ <math>Y</math> 关于 <math>X=x</math> 的条件分布为:  <math>N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1), \sigma_2^2(1 - \rho^2)).</math>  (4) 若 <math>X</math> 与 <math>Y</math> 独立, 且分别服从 <math>N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)</math>,  则 <math>(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0),</math></p>	<p><math>C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2).</math>  (5) 若 <math>X</math> 与 <math>Y</math> 相互独立, <math>f(x)</math> 和 <math>g(x)</math> 为连续函数,  则 <math>f(X)</math> 与 <math>g(Y)</math> 也相互独立.</p> <p style="text-align: center;"><b>(四) 随机变量的数字特征</b></p> <table border="1" data-bbox="1140 414 2086 1414"> <thead> <tr> <th data-bbox="1140 414 1282 457">考试内容</th><th data-bbox="1282 414 2086 457">对应概念、定义、定理、公式</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="1140 457 1282 695"> <b>随机变量的数学期望(均值)、方差和标准差及其性质</b> </td><td data-bbox="1282 457 2086 695"> 1 数学期望  离散型: <math>P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i</math>; 连续型:  <math>X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx</math>  性质:  (1) <math>E(C) = C, E[E(X)] = E(X)</math>  (2) <math>E(C_1 X + C_2 Y) = C_1 E(X) + C_2 E(Y)</math>  (3) 若 <math>X</math> 和 <math>Y</math> 独立, 则 <math>E(XY) = E(X)E(Y)</math>  (4) <math>[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)</math> </td></tr> <tr> <td data-bbox="1140 695 1282 981"></td><td data-bbox="1282 695 2086 981"> 2 方差: <math>D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2</math>  3 标准差: <math>\sqrt{D(X)},</math>  4 离散型: <math>D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i</math>  5 连续型: <math>D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx</math>  性质:  (1) <math>D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0</math>  (2) <math>X</math> 与 <math>Y</math> 相互独立, 则 <math>D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)</math>  (3) <math>D(C_1 X + C_2) = C_1^2 D(X)</math> </td></tr> </tbody> </table>	考试内容	对应概念、定义、定理、公式	<b>随机变量的数学期望(均值)、方差和标准差及其性质</b>	1 数学期望 离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i$ ; 连续型: $X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 性质: (1) $E(C) = C, E[E(X)] = E(X)$ (2) $E(C_1 X + C_2 Y) = C_1 E(X) + C_2 E(Y)$ (3) 若 $X$ 和 $Y$ 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$ (4) $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$		2 方差: $D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ 3 标准差: $\sqrt{D(X)},$ 4 离散型: $D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$ 5 连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$ 性质: (1) $D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0$ (2) $X$ 与 $Y$ 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ (3) $D(C_1 X + C_2) = C_1^2 D(X)$
考试内容	对应概念、定义、定理、公式						
<b>随机变量的数学期望(均值)、方差和标准差及其性质</b>	1 数学期望 离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i$ ; 连续型: $X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 性质: (1) $E(C) = C, E[E(X)] = E(X)$ (2) $E(C_1 X + C_2 Y) = C_1 E(X) + C_2 E(Y)$ (3) 若 $X$ 和 $Y$ 独立, 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$ (4) $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$						
	2 方差: $D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$ 3 标准差: $\sqrt{D(X)},$ 4 离散型: $D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$ 5 连续型: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$ 性质: (1) $D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0$ (2) $X$ 与 $Y$ 相互独立, 则 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ (3) $D(C_1 X + C_2) = C_1^2 D(X)$						

	<p>(4)一般有  <math>D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}</math></p> <p>(5) <math>D(X) &lt; E(X - C)^2, C \neq E(X)</math></p> <p>(6) <math>D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = C\} = 1</math></p>
随机变量 函数的数学期望， 矩、协方差，相关系数的数字特征	<p>1 随机变量函数的数学期望  (1)对于函数 <math>Y = g(x)</math>  <math>X</math> 为离散型：<math>P\{X = x_i\} = p_i, E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i</math>；<math>X</math> 为连续型：  <math>X \sim f(x), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx</math></p> <p>(2) <math>Z = g(X, Y); (X, Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}</math>；  <math>E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p_{ij}</math>  <math>(X, Y) \sim f(x, y); E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy</math></p> <p>2 协方差 <math>\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]</math></p> <p>3 相关系数 <math>\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}, k</math> 阶原点矩 <math>E(X^k)</math>；  <math>k</math> 阶中心矩 <math>E\{[X - E(X)]^k\}</math></p> <p>性质：</p> <p>(1) <math>\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)</math></p> <p>(2) <math>\text{Cov}(aX, bY) = ab\text{Cov}(Y, X)</math></p> <p>(3) <math>\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)</math></p> <p>(4) <math> \rho(X, Y)  \leq 1</math></p> <p>(5) <math>\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1</math>, 其中 <math>a &gt; 0</math></p>

	<p><math>\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1</math>, 其中 <math>a &lt; 0</math></p> <h4>4 重要公式与结论</h4> <p>(1) <math>D(X) = E(X^2) - E^2(X)</math></p> <p>(2) <math>\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)</math></p> <p>(3) <math> \rho(X, Y)  \leq 1</math>, 且</p> <p><math>\rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1</math>, 其中 <math>a &gt; 0</math></p> <p><math>\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1</math>, 其中 <math>a &lt; 0</math></p> <p>4) 下面 5 个条件互为充要条件：  <math>(X, Y) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow E(X, Y) = E(X)E(Y)</math>  <math>\Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)</math>  <math>\Leftrightarrow D(X - Y) = D(X) + D(Y)</math></p> <p>注：X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件，但非必要条件.</p>
--	---

### (五)大数定律和中心极限定理

考试内容	对应概念、定理、重要公式
切比雪夫 (Chebysh ev) 不等 式, 切比雪 夫大数定 律	<p>1 切比雪夫不等式： <math>P\{ X - E(X)  \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}</math> 或  <math>P\{ X - E(X)  &lt; \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}</math></p> <p>2 切比雪夫大数定律：设 <math>X_1, X_2, \dots, X_n, \dots</math> 相互独立，且  <math>E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (i = 1, 2, \dots)</math>, 则对于任意正数 <math>\varepsilon</math>，有</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right  < \varepsilon\right\} = 1$

<b>伯努利大数定律, 辛钦 (Khinchine) 大数定律</b>	<p>1 伯努利大数定律 设 <math>X_1, X_2, \dots, X_n, \dots</math> 相互独立, 同 0-1 分布 <math>B(1, p)</math>, 则对任意正数 <math>\epsilon</math>, 有</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left  \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p \right  < \epsilon \right\} = 1$ <p>2 辛钦大数定律 设 <math>X_1, X_2, \dots, X_n, \dots</math> 相互独立同分布, <math>EX_i = \mu, i = 1, 2, \dots</math>, 则对于任意正数 <math>\epsilon</math>, 有</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left  \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right  < \epsilon \right\} = 1$	<b>均值, 样本方差和样本矩</b> 量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 称为容量为 $n$ 的简单随机样本, 简称样本 统计量: 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ , 是来自总体 $X$ 的一个样本, $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本的连续函数, 且 $g(\cdot)$ 中不含任何未知参数, 则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量 样本均值: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 样本方差: $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 样本矩: 样本 $k$ 阶原点矩: $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots$ 样本 $k$ 阶中心矩: $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, \dots$
<b>隶莫弗—拉普拉斯 (De Moivre-Laplace) 定理, 列维—林德伯格 (Levy-Universality) 定理</b>	<p>1 隶莫弗---拉普拉斯定理 设 <math>\eta_n \sim B(n, p)</math>, (即 <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math>, 相互独立且同服从 0-1 分布 <math>\eta_n = \sum_{i=1}^n X_i</math>) 则有</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ <p>2 列维---林德伯格定理 设 <math>X_1, X_2, \dots, X_n, \dots</math> 相互独立分布,  <math>E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2 (\sigma \neq 0), i = 1, 2, \dots,</math></p> <p>则 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt</math></p>	<p><math>\chi^2</math> 分布: <math>\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)</math>, 其中 <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math>, 相互独立, 且同服从 <math>N(0, 1)</math></p> <p><math>t</math> 分布: <math>T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)</math> 其中 <math>X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)</math>, 且 <math>X, Y</math> 相互独立</p> <p>F 分布: <math>F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)</math>, 其中 <math>X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)</math>, 且 <math>X, Y</math> 相互独立</p> <p>分位数: 若 <math>P(X \leq x_\alpha) = \alpha</math>, 则称 <math>x_\alpha</math> 为 <math>X</math> 的 <math>\alpha</math> 分位数</p>

## (六) 数理统计的基本概念

考试内容	对应公式、概念、定理
<b>总体, 个体, 简单随机样本, 统计量, 样本</b>	总体: 研究对象的全体, 它是一个随机变量, 用 $X$ 表示 个体: 组成总体的每个基本元素 简单随机样本: 来自总体 $X$ 的 $n$ 个相互独立且与总体同分布的随机变

<b>正态总体的常用样本分布</b>	<p>1 设 <math>X_1, X_2, \dots, X_n</math> 为来自正态总体 <math>N(\mu, \sigma^2)</math> 的样本,</p> $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \text{ 则}$ <p>(1) <math>\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})</math> 或 <math>\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)</math></p> <p>(2) <math>\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)</math></p>
--------------------	--

$(3) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$ $(4) \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	<p><b>重要公式与结论</b></p> <p>(1) 对于 <math>\chi^2 \sim \chi^2(n)</math>, 有 <math>E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n</math>;</p> <p>(2) 对于 <math>T \sim t(n)</math>, 有 <math>E(T) = 0, D(T) = \frac{n}{n-2}</math> (<math>n &gt; 2</math>);</p> <p>(3) 对于 <math>F \sim F(m, n)</math>, 有  <math display="block">\frac{1}{F} \sim F(n, m), F_{\alpha/2}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n, m)};</math></p> <p>(4) 对于任意总体 <math>X</math>, 有  <math display="block">E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X), D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}</math></p>
---	--

## (七) 参数估计

考试内容	对应公式、概念、定理
<b>点估计的概念,</b> <b>估计量与估计值, 矩估计法, 最大似然估计法</b>	<p>1 <math>\hat{\theta}</math> 为 <math>\theta</math> 的矩估计, <math>g(x)</math> 为连续函数, 则 <math>g(\hat{\theta})</math> 为 <math>g(\theta)</math> 的矩估计.</p> <p>2 <math>\hat{\theta}</math> 为 <math>\theta</math> 的极大似然估计, <math>g(x)</math> 为单调函数, 则 <math>g(\hat{\theta})</math> 为 <math>g(\theta)</math> 的极大似然估计</p> <p>3 <math>E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X)</math>, 即 <math>\bar{X}, S^2</math> 分别为总体 <math>E(X), D(X)</math> 的无偏估计量.</p> <p>4 由大数定律易知 <math>\bar{X}, S^2</math> 也分别是 <math>E(X), D(X)</math> 的一致估计量.</p> <p>5 若 <math>E(\hat{\theta}) = \theta, D(\hat{\theta}) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)</math> 则 <math>\hat{\theta}</math> 为 <math>\theta</math> 的一致估计.</p>

<b>估计量的评选标准</b> <b>区间估计的概念</b>	<p>1 估计量的选取标准: 无偏性、有效性、相合性</p> <p>2 <math>(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)</math> 为 <math>\theta</math> 的置信度是 <math>1-\alpha</math> 的置信区间, <math>g(x)</math> 为单调增加 (或单调减少) 函数, 则 <math>(g(\hat{\theta}_1), g(\hat{\theta}_2))</math> 或 <math>(g(\hat{\theta}_2), g(\hat{\theta}_1))</math> 为 <math>g(\theta)</math> 的置信度是 <math>1-\alpha</math> 的置信区间</p>									
	<p><b>正态总体均值与方差的置信区间</b></p> <table border="1" data-bbox="1230 420 2093 728"> <thead> <tr> <th data-bbox="1230 420 1388 728">待估参数</th><th data-bbox="1388 420 1747 728">抽样分布</th><th data-bbox="1747 420 2093 728">双侧置信区间</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="1230 728 1388 728"><math>\mu</math></td><td data-bbox="1388 728 1747 728"> <math>\sigma^2</math> 已知  <math display="block">U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)</math> </td><td data-bbox="1747 728 2093 728"> <math>(\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}})</math>  <math>P\{ \mu  \geq \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha</math> </td></tr> <tr> <td data-bbox="1230 728 1388 822"><math>\mu</math></td><td data-bbox="1388 728 1747 822"> <math>\sigma^2</math> 未知  <math display="block">T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)</math> </td><td data-bbox="1747 728 2093 822"> <math>(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})</math>  <math>P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha</math> </td></tr> </tbody> </table>	待估参数	抽样分布	双侧置信区间	$\mu$	$\sigma^2$ 已知 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$	$(\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}})$ $P\{ \mu  \geq \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$	$\mu$	$\sigma^2$ 未知 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$
待估参数	抽样分布	双侧置信区间								
$\mu$	$\sigma^2$ 已知 $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$	$(\bar{X} - \mu_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \mu_{\frac{\alpha}{2}})$ $P\{ \mu  \geq \mu_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$								
$\mu$	$\sigma^2$ 未知 $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$								
	<table border="1" data-bbox="1230 822 2093 1130"> <thead> <tr> <th data-bbox="1230 822 1388 1130"><math>\mu</math></th><th data-bbox="1388 822 1747 1130"> <math>\sigma^2</math> 已知  <math display="block">W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)</math> </th><th data-bbox="1747 822 2093 1130"> <math>(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})</math>  <math>P\{W' \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} =</math>  <math>P\{W' \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} = \frac{\alpha}{2}</math> </th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td data-bbox="1230 1130 1388 1130"><math>\mu</math></td><td data-bbox="1388 1130 1747 1130"></td><td data-bbox="1747 1130 2093 1130"></td></tr> </tbody> </table>	$\mu$	$\sigma^2$ 已知 $W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$ $P\{W' \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} =$ $P\{W' \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} = \frac{\alpha}{2}$	$\mu$					
$\mu$	$\sigma^2$ 已知 $W' = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$ $P\{W' \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} =$ $P\{W' \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)\} = \frac{\alpha}{2}$								
$\mu$										
	<table border="1" data-bbox="1230 1130 2093 1279"> <thead> <tr> <th data-bbox="1230 1130 1388 1279"><math>\mu</math></th><th data-bbox="1388 1130 1747 1279"> <math>\sigma^2</math> 未知  <math display="block">W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)</math> </th><th data-bbox="1747 1130 2093 1279"> <math>\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)</math> </th></tr> </thead> </table>	$\mu$	$\sigma^2$ 未知 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)$						
$\mu$	$\sigma^2$ 未知 $W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)$								

	$\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知	$U = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ $N(0, 1)$	$\begin{aligned} & \left( (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \mu, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \right. \\ & \left. (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \mu, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right) \\ P\{ U  \geq \mu\} &= \alpha \end{aligned}$
$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 但 $\sigma^2$ 未知	$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\begin{aligned} & \left( (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \right. \\ & \left. (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right) \\ P\{ T  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}\} &= \alpha \end{aligned}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_2^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \cdot F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \cdot S_1^2, \right. \\ & \left. F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) \cdot S_2^2 \right) \\ P\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1)\} &= \frac{\alpha}{2} \\ P\{\frac{1}{F} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1)\} &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$

## (八)假设检验

考试内容	对应公式、概念、定理
显著性检验, 假设检验的两类错误	1 假设检验的一般步骤 (1)确定所要检验的基本假设 $H_0$ ; (2)选择检验的统计量, 并要求知道其在一定条件下的分布; (3)对确定的显著性水平 $\alpha$ , 查相应的概率分布, 得临界值, 从而确定否定域; (4)由样本计算统计量, 并判断其是否落入否定域, 从而对假设 $H_0$ 作出拒绝还是接受的判断

	2 假设检验的两类错误 统计推断是由样本推断总体, 所作的结论不能保证绝对不犯错误, 而只能以较大概率来保证其可靠性. 第一类错误是否定了真实的假设, 即假设本来成立, 但被错误地否认了, 成为“弃真”, 检验水平 $\alpha$ 就是犯第一类错误的概率的最大允许值. 第二类错误是把本来不成立的假设错误地接受了, 称为“存伪”. 犯这类错误的大小一般用 $\beta$ 表示, 它的大小要视具体情况而定.		
单个及两个正态总体的均值和方差的假设检验	原假设 $H_0$	$H_0$ 下的检验统计量及分布	$H_0$ 的拒绝域
	$\mu = \mu_0$ ( $\sigma^2$ 已知)	$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$ u  = \left  \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right  \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu = \mu_0$ ( $\sigma^2$ 未知)	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$ t  = \left  \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \right  \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ ( $\mu$ 已知)	$W = \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \sim \chi^2(n)$	$w = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $w \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ ( $\mu$ 未知)	$W = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$w = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $w \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$
	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ ( $\sigma_1^2, \sigma_2^2$ 已知)	$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$ u  = \left  \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right  \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$

态 总 体	$\mu_1 - \mu_2 = \delta$ $(\sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{未知})$ $\text{但 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$ t  = \left  \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right $ $\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2)$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $(\mu_1, \mu_2 \text{未知})$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ $\sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{ 或}$ $f \leq F_{\frac{\alpha}{2}}^{-1}(n_2 - 1, n_1 - 1)$

## 经常用到的初等数学公式

### 初等代数

#### 1. 乘法公式与因式分解

$$(1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(2) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(3) a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(4) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(5) a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(6) a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

#### 2. 比例 $(\frac{a}{b} = \frac{c}{d})$

$$(1) \text{合比定理 } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

- (2) 分比定理  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
- (3) 合分比定理  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
- (4) 若  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , 则令  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = t$ . 于是  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$
- (5) 若  $y$  与  $x$  成正比, 则  $y = kx$  ( $k$  为比例系数)
- (6) 若  $y$  与  $x$  成反比, 则  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为比例系数)

### 3. 不等式

$$(1) \text{ 设 } a > b > 0, n > 0, \text{ 则 } a^n > b^n$$

$$(2) \text{ 设 } a > b > 0, n \text{ 为正整数, 则 } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$$

$$(3) \text{ 设 } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ 则 } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

(4) 非负数的算术平均值不小于其几何平均值, 即

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

#### (5) 绝对值不等式

$$1) |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$2) |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$3) |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$4) -|a| \leq a \leq |a|$$

### 4. 二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$

$$(1) \text{ 根: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(2) \text{韦达定理: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(3) \text{判别式} \Delta = b^2 - 4ac \begin{cases} > 0, \text{方程有两不等实根} \\ = 0, \text{方程有两相等实根} \\ < 0, \text{方程有两共轭虚根} \end{cases}$$

### 5. 一元三次方程的韦达定理:

若  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$  的三个根分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 则

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = q$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -r$$

### 6. 指数

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^n = a^n b^n$$

$$(5) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(6) a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

### 7. 对数 $\log_a N, (a > 0, a \neq 1, N > 0)$

$$(1) \text{对数恒等式} N = a^{\log_a N}, \text{更常用} N = e^{\ln N}$$

$$(2) \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(3) \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(4) \log_a(M^n) = n \log_a M$$

$$(5) \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

$$(6) \text{换底公式} \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$(7) \log_a 1 = 0$$

$$(8) \log_a a = 1$$

### 8. 数列

#### (1) 等差数列

设  $a_1$  ---- 首项,  $a_n$  ---- 通项

$d$  ---- 公差,  $S_n$  ---- 前  $n$  项和

$$1) a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$2) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d$$

$$3) \text{设} a, b, c \text{成等差数列, 则等差中项} b = \frac{1}{2}(a+c)$$

#### (2) 等比数列

设  $a_1$  ---- 首项,  $q$  ---- 公比,  $a_n$  ---- 通项, 则

$$1) \text{通项} a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$2) \text{前} n \text{ 项和} S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

#### (3) 常用的几种数列的和

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$2) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$3) l^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2$$

$$4) l \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$4) l \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

## 9. 排列、组合与二项式定理

### (1) 排列

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots[n-(m-1)]$$

### (2) 全排列

$$P_n^n = n(n-1)\cdots3 \times 2 \times 1 = n!$$

### (3) 组合

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合的性质:

$$1) C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$2) C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

### (4) 二项式定理

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$$

平面几何

## 1、图形面积

### (1) 任意三角形

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab\sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ 其中 } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

平行四边形

微信公众号: 考研斯基

$$S = bh = ab\sin\varphi$$

### (2) 梯形 $S = \frac{1}{2}(a+b)h$

$$(3) 扇形  $S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\theta$$$

## 2、旋转体

### (1) 圆柱

设  $R$ ---底圆半径,  $H$ ---柱高, 则

$$1) \text{侧面积 } S_{\text{侧}} = 2\pi RH,$$

$$2) \text{全面积 } S_{\text{全}} = 2\pi R(H+R)$$

$$3) \text{体积 } V = \pi R^2 H$$

### (2) 圆锥 ( $l = \sqrt{R^2 + H^2}$ 母线)

$$1) \text{侧面积 } S_{\text{侧}} = \pi Rl$$

$$2) \text{全面积 } S_{\text{全}} = \pi R(l+R)$$

$$3) \text{体积 } V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

### (3) 球

设  $R$ ---半径,  $d$ ---直径, 则

$$1) \text{全面积 } S_{\text{全}} = 4\pi R^2$$

$$2) \text{体积 } V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

### (4) 球缺 (球被一个平面所截而得到的部分)

$$1) \text{面积 } S = 2\pi Rh(\text{不包括底面})$$

$$2) \text{体积 } V = \pi h^2(R - \frac{h}{3})$$

## 3. 棱柱及棱锥

设  $S$ ---底面积,  $H$ ---高:

$$(1) \text{棱柱体积 } V = SH$$

$$(2) \text{棱锥体积 } V = \frac{1}{3}SH$$

$$(3) \text{正棱锥侧面积 } A = \frac{1}{2} \times \text{母线} \times \text{底周长}$$

### 三、平面三角

#### 1. 三角函数间的关系

(1)  $\sin \alpha \csc \alpha = 1$

(3)  $\tan \alpha \cot \alpha = 1$

(5)  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

(7)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

#### 2 倍角三角函数

(1)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(2)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

(3)  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

(5)  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

#### 3. 三角函数的和差化积与积化和差公式

(1)  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

(2)  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

(3)  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

(4)  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

(5)  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

(6)  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

(7)  $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

(8)  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

#### 4. 边角关系

##### (1) 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, R \text{ 为外接圆半径}$$

##### (2) 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

#### 5. 反三角函数

##### 恒等式

(1)  $\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1-x^2})$

(2)  $\arccos x \pm \arccos y = \arccos(xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$

(3)  $\arctan x \pm \arctan y = \arctan\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right)$

(4)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

(5)  $\arctan x + \operatorname{arc cot} x = \frac{\pi}{2}$

