

УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Инженерно-физический факультет высоких технологий  
Кафедра физического материаловедения

## ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

по наноэлектронике

*Соловьев А. А., к.ф.-м.н., доцент кафедры физического  
материаловедения УлГУ*

*Рыбин В.В., к.ф.-м.н., доцент кафедры физического  
материаловедения УлГУ*

*Махмуд-Ахунов М.Ю., к.ф.-м.н., доцент кафедры  
физического материаловедения УлГУ*

УЛЬЯНОВСК 2019 г.

Соловьев А.А., Рыбин В.В., Махмуд-Ахунов М.Ю.  
Лабораторные работы по нанoeлектронике Учебное пособие – Ульяновск: УлГУ.  
2019. 97 с.

Методическое пособие предназначено для студентов инженерно-физического факультета высоких технологий Ульяновского государственного университета, обучающихся по направлению подготовки:

28.03.02 Нанoeинженерия

*Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11 от 18 июня 2019 г.).*

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
1. Основные навыки работы с пакетом MatLab .....	7
2. Арифметические операторы, используемые при написании выражений.....	10
3. Основные функции MatLab.....	11
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 .....</b>	<b>11</b>
<b>Вопросы к лабораторной работе № 1 и контроль сформированных практических навыков .....</b>	<b>13</b>
4. Работа с массивами в среде MatLab .....	13
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 .....</b>	<b>14</b>
<b>Вопросы к лабораторной работе № 2 и контроль сформированных практических навыков .....</b>	<b>16</b>
5. Работа с графиками в MatLab .....	16
6. Оформление графиков и расширенные возможности оператора plot() .....	18
7. Основы программирования в среде MatLab. Условные операторы и циклы в MatLab .....	23
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 .....</b>	<b>26</b>
<b>Вопросы к лабораторной работе № 3 и контроль сформированных практических навыков .....</b>	<b>27</b>
8. Описание нанотранзистора .....	28
9. Причина возникновения электрического тока в нанотранзисторе .....	29
10. Описание распределения электронной плотности в нанотранзисторе .....	30
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 .....</b>	<b>32</b>
<b>Контрольные вопросы к лабораторной работе № 4.....</b>	<b>46</b>
11. Расчет характеристик нанотранзистора .....	46
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 .....</b>	<b>49</b>
<b>Контрольные вопросы к лабораторной работе № 5.....</b>	<b>56</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6</b> <b>ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В</b> <b>ПОЛУПРОВОДНИКАХ .....</b>	<b>59</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7</b> <b>КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ .....</b>	<b>76</b>
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8</b> <b>ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОНТАКТЕ ДВУХ</b> <b>ПОЛУПРОВОДНИКОВ .....</b>	<b>89</b>
<b>Библиографический список.....</b>	<b>97</b>

## Введение

Нанoeлектроника представляет собой совокупность знаний и технологических подходов при изготовлении изделий электроники, базирующихся на принципах морфологического многообразия веществ в природе, самоорганизации и сборки структурированных объектов в окружающей нас среде и принципах междисциплинарности при описании свойств и характеристик наноразмерных материалов и объектов.

Изучение основ нанoeлектроники часто сопровождается введением и использованием различных моделей, например, модели самосогласованного поля (МСП) для описания электрических свойств нанотранзисторов, требующих большого объема вычислительных операций, которые удобно осуществлять с использованием специализированных программных продуктов, таких как, например, MatLab.

Программа MatLab представляет собой высокоуровневый технический вычислительный язык и интерактивную среду для разработки алгоритмов, визуализации и анализа данных числовых расчетов. При помощи MatLab возможно решать широкий круг математических задач. При изучении дисциплины «Нанoeлектроника» мы будем использовать данный программный продукт для автоматизации математических расчетов, построения графиков функций, решения специализированных уравнений и составления программ для расчетов итерационных процедур. При подготовке отчетов к лабораторному практикуму будут использоваться возможности MatLab для объединения математических вычислений с текстом и графикой с целью создания завершенных интерактивных документов, представляющих собой законченное исследование наноразмерного схемотехнического элемента.

Программа MatLab является в высшей степени полезным и универсальным инструментом для расчетов в области математики, векторной алгебры и матричных вычислений. В своей специальной части программа предоставляет сотни команд и операторов, специализированных для расчетов в области высшей математики, подробно с которыми можно ознакомиться на следующем электронном ресурсе: (<http://digest.ws/matlab.html>).

Также полезными могут оказаться электронные версии лекций профессора С. Датта (Supriyo Datta), посвященные описанию электропроводности наноструктур (**Nanoelectronics and the Meaning of Resistance**) - <http://nanohub.org/resources/5279> и статьи, опубликованные на портале Нанотехнологического общества России (НОР) - <http://ntsr.info/>.

Представленный лабораторный практикум опирается на учебно-методические издания:

**Нанoeлектроника: лабораторный практикум**/Д.В. Ситанов, С.А. Пивоваренок. Иван. гос. хим.–технол. ун-т. Иваново, 2015. 60 с.

***Компьютерное моделирование физических процессов в микро- и наноэлектронике.*** Лабораторный практикум. Д. А. Евсевичев, М. К. Самохвалов. УлГТУ, Ульяновск. 2017. 64 с.

## **Цели и принципы построения лабораторного практикума**

Лабораторный практикум предназначен для студентов, обучающихся на кафедре физического материаловедения по направлению 28.03.02 “Наноинженерия” при изучении дисциплины «Наноэлектроника».

Практикум содержит описание программного пакета MatLab, необходимое для моделирования работы нанотранзистора в предположении модели самосогласованного поля, а также описание 5 лабораторных работ, последовательное выполнение которых позволит сформировать должный уровень компетенций у обучающихся в сфере работы и моделирования наносхемотехнических устройств.

Каждой лабораторной задаче предшествует краткое теоретическое введение, отражающее суть изучаемого явления, а также основы метода моделирования. Описание работы включает в себя рекомендации по методикам расчетов и обработки полученных результатов.

Одной из важных задач лабораторного практикума является приобретение студентами навыков экспериментальной работы, грамотного представления результатов, обработки и анализа полученных данных. В связи с этим в практикуме даны рекомендации по построению графиков и правила обработки результатов расчетов.

## **Порядок прохождения практикума**

Лабораторный практикум выполняется в соответствии с графиком и календарным планом, которые составляются на каждый учебный год. С содержанием и планом прохождения практикума, требованиями к выполнению работ и оформлению отчетов студенты знакомятся на первом вводном занятии. На этом же занятии проводится инструктаж по технике безопасности при работе в дисплейном классе, и выдаются задания на выполнение первой лабораторной работы.

Лабораторные работы выполняются индивидуально.

В конце занятия студент должен получить индивидуальное задание для подготовки к очередной лабораторной работе.

Подготовка к выполнению лабораторной работы включает в себя:

- изучение теоретического материала по краткому теоретическому введению, конспектам лекций и учебной литературе, указанной в конце

практикума;

- определение всех расчетных величин и процедур, необходимых для дальнейших расчетов с целью достижения конечной цели работы.

Перед каждой работой студент проходит краткое собеседование с преподавателем для выяснения уровня готовности к выполнению задачи.

Результаты собеседования учитываются при выставлении оценки за выполнение работы.

### **Общие требования к оформлению отчетов по лабораторным работам**

1. Отчет оформляется на отдельных чистых листах бумаги, скрепленных между собой.
2. Отчет должен содержать титульный лист с указанием даты выполнения лабораторной работы, темы лабораторной работы, основного исполнителя и преподавателя, выдавшего задание, а также даты сдачи лабораторной работы в соответствие с графиком выполнения лабораторных работ.
3. Основная часть отчета должна содержать:
  - задачи и цели лабораторного исследования объекта, в данном случае с использованием средств программирования и компьютерного моделирования в среде MatLab;
  - небольшое теоретическое введение, самостоятельно сформулированное и оформленное обучающимся, отражающее суть и цели лабораторной работы (копирование текста не допускается);
  - отлаженные в среде MatLab тесты программ, таблицы с результатами расчетов и промежуточными данными, графики, отражающие результаты расчетов, а также анализ полученных результатов с привлечением приведенного в отчете исходного материала;
  - выводы по лабораторной работе;
  - расчет времени на выполнение лабораторной работы, обработку экспериментальных результатов и сдачи лабораторного исследования преподавателю.

## 1. Основные навыки работы с пакетом MatLab

После запуска программы открывается основное рабочее окно пакета MatLab, показанное на рис. 1.

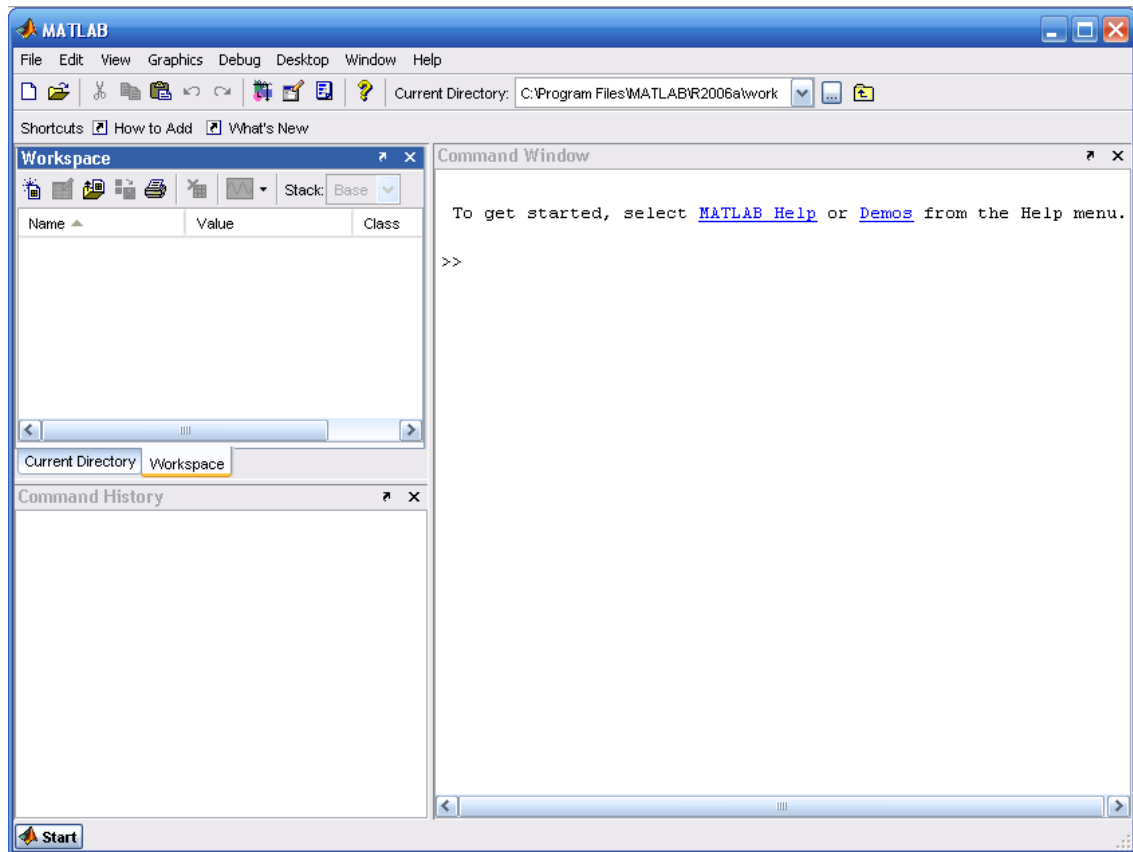


Рис. 1. Основное рабочее окно программы MatLab

Интерфейс системы MatLab содержит следующие основные инструментальные окна:

- **Command Window** (Командное Окно) – выполняет все функции и команды системы MATLAB.
- **Command History** (История Команд) – просмотр функций, введенных ранее в **Command Window**, их копирование и выполнение.
- **Current Directory Browser** (Окно Просмотра Текущего Каталога) – просмотр файлов MATLAB, сопутствующих файлов, а также выполнение таких операций над файлами, как поиск и открытие файлов.
- **Workspace Browser** (Окно Просмотра Рабочего Пространства) – просмотр и изменение содержания рабочего пространства (workspace) системы MatLab.

При появлении приглашения **>>** в **Command Window** вы можете ввести переменную или выполнить команду. Система MatLab чувствительна к выбору регистра, т.е. MatLab различает переменные «a» и «A». Порядок работы с

программой может осуществляться в двух режимах – пошаговом и программном.

В первом случае каждой переменной последовательно присваивается некоторое значение при нажатии клавиши **Enter**. Для задания переменным определенных значений используется *оператор присваивания*, вводимый знаком равенства «=», например:

**Имя \_ переменной = Значение или Выражение.**

Пример работы с константами и переменными в среде MatLab показан на рис. 2. Сначала программа присвоила переменной *a* значение **2**, затем переменной *b* значение **0.5** (заметим, что при вводе десятичных дробей используется точка), затем переменной *c* было присвоено значение, которое соответствует отношению переменной *a* к *b*. Разница между константами и переменными в среде MatLab достаточно прозрачна. Считается, что если в процессе расчетов значение какой-либо величины не меняется, например, заряд электрона или постоянная Планка, то эту величину следует интерпретировать как константу, в противном случае мы будем иметь дело с переменными. Константы и переменные имеют свой тип в зависимости от класса точности (Class), по умолчанию они имеют класс – двойной точности (double).

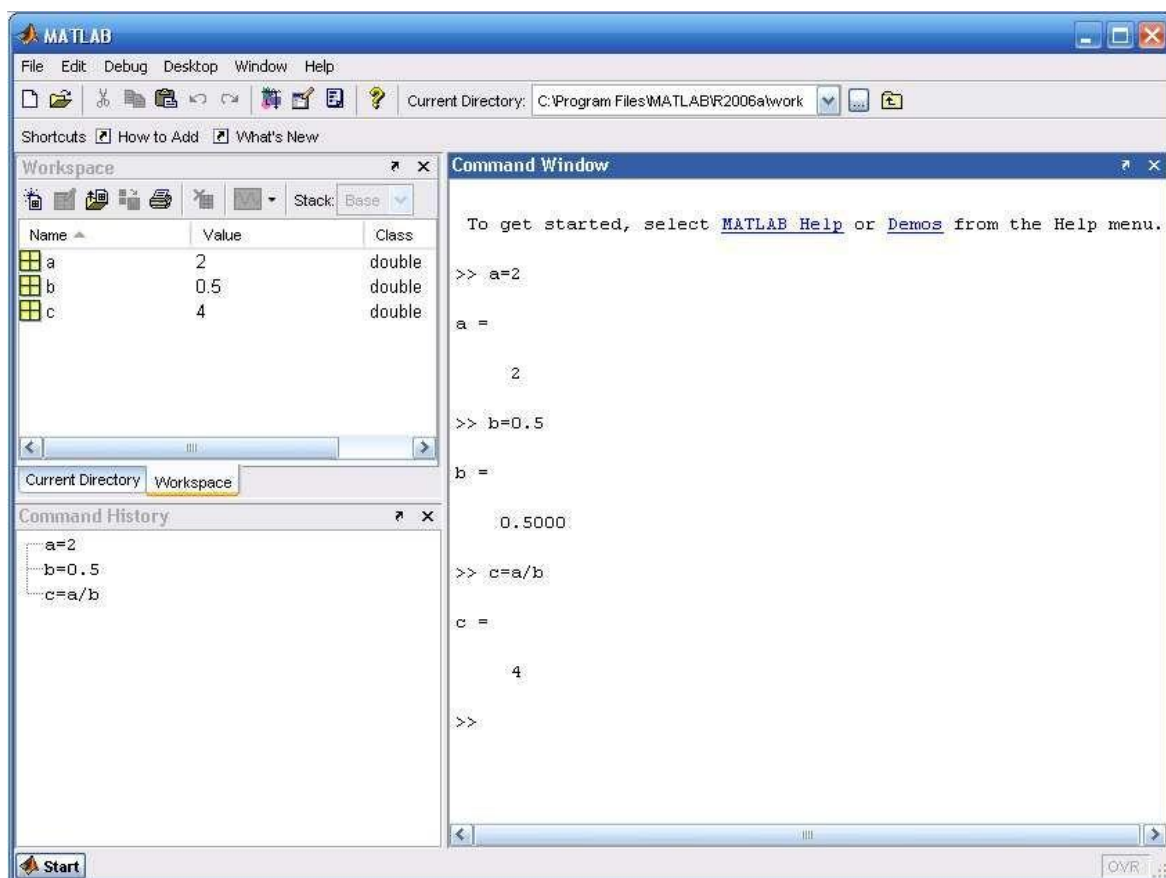


Рис. 2. Пример работы в среде MatLab в пошаговом режиме



Во втором случае (программный режим) в командном окне набирается программный код (последовательность операторов), и лишь потом программа приступает к вычислениям. Для ввода нескольких операторов (функций) без немедленного выполнения их нужно разделить точкой с запятой ( ; ). Если математическое выражение выходит за размер экрана монитора, то целесообразно перенести его часть на следующую строку. Для этого используется символ многоточие (...) – три и более точки. На рис. 3 показан второй вариант расчета переменной «с» с использованием операторов присваивания, объединенных в простейший программный код.

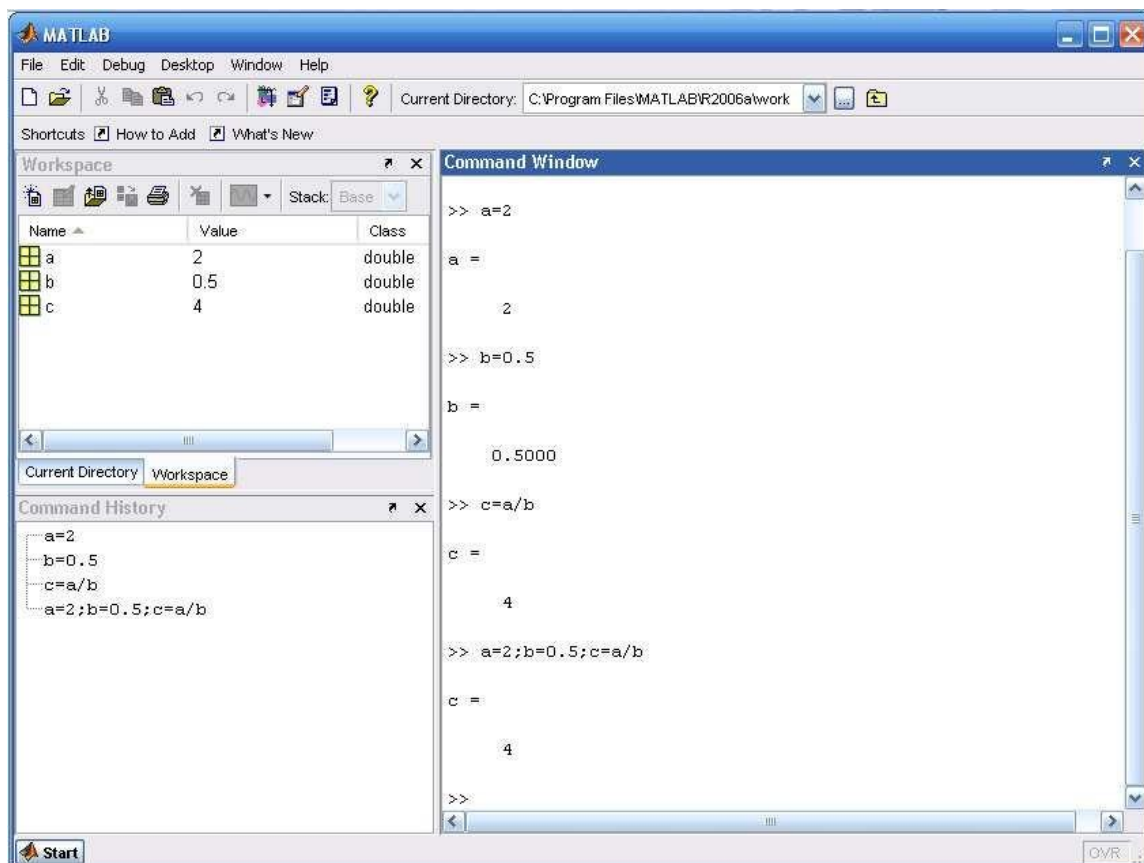


Рис. 3. Пример расчета переменной «с» с использованием сначала пошагового, а затем программного режимов

### Полезные замечания

1. Если результат от использования операторов явно не присваивается какой-либо переменной, то он будет присвоен служебной (зарезервированной) переменной с именем «**ans**».
2. Чтобы стереть все переменные, используйте – **clear all**.
3. Для проверки значений оставшихся переменных используйте – **who**.
4. Для просмотра значения переменной наберите ее имя.
5. **Inf** – символизирует бесконечность (при попытке деления на ноль).
6. Стереть видимое содержимое командного окна можно при помощи – **clc**.

## 2. Арифметические операторы, используемые при написании выражений

Операторы – это неотъемлемая часть любых математических выражений. В MatLab используются арифметические операторы двух типов:

- операторы, которые позволяют выполнять действия, соответствующие правилам матричного исчисления в математике (см. табл. 1);
- операторы, служащие для выполнения поэлементных операций над массивами, которые предваряются точкой (см. табл. 2).

Каждый оператор имеет свой приоритет на выполнение: наибольший приоритет имеет оператор возведения в степень, наименьший – операторы сложения и вычитания. Приоритет можно изменить, используя скобки в выражении.

Таблица 1

Арифметические операторы матричного исчисления

Оператор	Описание
+	Сложение
-	Вычитание
*	Умножение
/	Деление
^	Возведение в степень

Таблица 2

Арифметические операторы поэлементных операций над массивами

Оператор	Описание
+	Унарный плюс
-	Унарный минус
.*	Поэлементное умножение массивов
./ или .\	Поэлементное деление массивов
.^	Поэлементное возведение массива в степень

### Примечание к табл. 2:

- над массивами одинаковых размеров допускаются операции « + » и « - » (унарное сложение и вычитание происходит поэлементно – первый с первым, второй со вторым и так далее, в результате получают массив той же размерности);
  - если используется « + » или « - » для массива и скаляра, то в результате получают массив поэлементно сложенный или за вычетом скалярной величины;
  - для поэлементного перемножения массивов одинаковой размерности используется оператор « .\* »;
  - для поэлементного деления массивов одинаковой размерности используется:
    - а) правое поэлементное деление « ./ »;
    - б) левое поэлементное деление « .\ ».
- Отличия состоят в том, что  $(a ./ B) \rightarrow (a / B)$ ;  $(a .\ B) \rightarrow (B/a)$ .

Классические операторы « \* » и « / » в MatLab используются для решения задач линейной алгебры;

- возможно поэлементное возведение массива в степень «.^», например, «mas.^2».

### 3. Основные функции MatLab

Аргументами функций могут быть действительные или комплексные числа, а также массивы. Если в качестве аргумента функции задан массив, то в результате получится массив того же размера и типа, элементы которого будут равны функциям от соответствующих элементов исходного массива. В табл. 3 приведены наиболее часто используемые функции в программе MatLab.

Таблица 3

Основные математические функции системы MatLab

Функция	Описание
sin(x)	Синус (угол задан в радианах)
cos(x)	Косинус (угол задан в радианах)
tan(x)	Тангенс (угол задан в радианах)
cot(x)	Котангенс (угол задан в радианах)
exp(x)	Экспонента числа x
log(x)	Натуральный логарифм
log10(x)	Десятичный логарифм
abs(x)	Модуль числа x
sqrt(x)	Вычисление квадратного корня
sum(x)	Вычисление суммы
Pi	Число пи

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

**Тема.** Использование операторов матричного исчисления в среде MatLab.

### Цель работы

1. Изучить интерфейс и основные возможности программного пакета MatLab.
2. Используя возможности матричного исчисления программы MatLab, выполнить расчет переменной в соответствии с выданным вариантом задания.

### Задание и ход выполнения работы

1. Задайте значения переменным, необходимые для расчета «у».

2. Рассчитайте значение переменной «у» в соответствии со своим вариантом задания (см. табл. 4).
3. В отчете по работе приведите текст программы, вычисляющей переменную «у», абсолютное значение переменной «у» и все операторы и функции, использованные для расчета.

Таблица 4

Варианты заданий к лабораторной работе № 1

Номер варианта	Параметры переменных	Вычислить в среде MatLab
1	a=2,5; b=1,3; c=3	$y = \sqrt{\frac{a + b^3}{c}}$
2	a=1,75; b=3,8	$y = \frac{ a^3 + b^4 }{\operatorname{tg}(a - b)}$
3	a=1,1; b=3,6; c=2,4	$y = \frac{ab^2 + c}{a^2 - 4ac + c^3}$
4	a=2,8; b=5,9; c=0,5	$y = \frac{\sqrt[3]{\ln a + ab^4}}{3c^2}$
5	a=3,2; b=1,2; c=1	$y = \frac{\sqrt{5}(a^3 + e^{3b})}{\sin c}$
6	a=4,5; b=0,3 c=2,4	$y = \frac{\operatorname{ctg}(a^2 - \sqrt{a + b})}{\sqrt{c - b}}$
7	a=7,3;b=2,4;c=4,1	$y = \frac{(a^3 - b)(a^2 - c)}{\log(a - c)}$
8	a=3,1; b=1,8; c=2,2	$y = \frac{(abc)^2 - \cos 2\pi}{3 - 2ab}$
9	a=8,1; b=5,5; c= -1,4	$y = \frac{\sin \frac{\pi}{2} + 2a}{ \sqrt{b} + bc }$
10	a=9; b= -2,1; c=3	$y = \frac{ b  + \cos \pi}{a^2 + c}$

11	$a=3,7; b=-2,3; c=1,2$	$y = \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{ b^3 + \sqrt{a-c} }$
12	$a=1,5; b=5,4; c=8$	$y = \frac{e^\pi + 3ab}{(a+c)^2 \sqrt{c}}$
13	$a=1,2; b=4; c=7,3$	$y = \frac{\sqrt[4]{ \operatorname{ctg} 3a - 4ac }}{b^3 + c}$
14	$a=4,2; b=1,2; c=3,2$	$y = \frac{\log 2a + \sqrt{(a-b)}}{3c + a}$
15	$a=3,5; b=5,9; c=2,4$	$y = \frac{\sqrt{3b} + (a^2 + b)}{\ln(4a + c)}$

### Вопросы к лабораторной работе № 1 и контроль сформированных практических навыков

1. Студент должен уметь запускать программный пакет MatLab и настраивать операционную среду работы с ним, демонстрируя сформированные компетенции преподавателю.
2. Студент должен знать интерфейсные возможности MatLab и должен уметь демонстрировать преподавателю умение работать с различными программными окнами MatLab.
3. Студент должен знать основные операторы, функции и управляющие конструкции MATLAB и уметь демонстрировать на практике их работу.

#### 4. Работа с массивами в среде MatLab

Массив – это упорядоченная последовательность элементов, ссылочным элементом которого является имя массива. Выбрать конкретные элементы массива можно при помощи индексов массива. Например, массив **mas1**, содержащий элементы (1; 2; 3; 4; 5; 6) следует рассматривать как одномерный и содержащий шесть элементов. Конструкция **mas1(2)** в командном окне MatLab приведет к **ans = 2**. В данном случае массив **mas1** следует рассматривать как равномерный на том лишь основании, что его элементы равномерно отстоят друг от друга. Массивы не обязательно должны быть равномерными, например, массив **mas2**, содержащий элементы (12,6; 15,8; 19,4; 102,9; 2,1; 17,0), также содержит шесть элементов, является одномерным, но не является равномерным. Пакет MatLab поддерживает и многомерные массивы. Каждый элемент многомерного массива, так же как и у одномерного, является числом.

Отличие заключается в том, что индексация элементов массива происходит с использованием нескольких индексов, например, **mas3(1,6)** – это ссылка на элемент двумерного массива с индексами один и шесть. Таким образом, двумерный массив можно рассматривать как равномерную двумерную матрицу, причем совсем не обязательно, чтобы все элементы такой матрицы были заполнены значениями (по умолчанию незаполненные элементы массива оказываются равными нулю).

Рассмотрим способы заполнения элементов массива значениями с одновременным их созданием на примере одномерного массива.

Массив можно создать при помощи операции «конкатенации», используя следующий формат оператора: **a1 = [1, 2, 3, 10, 3.6]**.

Равномерно распределенный массив, состоящий из определенного числа значений, например, от –5 до 5 в 100 элементов можно задать так: **a2 = linspace(-5;5;100)**.

Массив с определенным шагом значений, например, от начального элемента, равного нулю, до последнего, равного «Пи», можно получить в случае шага, например, равного 0,01 при помощи следующего оператора: **a3 = 0: 0.01:pi**.

#### **Примечание:**

- количество элементов в массиве можно узнать так: **length (a1)**. Результат будет выглядеть: **ans = 5**;
- обращение к 4 элементу массива: **a1(4)**, результат будет: **ans = 10**.

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2**

**Тема.** Использование операторов для работы с массивами в среде MatLab.

### **Цель работы**

1. Изучить основные возможности программного пакета MatLab при работе с массивами, включая различные способы объявления и заполнения массивов.
2. Используя возможности программы MatLab, выполнить расчет массива «с» в соответствии с выданным вариантом задания.

### **Задание и ход выполнения работы**

1. Сформировать практические навыки работы с массивами в программе MatLab.
2. Объявить и заполнить три произвольных различных массива методом конкатенации, методом с заданным шагом и методом с определенным количеством элементов.

3. Используя возможности программного пакета MatLab, задайте значения переменным в соответствии с выданным вариантом задания (см. табл. 5) и рассчитайте значение массива «с».
4. В отчете по работе опишите способы задания и заполнения массивов в среде MatLab, форматы операторов работы с массивами, а также содержание массива «с», рассчитанного в соответствии с выданным вариантом задания.

Таблица 5

## Варианты заданий к лабораторной работе № 2

Номер варианта	Параметры	Найти
1	a=[1,1;3,4;2,5] b=[6,3;1,5;2,7]	$c = \frac{a}{b} + a$
2	a=[2,3;7,1;4,5] b=[3,1;0,8;1,2]	$c = a * b - b$
3	a=[8,4;-1,2;5,1] b=[2,9;4,4;0,3]	$c = \frac{a - b}{a}$
4	a=[3,1;8,2;1,6] b=[8,8;2,2;6,2]	$c = a + \frac{b}{a}$
5	a=[5,3;2,7;7,1] b=[-1,2;3,8;4,3]	$c = a^3 - b$
6	a=[6,8;1,9;3,5] b=[7,2;5,4;2,2]	$c = \frac{a + b}{b^2}$
7	a=[-1,8;7,9;-1,4] b=[2,6;-3,7;0,1]	$c = \frac{a}{2} - 3b$
8	a=[-3,1;5,2;4,9] b=[6,5;2,4;2,9]	$c = \frac{a}{b - a}$
9	a=[1,7;4,3;6,1] b=[2,3;7,3;4,5]	$c = a^2 + \frac{b}{a}$
10	a=[2,5;3,9;0,5] b=[4,6;1,9;0,7]	$c = a * b - \frac{a}{b}$
11	a=[1,2;8,2;3,3] b=[5,9;6,3;-1,8]	$c = 2a + 3b^2$
12	a=[0,1;2,3;-5,2] b=[3,6;4,5;3,1]	$c = \frac{a^2}{2} + 5b$
13	a=[5,3;8,7;6,5] b=[4,1;3,5;3,7]	$c = b^2 + 3a$

14	$a=[2,1;3,8;2,3]$ $b=[6,4;0,5;2,7]$	$c = 4a + \frac{a^2}{b}$
15	$a=[-7,5;2,4;9,5]$ $b=[2,3;2,8;4,7]$	$c = \frac{a^2 + b}{2ab}$

### Вопросы к лабораторной работе № 2 и контроль сформированных практических навыков

1. Студент должен уметь запускать программный пакет MatLab и настраивать операционную среду работы с ним, демонстрируя сформированные компетенции преподавателю.
2. Студент должен знать интерфейсные возможности MatLab и уметь демонстрировать преподавателю навыки работы с различными программными окнами MatLab.
3. Студент должен знать основные операторы, функции и управляющие конструкции MatLab и уметь демонстрировать на практике их работу.
4. Студент должен уметь объявлять массивы, выбирая при этом оптимальный вариант между методом конкатенации, методом с определенным количеством и определенным шагом следования элементов массива.
5. Студент должен уметь демонстрировать на практике использование операторов работы с массивами, определять количество элементов в массиве и выбирать любой элемент из массива.
6. Студент должен иметь четкое представление о специфике использования и уметь демонстрировать преподавателю работу арифметических операторов матричного исчисления и арифметических операторов поэлементных операций над массивами.

### 5. Работа с графиками в MatLab

Визуализация двумерных графиков обычно осуществляется с помощью функции **plot()**. Рассмотрим работу этой функции на конкретном примере. Пусть необходимо вывести график функции синуса в диапазоне от 0 до  $\pi$ .

Для решения этой задачи зададим множество точек по оси (0x) в виде массива:

**x = 0:0.01:pi**, для которых будут отображаться значения функции синуса. Затем вычислим множество значений функции синуса в этих точках: **y = sin(x)** и выведем результат на экран оператором **plot(x,y)**. В результате получим график, показанный на рис. 4.



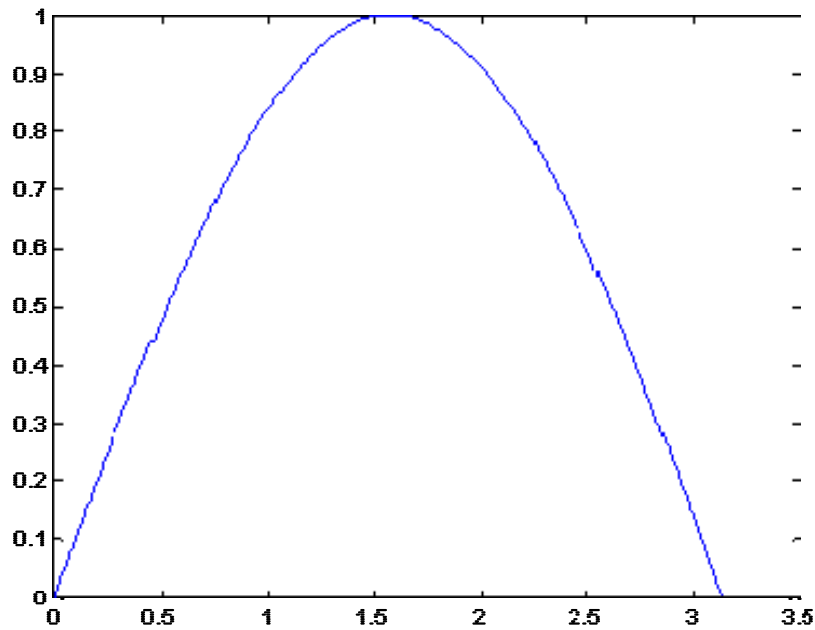


Рис. 4. Отображение функции синуса с помощью функции `plot()`

Функция **`plot()`** не только выводит точки на экран компьютера в виде графического объекта, но и осуществляет интерполяцию для придания непрерывного вида графика.

Функцию **`plot()`** можно записать и с одним аргументом «x» или «y»: **`plot(x); plot(y)`**. В этом случае функция **`plot()`** отображает множество точек по оси (0y), а по оси (0x) происходит автоматическая генерация множества точек с единичным шагом.

Для построения нескольких графиков в одних и тех же координатных осях функция **`plot()`** записывается следующим образом:

```
x = 0:0.01:pi;
y1 = sin(x);
y2 = cos(x);
plot(x,y1,x,y2)
```

Результат работы данного фрагмента программы представлен на рис. 5.

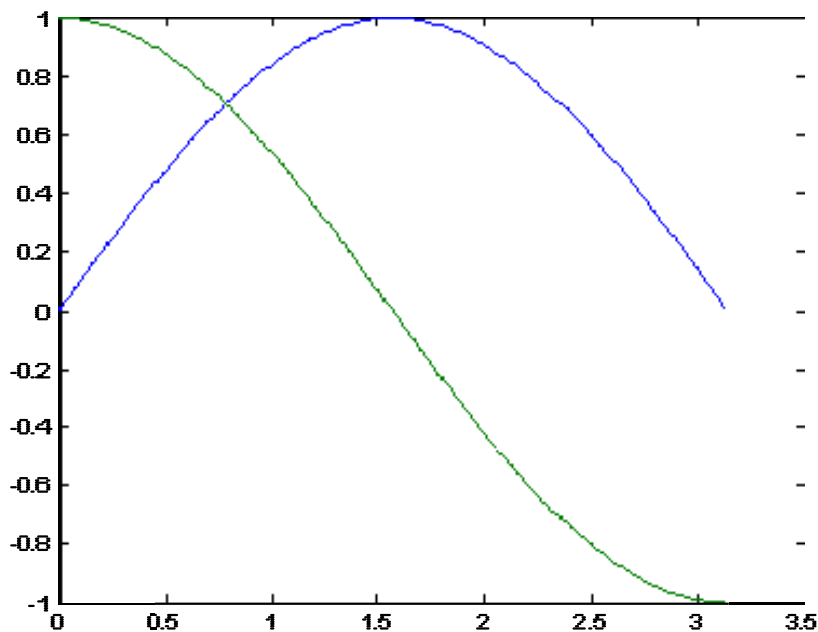


Рис. 5. Отображение двух графиков при помощи оператора `plot()` в одних координатных осях

Функцию **plot()** можно записать и с одним аргументом **x**, **y**, **z** и т.д., например:

```
plot(x);
```

```
plot(y);
```

в результате получим два разных графика, причем в случае одного аргумента функция **plot()** отображает множество точек по оси ( $Oy$ ), а по оси ( $Ox$ ) происходит автоматическая генерация множества точек с единичным шагом. Следовательно, для простой визуализации вектора в виде двумерного графика достаточно воспользоваться функцией **plot()** с одним аргументом.

## 6. Оформление графиков и расширенные возможности оператора **plot()**

С помощью пакета MatLab возможно отображать графики с разным цветом и типом линий, показывать или скрывать сетку на графике, выполнять подпись осей и графика в целом. Для этого используют дополнительные параметры оператора **plot()**, которые записываются следующим образом:

**plot(x,y,'цвет линии, тип линии, маркер точек').**

Обратите внимание, что третий параметр (маркер) записывается в апострофах ( ' ') и имеет значения, приведенные в табл. 6-8. Маркеры записываются подряд друг за другом, например:

'ko' – на графике отображаются черными кружками точки графика;

'ko-' – выводится график черной линией и проставляются точки в виде кружков.

Таблица 6  
Обозначение цвета линии на графике

Маркер	Цвет линии	Маркер	Цвет линии
c	Голубой	b	Синий
m	Фиолетовый	w	Белый
y	Желтый	k	Черный
r	Красный	g	Зеленый

Таблица 7

Обозначение типа линии графика

Маркер	Цвет линии
-	Непрерывная
--	Штриховая
:	Пунктирная
-.	Штрих-пунктирная

Таблица 8

Обозначение типа точек графика

Маркер	Цвет линии
.	Точка
+	Плюс
*	Звездочка
o	Кружок
x	Крестик

Оформление графиков часто имеет немаловажное значение с целью составления отчетов по работе. Для этого используются функции языка MatLab, перечисленные в табл. 9.

Функции оформления графиков

Таблица 9

Название	Описание
grid [on, off]	Включает/выключает сетку на графике
title('заголовок графика')	Создает надпись заголовка графика
xlabel('подпись оси 0x')	Создает подпись оси 0x
ylabel('подпись оси 0y')	Создает подпись оси 0y
text(x,y, 'текст')	Создает текстовую надпись, привязанную к координатам (x,y).

Рассмотрим работу данных функций на примере следующей программы:

```

x = 0:0.1:2*pi; y = sin(x);
plot(x,y);
grid on;
title('График зависимости sin(x) ');
xlabel('Координатная ось x');
ylabel('Координатная ось y');
text(3.05,0.16,'sin(x)').

```

Результат работы данной программы показан на рис. 6, из которого видно, каким образом работают функции создания подписей на графике, а также отображение сетки графика.

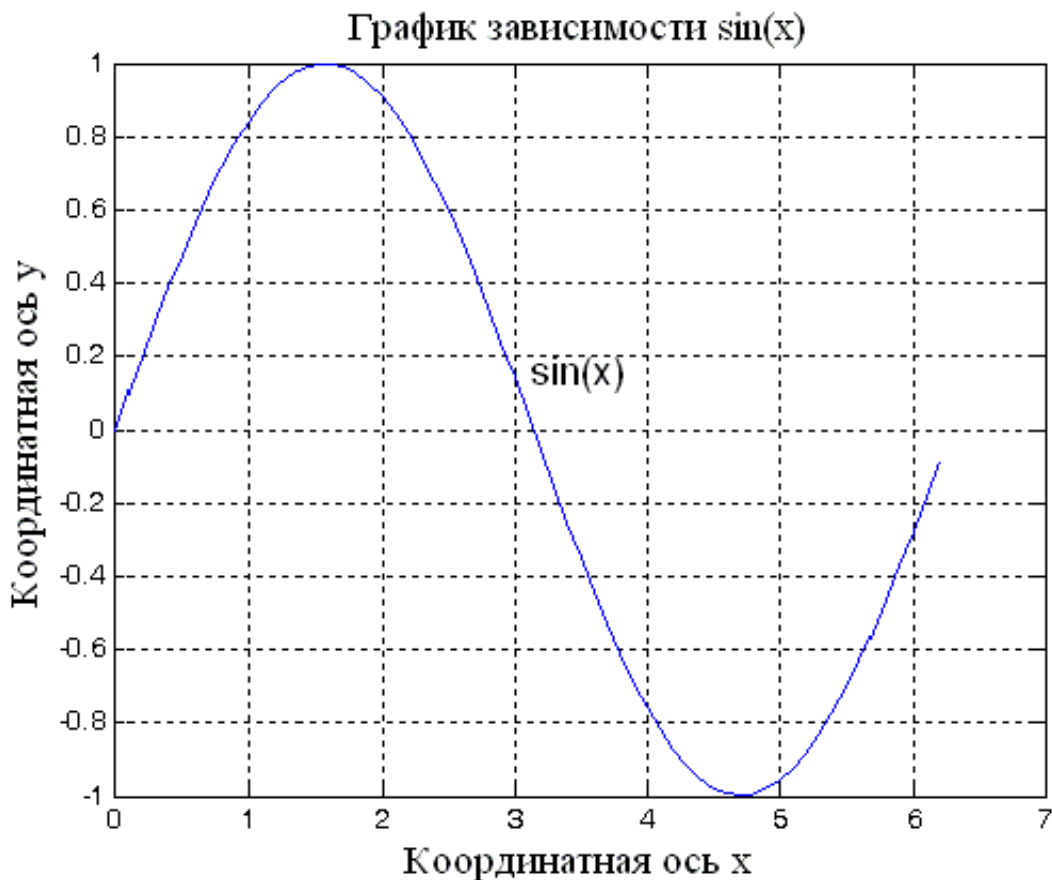


Рис. 6. Пример работы функций оформления графика

Если необходимо в одной программе вывести результаты расчетов в виде различных графиков, то можно воспользоваться оператором **«figure»**, который создает новое графическое окно и все последующие функции выводят информацию именно в это графическое окно, до следующего использования оператора **«figure»**. Адресация графических функций и графического окна меняется с каждым разом использования оператора **«figure»**. Пример использования оператора **«figure»** совместно с графическими функциями показан ниже:

```

% Вывод результатов в виде графиков
plot(E,D,'k'); % Электронная плотность состояний

```

```

xlabel('Энгергия E, эВ ');
ylabel('Электронная плотность состояний D(E)');
figure;
plot (V,N,'k'); % Концентрация электронов
xlabel('Напряжение стока Vd, В');
ylabel('Концентрация электронов');
figure;
plot(V,I,'k'); % BAX
xlabel('Напряжение стока Vd, В');
ylabel('Ток стока Id, А').

```

Заметим, что если информация выводится в одно графическое окно, то использование оператора **«figure»** не обязательно.

В случае отсутствия русификации программного пакета MatLab, кириллица может выводиться с ошибками (в виде нечитаемого текста). В этом случае необходимо воспользоваться расширенными возможностями оформления графических окон. Для этого: в главном меню графического окна выберите пункт **«Insert»** и далее один из пунктов **«XLabel»** **«YLabel»** **«Title»**, в зависимости от того, какой элемент графического окна необходимо русифицировать. После этих действий соответствующий элемент графического окна будет доступен для редактирования.

Далее, выберите в главном меню графического окна пункт **«View»** и затем **«Property Editor»** и нажмите на кнопку **«More Properties ...»** (см. рис. 7). После этого возможны любые изменения свойств объектов графического окна. Щелкая мышкой на графическом объекте, открываются его свойства, например, чтобы изменить шрифт подписи к рисункам, необходимо выбрать шрифт **«Times New Roman»** во вкладке **«Font»** и при желании можно изменить его размер, например, **«14.0»**, что соответствует 14 пунктам стандартных шрифтов операционной системы. Можно менять и другие свойства графиков. Например, щелкнув мышкой на линии графика, можно изменить тип линии, толщину и так далее.

Готовый график из графического окна можно сохранить в виде файла. Для этого в главном меню графического окна выберите пункт меню **«File»** и далее **«Save As ...»** или можно сохранить рисунок с графиком в буфере обмена с целью его дальнейшей вставки в отчет по лабораторной работе. Для этого в главном меню графического окна выберите пункт **«Edit»** и далее **«CopyFigure»**.

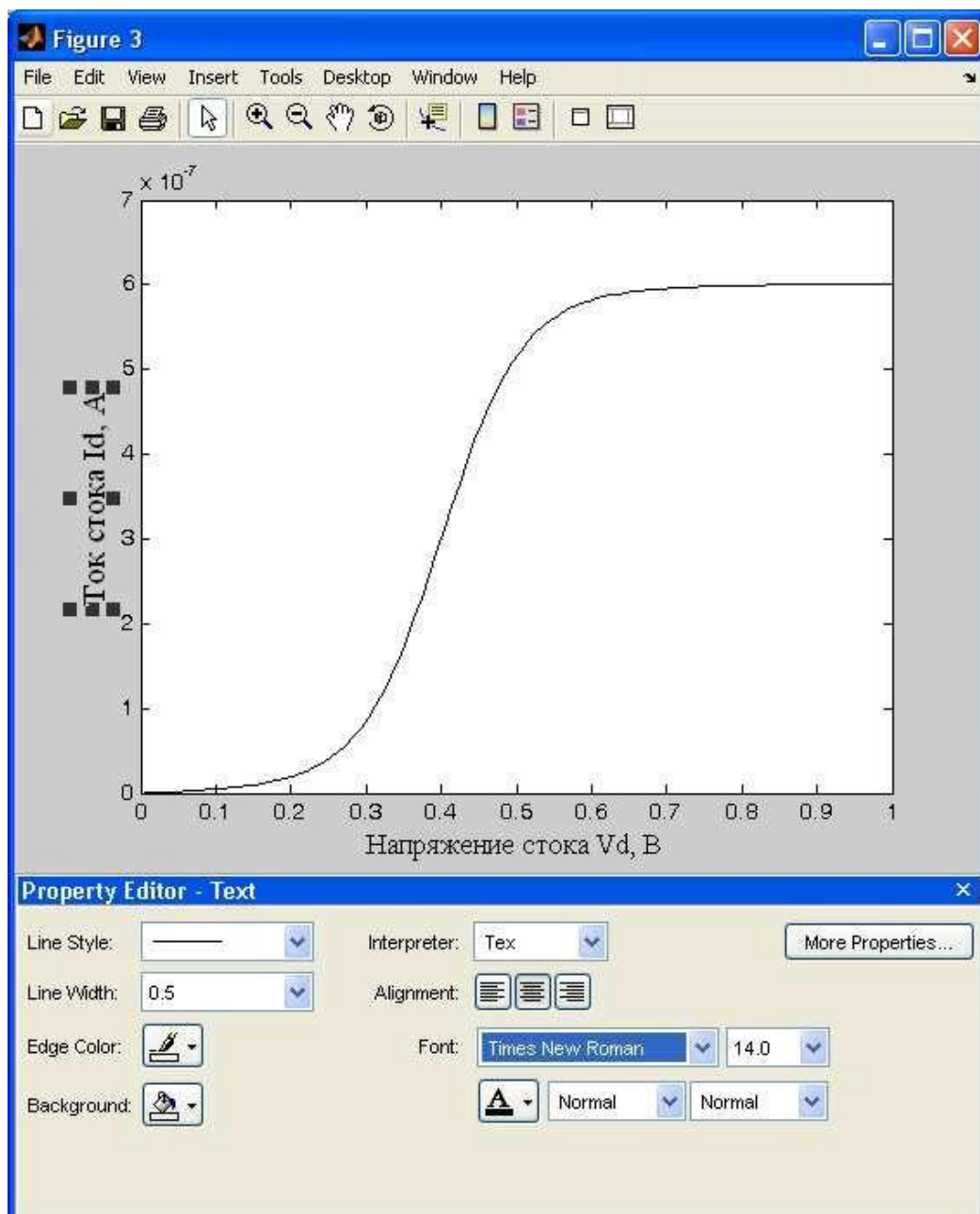


Рис. 7. Работа со свойствами графического окна программы MatLab

## Основы программирования в среде MatLab. Условные операторы и циклы в MatLab

Ранее было сказано, что в среде MatLab возможно объединять группы операторов в блоки, отделяя их между собой символом « ; ». Кроме того, встроенный язык программирования высокого уровня (М-язык) включает в себя операторы с условием (условные операторы), позволяющие выполнять или пропускать целый блок операторов по результатам проверки некоторого условия; а также операторы цикла, позволяющие создавать итерационные (повторяющиеся заданное количество раз) вычисления и выполнять сложные математические алгоритмы.

## Условный оператор « if »

Оператор **if**, как правило, всегда используется совместно с оператором **end**, образуя единую конструкцию, внутри которой располагаются последовательности команд (блоки), причем конкретный блок команд выполняется после проверки условия на его выполнение. Данную конструкцию (**if ... end**) часто называют операторами ветвления программного кода, так как действительно предоставляется возможность выполнения набора команд, которые будут исполняться только при условии, что значение параметра «выражение/условие» соответствует значению «истина» (т.е. верно), в противном случае (выражение/условие - не верно) программа пропускает этот набор команд.

В простом случае синтаксис оператора **if** имеет вид:

*If* <выражение/условие> заголовок оператора и условие  
           <операторы>;                 если условие истинно, то выполняются

**операторы**  
*end*

*% Эти строочки являются частью комментария в программе, а строки жирным*

% выше в реальной программе следует удалить.

*Примечание:*

1. Символ « % » - означает оператор комментария. Он не сказывается на ходе выполнения программы и служит только для информативных целей.
2. Операторы **if**, **end**, **else**, **switch**, **case**, **while**, **for** (см. далее) являются зарезервированными «словами», ни одна из переменных и констант программы не должны иметь таких комбинаций символов и после их, в случае использования программного режима, символ « ; » не ставится.

В качестве <выражения/условия> в конструкции **if ... end** могут использоваться достаточно сложные логические выражения, объединенные логическими операторами, однако чаще всего используются простейшие логические выражения, приведенные в табл. 10.

Часто используемые логические выражения (&lt;выражения/условия&gt;)

Логическое выражение	Результат выполнения
$a < b$	Истинно, если переменная « $a$ » меньше переменной « $b$ » и ложно в противном случае.
$a > b$	Истинно, если переменная « $a$ » больше переменной « $b$ » и ложно в противном случае.
$a == b$	Истинно, если переменная « $a$ » равна переменной « $b$ » и ложно в противном случае.
$a \leq b$	Истинно, если переменная « $a$ » меньше либо равна переменной « $b$ » и ложно в противном случае.
$a \geq b$	Истинно, если переменная « $a$ » больше либо равна переменной « $b$ » и ложно в противном случае.
$a \neq b$	Истинно, если переменная « $a$ » не равна переменной « $b$ » и ложно в противном случае.

Полная конструкция оператора **if** может содержать несколько блоков операторов, выполнение каждого из которых осуществляется в результате проверки условия на их выполнение:

```

if <выражение/условие>           заголовок оператора и условие
    <операторы 1> ;               если условие истинно, то выполняются
операторы 1
else
    <операторы 2> ;               если условие ложно, то выполняются
операторы 2
end

```

### Условный оператор «switch»

Оператор «**switch**» также является оператором ветвления программного кода, с помощью которого обеспечивается многонаправленное ветвление программы. Среди некоторого набора альтернативных вариантов этот оператор позволяет сделать выбор дальнейшего хода выполнения программы.

Оператор «**switch**» действует следующим образом. Значение выражения будет последовательно сравниваться со всеми константами выбора из заданного списка (**case**), и при совпадении с одним из условий выбора будет выполняться последовательность операторов, пока не встретится оператор «**break**». Ниже приведена общая конструкция оператора «**switch**»:

```

switch (выражение) {
case константа 1:
    последовательность операторов
break;
case константа 2:

```



```

последовательность операторов
break;
case константа 3:
последовательность операторов
break;
...
...
default:
последовательность операторов, выполняемая, если совпадений нет
break;
}

```

Пакет MatLab имеет два оператора цикла: «**while**» и «**for**». С их помощью выполняется программирование рекуррентных алгоритмов, подсчета суммы ряда, перебора элементов массива и многое другое.

### Оператор цикла «while»

В простом случае цикл создается с помощью оператора «**while**», который имеет следующий синтаксис:

```

while <выражение/условие>      заголовок оператора цикла
    <операторы>                 блок операторов, которые составляют
тело цикла
end

```

Здесь <выражение/условие> представляет собой условие (см. табл. 10), и цикл «**while**» будет работать до тех пор, пока это условие истинно (т.е. выполняется). Если условие изначально будет ложным, то операторы, входящие в цикл, вообще не будут выполняться.

### Оператор цикла «for»

Иногда в программе необходимо повторять определенные действия. В том случае, если заранее известно число повторений, используется структура, которая называется циклом со счетчиком (или циклом «**for**»).

Синтаксис оператора цикла «**for**» имеет следующий вид:

```

for <счетчик> = <начальное значение>:<шаг>:<конечное значение>
    <операторы цикла>
end

```

В этой конструкции <счетчик> – любая незадействованная в другой части программы переменная, которой автоматически будут присваиваться значения от <начального значения> до <конечного значения> с шагом <шаг>, например:

**for i=1:1:100 ... end.** Заметим, что при выходе из цикла, в данном случае значение переменной «i» будет 101, то есть <начальное значение> плюс <шаг>.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

**Тема.** Использование операторов с условием и циклических операторов в MatLab.

### Цель работы

1. Изучить основные возможности программного пакета MatLab при работе с условными операторами и операторами цикла.
2. Используя возможности программы MatLab, составить программу и выполнить задание в соответствии с выданным вариантом.

### Задание и ход выполнения работы

1. Сформировать практические навыки написания и выполнения программ в MatLab.
2. Составить и выполнить программу в соответствии с выданным вариантом задания.
3. В отчете по работе приведите код программы, исходный и конечный варианты массива в виде распечаток двух таблиц.

Для формирования исходного массива из 100 элементов используйте следующий программный код в MatLab:

```
x=rand(10);  
for i=1:1:100  
x(i)=x(i)-0.3;  
x(i)=x(i).*100;  
end
```

Для вывода массивов в табличном виде можно воспользоваться следующими рекомендациями. В окне «**Workspace**» щелкните мышкой по названию массива. После этого откроется дополнительное окно редактора массивов – «**Array Editor**», из которого можно скопировать элементы массива, например, в Excel, предварительно выделив их в окне «**Array Editor**» MatLab.

### Варианты заданий к лабораторной работе № 3

1. Составить массив из 100 элементов и найти максимальный положительный элемент.
2. Составить массив из 100 элементов и найти максимальный отрицательный элемент.
3. Составить массив из 100 элементов и найти максимальный по модулю элемент массива.
4. Составить массив из 100 элементов и поменять местами первый и последний элемент массива.
5. Составить массив из 100 элементов и найти номер элемента, имеющий наименьшее значение.

6. Составить массив из 100 элементов и найти номер элемента, имеющий наибольшее значение.
7. Составить массив из 100 элементов и удвоить наибольший элемент массива.
8. Составить массив из 100 элементов и уменьшить в два раза наименьший элемент массива.
9. Составить массив из 100 элементов и найти все четные числа среди положительных элементов.
10. Составить массив из 100 элементов и найти все четные числа среди отрицательных элементов.
11. Составить массив из 100 элементов и определить, сколько элементов массива больше 10.
12. Составить массив из 100 элементов и найти строки с наибольшей суммой элементов.
13. Составить массив из 100 элементов и заменить все элементы на 1.
14. Составить массив из 100 элементов и упорядочить его по возрастанию.
15. Составить массив из 100 элементов и найти среднее арифметическое элементов массива.

### **Вопросы к лабораторной работе № 3 и контроль сформированных практических навыков**

1. Студент должен уметь запускать программный пакет MatLab и настраивать операционную среду работы с ним, демонстрируя сформированные компетенции преподавателю.
2. Студент должен знать интерфейсные возможности MatLab и уметь демонстрировать преподавателю навыки работы с различными программными окнами MatLab.
3. Студент должен знать основные операторы, функции и управляющие конструкции MatLab и уметь демонстрировать на практике их работу.
4. Студент должен уметь:
  - Применять на практике условные операторы «**if**» и «**switch**» и записывать программные конструкции MatLab на их основе.
  - Применять на практике операторы цикла «**while**», «**for**» и уметь записывать программные конструкции на их основе.
  - Записывать и анализировать выражения – условия с использованием логических операторов.

## 8. Описание нанотранзистора

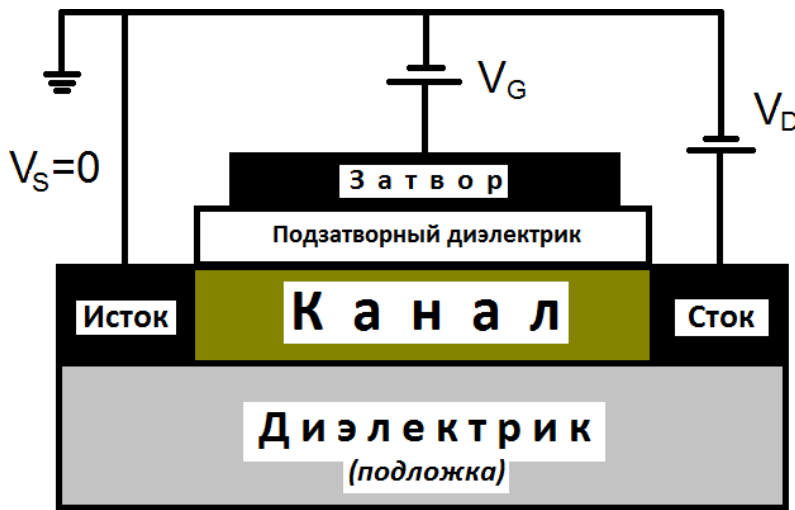


Рис. 8. Схема полевого нанотранзистора

Типичная структура, с которой мы будем работать – это простой вариант нанотранзистора, показанного на рис. 8, состоящего из полупроводникового канала, отделенного от металлического затвора слоем изолятора (обычно двуокиси кремния).

Области, обозначенные на рисунке как «Исток» и «Сток», представляют собой две контактные площадки, которые обладают высокой проводимостью. Сопротивление канала определяет ток, протекающий от истока к стоку, когда между ними приложено электрическое напряжение  $V_D$ . Напряжение на затворе  $V_G$  используется для управления концентрацией электронов в канале и, следовательно, его проводимостью. Чаще всего используются схемы с заземленным истоком, поэтому  $V_S=0$ . Подобный механизм лежит в основе работы любого полевого транзистора.

Однако рассматриваемый нанотранзистор имеет ряд особенностей, отличающих его от макроскопического полевого транзистора.

1. Канал нанотранзистора достаточно мал и мал настолько, что траектория движения носителей заряда в нем меньше длины свободного пробега носителей заряда.
2. Материал канала больше не влияет на его проводимость, а суммарный кондактанс этой системы будет определяться отношением квадрата заряда электрона к постоянной Планка:  $G_0=q^2/h=(25.8 \text{ КОм})^{-1}$  и будет величиной постоянной.
3. Концентрация носителей зарядов в канале нанотранзистора обычно достаточно мала, в предельном случае, равная единице. В этом случае описание электрических характеристик нанотранзистора возможно с использованием модели самосогласованного поля (ССП). Для этого важно, чтобы в канале отсутствовали заметные сгустки электронной плотности. Последнее может быть обеспечено, если в канале

нанотранзистора находится только один электрон на одном единственном электронном уровне.

4. Проводимость нанотранзистора будет зависеть от качества электродов и интенсивности их взаимодействия с каналом, при этом сами электроды следует рассматривать как источники неограниченной электронной плотности по сравнению с каналом. Это оказывается вполне справедливым, если электроды нанотранзистора выполнены из металла, и в их больших контактных областях (областях истока и стока) энергетические уровни квантовых состояний имеют непрерывное распределение.
5. Протекание электрического тока через канал нанотранзистора будет определяться эффектом линейного отклика, заключающегося в том, что для появления электрического тока необходимо наличие состояний (электронных уровней) вблизи  $E = \mu$ , где  $\mu$  – электрохимический потенциал системы, и эти состояния не обязательно должны быть пустыми. Заполненные состояния также определяют электропроводность. Перемещение заполненных состояний за счет внешнего смещения в окрестность электрохимического потенциала определяет электронный тип проводимости, а свободных – дырочный тип проводимости.

## **9. Причина возникновения электрического тока в нанотранзисторе**

### **а) Проводимость n-типа**

Приложенное к затвору положительное напряжение  $V_G$  понижает энергетические уровни в канале. Однако при этом положение уровней энергии в истоке и стоке не меняется и, следовательно, электрохимический потенциал  $\mu$  остается неподвижным и переводит транзистор в открытое состояние. При этом электрический ток, возникающий под влиянием внешнего напряжения, зависит от числа энергетических уровней, находящихся в окрестности  $E = \mu$ .

### **б) Проводимость p-типа**

Обратите внимание на то, что количество электронов в канале не является фактором, однозначно определяющим протекание электрического тока. В частности, отрицательное напряжение на затворе ( $V_G < 0$ ) снижает количество электронов в канале, но тем не менее, если электрохимический потенциал  $\mu$  окажется в заполненной области, то канал станет более проводящим, благодаря наличию состояний в окрестности  $E = \mu$ . Это пример проводимости p-типа или «дырочной» проводимости в отличие от проводимости n-типа или электронной проводимости.

## **10. Описание распределения электронной плотности в нанотранзисторе**

В стационарном состоянии результирующий ток, направленный внутрь канала или из него, равен нулю:  $I_1 + I_2 = 0$ , где  $I_1 = \frac{q\gamma_1}{h}(f_1 - N)$  и  $I_2 = \frac{q\gamma_2}{h}(f_2 - N)$  токи, протекающие через электроды нанотранзистора, то есть токи истока и стока соответственно,

$$f_1(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu_1)/k_B T]} = f_0(E - \mu_1) \text{ и}$$

$$f_2(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu_2)/k_B T]} = f_0(E - \mu_2) \text{ — функции Ферми, записанные}$$

для электродов истока и стока,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — электрохимические потенциалы истока и стока,  $N$  — концентрация электронов в канале нанотранзистора.

Из выражения  $I_1 + I_2 = 0$  получаем, что  $N = \frac{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ , т. е. количество электронов  $N$  является средним по контактам истока и стока. Подставляя выражение для  $N$  в выражения для токов  $I_1$  или  $I_2$ , мы получаем выражение для тока стационарного состояния:

$$I = I_1 = -I_2 = \frac{q}{h} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]. \quad (1)$$

Это ток для одной проекции спина. При наличии двух спиновых состояний с одинаковой энергией данную величину тока следует увеличить вдвое.

Упростим выражение (1), предположив, что единственный энергетический уровень канала  $\varepsilon$  расположен между электрохимическими потенциалами истока и стока  $\mu_1 > \varepsilon > \mu_2$ , температура близка к комнатной, так что  $f_1(\varepsilon) = f_0(E - \mu_1) \approx 1$  и  $f_2(\varepsilon) = f_0(E - \mu_2) \approx 0$ , (т.е. в области истока есть заселенные уровни, а в области стока таковых почти нет), то после упрощения имеем:

$$I = \frac{q}{h} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (2)$$

Полученный результат свидетельствует о том, что можно неограниченно увеличивать силу тока, проходящего через нанотранзистор, увеличивая величину  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ , т. е., усиливая связь прибора с контактами. Однако это противоречит одному из главных постулатов квантовой физики о существовании максимального кондактанса одноуровневого устройства, равного  $G_0 = q^2 / h$ .

Для того чтобы избежать подобного противоречия, следует учесть эффект уширения уровня, который неизбежно сопровождает любое взаимодействие с ним. Учет уширения должен привести к выходу части уровней за пределы интервала энергии, границами которого являются  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , в котором и происходит протекание тока. В результате сила тока уменьшается по сравнению с величиной, определяемой уравнением (2), на коэффициент  $(\mu_1 - \mu_2) / C\gamma_1$ , который равен доле уровня, попадающей в интервал между  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Здесь  $C\gamma_1$  - эффективная ширина уровня, а  $C$  - численная константа.

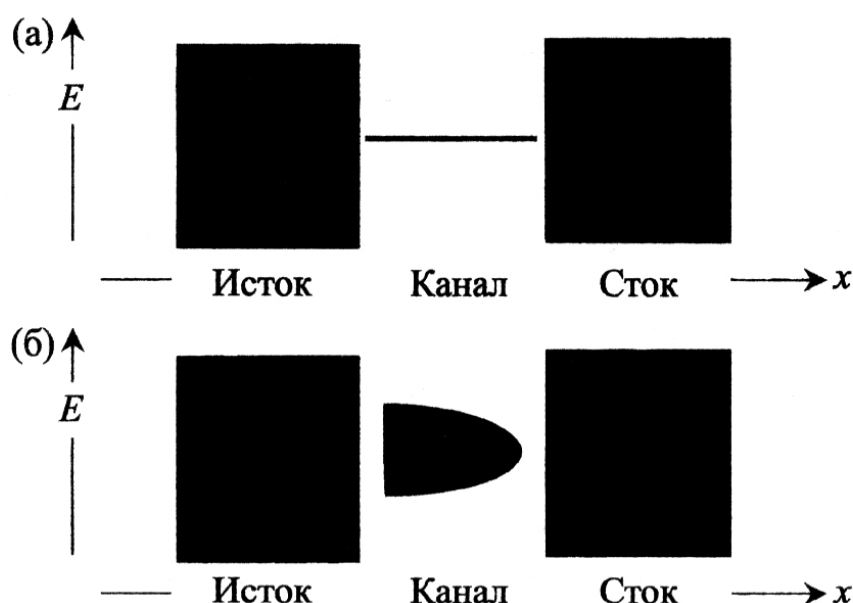


Рис. 9. Условный вид электронной плотности состояний  $D(E)$  в электродах и канале:

а – до, б – после установления взаимодействия (черным показана высокая плотность электронных состояний)

До установления связи канала с истоком и стоком плотность состояний  $D(E)$  условно выглядела примерно так, как показано на рис. 9, а. Черный цвет означает высокую плотность состояний. В этом случае мы имеем один дискретный уровень в канале и непрерывное распределение состояний в контактах истока и стока.

При взаимодействии канала с электродами электронные состояния частично «перетекают» в канал и одновременно состояния канала распространяются в контакты. Поскольку это происходит при фиксированной энергии, и приобретенные состояния распределяются в некотором интервале энергий, суммарным эффектом является уширение плотности состояний канала или переход от исходного дельтаобразного распределения к диффузному

распределению (рис. 9, б). Тем не менее, проинтегрированный по всем энергиям уровень по-прежнему соответствует только одному электрону.

Размытая плотность состояний обычно изображается центрированной при  $E = \varepsilon$  непрерывной функцией Лоренца, интеграл от которой по всем энергиям равен единице:

$$D_{\varepsilon}(E) = \frac{\gamma/2\pi}{E^2 + (\gamma/2)^2} . \quad (3)$$

Исходную дельтаобразную плотность состояний можно представить как предел выражения  $D_{\varepsilon}(E)$  при стремлении ширины уровня  $\gamma \rightarrow 0$  к нулю, причем ширина уровня  $\gamma$  пропорциональна интенсивности связи.

Эффект уширения уровня должен быть учтен при записи выражения для силы тока нанотранзистора. При этом выражение (1) должно быть переписано следующим образом:

$$I = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_{\varepsilon}(E) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)] . \quad (4)$$

#### **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4**

**Тема.** Расчет распределения электронной плотности в канале нанотранзистора.

##### **Цель работы**

1. Используя возможности MatLab, произвести расчет распределения электронной плотности в канале нанотранзистора в соответствии с выданным вариантом задания.
2. На основе анализа полученных результатов расчета выяснить влияние параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на характер распределения электронной плотности в нанотранзисторе.
3. На основе анализа расчетных данных, выполненных в соответствии с выданным вариантом задания, определить оптимальный диапазон значений сетки по энергии и шага по ней с целью корректного расчета распределения электронной плотности в нанотранзисторе.

##### **Задание и ход выполнения работы**

1. Составить программу в среде MatLab, реализующую следующие действия:

Очистку содержимого командного окна и всех переменных. Данные действия необходимы для многократного запуска программного кода с целью проведения необходимого количества расчетных экспериментов.



Ввод необходимых переменных. Рекомендуется использование следующих переменных для величин:

- $\gamma_1, \partial B \rightarrow g1; \gamma_2, \partial B \rightarrow g2$ ; сумма значений  $(\gamma_1 + \gamma_2) \rightarrow g$ ;
- массив со значениями сетки по энергии  $E, \partial B \rightarrow E$ ;
- количество значений шагов по сетке энергии  $\rightarrow NE$ ;
- шаг по сетке энергии  $\rightarrow dE$ .

Составление сетки по энергии в виде массива  $E$ , необходимой для расчета распределения электронной плотности. Сведения по работе с массивами взять из раздела 4 данного лабораторного практикума.

Расчет распределения электронной плотности  $D_e(E)$ , в соответствии с условиями выданного варианта задания (см. табл. 11), с построением графиков и вычислением площади, расположенной между осью энергии и линией зависимости  $D_e(E)$ . Эта площадь рассчитывается как определенный интеграл в диапазоне от минимального значения энергии по сетке энергии до максимального значения. Расчеты определенного интеграла выполнить с использованием следующих методов: трапеции, Симпсона и прямоугольника. Вычисление распределения электронной плотности в нанотранзисторе выполнить с использованием функции Лоренца (3).

2. Результаты расчетов занести в табл. 11.
3. На основе анализа полученных результатов выяснить влияние параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  на характер распределения электронной плотности в нанотранзисторе, в выводах указать, при каких значениях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  вид распределения электронной плотности приближается к дельтаобразному, а при каком к диффузному.
4. На основе анализа расчетных данных определить оптимальный диапазон значений сетки по энергии, необходимый для корректного расчета распределения электронной плотности в нанотранзисторе. В качестве критерия выбора оптимального диапазона по сетке энергии, необходимого для корректного расчета распределения электронной плотности в нанотранзисторе, использовать внешний вид графиков и абсолютное значение рассчитанных определенных интегралов.

**Примечание к п. 4 задания и ходу выполнения работы:**

а) в среде MatLab предусмотрены встроенные функции, позволяющие производить численное интегрирование и реализовывать большую часть численных методов. Так, вычисление определенного интеграла по **методу трапеции**, с учетом выше сделанных обозначений, возможно следующим образом:

$$Met\_trap = trapz(E, D);$$

здесь  $E$  – массив сетки по энергии,  $D$  – массив, хранящий рассчитанные значения распределения электронной плотности в нанотранзисторе,

*trapz()* – встроенная функция MatLab, *Met\_trap* – переменная, которой присваивается значение определенного интеграла.

Реализация расчета определенного интеграла в MatLab методом Симпсона выглядит следующим образом:

$Met\_simps=quad('Функция интегрирования в виде формулы', E(1), E(NE));$   
здесь  $E(1)$  и  $E(NE)$  – пределы интегрирования, в данном случае начальное и конечное значения по сетке энергии, *quad()* – встроенная функция MatLab, *Met\_simps* – переменная, которой присваивается значение определенного интеграла. Стоит отметить, что реализация метода Симпсона в MatLab более универсальна, чем для других методов и предусматривает автоматический подбор шага по параметру интегрирования. В связи с этим данный метод считается в MatLab наиболее точным.

Расчет определенного интеграла в MatLab методом прямоугольника реализуется так:

$Met\_pramka=sum(dE.*D);$   
здесь  $dE$  – скаляр, определяющий шаг по сетке энергии,  $D$  – массив рассчитанных значений распределения электронной плотности в нанотранзисторе, *Met\_pramka* – переменная, которой присваивается значение определенного интеграла;

б) распределение электронной плотности в нанотранзисторе производится по функции Лоренца, интегрирование которой по всему диапазону энергий в одноэлектронном нанотранзисторе должно дать единицу. Именно это свойство функции Лоренца используется для корректного выбора диапазона по сетке энергии в расчетах распределения электронной плотности. Удовлетворительным считается результат, когда площади, посчитанные по вышеприведенным методам, составят от 0,93 до 0,95 и выше, что и соответствует одному электрону (площадь почти равна единице). При изменении  $E_{min}$  и  $E_{max}$  будет меняться и внешний вид графика  $D_e(E)$ . Примеры таких графиков показаны на рис. 10, а-г.

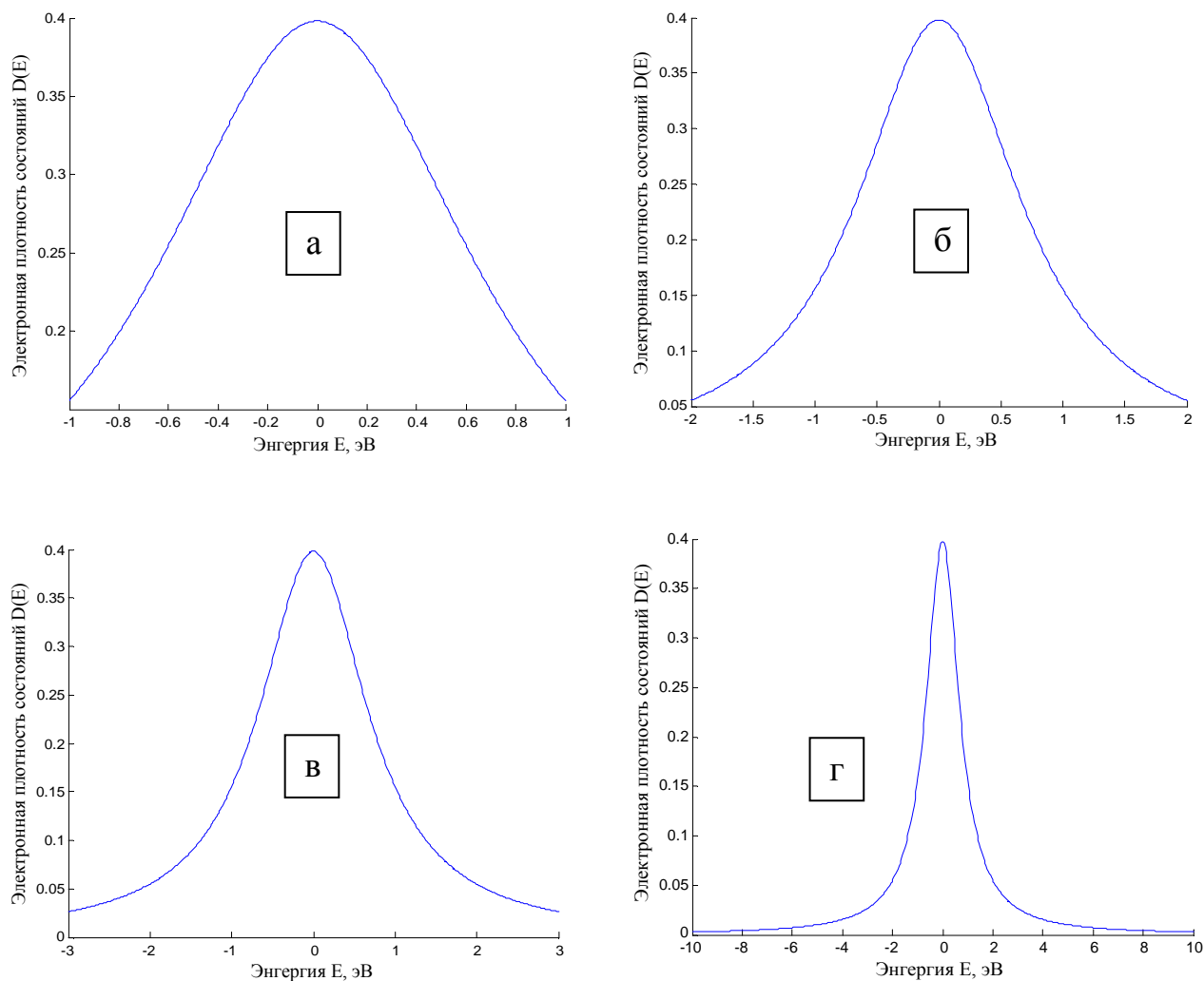


Рис. 10. Распределение электронной плотности  $D_e(E)$ ,  $\gamma_1=0,8$  эВ и  $\gamma_2=0,8$  эВ;  $N_E=500$ ;

$$\begin{aligned}
 \text{а) } E_{\min} &= -1 \text{ эВ}; E_{\max} = +1 \text{ эВ}, \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{тр.}) = 0,5704; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{сим.}) = 0,5704; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{прям.}) = 0,5711; \\
 \text{б) } E_{\min} &= -2 \text{ эВ}; E_{\max} = +2 \text{ эВ}, \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{тр.}) = 0,7578; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{сим.}) = 0,7578; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{прям.}) = 0,7578; \\
 \text{в) } E_{\min} &= -3 \text{ эВ}; E_{\max} = +3 \text{ эВ}, \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{тр.}) = 0,8341; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{сим.}) = 0,8441; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{прям.}) = 0,8344; \\
 \text{г) } E_{\min} &= -10 \text{ эВ}; E_{\max} = +10 \text{ эВ}, \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{тр.}) = 0,9492; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{сим.}) = 0,9492; \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (\text{прям.}) = 0,9492.
 \end{aligned}$$

Анализ зависимостей рис. 10 позволяет утверждать, что наиболее удачным способом выбора диапазона для сетки по энергии будет случай,

показанный на рис. 10, г, так как площадь под кривой наилучшим образом отражает плотность, приходящуюся на один электрон нанотранзистора.

5. На основе анализа экспериментальных данных определить оптимальное значение шага по сетке энергии. Для этих целей необходимо провести численный эксперимент с уже оптимально подобранными диапазонами  $E_{min}$  и  $E_{max}$ , последовательно уменьшая величину  $N_E$ . Ясно, что при  $N_E \gg 500$ , результат будет приемлемым, но это приведет к большим объемам необходимых вычислений, поэтому на практике всегда стараются задать оптимальное количество точек разбиения по сетке энергии (задать оптимальный шаг). Критериями для сравнения расчетных экспериментов служат внешний вид зависимостей (зависимости должны быть гладкими) и абсолютное значение определенных интегралов (их значения должны стремиться к единице). Пример расчетных зависимостей показан на рис. 11, а-г.

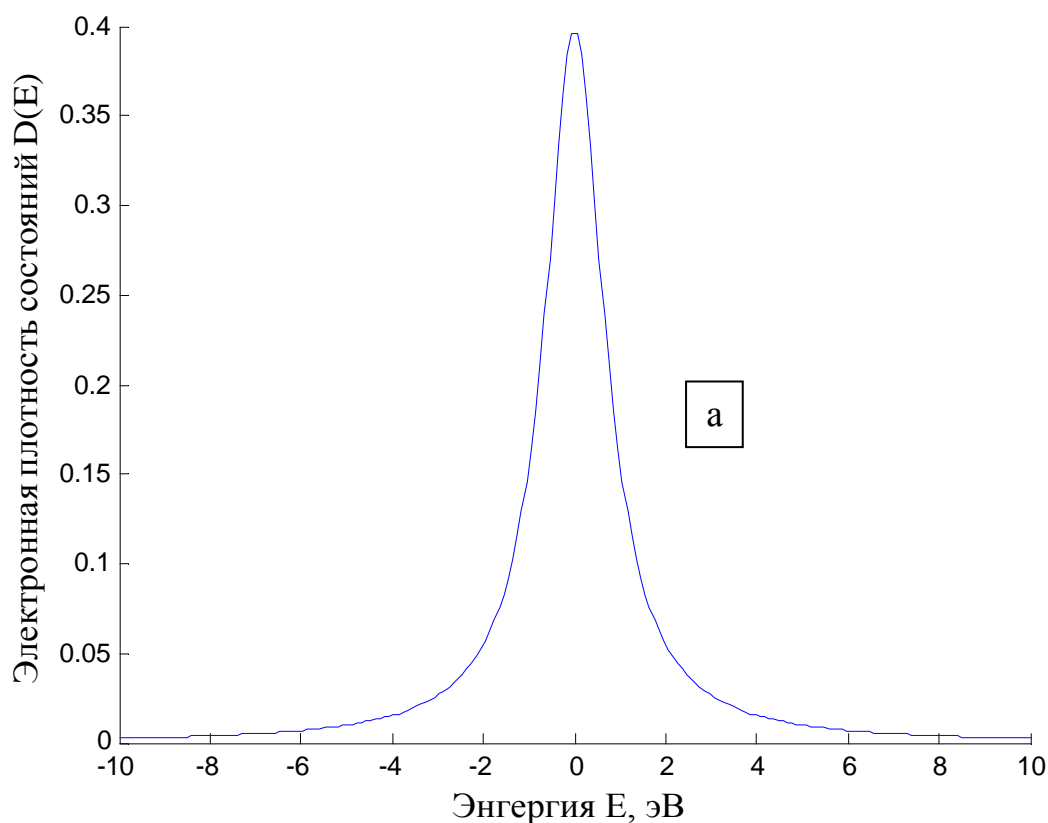


Рис. 11 (а). Распределение электронной плотности  $D_e(E)$ ,

$\gamma_1 = 0,8$  эВ и  $\gamma_2 = 0,8$  эВ;  $N_E = 200$ ;

$$E_{min} = -10 \text{ эВ}; E_{max} = +10 \text{ эВ}, \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{тр.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{сим.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{прям.}) = 0,9492.$$

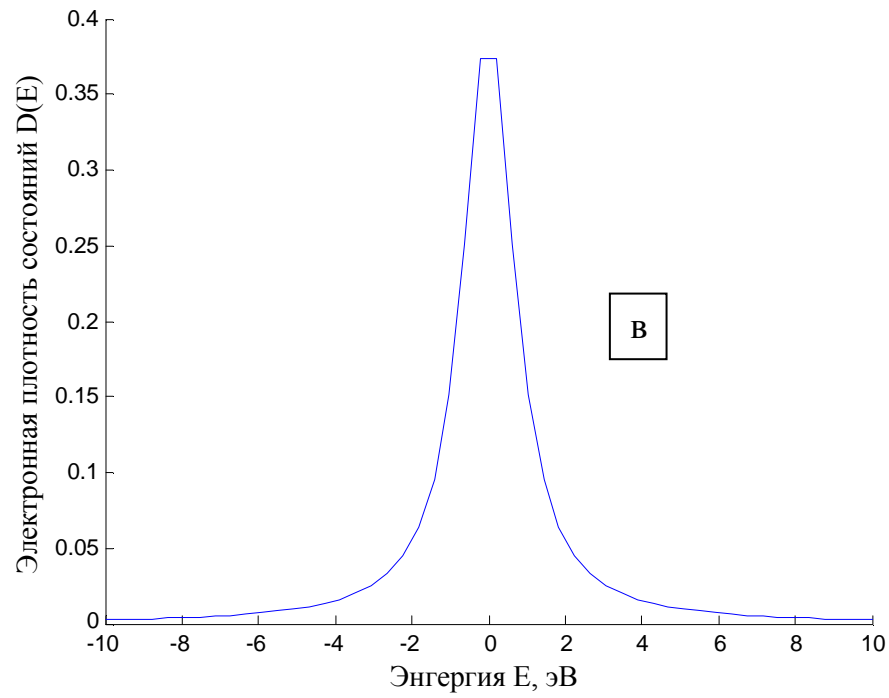
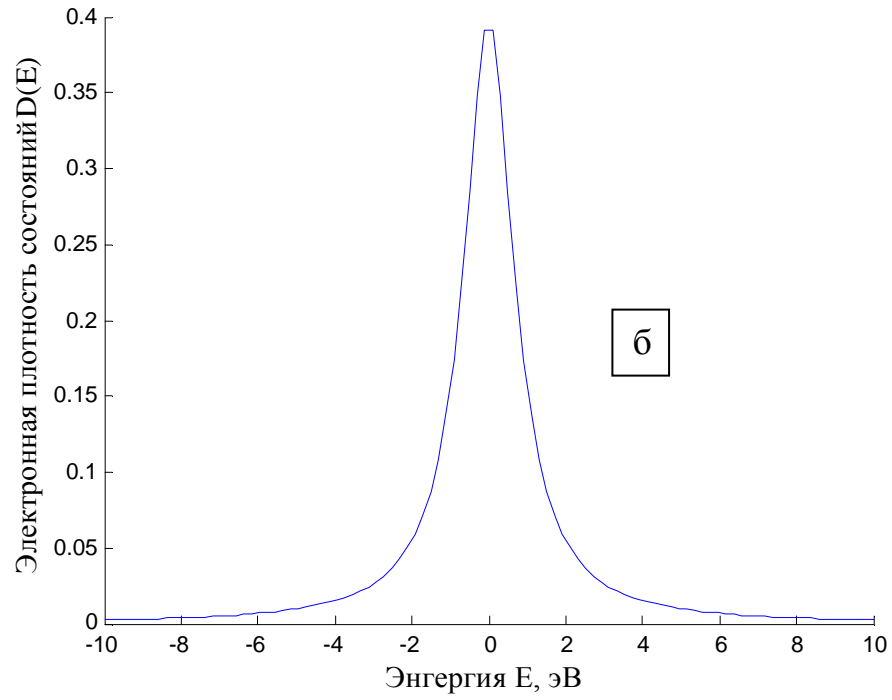


Рис.11 (б, в). Распределение электронной плотности  $D_e(E)$ ,  
 $\gamma_1=0,8$  эВ и  $\gamma_2=0,8$  эВ;  $E_{min}=-10$ эВ;  $E_{max}=+10$ эВ;

$$\text{б) } N_E=100; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{тр.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{сим.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{прям.}) = 0,9497.$$

$$\text{в) } N_E=50; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{тр.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{сим.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{прям.}) = 0,9502.$$

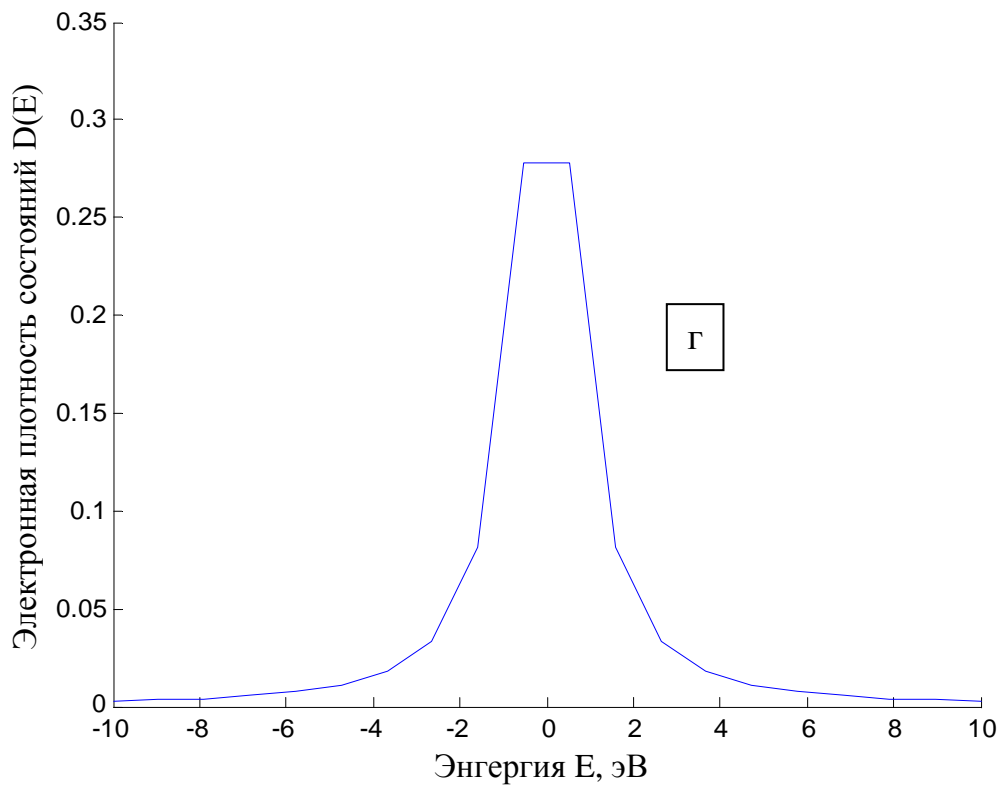


Рис.11 (г). Распределение электронной плотности  $D_\varepsilon(E)$ ,  
 $\gamma_1=0,8$  эВ и  $\gamma_2=0,8$  эВ;  $N_E=20$ ;

$$E_{min}=-10\text{эВ}; E_{max}=+10\text{эВ}, \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{тр.}) = 0,9324; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{сим.}) = 0,9492; \int_{E_{min}}^{E_{max}} (\text{прям.}) = 0,9350.$$

Как видно из данных рис. 11, г, двадцать расчетных точек на сетке по энергии недостаточно для корректного расчета распределения электронной плотности в нанотранзисторе при условиях, оговоренных в подписях к этому графику.

При проведении лабораторного исследования следует придерживаться последовательности экспериментов, указанных в табл. 11, для каждого номера задания. В отчете привести только часть табл. 11, соответствующая выданному заданию.

Таблица 11

Варианты заданий к лабораторной работе № 4 и значения интегралов,  
рассчитываемых в ходе выполнения работы

Номер зад/ Номер эксп.		$\gamma_1$ , эВ	$\gamma_2$ , эВ	$E_{\min}$ , эВ	$E_{\max}$ , эВ	$N_E$ , шт	$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (тр.)$	$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (сим.)$	$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} (прям.)$	Номер графика
1	1	0,8	0,8	-1	1	500				
	2	0,8	0,8	-2	2	500				
	3	0,8	0,8	-3	3	500				
	4	0,8	0,8	-4	4	500				
	5	0,8	0,8	-5	5	500				
	6	0,8	0,8	-6	6	500				
	7	0,8	0,8	-7	7	500				
	8	0,8	0,8	-8	8	500				
	9	0,8	0,8	-8	8	400				
	10	0,8	0,8	-8	8	300				
	11	0,8	0,8	-8	8	200				
	12	0,8	0,8	-8	8	100				
	13	0,8	0,8	-8	8	50				
	14	0,8	0,8	-8	8	20				
2	1	0,7	0,7	-1	1	500				
	2	0,7	0,7	-2	2	500				
	3	0,7	0,7	-3	3	500				
	4	0,7	0,7	-4	4	500				
	5	0,7	0,7	-5	5	500				
	6	0,7	0,7	-6	6	500				
	7	0,7	0,7	-7	7	500				

	8	0,7	0,7	-7	7	400				
	9	0,7	0,7	-7	7	300				
	10	0,7	0,7	-7	7	200				
	11	0,7	0,7	-8	8	100				
	12	0,7	0,7	-8	8	50				
	13	0,7	0,7	-8	8	20				
3	1	0,6	0,6	-1	1	500				
	2	0,6	0,6	-2	2	500				
	3	0,6	0,6	-3	3	500				
	4	0,6	0,6	-4	4	500				
	5	0,6	0,6	-5	5	500				
	6	0,6	0,6	-6	6	500				
	7	0,6	0,6	-6	6	400				
	8	0,6	0,6	-6	6	300				
	9	0,6	0,6	-6	6	200				
	10	0,6	0,6	-6	6	100				
	11	0,6	0,6	-6	6	50				
	12	0,6	0,6	-6	6	20				
4	1	0,5	0,5	-1	1	500				
	2	0,5	0,5	-2	2	500				
	3	0,5	0,5	-3	3	500				
	4	0,5	0,5	-4	4	500				
	5	0,5	0,5	-5	5	500				
	6	0,5	0,5	-5	5	400				
	7	0,5	0,5	-5	5	300				
	8	0,5	0,5	-5	5	200				



	9	0,5	0,5	-5	5	100				
	10	0,5	0,5	-5	5	50				
	11	0,5	0,5	-5	5	20				
5	1	0,4	0,4	-1	1	500				
	2	0,4	0,4	-2	2	500				
	3	0,4	0,4	-3	3	500				
	4	0,4	0,4	-4	4	500				
	5	0,4	0,4	-4	4	400				
	6	0,4	0,4	-4	4	300				
	7	0,4	0,4	-4	4	200				
	8	0,4	0,4	-4	4	100				
	9	0,4	0,4	-4	4	50				
	10	0,4	0,4	-4	4	20				
6	1	0,3	0,3	-1	1	500				
	2	0,3	0,3	-2	2	500				
	3	0,3	0,3	-3	3	500				
	4	0,3	0,3	-3	3	400				
	5	0,3	0,3	-3	3	300				
	6	0,3	0,3	-3	3	200				
	7	0,3	0,3	-3	3	100				
	8	0,3	0,3	-3	3	50				
	9	0,3	0,3	-3	3	20				
7	1	0,2	0,2	-0,4	0,4	500				
	2	0,2	0,2	-0,5	0,5	500				
	3	0,2	0,2	-0,6	0,6	500				
	4	0,2	0,2	-0,7	0,7	500				

	5	0,2	0,2	-0,8	0,8	500				
	6	0,2	0,2	-0,9	0,9	500				
	7	0,2	0,2	-1	1	500				
	8	0,2	0,2	-2	2	500				
	9	0,2	0,2	-2	2	400				
	10	0,2	0,2	-2	2	300				
	11	0,2	0,2	-2	2	200				
	12	0,2	0,2	-2	2	100				
	13	0,2	0,2	-2	2	50				
	14	0,2	0,2	-2	2	20				
8	1	0,1	0,1	-0,4	0,4	500				
	2	0,1	0,1	-0,5	0,5	500				
	3	0,1	0,1	-0,6	0,6	500				
	4	0,1	0,1	-0,7	0,7	500				
	5	0,1	0,1	-0,8	0,8	500				
	6	0,1	0,1	-0,9	0,9	500				
	7	0,1	0,1	-1	1	500				
	8	0,1	0,1	-1	1	400				
	9	0,1	0,1	-1	1	300				
	10	0,1	0,1	-1	1	200				
	11	0,1	0,1	-1	1	100				
	12	0,1	0,1	-1	1	50				
	13	0,1	0,1	-1	1	20				
9	1	0,08	0,08	-0,1	0,1	500				
	2	0,08	0,08	-0,2	0,2	500				
	3	0,08	0,08	-0,3	0,3	500				

	4	0,08	0,08	-0,4	0,4	500				
	5	0,08	0,08	-0,5	0,5	500				
	6	0,08	0,08	-0,6	0,6	500				
	7	0,08	0,08	-0,7	0,7	500				
	8	0,08	0,08	-0,8	0,8	500				
	9	0,08	0,08	-0,8	0,8	400				
	10	0,08	0,08	-0,8	0,8	300				
	11	0,08	0,08	-0,8	0,8	200				
	12	0,08	0,08	-0,8	0,8	100				
	13	0,08	0,08	-0,8	0,8	50				
	14	0,08	0,08	-0,8	0,8	20				
10	1	0,07	0,07	-0,1	0,1	500				
	2	0,07	0,07	-0,2	0,2	500				
	3	0,07	0,07	-0,3	0,3	500				
	4	0,07	0,07	-0,4	0,4	500				
	5	0,07	0,07	-0,5	0,5	500				
	6	0,07	0,07	-0,6	0,6	500				
	7	0,07	0,07	-0,7	0,7	500				
	8	0,07	0,07	-0,7	0,7	400				
	9	0,07	0,07	-0,7	0,7	300				
	10	0,07	0,07	-0,7	0,7	200				
	11	0,07	0,07	-0,7	0,7	100				
	12	0,07	0,07	-0,7	0,7	50				
	13	0,07	0,07	-0,7	0,7	20				
11	1	0,06	0,06	-0,1	0,1	500				
	2	0,06	0,06	-0,2	0,2	500				

	3	0,06	0,06	-0,3	0,3	500				
	4	0,06	0,06	-0,4	0,4	500				
	5	0,06	0,06	-0,5	0,5	500				
	6	0,06	0,06	-0,6	0,6	500				
	7	0,06	0,06	-0,6	0,6	400				
	8	0,06	0,06	-0,6	0,6	300				
	9	0,06	0,06	-0,6	0,6	200				
	10	0,06	0,06	-0,6	0,6	100				
	11	0,06	0,06	-0,6	0,6	50				
	12	0,06	0,06	-0,6	0,6	20				
12	1	0,05	0,05	-0,05	0,05	500				
	2	0,05	0,05	-0,07	0,07	500				
	3	0,05	0,05	-0,09	0,09	500				
	4	0,05	0,05	-0,1	0,1	500				
	5	0,05	0,05	-0,2	0,2	500				
	6	0,05	0,05	-0,3	0,3	500				
	7	0,05	0,05	-0,4	0,4	500				
	8	0,05	0,05	-0,5	0,5	500				
	9	0,05	0,05	-0,5	0,5	400				
	10	0,05	0,05	-0,5	0,5	300				
	11	0,05	0,05	-0,5	0,5	200				
	12	0,05	0,05	-0,5	0,5	100				
	13	0,05	0,05	-0,5	0,5	50				
	14	0,05	0,05	-0,5	0,5	20				
13	1	0,04	0,04	-0,05	0,05	500				
	2	0,04	0,04	-0,07	0,07	500				

	3	0,04	0,04	-0,09	0,09	500				
	4	0,04	0,04	-0,1	0,1	500				
	5	0,04	0,04	-0,2	0,2	500				
	6	0,04	0,04	-0,3	0,3	500				
	7	0,04	0,04	-0,4	0,4	500				
	8	0,04	0,04	-0,4	0,4	400				
	9	0,04	0,04	-0,4	0,4	300				
	10	0,04	0,04	-0,4	0,4	200				
	11	0,04	0,04	-0,4	0,4	100				
	12	0,04	0,04	-0,4	0,4	50				
	13	0,04	0,04	-0,4	0,4	20				
14	1	0,03	0,03	-0,03	0,03	500				
	2	0,03	0,03	-0,05	0,05	500				
	3	0,03	0,03	-0,07	0,07	500				
	4	0,03	0,03	-0,09	0,09	500				
	5	0,03	0,03	-0,1	0,1	500				
	6	0,03	0,03	-0,2	0,2	500				
	7	0,03	0,03	-0,3	0,3	500				
	8	0,03	0,03	-0,3	0,3	400				
	9	0,03	0,03	-0,3	0,3	300				
	10	0,03	0,03	-0,3	0,3	200				
	11	0,03	0,03	-0,3	0,3	100				
	12	0,03	0,03	-0,3	0,3	50				
	13	0,03	0,03	-0,3	0,3	20				
15	1	0,02	0,02	-0,03	0,03	500				
	2	0,02	0,02	-0,05	0,05	500				

	3	0,02	0,02	-0,07	0,07	500				
	4	0,02	0,02	-0,09	0,09	500				
	5	0,02	0,02	-0,1	0,1	500				
	6	0,02	0,02	-0,2	0,2	500				
	7	0,02	0,02	-0,2	0,2	400				
	8	0,02	0,02	-0,2	0,2	300				
	9	0,02	0,02	-0,2	0,2	200				
	10	0,02	0,02	-0,2	0,2	100				
	11	0,02	0,02	-0,2	0,2	50				
	12	0,02	0,02	-0,2	0,2	20				

#### **Контрольные вопросы к лабораторной работе № 4**

1. Дайте определение нанотранзистора.
2. Перечислите основные отличия нанотранзистора от макроскопического полевого транзистора.
3. Дайте определение квантового кондактанса.
4. Что такое линейный отклик?
5. Чем определяется протекание электрического тока через канал нанотранзистора?
6. Для рассматриваемого нанотранзистора охарактеризуйте проводимость *n*-типа.
7. Для рассматриваемого нанотранзистора охарактеризуйте проводимость *p*-типа.
8. Каковы результаты от учета эффекта уширения электронного уровня?
9. Охарактеризуйте оптимальный алгоритм расчета распределения электронной плотности в нанотранзисторе с использованием функции Лоренца.
10. Какой вид должна иметь зависимость распределения электронной плотности в нанотранзисторе, рассчитанная с использованием функции Лоренца?

#### **11. Расчет характеристик нанотранзистора**

В разделе 10 обсуждались вопросы, связанные с необходимостью введения модели уширения электронного уровня, что позволило описывать распределение электронной плотности в нанотранзисторе непрерывной гладкой

функцией. Также ранее было сказано, что явление проводимости в сверхмалых структурах определяется свойствами энергетических уровней в окрестности равновесного электрохимического потенциала  $\mu$ . Это так называемый «линейный отклик», наблюдаемый в наноструктурах при малых напряжениях смещения.

В структурах, имеющих малые размеры, влияние потенциала  $U$  сводится к сдвигу кривой плотности состояний вдоль оси энергий. Этот сдвиг можно непосредственно включить в выражение для силы тока  $I$  и числа электронов  $N$ .

Итак, для силы тока  $I$  с учетом размытой плотности состояний (то есть с учетом уширения уровня) было записано выражение (4):

$$I = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_{\varepsilon}(E) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)], \text{ с учетом же влияния потенциала } U$$

на сдвиг электронной плотности выражение для тока следует писать:

$$I = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_{\varepsilon}(E - U) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)] . \quad (5)$$

Для числа электронов в нанотранзисторе ранее было записано следующее выражение:  $N = \frac{\gamma_1 f_1(\varepsilon) + \gamma_2 f_2(\varepsilon)}{\gamma_1 + \gamma_2}$ , с учетом размытой плотности состояний (то есть с учетом уширения уровня) выражение для концентрации электронов примет вид:  $N = \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_{\varepsilon}(E) \frac{\gamma_1 f_1(E) + \gamma_2 f_2(E)}{\gamma_1 + \gamma_2}$ , а с учетом влияния потенциала  $U$  на сдвиг электронной плотности:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_{\varepsilon}(E - U) \frac{\gamma_1 f_1(E) + \gamma_2 f_2(E)}{\gamma_1 + \gamma_2} . \quad (6)$$

В нашем случае (см. раздел 8) проводимость нанотранзистора определяется квантовым кондактансом и не зависит от материала канала, то есть по отношению к характеристикам нанотранзистора канал можно считать непроводящим. Таким образом, расчет потенциала внутри канала следует проводить на основе решения уравнения Лапласа с граничными условиями  $V = V_s = 0$  (электрод истока),  $V = V_G$  (электрод затвора) и  $V = V_D$  (электрод стока):  $\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_r \vec{\nabla} V) = 0$ , где  $\varepsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость материала канала нанотранзистора.

Итак, рассмотрим канал как точечный объект, пренебрегая любыми пространственными изменениями потенциала внутри него. Для этого составим схему замещения, содержащую емкости, как показано на рис. 12.

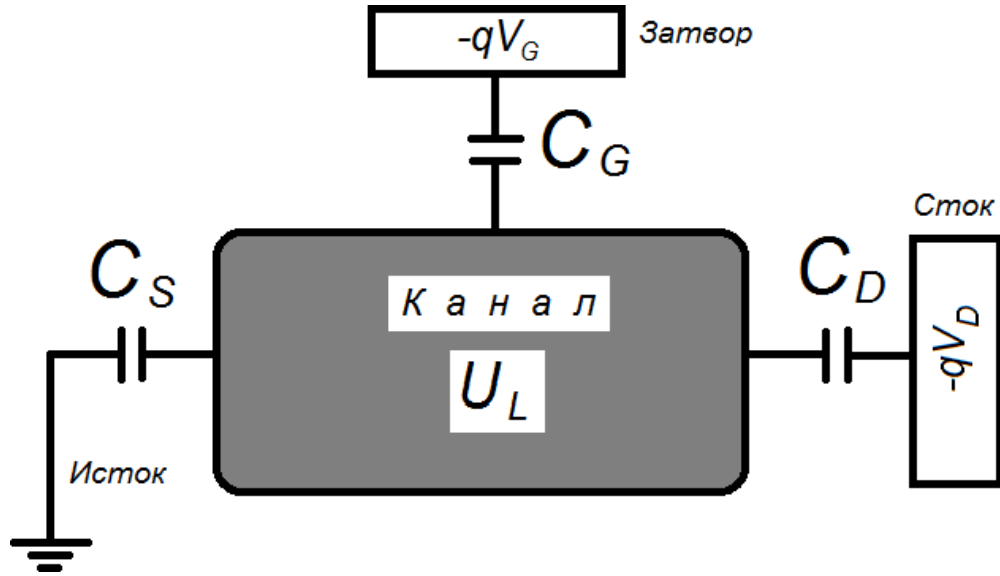


Рис. 12. Ёмкостная эквивалентная схема, используемая для расчета потенциала Лапласа активной области нанотранзистора  $U_L$ , возникающего в ответ на внешние напряжения затвора  $V_G$  и стока  $V_D$

Известно, что наиболее общей характеристикой взаимодействия является потенциальная энергия. Потенциальная энергия в канале получается умножением электростатического потенциала  $V$  на заряд электрона ( $-q$ ):

$$U_L = \frac{C_G}{C_E}(-qV_G) + \frac{C_D}{C_E}(-qV_D). \quad (7)$$

Для удобства отношения емкостей часто заменяют коэффициентами  $\alpha_G$   $\alpha_D$ , записывая выражение (7) следующим образом:

$$U_L = \alpha_G(-qV_G) + \alpha_D(-qV_D). \quad (8)$$

В ряде случаев потенциал Лапласа может быть представлен упрощенным вариантом выражений (7) и (8) следующим образом:

$$U_L = (-qV_D/2). \quad (9)$$

Потенциальная энергия ( $U_L$ ) приведена с нижним индексом « $L$ », так как она получена из уравнения Лапласа, т. е. без учета любого изменения электронного заряда. Такое предположение обоснованно при очень небольшом количестве электронных состояний в окрестности энергий  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

В общем, применительно к ёмкостной эквивалентной схеме нанотранзистора, показанной на рис. 12, изменение заряда в нашей системе можно записать как сумму зарядов трех конденсаторов:

$-q\Delta N = C_S V + C_G(V - V_G) + C_D(V - V_D)$ , так что полная потенциальная энергия  $U = -qV$  будет определяться суммой лапласовского потенциала и дополнительного слагаемого, пропорционального изменению числа электронов:



$$U = U_L + \frac{q^2}{C_E} \Delta N = U_L + U_0 \Delta N, \quad (10)$$

заметим, что  $C_E = C_S + C_G + C_D$ , а константа  $q^2 / C_E = U_0$  определяет изменения потенциальной энергии вследствие появления одного дополнительного электрона. Она называется *одноэлектронной энергией электростатического отталкивания*.

Изменение  $\Delta N$  количества электронов вычисляется относительно того первоначального числа электронов в канале  $N_0$ , которое соответствует предполагаемому положению энергетического уровня  $\varepsilon$ .

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

**Тема.** Расчет выходной электрической характеристики нанотранзистора.

### Цель работы

1. Используя возможности MatLab, произвести численное моделирование работы нанотранзистора в рамках модели самосогласованного поля.
2. Расчетным путем получить зависимости концентрации электронов внутри канала и тока стока (выходного тока нанотранзистора, включенного по схеме с общим заземленным истоком) от напряжения стока.

### Задание и ход выполнения работы

1. При моделировании работы нанотранзистора следует придерживаться следующей обобщенной схемы, заключающейся в самосогласованном расчете величин потенциала внутри канала (потенциальной энергии) ( $U$ ) и числа электронов ( $N$ ), используя, соответственно, выражения (10) и (6). Заметим, что в правую часть уравнения (6) входит величина  $U$ , которая, в свою очередь, зависит от  $N$  через соотношение (10). Следовательно, эти два уравнения должны решаться одновременно, т. е. «самосогласованно». Это обычно выполняется с помощью итерационной процедуры. Критерием самосогласованного расчета по итерационной процедуре является сходимость по величине  $U$ . После того, как получена величина  $U$ , можно рассчитывать величину силы тока ( $I$ ) по уравнению 5.
2. Расчет выполняется в соответствии с выданным вариантом задания, варианты заданий приведены в табл. 12.
3. Для выполнения задания по моделированию нанотранзистора выполните следующие действия:

Очистите содержимое командного окна программы MatLab и удалите все ранее используемые переменные.

Введите в программу MatLab необходимые константы и переменные.

Рекомендуются следующие обозначения констант и переменных (все величины вводить в единицах Си за исключением энергии, которая вводится в эВ):

- постоянная Планка  $\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34}$  (Дж·с)  $\rightarrow \hbar$  or;
- элементарный заряд  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл  $\rightarrow q$ ;
- произведение постоянной Больцмана на температуру  $k_B T$ , Дж  $\rightarrow kT$ ;
- параметр  $U_0 \rightarrow U_0$ ;
- энергия электронного уровня в канале транзистора  $\epsilon$ , эВ  $\rightarrow \epsilon$ ;
- $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , эВ, для областей истока и стока, соответственно  $\rightarrow g_1$  и  $g_2$ ;
- $\alpha_G$  и  $\alpha_D$ , входящие в выражение (8)  $\rightarrow \alpha_{\text{g}}$  и  $\alpha_{\text{d}}$ .

Произвести расчет электронной плотности состояний  $D_\epsilon(E) \rightarrow D$  составив предварительно сетку по энергии  $\rightarrow E$  (см. лабораторную работу № 4), задействовав переменные  $NE$  – число точек по сетке энергии ( $N_E$ ),  $dE$  – шаг по сетке энергии,  $g$  – являющейся суммой  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ,  $E_{\min}$ ,  $E_{\max}$ ,  $N_E$  – выбрать самостоятельно, основываясь на сформированных компетенциях в ходе выполнения лабораторной работы № 4.

Учитывая диапазон напряжений на стоке относительно истока (см. выданный вариант задания), составить сетку по напряжению, для которой будет производиться самосогласованный расчет  $U$  и  $N$  способом итераций. Рекомендуется использовать следующие значения переменных:

- количество точек по сетке напряжений  $\rightarrow NV$ ;
- массив значений сетки напряжений  $\rightarrow V$ .

Самосогласованно, с использованием итерационной процедуры, произвести расчет величин  $U$  и  $N$ . Расчет необходимо проводить для каждой точки сетки напряжений, которые будут рассматриваться на каждом цикле расчета как напряжения смещения нанотранзистора. Для этого наиболее удобно составить цикл «for», параметром которого будут последовательно точки сетки по напряжению. В этом цикле периодически пересчитываются:

- текущие значения напряжений истока (по условию всегда равно нулю) и стока  $\rightarrow V_g$  и  $V_d$ ;
- электрохимические потенциалы истока и стока  $\mu_1 = 0$ , эВ и  $\mu_2$ , эВ  $\rightarrow \mu_1$  и  $\mu_2$ , причем  $\mu_2 = \mu_1 - V_D$ ;
- потенциал Лапласа, эВ, с использованием одного из выражений (8–9)  $\rightarrow U_L$ . Выражение 9 использовать в случае, если  $\alpha$  не заданы и напряжение на затворе нанотранзистора равно нулю;
- самосогласованное поле, оно, по сути, представляет собой согласованное с концентрацией электронов значение потенциала в канале. Другими словами, необходимо получить самосогласованные

величины  $U$  и  $N$  для каждого напряжения смещения, то есть для каждой точки сетки по напряжению. Итерационная процедура должна продолжаться до тех пор, пока вновь рассчитанное значение напряжения не будет превышать предыдущее, менее чем на установленное значение (критерий смотри далее).

### Расчет самосогласованного поля

– Вводим в программу значение расчетного поля равного нулю  $\rightarrow U=0$ . Мы не ошибемся, если представим себе, что до установления влияния напряжений смещения на состояние канала поле внутри этого канала будет равно нулю.

– Вводим в программу критерий окончания итерационной процедуры, представляющий собой разницу между вновь рассчитанным значением поля и его значением на предыдущем этапе  $\rightarrow dU = |U - U_{\text{new}}|$ , но до начала итерационной процедуры  $dU$  мы посчитать не можем, поэтому принимаем его большим и в предельном случае равным максимальному напряжению, которое может быть на стоке. Например, сетка по напряжению составлялась от нуля до одного вольта, следовательно, максимальное напряжение на истоке не может превысить 1 вольта и в начале очередной итерационной процедуры вполне можно принять  $dU=1$ .

– Итерационная процедура с точки зрения программирования представляет собой цикл операторов, которые должны повторяться, пока логическое выражение в теле цикла имеет значение «истина (true)». Для организации расчета самосогласованных величин  $U$  и  $N$  целесообразно использовать цикл «while» (см. лабораторную работу №3)  $\rightarrow \text{while } dU > (0.1 * kT)$

...  
end

Внутри цикла «while» считаются:

а) функции Ферми для

$$\text{истока} \rightarrow f1: f_1(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E + \varepsilon + U_L + U - \mu_1) / k_B T]} \quad \text{и}$$

$$\text{стока} \rightarrow f2: f_2(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E + \varepsilon + U_L + U - \mu_2) / k_B T]}.$$

Следует отметить, что в переменных  $f1$  и  $f2$  будут храниться массивы значений, так как переменная  $E$  – это массив, объявленный ранее на этапе составления сетки по энергии;

б) расчетное значение концентрации электронов в канале  $\rightarrow N(i)$  по уравнению (6), некоторое текущее значение, не соответствующее пока согласованному полю, в нанотранзисторе. Интегрирование уравнения (6) провести с использованием метода прямоугольника:

$$N = dE \sum (D_{\varepsilon}(E) ((f_1(E) \frac{\gamma_1}{\gamma}) + (f_2(E) \frac{\gamma_2}{\gamma}))).$$

Заметим, что окончательное значение концентрации электронов (после прекращения итерационного цикла) необходимо запомнить, поэтому желательно использовать массив  $N()$  с количеством элементов, соответствующих количеству точек на сетке напряжений, или, другими словами, с количеством элементов, равных количеству проводимых интеграционных процедур;

в) *новое значение поля в нанотранзисторе*  $\rightarrow U_{new}$  рассчитывают по только что полученному в пункте «б» значению расчетной концентрации электронов:  $U_{new} = U_0 N(\text{текущее в итерац. процедуре})$ ;

г) *пересчитываемое значение  $dU$* , используемое для прекращения цикла «while», т. е. итерационной процедуры на данной точке сетки по напряжению:  $dU = |U - U_{new}|$ ;

д) *пересчитываемое значение  $U$* , как  $U = U + \alpha (U_{new} - U)$ .

Значение величины  $\alpha$  влияет на количество необходимых циклов итерационных процессов, чем  $\alpha$  больше, тем быстрее может быть достигнут результат самосогласованного расчета  $U$  и  $N$ , однако при слишком большом значении  $\alpha$  итерационная процедура может расходиться, о чем свидетельствует увеличение  $dU$  при последующих итерациях. На практике обычно  $\alpha=0,1$ .

Итерационный процесс должен повторяться до тех пор, пока мы не найдем  $U$  и не вычислим число электронов  $N$ , при котором новое значение  $U$  будет достаточно близко к предыдущему (в пределах долей  $k_B T$ ).

После окончания итерационной процедуры также во внешнем цикле «for» рассчитывается величина тока  $I(i)$  по уравнению (5), соответствующая текущему значению смещения по сетке напряжения. Интегрирование уравнения (5) следует проводить с использованием метода прямоугольника:

$$I = \frac{q^2}{\hbar} dE (\sum (D_{\varepsilon}(E) (f_1(E) - f_2(E)))) (\frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma}).$$

Заметим, что после окончания работы цикла «for», мы должны получить массивы:

$D$  – плотность электронных состояний  $D_{\varepsilon}(E)$ ;

$E$  – сетка по энергии;

$N$  – количество электронов;

$I$  – величина тока;

$V$  – сетка по напряжению.

4. Вывести результаты расчетов в виде графических зависимостей  $D_{\varepsilon}(E)$ ,  $N(V)$  и  $I(V)$ . Примеры зависимостей показаны на рис. 13 – 16.
5. Варианты заданий приведены в табл. 12. Результаты обработки

расчетных зависимостей занести в табл. 13:  $N_e$  – диапазон значений концентраций электронов в канале нанотранзистора;  $I_{\text{стока max}}$  – максимальный ток, наблюдаемый на ВАХ;  $V_{\text{пор}}$  – пороговое значение напряжения, наблюдаемое на ВАХ, которое определяется по касательной к экспериментальной зависимости тока стока от напряжения стока (ВАХ).

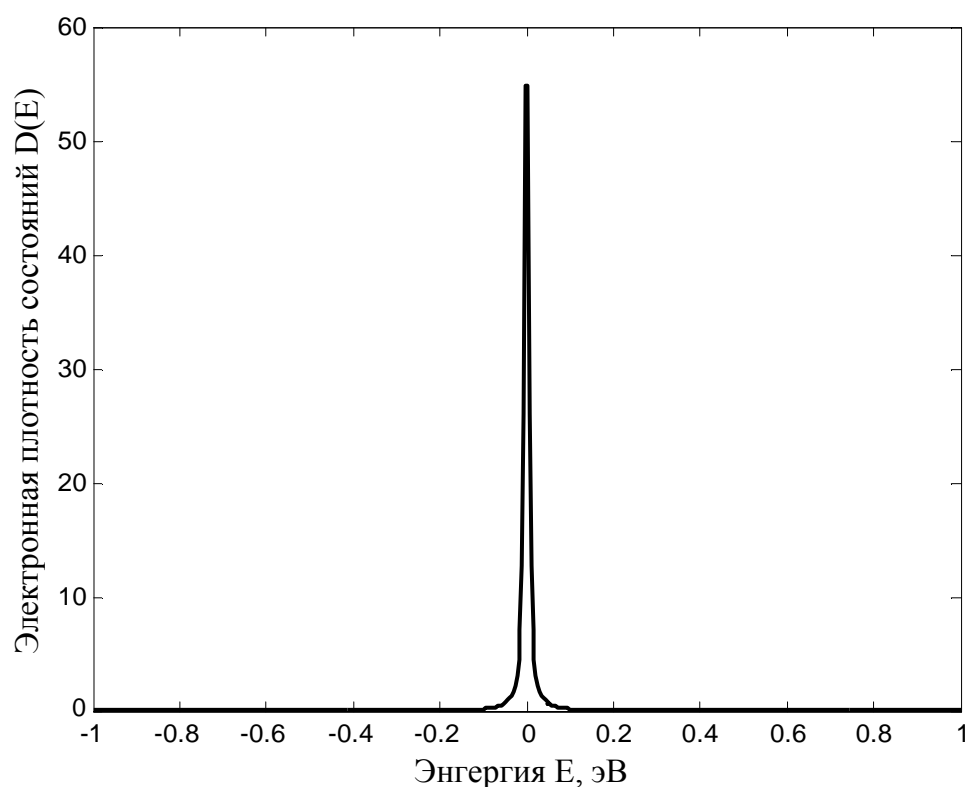


Рис. 13. Электронная плотность состояний:  
 $E_{\text{min}} = 1$  эВ,  $E_{\text{max}} = 1$  эВ,  $N_E = 500$

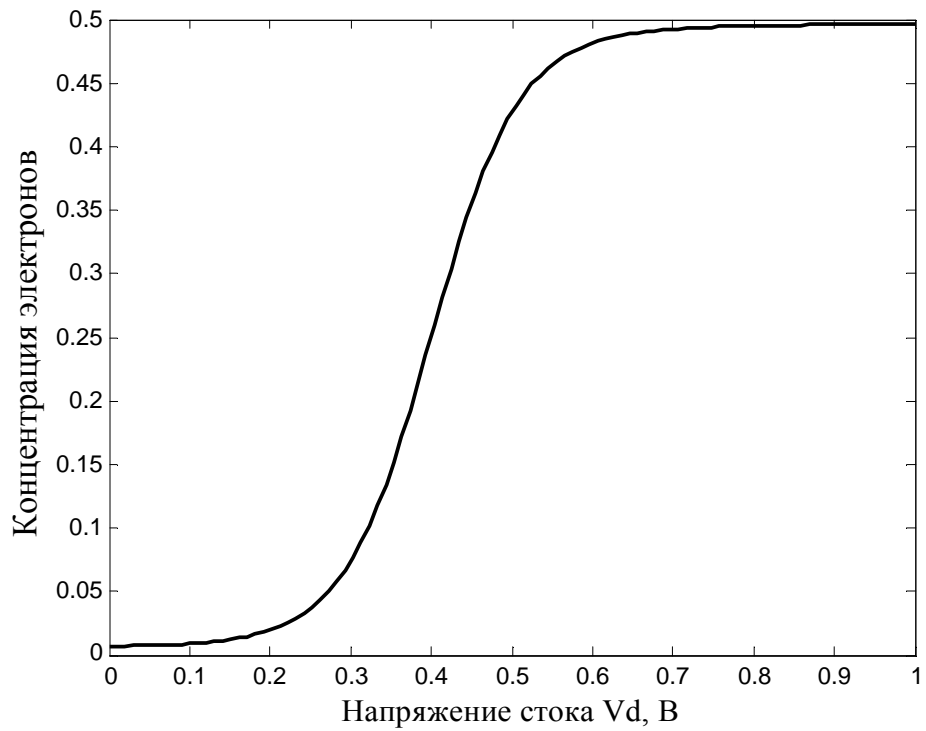


Рис. 14. Зависимость концентрации электронов в канале от напряжения стока:

$V_{D \min}=0 \text{ В}; V_{D \max}=1 \text{ В}, N_V=100,$   
 $V_G=0 \text{ В}, V_S=0 \text{ В}, \varepsilon=0,2 \text{ эВ}, \gamma_1=0,005 \text{ эВ}, \gamma_2=0,005 \text{ эВ}$

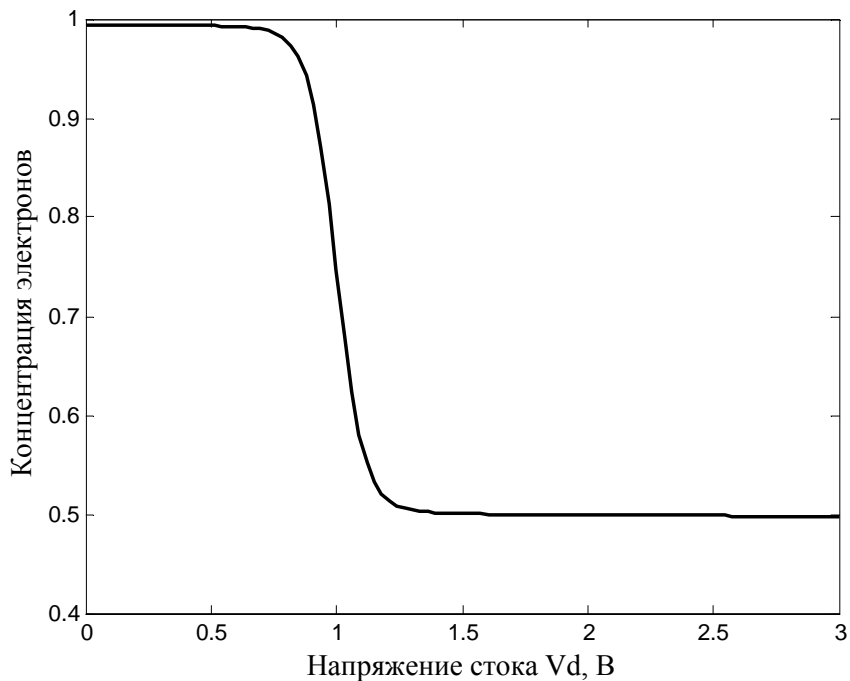


Рис. 15. Зависимость концентрации электронов в канале от напряжения стока:

$V_{D \min}=0 \text{ В}; V_{D \max}=3 \text{ В}, N_V=100, V_G=1 \text{ В}, V_S=0 \text{ В}, \varepsilon=0,5 \text{ эВ},$   
 $\gamma_1=0,005 \text{ эВ}, \gamma_2=0,005 \text{ эВ}$

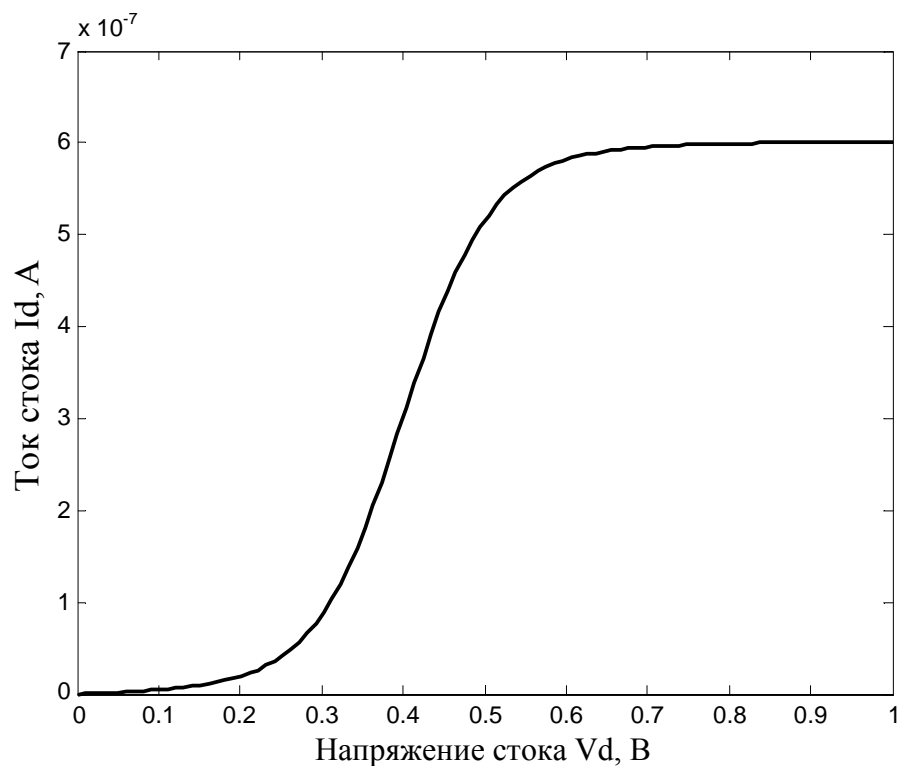


Рис. 16. Зависимость тока стока от напряжения стока:  
 $V_{D \min}=0 \text{ В}$ ;  $V_{D \max}=1 \text{ В}$ ,  $N_V=100$ ,  $V_G=0 \text{ В}$ ,  $V_S=0 \text{ В}$ ,  $\epsilon=0,2 \text{ эВ}$ ,  $\gamma_1=0,005 \text{ эВ}$ ,  
 $\gamma_2=0,005 \text{ эВ}$

Таблица 12

Варианты заданий к лабораторной работе № 5

Но мер зад.	$U_0$	$\epsilon$ , эВ	$\gamma_1$ , эВ	$\gamma_2$ , эВ	$\alpha_G$	$\alpha_D$	$V_S$ , В (исток)	$V_D^{\max}$ , В (сток)	$V_G$ , В (затвор)	$\mu_1$ , эВ
1	0,025	0,2	0,005	0,005	1	0,5	0	1	0	0
2	0,025	0,2	0,005	0,005	1	0,5	0	2	0	0
3	0,025	0,2	0,005	0,005	1	0,5	0	3	0	0
4	0,025	0,3	0,005	0,005	1	0,5	0	1	0	0
5	0,025	0,4	0,005	0,005	1	0,5	0	2	0	0
6	0,025	0,5	0,005	0,005	1	0,5	0	3	0	0
7	0,025	0,5	0,005	0,005	1	0,5	0	3	1	0
8	0,025	0,5	0,005	0,005	1	0,5	0	4	2	0

9	0,025	0,5	0,005	0,005	1	0,5	0	5	2	0
10	0,025	0,4	0,005	0,005	1	0,5	0	5	2	0
11	0,025	0,3	0,005	0,005	1	0,5	0	5	2	0
12	0,025	0,2	0,005	0,005	1	0,5	0	5	2	0
13	0,025	0,2	0,05	0,05	1	0,5	0	6	2	0
14	0,025	0,2	0,09	0,09	1	0,5	0	6	2	0
15	0,025	0,2	0,5	0,5	1	0,5	0	10	2	0

Таблица 13

Результаты расчетов к лабораторной работе № 5

Но мер зад.	$E_{\min}$ , эВ	$E_{\max}$ , эВ	$N_E$	$dE$ , эВ	$V_{D \min}$ , В	$V_{D \max}$ , В	$N_V$ , В	$dV$ , В	$N_e$ (диапазон)	$I_{\text{стока, max}}$ , А	$V_{\text{пор}}$ , В
X	Сетка по энергии				Сетка по напряжению				X	X	X
1					0						
2					0						
...	...	...	...	...	0	...	...	...	...	...	...
15					0						

**Примечание:**

- символ «X» в табл. 13 означает, что данное поле таблицы не задействовано;
- в отчете привести только части табл. 12 и 13, соответствующие вариантам выданных заданий.

**Контрольные вопросы к лабораторной работе № 5**

1. Студент должен уметь охарактеризовать и объяснить физический смысл всех приведенных формул в табл. 14.



## Контрольные формулы

Номер формулы	Вид контрольной формулы
1	$f_0(E - \mu) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu) / k_B T]}$
2	$\mu_1 - \mu_2 = qV_D$
3	$f_1(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu_1) / k_B T]} = f_0(E - \mu_1)$
4	$f_2(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu_2) / k_B T]} = f_0(E - \mu_2)$
5	$N = \frac{\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$
6	$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_\varepsilon(E) \frac{\gamma_1 f_1(E) + \gamma_2 f_2(E)}{\gamma_1 + \gamma_2}$
7	$N = \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_\varepsilon(E - U) \frac{\gamma_1 f_1(E) + \gamma_2 f_2(E)}{\gamma_1 + \gamma_2}$
8	$I = I_1 = -I_2 = \frac{q}{\hbar} \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]$
9	$I = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_\varepsilon(E) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]$
10	$I = \frac{q}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE D_\varepsilon(E - U) \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]$
11	$D_\varepsilon(E) = \frac{\gamma / 2\pi}{(E - \varepsilon)^2 + (\gamma / 2)^2}$
12	$U_L = \frac{C_G}{C_E} (-qV_G) + \frac{C_D}{C_E} (-qV_D)$
13	$U_{new} = U_{old} + \alpha(U_{calc} - U_{old})$
14	$U = U_L + \frac{q^2}{C_E} \Delta N = U_L + U_0 \Delta N$

2. Объясните физический смысл функции Ферми и ее участие в составлении баланса потоков частиц в нанотранзисторе.
3. Как влияет потенциал  $U$  на электронную плотность и величины концентрации электронов внутри канала нанотранзистора и тока стока?
4. Охарактеризуйте основные положения ёмкостной модели нанотранзистора и правомочность ее введения по отношению к рассмотрению характеристик нанотранзистора.
5. Какова роль уравнения Лапласа при расчете энергии взаимодействия канала с электродами нанотранзистора?
6. Каковы основные допущения при использовании уравнения Лапласа для расчета характеристик нанотранзистора?
7. Нарисуйте обобщенную схему итерационной процедуры расчета зависимости тока стока нанотранзистора от напряжения стока (для схемы с общим истоком).
8. Как выглядит выходная характеристика нанотранзистора, включенного по схеме с общим истоком?
9. Какими величинами определяется вид зависимости плотности распределения электронов в канале нанотранзистора?
10. Каков физический смысл величин  $\gamma/\hbar$  и  $\gamma$ ?

## Лабораторная работа №6

# ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

**Химический потенциал невырожденного идеального газа.**

### Энергия Ферми

Химический потенциал определяет среднюю энергию частиц в термодинамической системе микрочастиц, отнесенную к одной частице. Для химического потенциала можно записать:

$$\mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_{kT = \text{const}}. \quad (1)$$

С другой стороны, количество частиц в термодинамической системе определяется интегрированием полной функции распределения:

$$N(E) = (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^E e^{\frac{\mu - E}{kT}} E^{1/2} dE. \quad (2)$$

Дифференцируя это выражение по энергии, получим:

$$\frac{dN}{dE} = \frac{1}{\mu} = (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} e^{\frac{\mu - E}{kT}} E^{1/2}. \quad (3)$$

В равновесном состоянии энергия и количество частиц в термодинамической системе постоянны, поэтому для такого состояния

можно записать  $\mu = E / N$ . Учитывая это соотношение, получим:

$$e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{h^3}{(2s + 1) V} \cdot \frac{N}{2\pi (2mE)^{3/2}} e^{\frac{E}{kT}}. \quad (4)$$

Воспользовавшись формулой Больцмана

$$E = \frac{3}{2} kT \quad (5)$$

и обозначив концентрацию частиц  $n = \frac{N}{V}$ , получим:

$$e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{n}{2s+1} \left( \frac{\hbar^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}. \quad (6)$$

Логарифмируя это выражение, получим выражение для химического потенциала:

$$\mu = kT \ln \left[ \frac{n}{2s+1} \cdot \left( \frac{\hbar^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \right]. \quad (7)$$

Величина

$$(2s+1) \left( \frac{2\pi mkT}{\hbar^2} \right)^{3/2} = N_0 \quad (8)$$

получила название *эффективного числа состояний*. Подставляя это выражение в химический потенциал, получим:  $n$

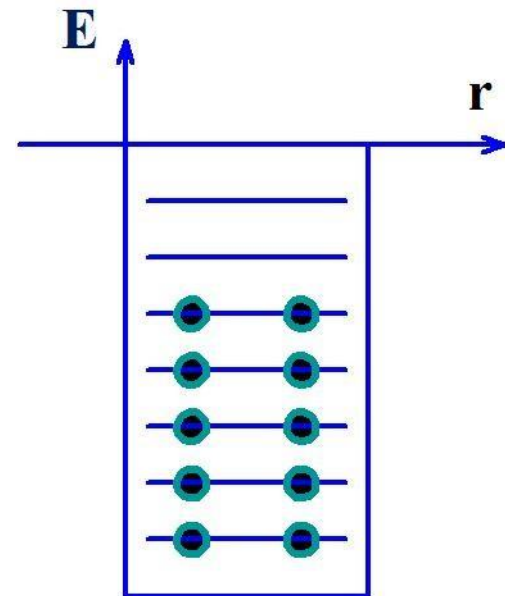
$$\mu = kT \ln \frac{n}{N_0}. \quad (9)$$

Химический потенциал в применении к полупроводникам и металлам определяет среднюю энергию электронного газа, отнесенную к одному электрону, и совпадает с понятием энергии Ферми.

### **Распределение Ферми-Дирака при абсолютном нуле**

Электроны в металле можно рассматривать как находящиеся в потенциальной яме (рис. 1). Выход электронов из металла требует затраты энергии для преодоления сил химической связи, которые удерживают электроны. Обычно за нулевой уровень энергии принимается поверхность металла — электроны, находящиеся вне металла. В связи с этим электроны в металле, находящиеся в потенциальной яме, имеют отрицательную энергию.

Если бы электроны не были фермионами, то при абсолютном нуле они бы скапливались на дне потенциальной ямы. Являясь фермионами и подчиняясь принципу запрета Паули, электроны последовательно занимают уровни от дна потенциальной ямы до верхнего последнего уровня, который получил название *уровня Ферми*. Энергия этого уровня соответствует энергии Ферми.



Поскольку энергия Ферми в этом случае

**Рис. 1.** Электроны в потенциальной яме -

отсчитывается от дна потенциальной ямы, то эта энергия всегда положительная.

Рассматривая заполнение энергетических уровней при абсолютном нуле, следует отметить, что при  $E < E_F$  все энергетические уровни будут заняты. В то же время для  $E > E_F$  все энергетические уровни будут свободны. Таким образом, для функции распределения Ферми-Дирака при абсолютном нуле можно записать:

$$f(E) = \begin{cases} 1 & E < E_F \\ 0 & E > E_f. \end{cases} \quad (10)$$

Полная функция распределения Ферми-Дирака запишется:

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE = \begin{cases} g(E)dE & E < E_F \\ 0 & E > E_f. \end{cases} \quad (11)$$

### Вычисление энергии Ферми

Энергия Ферми  $E_F$  может быть найдена интегрированием полной функции распределения в пределах от 0 до  $E_F$ :

$$\int_0^{E_F} N(E)dE = N. \quad (12)$$

Этот интеграл определяет число частиц с энергией  $E_F$ . Полная функция распределения для вырожденного газа фермионов при температуре абсолютного нуля будет определяться:

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE = g(E)dE. \quad (13)$$

Плотность числа состояний определяется:

$$g(E) = (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}. \quad (14)$$

Интегрируя, получим полное число частиц:

$$N = \int_0^{E_F} (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} dE. \quad (15)$$

Учитывая, что спин электрона  $s=1/2$ , и вычисляя интеграл, получим:

$$N = \frac{8\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} E_F^{3/2}. \quad (16)$$

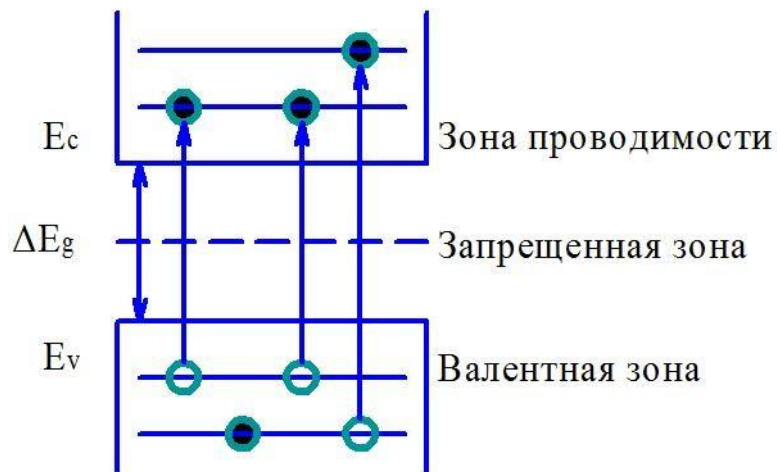
Из этого выражения энергия Ферми абсолютного нуля определяется:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (17)$$

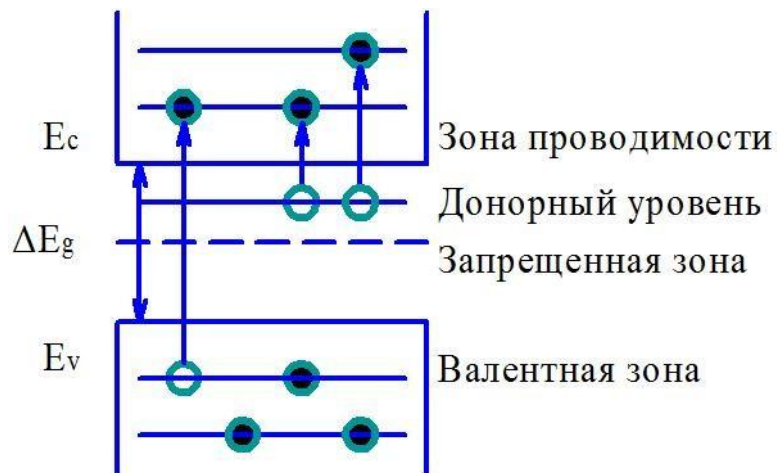
### Собственные и примесные полупроводники

Проводимость химически чистых полупроводников называется *собственной проводимостью*, а сами полупроводники – *собственными полупроводниками*. В таких полупроводниках энергетические зоны включают зону проводимости  $E_C$ , валентную зону  $E_V$  и запрещенную зону  $\Delta E_g$  (рис. 2).

В примесных полупроводниках энергетические зоны включают зону проводимости, валентную зону и запрещенную зону. Кроме того, зонная структура таких полупроводников включает примесные уровни, располагающие в запрещенной зоне. В полупроводнике n-типа таким уровнем является донорный уровень, который располагается вблизи зоны проводимости (рис. 3).

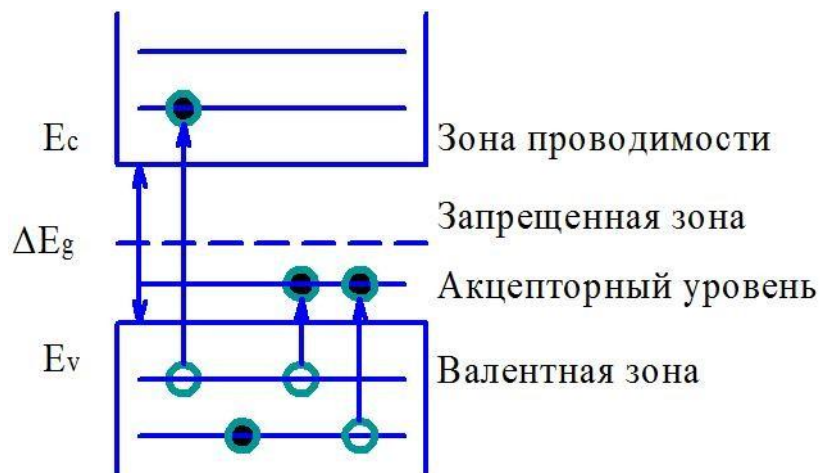


**Рис. 2.** Зонная диаграмма собственного полупроводника



**Рис. 3.** Зонная диаграмма полупроводника n-типа

В примесных полупроводниках p-типа акцепторный уровень располагается вблизи валентной зоны (рис. 4).



**Рис.4.** Зонная диаграмма полупроводника p-типа

В примесных полупроводниках различают основные и неосновные носители заряда. Основные носители заряда определяются

наличием примеси. Неосновные носители заряда связаны с собственной проводимостью полупроводника. В примесном полупроводнике *n*-типа основными носителями заряда являются электроны, а неосновными – дырки. В полупроводнике *p*-типа основными носителями заряда являются дырки, а неосновными – электроны.

Полупроводники, у которых электронный газ в зоне проводимости или дырочный газ в валентной зоне является невырожденным, называются *невырожденными полупроводниками*. Если электронный или дырочный газ является вырожденным, то такие полупроводники называются *вырожденными*.

### **Статистика носителей заряда в собственном полупроводнике**

В собственном полупроводнике носителями зарядов являются электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне. Статистическими характеристиками этих носителей заряда будут функция распределения  $f(E)$ , концентрация носителей  $n_i$  и  $p_i$  и энергия носителей заряда, которая характеризуется химическим потенциалом – энергией Ферми.

При нулевой температуре в химически чистом полупроводнике как в зоне проводимости, так и в валентной зоне будут отсутствовать подвижные носители заряда. При увеличении температуры будет происходить активизация электронов в валентной зоне, и они будут переходить в зону проводимости. Уход электронов из валентной зоны будет сопровождаться образованием дырочных носителей заряда в валентной зоне. При этом количество электронов в зоне проводимости будет равно количеству дырок в валентной зоне  $n_i = p_i$ .

При комнатной температуре электронный газ в зоне проводимости и дырочный газ в валентной зоне будут невырожденными. Следовательно, статистика электронного и дырочного газа в собственном полупроводнике при комнатной температуре будет определяться функцией распределения Максвелла-Больцмана:



$$f(E) = f_B(E) = \frac{n_i}{N_C} e^{-E/kT} = \frac{p_i}{N_V} e^{-E/kT}, \quad (18)$$

где  $N_C$  и  $N_V$  – эффективное число состояний в зоне проводимости и в валентной зоне, которые определяются выражениями:

$$N_C = (2s + 1) \left( \frac{2\pi m_n kT}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad (19)$$

$$N_V = (2s + 1) \left( \frac{2\pi m_p kT}{\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (20)$$

В этих выражениях  $m_n$  и  $m_p$  – эффективные массы электронов и дырок. Для определения концентрации носителей заряда необходимо воспользоваться интегральной функцией распределения:

$$n_i = p_i = \frac{1}{V} \int_0^E f(E) g(E) dE, \quad (21)$$

где плотность числа состояний определится:

$$g(E) = (2s + 1) \frac{2\pi V}{\hbar^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}. \quad (22)$$

Учитывая, что спин для электронов и дырок равен  $s=1/2$ , и рассматривая совместно выражения для функции распределения и концентраций носителей заряда, получим для концентраций:

$$n_i = p_i = (N_C N_V)^{1/2} e^{\frac{\Delta E_g}{2kT}}, \quad (23)$$

где  $\Delta E_g$  – ширина запрещенной зоны.

Химический потенциал, или уровень Ферми, электронов зоны проводимости определится:

$$\mu_n = kT \ln \frac{n_i}{N_C}. \quad (24)$$

Это выражение определяет значение химического потенциала электронов зоны проводимости, отсчитываемого от дна зоны

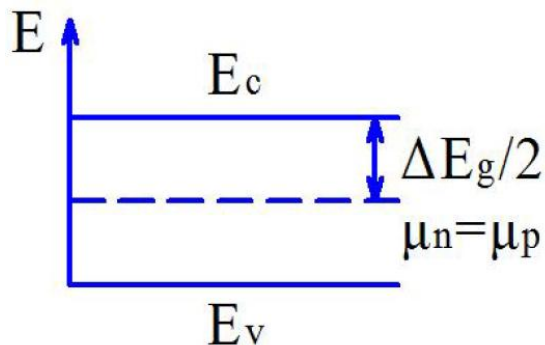
проводимости. Для невырожденного полупроводника с уменьшением концентрации электронов уровень Ферми будет опускаться ниже дна зоны проводимости.

Химический потенциал дырочного газа в валентной зоне определится:

$$\mu_p = kT \ln \frac{p_i}{N_V}. \quad (25)$$

В равновесном состоянии уровни Ферми для электронов и дырок совпадают (рис. 5):

$$\mu_n = \mu_p = E_g / 2. \quad (26)$$



**Рис. 5.** Положение уровня Ферми в собственном полупроводнике

### **Статистика носителей заряда в примесных полупроводниках n-типа**

К статистическим параметрам примесного полупроводника *n*-типа относятся виды носителей заряда, их концентрации и функции распределения, энергия газа, формируемого этими зарядами.

В примесном полупроводнике *n*-типа существуют основные носители заряда – электроны ( $n_n$ ) и неосновные носители заряда – дырки ( $p_n$ ). Концентрация основных носителей заряда определяется наличием донорной примеси  $n_d$  и собственной проводимостью полупроводника  $n_i$ . Концентрация основных носителей заряда в примесном полупроводнике может, практически, принимать любые значения. Это определяется легированием полупроводника донорной примесью. Поэтому электронный газ в полупроводнике *n*-типа может

определяться как статистикой Максвелла-Больцмана, так и статистикой Ферми-Дирака.

Концентрация неосновных носителей заряда  $p_n$  определяется собственной проводимостью примесного полупроводника  $p_n = p_i$ . Поэтому дырочный газ в примесном полупроводнике  $n$ -типа будет определяться статистикой Максвелла-Больцмана.

Для определения концентраций носителей заряда воспользуемся интегральной функцией распределения:

$$n = \frac{1}{V} \int_0^E f(E) g(E) dE. \quad (27)$$

В случае неосновных носителей заряда функция распределения  $f(E)$  определится:

$$f(E) = f_B(E) = \frac{n_i}{N_C} e^{\frac{E}{kT}} = \frac{p_i}{N_V} e^{\frac{E}{kT}}. \quad (28)$$

Плотность числа состояний запишется:

$$g(E) = (2s + 1) \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}, \quad (29)$$

$$p_i = \frac{1}{V} \int_0^{E_g} f_B(E) g(E) dE. \quad (30)$$

Из этих выражений концентрация неосновных носителей заряда определится:

$$p_n = p_i = (N_C N_V)^{1/2} e^{\frac{E_g}{kT}}. \quad (31)$$

Концентрация основных носителей заряда будет определяться:

$$n_n = n_d + n_i, \quad (32)$$

при этом

$$n_i = p_i, \quad (33)$$

и величина  $n_d$  будет зависеть от концентрации донорной примеси  $N_d$ .

Если концентрация донорной примеси будет меньше эффективного числа состояний в зоне проводимости  $N_d < N_c$ , то при определении  $n_d$  необходимо воспользоваться статистикой Максвелла-Больцмана:

$$n_d = \frac{1}{V} \int_0^{E_d} f_B(E) g(E) dE, \quad (34)$$

где  $E_d$  – энергия ионизации донорного уровня.

В том случае, если концентрация донорной примеси соизмерима с эффективным числом состояний в зоне проводимости  $N_d \sim N_c$ , то при определении  $n_d$  необходимо воспользоваться распределением Ферми-Дирака:

$$f(E) = f_F(E) = \frac{1}{e^{\frac{\mu - E}{kT}} + 1}, \quad (35)$$

химический потенциал  $\mu$  определится

$$\mu = \mu_n = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad (36)$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3n_d}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (37)$$

Таким образом, для определения концентрации основных носителей заряда, связанных с донорной примесью, необходимо рассмотреть систему нелинейных уравнений.

### **Уровень Ферми носителей заряда в примесном полупроводнике $n$ -типа**

Так как неосновные носители заряда  $p_n$  в примесном полупроводнике  $n$ -типа определяются статистикой Максвелла-

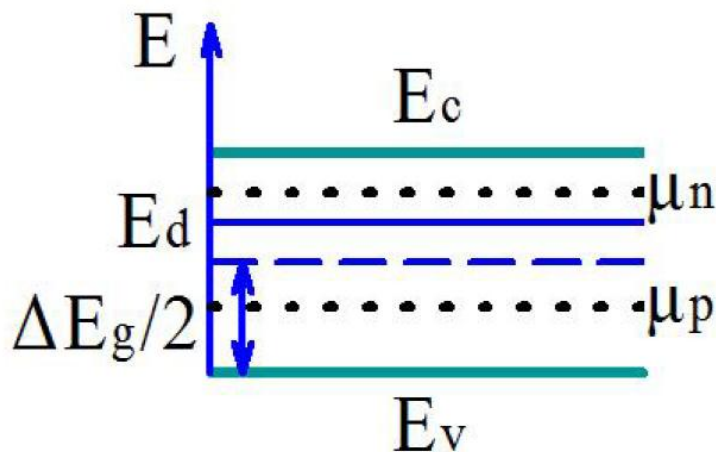
Больцмана, то химический потенциал или энергия Ферми дырочного газа неосновных носителей будет определяться:

$$\mu_p = kT \ln \frac{p_n}{N_v}. \quad (38)$$

Поскольку концентрация неосновных носителей заряда определяется собственной проводимостью примесного полупроводника, то уровень Ферми неосновных носителей заряда будет иметь отрицательное значение ( $p_n < N_v$ ) и будет располагаться вблизи середины запрещенной зоны.

Если концентрация донорной примеси примесного полупроводника будет меньше эффективного числа состояний в зоне проводимости  $N_d < N_c$ , то электронный газ основных носителей заряда будет невырожденным (рис. 6), и значение химического потенциала запишется:

$$\mu_n = kT \ln \frac{n_n}{N_c}. \quad (39)$$



**Рис. 6.** Положение уровня Ферми в невырожденном полупроводнике *n*-типа

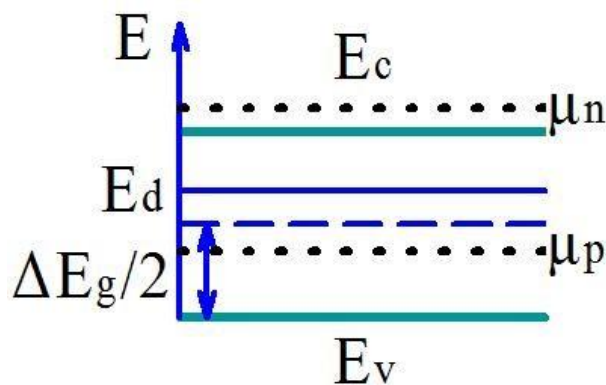
При низких температурах уровень Ферми, соответствующий энергии Ферми основных носителей заряда, будет иметь также отрицательное значение ( $n_n < N_c$ ) и будет располагаться между дном зоны проводимости и донорным уровнем.

Это определяется тем, что энергия Ферми характеризует среднюю энергию носителей заряда, отнесенную к одному заряду. Минимальное значение энергии основных носителей заряда соответствует положению донорного уровня, а максимальное – энергии зоны проводимости.

В том случае, если электронный газ основных носителей заряда является вырожденным ( $N_d \sim N_c$ ) (рис. 7), энергия Ферми будет определяться:

$$\mu_n = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad (40)$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3n_d}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (41)$$



**Рис. 7.** Положение уровня Ферми в вырожденном полупроводнике *n*-типа

Из этих выражений следует, что в области низких температур энергия Ферми электронного газа основных носителей заряда будет иметь положительное значение и, следовательно, уровень Ферми носителей заряда будет располагаться в зоне проводимости.

С увеличением температуры уровень Ферми основных носителей заряда как для вырожденного, так и для невырожденного электронного газа будет смещаться к середине запрещенной зоны. Для невырожденного электронного газа это будет определяться

опережающим ростом с температурой эффективного числа состояний в зоне проводимости  $N_c$ .

Для вырожденного электронного газа основных носителей заряда с увеличением температуры энергия Ферми становится отрицательной. Это определяется тем, что с увеличением температуры будет наблюдаться истощение примесного донорного уровня.

## Статистика носителей заряда в примесном полупроводнике

### *p*-типа

В примесном полупроводнике *p*-типа основными носителями заряда будут дырки  $p_p$ , а неосновными носителями будут электроны  $n_p = n_i$ . Концентрация неосновных носителей заряда будет определяться:

$$n_p = n_i = \frac{1}{V} \int_0^{E_g} f_B(E) g(E) dE = (N_c N_v)^{1/2} e^{\frac{E_g}{kT}}. \quad (42)$$

Концентрация основных носителей заряда будет определяться:

$$p_p = p_a + p_i, \quad (43)$$

$$p_i = n_i. \quad (43a)$$

Концентрация носителей заряда, связанная с легированием полупроводника акцепторной примесью, будет зависеть от вырожденности или невырожденности дырочного газа. Если концентрация акцепторной примеси меньше эффективного числа состояний в валентной зоне  $N_a < N_v$ , то величина  $p_a$  определится:

$$p_a = \frac{1}{V} \int_0^{E_a} f_B(E) g(E) dE, \quad (44)$$

где  $E_a$  – энергия активизации акцепторной примеси.

Если концентрация акцепторной примеси соизмерима с эффективным числом состояний в валентной зоне  $N_a \sim N_v$ , то величина  $p_a$  будет определяться выражением:

$$p_a = \frac{1}{V} \int_0^{E_a} f_{\Phi}(E) g(E) dE. \quad (45)$$

### Уровень Ферми носителей заряда в примесном полупроводнике р-типа

Энергия Ферми неосновных носителей заряда  $n_p$  в примесном полупроводнике р-типа определяется выражением:

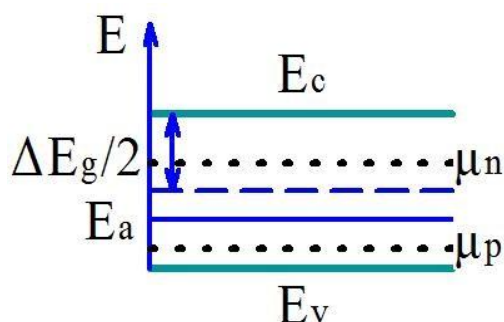
$$\mu_n = kT \ln \frac{n_p}{N_C}. \quad (46)$$

Поскольку энергия Ферми будет отрицательна ( $n_p < N_C$ ), уровень Ферми, соответствующий этой энергии, будет располагаться вблизи середины запрещенной зоны.

Если концентрация акцепторной примеси примесного полупроводника будет меньше эффективного числа состояний в зоне проводимости  $N_a < N_C$ , то электронный газ основных носителей заряда будет невырожденным (рис. 8), и значение химического потенциала запишется:

$$\mu_p = kT \ln \frac{p_p}{N_V}. \quad (47)$$

Уровень Ферми основных носителей заряда, соответствующих невырожденному дырочному газу в области низких температур, будет располагаться между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем.



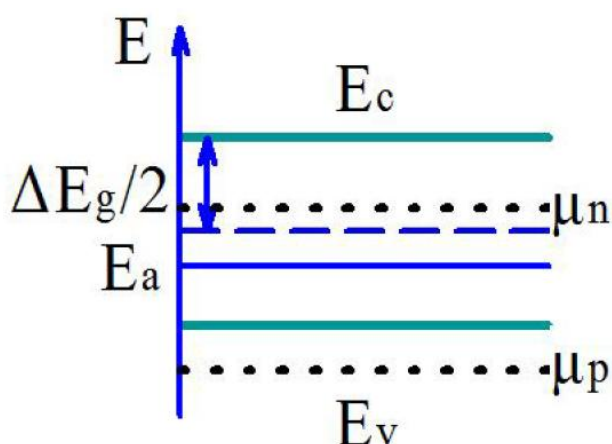
**Рис. 8.** Положение уровня Ферми в невырожденном полупроводнике р-типа.



В случае вырожденного дырочного газа (рис. 9) основных носителей заряда химический потенциал, соответствующий энергии Ферми, будет определяться:

$$\mu_p = E_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right], \quad (48)$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3p_p}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (49)$$



**Рис. 9.** Положение уровня Ферми в вырожденном полупроводнике *p*-типа

Для области низких температур уровень Ферми, соответствующий энергии Ферми дырочных основных носителей заряда, будет располагаться в валентной зоне. С увеличением температуры уровень Ферми будет стремиться к середине запрещенной зоны.

### Лабораторное задание:

Некоторые электрофизические параметры германия (Ge), кремния (Si) и арсенида галлия (GaAs) при  $T=300$  К приведены в таблице 1.

**Таблица 1**

### Электрофизические параметры полупроводников

Электрофизические параметры	Ge	Si	GaAs

$n_i, p_i \text{ (см}^{-3}\text{)}$	$2,5 \cdot 10^{13}$	$1,5 \cdot 10^{10}$	$10^{15}$
$\mu_n \text{ (см}^2\text{/(В} \cdot \text{с))}$	3800	1300	12000
$\mu_p \text{ (см}^2\text{/(В} \cdot \text{с))}$	1820	470	400
$\Delta E_g \text{ (эВ)}$	0,67	1,12	1,42
$m_n/m$	1,08	0,55	0,067
$m_p/m$	0,56	0,37	0,45

Примечание: в таблице  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса свободного электрона.

Варианты заданий приведены в таблице 2.

**Таблица 2**

**Варианты заданий**

Элемент примеси	Концентрация примеси см <sup>-3</sup>	
	10 <sup>14</sup>	10 <sup>16</sup>
	Варианты заданий	
B	1) Ge	2) Si
Al	3) Ge	4) Si
As	5) Si	6) Ge
P	7) Si	8) Ge
S	9) GaAs	10) GaAs

1. Рассчитать и построить график изменения концентрации носителей заряда в собственном полупроводнике от температуры.
2. Рассчитать и построить график изменения уровней Ферми для электронных и дырочных носителей заряда собственного полупроводника от температуры.
3. Рассчитать и построить графики изменения уровня Ферми от температуры для основных носителей заряда примесных

полупроводников  $n$ -типа или  $p$ -типа для случаев невырожденного и вырожденного электронного и дырочного газа.

4. Рассчитать положение уровней Ферми основных и неосновных носителей заряда в примесных полупроводниках  $n$ -типа и  $p$ -типа на зонной диаграмме при температуре 300 К.

### **Вопросы для самостоятельной работы**

1. Физическая сущность химического потенциала – энергии Ферми.
2. Эффективное число состояний.
3. Собственные и примесные полупроводники.
4. Основные и неосновные носители заряда.
5. Функция распределения носителей заряда в собственных полупроводниках.
6. Функция распределения носителей заряда в примесных полупроводниках.
7. Положение уровня Ферми в собственных полупроводниках.
8. Положение уровня Ферми основных носителей заряда в примесных полупроводниках.
9. Донорные и акцепторные уровни в примесных полупроводниках, их расположение на зонной диаграмме.

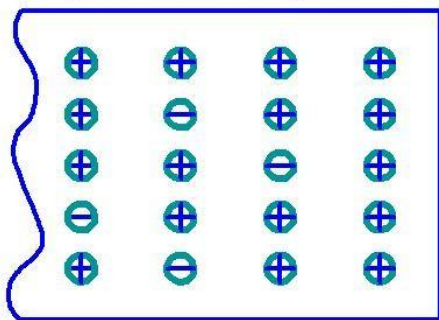
## Лабораторная работа №7

### КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

#### Физические процессы в контакте двух полупроводников

Рассмотрим физические процессы при контакте двух полупроводников – полупроводника  $p$ -типа и полупроводника  $n$ -типа (рис. 1). В полупроводнике  $p$ -типа кристаллическая решетка формируется отрицательно заряженными ионами акцепторной примеси. Электронейтральность этого полупроводника определяется наличием свободных положительных дырочных носителей заряда.

Полупроводник  $p$ -типа



Полупроводник  $n$ -типа

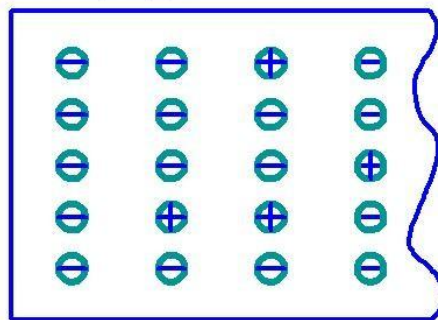
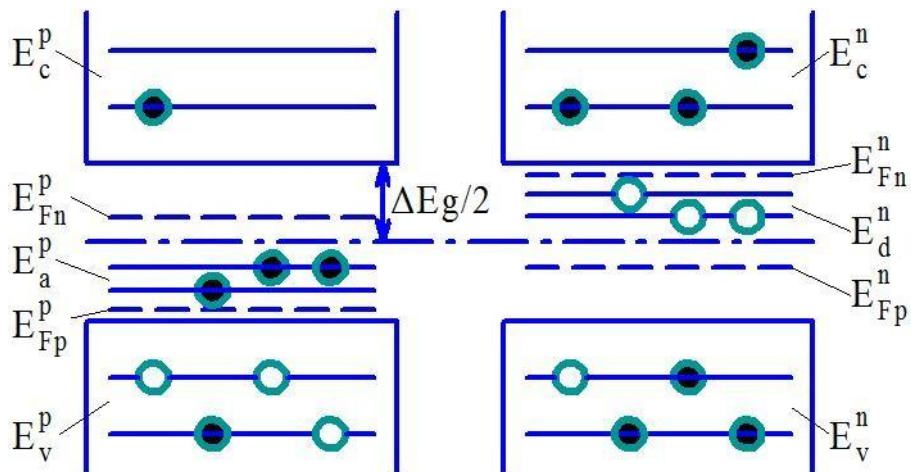


Рис. 1. Структура полупроводников  $p$ -типа и  $n$ -типа

В полупроводнике  $n$ -типа кристаллическая решетка формируется положительно заряженными ионами донорной примеси. Электронейтральность этого типа полупроводника определяется наличием свободных электронов.

Зонные диаграммы полупроводников  $p$ -типа и  $n$ -типа состоят из валентной зоны  $E_V$ , зоны проводимости  $E_C$  и запрещенной зоны  $\Delta E_g$  (рис. 2).

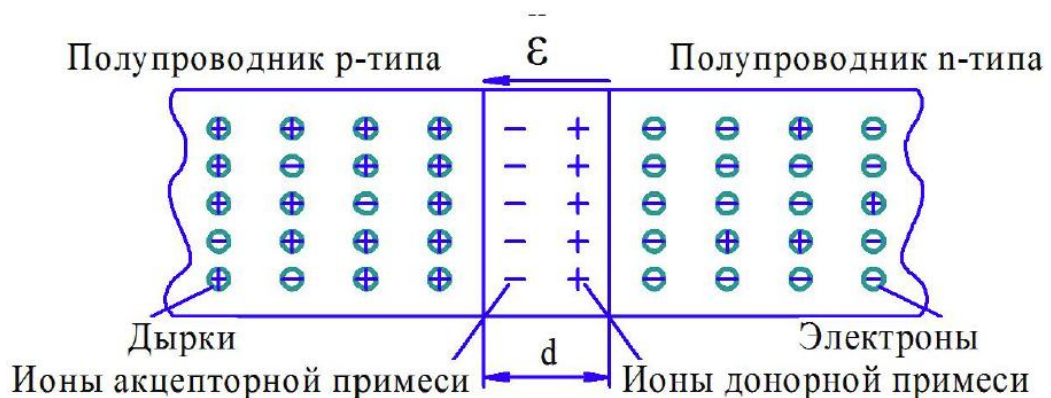
Кроме того, зонная диаграмма включает примесные уровни  $E_a$ ,  $E_d$  – акцепторный и дырочный, уровни Ферми для электронов  $E_F^n$  и дырок  $E_F^p$  в области  $p$ , для электронов  $E_F^n$  и дырок  $E_F^p$  в области  $n$ .



**Рис. 2.** Зонные диаграммы полупроводников *p*-типа и *n*-типа

При контакте полупроводников, вследствие разности концентраций, электроны из *n*-области будут переходить в *p*-область, а дырки из *p*-области будут переходить в *n*-область. Такой переход будет осуществляться за счет диффузии.

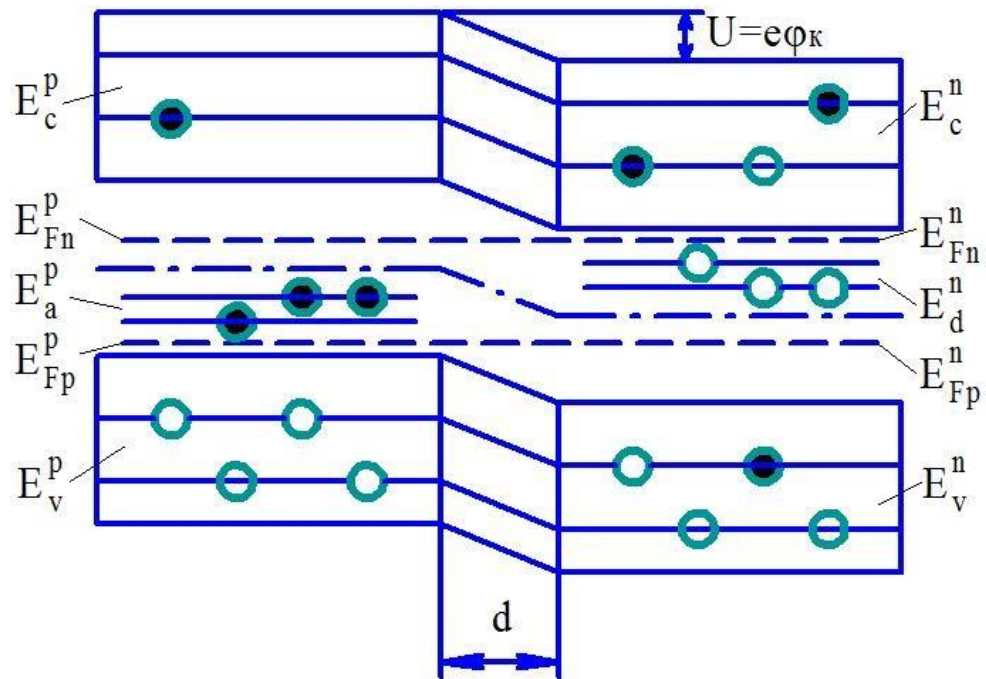
Диффузия дырок в *n*-область, а электронов в *p*-область будет сопровождаться рекомбинационными процессами в приконтактной области. В результате этого в приконтактной области образуется объемный заряд ионизированных доноров и акцепторов, который будет формировать электрическое поле  $\vec{\mathcal{E}}$  (рис. 3).



**Рис. 3.** Структура контакта двух полупроводников

Это поле будет препятствовать диффузии носителей зарядов, и процесс перехода носителей заряда прекратится после выравнивания уровней Ферми электронов и дырок в обеих областях полупроводника. Процесс выравнивания уровней Ферми за счет перехода носителей

заряда будет сопровождаться искривлением энергетических зон в приконтактной области. В этой области будут отсутствовать подвижные носители заряда и переход электронов из  $n$ -области в  $p$ -область, а дырок из  $p$ -области в  $n$ -область будет осуществляться преодолением потенциального барьера (рис. 4).



**Рис. 4.** Структура энергетических зон контакта двух полупроводников

### Расчет концентраций равновесных носителей заряда

#### в приконтактной области

Равновесные концентрации электронов и дырок в  $p$ -области определяются:

$$n_{po} = N_C \cdot \exp\left(-\frac{E_c^p - E_{Fn}^p}{k \cdot T}\right), \quad (1)$$

$$p_{po} = N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_{Fp}^p - E_v^p}{k \cdot T}\right), \quad (2)$$

где  $n_{po}$  – равновесная концентрация электронов и  $p_{po}$  – равновесная концентрация дырок в  $p$ -области.

Равновесные концентрации электронов и дырок в  $n$ -области определяются:

$$n_{no} = N_C \cdot \exp\left(-\frac{E_c^n - E_{Fn}^n}{k \cdot T}\right), \quad (3)$$

$$p_{no} = N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_{Fp}^n - E_v^n}{k \cdot T}\right), \quad (4)$$

где  $n_{no}$  – равновесная концентрация электронов и  $p_{no}$  – равновесная концентрация дырок в  $n$ -области.

### **Расчет уровней Ферми электронов и дырок в приконтактной области**

Значение энергии Ферми может быть найдено интегрированием полной функции распределения в пределах значения энергии от 0 до  $E_F$  – значения энергии Ферми.

Полная функция распределения определится:

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE, \quad (5)$$

где  $N(E)$  – число частиц, обладающих значением энергии в интервале от  $E$  до  $E+dE$ ;  $f(E)$  – функция распределения частиц по энергиям;  $g(E)$  – плотность числа энергетических состояний, которые могут занимать частицы.

Интегрируя выражение в пределах значений энергии от нуля до энергии Ферми, получим полное число частиц в интервале энергий:

$$N = \int_0^{E_F} f(E)g(E)dE. \quad (6)$$

Для вырожденного газа  $f(E) = 1$ . Плотность числа состояний определится:

$$g(E) = \frac{4\pi V}{h^3} \cdot (2m)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в интеграл, получим:

$$N = \frac{8\pi V}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}}. \quad (8)$$

Из этого выражения энергия Ферми определится:

$$E_F = \left( \frac{N}{V} \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} = \left( \frac{3 \cdot n}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}, \quad (9)$$

где  $n = N/V$  – концентрация частиц.

В случае невырожденного газа необходимо воспользоваться функцией распределения Максвелла-Больцмана.

### **Расчет потенциального барьера контакта двух полупроводников**

При рассмотрении физических процессов при контакте двух полупроводников было показано, что в приконтактной области образуется объемный заряд ионизированных атомов доноров и акцепторов. Этот объемный заряд в приконтактной области создает потенциальный барьер. Величина потенциального барьера будет определяться разницей в положении энергетических зон  $p$ - и  $n$ -областях (рис. 4.):

$$U = E_C^p - E_C^n = E_V^p - E_V^n. \quad (4.10)$$

В то же время равновесная концентрация дырочных носителей заряда в  $p$ - и  $n$ - областях определится:

$$p_{po} = N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_{Fp}^p - E_v^p}{k \cdot T}\right), \quad (11)$$

$$p_{no} = N_V \cdot \exp\left(-\frac{E_{Fp}^n - E_v^n}{k \cdot T}\right). \quad (12)$$

Разделим концентрацию неосновных носителей заряда на основные, получим:

$$\frac{p_{no}}{p_{po}} = \exp\left(-\frac{E_{Fp}^n - E_v^n}{k \cdot T} + \frac{E_{Fp}^p - E_v^p}{k \cdot T}\right). \quad (13)$$

Так как уровни Ферми дырок в области  $p$  и в области  $n$  равны:

$$E_{Fp}^n = E_{Fp}^p, \quad (14)$$



то отношение неосновных и основных носителей заряда примет вид:

$$\frac{p_{no}}{p_{po}} = \exp\left(\frac{E_v^n - E_v^p}{k \cdot T}\right). \quad (15)$$

Логарифмируя это выражение, получим:

$$\ln \frac{p_{no}}{p_{po}} = \frac{E_v^n - E_v^p}{k \cdot T}. \quad (16)$$

Из этого выражения величина потенциального барьера определится:

$$E_v^n - E_v^p = -U = -e \cdot \varphi_k = k \cdot T \cdot \ln \frac{p_{no}}{p_{po}}, \quad (17)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $\varphi_k$  – контактная разность потенциалов.

Из этого выражения контактная разность определится:

$$\varphi_k = -\frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{p_{no}}{p_{po}}. \quad (18)$$

Знак минус перед контактной разностью потенциалов показывает, что потенциальный барьер препятствует переходу частиц между областями контакта.

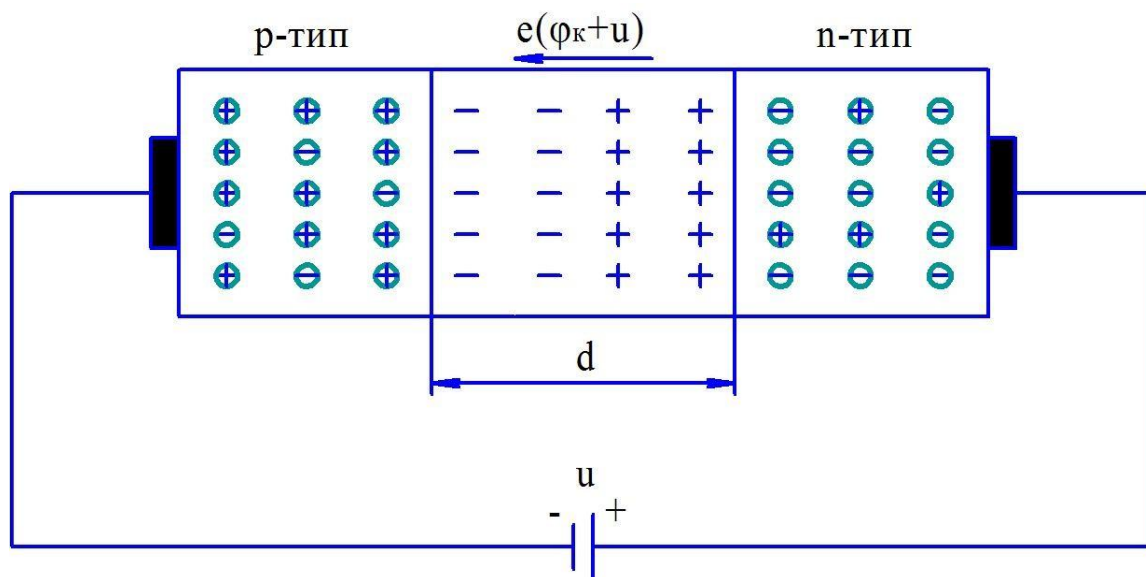
### **Расчет концентрации неравновесных носителей заряда контакта двух полупроводников**

Неравновесный режим контакта двух полупроводников создается приложением внешнего напряжения. В том случае, если внешнее напряжение увеличивает потенциальный барьер, то такое напряжение, совпадающее по полярности с контактной разностью потенциалов, получило название *обратного напряжения*.

В том случае, если приложенное внешнее напряжение снижает величину потенциального барьера, это напряжение противоположно по полярности контактной разности потенциалов и получило название *прямого напряжения*.

Увеличение потенциального барьера при приложении обратного внешнего напряжения препятствует переходу подвижных носителей

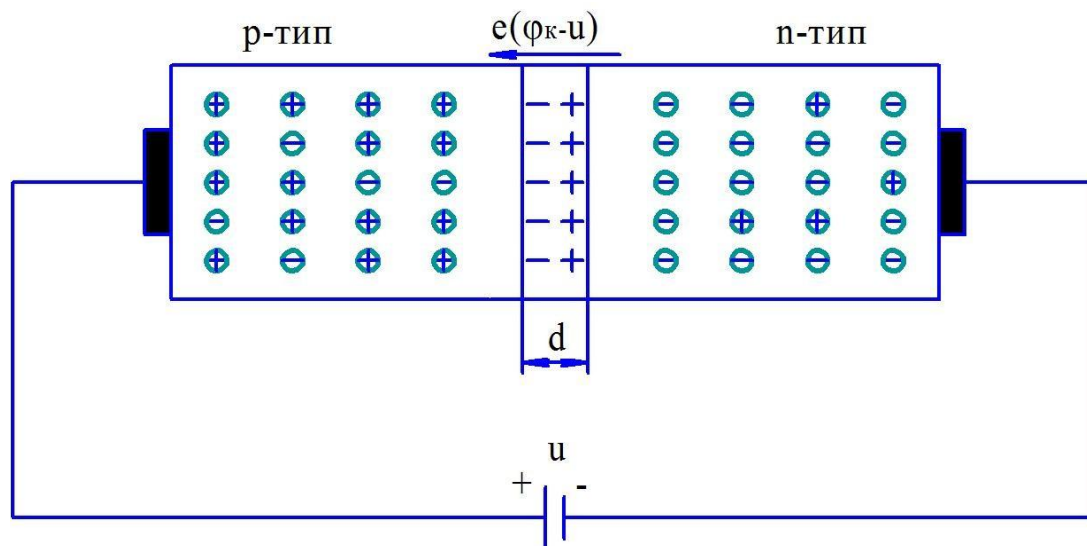
заряда через область контакта (рис. 5). Поэтому существование неосновных носителей зарядов – электронов в  $p$ -области и дырок в  $n$ -области будет определяться собственной проводимостью полупроводников.



**Рис. 5.** Структура контакта двух полупроводников при приложении обратного напряжения

Приложение обратного напряжения приводит к изменению уровней Ферми в  $p$ - и  $n$ -областях полупроводников.

Приложение к контакту двух полупроводников прямого напряжения снижает потенциальный барьер и уменьшает ширину области, обедненной подвижными носителями заряда (рис. 6).



**Рис. 6.** Структура контакта двух полупроводников при  
приложении

прямого напряжения

В этом случае неосновные носители заряда могут инжектироваться в соответствующие области. Электроны могут инжектироваться в  $p$ -область, а дырки в  $n$ -область за счет приложенного внешнего напряжения. В каждой из областей эти носители зарядов являются неравновесными.

Приложение прямого напряжения приводит к повышению уровня Ферми для электронов в  $n$ -области, что приводит при выравнивании энергии электронов с энергией потенциального барьера к инжекции электронов в  $p$ -область.

Аналогичные явления происходят и с дырочными носителями заряда в  $p$ -области. При этом необходимо учитывать, что отсчет энергии для электронов осуществляется в направлении зоны проводимости, а для дырочных носителей зарядов отсчет энергии осуществляется в направлении валентной зоны.

Для расчета концентрации неравновесных носителей заряда воспользуемся выражением для контактной разности потенциалов:

$$\varphi_k = -\frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{p_{no}}{p_{po}}. \quad (19)$$

Воздействие на контакт двух полупроводников прямого напряжения будет определять появление неравновесных дырок в  $n$ -области

$$-\varphi_k + u = \frac{k \cdot T}{e} \cdot \ln \frac{p_n}{p_{po}}. \quad (20)$$

Сделав преобразования, получим:

$$-\frac{e}{k \cdot T} \cdot (\varphi_k - u) = \ln \frac{p_n}{p_{po}}. \quad (21)$$

Логарифмируя это выражение, получим для концентрации неравновесных носителей заряда:

Аналогично, для электронов в  $p$ -области.

$$n_p = n_{no} \cdot \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right]. \quad (22)$$

### Расчет ширины области обеднения

При контакте двух полупроводников в приконтактной области формируется объемный заряд ионизированных доноров и акцепторов. В равновесном состоянии и при приложении обратного напряжения в этой области отсутствуют подвижные носители заряда, и эту область можно рассматривать как поляризованный диэлектрик. Для расчета протяженности этой области используем уравнение Пуассона, которое устанавливает связь между объемным зарядом в какой-либо области и распределением потенциала в этой области:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (24)$$

где  $\varphi$  – распределение потенциала в области контакта;

$\rho$  – объемная плотность заряда в контактной области;

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость полупроводника;

$\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Полагая, что изменение объемной плотности заряда в контактной области происходит только в направлении оси  $x$ , то уравнение Пуассона запишется:

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \rho(x). \quad (25)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \left[ \int_0^x \rho(x) dx \right] dx. \quad (26)$$

Для вычисления интеграла необходимо знать распределение объемного заряда в приконтактной области. Для этого рассмотрим два случая – резкий переход со скачкообразным распределением примесей и линейный переход с непрерывным распределением примесей.

В приконтактной области, имеющей протяженность  $d$ , объемная плотность заряда будет определяться ионизированными атомами доноров и акцепторов:

$$\rho(x) = \begin{cases} -e \cdot N_a & \text{при } -\frac{d}{2} < x < 0 \\ e \cdot N_d & \text{при } \frac{d}{2} > x > 0 \end{cases}, \quad (27)$$

Учитывая, что в приконтактной области значение потенциала будет определяться суммой контактной разности потенциалов и приложенного обратного напряжения, для интегрального выражения (26) можно записать:

$$\varphi_k + u = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{d}{2}}^0 \left[ \int_0^x (-e \cdot N_a) dx \right] dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\frac{d}{2}} \left[ \int_0^x e \cdot N_d dx \right] dx. \quad (28)$$

Произведя интегрирование, получим:

$$\varphi_k + u = \frac{e \cdot d^2}{8 \cdot \varepsilon} (N_a + N_d). \quad (29)$$

Отсюда ширина обедненной области определится как

$$d = \left[ \frac{8 \cdot \varepsilon \cdot (\varphi_k + u)}{e \cdot (N_a + N_d)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

### **Расчет барьерной емкости контакта двух полупроводников**

Образование объемного заряда ионизированных доноров и акцепторов в приконтактной области при приложении обратного напряжения будет определять барьерную емкость контакта двух полупроводников. Диэлектриком этой емкости будет являться область, обедненная подвижными носителями заряда, а пластинами – области полупроводников с электронной и дырочной проводимостью.

Для контакта двух полупроводников с резким изменением концентрации примесей эту емкость можно рассматривать как плоский конденсатор, у которого площадь пластин  $S$ , а расстояние между ними  $d$ :

$$C = \frac{\varepsilon \cdot S}{d}, \quad (31)$$

где  $C$  – барьерная емкость.

Подставляя в это выражение значение  $d$  из (30), получим:

$$C = \varepsilon \cdot S \cdot \left[ \frac{q \cdot \varepsilon \cdot (\varphi_k + u)}{e \cdot (N_a + N_d)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

После дополнительных преобразований получаем выражение для барьерной емкости:

$$C = S \cdot \left[ \frac{\varepsilon \cdot e \cdot (N_a + N_d)}{q \cdot (\varphi_k + u)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (33)$$

где  $S$  – площадь контакта двух полупроводников.

### Лабораторное задание

Для расчетов использовать данные, приведенные в таблице 1.

**Таблица 1**

#### Электрофизические параметры кремния

Материал	Si
Концентрация основных носителей донорной примеси, $\text{см}^{-3}$	$10^{18}$
Концентрация основных носителей акцепторной примеси, $\text{см}^{-3}$	$10^{16}$
$\Delta E_g$ , эВ	1,12
$E_c^p = E_c^n$ , эВ	4,2
$E_v^p = E_v^n$ , эВ	3
$E_{Fn}^p$ , эВ	3,92

$E_{Fp}^p$ , эВ	3,2
$E_{Fn}^n$ , эВ	4,11
$E_{Fp}^n$ , эВ	3,8
Диэлектрическая проницаемость ( $\epsilon$ )	12
$m_n/m$	0,55
$m_p/m$	0,37
Температура, К	300

Примечание: в таблице  $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$  кг – масса свободного электрона.

1. Рассчитать значения равновесных концентраций электронных и дырочных носителей заряда в приконтактной области.
2. Рассчитать значения энергии Ферми для носителей зарядов в приконтактной области.
3. Рассчитать значение контактной разности потенциалов и высоту потенциального барьера в приконтактной области.
4. Рассчитать и построить графики значений концентраций неравновесных носителей заряда от приложенного напряжения к контакту двух полупроводников.
5. Рассчитать и построить график изменения значения ширины обедненной области от приложенного напряжения к контакту двух полупроводников.
6. Рассчитать и построить график значения барьерной емкости от приложенного напряжения.

### **Вопросы для самостоятельной работы**

1. Физические процессы в контакте двух полупроводников в равновесном состоянии.
2. Прямое и обратное напряжения в контакте двух полупроводников.
3. Физические процессы в контакте двух полупроводников при приложении прямого и обратного напряжений.
4. Что такое равновесные и неравновесные носители заряда?

5. Что является областью контакта и какова ее протяженность?
6. Физический смысл барьерной емкости.



## Лабораторная работа №8

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОНТАКТЕ ДВУХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

#### Расчет диффузионной длины носителей зарядов контакта двух полупроводников

Приложение прямого напряжения к контакту двух полупроводников с разным типом проводимости приводит к понижению потенциального барьера между ними. Это определяет перераспределение концентрации носителей заряда в приконтактной области вследствие процесса диффузии. Для расчета распределения концентрации носителей заряда в приконтактной области воспользуемся уравнениями непрерывности:

$$\begin{cases} D_n \frac{d^2 n_p}{dx^2} - \mu_n E \frac{dn_p}{dx} - \frac{n_p - n_{po}}{\tau_n} + g_n = 0 \\ D_p \frac{d^2 p_n}{dx^2} + \mu_p E \frac{dp_n}{dx} - \frac{p_n - p_{no}}{\tau_p} + g_p = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $D_p$  и  $D_n$  – диффузионные постоянные для дырок и электронов;

$\tau_p$  и  $\tau_n$  – время жизни дырок и электронов;  $g_p$  и  $g_n$  – скорости генерации дырок и электронов;

$E$  – напряженность электрического поля в приконтактной области.

В свою очередь, коэффициенты диффузии связаны с подвижностью носителей заряда соотношениями Эйнштейна:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{k \cdot T}{e}, \quad (2)$$

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{k \cdot T}{e}. \quad (3)$$

При приложении к контакту двух полупроводников прямого напряжения потенциальный барьер, определяемый ионизированными атомами акцепторной и донорной примесями, будет понижаться. При

напряжениях, соизмеримых с контактной разностью потенциалов, можно полагать, что напряженность электрического поля в приконтактной области будет равна нулю.

Полагая, что генерационные эффекты, связанные с возбуждением носителей зарядов в приконтактной области, отсутствуют, можно записать для дырочных носителей заряда:

$$D_p \frac{d^2 p_n}{dx^2} - \frac{p_n - p_{no}}{\tau_p} = 0. \quad (4)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$p_n(x) - p_{no} = A \cdot \exp\left(\frac{x}{\sqrt{D_p \tau_p}}\right) + B \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_p \tau_p}}\right), \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные интегрирования.

Первое слагаемое этого решения не удовлетворяет физическим условиям, так как увеличение  $x$  приводит к росту концентрации неравновесных носителей заряда. Поэтому постоянная  $A$  должна равняться нулю.

Для определения постоянной интегрирования  $B$  воспользуемся условием, что на границе приконтактной области с областью  $p$  концентрация неравновесных носителей заряда будет равна равновесной концентрации в  $p$ -области. Если начало координат совпадает с границей приконтактной области с  $p$ -областью, то можно записать:

$$p_n(0) - p_{no} = p_{po} - p_{no} = B. \quad (6)$$

Подставляя значение  $B$  в выражение распределения концентрации неравновесных носителей заряда в приконтактной области, получим:

$$p_n(x) - p_{no} = (p_{po} - p_{no}) \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_p \tau_p}}\right). \quad (7)$$

В этом выражении величина:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \quad (8)$$

получила название *диффузионной длины* дырочных носителей заряда. Диффузионная длина характеризует расстояние, на котором концентрация носителей зарядов уменьшается на величину экспоненты.

Аналогично, для электронных носителей зарядов:

$$n_p(x) - n_{po} = (n_{no} - n_{po}) \cdot \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right), \quad (9)$$

где диффузионная длина для электронов определится:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}. \quad (10)$$

### **Расчет тока проводимости контакта двух полупроводников**

Ток проводимости, протекающий через контакт двух полупроводников, с одной стороны, будет складываться из тока электронных и тока дырочных носителей заряда:

$$j = j_n + j_p. \quad (5.11)$$

С другой стороны, каждый из этих токов будет определяться движением носителей заряда вследствие диффузии и дрейфа:

$$j_n = D_n \frac{dn_p}{dx} - \mu_n \cdot E \cdot n_p, \quad (12)$$

$$j_p = D_p \frac{dp_n}{dx} + \mu_p \cdot E \cdot p_n. \quad (13)$$

В то же время концентрация неравновесных носителей заряда должна определяться решением уравнений непрерывности для электронов и дырок:

$$D_n \frac{d^2 n_p}{dx^2} - \mu_n E \frac{dn_p}{dx} - \frac{n_p - n_{po}}{\tau_n} = 0, \quad (14)$$

$$D_p \frac{d^2 p_n}{dx^2} + \mu_p E \frac{dp_n}{dx} - \frac{p_n - p_{no}}{\tau_p} = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения непрерывности для электронов будет иметь вид

$$n_p(x) - n_{po} = A_1 \cdot \exp\left(-\frac{x}{L_{n1}}\right) + B_1 \cdot \exp\left(-\frac{x}{L_{n2}}\right), \quad (16)$$

где  $A_1$  и  $B_1$  – постоянные интегрирования;

$L_{n1}$  и  $L_{n2}$  – эквивалентные диффузионные длины для электронов, которые определяются из уравнения:

$$\frac{1}{L_{n1,2}^2} - \frac{\mu_n}{D_n} E \frac{1}{L_{n1,2}} - \frac{1}{D_n \tau_n} = 0. \quad (17)$$

Решая это уравнение, получим:

$$\frac{1}{L_{n1}} = \frac{\mu_n}{2D_n} E + \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{2D_n} E\right)^2 + \frac{1}{D_n \cdot \tau_n}}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{L_{n2}} = \frac{\mu_n}{2D_n} E - \sqrt{\left(\frac{\mu_n}{2D_n} E\right)^2 + \frac{1}{D_n \cdot \tau_n}}. \quad (19)$$

Эквивалентная диффузионная длина  $L_{n2}$  не удовлетворяет физическим условиям, так как подстановка этой величины в решение уравнения непрерывности приводит к росту концентрации неравновесных носителей заряда с ростом координаты  $x$ . Поэтому будем полагать, что постоянная интегрирования  $B_1$  будет равна нулю.

Тогда решение уравнения непрерывности запишется:

$$n_p(x) - n_{po} = A_1 \exp\left(-\frac{x}{L_{n1}}\right). \quad (20)$$

Постоянную интегрирования  $A_1$  определим из условия, что при  $x=0$ , концентрация неравновесных носителей заряда определится:

$$n_p(0) = n_{no} \exp\left[-\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u)\right]. \quad (21)$$

Тогда для постоянной  $A_1$  получим:

$$A_I = n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po}. \quad (22)$$

Подставляя это выражение в решение уравнения непрерывности для концентрации неравновесных носителей, получим:

$$n_p(x) - n_{po} = \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} \exp \left( \frac{x}{L_{nl}} \right). \quad (23)$$

Аналогично эквивалентная диффузионная длина для дырочных носителей заряда определится:

$$\frac{l}{L_{pl}} = -\frac{\mu_p}{2D_p} E - \sqrt{\left( \frac{\mu_p}{2D_p} E \right)^2 + \frac{l}{D_p \cdot \tau_p}}. \quad (24)$$

Концентрация неравновесных дырочных носителей заряда в области  $n$  определится:

$$p_n(x) - p_{no} = \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} \exp \left( \frac{x}{L_{pl}} \right). \quad (25)$$

Подставляя концентрацию неравновесных электронных носителей заряда в выражение электронного тока, получим:

$$j_n = \frac{e \cdot D_n}{L_{nl}} \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{nl}} \right) - e \cdot \mu_n \cdot E \left\{ \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{nl}} \right) + n_{po} \right\} \quad (26)$$

Аналогично для дырочного тока можно записать:

$$j_p = \frac{e \cdot D_p}{L_{pl}} \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{pl}} \right) + e \cdot \mu_p \cdot E \left\{ \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{pl}} \right) + p_{no} \right\} \quad (27)$$

В силу непрерывности тока, создаваемого движением носителей заряда, ток во всех участках цепи должен иметь одинаковое значение.

Поэтому в выражениях для дырочного и электронного токов значение  $x$  можно принять равным нулю.

$$j_n = \frac{e \cdot D_n}{L_{n1}} \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} - e \cdot \mu_n \cdot E \cdot n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] \quad (28)$$

Аналогично для дырочного тока можно записать:

$$j_p = \frac{e \cdot D_p}{L_{p1}} \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} + e \cdot \mu_p \cdot E \cdot p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] \quad (29)$$

Значение напряженности электрического поля  $E$  может определяться как

$$E = \frac{u + \varphi_k}{d} \quad (30)$$

### **Расчет диффузионной емкости контакта двух полупроводников**

Приложение к контакту двух полупроводников прямого напряжения будет определять инжекцию дырок в  $n$ -область, а электронов в  $p$ -область. В результате этого в приконтактной области будет формироваться объемный заряд подвижных носителей, который будет образовывать диффузионную емкость.

Так как величина этой емкости будет зависеть от приложенного напряжения, то можно записать:

$$C_d = \frac{dQ}{du}, \quad (31)$$

где  $C_d$  – диффузионная емкость;

$Q$  – объемный заряд, образуемый избыточными дырочными и электронными носителями;  $u$  – напряжение, приложенное к контакту двух полупроводников.

Величина объемного заряда определится:

$$Q = e \cdot S \left[ \int_0^{L_{p1}} \Delta p(x) dx - \int_{-L_{n1}}^0 \Delta n(x) dx \right], \quad (32)$$

где  $S$  – площадь контакта двух полупроводников;

$\Delta n(x)$  и  $\Delta p(x)$  – избыточные концентрации электронов в  $p$ -области и дырок в  $n$ -области.

Избыточные концентрации определяются:

$$\begin{aligned} \Delta n(x) &= n_p(x) - n_{po} = \\ &= \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{n1}} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Delta p(x) &= p_n(x) - p_{no} = \\ &= \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} \exp \left( -\frac{x}{L_{p1}} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя значения избыточных концентраций в выражение объемного заряда в приконтактной области и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} Q &= eS \cdot \left\{ L_{p1} \left\{ p_{po} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - p_{no} \right\} (\exp - 1) - \right. \\ &\quad \left. - L_{n1} \left\{ n_{no} \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] - n_{po} \right\} \left( 1 - \frac{1}{\exp} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Дифференцируя это выражение по напряжению  $u$ , получим выражение для диффузионной емкости:

$$\begin{aligned} C_d = \frac{dQ}{du} &= 2,71 \frac{e^2 S}{k \cdot T} \left\{ L_{p1} \cdot p_{po} \cdot \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{L_{n1}}{2,71} n_{no} \cdot \exp \left[ -\frac{e}{k \cdot T} (\varphi_k - u) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

### Лабораторное задание

1. В качестве исходных данных для моделирования использовать результаты, полученные в лабораторной работе №4 и сведения из таблицы 1.

**Таблица 1**

**Данные для расчета параметров**

Материал	Si
$\mu_n, \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,15
$\mu_p, \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$	0,045
$\tau_n, \text{нс}$	1,61
$\tau_p, \text{нс}$	0,74

2. Рассчитать значения диффузионной длины носителей заряда в приконтактной области.

3. Рассчитать и построить графики изменения значения эквивалентной диффузионной длины дырочных и электронных носителей от приложенного напряжения.

4. Рассчитать и построить график вольтамперной характеристики контакта двух полупроводников.

5. Рассчитать и построить график изменения диффузионной емкости контакта двух полупроводников от приложенного прямого напряжения.

### Вопросы для самостоятельной работы

1. Диффузионная длина и эквивалентная диффузионная длина носителей заряда.

2. Виды токов в контакте двух полупроводников и механизмы движения носителей заряда, обуславливающих эти токи.

3. Физический смысл диффузионной емкости.

4. Контактная разность потенциалов и физическая основа ее образования.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марголин, В. И. Физические основы микроэлектроники : учебник для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Марголин, В.А. Жабрев, В.А. Тупик. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 400 с.
2. Ткачева, Т. М. Физические основы микроэлектроники : учебное пособие / Т. М. Ткачева. — М. : МАДИ, 2015. — 188 с.
3. Игумнов, В. Н. Физические основы микроэлектроники : учебное пособие / В. Н. Игумнов. — М.-Берлин : Директ-Медиа, 2014. — 358 с.
4. Рыжонков, Д.И. Наноматериалы: учеб. пособие / Д.И. Рыжонков, В.В. Лёвина, Э.Л. Дзидзигури. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2008. — 365 с. 2. Гусев, А.И. Наноматериалы, наноструктуры, нанотехнологии / А.И. Гусев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с.
5. Рамбиди, Н.Г. Нанотехнологии и молекулярные компьютеры / Н.Г. Рамбиди. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с.
6. Datta, S. Nanoelectronics and the meaning of resistance. The course of lectures [Electronic resource] // nanohub.org [Web portal]. URL: <http://nanohub.org/resources/5279> (accessed: 25.02.2015).
7. Нанотехнологическое общество России (НОР) [Интернет-портал]. URL: <http://ntsr.info/> (дата обращения: 25.02.2015).
8. Киреев, В.Ю. Введение в технологии микроэлектроники и нанотехнологии / В.Ю. Киреев. — М.: ФГУП «ЦНИИХМ», 2008. — 428 с.
9. Дубровский, В.Г. Теория формирования эпитаксиальных наноструктур / В.Г. Дубровский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 352 с.
10. Берикашвили, В.Ш. Твердотельная электроника и микроэлектроника: учеб. пособие / В.Ш. Берикашвили, С.А. Воробьев. — М.: Изд-во МГОУ, 2010. — 356 с.