Лекция 1.

Необходимые сведения из теории множеств и топологии.

1. Отношения на множестве.

a) Отношение эквивалентности.

Свойства: рефлексивность, симметрия, транзитивность.

в) Отношение частичного порядка.

Свойства: транзитивность, антисимметричность.

c) Отношение (линейного) порядка.

Свойства: транзитивность, антисимметричность, любые два элемента сравнимы.

2. Операции на множествах:

a) объединение $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$;

в) пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$;

c) разность $X \setminus Y$;

d) построение множества отображений X в Y, обозначаемое Y^X;

e) произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

X, Y, A и все X_α — множества и предполагается, что результаты операций тоже множества.

Более подробно о $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Пусть A — некоторое множество и каждому α поставлено в соответствие некоторое множество X_α.

Пусть A – некоторое множество и каждому α поставлено в соответствие непустое множество X_α.
Элементом множества $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является такое отображение множества A в $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что для $\forall \alpha \in A$ выполнено:
$\alpha \mapsto x_\alpha \in X_\alpha$.
Если множество A конечно порядка n, то произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является множеством всевозможных упорядоченных наборов из n элементов, где на i-м месте стоит элемент из множества X_i.
Если множество A бесконечно, то утверждение о непустоте $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ для непустых X_α неочевидно и не может быть выведено из его существовании для конечных A, поэтому это утверждение принимают как самостоятельную аксиому – – аксиома выбора или аксиома Цермело.

3. Метрические пространства:
a) метрика; b) фундаментальная последовательность;
c) полнота; d) замыкание; e) изометрия; f) пополнение.

<u>Определение</u>. Пусть X – метрическое пространство.
Пополнением X называется метрическое пространство Y, обладающее свойствами:

1) Y – полное пространство;
2) в Y есть подмножество Y_0, изометричное X;
3) Y_0 плотно в Y (замыкание Y_0 совпадает с Y).

<u>Теорема 1</u>. Каждое метрическое пространство X

Теорема 1. Каждое метрическое пространство X допускает пополнение Y. Любые два пополнения Y' и Y'' пространства X изометричны, причем связывающая их изометрия оставляет на месте точки X.

Теорема 2 Пусть M – полное метрическое пространство, X – подмножество в M. Тогда X полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в M. В частности, в качестве пополнения X можно взять его замыкание в M.

Теория меры и интеграла.

Алгебра множеств.

Пусть X – некоторое множество.

Обозначим 2^X – множество всех подмножеств множества X.

Определение. Кольцом подмножеств множества X называется непустое семейство $R \subset 2^X$, замкнутое относительно операций объединения, пересечения и разности.

Следствие R замкнуто относительно операции симметрической разности:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Примеры

1. 2^X – множество всех подмножеств множества X.
2. Множество всех конечных подмножеств множества X.
3. Возьмем все подмножества $A \subset X$ ... $B \subset X$

2. Множество всех конечных подмножеств множества X.

3. Возьмем два подмножества $A \subset X$ и $B \subset X$.
Тогда $\{A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B\}$ – – кольцо подмножеств множества X.

4. Все множества на прямой $\mathbb{R}$, состоящие из конечного числа отрезков, интервалов, полуинтервалов или изолированных точек.

<u>Усиление структуры кольца.</u>

1. Алгеброй множеств называется кольцо $R \subset 2^X$, содержащее в качестве элемента всё множество X.

2. σ-кольцом называется кольцо R, замкнутое относительно операции счётного объединения.

3. δ-кольцом называется кольцо, замкнутое относительно операции счётного пересечения.

4. σ-алгеброй (соответственно, δ-алгеброй) называется кольцо, которое одновременно является алгеброй и σ-кольцом (соответственно, δ-кольцом).

Заметим, что σ-алгебра является одновременно и δ-алгеброй. Это следует из равенства:

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus X_\alpha)$$

<u>Ослабление структуры кольца.</u>

Полукольцом называется семейство $S \subset 2^X$, замкнутое относительно пересечения и обладающее свойством:
если $A, B \in S$, то существуют такие $C_1, C_2, \ldots, C_n \in S$,
что $A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_n$, где $\sqcup$ означает объединение

если $A, B \in S$, то существуют такие $C_1, C_2, \ldots, C_n \in S$, что $A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_n$, где $\sqcup$ означает объединение непересекающихся множеств.

Примеры

1. Множество всех полуинтервалов вида $[a, b)$ на прямой $\mathbb{R}$ является полукольцом, но не кольцом.
2. Если $R_1 \subset 2^X$ и $R_2 \subset 2^Y$ – кольца множеств, то семейство $R_1 \times R_2 = \{A \times B \in 2^{X \times Y} \mid A \in R_1, B \in R_2\}$ является полукольцом.

Например, R_1 и R_2 являются совокупностями множеств на прямой $\mathbb{R}$, состоящих из конечного числа отрезков, интервалов, полуинтервалов или изолированных точек. Тогда $R_1 \times R_2$ – полукольцо, но не кольцо.

Любое полукольцо может быть дополнено до кольца, более того, любое семейство подмножеств X может быть дополнено до кольца.

Если S – любое семейство подмножеств X, то среди колец (соответственно, σ-колец), содержащих S, имеется минимальное. Оно обозначается $R(S)$ (соответственно, $R_\sigma(S)$) и называется кольцом, порождённым S.

Минимальное кольцо существует потому, что пересечение колец также является кольцом.

Пусть A – подмножество в X. Характеристической функцией подмножества A называется функция χ_A на X,

функцией подмножества A называется функция χ_A на X, заданная условием
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Если считать, что значения χ_A не числа, а вычеты по модулю 2, то справедливы равенства:

1. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
3. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B$
4. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$

Определение. Пусть X – топологическое пространство. U – семейство открытых множеств в X. Элементы $R_\delta(U)$ называются борелевскими подмножествами в X.

Пример

Множество Q_1 всех рациональных точек отрезка $[0,1]$ на $\mathbb{R}$ является борелевским множеством.

Доказательство: пусть $x_i = \mathbb{R} \setminus \{q_i\}$, где q_i – i-я рациональная точка на отрезке $[0,1]$.

Тогда x_i – открыто, поэтому $x_i \in R_\delta(U)$, следовательно $\bigcap\limits_i x_i \in R_\delta(U)$, следовательно,

$(\mathbb{R} \setminus \bigcap\limits_i x_i) \in R_\delta(U)$. $\mathbb{R} \setminus (\bigcap\limits_i x_i) = \bigcup\limits_i \{q_i\} = Q_1$.

$\Rightarrow Q_1$ – борелевское множество.

Здесь важно, что множество рациональных чисел счётно, поэтому $\bigcap\limits_i x_i$ – пересечение счётного числа множеств, а значит принадлежит $R_\delta(U)$.

С иррациональными числами это рассуждение будет неверно.

множеств, а значит принадлежит $R_\delta(\mathfrak{A})$.

С иррациональными числами это рассуждение будет неверно.

<u>Определение</u> Мерой на полукольце $S \subset 2^X$ называется вещественная неотрицательная функция μ на S, обладающая свойством аддитивности:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

Мера μ называется счётно-аддитивной (σ-аддитивной), если она обладает свойством:

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Точнее, если A_k и $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ принадлежат S и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ сходится, то его сумма равна $\mu\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

<u>Примеры</u>

1). Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка X.
Тогда для $\forall A \subset X$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in A \\ 0, & \text{если } x_0 \notin A \end{cases}.$$

Это σ-аддитивная мера на 2^X.

2) Пусть S — полукольцо полуинтервалов вида $[a, b)$ на $\mathbb{R}$. Положим $\mu([a, b)) = b - a$.
Тогда μ — мера на S. Эта мера σ-аддитивна, но пока оставим этот факт без доказательства.

σ-аддитивна, но пока оставим этот факт
без доказательства.

Теорема 3.
Всякая мера μ' на полукольце S однозначно продолжается до меры μ на кольце $R(S)$. Если исходная мера счётно-аддитивна, то и её продолжение счётно-аддитивно.
Доказательство в [1. А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. „Теоремы и задачи функционального анализа"].

Важное свойство счётно-аддитивных мер — счётная монотонность: если $A, A_k \in S$ и $A \subset \cup A_k$, то $\mu(A) \le \sum \mu(A_k)$.

<u>Определение</u> Пусть задано множество X, полукольцо $S \subset 2^X$ и σ-аддитивная мера μ на S.
Для $\forall A \in 2^X$ определим внешнюю меру $\mu^*(A)$ по формуле:
$$\mu^*(A) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k), \; A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \; A_k \in S.$$
Назовем подмножество $A \in 2^X$ измеримым по Лебегу относительно меры μ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $B \in R(S)$, что $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Можно для краткости называть такие множества μ-измеримыми (или просто измеримыми, если понятно, о какой мере идёт речь).

Теорема 4 (Лебега)

Теорема 4 (Лебега)
Совокупность $L(S, \mu)$ измеримых множеств образует σ-алгебру, на которой μ^* является σ-аддитивной мерой.

Доказательство в [1].

Теория меры и интегрирования в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим полукольцо S интервалов $[a, b)$ в $\mathbb{R}$. Введём на нем меру $\mu'([a, b)) = b - a$.
Можно показать, что это σ-аддитивная мера на S.
Можно продолжить эту меру на всё кольцо $R_\sigma(S)$.
Множество всех интервалов в $\mathbb{R}$ (замкнутых, открытых, полуоткрытых, вырожденных и невырожденных, конечных и бесконечных, включающих в себя, в частности, само $\mathbb{R}$, обозначим $\bar{S}$. Очевидно, что $\bar{S}$ не является счётно-аддитивным, поскольку $[a, b] \cup [c, d]$ не обязательно интервал. Построим σ-аддитивное семейство множеств из $\mathbb{R}$, содержащее $\bar{S}$.
Шаг 1. Рассмотрим $\tilde{S}$ – класс множеств I, являющихся объединением конечного или счётного числа интервалов из $\bar{S}$. Очевидно, что $\tilde{S}$ замкнуто относительно операции счётного объединения и конечного пересечения, но незамкнуто относительно операций бесконечного пересечения и разности.
Пример: пусть $L = (0, 1) \setminus Q((0, 1))$ –
– множество всех иррациональных точек интервала

Пример. Пусть $L = (0,1) \setminus \mathbb{Q}((0,1))$ —
— множество всех иррациональных точек интервала $(0,1)$. Множество L нельзя представить в виде объединения счётного числа интервалов.

С другой стороны множество рациональных чисел интервала $(0,1)$ $\mathbb{Q}((0,1)) \in \mathcal{T}$, поскольку его можно представить как объединение счётного числа вырожденных интервалов.

Поэтому надо добавить к $\mathcal{T}$ все множества, которые можно получить с помощью операций счётного объединения, счётного пересечения и разности множеств из $\mathcal{T}$. Можно показать, что и этот класс множеств не является счётно-аддитивным, поэтому можно повторять этот процесс снова и снова. Любое, полученное таким образом на каком-то шаге множество, является множеством, полученным из интервалов с помощью операций счётного объединения, счётного пересечения и вычитания.

Вся совокупность таких множеств называется классом $\mathcal{B}_1$ борелевских множеств в $\mathbb{R}$ и является счётно-аддитивной алгеброй.

Замечание. Сравните определение борелевского множества, данное ранее и данное.

$\mathcal{B}_1$ есть наименьший σ-аддитивный класс множеств, заключающий в себе все интервалы.

Шаг 2. Будем строить σ-аддитивную меру μ на $\mathcal{B}_1$.

Шаг 2. Будем строить σ-аддитивную меру μ на β_1.
Требования следующие:

$\forall M \in \beta_1$ должно выполняться:

а) $L(M) \geq 0$

в) Если $M = M_1 + M_2 + \ldots$ и $M_i \neq M_j$ $(i \neq j)$, то

$$L(M) = L(M_1) + L(M_2) + \ldots$$

с) Если M – интервал, то $L(M) = b - a$.

$(M = (a,b)\ , [a,b], (a,b], [a,b)\ \forall a \leq b)$

Таким образом надо расширить определение функции интервала и получить неотрицательную σ-аддитивную функцию множества, которая в частном случае интервала совпадает с μ!

Определим меру для $I \in \mathcal{T}$. Каждое I является объединением конечного или счётного числа интервалов.

$\Rightarrow \forall I \in \mathcal{T}$ может быть представлено как

$$I = i_1 \sqcup i_2 \sqcup \ldots \quad , \quad i_k \cap i_m = \emptyset \text{ при } k \neq m.$$

Тогда определим $\mu(I) = \sum\limits_{k=1}^{\ldots} \mu'(i_k)$.

Представление I в виде объединения интервалов не единственно. Пусть $I = j_1 \sqcup j_2 \sqcup j_3 \sqcup \ldots$

Надо показать, что $\sum\limits_{k=1}^{\ldots} \mu'(i_k) = \sum\limits_{k=1}^{\ldots} \mu'(j_k)$.

Для каждого i_k имеем:

$$i_k = i_k \cap I = i_k \cap \left(\bigsqcup_{l=1}^{\ldots} j_l \right) = \bigsqcup_{l=1}^{\ldots} (i_k \cap j_l)$$

$$i_k = i_k \cap I = i_k \cap \left(\bigsqcup_{l=1}^{\dots} j_l \right) = \bigsqcup_{l=1}^{\dots} (i_k \cap j_l)$$

Отсюда $$\mu'(i_k) = \sum_{l=1}^{\dots} \mu'(i_k \cap j_l).$$

Аналогично,
$$\mu'(j_k) = \sum_{l=1}^{\dots} \mu'(i_l \cap j_k)$$

Имеем
$$\sum_{k=1} \mu'(i_k) = \sum_k \sum_l \mu'(i_k \cap j_l) \qquad (1)$$

$$\sum_{l=1} \mu'(j_l) = \sum_l \sum_k \mu'(i_k \cap j_l) \qquad (2)$$

Возможны 3 случая:

1). интервалы i_k и j_l все конечны и двойной ряд $\sum_{k,l} \mu'(i_k \cap j_l)$ с неотрицательными членами сходится. Тогда в правых частях уравнений (1) и (2) стоят одинаковые конечные суммы.

2) все интервалы $i_k \cap j_l$ конечны, но указанный двойной ряд расходится. Тогда $\mu(I) = \infty$.

3) по крайней мере один $i_k \cap j_k$ бесконечен.

Тогда $\mu(I) = \infty$.

Построенная таким образом мера удовлетворяет условиям а) и с). Осталось показать, что она удовлетворяет также и в).

Пусть $I_1, I_2, \dots,$ — последовательность множеств из $\mathfrak{T}$, Пусть $I_1, I_2, \dots,$ — последовательность множеств из $\mathcal{T}$, таких, что $I_l \cap I_k = \emptyset$ при $l \neq k$, и пусть

$I_l = \bigsqcup_k i_{lk}$ — представление I_l в виде

суммы непересекающихся интервалов.

Тогда $\quad I = \bigsqcup_l I_l = \bigsqcup_l \bigsqcup_k i_{lk}$.

Можно представить двойную последовательность интервалов i_{kl} как простую последовательность:

$$\begin{array}{ccccc}
i_{11} & \to & i_{12} & & i_{13} \; \dots \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
i_{21} & & i_{22} & & i_{23} \; \dots \\
 & \swarrow & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array},$$

тогда имеем $\quad I = i^1 + i^2 + \dots$

$$\mu(I) = \sum_k \mu(i^k)$$

Проведя рассуждения, аналогичные проведённым выше, получаем

$$\mu(I) = \sum_k \mu(i^k) = \sum_l \sum_k \mu(i_{lk}) = \sum_l \mu(I_l)$$

Таким образом для всех множеств из $\mathcal{T}$ определена мера μ, удовлетворяющая условиям a) – c).

Можно показать, что для любого счётного семейства $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ множеств из $\mathcal{T}$ выполнено

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)$$

Это неравенство не требует предположения, что

$I_k \cap I_l = \emptyset$ при $k \neq l$.

$I_k \cap I_l = \emptyset$ при $k \neq l$.

Если I и J из Γ имеют конечную меру, то верно:

$$\mu(I \cup J) = \mu(I) + \mu(J) - \mu(I \cap J)$$

Для случая, когда I и J являются объединениями конечного числа интервалов, доказательство этого равенства следует из равенств:

$$I \cup J = I \cup (J \setminus (I \cap J))$$

$$J = I \cap J \cup (J \setminus (I \cap J)),$$

а поскольку множества в правых частях не пересекаются, то $\mu(I \cup J) = \mu(I) + \mu(J \setminus (I \cap J)) =$

$$= \mu(I) + \mu(J) - \mu(I \cap J).$$

Если I и J есть объединения конечного или счётного числа интервалов, то есть

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} i_k, \quad J = \bigcup_{k=1}^{\infty} j_k,$$ положим

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{n} i_k \quad \text{и} \quad J_n = \bigcup_{k=1}^{n} j_k,$$

$$\mu(I_n \cup J_n) = \mu(I_n) + \mu(J_n) - \mu(I_n \cap J_n)$$

При $n \to \infty$ $\begin{cases} I_n \to I \\ J_n \to J \end{cases}$ $\Rightarrow$ в пределе получаем

$$\mu(I \cap J) = \mu(I) + \mu(J) - \mu(I \cap J).$$

Шаг 3. Внешняя и внутренняя мера ограниченного множества.

множества.

Пусть S — некоторое ограниченное множество на прямой $\mathbb{R}$: $S \subset (a,b) \subset \mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $I \in \mathfrak{T}$: $S \subseteq I \subseteq (a,b)$

Если $I \in \mathfrak{T}$, то $I = \bigcup\limits_k i_k$ — объединение интервалов на прямой, конечное или счётное.

I всегда существует, поскольку можно взять $I = (a,b)$.

$I \in \mathfrak{T}$, поэтому определена мера $\mu(I)$

Множество I определено неоднозначно.

Рассмотрим множество $L(S)$ всех возможных чисел, каждое из которых является мерой для какого-то I. Элементы множества $L(S)$ неотрицательны, поэтому существует нижняя граница $L(S)$:

$$\bar{\mu}(S) = \inf L(S)$$

<u>Определение</u> Внешней мерой $\bar{\mu}(S)$ называется нижняя граница мер всех множеств из $\mathfrak{T}$, содержащих S.

Определение. Внутренней мерой $\underline{\mu}(S)$ называется число $(b-a) - \bar{\mu}((a,b) \setminus S)$ — разность между длиной интервала (a,b) и внешней мерой дополнения множества S в (a,b).

Очевидно, что $0 \le \bar{\mu}(S) \le b-a$

$$0 \le \underline{\mu}(S) \le b-a$$

Из определений следует монотонность по S функций $\bar{\mu}$ и $\underline{\mu}$, то есть при $S_1 \subset S_2$ выполнено $\bar{\mu}(S_1) \leq \bar{\mu}(S_2)$ и $\underline{\mu}(S_1) \leq \underline{\mu}(S_2)$

Обозначим $S^* = (a-b) \setminus S$.
$S, S^* \subset (a,b)$. Выберем $I_1, I_2 \subseteq (a,b)$ такие, что $S \subset I_1$, $S^* \subset I_2$. Тогда $I_1 \cup I_2 = (a,b)$
$\Rightarrow \mu(I_1) + \mu(I_2) \geqslant b-a$, что верно для любых таких I_1 и I_2.
Поэтому $\bar{\mu}(S) + \bar{\mu}(S^*) \geqslant b-a$, откуда

$$\bar{\mu}(S) \geqslant \underline{\mu}(S)$$

Мы построили две функции, аргументами которых являются ограниченные множества. Рассмотрим свойства этих функций.

Пусть $S_1, S_2, \ldots$ – последовательность ограниченных множеств, возможно пересекающихся, и пусть $\varepsilon > 0$.
Для каждого S_i найдётся I_i такое, что

$$S_i \subset I_i \subset \Gamma \quad \text{и} \quad \mu(I_i) < \bar{\mu}(S_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Тогда $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots$ и

$$\bar{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) \leq \mu(I_1 \cup I_2 \cup \ldots) \leq$$

$$\leq \mu(I_1) + \mu(I_2) + \ldots \leq$$

$$\leq \bar{\mu}(S_1) + \frac{\varepsilon}{2} + \bar{\mu}(S_2) + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots =$$

$$\leqslant \overline{\mu}(S_1)+\frac{\varepsilon}{2}+\overline{\mu}(S_2)+\frac{\varepsilon}{2^2}+\ldots =$$

$$=\overline{\mu}(S_1)+\overline{\mu}(S_2)+\ldots+\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=$$

$$=\overline{\mu}(S_1)+\overline{\mu}(S_2)+\ldots+\varepsilon$$

Поскольку ε произвольно, то выполнено неравенство:

$$\overline{\mu}(S_1\cup S_2\cup\ldots)\leq \overline{\mu}(S_1)+\overline{\mu}(S_2)+\ldots$$

Выведем аналогичное неравенство для $\underline{\mu}$.

Пусть множества S_1 и S_2 не пересекаются и пусть $S_1^*=(a,b)\setminus S_1$ и $S_2^*=(a,b)\setminus S_2$ содержатся в I_1 и I_2 из $\mathcal{T}$:

$$S_1^*\subset I_1, \quad S_2^*\subset I_2.$$

Тогда

$$(b-a)-\underline{\mu}(S_1)=\overline{\mu}(S_1^*)=\inf\mu(I_1)$$

$$(b-a)-\underline{\mu}(S_2)=\overline{\mu}(S_2^*)=\inf\mu(I_2)$$

Далее: $\quad (S_1\cup S_2)^*=S_1^*\cap S_2^*\subset I_1\cap I_2$

$$\Rightarrow (b-a)-\underline{\mu}(S_1\cup S_2)=\overline{\mu}\left((S_1\cup S_2)^*\right)\leq \inf\mu(I_1\cap I_2)$$

Отсюда $\quad \underline{\mu}(S_1\cup S_2)-\underline{\mu}(S_1)-\underline{\mu}(S_2)\geqslant$

$$\geqslant \inf\left(\mu(I_1)+\mu(I_2)\right)-\inf\mu(I_1\cap I_2)-(b-a)\geqslant$$

$$\geqslant \inf\left(\mu(I_1)+\mu(I_2)-\mu(I_1\cap I_2)\right)-b-a=$$

$$=\inf\mu(I_1\cup I_2)-(b-a)$$

$$S_1\cap S_2=\varnothing \Rightarrow S_1^*\cup S_2^*=(S_1\cap S_2)^*=(a,b)\setminus\varnothing$$

$$\Rightarrow I_1\cup I_2\supset S_1^*\cup S_2^*=(a,b)$$

Но по выбору I_1, I_2, выполнено $I_1\cup I_2\subset(a,b)$

$\Rightarrow I_1 \cup I_2 \supset S_1 \cup S_2 = (a,b)$

Но по выбору I_1, I_2 выполнено $I_1 \cup I_2 \subset (a,b)$.

$\Rightarrow I_1 \cup I_2 = (a,b)$, откуда

$$\underline{\mu}(S_1 \cup S_2) \geqslant \underline{\mu}(S_1) + \underline{\mu}(S_2)$$

Если $S_1, S_2, \dots$ — последовательность попарно непересекающихся множеств, то повторно применяя последнее неравенство, имеем:

$$\underline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \dots) \geqslant \underline{\mu}(S_1) + \underline{\mu}(S_2) + \dots$$

В частном случае, когда S — интервал,

$\underline{\mu}(S) = \overline{\mu}(S) = \mu'(S)$ — длина интервала S.

Если $I = \sum\limits_k i_k \in \mathcal{T}$, причем $i_k \cap i_l = \varnothing$ при $k \neq l$,

где $i_k = (a_k, b_k)$,

имеем $\overline{\mu}(I) \leqslant \sum\limits_k \mu'(i_k)$, $\underline{\mu}(I) \geqslant \sum\limits_k \mu'(i_k)$

и $\overline{\mu}(I) \geqslant \underline{\mu}(I)$, откуда следует

$$\overline{\mu}(I) = \underline{\mu}(I) = \sum_k \mu'(i_k) = \sum_k (b_k - a_k)$$

Легко понять, что функции $\overline{\mu}$ и $\underline{\mu}$ не зависят от выбранного интервала (a,b), а только от множества S.

Определение. Ограниченное множество S называется измеримым, если его внешняя и внутренняя меры равны: $\underline{\mu}(S) = \overline{\mu}(S) = \mu(S)$ — их общее значение называется мерой S или лебеговой мерой S.

называется мерой S или лебеговой мерой S.

Неограниченное множество называется измеримым, если пересечение $S_x = [-x, x] \cap S$ измеримо при любом $x \geq 0$

Мера $\mu(S)$ определяется по формуле:

$$\mu(S) = \lim_{x \to \infty} \mu(S_x)$$

Этот предел (конечный или бесконечный) всегда существует, поскольку $\mu(S_x)$ есть неубывающая функция от x.

В частном случае, когда $S \in \mathcal{T}$, новое определение меры совпадает с данным ранее для множеств из $\mathcal{T}$.

Поскольку $\underline{\mu}$ и $\overline{\mu}$ монотонные функции множества S, то и μ также монотонна:

$\forall S_1, S_2$ верно если $S_1 \subset S_2$, то $\mu(S_1) \leq \mu(S_2)$

Условия a) и c) для μ выполнены по определению: $\mu(S) \geq 0$ и если $S = (a, b)$, то $\mu(S) = b - a$.

Покажем, что выполнено условие b): если $S_1, S_2, \ldots$ — попарно непересекающиеся измеримые множества, то $S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ также измеримо и

$$\mu(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k).$$

Рассмотрим сначала случай, когда все S_k содержатся в некотором конечном интервале (a, b).

Тогда

$$\overline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) \leq \overline{\mu}(S_1) + \overline{\mu}(S_2) + \ldots =$$

$$= \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots = \underline{\mu}(S_1) + \underline{\mu}(S_2) + \ldots \geq$$

$$= \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots = \underline{\mu}(S_1) + \underline{\mu}(S_2) + \ldots \geqslant$$

$$\geqslant \underline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots)$$, а с другой стороны, $\bar{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) \geqslant \underline{\mu}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots)$

В общем случае, когда $S_1, S_2, \ldots$ не содержатся в конечном интервале, мы рассматриваем пересечение $(-x, x) \cap S_1$, $(-x, x) \cap S_2, \ldots$

Множество $(-x, x) \cap (S_1 \cup S_2 \cup \ldots)$ измеримо и

$$\mu((-x, x) \cap (S_1 \cup S_2 \cup \ldots)) = \mu((-x, x) \cap S_1) + \mu((-x, x) \cap S_2) + \ldots$$ при любом x.

Тогда $S_1 \cup S_2 \cup \ldots$ измеримо и

$$\mu(S_1 \cup S_2 \cup \ldots) = \lim_{x \to \infty} (\mu((-x, x) \cap S_1) + \mu((-x, x) \cap S_2) + \ldots =$$

$$= \mu(S_1) + \mu(S_2) + \ldots$$

Мы доказали, что мера Лебега удовлетворяет всем трём условиям:

a) она неотрицательна,

в) она счётно-аддитивна

c) на интервалах она равна их длине.

Если $\mu(S) = 0$, то S называется множеством меры 0. Любое измеримое подмножество множества меры 0 есть множество меры 0.

Каждое счётное множество есть множество меры 0.

Пример. Рациональные точки отрезка.