

Семинар 12.

Расширение поля. Характеристика поля. Простое подполе.
Степень расширения.

1. Привести пример поля, для которого \mathbb{C} является собственным подполем.
2. Привести пример бесконечного поля, простое подполе которого конечно.
3. Привести пример расширения \mathbb{F}_p , не являющегося конечным расширением.
4. Доказать, что если L -поле, $|L| = p^n$, K -подполе L , то $|K| = p^m$ и $m|n$.
5. Может ли поле, состоящее из 64 элементов иметь подполе, состоящее из 16 элементов?
6. Сколько собственных подполей имеет поле, состоящее из p^2 элементов?
7. Существует ли поле, состоящее из 216 элементов?
8. Найти все автоморфизмы φ поля \mathbb{C} : $\varphi|_{\mathbb{R}} = \text{id}$.
9. Найти все автоморфизмы поля $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
10. Доказать, что любой нетривиальный гомоморфизм произвольного кольца с 1 в целостное кольцо переводит 1 в 1.
11. Доказать, что между полями разной характеристики не существует нетривиальных гомоморфизмов.
12. Доказать, что $R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -2\beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}_7 \right\} \subset \text{M}(2, \mathbb{F}_7)$ является полем. Найти $\text{char } R$, простое подполе $F \subset R$, базис линейного пространства R над F , $\dim_F R$.