Решения задач семинара 12.

1. $\mathbb{C}(x)$ – поле рациональных функций с комплексными коэффициентами.

2., 3. $\mathbb{F}_p(x)$ – поле рациональных функций с коэффициентами из поля $\mathbb{F}_p$.

4. $K \subset L$, $|L| = p^n \Longleftrightarrow \operatorname{char} L = p$, $\dim_{\mathbb{F}_p} L = n$

$\Downarrow$

$\operatorname{char} K = p \Rightarrow |K| = p^m$, $\dim_{\mathbb{F}_p} K = m$

$\mathbb{F}_p \subset K \subset L \Rightarrow m / n$

5. $64 = 2^6$, $16 = 2^4$, $4 \nmid 6 \Rightarrow$ не может поле из 64 элементов иметь подполе из 16 элементов.

6. $|K| = p^2 \Rightarrow K$ имеет только одно собственное подполе – простое, т.к. $2 = \dim_{\mathbb{F}_p} K$ – простое число

7. $216 = 2^3 3^3 \Rightarrow$ Поля с таким количеством элементов не существует, т.к. порядок любого конечного поля – степень простого числа.

8. Пусть $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ автоморфизм : $\varphi|_{\mathbb{R}} = id \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \varphi(a+ib) = a + b\varphi(i)$

Действие автоморфизма φ задается $\varphi(i)$.

$$\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi(i) = i \Rightarrow \varphi = id \\ \varphi(-i) = -i \Rightarrow \varphi(z) = \bar{z} \text{ – комплексное сопряжение} \end{array} \right.$$

Осталось доказать, что комплексное сопряжение – автоморфизм $\mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C}$ $\bar{\bar{z}} = z \Rightarrow \varphi(z) = \bar{z}$ – биекция

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{cases} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \varphi(z) = \bar{z} \text{ – гомоморфизм}$$

9. $\mathbb{Q}$ является простым подполем $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \Rightarrow \forall$ автоморфизм $\varphi : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ оставляет на месте элементы $\mathbb{Q}$, т.е. $\varphi|_{\mathbb{Q}} = id$

Далее аналогично 8.

10. Пусть A – кольцо с 1, B – ЦК (КАК1 без делителей нуля),

$\varphi: A \to B$ нетривиальный гомоморфизм

$$\varphi(1_A) = \varphi(1_A 1_A) = \varphi(1_A)\varphi(1_A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(1_A)(\varphi(1_A) - 1_B) = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi(1_A) = \bar{0}, \text{ но } \varphi \text{ – нетривиальный гомоморфизм} \\ \varphi(1_A) = 1_B \end{array}\right. \Rightarrow \varphi(1_A) = 1_B$$

11. Пусть K, L – поля,

$\varphi: K \to L$ – нетривиальный гомоморфизм $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}, \text{ т.е. } \varphi \text{ – мономорфизм} \\ \varphi(1_K) = 1_L \end{cases}$$

1) Пусть $\operatorname{char} K \neq \operatorname{char} L$, $\operatorname{char} L = q \neq 0$

$$\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{q} \neq \bar{0} \in K \Rightarrow \varphi(\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{q}) \neq \bar{0} \in L, \text{ т.к. } \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\},$$

$$\text{но } \varphi(\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{q}) = \underbrace{\varphi(1_K) + \varphi(1_K) + \ldots + \varphi(1_K)}_{q} = \underbrace{1_L + 1_L + \ldots + 1_L}_{q} = \bar{0}$$

2) Пусть $\operatorname{char} K = p \neq 0$, $\operatorname{char} L = 0$

$$\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{p} = \bar{0} \in K$$

$$\varphi(\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{p}) = \bar{0} \in L,$$

$$\text{но } \varphi(\underbrace{1_K + 1_K + \ldots + 1_K}_{p}) = \underbrace{\varphi(1_K) + \varphi(1_K) + \ldots + \varphi(1_K)}_{p} = \underbrace{1_L + 1_L + \ldots + 1_L}_{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{1_L + 1_L + \ldots + 1_L}_{p} = \bar{0} \in L, \text{ но } \operatorname{char} L = 0$$

Следовательно, не существует нетривиальных гомоморфизмов между полями разной характеристики.