0.1 Кривизна неявно заданной кривой

Пусть кривая задана неявно уравнением $F(x,y)=0$. Предположим, что точка (x_0,y_0) лежит на кривой, т.е. $F(x_0,y_0)=0$, и $\operatorname{grad} F(x_0,y_0)\neq 0$. По теореме о неявной функции если $F_x(x_0,y_0)\neq 0$, то кривая локально представляется графиком функции $x=x(y)$ в окрестности точки y_0, а если $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, то – графиком функции $y=y(x)$ в окрестности точки x_0. Здесь и далее через F_x, F_y, F_{xx} и т.д. обозначаются частные производные, например, $F_{xy}=F_{yx}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$. Поскольку график функции – ориентированная кривая (в первом случае направление определяется возрастанием y, а во втором – возрастанием x), мы можем найти кривизну (со знаком) полученной кривой. Покажем как найти кривизны этих кривых через производные функции F. В случае когда определены обе кривые (т.е. обе производные отличны от нуля), кривизны равны по модулю, но могут как совпадать, так и отличаться знаком.

1. Случай $F_x\neq 0$.

Если $\alpha(y)=(x(y),y)^T$, то $\alpha'(y)=(x'(y),1)^T=(x',1)^T$, где $x'=x'_y=\frac{dx}{dy}$. Далее, $\alpha''(y)=(x''(y),0)^T=(x',0)^T$, $|\alpha'|^2=1+(x')^2$ и $\det[\alpha'\alpha'']=\begin{vmatrix} x' & 1\\ x'' & 0\end{vmatrix}=-x''$.

$$k=\frac{\det[\alpha'\alpha'']}{|\alpha'|^3}=-\frac{x''}{(1+(x')^2)^{3/2}}.$$

Подставив в $F(x,y)=0$ функцию $x=x(y)$, получим тождество, дифференцируя которое, находим:

$$F_x x'+F_y=0 \;\Rightarrow\; x'=-\frac{F_y}{F_x}.$$

Далее,

$$(1+(x')^2)^{3/2}=\left(1+\frac{F_y^2}{F_x^2}\right)^{3/2}=\frac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{|F_x|^3}=\frac{|\operatorname{grad} F|^3}{|F_x|^3}.$$

$$\begin{aligned}x''=-\frac{d}{dy}\frac{F_y}{F_x}&=-\frac{(F_{yx}x'+F_{yy})F_x-(F_{xx}x'+F_{xy})F_y}{F_x^2}=\\ &=-\frac{(-F_{yx}\frac{F_y}{F_x}+F_{yy})F_x-(-F_{xx}\frac{F_y}{F_x}+F_{xy})F_y}{F_x^2}=\\ &=-\frac{-F_{yx}F_y+F_{yy}F_x+F_{xx}F_y^2\cdot\frac{1}{F_x}-F_{xy}F_y}{F_x^2}=\\ =-\frac{-2F_{xy}F_yF_x+F_{yy}F_x^2+F_{xx}F_y^2}{F_x^3}&=\frac{2F_{xy}F_xF_y-F_{xx}F_y^2-F_{yy}F_x^2}{F_x^3}.\end{aligned}$$

Итак,

$$x''=\frac{2F_{xy}F_xF_y-F_{xx}F_y^2-F_{yy}F_x^2}{F_x^3}.$$

Пользуясь правилом Саррюса находим:

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x\\ F_{xy} & F_{yy} & F_y\\ F_x & F_y & 0\end{vmatrix}=2F_{xy}F_xF_y-F_{xx}F_y^2-F_{yy}F_x^2.$$

Таким образом, имеем

$$x'' = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{F_x^3}.$$

Поскольку $|F_x^3|/F_x^3 = \operatorname{sign} F_x$, где sign – знак числа, получаем:

$$k = -\operatorname{sign} F_x \cdot \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}} = -\operatorname{sign} F_x \cdot \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

Отметим также, что

$F_x^2 + F_y^2 = |\operatorname{grad} F|^2 \;\Rightarrow\; (F_x^2+F_y^2)^{3/2} = |\operatorname{grad} F|^3.$

2. Случай $F_y \neq 0$.

$\alpha(x) = (x, y(x))^T$, $\alpha'(x) = (1, y')^T$, $\alpha''(x) = (0, y'')^T$, $|\alpha'|^2 = 1+(y')^2$, $\det[\alpha'\alpha''] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y' & y'' \end{vmatrix} = y''$.

$$k = \frac{\det[\alpha'\alpha'']}{|\alpha'|^3} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}.$$

Считая, что y зависит от x и дифференцируя тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ получим:

$F_x + F_y y' = 0 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{F_x}{F_y}$, $1+(y')^2 = \frac{F_x^2+F_y^2}{F_y^2} \;\Rightarrow\; (1+(y')^2)^{3/2} = \frac{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}{|F_y|^3}$

$$\begin{aligned} y'' = -\frac{d}{dx}\frac{F_x}{F_y} &= -\frac{(F_{xx}+F_{xy}y')F_y - (F_{yx}+F_{yy}y')F_x}{F_y^2} = \\ &= -\frac{(F_{xx}-F_{xy}\frac{F_x}{F_y})F_y - (F_{yx}-F_{yy}\frac{F_x}{F_y})F_x}{F_y^2} = \\ &= -\frac{F_{xx}F_y - F_{xy}F_x - F_{yx}F_x + F_{yy}\frac{F_x^2}{F_y}}{F_y^2} = \\ = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_x^3} &= \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3} = \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{F_y^3}.$$

$$k = \operatorname{sign} F_y \cdot \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}} = \operatorname{sign} F_y \cdot \frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

0.2 Эволюта

Найдем координаты точек эволюты в случае $\alpha(x) = (x, y(x))^T$. Имеем:

$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(1, y')^T = \frac{|F_y|}{|\operatorname{grad} F|}(1, -\frac{F_x}{F_y})^T = \frac{1}{|\operatorname{grad} F|}(|F_y|, -\operatorname{sign} F_y \cdot F_x)^T \Rightarrow \bar{\nu} = \frac{1}{|\operatorname{grad} F|}(\operatorname{sign} F_y \cdot F_x, |F_y|)^T \Rightarrow \frac{1}{k}\bar{\nu} = \frac{F_x^2+F_y^2}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}(F_x, F_y)^T$.

Обозначим координаты точек эволюты через X и Y. Тогда $(X, Y)^T = (x, y)^T + \frac{1}{k}\bar{\nu}$ или:

$$\begin{cases} X = x + F_x \cdot \dfrac{F_x^2 + F_y^2}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}} \\ Y = y + F_y \cdot \dfrac{F_x^2 + F_y^2}{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

Такой же ответ получится, если считать, что x выражено через y.

Отметим, что эти формулы – не являются параметрическим заданием эволюты (они дадут параметрическое задание, если выразить x через y, или y через x). Однако, если мы знаем координаты точки на кривой, то с помощью этих формул находится центр кривизны, и, следовательно, мы можем найти радиус соприкасающейся окружности (как расстояние между точкой и центром кривизны) и написать ее уравнение.

Заметим, что координаты эволюты кривой $\alpha(x) = (x, y(x))^T$ можно найти из приведенных формул, если записать кривую в виде $y - y(x) = 0$, $F(x, y) = y - y(x)$. Тогда $F_x = -y'$, $F_{xx} = -y''$, $F_y = 1$, $F_{yy} = F_{xy} = 0$, поэтому $F_x^2 + F_y^2 = 1 + y'^2$ и

$$\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y'' & 0 & -y' \\ 0 & 0 & 1 \\ -y' & 1 & 0 \end{vmatrix} = y'',$$

откуда находим координаты точек эволюты

$$\begin{cases} X = x - y' \cdot \dfrac{1 + y'^2}{y''} \\ Y = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \end{cases}$$

и кривизну $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

Разумеется, то же самое можно получить из формул координат точек эволюты кривой, заданной параметрически.

Если $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$, то $\dot\alpha(t) = (\dot x(t), \dot y(t))^T$, $\ddot\alpha(t) = (\ddot x(t), \ddot y(t))^T$,

$$|\dot\alpha(t)|^2 = \dot x^2(t) + \dot y^2(t),$$

$$\det[\dot\alpha(t)\ddot\alpha(t)] = \begin{vmatrix} \dot x(t) & \ddot x(t) \\ \dot y(t) & \ddot y(t) \end{vmatrix} = \dot x(t)\ddot y(t) - \ddot x(t)\dot y(t),$$

$$k(t) = \frac{\det[\dot\alpha(t)\ddot\alpha(t)]}{|\dot\alpha(t)|^3} = \frac{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{3/2}}.$$

$$\bar\tau(t) = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|} = \frac{1}{|\dot\alpha(t)|}(\dot x(t), \dot y(t))^T \;\Rightarrow\; \bar\nu(t) = \frac{1}{|\dot\alpha(t)|}(-\dot y(t), \dot x(t))^T = \frac{(-\dot y(t), \dot x(t))^T}{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}}.$$

$$\alpha(t) + \frac{1}{k(t)}\bar\nu(t) = (x(t), y(t))^T + \frac{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot x(t) & \ddot x(t) \\ \dot y(t) & \ddot y(t) \end{vmatrix}} \cdot (-\dot y(t), \dot x(t))^T =$$

$$= (x, y)^T + \frac{\dot x^2 + \dot y^2}{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}} \cdot (-\dot y, \dot x)^T.$$

В координатах:

$$\begin{cases} X = x(t) - \dot y(t) \cdot \dfrac{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot x(t) & \ddot x(t) \\ \dot y(t) & \ddot y(t) \end{vmatrix}} = x - \dot y \cdot \dfrac{\dot x^2 + \dot y^2}{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}} \\ \\ Y = y(t) + \dot x(t) \cdot \dfrac{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot x(t) & \ddot x(t) \\ \dot y(t) & \ddot y(t) \end{vmatrix}} = y + \dot x \cdot \dfrac{\dot x^2 + \dot y^2}{\begin{vmatrix} \dot x & \ddot x \\ \dot y & \ddot y \end{vmatrix}} \end{cases}$$

Например, если $\alpha(y) = (x(y), y)^T$, то

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{1 + x'^2}{x''} \\ Y = y - x' \cdot \dfrac{1 + x'^2}{x''} \end{cases}$$

Пример. Найти уравнение соприкасающейся окружности к кривой $x^3 + y^3 = 3xy$ в точке $A(3/2, 3/2)$.

Перепишем уравнение в виде $F(x, y) = 0$, где $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Тогда $F_x = 3x^2 - 3y$, $F_y = 3y^2 - 3x$, $F_x(A) = F_y(A) = 9/4$, $F_{xx} = 6x$, $F_{yy} = 6y$, $F_{xy} = -3$, $F_{xx}(A) = F_{yy}(A) = 9$.

$$2F_{xy}(A)F_x(A)F_y(A) - F_{xx}(A)F_y^2(A) - F_{yy}(A)F_x^2(A) =$$
$$= -6\cdot\frac{9^2}{4^2} - 9\cdot\frac{9^2}{4^2} - 9\cdot\frac{9^2}{4^2} = -3\cdot 8\cdot\frac{9^2}{4^2},$$
$$(F_x^2(A) + F_y^2(A))^{3/2} = \left(2\cdot\frac{9^2}{4^2}\right)^{3/2} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{9^3}{4^3} = \frac{9^3}{4^2\sqrt{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ k(A) = -3\cdot 8\cdot\frac{9^2}{4^2} : \frac{9^3}{4^2\sqrt{2}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3} \Rightarrow\ R(A) = \frac{1}{|k(A)|} = \frac{3}{8\sqrt{2}}.$$

Напишем уравнение нормали (в качестве направляющего вектора можно взять градиент)

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Градиент $\operatorname{grad} F(A) = (9/4, 9/4)^T$ коллинеарен вектору $(1,1)$, поэтому уравнение нормали имеет вид $x - \frac{3}{2} = y - \frac{3}{2}$, или $y = x$. Из выражения для $y''(3/2)$ находим, что вторая производная отрицательна, значит, график является выпуклым вверх, и направление от точки A к центру кривизны дается вектором $(-1,-1)^T$ Находим центр соприкасающейся окружности:

$$(X, Y) = (3/2, 3/2)^T + \frac{3}{8\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^T = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{16}, \frac{3}{2} - \frac{3}{16}\right)^T = \left(\frac{21}{16}, \frac{21}{16}\right)^T.$$

Отметим также, что поскольку здесь мы рассматриваем кривую как график функции $y = y(x)$, то

$$\bar{\nu}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T, \bar{\tau}(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T, \frac{1}{k(A)}\bar{\nu}(A) = -\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T = -\frac{3}{16}(1,1)^T.$$

Далее, зная радиус и центр, пишем уравнение соприкасающейся окружности:

$$\left(x - \frac{21}{16}\right)^2 + \left(y - \frac{21}{16}\right)^2 = \frac{9}{128}.$$

Можно было поступить и по-другому – сразу найти центр кривизны из приведенных выше формул:

$$X = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\cdot\frac{2\cdot\frac{9^2}{4^2}}{-3\cdot 8\cdot\frac{9^2}{4^2}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{16} = \frac{21}{16},$$

и аналогично $Y = 21/16$. Поэтому

$$R(A) = \left|\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}\right)^T\right| = \frac{3}{16}|(1,1)| = \frac{3}{16}\sqrt{2} = \frac{3}{8\sqrt{2}}.$$

$\square$