Разбор задач, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 23.05.2020 для всез групп.

1. Пусть производная Фреше $F'(x)$ непрерывна на множестве, содержащем отрезок между точками a и b. Докажите, что найдётся такая константа N_1, что во всех точках этого отрезка выполнено неравенство $\|F'(x)\| \le N_1$.

   Решение совсем простое. Рассмотрим функционал $\|F'(x)\|$. Он непрерывен на множестве, на котором непрерывна производная Фреше $F'(x)$, как композиция двух непрерывных отображений – $F'(x)$ и нормы. Сузим его на отрезок между точками a и b и рассмотрим его как функцию переменной $t \in [0,1]$, параметризующей точки отрезка: $\|F'(a + t(b-a))\|$. Мы получили непрерывную вещественную функцию вещественной переменной на отрезке. Такая функция ограничена.

   Ещё проще было сослаться на ограниченность произволного непрерывного отображения на компакте – отрезке, соединяющем точки a и b.

   Замечание. Здесь под непрерывностью $F'(x)$ на множестве понимается не непрерывность (т.е. ограниченность) $F'(x)$ как линейного оператора при каждом x (вернее, не только это), а непрерывная зависимость этого оператора от точки x, в которой производится дифференцирование.

2. Для отображения f из E^1 в E^1 покажите на примере отсутствие сходимости последовательности метода Ньютона даже при наличии регулярности, если начальное приближение x_0 выбрано далеко от корня x_*.

   Решение. Для такой функции условие регулярности – это равномерная ограниченность $|f'(x)^{-1}|$, т.е. отделённость производной от нуля. Поскольку производная должна существовать всюду (на рассматриваемом множестве, содержащем корень) и не обращается в нуль, она, тем самым, имеет постоянный знак (я, правда, не знаю теоремы, согласно которой функция, дифференцируемая во всех точках, непрерывно дифференцируема, да она и неверна, но давайте ограничимся этим случаем). Итак, мы должны придумать непрерывно дифференцируемую функцию, монотонную (в силу знакопостоянства производной) и такую, чтобы метод Ньютона при некотором выборе начального приближения расходился.

   Проще всего нарисовать картинку: рассмотрим две параллельные наклонные прямые (для определённости, с положительным угловым коэффициентом), верхняя пересекает ось абсцисс в точке a, нижняя в точке b, при этом $a < b$. Рассмотрим также кривую, проекция которой на ось абсцисс расположена между a и b, которая гладко монотонно соединяет эти прямые, переходя с ростом аргумента с нижней на верхнюю и при этом в какой-то точке пересекая ось абсцисс. График нашей функции (слева направо): сначала участок нижней прямой, затем кривая, затем участок верхней прямой.

Метод Ньютона в одномерном случае – это метод касательных. Возьмём начальное приближение x_0 в точке b или правее. Значение функции лежит на верхней прямой, и касательная – это сама эта верхняя прямая. Точка её пересечения с осью абсцисс – точка a, т.е. $x_1 = a$. Значение функции в этой точке лежит уже на нижней кривой, которая является касательной, точка её пересечения с осью абсцисс – точка b, поэтому $x_2 = b$. Дальше процесс продолжится в том же духе: значения x_k с нечётными номерами будут совпадать с a, а с чётными – с b, сходимости нет.

Задача решена, но попробуем теперь подобрать такую аналитическую функцию, для которой будут происходить аналогичное зацикливание: элементы последовательности метода Ньютона будут поочерёдно принимать два значения, для определённости плюс и минус единицу, а функцию будем подбирать нечётную наиболее простой структуры. Итак, наши условия:

$$1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = -1\,,$$

откуда

$$f(1) = 2f'(1)\,.$$

При условии нечётности в этом случае $f(-1) = -f(1)$, $f'(-1) = f'(1)$ (производная уже чётная), и тогда равенство

$$-1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = 1$$

также будет выполнено.

Будем искать функцию f в виде многочлена пятой степени:

$$f(x) = x - ax^3 + bx^5\,,$$

где a и b – положительные числа. Коэффициент при первой степени может быть взят произвольным, но не равным нулю, чтобы в нуле производная не обращалась в нуль. Если взять этот коэффициент положительным (например, единицей), то остальные коэффициенты должны быть такими, чтобы производная оставалась положительной на всей вещественной оси (условие регулярности). Поэтому коэффициент при старшей (пятой) степени должен быть положительным, в то же время при третьей (промежуточной) он должен быть отрицательным, иначе производная в единице будет больше, чем сама функция, а у нас она должна быть вдвое меньше.

Производная нашей функции равна

$$f'(x) = 1 - 3ax^2 + 5bx^4\,,$$

и тогда условие в единице даёт равенство

$$1 - a + b = 2(1 - 3a + 5b)\,,$$

откуда

$$a = \frac{1 + 9b}{5}\,.$$

При любых a и b, удовлетворяющих этому равенству, будет происходить зацикливание, но нам ещё нужно обеспечить выполнение условия регулярности, т.е. положительность производной при всех значениях x (и тогда она будет отделена от нуля, поскольку на бесконечности к нулю не стремится, а стремится к бесконечности). Производная является квадратным трёхчленом относительно x^2 и всегда положительна, если отрицателен дискриминант:

$$D = (3a)^2 - 4 \cdot 5b < 0\,,$$

или, с учётом полученного соотношения на коэффициенты,

$$D = \frac{9}{25}(1 + 9b)^2 - 20b < 0\,.$$

Это условие является не только достаточным, но и необходимым, поскольку при неотрицательном дискриминанте корни квадратного трёхчлена заведомо положительны.

Выражение для D само является квадратным трёхчленом относительно b с положительным коэффициентом при старшей степени и положительным свободным членом, поэтому возникает вопрос о существовании решений неравенства. Здесь можно раскрыть скобки и искать дискриминант уже нового трёхчлена, но мы поступим по-другому: найдём точку минимума для D и сосчитаем его значение в этой точке. Если полученное значение окажется неотрицательным, то это будет означать, что задача решений не имеет, и нужно искать функцию f в другом виде. Если же значение окажется отрицательным, то мы заодно подберём подходящее значение b, а тогда и a.

Дифференцируем D по b и приравниваем производную нулю:

$$2 \cdot 9 \cdot \frac{9}{25}(1 + 9b) - 20 = 0\,,$$

тогда

$$1 + 9b = \frac{250}{81}\,,$$

и

$$b = \frac{1}{9}\left(\frac{250}{81} - 1\right) = \frac{169}{729}\,.$$

Находим дискриминант:

$$D = \frac{9}{25}\left(\frac{250}{81}\right)^2 - 20 \cdot \frac{169}{729} = \frac{2500}{729} - \frac{3380}{729} = -\frac{880}{729} < 0\,.$$

Разумеется, не было никакой необходимости в точности вычислять дискриминант, достаточно было оценить его и убедиться в его отрицательности.

Ну что же, мы нашли по крайней мере одно значение b, удовлетворяющее нужному условию. Соответствующее значение коэффициента a равно

$$a = \frac{1}{5} \cdot \frac{250}{81} = \frac{50}{81}\,,$$

и тогда искомая функция имеет вид

$$f(x) = x - \frac{50}{81}x^3 + \frac{169}{729}x^5\,.$$

Замечание. Разумеется, это не единственное решение. Мы можем небольшим шевелением b, не влияющим на знак D, получить многочлен с менее громоздкими коэффициентами, удовлетворяющий всем условиям, например:

$$f(x) = x - \frac{3}{5}x^3 + \frac{2}{9}x^5\,.$$

3. Приведите пример функции f и выбора начального приближения x_0 таких, что процесс Ньютона не осуществим (начиная с x_0).

   Решение. Берём начальную точку, в которой производная равна нулю. Например, для функции $f(x) = x^3 - 1$, имеющей единственный корень $x = 1$, можно взять $x_0 = 0$.

4. Получите необходимые условия минимума функционала

$$\Phi(x) = \int_a^b f(s, x(s), \dot{x}(s))\, ds$$

при одном дополнительном условии $x(a) = 0$.

Замечание. Мы, разумеется, предполагаем, что функция f обладает необходимыми свойствами гладкости, а именно: непрерывна по совокупности переменных, дифференцируема по второму и третьему аргументу, и частные производные равномерно липшицевы по второму и третьему аргументу. В этом случае, как мы знаем из учебника и из лекций, функционал Φ дифференцируем по Фреше в пространстве $C_1[a,b]$.

Решение. Пусть функция x_* – точка минимума функционала Φ на множестве $M = \{x \in C_1[a,b] : x(a) = 0\}$. Рассмотрим семейство функций $\{x(s;t) = x_*(s) + th(s)\}$, где h – некоторая фиксированная непрерывно дифференцируемая функция. Это семейство лежит в M, если $x(a;t) = x_*(a) + th(a) = th(a) = 0$, т.е. при $h(a) = 0$, что означает, что $h \in M$. Будем считать это условие выполненным, тогда x_* доставляет функционалу Φ минимум не только на M, но и на более узком семействе $\{x(\cdot,t)\}$. При фиксированном h это семейство однопараметрическое, т.е. $\Phi(x_* + th)$ есть вещественная функция вещественного переменного t и имеет минимум при $t = 0$, когда $x(\cdot,0) = x_*$. Но тогда значение $t = 0$ является стационарной точкой $\Phi(x_* + th)$, если только функция $\Phi(x_* + th)$ дифференцируема по t. Эта дифференцируемость есть следствие дифференцируемости Φ по Фреше, а, следовательно, и по Гато: дифференциал Гато есть не что иное как

$$\frac{d}{dt}\Phi(x_* + th)\bigg|_{t=0} ,$$

существующий для произвольных $h \in C_1[a,b]$ и, в частности, для $h \in M$. Значение этого дифференциала, как мы знаем из книги и лекций, равно

$$d\Phi(x;h) = \int_a^b \left\{ f_u(s,x(s),\dot{x}(s))h(s) + f_v(s,x(s),\dot{x}(s))\dot{h}(s) \right\} ds$$

и должно обращаться в нуль при $x = x_*$ для произвольного $h \in M$. Здесь f_u и f_v – частные производные по второму и третьему аргументам соответственно.

Рассмотрим теперь непрерывно дифференцируемые функции h, обращающиеся в нуль в обеих граничных точках: $h(a) = h(b) = 0$, принадлежащие сужению множества M. Очевидно, для всех таких функций дифференциал Фреше обращается в нуль на элемента $x = x_*$. Отсюда следует (опять смотрим учебник и лекции), что производная $f_v(s,x(s),\dot{x}(s))$ при $x = x_*$ имеет полную производную по s, и при этом функция $x_*(s)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$f_u(s,x(s),\dot{x}(s)) - \frac{d}{ds}f_v(s,x(s),\dot{x}(s)) = 0$$

(звёздочки не пишу). Очевидно, согласно условию, эта функция удовлетворяеи также нулевому краевому условию в точке a.

Теперь рассмотрим функцию $h(s)$, не обращающуюся в нуль на правой границе, но равную нулю на левой (например, $h(s) = s - a$). Преобразуем выражение для $d\Phi(x_*,h)$, проинтегрировав по частям второе слагаемое. Это можно сделать, поскольку, как мы уже знаем, функция $f_v(s,x_*(s),\dot{x}_*(s))$ дифференцируема по s. В результате получаем:

$$d\Phi(x_*;h) = \int_a^b \left\{ f_u(s,x_*(s),\dot{x}_*(s)) - \frac{d}{ds}f_v(s,x_*(s),\dot{x}_*(s)) \right\} h(s)\,ds + \\ + f_v(s,x_*(s),\dot{x}_*(s))h(s)\big|_a^b .$$

Подынтегральная функция тождественно равна нулю в силу уравнения Эйлера. Также равно нулю второе слагаемое в подстановке

$$f_v(s,x_*(s),\dot{x}_*(s))h(s)\big|_a^b = f_v(b,x_*(b),\dot{x}_*(b))h(b) - f_v(a,x_*(a),\dot{x}_*(a))h(a) ,$$

поскольку $h(a) = 0$. Остаётся одно слагаемое

$$d\Phi(x_*; h) = f_v(b, x_*(b), \dot{x}_*(b))h(b)\,,$$

которое должно обращаться в нуль при любом $h \in M$, откуда следует, что должен обратиться в нуль первый сомножитель:

$$f_v(b, x_*(b), \dot{x}_*(b)) = 0\,.$$

Получили, как и в случае задачи со свободными концами, условие трансверсальности, но теперь уже только на одной из границ.

Подытоживая всё сказанное, получаем, что если функция x_* является точкой минимума функционала Φ на множестве M, то она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} f_u(s, x(s), \dot{x}(s)) - \frac{d}{ds} f_v(s, x(s), \dot{x}(s)) = 0 \\ x(a) = 0 \\ f_v(b, x(b), \dot{x}(b)) = 0\,. \end{cases}$$

Необходимое условие найдено.

Замечание. Найденному условию должны удовлетворять также точки локального (или глобального) максимума функционала. При этом если функция является решением краевой задачи, то это не гарантирует, что она доставляет функционалу локальный экстремум на M, и требуется дополнительное исследование, которое часто оказывается более трудоёмким, чем решение самой краевой задачи.

Замечание. В нашем случае множество M является подпространством, и ему принадлежат как функция x_*, так и h. В более общем случае множество, на котомом ищется экстремум, может быть задано неоднородным условием – например, $x(a) = A$, где A – некоторая константа. Подчеркнём, что при этом функция h должна по-прежнему удовлетворять однородному условию $h(a) = 0$, чтобы для рассматриваемого семейства $x_* + th$ продолжало выполняться условие неоднородное.

5. В гильбертовом пространстве H найдите градиент функционала

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(x, x) + (c, x)\,,$$

где c – некоторый фиксированный элемент H.

Решение. Найдём сначала дифференциал функционала. Как обычно, рассматриваем разность

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \left[\frac{1}{2}(x+h, x+h) + (c, x+h)\right] - \left[\frac{1}{2}(x, x) + (c, x)\right] =$$
$$= (x, h) + \frac{1}{2}(h, h) + (c, h) = (x + c, h) + \omega(h)\,,$$

где первое слагаемое $(x+c, h)$ – линейный относительно h функционал, а

$$\omega(h) = \frac{\|h\|^2}{2}, \quad \frac{\omega(h)}{\|h\|} = \frac{\|h\|}{2} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0\,.$$

Таким образом,

$$d\Phi(x; h) = (x + c, h)\,.$$

Согласно определению, градиент функционала – это элемент пространства, представляющий его дифференциал в виде скалярного произведения (согласно теореме Рисса-Фреше). Таким образом,

$$\operatorname{grad}\Phi(x) = x + c\,.$$

Задача, которая должна была быть рассмотрена на практическом занятии 30.05.2020 для всех групп.

Рассмотрим задачу построения ортогональной проекции элемента w пространства со скалярным произведением (не обязательно гильбертова) на линейную оболочку двух других его элементов $\{f_1, f_2\}$. Такую задачу (в случае трёх элементов) вы решали в третьей задаче типового расчёта, выполнив предварительно ортогонализвацию базиса. Сейчас мы рассмотрим альтернативный способ построения такой проекции, не требующий ортогонализации.

Итак, пусть нам нужно представить w в виде $w = z+h$, где $z \in L\{f_1, f_2\}$, $h \in L^{\perp}\{f_1, f_2\}$. Ищем коэффициенты разложения $\alpha_{1,2}$: $z = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, т.е.

$$w = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + h\,.$$

Умножим это равенство скалярно на $f_{1,2}$ и поменяем левую и правую части местами:

$$\begin{cases} (f_1, f_1)\alpha_1 + (f_2, f_1)\alpha_2 = (w, f_1)\,, \\ (f_1, f_2)\alpha_1 + (f_2, f_2)\alpha_2 = (w, f_2)\,. \end{cases}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_{1,2}$, её матрица – матрица Грама системы $\{f_1, f_2\}$, невырожденная в силу линейной независимости этой системы. Отсюда, решив систему уравнений любым известным способом, находим $\alpha_{1,2}$.

Пример. Найти ортогональную проекцию функции $w = t^2$ на линейную оболочку элементов $\{f_1 = \sqrt{t}, f_2 = 1/\sqrt{t}\}$ в пространстве $L_2\left([0, +\infty), te^{-t}\right)$.

Замечание. Все три функции принадлежат пространству. То, что функция f_2 не определена в нуле, несущественно: одноточечное множество $\{0\}$ имеет меру нуль.

Вычисляем элементы марицы Грама и правые части:

$$(f_1, f_1) = \int_0^\infty \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot te^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt = 2! = 2$$

$$(f_1, f_2) = (f_2, f_1) = \int_0^\infty \sqrt{t} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot te^{-t}\, dt = \int_0^\infty te^{-t}\, dt = 1! = 1$$

$$(f_2, f_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot te^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

$$(w, f_1) = \int_0^\infty t^2 \cdot \sqrt{t} \cdot te^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{7/2} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$(w, f_2) = \int_0^\infty t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot te^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{5/2} e^{-t}\, dt = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$$

(гамма-функцию от семи вторых пока оставим как есть, её значение выпишем чуть позже). Таким образом, сислема уравнений для $\alpha_{1,2}$ принимает вид:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\,, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\,. \end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, сразу получаем

$$\alpha_1 = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\,,$$

после чего из второго уравнения находим

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\,,$$

откуда

$$z = \frac{\Gamma(7/2)}{2}(5f_1 - 3f_2)\,.$$

Вот теперь вспоминаем, что

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\,,$$

и тогда

$$t^2 = \frac{15\sqrt{\pi}}{16}\left(5\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}\right) + h\,.$$