Лекция №12

Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова.

Определение. Производной функции $v(t, \boldsymbol{x})$ в силу системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \qquad (s),$$

называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(s)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n. \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет найти производную сложной функции

$$v(t, \boldsymbol{x}(t)) \equiv v(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ – любое решение системы (s), не зная решения системы. По теореме о производной сложной функции

$$\frac{d}{dt} v(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}. \quad (2)$$

Так как $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ – решение системы (s), то

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$$

и сумма в (2) равна (1).

Далее будем предполагать, что

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},$$

то есть, что $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{0}$ – решение системы (s).

Теорема (Ляпунова об устойчивости)**.** *Пусть* $\exists$ *область* G *пространства* $\mathbb{R}^n$ *и функция* $v(\boldsymbol{x}) \in C^1(G)$*, такие, что:*

1) $\mathbf{0} \in G$*,*

2) $v(\mathbf{0}) = 0$*,* $v(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$*,*

3) $\frac{dv}{dt}\Big|_{(s)} \leqslant 0$*,* $\forall \boldsymbol{x} \in G \backslash \{\mathbf{0}\}$*,* $t \geqslant t_0$*.*

Тогда нулевое решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ *системы (s) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\overline{U_\varepsilon(0)} = \{\boldsymbol{x} : \quad |\boldsymbol{x}| \leqslant \varepsilon\} \subset G,$$

Обозначим через

$$m = \min_{|\boldsymbol{x}|=\varepsilon} v(\boldsymbol{x}).$$

Так как сфера $S_\varepsilon = \{|\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}$ является компактом, $v(\boldsymbol{x}) > 0$ и непрерывна на S_ε

$$m > 0.$$

Опять же в силу непрерывности $v(\boldsymbol{x})$ и так как $v(0) = 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что

$$v(\boldsymbol{x}) < m \text{ при } |\boldsymbol{x}| < \delta.$$

Предположим, что решение $\boldsymbol{x}(t)$ с $|\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta$ или существует не на всем интервале $t_0 \leqslant t < \infty$, или не остается в области $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$. Тогда в силу следствия теоремы о продолжении решения в замкнутой ограниченной области, найдется такое $t_1 > t_0$, что $|\boldsymbol{x}(t_1)| = \varepsilon$, $|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t < t_1$. Тогда

$$v(\boldsymbol{x}(t_0)) < m, \quad v(\boldsymbol{x}(t_1)) \geqslant m$$

в силу выбора m и δ. Это невозможно, так как

$$\frac{dv(\boldsymbol{x}(t))}{dt} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(s)} \leqslant 0$$

и $v(\boldsymbol{x}(t))$ не возрастает. $\square$

Теорема (Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть $\exists$ область G пространства $\mathbb{R}^n$ и функции $v(\boldsymbol{x}) \in C^1(G)$, $w(\boldsymbol{x}) \in C(G)$, такие, что:*

1) $\mathbf{0} \in G$,

2) $v(\mathbf{0}) = 0$, $v(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

3) $w(\boldsymbol{x}) < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$,

4) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(s)} \leqslant w(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in G \backslash \{\mathbf{0}\}$, $t \geqslant t_0$.

Тогда нулевое решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ системы (s) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Все условия Теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены следовательно нулевое решение системы (s) устойчиво по Ляпунову. Возьмем такое $\varepsilon > 0$, чтобы $\overline{U}_\varepsilon(0) \subset G$. Тогда $\exists \delta > 0$ такое, что любое решение с $|\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta$ остается в шаре $U_\varepsilon(0)$, то есть

$$|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Покажем, что для таких решений

$$\boldsymbol{x}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}.$$

При доказательстве Теоремы Ляпунова об устойчивости было показано, что $v(\boldsymbol{x}(t))$ – убывающая функция. Отсюда и из того, что

$$v(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant 0$$

следует, что существует

$$\inf_{t \geqslant t_0} v(\boldsymbol{x}(t)) = \alpha \geqslant 0. \tag{3}$$

Покажем, что

$$\alpha = \lim_{t \to +\infty} v(\boldsymbol{x}(t)).$$

Действительно из (3) следует, что

$$\forall \eta > 0 \quad \exists t(\eta) = t_1 > t_0 : \quad v(\boldsymbol{x}(t_1)) < \alpha + \eta.$$

Так как функция $v(\boldsymbol{x}(t))$ не возрастает то

$$v(\boldsymbol{x}(t)) < \alpha + \eta, \quad \forall t \geqslant t_1.$$

Покажем, что $\alpha = 0$. Предположим, что $\alpha > 0$. Рассмотрим множество

$$K = \overline{U_\varepsilon(\mathbf{0})} \bigcap \{\boldsymbol{x} : v(\boldsymbol{x}) \geqslant \alpha\},$$

оно является компактом, а так как точка $\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \notin K$

$$\gamma = \max_{\boldsymbol{x} \in K} w(x) < 0.$$

Так как $\boldsymbol{x}(t) \in K \ \forall t \geqslant t_0$, то для достаточно больших t будем иметь

$$v(\boldsymbol{x}(t)) = v(\boldsymbol{x}(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} v(\boldsymbol{x}(\tau))\, d\tau =$$

$$= v(\boldsymbol{x}(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} \left.\frac{dv}{d\tau}\right|_{(s)} d\tau \leqslant v(\boldsymbol{x}(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} w(\boldsymbol{x}(\tau))\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant v(\boldsymbol{x}(t_0)) + \gamma(t - t_0) < 0.$$

Это противоречит тому, что

$$v(\boldsymbol{x}) \geqslant 0.$$

Следовательно

$$\alpha = 0$$

и в силу непрерывности $v(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{x}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbf{0}.$$

$\square$