

Практическое занятие № 13
Применение вычетов к вычислению контурных интегралов.

Краткие теоретические сведения

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением особых точек z_1, \dots, z_n , лежащих в этой области. Тогда для любого простого замкнутого контура γ , лежащего в области D и охватывающего эти точки, справедливо равенство

$$\oint_{\gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \blacksquare$$

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением изолированных особых точек z_1, \dots, z_{n-1} и $z_n = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0. \blacksquare$$

Практические задания

Используя теоремы о вычетах, вычислить контурные интегралы:

1) $\oint_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4 + 1};$

2) $\oint_{|z|=5} \frac{1}{z^8 + 1} dz;$

3) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)} dz;$

4) $\oint_{|z|=R} z^n e^{\frac{2}{z}} dz \quad (n \in \mathbb{N});$

5) $\oint_{|z|=7} \frac{dz}{\cos z - 1};$

6) $\oint_{|z-i|=2} \frac{1 - e^{z^2}}{z^2(z-i)} dz;$

7) $\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5 - 1)};$

8) $\oint_{|z|=5} \frac{z dz}{\sin z(1 - \cos z)}.$

Домашнее задание: №№ 13.434, 13.436, 13.441, 13.445, 13.449. Типовой расчет: задача №7.