О. Первой фундаментальной формой $I_p(X,Y)$ поверхности $f(U) : U \subseteq R^n \to R^m$ в точке $p \in U$ называется скалярное произведение в касательном пространстве T_pf, индуцированное из окружающего пространства $\vec{R}^m$,

$$I_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle_{R^m}, \quad \text{где} \quad X, Y \in T_pf.$$

Первая фундаментальная форма поверхности – это симметричная билинейная форма, но часто она по старой традиции называется "первой квадратичной".

Обозначения: $I_p(X,Y) = I(p; X, Y)$. Последнее подчеркивает зависимость скалярного произведения от точки поверхности. Каждое касательное пространство превращается в Евклидово, но при этом в каждом касательном пространстве скалярное произведение, вообще говоря, свое!

Вычисление.
Разложим вектора $X, Y \in T_pf$ по стандартному базису касательного пространства:

$X = x^i f'_{u^i}(p)$, $Y = y^j f'_{u^j}(p)$.
$I_p(X,Y) = \langle x^i f'_{u^i}(p), y^j f'_{u^j}(p)\rangle = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j}\rangle x^i y^j = g_{ij}x^i y^j$
$g_{ij} = \langle f'_{u^i}, f'_{u^j}\rangle$ – метрические коэффициенты поверхности, элементы матрицы Грама $[I_p] = [g_{ij}]$ – матрицы 1-й фундаментальной формы.

Эта матрица:
1) симметрична;
2) положительно определена (удовлетворяет критерию Сильвестра);
3) $V = \sqrt{\det[g_{ij}]}$ – обьем параллелотопа, построенного на базисных векторах.

О. Все свойства поверхности $f(U) : U \subseteq R^n \to R^m$, которые могут быть выражены **только** через коэффициенты $g_{ij}(p)$ первой фундаментальной формы, называются **свойствами внутренней геометрии** поверхности.

Длина кривой вдоль поверхности.

$f : U \subseteq R^n \to R^m$ – поверхность,
$u(t) : (a,b) \to U \subseteq R^n$ – некоторая кривая в области $U \subseteq R^n$,
$\alpha(t) = f(u(t)) : (a,b) \to f(U) \subseteq R^m$ – кривая вдоль поверхности f.

По определению, длина кривой $l[\alpha]\big|_a^b = \int\limits_a^b |\dot\alpha(t)|dt$.

$\dot\alpha(t) = \frac{d}{dt}f(u(t)) = f'_{u^i}(u(t))\dot u^i(t) = \left[f'_{u^1}\dots f'_{u^n}\right]\left[\dot u^1 \dots \dot u^n\right]^T$. Мы получили разложение вектора $\dot\alpha(t)$ по стандартному базису касательного пространства T_pf,
$|\dot\alpha(t)|^2 = \langle\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle = \langle f'_{u^i}\dot u^i(t), f'_{u^j}\dot u^j(t)\rangle = \dot u^i(t)\dot u^j(t)\langle f'_{u^i}, f'_{u^j}\rangle = \dot u^i(t)\dot u^j(t) g_{ij}$.

В результате для **длины дуги** получаем:

$$l[\alpha]\big|_a^b = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}\dot u^i(t)\dot u^j(t)}dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}du^i du^j}.$$

Как обычно, обозначим как $s = s(t)$ натуральный параметр (длину дуги) кривой $\alpha(t)$, $s(t) = \int\limits_0^t |\dot\alpha(\theta)|d\theta$, **дифференциал дуги**

$$ds = |\dot\alpha(t)|dt = \sqrt{g_{ij}du^i du^j}.$$

Соответственно, $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ – квадратичная форма с той же матрицей, что и первая фундаментальная форма, отсюда и не совсем корректное название "первая квадратичная" форма (вместо "первой фундаментальной").

Углы на поверхности.

Рассмотрим пару кривых вдоль поверхности f:
$\alpha_1(t) = f(u_1(t)),\ \alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta))$.
Пусть они пересекаются в точке $p = u_1(t_0) = u_2(\theta_0) \in U$;
это означает, что они пересекаются на поверхности в точке $f(p)$:

$\alpha_1(t_0) = \alpha_2(\theta_0) = f(p)$
$\dot{\alpha_1}(t_0) = f'_{u^i}(p)\dot u_1^i(t_0)$
$\dot{\alpha_2}(\theta_0) = f'_{u^i}(p)\dot u_2^i(\theta_0)$

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\alpha_1(t_0), \dot\alpha_2(\theta_0)\rangle}{|\dot\alpha_1(t_0)||\dot\alpha_2(\theta_0)|} = \frac{g_{ij}\dot u_1^i(t_0)\dot u_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij}\dot u_1^i(t_0)\dot u_1^j(t_0)}\sqrt{g_{ij}\dot u_2^i(\theta_0)\dot u_2^j(\theta_0)}}$$

Объем поверхности.

Обьем n-мерного параллелотопа, построенного на векторах $a_1, \dots, a_n$: $V = \sqrt{\det G}$, где $G_{ij} = \langle a_i, a_j\rangle$ – матрица Грама векторов $a_1, \dots, a_n$.
Терминология:
при $n = 1$ – длина
при $n = 2$ – площадь
при $n \geq 3$ – обьем

<u>О</u>. Объемом n-мерной инъективной поверхности называется число:

$$V[f] = \int\limits_U \sqrt{\det g(p)}\, du^1 \dots du^n.$$

При $n = 1$ имеем $\det g = g_{11} = \langle f'_t, f'_t\rangle = \langle\dot\alpha, \dot\alpha\rangle$, и для длины дуги кривой получаем уже известную нам формулу $V(\alpha) = \int\limits_U \sqrt{\langle\dot\alpha, \dot\alpha\rangle}dt = \int\limits_U |\dot\alpha|dt$.

Поверхности вращения в R^3

Вращаем заданную плоскую кривую $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))^T$, $u \in I$, вокруг оси Oz:

$$f(u,v) = A(v)\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{bmatrix} = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))^T$$

$$f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))^T, \quad u \in I, \quad -\pi < v < \pi$$

Проверим условие максимальности ранга $[f'_p]$:

$$[f'_p] = \begin{bmatrix} \dot{x}(u)\cos v & -x(u)\sin v \\ \dot{x}(u)\sin v & x(u)\cos v \\ \dot{z}(u) & 0 \end{bmatrix}$$

$f'_u \times f'_v = (-\dot{z}(u)x(u)\cos v, -\dot{z}(u)x(u)\sin v, \dot{x}(u)x(u))$
$|f'_u \times f'_v| = x(u)\sqrt{\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u)} \neq 0$ — регулярные точки поверхности (в этих точках ранг максимален).

Условие регулярности нарушается в точках $x(u) = 0$ (пересечение с осью Oz) или $\dot{z}^2(u) + \dot{x}^2(u) = |\dot{\alpha}(u)|^2 = 0$ (это особые точки кривой $\alpha(u)$).