Лекция №14

Устойчивость по первому приближению.

Ранее были получены условия асимптотической устойчивости и условия неустойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

Следующая теорема утверждает, что в случае $\max \operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ эти условия пригодны и для нелинейной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}),$$

где A – постоянная матрица,

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant \varphi^*(\boldsymbol{x}) = o(|x|) \text{ при } \boldsymbol{x} \to 0.$$

К такому виду приводятся многие другие системы. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ - положение равновесия системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

то есть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) = 0$. Разлагая $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ вблизи точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получаем систему

$$\dot{x}_i = a_{i1}(x_1 - x_1^0) + \ldots + a_{in}(x_n - x_n^0) + \varphi_i(\boldsymbol{x}), \ i = \overline{1, n},$$

где

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{x = x_0},$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|), \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0.$$

Перенося начало координат в точку $\boldsymbol{x}^0$ заменой $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{y}$, получим систему в векторно-матричной записи

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}),$$
$$\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y}) = o(|\boldsymbol{y}|), \quad \boldsymbol{y} \to 0,$$

где

$$A = (a_{ij}),\ i, j = \overline{1, n},$$

а a_{ij} вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}.$$

Теорема (об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \qquad (1)$$

Пусть при $t \geqslant 0$, $|x| \leqslant \rho_0$ функция $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}^1$,

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x})| \leqslant \gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|,\ \gamma(\boldsymbol{x}) \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

1) *Если матрица A имеет все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

2) *Если матрица A имеет хотя бы одно λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво.*

3) *В «критическом» случае, то есть когда $\max \operatorname{Re}\lambda_j = 0$, наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы A, но и от функции $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x})$.*

Доказательство. Докажем теорему в случае, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$.

Оценим столбцы матрицы e^{tA}. Эта матрица – фундаментальная для системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},$$

ее столбцы $\boldsymbol{\psi}^1(t), \ldots, \boldsymbol{\psi}^n(t)$ - решения этой системы. Каждое решение имеет вид

$$\mathscr{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + \mathscr{P}_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $\mathscr{P}_j(t)$ – вектор-многочлен степени не выше $k_j - 1$, а k_j – размер наибольшей из жордановых клеток, содержащих λ_j.

Пусть $\alpha > 0$ такое, что все $\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha < 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_j + \alpha \leqslant \mu < 0$ для всех j; $\mathscr{P}_j(t)$ – многочлен, поэтому

$$\left|\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}\right| \leqslant \left|\mathscr{P}_j(t)e^{-\mu t}\right| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

значит,

$$\left|\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}\right| \leqslant c_j, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

и

$$|\mathscr{P}_j(t)e^{\lambda_j t}| = |\mathscr{P}_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}|e^{-\alpha t} \leqslant c_j e^{-\alpha t}.$$

Поэтому при некотором $c = \mathrm{const}$ имеем оценку

$$|\boldsymbol{\psi}^k(t)| \leqslant ce^{-\alpha t}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$v(x) = \int\limits_0^\infty |e^{\tau A}x|^2\,d\tau. \tag{3}$$

Решение системы

$$\dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y} \tag{4}$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

есть

$$\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{\psi}^1(t) + \ldots + x_n\boldsymbol{\psi}^n(t),$$

так как $\boldsymbol{\psi}^k(t)$ – решение, у которого $\boldsymbol{\psi}^k(0)$ есть k-й столбец единичной матрицы. Поэтому

$$|e^{\tau A}\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{y}(\tau)|^2 = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(\tau)x_i x_j,$$
$$d_{ij}(\tau) = (\boldsymbol{\psi}^i(\tau), \boldsymbol{\psi}^j(\tau)).$$

В силу (2) $|d_{ij}(\tau)| \leqslant c^2 e^{-2\alpha\tau}$. Пользуясь этим, из (3) получаем

$$v(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j, \quad b_{ij} = \int\limits_0^\infty d_{ij}(\tau)\,d\tau = b_{ji}. \tag{6}$$

В силу оценки функций $d_{ij}(\tau)$ интегралы от них, а значит и интеграл в (3), сходятся. Найдем $\dfrac{dv}{dt}$ в силу системы (4). Имеем

$$\left.\frac{dv(x)}{dt}\right|_{(4)} = \left.\frac{dv(y(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty |e^{\tau A}y(t)|^2 \mathrm{d}r\Bigg|_{t=0}, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{y}(t)$ – решение системы (4) с начальным условием (5), то есть $\boldsymbol{y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}$. Подынтегральное выражение равно

$$|e^{\tau A}e^{tA}\boldsymbol{x}|^2 = |e^{(\tau+t)A}\boldsymbol{x}|^2.$$

Переходя от τ к $s = \tau + t$, получаем, что выражение (7) равно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_t^{\infty} |e^{sA}\boldsymbol{x}|^2\,ds\bigg|_{t=0} = -|e^{tA}\boldsymbol{x}|^2\Big|_{t=0} = -|\boldsymbol{x}|^2. \qquad (8)$$

Теперь найдем $\dfrac{dv}{dt}$ в силу системы (1)

$$\frac{dv(x)}{dt}\bigg|_{(1)} = (\operatorname{grad} v(\boldsymbol{x}), (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x})) =$$
$$= (\operatorname{grad} v(\boldsymbol{x}), A\boldsymbol{x}) + (\operatorname{grad} v(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x})).$$

Первое слагаемое есть

$$\frac{dv}{dt}\bigg|_{\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}},$$

значит, в силу (7) и (8) равно

$$(\operatorname{grad} v(\boldsymbol{x}), A\boldsymbol{x}) = -|\boldsymbol{x}|^2.$$

Оценим второе слагаемое. Из (6) получаем, пользуясь неравенством Коши и считая $|b_{ij}| \leqslant b,\ i,j = \overline{1,n}$,

$$\frac{dv}{dx_i} = 2\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j,\ \left(\frac{dv}{dx_i}\right)^2 \leqslant 4\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \leqslant 4b^2n|\boldsymbol{x}|^2.$$

$$|\operatorname{grad} v(\boldsymbol{x})|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv}{dx_i}\right)^2 \leqslant 4b^2n^2|\boldsymbol{x}|^2,$$
$$|\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x})| \leqslant \gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|.$$

Поэтому

$$\left.\frac{dv(\boldsymbol{x})}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -|\boldsymbol{x}|^2 + 2bn|\boldsymbol{x}| \cdot \gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}| \leqslant -\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2$$

в той области, где

$$\gamma(\boldsymbol{x}) \leqslant \frac{1}{4bn}.$$

Кроме того, из (3) имеем $v(0) = 0$, $v(\boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$. Следовательно, $v(\boldsymbol{x})$ – функция Ляпунова для системы (1), и нулевое решение асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Доказательство утверждения 2) (о неустойчивости) не входит в программу курса.

Утверждение 3) о критических случаях проиллюстрируем примером 1 на следующей лекции. $\square$