

Дифференциальная геометрия. Типовой расчет

ЗАДАНИЕ 1.

- а) Найти репер Френе и кривизну кривой $\alpha(t)$.
- б) Найти угол между кривой $\alpha(t)$ и кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, в т. M_0 .
- в) Для обеих кривых написать уравнения соприкасающихся окружностей в т. M_0 , сделать чертеж.

N	$\alpha(t)$	$F(x, y)$	M_0	N	$\alpha(t)$	$F(x, y)$	M_0
1	$(t^2 + 2, t + 1)^T$	$x^2 + 2y^2 - 6$	$(2, 1)$	2	$(t, t^2 - 2t + 3)^T$	$2x^2 + y^2 - 6$	$(1, 2)$
3	$(t^2 - 1, t)^T$	$4x^2 + 4x + y^2$	$(-1, 0)$	4	$(t, -t^2 - 1)^T$	$x^2 + 2y^2 + 2y$	$(0, -1)$
5	$(t^2 - t + 2, t + 1)^T$	$x^2 + 2y^2 - 6$	$(2, 1)$	6	$(-t^2 - 1, t)^T$	$x^2 + x + y^2$	$(-1, 0)$
7	$(t, t^2 - 1)^T$	$x^2 + y^2 + y$	$(0, -1)$	8	$(-t^2 - 1, 2t)^T$	$4x^2 + 4x + y^2$	$(-1, 0)$
9	$(t + 1, t^2 + 2)^T$	$y^2 + 2x^2 - 6$	$(1, 2)$	10	$(t^2 - 2t + 3, t)^T$	$2y^2 + x^2 - 6$	$(2, 1)$
11	$(t, t^2 - 1)^T$	$4y^2 + 4y + x^2$	$(0, -1)$	12	$(-t^2 - 1, t)^T$	$y^2 + 2x^2 + 2x$	$(-1, 0)$
13	$(t^2 + 2, t + 1)^T$	$x^2 - 2y^2 - 2$	$(2, 1)$	14	$(t, t^2 - 2t + 3)^T$	$2x^2 - y^2 + 2$	$(1, 2)$
15	$(t^2 - 1, t)^T$	$4x^2 + 4x - y^2$	$(-1, 0)$	16	$(t, -t^2 - 1)^T$	$x^2 - 2y^2 - 2y$	$(0, -1)$
17	$(t^2 - t + 2, t + 1)^T$	$x^2 - 2y^2 - 2$	$(2, 1)$	18	$(-t^2 - 1, t)^T$	$x^2 + x - y^2$	$(-1, 0)$
19	$(t, t^2 - 1)^T$	$x^2 - y^2 - y$	$(0, -1)$	20	$(-t^2 - 1, 2t)^T$	$4x^2 + 4x - y^2$	$(-1, 0)$
21	$(t + 1, t^2 + 2)^T$	$y^2 - 2x^2 - 2$	$(1, 2)$	22	$(t^2 - 2t + 3, t)^T$	$2y^2 - x^2 + 2$	$(2, 1)$
23	$(t, t^2 - 1)^T$	$4y^2 + 4y - x^2$	$(0, -1)$	24	$(-t^2 - 1, t)^T$	$y^2 - 2x^2 - 2x$	$(-1, 0)$

ЗАДАНИЕ 2. Определить тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках (если они есть), построить образ кривой.

1	$\alpha(t) = (t^2, -t^3 - t^2)^T$	2	$\alpha(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)^T$
3	$\alpha(t) = (-t^2 + 1, t^3 - t^2)^T$	4	$x^5 - (y - x^2)^2 = 0$
5	$y^2 = x^2 - x^4$	6	$\alpha(t) = (\operatorname{sh} t - t, \operatorname{ch} t - 1)^T$
7	$\alpha(t) = (t^2, -t^4 + t^5)^T$	8	$x^2 = y^2 - 4y^4$
9	$\alpha(t) = (t^2, -2t^4 + t^5)^T$	10	$\alpha(t) = (t^2/(1+t^2), t^3/(1+t^2))^T$
11	$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$	12	$y^2(2-x) = x^2(2+x)$
13	$\alpha(t) = (-t^4 + t^5, t^2)^T$	14	$\alpha(t) = (2t^3/(1+t^2), 2t^2/(1+t^2))^T$
15	$\alpha(t) = (-t^3 - t^2, t^2)^T$	16	$\alpha(t) = (t^3 - t^2, -t^2 + 1)^T$
17	$y^5 - (x - y^2)^2 = 0$	18	$\alpha(t) = (t^3 - 2t^2, t^2)^T$
19	$x^2 = y^2 - y^4$	20	$\alpha(t) = (-2t^4 + t^5, t^2)^T$
21	$\alpha(t) = (t^2, t^3 - 2t^2)^T$	22	$y^2(3-x) = x^2(3+x)$
23	$\alpha(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)^T$	24	$\alpha(t) = (t^2, t^3 + t^2 - t^4)^T$

ЗАДАНИЕ 3.

В вариантах 1-6, 13-18 найти кривизну и кручение кривой в точке, написать уравнение соприкасающейся плоскости в этой точке. В вариантах 7-12, 19-24 доказать, что кривая целиком лежит в некоторой гиперплоскости. Найти последний вектор репера Френе, написать уравнение этой гиперплоскости.

N	$\alpha(t)$	N	$\alpha(t)$
1	$(t, 1 - t, t^2/2)^T, \quad t = 2$	2	$(2 \operatorname{ch} t, 2 \operatorname{sh} t, 2t)^T, \quad t = 0$
3	$(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)^T, \quad t = 0$	4	$(\operatorname{ch} t, -\operatorname{sh} t, -t)^T, \quad t = 1$
5	$(t, t^2/2, t^3/6)^T, \quad t = 0$	6	$(1 - t, t + t^2/2, t^2/2)^T, \quad t = 1$
7	$(2t, t^2, t^3 - t, t - 11)^T$	8	$(t^2 + t + 1, t, t^3, t^2 - t - 2)^T$
9	$(t^4 + t^2 + 1, t^2, t^4, t^3 + 2)^T$	10	$(t^3 + 7, t - 5, t^4 + t, t^4 - t)^T$
11	$(t^5, t^2 + t^5, t^2 + 1, t^3)^T$	12	$(t^3, t - 4, t^3 + t^2 + t, t^2 + 1)^T$
13	$(e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)^T, \quad t = 0$	14	$(1 + t, -t + t^2/2, t^2/2)^T, \quad t = -1$
15	$(1 - t, t, t^2/2)^T, \quad t = 2$	16	$(2t, 2 \operatorname{ch} t, 2 \operatorname{sh} t)^T, \quad t = 0$
17	$(-t, \operatorname{ch} t, -\operatorname{sh} t)^T, \quad t = 1$	18	$(t^2/2, -t^3/6, -t)^T, \quad t = 0$
19	$(2t, 2t^2 - t, t^3 - t, t - 11)^T$	20	$(t^5, t^2 + 1, t^3, 5t^2 + t^5)^T$
21	$(t^3/3 + t^2 + 1, t^2 + 1, t^3/3, t + 3)^T$	22	$(t - 3, t^4 + t, t^3 + 5, t^4 - t)^T$
23	$(t, t^2 + t + 2, t^3, t^2 - t - 2)^T$	24	$(t^4, t^2 + 2t + 2, t - 4, t^2 - t + 1)^T$

ЗАДАНИЕ 4.

- 1,24. Найти длину кривой $u = 3v$, $0 < v < 2$, и угол между кривыми $u = 3v$ и $u = v$ вдоль катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u)^T$.
- 2,23. Найти длину кривой $u = \pi/4$, $-\pi < v < \pi$, и угол между кривыми $u = v$ и $u = -v$ на эллипсоиде $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)^T$.
- 3,22. Найти длину кривой $u = 2v$, $0 < u < 1$, вдоль эллиптического параболоида $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)^T$.
- 4,21. Найти угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(2, 0)$ и $(2, 1)$ зонтика Уитни $f(u, v) = (u, uv, v^2)^T$. Найти длину кривой $u = 3$, $0 < v < 2$.
- 5,20. Найти длину кривой $u = -2v$, $0 < v < 1$, и угол между кривыми $u = -2v$ и $u = v$ вдоль катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u)^T$.
- 6,19. Найти длину кривой $u = \pi/3$, $-\pi < v < \pi$, и угол между кривыми $u = v$ и $u = -v$ на эллипсоиде $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)^T$.
- 7,18. Найти угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(2, 0)$ и $(2, 1)$ обезьяного седла $f(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)^T$. Найти длину кривой $u = 1$, $0 < v < 1$.
- 8,17. Найти длину кривой $2u = v$, $0 < u < 1$, вдоль эллиптического параболоида $f(u, v) = (2u \cos v, 2u \sin v, u^2)^T$.
- 9,16. Найти длину кривой $u = 2v$, $0 < u < 1$, вдоль конуса $f(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u)^T$, и угол между кривыми $u - 2 = \pm v$.
- 10,15. Найти длину кривой $u = av$, $0 < u < 1$, вдоль гиперболического параболоида $f(u, v) = (u, v, uv)^T$, и угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(1, 1)$.
- 11,14. Найти длину кривой $2u = v$, $0 < u < 1$, вдоль конуса $f(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u)^T$, и угол между кривыми $u - 1 = \pm v$.
- 12,13. Найти длину кривой $v = au$, $0 < u < 1$, вдоль гиперболического параболоида $f(u, v) = (u, v, uv)^T$, и угол между векторами стандартного базиса в т. $(1, -1)$.

ЗАДАНИЕ 5.

1,13. Найти площадь “внутренней” (т.е. заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$) части поверхности тора

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

2,14. Найти площадь полосы $-1 < u < 1$ на поверхности катеноида

$$f(u, v) = (a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u)^T, \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 < v < 2\pi.$$

3,15. Найти площадь “внешней” (т.е. находящейся вне цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$) части поверхности тора

$$f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi.$$

4,16. Найти объем области

$$f(u, v, w) = (w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u)^T, \quad \pi/4 < u < \pi/2, \quad -\pi < v < \pi, \quad 0 < w < R.$$

5,17. Найти объем части тора

$$f(u, v, w) = ((a + w \cos u) \cos v, (a + w \cos u) \sin v, w \sin u)^T, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < w < b, \text{ заключенной внутри цилиндра } x^2 + y^2 = a^2.$$

6,18. Найти объем части тора

$$f(u, v, w) = ((a + w \cos u) \cos v, (a + w \cos u) \sin v, w \sin u)^T, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < w < b, \text{ находящейся вне цилиндра } x^2 + y^2 = a^2.$$

7,19. Найти площадь полосы шириной 30 градусов вдоль экватора сферы

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)^T, \quad -\pi/2 < u < \pi/2, \quad -\pi < v < \pi.$$

8,20. Найти объем тора

$$f(u, v, w) = ((a + w \cos u) \cos v, (a + w \cos u) \sin v, w \sin u)^T, \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi, \quad 0 < w < b.$$

9,21. Найти площадь области шириной 30 градусов вокруг полюса сферы

$$f(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)^T, \quad -\pi/2 < u < \pi/2, \quad -\pi < v < \pi.$$

10,22. Найти площадь области $0 < u < 1$ на эллиптическом параболоиде

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)^T, \quad 0 < u < \infty, \quad -\pi < v < \pi.$$

11,23. Найти площадь области, ограниченной кривой $u^2 + v^2 = 1$, на гиперболическом параболоиде $f(u, v) = (u, v, uv)^T$.

12,24. Найти площадь поверхности конуса, ограниченной вершиной конуса и кривой $u = 1$, $f(u, v) = (au \cos v, au \sin v, u)^T$, $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v < \pi$.

ЗАДАНИЕ 6.

1. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллипсоиде $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)^T$.

2. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом параболоиде $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)^T$.

3. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом цилиндре $f(u, v) = (a \cos v, b \sin v, u)^T$.

4. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на торе $f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T$, $a > b$.

5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на параболическом цилиндре $f(u, v) = (v, av^2, u)^T$.

6. Найти полную и среднюю кривизны, определить тип точек на гиперболическом параболоиде $f(u, v) = (u \operatorname{ch} v, u \operatorname{sh} v, u^2)^T$, а также главные направления в точках, лежащих на кривой $v = 0$.

7. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$. Определить тип точек.

8. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке геликоида $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)^T$. Определить тип точек.
9. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке гиперболического параболоида $f(u, v) = (u, v, uv)^T$. Определить тип точек.
10. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболическом цилиндре $f(u, v) = (a \operatorname{ch} v, b \operatorname{sh} v, u)^T$.
11. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболоиде $f(u, v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u)^T$.
12. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболоиде $f(u, v) = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u)^T$.
13. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершинах гиперболоида $x^2/a^2 + y^2/4a^2 - z^2/c^2 = -1$.
14. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления в вершине параболоида $x^2 + y^2/4 - z + 2 = 0$. Существуют ли направления, в которых нормальная кривизна равна 0? $1/2$?
15. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершине параболоида $x^2/4a^2 - y^2/a^2 + z = 0$.
16. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления, определить тип точек на конусе $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)^T$.
17. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны, главные и асимптотические направления в т. $u = v = 0$ катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$.
18. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершинах гиперболоида $x^2/4a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$.
19. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления в вершине параболоида $x^2/4 + y^2 + z - 2 = 0$. Существуют ли в вершине направления, в которых нормальная кривизна равна 0? $1/2$?
20. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершине параболоида $x^2/a^2 - y^2/4a^2 + z = 0$.
21. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления, определить тип точек на конусе $f(u, v) = (3u \cos v, 3u \sin v, u)^T$.
22. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны, главные и асимптотические направления в т. $u = 0, v = \pi/2$ катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$.