СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ № 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары действительных чисел (x, y), если для них определены понятие равенства и операции сложения и умножения следующим образом:

$$1)\ (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2; \tag{1.1}$$

$$2)\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \tag{1.2}$$

$$3)\ (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2, x_1y_2 + y_1 x_2). \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) следуют равенства:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0);$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Таким образом, операции над числами вида $(x, 0)$ совпадают с операциями над действительными числами. Поэтому комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляются с действительными числами: $(x, 0) = x$.

Комплексное число $(0,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i:

$$i = (0,1).$$

Согласно равенству (1.3) $(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Итак,

$$i^2 = -1. \tag{1.4}$$

Из равенств (1.2), (1.3) следуют соотношения:

$$(0, y) = (0,1)(y, 0) = iy;$$

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Комплексное число $x + iy$ принято обозначать буквой z:

$$z = x + iy. \tag{1.5}$$

Равенство (1.5) представляет собой *алгебраическую форму* записи комплексного числа. При этом по определению

$x = \mathrm{Re}\, z$ – действительная часть комплексного числа z;

$y = \mathrm{Im} z$ – мнимая часть комплексного числа z.

Если $x = 0$, то число $z = iy$ называется чисто мнимым, а если $y = 0$, то число $z = x$ отождествляется с действительным числом.

Комплексное число $x - iy$ называется *комплексно-сопряженным* числом к числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \tag{1.6}$$

Нетрудно проверить справедливость следующих свойств:

1) $z_1z_2 = z_2z_1$ (коммутативность умножения);

2) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения);

3) $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ (дистрибутивность).

Построим на плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy. Всякому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие точку M с координатами (x, y):

$$z = x + iy \leftrightarrow M(x, y).$$

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью* (рис.1.1).

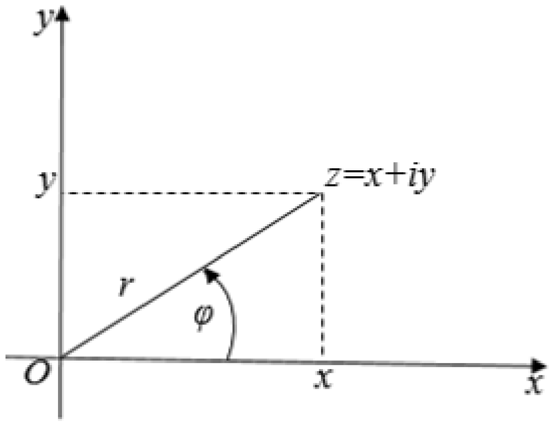

Рис. 1.1

Величина $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем комплексного числа* $z = x + iy$. Эта величина равна расстоянию r, от начала координат до точки, изображающей число z на комплексной плоскости:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.7)$$

Угол φ между положительным направлением оси Ox и радиус вектором точки $M(x, y)$ называется *аргументом комплексного числа* $z = x + iy$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Если отсчет угла φ ведется против часовой стрелки, то величина угла φ считается положительной, а если по часовой – то отрицательной.

Аргумент числа $z = 0$ не определен.

Имеют место равенства:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1.8)$$

В силу периодичности тригонометрических функций аргумент числа $z \neq 0$ определяется лишь с точностью до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, где через $\mathbb{Z}$ обозначено множество целых чисел. Аргумент числа z, взятый в промежутке $(-\pi;\, \pi]$, называется *главным значением аргумента* z и обозначается $\arg z$:

$$\arg z \in (-\pi; \pi].$$

Иногда в качестве главного значения аргумента рассматривают значения угла φ из промежутка $[0; 2\pi)$. Тогда множество всех значений аргумента числа z выражается формулой:

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k| \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.9}$$

Аргумент числа $z = x + iy$ согласно (1.7), (1.8) определяется системой равенств

$$\begin{cases} \cos\varphi = x/r\,, \\ \sin\varphi = y/r\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Для нахождения главного значения аргумента числа $z = x + iy$ удобно использовать следующую формулу:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), \ \ x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, \ \ x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, \ \ x < 0, y < 0; \\ \pi/2, \ \ x = 0, \ \ y > 0; \\ -\pi/2, \ \ x = 0, \ \ y < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Примеры.

1) $z_1 = 2,\ |z_1| = 2, \arg z_1 = 0;$

2) $z_2 = -2,\ |z_2| = 2, \arg z_2 = \pi;$

3) $z_3 = i,\ |z_3| = 1, \arg z_3 = \pi/2;$

4) $z_4 = \sqrt{3} - i,\ |z_4| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2,$

$\arg z_4 = \operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right) = -\pi/6;$

5) $z_5 = -3 + 4i,\ |z_4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5, \arg z_5 = \operatorname{arctg}(-4/3) + \pi.$

Модуль r и аргумент φ можно рассматривать как полярные координаты точки $M(x, y)$. Используя равенства (1.8), получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.12}$$

Введем обозначение:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.13}$$

называемое *формулой Эйлера*. В силу (1.12), (1.13) получим *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}. \tag{1.14}$$

Пример. Записать числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение: Для числа z_1 получим:

$|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},\ \varphi_1 = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4},$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма.

$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$ – показательная форма.

Для числа z_2 получим:

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1,\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}(0) + \pi = \pi,$

$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi$ – тригонометрическая форма.

$z_2 = e^{i\pi}$ – показательная форма.

Формулу (тождество Эйлера)

$$e^{i\pi} = -1$$

называют математическим чудом. Она связывает две важнейшие математические константы e, π и комплексное число i (мнимую единицу).

Действия над комплексными числами.

1) Сумма комплексных чисел.

Пусть заданы два комплексных числа в алгебраической форме:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ и } z_2 = x_2 + iy_2.$$

Тогда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Рисунок 2 иллюстрирует геометрический смысл операции сложения двух комплексных чисел.

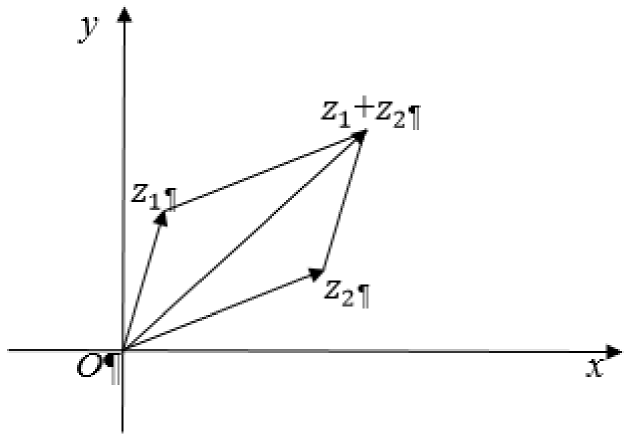

Рис. 1.2

2) Разность комплексных чисел.

Разностью комплексных чисел z_1и z_2 называется комплексное число z такое, что $z + z_2 = z_1$, т.е.

$$z = z_1 - z_2 \Leftrightarrow z + z_2 = z_1.$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2),$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.15)$$

Из равенства (1.15) следует, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на комплексной плоскости.

Примеры множеств на комплексной плоскости.

1) $\{z: |z - z_0| = R\}$ – окружность с центром в точке z_0 и радиусом R;

2) $\{z: |z - z_1| = |z - z_2|\}$ – множество точек равноудаленных от двух заданных точек z_1 и z_2 (уравнение серединного перпендикуляра).

3) $\{z: |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$, $a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ – уравнение эллипса с фокусами в точках z_1 и z_2 и большой полуосью a.

4) $\{z: \big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a\}, a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ – уравнение гиперболы с фокусами в точках z_1 и z_2 и действительной полуосью a.

Неравенство треугольника на комплексной плоскости записывается в виде:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

3) Произведение комплексных чисел.

Пусть числа z_1 и z_2 заданы в алгебраической форме: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Если числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)\big).$$

С учетом тригонометрических тождеств получим:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \quad (1.16)$$

Из полученного равенства (1.16) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на любое число сомножителей. В частности, если

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

то получим

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbb{N}. \quad (1.17)$$

Равенство (1.17) называется *формулой Муавра*.

Используя формулу Эйлера (1.13) запишем формулу Муавра (1.17) в показательной форме. Если $z = re^{i\varphi}$, то

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Из (1.16) в частности следует, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Пример. Представить в алгебраической форме следующие степени:

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9, \left(\sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}\right)^8.$$

Решение:1) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, |z_1| = 2, \arg z_1 = \frac{\pi}{3}, z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

$\left(1+i\sqrt{3}\right)^9 = z_1^9 = 2^9\left(\cos\frac{9\pi}{3} + i\sin\frac{9\pi}{3}\right) = -512.$

2) $\left(\sin\frac{3\pi}{5} + i\cos\frac{3\pi}{5}\right)^8 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)\right)^8 =$

$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)^8 = \cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right).$

4) Частное двух комплексных чисел.

Частным двух комплексных чисел z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ называется такое комплексное число z, что $zz_2 = z_1$. Пусть числа z_1 и z_2 заданы в алгебраической форме: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Здесь использовался прием домножения числителя и знаменателя дроби на число, комплексно сопряженное знаменателю.

Пусть теперь числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)}.$$

Окончательно получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (1.18)$$

Если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (1.19)$$

Из (1.18)-(1.19) следует, что при делении комплексных чисел z_1 и z_2 модуль первого числа делится на модуль второго, а аргументы вычитаются. В частности, модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\quad z_2 \neq 0.$$

5) Извлечение корней.

Извлечение корня n–ой степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень:

$$w = \sqrt[n]{z}, \text{ если } w^n = z.$$

Положим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$. Тогда

$$w^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta);$$

$$z = w^n \Leftrightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta).$$

Откуда получаем:

$$\rho^n = r,\ \ n\vartheta = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \vartheta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\ \left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right), k = 0,1,2,\dots,n-1. \qquad (1.20)$$

При других значениях k в формуле (1.20) в силу периодичности синуса и косинуса получаются значения корня, совпадающие с ранее найденными.

На комплексной плоскости точки, изображающие корни, расположены в вершинах правильного n −угольника, вписанного в окружность с центром в точке O и радиусом $\sqrt[n]{r}$ (рис. 1.3).

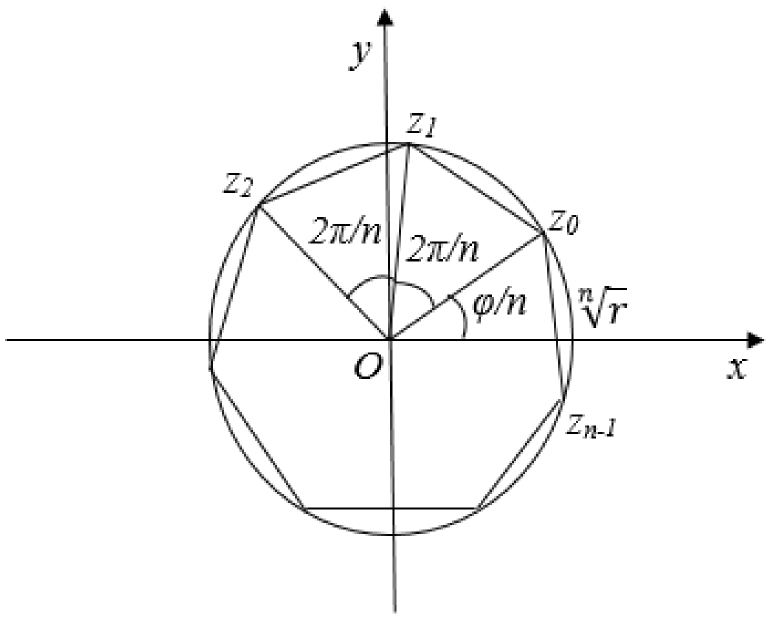

Рис. 1.3

В заключении отметим некоторые свойства комплексно-сопряженных чисел, которые несложно проверить. Пары комплексно-сопряженных чисел, записанные в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, имеют вид:

$$z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy;$$
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi);$$
$$z = re^{i\varphi},\ \bar{z} = re^{-i\varphi}.$$

На комплексной плоскости точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси.

Справедливы равенства:

1) $z\bar{z} = r^2 = |z|^2$,

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

3) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$,

5) $|z| = |\bar{z}|$.

ЛЕКЦИЯ № 2. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ

2.1. Последовательности комплексных чисел. Сфера Римана

Определение. Комплексное число a называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, пишут: $a = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. ▲

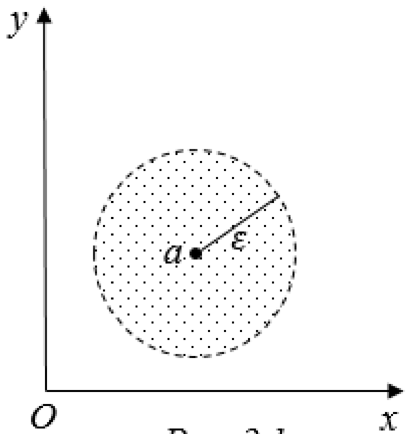

Рис. 2.1

Множество $U_\varepsilon(a) = \{z: |z - a| < \varepsilon\}$ называется ε-окрестностью точки a (рис.2.1).

Множество $\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{z: 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ называется проколотой ε-окрестностью точки a (рис. 2.2).

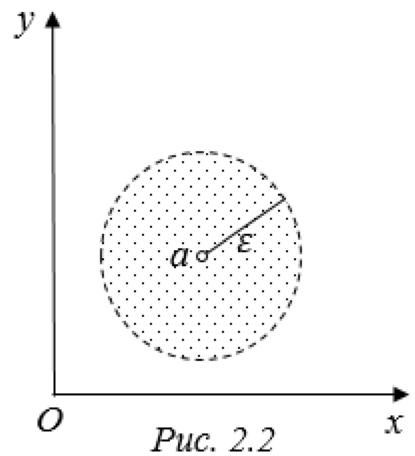

Рис. 2.2

Каждой последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел соответствуют две последовательности действительных чисел $\{x_n\}, \{y_n\}$:

$$z_n = x_n + iy_n, n = 1,2, \ldots.$$

Теорема 1. Пусть $z_n = x_n + iy_n, n = 1,2, \ldots, a = \alpha + i\beta$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta.$

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon$. А так как

$$|x_n - \alpha| \le \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon,$$
$$|y_n - \beta| \le \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняются неравенства $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$, $|y_n - \beta| < \varepsilon/2$. В силу неравенства треугольника $|z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

Свойства пределов последовательностей комплексных чисел.

1. Арифметические свойства.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, то

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(z_n - w_n) = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{a}{b}, w_n \ne 0\ (n = 1,2, \ldots),\ \ b \ne 0.$$

Указанные арифметические свойства следуют из теоремы 1 и свойств последовательностей действительных чисел.

2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$.

Доказательство: Так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$ то $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Согласно неравенству треугольника $\big||z_n| - |a|\big| \le |z_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |a|$.

3. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \rho,\ \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \rho e^{\varphi}$.

Свойство 3 следует из теоремы 1 и тригонометрической формы записи комплексного числа: $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$.

Определение. Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ называется сходящейся к бесконечности, пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$, т.е.
$\forall R > 0\ \exists\ N = N(R)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$. ▲

Множество $\{z: |z| > R\}$ называется окрестностью бесконечно удаленной точки (рис. 2.3). Множество $\{z: |z - z_0| > R\}$ также называют окрестностью бесконечно удаленной точки. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной комплексной плоскостью. Для обозначения комплексной плоскости используется символ $\mathbb{C}$, а множество точек расширенной комплексной плоскости обозначается символом $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$.

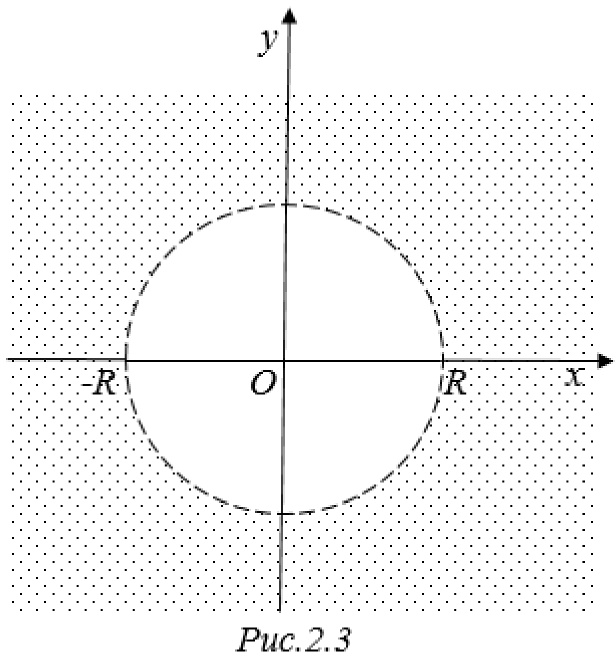

Рис.2.3

Сфера Римана.

Рассмотрим сферу S, касающуюся комплексной плоскости в точке *O*.

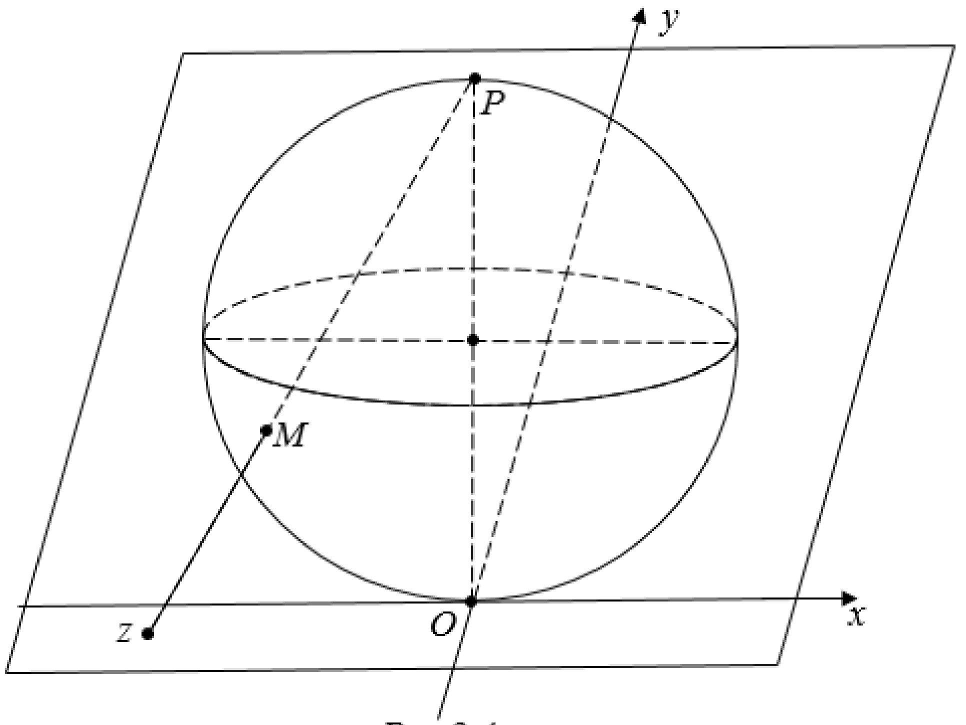

Рис.2.4

Обозначим через P точку сферы, диаметрально противоположную точке O. Каждой точке z комплексной плоскости поставим в соответствие точку M на сфере S, являющуюся точкой пересечения отрезка Pz и сферы S (рис. 2.4). Последовательности точек $\{z_n\}$, сходящейся к бесконечности, будет соответствовать последовательность точек сферы S, сходящаяся к точке P. Поэтому точке $z = \infty$ поставим в соответствие точку P на сфере S. Такое соответствие между точками расширенной комплексной плоскости и точками сферы S называется *стереографической проекцией*, а сфера S называется *сферой Римана*.

2.2. Кривые и области на комплексной плоскости

Пусть функция $z = \sigma(t)$ определена на отрезке $[\alpha;\beta]$ и принимает комплексные значения:

$$\sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t), \qquad \xi(t) = \operatorname{Re}\sigma(t),\ \ \eta(t) = \operatorname{Im}\sigma(t).$$

Если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, то говорят, что задана непрерывная кривая γ

$$\gamma\colon z = \sigma(t), t \in [\alpha;\beta]\,. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называется параметрическим уравнением кривой γ. Направление движения по кривой, соответствующее возрастанию параметра γ, называется положительным.

Примеры.

1) $z = \cos t,\ \ \pi \le t \le 2\pi.$

2) $z = \cos t + i \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

Первое уравнение задает отрезок $[-1; 1]$ вещественной оси, причем начальной точкой является точка -1 (рис. 2.5а). Второе уравнение задает полуокружность с центром в точке $z = 0$, радиусом 1, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 2.5б).

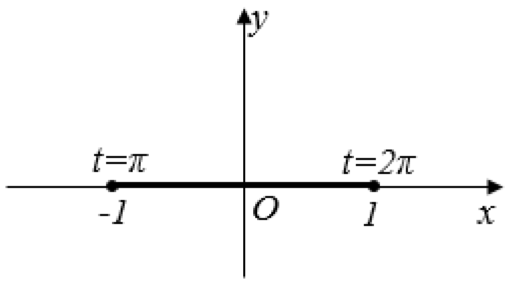

Рис. 2.5а

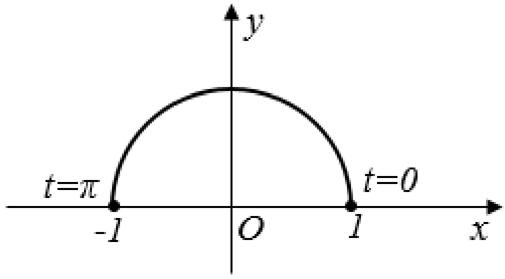

Рис. 2.5б

Кривая $\gamma: z = \sigma(t) = \xi(t) + i\eta(t),\ \alpha \le t \le \beta$, называется *гладкой*, если $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют на отрезке $[\alpha; \beta]$ непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в ноль, т.е. $\sigma'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t) \ne 0\ \ \forall\, t \in [\alpha; \beta]$. Причем, если кривая замкнутая, то должно выполняться условие $\sigma'(\alpha) = \sigma'(\beta)$. Это означает, что в каждой точке существует касательная к этой кривой.

Кривая γ называется *кусочно-гладкой*, если ее можно разбить на конечное число гладких кривых.

Из курса математического анализа известно, что длина дуги кривой равна

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta |\sigma'^2(t)|\, dt.$$

Кривая $\gamma: z = \sigma(t),\ \alpha \le t < +\infty$, где $\sigma(t)$ непрерывна на промежутке $[\alpha; +\infty)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} |\sigma(t)| = +\infty$, называется *неограниченной*.

Множество D точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ называется *областью*, если это множество

а) открытое (т.е. $\forall z_0 \in D\ \exists$ окрестность этой точки $\mathrm{U}_\delta(z_0) = \{z: |z - z_0| < \delta\}$, целиком принадлежащая D);

б) связное (т.е. любые две точки, принадлежащие D, можно соединить кривой, быть может неограниченной, все точки которой принадлежат D).

Граничной точкой области D называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие D, и точки, не принадлежащие D.

Множество граничных точек области D называется *границей* этой области и обозначается ∂D. Область D с присоединенной к ней границей называется *замкнутой областью* (или замыканием области D) и обозначается $\overline{D}$ ($\overline{D} = D \cup \partial D$).

Область D называется *односвязной*, если ее граница – связное множество. В противном случае область называется *многосвязной*.

Область D называется ограниченной, если существует круг K: $|z| < R$ такой, что $D \subset K$.

Примеры.

1) $D_1 = \{z\colon 0 < |z - a| < \varepsilon\}$ – ограниченная многосвязная область (рис. 2.2);

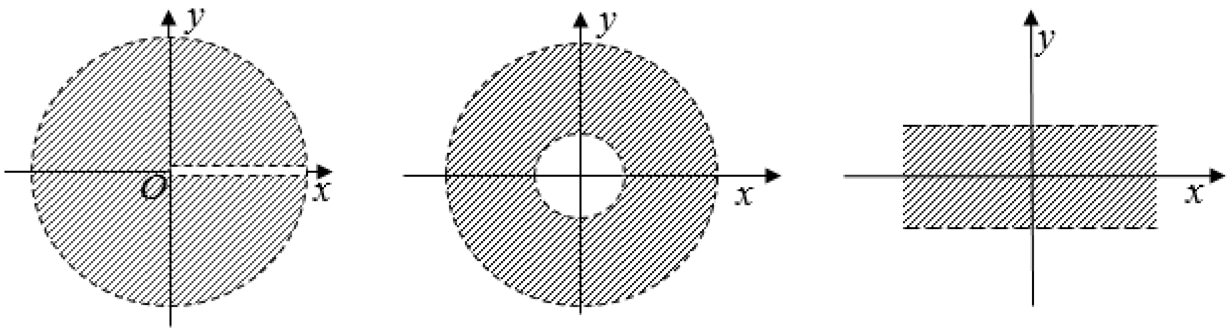

Рис. 2.6а *Рис. 2.6б* *Рис. 2.6в*

2) $D_2 = \{z\colon |z| < 1, 0 < \arg z < 2\pi\}$ – ограниченная односвязная область (рис. 2.6*а*);

3) $D_3 = \{z\colon 1 < |z| < 2\}$ – ограниченная многосвязная область (рис. 2.6*б*);

4) $D_4 = \{z\colon |z| > 1\}$ – неограниченная односвязная область (рис. 2.3);

5) $D_5 = \{z\colon |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$ – неограниченная односвязная область (рис. 2.6*в*).

2.3. Функции комплексной переменной

Говорят, что на множестве D комплексной плоскости z определена функция $w = f(z)$, если задано правило, по которому каждому комплексному числу $z \in D$ ставится в соответствие комплексное число w (рис. 2.7).

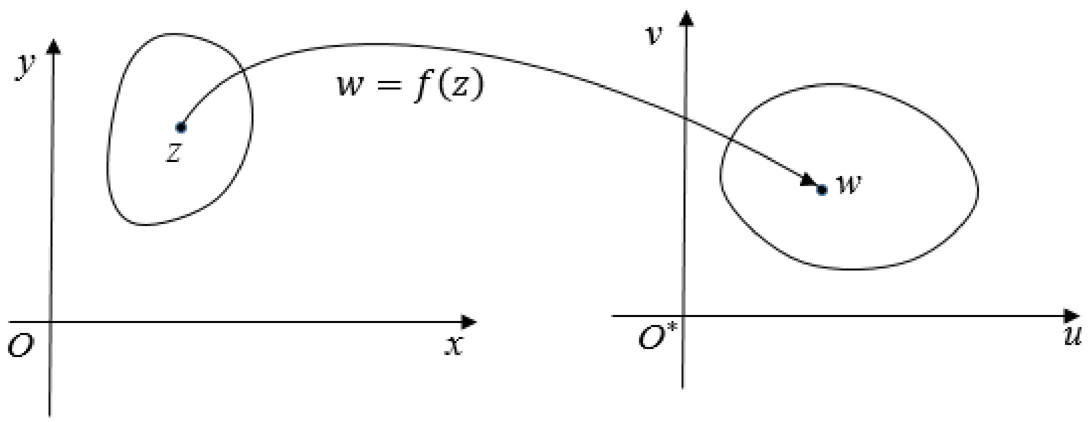

Рис. 2.7

Пусть $z = x + iy, w = u + iv$. Тогда задание функции $w = f(z)$ равносильно заданию двух действительных функций от двух действительных переменных:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$
$$u(x, y) = \mathrm{Re}f(z), \qquad v(x, y) = \mathrm{Im}f(z).$$

Функция $w = f(z)$ называется *однолистной на множестве* D, если в различных точках этого множества она принимает различные значения. Например, функция $w = z^2$ однолистна в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}z > 0$ и многолистна на всей комплексной плоскости, т.к., например, $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Функция $w = f(z)$ называется *многозначной*, если каждому комплексному числу $z \in D$ ставится в соответствие несколько комплексных чисел.

Основные элементарные функции комплексной переменной

1) *Дробно-рациональная*

$$w = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Частными случаями дробно-рациональной функции являются следующие функции:

а) *линейная функция* $w = az + b, a \neq 0$;

б) *степенная функция* $w = z^n,\ n \in \mathbb{N}$;

в) *дробно-линейная функция*

$$w = \frac{az + b}{cz + d},\ \ ad - bc \neq 0, \qquad c \neq 0;$$

г) *функция Жуковского*

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

2) *Показательная функция*

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

3) *Тригонометрические функции:*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \mathrm{tg}\, z = \frac{sin\, z}{cos\, z}, \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4) *Гиперболические функции:*

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

5) *Логарифмическая функция* (многозначная функция):

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Функция $\ln z = \ln|z| + i\arg z, -\pi < \arg z \le \pi$, называется главным значением логарифмической функции. Тогда логарифмическую функцию можно представить в виде:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

6) *Общая степенная функция* (многозначная):

$$w = z^a = e^{a\mathrm{Ln}\, z}.$$

7) *Общая показательная функция* (многозначная):

$$w = a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}.$$

8*) Обратные тригонометрические и гиперболические функции* (многозначные):

$$\mathrm{Arcsin}\, z, \mathrm{Arccos}\, z, \mathrm{Arctg}\, z, \mathrm{Arcctg}\, z, \mathrm{Arch}\, z, \mathrm{Arsh}\, z, \mathrm{Arth}\, z, \mathrm{Arcth}\, z.$$

Задача. Найти аналитическое выражение для функции $w = \mathrm{Arccos}\, z$, а также значения этой функции в точках $z_1 = 2, z_2 = 2i$.

Решение: По определению обратной функции

$$z = \cos w \Leftrightarrow z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $2e^{iw}$, получим квадратное уравнение относительно переменной $t = e^{iw}$:

$$t^2 - 2zt + 1 = 0.$$

Корни квадратного уравнения имеют вид:

$$t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Выполним обратную замену переменной:

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1},$$

$$iw = \mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad w = -i\mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Окончательно получаем следующее аналитическое выражение для функции $w = \mathrm{Arccos}\, z$:

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Найдем значения этой функции в указанных точках:

$$\mathrm{Arccos}\, z_1 = \mathrm{Arccos}\, 2 = -i\mathrm{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) =$$

$$= -i\left\{\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + i(0 + 2\pi k)\right\} = 2\pi k - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Arccos}\, z_2 = \mathrm{Arccos}\, 2i = -i\mathrm{Ln}\left(2i \pm i\sqrt{5}\right)$$

Так как $\left|2i + i\sqrt{5}\right| = 2 + \sqrt{5}$, $\arg\left(2i + i\sqrt{5}\right) = \pi/2$, $\left|2i - i\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2$, $\arg\left(2i - i\sqrt{5}\right) = -\pi/2$, то получим две серии значений:

$$\mathrm{Arccos}\, z_2 = -i\left\{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) + i(\pi/2 + 2\pi k_1)\right\} = \pi/2 + 2\pi k_1 - i\ln\left(2 + \sqrt{5}\right),$$

$$k_1 \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{Arccos} z_2 = -i\{\ln\left(\sqrt{5}-2\right) + i(-\pi/2 + 2\pi k_2)\} = -\pi/2 + 2\pi k_2 - i\ln\left(\sqrt{5}-2\right),$$

$$k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Задача. Представить в алгебраической, показательной и тригонометрической форме число

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + i\ln 3\right).$$

Решение:

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+i\ln 3\right)} - e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}+i\ln 3\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{-\ln 3} - e^{-i\frac{3\pi}{4}}e^{\ln 3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) - 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2i}\left(\frac{8\sqrt{2}}{6} + i\frac{10\sqrt{2}}{6}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Число z в алгебраической форме имеет вид:

$$z = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как $|z| = 4/3$, $\arg z = 3\pi/4$, то получим показательную и тригонометрическую формы числа z:

$$z = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Задача. Найти все значения степени и представить их в алгебраической форме:

$$z = i^{(i+1)}.$$

Решение: $z = i^{(i+1)} = e^{(i+1)\mathrm{Ln}i} = e^{(i+1)\left(\ln 1 + i(\pi/2+2\pi k)\right)} = e^{(i+1)i(\pi/2+2\pi k)} =$

$$= e^{-(\pi/2+2\pi k)}e^{i(\pi/2+2\pi k)} = e^{-(\pi/2+2\pi k)}i, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $e^{-(\pi/2+2\pi k)}i,\ k \in \mathbb{Z}$.

ЛЕКЦИЯ № 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Предел и непрерывность функции комплексной переменной.

Определение. Комплексное число A называется *пределом функции* $f(z)$ *при* $z \to a$, пишут: $A = \lim\limits_{z\to a} f(z)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall z$, удовлетворяющих условию $0 < |z - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.▲

Согласно данному определению функция $f(z)$ стремится к своему пределу независимо от способа стремления z к a.

Пусть $z = x + iy, a = \alpha + i\beta, f(z) = u(x,y) + iv(x,y), A = B + iC$. Тогда существование предела $\lim\limits_{z\to a} f(z) = A$ равносильно одновременному существованию пределов двух действительных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} u(x,y) = B, \lim_{\substack{x\to\alpha\\ y\to\beta}} v(x,y) = C .$$

Ввиду того, что данное определение предела сводится к определению предела для действительных функций двух действительных переменных, для функции комплексной переменной остаются справедливыми основные предельные соотношения.

Пусть $\lim\limits_{z\to a} f_1(z) = A_1, \lim\limits_{z\to a} f_2(z) = A_2$. Тогда

$$\lim_{z\to a}\big(f_1(z) \pm f_2(z)\big) = A_1 \pm A_2,$$

$$\lim_{z\to a}\big(f_1(z) \cdot f_2(z)\big) = A_1 \cdot A_2,$$

$$\lim_{z\to a}\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right) = \frac{A_1}{A_2}, \lim_{z\to a} f_2(z) \neq 0.$$

Определение. Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* a, если функция $f(z)$ определена в точке a и $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall z$, удовлетворяющих условию $|z - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется *непрерывной в области* D. ▲

Для непрерывности функции комплексной переменной $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $a = \alpha + i\beta$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были непрерывны в точке (α, β). Это позволяет перенести на функцию комплексной переменной основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных: непрерывность суммы, произведения и частного двух функций, непрерывность сложных функций.

3.2. Дифференцируемость и аналитичность функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.

Определение. Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

то этот предел называется *производной функции* $f(z)$ *в точке* z_0 и обозначается $f'(z_0)$, а функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z_0. ▲

Таким образом,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{3.1}$$

Введем обозначения для приращения функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Тогда равенство (3.1) примет вид:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}. \tag{3.2}$$

Согласно определению предела функции в точке соотношение (3.2) означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $0 < |\Delta z| < \delta$ следует $\left|\frac{\Delta f}{\Delta z} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z) \text{ при } \Delta z \to 0.$$

Здесь $o(\Delta z)$ – бесконечно малая функция при $\Delta z \to 0$.

Обратно, если приращение функции $f(z)$ в точке z_0 представляется в виде:

$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z) \text{ при } \Delta z \to 0, \tag{3.3}$$

где A – комплексное число, не зависящее от Δz, то функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) = A$.

Равенство (3.3) является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z_0.

Из равенства (3.3) также следует, что функция, дифференцируемая в точке z_0, непрерывна в этой точке.

● Из определения производной и свойств пределов следует, что для функции комплексной переменной сохраняются основные правила дифференцирования: дифференцирование суммы, произведения, частного двух функций, дифференцирование сложной функции.

● В определении производной содержится требование, чтобы предел (3.1) не зависел от способа стремления Δz к нулю. Это накладывает на дифференцируемую функцию комплексной переменной значительно более сильные ограничения, чем на функцию действительной переменной. Позже будет доказано, что функция, дифференцируемая в области, обладает производными всех порядков в этой области.

Задача. Доказать, что функция $f(z) = \operatorname{Re} z$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости.

Решение: Пусть $z = x + iy$. Тогда $f(z) = x$. Будем устремлять Δz к нулю в двух различных направлениях: вдоль действительной оси и вдоль мнимой оси.

В первом случае $\Delta z = t, t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$z + \Delta z = x + iy + t = (x + t) + iy, \qquad f(z + \Delta z) = x + t,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{t \to 0} \frac{x + t - x}{t} = 1.$$

Во втором случае $\Delta z = it, t \in \mathbb{R}$. Тогда

$$z + \Delta z = x + iy + it = x + i(y + t), \qquad f(z + \Delta z) = x,$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{t \to 0} \frac{x - x}{t} = 0.$$

Следовательно предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ не существует ни в одной точке комплексной плоскости.

Теорема (Условия Коши-Римана).

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы

1) функции $u(x, y), v(x, y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0);

2) в точке (x_0, y_0) выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{3.4}$$

При этом для производной $f'(z_0)$ справедлива формула

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \tag{3.5}$$

(С учетом условий (3.4) для производной $f'(z)$ можно выписать 4 различные формулы.)

Доказательство: 1. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, т.е. существует производная $f'(z_0)$. Тогда

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\rho), \text{ где } \varepsilon(\rho) = o(\rho) \text{ при } \rho \to 0, \tag{3.6}$$

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\,,$$

$\varepsilon(\rho) = \varepsilon_1(\rho) + i\varepsilon_2(\rho), \varepsilon_1(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0, \varepsilon_2(\rho) = o(\rho)$ при $\rho \to 0$.

Обозначим $\Delta f = \Delta u + i\Delta v, f'(z_0) = B + iC$ и подставим в (3.6):

$$\Delta u + i\Delta v = (B + iC\,)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_1(\rho) + i\varepsilon_2(\rho).$$

Приравняем действительные и мнимые части в последнем равенстве:

$$\Delta u = B\Delta x - C\Delta y + \varepsilon_1(\rho),$$
$$\Delta v = B\Delta y + C\Delta x + \varepsilon_2(\rho). \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.7) следует, что функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и

$$B = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}, -C = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}, B = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, C = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Откуда и следуют равенства (3.4), (3.5).

2. Пусть теперь функции $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполняются условия Коши-Римана (3.4). Тогда имеют место равенства (3.7) и

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = B\Delta x - C\Delta y + \varepsilon_1(\rho) + i\big(B\Delta y + C\Delta x + \varepsilon_2(\rho)\big) =$$
$$= (B + iC\,)(\Delta x + i\Delta y) + \varepsilon_1(\rho) + i\varepsilon_2(\rho) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\rho).$$

Следовательно, функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. ■

Определение. Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области D, называется *аналитической функцией в области* D. ▲

Задача. Доказать, что функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости и найти $f'(z)$.

Решение: Выделим действительную и мнимую части заданной функции:

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y),$$
$$u(x,y) = e^x \cos y\,, v(x,y) = e^x \sin y.$$

Справедливы равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия Коши-Римана выполняются во всех точках комплексной плоскости. Следовательно, функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости.

Согласно (3.5)

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z.$$

Таким образом,

$$(e^z)' = e^z.$$

Аналогично можно показать, что функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ аналитичны во всей комплексной плоскости и

$$(\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z, (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

● ***Условия Коши-Римана в полярных координатах.***

Пусть $z = re^{i\varphi}$, $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), v(x,y) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\varphi). \tag{3.8}$$

Вычисляя частные производные функции v и учитывая условия Коши-Римана (3.4), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\varphi) = \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi. \tag{3.9}$$

Сравнивая выражения в правых частях равенств (3.8), (3.9), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{3.10}$$

Равенства (3.10) и есть условия Коши-Римана в полярных координатах.

Получим формулу для вычисления производной функции $f(z)$, аналогичную формуле (3.5). Согласно доказанной теореме

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.11}$$

Из (3.8) следует система линейных уравнений относительно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\varphi) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{3.12}$$

Решение системы (3.12) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi. \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получим:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi - i\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial r}e^{-i\varphi} - \frac{i}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Итак,

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right). \tag{3.14}$$

С учетом условий Коши-Римана в полярных координатах (3.10) формулу (3.14) можно записать в четырех разных видах.

Задача. Доказать, что функция $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$, является аналитической во всей комплексной плоскости и найти $f'(z)$.

Решение: Воспользуемся полученными формулами (3.10), (3.14). Рассмотрим случай $z \neq 0$ и представим число z в показательной форме:

$$z = re^{i\varphi}, f(z) = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Выделим действительную и мнимую части заданной функции:

$$u(r,\varphi) = r^n\cos n\varphi, \qquad v(r,\varphi) = r^n\sin n\varphi.$$

Справедливы равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Откуда следует аналитичность функции $f(z) = z^n$, $z \neq 0$. С учетом (3.14):

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}(nr^{n-1}\cos n\varphi + inr^{n-1}\sin n\varphi) =$$
$$= \frac{nr^n}{z}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \frac{nz^n}{z} = nz^{n-1}.$$

Для доказательства аналитичности функции $f(z) = z^n$ в точке $z = 0$ рассмотрим

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(\Delta z)^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(\Delta z)^{n-1} = \begin{cases}0, n \geq 2,\\ 1, n = 1.\end{cases}$$

Итак,

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Ответ: $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Определение. Функция $\psi(x,y)$ называется *гармонической в области* D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области *уравнению Лапласа*:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \Delta\psi=0.$$

● Пусть $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ дифференцируема в области D. При этом функции $u(x,y), v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в этой области. Тогда с учетом условий Коши-Римана

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Откуда следует равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \Delta u=0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \Leftrightarrow \Delta v=0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Действительная и мнимая части дифференцируемой в области функции являются гармоническими функциями в этой области. ■

Определение. Гармонические функции $u(x,y), v(x,y)$, связанные между собою условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*. ▲

Теорема. Для дифференцируемости функции $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y), v(x,y)$ были сопряженными гармоническими в этой области. ■

3.3. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.

Задача. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y)=y^3-3x^2y$.

Решение: Нетрудно убедиться, что функция $u(x,y)$ является гармонической. Найдем мнимую часть функции $f(z)$, используя условия Коши-Римана. Из первого условия Коши-Римана получим:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy.$$

Следовательно,

$$v(x,y)=\int(-6xy)dy=-3xy^2+g(x). \tag{3.15}$$

Используя равенство (3.15) и второе условие Коши-Римана получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+g'(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2.$$

Так как левые части последних двух равенств равны, то равны и правые части. Поэтому

$$g'(x) = 3x^2, g(x) = x^3 + C,$$
$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C.$$

Здесь C – вещественная постоянная. Мнимая часть функции $f(z)$ найдена. Следовательно, можно восстановить с точностью до аддитивной постоянной саму функцию $f(z)$:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) =$$
$$= y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) =$$
$$= i(x^3 + 3x^2iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3) + iC = i(x+iy)^3 + iC, C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $f(z) = iz^3 + iC, C \in \mathbb{R}$.

ЛЕКЦИЯ № 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ. ПОНЯТИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения

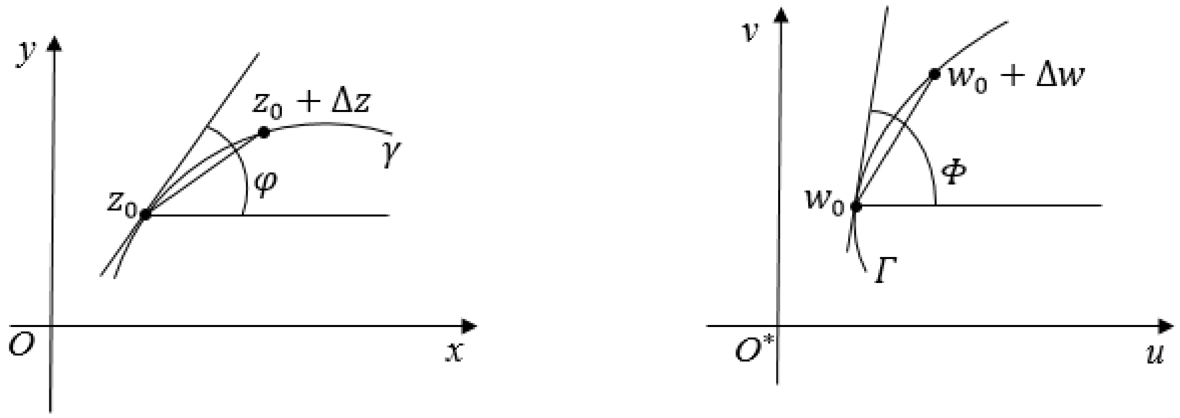

Рис. 4.1

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области D комплексной плоскости z. Зафиксируем в области D точку z_0 и проведем через точку z_0 кривую γ. Пусть $f(z)$ отображает область D комплексной плоскости $z = x + iy$ на некоторую область G комплексной плоскости $w = u + iv$. При этом точка z_0 отображается в точку w_0, а дуга кривой γ – в дугу кривой Γ (рис. 4.1).

Предположим, что $f'(z_0) \neq 0$ и представим комплексное число $f'(z_0)$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \rho e^{i\alpha}.$$

Согласно определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \rho e^{i\alpha}.$$

Обозначим буквой φ угол, который образует касательная к кривой γ в точке z_0 с положительным направлением оси Ox. Соответственно, угол между касательной к кривой Γ в точке w_0 и осью O^*u обозначим буквой Φ. При стремлении Δz к нулю $\arg \Delta z$ стремится к значению φ, а при стремлении Δw к нулю $\arg \Delta w$ стремится к значению Φ. При этом $\Delta w \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Согласно свойству аргумента частного и определению производной

$$\arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \arg \Delta w - \arg \Delta z,$$

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \Phi - \varphi.$$

Величина $\alpha = \Phi - \varphi$ называется *углом поворота кривой* γ *в точке* z_0 *при отображении* $w = f(z)$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то угол α не зависит от кривой и $\alpha = \arg f'(z_0)$. Т.е. все гладкие кривые, проходящие через точку z_0, поворачиваются при отображении $w = f(z)$ на один и тот же угол, равный $\arg f'(z_0)$.

Проведем на комплексной плоскости z через точку z_0 две гладкие кривые γ и $\tilde{\gamma}$. При отображении $w = f(z)$ они преобразуются в кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$, проходящие через точку w_0, на комплексной плоскости w (рис. 4.2).

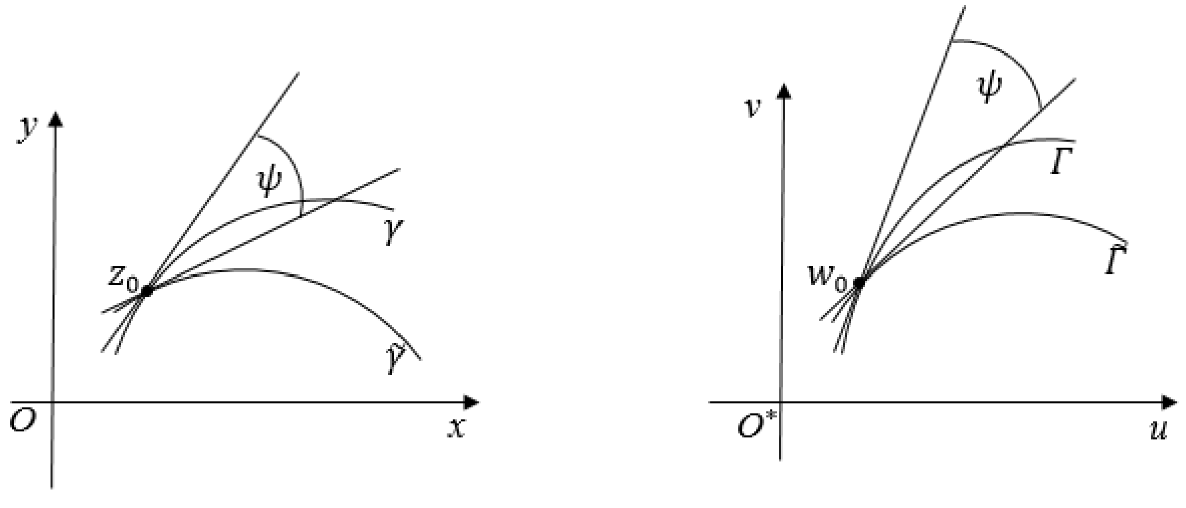

Рис. 4.2

Обозначим через $\tilde{\varphi}, \widetilde{\Phi}$ углы, которые образуют кривые $\tilde{\gamma}, \tilde{\Gamma}$ с положительным направлением оси абсцисс соответственно. Тогда

$$\alpha = \Phi - \varphi = \widetilde{\Phi} - \tilde{\varphi} \Rightarrow \Phi - \widetilde{\Phi} = \varphi - \varphi := \psi.$$

●При отображении посредством аналитической функции $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, угол между любыми гладкими кривыми γ и $\tilde{\gamma}$, проходящими через точку z_0, равен углу между их образами Γ и $\tilde{\Gamma}$, проходящие через точку w_0. Это свойство называется *свойством сохранения углов*.

Так как

$$\rho = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$$

то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка имеет место равенство:

$$|\Delta w| = \rho |\Delta z|,$$

где ρ не зависит от выбора кривой.

●Геометрический смысл последнего равенства состоит в том, что бесконечно малые окружности с центром в точке z_0 с точностью до бесконечно малых более высокого порядка преобразуются в бесконечно малые окружности с центром в точке w_0 (рис. 4.3). Это свойство называют *свойством постоянства растяжений*. Величина $\rho = |f'(z_0)|$ называется *линейным растяжением кривой γ в точке z_0 при отображении* $w = f(z)$.

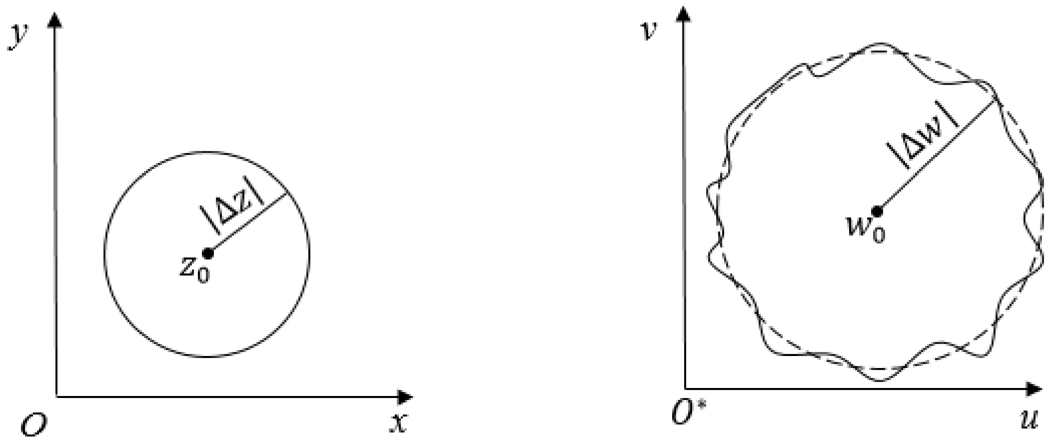

Рис. 4.3

Определение. Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w называется *конформным*, если это отображение в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и свойством постоянства растяжений.▲

Приведенные выше рассуждения показывают, что отображение посредством аналитической функции с отличной от нуля производной конформно. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (Критерий конформности).

Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформно в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $f(z)$ была однолистной и аналитической, причем $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. ■

Теорема 2 (Принцип соответствия границ). При конформном отображении граница области переходит в границу образа области взаимно однозначно с сохранением ориентации. ■

4.2. Конформные отображения элементарными функциями

4.2.1. Линейная функция

$$w = az + b, \qquad a \neq 0. \tag{4.1}$$

Производная линейной функции: $w'(z) = a \neq 0$.

Функция (4.1) является однолистной во всей комплексной плоскости. Действительно, пусть $z_1 \neq z_2$, $w_1 = az_1 + b$, $w_2 = az_2 + b$. Тогда

$$w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2) \neq 0.$$

Отображение, осуществляемое линейной функцией, представляет собой композицию растяжения, поворота и параллельного переноса:

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1,$$

$w_1 = |a|z$ – растяжение в $|a|$ раз;

$w_2 = e^{i \arg a} w_1$ – поворот на угол $\arg a$;

$w_3 = w_2 + b$ – параллельный перенос.

Задача. Найти, если это возможно, линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами $0; 1; i$ в треугольник с вершинами $0; 2; 1 + i$.

Решение: Так как треугольники подобны с коэффициентом подобия $\sqrt{2}$, то линейная функция, осуществляющая указанное отображение, существует.

Выполним последовательно следующие преобразования:

$w_1 = \sqrt{2}z$ – растяжение в $\sqrt{2}$ раз (в результате получим ΔOA_1B_1 на рис. 4.4);

$w_2 = e^{-i3\pi/4} w_1$ – поворот на угол $\varphi = -3\pi/4$ (в результате получим ΔOA_2B_2 на рис. 4.4);

$w_3 = w_2 + 1 + i$ – параллельный перенос, при котором

$$A_2 \to O, O \to 1 + i, B_2 \to 2.$$

Найдем искомую линейную функцию:

$$w = e^{-i3\pi/4}\sqrt{2}z + i + 1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2}z + i + 1 =$$

$$= -(1 + i)z + i + 1 = (1 + i)(1 - z).$$

Ответ: $w = (1 + i)(1 - z)$.

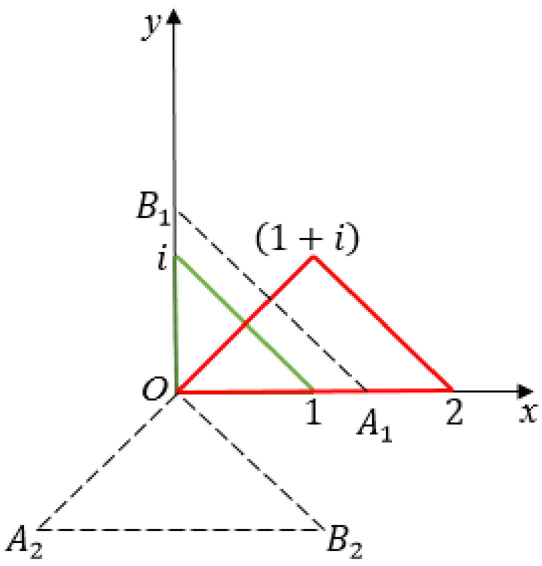

Рис. 4.4

4.2.2. Степенная функция

$$w = z^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{4.2}$$

Функция (4.2) аналитична во всей комплексной плоскости:

$$w'(z) = nz^{n-1}.$$

При этом $w'(z) \neq 0$ при $z \neq 0$.

Найдем область однолистности. Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}, z_1 \neq z_2$.

Выясним, при каких условиях $w(z_1) = w(z_2)$:

$$\rho_1^n e^{in\varphi_1} = \rho_2^n e^{in\varphi_2} \Rightarrow \rho_1 = \rho_2, n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2\pi k}{n}.$$

Следовательно, область однолистности не должна содержать точек, модули которых равны, а аргументы различаются на $\frac{2\pi k}{n}$. Примером области однолистности может служить сектор:

$$S = \left\{z: \alpha < \arg z < \alpha + \frac{2\pi}{n}\right\}. \tag{4.3}$$

В области (4.3) отображение (4.2) конформно.

Отображение $w = z^n$ взаимно однозначно переводит

а) луч $\arg z = \alpha$ в луч $\arg w = n\alpha$;

б) дугу окружности $|z| = \rho, \alpha < \arg z < \beta, 0 < \beta - \alpha < \frac{2\pi}{n}$ в дугу окружности $|w| = \rho^n, n\alpha < \arg w < n\beta$.

Действительно, луч $\arg z = \alpha$ можно задать параметрическим уравнением

$$z = \rho e^{i\alpha}, 0 < \rho < +\infty, \alpha = const.$$

Следовательно,

$$w = \rho^n e^{in\alpha}, 0 < \rho < +\infty, \qquad |w| = \rho^n, 0 < |w| < +\infty, \arg w = n\alpha.$$

Для дуги окружности:

$$z = \rho e^{i\varphi}, \alpha < \varphi < \beta, \rho = const \Rightarrow$$

$$w = \rho^n e^{in\varphi}, |w| = \rho^n = const, n\alpha < \arg w < n\beta.$$

Из приведенных рассуждений следует, что круговой сектор

$$S = \{z: |z| < \rho, \qquad 0 < \arg z < \alpha\}$$

при отображении (4.2) перейдет в круговой сектор

$$S^* = \{w: |w| < \rho^n, \qquad 0 < \arg w < n\alpha\}.$$

Задача. Найти образ E области

$$D = \left\{z: |z| < 2, -\frac{\pi}{3} < \arg z < -\frac{\pi}{6}\right\}$$

при отображении $w = \left(-\sqrt{3} + i\right)z^2 + 1 + i.$

Решение: Данное отображение представим в виде композиции четырех отображений: $w = w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$,

$w_1 = z^2$;

$w_2 = \left|-\sqrt{3} + i\right| w_1 = 2w_1$;

$w_3 = e^{i5\pi/6} w_2$;

$w = w_4 = w_3 + 1 + i.$

На рисунках 4.5*а* - 4.5*д* показано, как преобразуется область D на каждом шаге.

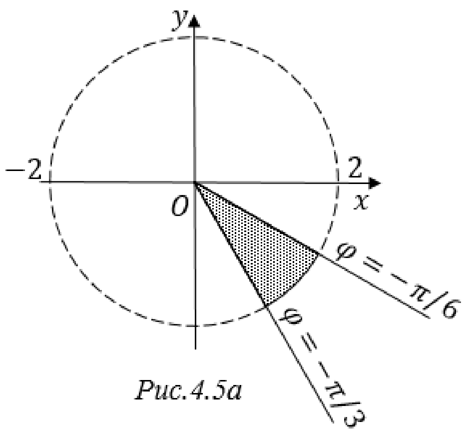

Рис.4.5а

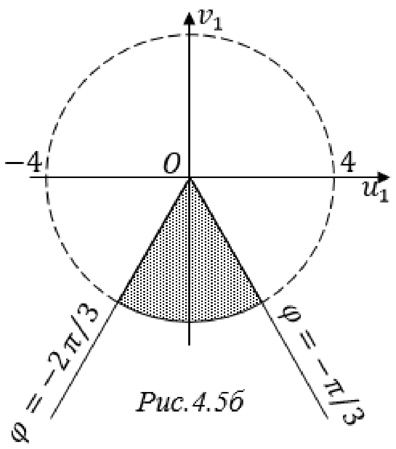

Рис.4.5б

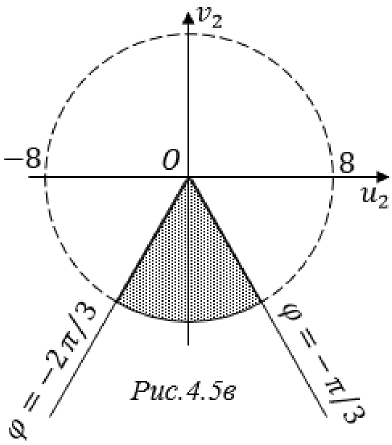

Рис.4.5в

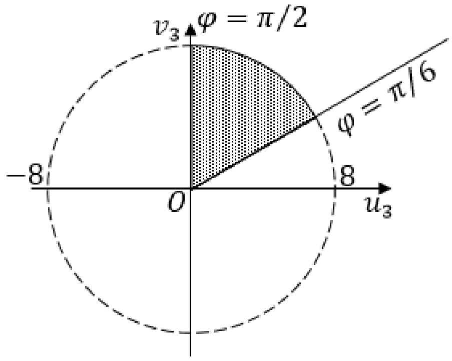

Рис.4.5г

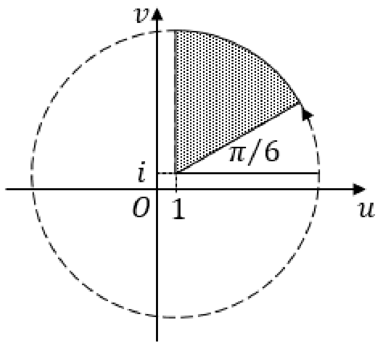

Рис.4.5д

Ответ:

$$E = \{w \colon |w - 1 - i| < 8, \pi/6 < \arg(w - 1 - i) < \pi/2\}$$

4.2.3. Показательная функция

$$w = e^z. \qquad (4.3)$$

Функция (4.3) аналитична во всей комплексной плоскости и ее производная не обращается в ноль ни в одной точке:

$$w'(z) = e^z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Найдем область однолистности. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_1 \neq z_2$. Выясним, при каких условиях $w(z_1) = w(z_2)$:

$$e^{x_1 + iy_1} = e^{x_2 + iy_2},$$

$$e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2),$$

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2 + 2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Следовательно, область однолистности не содержит пары точек z_1 и z_2 таких, что

$$z_1 = z_2 + i2\pi k, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В частности, показательная функция (4.3) однолистна в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ и конформно отображает эту полосу на плоскость с разрезом по лучу $[0; +\infty)$.

Задача. Найти образ E области

$$D = \{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$$

при отображении $w = e^z$.

Решение: Границу области D разобьем на три части l_1, l_2, l_3 и последовательно отобразим их на плоскость w посредством отображения $w = e^z$ (рис. 4.6*а*). Образы кривых l_1, l_2, l_3 обозначим соответственно L_1, L_2, L_3. Направление обхода области D выберем положительным, т.е. при обходе границы область D остается слева. Направление обхода на рис. 4.6*а* указано стрелками.

Кривая l_1 задается параметрическим уравнением:

$$l_1\colon z = x + i\pi, +\infty > x > 0.$$

Следовательно,

$$w = e^{x+i\pi}, +\infty > |w| > 1, \arg w = \pi,$$
$$L_1\colon w = u, -\infty < u < -1.$$

Параметрическое уравнение кривой l_2 имеет вид:

$$l_2\colon z = iy, \pi > y > 0.$$

Следовательно,

$$w = e^{iy}, |w| = 1, \pi > \arg w > 0,$$
$$L_2\colon w = e^{iy}, \pi > y < 0.$$

Для кривой l_3 получим:

$$l_3\colon z = x, 0 < x < +\infty.$$
$$w = e^x, 1 < |w| < +\infty, \arg w = 0,$$
$$L_3\colon w = u, 1 < u < +\infty.$$

Согласно принципу соответствия границ (теорема 2) искомая область E расположена выше действительной оси.

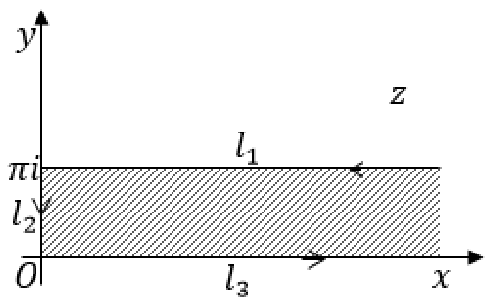

Рис.4.6а

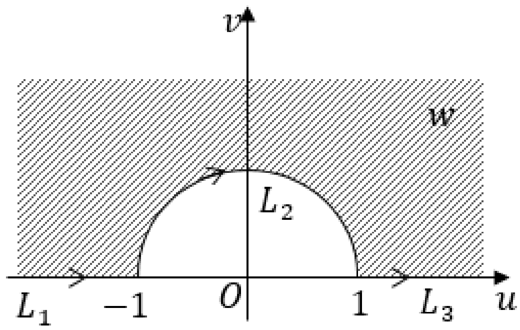

Рис.4.6б

Ответ: $E = \{w\colon |w| > 1, 0 < arg\, w < \pi\}$.

Задача. Найти образ E области

$$D = \{z: \alpha < Imz < \beta, a < Rez < b\}, 0 < \beta - \alpha < 2\pi,$$

при отображении $w = e^z$.

Решение: Разобьем границу прямоугольника D на 4 части и отобразим последовательно полученные отрезки:

$$l_1: z = x + i\alpha, a < x < b \ \to L_1: w = \rho e^{i\alpha}, e^a < \rho < e^b;$$

$$l_2: z = b + iy, \alpha < y < \beta \ \to L_2: w = e^b e^{iy}, \alpha < y < \beta;$$

$$l_3: z = x + i\beta, b > x > a \ \to L_3: w = \rho e^{i\beta}, e^b > \rho > \ e^a;$$

$$l_4: z = a + iy, \beta > y > \alpha \ \to L_4: w = e^a e^{iy}, \beta > y > \alpha.$$

В результате исходный прямоугольник отобразится в кольцевой сектор (рис. 4.7*а*, 4.7*б*).

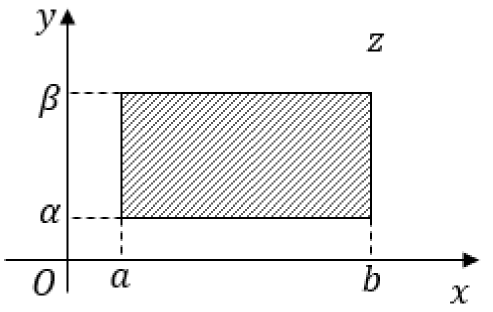

Рис.4.7а

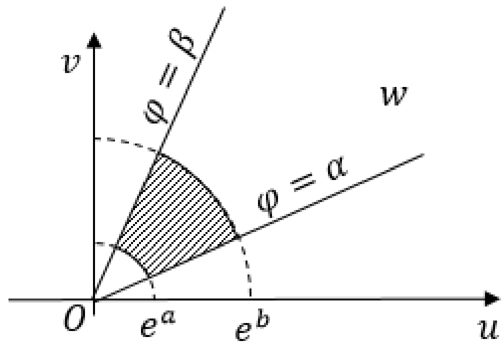

Рис.4.7б

Ответ: $E = \{w: e^a < |w| < e^b, \alpha < arg\, w < \beta\}$.

ЛЕКЦИЯ № 5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w называется *конформным*, если это отображение в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и свойством постоянства растяжений. ▲

Теорема 1 (Критерий конформности).

Для того чтобы отображение $w = f(z)$ было конформно в области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области функция $f(z)$ была однолистной и аналитической, причем $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. ■

Теорема 2 (Принцип соответствия границ). При конформном отображении граница области переходит в границу образа области взаимно однозначно с сохранением ориентации. ■

На прошлой лекции были рассмотрены конформные отображения, задаваемые линейной, степенной и показательной функциями. Перейдем к изучению отображения, задаваемого дробно-линейной функцией.

5.1. Дробно-линейная функция

Дробно-линейная функция имеет вид:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0. \tag{5.1}$$

Здесь $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, а условие $ad-bc \neq 0$ означает, что $w \neq const$.

В формуле (5.1) предполагается, что если $c \neq 0$, то $w(\infty) = \frac{a}{c}, w\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$. Если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Таким образом, дробно-линейная функция определена на всей расширенной комплексной плоскости.

Производная функции (5.1) равна:

$$w'(z) = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{cz+d} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Следовательно, функция (5.1) аналитична во всех точках, кроме $z = -\frac{d}{c}$ и $w'(z) \neq 0$, если $z \neq \infty$.

Найдем области однолистности дробно-линейной функции. Пусть $z_1 \neq z_2$.

Тогда

$$w(z_1) - w(z_2) = \frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} =$$

$$= \frac{(az_1+b)(cz_2+d)-(az_2+b)(cz_1+d)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} = \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)} \neq 0.$$

Таким образом, отображение, задаваемое формулой (5.1), конформно во всех точках $\overline{\mathbb{C}}$, кроме точек $z = -\frac{d}{c}$ и $z = \infty$.

Отображение, задаваемое дробно-линейной функцией, называется дробно-линейным отображением.

5.2. Основные свойства дробно-линейного отображения

Теорема 1 (Групповое свойство). Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т.е.

1) суперпозиция дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением;

2) отображение, обратное к дробно-линейному, также является дробно-линейным отображением.

Доказательство: 1) Пусть

$$\xi = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0, \tag{5.2}$$

$$w = \frac{a_2 \xi + b_2}{c_2 \xi + d_2}, a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0. \tag{5.3}$$

Подставим (5.2) в (5.3):

$$w = \frac{a_2\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2} = \frac{az + b}{cz + d},$$

$$a = a_1 a_2 + b_2 c_1, b = a_2 b_1 + b_2 d_1, c = c_2 a_1 + \ c_1 d_2, d = c_2 b_1 + d_1 d_2.$$

При этом

$$ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(\ a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0.$$

2) Пусть

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0.$$

Тогда

$$wcz + wd = az + b,$$

$$z(wc - a) = b - wd,$$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

При этом $(-d)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$. ■

Теорема 2 (Круговое свойство). При дробно-линейном отображении образом любой окружности или прямой является окружность или прямая.

Доказательство: Если $c = 0$, то $w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d}$, т.е. отображение (5.1) становится линейным. Линейное отображение сводится к подобию (сжатию или растяжению), повороту и параллельному переносу. Следовательно, образом окружности будет окружность, а образом прямой – прямая.

Пусть теперь $c \neq 0$. Тогда

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{acz + bc + ad - ad}{cz + d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{a(cz + d) + bc - ad}{cz + d} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} = A + \frac{B}{z + z_0},$$

$$A = \frac{a}{c}, B = \frac{bc - ad}{c^2}, z_0 = \frac{d}{c}.$$

Тогда дробно-линейное отображение можно представить в виде композиции трех отображений:

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1$$

$$w_1 = z + z_0, w_2 = \frac{1}{z}, \; w_3 = A + Bw_2.$$

Первое и третье отображения являются линейными, следовательно, они переводят окружность в окружность и прямую в прямую. Покажем, что отображение $w = 1/z$ обладает круговым свойством.

Уравнение произвольной окружности или прямой на комплексной плоскости $z, z = x + iy$, имеет вид:

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0. \tag{5.4}$$

Так как

$$x^2 + y^2 = z\bar{z}, x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

то уравнение (5.4) примет вид:

$$\alpha z\bar{z} + \frac{\beta(z + \bar{z})}{2} + \frac{\gamma(z - \bar{z})}{2i} + \delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha z\bar{z} + \frac{1}{2}(\beta - i\gamma)z + \frac{1}{2}(\beta + i\gamma)\bar{z} + \delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha z\bar{z} + Dz + \bar{D}\bar{z} + \delta = 0, D = \frac{1}{2}(\beta - i\gamma). \tag{5.5}$$

Поскольку $w = 1/z$, то $z = 1/w, \bar{z} = 1/\bar{w}$. Равенство (5.5) преобразуется к виду:

$$\frac{\alpha}{w\bar{w}} + \frac{D}{w} + \frac{\bar{D}}{\bar{w}} + \delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + D\bar{w} + \bar{D}w + \delta w\bar{w} = 0.$$

Следовательно, образом любой окружности или прямой (прямая получается при $\alpha = 0$ в (5.4)) является окружность или прямая. ■

● Отметим, что отображение (5.1) переводит в прямые те окружности и прямые, которые проходят через точку $z = -\frac{d}{c}$. Остальные окружности и прямые отображение (5.1) переводит в окружности.

Определение. Точки M и M^* называются симметричными относительно окружности Γ с центром в точке O и радиусом R, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O, и выполняется равенство: $OM \cdot OM^* = R^2$. ▲

На комплексной плоскости точки z и z^* симметричны относительно окружности $\Gamma: |z-a| = R$, если они лежат на одном луче, выходящем из точки a, и выполняется равенство: $|z-a| \cdot |z^*-a| = R^2$ (рис. 5.1).

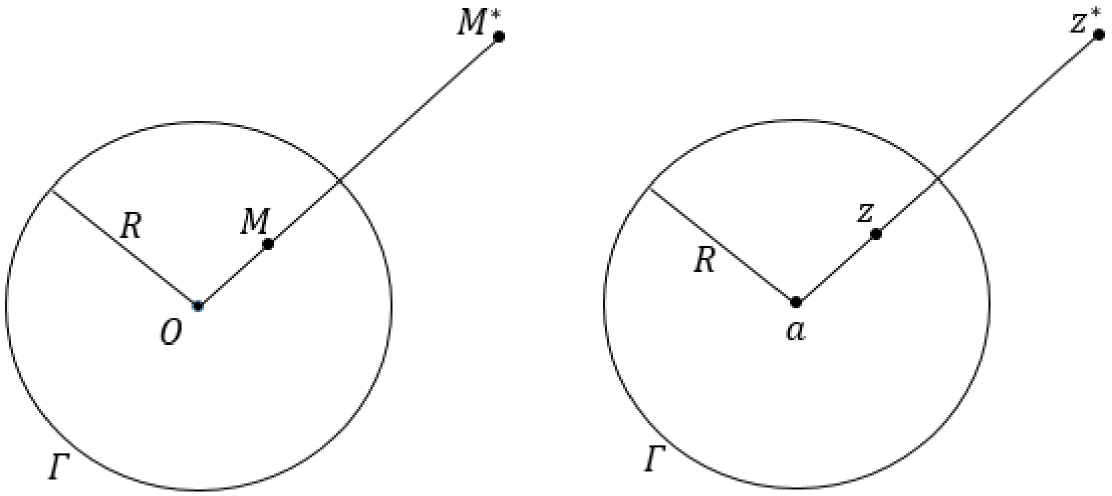

Рис. 5.1

● Точка $z = \infty$ считается симметричной точке a относительно Γ.

● Симметричные относительно окружности $\Gamma: |z-a| = R$ точки z и z^* связаны соотношением:

$$z^* - a = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}. \tag{5.6}$$

Действительно, если точки z и z^* симметричны относительно окружности Γ, то справедливы равенства:

$$|z-a| \cdot |z^*-a| = R^2, \tag{5.7}$$

$$arg(z-a) = arg(z^*-a). \tag{5.8}$$

Далее, из (5.7), (5.8) получим:

$$|z^*-a| = \frac{R^2}{|z-a|} = \frac{R^2}{|\overline{z-a}|} = \frac{R^2}{|\bar{z}-\bar{a}|} = \left|\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}\right|,$$

$$arg(z^*-a) = -arg(\overline{z-a}) = arg\frac{1}{\bar{z}-\bar{a}} = arg\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}.$$

Откуда и следует равенство (5.6).

● Прямой можно считать окружность бесконечно большого радиуса. Покажем, что понятие симметрии относительно прямой согласуется с данным определением симметрии относительно окружности.

Пусть точки M и M^* симметричны относительно окружности γ с центром в точке O и радиусом R. Точку пересечения отрезка MM^* с γ обозначим буквой P. Положим $OM = R - \alpha, OM^* = R + \beta$. Тогда

$$OM \cdot OM^* = (R-\alpha)(R+\beta).$$

С другой стороны, согласно определению симметричных относительно окружности точек

$$OM \cdot OM^* = R^2.$$

Так как левые части последних двух равенств равны, то равны и правые части:

$$(R-\alpha)(R+\beta) = R^2 \Leftrightarrow R^2 + (\beta-\alpha)R - \alpha\beta = R^2.$$

Откуда получаем:

$$(\beta-\alpha) = \frac{\alpha\beta}{R} \Rightarrow \lim_{R\to\infty}(\beta-\alpha) = 0.$$

Т.е. точки M и M^* равноудалены от γ. Привычное понятие симметрии относительно прямой остается в силе: отрезок MM^* перпендикулярен γ и $MP = M^*P$.

Лемма. Точки M и M^* симметричны относительно окружности Γ тогда и только тогда, когда любая окружность, проходящая через эти точки, пересекает Γ под прямым углом.

Доказательство: Пусть точки M и M^* симметричны относительно окружности Γ, а γ – произвольная окружность, проходящая через эти точки. Проведем к γ касательную OP (рис. 5.2). Согласно свойству касательной и секущей

$$OP^2 = OM \cdot OM^*.$$

В силу симметрии точек $OM \cdot OM^* = R^2$. Следовательно, $OP = R$, $P \in \gamma$, т.е. окружности γ и Γ пересекаются под прямым углом.

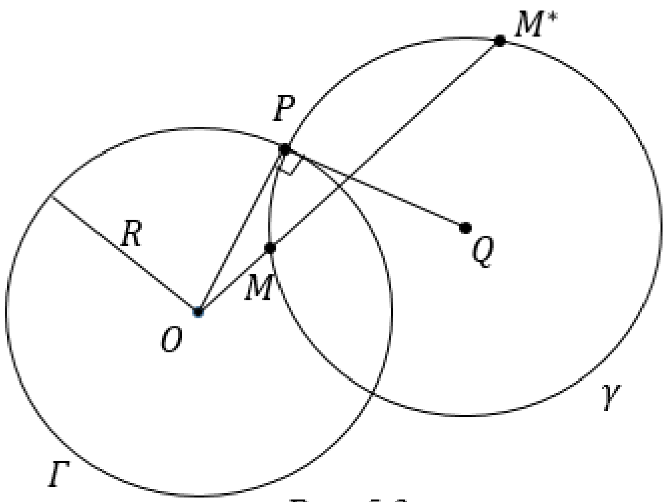

Рис. 5.2

Пусть теперь любая окружность γ с центром в точке Q, проходящая через точки M и M^*, пересекает Γ под прямым углом и P – точка пересечения γ и Γ. Следовательно, прямая MM^* (как частный случай окружности) также пересекает Γ под прямым углом, т.е. прямая MM^* проходит через точку O. Кроме того, точки

M и M^* лежат по одну сторону от точки O. (В противном случае построим окружность γ_1 на отрезке MM^* как на диаметре с центром в точке O_1. Обозначим через P_1 точку пересечения Γ и γ_1. Угол $\angle OP_1O_1$ в этом случае лежит внутри угла $\angle MP_1M^* = 90^\circ$, т.е. окружности Γ и γ_1 не могут пересекаться под прямым углом.) Тогда $\angle OPQ = 90^\circ$, OP – касательная к γ и $OP^2 = OM \cdot OM^* \Rightarrow OM \cdot OM^* = R^2$. Т.е. точки M и M^* симметричны относительно окружности Γ. ∎

Теорема 3 (Свойство сохранения симметрии). При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Доказательство: Пусть z и z^* симметричны относительно окружности Γ с центром в точке a и дробно-линейное отображение $w = f(z)$ переводит

$$z \to w, z^* \to w^*, \Gamma \to \tilde{\Gamma}.$$

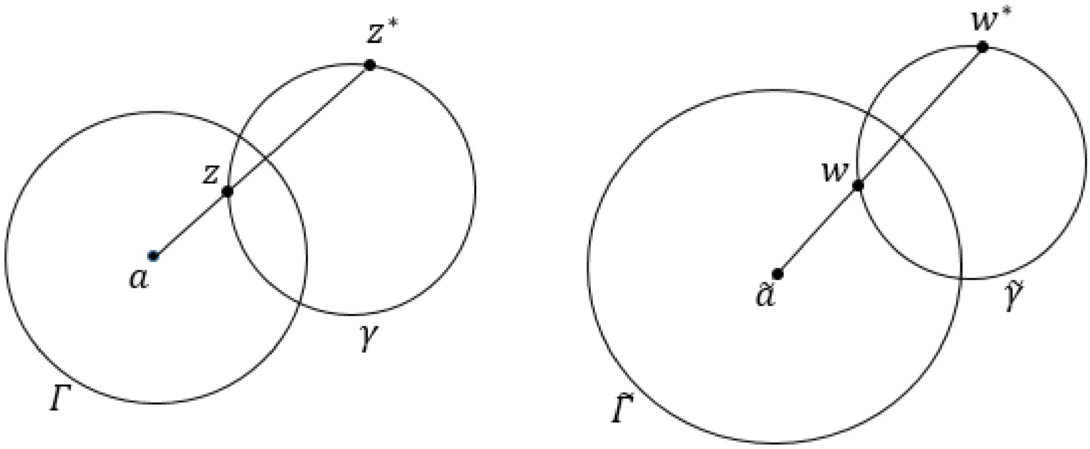

Рис. 5.3

В силу леммы достаточно показать, что любая окружность $\tilde{\gamma}$, проходящая через точки w и w^*, пересекает $\tilde{\Gamma}$ под прямым углом (рис. 5.3). Прообразом окружности $\tilde{\gamma}$ является окружность γ, проходящая через точки z и z^*. Согласно лемме γ пересекает Γ под прямым углом. А так как дробно-линейное отображение конформно, то оно сохраняет углы между кривыми. Теорема доказана. ∎

Теорема 4. Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки z_1, z_2, z_3 переходят в три различные точки w_1, w_2, w_3. Это отображение определяется формулой

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Доказательство: Пусть $w = f(z)$ – дробно-линейная функция и

$$w_k = f(z_k), k = 1,2,3.$$

Покажем, что если дробно-линейная функция $w = f_1(z)$ такова, что

$$f_1(z_k) = f(z_k), k = 1,2,3,$$

то $f_1(z) \equiv f(z)$.

Пусть $z = \varphi(w)$ – функция, обратная к $f(z)$. Тогда $\varphi\big(f_1(z)\big)$ является дробно-линейной функцией в силу группового свойства:

$$\varphi\big(f_1(z)\big) = \frac{az+b}{cz+d}, \varphi\big(f_1(z_k)\big) = \varphi(w_k) = \varphi\big(f(z_k)\big) = z_k.$$

Тогда

$$\frac{az_k+b}{cz_k+d} = z_k\,, k = 1,2,3,$$

$$cz_k^2 + (d-a)z_k - b = 0, k = 1,2,3.$$

Получается, что квадратное уравнение имеет три различных корня. Это возможно лишь при одновременном выполнении равенств:

$$c = 0, (d-a) = 0, b = 0.$$

Следовательно, $\varphi\big(f_1(z)\big) = z, f_1(z) \equiv f(z)$. ■

Примеры дробно-линейных отображений

Пример 1. Всякое дробно-линейное отображение, переводящее

$$z_1 \to 0, z_2 \to \infty,$$

имеет вид

$$w = \frac{A(z-z_1)}{z-z_2}, \qquad A \in \mathbb{C}. \tag{5.9}$$

Пример 2. Дробно-линейное отображение полуплоскости $Im\, z > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид:

$$w = \frac{e^{i\alpha}(z-z_0)}{z-\bar{z}_0}, \operatorname{Im} z_0 > 0, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Действительно, пусть дробно-линейное отображение $w = f(z)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0$. Тогда в силу свойства сохранения симметрии $\bar{z}_0 \to \infty$. Согласно формуле (5.9) в примере 1

$$w = \frac{A(z-z_0)}{z-\bar{z}_0}.$$

Границей верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ являются точки действительной оси $z = x$, которые при указанном отображении переходят в точки единичной окружности $|w(x)| = 1$ (рис. 5.4).

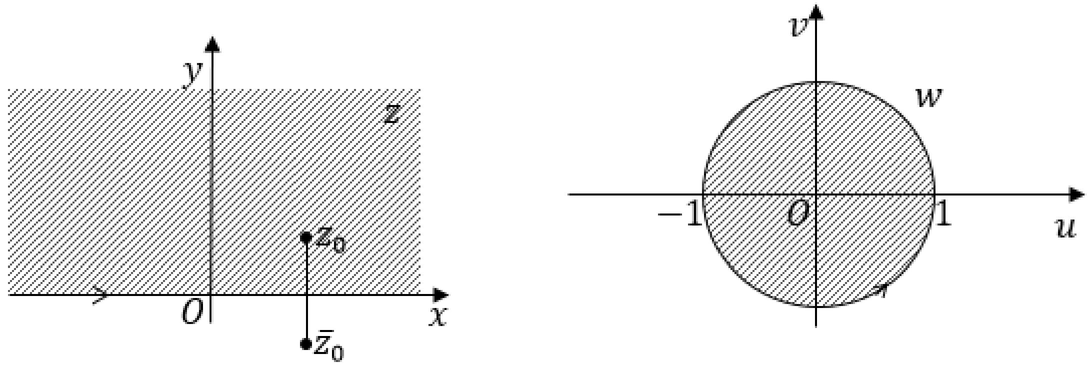

Рис. 5.4

Тогда

$$\left|\frac{A(x-z_0)}{x-\bar{z}_0}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|A||x-z_0|}{|x-\bar{z}_0|} = 1 \Leftrightarrow |A| = 1.$$

При получении последнего равенства было учтено, что

$$|x-\bar{z}_0| = |\overline{x-z_0}| = |x-z_0|.$$

Поэтому справедлива формула (5.10).

Задача. Найти образ E области

$$D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

при отображении

$$w = \frac{1}{z-1}. \tag{5.11}$$

Решение: Разобьем границу области D на две части l_1 и l_2 (рис. 5.5). Луч l_2 является частью вещественной прямой $\operatorname{Im} z = 0$, проходящей через точку $z = 1$. Эта точка при отображении (5.11) переходит в бесконечно удаленную точку, а прямая $\operatorname{Im} z = 0$ отобразится в прямую. Точки $z = x, 0 < x < 1$ границы l_2 отобразятся в точки луча L_2' вещественной оси $w = u, -1 > u > -\infty$. Точки $z = x, 1 < x < \infty$ границы l_2 отобразятся в точки луча L_2'' вещественной оси $w = u, +\infty > u > 0$.

Часть l_1 границы области D является частью прямой $\operatorname{Re} z = 0$, не проходящей через точку $z = 1$. Поэтому образом прямой $\operatorname{Re} z = 0$ при отображении (5.11) будет окружность, а образом l_1 – часть этой окружности. Так как

$$w(0) = -1, w(\infty) = 0, w(i) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2},$$

то образом l_1 будет дуга окружности L_1, проходящая через точки $-1, 0, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ на комплексной плоскости w. Центр указанной окружности находится в точке

$w = -1/2$, а радиус равен $1/2$. Образом области D при отображении (5.11) является область E, изображенная на рис. 5.5 справа.

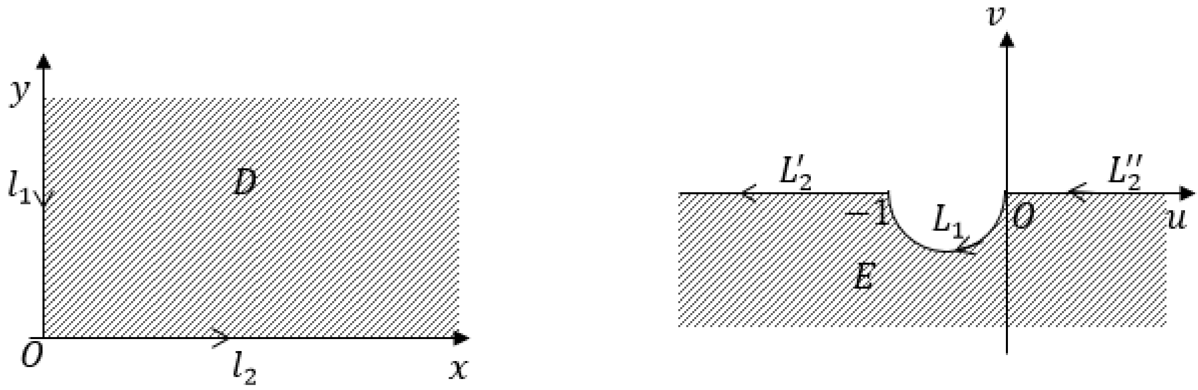

Рис. 5.5

Ответ: $E = \left\{ w\colon \left| w + \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}, \operatorname{Im} w < 0 \right\}$.

ЛЕКЦИЯ № 6. ФУНКЦИЯ ЖУКОВСКОГО. РЕГУЛРНЫЕ ВЕТВИ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. Функция Жуковского

Функцией Жуковского называется функция $w = f(z)$, где

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{6.1}$$

Производная функции (6.1) имеет вид:

$$w'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Функция (6.1) аналитична во всех точках, кроме $z = 0$, и отлична от нуля во всех точках комплексной плоскости, в которых она определена, кроме точек $z = \pm 1$.

Найдем области однолистности функции Жуковского. Пусть $z_1 \neq z_2$. Выясним, при каких условиях $w(z_1) = w(z_2)$:

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right),$$

$$z_1 - z_2 + \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = 0,$$

$$z_1 - z_2 + \frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2} = 0,$$

$$(z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right) = 0.$$

Так как $z_1 \neq z_2$, то $z_1 z_2 = 1$. Таким образом, функция Жуковского однолистна в области D тогда и только тогда, когда в области D нет различных точек, связанных равенством

$$z_1 z_2 = 1. \tag{6.2}$$

Геометрический смысл равенства (6.2) заключается в том, что точка $z_2 = 1/z_1$ получается из точки z_1 двойной симметрией: относительно окружности $|z| = 1$ и относительно прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Таким образом, область однолистности функции Жуковского не должна содержать пары таких точек.

Примеры областей однолистности функции Жуковского:

1. $|z| > 1$;
2. $|z| < 1$;
3. $\operatorname{Im} z > 0$;
4. $\operatorname{Im} z < 0$.

Образы окружностей и лучей

1) Параметрическое уравнение окружности с центром в точке O и радиусом r на комплексной плоскости z записывается в виде:

$$z = re^{i\varphi},\ \ 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

При отображении функцией Жуковского получим:

$$w = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{re^{i\varphi}}\right) = \frac{1}{2}\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi.$$

Так как $w = u + iv$, то

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi\,, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi\,, 0 \leq \varphi < 2\pi. \tag{6.3}$$

Из (6.3) следует:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, a = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), b = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right), a^2 - b^2 = 1.$$

Следовательно, параметрические уравнения (6.3) задают эллипс на комплексной плоскости w с полуосями a, b и фокусами в точках $(\pm 1; 0)$, если $r \neq 1$.

Если $r > 1$, то ориентация эллипса совпадает с ориентацией окружности $|z| = r$. Если $r < 1$, то ориентация эллипса меняется на противоположную. В частности, окружность $|z| = 1/r$ отображается в тот же эллипс, что и окружность $|z| = r$, но направление обхода изменяется на противоположное (рис. 6.1).

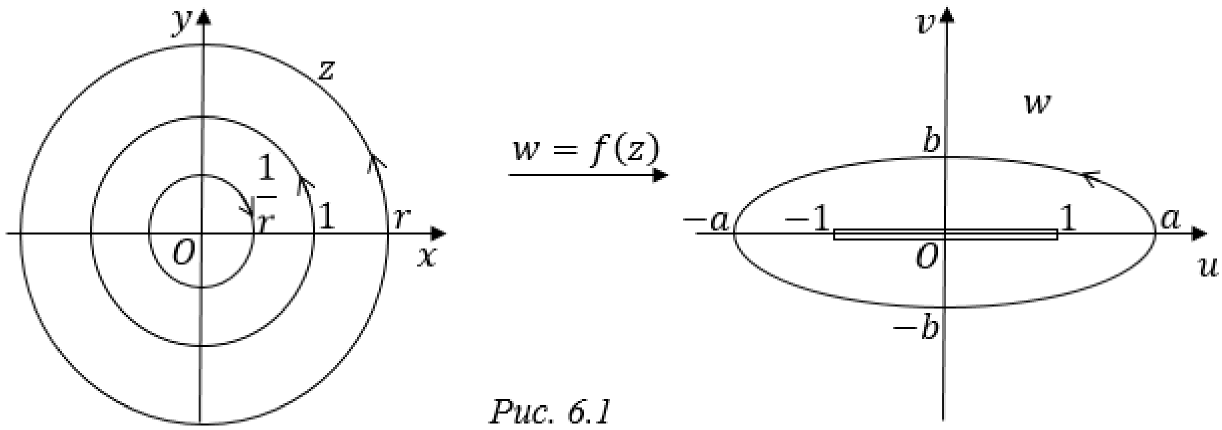

Рис. 6.1

Если $r = 1$, то уравнения (6.3) примут вид:

$$u = \cos\varphi\,, v = 0, 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (6.4)$$

Уравнения (6.4) описывают отрезок действительной оси $[-1; 1]$, проходимый дважды.

2) Параметрическое уравнение луча $\arg\, z = \alpha$ на комплексной плоскости z представляется в виде:

$$z = \rho e^{i\alpha},\;\; 0 < \rho < +\infty, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$w = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\alpha} + \frac{1}{\rho e^{i\alpha}}\right) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\alpha + \frac{i}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha,$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\alpha\,, v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\alpha\,, 0 < \rho < +\infty, \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (6.5)$$

Из уравнений (6.5) следует:

$$\frac{4u^2}{\cos^2\alpha} = \rho^2 + 2 + \frac{1}{\rho^2}, \qquad \frac{4v^2}{\sin^2\alpha} = \rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} \Rightarrow$$

$$\frac{u^2}{cos^2\,\alpha} - \frac{v^2}{sin^2\,\alpha} = 1. \qquad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что при $\alpha \ne \pi k/2$ $(k \in \mathbb{Z})$ уравнения (6.5) задают одну из ветвей гиперболы. Фокусы этой гиперболы расположены в точках $(\pm 1; 0)$, а асимптоты совпадают с прямыми $v = \pm u\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 6.2). Гипербола пересекает вещественную ось в точках d и $-d$, где $d = \cos\alpha$.

Пусть $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда луч l_1, задаваемый на комплексной плоскости z уравнением $\arg z = \alpha$ с направлением обхода от начала координат, отобразится в правую ветвь гиперболы L_1 на комплексной плоскости w с указанным на рис. 6.2 направлением обхода. Луч $\arg z = -\alpha$ также перейдет при отображении функцией Жуковского в правую ветвь гиперболы L_1, но с противоположным направлением обхода. На рис. 6.2 луч l_1' обходится по направлению к началу координат. При таком выборе направления обхода он отобразится в правую ветвь гиперболы L_1 с указанной на рис. 6.2 ориентацией.

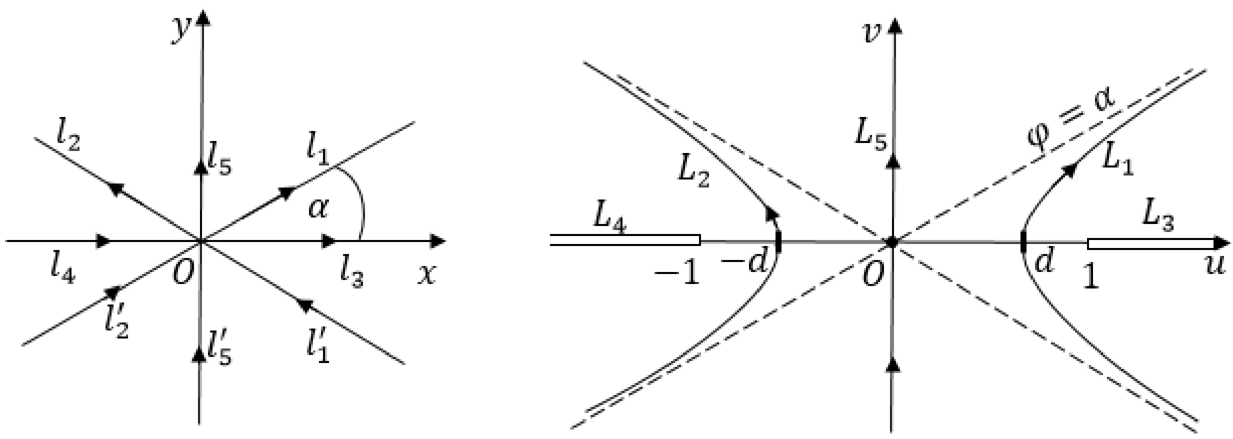

Рис. 6.2

Далее, лучи l_2 и l_2' отобразятся в левую ветвь гиперболы L_2 с указанным на рисунке 6.2 направлением обхода. Параметрические уравнения лучей l_2 и l_2' имеют вид:

$$l_2: z = \rho e^{i(\pi-\alpha)}, 0 < \rho < +\infty;\ l_2': z = \rho e^{-i(\pi-\alpha)}, +\infty > \rho > 0.$$

Если $\alpha = 0$, то уравнения (6.5) запишутся в виде:

$$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), v = 0, 0 < \rho < +\infty. \tag{6.7}$$

Уравнения (6.7) задают на комплексной плоскости w луч $[1; +\infty)$, проходимый дважды. На рис. 6.2 этот луч обозначен буквой L_3. Следовательно, луч $l_3: z = \rho, 0 < \rho < +\infty$; отобразится в луч L_3.

Луч $l_4: z = \rho e^{i\pi}, +\infty > \rho > 0$, отобразится луч $(-\infty; -1]$, проходимый дважды, параметрические уравнения которого имеют вид:

$$L_4: u = -\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), v = 0, 0 < \rho < +\infty.$$

Лучи l_5 и l_5' отобразятся в мнимую ось L_5 на плоскости w (рис. 6.2).

Таким образом, функция Жуковского переводит окружности в эллипсы, а лучи в гиперболы. Фокусы всех эллипсов и гипербол расположены в точках $(\pm 1; 0)$, Любой такой эллипс пересекается с любой гиперболой под прямым углом.

Примеры отображений функцией Жуковского

Пример 1. Внутренность и внешность единичного круга при отображении $w = f(z)$, где $f(z)$ – функция Жуковского, переходят в комплексную плоскость с разрезом по отрезку, соединяющему точки -1 и 1 (рис. 6.3).

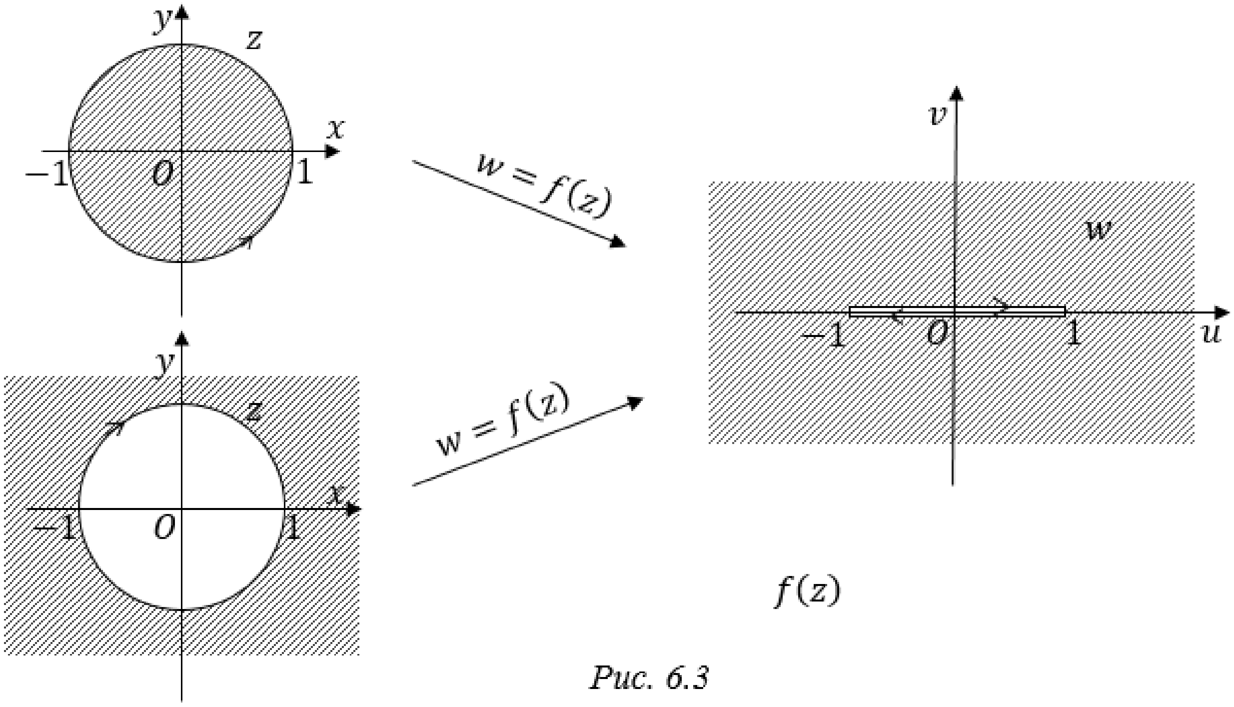

Рис. 6.3

Пример 2. Верхняя и нижняя полуплоскости при отображении $w = f(z)$, где $f(z)$ – функция Жуковского, переходят в комплексную плоскость с разрезом по лучам $(-\infty; -1]$, $[1; +\infty)$ действительной оси (рис. 6.4).

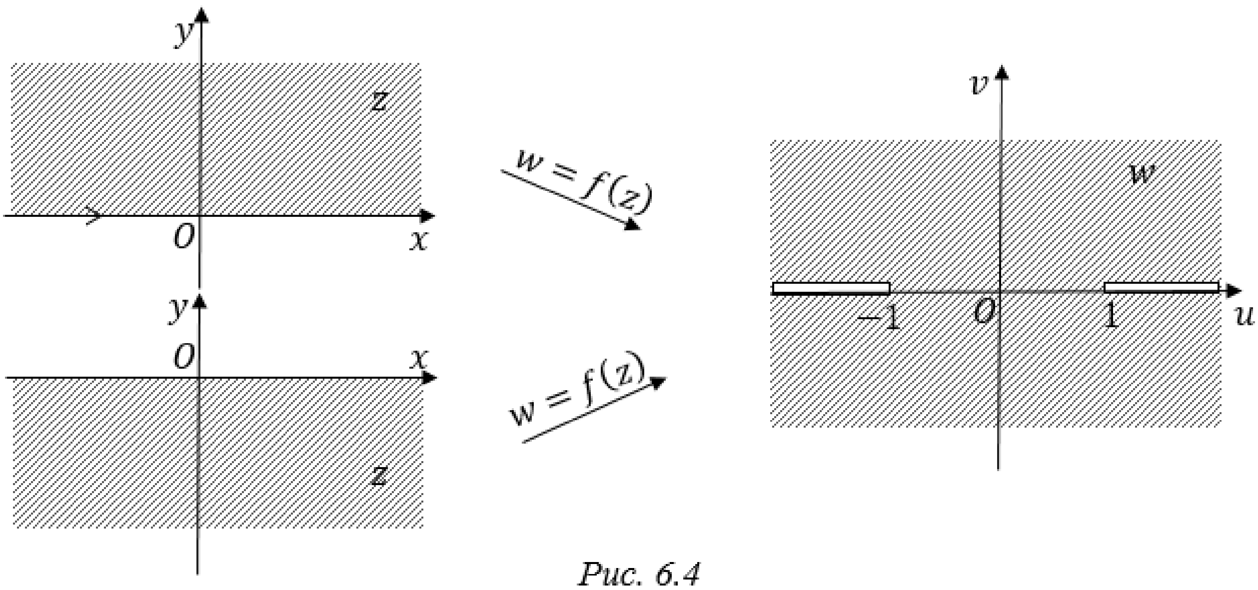

Рис. 6.4

Пример 3.

Области $D_1 = \{z: |z| > 1, \ \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, $D_2 = \{z: |z| < 1, \ \ \mathrm{Im}\, z < 0\}$ при отображении функцией Жуковского переходят в верхнюю полуплоскость (рис. 6.5).

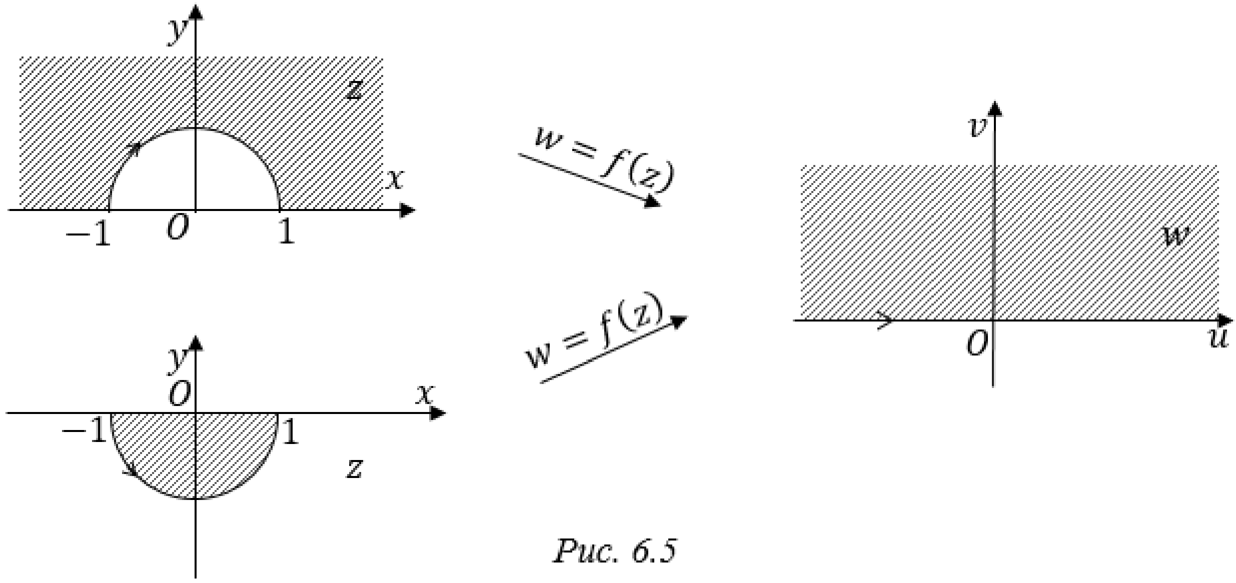

Рис. 6.5

6.2. Регулярные ветви многозначных функций

6.2.1. Функция $\boldsymbol{w = \sqrt{z}}$, обратная к функции $\boldsymbol{w = z^2}$

Пусть D_0 – комплексная плоскость z с разрезом по лучу $[0; +\infty)$. Тогда произвольную точку области D_0 можно представить в виде:

$$z = re^{i\varphi}, r > 0, 0 < \varphi < 2\pi.$$

В указанной области получим две функции, обратные к $w = z^2$:

$$w_1 = f_1(z) = \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2},$$

$$w_2 = f_2(z) = \sqrt{r} \cdot e^{i(\varphi+2\pi)/2} = -\sqrt{r} e^{i\varphi/2}.$$

Функция $f_1(z)$ отображает область D_0 на верхнюю полуплоскость, а функция $f_2(z)$ отображает область D_0 на нижнюю полуплоскость (рис. 6.6). Дифференцируемость функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в области D_0 можно установить с помощью условий Коши-Римана в полярных координатах.

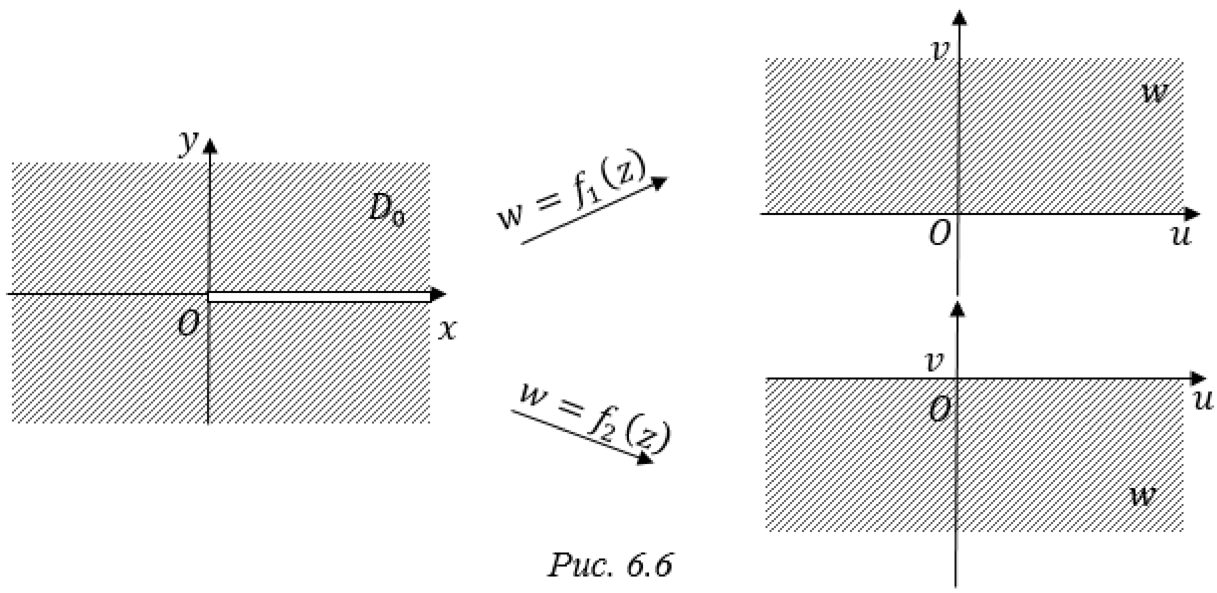

Рис. 6.6

Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ называются *регулярными ветвями* двузначной функции $w = \sqrt{z}$ в области D_0. Часто эти ветви обозначают $\sqrt{z}$. Для выделения регулярной ветви следует указать значение функции в какой-либо внутренней точке области D_0. Например, если $w(-1) = i$, то речь идет о функции $f_1(z)$, а если $w(-1) = -i$, то имеется ввиду функция $f_2(z)$.

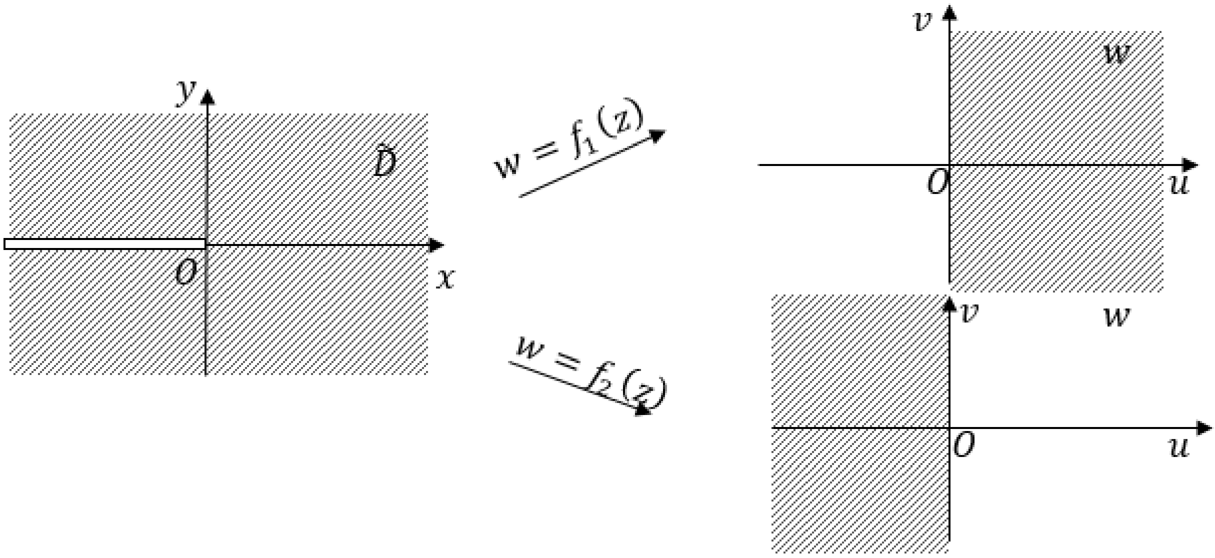

Рис. 6.7

Регулярные ветви функции $w = \sqrt{z}$ можно выделять в плоскости с разрезом по любому лучу $\arg z = \alpha$, соединяющему точки 0 и ∞. Рассмотрим, например, область $\tilde{D} = \{z: z = re^{i\varphi}, r > 0, -\pi < \varphi < \pi\}$, представляющую собой комплексную плоскость z с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси. Функция $f_1(z)$ отображает область $\tilde{D}$ на правую полуплоскость, а функция $f_2(z)$ отображает область $\tilde{D}$ на левую полуплоскость (рис. 6.7).

Задача. Найти конформное отображение, переводящее полуплоскость $Imz > 0$ с разрезом по отрезку $[0; hi], h > 0$, на верхнюю полуплоскость.

Решение: Решение задачи представлено на рис. 6.8.

Ответ: $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ $\left(\sqrt{-1} = i\right)$.

6.2.2. Функция, обратная к функции Жуковского

Решая уравнение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z, находим $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$, т.е. функция

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{6.8}$$

является обратной к функции Жуковского. Следовательно, отображения функцией (6.8) являются обратными к отображениям функцией Жуковского.

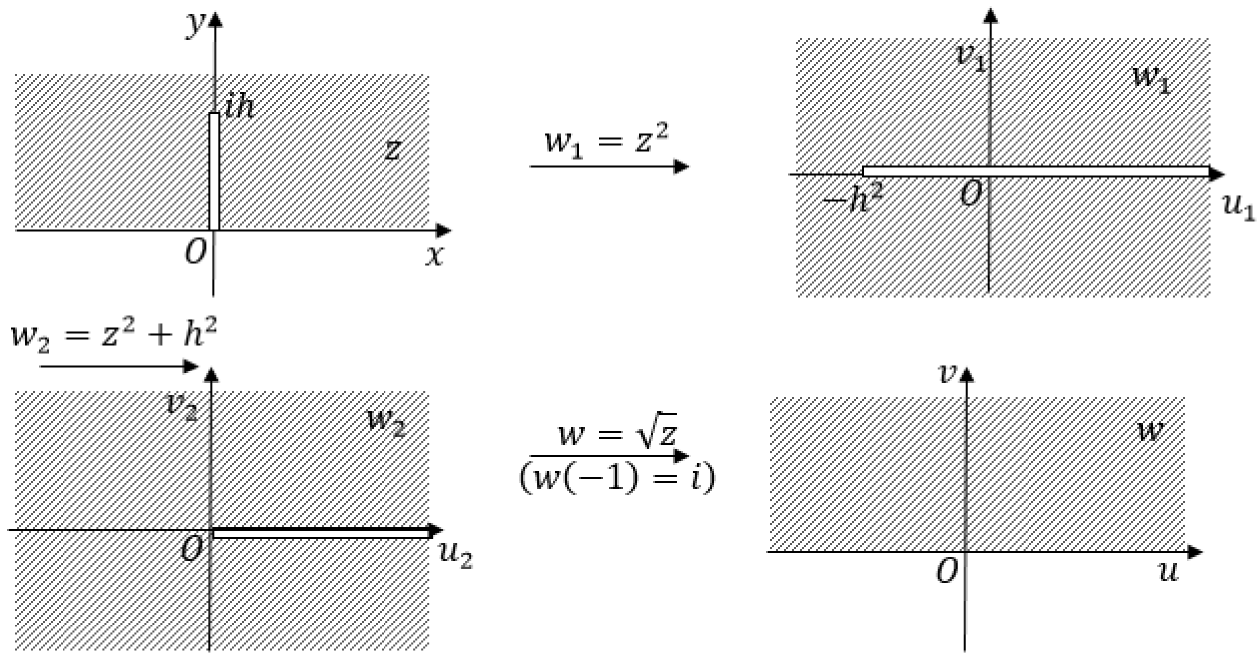

Рис. 6.8

Пусть D – комплексная плоскость z с разрезами по лучам $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$. В этой области функция (6.8) распадается на две регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(0) = i, f_2(0) = -i$. Из примера 2 вытекает, что функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$, а функция $w = f_2(z)$ конформно отображает область D на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ (рис. 6.9).

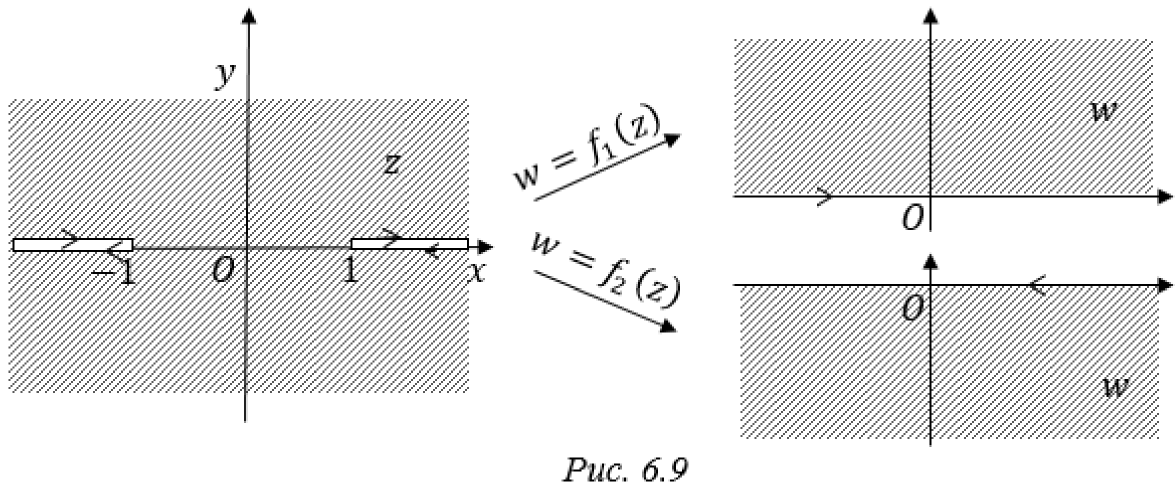

Рис. 6.9

В полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функция (6.8) распадается на регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$, где $f_1(0) = i, f_2(0) = -i$. Отображения этими функциями показаны на рис. 6.10 (см. пример 3).

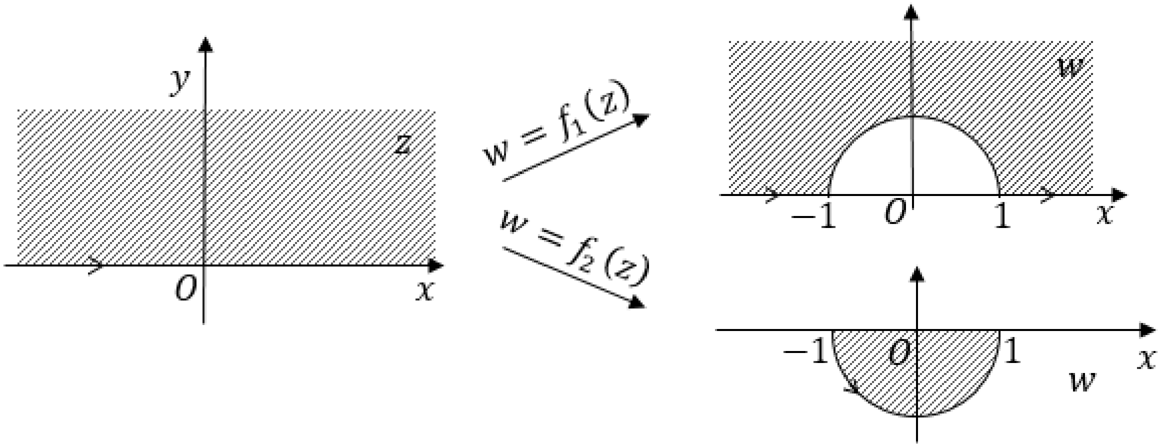

Рис. 6.10

6.2.3. Регулярные ветви логарифмической функции

Пусть D – комплексная плоскость z с разрезом по лучу $[0;+\infty)$ и $\varphi = \arg z$, $0 < \varphi < 2\pi$. Функция $w = \operatorname{Ln} z$ распадается в области D на бесконечное число регулярных ветвей

$$f_k(z) = \ln|z| + i\varphi + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При этом

$$e^{f_k(z)} = e^{\ln|z| + i\varphi + 2\pi k i} = |z|e^{i\varphi} = z,$$

т.е. $f_k(z)$ – функции, обратные к e^z. Эти функции однозначны, непрерывны и дифференцируемы в D и отображают область D соответственно на полосы

$$\Pi_k \colon 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi + 2\pi k.$$

ЛЕКЦИЯ № 7. ПРИНЦИП СИММЕТРИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПРОФИЛИ ЖУКОВСКОГО

7.1. Принцип симметрии

Пусть в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ задана односвязная область D_1, граница которой содержит интервал γ действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$. И пусть функция $w = f_1(z)$ конформно отображает область D_1 на область D_1^* в верхней полуплоскости w, причем интервал γ отображается в интервал γ^* на действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$ (рис. 7.1).

Тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \gamma \\ \overline{f_1(\bar{z})}, & z \in D_2 \end{cases}$$

конформно отображает область $D = D_1 \cup \gamma \cup D_2$ на область $D^* = D_1^* \cup \gamma^* \cup D_2^*$, где D_2 – область, симметричная области D_1 относительно действительной оси

$\operatorname{Im} z = 0$, а D_2^* – область, симметричная области D_2 относительно действительной оси $\operatorname{Im} w = 0$.

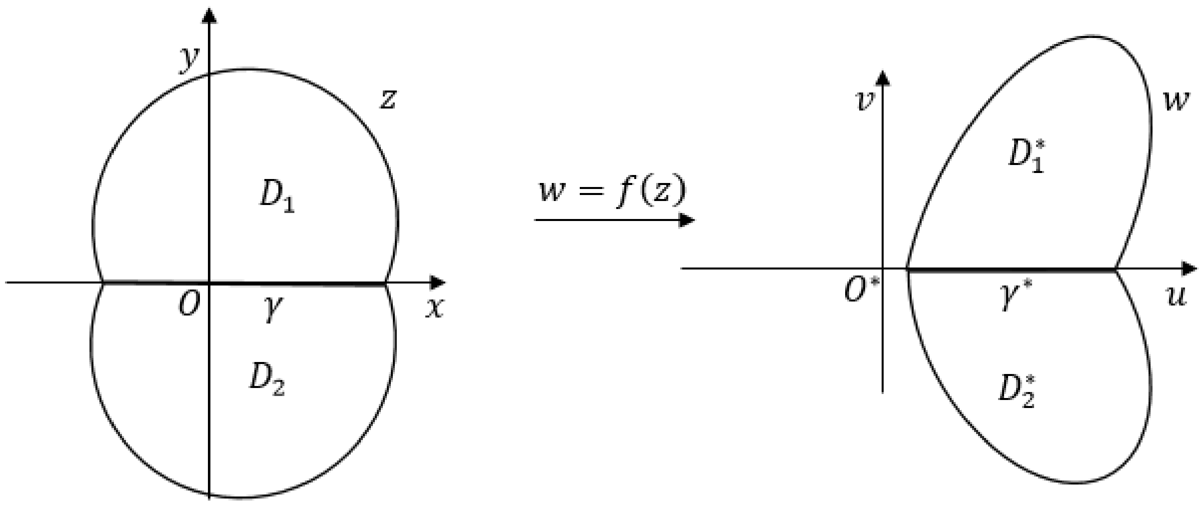

Рис. 7.1

Задача 1. Отобразить внешность креста D_0 на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$. Область D_0 представляет собой комплексную плоскость z, разрезанную по лучу $[-4; +\infty)$ вещественной оси и отрезку $[-3i; 3i]$ мнимой оси (рис. 7.2).

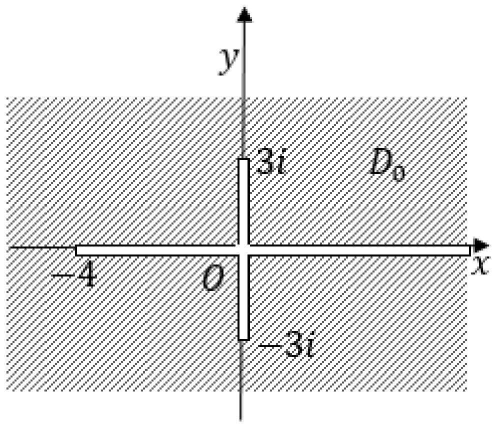

Рис. 7.2

Решение: На первый взгляд кажется, что естественно воспользоваться отображением $w = z^2$. Но это отображение не является конформным в области D_0, так как в этой области функция $w = z^2$ не является однолистной (например, $(4i)^2 = (-4i)^2 = -16$). Поэтому рассмотрим сначала «половинку» области D_0, расположенную в верхней полуплоскости, и будем отображать ее (рис. 7.3).

При отображении $w_1 = z^2$ отрезок $[0; 3i]$ мнимой оси перейдет в отрезок $[-9; 0]$ действительной оси, луч $[0; +\infty)$ перейдет сам в себя, а отрезок $[-4; 0]$ действительной оси перейдет в отрезок $[0; 16]$. Применяя отображение $w_2 =$

$\sqrt{w_1 + 9} = \sqrt{z^2 + 9}$, получим верхнюю полуплоскость, часть границы по лучу $[-5; +\infty)$ которой является верхним берегом разреза (рис. 7.3).

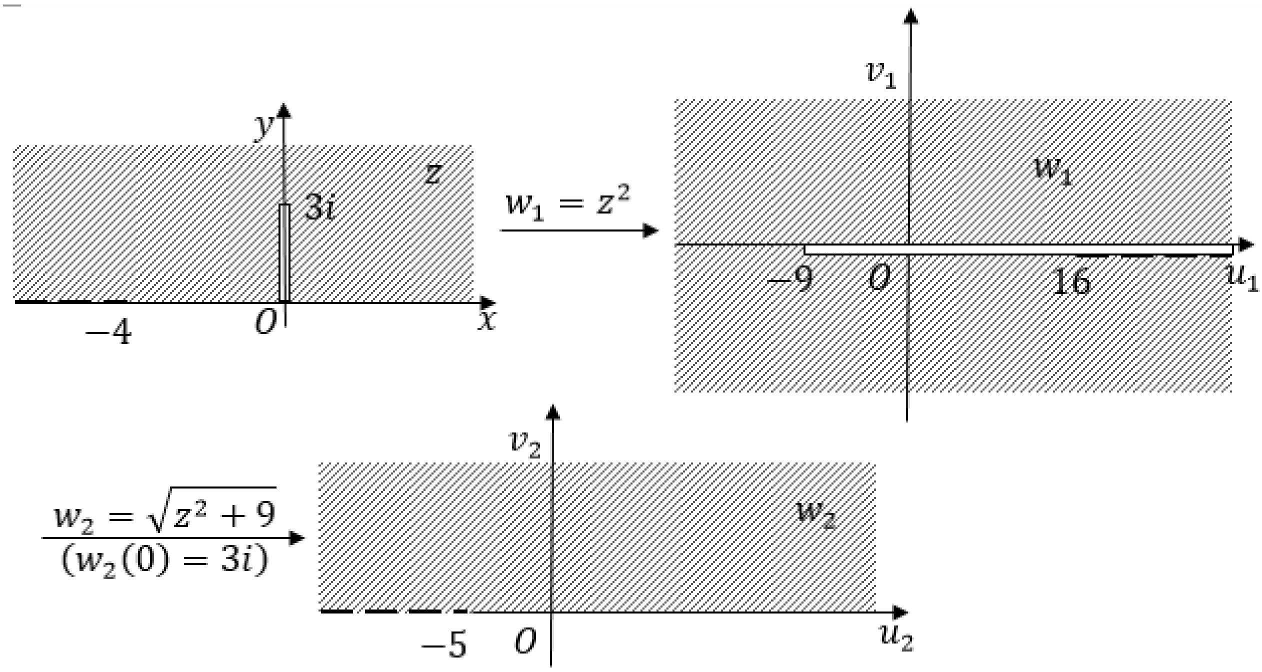

Рис. 7.3

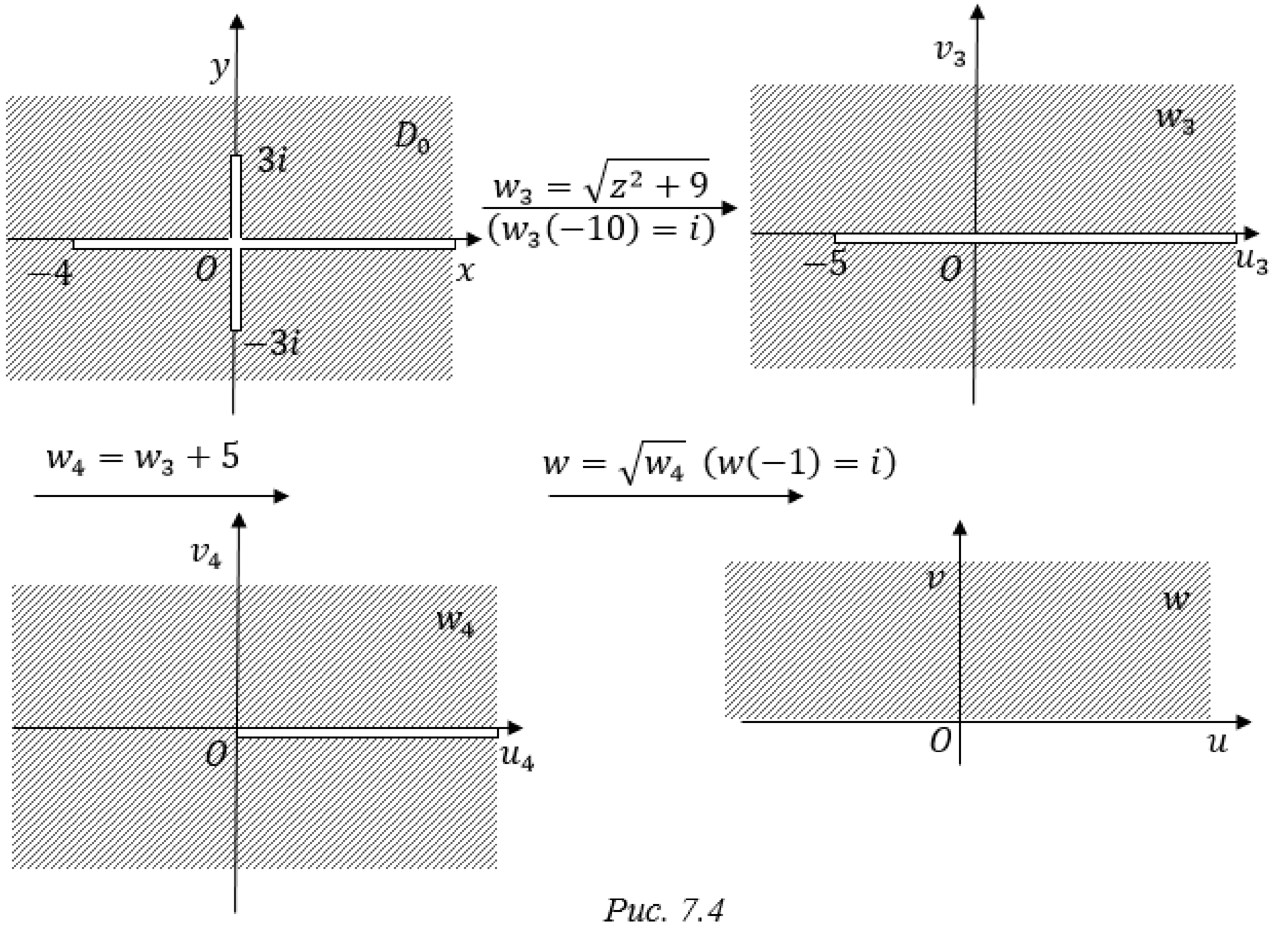

Рис. 7.4

Согласно принципу симметрии область D_0 при отображении $w_3 = \sqrt{z^2 + 9}$

перейдет в комплексную плоскость с разрезом по лучу $[-5;+\infty)$. Применяя далее последовательно отображения $w_4 = w_3 + 5$ и $w = \sqrt{w_4}, w(-1) = i$, получим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 7.4).

Задача 2. Отобразить внешность креста D_0 на внешность единичного круга $|w| > 1$. Область D_0 представляет собой комплексную плоскость z, разрезанную по отрезку $[-1;1]$ вещественной оси и отрезку $[-i;i]$ мнимой оси.

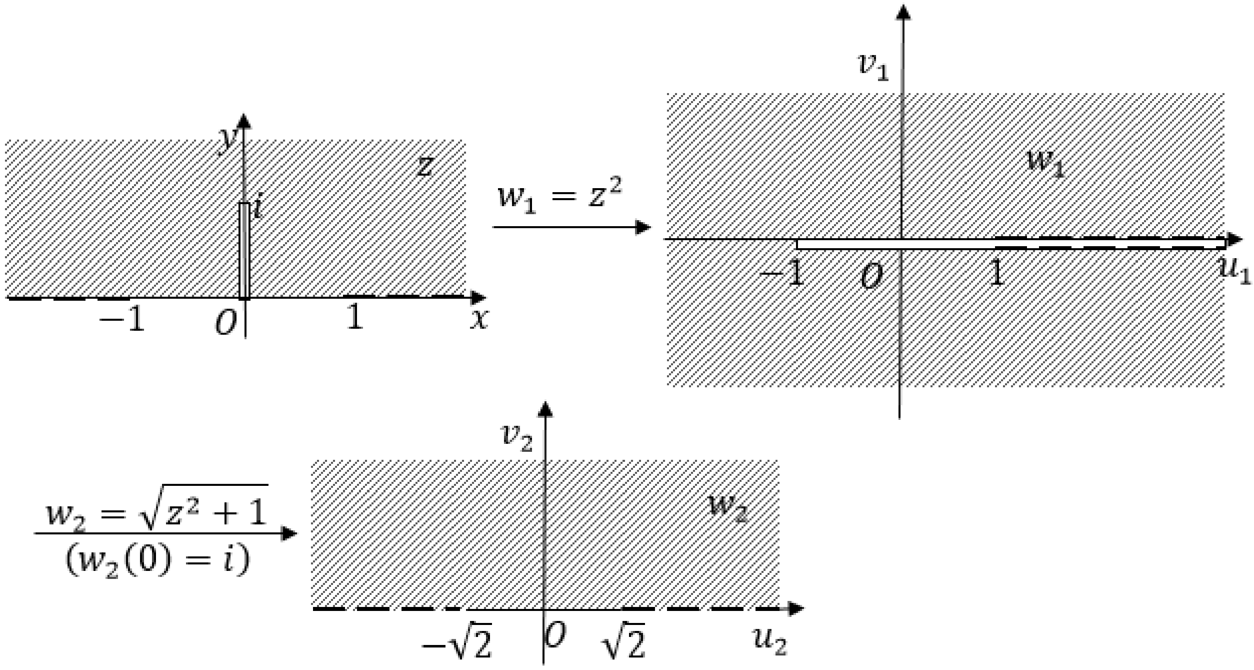

Рис. 7.5

Решение: Область D_0 симметрична относительно вещественной оси. Преобразуем часть области D_0, лежащую в верхней полуплоскости. Выполняя последовательно отображения $w_1 = z^2, w_2 = \sqrt{z^2+1}$ $(w_2(-1) = i)$, получим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w_2 > 0$, часть границы которой – отрезок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, является верхним берегом разреза (рис. 7.5).

Согласно принципу симметрии область D_0 при отображении функцией $w_3 = \sqrt{z^2+1}$ $(w_3(-1) = i)$ перейдет в комплексную плоскость w_3 с разрезом по отрезку $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ вещественной оси. Сжимая далее в $\sqrt{2}$ раз и применяя функцию, обратную функции Жуковского, получим внешность единичного круга (рис. 7.6).

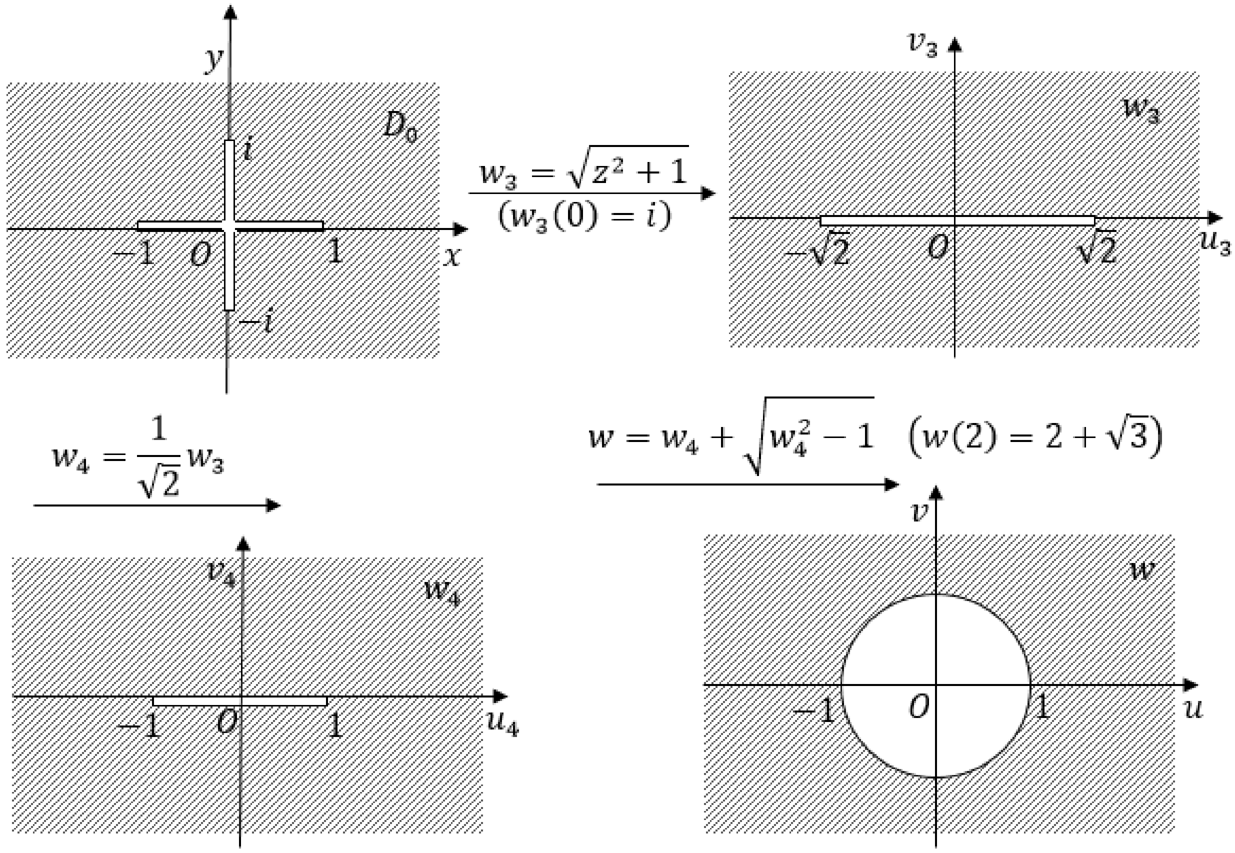

Рис. 7.6

Ответ: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2-1}\right)$.

7.2. Тригонометрические и гиперболические функции

Функцию $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ можно рассматривать как суперпозицию двух функций − показательной и функции Жуковского:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \zeta = e^z.$$

Функцию $\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ можно представить как суперпозицию отображений:

$$\zeta = iz, \qquad \eta = e^{\zeta}, \qquad w = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right).$$

Функцию $\sin z = \cos(z - \pi/2)$ можно представить как суперпозицию отображений:

$$\zeta = z - \frac{\pi}{2}, \qquad w = \cos\zeta.$$

Функцию $w = \operatorname{tg} z$ можно преобразовать следующим образом:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}.$$

Поэтому эта функция представляется в виде суперпозиции отображений:

$$\zeta = 2iz, \qquad \eta = e^{\zeta}, \qquad \xi = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}, \qquad w = -i\xi.$$

Задача 3. Найти образ D' области $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ при отображении $w = \operatorname{ch} z$.

Решение: Решение задачи представлено на рис. 7.7.

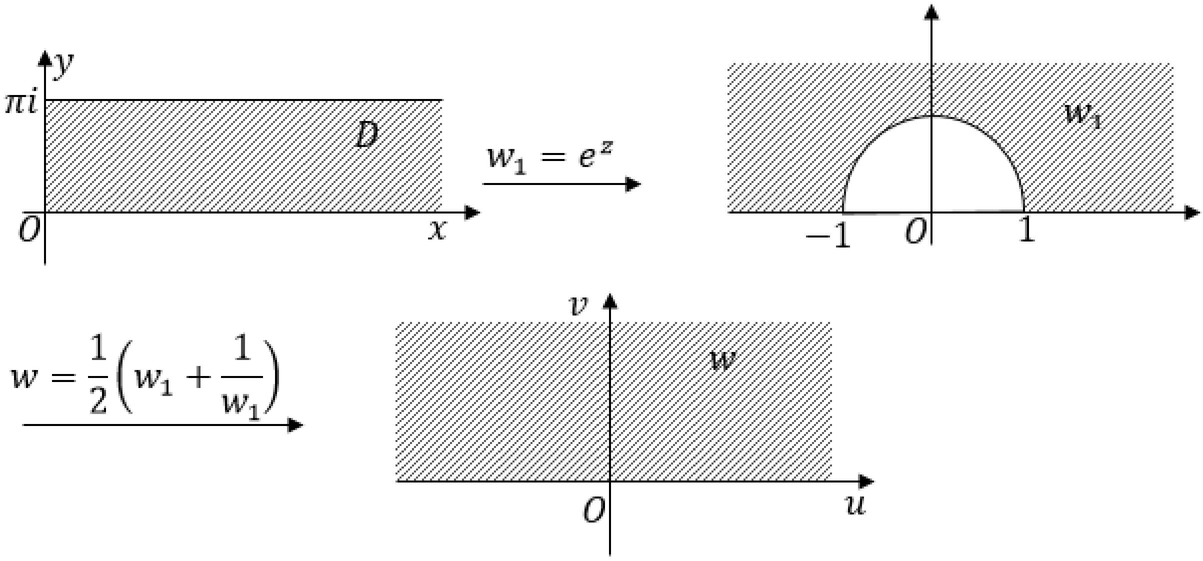

Рис. 7.7

Ответ: $D' = \{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Задача 4. Найти образ D' области $D = \{z\colon -\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4\}$ при отображении $w = \operatorname{tg} z$.

Решение: Функцию $w = \operatorname{tg} z$ можно представить в виде:

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}.$$

Применим последовательно отображения

$$w_1 = 2iz, \qquad w_2 = e^{w_1}, \qquad w = \frac{w_2 - 1}{i(w_2 + 1)}.$$

Цепочка указанных преобразований области D изображена на рис. 7.8.

Ответ: $D' = \{w\colon |w| < 1\}$.

7.3. Профили Жуковского

Задача 5. Найти образ окружности

$$|z + d| = 1 + d, d > 0 \tag{7.1}$$

при отображении функцией Жуковского

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{7.2}$$

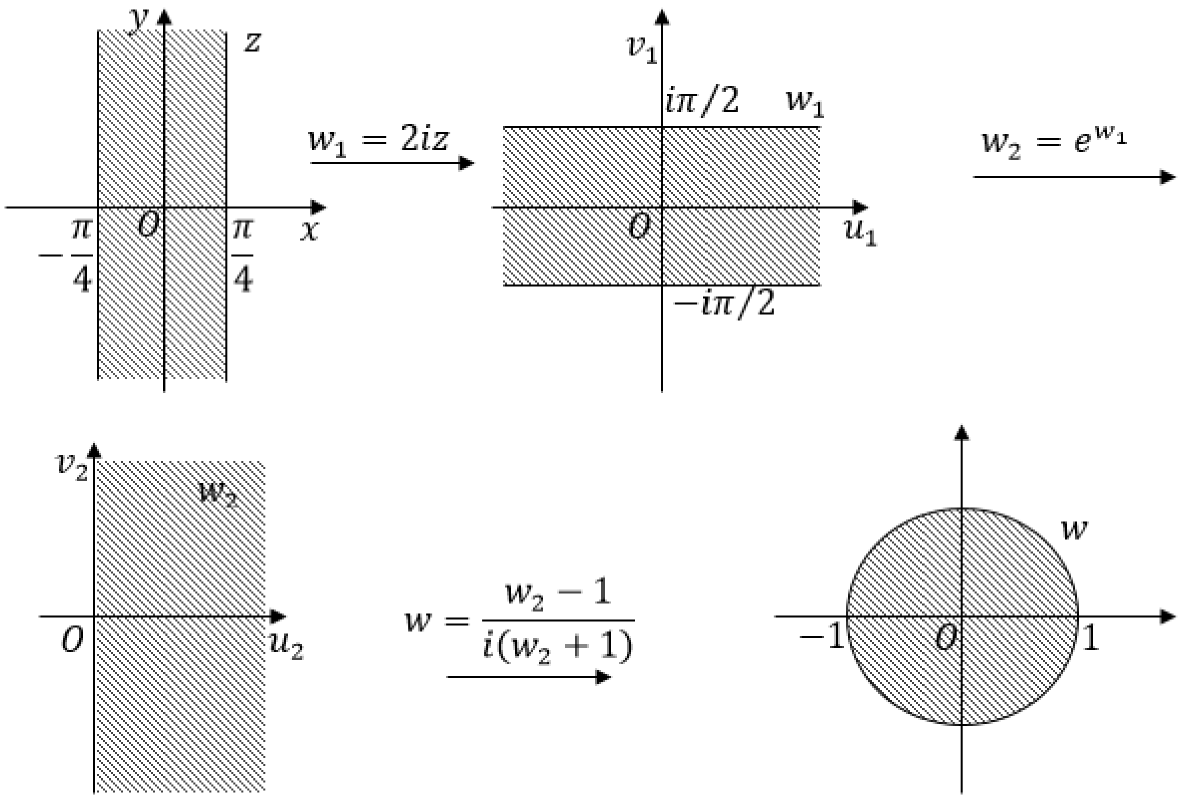

Рис. 7.8

Решение: Окружность (7.1) имеет одну общую точку $z = 1$ с окружностью $|z| = 1$, а остальные точки лежат во внешности этой окружности. Поэтому искомый образ будет лежать во внешности отрезка $[-1; 1]$ действительной оси и иметь с ним одну общую точку.

Положим $z = x + iy$ и выделим действительную и мнимую части функции (7.2):

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x + iy}\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right),$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \dfrac{x}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right), \\ v(x, y) = \dfrac{y}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right). \end{cases}$$

Уравнение окружности (7.1) можно записать в виде:

$$(x + d)^2 + y^2 = (1 + d)^2.$$

Откуда следует

$$y = \pm\sqrt{(1 + x + 2d)(1 - x)}, \quad x^2 + y^2 = 1 + 2d(1 - x).$$

Тогда параметрические уравнения кривой, являющейся образом окружности (7.1) при отображении функцией Жуковского запишутся в виде:

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{x\big(1+d(1-x)\big)}{1+2d(1-x)}, \\ v(x) = \pm\dfrac{d\sqrt{(1+2d+x)(1-x)^3}}{1+2d(1-x)}. \end{cases} \qquad (7.3)$$

Точка $z = 1$ перейдет в точку $w = 1$ при отображении (7.2). Полученный образ окружности является симметричным относительно прямой $\operatorname{Im} w = 0$. Он называется *рулем Жуковского* и принадлежит семейству *профилей Жуковского*.

Для функции Жуковского $f'(1) = 0$, то есть в точке $w = 1$ нарушается конформность отображения. Точка $w = 1$ является точкой возврата замкнутого контура, очерчивающего руль Жуковского. Это означает, что касательные в точке $w = 1$ к дугам этого контура, сходящимся в этой точке, горизонтальны. Уравнения (7.3) – это параметрические уравнения руля Жуковского (рис. 7.9).

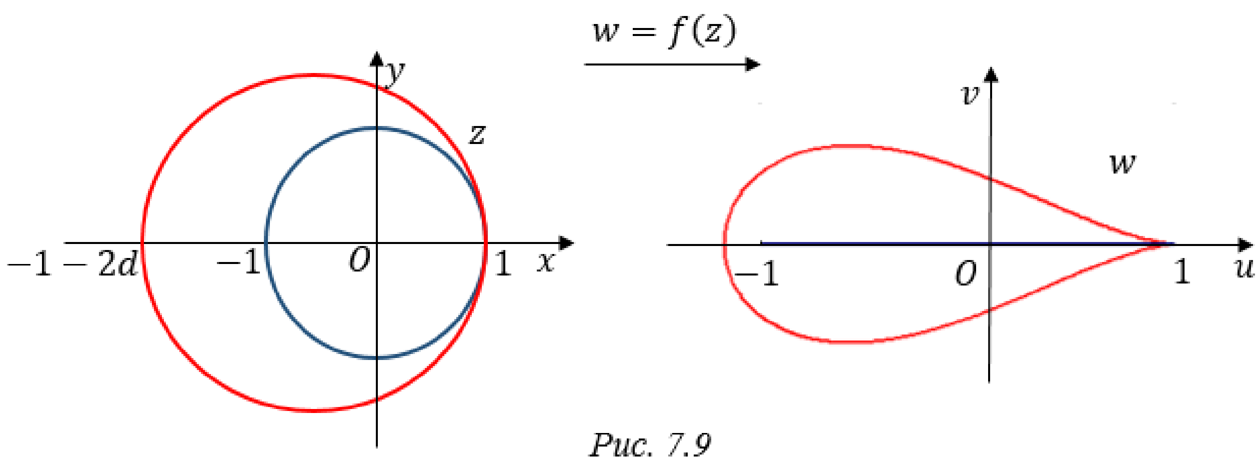

Рис. 7.9

•Переход из плоскости z в плоскость w при отображении функцией Жуковского (7.2) можно осуществить в три этапа. Выполним следующие преобразования:

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow\ w - 1 = \frac{(z-1)^2}{2z}, w + 1 = \frac{(z+1)^2}{2z} \Rightarrow$$

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \qquad (7.4)$$

Из равенства (7.4) следует, что функцию Жуковского можно представить как композицию трех функций:

$$w_1 = \frac{z-1}{z+1}, \qquad w_2 = w_1^2, \qquad w = w_3 = \frac{1+w_2}{1-w_2}. \qquad (7.5)$$

Последнее соотношение в (7.5) следует из равенства

$$\frac{w_3 - 1}{w_3 + 1} = w_2.$$

Задача 6. Используя представление (7.5) функции Жуковского, найти образ окружности l, проходящей через точки ± 1 так, что касательная к l в точке $z=1$ составляет с положительным направлением действительной оси $\operatorname{Im} z = 0$ угол $\alpha, 0<\alpha<\pi/2$.

Решение: При отображении $w_1 = \frac{z-1}{z+1}$ окружность l переходит в прямую, проходящую через точку $w_1 = 0$ и составляющую угол α с положительным направлением вещественной оси комплексной плоскости w_1 (рис. 7.10).

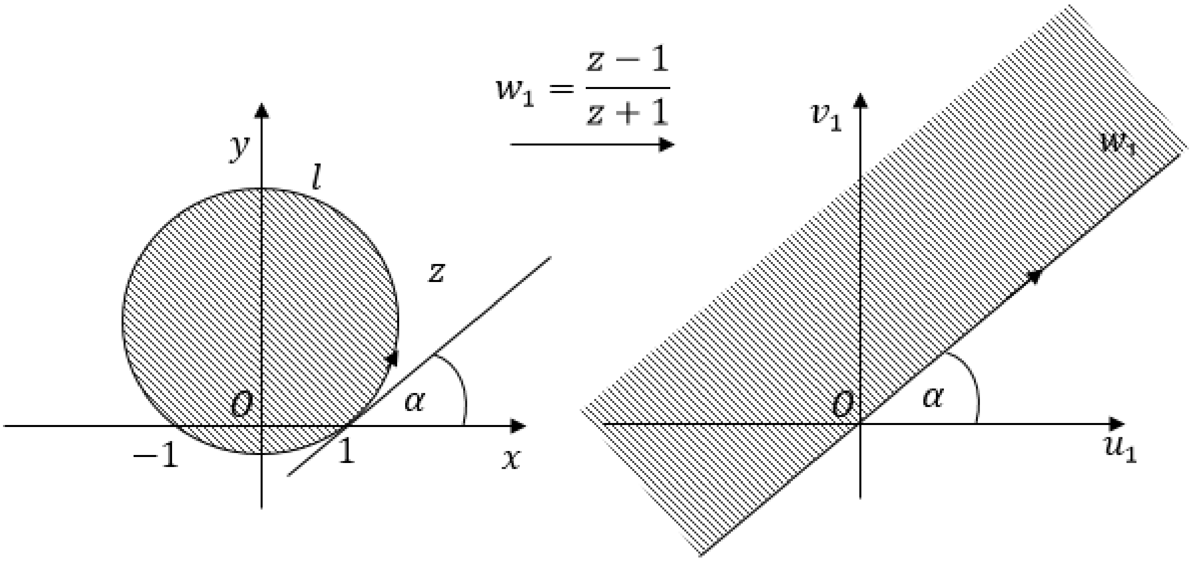

Рис. 7.10

Эта прямая при отображении $w_2 = w_1^2$ переходит в луч $\arg w_2 = 2\alpha$, проходимый дважды (рис. 7.11). При дробно-линейном отображении $w = \frac{1+w_2}{1-w_2}$ указанный луч отобразится в дугу окружности L с концами в точках $w = \pm 1$, при этом касательная к дуге окружности в точке $w=1$ образует угол 2α с положительным направлением вещественной оси (рис. 7.11).

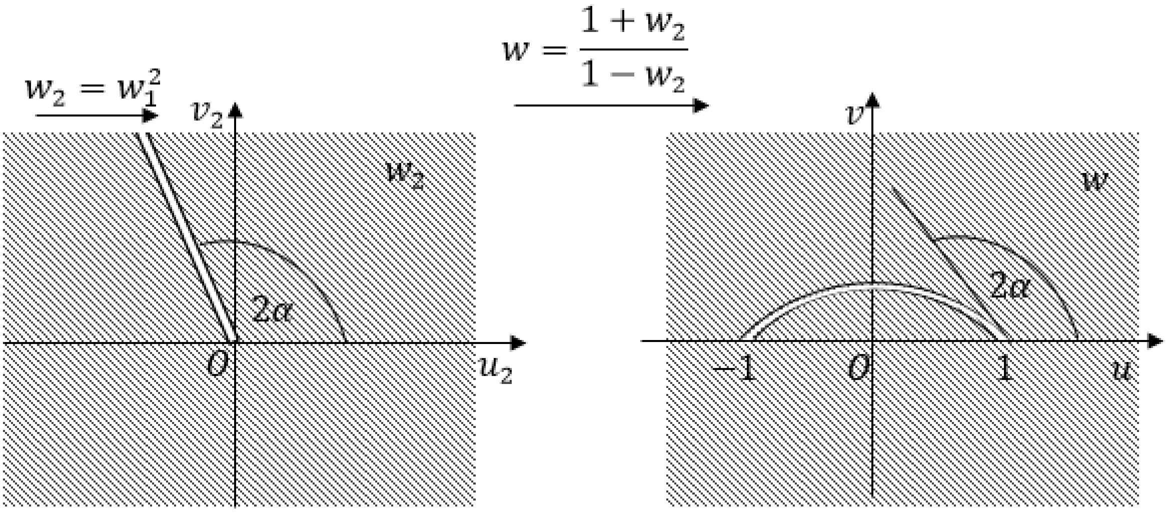

Рис. 7.11

Заметим, что при отображении функцией Жуковского окружность l', близкая к l и имеющая с l общую касательную в точке $z = 1$, перейдет в некоторый замкнутый контур L', охватывающий дугу L и имеющий с ней общую точку $w = 1$ (рис. 7.12).

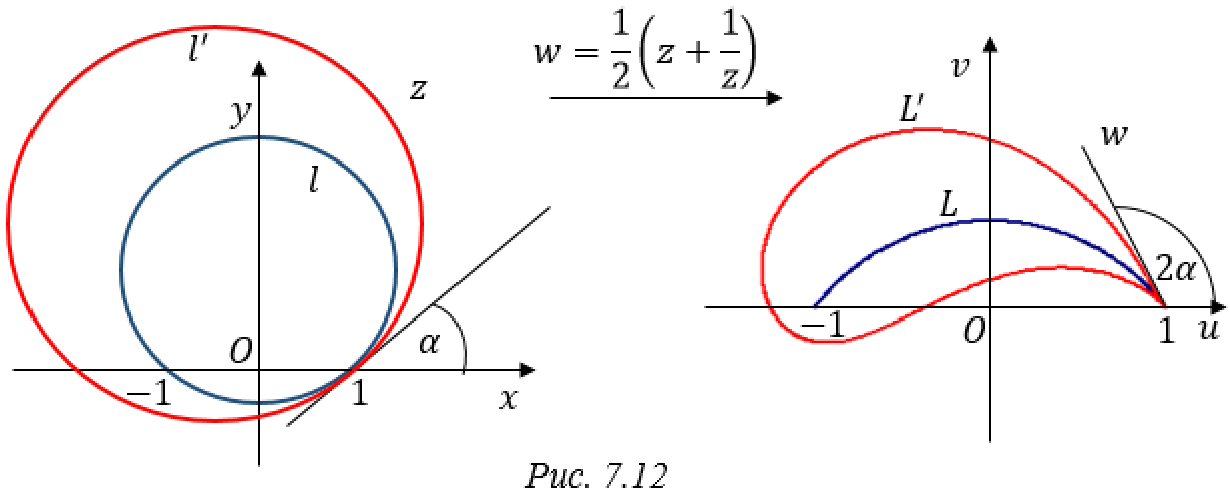

Рис. 7.12

Кривые вида L' называют *профилями Жуковского*. Они были использованы Н.Е. Жуковским для расчета подъемной силы крыла самолета.

ЛЕКЦИЯ № 8. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Определение интеграла от функции комплексной переменной

Определение. Рассмотрим на комплексной плоскости z кусочно-гладкую ориентированную кривую γ и предположим, что функция $f(z)$ определена на этой кривой. Разобьем кривую γ на n частичных дуг последовательными точками деления

$$a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b,$$

где a и b – концы кривой γ. На каждой из частичных дуг $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ выберем произвольную точку ζ_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{8.1}$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

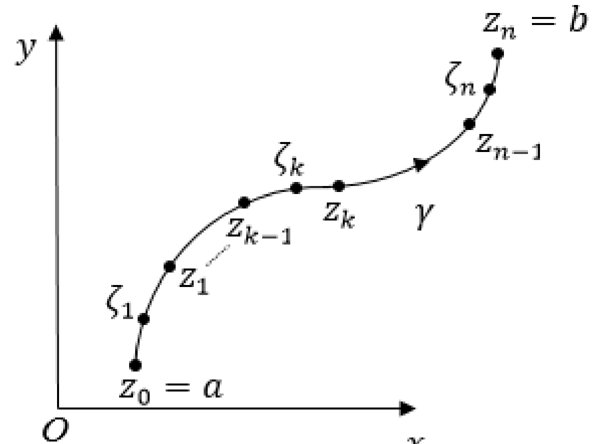

Рис. 8.1

не зависящий ни от способа разбиения кривой γ на частичные дуги, ни от выбора точек ζ_k на этих дугах, то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ и обозначается

$$\int_\gamma f(z)dz. \tag{8.2}$$

Таким образом,

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

▲

Положим $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_k = x_k + iy_k, \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k,$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, u_k = u(\xi_k,\eta_k), v_k = v(\xi_k,\eta_k).$

Тогда интегральную сумму можно записать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n} (u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k).$$

Действительная и мнимая части получившегося выражения – это интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода

$$\int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy \ \text{ и } \int_\gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

Таким образом, вопрос о существовании интеграла от функции комплексной переменной сводится к вопросу о существовании криволинейных интегралов от функций действительных переменных, а вычисление интеграла (8.2) сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода.

● Если γ – кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная на γ функция, то интеграл (8.2) существует и справедливо равенство

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\gamma} u(x,y)dy + v(x,y)dx. \quad (8.3)$$

● Если кривая γ задана параметрически уравнением

$$\gamma: z = z(t), t_0 \le t \le t_1,$$

то

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$

● Ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в некоторой точке z_0. При интегрировании ветви многозначной функции по замкнутому контуру начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции, т.е. точка z_0.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} (2\bar{z} + 1)dz, \qquad \gamma: z = x + ix^2, 0 \le x \le 1.$$

Решение: Так как

$$\bar{z} = x - ix^2, dz = (1 + 2ix)dx,$$

то

$$\int_{\gamma} (2\bar{z} + 1)dz = \int_0^1 (2x - 2ix^2 + 1)(1 + 2ix)dx =$$

$$= \int_0^1 \big(2x + 4x^3 + 1 + i(2x^2 + 2x)\big)dx = x^2 + x^4 + x + i\left(\frac{2x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 3 + \frac{5i}{3}.$$

Ответ: $3 + \frac{5i}{3}$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{\gamma} z^5 \operatorname{Ln} z dz, \qquad \gamma: |z| = 1, \qquad \operatorname{Ln}(-1) = \pi i.$$

Направление обхода контура γ считать заданным против часовой стрелки.

Решение: Кривая γ – это окружность единичного радиуса с центром в точке $z = 0$. Параметрическое уравнение этой кривой имеет вид:

$$\gamma: z = e^{it}, \qquad -\pi \le t \le \pi.$$

Начальное значение параметра t соответствует точке $z_0 = -1$, в которой задается ветвь многозначной функции. При этом $\arg z_0 = -\pi$.

Согласно определению

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k).$$

Так как $\operatorname{Ln} z_0 = \pi i$, то

$$\pi i = \ln|z_0| + i(-\pi + 2\pi k) \Leftrightarrow \pi i = i(-\pi + 2\pi k) \Rightarrow k = 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} e^{it} = i(t + 2\pi).$$

Далее

$$z^5 = e^{5it}, \qquad dz = ie^{it}dt,$$

$$\int_\gamma z^5 \operatorname{Ln} z dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{5it}\, i(t + 2\pi) i e^{it} dt = -\int_{-\pi}^{\pi} e^{6it}\,(t + 2\pi) dt =$$

$$= -(t + 2\pi)\frac{1}{6i}e^{6it}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{6i}e^{6it}dt = \frac{\pi i}{3} + \left[-\frac{e^{6it}}{36}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right] = \frac{\pi i}{3}.$$

Ответ: $\pi i/3$.

8.2. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной областей

***Теорема 1.* (*Теорема Коши для односвязной области*)**

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому контуру γ, лежащему в D, равен нулю, т.е.

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Доказательство: Докажем теорему при дополнительном предположении непрерывности $f'(z)$ (это упрощает доказательство). Согласно равенству (8.3)

$$\oint_\gamma f(z)dz = \oint_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_\gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

В силу аналитичности функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и непрерывности $f'(z)$ в односвязной области D функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области D. Следовательно, для криволинейных интегралов справедлива формула Грина:

$$\oint_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 0,$$

$$\oint_{\gamma} u(x,y)dy + v(x,y)dx = \iint_{G} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Здесь G – область, ограниченная контуром γ (рис. 8.2). Равенство нулю двойных интегралов следует из условий Коши-Римана. ■

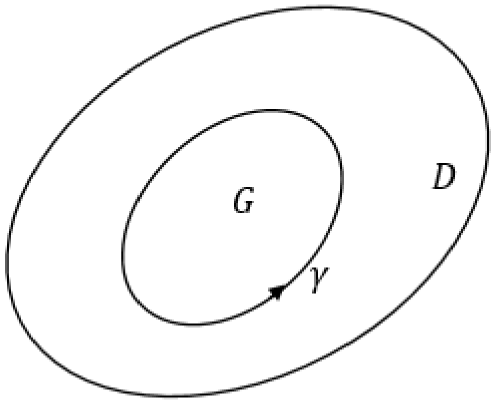

Рис. 8.2

Теорема Коши остается в силе и для случая, когда кривая γ является границей области D.

***Теорема 1а.* (*Теорема Коши для односвязной области*)**

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы, т.е. в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ (рис. 8.3). Тогда

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \blacksquare$$

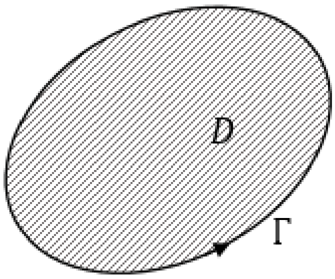

Рис. 8.3

***Теорема 2.* (*Теорема Коши для многосвязной области*)**

Пусть граница многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ_0 и попарно непересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, расположенных внутри Γ_0, и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы (рис. 8.4). Тогда

$$\oint\limits_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Gamma_k^-} f(z)dz = 0. \qquad (8.4)$$

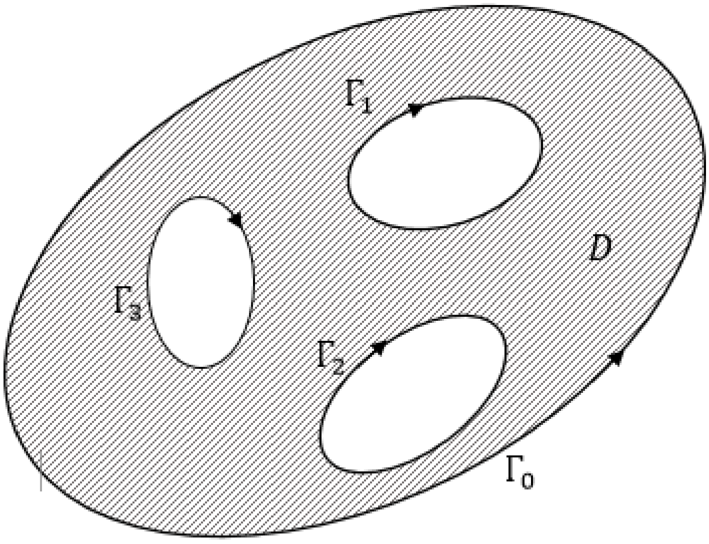

Рис. 8.4

Доказательство: Соединим кривую Γ_0 с кривыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ разрезами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ так, чтобы получившаяся область $\widetilde{D}$ была односвязной (рис. 8.5). Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ границу этой односвязной области. Согласно теореме 1a

$$\oint\limits_{\tilde{\Gamma}} f(z)dz = 0.$$

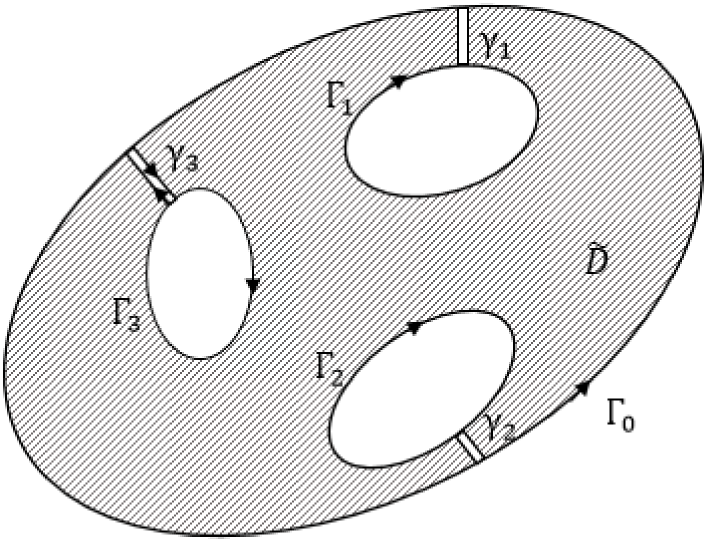

Рис. 8.5

Учитывая, что интегрирование по каждому разрезу $\gamma_k \; (k = 1, \dots, n)$ совершается два раза в противоположных направлениях и, следовательно,

$$\oint\limits_{\gamma_k^+} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0 \ (k = 1, \dots, n),$$

получаем равенство (8.4). ■

Следствие 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и пусть γ и γ_1 – простые замкнутые кривые (одна лежит внутри другой), образующие границу области $D_1 \subset D$ (рис. 8.6). Тогда

$$\oint\limits_{\gamma^+} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz . ■$$

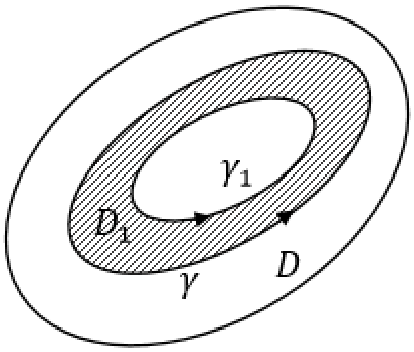

Рис. 8.6

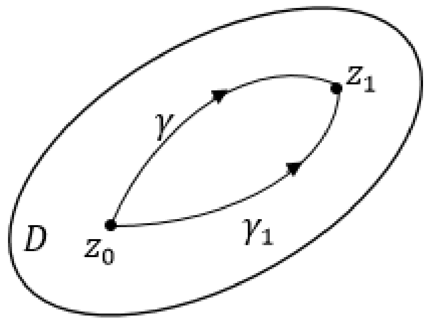

Рис. 8.7

Следствие 2. Если функция $f(z)$ аналитична в области D, то значение интеграла от функции $f(z)$, взятого вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в области D, не зависит от выбора кривой, а определяется положением начальной и конечной точек этой кривой:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz := \int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

Здесь z_0, z_1 – начальная и конечная точки кривых γ и γ_1 (рис. 8.7). ■

8.3. Первообразная аналитической функции. Формула Ньютона-Лейбница

Определение. Пусть функция $f(z)$ определена в области D, а функция $F(z)$ дифференцируема в этой области. Если $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$, то функция $F(z)$ называется *первообразной функции $f(z)$ в области D*. ▲

Теорема 3. (Теорема о первообразной аналитической функции)

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, точки z_0, z принадлежат области D. Тогда функция

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{8.5}$$

аналитична в области D и $F'(z) = f(z)$.

Доказательство: Пусть $z + h$ − точка области D, лежащая в достаточно малой окрестности точки $z \in D$. Рассмотрим отношение

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta.$$

В силу следствия 1 будем считать, что последний интеграл вычисляется вдоль прямолинейного отрезка, соединяющего точки z и $z + h$.

Заметим, что

$$f(z) = f(z) \cdot \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(z)d\zeta.$$

Тогда

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} \big(f(\zeta) - f(z)\big)d\zeta.$$

В силу непрерывности функции $f(\zeta)$ в точке z: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что $\forall\zeta$, удовлетворяющих условию $|\zeta - z| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon.$$

Пусть $|h| < \delta$. Тогда

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h} |f(\zeta) - f(z)||d\zeta|\right| < \varepsilon \cdot \frac{1}{|h|}\left|\int_{z}^{z+h} |d\zeta|\right| =$$

$$= \varepsilon \cdot \frac{1}{|h|} \cdot |h| = \varepsilon.$$

Откуда следует существование предела

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) \Leftrightarrow F'(z) = f(z). \blacksquare$$

●Покажем, что любая первообразная $\Phi(z)$ функции $f(z)$ выражается формулой

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C.$$

Действительно, рассмотрим функцию

$$w(z) = \Phi(z) - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta.$$

В силу теоремы 3 и определения первообразной

$$w'(z) = f(z) - f(z) = 0. \quad (8.6)$$

С другой стороны, $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (8.7)$$

Из (8.6), (8.7) следует:

$$u(x,y) = C_1, v(x,y) = C_2 \Rightarrow w(z) = C_1 + iC_2 = C.$$

Следствие теоремы 3 (формула Ньютона-Лейбница).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, точки z_0, z_1 принадлежат области D. Тогда

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \quad (8.8)$$

где $\Phi(z)$ – одна из первообразных функции $f(z)$ в области D.

Доказательство: Так как $\Phi(z)$ –первообразная функции $f(z)$, то

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C. \quad (8.9)$$

Положим в (8.9) $z = z_0$. Получим:

$$\Phi(z_0) = 0 + C \Rightarrow C = \Phi(z_0).$$

Полагая в (8.9) $z = z_1$, получим:

$$\Phi(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta + \Phi(z_0) \Rightarrow \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0). \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_{0}^{1+\pi i} e^z dz.$$

Решение:

$$\int_{0}^{1+\pi i} e^z dz = e^z\Big|_0^{1+\pi i} = e^{1+\pi i} - e^0 = -e - 1.$$

Ответ: $-e - 1$.

ЛЕКЦИЯ № 9. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ

9.1. Интегральная формула Коши

Пример 1. Вычислить интегралы:

$$a)\ \oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}, \quad б)\ \oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz, \ \ n \in \mathbb{Z}, n \neq -1,$$

$$\gamma: |z-z_0| = R.$$

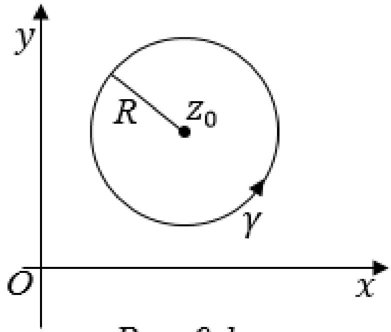

Рис. 9.1

Решение: $a)$ Функция $f(z) = 1/(z-z_0)$ не является аналитической в области D, ограниченной окружностью γ, следовательно теорему Коши применять нельзя. Вычислим интеграл непосредственно, используя параметрическое уравнение кривой γ (рис. 9.1):

$$\gamma: z = z_0 + Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, dz = Rie^{it}dt,$$

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

$$б) \oint_{\gamma} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} \left(Re^{it}\right)^n Rie^{it}dt = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt =$$

$$= \frac{R^{n+1} i e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{(n+1)}\left(e^{i(n+1)2\pi} - e^0\right) = 0.$$

Ответ:

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i, \qquad \oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz = 0, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1. \quad (9.1)$$

Теорема 1. (интегральная формула Коши)

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы (рис. 9.2). Тогда $\forall z_0 \in D$ имеет место равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{9.2}$$

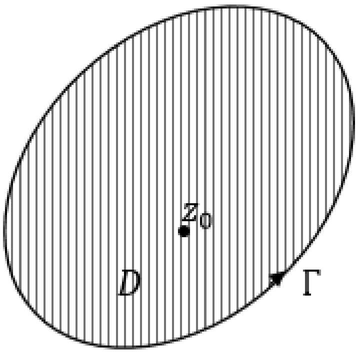

Рис. 9.2

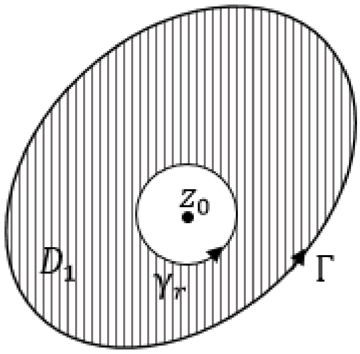

Рис. 9.3

Доказательство: Построим окружность γ_r: $|z - z_0| = r, \gamma_r \in D$ (рис. 9.3). Получим двусвязную область D_1, в которой аналитична функция

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma^+} g(z) dz = \oint_{\gamma_r^+} g(z) dz.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z_0)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Согласно (9.1)

$$\oint_{\gamma_r^+} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r^+} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \tag{9.3}$$

Заметим, что левая часть равенства (9.3) не зависит от r. Оценим правую часть (9.3):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r^+}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\left|\oint\limits_{\gamma_r^+}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz|\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\max_{z\in\gamma_r}|f(z)-f(z_0)|\cdot\frac{1}{r}\oint\limits_{\gamma_r^+}|dz| = \max_{z\in\gamma_r}|f(z)-f(z_0)| \to 0 \text{ при } r \to 0,$$

так как функция $f(z)$ аналитична в области D, а, следовательно, непрерывна.

Переходя к пределу при $r \to 0$ в (9.3), получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = 0.$$

Откуда и следует равенство (9.2). ■

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4},$$

если $a)$ $\gamma\colon |z| = 1,$ б) $\gamma\colon |z-i| = 2.$

Решение: $a)$ Функция $f(z) = 1/(z^2+4)$ аналитична внутри контура γ и на его границе (рис. 9.4а). По теореме Коши для односвязной области

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^2+4} = 0.$$

б) В точке $z = 2i$, расположенной внутри контура γ нарушается аналитичность функции $f(z) = 1/(z^2+4)$ (рис. 9.4б).

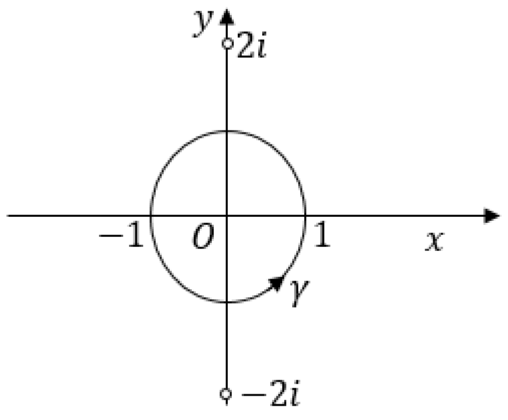

Рис. 9.4а

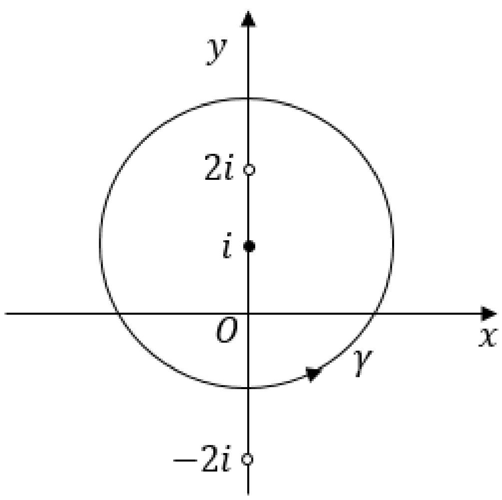

Рис. 9.4б

Рассмотрим функцию $f_1(z) = 1/(z+2i)$, аналитичную внутри контура γ. Функцию $f(z)$ представим в виде:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{z - 2i}.$$

Согласно теореме 1

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 4} = \oint_{\gamma} \frac{f_1(z)}{z - 2i} dz = f_1(2i) \cdot 2\pi i = \frac{1}{4i} \cdot 2\pi i = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: a) 0; б) $\pi/2$.

9.2. Существование производных любого порядка у аналитической функции

Теорема 2. (интегральная формула Коши для производных)

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы (рис. 9.2). Тогда функция $f(z)$ имеет производные любого порядка в области D и $\forall z_0 \in D$ имеет место равенство

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{9.4}$$

Доказательство: Для доказательства теоремы воспользуемся методом математической индукции. Покажем, что формула (9.4) верна для $n = 1$. Согласно определению производной функции $f(z)$ в точке z_0

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Используя теорему 1, выполним преобразования:

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \left[\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz - \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)[z - z_0 - z + z_0 + h]}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz.$$

Откуда следует:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \tag{9.5}$$

Итак, для $n = 1$ формула (9.4) доказана. Пусть теперь формула (9.4) верна при $n = k$, т.е.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz. \tag{9.6}$$

Покажем, что она будет верна при $n = k + 1$. Используя определение производной порядка $k + 1$ и формулу (9.6), получим:

$$f^{(k+1)}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(k)}(z_0 + h) - f^{(k)}(z_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{k!}{2\pi i} \left[\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^{k+1}} dz - \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)[(z - z_0)^{k+1} - (z - z_0 - h)^{k+1}]}{(z - z_0 - h)^{k+1}(z - z_0)^{k+1}} dz =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z) h \sum_{j=0}^{k} (z - z_0)^{k-j} (z - z_0 - h)^j}{(z - z_0 - h)^{k+1}(z - z_0)^{k+1}} dz =$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)(k + 1)(z - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{(k + 1)!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz.$$

Таким образом, показано, что при $n = k + 1$ формула (9.4) верна. В приведенной цепочке равенств было использовано алгебраическое тождество:

$a^{k+1} - b^{k+1} = (a - b)(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \dots + ab^{k-1} + b^k)$. ■

● На основании теорем 1,2 можно сделать следующий вывод. Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то $\forall z_0 \in D$ имеют место равенства:

$$\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0), \tag{9.7}$$

$$\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), n \in \mathbb{N}. \tag{9.8}$$

Пример 3. Вычислить интеграл (направление обхода по контуру интегрирования считать положительным):

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z(1 - z)^3} dz.$$

Решение: Аналитичность подынтегральной функции нарушается в точках $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, расположенных внутри контура интегрирования $\Gamma: |z| = 2$. Построим внутри Γ окружности γ_1, γ_2 с центрами в точках z_1, z_2 соответственно так, чтобы они не пересекались (рис. 9.5). Получим многосвязную область, в которой функция

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$$

аналитична и непрерывна вплоть до ее границы. Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz. \qquad (9.9)$$

Для вычисления интеграла по контуру γ_1 функцию $f(z)$ представим в виде:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{z}, f_1(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}.$$

А для вычисления интеграла по контуру γ_2 положим

$$f(z) = -\frac{f_2(z)}{(z-1)^3}, \qquad f_2(z) = \frac{e^z}{z}.$$

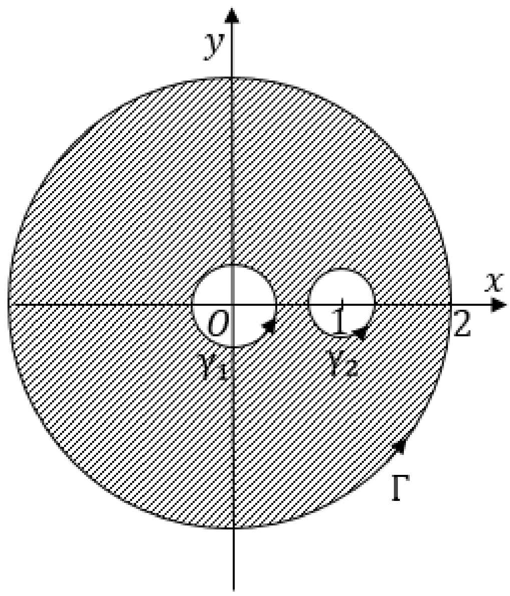

Рис. 9.5

Функции $f_1(z), f_2(z)$ аналитичны внутри контуров γ_1, γ_2 соответственно и на самих контурах. Согласно теоремам 1,2 и вытекающим из них формулам (9.7), (9.8), получим:

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{f_1(z)}{z}dz - \oint_{\gamma_2^+} \frac{f_2(z)}{(z-1)^3}dz =$$

$$= 2\pi i f_1(0) - \frac{2\pi i}{2!} f_2''(1).$$

Далее,

$$f_1(0) = 1,$$

$$f_2'(z) = \frac{e^z z - e^z}{z^2} = \frac{e^z(z-1)}{z^2},$$

$$f_2''(z) = \frac{[e^z(z-1)+e^z]z^2 - 2z(z-1)e^z}{z^4},$$

$$f_2''(1) = e.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i - \frac{2\pi i}{2!}e = \pi i(2-e).$$

Ответ: $\pi i(2-e)$.

9.3. Степенные ряды. Теорема Абеля

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{9.10}$$

где z – независимая переменная, c_n $(n = 0,1,2,\ldots.)$ – заданные комплексные числа, z_0 – фиксированное комплексное число. Числа c_n $(n = 0,1,2,\ldots.)$ называются *коэффициентами степенного ряда*. ▲

***Теорема 3.* (*Теорема Абеля*)**

Пусть степенной ряд (9.10) сходится в точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд сходится абсолютно в круге $K\colon |z-z_0| < |z_1-z_0| = R$, а в любом «меньшем» круге $K_1\colon |z-z_0| \le r < R$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно (рис. 9.6).

Если степенной ряд (9.10) расходится в точке z_1, то он расходится во всех точках z, удовлетворяющих неравенству: $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.

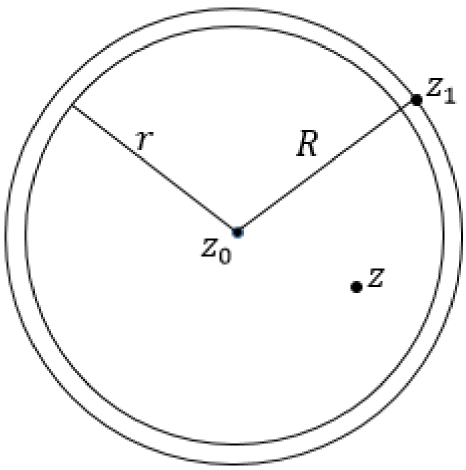

Рис. 9.6

Доказательство: Пусть ряд (9.10) сходится в точке $z_1 \neq z_0$, т.е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n.$$

В силу необходимого признака сходимости числового ряда

$$\lim_{n\to\infty} c_n (z_1 - z_0)^n = 0.$$

Следовательно, последовательность $\{c_n (z_1 - z_0)^n\}$ ограничена, т.е.

$$\exists M > 0: |c_n (z_1 - z_0)^n| \le M, n = 0,1,2,\ldots$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - z_0)^n|$, где $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, и оценим его общий член. Имеем:

$$|c_n (z - z_0)^n| = \left| c_n (z_1 - z_0)^n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| = |c_n R^n| \left| \frac{(z - z_0)^n}{R^n} \right| \le M q^n,$$

$$q = \left| \frac{z - z_0}{R} \right| < 1.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q $(0 \le q < 1)$. Тогда по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - z_0)^n|$ при $|z - z_0| < R$. Следовательно, ряд (9.10) сходится абсолютно.

Пусть $0 < r < R$. Тогда $\forall z$: $|z - z_0| \le r$ и $\forall n = 0,1,2,\ldots$

$$|c_n (z - z_0)^n| \le |c_n r^n|.$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ сходится, то ряд (9.10) сходится абсолютно и равномерно в круге K_1: $|z - z_0| \le r < R$ по признаку Вейерштрасса.

Пусть ряд (9.10) расходится в точке z_1. Тогда по доказанному во всех точках z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$, ряд (9.10) расходится. Так как если $\exists \tilde{z}$: $|\tilde{z} - z_0| > |z_1 - z_0|$ и в точке $\tilde{z}$ ряд (9.10) сходится, то он должен сходиться в точке z_1. ■

Определение. Пусть $R > 0$ таково, что $\forall z$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < R$, ряд (9.10) сходится абсолютно, а в точках $|z - z_0| > R$ ряд (9.10) расходится. Тогда число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда (9.10), а круг $|z - z_0| < R$ – *кругом сходимости* этого ряда.

Если ряд (9.10) сходится только при $z = z_0$, то полагают $R = 0$.

Если ряд (9.10) сходится $\forall z$, то полагают $R = \infty$. ▲

Для радиуса сходимости степенного ряда (9.10) справедлива ***формула Коши-Адамара:***

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (9.11)$$

Замечание. На границе круга сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Степенной ряд может сходиться в одних точках границы $|z - z_0| = R$ и расходиться в других. Если ряд расходится в одной из точек окружности $|z - z_0| = R$, то в других точках этой окружности сходимость может быть только условной.

Пример. Найти радиус и круг сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}. \tag{9.12}$$

Исследовать поведение ряда на границе круга сходимости.

Решение: В данной задаче

$$c_n = \frac{1}{n}, \qquad z_0 = 0.$$

Используя формулу (9.11), получим $R = 1$. Круг сходимости: $|z| < 1$. На границе круга $z = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$, и ряд (9.12) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt + i \sin nt}{n}. \tag{9.13}$$

Исследуем по отдельности ряды, являющиеся действительной и мнимой частью ряда (9.13):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n}, \tag{9.14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}. \tag{9.15}$$

Последовательность $a_n = 1/n$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Оценим частичные суммы

$$A_n = \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt,$$
$$B_n = \sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt.$$

Имеем:

$$A_n = \frac{2\sin(t/2)}{2\sin(t/2)}(\cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt) =$$

$$= \frac{1}{2\sin(t/2)}[\sin(-t/2) + \sin(3t/2) + \sin(-3t/2) + \sin(5t/2) + \dots +$$

$$+ \sin\left(\frac{1}{2} - n\right)t + \sin\left(\frac{1}{2} + n\right)t\Big] = \frac{\sin\left(\frac{1}{2} + n\right)t - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin(t/2)}, t \ne 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$B_n = \frac{2\sin(t/2)}{2\sin(t/2)}(\sin t + \sin 2t + \dots + \sin nt) =$$

$$= \frac{1}{2sin(t/2)}[cos(t/2) - cos(3\,t/2) + cos(3\,t/2) - cos(5\,t/2) + \dots +$$

$$+ cos\left(\frac{1}{2} - n\right)t - cos\left(\frac{1}{2} + n\right)t\right] = \frac{cos\left(\frac{t}{2}\right) - cos\left(\frac{1}{2} + n\right)t}{2sin(t/2)}, t \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

Откуда получаем оценки:

$$|A_n| \leq \frac{1}{|sin(t/2)|}, |B_n| \leq \frac{1}{|sin(t/2)|}, t \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно признаку Дирихле при $t \neq 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ ряды (9.14) и (9.15) сходятся. Следовательно, сходится ряд (9.13). Если $t = 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, то ряд (9.14) является гармоническим расходящимся рядом, а ряд (9.15) сходится, так как все его члены равны нулю. В этом случае ряд (9.13) расходится.

Ответ: круг сходимости: $|z| < 1$; в точке $z = 1$ ряд расходится, в остальных точках границы $|z| = 1$ ряд сходится условно.

ЛЕКЦИЯ № 10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

10.1. Ряд Тейлора

Теорема 1. (разложение аналитической в круге функции в степенной ряд) Всякая аналитическая в круге $K\colon |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ единственным образом может быть разложена в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{10.1}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулами:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \tag{10.2}$$

где $\gamma_r\colon |z - z_0| = r < R$.

Доказательство: Возьмем произвольную точку $z \in K$ и проведем окружность γ_r с центром в точке z_0 и радиусом r так, чтобы точка z оказалась внутри круга $K_1\colon |z - z_0| < r$ (рис. 10.1). Так как функция $f(z)$ аналитична в круге K_1 и на его границе, то согласно интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \qquad \xi \in \gamma_r.$$

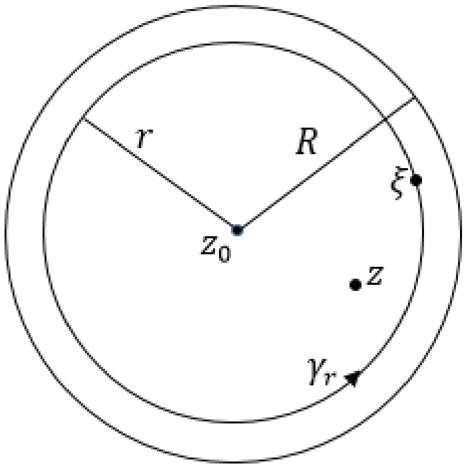

Рис. 10.1

Для любой точки $\xi \in \gamma_r$

$$\frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} = q < 1.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \, , |u| < 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi), \qquad (10.3)$$

$$a_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n.$$

Так как функция $f(z)$ аналитична в круге K, то $f(z)$ непрерывна и ограничена на окружности γ_r. Следовательно, $\exists M > 0$: $|f(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in \gamma_r$, и

$$|\, a_n(\xi)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{|\xi - z_0|}\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right|^n = \frac{M}{2\pi r} q^n \quad \forall \xi \in \gamma_r.$$

Согласно теореме Вейерштрасса ряд (10.3) сходится абсолютно и равномерно по ξ на γ_r и его можно почленно интегрировать по γ_r:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)}d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\oint\limits_{\gamma_r}\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n\right\}d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Последнее равенство следует из интегральной формулы Коши для производных (теорема 2, лекция 9). Таким образом, получено разложение функции $f(z)$ в степенной ряд (10.1), коэффициенты которого определяются формулами (10.2).

Докажем единственность разложения. Пусть функция $f(z)$ в круге K представляется другим степенным рядом:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \, (z - z_0)^n = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (10.4)$$

Степенной ряд в круге сходимости можно дифференцировать любое число раз. Получаемые при дифференцировании ряды имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд. Последовательно дифференцируя (10.4), получим:

$$f'(z) = b_1 + 2b_2(z - z_0) + 3b_3(z - z_0)^2 + \cdots + \, nb_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(z) = 2b_2 + 3 \cdot 2 \cdot b_3(z - z_0) + \cdots + \, n \cdot (n-1)b_n(z - z_0)^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(z) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (z - z_0) + \cdots +$$

$$+ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot b_n(z - z_0)^{n-3} + \cdots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Полагая $z = z_0$, получим:

$$f(z_0) = b_0, f'(z_0) = b_1, f''(z_0) = 2b_2, f'''(z_0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot b_3, \dots,$$

$$f^{(n)}(z_0) = n! \cdot b_n, \dots.$$

Следовательно,

$$b_0 = f(z_0) = c_0, b_1 = f'(z_0) = c_1, b_2 = \frac{f''(z_0)}{2!} = c_2, \dots, b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = c_n.$$

■

Определение. Степенной ряд (10.1), коэффициенты c_n которого определяются формулами (10.2), *называется рядом Тейлора функции* $f(z)$ *с центром в точке* z_0. ▲

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$:

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty;$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < \infty;$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

4) $\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < \infty;$

5) $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

6) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1;$

7) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$

Из первых трех приведенных разложений получим:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots +$$
$$+i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right) = \cos z + i \sin z \Rightarrow e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

10.2. Ряд Лорана

Определение. *Рядом Лорана* называется ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (10.5)$$

где z – независимая комплексная переменная, c_n – заданные комплексные числа, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости.

Ряд Лорана (10.5) называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (10.6)$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \qquad (10.7)$$

Ряд (10.6) называется правильной частью ряда Лорана (10.5), а ряд (10.7) – главной частью ряда Лорана (10.5). Сумма ряда (10.5) по определению равна сумме рядов (10.6) и (10.7). ▲

Ряд (10.6) является степенным рядом. Он сходится в круге $|z - z_0| < R$,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Согласно радикальному признаку Коши ряд (10.7) сходится, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}\right|} < 1 \Rightarrow |z - z_0| > \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{-n}|} = r.$$

Если $r < R$, то областью сходимости ряда (10.5) является кольцо

$$K: r < |z - z_0| < R.$$

В этом кольце сумма ряда (10.5) является аналитической функцией. При этом в любом «меньшем» кольце $r' \le |z - z_0| \le R', r < r' \le R' < R$, ряд (10.5) сходится абсолютно и равномерно.

Лемма. (интегральная формула Коши для двусвязной области)

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $K: r < |z - z_0| < R$ и непрерывна в $\overline{K}$. Тогда $\forall z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \qquad (10.8)$$

Доказательство: Соединим разрезом границы области K. Получим односвязную область с границей $\tilde{\Gamma} = \gamma_R^+ \cup \gamma^+ \cup \gamma_r^- \cup \gamma^-$ (рис. 10.2).Согласно интегральной формуле Коши для односвязной области

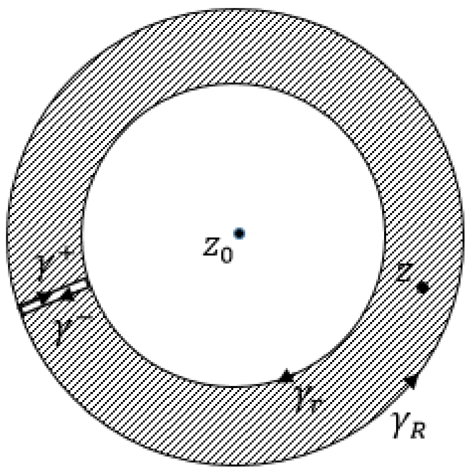

Рис. 10.2

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

А так как интегралы по γ^+ и γ^- взаимно уничтожаются, то получаем равенство (10.8). ■

Теорема 2. (разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана) Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K: r < |z - z_0| < R$ $(0 \le r < R < +\infty)$, единственным образом представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{10.9}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{10.10}$$

где $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho, r < \rho < R$.

Доказательство: Зафиксируем внутри кольца K точку z. Построим окружности $\gamma_{r'}, \gamma_{R'}$ с центром в точке z_0 и радиусами r', R' соответственно (рис. 10.3):

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R.$$

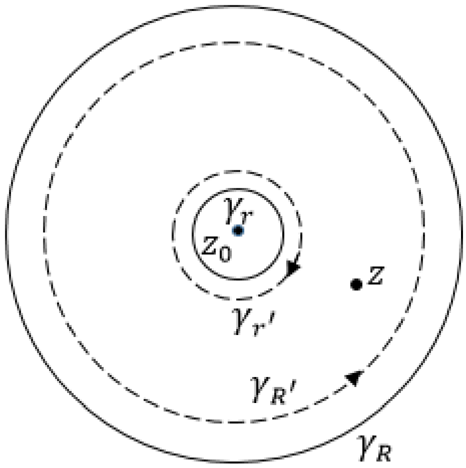

Рис. 10.3

Рассмотрим новое кольцо

$$K': r' < |z - z_0| < R'.$$

Функция $f(z)$ аналитична в кольце K' и на его границе. Согласно лемме

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R'}^+} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r'}^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{10.11}$$

Для точки $\xi \in \gamma_{R'}$ выполнено неравенство: $|z - z_0| < |\xi - z_0|$. Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n. \qquad (10.12)$$

Аналогично тому, как это было показано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что ряд в правой части (10.12) можно почленно интегрировать по контуру $\gamma_{R'}$. Интегрируя по $\gamma_{R'}$ обе части равенства (10.12), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{R'}^{+}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{R'}^{+}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n\right] d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{R'}^{+}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right] \cdot (z - z_0)^n. \qquad (10.13)$$

Для точки $\xi \in \gamma_{r'}$ выполнено неравенство: $|z - z_0| > |\xi - z_0|$. Тогда

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \dfrac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{r'}^{-}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{r'}^{+}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{r'}^{+}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\right] d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r'}^{+}} f(\xi)(\xi - z_0)^n d\xi\right\} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint\limits_{\gamma_{r'}^{-}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi = \sum_{k=-1}^{-\infty} \left\{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{r'}^{+}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}\right\} \cdot (z - z_0)^k. \qquad (10.14)$$

Подынтегральные функции в (10.13), (10.14) являются аналитическими в кольце K. Согласно следствию теоремы Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{\gamma_{r'}^{+}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \oint\limits_{\gamma_{R'}^{+}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \oint\limits_{\gamma_{\rho}^{+}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, r' < \rho < R'.$$

Это позволяет переписать равенство (10.11) с учетом (10.13), (10.14) в виде:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n определяются формулами (10.10).

Докажем единственность полученного разложения. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in K, \qquad K: r < |z - z_0| < R.$$

Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{10.15}$$

Умножим обе части равенства (10.15) на $1/(2\pi i (z - z_0)^{m+1})$ и проинтегрируем по окружности γ_ρ. С учетом того, что

$$\oint\limits_{\gamma_{\rho}^{+}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \qquad \oint\limits_{\gamma_{\rho}^{+}} (z - z_0)^n dz = 0, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1,$$

получим $b_m = c_m$, где m – произвольное целое число. ■

Пример. Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z, указать области, в которых справедливы разложения, если

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + z - 2}.$$

Решение: Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z + 2} + \frac{1}{z - 1}.$$

Аналитичность функции $f(z)$ нарушается в точках $z = -2$ и $z = 1$. Комплексную плоскость можно разбить на 3 кольцевые области с центром в точке $z = 0$, в которых функция $f(z)$ аналитична (рис. 10.4):

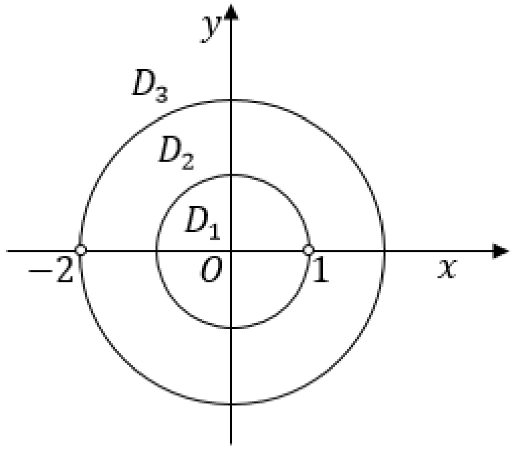

Рис. 10.4

$$D_1\colon |z|<1, D_2\colon 1<|z|<2, D_3\colon 2<|z|.$$

В области D_1:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

В области D_2:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

В области D_3:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=$$

$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n+1}{z^{n+1}}.$$

ЛЕКЦИЯ № 11. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

11.1. Определение и классификация изолированных особых точек

Определение. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* однозначного характера для функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность точки z_0: $0<|z-z_0|<\rho$, в которой функция $f(z)$ является однозначной и аналитической, а в самой точке z_0 функция $f(z)$ либо не определена, либо не является однозначной и аналитической.

Аналогично, точка $z = \infty$ называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$. ▲

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают 3 типа особых точек.

Определение. Изолированная особая точка однозначного характера z_0 функции $f(z)$ называется:

а) *устранимой особой точкой*, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

б) *полюсом,* если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

в) *существенной особой точкой*, если не $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. ▲

Примеры

а) $z_0 = 0$ – устранимая особая точка для функций

$$\frac{\sin z}{z}\ ;\ \frac{e^z - 1}{z}\ ;\ \frac{1-\cos z}{z^2};$$

б) $z = -1$ – полюс для функции $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$;

в) $z = 0$ – существенно особая точка для функций

$$e^{\frac{1}{z}};\ e^{\frac{1}{z^2}};\ \sin\frac{2}{z}\ ;\ \cos\frac{1}{z}.$$

Рассмотрим, например, $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$.

Если $z = x$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

Если $z = iy$, то $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{y\to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0$.

Следовательно не существует предела функции $f(z)$ при $z \to 0$, и $z = 0$ – существенно особая точка для $f(z)$.

11.2. Ряд Лорана в окрестности особой точки

Определение. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $K: 0 < |z - z_0| < \rho$. Тогда в этом кольце функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \qquad (11.1)$$

Ряд (11.1) называется *рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0*, а ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{11.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{11.3}$$

называются соответственно *правильной* и *главной* частью ряда (11.1). ▲

Определение. Пусть функция $f(z)$ представляется в области $R < |z| < \infty$ сходящимся рядом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{11.4}$$

Ряд (11.4) называется *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности бесконечно удаленной точки,* а ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{11.5}$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \tag{11.6}$$

называются соответственно *главной* и *правильной* частью ряда (11.4). ▲

Замечание. Рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ называется также ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{11.4a}$$

сходящийся к $f(z)$ в области $R < |z - z_0| < \infty$. При этом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{11.5a}$$

называют главной частью ряда (11.4a), а ряд

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{11.6a}$$

— правильной частью. ▲

Теорема 1. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой особой точкой тогда и только тогда, когда ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Доказательство: Пусть z_0 − устранимая особая точка для функции $f(z)$, следовательно, $\exists$ конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, это означает, что функция $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_{\varepsilon_1}(z_0)$: $0 < |z - z_0| < \varepsilon_1$ точки z_0, т.е. $\exists\, M > 0$,

$$|f(z)| \le M \quad \forall\, z \in \mathring{U}_{\varepsilon_1}(z_0).$$

Так как z_0 − изолированная особая точка, то $\exists\, \mathring{U}_{\varepsilon_2}(z_0)$: $0 < |z - z_0| < \varepsilon_2$, в которой функция $f(z)$ аналитична и представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\,, \qquad 0 < \rho < \min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2\}.$$

Тогда

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}} |d\xi| \le \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} \oint\limits_{\gamma_\rho} |d\xi| = \frac{M \cdot 2\pi\rho}{2\pi\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}.$$

Итак,

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{11.7}$$

Неравенство (11.7) называется ***неравенством Коши.*** Так как ρ можно взять сколь угодно малым, то $c_n = 0$ при $n = -1, -2, -3, \ldots$. Поэтому ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части.

Пусть теперь ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Тогда $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c_0$. Согласно определению точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$. ■

Теорема 2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число членов, т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \;\; m > 0, \;\; c_{-m} \neq 0.$$

Доказательство: Пусть z_0 – полюс. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то существует проколотая окрестность $\mathring{U}_\varepsilon(z_0)$ точки z_0, в которой $f(z)$ аналитична и отлична от нуля. Тогда в этой окрестности определена функция $g(z) = 1/f(z)$, причем $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, следовательно, z_0 – устранимая особая точка для функции $g(z)$. Согласно теореме 1 ряд Лорана функции $g(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, т.е.

$$g(z) = b_m(z - z_0)^m + b_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots, b_m \neq 0, m \geq 1,$$

или $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, где $h(z)$ – аналитическая функция и $h(z_0) \neq 0$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m h(z)}.$$

Так как $h(z)$ аналитична в $\mathring{U}_\varepsilon(z_0)$ и $h(z_0) \neq 0$, то $\frac{1}{h(z)}$ аналитична в $\mathring{U}_\varepsilon(z_0)$, следовательно,

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z - z_0)^n .$$

Откуда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m}(z - z_0)^{n-m} =$$

$$= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z - z_0)^k .$$

Пусть $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, m > 0, c_{-m} \neq 0 \; \forall \; z \in \mathring{U}_\varepsilon(z_0)$. Тогда $f(z)$ аналитична вместе с $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ в $\mathring{U}_\varepsilon(z_0)$ и

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + c_{m+n}(z - z_0)^n + \cdots$$

Это означает, что точка z_0 является устранимой точкой для функции $g(z)$ и

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \infty,$$

и z_0 – полюс для функции $f(z)$. ■

Теорема 3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенной особой точкой тогда и только тогда, когда главная часть ряда

Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит бесконечное число членов.

Доказательство: Следует из теорем 1,2. ■

Утверждения теорем 1-3 оформим в виде таблицы:

Характер особой точки z_0 функции $f(z)$	Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0
Устранимая	Отсутствует
Полюс	Содержит конечное число членов
Существенная особая точка	Содержит бесконечное число членов

11.3. Нули аналитической функции. Связь между порядком нуля и порядком полюса

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D. Точка $z_0 \epsilon D$ называется *нулем функции* $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 в степенной ряд имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ , т.е } c_0 = 0.$$

Если $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$, а $c_k \neq 0$, то точка z_0 называется *нулем k −го порядка* функции $f(z)$.

Так как $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, то нуль *$k$ −го порядка* функции $f(z)$ характеризуется соотношениями:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots f^{(k-1)}(z_0) = 0,\ \ f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

В окрестности нуля $k-$ го порядка разложение функции $f(z)$ в степенной ряд имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Следовательно,

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z),$$

где функция $h(z)$ аналитична в точке z_0 и $h(z_0) \neq 0$.

Пусть z_0 – полюс функции $f(z)$. Порядком полюса функции $f(z)$ называется порядок нуля функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, z \neq z_0, \\ 0, z = z_0. \end{cases}$$

Для определения порядка полюса сформулируем ряд утверждений, которые следуют из выше приведенных рассуждений.

Утверждение 1. Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_\rho(z_0)$ точки z_0, т.е. в области $0 < |z - z_0| < \rho$, функция $f(z)$ представляется рядом:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, m > 0, c_{-m} \neq 0. \blacksquare$$

Утверждение 2. Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) \sim \frac{A}{(z - z_0)^m} \quad \text{при } z \to z_0,$$

где A – некоторое отличное от нуля комплексное число. $\blacksquare$

Утверждение 3. Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m},$$

где функция $h(z)$ аналитична в точке z_0 и $h(z_0) \neq 0$. $\blacksquare$

Утверждение 4. Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда точка z_0 является нулем порядка m для функции

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, z \neq z_0, \\ 0, z = z_0, \end{cases}$$

т.е. $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0, g^{\ k}\ (z_0) \neq 0.$ $\blacksquare$

Аналогичные утверждения сформулируем для определения порядка полюса для точки $z_0 = \infty$.

Утверждение 5. Точка $z_0 = \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в области $\rho < |z| < \infty$, функция $f(z)$ представляется рядом:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n, m > 0, c_m \neq 0. \blacksquare$$

Утверждение 6. Точка $z_0 = \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) \sim Az^m \quad \text{при } z \to \infty,$$

где A – некоторое отличное от нуля комплексное число. ■

Утверждение 7. Точка $z_0 = \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = h(z)z^m,$$

функция $h(z)$ аналитична в некоторой области $\rho < |z| < \infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) \neq 0$. ■

Примеры. Найти все конечные особые точки заданных функций, определить их тип. Определить характер бесконечно удаленной точки:

$$\text{а) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; \text{ б) } f(z) = \frac{1}{z(1+z)}; \text{ в) } f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}};$$

$$\text{г) } f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}; \text{ д) } f(z) = \frac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}.$$

Решение: а) Особой точкой функции $f(z)$ является точка $z_0 = 0$. Так как

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty,$$

то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}, \qquad 0 < |z| < \infty. \tag{11.8}$$

Ряд (11.8) является одновременно рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$ и в окрестности точки $z = \infty$.

Точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой для функции (главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$ отсутствует).

Точка $z = \infty -$ существенно особая точка, так как главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots \frac{z^{n-1}}{n!} + \cdots,$$

то есть содержит бесконечное число членов.

б) Конечными особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -1$. Функцию $f(z)$ можно представить в виде:

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{z}, \qquad g_1(z) = \frac{1}{z+1},$$

где $g_1(z)$ аналитична в точке $z_1 = 0$ и $g_1(0) \neq 0$. Согласно утверждению 3 точка $z_1 = 0 -$ полюс 1-го порядка для функции $f(z)$.

Аналогично, точка $z_2 = -1$ является полюсом 1-го порядка для функции $f(z)$, так как

$$f(z) = \frac{g_2(z)}{z+1}, \qquad g_2(z) = \frac{1}{z},$$

где $g_2(z)$ аналитична в точке $z_2 = -1$ и $g_2(-1) \neq 0$.

Точка $z = \infty$ является устранимой точкой для функции $f(z)$, так как

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

в) Конечной особой точкой функции $f(z)$ является точка $z_0 = 0$. Разложим функцию $f(z)$ по степеням z:

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} \ldots, \quad 0 < |z| < \infty. \qquad (11.9)$$

Ряд (11.9) является одновременно рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 0$ и в окрестности точки $z = \infty$.

Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$ имеет вид:

$$\frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots + \frac{1}{n!\,z^{n-2}} + \cdots,$$

т.е. содержит бесконечное число членов. Согласно теореме 3 $z_0 = 0$ – существенно особая точка.

Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ имеет вид:

$$z^2 + z.$$

Согласно утверждению 5 точка $z = \infty$ является полюсом 2-го порядка для функции $f(z)$.

г) Конечными особыми точками функции $f(z)$ являются точка $z_0 = 0$ и решения уравнения $\sin(1/z) = 0$, т.е. точки

$$z_k = \frac{1}{\pi k} \ \ (k = \mp 1; \mp 2; \ldots).$$

Точка $z_0 = 0$ не является изолированной особой точкой, так как любая ее окрестность содержит при достаточно больших k точки z_k. Эта точка является предельной точкой полюсов. Точки z_k являются полюсами 1-го порядка для функции $f(z)$, так как они являются нулями первого порядка для функции

$$g\,(z) = \frac{1}{f(z)} = \sin\frac{1}{z}.$$

Действительно,

$$g(z_k) = 0;\ g'(z_k) = \cos\frac{1}{z_k}\left(-\frac{1}{{z_k}^2}\right) = (-1)^{k+1}\pi^2 k^2 \neq 0.$$

Точка $z = \infty$ является полюсом первого порядка для функции $f(z)$, так как

$$f(z) \sim \frac{1}{\frac{1}{z}} = z, z \to \infty.$$

д) Конечные особые точки функции $f(z)$:

$$z_0 = 0, z_k = 2\pi k i\,, (k = \mp 1; \mp 2; \dots).$$

Так как

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3} \sim \frac{z^2/2}{z^3} = \frac{1}{2z}, \qquad z \to 0,$$

то $z_0 = 0$ является полюсом первого порядка для функции $f(z)$. Точки $z_k = 2\pi k i\,, (k = \mp 1; \mp 2; \dots)$ являются полюсами 3-го порядка для функции $f(z)$, так как они являются нулями 3-го порядка для функции

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой.

ЛЕКЦИЯ № 12. ВЫЧЕТЫ

12.1. Вычет в конечной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0, т.е. в кольце $K : 0 < |z - z_0| < \rho_0$. Тогда в этом кольце функция $f(z)$ представляется сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{12.1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,, \qquad \gamma_\rho : |z - z_0| = \rho, \qquad 0 < \rho < \rho_0. \tag{12.2}$$

Определение. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}. \ \blacktriangle$$

Из (12.2) следует:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi \Rightarrow \oint_{\gamma_\rho} f(\xi)d\xi = 2\pi i c_{-1}.$$

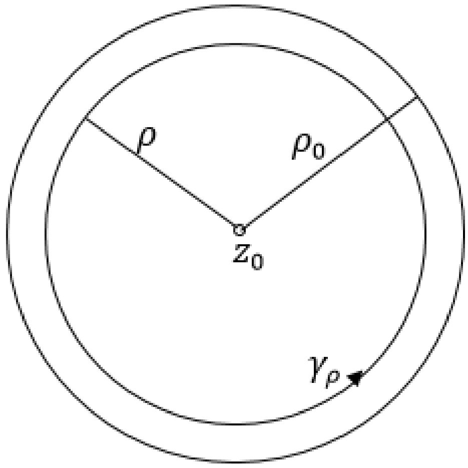

Рис. 12.1

Таким образом, если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то интеграл от этой функции по границе достаточно малой окрестности точки z_0 равен вычету в этой точке, умноженному на $2\pi i$. Очевидно, что если $f(z)$ аналитична в точке z_0, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$. Если z_0 — устранимая особая точка, то также $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$ (так как главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 отсутствует, т.е. $c_{-1} = 0$). Еще раз отметим, что z_0 — конечная точка ($z_0 \neq \infty$).

Пример 1. Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z_0 = 0$.

Решение: Разложим заданную функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty.$$

Так как $c_{-1} = 1$, то $\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Найти вычет функции $f(z) = \sin z / z^6$ в точке $z_0 = 0$.

Решение:

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^3 3!} + \frac{1}{z 5!} - \frac{z}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!} + \cdots, 0 < |z| < \infty,$$

$$c_{-1} = \frac{1}{5!} = \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^6}.$$

Ответ: $1/120$.

Пример 3. Найти вычет функции $f(z) = z\cos[1/(z+1)]$ в точке $z_0 = -1$.

Решение:

$$f(z) = z \cdot \cos\frac{1}{z+1} = [(z+1)-1] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z+1)^{2n} \cdot (2n)!} =$$

$$= [(z+1)-1] \cdot \left[1 - \frac{1}{(z+1)^2 2!} + \frac{1}{(z+1)^4 4!} - \frac{1}{(z+1)^6 6!} + \cdots\right],$$

$$0 < |z+1| < \infty,$$

$$c_{-1} = -\frac{1}{2!} = \operatorname*{res}_{z=-1} f(z).$$

Ответ: $-1/2$.

12.2. Вычисление вычета в полюсе

Случай простого полюса.

Если z_0 — полюс первого порядка для функции $f(z)$, то ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{12.3}$$

Умножим обе части (12.3) на $(z - z_0)$ и перейдем к пределу при $z \to z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] = c_{-1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{12.4}$$

Пусть $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда $z = z_0$— полюс первого порядка для функции $f(z)$. Согласно (12.4)

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \Longrightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}. \tag{12.5}$$

Случай кратного полюса.

Если z_0 — полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{12.6}$$

Умножим обе части равенства (12.6) на $(z - z_0)^m$:

$$f(z)(z-z_0)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m}. \tag{12.7}$$

Продифференцируем равенство (12.7) $(m-1)$ раз по переменной z и перейдем к пределу при $z \to z_0$:

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)} = c_{-1} \cdot (m - 1)! + 0$$

Откуда следует формула для вычисления вычета в полюсе порядка m:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \tag{12.8}$$

Пример 4. Найти вычеты функции $f(z)$ в конечных особых точках, если

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^3}.$$

Решение: Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1 = 1$ (полюс первого порядка) и $z_2 = 2$ (полюс третьего порядка). Используя формулы (12.4), (12.8), получим:

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{(z-2)^3} = -1,$$

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2} [(z - 2)^3 f(z)]'' = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2} \left(\frac{z}{z-1}\right)'' =$$
$$= \frac{1}{2!} \lim_{z \to 2} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \left(-\frac{1}{(z-1)^2}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \to 2} \frac{2}{(z-1)^3} = 1.$$

Ответ: $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -1,\ \operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 1$.

Пример 5. Найти вычеты функции $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в конечных особых точках.

Решение: Особыми точками функции $\operatorname{ctg} z = \cos z / \sin z$ являются решения уравнения $\sin z = 0$, т.е. $z_k = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Эти точки являются полюсами первого порядка, так как для функции $g(z) = 1/f(z) = \operatorname{tg} z$ эти точки являются нулями первого порядка. Используя формулу (12.5), получим:

$$\operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z) = \lim_{z \to \pi k} \frac{\cos z}{(\sin z)'} = \lim_{z \to \pi k} \frac{\cos z}{\cos z} = 1.$$

Ответ: $\operatorname*{res}_{z=\pi k} f(z) = 1.$

12.3. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\rho_0 < |z| < \infty$. Тогда в этой области

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{12.9}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \;\; \rho_0 < \rho < \infty, \qquad \gamma_\rho: |z| = \rho\,. \tag{12.10}$$

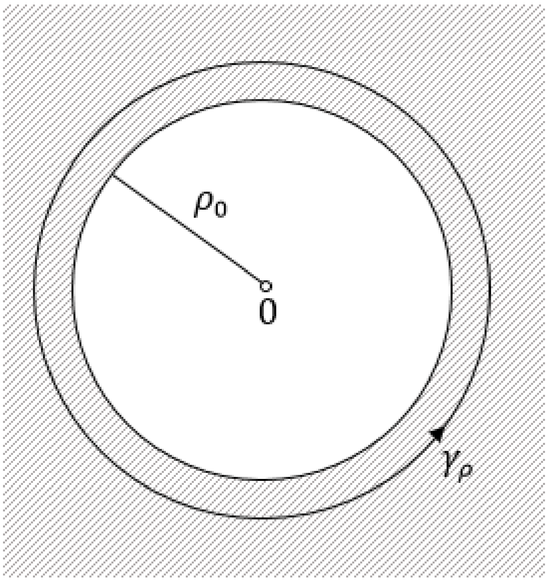

Рис. 12.2

Определение. *Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$* называется число $(-c_{-1})$, где c_{-1} – коэффициент при z^{-1} ряда Лорана (12.9) функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} ▲$$

Согласно (12.10)

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\xi)\, d\xi. \tag{12.11}$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\rho_1 < |z - z_0| < \infty$. Тогда в этом кольце она представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \tag{12.12}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,, \qquad \gamma_{\rho_2}: |z - z_0| = \rho_2, \qquad \rho_1 < \rho_2 < \infty. \tag{12.13}$$

Ряд (12.12) также является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Покажем, что определение вычета в точке $z=\infty$ корректно, т.е. $b_{-1}=c_{-1}$.

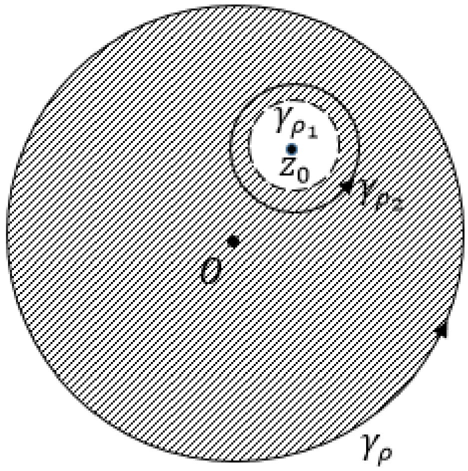

Рис. 12.3

Обе окружности γ_ρ и γ_{ρ_2} лежат в окрестности бесконечно удаленной, в которой функция $f(z)$ аналитична, и образуют границу двусвязной области с границами γ_ρ и γ_{ρ_2}, в которой $f(z)$ аналитична (рис. 12.3). Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\gamma_\rho^+} f(\xi)\,d\xi = \oint_{\gamma_{\rho_2}^+} f(\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, $c_{-1}=b_{-1}$.

Пусть в области $\rho_0<|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{z^k}+\frac{c_{-(k+1)}}{z^{k+1}}+\cdots,\quad c_{-k}\neq 0, k\geq 1.$$

Тогда

$$f(z)\sim\frac{c_{-k}}{z^k}\quad \text{при } z\to\infty.$$

Откуда получаем полезные для вычисления вычета в точке $z=\infty$ утверждения:

1) Если $f(z)\sim\frac{A}{z}$ при $z\to\infty$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-A$.

2) Если $f(z)\sim\frac{A}{z^k}, k\geq 2$ при $z\to\infty$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$.

Пример 6. Найти вычет функции $f(z)=e^{1/z}$ в точке $z_0=\infty$.

Решение: Разложим заданную функцию в ряд Лорана по степеням z:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots, \qquad 0 < |z| < \infty.$$

Так как $c_{-1} = 1$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -1$.

Ответ: −1.

Пример 7. Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$,

$$f(z) = \frac{1}{z+1}\cos\frac{1}{z}$$

Решение:

$$f(z) \sim \frac{1}{z+1} \sim \frac{1}{z}, \qquad z \to \infty \;\Rightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 8. Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$,

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}\sin\frac{1}{z}.$$

Решение:

$$f(z) \sim \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z^3}, \qquad z \to \infty \;\Rightarrow$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Ответ: 0.

Замечание. Если точка z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$ и $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$. А если точка $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой , то вычет в этой точке не обязательно равен нулю. В примере 7 точка $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$, так как $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Однако, вычет функции $f(z)$ в этой точке отличен от нуля. В примере 8 точка $z_0 = \infty$ также является устранимой особой точкой для функции $f(z)$. Но здесь вычет в точке $z_0 = \infty$ равен нулю.

Пример 9. Дана функция $f(z)$ и число z_0:

$$f(z) = \frac{4-z}{z(z-2)^2}, \qquad z_0 = 2.$$

1) Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (ряд Тейлора) по степеням $(z - z_0)$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

2) Определить, является ли точка z_0 изолированной особой точкой функции $f(z)$. Если да, то, используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, определить тип особой точки z_0 и найти $\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z)$.

3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти $\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z)$.

Решение: 1) Функцию $f(z)$ представим в виде суммы простейших дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Особые точки: $z = 0, z = 2$. Так как требуется разложить заданную функцию в ряд Лорана по степеням $(z-2)$, то следует указать кольцевые области с центром в точке $z_0 = 2$, в которых функция аналитична. Это области:

$$D_1: 0 < |z-2| < 2, D_2: 2 < |z-2| < \infty.$$

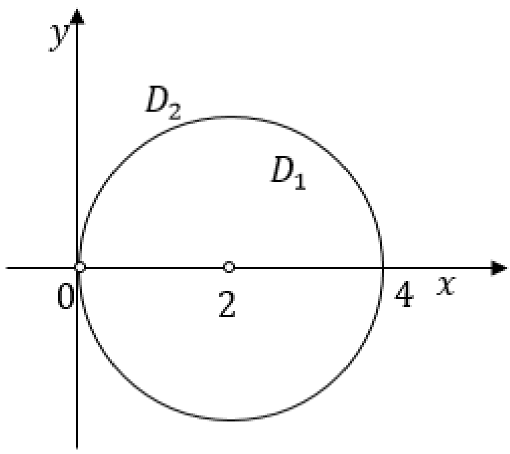

Рис. 12.4

В области D_1

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z-2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}},$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{2^{n+1}}. \qquad (12.14)$$

В области D_2

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{(z-2)\left(1+\frac{2}{z-2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}},$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{2}{(z-2)^2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{1}{(z-2)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(z-2)^{n+1}}. \qquad (12.15)$$

2) Ряд (12.14) является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = 2$. Главная часть ряда Лорана в окрестности этой точки содержит отрицательные степени $(z-2)$ и имеет вид:

$$-\frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}.$$

Откуда следует, что точка $z_0 = 2$ является полюсом 2-го порядка для функции $f(z)$ и $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = c_{-1} = -1$.

3) Ряд (12.15) является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$. Главная часть ряда Лорана в окрестности этой точки содержит положительные степени $(z-2)$, то есть отсутствует. Следовательно, точка $z = \infty$ является устранимой точкой для функции $f(z)$. При этом в разложении (12.15) отсутствует слагаемое, содержащее $(z-2)^{-1}$, следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = 0.$$

ЛЕКЦИЯ № 13. ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

13.1. Теоремы о вычетах.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0 , т.е. в области $\mathring{U}_{\rho_0}: 0 < |z - z_0| < \rho_0$. Тогда в $\mathring{U}_{\rho_0}(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (13.1)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \qquad \gamma_\rho: |z - z_0| = \rho, \qquad 0 < \rho < \rho_0.$$

Согласно определению вычета функции $f(z)$ в точке z_0

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho^+} f(\xi) d\xi. \qquad (13.2)$$

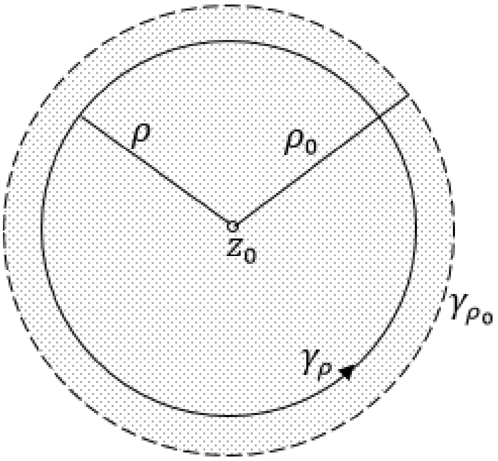

Рис. 13.1

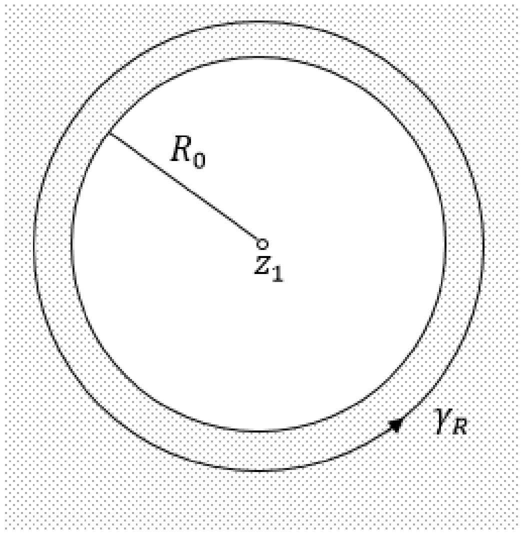

Рис. 13.2

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. в некотором кольце K_1: $R_0 < |z - z_1| < \infty$. Тогда в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_1)^n, \tag{13.3}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_1)^{n+1}}, \quad \gamma_R: |z - z_1| = \rho, \; R_0 < R < \infty\,.$$

Согласно определению вычета в бесконечно удаленной точке

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^+} f(\xi)\, d\xi\,. \tag{13.4}$$

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением особых точек $z_1, \cdots, z_n$, лежащих в этой области. Тогда для любого простого замкнутого контура γ , лежащего в области D и охватывающего эти точки, справедливо равенство

$$\oint_{\gamma^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доказательство: Пусть γ_k $(k = 1, \cdots, n)$ — окружности достаточно малого радиуса r_k с центрами в точках z_k, ориентированные против часовой стрелки. Эти окружности попарно не пересекаются и содержат внутри себя по одной особой точке z_k, при этом γ_k лежат внутри γ (рис. 13.3).

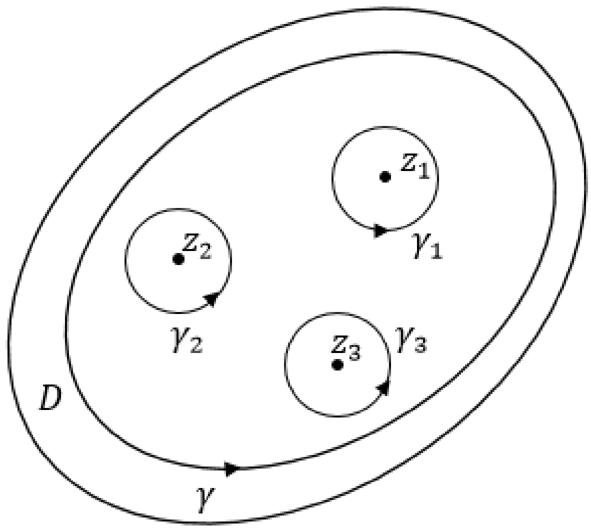

Рис. 13.3

Согласно теореме Коши для многосвязной области и формуле (13.2) для вычисления вычета в конечной изолированной особой точке

$$\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k^+} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad \blacksquare$$

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением изолированных особых точек $z_1, \cdots, z_{n-1}$ и $z_n = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доказательство: Возьмем контур γ, содержащий внутри себя точки $z_1, \cdots, z_{n-1}$ (рис. 13.4).

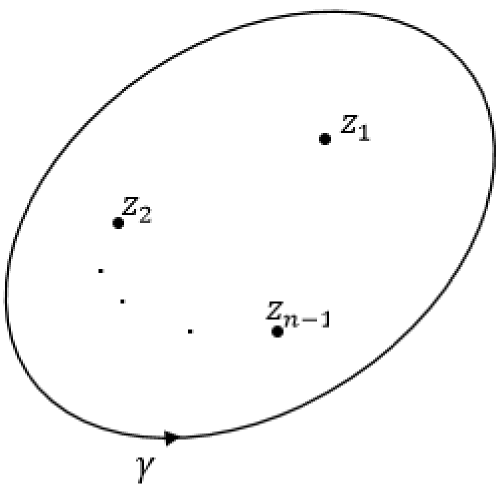

Рис. 13.4

Согласно теореме 1

$$\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\ . \tag{13.5}$$

Так как функция $f(z)$ аналитична на контуре γ и вне этого контура, то согласно формуле (13.4)

$$\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \tag{13.6}$$

Вычитая из равенства (13.5) равенство (13.6), получим

$$0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0 \qquad \blacksquare$$

13.2. Применение вычетов к вычислению контурных интегралов

Пример 1. Вычислить контурный интеграл (направление обхода контура положительное):

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\,dz.$$

Решение: Подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$

имеет одну особую точку $z = 0$, расположенную внутри контура интегрирования. Согласно теореме 1

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

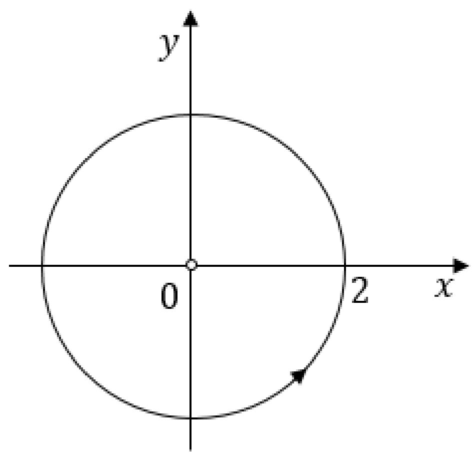

Рис. 13.5

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z \cdot 2!} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n-3}}{(2n)!} + \cdots$$

Из полученного разложения следует, что точка $z = 0$ является полюсом 3-его порядка для функции $f(z)$ и

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = -\frac{1}{2!}.$$

Тогда

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{2!}\right) = -\pi i.$$

Ответ: $-\pi i.$

Пример 2. Вычислить контурный интеграл (направление обхода контура положительное):

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{e^z + 1}.$$

Решение: Особыми точками подынтегральной функции являются корни уравнения $e^z = -1$, т.е. точки $z_k = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

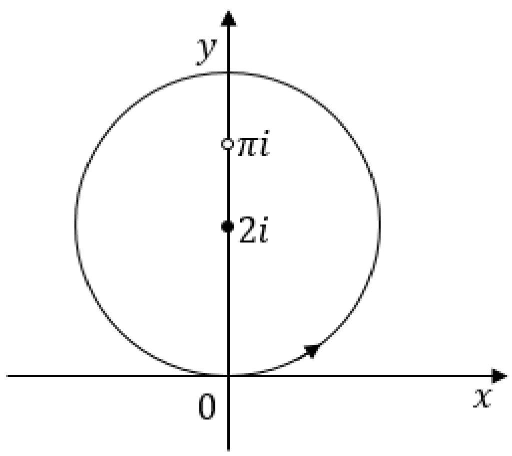

Рис. 13.6

Внутри контура интегрирования имеется только одна особая точка $z_0 = \pi i$. Остальные особые точки расположены вне указанного контура. Точка z_0 является полюсом первого порядка для подынтегральной функции. Вычислим вычет в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i}\frac{1}{e^z+1}=\left.\frac{1}{(e^z+1)'}\right|_{z=\pi i}=\left.\frac{1}{e^z}\right|_{z=\pi i}=\frac{1}{e^{\pi i}}=-1.$$

Согласно теореме 1

$$\oint\limits_{|z-2i|=2}\frac{dz}{e^z+1}=2\pi i(-1)=\ -2\pi i.$$

Ответ: $-2\pi i$.

Пример 3. Вычислить контурный интеграл (направление обхода контура положительное):

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}+1}.$$

Решение: Особыми точками подынтегральной функции являются корни уравнения $z^{10}\ +\ 1\ =\ 0$: $z_k\ =\ \sqrt[10]{-1}=e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{10}}, k\ =\ 0,1,\cdots,9$.

Точки z_k являются полюсами первого порядка для функции $f(z)=1/(z^{10}+1)$. Все эти точки лежат на единичной окружности с центром с точке $z=0$ и являются вершинами правильного десятиугольника, вписанного в эту окружность. То есть все указанные особые точки лежат внутри контура интегрирования (рис. 13.7). Согласно теоремам 1 и 2

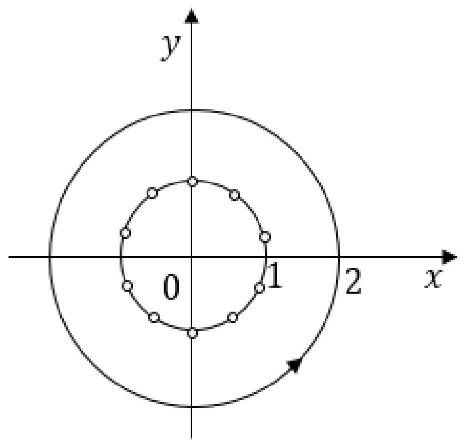

Рис. 13.7

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{z^{10}+1}=2\pi i\sum_{k=0}^{9}\operatorname*{res}_{z=z_k}\frac{1}{z^{10}+1}=-2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{1}{z^{10}+1}=-2\pi i\ \cdot 0=0.$$

Ответ: 0.

13.3. Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов

Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u, v.

Введем комплексную переменную $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), dz = ie^{i\varphi}d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Выполняя указанную замену переменной, получим:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \oint_{|z|=1} R_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} R_1(z), \qquad |z_k| < 1.$$

Здесь $R_1(z)$ – дробно-рациональная функция комплексной переменной z.

Пример 4. Вычислить

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \qquad 0 < |a| < 1.$$

Решение: Переходя к комплексной переменной $z = e^{i\varphi}$, получим:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1 - 2a \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z - az^2 - a + a^2 z} =$$

$$= i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Особые точки подынтегральной функции – корни уравнения:

$$az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0.$$

Дискриминант и корни квадратного уравнения имеют вид:

$$D = (a^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a^2 - 1)^2,$$

$$z_{1,2} = \frac{a^2 + 1 \pm (a^2 - 1)}{2a},$$

$$z_1 = a, z_2 = \frac{1}{a} \text{ — полюсы 1го порядка.}$$

Так как $|z_1| < 1, |z_2| > 1$, то точка z_1 входит внутрь контура $|z| = 1$, а точка z_2 не входит. Найдем вычет в точке $z_1 = a$:

$$\operatorname*{res}_{z=a}\frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a}=\frac{1}{2az-(a^2+1)}\bigg|_{z=a}=\frac{1}{2a^2-a^2-1}=\frac{1}{a^2-1}.$$

Согласно теореме 1

$$I=i\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=a}f(z)=-2\pi\frac{1}{a^2-1}=\frac{2\pi}{a^2-1}.$$

Ответ: $2\pi/(a^2-1)$.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — рациональная функция вещественной переменной x, т.е. $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $m-n\geq 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{Im\,z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}f(z).$$

Доказательство: Рассмотрим замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и полуокружности $C_R\,:\,|z|=R,\operatorname{Im}z\geq 0$ (рис. 13.8).

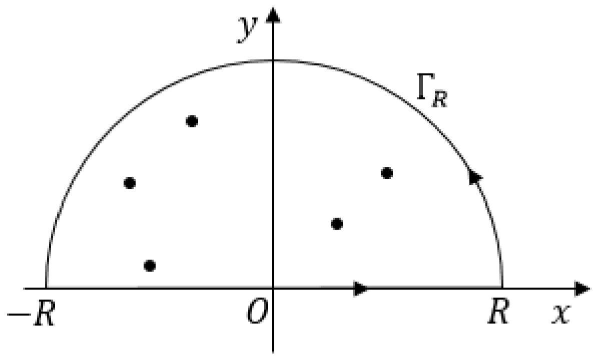

Рис. 13.8

Выберем R настолько большим, чтобы все полюсы $z_1,\dots,z_l$ функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости, попали внутрь контура Γ_R. Согласно первой теореме о вычетах:

$$\oint_{\Gamma_R}f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{l}\operatorname*{res}_{z=z_k}f(z).$$

Так как

$$\oint_{\Gamma_R}f(z)\,dz=\int_{-R}^{R}f(z)dz+\int_{C_R}f(z)dz,$$

то

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (13.7)$$

Оценим

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right|.$$

В силу условия на степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ найдутся $R_0 > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$|f(z)| = \left| \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \right| \le \frac{M}{|z|^2}, \text{если } |z| > R_0.$$

Тогда

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \le \int_{C_R} |f(z)| \cdot |dz| \le \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{\pi M}{R} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Выражение в правой части (13.7) не зависит от R. Перейдем в (13.7) к пределу при $R \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Здесь $z_1, \dots, z_l$ — все полюсы функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости. ■

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$$

Решение:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}.$$

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну особую точку $z = i$ — полюс 4-го порядка. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{3!} \lim_{z\to i} [(z-i)^4 f(z)]''' = \frac{1}{6} \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z-i)^4} \right)''' = \frac{1}{6} \lim_{z\to i} \frac{(-4)(-5)(-6)}{(z+i)^7} =$$

$$= -\frac{20}{(2i)^7} = \frac{5}{32i} \;\; ;$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{5}{32i} = \frac{5\pi}{16}.$$

Ответ: $5\pi/16$.

Из полученного в примере 5 результата следует:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{5\pi}{32}.$$

Замечание. Если рассмотреть контур $\widetilde{\Gamma_R}$, симметричный Γ_R относительно Ox (внутри $\widetilde{\Gamma_R}$ содержатся все полюсы функции $f(z)$, лежащие в нижней полуплоскости), то можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{Im\, z_k<0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \qquad (13.8)$$

Пример 6. Вычислить несобственный интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - 4ix(x^2+4) - 16} dx.$$

Решение: Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 4iz(z^2+4) - 16}.$$

Разложим знаменатель дроби на множители:

$$z^4 - 4iz(z^2+4) - 16 = (z^2+4)(z-2i)^2 = (z+2i)(z-2i)^3.$$

Таким образом, особые точки функции $f(z)$ имеют вид:

$z_1 = -2i$ – полюс первого порядка,

$z_2 = 2i$ – полюс третьего порядка.

Воспользуемся формулой (13.8):

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = \lim_{z\to -2i}[(z+2i)f(z)] = \lim_{z\to -2i} \frac{z^2}{(z-2i)^3} = \frac{i}{16},$$

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=-2i} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{i}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\pi/8$.

ЛЕКЦИЯ № 14. ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

14.1 Лемма Жордана.

Лемма Жордана. Пусть $\alpha > 0$ и выполнены условия:

а) функция $g(z)$ непрерывна в области $|z| \geq R_0 > 0, \operatorname{Im} z \geq 0$;

б) $M(R) = \max\limits_{z\in C_R}|g(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, где C_R: $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}dz = 0$.

Доказательство: Пусть $z \in C_R, R_0 < R < \infty$ (рис.14.1). Тогда

$$z = R \cdot e^{i\varphi},\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ \ dz = Rie^{i\varphi}d\varphi.$$

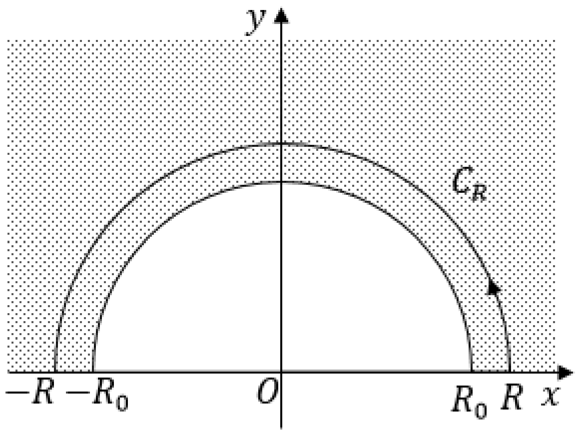

Рис. 14.1

Справедливы равенства:

$$\left|e^{i\alpha z}\right| = \left|e^{i\alpha R(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| = \left|e^{i\alpha R\cos\varphi} \cdot e^{-\alpha R\sin\varphi}\right| = e^{-\alpha R\sin\varphi}.$$

Заметим, что $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ при $\varphi \in [0;\pi/2]$. Следовательно, $e^{-\alpha R\sin\varphi} \leq e^{-2\alpha R\varphi/\pi}$. Тогда

$$\left|\int\limits_{C_R} g(z)e^{i\alpha z}dz\right| \leq \int\limits_{C_R} |g(z)| \cdot \left|e^{i\alpha z}\right| \cdot |dz| \leq M(R)\int\limits_0^\pi e^{-\alpha R\sin\varphi}Rd\varphi =$$

$$= 2M(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\varphi}Rd\varphi \leq 2M(R)\int\limits_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\varphi/\pi}Rd\varphi =$$

$$= 2M(R)R\left[-\frac{\pi}{2\alpha R}e^{-\frac{2\alpha R\varphi}{\pi}}\Big|_0^{\pi/2}\right] = 2M(R)R\left(-\frac{\pi}{2\alpha R}\right)(e^{-\alpha R} - 1) =$$

$$= \frac{\pi M(R)}{\alpha}(1 - e^{-\alpha R}) \leq \frac{\pi M(R)}{\alpha} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Лемма доказана. ■

14.2. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов

Теорема 1. Пусть $F(z)$ − правильная рациональная дробь и $F(z)$ непрерывна на всей действительной оси. Тогда при $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]. \qquad (14.1)$$

Доказательство: Введем вспомогательный контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R; R]$ действительной оси и полуокружности C_R, где C_R: $|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$. Выберем значение R столь большим, чтобы все особые точки функции $F(z)$, лежащие в верхней полуплоскости, находились внутри контура Γ_R. Согласно первой теореме о вычетах

$$\oint_{\Gamma_R} F(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right].$$

Левую часть последнего равенства представим в виде суммы двух интегралов. Получим:

$$\int_{-R}^{R} F(x)e^{i\alpha x}dx + \int_{C_R} F(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]. \qquad (14.2)$$

Для функции $F(z)$ выполнены условия леммы Жордана. Поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z)e^{i\alpha z}dz = 0.$$

Переходя в равенстве (14.2) к пределу при $R \to \infty$, получим (1). Теорема доказана. ■

Замечание 1. Если $\alpha < 0$, то, заменив в доказательстве теоремы 1 контур Γ_R на симметричный ему относительно действительной оси контур $\tilde{\Gamma}_R$, получим равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = -2\pi i \sum_{Imz_k<0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]. \qquad (14.3)$$

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1 и $F(x)$ - действительная функция на $\mathbb{R}$, то при $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{\operatorname{Im}z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_{\mathrm{Im}z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]\right\}.$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)cos5x}{x^2-2x+5}dx.$$

Решение:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)cos5x}{x^2-2x+5}dx = Re\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)e^{5ix}}{x^2-2x+5}dx. \tag{14.4}$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$F(z) = \frac{z-1}{z^2-2z+5},$$

которая является правильной рациональной дробью. Найдем особые точки функции $F(z)$, приравняв нулю знаменатель дроби: $z^2-2z+5=0$. Особыми точками функции $F(z)$ являются точки $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2i$. Обе эти точки являются полюсами первого порядка функции $F(z)$, при этом точка z_1 лежит в верхней полуплоскости.

Продолжим цепочку равенств (14.4):

$$I = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)e^{5ix}}{x^2-2x+5}dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=z_1}\left[F(z)e^{5iz}\right]\right\}.$$

Найдем вычет функции $F(z)e^{5iz}$ в точке z_1:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1}\left[F(z)e^{5iz}\right] = \operatorname*{res}_{z=1+2i}\left[\frac{(z-1)e^{5iz}}{z^2-2z+5}\right] = \lim_{z\to1+2i}\frac{(z-1)e^{5iz}}{(z^2-2z+5)'} =$$

$$= \lim_{z\to1+2i}\frac{(z-1)e^{5iz}}{2z-2} = \lim_{z\to1+2i}\frac{e^{5iz}}{2} = \frac{1}{2}e^{5i(1+2i)} = \frac{e^{-10}}{2}(cos5+isin5).$$

Тогда

$$I = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\cdot\frac{e^{-10}}{2}(\cos 5 + i\sin 5)\right\} = -\pi e^{-10}\sin 5.$$

Ответ: $-\pi e^{-10}\sin 5$.

Следующий пример показывает, как, используя лемму Жордана, вычислить несобственный интеграл в случае, когда подынтегральная функция не является непрерывной на всей вещественной оси. Разумеется, прежде необходимо удостовериться, что несобственный интеграл является сходящимся.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx, \qquad a>0, b>0.$$

Решение: В силу четности подынтегральной функции имеем:

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx.$$

Функция

$$h(z) = \frac{e^{iaz}}{z\,(z^2+b^2)}$$

имеет особые точки $z=0$ и $z=\pm ib$, которые являются полюсами первого порядка. Рассмотрим замкнутый контур (рис.14.2)

$$\Gamma = [-R;-r] \cup C_r \cup [r;R] \cup C_R,$$

где C_r: $|z|=r$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, C_R: $|z|=R, \mathrm{Im}\, z \geq 0, 0<r<R$. Значение r, R выберем так, чтобы внутрь контура Γ попала точка ib. Согласно первой теореме о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} h(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=ib} h(z).$$

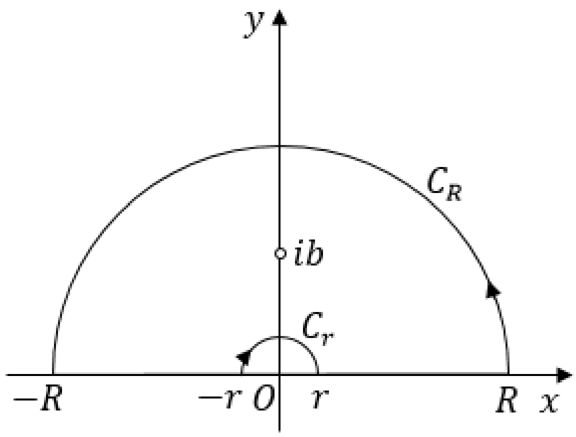

Рис. 14.2

Последнее равенство можно переписать в виде:

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}dx}{x\,(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_r} \frac{e^{iaz}dz}{z\,(z^2+b^2)} + \int\limits_{r}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x\,(x^2+b^2)} + \int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}dz}{z\,(z^2+b^2)} =$$

$$= 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=ib} h(z). \tag{14.5}$$

Так как $z = ib$ − полюс первого порядка для функции $h(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=ib} h(z) = \lim_{z\to ib} \frac{\left(e^{iaz}/z\right)}{(z^2+b^2)'} = \lim_{z\to ib} \frac{\left(e^{iaz}/z\right)}{2z} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}.$$

Далее,

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}dx}{x\,(x^2+b^2)} + \int_{r}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x\,(x^2+b^2)} = \int_{R}^{r} \frac{e^{-iax}(-dx)}{(-x)\,(x^2+b^2)} + \int_{r}^{R} \frac{e^{iax}dx}{x\,(x^2+b^2)} =$$

$$= \int_{r}^{R} \frac{\left(e^{iax}-e^{-iax}\right)dx}{x\,(x^2+b^2)} = 2i\int_{r}^{R} \frac{\sin ax\,dx}{x\,(x^2+b^2)} \to 2iI \text{ при } r\to 0, R\to +\infty.$$

Разберемся с интегралом по полуокружности C_r. Так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2},$$

то

$$\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2} + g(z), \text{где} \lim_{z\to 0} g(z) = 0.$$

Тогда

$$h(z) = \frac{1}{b^2 z} + \frac{g(z)}{z},$$

$$\int_{C_r} h(z)dz = \int_{C_r} \frac{dz}{b^2 z} + \int_{C_r} \frac{g(z)dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{b^2 re^{i\varphi}} + \int_{\pi}^{0} \frac{g\left(re^{i\varphi}\right)rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} =$$

$$= \int_{\pi}^{0} \frac{id\varphi}{b^2} + \int_{\pi}^{0} ig\left(re^{i\varphi}\right)d\varphi \to -\frac{\pi i}{b^2} \text{ при } r\to 0.$$

Согласно лемме Жордана

$$\int_{C_R} \frac{e^{iaz}dz}{z\,(z^2+b^2)} \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Учитывая вышеизложенное и переходя в равенстве (14.5) к пределу при $R\to\infty,\ r\to 0$, получим равенство

$$2iI - \frac{\pi i}{b^2} = 2\pi i\cdot\left(\frac{-e^{ab}}{2b^2}\right).$$

Откуда окончательно получаем

$$I = \frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{2b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$.

14.3. Обращение преобразования Лапласа с помощью вычетов

Определение. *Преобразованием Лапласа функции* $f(t), t\in\mathbb{R}$ называется функция комплексной переменной

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Функция $F(p)$ называется также *изображением.*

Функция $f(t)$ называется *оригиналом,* если

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) на любом конечном отрезке $[a; b] \subset [0; +\infty)$ функция $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва 1-го рода;

3) существуют постоянные $M > 0,\ s \in \mathbb{R}$ такие, что

$|f(t)| \le Me^{st},\ t > 0.$

Число $s_0 = \inf s$ называется *показателем роста* функции $f(t)$. ▲

Теорема обращения. Если $f(t)$ есть функция-оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ − ее изображение, то в любой точке непрерывности функции $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}dp, \tag{14.6}$$

где интеграл берется вдоль прямой $Rep = s > s_0$ и понимается в смысле главного значения, т.е. как

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{s-iN}^{s+iN} F(p)e^{pt}dp\,. \ ■$$

Теорема 2. Пусть изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией с полюсами $p_1,\ p_2, \dots, p_n$. Тогда оригиналом будет функция $f_0(t) = f(t)\eta(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right), \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{14.7}$$

Доказательство: Пусть изображение $F(p)$ − это дробно-рациональная функция, т.е.

$$F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)},$$

где $A_n(p),\ B_m(p)$ − многочлены степени n и m соответственно, $n < m$ (так как для всякого изображения должно выполняться условие $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty} F(p) = 0$). Возьмем $s > \max\limits_{1\le k\le n} \mathrm{Re}\, p_k$. Согласно теореме обращения справедливо равенство (14.6).

Построим замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[s-Ri; s+Ri]$ и построенной на нем как на диаметре полуокружности C_R (рис.14.3). Значение R возьмем достаточно большим, чтобы все особые точки функции $F(p)$ попали внутрь контура Γ_R. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} F(p)e^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} F(p)e^{pt}dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{s-Ri}^{s+Ri} F(p)e^{pt}dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}[F(p)e^{pt}]. \quad (14.8)$$

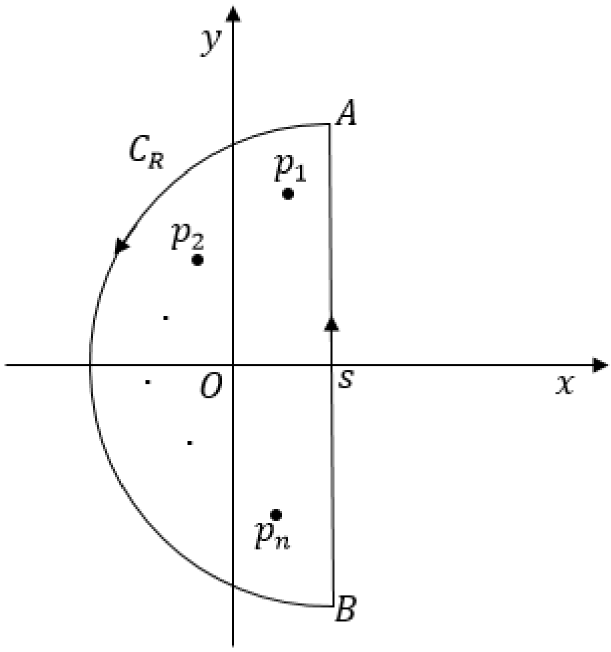

Рис. 14.3

Разберемся с первым слагаемым в левой части равенства (14.8). С помощью линейного отображения $z = -i(p-s)$ полуокружность C_R перейдет в полуокружность радиуса R, расположенную в верхней полуплоскости комплексной плоскости z, и построенную на отрезке $[-R; R]$ как на диаметре. Тогда согласно лемме Жордана

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(p)e^{pt}dp = 0.$$

Переходя в равенстве (14.8) к пределу при $R \to +\infty$ и учитывая равенство (14.6), получим (14.7). Теорема доказана. ■

Пример 3. С помощью вычетов найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{p}{p^2+4p+5}.$$

Решение: Особыми точками функции $F(p)$ являются полюсы первого порядка $p_1 = -2 + i$, $p_2 = -2 - i$. Согласно теореме 3

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{res}_{p=p_k} \left(F(p)e^{pt}\right) = \lim_{p \to -2+i} \frac{pe^{pt}}{2p+4} + \lim_{p \to -2-i} \frac{pe^{pt}}{2p+4} =$$

$$= \frac{(-2+i)e^{-2t+it}}{2i} + \frac{(-2-i)e^{-2t-it}}{2(-i)} = \frac{e^{-2t}}{2i}\left[2\left(e^{-it} - e^{it}\right) + i\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right] =$$

$$= e^{-2t}(\cos t - 2\sin t).$$

14.4. Нахождение преобразования Фурье с помощью вычетов

Пусть функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой на всей вещественной оси и кусочно-гладкой на любом конечном отрезке вещественной оси. Тогда имеют место равенства:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad (14.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (14.10)$$

которые называются соответственно прямым и обратным преобразованием Фурье функции $f(t)$.

Если $f(t) -$ четная функция, то рассматривают пару косинус-преобразования Фурье:

$$F_{\text{c}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \qquad (14.11)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_{\text{c}}(\omega)\cos\omega t\, d\omega. \qquad (14.12)$$

При этом $F(\omega) = F_{\text{c}}(\omega)$.

Если $f(t) -$ нечетная функция, то рассматривают пару синус-преобразования Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega t\, d\omega.$$

При этом $F(\omega) = -iF_s(\omega)$.

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$f(t) = \frac{1+t}{1+t^2}.$$

Решение: Для решения задачи воспользуемся теоремой 1 и замечанием 1 к этой теореме. Если $\omega > 0$, то

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2\pi i) \sum_{Imz_k<0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{-i\omega z} \right] =$$

$$= -\sqrt{2\pi} i \operatorname*{res}_{z=-i} \left[\frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{1+z^2} \right] = -\sqrt{2\pi} i \lim_{z\to -i} \frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{(1+z^2)'} =$$

$$= -\sqrt{2\pi} i \lim_{z\to -i} \frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{2z} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-i) e^{-\omega}.$$

Если $\omega < 0$, то

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi i) \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{-i\omega z} \right] =$$

$$= \sqrt{2\pi} i \operatorname*{res}_{z=i} \left[\frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{1+z^2} \right] = \sqrt{2\pi} i \lim_{z\to i} \frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{(1+z^2)'} =$$

$$= \sqrt{2\pi} i \lim_{z\to i} \frac{(1+z) e^{-i\omega z}}{2z} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i) e^{\omega}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получим ответ.

Ответ: $F(\omega) = \sqrt{\pi/2}\,(1 - i \operatorname{sgn} \omega) e^{-|\omega|}$.

Пример 5. Найти косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

Решение: Используя формулу (14.11) и полагая $\omega > 0$, получим:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega x \, dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega x}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} \left[\frac{e^{i\omega z}}{1+z^2} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \lim_{z\to i} \left[\frac{e^{i\omega z}}{2z} \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega}.$$

Так как $F_c(\omega)$ – четная функция, то $F_c(\omega) = \sqrt{\pi/2}\, e^{-|\omega|}$.

Согласно (14.12)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega} \cos \omega x \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\omega} \cos \omega x \, dx.$$

Ответ: $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\omega|}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\omega} \cos \omega x \, dx.$

ЛЕКЦИЯ № 15. ТЕОРЕМА О ЛОГАРИФМИЧЕСКОМ ВЫЧЕТЕ. ПРИНЦИП АРГУМЕНТА. ТЕОРЕМА РУШЕ

15.1. Теорема о логарифмическом вычете

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением, быть может, конечного числа полюсов, а простая замкнутая кривая γ лежит в области D и не проходит через нули и полюсы функции $f(z)$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \tag{15.1}$$

где N − число нулей, P − число полюсов функции $f(z)$ внутри контура γ с учетом их кратностей.

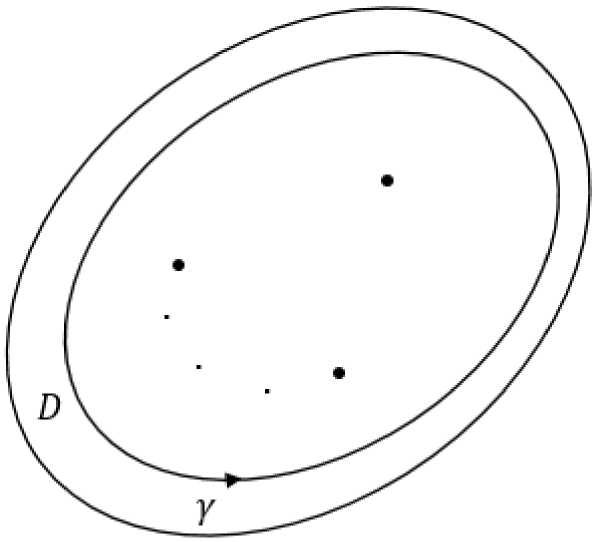

Рис. 15.1

Доказательство: Особыми точками функции

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

являются нули и полюсы функции $f(z)$. Согласно первой теореме о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} F(z)dz = \sum_{k} \operatorname*{res}_{z=z_k} F(z),$$

где z_k − нули и полюсы функции $f(z)$, лежащие внутри контура γ.

Пусть $z = a$ − нуль кратности n функции $f(z)$. Тогда

$$f(z) = (z-a)^n g(z),$$

где функция $g(z)$ аналитична в точке a и $g(a) \neq 0$. Поэтому

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}g(z) + (z-a)^n g'(z)}{(z-a)^n g(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=a} F(z) = n$.

Пусть теперь $z = b$ − полюс порядка p функции $f(z)$. Тогда

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-b)^p},$$

где функция $h(z)$ аналитична в точке b и $h(b) \neq 0$. Поэтому

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \left(\frac{h'(z)(z-b)^p - p(z-b)^{p-1}h(z)}{(z-b)^{2p}}\right)\Big/\left(\frac{h(z)}{(z-b)^p}\right) =$$

$$= \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{p}{z-b}.$$

Следовательно, $\operatorname*{res}_{z=b} F(z) = -p$.

Суммируя вычеты по всем полюсам и нулям функции $f(z)$, лежащим внутри контура γ, получим равенство (15.1). ■

Определение. Выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно кривой γ.▲

15.2. Принцип аргумента

Теорема 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D за исключением, быть может, конечного числа полюсов, а простая замкнутая кривая γ лежит в области D и не проходит через нули и полюсы функции $f(z)$.

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma} \arg f(z) = N - P, \tag{15.2}$$

где N − число нулей, P − число полюсов функции $f(z)$ внутри контура γ с учетом их кратностей, а $\Delta_{\gamma} \arg f(z)$ − приращение аргумента функции $f(z)$ при обходе кривой γ в положительном направлении.

Доказательство: По условию теоремы функция $f(z)$ аналитична в окрестности кривой γ и $f(z) \neq 0$ на γ. Следовательно, $f(z) \neq 0$ в некоторой окрестности γ и в этой окрестности можно выделить однозначную ветвь аналитической функции

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg z.$$

Так как $(\ln f(z))' = f'(z)/f(z)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\gamma \ln f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\Delta_\gamma \ln|f(z)| + i\Delta_\gamma \arg f(z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z).$$

В последней цепочке равенств было учтено, что $\ln|f(z)|$ − однозначная функция, поэтому $\Delta_\gamma \ln|f(z)| = 0$. Теперь из (15.1) следует (15.2). ■

Равенство (15.2) известно под названием *принцип аргумента.*

Геометрический смысл $(2\pi)^{-1}\Delta_\gamma \arg f(z)$.

Пусть γ' − образ кривой γ при отображении $w = f(z)$. При полном обходе контура γ точкой z соответствующая точка w описывает контур γ' (рис.15.2). Величина $(2\pi)^{-1}\Delta_\gamma \arg f(z)$ – это полное число оборотов, совершаемых радиус-вектором $\boldsymbol{w}$ точки w при движении этой точки по замкнутому контуру γ'.

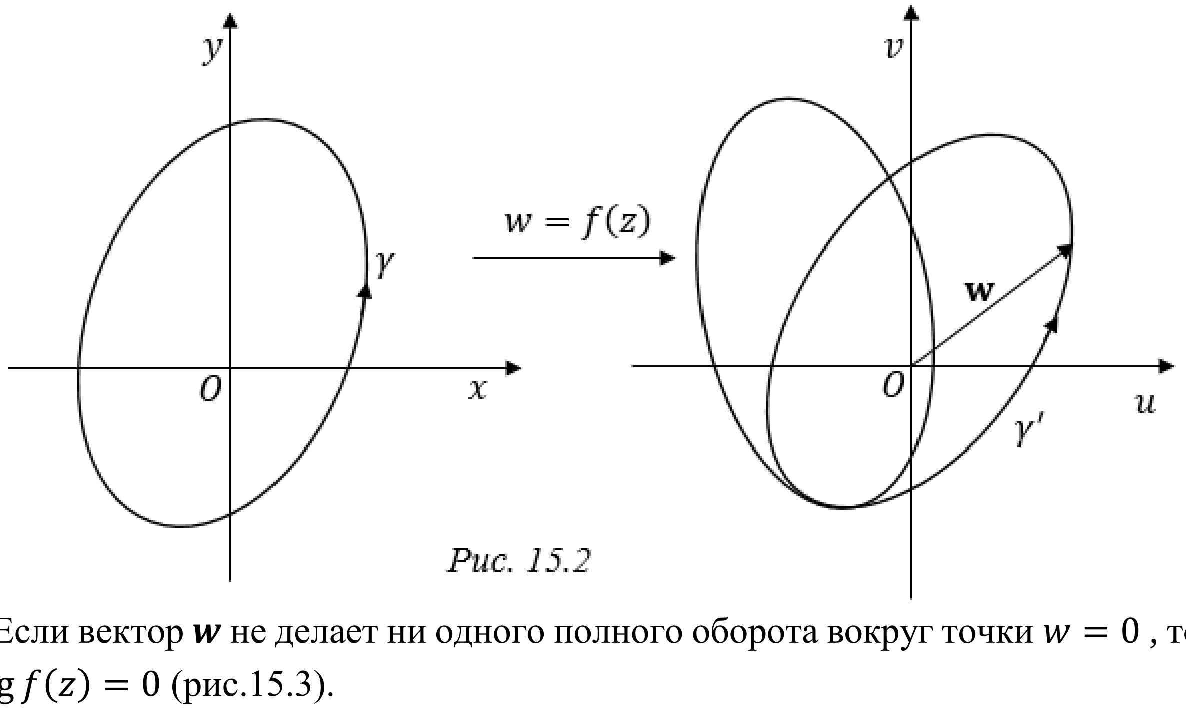

Рис. 15.2

Если вектор $\boldsymbol{w}$ не делает ни одного полного оборота вокруг точки $w = 0$, то $\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$ (рис.15.3).

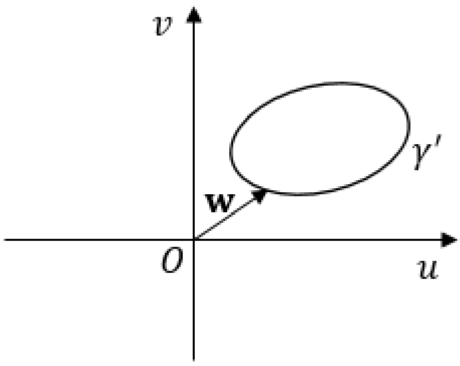

Рис. 15.3

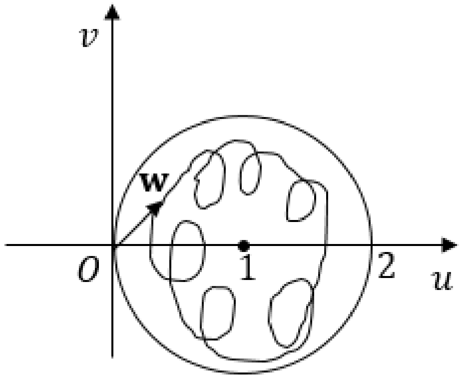

Рис. 15.4

15.3. Теорема Руше. Основная теорема алгебры

Теорема 3. (Теорема Руше) Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в ограниченной односвязной области D и на ее границе Γ и пусть

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad \forall z \in \Gamma. \tag{15.3}$$

Тогда функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей.

Доказательство: В силу условия (15.3) $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Gamma$. Кроме того,

$$|F(z)| = |f(z) + g(z)| \geq \big||f(z)| - |g(z)|\big| = |f(z)| - |g(z)| > 0 \qquad \forall z \in \Gamma.$$

Следовательно, на границе Γ функция $F(z)$ в ноль не обращается.

Пусть N_F и N_f – число нулей функций $F(z)$ и $f(z)$ в области D соответственно. В силу теоремы 2

$$N_F = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F(z).$$

Так как

$$F(z) = f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

то

$$\arg F(z) = \arg f(z) + \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right),$$

$$\Delta_\Gamma \arg F(z) = \Delta_\Gamma \arg f(z) + \Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Рассмотрим функцию

$$w(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}.$$

Так как $w(z) - 1 = g(z)/f(z)$, то в силу условия (15.3) теоремы

$$|w(z) - 1| < 1 \quad \forall z \in \Gamma.$$

То есть при обходе точкой z конура $\varGamma$ точка w описывает кривую, лежащую внутри контура $|w-1|<1$ (рис. 15.4). Это означает, что вектор $\boldsymbol{w}$ не делает ни одного полного оборота вокруг точки $w=0$. Следовательно,

$$\Delta_{\varGamma}\arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)=0.$$

Тогда

$$N_F=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\varGamma}\arg F(z)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\varGamma}\arg f(z)=N_f.\ \blacksquare$$

Задача. Найти число нулей функции $F(z)=z^5+2z^2+8z+1$

а) в круге D_1: $|z|<1$;

б) в кольце K: $1<|z|<2$.

Решение: а) В круге D_1 положим $f(z)=8z,\ \ g(z)=z^5+2z^2+1$. Тогда на границе $\varGamma_1$ этого круга $|f(z)|=8|z|=8,$

$$|g(z)|=|z^5+2z^2+1|\le|z|^5+2|z|^2+1=1+2+1=4.$$

Поэтому $|f(z)|>|g(z)|\quad\forall z\in\varGamma_1$. Согласно теореме Руше в области D_1

$$N_F=N_f=1.$$

Ответ: 1.

б) Кольцо K не является односвязной областью. Поэтому сначала найдем число нулей функции $F(z)$ в круге D_2: $|z|<2$ с границей $\varGamma_2$: $|z|=2$. В этом случае положим $f(z)=z^5,\ \ g(z)=2z^2+8z+1$. На границе $\varGamma_2$ имеют место соотношения:

$$|f(z)|=|z|^5=32,$$

$$|g(z)|=|2z^2+8z+1|\le 2|z|^2+8|z|+1=8+16+1=25.$$

Поэтому $|f(z)|>|g(z)|\quad\forall z\in\varGamma_2$. Согласно теореме Руше в области D_2 $N_F=N_f=5$. А так как на границах $\varGamma_1,\ \varGamma_2$ функция $F(z)$ в ноль не обращается, то число нулей функции $F(z)$ в кольце K равно разности нулей этой функции в областях D_2 и D_1: $5-1=4$.

Ответ: 4.

Теорема 4. (Основная теорема высшей алгебры) Многочлен n -ой степени с комплексными коэффициентами имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Доказательство: Пусть

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n,\ a_0\neq 0.$$

Положим

$$f(z)=a_0z^n,\quad g(z)=a_1z^{n-1}+\dots+a_{n-1}z+a_n,\ a_0\neq 0.$$

Тогда $P_n(z) = f(z) + g(z)$.

Так как $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)/f(z) = 0$, то $\exists R > 0$: $\forall z,\ |z| \geq R$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1. \tag{15.4}$$

Следовательно, $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma,\ \Gamma$: $|z| = R$. Согласно теореме Руше $N_{P_n} = N_f = n$ внутри контура Γ. А так как в силу (15.4) многочлен $P_n(z)$ не имеет корней в области $|z| \geq R$, то теорема доказана. ■

ЛЕКЦИЯ № 16. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

16.1. Теорема Лиувилля

Теорема 1 (теорема Лиувилля). Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости и ограничена, т.е. $\exists M > 0$: $|f(z)| \leq M$. Тогда функция $f(z)$ есть константа.

Доказательство: В любом круге $|z| \leq R$ функцию $f(z)$ можно представить степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}}, \qquad \gamma_R: |\xi| = R.$$

Тогда

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_R^+} \frac{|f(\xi)||d\xi|}{|\xi|^{n+1}} \leq \frac{M}{2\pi R^{n+1}} \oint\limits_{\gamma_R^+} |d\xi| =$$

$$= \frac{M \cdot 2\pi R}{2\pi R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Так как

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M}{R^n} = 0, n = 1,2,\ldots,$$

а коэффициенты c_n от R не зависят, то $c_n = 0$ при $, n = 1,2,\ldots$, следовательно,

$$f(z) = c_0. \quad ■$$

16.2. Теорема о нулях аналитической функции

Теорема 2 (о нулях аналитической функции). Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке a и $f(a) = 0$. Тогда либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a, либо существует такая окрестность точки a, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от a.

Доказательство: Рассмотрим разложение функции $f(z)$ в степенной ряд в окрестности точки $z = a$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Возможны следующие два случая:

1) $c_n = 0, n = 0,1,2, \dots$;

2) $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0, c_m \neq 0$.

В первом случае $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки a. А во втором случае точка $z = a$ является нулем порядка m для функции $f(z)$. Тогда функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = (z-a)^m h(z),$$

где $h(z)$ аналитична в точке a и $h(a) \neq 0$. В силу непрерывности функции $h(z)$ в некоторой окрестности точки $z = a$ функция $h(z)$ отлична от нуля. Следовательно, функция $f(z)$ в этой окрестности не имеет нулей, отличных от a. ■

16.3. Теорема единственности

Теорема 3 (теорема единственности). Пусть

1) функция $f(z)$ аналитична в области D;

2) $\{z_n\}$ – последовательность различных точек, принадлежащих области D, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,\ a \in D$;

3) $f(z_n) = 0,\ n = 1,2, \dots$

Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.

Доказательство: Построим круг $K\colon |z-a| = \rho$, где $\rho -$ расстояние от точки a до граница области D. В круге K функция $f(z)$ аналитична и

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{16.1}$$

Предположим, что не все коэффициенты ряда (16.1) равны нулю. Согласно теореме 2 тогда существует некоторая окрестность точки a, в которой $f(z) \neq 0$.

Но это противоречит условиям 2) и 3) теоремы 3. Значит, предположение неверно и $f(z) \equiv 0$ в круге K.

Пусть $z = b -$ произвольная точка области D. Покажем, что $f(b) = 0$. Соединим точки a и b ломаной $\gamma \in D$. Пусть $\rho_0 -$ расстояние от ломаной γ до границы области D. Построим круги $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ с центрами в последовательных точках $\tilde{z}_0 = a, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n = b$, принадлежащих ломаной γ, радиуса ρ_0 Точки $\tilde{z}_j$ выберем так, чтобы

$$\left|\tilde{z}_j - \tilde{z}_{j-1}\right| < \frac{\rho_0}{2}, \qquad j = 1,2, \dots, n.$$

Тогда все круги K_j $(j = 0,1, \dots, n-1)$ лежат в области D, при этом центр круга K_{j+1} лежит внутри круга K_j (рис. 16.1).

Так как $\rho_0 \geq \rho$, то $K \supset K_0$. Следовательно, $f(z) \equiv 0$ в круге K_0.

Рассмотрим круг K_1: $|z - \tilde{z}_1| < \rho_0$. Так как $\tilde{z}_1 \in K_0$, то $f(\tilde{z}_1) = 0$. Разложим функцию $f(z)$ в круге K_1 в ряд Тейлора:

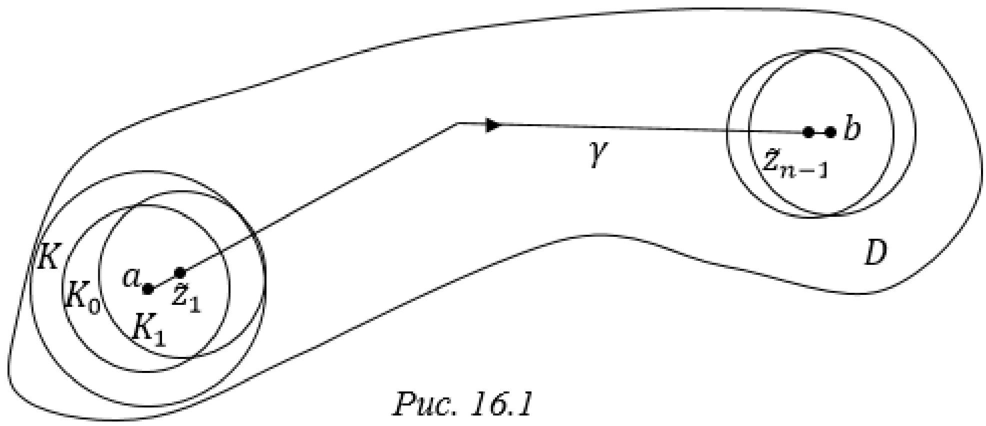

Рис. 16.1

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} (z - \tilde{z}_1)^n.$$

Согласно теореме 2 либо $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $U(\tilde{z}_1)$ точки $\tilde{z}_1$, либо существует некоторая окрестность точки $\tilde{z}_1$, в которой нет нулей функции $f(z)$, отличных от $\tilde{z}_1$. Согласно построению $f(z) \equiv 0$ в $U(\tilde{z}_1)$. Следовательно, $c_n^{(1)} = 0, n = 0,1,2, \dots$ и функция $f(z) \equiv 0$ в круге K_1.

Продолжая эти рассуждения, получаем, что функция $f(z)$ тождественно равна нулю во всех кругах K_j $(j = 0,1, \dots, n-1)$, так что $f(b) = 0$. ■

Следствие 1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и $f(z) \equiv 0$ на множестве E, которое содержится в области D и имеет предельную точку $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.

Доказательство: По определению предельной точки существует последовательность различных точек $\{z_n\}, n = 1,2, \dots$, такая, что $z_n \in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Так как $f(z_n) = 0$ при всех n и точки z_n лежат в области D, то $f(z) \equiv 0$ в области D по теореме единственности. ■

Следствие 2. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и совпадают на множестве E, которое содержится в области D и имеет предельную точку $a \in D$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в области D.

Доказательство: Функция $h(z) = f(z) - g(z)$ аналитична в области D и $h(z) \equiv 0 \; \forall z \in E$. В силу следствия 1 $h(z) \equiv 0$ в области D. Поэтому $f(z) \equiv g(z)$ в области D. ■

Замечание. Рассмотрим функцию $f(z) = \sin(1/z)$. Для последовательности точек $z_n = 1/(\pi n), n = \pm 1, \pm 2, \dots$, справедливы равенства $f(z_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Но тем не менее $f(z) \not\equiv 0$. Этот пример не противоречит теореме единственности, так как предельная точка $a = 0$ последовательности $\{z_n\}$ не является точкой аналитичности функции $f(z)$.

На практике чаще используют другой, ослабленный вариант теоремы единственности, который сформулируем в виде следствия 3.

Следствие 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и $f(z) \equiv 0$ на некоторой кривой γ, лежащей в области D, или некотором круге $K \subset D$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в области D.

16.4. Аналитическое продолжение

Определение. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(z)$ определена на множестве E;

2) функция $F(z)$ аналитична в области D, содержащей множество E;

3) $F(z) \equiv f(z)$ на множестве E.

Тогда функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением функции* $f(z)$ (*с множества E в область D*). ▲

Следующее утверждение является следствием данного определения и теоремы единственности.

Теорема 4 (принцип аналитического продолжения). Пусть множество E имеет предельную точку a, принадлежащую множеству D. Тогда аналитическое продолжение с множества E в область D единственно. ■

Пример 1. Найти аналитическое продолжение функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{16.2}$$

Решение: Ряд (16.2) сходится в круге K $|z| < 1$ и является в этом круге аналитической функцией. То есть

$$f(z) = \frac{1}{z}, |z| < 1.$$

Функция $F(z) = 1/(1-z)$ аналитична в области D, которая является расширенной комплексной плоскостью с выколотой точкой $z = 1$, и $F(z) \equiv f(z)$ при $|z| < 1$. Следовательно, функция $F(z)$ является единственным аналитическим продолжением функции $f(z)$ с круга K в область D.

Пример 2. Функции $e^z, \sin z\,, \cos z$ являются аналитическим продолжением функций $e^x, \sin x\,, \cos x$ с вещественной оси на комплексную плоскость.

Пример 3. Найти аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y) = y^3 - 3x^2 y$.

Решение: Заданная функция $u(x,y)$ является гармонической, поэтому может являться действительной частью аналитической функции. Найдем мнимую часть $v(x,y)$ функции $f(z)$. Согласно условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{16.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{16.4}$$

Из (16.3) получим

$$v(x,y) = \int (-6xy)dy = -3xy^2 + g(x). \tag{16.5}$$

Из (16.4) и (16.5) следуют равенства:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3y^2 + 3x^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + g'(x).$$

Откуда получаем

$$g'(x) = 3x^2, g(x) = x^3 + C,$$
$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C.$$

Восстановим аналитическую функцию $f(z)$, используя теоремы 3 и 4:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) =$$
$$= y^3 - 3x^2 y + i(-3xy^2 + x^3 + C)|_{\substack{x\to z \\ y\to 0}} = iz^3 + iC, C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $f(z) = iz^3 + iC, C \in \mathbb{R}.$

Список литературы

1) Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 248 с.

2) Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 365 с.

3) Половинкин Е.С. Теория функций комплексного переменного. М.: ИНФРА-М, 2018 – 254 с.

4) Сборник задач по математике для ВТУЗов в 4 частях под общей редакцией А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. Ч3. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2007. — 576 с.

5) Белецкая Н.В., Драгилева И.П., Костин С.В. и др. Математический анализ, 4 семестр. Контрольные задания. Дисциплина «Математический анализ», 2 курс, дневная. — М.: МИРЭА, 2016. — 1 п.л.

6) Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. – 478 с.

7) Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520 с.

8) Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002. — 312 с.

9) Краснов М.Л., Киселев А.М. и др. Вся высшая математика. Часть 4. М.: Едиториал УРСС, 2005. Т. 4.— 349 с.

10) Теория функций комплексной переменной. Лекции и практикум. Под общей редакцией И.М. Петрушко. СПб: Издательство «Лань», 2010. — 368 с.

11) Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями. / В.Г. Крупнин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2012. – 304 с.

Сведения об авторе

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Высшей математики Института кибернетики МИРЭА − Российского технологического университета.