ЛЕКЦИЯ 7. ИНТЕГРАЛЫ ФРУЛЛАНИ, ЛАПЛАСА, ФРЕНЕЛЯ

Теорема 1. (Интегралы Фруллани)

а) Пусть

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$.

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}, \ a>0,\ b>0. \qquad (7.1)$$

Доказательство: Пусть $0<\delta_1<\delta_2<+\infty$. Тогда, используя свойство аддитивности и теорему о среднем для определенного интеграла, получим:

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)}{x}dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(bx)}{x}dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)}{ax}d(ax) -$$

$$-\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(bx)}{bx}d(bx) = \int\limits_{a\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{b\delta_1}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(z)}{z}dz + \int\limits_{b\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{b\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(z)}{z}dz - \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z}dz = f(\xi)\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{dz}{z} - f(\eta)\int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{dz}{z} =$$

$$= f(\xi)\ln\frac{b}{a} - f(\eta)\ln\frac{b}{a} = [f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a}.$$

Здесь $\xi\in(a\delta_1;\, b\delta_1)$, $\eta\in(a\delta_2;\, b\delta_2)$. Переходя к пределу при $\delta_1\to+0$, $\eta\to+\infty$, получим равенство (7.1).

б) Пусть

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z}dz$ сходится для любого $A>0$.

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}, \ a>0,\ b>0. \qquad (7.2)$$

Доказательство: Пусть $\delta_1>0$. Тогда

$$\int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}dx-\int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}dx=\int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\frac{f(ax)}{ax}d(ax)-$$

$$-\int\limits_{\delta_1}^{+\infty}\frac{f(bx)}{bx}d(bx)=\int\limits_{a\delta_1}^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz-\int\limits_{b\delta_1}^{+\infty}\frac{f(z)}{z}dz=$$

$$=\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1}\frac{f(z)}{z}dz=f(\xi)\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1}\frac{dz}{z}=f(\xi)\ln\frac{b}{a},\ \ \xi\in(a\delta_1;b\delta_1).$$

Переходя к пределу при $\delta_1\to+0$, получим равенство (7.2). ■

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I(a;b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 ax-\sin^2 bx}{x}dx,\quad a>0,\ b>0.$$

Решение: Так как $\sin^2 ax=\frac{1}{2}(1-\cos 2ax)$, $\sin^2 bx=\frac{1}{2}(1-\cos 2bx)$, то

$$I(a;b)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 ax-\sin^2 bx}{x}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos 2bx-\cos 2ax}{x}dx.$$

Функция $f(x)=\cos 2x$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (пункт б)) и $f(0)=1$. Применяя формулу (7.2), получим:

$$I(a;b)=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

Заметим, что если положить $f(x)=\sin^2 x$, то в этом случае не будут выполняться условия 2) теоремы 1 ни в пункте а), ни в пункте б).

Ответ: $I(a;b)=\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$.

Пример 2(интеграл Лапласа). Вычислить интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx. \tag{7.3}$$

Решение: Проверим выполнение условий теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

1) Функции $f(x,\alpha)=e^{-x^2}\cos 2\alpha x$, $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=-2xe^{-x^2}\sin 2\alpha x$ непрерывны на множестве

$$G=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ -\infty\le\alpha\le+\infty\}.$$

2) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$ сходится равномерно по параметру α на всей вещественной оси согласно признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|2xe^{-x^2} \sin 2\alpha x\right| \le 2xe^{-x^2} = F(x)$$

и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$ сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

3) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится $\forall \alpha$, так как

$|f(x,\alpha)| \le e^{-x^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл Эйлера-Пуассона).

Применяя к интегралу (7.3) дифференцирование по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \sin 2\alpha x dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin 2\alpha x \cdot de^{-x^2} =$$

$$= \sin 2\alpha x \cdot e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot 2\alpha \cos 2\alpha x dx = 0 - 2\alpha I(\alpha).$$

Для функции $I(\alpha)$ получили дифференциальное уравнение первого порядка:

$$I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}$. Так как $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ответ: $I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$.

Пример 3. (интегралы Лапласа) Вычислить интегралы

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad K(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx. \qquad (7.4)$$

Решение: Пусть $\alpha > 0$. Функции $f(x,\alpha) = \dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = -\dfrac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$ непрерывны на множестве $G = \{(x,\alpha) : 0 \le x < +\infty,\ \alpha_1 \le \alpha < \alpha_2\}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Покажем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$. Действительно, $\forall B > 0$

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{-x \sin \alpha x}{1+x^2} dx \right| = \left| \frac{1}{\alpha} \int\limits_B^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} d \cos \alpha x \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\alpha} \frac{x \cos \alpha x}{1+x^2} \Bigg|_B^{+\infty} - \frac{1}{\alpha} \int\limits_B^{+\infty} \cos \alpha x \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} dx \right| \le \frac{1}{\alpha} \left| 0 - \frac{B \cos \alpha B}{1+B^2} \right| +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\left|1-x^2\right|}{\left(1+x^2\right)^2} dx \right| \le \frac{1}{\alpha B} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{1+x^2} \Bigg|_B^{+\infty} \right) = \frac{1}{\alpha B} + \frac{1}{\alpha} \left| \left(0 - \frac{B}{1+B^2} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{2}{\alpha B} \le \frac{2}{\alpha_1 B}.$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_0 = \dfrac{4}{\alpha_1 \varepsilon} > 0$ такое, что $\forall B \ge B_0$ и $\forall \alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ справедливы неравенства:

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x} dx \right| \le \frac{2}{\alpha_1 B} \le \frac{2}{\alpha_1 B_0} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha) dx$ сходится равномерно по α на всей действительной оси по признаку Вейерштрасса:

$$\left| \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right| \le \frac{1}{1+x^2} = F(x), \quad \int\limits_0^{+\infty} F(x) dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Применяя к интегралу $I(\alpha)$ дифференцирование по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-x \sin \alpha x}{1+x^2} dx. \tag{7.5}$$

При $\alpha > 0$ имеет место равенство (интеграл Дирихле):

$$\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx. \tag{7.6}$$

Складывая (7.5) и (7.6), получим:

$$I'(\alpha)+\frac{\pi}{2}=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx. \tag{7.7}$$

Покажем, что для интеграла в правой части (7.7) выполнены условия теоремы о дифференцировании по параметру. Функции

$$\varphi(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)},\ x\in(0;+\infty),\alpha\in[0;\alpha_2],\\ \alpha,\ x=0,\ \alpha\in[0;\alpha_2];\end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2},x\in(0;+\infty),\alpha\in[0;\alpha_2],\\ 1,\ x=0,\ \alpha\in[0;\alpha_2]\end{cases}$$

непрерывны на множестве $G_1=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ 0\le\alpha\le\alpha_2\}$. Несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ сходится равномерно по параметру α на всей вещественной оси по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2}\ \ \forall x\ge 0,\ \forall\alpha,\ \ \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty}\varphi(x,0)dx$ сходится.

Дифференцируя (7.7) по α, получим:

$$I''(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=I(\alpha).$$

Итак, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $I(\alpha)$ четная непрерывная функция на всей вещественной оси, так как функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $G_2=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ -\infty<\alpha<+\infty\}$ и несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty}f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно по α на всей действительной оси;

2) $I''(\alpha)=I(\alpha)$ при $\alpha>0$; (7.8)

3) $I(0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$;

4) $|I(\alpha)|\le\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Из дифференциального уравнения (7.8) следует, что

$$I(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}.$$

Из ограниченности функции $I(\alpha)$ (условие 4)) следует, что $C_1=0$. Из непрерывности функции $I(\alpha)$ (условие 1)) и условия 3) следует, что $C_2=\pi/2$. Следовательно,

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\ \alpha>0.$$

В силу четности функции $I(\alpha)$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|},\ \alpha\in(-\infty;+\infty).$$

Из соотношения (7.5) следует, что $I'(\alpha)=-K(\alpha)$, $\alpha>0$. Поэтому

$$K(\alpha)=-I'(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\ \alpha>0.$$

В силу нечетности $K(\alpha)$ получим:

$$K(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sgn}\alpha,\ \alpha\in(-\infty;+\infty).$$

Заметим, что применять теорему о дифференцировании по параметру в (7.5) нельзя, так как несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{-x\sin\alpha x}{1+x^2}\right)dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{-x^2\cos\alpha x}{1+x^2}\right)dx$ расходится.

Ответ: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$, $K(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sgn}\alpha$, $\alpha\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 4. (интегралы Френеля) Вычислить *интегралы Френеля*:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx,\quad I_1=\int\limits_0^{+\infty}\cos x^2dx.$$

Решение: Выполним замену переменной $t=x^2$. Тогда

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

При $t>0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}u\right)^2} d\left(\sqrt{t}u\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}. \qquad (7.9)$$

При получении последнего равенства был использован интеграл Эйлера-Пуассона. Из (7.9) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du. \qquad (7.10)$$

Тогда

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin t dt\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du \quad .$$

Перестановка интегралов здесь сразу бы привела к окончательному результату:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=e^{i\pi/4}}\frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{res}_{z=e^{3i\pi/4}}\frac{1}{1+z^4}\right) =$$

$$= \sqrt{\pi}i\left(\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{1}{4z^3} + \lim_{z\to e^{3i\pi/4}}\frac{1}{4z^3}\right) = \sqrt{\pi}i\cdot\left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Однако, непосредственная проверка обоснования такой перестановки требует кропотливых преобразований и оценок. Воспользуемся множителем «сходимости» $e^{-\alpha^2 t}$. Введем в рассмотрение интеграл

$$J(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\ \alpha \neq 0 \ .$$

С учетом равенства (7.10)

$$J(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\sin t dt\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du \ . \qquad (7.11)$$

Покажем, что для функции $f(t,u) = e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t$ выполнены условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов.

1) Функция $f(t,u)$ непрерывна на множестве $G = \{(t,u): 0 \le t < +\infty,\ 0 \le u \le +\infty\}$.

2) Несобственный интеграл $F(u)=\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;d]\subset[0;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как $|f(t,u)|\le e^{-\alpha^2 t}$ $\forall u\in[0;d]$, $\forall t\in[0;+\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}dt$ сходится.

3) Несобственный интеграл $\Phi(t)=\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)du$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;b]\subset[0;+\infty)$. Действительно, $\forall B>0$

$$\left|\int\limits_B^{+\infty} f(t,u)du\right|=\left|\int\limits_B^{+\infty} e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t du\right|=e^{-\alpha^2 t}|\sin t|\left|\int\limits_B^{+\infty} e^{-u^2 t}du\right|=$$

$$=e^{-\alpha^2 t}|\sin t|\left|\int\limits_{B^2}^{+\infty} \frac{e^{-pt}}{2\sqrt{p}}dp\right|\le|\sin t|\frac{1}{2B}\int\limits_{B^2}^{+\infty} e^{-pt}dp=\frac{e^{-B^2 t}|\sin t|}{2Bt}\le\frac{1}{2B}.$$

Поэтому $\forall\varepsilon>0$ $\exists B_0=\dfrac{1}{\varepsilon}:$ $\forall B\ge B_0$ и $\forall t\in[0;b]$ справедливы оценки:

$$\left|\int\limits_B^{+\infty} f(t,u)du\right|\le\frac{1}{2B}\le\frac{1}{2B_0}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Это и означает, что несобственный интеграл $\Phi(t)$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;b]\subset[0;+\infty)$.

4) Существует повторный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{+\infty}|f(t,u)|dt$:

$$\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{+\infty}|f(t,u)|dt=\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t\right|dt\le$$

$$\le\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{du}{\alpha^2+u^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{u}{\alpha}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Выполнены условия теоремы о перестановке несобственных интегралов. Поэтому из (7.11) получим

$$J(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} dt\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\left(u^2+\alpha^2\right)}\sin t du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} du\int\limits_0^{+\infty} e^{-t\left(u^2+\alpha^2\right)}\sin t dt=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2}.$$

Функция $\varphi(u,\alpha) = \dfrac{1}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2}$ непрерывна на множестве $G_1 = \{(u,\alpha): 0 \le u < +\infty,\ -\infty < \alpha < +\infty\}$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \varphi(u,\alpha)du$ сходится равномерно по параметру α на всей числовой прямой (например, по признаку Вейерштрасса). Поэтому функция $J(\alpha)$ непрерывна на всей действительной оси и $\lim\limits_{\alpha\to 0} J(\alpha) = J(0)$.

Тогда

$$I = J(0) = \lim_{\alpha\to 0} J(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Такое же значение получается и для интеграла I_1 [1, стр. 445-450].

Ответ: $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

[1] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — М.: Дрофа, 2004. — 711 с.