1 Геометрия Лобачевского

1.1 Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости

Обозначим через $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ верхнюю полуплоскость с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда длина параметризованной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, находится по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_{\gamma} ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{y(t)}\, dt.$$

Например, длина дуги окружности $\gamma: \ x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 < \alpha \le t \le \beta < \pi$ не зависит от R и равна

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Длина вертикального отрезка $\gamma: \ x = a$, $y = t$, $y_1 \le t \le y_2$, равна

$$l(\gamma) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t} = \ln t\Bigg|_{y_1}^{y_2} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

В частности, $l(\gamma) = \infty$, если $y_1 = 0$ или $y_2 = \infty$.

Метрика на H конформно-евклидова – отличается множителем (зависящим от точки) от евклидовой метрики, поэтому углы на H такие же как на евклидовой плоскости.

Найдем площадь "треугольника" Δ с нулевыми углами (Рис. 1), ограниченного полупрямыми $x = \pm R$, $y > 0$, и полуокружностью $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$.

$$S(\Delta) = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{\det G}\, dxdy = \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{y^2} = 2\int\limits_0^R dx \int\limits_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} =$$

$$= -2\int\limits_0^R dx \left(\frac{1}{y}\Bigg|_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{\infty}\right) = 2\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = 2\arcsin t\Bigg|_0^1 = \pi.$$

Снова нет зависимости от R, что не удивительно, поскольку легко видеть, что гомотетия $(x, y) \mapsto (x/R, y/R)$ является изометрией. Изометрией, очевидно, является и сдвиг вдоль оси Ox, т.е. отображение $(x, y) \mapsto (x + a, y)$, $a \in \mathbb{R}$,

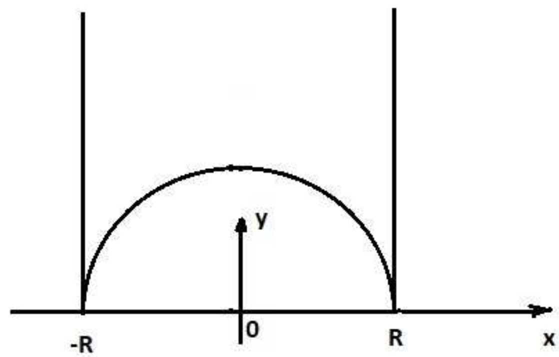

Рис. 1: Треугольник Δ с тремя нулевыми углами.

а также отражение относительно любой вертикальной прямой. Кроме того, изометрией является отображение, которое удобно задать, используя комплексную координату $z = x + iy$, $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$. Действительно,

$$ds^2 = \frac{dz\,d\bar{z}}{y^2} = \frac{dz\,d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

где $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, и мы видим, что при замене z на $-\frac{1}{z}$ метрика не меняется:

$$\frac{d(-\frac{1}{z})d(-\frac{1}{\bar{z}})}{(\operatorname{Im}(-\frac{1}{z}))^2} = \frac{\frac{dz}{z^2}\frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}}{(\frac{y}{z\bar{z}})^2} = \frac{dz\,d\bar{z}}{y^2}.$$

Замечание 1. Композиции изометрий являются изометриями. Композиции сдвигов, гомотетий и отображения $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$ приводят к изометриям, которые являются дробно-линейными отображениями $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, сохраняющими гиперболическую плоскость H. Можно показать (доказывается в курсе ТФКП), что дробно-линейное отображение переводит H в себя тогда и только тогда, когда $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. [Пояснение: такое дробно-линейное отображение переводит вещественную ось в себя, а из того, что точка i отображается в точку, лежащую в H, следует, что $ad - bc > 0$.]

С помощью указанных изометрий можно перевести любую вертикальную полупрямую в любую верхнюю полуокружность с центром на оси Ox, а также в любую другую вертикальную полупрямую. Соответственно любая верхняя полуокружность изометриями может быть переведена в любую вертикальную полупрямую и в любую верхнюю полуокружность с центром на оси Ox. Полупрямые друг в друга переводятся сдвигами, полуокружности - сдвигами и гомотетиями. Изометрия $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$ переводит полуокружность $|z-1| = 1$, $y > 0$, в полупрямую $x = -1/2$, $y > 0$. [Пояснение: $|z-1| = 1 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 1$. Если $w = -\frac{1}{z}$, то $z = -\frac{1}{w}$ и мы получаем соотношение $(-\frac{1}{w} - 1)(-\frac{1}{\bar{w}} - 1) = 1$. Поэтому $(1+w)(1+\bar{w}) = w\bar{w}$, т.е. $1 + w + \bar{w} = 0$. Полагая $w = u + iv$, получаем $u = -1/2$.]

Задача 1. *Отображение* $z \mapsto -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$ *в декартовых координатах записывается как* $(x, y) \mapsto (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. *Установить инвариантность метрики на* H *без использования комплексной координаты* z.

Для параметризованной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, соединяющей точки (a, c) и (a, d), $c < d$, лежащие на вертикальной полупрямой $x = a$, $y > 0$, имеем

$$\int\limits_{\gamma} ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{y(t)}\, dt \ge \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{y}^2(t)}}{y(t)}\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)}\, dt \ge \int\limits_{c}^{d} \frac{dy}{y} = \ln\frac{d}{c}.$$

Следовательно, вертикальные полупрямые, а значит и полуокружности с центром на оси Ox, являются кратчайшими (геодезическими) на плоскости Лобачевского. Расстояние между двумя точками, равное по определению инфинуму длин гладких кривых, соединяющих эти точки, равно длине отрезка геодезической, концами которой являются эти точки. На H реализуется неевклидова геометрия: точками назовем точки полуплоскости H, а прямыми – геодезические на H, т.е. вертикальные полупрямые и полуокружности с центром на оси Ox. Легко проверить, что все аксиомы, кроме пятой выполняются. Например, через две точки можно провести единственную прямую (вертикальную полупрямую, если первые координаты точек одинаковы, а в противном случае – полуокружность, центр которой – точка пересечения оси Ox с перпендикуляром к середине прямолинейного отрезка, соединяющего заданные точки). Наоборот, через точку вне прямой на H проходит бесконечно много прямых, не пересекающихся с данной прямой, т.е. имеет место отрицание пятого постулата (точнее отрицание эквивалентного пятому постулату утверждения). Этот пучок прямых заключен между двумя предельными прямыми, их, обычно, и называют прямыми параллельными заданной прямой (см. Рис. 2), а остальные прямые пучка называют расходящимися или сверхпараллельными.

Треугольником на H будем называть *геодезический треугольник*, т.е. трехвершинную фигуру, стороны которой – отрезки геодезических.

Найдем площадь треугольника $\Delta_{AB\infty}$, у которого одна из сторон – дуга полуокружности с центром на оси Ox, а две другие стороны – вертикальные полупрямые (см. Рис. 3).

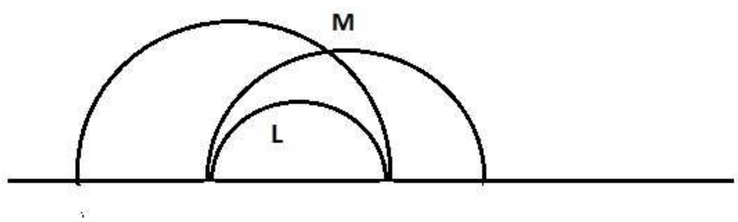

Рис. 2: Точка M, не лежащая на прямой L и две (предельные) параллельные L прямые.

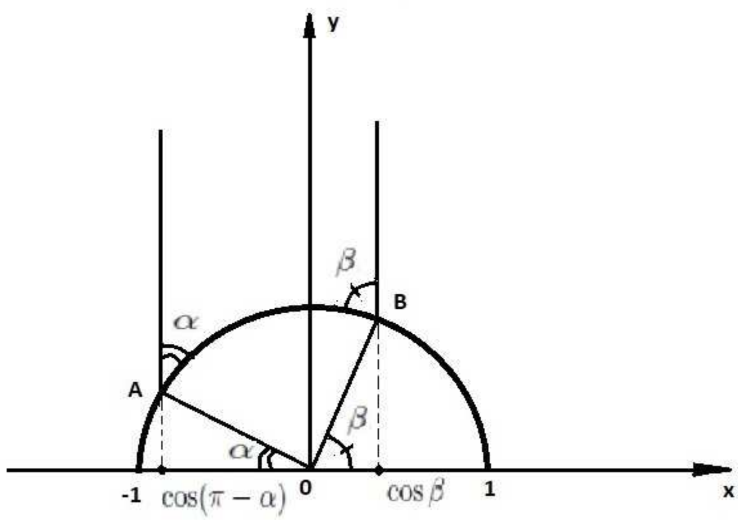

Рис. 3: Треугольник $\Delta_{AB\infty}$ с нулевым углом.

$$S(\Delta_{AB\infty}) = \iint\limits_{\Delta_{AB\infty}} \sqrt{\det G}\, dxdy = \iint\limits_{\Delta_{AB\infty}} \frac{dxdy}{y^2} = \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} dx \left(-\frac{1}{y} \Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \right) = \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x \Bigg|_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} = \pi - \alpha - \beta.$$

Теперь можно найти площадь треугольника, у которого одна из сторон – вертикальный отрезок (см. Рис. 4):

$$S(\Delta_{ABC}) = S(\Delta_{AB\infty}) - S(\Delta_{CB\infty}) = \pi - \alpha - (\beta + \delta) - (\pi - (\pi - \gamma) - \delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

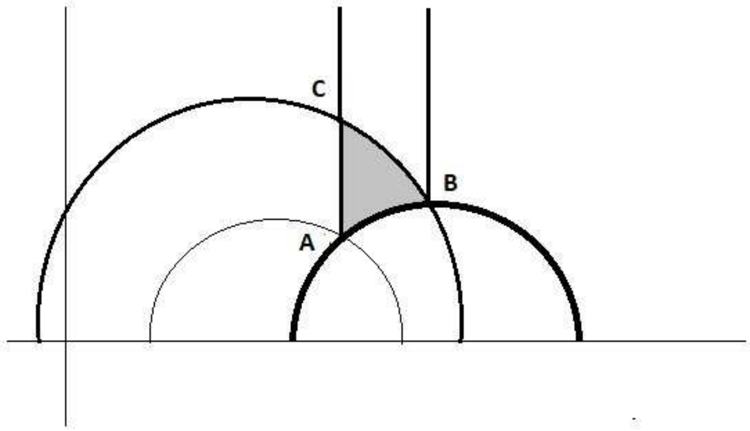

Рис. 4: $\Delta_{ABC} = \Delta_{AB\infty} \setminus \Delta_{CB\infty}$.

Произвольный треугольник (см. Рис. 5) можно разрезать вертикальным отрезком на два треугольника, к которым применимо предыдущее вычисление, и получить, что *площадь произвольного треугольника равна π минус сумма его углов*.

Получается, что в отличие от евклидовой геометрии, в неевклидовой сумма углов треугольника всегда меньше π (это утверждение можно принять за аксиому в неевклидовой геометрии вместо отрицания пятого постулата).

1.2 Модель на единичном круге

Дробно-линейное преобразование $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ переводит верхнюю полуплоскость H в круг радиуса 1 с центром в начале координат. Доказательство следует из *кругового свойства* дробно-линейных преобразований: обобщенная окружность (т.е. окружность или прямая на плоскости) переходит при дробно-линейном преобразовани в обобщенную окружность (доказывается в курсе ТФКП). Ось Ox переходит в единичную окружность $|z| = 1$, поскольку

$$|w(x)| = \left|\frac{x-i}{x+i}\right| = |x-i|/|x+i| = 1$$

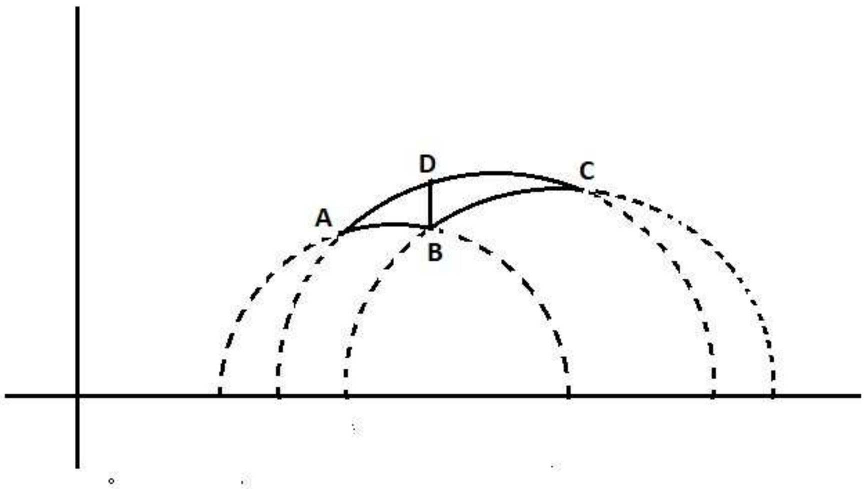

Рис. 5: DB – вертикальный отрезок, $\Delta_{ABC} = \Delta_{ABD} \cup \Delta_{BDC}$.

(модули сопряженных комплексных чисел равны). Так как $w(i) = 0$, полуплоскость H отображается на единичный круг $|w| < 1$. При этом метрика на H индуцирует метрику на круге. Геодезическими в круге являются образы геодезических в H, т.е. диаметры и дуги окружностей, перпендикулярных окружности $|z| = 1$ (последнюю называют абсолютом). Это утверждение легко следует из кругового свойства и из свойства сохранения углов.

Задача 2. Во что переходят вертикальные полупрямые? Какие геодезические на H переходят в диаметры?

ОТВЕТ: Поскольку $w(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z-i}{z+i} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1-i/z}{1+i/z} = 1$, вертикальные полупрямые отображаются в дуги окружностей, перпендикулярных окружности $|z| = 1$ с одним из концов в точке 1 (эти дуги – пересечения с кругом окружностей, проходящих через точку 1, и с центрами на прямой $x = 1$, см. Рис. 6); полупрямая, состоящая из чисто мнимых точек, отображается в диаметр $(-1, 1)$.

Кроме того, в диаметры переходят полуокружности с центрами на вещественной оси, проходящие через точку i, поскольку $w(-i) = \infty$. Выразив z через w (см. формулу ниже) получаем, что диаметр с концами η и $-\eta$ (где $|\eta| = 1$) является образом полуокружности в H с концами $x_1 = i\,\dfrac{1+\eta}{1-\eta}$ и $x_2 = i\,\dfrac{1-\eta}{1+\eta} = -1/x_1$ и центром на оси Ox. По другому можно сказать, что в диаметры переходят полуокружности полуплоскости H с концами в точках $-1/R$ и R, $R > 0$ (с центром в точке $\frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$ и диаметра $R + \frac{1}{R}$). Расстояние от центра $\frac{1}{2}(R - \frac{1}{R})$ до точки i равно $\frac{1}{2}(R + \frac{1}{R})$ – радиусу полуокружности, т.е. полуокружность проходящит через точку i. Концы такой полуокружности при отображении w переходят в диаметрально противоположные точки $\pm\frac{R-i}{R+i}$. Если устремить R

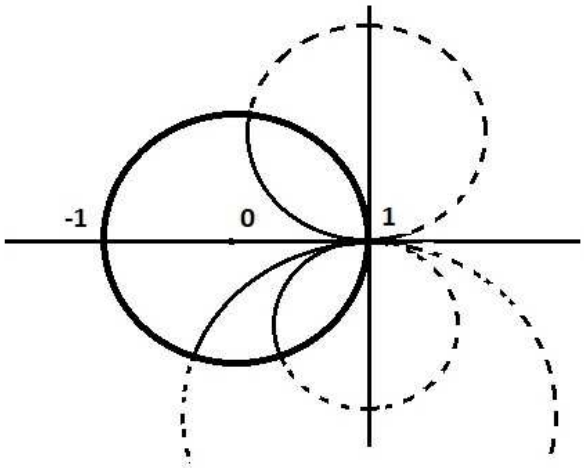

Рис. 6: Образы вертикальных полупрямых.

к $+\infty$ или к 0, то в пределе получим полупрямую в H, состоящую из чисто мнимых точек. Последняя, как мы знаем, отображается в диаметр $(-1,1)$ круга $|w|<1$.

Найдем теперь метрику на единичном круге $|w|<1$. Обратное преобразование имеет вид:

$$z = i\,\frac{1+w}{1-w} = -i + \frac{2i}{1-w},$$

$w = u+iv$, откуда получаем:

$$dz = \frac{2i}{(1-w)^2}\,dw,\ \text{поэтому}\ d\bar z = -\frac{2i}{(1-\bar w)^2}\,d\bar w,\ \text{и, следовательно,}\quad dz\,d\bar z = \frac{4\,dw\,d\bar w}{(1-w)^2(1-\bar w)^2}.$$

$$z = i\,\frac{1+w}{1-w} = i\,\frac{(1+w)(1-\bar w)}{(1-w)(1-\bar w)} = i\,\frac{1+w-\bar w-w\,\bar w}{(1-w)(1-\bar w)} = i\,\frac{w-\bar w}{(1-w)(1-\bar w)} + i\,\frac{1-w\,\bar w}{(1-w)(1-\bar w)},$$

откуда $\mathrm{Im} z = \dfrac{1-w\,\bar w}{(1-w)(1-\bar w)}$ (и $\mathrm{Re} z = i\,\frac{w-\bar w}{(1-w)(1-\bar w)} = \frac{-2v}{(1-w)(1-\bar w)}$). Таким образом,

$$\frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{dz\,d\bar z}{(\mathrm{Im}\,z)^2} = \frac{4\,dw\,d\bar w}{(1-w)^2(1-\bar w)^2} : \frac{(1-w\,\bar w)^2}{(1-w)^2(1-\bar w)^2} = 4\,\frac{dw\,d\bar w}{(1-w\,\bar w)^2} = 4\,\frac{du^2+dv^2}{(1-(u^2+v^2))^2}.$$

т.е. метрика на единичном круге $u^2+v^2<1$ имеет следующий вид:

$$ds^2 = 4\,\frac{du^2+dv^2}{(1-(u^2+v^2))^2}.$$

Возвращаясь к комплексной координате, запишем еще раз дифференциал длины дуги: $ds = \dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ на H и $ds = \dfrac{2|dw|}{1-|w|^2}$ на единичном круге $|w| < 1$ соответственно.

Задача 3. Как выглядят в моделях Пуанкаре (на полуплоскости H и круге $|w| < 1$) a) окружности, b) эквидистанты, c) орициклы?

РЕШЕНИЕ: a) Окружностью в планиметрии Лобачевского, как и в планиметрии Евклида, называют множество точек равноудаленных от одной точки, называемой центром этой окружности. Чтобы избежать путаницы, будем добавлять к названиям объектов геометрии Лобачевского символ L, так прямые и окружности в планиметрии Лобачевского будем называть L-прямыми и L-окружностями, радиус и центр L-окружности в смысле планиметрии Лобачевского будем называть ее L-радиусом и L-центром и т.п. Таким образом, L-прямая в модели на полуплоскости H – это либо вертикальная полупрямая (без начальной точки, лежащей на оси абсцисс), либо верхняя полуокружность с центром на оси абсцисс (без граничных точек, лежащих на оси абсцисс), где полупрямая и полуокружность и ее центр понимаются в евклидовом смысле.

В модели на единичном круге $|w| < 1$ умножение на $e^{i\varphi}$, т.е. поворот на угол φ, являеляется изометрией для любого φ, что немедленно следует из соотношения $ds = \dfrac{2|dw|}{1-|w|^2}$. Поэтому окружность с центром в начале координат является также и L-окружностью с тем же L-центром. Если радиус окружности равен a, т.е. окружность задается уравнением $|w| = a$, где $0 < a < 1$, то L-радиус этой L-окружности равен

$$\int_0^a \frac{2\,dx}{1-x^2} = \ln\frac{1+a}{1-a} \in (0, +\infty).$$

Любую L-окружность изометрией можно перевести в любую другую L-окружность того же радиуса. В обеих моделях изометриями являются дробно линейные преобразования. Последние обладают круговым свойством, поэтому L-окружность и в той и в другой модели является окружностью, однако ее L-центр, вообще говоря, не совпадает с центром окружности. Поясним как найти L-центр в модели на полуплоскости H. Рассмотрим окружность, лежащую в H. Она является и L-окружностью и ее вертикальный диаметр является и L-диаметром, поскольку лежит на вертикальной полупрямой ортогональной окружности. Обозначим через a начальную точку этой полупрямой на оси абсцисс. Рассмотрим полуокружность с центром в точке a, проходящую через точки касания двух касательных к окружности проведенных из точки a. Тогда эта полуокружность ортогональна как взятой окружности, так и вертикальной полупрямой с началом в точке a. Ее дуга (с концами в точках пересечения с окружностью) является L-диаметром перпендикулярным вертикальному L-диаметру, а их точка пересечения является L-центром взятой L-окружности. Чтобы построить другие L-диаметры нужно взять произвольную точку b на оси абсцисс, провести из нее касательную к окружности, а затем провести через точку касания полуокружность с центром в точке b.

b) Будем двигать некоторый L-отрезок вдоль фиксированной L-прямой так, чтобы один из концов L-отрезка лежал на этой L-прямой, а угол между L-прямой и этим L-отрезком был все время равен $90°$. Тогда свободный конец L-отрезка опишет линию, называемую *эквидистантой*. Аналогичное построение в евклидовой геометрии дает, очевидно, прямую, параллельную взятой прямой.

Возьмем в H вертикальную полупрямую $x = a$, $y > 0$ (т.е. L-прямую) и наклонную полупрямую, исходящую из той же точки на оси абсцисс. Последняя является эквидистантой, поскольку дуга полуокружности с центром в точке $(a, 0)$ (т.е. L-отрезок) перпендикулярна обеим полупрямым и, как мы видели выше, имеет длину, зависящую только от угла между полупрямыми (от радиуса полуокружности зависимости нет). Превратим вертикальную полупрямую с помощью дробно линейного преобразования в полуокружность с центром на оси абсцисс. Тогда наклонная полупрямая превратится в дугу окружности, проходящую через концы полуокружности под углом к последней равным углу между вертикальной и наклонной полупрямыми. Эта дуга и будет эквидистантой по отношению к L-прямой, представляемой полуокружностью. Аналогичным образом описываются эквидистанты и в модели единичного круга.

c) Линия ортогональная в каждой точке L-прямой из некоторого фиксированного пучка параллельных L-прямых называется *орициклом*.

Рассмотрим на H пучок всех вертикальных полупрямых. Тогда любая прямая параллельная оси абсцисс и лежащая в H, очевидно, и есть орицикл. Преобразование $z \to -1/z$ полуплоскости H переводит вертикальную полупрямую $x = 0$, $y > 0$ в себя (с неподвижной точкой i), а остальные полупрямые – в полуокружности с центром на оси абсцисс, у которых один из концов совпадает с началом координат. Горизонтальные прямые при этом переходят в окружности касающиеся оси абсцисс в начале координат с удаленной точкой касания. Остальные орициклы получаются из построенных сдвигом вдоль оси абсцисс. Таким образом, орициклы на H – это либо горизонтальные прямые в H, либо окружности, касающиеся оси абсцисс и берущиеся без точки касания.

Аналогично в модели единичного круга орициклы – это окружности касающиеся граничной окружности $|w| = 1$, взятые без точки касания.

1.3 Псевдосфера

Трактрисой называется кривая, у которой длина отрезка касательной от точки касания до пересечения касательной с осью Ox равна константе.

Обозначим эту константу через a, а угол наклона касательной через φ. Тогда $y = a \sin\varphi$, следовательно, $dy = a \cos\varphi \, d\varphi$. Поскольку $y' = \mathrm{tg}\varphi$, получаем $dy = \mathrm{tg}\varphi \, dx$, поэтому $\mathrm{tg}\varphi \, dx = a \cos\varphi \, d\varphi$. Таким образом,

$$dx = a\frac{\cos^2 d\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = a\frac{1-\sin^2 d\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = a\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \sin\varphi\right) d\varphi$$

Интегрируя, получаем

$$x = a\int \frac{1}{\sin\varphi}\, d\varphi - a\int \sin\varphi \, d\varphi = a\left(\ln\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) + C.$$

Так как $x(\pi/2) = C$, а с другой стороны $x(\pi/2) = 0$, получаем $C = 0$.

Таким образом, при $x \geq 0$ получаем следующее параметрическое задание трактрисы

$$\begin{cases} x = a\left(\ln\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) \\ y = a\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\pi/2, \pi)$$

При $x \leq 0$ имеем:

$$\begin{cases} x = -a\left(\ln\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) \\ y = a\sin\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in (0, \pi/2]$$

Поверхность вращения трактрисы вокруг оси Ox называется *псевдосферой.*

Найдем кривизну псевдосферы. У повехности вращения главные направления – касательные к мередиану (образующей) и параллели.

Найдем сначала кривизну мередиана, т.е. кривизну трактрисы. Пусть $x > 0$. Тогда

$$x' = a\left(\frac{1}{\mathrm{tg}(\varphi/2)} \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} \cdot \frac{1}{2} - \sin\varphi\right) = a\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \sin\varphi\right), \quad y' = a\cos\varphi;$$

$$x'^2 + y'^2 = a^2\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \sin\varphi\right)^2 + a^2\cos^2\varphi = a^2\mathrm{ctg}^2\varphi, \quad (x'^2 + y'^2)^{3/2} = a^3|\mathrm{ctg}\,\varphi|^3;$$

$$x'' = a\left(-\frac{\cos\varphi}{\sin^2(\varphi)} - \cos\varphi\right), \quad y'' = -a\sin\varphi; \qquad .$$

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin(\varphi)} - \sin\varphi & \cos\varphi \\ -\dfrac{\cos\varphi}{\sin^2(\varphi)} - \cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix} = a^2\mathrm{ctg}^2\varphi, \quad \frac{|\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{|\mathrm{tg}\,\varphi|}{a}$$

Итак $|k_1| = \dfrac{|\mathrm{tg}\,\varphi|}{a}$. Из теоремы Менье следует, что центр кривизны второго главного сечения (перпендикулярного образующей) лежит на оси Ox, откуда следует, что радиус R_2 соприкасающейся окружности равен расстоянию между точкой поверхности и точкой пересечения оси Ox с перпендикуляром к образующей (мередиану). Поэтому $R_2 = a\,\mathrm{tg}(\pi - \varphi) = a|\mathrm{tg}\varphi|$, $|k_2| = 1/R_2 = |\mathrm{ctg}\varphi|/a$.

Таким образом, $|K| = |k_1 k_2| = 1/a^2$, но поскольку центры кривизн главных нормальных сечений лежат по разные стороны от касательной плоскости поверхности, получаем, что кривизна псевдосферы отрицательна, следовательно, $K = -1/a^2$.

Задача 4. *Найти формулы полной и средней кривизн поверхности вращения.*

Ответ: В предположении, что поверхность образована вращением графика функции $y = f(x)$, $f(x) > 0$, вокруг оси Ox, имеем

$$K = \frac{-f''(x)}{f(x)(1 + (f'(x))^2)} \qquad \text{и} \qquad H = \frac{1 + (f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{2f(x)(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Решение. Главные направления – касательные к меридиану и параллели. Действительно, поскольку главные направления ортогональны, достаточно показать, что касательная к меридиану является главным направлением. Нормальные векторы к поверхности в точках фиксированного меридиана лежат в одной и той же плоскости, а именно в плоскости, содержащей ось вращения и данный меридиан. Отсюда немедленно следует, что касательный вектор к меридиану является собственным вектором основного оператора поверхности.

Кривизна меридиана в точке $(x_0, f(x_0))$, $f(x_0) > 0$, равна $|k_1| = \frac{|f''(x_0)|}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}}$.

Для нахождения второй главной кривизны воспользуемся теоремой Менье. Второе главное направление – по касательной к параллели. Рассмотрим нормальное сечение с той же касательной, нам нужно найти его кривизну $|k_2| = 1/R_2$. По теореме Менье центр кривизны нормального сечения проектируется в центр кривизны параллели, т.е. в точку $(x_0, 0)$. Отсюда следует, что центр кривизны нормального сечения тоже лежит на оси Ox и имеет координаты $(x_1, 0)$, где x_1 – точка пересечения оси Ox с перпендикуляром к мередиану. Уравнение перпендикуляра в плоскости xOy: $\frac{x-x_0}{-f'(x_0)} = \frac{y-f(x_0)}{1}$. Поэтому $\frac{x_1-x_0}{-f'(x_0)} = -f(x_0)$, т.е. $x_1 = x_0 + f'(x_0)f(x_0)$. Радиус соприкасающейся окружности R_2 равен расстоянию между точками $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, 0) = (x_0 + f'(x_0)f(x_0), 0)$. Таким образом,

$$R_2 = \sqrt{(f'(x_0)f(x_0))^2 + (f(x_0))^2} = f(x_0)\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}.$$

Следовательно, $|k_2| = \dfrac{1}{f(x_0)\sqrt{1+(f'(x_0))^2}}$, поэтому $|K| = |k_1 k_2| = \dfrac{|f''(x_0)|}{f(x_0)(1+(f'(x_0))^2)^2}$.

Обсудим теперь знаки кривизн. Будем рассматривать при определении основного оператора поверхности поле внутренних нормалей. Тогда, если $f(x_0) > 0$ и $f''(x_0) > 0$, то из геометрических соображений легко видеть, что в фомуле для k_1 нужно брать знак −, а для k_2 – знак +. Окончательно получаем:

$$K = \frac{-f''(x_0)}{f(x_0)(1+(f'(x_0))^2)} \qquad \text{и}$$

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{-f''(x_0)}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}} + \frac{1}{f(x_0)\sqrt{1+(f(x_0))^2}} = \frac{1+(f'(x_0))^2 - f(x_0)f''(x_0)}{f(x_0)(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}}.$$

□