Семинар 5

① Найти e^{At} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2-мя способами:

1) Операторным методом

2) как фундаментальную матрицу соответствующей системы

1) $e^{At} \risingdotseq (pE - A)^{-1}$

$$pE - A = \begin{pmatrix} p-1 & 2 \\ -1 & p-3 \end{pmatrix}, \quad \det(pE - A) = p^2 - 4p + 5$$

$$(pE-A)^{-1} = \frac{1}{p^2-4p+5} \begin{pmatrix} p-3 & -2 \\ 1 & p-1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{p-3}{p^2-4p+5} = \frac{p-2-1}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} - \frac{1}{(p-2)^2+1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t$$

$$\frac{1}{p^2-4p+5} = \frac{1}{(p-2)^2+1} \risingdotseq e^{2t}\sin t$$

$$\frac{-2}{p^2-4p+5} \risingdotseq -2e^{2t}\cdot\sin t$$

$$\frac{p-1}{p^2-4p+5} = \frac{p-2+1}{(p-2)^2+1} = \frac{p-2}{(p-2)^2+1} + \frac{1}{(p-2)^2+1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t & -2e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

2)

Построим фундаментальную матрицу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \iff \lambda = 2 \pm i$$

$$\lambda = 2 + i: \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$$

строки матрицы $A - \lambda E$ пропорциональны в этом можно убедиться домножив 2-ую строку на $-1-i$ таким образом собственный вектор находится из уравнения $\alpha + (1-i)\beta = 0 \iff$

$\alpha = i - 1 \quad \beta = 1.$ — собственный вектор.

Найдем комплекснозначное решение порождаемое этим собств. вектором

$$e^{(2+i)t} \cdot \begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} i-1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^{2t} \cdot i \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Таким образом Ф.С.Р состоящая из действительнозначных функций имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

Составим из этих функций фундаментальную матрицу системы:

$$X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

найдем $X^{-1}(0)$; $X(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det X(0) = -1 \Rightarrow X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Окончательно получим:

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0) = e^{2t}\begin{pmatrix} -\cos t - \sin t & \cos t - \sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

② Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t & -2e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t + e^{2t}\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\cos t - 3e^{2t}\sin t \\ e^{2t}\cos t + 2e^{2t}\sin t \end{pmatrix}$$

Аналогично решается задача 2 из типового расчета.

Д.з. Найти e^{At} двумя способами. Матрицу A взять из задач 853, 858.