Вариант 5

Задача 1

Из колоды в 36 карт наудачу извлекают 4 карты. Найти ряд распределения случайной величины ξ - числа тузов в выборке, $M\xi$, $D\xi$. Построить график функции распределения ξ. Найти $P\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\}$

ξ будет принимать значения от 0 до 4, так как в колоде 4 туза. Для каждого события найдём вероятность:

$$P_0 = \frac{C_{32}^4 C_4^0}{C_{36}^4} = \frac{\frac{32!}{4!\cdot 28!}\cdot 1}{\frac{36!}{4!\cdot 32!}} = \frac{32!\cdot 32!\cdot 4!}{4!\cdot 28!\cdot 36!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} =$$

$$= \frac{8\cdot 31\cdot 29}{3\cdot 7\cdot 17\cdot 33} = \frac{7192}{11781} \approx 0,61047$$

$$P_1 = \frac{C_{32}^3\cdot C_4^1}{C_{36}^4} = \frac{\frac{32!}{29!\,3!}\cdot 4}{\frac{36!}{32!\,4!}} = \frac{32!\cdot 4\cdot 32!\cdot 4!}{29!\,3!\,36!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 4\cdot 4}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} =$$

$$= \frac{32\cdot 31\cdot 4}{3\cdot 7\cdot 17\cdot 33} = \frac{3968}{11781} \approx 0,33681$$

$$P_2 = \frac{C_{32}^2\cdot C_4^2}{C_{36}^4} = \frac{\frac{32!}{30!\cdot 2!}\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}}{\frac{36!}{4!\cdot 32!}} = \frac{32!\cdot 4!\cdot 32!\cdot 4!}{30!\cdot 2!\cdot 36!\cdot 2!\cdot 2!} =$$

$$= \frac{32\cdot 31\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = \frac{992}{19635} \approx 0,05052$$

$$P_3 = \frac{C_{32}^1\, C_4^3}{C_{36}^4} = \frac{32\cdot 4}{\frac{36!}{32!\cdot 4!}} = \frac{32\cdot 4\cdot 32!\cdot 4!}{36!} = \frac{32\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} =$$

$$= \frac{16\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 35\cdot 17\cdot 33} = \frac{128}{58905} \approx 0,00217$$

$$P_4 = \frac{C_{32}^0 \cdot C_4^4}{C_{36}^4} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{36!}{32!\,4!}} = \frac{\cancel{32!} \cdot 4!}{\cancel{36!}} \cdot (36-32)! = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{1}{3 \cdot 35 \cdot 17 \cdot 33} =$$

$$= \frac{1}{58905} \approx 0,00002$$

ξ	0	1	2	3	4	Σ
P	$\frac{7192}{11781}$	$\frac{3968}{11781}$	$\frac{992}{19635}$	$\frac{128}{58905}$	$\frac{1}{58905}$	1

$$M\xi = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{7192}{11781} + 1 \cdot \frac{3968}{11781} + 2 \cdot \frac{992}{19635} + 3 \cdot \frac{128}{58905} +$$

$$+ 4 \cdot \frac{1}{58905} = \frac{3968}{11781} + \frac{1984}{19635} + \frac{384}{58905} + \frac{4}{58905} = \frac{4}{9} = 0,(4)$$

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = 0 \cdot \frac{7192}{11781} + 1 \cdot \frac{3968}{11781} + 4 \cdot \frac{992}{19635} +$$

$$+ 9 \cdot \frac{128}{58905} + 16 \cdot \frac{1}{58905} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{3968}{11781} + \frac{3968}{19635} + \frac{1152}{58905} +$$

$$+ \frac{16}{58905} - \frac{16}{81} = \frac{176}{315} - \frac{16}{81} = \frac{1024}{2835} \approx 0,36119$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{\frac{1024}{2835}} = \frac{32}{9\sqrt{35}} \approx 0,601$$

$$P\{|\xi - M\xi| < \sigma_\xi\} = P\{-\sigma_\xi < \xi - M\xi < \sigma_\xi\} =$$

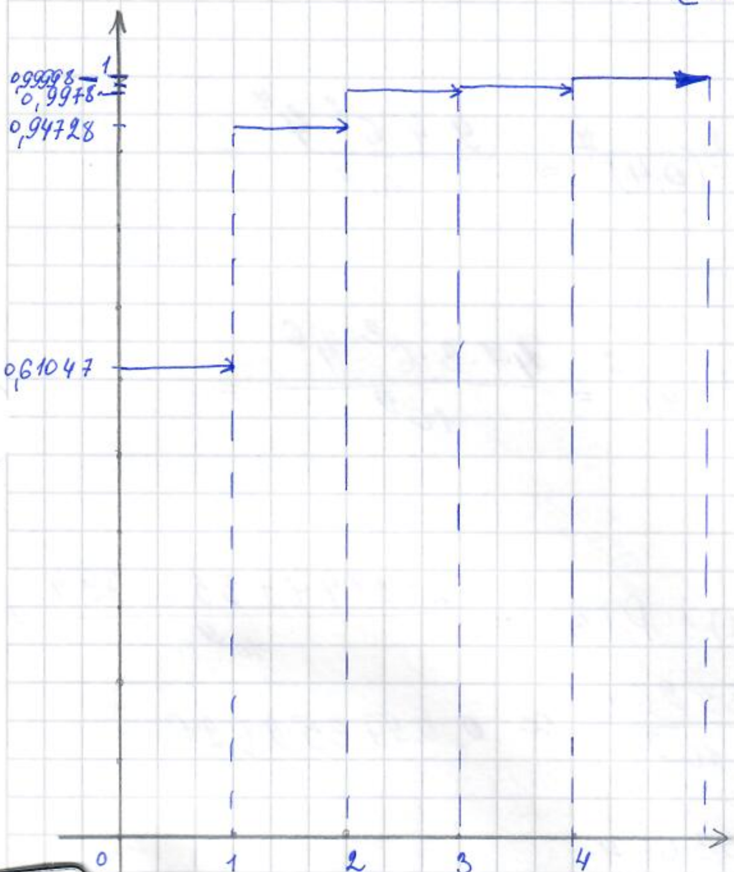
$$= P\{-\sigma_\xi + M\xi < \xi < \sigma_\xi + M\xi\} = P\left\{-\frac{32}{9\sqrt{35}} + \frac{4}{9} < \xi < \frac{32}{9\sqrt{35}} + \frac{4}{9}\right\} =$$

$$= P\{-0,15655 < \xi < 1,04544\} = P_0 + P_1 = \frac{7192 + 3968}{11781} =$$

$$= \frac{11160}{11781} \approx 0,94729.$$

ξ	0	1	2	3	4	Σ
P	0,61047	0,33681	0,05052	0,00217	0,00002	1

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = \sum_{x_i \le x} p_i = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}61047, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}94728, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}9978, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}99998, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$



Задача 2

Радиоприёмник принимает сигнал с вероятностью $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что из $N = 9$ сигналов будет принято:

а) не более $M = 4$ сигналов;

б) два сигнала.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величина ξ - числа принятых сигналов, если было передано $N = 9$ сигналов.

$p = 0{,}6 \Rightarrow q = 1-p = 1-0{,}6 = 0{,}4.$

$P(\xi = k) = C_N^k p^k q^{N-k}$

$P(0) = C_9^0 p^0 q^{9-0} = 1 \cdot (0,6)^0 (0,4)^9 = \frac{4^9}{10^9} = \frac{262144}{10^9} \approx$

$\approx 0,000262144$

$P(1) = C_9^1 p^1 q^{9-1} = 9 \cdot 0,6 \cdot (0,4)^8 = \frac{9 \cdot 6 \cdot 4^8}{10^9} = \frac{3538944}{10^9} \approx$

$\approx 0,003538944$

$P(2) = C_9^2 p^2 q^{9-2} = \frac{9!}{2!\,7!} (0,6)^2 (0,4)^7 = \frac{9 \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot 4^7}{10^9} =$

$= \frac{21233664}{10^9} \approx 0,021233664$

$P(3) = C_9^3 p^3 q^{9-3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} (0,6)^3 (0,4)^6 = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6^3 \cdot 4^6}{10^9} =$

$= \frac{74317824}{10^9} \approx 0,074317824$

$P(4) = C_9^4 p^4 q^{9-4} = \frac{9!}{5!\,4!} \cdot (0,6)^4 (0,4)^5 = \frac{9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 6^4 \cdot 4^5}{10^9} = \frac{167215104}{10^9} =$

$= 0,167215104$

а) $P(\leq 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{266567680}{10^9} = 0,26656768$

б) $P(2) = \frac{21233664}{10^9} \approx 0,021233664$

$M\xi = Np = 9 \cdot 0,6 = \frac{9 \cdot 6}{10} = \frac{54}{10} = 5,4$

$D\xi = Npq = 9 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = \frac{9 \cdot 6 \cdot 4}{100} = \frac{216}{100} = 2,16$

Задача 3

Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $p = 0,1$. Стрелок получает приз в том случае, если он поразил мишень с первого, второго или третьего выстрела. Найти:

а) вероятность того, что частота получения приза отклонится по абсолютной величине от вероятности получения приза не более, чем на

$\varepsilon = 0{,}04$, если стрельбу производило $N = 200$ человек;
б) вероятность того, что из $N = 200$ участников приз получат не более $M = 55$

а) Вероятность того, что стрелок не получит приз будет $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 09$

$P_н = q \cdot q \cdot q = (0{,}9)^3 = 0{,}729$

Соответственно, вероятность того, что он его получит, составит:

$P_п = 1 - P_н = 1 - 0{,}729 = 0{,}271$

Найдем вероятность того, что частота получения приза отклонится не больше чем на 0,04 с помощью следствия из интегральной теоремы Лапласа

$$P(|\nu_n - p| \leqslant \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - 1$$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ν_n – частота получения приза.

$p = 0{,}271 \quad q = 0{,}729 \quad \varepsilon = 0{,}04 \quad n = 200$

$$P(|\nu_{200} - 0{,}271| \leqslant 0{,}04) \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}04\sqrt{200}}{\sqrt{0{,}729 \cdot 0{,}271}}\right) - 1 =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{0{,}04 \cdot 10\sqrt{2}}{\sqrt{0{,}197559}}\right) - 1 = 2\Phi(1{,}27270) - 1 = 2 \cdot 0{,}898 - 1 =$$

$$= 1{,}796 - 1 = 0{,}796$$

б) Чтобы найти вероятность того, что из 200 участников приз получат не более 55, воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Вариант 5 Здашвег А.В. КМБО-05-18

$k_1 = 0 \quad k_2 = 55 \quad n = 200 \quad p = 0,271 \quad q = 0,729$

$$P(0 \le X \le 55) \approx \Phi\left(\frac{55 - 200\cdot 0,271}{\sqrt{200\cdot 0,271\cdot 0,729}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 200\cdot 0,271}{\sqrt{200\cdot 0,271\cdot 0,729}}\right) =$$

$$= \Phi(0,12727) - 1 + \Phi(8,62255) = 0,5478 - 1 + 1 =$$

$$= 0,5478.$$

Задача 4

Дано распределение случайного вектора (ξ, η). Найти:

а) ряды распределения случайных величин ξ, η;

б) ряды распределения случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi \cdot \eta$;

в) математические ожидания, дисперсии и ковариацию ξ и η;

Выяснить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Построить распределение случайного вектора $(\xi, \xi + \eta)$

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
1	1/4	1/4	0
0	1/8	1/8	0
2	0	1/8	1/8

а)

ξ	1	0	2
P	1/2	1/4	1/4

η	-1	0	1
P	3/8	1/2	1/8

б)

$\xi+\eta$	-1	0	1	2	3
P	1/8	3/8	1/4	1/8	1/8

$\xi\cdot\eta$	-2	-1	0	1	2
P	0	1/4	5/8	0	1/8

в) $M\xi = \sum_i x_i p_i = 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$M\eta = \sum_i x_i p_i = -1\cdot\frac{3}{8} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{8} = -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i = (1-1)^2\frac{1}{2} + (0-1)^2\cdot\frac{1}{4} + (2-1)^2\frac{1}{4}$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$D\eta = \sum_i (x_i - M\eta)^2 p_i = (-1+\frac{1}{4})^2 \frac{3}{8} + (0+\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{2} + (1+\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{8} =$

$= \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{8} + \frac{25}{16} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{8} = \frac{27+25+4}{16 \cdot 8} = \frac{56}{16 \cdot 8} = \frac{7}{16}$

$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \, M\eta$

$M(\xi \cdot \eta) = -2 \cdot 0 - 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M\xi \, M\eta = 0 - (-\frac{1}{4}) \cdot 1 = \frac{1}{4}$

г) ξ и η зависимы т.к. $\exists \; p_{11} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = p_1 q_1$

д)

ξ \ $\xi+\eta$	-1	0	1	2	3
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
2	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Задача 5

Найти параметр A, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1; 1) \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Найти $P\{0 < \xi < \frac{1}{2}\}$. Построить график плотности распределения вероятности случайной величины ξ.

Найдём A с помощью свойства нормировки плотности непрерывной случайной величины

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt = 1$$

Вариант 5 Зданевич А.В. КМБО-05-18

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = A \cdot \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = A\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= A\,\pi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx^2}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi} \sqrt{1-x^2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$M\xi^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\{ \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 t \cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin^2 t \cancel{\cos t}\,dt}{\cancel{\cos t}} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sin^2 t\,dt = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\,dt =$$

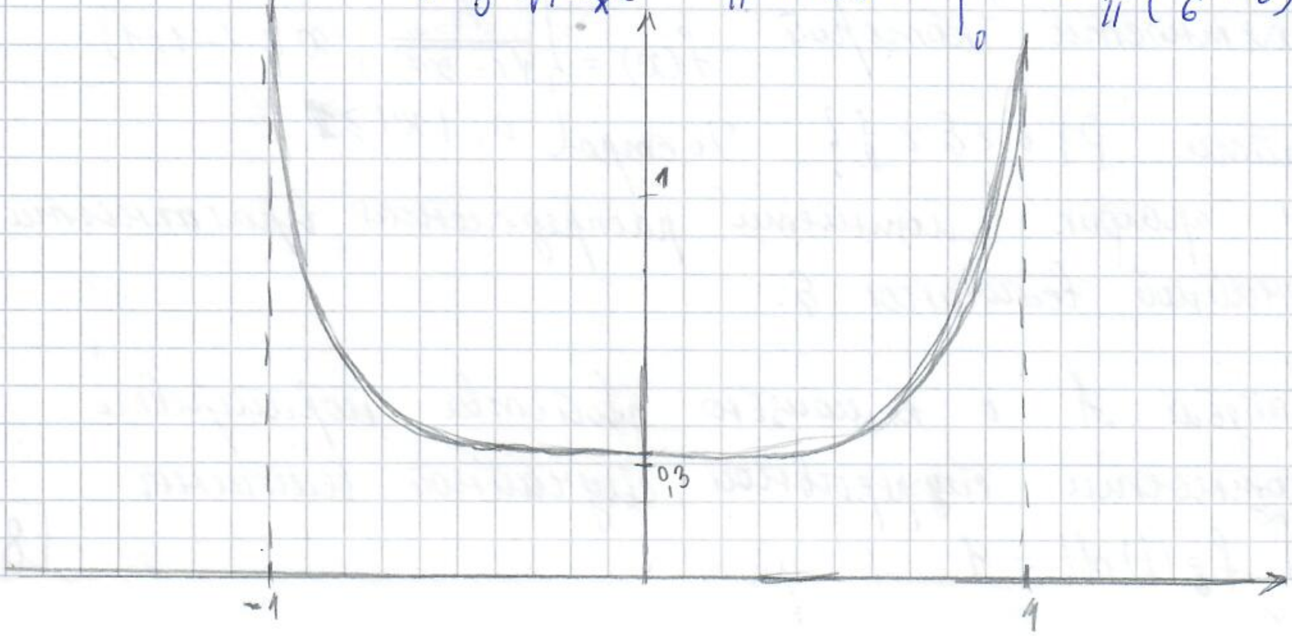
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \cos 2t\,dt = \frac{1}{2\pi} t \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4\pi} \sin 2t \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \{ x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x \} = \frac{1}{2\pi} \arcsin x \Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{4\pi} \sin(2\arcsin x) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4\pi} \cdot 2x\sqrt{1-x^2} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi - 0 = \frac{1}{2}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi} \arcsin x \Big|_{0}^{1/2} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{1}{6}$$



Задача 6

Деталью высшего качества считается такая, у которой отклонение размера от номинала по абсолютной величине не превосходит 4,3 мк. Случайное отклонение распределено по нормальному закону. Найти среднюю квадратическую ошибку, если систематическая ошибка равна нулю, а вероятность того, что деталь высшего качества равна 0,99.

ξ – случайная величина $M\xi = 0$ $P(|\xi| < 4,3) = 0,99$

σ?

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

$$P(|\xi - M\xi| < 4,3) = P(|\xi| < 4,3) = 2\Phi\left(\frac{4,3}{\sigma}\right) - 1 = 0,99$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{4,3}{\sigma}\right) = \frac{0,99+1}{2} = 0,995 \Rightarrow \quad \Bigg| \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{4,3}{\sigma} = 2,575 \Rightarrow \sigma = \frac{4,3}{2,575} \approx 1,6699$$

Задача 7

Случайная величина ξ распределена по закону Коши с плотностью $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность случайной величины $\eta = \xi^2$.

$y = x^2 = \varphi(x)$ При $y \geq 0$

$x = -\sqrt{y} = \psi_1 \qquad \psi_1' = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$x = \sqrt{y} = \psi_2 \qquad \psi_2' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

При $y \in (-\infty; 0)$ $f_\eta(y) = 0$ т.к. $\eta \geq 0$, $\varphi^{-1}(y) = \varnothing$

$$f_\xi(\psi_1(y)) = \frac{1}{\pi(1+(-\sqrt{y})^2)}$$

$$f_\xi(\psi_2(y)) = \frac{1}{\pi(1+(\sqrt{y})^2)}$$

При $y \in [0; +\infty)$

$$f_\eta(y) = |\psi_1'| \cdot f_\xi(\psi_1(y)) + |\psi_2'| f_\xi(\psi_2(y))$$

$$f_\eta(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\pi(1+(-\sqrt{y})^2)}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{1}{\pi(1+(\sqrt{y})^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+(-\sqrt{y})^2)} + \frac{1}{2\pi\sqrt{y}(1+(\sqrt{y})^2)} = \frac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}$$

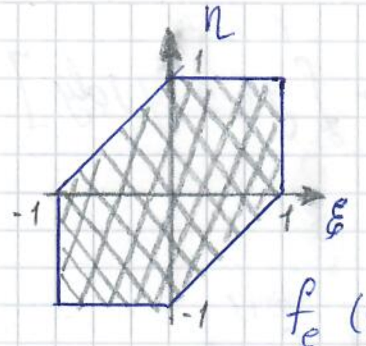
$$f_\eta = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{y}(1+y)}, & y > 0 \end{cases}$$

Задача 8

Случайный вектор (ξ, η) распределён равномерно в области G, изображённой на рисунке.

1. Найти плотности распределения вероятностей компонент случайного вектора и решить вопрос об их зависимости (независимости)
2. Выяснить коррелированы или не коррелированы компоненты случайного вектора (ξ, η).
3. Найти плотность распределения вероятности случайной величины $\xi + \eta$.
4. Найти $P\{(\xi, \eta) \in D\}$, где $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Вариант 5 Зданевич А.В. КМБО-05-18



1) $f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, (x,y) \in G \\ 0, (x,y) \notin G \end{cases}$

т.к. $S_G = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$ $P_G = \frac{1}{S_G} = \frac{1}{3}$

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ \int_{-1}^{x+1} \frac{1}{3}\,dy, x \in [-1;0] \\ \int_{x-1}^{1} \frac{1}{3}\,dy, x \in (0;1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ \frac{x+2}{3}, x \in [-1;0] \\ \frac{2-x}{3}, x \in (0;1] \end{cases}$$

$$f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0, x \in (-\infty;-1] \cup (1;+\infty) \\ \int_{-1}^{y+1} \frac{1}{3}\,dx, y \in [-1;0] \\ \int_{y-1}^{1} \frac{1}{3}\,dx, y \in (0;1] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, y \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ \frac{y+2}{3}, y \in [-1;0] \\ \frac{2-y}{3}, y \in (0;1] \end{cases}$$

Проверим независимость ξ и η:

$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$

$f_{\xi,\eta}(0;0) = \frac{1}{3}$ $f_\xi(0) = \frac{2}{3}$ $f_\eta(0) = \frac{2}{3}$

$f_\xi(0) \cdot f_\eta(0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{3} = f_{\xi,\eta}(0;0) \Rightarrow \xi$ и η зависимы.

2) $$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} x(x+2)\,dx + \int_{0}^{1} x(2-x)\,dx\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_{-1}^{0} + x^2\Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{3}\right] = 0$$

Вариант 5 Зданевич А.В. КМБО-05-18

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_\eta(y)dy = \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} y(y+2)dy + \int_0^1 y(2-y)dy\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{3}\right] = 0$$

$$M(\xi,\eta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} xdx \int_{-1}^{x+1} ydy + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 xdx \int_{x-1}^{1} ydy\right] = \frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} \frac{x^2(x+2)}{2}dx + \int_0^1 \frac{x^2(2-x)}{2}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{8}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{8}\Big|_0^1\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0 - \frac{1}{8} + 0\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right] =$$

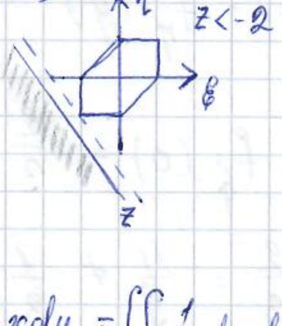
$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{12} + \frac{8}{12}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{36}$$

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi,\eta) - M\xi M\eta = \frac{5}{36} - 0 \cdot 0 = \frac{5}{36} \neq 0 \Rightarrow$$

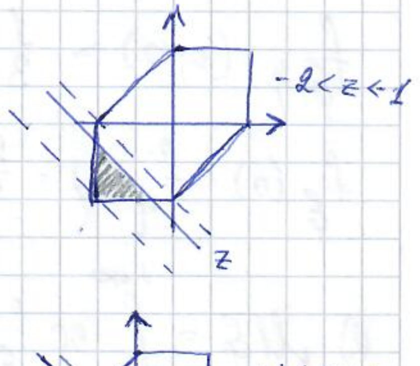
$\Rightarrow \xi$ и η коррелированы

3) Найдём функцию распределения вероятности.

$z = \xi + \eta \quad F(z) = P(\xi + \eta < z)$



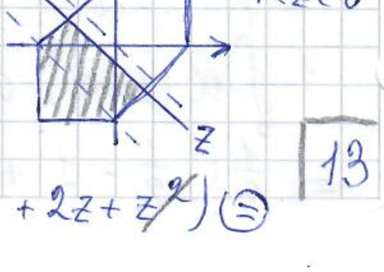
$\underline{\underline{z < -2}} \Rightarrow F(z) = 0$



$\underline{\underline{-2 < z < -1}}$

$$F(z) = P(\xi + \eta < z) = \iint_{x+y<z} f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} \frac{1}{3}dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}S_{G_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(2+z)^2 = \frac{(z+2)^2}{6}$$



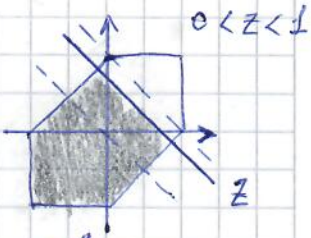
$\underline{\underline{-1 < z < 0}}$

$$F(z) = P(\xi + \eta < z) = \iint_{x+y<z} f(x,y)dxdy = \iint_{G_2} \frac{1}{3}dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}S_{G_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{(1+z)^2}{2} \cdot 2\right) = \frac{1}{6}\left(2 - \cancel{z^2} + 1 + 2z + \cancel{z^2}\right) =$$

Вариант 5 Зданевич А.В. КМБО-05-18

$\circledcirc\ \frac{1}{6}(2z+3) = \frac{2z+3}{6}$



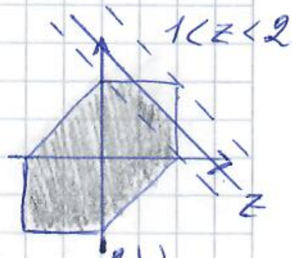
$\underline{\underline{0<z<1}}$

$F(z) = P(\xi+\eta<z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \iint\limits_{G_3} \frac{1}{3}\,dx\,dy = \frac{1}{3} S_{G_3} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-z)^2}{2}\cdot 2 + \frac{z^2}{2}\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(2 - \frac{(1-2z+z^2)}{2} + \frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(4-1+2z-\cancel{z^2}+\cancel{z^2}\right) =$

$= \frac{1}{6}(2z+3)$

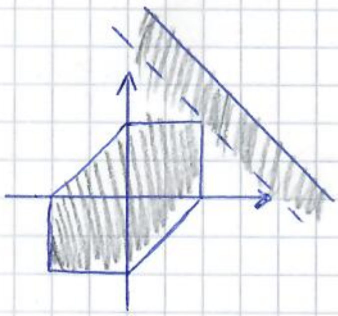


$\underline{\underline{1<z<2}}$

$F(z) = P(\xi+\eta<z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_4} \frac{1}{3}\,dx\,dy =$

$= \frac{1}{3} S_{G_4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1-\frac{(2-z)^2}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(3 - \frac{(4-4z+z^2)}{2}\right) =$

$= \frac{1}{6}(6-4+4z-z^2) = \frac{(-z^2+4z+2)}{6}$

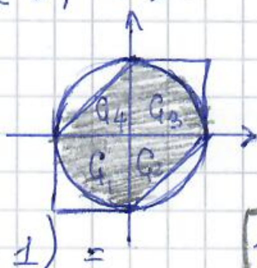


$\underline{\underline{z>2}}$

$F(z) = P(\xi+\eta<z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_5} \frac{1}{3}\,dx\,dy =$

$= \frac{1}{3} S_{G_5} = \frac{1}{3}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$

$$F(z) = \begin{cases} 0, & z<2 \\ \frac{(z+2)^2}{6}, & -2\le z<-1 \\ \frac{2z+3}{6}, & -1\le z<0 \\ \frac{2z+3}{6}, & 0\le z<1 \\ \frac{-z^2+4z+2}{6}, & 1\le z<2 \\ 1, & z\ge 2 \end{cases} \qquad f_{\xi+\eta}(z) = F'(z) = \begin{cases} 0, & z<-2 \\ \frac{z+2}{3}, & -2\le z<-1 \\ \frac{1}{3}, & -1\le z\le 1 \\ \frac{(-z+2)}{3}, & 1\le z<2 \\ 0, & z\ge 2 \end{cases}$$



4) $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$ $\quad S_{G_1} = S_{G_3} = \frac{\pi}{4}$

$S_{G_2} = S_{G_4} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$P\{(\xi,\eta)\in D\} = \frac{mes(G\cap D)}{mes(G)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) =$

$= \frac{\pi+2}{6}$

$\boxed{14}$