Задача 3
Найдите общее решение линейной неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - e^{-t}\sin 3t \\ \dot{y} = 5x + 4y \end{cases} \tag{1}$$

двумя способами: а) методом вариации произвольных постоянных; б) методом неопределенных коэффициентов (в виде квазимногочленов).

Решение

а) Найдем сначала общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y \\ \dot{y} = 5x + 4y. \end{cases} \tag{2}$$

Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

$\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ – корни характеристического уравнения. Найдем собственный вектор $\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, соответствующий корню $\lambda_1 = 1 + i$.

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -3-i & -2 \\ 5 & 3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -15-5i & -10 \\ -15-5i & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3+i & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3-i \end{pmatrix} -$$

искомый собственный вектор.

Частное решение системы, соответствующее корню $\lambda_1 = 1 + i$:

$$e^{(1+i)t}\overline{v} = e^t(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 2 \\ -3-i \end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы представляет собой линейную комбинацию действительной и мнимой частей вектора $e^{(1+i)t}\overline{v}$:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{оо}} \\ y_{\text{оо}} \end{pmatrix} = C_1 e^t\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Таким образом решение однородной системы получено в вещественной форме.

Общее решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{он}} \\ y_{\text{он}} \end{pmatrix} = C_1(t) e^t\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -3\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2(t) e^t\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ найдем из условий:

$$\begin{cases} 2\cos t\, e^t\, \dot{C}_1(t) + 2\sin t\, e^t\, \dot{C}_2(t) = -e^{-t}\sin 3t \\ (-3\cos t + \sin t)\, e^t\, \dot{C}_1(t) - (\cos t + 3\sin t)\, e^t\, \dot{C}_2(t) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Для разрешения получившейся системы относительно неизвестных функций $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$ вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ -3\cos t + \sin t & -\cos t - 3\sin t \end{vmatrix} =$$
$$= -2\cos^2 t - 6\cos t\sin t + 6\sin t\cos t - 2\sin^2 t = -2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -e^{-2t}\sin 3t & 2\sin t \\ 0 & -\cos t - 3\sin t \end{vmatrix} =$$
$$= e^{-2t}\sin 3t\cos t + 3e^{-2t}\sin 3t\sin t =$$
$$= \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 4t + \frac{3}{2}e^{-2t}\cos 2t - \frac{3}{2}e^{-2t}\cos 4t,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\cos t & -e^{-2t}\sin 3t \\ -3\cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= -3e^{-2t}\sin 3t\cos t + e^{-2t}\sin 3t\sin t =$$
$$= -\frac{3}{2}e^{-2t}\sin 2t - \frac{3}{2}e^{-2t}\sin 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{4}e^{-2t}\sin 2t - \frac{1}{4}e^{-2t}\sin 4t - \frac{3}{4}e^{-2t}\cos 2t + \frac{3}{4}e^{-2t}\cos 4t, \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{4}e^{-2t}\sin 2t + \frac{3}{4}e^{-2t}\sin 4t - \frac{1}{4}e^{-2t}\cos 2t + \frac{1}{4}e^{-2t}\cos 4t. \end{aligned} \tag{6}$$

Как известно путем двукратного интегрирования по частям можно вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha t}\sin\beta t\, dt &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}\sin\beta t - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}\cos\beta t + c, \\ \int e^{\alpha t}\cos\beta t\, dt &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}\cos\beta t + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha t}\sin\beta t + c. \end{aligned} \tag{7}$$

Проинтегрировав равенства (6), используя формулы (7), получим:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{8}e^{-2t}\sin 2t + \frac{7}{40}e^{-2t}\sin 4t + \frac{1}{4}e^{-2t}\cos 2t - \frac{1}{40}e^{-2t}\cos 4t + \widetilde{C}_1, \\ C_2(t) &= -\frac{1}{4}e^{-2t}\sin 2t - \frac{1}{40}e^{-2t}\sin 4t - \frac{1}{8}e^{-2t}\cos 2t - \frac{7}{40}e^{-2t}\cos 4t + \widetilde{C}_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя (8) в (4) окончательно получим

$$\left[\begin{aligned} &x(t) = 2\widetilde{C}_1 e^t \cos t + 2\widetilde{C}_2 e^t \sin t + \frac{9}{20} e^{-t} \cos 3t + \frac{1}{10} e^{-t} \sin 3t, \\ &y(t) = (-3\widetilde{C}_1 - \widetilde{C}_2) e^t \cos t + (\widetilde{C}_1 - 3\widetilde{C}_2) e^t \sin t - \frac{3}{8} e^{-t} \cos 3t + \frac{1}{8} e^{-t} \sin 3t. \end{aligned}\right.$$

б) Как известно, общее решение неоднородной системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_{\text{он}} \\ y_{\text{он}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{оо}} \\ y_{\text{оо}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\text{чн}} \\ y_{\text{чн}} \end{pmatrix}.$$

Найдем частное решение неоднородной системы (1) методом подбора неопределенных коэффициентов. Будем искать решение в виде:

$$\left[\begin{aligned} &x_{\text{чн}} = Ae^{-t} \cos 3t + Be^{-t} \sin 3t \\ &y_{\text{чн}} = Ce^{-t} \cos 3t + De^{-t} \sin 3t. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Здесь A, B, C, D – неопределенные коэффициенты. Подставим $x_{\text{чн}}$, $y_{\text{чн}}$ в исходную систему (1) и приравняем коэффициенты при подобных слагаемых. В первом уравнении при $e^{-t} \sin 3t$ получим:

$$-3A - B + 2B + 2D = -1, \text{ или}$$

$$-3A + B + 2D = -1. \tag{10}$$

В первом уравнении при $e^{-t} \cos 3t$ получим:

$$-A + 3B + 2A + 2C = 0, \text{ или}$$

$$A + 3B + 2C = 0. \tag{11}$$

Во втором уравнении при $e^{-t} \sin 3t$ получим:

$$-3C - D - 5B - 4D = 0, \text{ или}$$

$$5B + 3C + 5D = 0. \tag{12}$$

Во втором уравнении при $e^{-t} \cos 3t$ получим:

$$-C + 3D - 5A - 4C = 0, \text{ или}$$

$$5A + 5C - 3D = 0. \tag{13}$$

Объединяя равенства (10), (11), (12), (13), получим систему алгебраических неоднородных уравнений 4-го порядка

$$\begin{cases} -3A + B + 2D = -1 \\ A + 3B + 2C = 0 \\ 5B + 3C + 5D = 0 \\ 5A + 5C - 3D = 0. \end{cases}$$

Её решение имеет вид:

$$A = \frac{9}{20}, \quad B = \frac{1}{10}, \quad C = -\frac{3}{8}, \quad D = \frac{1}{8}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9) , получим, что частное решение неоднородной системы (1) имеет вид:

$$\left[\begin{aligned} &x_{\text{чн}} = e^{-t}\left(\frac{9}{20}\cos 3t + \frac{1}{10}\sin 3t\right) \\ &y_{\text{чн}} = e^{-t}\left(-\frac{3}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\sin 3t\right). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Теперь объединим (3) и (15) и получим ответ:

$$\left[\begin{aligned} &x(t) = 2C_1e^t\cos t + 2C_2e^t\sin t + e^{-t}\left(\frac{9}{20}\cos 3t + \frac{1}{10}\sin 3t\right) && (16) \\ &y(t) = (-3C_1 - C_2)e^t\cos t + (C_1 - 3C_2)e^t\sin t + e^{-t}\left(-\frac{3}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\sin 3t\right) && (17) \end{aligned}\right.$$