Задача 2
1) Найдите матричную экспоненту e^{tA} двумя способами: а) используя ФСР соответствующей линейной системы дифференциальных уравнений; б) операторным методом. 2) С помощью матричной экспоненты решите задачу Коши $\dot{\bar{x}} = A\bar{x},\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0$.
$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение

1а) Известно, что столбцы матрицы e^{tA} – решения

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ системы } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем эти решения, решив систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y & (1) \\ \dot{y} = -4x + 6y & (2) \end{cases}$$

сведения к уравнению второго порядка. Для этого перепишем (1) и (2) в виде

$$\begin{cases} 4\dot{x} = -8x + 20y & (3) \\ 4x = 6y - \dot{y}. & (4) \end{cases}$$

Продифференцируем (4), получим

$$4\dot{x} = 6\dot{y} - \ddot{y}. \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим уравнение

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 8y = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0.$$

Они равны $\lambda = 2 \pm 2i$. И следовательно

$$y(t) = C_1 e^{2t}\cos 2t + C_2 e^{2t}\sin 2t. \tag{6}$$

Используя (4) и (6) получим

$$x(t) = \frac{1}{4}(6y - \dot{y}),$$
$$x(t) = \left(C_1 - \frac{1}{2}C_2\right) e^{2t}\cos 2t + \left(\frac{1}{2}C_1 + C_2\right) e^{2t}\sin 2t.$$

Таким образом общее решение системы (1), (2) имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1 - \frac{1}{2}C_2\right) e^{2t}\cos 2t + \left(\frac{1}{2}C_1 + C_2\right) e^{2t}\sin 2t \\ y(t) = C_1 e^{2t}\cos 2t + C_2 e^{2t}\sin 2t. \end{cases}$$

Значение постоянных C_1, C_2 для решений

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

определим из систем

$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 1 \\ C_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$

соответственно. Решая эти системы, получим:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Таким образом окончательно получим, что решения $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t \\ y_1(t) = -2e^{2t}\sin 2t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = \frac{5}{2}e^{2t}\sin 2t \\ y_2(t) = e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t. \end{cases}$$

И следовательно матричная экспонента

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & \frac{5}{2}e^{2t}\sin 2t \\ -2e^{2t}\sin 2t & e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

1б) Найдем матричную экспоненту операторным методом. Для этого воспользуемся формулой:

$$e^{At} = L^{-1}\left[(pE - A)^{-1}\right], \text{ где } L(f(t)) - \text{преобразование Лапласа.}$$

$$pE - A = \begin{pmatrix} p+2 & -5 \\ 4 & p-6 \end{pmatrix},$$

$$\det(pE - A) = (p-2)^2 + 4,$$

$$(pE - A)^{-1} = \frac{1}{(p-2)^2 + 4} \begin{pmatrix} p-6 & 5 \\ -4 & p+2 \end{pmatrix}.$$

Найдем оригиналы для всех элементов полученной матрицы, используя таблицу оригиналов и изображений:

$$\frac{p-6}{(p-2)^2+4} = \frac{p-2}{(p-2)^2+4} - \frac{4}{(p-2)^2+4} \risingdotseq e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t,$$
$$\frac{5}{(p-2)^2+4} \risingdotseq \frac{5}{2}e^{2t}\sin 2t,$$
$$\frac{-4}{(p-2)^2+4} \risingdotseq -2e^{2t}\sin 2t,$$
$$\frac{p+2}{(p-2)^2+4} = \frac{p-2}{(p-2)^2+4} + \frac{4}{(p-2)^2+4} \risingdotseq e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t.$$

Окончательно получим

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & \frac{5}{2}e^{2t}\sin 2t \\ -2e^{2t}\sin 2t & e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t \end{pmatrix}.$$

2) Решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y \\ \dot{y} = -4x + 6y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

найдем по формуле

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\cos 2t - 2e^{2t}\sin 2t & \frac{5}{2}e^{2t}\sin 2t \\ -2e^{2t}\sin 2t & e^{2t}\cos 2t + 2e^{2t}\sin 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t}\left(\frac{19}{2}\sin 2t - \cos 2t\right) \\ e^{2t}\left(8\sin 2t + 3\cos 2t\right) \end{pmatrix}.$$