Лекция №5

Матричная экспонента

Показательная функция матрицы используется при изучении решений линейных систем с постоянными коэффициентами. Рассмотрим некоторые свойства этой функции.

Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n, E – единичная матрица, α – постоянное число. Из линейной алгебры известны следующие действия над матрицами:

$$A+B,\ \alpha A,\ AB,\ A^2,\ A^3,\ldots;$$

если $\det A \neq 0$,

$$A^{-1},\ A^{-2}=A^{-1}A^{-1},\ldots$$

Также в линейной алгебре определяется понятие нормы матрицы.

Определение. Нормой матрицы A называется число

$$\|A\| = \sup\left\{|A\boldsymbol{x}| : \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ |\boldsymbol{x}|=1\right\} = \\ = \sup\left\{\frac{|A\boldsymbol{x}|}{|x|} : \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\neq 0\right\}.$$

Из данного определения следует, что для $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$|A\boldsymbol{x}| \leqslant \|A\|\,|\boldsymbol{x}|.$$

Примеры норм матриц

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{ij}|a_{ij}|^2},\quad \|A\| = \max_{i,j}|a_{ij}|.$$

Напомним свойства нормы матрицы

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|,$$
$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|,$$
$$\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|.$$

Из курса математического анализа известно, что ряд

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

сходится при всех значениях t. И сходится равномерно для $\forall \ |t| \leqslant k$.Аналогично определим матричную экспоненту

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \ldots + \frac{t^k A^k}{k!} + \ldots. \tag{1}$$

В прошлом семестре отмечалось, что стандартное "$\varepsilon - \delta$"определениие предела в метрическом пространстве равносильно покоординатному определению. Поэтому мы будем производить операции предельного перехода, дифференцирования, интегрирования с каждым элементом матрицы отдельно. Также покоординатно определим понятие сходимости, абсолютной сходимости и равномерной сходимости ряда матриц.

Теоремы о непрерывности суммы ряда и о почленном дифференцировании и интегрировании рядов остаются справедливыми и для рядов матриц. Это следует из того, что для рядов, составленных из ij-х элементов матриц, эти теоремы справедливы.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное, очевидное утверждение.

Лемма. *Если* $\left\|A_{(m)}(t)\right\| \leqslant \alpha_m$*,* $m = 1, 2, \ldots$*,* $t \in D$ *и числовой ряд* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ *сходится, то ряд матриц* $A_{(1)}(t) + A_{(2)}(t) + \ldots$ *сходится абсолютно и равномерно на множестве* D*.*

Доказательство. Для любых i, j имеем

$$|a_{(m)ij}(t)| \leqslant \left\|A_{(m)}(t)\right\| \leqslant \alpha_m.$$

Поэтому для всех i, j ряды $a_{(1)ij}(t) + a_{(2)ij}(t) + \ldots$ сходятся абсолютно и равномерно на D, значит, ряд матриц – тоже. □

Теорема (1)**.** *Для любой квадратной матрицы* A *и любого* $r_0 > 0$ *ряд*

$$E + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \leqslant r_0$ *комплексной плоскости.*

Доказательство. Действительно

$$\left\|\frac{t^mA^m}{m!}\right\| = \frac{|t|^m}{m!}\left\|A^m\right\| \leqslant \frac{|r_0|^m}{m!}\left\|A\right\|^m = \alpha_m, \tag{2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r_0\left\|A\right\|)^m}{m!} = e^{r_0\|A\|}, \tag{3}$$

и утверждение теоремы следует из Леммы. □

Свойства показательной функции матрицы.

1) Если $AB = BA$*, то* $e^Ae^B = e^{A+B}$*.*

Действительно:

Надо проверить, что совпадают коэффициенты при $A^k B^m$ в левой и правой частях равенства

$$(E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots)(E + B + \frac{B^2}{2!} + \ldots) =$$
$$= (E + \frac{A+B}{1!} + \frac{(A+B)^2}{2!} + \ldots + \frac{(A+B)^n}{n!} + \ldots).$$

То есть нужно проверить равенство

$$\frac{1}{k!m!} = C_{k+m}^k \frac{1}{(k+m)!},$$

которое очевидным образом выполняется, так как

$$C_{k+m}^k = \frac{(k+m)!}{k!m!}.$$

2) Матрица $X(t) = e^{At}$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = AX \qquad (4)$$

и начальным условиям

$$X(0) = E. \qquad (5)$$

Действительно:

Взять производную от матрицы значить взять производную от каждого элемента этой матрицы.Ряд можно дифференцировать почленно если этот ряд сходится, а ряд из производных сходится равномерно. Если

$$X(t) = e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots, \qquad (6)$$

то формально продифференцированный ряд

$$\frac{dX}{dt} = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \ldots =$$
$$= A(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \ldots) = AX. \quad (7)$$

Оба ряда (6) и (7) сходятся равномерно при $|t| \leqslant r_0$. Равномерная сходимость ряда (6) доказана в Теореме (1), рвномерная сходимость ряда (7) следует из соотношений (2), (3) с $\tilde{\alpha}_m = \|A\|\,\alpha_m$. Значит

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Условие

$$X(0) = E$$

выполняется очевидным образом.

Замечание. *Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует, что уравнение*

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

и начальное условие

$$X(t_0) = X_0$$

определяют матрицу $X(t)$ однозначно.

Таким образом, учитывая Замечание (1) в Лекции 2, $X(t) = e^{At}$ – фундаментальная матрица системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad (8)$$

удовлетворяющая начальному условию

$$X(0) = E.$$

Нахождение матричной экспоненты e^{tA}.

1-ый способ. Пусть $X(t)$ – произвольная фундаментальная матрица системы (8), тогда

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0).$$

Действительно: Проверим выполнение условий (4) и (5)

$$\frac{d\left(X(t)X^{-1}(0)\right)}{dt} = \dot{X}(t)X^{-1}(0) = \\ = \left(AX(t)\right)X^{-1}(0) = A\left(X(t)X^{-1}(0)\right),$$

$$X(t)X^{-1}(0)\Big|_{t=0} = X(0)X^{-1}(0) = E.$$

2-ой способ. Вычисление матричной экспоненты с помощью преобразования Лапласа.

Теорема. $e^{At} = L^{-1}((pE-A)^{-1})$, *где* L^{-1} *– обратное преобразование Лапласа.*

Доказательство. Пусть

$X(t) \risingdotseq X_L(p)$,
$\dot{X}(t) \risingdotseq pX_L(p) - X(0) = pX_L(p) - E$,
$AX(t) \risingdotseq AX_L(p)$,
$pX_L(p) - E = AX_L(p)$,
$pX_L(p) - AX_L(p) = E$,
$(pE - A)X_L(p) = E$,
$X_L(p) = (pE - A)^{-1}$,
$e^{At} = X(t) = L^{-1}((pE - A)^{-1})$.

□

Нахождение решения задачи Коши при помощи фундаментальной матрицы системы.

Вернемся к линейным системам вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

Будем искать решение системы (9), удовлетворяющее начальным условиям

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0. \tag{10}$$

Теорема. *Пусть* $X(t)$ *– фундаментальная матрица системы* (9), $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, *тогда решение задачи Коши* (9) (10) *может быть получено как*

$$\boldsymbol{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}^0. \tag{11}$$

Доказательство. Проверим,что вектор-функция (11) удовлетворяет системе (9) и начальным условиям (10).

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{X}(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}^0 = A(t)\underbrace{X(t)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}^0}_{\boldsymbol{x}(t)} = A(t)\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{x}(t_0) = X(t_0)X^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^0.$$

$\square$

Замечание. *Если рассматривается решение задачи Коши*

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0, \tag{13}$$

где матрица A *– матрица с постоянными коэффициентами, то матричная экспонента* e^{At} *будет являться фундаментальной матрицей системы* (12) *и решение задачи Коши* (12) (13), *задаваемое формулой* (11), *примет вид*

$$\boldsymbol{x}(t) = X(t)X^{-1}(0)\boldsymbol{x}^0 = e^{At}E^{-1}\boldsymbol{x}^0 = e^{At}\boldsymbol{x}^0.$$