ЛЕКЦИЯ 13. МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ дифференциальное *уравнение Лежандра*:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-\lambda y(x), \tag{1}$$

где λ − некоторое число.

Требуется найти те значения параметра λ, при которых существует отличное от нуля решение уравнения (1), ограниченное на отрезке $[-1;1]$ (*задача Штурма-Лиувилля*). Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-2xy'(x)+\lambda y(x)=0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде степенного ряда:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1},\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}. \tag{3}$$

Подставим (3) в (2):

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-\left[n(n-1)+2n-\lambda\right]a_n\right\}x^n=0.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,\ n=0,1,2,...$$

Коэффициенты $a_0,\ a_1$ остаются произвольными. При $a_0\neq 0,\ a_1=0$ получим решение, содержащее только четные степени x. При $a_0=0,\ a_1\neq 0$ получим решение, содержащее только нечетные степени x. Если $\lambda=n(n+1)$, то уравнение (1) будет иметь решение в виде многочлена, которое ограничено на отрезке $[-1;1]$ и при этом не является тождественным нулем. Следовательно, собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля будут числа

$$\lambda_n = n(n+1), n = 0,1,2,.... \tag{4}$$

Получим более удобное выражение для собственной функции, соответствующей собственному значению λ_n. Для этого рассмотрим многочлен $u(x) = (x^2-1)^n$ степени $2n$. Так как $u'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1}$, то

$$(x^2-1)u'(x) - 2nxu(x) = 0. \tag{5}$$

Продифференцируем равенство (5) n раз по переменной x. Для этого будем использовать формулу для n-ой производной произведения двух функций:

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + ... + C_n^n f\, g^{(n)}.$$

Получим:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n)} \cdot (x^2-1) + n\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n-1)} \cdot 2x + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n-2)} \cdot 2 -$$

$$-2nxu^{(n)}(x) - nu^{(n-1)} \cdot 2n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^{(n+1)} \cdot (1-x^2) + n(n+1)u^{(n-1)} = 0.$$

Последнее равенство еще раз продифференцируем по x:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}u^{(n)}\right] + n(n+1)u^{(n)} = 0.$$

Таким образом, функция $y(x) = u^{(n)}(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)y'(x)\right] + n(n+1)y(x) = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) совпадает с (1) при $\lambda = \lambda_n$. Решением уравнения (6) будет также и функция $y(x) = Cu^{(n)}(x)$, где C – постоянный множитель. Полагая $C = \dfrac{1}{2^n n!}$, получим следующее решение уравнения (6):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n\left[(x^2-1)^n\right]}{dx^n},\ n = 0,1,2,.... \tag{7}$$

Функции $P_n(x)$ называются *многочленами Лежандра*. Они являются решениями уравнений (1), (2) с $\lambda = n(n+1)$. Формула называется *формулой Родрига* для многочленов Лежандра.

Свойства многочленов Лежандра

Свойство 1. Многочлены Лежандра (7) обладают свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, \ m \neq n, \\ 2/(2n+1), \ m = n. \end{cases}$$

Доказательство: Пусть $m \neq n$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right] + m(m+1)P_m(x) = 0. \qquad (9)$$

Умножим обе части уравнения (8) на $P_m(x)$, а уравнения (9) − на $\left(-P_n(x)\right)$. Затем сложим получившиеся равенства и проинтегрируем по отрезку $[-1;1]$:

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right] - P_n(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right] + \right.$$
$$\left. + [n(n+1) - m(m+1)]P_n(x)P_m(x)\right\}dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_m(x)P_n'(x)\left(1-x^2\right) - P_n(x)P_m'(x)\left(1-x^2\right)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1}\left\{\left(1-x^2\right)P_n'(x)P_m'(x) - \left(1-x^2\right)P_m'(x)P_n'(x)\right\}dx +$$

$$+\left(n(n+1) - m(m+1)\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0.$$

Если $m \neq n$, то $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx = 0$.

Рассмотрим случай $m = n$:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{\left(2^n n!\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n} dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая, что

$$\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+k)}\Bigg|_{-1}^{1} = 0,\ k = 0,1,\ldots,n-1,\ \left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(2n)} = (2n)!\,,$$

получим:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2} \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n dx. \tag{10}$$

Используя эйлеровы интегралы, вычислим интеграл в правой части равенства (10):

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx = 2\int_{0}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx = 2(-1)^n\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n dx = \left[x=\sqrt{t}\right] =$$

$$= 2(-1)^n\int_{0}^{1}(1-t)^n \frac{dt}{2\sqrt{t}} = (-1)^n\int_{0}^{1} t^{-1/2}(1-t)^n dt = (-1)^n B\left(\frac{1}{2}, n+1\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)} = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}\cdot n!}{\dfrac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}} = \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{(2n+1)!!}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\frac{(-1)^n 2\cdot 2^n n!}{(2n+1)!!} = \frac{2\cdot(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{(2n+1)}.\blacksquare$$

Свойство 2. $P_n(1) = 1, n = 0,1,\ldots.$

Доказательство:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)} = \frac{1}{2^n n!}\cdot\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]^{(n)} =$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \cdot \left\{ \left[(x-1)^n \right]^{(n)} (x+1)^n + C_n^1 \left[(x-1)^n \right]^{(n-1)} \left[(x+1)^n \right]' + \right.$$

$$\left. + C_n^2 \left[(x-1)^n \right]^{(n-2)} \left[(x+1)^n \right]'' + \ldots + (x-1)^n \left[(x+1)^n \right]^{(n)} \right\} \Rightarrow$$

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \cdot n! \cdot (1+1)^n = 1. \ \blacksquare$$

Свойство 3. (Единственность) Доказать, что всякое решение уравнения

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1) y(x) = 0, \qquad (11)$$

ограниченное при $x = 1$, отличается от многочлена Лежандра $P_n(x)$ только постоянным множителем. В частности, $y = P_n(x)$ − единственное решение уравнения (11), удовлетворяющее условию $y(1) = 1$.

Доказательство: Уравнение (11) запишем в виде:

$$y''(x) + p(x) y'(x) + q(x) y(x) = 0, \qquad (12)$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1 - x^2}, \ q(x) = \frac{n(n+1)}{1 - x^2}.$$

Если $y_1(x)$ − некоторое частное решение уравнения (12), то второе линейно независимое решение этого уравнения может быть найдено по формуле Лиувилля:

$$y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x) dx} \frac{dx}{y_1^2(x)}.$$

С учетом того, что $y_1(x) = P_n(x)$, $e^{-\int p(x) dx} = e^{-\ln\left(1 - x^2\right)} = \dfrac{1}{1 - x^2}$, получим:

$$y_2(x) = P_n(x) \int \frac{dx}{\left(1 - x^2\right) P_n^2(x)}.$$

Так как $P_n(1) = 1 \neq 0$, то $x = 1$ − корень кратности 1 знаменателя в подынтегральной функции. Поэтому в разложении дроби на простейшие выделится слагаемое вида $\frac{A}{x-1}$, а остальные слагаемые не будут иметь особенностей при $x=1$. Общее решение уравнения (12) запишется в виде:

$$y(x)=C_1P_n(x)+C_2P_n(x)\left(A\ln|x-1|+\varphi(x)\right),$$

где функция $\varphi(x)$ ограничена в точке $x=1$.

Для ограниченности функции $y(x)$ при $x\to 1$ необходимо потребовать, чтобы $C_2=0$. Поэтому $y(x)=C_1P_n(x)$. При дополнительном условии $y(1)=1$ получим $y(x)=P_n(x)$■

Свойство 4. Функция

$$W(x,h)=\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}},x\in[-1;1],\ h\in(-1;1) \tag{13}$$

является производящей функцией многочленов Лежандра, т.е.

$$W(x,h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n,\ x\in[-1;1],\ h\in(-1;1). \tag{14}$$

Решение: Представим функцию (13) в виде ряда по степеням h, обозначив коэффициенты разложения через $y_n(x)$:

$$W(x,h)=\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)h^n. \tag{15}$$

Тогда

$$W(1,h)=\frac{1}{\sqrt{1-2h+h^2}}=\frac{1}{1-h}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n\ \Rightarrow\ y_n(1)=1.$$

Функция (13) удовлетворяет уравнению:

$$h^2\frac{\partial^2W}{\partial h^2}+\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+2h\frac{\partial W}{\partial h}-2x\frac{\partial W}{\partial x}=0. \tag{16}$$

Подставляя ряд в правой части равенства (15) в уравнение (16), получим:

$$h^2\sum_{n=2}^{\infty} y_n(x)n(n-1)h^{n-2}+\left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} y_n''(x)h^n+$$

$$+2h\sum_{n=1}^{\infty} ny_n(x)h^{n-1}-2x\sum_{n=0}^{\infty} y_n'(x)h^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(1-x^2\right)y_n''(x)-2xy_n'(x)+n(n+1)y_n(x)\right\}h^n=0.$$

Откуда следует, что функция $y_n(x)$ удовлетворяет уравнению (11). А так как $y_n(1)=1$, то согласно свойству единственности $y_n(x)=P_n(x)$ и справедливо разложение (14). ■

Свойство 5. Многочлены Лежандра удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\ n=1,2,.... \qquad (17)$$

Доказательство: Дифференцируя по переменой h производящую функцию (13), получим:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{x-h}{\left(1-2hx+h^2\right)^{3/2}}=\frac{x-h}{\left(1-2hx+h^2\right)}W\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-2hx+h^2\right)\frac{\partial W}{\partial h}=(x-h)W.$$

Подставим в последнее равенство разложение (14):

$$\left(1-2hx+h^2\right)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1}=(x-h)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^n\Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)h^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} 2xnP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)h^{n+1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)h^{n+1}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_{k+1}(x)h^k-\sum_{k=0}^{\infty} 2xkP_k(x)h^k+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_{k-1}(x)h^k-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} xP_k(x)h^k + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(x)h^k = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получим:

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$

$$(k+1)P_{k+1}(x) - 2xkP_k(x) + (k-1)P_{k-1}(x) - xP_k(x) + P_{k-1}(x) = 0, k = 1,2,..$$

$$\Leftrightarrow (k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0,\ k = 1,2,....$$

Откуда и следует (17) ■