Лекция №2

Линейные системы

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ –заданные функции.

Определение. Система (1) – линейная система дифференциальных уравнений первого порядка.

Часто функции $a_{ij}(t)$ называют коэффициентами системы, а $f_i(t)$ правыми частями или свободными членами.

Определение. Если правые части $f_i(t)$ в системе (1) отсутствуют, то такая система называется – линейной однородной системой диффернциальных уравнений первого порядка.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t)$ и правые части $f_i(t)$ $\forall i, j = 1, \ldots, n$ – непрерывные на интервале (a, b) функции.

Теорема (о продолженииии решений линейной системы)**.** *Всякое решение системы* (1) *продолжается на весь интервал* (a, b)*.*

Для сокращения записи систем удобно пользоваться векторно-матричными обозначениями. Введем матрицу коэффициентов системы

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \ldots & a_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

а систему неизвестных функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ и правые части $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ будем обозначать как вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{f}(t)$ соответственно. Тогда система (1) перепишется в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}. \tag{2}$$

Соответствующая однородная система будет иметь вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Теорема (о множестве решений линейной однородной системы)**.** *Множество решений R линейной однородной системы*(3) *образует линейное пространство размерности n.*

Доказательство. Так как множество всех действительнозначных функций образует линейное пространство, то для доказательства теоремы достаточно показать замкнутость множества R – решений линейной однородной системы относительно операций сложения и умножения на число, то есть надо показать, что если $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ – решения линейной однородной системы, α – число, то $\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2$, $\alpha\boldsymbol{x}^1$ – тоже решения линейной однородной системы. Действительно

$$\frac{d(\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}^1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{x}^2}{dt} = A(t)\boldsymbol{x}^1 + A(t)\boldsymbol{x}^2 = A(t)(\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2),$$

$$\frac{d(\alpha\boldsymbol{x}^1)}{dt} = \alpha\frac{d\boldsymbol{x}^1}{dt} = \alpha A(t)\boldsymbol{x}^1 = A(t)(\alpha\boldsymbol{x}^1).$$

Следовательно R – линейное пространство.

Покажем, что размерность этого пространства равна n. Для этого рассмотрим точку $t_0 \in (a, b)$ и отображение $\varphi : R \to \mathbb{R}^n$, которое каждому решению $\boldsymbol{x}$ системы(3) ставит в соответствие его значения в точке t_0. То есть $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(t_0)$. Отображение φ:

- линейно;
- сюръективно (отображение "на"), в силу существования решения задачи Коши;
- инъективно, в силу единственности решения задачи Коши.

Следовательно φ –изоморфизм, а значит

$$\dim R = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

$\square$

Фундаментальная система решений.

Определение. Произвольный базис $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ в R называется фундаментальной системой решений (ФСР) системы(3).

Определение. Матрица $X(t)$, столбцы которой образуют ФСР, называется фундаментальной матрицей системы(3).

Лемма. *Фундаментальная матрица системы*(3) $X(t)$ *удовлетворяет матричному уравнению* $\dot{X} = AX$*.*

Доказательство. Это следует из того, что каждый столбец матрицы $\dot{X}$ является произведением матрицы A на соответствующий столбец матрицы X. $\square$

Теорема (об общем решении линейной однородной системы)**.** *Пусть* $\{\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)\}$ *– ФСР системы* (3)*, а* $c_1, \ldots, c_n$ *– произвольные постоянные. Тогда общее решение линейной однородной системы* (3) *имеет вид*

$$\boldsymbol{x}_{oo}(t) = c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \ldots + c_n\boldsymbol{x}^n(t). \tag{4}$$

Доказательство. Это следует из того, что ФСР образует базис в линейном пространстве решений системы(3). $\square$

Теорема (об общем решении линейной неоднородной системы)**.** *Пусть* $\{\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)\}$ *– ФСР системы* (3), *тогда общее решение линейной неоднородной системы* (2) *имеет вид*

$$\boldsymbol{x}_{\text{он}}(t) = \boldsymbol{x}_{\text{чн}}(t) + \boldsymbol{x}_{\text{оо}}(t), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{x}_{\text{чн}}(t)$ *– частное решение линейной неоднородной системы* (2), $\boldsymbol{x}_{\text{оо}}(t)$ *– общее решение линейной однородной системы* (3).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_1(t)$ – фиксированное частное решение системы (2), $\boldsymbol{x}_0(t)$ – произвольное решение системы (3), $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1(t) + \boldsymbol{x}_0(t)$. Покажем, что $\boldsymbol{x}(t)$ – решение системы (2).

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{x}_0}{dt} = A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{f} + A\boldsymbol{x}_0 = \\ + A(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{f} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$$

Обратно пусть $\boldsymbol{x}(t)$ – произвольное решение системы (2). Покажем, что

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0,$$

где $\boldsymbol{x}_0$ – некоторое решение линейной однородной системы(2). Действительно

$$\frac{d\boldsymbol{x}_0}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} - (A\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{f}) = \\ = A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_0.$$

$\square$