11-й семинар

Приближается (возможно) сессия, и нам пора начинать готовиться к экзамену. Предлагаю в связи с этим проработать Контрольные и Теоретические упражнения из типового расчета. Начинаем с **Контрольных вопросов.**

5.1 Что такое ранг матрицы? Как он связан с рангом системы ее строк (столбцов)? Чему равен ранг матрицы, все элементы которой одинаковы?

Не сомневаюсь, что этот вопрос не вызовет ни у кого затруднений, тем более мы об этом говорили еще в первом семестре. Только формулируйте понятие ранга матрицы правильно – как наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы (а не так, как я иногда слышу – как порядок самого большого минора). На троечку хватит правильно сформулировать ответ, на большую отметку, пожалуй, стоит освежить в памяти доказательство.

5.2 Каков критерий равенства определителя нулю?

Не буду говорить об этом в дальнейшем, но если Вам нужна как минимум четверка, подучите доказательство. А так хватит произнести фразу про линейную зависимость строк (столбцов) и быть готовыми в $n+1$-й раз дать два равносильных определения линейной зависимости и два – линейной независимости.

5.3 Что происходит с рангом матрицы при транспонировании; при элементарных преобразованиях?

Насчет транспонирования – достаточно вспомнить, что определитель матрицы не меняется при транспонировании, поэтому сохранение ранга при транспонировании очевидно.

При элементарных преобразованиях – можно сослаться на то, что каждое элементарное преобразование над строчками (столбцами) матрицы можно совершить с помощью домножения матрицы слева (справа) на так называемые элементарные матрицы, которые имеют ненулевой определитель и поэтому не меняют ранг произведения. Аккуратное изложение этой теории в какой-то момент появится на вашем сайте.

5.4 Как выглядит блочно-треугольная матрица, чему равен ее определитель?

Проще всего объяснить это так: берем блочно-диагональную матрицу и заменяем нули выше или ниже блоков числами; получается соответственно верхне или нижне блочно-треугольная матрица. А что такое блочно-диагональная матрица? Но нас же об этом не спрашивали))) А если серъезно – попытайтесь сообразить сами. А также думайте, чему равен определитель сначала блочно-треугольной матрицы, а затем и блочно-треугольной. Ну, так и быть. Напомню, что определительблочно-треугольной матрицы равен произведению определителей блоков, стоящих по диагонали.

5.5 Что такое матрица системы; расширенная матрица? Что означают слова: записать систему в матричной форме? Почему она эквивалентна исходной системе уравнений?

Пожалуй, воздержусь здесь от комментариев.

5.6 Что означает совместность системы? Какие системы называются эквивалентными? Каков критерий совместности системы? Когда решение системы единственно?

Опять промолчу. Только задам один вопрос: эквивалентны ли уравнения $x^2=-1$ и $\sin x = 2$?

5.7 Всегда ли совместна однородная система? Каков критерий существования ненулевых решений у однородной системы? Выделите случай квадратной системы.

Что-то я забыл этот критерий... Не заглянуть ли мне в свои лекции или в умную книжку?))

5.8 Образует ли множество решений однородной системы линейное пространство? А множество решений неоднородной системы? Объясните результат. Какова связь решений однородной и неоднородной систем?

Интересно, а не задавали ли мне случайно эти вопросы при защите первых двух задач типового расчета?

5.9 Какова размерность пространства решений однородной системы? Что называется фундаментальной системой решений (ФСР)? Почему понятие ФСР существует только для однородной системы?

Похоже, меня спрашивают про формулу $\operatorname{rg} A + \dim L_0 = n$? Так я ее уже писал при защите типового расчета.

5.10 Что называется общим решением однородной системы и какова его структура? Пусть дана ФСР некоторой однородной системы:

$$X_1 = (1\ 1\ 2)^T,\ X_2 = (2\ 3\ 1)^T.$$

Выпишите все ее решения. Укажите другую ФСР этой системы.

Общее решение – это понятно: $X = C_1X_1 + C_2X_2$. А вот другая ФСР? Мы это не проходили! Караул! Или все-таки включим мозги и поймем, что это очень просто?

5.11 Все решения однородной системы линейных уравнений могут быть записаны в виде

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 = s+t \\ x_2 = s-2t \\ x_3 = 3 \\ x_4 = t \\ x_5 = s+2t \end{array}\right. ,$$

где $x,\ t \in \mathbb{R}$. Укажите ее ФСР. Сколько уравнений могло быть в системе?

Если знаете, что делать, не читайте мой текст. Вот возможный путь рассуждения. Мы понимаем, где у нас ФСР, если решение записано в виде линейной комбинации нескольких столбцов с коэффициентами вида $C_1,\ C_2,\ldots$. Но если вместо s и t написать C_1 и C_2, разве у нас не получится

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - 2C_2 \\ 3 \\ C_2 \\ C_1 + 2C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Мда, что-то явно пошло не так. Что это за третий столбец образовался?! При решении однородных систем такого быть не может! Ладно подкорректируем условие задачи, считая, что авторы хотели написать $x_3 = 0$. Зачеркиваем третий столбец, а первые два записываем в ФСР. Есть сомнения, что они образуют базис пространства решений? Но ведь полнота этой системы очевидна, поскольку общее решение оказалось их линейной оболочкой (тут же проверили себя, что помним определение линейной оболочки и полноты). А если мы не уверены, что столбцы неколлинеарны, выписываем какой-нибудь ненулевой минор второго порядка. Кстати, возможно, что авторы вместо 3 хотели написать s, тогда все еще логичней, ведь тогда получение общего решения становится совсем прозрачным: x_3 и x_4 были признаны свободными неизвестными, а остальные – базисными, свободным присвоили значения C_1 $(= s)$ и C_2 $(= t)$, а базисные выразили через них. Кстати, поскольку каждая базисная неизвестная оккупирует ступеньку, ступенек получается три, поэтому первоначально уравнений было не меньше трех. А сколько конкретно, сказать нельзя.

5.12 Все решения неоднородной системы линейных уравнений могут быть записаны в виде $x = 1 + s$; $y = 2s - 1$; $z = s$. Опишите все решения соответствующей однородной системы и приведите пример ее ФСР.

Мы уже перестали нервно реагировать на s и t (в данном случае только на s), а чтобы показать свою оригинальность и независимость (не путайте с линейной независимостью, наша независимость круче), заменим s, скажем, на твердый знак. Конечно, в TEX'е такие шуточки себе дороже, но мы умеем справляться с ними. Имеем:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ъ + 1 \\ 2Ъ - 1 \\ Ъ \end{pmatrix} = Ъ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Второй столбец ни на что не умножается? Значит, он получился из столбца свободных членов системы. Соответствующая однородная система получается из неоднородной заменой столбца свободных членов на нулевой столбец. Поэтому решения однородной системы записываются в виде

$$Ъ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ну а одна из возможных ФСР однородной системы, на общечеловеческом языке один из базисов, является упорядоченной системой из одного столбца (а, как я загнул!)

$$\text{Б} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

5.13 Какие способы решения систем линейных уравнений Вы знаете? Всегда ли они применимы?

Не пытайтесь лихорадочно вспоминать школьные способы решения. Скорее всего, они просто напросто сводились к методу Гаусса. Добавьте к методу Гаусса метод Крамера и матричный способ с помощью обратной матрицы, и я вполне удовлетворюсь таким ответом. А если Вы еще докажете, что два последних метода фактически дублируют друг друга, то я просто буду счастлив. Только не забудьте написать про определитель матрицы коэффициентов.

Переходим к **Теоретическим Упражнениям.**

1. Доказать утверждения о связи решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений:
а) разность двух решений неоднородной системы является решением однородной системы;
б) сумма решений неоднородной и однородной систем является решением неоднородной системы;
в) общее решение неоднородной системы имеет вид $X = X_0 + \tilde{X}$, где X_o – общее решение однородной системы, а $\tilde{X}$ – частное решение неоднородной системы;
г) каков геометрический смысл последнего утверждения для системы уравнений с тремя неизвестными?

Ну эта тема должна у вас от зубов отскакивать.

2. Доказать, что для любых различных чисел $x_1,\ x_2,\ x_3$ и любых чисел $y_1,\ y_2,\ y_3$ существует, причем единственный, многочлен $y = f(x)$ степени не больше 2, для которого $f(x_i) = y_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Когда степень этого многочлена меньше 2, равна 1, равна 0?

Элементарная задача, если подходить к ней с точки зрения решения системы линейных уравнений относительно коэффициентов многочлена. В процессе решения полезно еще про определитель Вандермонда вспомнить.

3. Пусть A – прямоугольная матрица. Докажите, что $\operatorname{rg} A = 1 \Leftrightarrow A = B \cdot C$, где B – вектор-столбец, C – вектор-строка, причем матрицы B и C – ненулевые.

Надеюсь, каждый из Вас помнит, что ранг произведения матриц не превосходит ранги сомножителей, а кроме того, если матрицы B и C ненулевые, то их произведение очевидно будет также ненулевой матрицей, поскольку при перемножении столбца и строки в указанном порядке получается матрица, элементы которой равны произведениям элементов матриц-сомножителей. Поэтому если на i-м месте матрицы B и j-м месте матрицы C стоят ненулевые элементы, то на (i, j)-м месте матрицы BC будет ненулевой элемент. Это я доказал стрелочку справа-налево.

В обратную сторону утверждение также достаточно просто доказывается, поэтому не торопитесь смотреть моё доказательство, а подумайте сами.

Раз ранг матрицы A ненулевой, в ней найдется ненулевой элемент.Поскольку ранг матрицы равен 1, размерность линейной оболочки системы строк равна 1, поэтому любая ненулевая строка задает базис линейной оболочки, то есть остальные строки ей пропорциональны. Взяв в качестве матрицы C выбранную строчку, а в качестве матрицы B столбец коэффициентов пропорциональности, получаем нужное разложение матрицы A.

Для примера:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ca & cb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \cdot (a\ b)$$

4. Лень переписывать условие этой задачи.Коротко: она про элементарные преобразования матрицы, которые можно производить, умножая матрицу на так называемые элементарные матрицы. Я про это упоминал в задаче 5.3.