Раздел 1. Пространство со скалярным произведением.

Лекция 1 Основные свойства пространств со скалярным произведением.

X – вещественное (пока что) ЛП.
Отображение $X \times X \to \mathbb{R}$.
Обозначение: (x, y)
Скалярное произведение, если обладает следующими свойствами:

1. Симметрия:
$$\forall x, y \in X : (x, y) = (y, x) .$$

2. Линейность по первому аргументу:
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \, \forall x, y, z \in X : (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) .$$

3. Неотрицательность и невырожденность (положительная определённость) – т.е. фактически две аксиомы:
$$\{\forall x \in X : (x, x) \geq 0\} \wedge \{(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o\} .$$

Замечание. o – нулевой элемент пространства.

Замечание. Равенство $(o, o) = 0$ вытекает из аксиомы линейности (доказать!).

Замечание. В некоторых случаях имеет смысл отказаться от аксиомы невырожденности и рассматривать пространство, где скалярное произведение элемента на себя обращается в нуль не только для нулевого элемента (подобно полуметрическим и полунормированным пространствам, где также не выполнена аксиома невырожденности).

Замечание. Иногда рассматриваются также пространства, в которых произведение некоторых элементов на сабя отрицательно (пространства с индефинитной метрикой): таково, например, пространство Минковского в специальной теории относительности. Мы такие пространства рассматривать не будем.

Замечание. Свойство линейности эквивалентно совокупность двух свойств: аддитивности
$$\forall x, y, z \in X : (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$
и однородности
$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \, \forall x, y \in X : (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

Замечание. Скалярное произведение часто рассматривается над комплексными линейными пространствами, и значение скалярного произведения – вообще говоря, комплексное число. Для таких пространств первая аксиома выглядит так:
$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

То есть при перемене мест сомножителей значение скалярного произведения заменяется комплексно сопряжённым.

Замечание. Из линейности по первому аргументу и симметрии в вещественном пространстве вытекает линейность по второму аргументу, а в комплексных – полулинейность по второму аргументу, т.е. аддитивность и полуоднородность: если второй аргумент умножить на комплексное число, то скалярное произведение умножится на комплексно сопряжённое число (проверить!).

Замечание. В физической литературе обычно пользуются другой (дираковской) нотацией, где для обозначения скалярного произведения используются угловые скобки: $< x, y >$. При этом скалярное произведение в комплексном пространстве считается линейным по второму аргументу и полулинейным по первому.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ).

Докажем, что

$$\forall x, y \in X : |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}\,.$$

Доказательство. Из аксиомы неотрицательности вытекает, что

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\, \forall x, y \in X : (\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0\,.$$

С другой стороны, в силу линейности по обоим аргументам

$$(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 (x,x) + 2\lambda (x,y) + (y,y)\,.$$

Полученное выражение при $x \neq o$ – квадратный трёхчлен относительно λ с положительным коэффициентом при λ^2, значение которого должно быть неотрицательно при любых λ. Отсюда вытекает, что дискриминант трёхчлена неположителен (в противном случае при λ, лежащих между его корнями, значение его было бы меньше нуля). Тогда

$$D/4 = (x,y)^2 - (x,x) \cdot (y,y) \leq 0\,,$$

т.е.

$$\forall x, y \in X : (x,y)^2 \leq (x,x) \cdot (y,y)\,.$$

(Замечание. Это неравенство также иногда назыют неравенством КБШ.)

Извлекая квадратный корень из левой и правой части, получаем искомое неравенство.

Замечание. При $x = o$ неравенство также выполняется, поскольку обе части равны нулю. То, что

$$\forall y \in X : (o, y) = 0\,,$$

вытекает из свойства однородности (доказать!)

Замечание. Неравенство превращается в равенство либо при $x = o$, либо при нулевом дискриминанте, когда при некотором λ квадратный трёхчлен обращается в 0. Это происходит при $\lambda x+y=o$, т.е. $y=-\lambda x$. Таким образом, неравенство КБШ превращается в равенство, когда элементы x и y линейно зависимы (коллинеарны).

Замечание. Для комплексных пространств неравенство Коши-Буняковского-Шварца также справедливо, но доказывается немного сложнее.

Замечание. В отечественной литературе неравенство КБШ часто называют неравенством Коши-Буняковского, в западной – неравенством Шварца.

Норма, порождённая скалярным произведением.

Докажем, что функционал

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

обладает всеми свойствами нормы:

1. Неотрицательность и невырожденность:

$$\{\forall x \in X : \|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0\} \wedge \{\|x\| = \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow x = o\}$$

2. Абсолютная однородность:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. Неравенство треугольника:

$$\begin{gathered} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq \\ \leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} + (y,y) = \\ = \left(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{gathered}$$

(воспользовались неравенством КБШ).

Извлекая корень, получаем:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Альтернативное доказательство (тоже с использованием неравенства КБШ):

$$\begin{gathered} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) \leq \\ \leq \|x\| \cdot \|x+y\| + \|y\| \cdot \|x+y\| = (\|x\| + \|y\|) \cdot \|x+y\| \end{gathered}$$

В случае $\|x+y\| > 0$ делим обе части неравенства на $\|x+y\|$ и получаем неравенство треугольника. В случае $\|x+y\| = 0$ неравенство треугольника очевидно.

Таким образом, пространство со скалярным произведением естественным образом становится линейным нормированным пространством (а также и метрическим пространством). Норма $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ – норма, порождённая скалярным произведением, или норма, согласованная со скалярным произведением.

Замечание. Теперь мы можем переписать неравенство КБШ в виде

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Замечание. Величина $\|x\|^2 = (x,x)$ называется скалярным квадратом элемента пространства (вектора).

Утверждение:

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} (x,y) \,.$$

Действительно, в силу неравенства КБШ

$$(x,y) \leq \|x\| \cdot \|y\| = \|x\| \,,$$

откуда $\sup_{\|y\|=1}(x,y) \leq \|x\|$. С другой стороны, в случае $x \neq o$ при $y = x^0 = x/\|x\|$ равенство достигается:

$$\left(x, \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{(x,x)}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\| \,.$$

При $x = o$ левая и правая части равны нулю, так что равенство также справедливо.

Замечание: поскольку супремум достигается, его можно заменить максимумом.

Утверждение: линейный оператор $A : X \to X$ ограничен тогда и только тогда, когда его билинейная форма (Ax, y) ограничена на единичном шаре (или единичной сфере), и

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (Ax, y) \,.$$

Действительно,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y\|=1} (Ax, y) \,.$$

Равенство справедливо также и для операторов $A : X \to Y$, где Y – пространство со скалярным произведением, а X – ЛНП (которое, в частности, также может быть пространством со скалярным произведением).

Полное пространство со скалярным произведением называется гильбертовым (полное относительно метрики, порождённой нормой, порождённой скалярным произведением). Часто обозначают буквой H (в честь Гильберта).

Замечание. Иногда гильбертовым пространством называют полное бесконечномерное пространство (а конечномерное – евклидовым). Иногда гильбертовым пространством называют полное комплексное пространство (а вещественное – евклидовым).

Примеры пространств со скалярным произведением.

1. E^n со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Комплексный вариант: $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$. Очевидно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$. Пространство гильбертово (полное).

2. $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = y^t G x$, $G = G^t$ – положительно определённая матрица. Комплексный случай: $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = \bar{y}^t G x$, G теперь уже эрмитова положительно определённая матрица. Пространство гильбертово (полное). Если $G = E$ (единичная матрица), приходим к рассмотренному выше случаю пространтва E^n (вещественного или комплексного). В общем случае пространства изоморфны (можем перейти к ортонормированному базису из собственных векторов матрицы G).

3. l_2 со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$. Комплексный вариант: $(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \bar{y}_j$. Очевидно, $\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2}$. Пространство гильбертово (полное).

4. $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ со скалаярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt\,.$$

Комплексный вариант:

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, \overline{y}(t)\, dt\,.$$

Норма:

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|^2\, dt\,.$$

Неполные пространства. Пополнение – $L_2[a, b]$. Формулы те же, но интегралы понимаются в смысле Лебега, а элементы – классы квадратично интегрируемых по Лебегу функций.

5. $L_2(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^m$ – некоторый компакт. Элементы пространства – классы функций m переменных, квадратично интегрируемых на K по Лебегу. Все формулы аналогичны, но интегралы по K. Таким же образом могут быть рассмотрены, в частности, криволинейные и поверхностные интегралы (если K – кривая или поверхность).

6. $L_2([a,b] \to E^n)$ – пространство классов вектор-функций на отрезке $[a,b]$ со значениями в E^n, квадратично интегрируемых по Лебегу. Скалярное произведение:

$$(x,y)_{L_2} = \int_a^b (x(t),y(t))_{E^n}\, dt$$

(в вещественном или комплексном варианте).

7. $\tilde{W}_2^l[a,b]$ Функции, имеющие l непрерывных производных,

$$(x,y)_{W_2^l} = (x,y)_{L_2} + (\dot{x},\dot{y})_{L_2} + (\ddot{x},\ddot{y})_{L_2} + \cdots + (x^{(l)},y^{(l)})_{L_2}$$

(в вещественном или комплексном варианте). Неполные пространства. Их пополнения – пространства $W_2^l[a,b] = H^l[a,b]$ классов квадратично интегрируемых функций, имеющих l квадратично интегрируемых обобщённых производных.

8. $L_2(\mathbb{R})$. Всё как с отрезком, но интегралы несобственные. Можем рассмотреть и другие пространства функций с некомпактной областью определения.

9. Весовые пространства. Модификации рассмотренных пространств. Например:

   - $l_{2,w}$ – пространство бесконечных последовательностей, для которых сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} w_j |x_j|^2$, где w – заданная последовательность с положительными элементами. Скалярное произведение: $(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j x_j y_j$ (в комплексном случае y_j заменяем на $\bar{y}_j$).
   - $L_2([a,b],w)$ – пространство, элементы которого – классы функций, для которых сходится интеграл Лебега

$$\int_a^b w(t)\,|x(t)|^2\, dt\,,$$

   где w – заданная почти всюду положительная функция. Скалярное произведение:

$$(x,y) = \int_a^b w(t)\,x(t)\,y(t)\,dt$$

   (в комплексном случае $y(t)$ заменяем на $\bar{y}(t)$).

10. Пространство почти периодических функций. Рассмотрим пространство функций (вещественнозначных или комплекснозначных), для простоты непрерывных и ограниченных, заданных на вещественной оси и удовлетворяющих условию:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists T\, \forall t \in \mathbb{R} :\ |x(t+T) - x(t)| \le \varepsilon\,.$$

Такие функции образуют линейное пространство (проверьте!) и в комплексном случае могут быть представлены в виде

$$x(t) = \sum_j \alpha_j \exp(i\omega_j t)\,,$$

(в вещественном заменяем на синусы и косинусы), где ω_j – вещественные числа, а α_j – комплексные. Сумма состоит либо из конечного числа слагаемых, либо из бесконечного, в последнем случае должен сходиться ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2$$

(т.е. последовательность коэффициентов принадлежит l_2). На пространстве почти периодических функций можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(x,y) = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T x(t)\,\bar{y}(t)\,dt$$

(в вещественном случае убираем комплексное сопряжение). Если

$$y(t) = \sum_k \beta_k \exp(i\chi_k t)\,,$$

то это скалярное произведение можно записать в виде

$$(x,y) = \sum_{\omega_j=\chi_k} \alpha_j \bar{\beta}_k\,,$$

т.е. суммирование ведётся по слагаемым с совпадающими частотами. Это пространство не является сепарабельным, поскольку содержит континуальное дискретное подмножество $\{\exp(i\omega t),\ \omega\in\mathbb{R}\}$.

Пространство не является полным: не любой ряд описанного вида с $\alpha\in l_2$ задаёт непрерывную функцию, в то же время последовательность частичных сумм фундаментальна. Пополнение этого пространства содержит все такие ряды.

Тождество параллелограмма и выражение для скалярного произведения через норму

Выпишем выражения скалярных квадратов суммы и разности двух элементов пространства (векторов):

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2\\ \|x-y\|^2 &= (x+y,x+y) = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2\end{aligned}$$

Вычтя из верхнего выражения нижнее и поделив на 4, получим выражение для скалярного произведения через нормы:

$$(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

Возникает вопрос: а нельзя ли в произвольном ЛНП ввести скалярное произведение таким же образом? Оказывается, что нет: полученное выражение будет линейно по первому (а тогда и по второму) аргументу тогда и только тогда, когда для любой пары элементов пространства выполнено тождество параллелограмма

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\,,$$

которое получается сложением выписанных выше равенств (геометрическая интерпретация: сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон). Это свойство норм, порождённых скалярным произведением, и если оно не выполнено, то норма, очевидно, не может быть согласована ни с каким скалярным произведением. А вот доказать достаточность – это трудная задача.

Непрерывность скалярного произведения.

Утверждение: скалярное произведение непрерывно по совокупности аргументов.

Доказательство. Пусть $x_m \to x^*$, $y_m \to y^*$, тогда $x_m = x^* + u_m$, $y_m = y^* + v_m$, где $u_m \to o$, $v_m \to o$,и

$$\begin{aligned}|(x_m, y_m) - (x^*, y^*)| = |(x^* + u_m, y^* + v_m) - (x^*, y^*)| = \\ = |(x^*, v_m) + (u_m, y^*) + (u_m, v^m)| \le \\ \le |(u_m, y^*)| + |(x^*, v_m)| + |(u_m, v_m)| \le \\ \le \|u_m\| \cdot \|y^*\| + \|x^*\| \cdot \|v_m\| + \|u_m\| \cdot \|v_m\| \to 0\end{aligned}$$

(к нулю стремятся все три слагаемых).

В частности,

$$x_m \to x^* \Rightarrow \forall y \in X : (x_m, y) \to (x^*, y)\,.$$

Утверждение. Если пространство со скалярным произведением неполно, то на элементы, принадлежащие его пополнению, операции сложения, умножения на число и скалярное произведение продолжаются единственным образом по непрерывности. После такого продолжения пополнение превращается в гильбертово пространство. (Попробуйте доказать.)

Слабая сходимость в пространстве со скалярным произведением.

Последовательность x_m слабо сходится к x^*, если

$$\forall y \in X : (x_m, y) \to (x^*, y)\,.$$

Утверждение: если слабый предел существует, то он единственный. Действительно, пусть $\forall y \in X : (x_m, y) \to (x^*, y) = (x', y)$, тогда, в силу произвольности y, $x^* = x'$.

Утверждение: x_m слабо сходится к $x^* \Leftrightarrow x_m - x^*$ слабо сходится к o (доказать).

Утверждение: из обычной сходимости (т.е. по норме), вытекает слабая сходимость к тому же пределу. Действительно, если $\|x_m - x^*\| \to 0$, то $|(x_m, y) - (x^*, y)| = |(x_m - x^*, y)| \le \|x_m - x^*\| \cdot \|y\| \to 0$.

Обратное неверно: из слабой сходимости сходимость по норме не следует.

Пример. Рассмотрим в пространстве l_2 последовательность элементов e_m (напоминаю, что у этого элемента m-я компонента равна единице, а остальные нулю). Для произвольного элемента $y \in l_2$ справедливо
$(e_m, y) = y_m \to 0$, т.е. последовательность e_m слабо сходится к нулю. В то же время $\forall m : \|e_m\| = 1$, т.е. сходимости по норме к нулю нет.

Замечание. На всякий случай отмечу, что индекс m для e_m означает номер элемента в последовательности, а для y_m – номер компоненты фиксированного элемента y.

Связь слабой сходимости в пространстве со скалярным произведением и слабой сходимости в ЛНП.

Напомню, что в ЛНП последовательность x_m мы называли слабо сходящейся к x^*, если

$$\forall f \in X^* : f(x_m) \to f(x^*) \,.$$

В пространстве со скалярным произведением действие произвольного функционала $f \in X^*$ заменяется на скалярное произведение с произвольным элементом $y \in X$. Это связано с тем, что скалярное произведение индуцирует отображение из X в X^*: при фиксированном $y \in X$

$$(x, y) = f_y(x) \,.$$

Утверждение: это отображение линейно. Действительно,

$$\begin{gathered}\forall x \in X : f_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}(x) = (x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \\ = \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2) = \alpha_1 f_{y_1}(x) + \alpha_2 f_{y_2}(x) \,,\end{gathered}$$

и тогда

$$f_{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2} = \alpha_1 f_{y_1} + \alpha_2 f_{y_2} \,.$$

Утверждение: это отображение изометрично, т.е. $\|f_y\| = \|y\|$. Действительно,

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\|=1} f_y(x) = \sup_{\|x\|=1} (x, y) = \|y\| \,.$$

Таким образом, скалярное произведение порождает линейный изометрический оператор из пространства X в сопряжённое пространство X^*.

Будет показано (теорема Рисса-Фреше), что в гильбертовом пространстве (полном) этот оператор сюрьективен, т.е. в гильбертовом пространстве нет линейных ограниченных функционалов, не представимых в виде скалярного произведения. Отсюда будет следовать, что понятия слабой сходимости в ЛНП и в гильбертовом пространстве полностью согласованы.

Слабая сходимость последовательности линейных ограниченных операторов.

A_m слабо сходится к A, если для $\forall x \in X$: $A_m x$ слабо сходится к Ax. Иначе:

$$\forall x, y \in X : (A_m x, y) \to (Ax, y) \,.$$

Утверждение: слабый предел последовательности операторов единственен (доказать).

Утверждение: A_m слабо сходится к $A \Leftrightarrow A_m - A$ слабо сходится к нулевому оператоoу O (доказать).

Пример. Рассмотрим последовательность знакомых нам операторов правого сдвига $\hat{T}_m$, действующих в l_2 следующим образом: если $x = (x_1, x_2, \dots)$, то $\hat{T}_m x = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ (первые m компонент нулевые). Заметим, что $\forall x \in l_2 \, \forall m \in \mathbb{N} : \|\hat{T}_m x\| = \|x\|$, т.е. операторы $\hat{T}_m$ изометричны, и последовательность $\hat{T}_m x$ к нулю не стремится ни для какого $x \neq o$.
В то же время

$$|(\hat{T}_m x, y)| = |0 \cdot y_1 + \dots + 0 \cdot y_m + x_1 y_{m+2} + x_2 y_{m+2} + \dots| \leq$$
$$\leq \|x\| \cdot \sqrt{\sum_{j=m+1}^{\infty} |y_j|^2} \to 0$$

при $m \to \infty$ для любых $x, y \in l_2$ (воспользовались неравенством КБШ). Отсюда вытекает, что последовательность $\hat{T}_m x$ слабо сходится с $o = Ox$ при любом $x \in l_2$, а последовательность $\hat{T}_m$, соответственно, слабо сходится к O.

Линейные множества (линеалы) в пространствах со скалярным произведением.

Пусть $Y \subset X$ – незамкнутый линеал в пространстве X.
Утверждение: $[Y]$ – также линеал.
Нам нужно доказать, что если $z^*, z' \in [Y]$, то и любая линейная комбинация этих элементов $\alpha z^* + \beta z'$ также принадлежит $[Y]$. Действительно, произвольный элемент из $[Y]$ есть предел некоторой последовательности элементов из Y:
$z^* = \lim_{m \to \infty} y^*_m$,
$z' = \lim_{m \to \infty} y'_m$.
Но тогда
$\alpha z^* + \beta z' = \lim_{m \to \infty} (\alpha y^*_m + \beta y'_m) \,,$
а поскольку $\alpha y^*_m + \beta y'_m \in Y$, мы заключаем, что $\alpha z^* + \beta z' \in [Y]$. Следовательно, $[Y]$ – замкнутый линеал (подпространство).

Пусть теперь $Q \subset X$ – некоторое множество.
Обозначение: $L(Q) \subset X$ – линейная оболочка, множество конечных линейных комбинаций элементов из Q. Очевидно, $L(Q) \supset Q$. Множество $L(Q)$ – линеал, поскольку линейная комбинация линейных комбинаций элементов

множества Q – это снова линейная комбинация элементов множества Q.
Утверждение: $L(Q)$ – минимальный линеал, содержащий Q (в том смысле, что любой линеал, содержащий Q, содержит и $L(Q)$). Действительно, если линеал содержит все элементы Q, то он содержит и все их линейные комбинации, т.е. все элементы $L(Q)$.
Замечание. Если $Q_1 \subset Q_2$, то $L(Q_1) \subset L(Q_2)$.
Замечание. Если само множество Q – линеал, то $L(Q) = Q$.

Линеал $L(Q)$ может быть замкнутым или незамкнутым. Рассмотрим замыкание $[L(Q)]$. В силу доказанного выше, $[L(Q)]$ – подпространство. Очевидно, $Q \subset L(Q) \subset [L(Q)]$.
Утверждение: $[L(Q)]$ – минимальное подпространство, содержащее Q (в том смысле, что любое подпространство, содержащее Q, содержит и $[L(Q)]$). Действительно, если подпространство содержит Q, то оно, будучи линеалом, по доказанному содержит и $L(Q)$, а будучи замкнутым множеством, содержит все предельные точки $L(Q)$.
Замечание. Если $Q_1 \subset Q_2$, то $[L(Q_1)] \subset [L(Q_2)]$.
Замечание. Если само множество Q – подпространство, то $[L(Q)] = Q$.

Рассмотрим теперь $[Q]$ – замыкание множества Q, а также его линейную оболочку $L[Q]$ и замыкание этой линейной оболочки $[L[Q]]$. Очевидно, $[Q] \subset L([Q]) \subset [L[Q]]$.
Из включения $Q \subset [Q]$ вытекает, что $L(Q) \subset L[Q]$ и $[L(Q)] \subset [L[Q]]$.
Утверждение. В последнем случае множества совпадают, т.е. $[L(Q)] = [L[Q]]$. Действительно, из $Q \subset L(Q)$ вытекает, что $[Q] \subset [L(Q)]$. Таким образом, $[L(Q)]$ – подпространство, содержащее $[Q]$. Но мы знаем, что минимальным подпространством, содержащим $[Q]$, является $[L[Q]]$, и поэтому $[L(Q)] \supset [L[Q]]$. Совместно с противоположным включением, полученным ранее, это влечёт доказываемое равенство.

Альтернативное доказательство (более формальное):

$$Q \subset L(Q) \Rightarrow [Q] \subset [L(Q)] \Rightarrow L[Q] \subset L[L(Q)] = [L(Q)] \Rightarrow \\ \Rightarrow [L[Q]] \subset [[L(Q)]] = [L(Q)]\,.$$

Замечание. В доказанных фактах, относящихся к линеалам, подпространствам и линейным оболочкам, нет ничего специфического для пространств со скалярным произведением, они справедливы также и в ЛНП.

Конечномерные подпространства в пространствах со скалярным произведением.

Рассмотрим частный случай: Q – конечное множество (конечная система векторов): $Q = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Линейная оболочка $L(f_1, f_2, \ldots, f_n) = L\{f\}$ конечномерна и поэтому замкнута (является подпространством).

Пусть $x, y \in L\{f\}$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\,, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j\,.$$

Утверждение:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} \alpha_i \beta_j\,, \quad G_{ij} = (f_i, f_j)\,.$$

Действительно, в силу линейности скалярного произведения,

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(f_i, f_j\right)\,.$$

Матрица $G = G^t$ – матрица Грама, метрический тензор.

Утверждение: матрица G неотрицательно определена.
Действительно,

$$\alpha^t G \alpha = \sum_{i,j=1}^{n} G_{ij} \alpha_i \alpha_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \right) = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|^2 \geq 0\,,$$

где α – вектор-столбец с компонентами α_i, а α^t – соответствующая вектор-строка.

Утверждение: если система $\{f\}$ линейно независима, то матрица G положительно определена; если система $\{f\}$ линейно зависима, то матрица G не является положительно определённой.
Действительно, если система линейно независима, то для любого ненулевого набора коэффициентов α_i элемент $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ отличен от нуля, и тогда для любого ненулевого вектора α выполнено неравенство $\alpha^t G \alpha = \|x\|^2 > 0$. Если же система линейно зависима, то найдётся нетривиальная линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, равная o, и тогда для соответствующего вектора α справедливо равенство $\alpha^t G \alpha = \|o\|^2 = 0$.
Замечание. Вспомните критерий Сильвестра положительной определённости матрицы.

Утверждение: матрица G вырождена, если система $\{f\}$ линейно зависима, и невырождена, если она линейно независима.
Докажем, что вырожденность матрицы эквивалентна линейной зависимости системы $\{f\}$. Пусть матрица G вырождена, тогда найдётся ненулевой вектор-столбец α такой, что $G\alpha = o$. Но тогда $\alpha^t G \alpha = 0$, откуда по доказанному следует, что $\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|^2 = 0$, и тогда $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = o$, т.е. система $\{f\}$ линейно зависима.
Обратно, пусть система $\{f\}$ линейно зависима, т.е. найдётся ненулевой набор коэффициентов α_i такой, что $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j = o$. Покажем, что в этом случае вектор $\gamma = G\alpha$ оказывается нулевым. Действительно,

$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} G_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{n}(f_i, f_j)\alpha_j = \Big(f_i, \sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j\Big) = (f_i, o) = 0\,.$

Пусть $\{f\}$ – линейно независимая система, являющаяся базисом в $L\{f\}$, и $x \in L\{f\}$. Как найти координаты этого вектора в базисе $\{f\}$, т.е. коэффициенты α_j разложения $x = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j$?

Утверждение: справедливо векторное равенство (т.е. система линейных алгебраических уравнений) $G\alpha = \gamma$, где α – вектор коэффициентов, а γ – вектор с компонентами $\gamma_i = (x, f_i)$ (эти величины называются ковариантными координатами вектора x, в отличие от контравариантных координат α_j).

Доказательство. Последовательно домножим равенство

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j f_j = x$$

на элементы f_i, $i = 1, \ldots, n$. Получаем:

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j (f_j, f_i) = (x, f_i)\,,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} G_{ij}\alpha_j = \gamma_i\,.$$

Поскольку матрица G невырождена, система однозначно разрешима, и $\alpha = G^{-1}\gamma$.

Замечание. Построения, приводящие к системе уравнений относительно α_j никак не опирались на факт линейной независимости системы $\{f\}$ и, следовательно, справедливы также и для линейно зависимой системы. В этом случае, однако, матрица системы вырождена и коэффициенты α_j определяются неоднозначно.

Замечание. Здесь слово "вектор"означает не элемент пространства X, а столбец из n чисел, т.е. вектор пространства $\mathbb{R}^n$.