Решение задач к занятию № 11 (23.03.2020)

1) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$ Указать все конечные особые точки и определить их характер.

Особые точки функции $f(z)$: $z_1=0$, $z_2=-1$, $z_3=1$.

Точка $z_1=0$ является полюсом 1-го порядка, так как

$f(z)=\dfrac{g_1(z)}{z}$, где $g_1(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)(z-1)^3}$ аналитична в точке z_1 и

$g_1(z_1)\neq 0$ (см. утверждение 3) в таблице 2)

Точка $z_2=-1$ – полюс 1-го порядка (П1), т.к.

$f(z)=\dfrac{g_2(z)}{z+1}$, $g_2(z)=\dfrac{z+2}{z(z-1)^3}$ аналитична в точке z_2 и $g_2(z_2)\neq 0$

Точка $z_3=1$ – полюс 3-го порядка (П3) для $f(z)$, т.к.

$f(z)=\dfrac{g_3(z)}{(z-1)^3}$, $g_3(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)}$ аналитична в точке z_3 и

$g_3(z_3)\neq 0$

__Ответ__: $z_1=0$ – П1
$z_2=-1$ – П1
$z_3=1$ – П3

2) а) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$

Особые точки – это корни уравнения $\sin z=0 \Rightarrow z_k=\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Рассмотрим функцию $g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, & z\neq z_k\\ 0, & z=z_k\end{cases} \iff g(z)=\sin z$

Так как $g(z_k)=\sin\pi k=0$, $g'(z)=\cos z$, $g'(z_k)\neq 0$, то согласно утверждению 4 в таблице 2 точки z_k являются полюсами 1-го порядка для функции $f(z)$.

__Ответ__: $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ – П1

б) $f(z)=\dfrac{1}{1-\cos 2z}$

Особыми точками являются корни уравнения $1-\cos 2z=0$;

$\cos 2z=1$; $2z=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\underline{z_k=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}$.

Рассмотрим функцию $g(z)=\begin{cases}1/f(z), & z\neq z_k\\ 0, & z=z_k\end{cases} \iff g(z)=1-\cos 2z$

Так как $g(z_k)=0$, $g'(z)=2\sin 2z$, $g'(z_k)=0$, $g''(z)=4\cos 2z$, $g''(z_k)=4\neq 0$, то точки z_k являются нулями 2-го порядка для функции $g(z)$ и полюсами 2-го порядка для функции $f(z)$.

__Ответ__: $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ – П2

3) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(e^z-1)}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются точки, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

$$(z+1)^3(e^z-1)=0 \iff \left[\begin{array}{l} z+1=0 \\ e^z=1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=\operatorname{Ln}1=2\pi k i,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Точка $z=-1$ является полюсом 3-его порядка для функции $f(z)$, т.к.

$$f(z)=\frac{h(z)}{(z+1)^3},\quad h(z)=\frac{z}{e^z-1}$$ аналитична в точке $z=-1$ и $h(-1)\neq 0$

(см. утверждение 3) в таблице 2)

Из множества точек $z_k=2\pi k i$ следует выделить точку $z_0=0$, так как в этой точке числитель дроби также обращается в ноль. Вычислим $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{(z+1)^3(e^z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{(z+1)^3\cdot z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+1)^3}=1.$$

Согласно определению 2 точка $z_0=0$ является устранимой особой точкой для функции $f(z)$

Определим характер точек $z_k=2\pi k i$, $k=\pm 1,\pm 2,\ldots$ Для этого рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{(z+1)^3(e^z-1)}{z}.$$

Так как $g(z_k)=0$, $g'(z)=\left(\frac{(z+1)^3}{z}\right)'(e^z-1)+\frac{(z+1)^3}{z}\cdot e^z$, $g'(z_k)=\frac{(z_k+1)^3}{z_k}\neq 0$, то согласно пункту 4) таблицы 2 точки z_k являются полюсами 1-го порядка для $f(z)$.

<u>Ответ</u>: $z=-1$ П3; $z_0=0$ - устранимая ос. точка; $z_k=2\pi k i$, $k=\pm 1,\pm 2,\ldots$ - П1.

4) $f(z)=\dfrac{z(\pi-z)}{\sin 2z}$

Особые точки: $\sin 2z=0 \iff 2z=\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \iff z_k=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

В случае, когда $k\neq 0$ и $k\neq 2$ рассмотрим функцию

$$g(z)=\frac{\sin 2z}{z(\pi-z)}.$$

Тогда $g(z_k)=0$, $g'(z)=\dfrac{2\cos 2z\cdot z(\pi-z)-\sin 2z\cdot(\pi-2z)}{z^2(\pi-z)^2}$

$$g'(z_k)=\frac{2\cos 2z_k}{z_k(\pi-z_k)}=\frac{2\cos\pi k}{\frac{\pi k}{2}\left(\pi-\frac{\pi k}{2}\right)}\neq 0$$

Следовательно, при $k\neq 0;2$ точки $z_k=\frac{\pi k}{2}$ являются полюсами 1-го порядка для функции $f(z)$

В точках $z_0=0$ и $z_2=\pi$ числитель дроби равен нулю. Вычислим предел:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z} = \left[\sin 2z \underset{z\to 0}{\sim} 2z\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}(\pi-z)}{2\cancel{z}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{z\to z_2} f(z) = \lim_{z\to \pi} \frac{z(\pi-z)}{\sin 2z} = \left[\begin{matrix} t=\pi-z \\ z=\pi-t \end{matrix}\right] = \lim_{t\to 0} \frac{(\pi-t)t}{\sin(2\pi-2t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(\pi-t)t}{-\sin 2t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\pi-t)t}{-2t} = -\frac{\pi}{2}$$

Согласно определению точки $z_0=0$, $z_2=\pi$ являются устранимыми особыми точками.

<u>Ответ</u>: 0 и π – устранимые ос. точки; $z_k = \frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0;2$ – П1

5) $f(z) = \dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{tg z - 1}$

Особыми точками функции $f(z)$ являются корни уравнения $tg z - 1 = 0$ и точки $z_k = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, в которых не определена функция $tg z$.

$$tg z - 1 = 0 \Leftrightarrow tg z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

Итак, $z_n = \frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Отдельно рассмотрим точку $z_0=\frac{\pi}{4}$, в которой числитель дроби также обращается в ноль.

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{z-\frac{\pi}{4}}{tg z-1} \overset{\frac{0}{0}}{=\!=} \lim_{z\to\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 z}} = \frac{1}{2} \overset{\text{опр.2}}{\Longrightarrow}$$

$z=\frac{\pi}{4}$ – устранимая ос. точка для $f(z)$.

Рассмотрим $g(z) = \dfrac{tg z - 1}{z-\frac{\pi}{4}}$:

$n\neq 0$

$$g(z_n)=0, \quad g'(z) = \frac{1}{\cos^2 z}\cdot\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}} - (tg z - 1)\cdot\frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^2}$$

$$g'(z_n) = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+\pi n)}\cdot\frac{1}{\pi n} \neq 0 \Rightarrow z_n = \frac{\pi}{4}+\pi n \text{ – П1}$$

при $n\neq 0$.

Вычислим предел

$$\lim_{z\to z_k} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k} \frac{(z-\frac{\pi}{4})}{\frac{\sin z}{\cos z}-1} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}+\pi k} \frac{(z-\frac{\pi}{4})\cos z}{\sin z - \cos z} = \frac{(\frac{\pi}{4}+\pi k)\cdot 0}{(-1)^k} = 0$$

$\Rightarrow z_k$ – устранимые особые точки для $f(z)$.

Ответ: $z = \frac{\pi}{4}$; $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – устранимые особые точки;
$z_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ – П1

6) $f(z) = tg \frac{1}{z-1}$

Особые точки: $z=1$, а также корни уравнения
$$\cos \frac{1}{z-1} = 0.$$
Откуда найдем: $\frac{1}{z-1} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\underline{z_k = 1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}}$, $k \in \mathbb{Z}$

Рассмотрим функцию
$$g(z) = \frac{1}{tg \frac{1}{z-1}} = ctg \frac{1}{z-1}$$
Так как $g(z_k) = 0$, $g'(z) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{1}{z-1}\right)} \cdot \frac{1}{(z-1)^2}$
$$g'(z_k) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2 \neq 0 \xRightarrow{4) \text{ табл.} 2} z_k - \text{П1}$$
Точка $z=1$ не является изолированной особой точкой, так как в любой её окрестности содержится бесконечное число полюсов z_k:
$$\lim_{k \to \infty} z_k = 1$$
Ответ: $z_k = 1 + \frac{2}{\pi + 2\pi k}$, $k \in \mathbb{Z}$ – П1;
$z = 1$ – предельная точка полюсов.

7) $f(z) = \frac{tg(z-1)}{z-1}$

Ответ: $z = 1$ – устранимая особая точка;
$z_k = 1 + \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ – П1

8) $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

Особая точка: $z=0$
Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$:
$$f(z) = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^5}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2 \cdot 3!}}_{\text{главная часть ряда Лорана в окрестности точки } z=0} + \underbrace{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n+1)!} + \dots}_{\text{правильная часть ряда Лорана } f(z) \text{ в окрестности точки } z=0}$$

Согласно пункту 1) таблицы 2 $z=0$ - полюс 4-го порядка для функции $f(z)$.

<u>Ответ</u>: $z=0$ - П4

9) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 3}$

<u>Ответ</u>: $z_k = \ln 3 + 2\pi k i,\ k \in \mathbb{Z}$ - П1

Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной точки (устранимую точку считать правильной)

10) $f(z) = \dfrac{z^2}{5-2z^2}$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{z^2\left(\frac{5}{z^2}-2\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\frac{5}{z^2}-2} = -\frac{1}{2}$$

Согласно определению 2 $z=\infty$ - устранимая (правильная) ос. точка

<u>Ответ</u>: правильная

11) $f(z) = \dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$

$$f(z) = \frac{z^5\left(3-\frac{5}{z^4}+\frac{2}{z^5}\right)}{z^2\left(1+\frac{1}{z}-\frac{4}{z^2}\right)} = z^3 \cdot h(z),\quad h(z) = \frac{3-\frac{5}{z^4}+\frac{2}{z^5}}{1+\frac{1}{z}-\frac{4}{z^2}} \xrightarrow[z\to\infty]{} 3$$

$f(z) \sim 3z^3$ при $z \to \infty$.

Согласно пункту 2 таблицы 3 $z=\infty$ - полюс 3-его порядка

<u>Ответ</u>: П3

12) $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + 2z^2 - 5$

Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в кольце $0<|z|<\infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} + 2z^2 - 5 = 2z^2 - 5 + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots + \frac{1}{z^n n!} + \dots$$

$$f(z) = \underbrace{2z^2}_{\substack{\text{главная} \\ \text{часть ряда} \\ \text{Лорана функции} \\ f(z) \text{ в окрестности} \\ \text{точки } z=\infty}} - 4 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots + \frac{1}{z^n \cdot n!} + \dots \qquad (*)$$

Согласно пункту 1) таблицы 3 $z=\infty$ - П2

Заметим, что ряд (*) является также рядом

Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. При этом главная часть ряда Лорана $f(z)$ в окрестности $z=0$ содержит отрицательные степени z, т.е содержит бесконечное число членов. Согласно таблице 1 $z=0$ – существенно особая точка.

Ответ: $z=\infty$ – П2
$z=0$ – существенно особая точка

13) $$f(z)=\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$$

Особые точки: $z=0$

$$\cos z=2 \Rightarrow z_k=2\pi k-i\ln(2\pm\sqrt{3}),\ k\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $z=0$ – П3
z_k – П1
$z=\infty$ – предельная точка полюсов

14) $$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$$

Особые точки: $z=1$, $z_k=2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$

Покажем, что не существует $\lim\limits_{z\to1} f(z)$.

Если $z=1+x^2$, то $\lim\limits_{z\to1} f(z)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{e^{1+x^2}-1}=+\infty$;

если $z=1-x^2$, то $\lim\limits_{z\to1} f(z)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{1-x^2}-1}=0$

Следовательно $\lim\limits_{z\to1} f(z)$ не существует. Согласно определению 2 точка $z=1$ является существенно особой.

Точки $z_k=2\pi k i$ являются полюсами 1-го порядка (воспользуйтесь свойством 4) в таблице 2)

Ответ: $z=1$ – существенно особая точка;
$z_k=2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$ – П1;
$z=\infty$ – предельная точка полюсов