Теория вероятностей и математическая статистика Часть 1

Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

Направление подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профили подготовки

«Математическое моделирование и вычислительная математика»
«Системное программирование и компьютерные технологии»

Формируемые компетенции:

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований;
- знание принципов решения вероятностных задач с использованием стандартных программных средств;
- владение навыками построения стохастических моделей для исследования случайных явлений.

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия теории вероятностей

Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие – результат (исход) некоторого испытания (эксперимента, наблюдения), который может осуществиться или не осуществиться.

Элементарное событие (элементарный исход) нельзя разделить на события, которые могут осуществиться.

Пространство элементарных событий Ω – множество всех элементарных событий (исходов).

Каждое элементарное событие (исход) ω – элемент Ω, $\omega \in \Omega$.

Каждое событие A – подмножество Ω, $A \subseteq \Omega$. Событие A произошло, когда осуществился некоторый элементарный исход ω, который входит в A, $\omega \in A$.

Ω также называют достоверным событием.

Невозможное событие $\varnothing$ не содержит в себе ни одного элементарного события.

Операции над событиями

Противоположное событие

$$\overline{A}=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\notin A\right\}$$

Произведение событий

$$AB=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\in A \ \text{и} \ \omega\in B\right\}$$

Сумма событий

$$A+B=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\in A \ \text{или} \ \omega\in B\right\}$$

Разность событий

$$A-B=A\cdot\overline{B}$$

Симметрическая разность событий

$$A\Delta B=\left(A\setminus B\right)+\left(B\setminus A\right)=A+B-AB$$

Сравнение терминов теории вероятностей и теории множеств

Теория множеств	*Теория вероятностей*
1. Ω – множество	1. Ω – достоверное событие
2. $\omega \in \Omega$ – элементы	2. $\omega \in \Omega$ – элементарные исходы
3. $A \subseteq \Omega$ – подмножество	3. $A \subseteq \Omega$ – событие
4. $\overline{A}$ – дополнение	4. $\overline{A}$ – противоположное событие
5. $A \cap B$ – пересечение	5. AB – произведение событий
6. $A \cup B$ – объединение	6. $A+B$ – сумма событий
7. $\varnothing$ – пустое множество	7. $\varnothing$ – невозможное событие
8. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A$ *и* B – непересекающиеся множества	8. $AB = \varnothing \Rightarrow A$ *и* B – несовместные события

Свойства операций над событиями

Ассоциативность

$(A+B)+C=A+(B+C)$ – **ассоциативность сложения**

$(AB)C=A(BC)$ – **ассоциативность умножения**

Коммутативность

$A+B=B+A$ – **коммутативность сложения**

$AB=BA$ – **коммутативность умножения**

Закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}}=A$

Дистрибутивность

а) **умножения по отношению к сложению**

$A(B+C)=AB+AC$

б) **сложения по отношению к умножению**

$A+BC=(A+B)(A+C)$

Законы де Моргана $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

Вероятностное пространство

Множество событий $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

3) $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Отображение $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \boldsymbol{R}$ **называется вероятностью, если**

1) для любого $A \in \mathcal{A}$ $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ **и** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

2) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $\quad A_i A_j = \varnothing$ $(i \ne j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ **называется вероятностным пространством.**

Основные свойства вероятности

1. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

2. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$

3. $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$

4. $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$

5. $\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-$

$-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC)$

Примеры вероятностных пространств

1. $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,\dots,6\}$ – **множество всех элементарных событий при бросании двух игральных костей;**

$\mathcal{A}=M(\Omega)$ – **множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=(i,j)\Rightarrow \mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{36}$; $\mathrm{P}(A)=\frac{|A|}{36}$, $|A|$ – **число элементов в** A.

2. $\Omega=\{1,2,\dots\}$; $\mathcal{A}=M(\Omega)$ – **множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=i\Rightarrow$ $\mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{2^i}$; $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{\omega\in A}^{\infty}\mathrm{P}(\{\omega\})$.

3. $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ – **квадрат;**

$\mathcal{A}=\mathcal{B}(\Omega)$ – **множество борелевских подмножеств** Ω**;**

$A\in\mathcal{A}\Rightarrow \mathrm{P}(A)=S_A$ – **площадь** A.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 2

Классическая и геометрическая вероятности

Классическая вероятность

Классическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}, \quad |\Omega| = n < \infty$ **;**

2) все $\omega_i \in \Omega$ **равновозможны, т.е.** $P(\{\omega_i\}) = p$ **для всех** $\omega_i \in \Omega$ **.**

При этом из равенства $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = np = 1$ **следует**

формула классической вероятности

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

для всех событий $A \subseteq \Omega$**,**

где $|A| = m$ **– число элементов в** A**.**

Для нахождения числа элементарных исходов в событиях применяются формулы комбинаторики.

Формулы комбинаторики

1. Число подмножеств $M(\Omega)$ множества Ω $(|\Omega| = n)$ равно $|M(\Omega)| = 2^n$.

2. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω $(|\Omega| = n)$ с возвращением равно n^m .

3. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω $(|\Omega| = n)$ без возвращения равно

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

Про этой же формуле находится число размещений n различимых элементов по m местам.

Формулы комбинаторики

4. Число перестановок n различимых элементов $A_n^n = n!$.

5. Число сочетаний n различимых элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

это также равно числу способов неупорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega| = n$) без возвращения.

6. Число способов распределения n неразличимых элементов по r урнам (в каждой урне может быть от 0 до n элементов)

равно $C_{n+r-1}^n = C_{n+r-1}^{r-1} = \dfrac{A_{n+r-1}^n}{n!} = \dfrac{A_{n+r-1}^{r-1}}{(r-1)!} = \dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$.

Задача о выборке

Из множества, содержащего N элементов, среди которых M отмеченных элементов, случайным образом выбирают n элементов. Требуется найти вероятность того, что среди n выбранных будет ровно m отмеченных элементов.
Элементарным событием в этом случае является любой неупорядоченный выбор n элементов из N, поэтому число элементов в множестве всех элементарных исходов Ω равно C_N^n.
Число элементарных исходов в рассматриваемом событии находится по правилу умножения: число способов выбора m элементов из M отмеченных умножается на число способов выбора остальных $n-m$ элементов из $N-M$ неотмеченных.

Поэтому требуемая вероятность находится по формуле

$$P=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Геометрическая вероятность

Геометрическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega \subseteq R^n$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$ **(где** $\mu(\Omega)$ **– мера (площадь, объём) множества** Ω **в** R^n**) ;**

2) вероятность любого события $A \subseteq \Omega$ **пропорциональна его мере** $\mu(A)$**.**

В этом случае $\mathcal{A} = \mathscr{B}(\Omega)$ **– множество борелевских подмножеств** Ω**.**

Из условия 2) следует, что для всех $A \in \mathcal{A}$: $\mathrm{P}(A) = \alpha \cdot \mu(A)$ **,**

но $\mathrm{P}(\Omega) = 1 = \alpha \cdot \mu(\Omega)$ **, т.е.** $\alpha = \dfrac{1}{\mu(\Omega)}$ **. Отсюда получается**

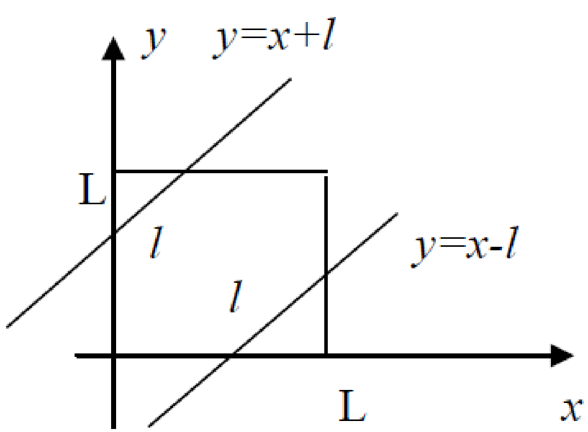
формула для геометрической вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} .$$

Задача о встрече

Два человека приходят в парк в интервал времени от a до $a+L$. Каждый проводит там время l. Найти вероятность того, что они встретятся.

$$\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le L,\ 0\le y\le L\}$$
$$A=\{(x,y)\in\Omega:\ |y-x|\le l\}$$



$$\mu(\Omega)=L^2,\quad \mu(\overline{A})=(L-l)^2,\quad \mu(A)=L^2-(L-l)^2$$

$$P(A)=\frac{L^2-(L-l)^2}{L^2}=1-\left(\frac{L-l}{L}\right)^2=\frac{2l}{L}-\left(\frac{l}{L}\right)^2$$

ЗАДАЧА БЮФФОНА (1777 год)

На плоскость, расчерченную параллельными прямыми с расстоянием a друг от друга, случайным образом бросается игла длиной $l<a$. Найти вероятность того, что игла не пересечет ни одну линию.

$$\Omega=\{(x,\varphi):\ 0\le x\le a/2,\ 0\le\varphi\le\pi\}\subseteq R^2,\ \mu(\Omega)=(a\pi)/2$$

x - расстояние от центра иглы до ближайшей линии;

φ - угол между иглой и линией.

$$A=\{(x,\varphi):\ 0\le\varphi\le\pi,\ x>\frac{1}{2}l\sin\varphi\},\ \mu(\overline{A})=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}l\sin\varphi d\varphi=l$$

$$P(\overline{A})=\frac{2l}{a\pi},\ P(A)=1-\frac{2l}{a\pi}$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 3

Условные вероятности

Условные вероятности

Рассмотрим бросание игральной кости

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$$

$$A = \{1,3,6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$B = \{2,4,6\} \qquad P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{|A \cdot B|}{|B|} =$$

$$= \frac{\dfrac{|A \cdot B|}{|\Omega|}}{\dfrac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Условные вероятности

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло ($(P(B)>0)$, обозначается как $P(A|B)$ или $P_B(A)$ и определяется как $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Свойства условной вероятности:

1. Аддитивность:

если $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$, то $\mathrm{P}(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i|B)$.

2. Формула умножения для двух событий:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

при условии $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$.

Свойства условной вероятности

2. Формула умножения для *n* событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Доказательство формулы умножения для *n* событий:

$$B_k=A_1\ldots A_k\Rightarrow B_1=A_1;B_k=A_k\cdot B_{k-1};A_1A_2\ldots A_n=B_n$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n\cdot B_{n-1})=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(B_{n-1})=$$

$$=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(A_{n-1}|B_{n-2})\cdot P(B_{n-2})=\ldots$$

$$=P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\ldots A_{n-2})\ldots P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Если $P(A|B)=P(A)$, то говорят, что событие A не зависит от события B.

Свойства независимости:

1. Следующие свойства эквивалентны при условии $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$:

а) A и B – независимы;

б) $P(A|B)=P(A)$ (событие A не зависит от B);

в) $P(B|A)=P(B)$ (событие B не зависит от A).

Свойства независимости

2. Если $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ **и** $A \cdot B = \varnothing$ **(т.е.** A **и** B **несовместны), то** A **и** B **зависимы.**

3. Следующие утверждения эквивалентны:

а) A **и** B **независимы;**

б) A **и** $\overline{B}$ **независимы;**

в) $\overline{A}$ **и** B **независимы;**

г) $\overline{A}$ **и** $\overline{B}$ **независимы.**

4. Если A **и** B **независимы, то** $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ **.**

5. Для любого события A**:** A **и** $\varnothing$ **независимы и** A **и** Ω **независимы.**

Независимость событий

События $\{A_1,\ldots,A_n\}$ называются попарно независимыми, если для всех $i \neq j$ верно $P(A_i A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j)$.

События $\{A_1,\ldots,A_n\}$ называются независимыми в совокупности, если для всех различных $i_1, i_2, \ldots, i_k$ верно $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное неверно.

МИРЭА Российский технологический университет

Формулы сложения для независимых событий

Формула сложения для 2-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$$

Формула сложения для 3-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 4

Формула полной вероятности и формула Байеса

Формула полной вероятности и формула Байеса

Полная группа событий

Рассматриваем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

События $\{H_k\}$ $(H_k \in \mathcal{A})$ образуют полную группу событий, если

1. $\sum_k H_k = \Omega$ (т.е. $\{H_k\}$ покрывают все пространство элементарных событий);

2. Для всех $k \neq j$ $H_k \cdot H_j = \varnothing$ (т.е. $\{H_k\}$ несовместны).

При этом справедливо равенство $\sum_k P(H_k) = P(\Omega) = 1$.

Пример: $\{\varnothing, \Omega\}$ – тривиальная полная группа событий.

Формула полной вероятности

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС и $P(H_k) > 0$, то

для любого события A: $\quad P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$.

<u>Доказательство</u>:

$A = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot H_k)$ и $(A \cdot H_k) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing$, поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cdot H_k) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

Формула Байеса

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС , $P(H_k) > 0$ и $P(A) > 0$, то для любого события H_j:

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A | H_k)} .$$

Доказательство: используем определение условной вероятности и формулу полной вероятности

$$P(H_j | A) = \frac{P(A \cdot H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) P(A | H_k)} .$$

Пример

В первом ящике находится 2 белых шара и 3 чёрных, а во втором – 3 белых шара и 1 чёрный. Из первого ящика случайным образом переложен во второй ящик один шар.

Найти вероятность того, что:

a) наудачу извлеченный после этого шар из второго ящика будет белым;

b) из первого ящика был переложен во второй ящик белый шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар;

c) из первого ящика был переложен во второй ящик чёрный шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар.

Решение:

а) Пусть $\boldsymbol{H_1}$={из первого ящика во второй переложили белый шар},

$\boldsymbol{H_2}$={из первого ящика во второй переложили чёрный шар},

$\boldsymbol{A}$= {из второго ящика извлекли белый шар}.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{25}.$$

b) $$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{8}{17}.$$

c) $$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{9}{17}.$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 5

Последовательность независимых испытаний

Последовательность независимых испытаний
(Схема Бернулли)

Проводятся одинаковые независимые испытания. Испытание называется удачным, если в нём произошло определённое событие A.

$P(A)=p$ – **вероятность удачи,** $P(\overline{A})=1-p=q$ – **вероятность неудачи. Удаче поставим в соответствие** 1, **а неудаче** – 0 .

Пример последовательности независимых испытаний

$$A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Рассмотрим событие

$$B_k=\{\text{произошло ровно } \underline{k} \text{ удач в } \underline{n} \text{ независимых испытаниях}\}.$$

Обозначим $P(B_k)=P_n(k)$.

Формула Бернулли

Теорема. $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Доказательство:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ если удача в } i-\text{ом независимом испытании} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{ \overline{\varepsilon} \mid (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0,1 \right\}$$

$$B_k = \left\{ \overline{\varepsilon} \mid \sum \varepsilon_i = k \right\}, \quad \overline{\varepsilon} \in B_k \Rightarrow P(\{\overline{\varepsilon}\}) = p^k q^{n-k}$$

$$P(B_k) = |B_k| \, p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Приближение Пуассона

Применяется при $n >> 1, \quad p << 1, \quad 0{,}1 < n \cdot p < 10$.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (\lambda = np)$$

Теорема Пуассона. Пусть p_n (вероятность удачи) зависит от числа испытаний, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0, \quad \lambda < \infty$.

Тогда $$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Приближение Лапласа

При больших $n>>1$ **и при условии**

$$n>>1,\ 0<p<1,\ np>10\ \textit{или}\ nq>10$$

применяется приближение Лапласа, основанное на теоремах Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа:

$$P_n(k)=C_n^k p_n q^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$ **где**

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Приближение Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть ξ_n – число удач в n независимых испытаниях, p – вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{C_1}^{C_2} \varphi_0(t)\, dt$$

Функции $\varphi_0(t)$ и $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt \quad , \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

<u>Свойства:</u> 1) $\varphi_0(t) > 0$, 2) $\varphi_0(-t) = \varphi_0(t)$,

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)dt = 1$, 4) $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$, 5) $\Phi(0) = 0{,}5$

Приближение Лапласа

Следствие 1:

$$P(k_1 \le \xi_n \le k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \int\limits_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} \varphi_0(t)dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Приближение Лапласа

Следствие 2: Пусть $\nu_n = \dfrac{\xi_n}{n}$,

$$P(|\nu_n - p| \le \varepsilon) = P(-\varepsilon \le \nu_n - p \le \varepsilon) = P\left(p - \varepsilon \le \frac{\xi_n}{n} \le p + \varepsilon\right) =$$

$$= P(n(p-\varepsilon) \le \xi_n \le n(p+\varepsilon)) \approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - 2\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$