КМБО -19 2-й семестр

7-й семинар. Билинейные и квадратичные формы.

Напоминаю, что сборник Кострикина у нас второй используемый сборник задач.

Во всех задачах следует считать, что линейные пространства рассматриваются над полем действительных чисел.

Кострикин, задача 37.1. Какие из следующих функций являются билинейными функциями (на нашем языке формами). Напомню, что у Кострикина знак транспонирования пишется перед тем объектом, который транспонируестя, а не после: (у нас A^T, у Кострикина ${}^tA$).

Особое внимание обратите на пункты а) ($\mathcal{B}(X, Y) = X^T Y$ в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемом как пространство столбцов) и ж) ($\mathcal{B}(A, B) = A^T B$ в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$).

Задача 37.2 В тех случаях, когда ответ в задаче 37.1 положительный, а пространство конечномерно, нужно выбрать базис (надеюсь, Вы выберите канонический)) и найти матрицу билинейной формы в этом базисе.

Задача 37.6 Вспомните, как меняется матрица билинейной формы при замене базиса, и как строится матрица перехода от базиса к базису, и эта задача не вызовет у Вас затруднений.

Задача 37.8 а)

Задача 38.1

Задача 38.10 - ограничиться формами из задачи 37.1

Задача 38.11 а-г). Можете применить критерий Сильвестра.

Задача 38.13

Задача 38.14 а-б)

Задача 38.15 Имеется в виду – восстановить симметричную билинейную форму по значениям квадратичной формы, построенной по этой билинейной.

Задача 38.16 Имеется в виду – имея несимметричную форму, построить симметричную форму, порождающую ту же квадратичную форму, что и исходная несимметричная форма.

Если возникнут сложности при решении этих задач, пишите мне на почту, будем разбираться.

8-й семинар

1) Доказать, что $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

2) Доказать, что $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$

(применяем неравенство Коши-Буняковского для векторов $(ab; bc; ca)$ и $(ca; ab; bc)$)

3) Доказать, что $\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x} \leq 3$

4) Доказать: если сумма n чисел равна 1, то сумма квадратов этих чисел не меньше $\frac{1}{n}$.

5) Доказать, что $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sin a_i\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \cos a_i\right)^2 \leq n^2$

6) Доказать, что $\sum \dfrac{a_i^2}{b_i} \geq \dfrac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$ (a_i – любые, $b_i > 0$)
(взять $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{b_i}}$; $y_i = \sqrt{b_i}$)

7) Доказать, что $\left(\sum a_i b_i\right) \cdot \left(\sum \dfrac{a_i}{b_i}\right) \geq \left(\sum a_i\right)^2$ ($a_i \geq 0$; $b_i > 0$)

8)Доказать, что $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i b_i}\right) \geq 4n^2$ ($a_i > 0$; $b_i > 0$).

9) Доказать, что $\sin a \cdot \sin b + \cos a + \cos b \leq 2$

10) Доказать, что $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\cdot(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7) \geq (a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)\cdot(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5)$ $(a_i \geq 0)$

На мой взгляд, самая сложная задача здесь – последняя. Приведу ее решение. Но советую попробовать решить самостоятельно. Если Ваше решение будет отличаться от моего, напишите мне его.

$\left(\sum a_i^3 \cdot \sum a_i^5\right)^2 = \left(\sum a_i^{1/2} a_i^{5/2}\right)^2 \cdot \left(\sum a_i^{7/2} a_i^{3/2}\right)^2 \leq \sum a_i \cdot \sum a_i^5 \cdot \sum a_i^7 \cdot \sum a_i^3$

Остается сократить левую и правую части на $\sum a_i^3 \cdot \sum a_i^5$.

Обобщая эту задачу, я пришел к такой:

11) Доказать, что $\sum a_i^p \cdot \sum a_i^q \leq \sum a^{2p-q} \cdot \sum a_i^{2q-p} \quad (a_i > 0)$

Кстати, попытайтесь сообразить, как я дошел до такой формулировки.

9-й семинар

Этот семинар посвятим методу ортогонализации Грама-Шмидта, о котором говорилось на одной из лекций. На лекции разбиралась задача для двухмерного пространства, сейчас разберем задачу в трехмерном случае.

Сначала повторяем теорию. Евклидово пространство - это линейное пространство, в котором зафиксировали билинейную форму (x, y) (так обычно она обозначается), которую назвали скалярным произведением. Правда, годится не любая билинейная форма. Проанализировав свойства "школьного"скалярного произведения,вычисляемого по формуле "произведение длин векторов и косинуса угла между ними требуем, чтобы билинейная форма была симметричной (то есть $(x, y) = (y, x)$) и положительно определенной (то есть соответствующая квадратичная форма, получаемая из нашей билинейной по формуле $K(x) = (x, x)$, должна быть положительно определенной: $K(x) > 0$ при $x \neq 0$.

В этом смысле пространство V^3 геометрических векторов с обычным скалярным произведением является евклидовым пространством. Матрица Грама $G_{Б}$ скалярного произведения в конкретном базисе Б – это матрица билинейной формы, которую мы и назвали скалярным произведением, то есть это матрица, на (p, q)-м месте которой стоит скалярное произведение p-го и q-го векторов базиса. Вычисляется значение скалярного произведения на векторах $x = БX$ и $y = БY$, как и значение любой билинейной формы, по формуле $(x, y) = X^T G_{Б} Y$. В нашем трехмерном случае

$$(x, y) = g_{11}x_1y_1 + g_{12}x_1y_2 + g_{13}x_1y_3 + g_{21}x_2y_1 + g_{22}x_2y_2 + g_{23}x_2y_3 + g_{31}x_3y_1 + g_{32}x_3y_2 + g_{33}x_3y_3$$

Кстати,не забывайте, что скалярное произведение является симметричной билинейной формой, то есть $g_{pq} = g_{qp}$. Поэтому вычислив g_{pq}, не тратьте время на поиск g_{qp}

Длина вектора с помощью скалярного произведения вычисляется по формуле $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Выпишем результат в трехмерном случае, помня, что $g_{pq} = g_{qp}$. Чтобы не писать корень, возведем формулу в квадрат: $|x|^2 = (x, x)$. Итак,

$$|x|^2 = g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + g_{22}x_2^2 + 2g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2$$

Приступаем к решению 7-й задачи типового расчета. Итак, имеем пространство V^3, первоначальный базис $Б = [i, j, k]$ считается ортонормированным (то есть $|i| = |j| = |k| = 1,\ i \perp j,\ j \perp k,\ k \perp i$), что равносильно тому, что матрица Грама в этом базисе единичная.

Заданы своими координатами в базисе Б векторы

$$e_1 = i - j - k,\ e_2 = -i - j + k,\ e_3 = 2i + k.$$

В условии задачи сказано, что они образуют базис, но думаю, что Вам не трудно будет проверить их линейную независимость и произнести сопутствующие слова на тему, почему полноту этой системы Вы имеете право не проверять.

Далее – Вам нужно найти матрицу Грама G_S в базисе $S = [e_1, e_2, e_3]$. Учитывая, что векторы заданы в ортонормированном базисе, это очень простая задача – скалярное произведение в этом случае вычисляется по "школьной"формуле "сумма произведений координат". В нашем случае

$(e_1, e_1) = |e_1|^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 3;$
$(e_1, e_2) = (e_2, e_1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1;$
$(e_1, e_3) = (e_3, e_1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1;$
$(e_2, e_2) = (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3;$
$(e_2, e_3) = (e_3, e_2) = (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1;$
$(e_3, e_3) = 2^2 + 0^2 + 1^2 = 5.$

Поэтому

$$G_S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Кстати, поиск матрицы G_S можно было обставить более торжественно. А именно, если мы запишем матрицу $C_{Б\to S}$ перехода от базиса Б к базису S (её столбцы – координаты векторов "нового" базиса S в "старом" базисе Б),матрицу G_S можно получить по формуле

$$G_S = C^T_{Б\to S} G_{Б} C_{Б\to S} = C^T_{Б\to S} E C_{Б\to S} = C^T_{Б\to S} C_{Б\to S}.$$

Впрочем, вычисления не будут отличаться от наших.

В качестве контроля за правильностью выкладок можно посоветовать проверить, что угловые миноры получившейся матрицы положительны (Вы же помните критерий положительной определенности квадратичной формы?).

Далее выписываем формулу для квадрата длины вектора в базисе S:

$$|x|^2 = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2$$

Теперь мы должны ортогонализовать базис S (что означает перейти к ортонормированному базису, а не ортогональному, как кто-то мог подумать). Может прийти в голову, а зачем всё это нужно – ведь первоначальный базис ортонормированный, зачем же тогда строить ещё один? Ответ Вы получите, когда мы перейдем к решению восьмой задачи вторым способом – там придется строить ортонормированный базис, связанный с конкретным оператором.

Сначала построим ортогональный базис R (поделить получившиеся векторы на их длины для получения ортонормированного базиса будет уже совсем просто): $R = [f_1, f_2, f_3]$; $f_1 = e_1$ (то есть первый вектор менять нет смысла); второй вектор f_2 мы будем искать в линейной оболочке векторов e_1 и e_2 по формуле

$$f_2 = e_2 - \lambda f_1,$$

подбирая λ таким образом, чтобы f_2 оказался перпендикулярен $f_1 = e_1$. Фактически мы тем самым проектируем вектор e_2 на направление, перпендикулярное вектору f_1 и лежащее в плоскости векторов e_1 и e_2. Поскольку перпендикулярность равносильна обращению скалярного произведения в ноль, для поиска λ мы получаем уравнение

$(f_2, f_1) = 0$; $(e_2 - \lambda f_1, f_1) = 0$; $(e_2, e_1) - \lambda(e_1, e_1) = 0$; $\lambda = \frac{(e_2,e_1)}{(e_1,e_1)} = -\frac{1}{3}$; $f_2 = e_2 + \frac{1}{3}f_1$ До сих пор все векторы имели целые координаты, но с f_2 нам не повезло. Но голь на выдумки хитра, поэтому я предлагаю вместо вектора f_2 рассмотреть коллинеарный ему вектор $g_2 = 3f_2 = 3e_2 + f_1 = 3e_2 + e_1 = 3(-i - j + k) + (i - j - k) = -2i - 4j + 2k$. Итак,

$$g_2 = e_1 + 3e_2 = -2i - 4j + 2k$$

. Заодно давайте еще и проверим, что получившийся вектор действительно перпендикулярен e_1 (скалярное произведение $(g_2, e_1) = -2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 0$.

Итак, у нас уже есть векторы $g_1 = f_1 = e_1$ и g_2, причем $g_2 \perp g_1$. Переходим к построению третьего вектора. Сначала это будет f_3, который мы в случае необходимости переделаем в g_3 с целыми координатами. Ищем f_3 в виде

$$f_3 = e_3 - \mu g_1 - \eta g_2,$$

причем этот вектор должен быть перпендикулярен g_1 и g_2. Вычисления упрощаются благодаря тому, что векторы g_1 и g_2 перпендикулярны. Имеем:

$(f_3, g_1) = 0$; $(e_3 - \mu g_1 - \eta g_2, g_1) = 0$; $(e_3, g_1) - \mu(g_1, g_1) - \eta(g_2, g_1) = 0$; $1 - 3\mu = 0$; $\mu = \frac{1}{3}$;

$(f_3, g_2) = 0$; $(e_3 - \mu g_1 - \eta g_2, g_2) = 0$; $(e_3, g_2) - \mu(g_1, g_2) - \eta(g_2, g_2) = 0$; $-2 - 24\eta = 0$; $\eta = -\frac{1}{12}$.

Поэтому $f_3 = e_3 - \frac{1}{3}g_1 + \frac{1}{12}g_2$. Поскольку мы не любим векторы с нецелыми координатами, рассмотрим параллельный ему вектор $g_3 = 12f_3 = 12e_3 - 4g_1 + g_2 = 12e_3 - 4e_1 + e_1 + 3e_2 = -3e_1 + 3e_2 + 12e_3$. Кстати! А тут все коэффициенты делятся на 3! А что если мы сразу рассмотрим вектор в три раза короче? Ведь направление его не изменится, он по-прежнему будет перпендикулярен g_1 и g_2. Но вводить новую букву очень не хочется. Давайте чуть-чуть схалтурим, и будем считать, что $g_3 = -e_1 + e_2 + 4e_3$. Заодно выразим g_3 через первоначальный базис: $g_3 = -(i - j - k) + (-i - j + k) + 4(2i + k) = 6i + 6k$. Итак,

$$g_3 = -e_1 + e_2 + 4e_3 = 6i + 6k$$

Получили ортогональный базис $[g_1, g_2, g_3]$. Остается поделить векторы этого базиса на их длины: $|g_1| = |e_1| = \sqrt{3}$; $|g_2| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ (этот ответ можно получить или по выписанной формуле для длины вектора в базисе S, или с помощью разложения по первоначалдьному ортонормированному базису); $|g_3| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Последний шаг:

$$h_1 = \frac{g_1}{|g_1|} = \frac{e_1}{\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{j}{\sqrt{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$h_2 = \frac{g_2}{|g_2|} = \frac{e_1}{2\sqrt{6}} + \frac{3e_2}{2\sqrt{6}} = -\frac{i}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{k}{\sqrt{6}}$$

$$h_3 = \frac{g_3}{|g_3|} = -\frac{e_1}{6\sqrt{2}} + \frac{e_2}{6\sqrt{2}} + \frac{4e_3}{6\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Если мы не ошиблись в вычислениях, искомый ортонормированный базис - это

$$P = [h_1, h_2, h_3]$$

Проверку предлагается совершить двойную. Во-первых, используя выписанные разложения по базису Б, надо убедиться, что $(h_1, h_1) = (h_2, h_2) = (h_3, h_3) = 1$; $(h_1, h_2) = (h_2, h_3) = (h_3, h_1) = 0$, что докажет ортонормированность полученного базиса. Во-вторых, составив матрицу $C_{S \to P}$ перехода от базиса S к базису P, нужно найти матрицу Грама в базисе P по формуле $G_P = C^T_{S \to P} G_S C_{S \to P}$. Если матрица G_P окажется единичной, всё в порядке, если нет – ищите ошибку.

Задание к следующему разу – сделать 7-ю задачу своего варианта. А для закрепления материала – и все остальные варианты.

Теперь информация для моих помощников. Вам нужно побыстрее решать свои задач, засчитывать их у меня и быть готовыми приступить к своим приятным и важным обязанностям.

Кстати, пока только один человек прислал мне часть решенного типового расчета. Правда, после этого на мой звонок он не откликнулся)).

Успехов Вам!