Решение тестов семинара 16.

① Сколько $\exists$ собственных подполей в $\mathbb{F}_{p^{12}}$?

Делителей 12, меньших 12: 1, 2, 3, 4, 6 – 5 штук $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ 5 собственных подполей в $\mathbb{F}_{p^{k}}$.

Ответ: 4) 5

② Сколько собственных подполей имеет поле $K: |K|=81$?

$81 = 3^4$. Делителей 4, меньших 4, два: 1, 2. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ 2 собственных подполя.

Ответ: 2) 2.

③ Какое из перечисленных колец является полем?

1) $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1) = \mathbb{Z}[i]$ – кольцо целых гауссовых чисел – не поле, т.к. обратимыми элементами явл. только $\pm 1, \pm i$.

2) $\mathbb{Z}[i]/(i) = \{0\}$, т.к. $(i) = \mathbb{Z}[i]$, поскольку i обратимый элемент. Это не поле, т.к. в поле должно быть минимум 2 элемента.

3) $\mathbb{Z}[i]/(2)$ – не поле, т.к. $\mathbb{Z}[i]$ – КГИ, а элемент $2 \in \mathbb{Z}[i]$ не является простым (лекция 8).

4) $\mathbb{Z}[i]/(3)$ – поле, т.к. $\mathbb{Z}[i]$ – КГИ, а $3 \in \mathbb{Z}[i]$ – простой элемент (лекция 8 и семинар 8).

Ответ: 4).

④ Для какого из перечисленных колец не существует поле отношений? Мы знаем, что поле отношений $\exists$ для Ц.К. Но и наоборот, если кольцо не является целостным, его нельзя включить ни в какое поле, в частности, в поле отношений, поскольку в поле не должно быть делителей нуля.

1) $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C} \Rightarrow$ ЦК.

2) $\mathbb{Z}[x]/(x^3-7) = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{7}] \subset \mathbb{R}$ – ЦК (см. задачу 3 ТР).

3) $\mathbb{Z}_3[x]/(x^4+1) \simeq \mathbb{Z}_3[x]/(x^2-x-1) \oplus \mathbb{Z}_3[x]/(x^2+x-1) \simeq \mathbb{F}_{3^2} \oplus \mathbb{F}_{3^2}$ –

$x^4+1 = (x^4-2x^2+1)+2x^2 = (x^2-1)^2 - x^2 = (x^2-x-1)(x^2+x-1)$

не явл. целостным кольцом, т.к., например $(1,0)$ и $(0,1)$ – делители нуля. $\Rightarrow \nexists \operatorname{Quot} \mathbb{Z}_3[x]/(x^4+1)$

4) $\mathbb{Q}[x]/(x^2-3)$ – поле (оно и есть собственное поле отношений), т.к. x^2-3 – неприв. над $\mathbb{Q}$.

Ответ: 3)

(5) Каков порядок группы обратимых элементов A^* кольца A?

$A = \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+5)$ – поле, т.к. x^2+5 – неприводим. над $\mathbb{Z}_{11} = \mathbb{F}_{11}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |A^*| = |A| - 1 = 121 - 1 = 120$

Ответ: 1) 120.

А что будет, если $A = \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+7)$?