# Глава 1

# Метрические пространства

## 1.1 Определение и примеры метрических пространств

**Определение 1.** ***Метрическим пространством*** *называется множество* $\mathbf{X}$, *для любых двух* ***элементов*** $\mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_2$ *которого определено действительное* ***неотрицательное число*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ *– рассстояние между* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$, *— обладающее следующими* ***свойствами****:*

**1°** — *Аксиома невырожденности:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}_1 \ = \ \mathbf{x}_2 \ ,$$

*т.е.* ***расстояние*** *между элементами* ***равно 0*** *тогда и только тогда, когда эти* ***элементы совпадают*** *(как элементы множества* $\mathbf{X}$*).*

**2°** — *Аксиома симметрии:*

*Если* $\mathbf{x}, \ \mathbf{y}$ *— любые два элемента* $\mathbf{X}$, *то:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ = \ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ .$$

$\mathbf{3}^\circ$ — *Аксиома треугольника:*

*Если* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — *любые три элемента* $\mathbf{X}$, *то:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{z},\mathbf{y}) \ .$$

Другими словами, данное определение подразумевает, что ***на прямом*** (или, в другой терминологии, ***декартовом***) ***произведении*** $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ множества $\mathbf{X}$ на себя же, состоящем из всевозможных ***пар*** элементов $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$, задана действительнозначная ***неотрицательная функция*** от ***двух аргументов*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, — ***расстояние*** между элементами или ***метрика***, которая обладает свойствами $\mathbf{1}^\circ$ — $\mathbf{3}^\circ$.

В дальнейшем, элементы множества $\mathbf{X}$ мы будем, иногда, называть ***точками*** (***метрического пространства***), а само множество $\mathbf{X}$ — ***носителем*** метрического пространства.

### Пример 1 — метрическое пространство $\mathbb{E}^1$

Важным ***примером метрического пространства*** является ***числовая прямая*** $\mathbb{R}^1$ с ***расстоянием*** между точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, определяемым следующим стандартным образом: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = |\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|$.

Выполнение аксиом $\mathbf{1}^\circ$ и $\mathbf{2}^\circ$, в данном случае, очевидным образом вытекает непосредственно из ***определения*** расстояния между точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Во-первых, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) = |\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,| \geqslant 0$ и $|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,| = 0 \iff x = y$.

Во-вторых, очевидно, $|\,\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|$.

И, наконец, аксиома $\mathbf{3}^\circ$ является следствием неравенства:

$$|\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\,| \leqslant |\,\mathbf{a}\,| + |\,\mathbf{b}\,|$$

Получившееся метрическое пространство часто обозначается $\mathbb{E}^1$.

◇

***Метрическое пространство*** $\mathbb{E}^1$ для математического анализа является ***важнейшим*** объектом, т.к. многие принципиальные результаты и конструкции математического анализа, ***впервые*** появляясь при обсуждении свойств функций ***одного вещественного аргумента***, были в дальнейшем распространены на функции любого, но ***конечного***, числа переменных.

Как мы увидим ниже, в ***функциональном анализе*** важнейшие понятия предельного перехода и непрерывности функции одной переменной переносятся на произвольное ***метрическое пространство***.

А это, в свою очередь, дает основание ожидать, что многие другие результаты ***классического*** математического анализа окажутся справедливыми для соответствующих классов ***отображений*** любых ***метрических пространств***.

Нижеследующие примеры ***метрических пространств*** будут неоднократно использоваться на протяжении всего нашего курса.

## Пример 2 — метрическое пространство $\mathbb{E}^n$

Множество $\mathbf{X}$ состоит из элементов $\mathbf{x}$ — **n**-***ок*** (наборов из **n** действительных чисел): $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n)$.

Это ***множество***, обычно, называется ***арифметическим пространством*** $\mathbb{R}^n$.

Зададим в $\mathbb{R}^n$ ***расстояние*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ следующим образом:

если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — два ***элемента*** $\mathbb{R}^n$, то

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \tag{1}$$

Убедимся, что функция $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, введенная в (1), действительно удовлетворяет аксиомам $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ ***определения*** метрического пространства.

Выражение (1), очевидно, ***неотрицательно*** и может обращаться в нуль только в том случае, когда ***все*** квадраты ***разностей*** обращаются в нуль, т.е. когда наборы чисел $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ полностью совпадают между собой, что, как раз, и означает выполнение аксиомы $\mathbf{1}^\circ$ для предполагаемого расстояния (1).

Аксиома $\mathbf{2}^\circ$ для расстояния, определённого формулой (1), также, очевидным образом, будет выполнена.

Для проверки выполнения аксиомы $\mathbf{3}^\circ$ необходимо и достаточно проверить справедливость неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right]^{1/2}\right)^2, \tag{2}$$

для любых трех **n-*ок***: $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}$, $\mathbf{z} = \{z_i\}$ из $\mathbf{X}$.

Обозначим $x_i - z_i = a_i$ и $z_i - y_i = b_i$, тогда неравенство (2) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]^{1/2}\right)^2 \tag{3}$$

Раскрывая левую и правую части этого предполагаемого неравенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Справедливость неравенства (2) вытекает теперь из следующего ***неравенства Коши - Буняковского***:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0 \tag{4}$$

Приведем одно из возможных доказательств неравенства (4).

Определим функцию $\mathbf{\Phi}\,(\lambda)$:

$$\mathbf{\Phi}\,(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda \cdot b_i)^2$$

Функция $\mathbf{\Phi}\,(\lambda)$, ввиду вещественности $a_i$, $b_i$ и $\lambda$, является ***неотрицательной квадратичной*** функцией числового параметра $\lambda$.

Поэтому ***дискриминант*** этой функции, совпадающий с левой частью неравенства (4), должен быть ***неотрицательным***.

Таким образом, множество $\mathbb{R}^n$ с ***метрикой*** (1) действительно является ***метрическим пространством***.

Часто оно называется **n**-***мерным евклидовым пространством*** $\mathbb{E}^n$, а ***метрика***, определяемая (1), — ***евклидовой*** метрикой в $\mathbb{R}^n$ [1]

◇

[1]Точный смысл, вносимый прилагательным "евклидово" (пространство) или "евклидова" (метрика), связан с тем, что метрика, определяемая в $\mathbb{R}^n$ формулой (1), порождает на $\mathbb{R}^n$ также и соответствующее (1) скалярное произведение, что будет предметом специального обсуждения в главе III.

На базе одного и того же ***носителя*** — множества $\mathbf{X}$, — можно строить ***разные*** метрические пространства, задавая ***различные*** метрики.

**Пример** 3. На множестве $\mathbb{R}^n$ можно ввести ***метрику*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, например, так:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \tag{5}$$

Проверку аксиом $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ в случае метрики (5) читателю ***рекомендуется*** проделать самостоятельно.

Получившееся метрическое пространство мы будем обозначать $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$.

$\diamond$

### Пример 4 — метрическое пространство $\ell_2$

Множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \tag{6}$$

***Метрика*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \tag{7}$$

Прежде чем проверять для функции (7) аксиомы метрики $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$, убедимся, что сама функция (7) корректно определена, т.е. что для любых двух элементов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ из $\mathbf{X}$, ряд в правой части (7) сходится.

Действительно, в силу неравенства (3) при любом натуральном $N$:

$$\left[ \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \leqslant \left[ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right]^{1/2} + \left[ \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right]^{1/2}.$$

В силу условия (6), отсюда следует сходимость ряда в (7).

Переходя к пределу при $n \to \infty$ одновременно в правой и левой частях неравенства (2), убеждаемся в справедливости неравенства треугольника — аксиомы $\mathbf{3}^\circ$, — для метрики, определяемой формулой (7).

Справедливость аксиом метрики $\mathbf{1}^\circ$ и $\mathbf{2}^\circ$ для функции (7) ***очевидна*** (см. пример 2).

Множество $\mathbf{X}$, оснащенное метрикой (7), обычно называется ***метрическим пространством*** $\ell_{\mathbf{2}}$.

◇

**Пример 5 — метрическое пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$**

Множество $\mathbf{X}$ состоит из ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $x\,(t)$, т.е. $\mathbf{x} \overset{def}{=} x\,(t)$.

***Расстояние*** между элементами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ множества $\mathbf{X}$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\,x\,(t) - y\,(t)\,| \tag{8}$$

Справедливость аксиом $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$, из определения метрического пространства, следует в этом случае из почти очевидных числовых неравенств, которые мы рекомендуем читателю проверить самостоятельно.

Полученное ***метрическое пространство***, обычно, обозначается символом $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

◇

**Пример 6 — метрическое пространство $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$**

Множество $\mathbf{X}$ состоит из $k$ раз непрерывно ***дифференцируемых*** функций $x\,(t)$, определенных на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

***Расстояние*** между элементами $\mathbf{X}$ можно ввести так:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x},\,\mathbf{y}) \;=\; \max_{0\leqslant j\leqslant k}\left\{\max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant\mathbf{b}}|\,x\,(t)\,-\,y\,(t)\,|\,,\,\max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant\mathbf{b}}|\,x'\,(t)\,-\,y'\,(t)\,|\,,\,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\;,\max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant\mathbf{b}}\left|\,x^{(k-1)}\,(t)\,-\,y^{(k-1)}\,(t)\,\right|,\,\max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant\mathbf{b}}\left|\,x^{(k)}\,(t)\,-\,y^{(k)}\,(t)\,\right|\right\} \tag{9}$$

***Все*** три аксиомы метрики для $(9)$ проверяются почти также просто, как и для метрики $(8)$ в предыдущем примере $(5)$.

Отличие состоит только в том, что для $(9)$ всякий раз приходится выбирать максимальное значение из набора $k$ чисел, входящих в правую часть формулы $(9)$.

Действительно, функция расстояния (***метрика***), определяемая формулой $(9)$:

**1**$^\circ$. ***Неотрицательна*** и может обратиться в $0$ только тогда, когда $x\,(t)\,\equiv\,y\,(t)$.

**2**$^\circ$. ***Симметрична*** относительно её аргументов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

**3**$^\circ$. ***Неравенство треугольника*** проверяется немного сложнее.

Во-первых, для любой точки $t$ отрезка $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$:

$$|x\,(t)\,-\,y\,(t)\,|\;\leqslant\;\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}}\,(\mathbf{x},\,\mathbf{z})\,+\,\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}}\,(\mathbf{z},\,\mathbf{y})\;\stackrel{def}{=}\;\boldsymbol{\rho}_{I}^{(0)}\,+\,\boldsymbol{\rho}_{II}^{(0)}\;,$$

а также справедливо аналогичное неравенство для любого номера $1\,\leqslant\,j\,\leqslant\,k$

производной:

$$\left| x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \right| \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left( \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \right) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left( \mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)} \right) \overset{def}{=} \boldsymbol{\rho}_{I}^{(j)} + \boldsymbol{\rho}_{II}^{(j)} ,$$

где $\mathbf{x}^{(j)} = x^{(j)}(t)$, $\mathbf{y}^{(j)} = y^{(j)}(t)$, $\mathbf{z}^{(j)} = z^{(j)}(t)$.

Далее, принимая во внимание, что

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left( \mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \right) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{I}^{(j)} \right\} ,$$

и, аналогично,

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left( \mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)} \right) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{II}^{(j)} \right\} ,$$

получаем, что ***все левые*** части выписанных выше неравенств, для ***любого*** номера ***производной*** $0 \leqslant j \leqslant k$, для ***любой*** точки $t$ отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ удовлетворяют неравенству:

$$\left| x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \right| \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) .$$

Но, выбрав в левых частях выписанных неравенств, максимум по $t$ : $\max\limits_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}}$, а затем максимум, среди получившихся таким образом чисел в левых частях, по $j$ : $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k}$, получим:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) .$$

Построенное ***метрическое пространство*** принято обозначать: $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Поэтому, в полном соответствии с этим соглашением $\mathbb{D}_0[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$\diamond$

**Пример 7 — метрическое пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$**

Носитель $\mathbf{X}$ такой же как в примере 5: множество $\mathbf{X}$ состоит из ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функций $x(t)$, т.е. $\mathbf{x} \stackrel{def}{=} x(t)$.

Но, в отличие от примера 5, ***расстояние*** между функциями, принадлежащими $\mathbf{X}$, определяется так:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, x(t) - y(t)\,]^2 \, dt\right)^{1/2} \tag{10}$$

Выполнение аксиомы $\mathbf{2}^\circ$ очевидно.

Выполнение аксиомы $\mathbf{1}^\circ$ следует из утверждения о тождественном равенстве нулю на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***неотрицательной непрерывной*** функции при условии равенства нулю интеграла от неё по этому отрезку. (См. задачу 3 в конце этого параграфа).

Выполнение аксиомы треугольника $\mathbf{3}^\circ$ проверяется по схеме аналогичного рассуждения примера 2, для чего используемая там функция $\boldsymbol{\Phi}(\lambda)$ заменяется функцией

$$\boldsymbol{\Phi}(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, x(t) + \lambda\, y(t)\,]^2 \, dt \,.$$

Таким образом множество $\mathbf{X}$ всех непрерывных функций на заданном отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ с метрикой, определенной по формуле (10), является метрическим пространством и, обычно, обозначается так: $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

$\diamond$

### Подпространство метрического пространства

Так как на базе одного и того же ***носителя*** — $\mathbf{X}$ выбором ***различных*** метрических функций $\boldsymbol{\rho}$ могут быть образованы ***разные*** метрические пространства, то в некоторых случаях удобно ***обозначать*** абстрактное метрическое пространство с ***носителем*** $\mathbf{X}$ и ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}$ в виде “единого” объекта: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ — метрическое пространство.

Если $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}$, любое ***подмножество*** $\mathbf{X}$, то $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ — также будет ***метрическим пространством***, т.к. все необходимые для этого свойства метрики для $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ “наследуются” из объемлющего пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Получаемое таким способом метрическое пространство $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ называется ***подпространством*** рассматриваемого метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Например, любое множество точек из $\mathbb{E}^n$ образует ***подпространство метрического пространства*** $\mathbb{E}^n$.

Важное предостережение: вообще говоря, рассматриваемое в $\mathbb{E}^n$ ***произвольное*** множество не будет ***подпространством*** в $\mathbb{E}^n$ в смысле, ***обычно*** используемом в ***линейной алгебре!***

### Полезные неравенства

В заключение этого параграфа приведем два полезных неравенства.

***Первое*** из них называется ***неравенством четырёхугольника*** и будет несколько раз использовано в дальнейшем изложении.

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — любые четыре элемента метрического пространства $\mathbf{X}$, то:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y},\mathbf{v}) .$$

Это неравенство получается двукратным применением неравенства треугольника:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{y}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) ,$$

откуда

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) .$$

С другой стороны, поступая аналогично, но начиная не с $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, а с $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, получается неравенство:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) ,$$

которое и завершает доказательство неравенства четырёхугольника, т.к. левые части двух последних неравенств отличаются только ***знаком***, а в их правых частях стоят одинаковые выражения.

***Второе*** полезное неравенство, которое мы здесь упомянем, обычно, называется ***"второе неравенство треугольника"***.

Оно получается из неравенства четырёхугольника, если в нём положить $\mathbf{u} = \mathbf{z}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, и имеет вид:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{z},\mathbf{y})| \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{z}) .$$

***Упражнения и задачи к параграфу*** 1.

1. Подробно проверить ***аксиомы метрики*** в примерах 4, 5 и 6.

2. Сформулировать определение ***подпространства*** $\mathbb{E}^n$, принятое в ***линейной алгебре*** и ***аналитической геометрии***.

3. Пусть $x\,(t) \geqslant 0$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***непрерывна*** и, кроме того: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x\,(t)\,dt \;=\; 0$.

***Доказать***, что $x\,(t) \;\equiv\; 0$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (\,x_1,\,\ldots\,, x_n,\,\ldots)$ таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\,x_i\,| < \infty\ .$$

***Метрика*** $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\ \mathbf{y}\,)$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\ \mathbf{y}\,) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} |\,x_i - y_i\,|\ ,$$

где $\mathbf{y} \;=\; (\,y_1,\,\ldots\,, y_n,\,\ldots)$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\ell_{\mathbf{1}}$.

5. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (\,x_1,\,\ldots\,, x_n,\,\ldots)$ таких, что каждая из этих последовательностей сходится в смысле классического математического анализа.

***Метрика*** $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\ \mathbf{y}\,)$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\ \mathbf{y}\,) \;=\; \sup_i |\,x_i - y_i\,|\ ,$$

где $y \;=\; (\,y_1,\,\ldots\,, y_n,\,\ldots) \in \mathbf{X}$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\mathbf{c}$.

$6^*$. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$.

***Метрика*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in \mathbf{X}$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\mathbf{s}$.

7. Можно ли на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ ввести метрику по формуле $\boldsymbol{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$?

8. Можно ли на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ ввести метрику по формуле $\boldsymbol{\rho}(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$?

## 1.2 Сходимость. Замкнутые и открытые множества в метрическом пространстве

### Сходимость последовательности в метрическом пространстве

Всякая заданная ***метрика*** позволяет естественным образом ввести понятие ***сходящейся последовательности*** точек метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

**Определение 2.** *Элемент* $\mathbf{x}$ *метрического пространства называется* ***пределом последовательности точек*** *(элементов)* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ *того же метрического пространства* $\mathbf{X}$, *если выполняется соотно-*

*шение:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) \;=\; 0 \tag{1}$$

**Замечание.** То, что последовательность точек $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ ***сходится*** к точке $\mathbf{x}$, для краткости речи, часто, записывают в виде:
« $\mathbf{x_n} \to \mathbf{x}$ при $n \to \infty$ » или « $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$ ».

**Определение 3.** *Если из заданной* ***последовательности*** $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ *по некоторому* ***правилу:*** $n = k_1, k_2, \dots, k_m, \dots,$ *отобраны элементы этой последовательности* $\{\,\mathbf{x}_{k_m}\,\}$, $m = 1, 2, \dots,$ *то* ***последовательность*** *элементов* $\{\,\mathbf{x}_{k_m}\,\}$, $m = 1, 2, \dots,$ *называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности* $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$.

**Утверждение 1.** *Если последовательность точек* $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***сходится*** *к точке* $\mathbf{x}_0$ *этого пространства при* $n \to \infty$, *то* ***всякая*** *подпоследовательность этой последовательности* $\{\,\mathbf{x}_{n_k}\,\}$, $k = 1, 2, \dots, p, \dots$ ***сходится*** *при* $k \to \infty$, *к той же самой точке* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

**Утверждение 2.** *Последовательность точек* $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *может сходиться не более чем к одной точке пространства* $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Доказательство проведём от противного.

Пусть $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ и $\mathbf{x}_n \to \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{X})$ при $n \to \infty$.
Тогда, по определению сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{a}, \mathbf{x_n}) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{b}, \mathbf{x_n}) = 0$.

Рассмотрим расстояние между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{a}, \mathbf{x_n}) + \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x_n}, \mathbf{b}) \to 0$ при $n \to \infty$, что возможно только при $\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, откуда $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. □

**Утверждение 3.** *Если последовательность точек* $\{\mathbf{x}_n\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***сходится*** *к точке* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *то, для любой точки* $\mathbf{y}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *расстояния* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x_n})$ ***ограничены*** *в совокупности.*

*Доказательство.* Доказательство вытекает из неравенства:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathbf{M} + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ,$$

где $\mathbf{M}$ величина, ограничивающая ***бесконечно малую*** последовательность $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. □

**Определение 4.** ***Открытым шаром*** $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *называется* ***множество*** *точек* $\mathbf{z}$ *из* $\mathbf{X}$, *для которых:* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{a}) < r$.

**Определение 5.** *Множество* $\mathbf{Q}$ *в метрическом пространстве* $\mathbf{X}$ *называется* ***ограниченным****, если оно целиком содержится в некотором шаре* $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ : $\mathbf{Q} \subset \mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$.

В соответствии с утверждением **3** всякая ***сходящаяся*** последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$ метрического пространства $\mathbf{X}$ ***ограничена***, т.е. целиком содержится в некотором шаре пространства $\mathbf{X}$.

Более того, центр упомянутого шара может быть выбран в любой точке пространства $\mathbf{X}$.

Однако, далеко ***не всякое*** ограниченное множество в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ содержит в себе ***хотя бы одну*** сходящуюся последовательность.

**Пример** 1. В самом деле рассмотрим, например, последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$, где

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_1 &= (1, 0, \ldots 0, 0, 0, \ldots)\\
&\mathbf{x}_2 &= (0, 1, \ldots 0, 0, 0, \ldots)\\
&\vdots & \vdots\\
&\mathbf{x}_n &= (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots)\\
&\vdots & \vdots
\end{aligned}$$

Легко видеть, что ***все*** точки этой последовательности находятся на расстоянии $1$ от точки $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \ldots 0, 0, 0, \ldots)$ этого пространства: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) = 1$, т.е. лежат внутри любого шара $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r)$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ с центром в точке $\mathbf{x}_0$ и радиуса $r > 1$.

Однако, указанная последовательность точек пространства $\ell_{\mathbf{2}}$, не содержит ***ни одной*** сходящейся подпоследовательности, т.к. расстояние между ***любыми*** двумя элементами этой последовательности одно и то же, и равно $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) = \sqrt{2}$.

Действительно, предположив противное, т.е. что некоторая подпоследовательность точек $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к некоторой точке $\mathbf{x}^0$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}^0) \to 0$ при $k \to \infty$, мы немедленно придём к противоречию:
$\sqrt{2} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_p}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}^0) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_p}, \mathbf{x}^0) \to 0$ при $k, p \to \infty$.

## Предельные точки и замкнутые множества

***Определение* 2** ***сходящейся*** последовательности можно ***переформулировать*** так:

Последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ элементов метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ называется ***сходящейся***, если $\forall\, \varepsilon > 0$ ***существует*** такой номер $N(\varepsilon)$, что ***все*** точки последовательности $\mathbf{x}_n$ с номерами $n \geqslant N(\varepsilon)$, содержатся в ***открытом шаре*** радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $\mathbf{x}$.

**Определение 6.** *Пусть $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$. Точка $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ называется* ***предельной*** *для множества $\mathbf{M}$ (**предельной точкой** $\mathbf{M}$), если открытый шар с центром в точке $\mathbf{a}$ любого радиуса $r > 0$ содержит* ***хотя бы одну*** *точку из множества $\mathbf{M} \setminus \mathbf{a}$, т.е. хотя бы одну точку множества $\mathbf{M}$, отличную от $\mathbf{a}$.*

***Формальная*** запись содержательной части этого определения на языке ***теории множеств*** выглядит так:

$$\forall\, r > 0 : \quad \mathbf{S}(\mathbf{a}, r) \cap (\mathbf{M} \setminus \mathbf{a}) \neq \varnothing$$

**Замечание.** ***Предельные точки*** множества $\mathbf{M}$ ***не обязаны*** принадлежать $\mathbf{M}$.

Некоторые из таких точек (***или даже все!***) могут принадлежать $\mathbf{M}$, а другие (***или даже все!***) могут не принадлежать $\mathbf{M}$.

**Определение 7.** *Объединение множества $\mathbf{M}$ и множества* ***всех*** *его предельных точек называется* ***замыканием множества*** *$\mathbf{M}$ и, обычно, обозначается $[\mathbf{M}]$.*

**Пример** 2. ***Замыкание*** множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек на прямой $\mathbb{R}^1$ относительно ***расстояния*** между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}$, определяемого стандартным образом: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — есть вся прямая $\mathbb{R}^1$: $[\mathbf{Q}] = \mathbb{R}^1$.

**Пример** 3.* ***Замыкание*** множества $\mathbf{P}$ всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ с вещественными коэффициентами $a_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, относительно метрики пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, — есть всё пространство $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: $[\mathbf{P}] = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Высказанное в примере 3 утверждение является следствием теоремы К. Вейерштрасса о том, что всякая ***непрерывная*** на заданном отрезке функция может быть представлена как предел ***равномерно*** сходящейся на этом отрезке к рассматриваемой функции последовательности ***многочленов*** с вещественными коэффициентами.

$\diamond$

**Определение 8.** *Множество* $\mathbf{M}$ *точек метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***замкнутым****, если* ***все*** *предельные точки множества* $\mathbf{M}$ *ему же самому и* ***принадлежат****.*

В частности, согласно этому определению:

**1**$^\circ$. ***Всё*** множество $\mathbf{X}$ — носитель метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, — ***замкнутое*** множество.

**2**$^\circ$. ***Пустое*** множество точек ***замкнуто*** в любом метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Любое замкнутое множество обладает следующим свойством:

**Утверждение 4.** *Если* $\{\mathbf{x}_n\}$ — ***сходящаяся*** *последовательность точек* ***замкнутого*** *множества* $\mathbf{M}$*, то ее* ***предел*** $\mathbf{x}$ *также* ***принадлежит*** $\mathbf{M}$.

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$, но $\mathbf{x} \notin \mathbf{M}$.

Рассмотрим два случая.

$\mathbf{1}^\circ$. В последовательности $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ присутствует ***бесконечное*** число ***различных*** точек $\mathbf{M}$, образующих ***подпоследовательность*** $\{\,\mathbf{x}_{n'}\,\}$ последовательности $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$.

Тогда подпоследовательность $\{\,\mathbf{x}_{n'}\,\}$ сходится к тому же самому пределу $\mathbf{x}$, что и вся последовательность $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$. В этом случае $\mathbf{x}$ предельная точка множества $\mathbf{M}$, и, в силу его замкнутости, принадлежит $\mathbf{M}$, что приводит к противоречию.

$\mathbf{2}^\circ$. В последовательности $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ присутствует лишь ***конечное*** число ***различных*** точек $\mathbf{M}$.

Т.к. по условию последовательность $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ сходится к пределу $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, то, в этом случае, начиная с некоторого номера $N$ все элементы последовательности $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ с номерами $n > N$ должны совпадать с $\mathbf{x}$ и потому мы снова приходим к противоречию. $\square$

Верно и ***обратное*** утверждение:

**Утверждение 5.** *Если* ***предел*** $\mathbf{x}$ *любой* ***сходящейся*** *последовательности точек из данного множества* $\mathbf{M}$ ***принадлежит*** *этому множеству, то* $\mathbf{M}$ — ***замкнуто***.

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{a}$ произвольная ***предельная точка*** $\mathbf{M}$.

Рассмотрим последовательность шаров с центром в точке $\mathbf{a}$, радиусы которых $r$ стремятся к $0$.

Пусть $\{\varepsilon_n\} \to 0$ — последовательность радиусов этих шаров.

В каждом открытом шаре $\mathbf{S}\,(\mathbf{a},\,\varepsilon_n)$ выберем точку $\mathbf{x_n} \neq \mathbf{a}, \mathbf{x_n} \in \mathbf{M}$. Это всегда можно сделать, так как $\mathbf{a}$ — предельная точка $\mathbf{M}$.

Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{a}$. Следовательно, по условию утверждения, $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$, и, т.к. $\mathbf{a}$ — произвольная предельная точка, то $\mathbf{M}$ ***замкнуто***.

□

### Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

**Определение 9.** *Множество* $\mathbf{M}$ *точек метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***открытым***, *если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}\ \exists r > 0$, *такое, что открытый шар* $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$: $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r) \subset \mathbf{M}$.

В частности, согласно этому определению, ***всё*** множество $\mathbf{X}$ – носитель метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, — ***открытое*** множество.

Пусть $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — два ***открытых*** множества из метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

**Утверждение 6.** *Множество* $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ ***открыто***.

*Доказательство.* Действительно, если $\mathbf{x} \in (\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2)$, то $\mathbf{x}$, принадлежит по крайней мере, одному из этих множеств, например, $\mathbf{M}_1$.

Так как $\mathbf{M}_1$ открыто, то $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1$ вместе с открытым шаром $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$ некоторого радиуса $r$.

Тогда очевидно, что этот же шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$ целиком принадлежит и "сумме" множеств $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$. □

**Замечание.** Это же рассуждение проходит и в случае "суммы" (в смысле теории множеств) любого не обязательно ***конечного*** объединения ***открытых*** множеств из $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Поэтому справедливо

**Утверждение 7.** *Теоретикомножественная **сумма** любого числа **открытых** множеств метрического пространства — **открытое** множество.*

Рассмотрим теперь множество $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$.

**Утверждение 8.** ***Непустое** пересечение двух **открытых** множеств — **открытое** множество.*

*Доказательство.* Действительно, если элемент $\mathbf{x} \in (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2)$, то, так как $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1$, множеству $\mathbf{M}_1$ принадлежит также открытый шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_1)$ некоторого радиуса $r_1 > 0$.

Одновременно $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_2$ и, в силу открытости $\mathbf{M}_2$, существует $r_2 > 0$ и открытый шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_2) \subset \mathbf{M}_2$.

Пусть $r_3 = \min(r_1, r_2) > 0$. Тогда шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_3)$ принадлежит как $\mathbf{M}_1$, так и $\mathbf{M}_2$.

Следовательно, множество $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ ***открыто***. □

Аналогично можно показать ***открытость*** пересечения любого ***конечного*** числа ***открытых*** множеств.

**Замечание.** Пересечение ***бесконечного*** числа ***открытых*** множеств может не быть ***открытым***!

(См. упражнение 1 к этому параграфу).

## Дополнение множества в метрическом пространстве

Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ — ***метрическое пространство*** и $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\rho})$ — ***подпространство*** этого пространства.

Рассмотрим ***множество*** $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$, — ***дополнение*** $\mathbf{M}$ до всего пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

**Утверждение 9. $1^\circ$**. *Если* $\mathbf{M}$ — ***открытое*** *множество, то его дополнение* $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$ *(до всего* $\mathbf{X}$*)* — ***замкнуто****.*

**$2^\circ$**. *Если* $\mathbf{M}$ — ***замкнуто****, то его дополнение* $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$ *(до всего* $\mathbf{X}$*)* — ***открыто****.*

*Доказательство.* Докажем первую часть утверждения — $\mathbf{1}^\circ$.

Пусть $\mathbf{z}$ ***предельная точка*** $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$ и $\mathbf{z} \notin (\mathbf{X} \setminus \mathbf{M})$. Тогда $\mathbf{z} \in \mathbf{M}$ и (в силу ***открытости*** $\mathbf{M}$) входит в $\mathbf{M}$ вместе с некоторым шаром $\mathbf{S}(\mathbf{z}, r)$.

Поэтому шар $\mathbf{S}(\mathbf{z}, r)$ не содержит точек $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$. Однако, это противоречит тому, что $\mathbf{z}$ — ***предельная точка*** $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$.

Следовательно $\mathbf{z} \in (\mathbf{X} \setminus \mathbf{M})$ и дополнение к $\mathbf{M}$ ***замкнуто***.

Докажем вторую часть утверждения — $\mathbf{2}^\circ$.

Пусть $\mathbf{M}$ ***замкнуто*** и $\mathbf{z}$ — точка $\mathbf{X} \setminus \mathbf{M}$, для которой любой шар $\mathbf{S}(\mathbf{z}, r)$ содержит точки из $\mathbf{M}$.

Пусть $\mathbf{S}(\mathbf{z}, r_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ — последовательность вложенных шаров такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

В каждом из таких шаров содержатся точки из $\mathbf{M}$.

Выберем в каждом из них по одной точке $\mathbf{z}_n \in \mathbf{M}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{z}$ и так как $\mathbf{M}$ ***замкнуто***, то $\mathbf{z} \in \mathbf{M}$ и, следовательно, $\mathbf{z} \notin (\mathbf{X} \setminus \mathbf{M})$. Противоречие. □

**Замечание.** Доказанное утверждение можно обобщить:

если ***открытое*** множество $\mathbf{M}$ содержится в ***замкнутом*** множестве $\mathbf{F}$, то $\mathbf{F} \setminus \mathbf{M}$ — ***замкнуто***.

### Сепарабельные метрические пространства

В заключение данного параграфа введём ещё два важных понятия.

**Определение 10.** *Множество* $\mathbf{M}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *называется* ***всюду плотным*** *в этом метрическом пространстве, если* ***замыкание*** *множества* $\mathbf{M}$ *есть всё это пространство:* $[\mathbf{M}] = \mathbf{X}$.

Рассмотренные выше примеры **2**, **3** — ***характерные*** примеры ***всюду плотных*** множеств в соответствующих метрических пространствах.

**Определение 11.** *Метрическое пространство* $\mathbf{X}$ *называется* ***сепарабельным****, если в этом пространстве имеется* ***счётное*** *всюду плотное множество.*

Рассмотренные выше примеры **2**, **3**, в сочетании с ***утверждением***, что рассматриваемые в этих примерах множества: $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек на прямой и $\mathbf{P}$ всех многочленов с вещественными коэффициентами, — ***счётны***, показывают, что соответствующие ***метрические пространства*** $\mathbb{E}^1$ и $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — ***сепарабельны***.

Другие примеры ***сепарабельных пространств*** ещё не раз встретятся в нашем курсе.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 2.

1. Показать на примере, что ***счетное*** пересечение ***открытых*** множеств может ***не быть*** открытым.

Указание. Рассмотреть пересечение последовательности интервалов:

$$\mathbf{M}_n = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$$

из $\mathbb{E}^1$.

Чему равно множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$ ?

2. Показать на примере, что ***счетное*** объединение ***замкнутых*** множеств может не быть ***замкнутым***.

Указание. Рассмотреть объединение последовательности отрезков:

$$\mathbf{M_n} = \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right]$$

из $\mathbb{E}^1$.

Чему равно множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right]$ ?

3. Показать, что любой ***открытый шар*** $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ является ***открытым множеством***, а множество точек $\mathbf{X}$: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant r$, (которое часто называют ***замкнутым шаром***), — ***замкнутое множество***.

4*. Обозначим $\mathbf{A}'$ множество всех ***предельных точек*** заданного множества $\mathbf{A}$.

Построить на прямой $\mathbb{R}^1$ такое множество точек $\mathbf{A}$, чтобы множество $\mathbf{A}'' \overset{def}{=} (\mathbf{A}')'$ было бы не пустым множеством $(\mathbf{A}'' \neq \varnothing)$, а $\mathbf{A}''' = \varnothing$.

5. Доказать, что множество $\mathbf{A}'$ всегда ***замкнуто***, каково бы ни было множество $\mathbf{A}$.

6. Доказать, что $[\mathbf{M}]$ — ***замкнутое множество***.

7. Показать, что в метрических пространствах могут существовать

множества не являющиеся ни ***открытыми***, ни ***замкнутыми*** и существуют множества замкнутые и открытые ***одновременно***.

Указание. Рассмотреть множества $[\,\mathbf{a},\,\mathbf{b}\,)$ в пространстве $\mathbb{E}^1$, и множества $\varnothing$ и $\mathbf{X}$ в произвольном метрическом пространстве $(\mathbf{X},\,\boldsymbol{\rho})$.

8. Величина $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) \;=\; \inf\limits_{\mathbf{y}\,\in\,\mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,)$ называется ***расстоянием*** от ***точки*** $\mathbf{x}$ метрического пространства $\mathbf{X}$ до некоторого ***множества*** точек $\mathbf{A}$ того же пространства.

Доказать, что для всякого ***замкнутого*** множества $\mathbf{A}$ ***два*** утверждения:

$\mathbf{1}\,.\ \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) \;=\; 0$

$\mathbf{2}\,.\ \mathbf{x} \,\in\, \mathbf{A}$

— ***эквивалентны***.

Будет ли иметь место такая ***эквивалентность***, если множество $\mathbf{A}$ ***не замкнуто*** ?

9. Доказать, что для любого множества $\mathbf{A}$ точек метрического пространства $(\,\mathbf{X},\,\boldsymbol{\rho}\,)$ множество точек $\mathbf{x}$ этого пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, удовлетворящих ***условию*** $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) \,<\, \varepsilon$, — ***открыто***, а множество $\hat{\mathbf{A}}_\varepsilon$ точек $\mathbf{y}$ этого пространства, удовлетворящих ***условию*** $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) \,\leqslant\, \varepsilon$, — ***замкнуто***.

10. Доказать ***включение*** $[\mathbf{M} \cap \mathbf{N}] \,\subset\, \big(\,[\mathbf{M}] \,\cap\, [\mathbf{N}]\big)$.

Всегда ли можно в написанном выражении знак ***включения*** заменить на знак ***равенства*** ?

11. Следует ли из ***включения*** $[\mathbf{M}] \,\subset\, [\mathbf{N}]$ ***включение*** $\mathbf{M} \,\subset\, \mathbf{N}$ ?

12. Доказать, что $(\mathbf{A} \,\cup\, \mathbf{B})' \;=\; \mathbf{A}' \,\cup\, \mathbf{B}'$.

13*. Пусть $\mathbf{M}$ множество всех точек $\mathbf{x} - (x_1, \dots, x_n, \dots)$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$, у которых все координаты $x_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$ ***положительны***.

Будет ли указанное множество $\mathbf{M}$ ***открыто*** ?

14*. Пусть вещественная функция $f(x)$ ***определена*** и ***непрерывна*** на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

Доказать, что множество $\mathbf{G}$ точек $x$, где $f(x) < 1$ ***открыто***.

15. В метрическом пространстве $\mathbf{X}$ даны две его точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Каким (***замкнутым*** или ***открытым***) будет множество $\mathbf{M}$ точек этого пространства $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, для которых выполнено ***равенство*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$, и множество $\mathbf{N}$ точек этого пространства $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, для которых выполнено двойное ***неравенство***:
$\alpha < \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) < \beta$, где $\alpha < \beta$ — заданные вещественные положительные числа.

Ответ обосновать.

16*. Доказать, что пространство $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***сепарабельно***.

17*. Доказать, что пространство $\ell_{\mathbf{2}}$ ***сепарабельно***.

## 1.3 Полные метрические пространства

### Фундаментальные последовательности в метрическом пространстве

**Определение 12.** *Последовательность точек* $\{\mathbf{x}_i\}, (i = 1, 2, \dots)$ *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***фундаментальной*** *или*

***последовательностью Коши***, *если:*

$$\lim_{\mathbf{m},\,\mathbf{n}\to\infty} \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\, \mathbf{x}_n) \;=\; 0 \tag{1}$$

Запись (1) означает, что $\forall\,\varepsilon > 0$, найдется такой номер $\mathbf{N}\,(\varepsilon)$, что при $\mathbf{m},\,\mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}\,(\varepsilon)$ выполнено неравенство: $\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\, \mathbf{x}_n) < \varepsilon$ .

Из неравенства треугольника немедленно следует

**Утверждение 10.** *Любая* ***сходящаяся*** *последовательность* ***фундаментальна***.

*Доказательство.* Действительно, если $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$, то

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\, \mathbf{x}_n) \;\leqslant\; \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\, \mathbf{x}) \;+\; \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x},\, \mathbf{x}_n) \tag{2}$$

В силу определения предела, правая часть неравенства (2) становится сколь угодно малой (меньше произвольного $\varepsilon > 0$), если $\mathbf{m},\,\mathbf{n}$ достаточно велики. □

**Пример** 1. Последовательность точек $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$, рассмотренная в примере 1 предыдущего параграфа, ***не*** является ***фундаментальной***.

Более того: никакая ***подпоследовательность*** этой последовательности ***не*** является ***фундаментальной*** в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$ .

Если ***метрическое пространство*** $(\,\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}\,)$ есть ***числовая прямая*** $\mathbb{R}^1$, — с обычной метрикой, то справедливо и ***обратное***, по отношению к утверждению 10:

**Утверждение 11.** ***Любая фундаментальная*** *в* $\mathbb{E}^1$ *последовательность* ***имеет*** *предел.*

Это утверждение составляет содержание ***критерия Коши*** сходимости числовой последовательности, и, обычно, доказывается в курсе математического анализа.

### Свойство полноты метрического пространства

В ***произвольном*** метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ ***критерий Коши***, вообще говоря, несправедлив: ***фундаментальная*** последовательность ***может*** не иметь предела (в рассматриваемом пространстве).

**Пример** 2. Рассмотрим ***метрическое пространство***, состоящее из ***всех*** вещественных чисел, принадлежащих интервалу $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ на числовой прямой, с обычной метрикой.

Последовательность точек $\{\mathbf{x}_n = \mathbf{1/n}\}$, ***очевидно***, фундаментальна, т.к. $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) = |\mathbf{1/m} - \mathbf{1/n}| < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{m}} \to \mathbf{0}$, при $\mathbf{m} \to \infty$, $\mathbf{n} > \mathbf{m}$, но предела (в ***рассматриваемом*** пространстве) не имеет.

Таким образом, существуют такие ***метрические пространства***, в которых критерий Коши сходимости последовательностей точек этого пространства ***справедлив***, и такие, в которых этот критерий ***не справедлив***.

**Определение 13.** ***Метрическое пространство*** $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***полным****, если в нем* ***любая*** *фундаментальная последовательность* ***имеет предел****.*

### Пример 1 — полнота метрического пространства $\mathbb{E}^n$

Пространство $\mathbb{E}^n$ (см. пример 2 из § 1) — ***полно***.

Действительно, если последовательность точек $\left\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{p})} \right\} \subset \mathbb{E}^n$, $(\mathbf{p} = 1, 2, \dots)$ ***фундаментальна***, то:

$$\lim_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left( x_i^{(\mathbf{p})} - x_i^{(\mathbf{q})} \right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\forall\, i \ (i = 1, \dots, n)$ каждая ***числовая*** последовательность отдельных компонент $\left\{ x_i^{(\mathbf{p})} \right\}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{E}^1$, и, следовательно, в силу ***критерия Коши***, справедливого в этом пространстве, имеет при $\mathbf{p} \to \infty$ предел — $x_i$ .

Поэтому, $\forall\, \varepsilon > 0$, найдется такой номер $\mathbf{N}_i\,(\varepsilon)$, что при $\mathbf{p} > \mathbf{N}_i\,(\varepsilon)$ для каждой координаты с номером $i$ будет выполнено свое неравенство: $|\, x_i^{(\mathbf{p})} - x_i \,| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, а потому, при выполнении условия $\mathbf{p} > \mathbf{N}\,(\varepsilon)$, где $\mathbf{N}\,(\varepsilon) = \max\limits_i \{\, \mathbf{N}_i\,(\varepsilon) \,\}$, будут выполнены сразу все следующие неравенства:

$$|\, x_i^{(\mathbf{p})} - x_i \,| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Пусть $\mathbf{x} = (\, x_1, \dots, x_n \,)$, — элемент $\mathbb{E}^n$, составленный из ***пределов*** отдельных координат — $x_i$ .

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{\mathbf{p} \to \infty} \boldsymbol{\rho} \left( \mathbf{x}^{(\mathbf{p})}, \mathbf{x} \right) = 0$, т.к. для выбранного выше произвольного $\varepsilon > 0$, мы указали $\mathbf{N}\,(\varepsilon)$, такое, что $\boldsymbol{\rho} \left( \mathbf{x}^{(\mathbf{p})}, \mathbf{x} \right) < \varepsilon$ при $\mathbf{p} > \mathbf{N}\,(\varepsilon)$, то есть последовательность $\left\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{p})} \right\}$ ***сходится*** к $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$ .

## Пример 2 — полнота метрического пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ непрерывных функций на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с метрикой (8) параграфа 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\{ x_n(t) \}$ ***фундаментальная*** последовательность в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то есть

$$\lim_{\mathbf{m}, \mathbf{n} \to \infty} \left\{ \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} | x_m(t) - x_n(t) | \right\} = 0$$

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что:

$$| x_m(t) - x_n(t) | < \varepsilon \qquad (3)$$

для всех $\mathbf{m}, \mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon)$ ***при всех*** $t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Из этого соотношения следует, что при любом фиксированном $\xi \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***числовая*** последовательность $\{ x_n(\xi) \}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{E}^1$, и, следовательно, в силу ***критерия Коши*** для пространства $\mathbb{E}^1$, имеет предел, который мы ***обозначим*** — $x(\xi)$.

Перейдем в неравенстве (3) к пределу при $\mathbf{m} \to \infty$.

Так как предельное неравенство выполняется сразу для всех $t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то можно записать:

$$\sup_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} | x_n(t) - x(t) | \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon) \qquad (4)$$

Неравенство (4) означает, что последовательность функций $\{ x_n(t) \}$ сходится к $x(t)$ ***равномерно***.
Поэтому функция $x(t)$ сама является ***непрерывной*** и, в силу этого, принадлежит $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Поэтому пространство $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***полно***.

### Пример 3 — полнота метрического пространства $\ell_2$

Пространство $\ell_2$ из примера 3 параграфа 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})} = \left( x_1^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots \right)$ — ***фундаментальная*** последовательность точек из $\ell_{\mathbf{2}}$.

Тогда:

$$\lim_{\mathbf{m},\,\mathbf{n} \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 = 0 \,,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}\,(\varepsilon)$ такое, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 < \varepsilon, \qquad \mathbf{m},\, \mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}\,(\varepsilon) \tag{5}$$

Из этого неравенства следует, что $\forall\, i$ числовая последовательность $\left\{ x_i^{(n)} \right\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{E}^1$ и, поэтому, имеет предел при $\mathbf{n} \to \infty$, который мы ***обозначим*** $x_i$.

Покажем, что последовательность $\mathbf{x} \overset{def}{=} \{\, x_i \,\}$, составленная из всех пределов $x_i$, принадлежит $\ell_{\mathbf{2}}$ и именно к этому элементу $\ell_{\mathbf{2}}$ сходится рассматриваемая ***фундаментальная*** последовательность $\mathbf{x}^{(n)}$.

Пусть $\mathbf{M}$ произвольное натуральное число.

Перепишем неравенство (5) в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 = \sum_{i=1}^{M} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 + \sum_{i=M+1}^{\infty} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 \leqslant \varepsilon$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{M}} \left( x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 \leqslant \varepsilon \,, \tag{6}$$

при любых натуральных $\mathbf{m},\, \mathbf{n}$.

Зафиксируем в неравенстве (6) параметр $\mathbf{n}$ и перейдем к пределу при $\mathbf{m} \to \infty$.

Получим:

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{M}} \left( x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2 \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

Неравенство (7) справедливо для произвольного $\mathbf{M}$.

Поэтому в нем можно перейти к пределу при $\mathbf{M} \to \infty$.

Получим следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2 \leqslant \varepsilon \tag{8}$$

Так как $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})} \in \ell_{\mathbf{2}}$, то из (7), (8) в силу неравенства треугольника в пространстве $\mathbb{E}^M$:

$$\sum_{i=1}^{M} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \left( x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 + \sum_{i=1}^{M} \left( x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2$$

и произвольности $\mathbf{M}$ следует, что $\mathbf{x} \in \ell_{\mathbf{2}}$, откуда, в силу (8), следует сходимость последовательности $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}$ к $\mathbf{x}$.

**Пример** 4 **— неполного метрического пространства**

Пространство $\mathbf{X}$ из примера 7 § 1 с метрикой (10) — ***не полно***.

Пусть для определённости $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$.

Рассмотрим последовательность ***непрерывных*** функций:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in [-\mathbf{1}, -\mathbf{1}/\mathbf{n}] \\ nt, & \text{если } t \in [-\mathbf{1}/\mathbf{n}, \mathbf{1}/\mathbf{n}] \\ 1, & \text{если } t \in [\mathbf{1}/\mathbf{n}, \mathbf{1}] \end{cases} \tag{9}$$

***Непосредственно*** проверяется, что эта последовательность ***фундаментальна*** в метрике (10) § 1.

Предположив, что эта последовательность ***сходится*** в метрике (10) к некоторой ***непрерывной*** на отрезке $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ функции $x(t)$, мы придем к противоречию.

Действительно, рассмотрим отрезок $[\mathbf{c}, \mathbf{1}]$, $\mathbf{c} > 0$.

***Очевидно***, что на этом отрезке последовательность $x_n(t)$ ***равномерно сходится*** к функции ***тождественно*** равной $1$.

Отсюда, в силу ***единственности*** предела, следует, что введенная выше предельная функция

$$x(t) \equiv 1, \quad t \in [\mathbf{c}, \mathbf{1}], \quad \forall \mathbf{c}, \quad 1 > \mathbf{c} > 0$$

Рассуждая аналогично, получим, что наша предельная функция

$$x(t) \equiv -1, \quad t \in [-\mathbf{1}, -\mathbf{c}], \quad \forall \mathbf{c}, \quad 1 > \mathbf{c} > 0$$

Но, при любом значении $x(0)$ такая предельная функция $x(t)$ не может быть ***непрерывной*** на $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$.

Следовательно, последовательность $(9)$, будучи ***фундаментальной***, предела в рассматриваемом метрическом пространстве ***не имеет***.

## Пример 5 — полнота метрического пространства $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пространство $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из $k$ раз непрерывно ***дифференцируемых*** функций $x(t)$, определенных на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, с метрикой (9) § 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\{x_n(t)\}$ ***фундаментальная*** последовательность в пространстве $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то есть

$$\lim_{m,n\to\infty} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \max_{0\leqslant j\leqslant k} \left[ \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |x_m(t) - x_n(t)|, \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |x'_m(t) - x'_n(t)|, \ldots \right.$$

$$\ldots \left. , \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left| x_m^{(k-1)}(t) - x_n^{(k-1)}(t) \right|, \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left| x_m^{(k)}(t) - x_n^{(k)}(t) \right| \right] = 0$$

Это означает, что $\forall\,\varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что для ***любого*** номера ***производной*** $0 \leqslant j \leqslant k$:

$$|\,x_m^{(j)}(t) - x_n^{(j)}(t)\,| < \varepsilon \tag{10}$$

для всех $\mathbf{m}, \mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon)$ ***при всех*** $t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Из этого соотношения следует, что каждая последовательность $\left\{\, x_n^{(j)}(t) \,\right\}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, и, следовательно, в силу полноты пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, имеет в этом пространстве предел, который мы обозначим — $z_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant k$.

Перейдем в неравенстве (10) к пределу при $\mathbf{m} \to \infty$.

Тогда:

$$\max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left|\, x_n^{(j)}(t) - z_j(t) \,\right| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon) \tag{11}$$

Неравенство (11) означает, что каждая последовательность функций $\left\{\, x_n^{(j)}(t) \,\right\}$ сходится к $z_j(t)$ ***равномерно***.

Поэтому каждая функция $z_j(t)$ сама является ***непрерывной*** и, в силу этого, принадлежит пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Для завершения доказательства полноты пространства $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ нам понадобится известная из математического анализа

**Лемма 1.** *Если последовательность* $\{\,\boldsymbol{\varphi}_n = \varphi_n(\,t\,)\,\}$ *сходится в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к* $\boldsymbol{\varphi}_0 = \varphi_0(\,t\,)$, *то последовательность* $\{\,\boldsymbol{\psi}_n\,\}$:

$$\boldsymbol{\psi}_n = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \varphi_n(\,\tau\,)\,d\tau$$

*сходится в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к*

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \varphi_0(\,\tau\,)\,d\tau\ .$$

*Доказательство.* По условию $\forall \varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что при $n > \mathbf{N}(\varepsilon)$

$$\max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\, \varphi_n(t) - \varphi_0(t) \,| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{b} - \mathbf{a}}$$

Тогда $\forall \boldsymbol{\xi} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$|\, \psi_n(\boldsymbol{\xi}) - \psi_0(\boldsymbol{\xi}) \,| = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} \varphi_n(\tau)\, d\tau - \int_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} \varphi_0(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} |\varphi_n(\tau) - \varphi_0(\tau)|\, d\tau < \varepsilon$$

при $n > \mathbf{N}(\varepsilon)$. □

Из доказанной леммы следует, что при выполнении её условий все рассматриваемые в ней функции $\{\, \psi_n(t) \,\}$ имеют производные: $\psi'_n(t) = \varphi_n(t)$, которые принадлежат пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а функция $\psi_0(t)$ имеет производную: $\psi'_0(t) = \varphi_0(t)$, которая также принадлежит пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Все элементы $x_n(t)$, рассматриваемой выше, фундаментальной в пространстве $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ последовательности $\{\, x_n(t) \,\}$, имеют представление:

$$x_n(\boldsymbol{\xi}) = x_n(\mathbf{a}) + \int_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} x'_n(\tau)\, d\tau$$

Используя это представление, лемму и следствие из неё, можно утверждать, что при $n \to \infty$ получается представление:

$$z_0(\boldsymbol{\xi}) = z_0(\mathbf{a}) + \int_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} z_1(\tau)\, d\tau ,$$

из которого следует, что при $\forall t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ существует производная: $z'_0(t) = z_1(t)$.

Совершенно аналогично, для ***любого*** номера ***производной*** $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$ имеем представление:

$$x_n^{(j)}(\boldsymbol{\xi}) = x_n^{(j)}(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} x_n^{(j+1)}(\tau)\, d\tau \,.$$

Используя это представление, лемму и следствие из неё, можно утверждать, что при $n \to \infty$ последовательно по $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$ получается представление:

$$z_j(\boldsymbol{\xi}) = z_j(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} z_{j+1}(\tau)\, d\tau \,,$$

из которого следует, что при $\forall\, t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ существует производная: $z_j'(t) = z_{j+1}(t)$ для ***любого*** номера $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$.

Но это означает, что выше определённый набор непрерывных на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $z_j(t)$, являющихся для каждого $0 \leqslant j \leqslant k$ пределом при $n \to \infty$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ фудаментальной последовательности функций $\left\{ x_n^{(j)}(t) \right\}$, на самом деле, является ***последовательными производными*** порядка $1 \leqslant j \leqslant k$ ***одной и той же функции*** $z_0(t)$, что означает ***сходимость*** рассмотренной фундаментальной последовательности в $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к $z_0(t)$.

Поэтому пространство $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***полно***.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 3.

1. Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ ***полное*** метрическое пространство и $\mathbf{M}$ — его ***замкнутое*** подмножество.

Показать, что ***метрическое пространство*** $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\rho})$ также ***полно***.

2. Пусть последовательность ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $\{ x_n(t) \}$ ***сходится*** в смысле ***метрики*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к ***функции*** $x(t)$.

Показать, что $x(t)$ является ***пределом*** последовательности $\{ x_n(t) \}$ и в смысле ***метрики*** (10) § 1.

3. Пусть ***последовательность*** $\{ x_n(t) \}$ сходится к ***непрерывной*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функции $x(t)$ в смысле ***метрики*** (10) § 1.

Показать ***на примере***, что такая сходимость ***не влечет*** сходимость последовательности $\{ x_n(t) \}$ к $x(t)$ в ***метрике*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4. Показать, что последовательность ***непрерывных*** функций $\{ x_n(t) \}$ на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, где $x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, & \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$, ***сходится*** к функции $x(t) \equiv 1$ ***в*** метрическом ***пространстве*** $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}$, но ***не сходится в пространстве*** $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ к той же самой функции.

5. Показать ***полноту*** метрического пространства с носителем из примера 2 § 1, рассматриваемого с ***метрикой*** (5) примера 3 того же параграфа.

6. Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, рассмотренной в задаче 7 к § 1, ***полным***?

7. Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(x, y) = \operatorname{arctg}|x - y|$, рассмотренной в задаче 8 к § 1, ***полным***?

8. Является ли ***полным*** метрическое пространство $c$ всех числовых последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, где $x_k \to 0$, когда

$k \to \infty$, с ***метрикой***, задаваемой формулой $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\limits_{k} |x_k - y_k|$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$ ?

9. Пусть $\mathbf{X}$ множество ***рациональных*** чисел $\{\mathbf{r}\}$, ***расстояние*** между которыми определено формулой: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Показать, что в ***этом метрическом пространстве*** последовательность

$$\mathbf{r}_n = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$$

является ***фундаментальной***, но ***не имеет предела***.

(Из курса математического анализа известно, что рассматриваемая последовательность ***имеет предел*** в метрическом ***пространстве*** $\mathbb{E}^1$).

10. Пусть $\mathbf{X}$ множество многочленов:

$$\{\mathbf{p}\} \overset{def}{=} \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\},$$

***расстояние*** между которыми определено формулой:
$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \max\limits_{\mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}} |p_1(x) - p_2(x)|$.

Показать, что в ***этом метрическом пространстве*** последовательность

$$\mathbf{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

является ***фундаментальной***, но ***не имеет предела***.

Будет ли рассматриваемая последовательность ***иметь предел*** в метрическом пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ?

## 1.4 Пополнение метрических пространств

***Полнота*** того или иного метрического пространства, ***участвующего*** в постановке и решении конкретной математической или прикладной проблемы, часто весьма ***существенна***.

Отсутствие свойства ***полноты*** обычно удается компенсировать, благодаря тому, что у любого ***неполного*** пространства существуют ассоциированные с ним ***полные*** метрические пространства, называемые ***пополнениями*** исходного метрического пространства.

### Изометрия метрических пространств и пополнение

**Определение 14.** *Два метрических пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *и* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$ *называются* ***изометричными****, если существует такое* ***взаимнооднозначное*** *соответствие* $\boldsymbol{\tau}$ *между ними, что:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X} \qquad \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})) \ .$$

*И, наоборот:*

$$\forall \mathbf{x}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \mathbf{y}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \in \mathbf{Y} \qquad \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ .$$

*Само* ***отображение*** $\boldsymbol{\tau}$ *называется* ***изометрией*** *(между* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$*).*

**Определение 15.** ***Полное*** *метрическое пространство* $\mathbf{Y}$ *называется* ***пополнением*** *пространства* $\mathbf{X}$*, если:*

**1**°. *В* $\mathbf{Y}$ *есть подпространство* $\mathbf{Y}_0$ ***изометричное*** $\mathbf{X}$.

**2**°. $\mathbf{Y}_0$ ***всюду плотно*** *в* $\mathbf{Y}$*, т.е.* $[\mathbf{Y}_0] = \mathbf{Y}$.

**Теорема 1.** ***Любое*** *неполное метрическое пространство* $\mathbf{X}$ *имеет* ***пополнение****.*

*Все* ***пополнения*** *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***изометричны*** *между собой.*

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы, [2] а ограничимся только несколькими общими соображениями ***принципиального*** характера.

$\mathbf{1}^\circ$. Прежде всего, напомним самое ***существенное*** свойство ***полного*** метрического пространства $\mathbf{X}$.

По определению в каждом таком пространстве ***всякая фундаментальная*** последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ имееет ***предел*** — некоторый элемент $\mathbf{x}_0$ этого же пространства.

$\mathbf{2}^\circ$. Тогда всё множество фундаментальных последовательностей ***полного*** пространства можно разделить на классы ***эквивалентных*** между собой последовательностей таким образом, чтобы к одному классу были отнесены все фундаментальные последовательности этого пространства, имеющие пределом ***одну и ту же точку*** $\mathbf{x}_0$.

$\mathbf{3}^\circ$. После этого можно считать, что точку $\mathbf{x}_0$ ***полного*** метрического пространства вполне "заменяет" тот самый ***класс*** эквивалентных между собой последовательностей нашего ***полного*** метрического пространства.

$\mathbf{4}^\circ$. В ***неполном*** метрическом пространстве $\mathbf{X}$, вообще говоря, для ***некоторых фундаментальных*** в нём последовательностей $\{\mathbf{x}_n\}$ ***не существует*** "соответствующего" такой последовательности элемен-

[2] Конструкция пополнения неполного метрического пространства изложена, например, в книге [2]

та $\mathbf{x}_0$, к которому бы ***сходилась*** данная фундаментальная последовательность.

Но формально ничто не мешает ***обратить ситуацию*** и "заменить" "недостающую" точку $\mathbf{x}_0$ в рассматриваемом случае, также как в случае полного пространства, ***классом эквивалентных*** между собой фундаментальных последовательностей неполного метрического пространства.

**5**$^\circ$. При этом вся "тонкость" ситуации состоит в том, что понятие ***эквивалентности*** фундаментальных последовательностей, используемое для ***полных*** метрических пространств в ***неполном*** метрическом пространстве ***не работает***.

**6**$^\circ$. Но, к счастью, можно так ***определить*** эквивалентность фундаментальных последовательностей в ***неполном*** метрическом пространстве, чтобы указанная выше замена "отсутствующей" точки $\mathbf{x}_0$ на класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей стала возможной.

**7**$^\circ$. Подходящее для наших целей ***обобщение*** понятия ***эквивалентности*** фундаментальных последовательностей на случай ***необязательно*** полного метрического пространства содержит

**Определение 16.** *Две* ***фундаментальных*** *последовательности* $\{\mathbf{x}_n\}$ *и* $\{\mathbf{y}_n\}$ *из* ***метрического*** *пространства* $\mathbf{X}$ *называются* ***эквивалентными***, *если:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = 0$$

Изложенные в пунктах **1**$^\circ$ — **7**$^\circ$ соображения являются ***содержательной основой доказательства*** теоремы 1, ***могут быть ис-***

***пользованы*** при конкретном построении пополнений ***неполных*** метрических пространств, однако, довольно часто пополнение того или иного неполного пространства можно получить и ***иными*** способами.

## Пример 1 — пополнение пространства рациональных чисел $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

***Метрическое пространство*** $\mathbf{X}$, элементами которого являются ***рациональные числа*** отрезка $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, а расстояние между которыми вводится стандартным образом, как на всей числовой прямой, очевидно, ***неполно***.

Его стандартное ***пополнение*** — метрическое пространство $\mathbf{Y}$ — отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ с расстоянием между точками, как на всей числовой прямой.

Более точно: пополнение рассматриваемого метрического пространства есть метрическое пространство, элементами которого будут ***все*** элементы множества ***действительных*** чисел от нуля до единицы, а функция, определяющая метрику, имеет ***тот же самый вид***, но ***расширенную*** область определения.

## Пример 2 — пополнение пространства $\mathbb{R}^{\Phi}$

Рассмотрим ***арифметическое пространство*** $\mathbb{R}^1$ (числовая прямая) с ***метрикой***, задаваемой следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y})| ,$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ непрерывная, строго возрастающая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$ и такая, что

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 1 .$$

Полученное ***метрическое пространство***, которое мы для удобства будем обозначать $\mathbb{R}^{\mathbf{\Phi}}$, — ***неполное***.

Действительно, как легко проверить, последовательность $\{\mathbf{x}_n = \mathbf{n}\}$ ***фундаментальна*** в этом пространстве, но ***предела*** в этом пространстве не имеет.

***Пополнением*** (одним из возможных!) этого пространства служит отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ со стандартной ***метрикой***, так как, легко показать, что рассматриваемое пространство ***изометрично*** интервалу $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

При этом, требуемое для изометрии ***взаимооднозначное*** соответствие задается отображением: $\mathbf{x} \overset{\mathcal{T}}{\leftrightarrow} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, — а замыкание интервала $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ есть отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

### Пример 3 — пространство $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, как пополнение пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Вновь рассмотрим ***метрическое пространство*** $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из непрерывных на конечном отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***метрикой*** (10) из § 1.

В § 3 (пример 6) было установлено, что это ***метрическое пространство неполно***.

***Пополнение*** рассматриваемого пространства ***с точностью до изометрии*** совпадает с метрическим ***пространством*** $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, которое состоит не из индивидуальных функций, а из ***классов эквивалентных*** между собой функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, позволяющим ввести ***метрику***, ***согласованную*** с метрикой (10).

**Определение 17.** *Множество* $\mathbf{M}$ *точек* $\mathbb{R}^1$ *называется множеством* ***меры нуль***, *если при любом* $\varepsilon > 0$ *множество* $\mathbf{M}$ *может быть* ***покрыто*** *конечным или* ***счетным*** *множеством отрезков* ***суммарной длины*** $\leqslant \varepsilon$.

Так как ***отрезок*** и соответствующий ему ***интервал*** (полуинтервал) имеют одинаковую ***длину***, то в этом определении ***отрезки*** можно заменить ***интервалами*** или ***полуинтервалами***.

**Определение 18.** *Последовательность функций* $\{ f_n(x) \}$, *заданных на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *называется сходящейся* ***почти всюду*** *на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к некоторой функции* $f(x)$, *если эта последовательность сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* $\mathbf{N}$ *точек отрезка,* ***дополнение*** *к которому* $\mathbf{M} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \mathbf{N}$ *имеет* ***меру нуль***.

**Определение 19.** *Две функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *определенные на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *называются* ***эквивалентными***, *если их значения различаются* ***лишь*** *на множестве точек отрезка* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***меры нуль***.

Приведенные выше определения ещё не позволяют аккуратно объяснить, что представляет из себя каждый ***элемент*** пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Мы сделаем это чуть ниже.

Однако, после определения ***элементов*** пространства $\mathbb{L}_2\left[\mathbf{a},\mathbf{b}\right]$, ***метрика*** в этом пространстве ***вводится*** формулой, ***по виду*** совпадающей с $(10)$, но ***интеграл*** в которой понимается в более ***общем*** смысле, чем это, обычно, принято в математическом анализе. Этот ***более общий*** интеграл называется ***интегралом Лебега***[3].

**Замечание.** ***Определить интеграл Лебега*** можно ***различными*** способами.

Мы ***не будем*** проводить аккуратного построения и, тем более, ***обоснования*** теории интеграла Лебега, которое заняло бы значительный объём книги и надолго увело бы в сторону от её ***основной*** тематической линии.

За подробностями теории интеграла Лебега читатель может обратиться к [1], [7].

Для ***понимания*** же дальнейшего материала вполне ***достаточно*** знакомства со следующими ***основными свойствами интегрируемых по Лебегу*** функций.

$\mathbf{1}^\circ$. Если функция $f(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то она останется ***интегрируемой*** с тем же значением интеграла при произвольном изменении значений рассматриваемой функции на произвольном множестве ***меры нуль***.

$\mathbf{2}^\circ$. Если функция ***интегрируема по Риману*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то она ***интегрируема*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***по Лебегу*** и при этом значения соответствующих интегралов ***совпадают***.

[3] Интеграл, обычно используемый в элементарном анализе, называется ***интегралом Римана***

**3°**. Если функция $f(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и функция $|f(x)|$ ***интегрируема по Лебегу*** на этом отрезке (***обратное*** утверждение, вообще говоря, ***неверно!***).

**4°**. Если последовательность ***интегрируемых по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $\{f_n(x)\}$ сходится ***почти всюду*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к функции $f(x)$,

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x), \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

и $\varphi(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и предельная функция $f(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f_n(x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x)\, dx, \qquad \text{причём} \qquad \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\, f(x)\, |\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \varphi(x)\, dx\,.$$

Свойства $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{4}^\circ$, — важные ***теоремы*** лебеговской теории интегрирования, доказательства которых можно найти, например, в [1], [7].

Утверждения $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{4}^\circ$, обычно, позволяют найти ***интеграл Лебега*** от заданной функции либо найдя её ***интеграл*** в смысле ***Римана***, когда это возможно, либо как ***предел последовательности*** результатов таких интегрирований.

Теперь, наконец, мы можем ***сформулировать*** определение пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

**Определение 20.** *Пространство* $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *это множество* ***классов*** *функций.*

*Каждый* ***класс*** *(отдельный элемент* $\mathbf{x}$ *пространства) состоит из функций,*[4] $\boxed{\textbf{\textit{квадрат}}}$ *которых* ***интегрируем по Лебегу*** *на отрез-*

[4]Все функции, рассматриваемые при построении пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ предполагаются ***изме-***

*ке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

*Кроме того, это множество элементов* $\boxed{\textbf{\textit{замкнуто}}}$ *относительно линейных операций (сложения и умножения на числа) в* ***алгебраическом*** *смысле, означающем, что линейная комбинация* $\alpha\, x\,(t) \;+\; \beta\, y\,(t)$ *любых двух функций* $x\,(t),\, y\,(t)$ *из двух классов* $\mathbf{x},\, \mathbf{y}$ *, принадлежащих* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *, сама принадлежит классу* $\alpha\,\mathbf{x} \,+\, \beta\,\mathbf{y}$ *пространства* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *, то есть соответствующая линейная комбинация* ***интегрируема с квадратом*** *на отрезке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

Пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***полно*** и является ***пополнением*** пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ примера 7 из § 1 .

***Строгое*** доказательство этого утверждения требует более ***детального*** знакомства с теорией интегрирования ***в смысле Лебега*** и здесь не приводится.

**Замечание.** Каждый элемент пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно также, в отличие от проведенной выше схемы рассуждений, рассматривать ровно таким же образом, как это намечено выше в пунктах $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{7}^\circ$ , как класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей из пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

Заметим, что аналогично тому, как мы ввели пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , можно ввести пространство функций $\mathbb{L}_2\,(\prod\,[\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\,]\,)$ , заданных на произвольном множестве $\prod\,[\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\,]$ (см. пример (4) на с. 152 из § 5) и даже пространство $\mathbb{L}_2\;(\,\mathbf{Q}\,)$ , где $\mathbf{Q}$ — произвольное ***измеримое*** множество из $\mathbb{E}^n$ .

***римыми***. Это понятие аккуратно обсуждается, например, в [1], [7].

***Упражнения и задачи к параграфу*** 4.

1. Показать, что множество рациональных чисел на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ — множество ***меры нуль***.

Указание. Множество рациональных точек отрезка ***счетно***, то есть из всех рациональных чисел $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ можно образовать одну ***последовательность***.

Каждое число, — элемент получившейся таким образом последовательности, можно заключить в отрезок сколь угодно малой длины.

Поэтому достаточно подобрать длины всех этих отрезков так, чтобы сумма длин указанных отрезков была бы сколь угодно малой.

2. Показать, что функция Дирихле на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ :

$$\boldsymbol{\chi}(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{иррационально} \\ 0, & x - \text{рационально} \end{cases}$$

***интегрируема по Лебегу***.

Чему равен ***интеграл*** от этой функции?

3. Показать, что функция $f(x) = x \cdot \boldsymbol{\chi}(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ и ***интеграл*** от этой функции равен $1/2$ .

## 1.5 Отображения метрических пространств. Принцип сжатых отображений

### Отображения метрических пространств

Одним из самых ***основополагающих*** понятий математики является понятие ***функции***.

Сейчас мы значительно расширим понятие функции (по сравнению со стандартным определением из ***математического анализа***).

**Определение 21.** *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— два множества и каждому элементу* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ *поставлен в соответствие некоторый (**только один!**) элемент* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$.

*В этом случае говорят, что на* $\mathbf{M}$ *задана **функция** со значениями в* $\mathbf{N}$.

**Замечание.** Вместо слова ***функция***, по сложившейся в математике традиции, в зависимости от контекста, часто используют также слова - синонимы — ***отображение*** и ***оператор***.

Точно также, ***по традиции***, в случае, когда область значений $\mathbf{N}$ состоит из действительных чисел, а $\mathbf{M}$ — произвольное ***метрическое пространство***, то вместо слова ***функция*** обычно используется термин ***функционал***.

**Определение 22.** *Пусть* $f$ *— **отображение**.*

*Элемент* $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbf{N}$ *называется **образом*** $\mathbf{x}$ *в* $\mathbf{N}$ *при отображении* $f$.

**Определение 23.** *Если* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$, *то под **полным прообразом** элемента* $\mathbf{y}$ *понимается **подмножество** элементов* $\mathbf{M}$, *которые **переходят** в* $\mathbf{y}$ *(соответствуют* $\mathbf{y}$*) при отображении* $f$, *причем это подмножество, которое, обычно, обозначается* $f^{-1}(\mathbf{y})$, *при некоторых* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$, *может быть и **пустым**.*

**Определение 24.** *Если* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{M}$, *то* ***образ множества*** $\mathbf{P}$ *(в множестве* $\mathbf{N}$*): —* $f(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{N}$, *—* ***подмножество*** $\mathbf{N}$, *куда переходят точки из* $\mathbf{P}$ ***под действием оператора*** $f$.

*Если* $f(\mathbf{M}) = \mathbf{N}$, *то говорят, что* $f$ *отображает* $\mathbf{M}$ $\boxed{\textbf{на}}$ $\mathbf{N}$.

*Если* $f(\mathbf{P}) \subset \mathbf{N}$, *то говорят об отображении* $\mathbf{M}$ $\boxed{\textbf{в}}$ $\mathbf{N}$.

### Непрерывность отображения метрических пространств

Наличие метрики позволяет ввести понятие ***непрерывности*** отображения.

**Определение 25.** *Пусть* $f(\mathbf{x})$ ***функция****, определенная на метрическом пространстве* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *со значениями в метрическом пространстве* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$.

***Отображение*** $f$ *называется* ***непрерывным*** *в точке* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, *если* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *такое, что*

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})) < \varepsilon \,,$$

*если*

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta \,.$$

**Утверждение 12.** *Для* ***непрерывности*** *отображения* $f$ *действующего из метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *в метрическое пространство* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$ ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы для* ***любой*** *последовательности* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ *(в смысле сходимости* ***в метрическом пространстве*** $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$*), соответствующая последовательность значений* $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$ ***в метрическом пространстве*** $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$.

*Доказательство.* ***Необходимость***. Пусть отображение $f: \quad \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ непрерывно в точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$ такое, что

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\left(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})\right) < \varepsilon,$$

если

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta.$$

Рассмотрим произвольную последовательность точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, сходящуюся к точке $\mathbf{x}$, т.е. такую, что для рассмотренного выше $\delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\exists N(\delta)$, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta$ при $n > N(\delta)$.

Тогда последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, сходится к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, т.к. для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\delta)$, $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\left(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})\right) < \varepsilon$ при $n > N(\delta)$, т.к. при этом $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta$.

***Достаточность***. Доказательство достаточности проведём от противного.

Пусть для ***всякой*** последовательности точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, ***сходящейся*** к точке $\mathbf{x}$, соответствующая ей при отображении $f$ последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, ***сходится*** к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, но отображение $f$ не является ***непрерывным*** в точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, т.е. ***существует*** такое вещественное число $\varepsilon_0 > 0$, что для ***любого*** $\delta$ ***существует*** хотя бы один элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ такой, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < \delta$, но $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\left(f(\mathbf{z}), f(\mathbf{x})\right) \geqslant \varepsilon_0$.

Положим $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Выберем последовательность точек $\mathbf{z} = \mathbf{x}_n$, таких, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta_n$, но $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\left(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})\right) \geqslant \varepsilon_0$.

Получившаяся таким образом последовательность точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, во-первых, сходится к точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, т.к. по построению $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \frac{1}{n}$, и, во-вторых, соответствующая последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, не сходится к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, т.к. $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит нашим предположениям. $\square$

В случае, когда $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}) = (\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}) = \mathbb{E}^1$, утверждение 4 означает ***эквивалентность*** двух определений ***непрерывной*** функции одного действительного переменного ***по Коши*** и ***по Гейне - Борелю*** соответственно.

Как было отмечено в § 1, ***метрическая функция*** отображает прямое произведение $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ в множество ***неотрицательных чисел*** $\mathbb{R}^1_+$ и, поэтому, можно говорить о её ***непрерывности***.

Имеет место важная

**Лемма 2.** *Расстояние* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *является* ***непрерывным функционалом*** *по обеим своим аргументам* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, *т.е. для любых сходящихся последовательностей её аргументов:* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *и* $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0$ *при* $n \to \infty$, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \to \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *при* $n \to \infty$.

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством четырёхугольника, выбрав в качестве соответствующих точек $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}_n$.

Тогда:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)| \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

$\square$

## Операторные уравнения в метрических пространствах

Многие проблемы в различных разделах математики сводятся к отысканию ***решения*** операторного уравнения:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y} , \tag{1}$$

где $F$ — ***отображение*** метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ в другое метрическое пространство $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$, то есть к установлению ***непустоты*** полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{y})$ ***известного*** элемента $\mathbf{y}$ и нахождения ***всех*** или ***некоторых*** элементов множества $F^{-1}(\mathbf{y})$.

При решении ***прикладных проблем***, обычно, речь идет о ***приближенном*** нахождении каких-либо ***элементов*** множества $F^{-1}(\mathbf{y})$.

## Принцип сжимающих отображений

Очень часто исследование конкретных уравнений типа (1) опирается на ***принцип сжимающих отображений***.

**Теорема 2** (***принцип сжимающих отображений*****).** *Пусть* $\mathbf{A}$ *отображение* ***полного*** *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *в* ***себя****.*

*Пусть кроме того* $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ *выполнено следующее неравенство:*

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y})) \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \tag{2}$$

*где число* $\mathbf{q}$ *:* $0 < \mathbf{q} < 1$ *и* ***не зависит*** *от* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *.*

*Тогда* ***существует единственная*** *точка* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ *такая, что*

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \tag{3}$$

*Такая точка* $\mathbf{z}$ *называется* ***неподвижной точкой*** *отображения* $\mathbf{A}$ *.*

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{x}_0$ произвольно выбранный элемент $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$.

Образуем последовательность $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1),\ \ldots,\ \mathbf{x}_n = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),\ \ldots$$

Используя несколько раз неравенство (2), получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n-1}) = \quad & \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-2})) \leqslant \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n-1},\, \mathbf{x}_{n-2}) \leqslant \cdots \\ \cdots \quad & \leqslant \mathbf{q}^{n-1}\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0)\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $p$ некоторое натуральное число. Тогда, используя нужное число раз неравенство треугольника и окончательный результат (4), получим:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n+p}) \leqslant\ & \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n+1}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n+1},\, \mathbf{x}_{n+2}) + \ldots + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n+p-1},\, \mathbf{x}_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant\ & \left(\mathbf{q}^n + \ldots + \mathbf{q}^{n+p-1}\right)\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) = \\ =\ & \frac{\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n+p}}{1-\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) \leqslant \frac{\mathbf{q}^n}{1-\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0)\end{aligned} \tag{5}$$

Из оценки (5) следует, что наша последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***фундаментальна*** в $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ и, следовательно, в силу ***полноты*** $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$, ***имеет предел*** $\mathbf{z} = \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n$.

В силу (2) отображение $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ***непрерывно*** в любой точке $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$.

Перейдя к пределу в соотношении:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),$$

получим, что $\mathbf{z}$ ***неподвижная точка*** отображения $\mathbf{A}$.

***Единственность*** неподвижной точки сразу следует из неравенства (2).

Действительно, пусть $\mathbf{w}$ какая либо (отличная от $\mathbf{z}$) ***неподвижная точка*** отображения $\mathbf{A}$.

Тогда:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{z}), \mathbf{w}) \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) .$$

Отсюда ***следует***, что $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = 0$ и, следовательно $\mathbf{z} = \mathbf{w}$. $\square$

Неравенство (5) позволяет оценить ***расстояние*** между элементами последовательности $\mathbf{x}_n$ и неподвижной точкой $\mathbf{z}$ для любого $n$.

Действительно, в пределе при $p \to \infty$ из оценки (5) следует неравенство:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) \leqslant \frac{\mathbf{q}^n}{1 - \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0) \tag{6}$$

Использованная нами в доказательстве, ***рекуррентно*** образованная последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ (***итерационная последовательность***), — в конкретных случаях может использоваться не только для ***доказательства*** существования решения того или иного операторного уравнения, но и как источник все более точных (согласно оценке (6)) ***приближений*** к его решению $\mathbf{z}$.

Уравнение (1), рассматриваемое в паре ***произвольных*** метрических пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, далеко не всегда можно преобразовать к виду (3), как, впрочем, вообще говоря, ***не всегда*** возможно сведение уравнения (3) к виду (1).

Однако, в приложениях, обычно, ***преобразование*** (1) в (3) или (3) в (1) оказывается возможным.

**Пример 1 — уравнение (3) в $\mathbb{E}^1$**

Пусть $f\,(x)$ ***дифференцируемая*** функция, определенная для всех действительных $x$ такая, что:

$$|\, f^{'}\,(x)\,| \,\leqslant\, q \,<\, 1, \quad \forall\, x \tag{7}$$

Функцию $f\,(x)$ можно рассматривать как ***отображение*** полного пространства $\mathbb{E}^1$ в себя.

**Утверждение 13.** *Это отображение* ***сжимающее****.*

*Доказательство.* Действительно:

$$\boldsymbol{\rho}\;(\,f(x_1),\,f(x_2)\,)\;=\;|\,f(x_1)\,-\,f(x_2)\,|\;\leqslant\;q\cdot|\,x_1\,-\,x_2\,|$$

□

В силу принципа ***сжимающих отображений*** уравнение

$$f\,(x)\;=\;x\;,$$

***имеет единственное*** решение в $\mathbb{E}^1$.

**Пример 2 — система линейных алгебраических уравнений, как операторное уравнение (3) в пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$**

Рассмотрим ***систему линейных алгебраических уравнений*** вида:

$$x_i\,=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,+\,b_i\,,\quad i\,=\,1,\,\ldots\,,n \tag{8}$$

**Утверждение 14.** *Предположим, что выполнено условие:*

$$\max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \;=\; q \;<\; 1 \tag{9}$$

*Тогда система* (8) ***имеет единственное*** *решение.*

*Доказательство.* Справедливость сформулированного утверждения можно установить, используя ***принцип сжатых отображений***.

Уравнение (8) можно интерпретировать, как операторное, вида:

$$\mathbf{x} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,,$$

в котором $\mathbf{x}$ элемент $n$-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой примера 3 из § 1.

Это пространство ***полное*** (см. упражнения к § 3).

Его ***отображение*** в себя, задаваемое правыми частями равенств (8), — ***сжимающее***.

Действительно:

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(1)},\, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(2)}\right) \;=\; \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \left( x_j^{(1)} \;-\; x_j^{(2)} \right) \right| \right) \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \cdot \max_j \left| x_j^{(1)} \;-\; x_j^{(2)} \right| \;\leqslant\; q \cdot \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}^{(1)},\, \mathbf{x}^{(2)}\right)$$

Последнее неравенство получается в силу (9). □

Пользуясь ***принципом сжатых отображений*** можно исследовать уравнения, неизвестными в которых являются не только числа, но также, например, и ***функции*** или ***наборы функций*** одного или нескольких переменных.

**Пример 3 — задача Коши для дифференциального уравнения, как уравнение вида** (3)

В теории дифференциальных уравнений, в частности, изучается ***задача Коши*** для дифференциального уравнения:

$$y' = f\,(x, y\,(x))\,, \quad y\,(x_0) = y_0 \tag{10}$$

Здесь $y\,(x)$ ***неизвестная функция***, которую нужно определить из условий (10), а $f\,(x, y)$ — ***заданная*** функция двух переменных, обычно считающаяся ***непрерывной*** в некотором (замкнутом) ***прямоугольнике*** евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ с центром в точке $(x_0, y_0)$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда функция $f\,(x, y)$ ***непрерывна*** в полосе:

$$\mathbf{D} = \{\, \mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}, \quad -\infty < y < +\infty \,\}\,.$$

Точка $x_0 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и для точек полосы $\mathbf{D}$ выполнено условие:

$$|\, f\,(x, y_1) - f\,(x, y_2)\,| \leqslant \mathbf{K} \cdot |\,y_1 - y_2\,|\,, \tag{11}$$

где постоянная $\mathbf{K}$ не зависит от $x, y_1, y_2$.

Условие (11) называется ***условием Липшица***.

Для его выполнения ***достаточно***, чтобы ***существовала*** частная производная $f'_y\,(x, y)$ и выполнялось неравенство:

$$\sup_{\mathbf{D}} |\, f'_y\,(x, y)\,| \leqslant \mathbf{K}$$

Рассмотрим ***отображение*** пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в себя, задаваемое формулой:

$$z\,(x) \;=\; y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(x,\,y\,(x))\,dx, \text{ или в операторном виде: } \mathbf{z} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{y}\;, \quad (12)$$

где $x_0$ фиксированная точка отрезка $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, а точка $x \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Непосредственно устанавливается, что оператор $\mathbf{A}$ отображает пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в себя и ***неподвижная точка*** этого отображения является решением задачи Коши (10) на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Вообще говоря, отображение (12) ***не является сжимающим*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ при ***произвольных*** значениях чисел $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Однако, оно ***будет сжимающим***, если ***длина*** отрезка $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ достаточно ***мала***.

Действительно, используя неравенство (11) и известные свойства интеграла, имеем:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}_1,\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}_2) \;&=\; \max_{\mathbf{a}\leqslant x\leqslant \mathbf{b}} \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left[f\,(x,\,y_1\,(x)) \,-\, f\,(x,\,y_2\,(x))\right]\,dx \right| \leqslant \\ &\leqslant\; K\cdot|\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}\,|\cdot \max_{\mathbf{a}\leqslant x\leqslant \mathbf{b}} |\,y_1\,(x) \,-\, y_2\,(x)\,| \;= \\ &=\; K\cdot|\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}\,|\cdot\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{y}_1,\,\mathbf{y}_2)\end{aligned}$$

Таким образом, если:

$$|\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}\,| \;<\; 1/K\;,$$

отображение (12) ***сжимающее*** и задача Коши (10) ***имеет*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***единственное*** решение.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 5.

1. ***Непрерывны*** ли на ***пространстве*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ следующие ***функционалы***:

а). $f\,(\mathbf{x}) = x\,(\mathbf{a})$

б). $f\,(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |x\,(t)|$

в). $f\,(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} x\,(t)$

г). $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x\,(t)\,dt$

д). $f\,(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\,(t) \text{ принимает хотя бы одно отрицательное значение} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x\,(t) \equiv 0 \\ 1, & \text{если } x\,(t) \geqslant 0, \text{ причём } x\,(t) \not\equiv 0 \end{cases}$ ?

2. ***Непрерывны*** ли на ***пространстве*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ следующие ***функционалы***:

а). $f\,(\mathbf{x}) = x\,(\mathbf{a})$

б). $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \sqrt{1 + [\,x'(t)\,]^2}\,dt$ ?

3. ***Непрерывны*** ли ***функции*** $f\,(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) = \inf\limits_{\mathbf{y}\,\in\,\mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,)$ и $g\,(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) = \sup\limits_{\mathbf{y}\,\in\,\mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,)$, где $\mathbf{A}$ — множество в ***метрическом*** пространстве $\mathbf{X}$.

4. Проверить, что ***функционал*** $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\frac{1}{2}} x\,(t)\,dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,(t)\,dt$ ***непрерывен*** на ***пространстве*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Показать, что точная ***верхняя грань*** по всем элементам ***единичного шара*** этого пространства от указанной функции ***не достигается*** ни на одном элементе этого шара.

5. ***Отображение*** $\mathbf{F}$ на полупрямой $\mathbf{X}:\ 0 \leqslant x < +\infty$ переводит ***точку*** $x$ в ***точку*** $x + 1/x$.

Будет ли указанное отображение ***сжимающим*** в метрическом ***пространстве*** $\mathbf{X}$ со стандартной ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) \;=\; |\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,|$ ?

Имеет ли указанное отображение ***неподвижную*** точку в $\mathbf{X}$ ?

6. Рассмотрим систему (8), как ***операторное уравнение*** в ***евклидовом пространстве*** $\mathbb{E}^n$ (с метрикой (1) из § 1 главы I).

Показать, что оператор $\mathbf{A}$, задаваемый правой частью (8), будет ***сжимающим*** в этом ***пространстве***, если выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \;<\; 1$$

7. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ операторное уравнение — ***интегральное уравнение Фредгольма***:

$$y\,(x) \;=\; \lambda \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(x,\, s)\, y\,(s)\, ds \;+\; f\,(x)$$

Пусть $\mathcal{K}\,(x,\, s)$ ***непрерывная*** функция ***на прямом произведении*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Показать, что при выполнении условия:

$$|\,\mathbf{b} \;-\; \mathbf{a}\,| \cdot |\lambda| \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant x,\, s \leqslant \mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(x,\, s)\,| \;<\; 1 \;,$$

такое интегральное уравнение ***имеет единственное*** решение в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

## 1.6 Компактные метрические пространства. Компакты. Непрерывные функционалы на компактах

### Компактные метрические пространства

**Определение 26.** *Метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***компактным****, если* ***любая*** *бесконечная последовательность его точек содержит* ***фундаментальную подпоследовательность****.*

**Определение 27.** *Метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***компактом****, если* ***любая*** *бесконечная последовательность его точек содержит* ***сходящуюся подпоследовательность****.*

Из этих определений следует:

$\mathbf{1}^{\circ}$. Любое ***полное компактное*** пространство — ***компакт***.

$\mathbf{2}^{\circ}$. Так как каждое подмножество метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ само является ***метрическим пространством***, то можно говорить о ***компактных*** подмножествах данного метрического пространства и о его подмножествах, которые являются ***компактами***.

В частности, любое ***замкнутое компактное*** подмножество полного метрического пространства — ***компакт***.

**Пример** 1. Метрическое пространство $\mathbf{X}$, состоящее из ***конечного*** числа точек — ***компакт***.

**Пример** 2. Отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, рассматриваемый как подпространство в $\mathbb{E}^1$, — ***компактное*** множество и ***компакт***.

**Пример** 3. Интервал $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ***компактное*** множество (***компактное*** метрическое пространство), но не ***компакт***.

Утверждения, содержащиеся в примерах 2 и 3 следуют из известной теоремы математического анализа о том, что любая ***ограниченная*** последовательность действительных чисел ***содержит сходящуюся*** подпоследовательность.

**Пример** 4. Пространство $\mathbb{E}^n$ ***не компактно*** при любом $n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, множество всевозможных $n$-ок ***натуральных чисел*** $(N_1,\, N_2,\, \ldots\,,\, N_n)$ принадлежит $\mathbb{E}^n$.

Это множество бесконечно, но ***не содержит*** никакой ***фундаментальной*** подпоследовательности.

### Компактность ограниченных множеств в $\mathbb{E}^n$

**Пример** 5. Множество в $\mathbb{E}^n$, описываемое неравенствами:

$$\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = \{\, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \,\}, \quad i = 1, 2, \, \ldots \,, n \,,$$

называется ***параллелепипедом*** и является ***компактом***.

Действительно, пусть ***последовательность*** элементов $\mathbf{x^{(k)}} \in \prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$, $k = 1, 2, \, \ldots$.

Тогда ***числовая*** последовательность ***первых*** координат этих элементов — $\left\{\, x_1^{(k)} \,\right\}$, содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{\, x_1^{(k_1)} \,\right\}$.

***Числовая*** последовательность ***вторых*** координат, относящихся к элементам, ***выбранным*** на первом шаге, — $\left\{\, x_2^{(k_1)} \,\right\}$, — содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{\, x_2^{(k_2)} \,\right\}$ и так далее.

***Последовательность*** $n$-ых координат, относящихся к элементам, ***выбранным*** на $(n-1)$-ом шаге, — $\left\{ x_n^{(k_{n-1})} \right\}$, — содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{ x_n^{(k_n)} \right\}$.

Полученная в результате указанного выше процесса ***последовательность*** элементов $\left\{\mathbf{x}^{(\mathbf{k_n})}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ и ***сходится*** в $\mathbb{E}^n$.

В силу ***замкнутости*** множества $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ в $\mathbb{E}^n$, ее ***предел*** принадлежит $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$, то есть рассматриваемое нами множество — ***компакт***.

Пользуясь результатом этого примера, легко доказать, что ***компактом*** будет любое ***замкнутое ограниченное*** множество в $\mathbb{E}^n$ (то есть множество $\mathbf{n}$-ок из $\mathbb{E}^n$, все ***компоненты*** которых ***ограничены*** по модулю).

Для доказательства этого достаточно заметить, что такое множество содержится в некотором компакте $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ и любое ***замкнутое*** подмножество ***компакта*** само является ***компактом***.

### Некомпактность единичного шара в $\ell_2$

**Пример** 6. Рассмотрим ***замкнутый*** шар $\mathbf{S}\,(\mathbb{O},\, 1)$ в пространстве $\ell_2$ с центром в точке $\mathbb{O} = (0, 0, \,\ldots\,, 0, \,\ldots\,)$ и радиуса $1$, то есть множество ***последовательностей*** действительных чисел таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant 1$$

Множество $\mathbf{S}\,(\mathbb{O},\, 1)$ не является ***компактным*** подмножеством в $\ell_2$ (и тем более не является ***компактом***).

Действительно, последовательность

$$\mathbf{e}^{(n)} = (0, \,\ldots\,, 0, 1, 0, \,\ldots\,), \quad \text{где } 1 \text{ стоит на } n\text{-ом месте,}$$

не содержит ***никакой*** фундаментальной подпоследовательности, так как $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{e}^{(m)},\,\mathbf{e}^{(n)}\,) \;=\; \sqrt{2}\,,$ если $\;m \neq n\,.$

Следовательно, рассматриваемое множество ***не компактно***.

***Не компактно*** даже множество элементов из $\;\ell_{\mathbf{2}}\,,$ удовлетворяющих условию: $\;\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 \;=\; 1\,.$

## Свойства непрерывных функционалов на компактах

***Непрерывные функционалы***, заданные ***на компактах***, сохраняют многие существенные свойства ***непрерывных*** функций, заданных ***на отрезке*** числовой оси.

В качестве иллюстрации сказанного, приведем следующие три утверждения.

**Утверждение 15.** ***Непрерывный*** *функционал* $\;f\,(\mathbf{x})\,,\;$ *заданный на* ***компакте*** $\;\mathbf{Q}\,,\;$ ***ограничен***.

*Доказательство.* Предположим противное.

Тогда $\;\forall\, n \;=\; 1, 2, \,\ldots \;\; \exists\, \mathbf{x_n} \,\in\, \mathbf{Q}\;$ такой, что $\;|\, f\,(\mathbf{x_n})\,| \;>\; n\,.$

По предположению, последовательность $\;\mathbf{x_n}\;$ содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\;\mathbf{x_{n_k}},\;\; n_k \;\to\; \infty\;$ при $\;k \;\to\; \infty\,.$

Пусть $\;\lim\limits_{k\,\to\,\infty} \mathbf{x_{n_k}} \;=\; \mathbf{x}\,,\;\; \mathbf{x} \,\in\, \mathbf{Q}\,.$

В силу ***непрерывности*** $\;f\,(\mathbf{x})\;$ на ***компакте*** $\mathbf{Q}$: $\;\lim\limits_{k\,\to\,\infty} \mathbf{f}\,(\mathbf{x_{n_k}}) \;=\; \mathbf{f}\,(\mathbf{x})\,,$ но, по построению, $\;|\, f\,(\mathbf{x_{n_k}})\,| \;>\; n_k\;$ и, следовательно, последовательность $\mathbf{f}\,(\mathbf{x_{n_k}})\;$ ***не сходится***.

Получили противоречие. $\square$

**Теорема 3** (***К. Вейерштрасс***). ***Непрерывный*** *функционал* $f(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***достигает*** *на компакте* $\mathbf{Q}$ *своей* ***верхней грани***.

*Доказательство.* В силу (44), функционал $f(\mathbf{x})$ ограничен сверху на компакте $\mathbf{Q}$.

Пусть $\mathbf{M} = \sup\limits_{\mathbf{Q}} f(\mathbf{x})$.

По определению ***верхней грани***, $\forall\, n = 1, 2, \ldots,$ найдется такая точка $\mathbf{x_n}$ компакта $\mathbf{Q}$, что

$$\mathbf{M} \geqslant \mathbf{f}(\mathbf{x_n}) \geqslant \mathbf{M} - \mathbf{1/n} \qquad (1)$$

В силу (1) — $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x_n}) = \mathbf{M}$.

С другой стороны, последовательность $\{\mathbf{x_n}\}$, в силу ***компактности*** $\mathbf{Q}$, содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность — $\{\mathbf{x_{n_k}}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_{n_k}} = \mathbf{z}$.

Тогда, в силу ***непрерывности*** $f$ и (1): $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x_{n_k}}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{M}$.

Таким образом, в точке $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$ ***достигается*** верхняя грань $f$ — $\mathbf{M}$ ***на компакте*** $\mathbf{Q}$. □

Рассуждая аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы, можно доказать, что ***непрерывный на компакте функционал*** обязательно ***достигает*** своей ***нижней грани***.

**Утверждение 16.** ***Непрерывный*** *функционал* $f(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***равномерно непрерывен*** *на этом* ***компакте***, *т.е.* $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$|\, f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\,| < \varepsilon, \quad \textit{если} \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta(\varepsilon), \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{Q}$$

*Доказательство.* Пусть это не так.

Тогда $\exists\,\varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall\,\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\exists\,\mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}$ такие, что $\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}\right) < \frac{1}{n}$, но

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n)}\right) \right| \geqslant \varepsilon_0$$

Ввиду того, что $\mathbf{Q}$ ***компакт***, из последовательности $\left\{\mathbf{x}_1^{(n)}\right\}$ можно выбрать ***сходящуюся*** подпоследовательность.

Пусть это будет подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right\}$ и пусть эта подпоследовательность ***сходится*** при $n_k \to \infty$ к ***точке*** $\mathbf{x}_0$ компакта $\mathbf{Q}$.

Тогда ***подпоследовательность*** $\left\{\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right\}$ последовательности $\left\{\mathbf{x}_2^{(n)}\right\}$ будет также при $n_k \to \infty$ ***сходиться*** к ***точке*** $\mathbf{x}_0$, т.к. в силу неравенства треугольника и определения последовательностей $\left\{\mathbf{x}_1^{(n)}\right\}$, $\left\{\mathbf{x}_2^{(n)}\right\}$

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \leqslant \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) < \frac{1}{n_k} + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \to 0$$

при $n_k \to \infty$.

В силу ***непрерывности*** функционала $f$ в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ обе последовательности $\left\{f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right)\right\}$ и $\left\{f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right)\right\}$ будут ***сходиться*** при $n_k \to \infty$ к одному и тому же ***значению*** $f(x_0)$.

Но тогда обязательно ***найдётся*** такое $N(\varepsilon_0)$, что при $n_k > N(\varepsilon_0)$ будет ***выполнено*** неравенство

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right) \right| < \varepsilon_0\ ,$$

которое ***противоречит*** нашему предположению.

И тем самым утверждение доказано. $\square$

**Критерий компактности множества в метрическом пространстве**

Существует ***критерий*** (необходимое и достаточное условие) компактности метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, полезный в различных приложениях.

Для того, чтобы его сформулировать, введем следующее

**Определение 28.** ***Подмножество*** $\boldsymbol{\Sigma}$ *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***$\boldsymbol{\varepsilon}$-сетью*** *(для множества* $\mathbf{X}$*), если* $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ***замкнутый*** *шар* $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *содержит хотя бы одну* ***точку*** *из* $\boldsymbol{\Sigma}$, *другими словами каждая точка* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *отстоит на расстоянии* ***не большем*** $\varepsilon$ *от некоторой точки* $\mathbf{z}$ ***$\boldsymbol{\varepsilon}$-сети*** $\boldsymbol{\Sigma}$.

**Теорема 4** (***критерий компактности Хаусдорфа).*** *Для того, чтобы метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *было* ***компактным***, ***необходимо*** *и* ***достаточно***, *чтобы в нем, для любого* $\varepsilon > 0$, *существовала* ***конечная*** *(состоящая из* ***конечного числа*** *точек)* ***$\boldsymbol{\varepsilon}$-сеть***.

*Доказательство.* ***Необходимость***.

Предположим, что для какого-то $\varepsilon > 0$, для определенности $\varepsilon = 1$, в ***компактном*** пространстве $\mathbf{X}$ не существует конечной **1**-***сети***.

Построим в $\mathbf{X}$ последовательность, не содержащую никакой ***фундаментальной*** подпоследовательности.

В качестве начальной точки такой последовательности можно взять любую точку $\mathbf{X}$. Пусть это будет точка $\mathbf{x}_0$.

Так как в $\mathbf{X}$ не существует **1**-***сети***, состоящей из ***одной*** точки, найдется точка $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$ такая, что $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geqslant 1$.

Точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$, по предположению, также не образуют **1-*сеть***.

Поэтому найдется точка $\mathbf{x}_2$ такая, что $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2) \geqslant 1$, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geqslant 1$.

Этот процесс можно продолжить.

В результате получим последовательность точек $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ из $\mathbf{X}$, которая, по построению, не будет ***фундаментальной***, так как $\forall m$ и $n > m$ — $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \geqslant 1$.

***Достаточность***.

Пусть в $\mathbf{X}$ существует ***конечная*** ***$\varepsilon$-сеть*** при любом $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ точек из $\mathbf{X}$.

Покажем, что она содержит ***фундаментальную*** подпоследовательность.

Обозначим $\boldsymbol{\Sigma}_k = \{\mathbf{y}_1^{(k)}, \mathbf{y}_2^{(k)}, \ldots \mathbf{y}_{m_k}^{(k)}\}$ ***конечную*** **1/k-*сеть*** в $\mathbf{X}$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Положим $k = 1$.

Объединение ***замкнутых*** шаров радиуса $1$ с центрами в точках $\mathbf{y}_1^{(1)}, \mathbf{y}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}_{m_1}^{(1)}$ покрывает все $\mathbf{X}$.

Поэтому точки рассматриваемой нами подпоследовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ как-то расположены в этой совокупности шаров.

Так как шаров ***конечное*** число, а последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***бесконечна***, то, по крайней мере в одном из шаров, находится ***бесконечное*** число членов нашей последовательности.

Выделим один из таких шаров. Пусть точка $\mathbf{x}_{n_1}$ находится в этом выделенном шаре.

Этим завершается первый шаг процесса.

Положим теперь $k = 2$.

Пусть $\mathbf{y}_1^{(2)}, \mathbf{y}_2^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}_{m_2}^{(2)}$ ***конечная*** $1/2$-***сеть*** в $\mathbf{X}$.

Аналогично выше сказанному, какой-либо из шаров радиуса $1/2$ с центром в одной из этих точек содержит ***бесконечно*** много точек из $\{\mathbf{x}_n\}$, попавших в шар, который был выделен на первом шаге процесса.

Выделим один из этих шаров второго шага процесса.

В выделенном шаре содержится ***бесконечное*** множество точек $\{\mathbf{x}_n\}$.

Поэтому найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что точка $\mathbf{x}_{n_2}$ принадлежит этому шару второго выделения.

По построению $\mathbf{x}_{n_2}$, принадлежит также шару, выделенному на первом шаге процесса.

Полагая последовательно $k = 3, 4, \ldots$, получим подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$ последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$.

Эта подпоследовательность ***фундаментальна***, так как члены этой последовательности с номерами $n_k, n_{k+1}, \ldots$, по построению, принадлежат шару радиуса $1/k$ при $k = 1, 2, \ldots$. $\square$

**Следствие 1.** *Всякое **компактное** множество $\mathbf{Q}$ метрического пространства $\mathbf{X}$ **ограничено**.*

*Доказательство.* Пусть $\boldsymbol{\Sigma}_\mathbf{1} \overset{def}{=} \{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^n$ есть $\mathbf{1}$-сеть для множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{x}_0$ фиксированный элемент пространства $\mathbf{X}$.

Пусть

$$d = \max_j \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_j) .$$

Тогда для ***всякого*** элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$ имеем:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\,) \leqslant 1 + d\,,$$

что и означает ограниченность множества $\mathbf{Q}$ в пространстве $\mathbf{X}$. $\square$

**Компактные множества в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$**

Для изучения компактных множеств в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ нам понадобится два новых понятия.

**Определение 29.** ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\,\varphi\,(t)\,\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *называется* ***равномерно ограниченным****, если* $\exists\,\mathbf{M}$ *такое, что для* ***любой*** *функции* $\varphi\,(t) \in \mathbf{Q}$

$$|\,\varphi\,(t)\,| \leqslant \mathbf{M}, \quad \forall\,t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{2}$$

**Определение 30.** ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\,\varphi\,(t)\,\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *называется* ***равностепенно непрерывным****, если* $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta\,(\varepsilon) > 0$ *такое, что для* ***любой*** *функции* $\varphi\,(t) \in \mathbf{Q}$

$$|\,\varphi\,(t_1) - \varphi\,(t_2)\,| < \varepsilon, \quad \textit{если} \quad |\,t_1 - t_2\,| < \delta\,(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{3}$$

**Утверждение 17.** ***Любое конечное*** *множество функций* $\{\,\varphi_j\,(t)\,\}_{j=1}^{n}$ *из пространства* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***равностепенно непрерывно****.*

*Доказательство.* Т.к. каждая из функций множества $\{\,\varphi_j\,(t)\,\}_{j=1}^{n}$ непрерывна на ***компакте*** — отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то, она также и ***равномерно непрерывна*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (см. утверждение 16 в этом параграфе), т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_j\,(\varepsilon) > 0$

$j = 1, 2, \ldots, n$ такие, что для ***каждой*** функции $\varphi_j(t)$:

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \varepsilon, \text{ если } |t_1 - t_2| < \delta_j(\varepsilon), \; t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \qquad (4)$$

Т.к. множество рассматриваемых функций ***конечно***, то мы можем выбрать среди чисел $\delta_j(\varepsilon)$ наименьшее: $\delta(\varepsilon) \overset{def}{=} \min\limits_j \delta_j(\varepsilon)$.

Выбранное выше число $\delta(\varepsilon) > 0$ и, если только $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$, $t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то выполнены ***все*** неравенства $(4)$, что и означает ***равностепенную непрерывность*** функций конечного множества $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$.

$\square$

***Критерий компактности*** в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ содержит

**Теорема 5** (***Ч. Арцела).*** *Для того, чтобы множество* $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\varphi(t)\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *было* ***компактно***, ***необходимо*** *и* ***достаточно***, *чтобы*

**$1^\circ$**. ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *было* ***равномерно ограниченным*** *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

**$2^\circ$**. ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *было* ***равностепенно непрерывным*** *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

*Доказательство.* ***Необходимость.*** Пусть множество $\mathbf{Q}$ функций $\{\varphi(t)\}$ компактно в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Тогда ***равномерная ограниченность*** всех функций $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ вытекает из следствия 1 из теоремы Хаусдорфа.

Докажем ***равностепенную непрерывность*** всех функций $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$.

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$.

Согласно ***критерию*** компактности Хаусдорфа, для всякого $\varepsilon > 0$, $\exists$ ***конечная*** (состоящая из ***конечного числа*** $N(\varepsilon)$ точек) $\mathbf{z}_j \overset{def}{=} \psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ***$\varepsilon$-сеть*** $\mathbf{\Sigma}_{N(\varepsilon)} \overset{def}{=} \{\mathbf{z}_j = \psi_j(t)\}_{j=1}^{n}$ для множества $\mathbf{Q}$, т.е. для всякой точки $\mathbf{x} \overset{def}{=} \varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ всякий ***замкнутый*** шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \varepsilon/3)$ содержит хотя бы одну ***точку*** $\mathbf{z}_{j_0} = \psi_{j_0}(t)$ из $\mathbf{\Sigma}_{N(\varepsilon)}$.

Пусть $\delta(\varepsilon) > 0$ такое число, существующее в силу утверждения 17, что:

$$|\psi_j(t_1) - \psi_j(t_2)| < \varepsilon/3, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Тогда для произвольной функции $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$, согласно изложенному, найдётся хотя бы одна функция $\psi_{j_0}(t)$ из $\mathbf{\Sigma}_{N(\varepsilon)}$, такая, что:

$$|\varphi(t) - \psi_{j_0}(t)| < \varepsilon/3, \quad \text{если} \quad t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Поэтому

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < |\varphi(t_1) - \psi_{j_0}(t_1)| + |\psi_{j_0}(t_1) - \psi_{j_0}(t_2)| + |\psi_{j_0}(t_2) - \varphi(t_2)| < \varepsilon,$$
$$\text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}],$$

т.к. ***каждое*** из трёх слагаемых в "средней" части рассматриваемого неравенства не превосходит $\varepsilon/3$, что, в итоге, и означает ***равностепенную непрерывность*** всех функций $\{\varphi(t)\}$ множества $\mathbf{Q}$.

***Достаточность.*** Пусть для множества $\mathbf{Q}$ функций $\{\varphi(t)\}$ пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ выполнены условия ***равномерной ограниченности*** (2) и ***равностепенной непрерывности*** (3).

В силу (3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для ***каждой*** функции $\varphi(t) \in \mathbf{Q}$:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (3)$$

Возьмём натуральное число $N$ такое, чтобы $h = \frac{b-a}{N}$ было ***меньше*** $\delta(\varepsilon)$.

Разобьем отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на подотрезки

$$\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right], \quad \mathbf{t}^{(\mathbf{j})} = \mathbf{a} + jh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N, \ \textit{\textbf{длины}}\ h\ .$$

Тогда в силу (3)

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| \leqslant h, \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

и, в частности, для любых точек $t_1, t_2$, принадлежащих одному и тому же частичному отрезку $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Каждой функции $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ поставим в соответствие ***непрерывную*** на всём отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функцию $\psi_N(t)$ таким образом, чтобы были выполнены два условия:

**1**$^\circ$.

$$\psi_N\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) = \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N\ .$$

**2**$^\circ$. На ***каждом*** из отрезков $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ функция $\psi_N(t)$ ***линейная***.

В силу условий **1**$^\circ$ – **2**$^\circ$ функция $\psi_N(t)$ является "ломаной", состоящей из $N$ звеньев, "вписанной" в график ***непрерывной*** на всём отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функции $\varphi(t)$ и, поэтому, ***однозначно*** определяется $(N+1)$-мерным вектором $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1}$ значений функции $\varphi(t)$ в точках

$\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$, деления отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$:

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1} = \left(\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{0})}\right), \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{1})}\right), \ldots, \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{N-1})}\right), \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{N})}\right)\right), \mathbf{t}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{a}, \mathbf{t}^{(\mathbf{N})} = \mathbf{b} \tag{5}$$

Обозначим $\boldsymbol{\Phi}_{N+1}$ множество всех векторов $\{\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{N+1}}\}$.

Если на границах частичного отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ для функции $\varphi(t)$ выполнено неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

то, в силу ***линейности*** функции $\psi_N(t)$ на этом отрезке и условия $\mathbf{1}^\circ$, для всех точек отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ будет справедливо неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \psi_N(t) \leqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

откуда, для всех точек $t$ отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$, следует неравенство:

$$-\varepsilon < \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right) \leqslant \varphi(t) - \psi_N(t) \leqslant \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) < \varepsilon .$$

Если же на границах частичного отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ для функции $\varphi(t)$ выполнено неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \geqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

то, в силу ***линейности*** функции $\psi_N(t)$ на этом отрезке и условия $\mathbf{1}^\circ$, для всех точек отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ будет справедливо неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \geqslant \psi_N(t) \geqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

откуда, для всех точек $t$ отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$, следует неравенство:

$$-\varepsilon < \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \varphi(t) - \psi_N(t) \leqslant \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right) < \varepsilon ,$$

т.е. при ***любом*** поведении функции $\varphi(t)$ на каждом из частичных отрезков $\left[\, \mathbf{t}^{(\mathbf{j})},\ \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})} \,\right]$ сразу для ***всех*** точек отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ будет выполнено неравенство:

$$|\,\varphi(t) - \psi_N(t)\,| < \varepsilon\ ,$$

которое выражает тот факт, что

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\boldsymbol{\varphi},\, \boldsymbol{\psi}_N\,) < \varepsilon$$

в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

А это означает, что ***множество*** $\boldsymbol{\Sigma}_N \overset{def}{=} \{\,\boldsymbol{\psi}_N\,\}$ есть ***$\boldsymbol{\varepsilon}$-сеть*** для множества $\mathbf{Q}$.

Покажем, что множество $\boldsymbol{\Sigma}_N$ ***компактно*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Действительно, множество линейных функций $\boldsymbol{\Sigma}_N$ ***взаимнооднозначно определяется*** вектором $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1}$ (5) из линейного пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, которое с метрикой

$$\boldsymbol{\rho}\left(\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}_{N+1},\, \vec{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}_{N+1}\right) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant N} \left|\, \varphi^{(1)}_j - \varphi^{(2)}_j \,\right|$$

является ***метрическим пространством*** $\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}$ ( см. пример 3 параграфа 1 ).

Это ***полное*** ( см. упражнение 5 к параграфу 3 ) пространство $(N+1)$ - ***мерно***.

В силу ***равномерной ограниченности*** множества $\mathbf{Q}$ константой $\mathbf{K}$, получаем

$$|\,\psi_N(t)\,| \leqslant |\,\varphi(t)\,| + |\,\varphi(t) - \psi_N(t)\,| < \mathbf{K} + \varepsilon\ ,$$

что означает ***ограниченность*** множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$ константой $\mathbf{K} + \varepsilon$ в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Но, в силу ***линейности*** функций $\psi_N(t)$ на каждом из интервалов разбиения отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, очевидно, следующее равенство:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\left(\boldsymbol{\psi}_N^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_N^{(2)}\right) &= \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left|\psi_N^{(1)}(t) - \psi_N^{(2)}(t)\right| = \\ &= \max_{0\leqslant j\leqslant N} \left|\psi_N^{(1)}(\mathbf{t_j}) - \psi_N^{(2)}(\mathbf{t_j})\right| = \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}_1, \vec{\boldsymbol{\varphi}}_2)\ , \end{aligned}$$

где $\mathbf{t}^{(\mathbf{j})} = \mathbf{a} + \frac{j(b-a)}{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, означающее ***изометрию*** метрических пространств

$$\left(\boldsymbol{\Sigma}_N, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\right) \qquad \textbf{\textit{и}} \qquad \left(\boldsymbol{\Phi}_{N+1}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}\right)\ ,$$

в силу которой множество $\boldsymbol{\Phi}_{N+1}$ ***ограничено*** в ***конечномерном*** пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathbf{max}}$, и, следовательно, ***компактно***.

Но, тогда, в силу указанной выше ***изометрии*** метрических пространств $\left(\boldsymbol{\Sigma}_N, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\right)$ ***и*** $\left(\boldsymbol{\Phi}_{N+1}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}\right)$ из компактности второго следует компактность ***первого***.

Таким образом множество $\boldsymbol{\Sigma}_N$ является ***компактной $\boldsymbol{\varepsilon}$-сетью*** для множества $\mathbf{Q}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теперь проведём рассуждение, ***завершающее*** доказательство ***компактности*** множества $\mathbf{Q}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано.

Тогда найдется номер $N$ такой, что $\boldsymbol{\Sigma}_N$ образует ***$\boldsymbol{\varepsilon}/2$-сеть*** для множества $\mathbf{Q}$.

Кроме того, из ***компактности*** множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$ следует, что для него существует ***конечная $\boldsymbol{\varepsilon}/2$-сеть***.

Очевидно, эта самая ***конечная $\boldsymbol{\varepsilon}/2$-сеть*** для множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$, будет ***конечной $\boldsymbol{\varepsilon}$-сетью*** для самого множества $\mathbf{Q}$.

Отсюда следует ***компактность*** множества $\mathbf{Q}$. $\square$

**Пример**. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***подмножество*** $\mathbf{Q}$, состоящее из функций $\varphi\,(t)$, удовлетворяющих двум ***дополнительным*** условиям:

$$\begin{gathered} |\,\varphi\,(a)\,| \leqslant \mathbf{M} \\ |\,\varphi\,(t_1) - \varphi\,(t_2)\,| \leqslant \mathbf{L}\cdot|\,t_1 - t_2\,| \end{gathered} \tag{6}$$

Постоянные $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ в условиях (6) одни и те же для ***всех*** функций $\varphi\,(x)$ подмножества $\mathbf{Q}$.

В силу (6) множество функций, составляющих $\mathbf{Q}$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела, множество $\mathbf{Q}$ компактно.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 6.

1. Показать, что множество $\mathbf{Q}$, ***определённое*** неравенствами (6), ***замкнуто*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

2. Показать, что множество функций из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, выделяемое неравенством $\max\limits_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\,x\,(t)\,| \leqslant 1$, ***замкнуто***, но не является ***компактом.***

3. Может ли быть ***компактное*** множество ***неограниченным*** ?

4. Будет ли при ***каких-либо*** значениях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ***компактным*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***множество*** всех степеней $\{\,\mathbf{x}_n = t^n\}$,
$n = 1, 2, \ldots$ ?

# Глава 2

# Линейные нормированные пространства и линейные операторы

## 2.1 Основные определения

### Определение линейного пространства

**Определение 31.** *Множество* $\mathbf{X}$ *называется* ***линейным пространством (ЛП)****, если:*

**1** *.* ***Для любых двух*** *элементов* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *из* $\mathbf{X}$ *определена* ***операция*** *их* ***сложения*** *(обозначаемая, обычно, знаком* $+$ *), т.е.* ***однозначно*** *определен элемент* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$*, называемый* ***суммой*** *элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$*.*

**2** *.* ***Для любого*** *элемента* $\mathbf{x}$ *из* $\mathbf{X}$ *и* ***любого*** *числа* $\gamma$*, определена* ***операция умножения*** *элемента* $\mathbf{x}$ ***на число*** *(действительное или комплексное), (обозначаемая в записях знаком* $\cdot$ *или, в соот-*

*ветствии с устоявшейся алгебраической традицией, вообще пропускаемая), т.е. однозначно определён элемент* $\gamma\mathbf{x}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$, *называемый* ***произведением*** *элемента* $\mathbf{x}$ *и числа* $\gamma$.

**3**. ***Операции сложения*** *элементов и* ***умножения*** *элементов на числа в* $\mathbf{X}$ *подчиняются следующим* ***аксиомам****, которые для* ***удобства*** *запоминания и использования разделены на три группы:*

***I группа (свойства операции сложения элементов)***

**1°**. — *Коммутативность* ***сложения****:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}\,.$$

**2°**. — *Ассоциативность* ***сложения****:*

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})\,.$$

**3°**. — *Существование* ***нейтрального*** *(относительно* ***сложения****)* ***элемента****:*

*В* $\mathbf{X}$ ***существует*** *элемент* $\mathbb{O}$, *называемый* ***нейтральным*** *или, в более привычной терминологии, —* ***нулём*** *(пространства* $\mathbf{X}$*) такой, что*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \;:\quad \mathbf{x} + \mathbb{O} = \mathbf{x}\,.$$

**4°**. — *Существование* ***противоположного*** *элемента:*

*Для* ***любого*** $\mathbf{x}$ *уравнение*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbb{O}$$

***разрешимо*** *в* $\mathbf{X}$.

***Элемент*** $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, *являющийся решением рассматриваемого уравнения, называется* ***противоположным*** *к элементу* $\mathbf{x}$.

*Элемент* $\mathbf{y}$, ***противоположный*** *к заданному элементу* $\mathbf{x}$, *стандартным образом* ***обозначается*** *как* $-\mathbf{x}$.

***II группа ( свойства операции умножения элементов на числа )***

**5°** . — *Ассоциативность* ***умножения*** *(на числа):*

*Если* $\lambda$, $\mu$ ***числа, то:***

$$\lambda\,(\,\mu\,\mathbf{x}\,) \,=\, (\,\lambda\,\mu\,)\mathbf{x}\ .$$

**6°** . — *Нейтральность ( особая роль )* ***числа*** **1** *( относительно операции умножения элементов на числа ):*

$$\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{X}:\ 1 \cdot \mathbf{x} \,=\, \mathbf{x}\ .$$

***III группа*** *(* ***совместные свойства операций сложения элементов*** *и* ***умножения на числа*** *)*

**7°** . — *Дистрибутивность* ***сложения элементов*** *( относительно* ***умножения на числа*** *):*

$$\lambda \cdot (\mathbf{x} \,+\, \mathbf{y}) \,=\, \lambda \cdot \mathbf{x} \,+\, \lambda \cdot \mathbf{y}\ .$$

**8°** . — *Дистрибутивность* ***сложения чисел*** *( относительно* ***умножения на элементы*** *):*

$$(\,\lambda \,+\, \mu\,) \cdot \mathbf{x} \,=\, \lambda \cdot \mathbf{x} \,+\, \mu \cdot \mathbf{y}\ .$$

В зависимости от того, какие числа (***действительные*** или ***комплексные***) имеются ввиду в ***аксиомах*** $\mathbf{5^\circ} - \mathbf{8^\circ}$, ***линейное пространство ( коротко – ЛП )*** называется ***действительным*** или ***комплексным***.

***В этом курсе мы будем использовать в рассуждениях только*** $\boxed{\text{\textit{\textbf{действительные}}}}$ ***линейные пространства***.

### Примеры линейных пространств

**Пример** 1. ***Пространство*** $\mathbb{R}^n$.

Его ***элементы*** **n*-ки*** чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ с ***операциями покомпонентного*** сложения (для записей используется стандартный символ $+$) и умножения на число (для записей используется, а чаще пропускается, стандартный символ $\cdot$).

Сейчас мы приведём ещё несколько примеров ***линейных пространств***.

**Пример** 2. ***Линейное пространство*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из ***непрерывных на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***естественными операциями*** сложения непрерывных на отрезке функций — $(+)$ и умножения их на число — $(\cdot)$.

**Пример** 3. ***Линейным пространством*** является множество ***интегрируемых на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***операциями*** сложения интегрируемых на отрезке функций $(+)$ и умножения их на число - $(\cdot)$.

При этом интегрирование можно понимать как ***по Риману***, так и ***по Лебегу***.

Перечисленные в аксиомах свойства операций сложения элементов линейных пространств и умножения их на числа позволяют производить действия с любым ***конечным*** количеством ***элементов*** линейного пространства и ***конечным*** количеством ***чисел***.

**Определение 32.** *Элемент* $\mathbf{x}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ *на-*

*зывается* ***линейной комбинацией****, элементов* $\mathbf{x^{(1)}}, \ldots, \mathbf{x^{(n)}}$ *этого же* ***линейного пространства*** *с* ***коэффициентами*** *— числами* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *если:* $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x^{(1)}} + c_2 \mathbf{x^{(2)}} + \ldots + c_n \mathbf{x^{(n)}}$.

## Важнейшие следствия аксиом линейного пространства

Ввиду особой ***важности*** и для ***удобства*** читателей отметим несколько полезных свойств и формул, вытекающих из сформулированных выше аксиом.

**Свойство** 1. ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***нейтральный*** элемент $\mathbb{O}$ может быть только ***один***.

*Доказательство.* Пусть кроме нейтрального элемента $\mathbb{O}$ в линейном пространстве существует, по крайней мере, ещё один нейтральный элемент $\mathbb{O}' \neq \mathbb{O}$, т.е. такой, что

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \quad \mathbf{x} + \mathbb{O}' = \mathbf{x} .$$

Тогда, в частности, $\mathbb{O} + \mathbb{O}' = \mathbb{O}$, а, с другой стороны, используя свойство, определяющее нейтральный элемент $\mathbb{O}$, получим, что: $\mathbb{O}' + \mathbb{O} = \mathbb{O}'$.

Однако, в силу свойства коммутативности, левые части обеих написанных выше равенств одинаковы: $\mathbb{O} + \mathbb{O}' = \mathbb{O}' + \mathbb{O}$, а потому должны быть одинаковы и их правые части: $\mathbb{O}' = \mathbb{O}$, что, однако, противоречит нашим предположениям, и, следовательно, второго нейтрального элемента существовать не может. □

**Свойство 2.** ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***уравнение***: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$, для всякого ***фиксированного*** элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$, имеет только ***одно*** решение: $\mathbf{x} = \mathbb{O}$ — ***нейтральный*** элемент пространства $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Для элемента $\mathbf{a} = \mathbb{O} \in \mathbf{X}$ это, очевидно, верно.

Пусть для некоторого элемента $\mathbf{a} \neq \mathbb{O} \in \mathbf{X}$ существует решение рассматриваемого уравнения — элемент $\mathbf{x}^* \neq \mathbb{O}$, т.е. такой, что для него выполняется равенство: $\mathbf{a} + \mathbf{x}^* = \mathbf{a}$.

Прибавим к левой и правой частям последнего равенства по элементу $-\mathbf{a}$, противоположного к элементу $\mathbf{a}$.

Тогда в правой части полученного равенства получится $\mathbb{O}$, а полученную левую часть — $(\mathbf{a} + \mathbf{x}^*) + -\mathbf{a}$ можно, ввиду свойств сложения, преобразовать к виду: $(\mathbf{a} + -\mathbf{a}) + \mathbf{x}^*$, т.е. получить в левой части $\mathbf{x}^*$, и, таким образом, ввиду тождественности преобразований в левой и правой частях исходного равенства, получить равенство: $\mathbf{x}^* = \mathbb{O}$, которое противоречит нашим исходным предположениям. □

**Свойство 3.** Для ***всякого*** элемента $\mathbf{x}$ из ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ ***противоположный*** к нему ***элемент*** $-\mathbf{x}$ определяется ***единственным*** образом.

*Доказательство.* Пусть хотя бы для одного элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ существует, по крайней мере, ещё один противоположный элемент $(-\mathbf{x})' \neq -\mathbf{x}$.

Тогда, с одной стороны, $[\mathbf{x} + (-\mathbf{x})'] + -\mathbf{x} = \mathbb{O} + -\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, а с другой стороны, используя ассоциативное свойство сложения, коммутативное и ещё раз ассоциативное свойство сложения, получим в левой части: $[\mathbf{x} + -\mathbf{x}] + (-\mathbf{x})' = \mathbb{O} + (-\mathbf{x})' = (-\mathbf{x})'$, что противоречит нашему предположению. $\square$

**Свойство** 4. Для ***всякого числа*** $\lambda$ имеет место ***формула***: $\lambda \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$.

*Доказательство.* Обозначим $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{x}$ и преобразуем это равенство: $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{x} = \lambda\,[\mathbf{x} + \mathbb{O}] = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbb{O} = \mathbf{a} + \lambda \mathbb{O}$, откуда следует, что $\lambda \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$. $\square$

**Свойство** 5. Для ***всякого элемента*** $\mathbf{x}$ в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***формула***: $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$.

*Доказательство.* Обозначим $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ и преобразуем это равенство: $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{x} = [\,\lambda + 0\,] \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{x}$, откуда следует, что $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$. $\square$

**Свойство** 6. Для ***всякого элемента*** $\mathbf{x}$ в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***формула***: $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

*Доказательство.* Пусть $(-1)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Рассмотрим сумму $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, что, по определению $\mathbf{y}$, можно записать в виде $\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x}$, или, используя тождество: $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$ и дистрибутивное свойство сложения чисел относительно умножения на элементы, получим: $\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x} = (1)\,\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x} = [\,1 + (-1)\,]\,\mathbf{x} = 0\,\mathbf{x} = \mathbb{O}$, откуда следует, что элемент $\mathbf{y}$ есть $-\mathbf{x}$. $\square$

**Свойство** 7. ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***уравнение***: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ***имеет*** только ***одно*** решение: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

*Доказательство.* То, что элемент $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ есть решение рассматриваемого уравнения проверяется непосредственной подстановкой.

Действительно, подставляя это выражение в левую часть уравнения, получаем: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a} + [\mathbf{b} + (-\mathbf{a})] = [\mathbf{a} + (-\mathbf{a})] + \mathbf{b} = \mathbb{O} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$.

То, что решение может быть только одно, даваемое приведенной в формулировке следствия формулой, докажем от противного.

Пусть $\mathbf{z}$ решение рассматриваемого уравнения при заданной правой части, отличное от даваемого формулой, т.е. $\mathbf{z} \neq \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

Тогда $\mathbf{a} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. И, если мы к обеим частям равенства добавим один и тот же элемент $-\mathbf{a}$, то, преобразуя левую часть, мы получим: $[\mathbf{a} + \mathbf{z}] + -\mathbf{a} = [\mathbf{a} + (-\mathbf{a})] + \mathbf{z} = \mathbb{O} + \mathbf{z} = \mathbf{z}$, а в правой части получается элемент $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ и мы приходим к противоречию. □

**Свойство** 8. Если ***в линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***равенство*** $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, то это ***возможно*** только тогда, когда ***либо*** $\lambda = 0$, ***либо*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$.

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$. Покажем тогда, что $\lambda = 0$.

Доказательство проведём от противного, предположив, что $\lambda \neq 0$.

Тогда существует число $\mu = \frac{1}{\lambda} \neq 0$ и мы имеем:
$\mathbb{O} = \mu \cdot \mathbb{O} = \mu \cdot (\lambda \cdot \mathbf{x}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, откуда вытекает противоречие. □

**Свойство** 9. Если ***в линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***равенство*** $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mu \cdot \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$, ***то*** $\lambda = \mu$.

*Доказательство.* Действительно, если $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mu \cdot \mathbf{x}$, то

$\lambda \cdot \mathbf{x} - \mu \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, т.е. $(\lambda - \mu) \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, что, ввиду условия $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$, влечёт за собой равенство: $\lambda - \mu = 0$, т.е. $\lambda = \mu$. $\square$

### Изоморфизм линейных пространств

**Определение 33.** *Два линейных пространства* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{X}'$ *называются* ***изоморфными****, если между* ***элементами*** *указанных линейных пространств можно установить* ***взаимнооднозначное*** *соответствие:* $\mathbf{x}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{x}$ *таким образом, что* ***результаты*** *выполнения основных* ***операций*** *(сложение элементов —* $\oplus$ *и умножение их на числа —* $\odot$*)* ***в пространстве*** $\mathbf{X}'$ *будут соответствовать (при указанном выше отображении* $\boldsymbol{\tau}$*) аналогичным* ***результатам*** *выполнения соответствующих* ***операций*** *(сложение элементов —* $+$ *и умножение их на числа —* $\cdot$*)* ***в пространстве*** $\mathbf{X}$*, т.е.*

**1**. *Если* ***произвольные*** *элементы* $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ *пространства* $\mathbf{X}'$ ***соответствуют*** *при отображении* $\boldsymbol{\tau}$ *элементам* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *пространства* $\mathbf{X}$*, то* ***сумма*** $\mathbf{z}'$ *элементов* $\mathbf{x}'$ *и* $\mathbf{y}'$ *:* $\mathbf{z}' = \mathbf{x}' \oplus \mathbf{y}'$ *будет* ***соответствовать при отображении*** $\boldsymbol{\tau}$ ***сумме*** $\mathbf{z}$ *элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$*:* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$*, т.е.* $\mathbf{z}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{z}$.

**2**. *Если* ***произвольный*** *элемент* $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$ ***соответствует*** *при отображении* $\boldsymbol{\tau}$ *элементу* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$*, то* ***результат умножения*** *элемента* $\mathbf{x}'$ *на* ***любое*** *число* $\lambda$*:* $\mathbf{u}' = \lambda \odot \mathbf{x}'$ *будет* ***соответствовать при отображении*** $\boldsymbol{\tau}$ ***результату умножения*** *элемента* $\mathbf{x}$ ***на то же самое*** *число* $\lambda$*:* $\mathbf{u} = \lambda \odot \mathbf{x}$*, т.е.* $\mathbf{u}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{u}$.

Ограничимся всего ***одним*** простым примером изоморфных между собой линейных пространств.

**Пример**. ***Изоморфными*** друг другу являются ***линейное пространство*** $\mathbb{P}_n$ всех ***многочленов*** с вещественными коэффициентами, ***степени*** которых ***не превосходят*** заданного натурального числа $\mathbf{n}$, рассматриваемое ***с*** естественными в этом пространстве ***операциями сложения многочленов*** — $+$ и ***умножения многочленов на число*** - $\cdot$ и, уже много раз упоминавшееся, ***линейное пространство*** $(n+1)$-мерных ***арифметических векторов*** — $\mathbb{R}^{n+1}$ ***с*** естественными ***операциями сложения элементов*** и ***умножения элементов на числа*** в этом пространстве.

В рассматриваемом примере ***изоморфное*** соответствие $\boldsymbol{\tau}$ между элементами $\mathbf{p} \equiv p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ из пространства $\mathbb{P}_n$ и $(n+1)$-кой чисел $\mathbf{x} \equiv (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, образующих элемент пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ***устанавливается*** формулой:

$$\boldsymbol{\tau}(p(x)) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

Читателю мы рекомендуем проверить (опираясь на определение) изоморфность этого соответствия.

### Размерность линейного пространства

**Определение 34.** *Элементы* $\mathbf{x^{(1)}}, \ldots, \mathbf{x^{(n)}}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ *называются* ***линейно независимыми****, если из условия:*

$$c_1\,\mathbf{x^{(1)}} + c_2\,\mathbf{x^{(2)}} + \ldots + c_n\,\mathbf{x^{(n)}} = \mathbb{O} ,$$

*следует:*

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0\ .$$

**Определение 35.** ***Линейное пространство*** $\mathbf{X}$ *называется* $\mathbf{n}$***-мерным,*** *если в этом пространстве* ***существует*** $\boxed{\mathbf{n}}$ $\boxed{\textit{линейно}}$ $\boxed{\textit{независимых}}$ *элементов, но* ***любые*** $\boxed{\mathbf{n+1}}$ *элементов* ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ $\boxed{\textit{линейно}}$ $\boxed{\textit{зависимы}}$.

**Пример** 13. ***Линейное пространство*** $\mathbb{R}^n$ из примеров 2, 3 § 1 главы 1 — $\boxed{\mathbf{n}\text{-мерно}}$.

Этот факт устанавливается в линейной алгебре.

**Определение 36.** *Если* $\boxed{\forall\,\mathbf{n} = 1,\,2,\,3,\,\ldots}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *существует* $\boxed{\mathbf{n}\ \ \textit{линейно независимых}}$ *элементов, то* ***линейное пространство*** *называется* $\boxed{\textit{бесконечномерным}}$.

**Пример** 14. ***Линейные пространства*** $\ell_2\,,\ \ \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\,,\ \ \mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ примеров 4 , 5 и 6 § 1 главы 1 — $\boxed{\textit{бесконечномерные}}$.

Во всех трёх случаях необходимо для всякого натурального числа $\mathbf{n}$ ***предъявить*** систему линейно независимых элементов, состоящую из $\mathbf{n}$ элементов соответствующего пространства.

Ввиду ***произвольности*** числа $\mathbf{n}$ это и будет означать требуемое.

**1** . Для пространства $\ell_2$ требуемую систему линейно независимых векторов при любом конечном $\mathbf{n}$ составляют векторы $\{\mathbf{e}_k\}$ , $k = 1,\,2,\,\ldots\,,n$ , у которых на всех местах, кроме $k$-ого, стоят нули, а на месте с номером $k$ стоит единица.

**2** . Для пространств $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ требуемую систему линейно независимых при любом конечном $\mathbf{n}$ векторов $\{\mathbf{e}_k\}$ образует, например, система степеней: $\{ t^k \}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Действительно, многочлен $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Отсюда следует линейная независимость системы $\{ t^k \}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$ в пространствах $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

## Подпространство в линейном пространстве

**Определение 37.** ***Совокупность*** $\mathbf{L}$ *элементов* ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$, *называется* ***подпространством*** *в* $\mathbf{X}$, *если* ***результаты операций сложения*** *любых* ***двух элементов*** *из* $\mathbf{L}$ *и* ***умножения*** *любого* ***элемента*** *из* $\mathbf{L}$ *на любое* ***число принадлежат*** $\mathbf{L}$.

Из этого определения и аксиом ***линейного пространства*** следует, в частности, что:

**1**. ***Элемент*** $\mathbb{O}$, — ***нуль*** пространства $\mathbf{X}$, — принадлежит ***любому*** подпространству $\mathbf{L}$ пространства $\mathbf{X}$.

**2**. Для любого ***конечного*** множества элементов $\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{1})}, \ldots, \mathbf{x}^{(\mathbf{n})} \}$ из ***подпространства*** $\mathbf{L}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ любая их ***линейная комбинация*** $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(\mathbf{1})} + c_2 \mathbf{x}^{(\mathbf{2})} + \ldots + c_n \mathbf{x}^{(\mathbf{n})}$, также является элементом рассматриваемого ***подпространства***, т.е. всякое ***подпространство*** само является ***линейным пространством*** (с теми же операциями сложения $(+)$ и умножения на числа $(\cdot)$, которые определены в ***объемлющем*** подпространство $\mathbf{L}$ линейном пространстве $\mathbf{X}$).

## Определение линейного нормированного пространства (ЛНП)

Если в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$, каким-либо образом, ввести ***метрику*** $\boldsymbol{\rho}$, то оно превращается в линейное ***метрическое*** пространство $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ и, таким образом, приобретает все свойства общих ***метрических*** пространств.

***В линейном случае***, обычно, используется ***метрика***, вводимая особым образом.

**Определение 38.** ***Неотрицательный*** *функционал, определенный на* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *называется* **нормой** *и обозначается* $\|\mathbf{x}\|$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X})$, *если он обладает следующими* ***свойствами****:*

**1**$^\circ$. — *Невырожденность:*

$$\|\mathbf{x}\| \geqslant 0, \ \textbf{\textit{и, если}}: \ \|\mathbf{x}\| = 0, \ \textbf{\textit{то}}: \ \mathbf{x} = \mathbb{O}.$$

**2**$^\circ$. — *Положительная однородность:*

$$\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

**3**$^\circ$. — *Полуаддитивность или неравенство треугольника:*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

***Если*** в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ введена норма $\|\mathbf{x}\|$, то в нём может быть введена ***метрика*** $\boldsymbol{\rho}$ по формуле:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \qquad (1)$$

Мы оставляем читателю проверку того, что формула (1) действительно определяет ***метрику***.

**Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на числа в линейном нормированном пространстве**

**Утверждение 18.** *В любом* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***обе*** *операции —* ***сложения*** *векторов и* ***умножения*** *вектора* ***на число,*** *—* ***непрерывны.***

*Доказательство.* **1** . Пусть последовательность элементов $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$, а последовательность элементов $\{\mathbf{y}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{y}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, при $n \to \infty$.

Тогда, в силу неравенства треугольника:

$$\| (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \| \leqslant \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \| \to 0 ,$$

при $n \to \infty$, что означает непрерывность сложения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$.

**2** . Пусть последовательность элементов $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, а последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ сходится к числу $\gamma$ при $n \to \infty$.

Тогда, добавляя и вычитая слагаемое $\{\gamma \cdot \mathbf{x}_n\}$, на основании неравенства треугольника, получаем:

$$\|\gamma_n \mathbf{x}_n - \gamma \mathbf{x}\| \leqslant \| (\gamma_n - \gamma) \cdot \mathbf{x}_n + \gamma (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) \| \leqslant |\gamma_n - \gamma| \|\mathbf{x}_n\| + |\gamma| \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0 ,$$

при $n \to \infty$, что означает непрерывность умножения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$. $\square$

**Утверждение 19.** *Имеет место неравенство:*

$$\big|\, \|\,\mathbf{x}\,\| \;-\; \|\,\mathbf{y}\,\|\, \big| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x} \;-\; \mathbf{y}\,\|$$

*Доказательство.* Это неравенство получается из второго неравенства треугольника для общих метрических пространств, если в нём положить $\mathbf{z} \,=\, \mathbb{O}$. □

**Утверждение 20.** *Функционал нормы* $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}}$ ***непрерывен*** *в* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Пусть последовательность элементов $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, при $n \;\to\; \infty$.

Тогда, в силу предыдущего утверждения:

$$\big|\, \|\,\mathbf{x}_n\,\| \;-\; \|\,\mathbf{x}\,\|\, \big| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x}_n \;-\; \mathbf{x}\,\| \;\to\; 0 \;,$$

при $n \;\to\; \infty$, что и означает непрерывность функционала нормы в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$. □

***Метрические пространства*** $\mathbf{X}$, описанные в примерах $1 - 7$, параграфа 1 главы 1, являются ***линейными нормированными пространствами***.

Такое заключение ***непосредственно*** следует из формул, определяющих в них ***метрику***.

## Изоморфизм конечномерных пространств данного числа измерений •

**Теорема 6.** *Любые два* ***конечномерных*** *линейных* ***нормированных*** *пространства* ***данного*** *числа измерений* $\mathbf{n}$ *—* $\mathbf{X}_1$ *и* $\mathbf{X}_2$ *, —* ***изоморфны*** *между собой, т.к. каждое из них* ***изоморфно*** *пространству* $\mathbb{E}^n$ ***соответствующего*** *числа измерений.*

*Устанавливаемый в теореме* ***изоморфизм*** $\boldsymbol{\tau}$ *является* ***непрерывным*** *в обе стороны отображением пространств* $\mathbf{X}_1$ *,* $\mathbf{X}_2$ *и* $\mathbb{E}^n$ *.*

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{X}$ $\mathbf{n}$-***мерное линейное нормированное пространство***, в котором, согласно определению, существует система $\mathbf{n}$ ***линейно независимых*** векторов, через которую ***линейно выражается*** любой вектор этого пространства.

( В ***линейной алгебре*** всякая система элементов линейного пространства, обладающая ***обеими*** указанными свойствами, называется ***базисом*** этого пространства. )

Пусть ***базис*** образуют элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ .

Тогда всякий элемент $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$ имеет ***единственное*** представление:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые вещественные числа, коэффициенты разложения элемента $\mathbf{x}$, определяемые по данному ***элементу*** и данному ***базису единственным*** образом.

Поставим в соответствие элементу $\mathbf{x}$ линейного нормированного пространства $\mathbf{X}$ элемент $\check{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\mathbf{n}$-***мерного*** пространства $\mathbb{E}^n$

и будем обозначать это соответствие $\boldsymbol{\tau}: \ \mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}}$.

Очевидно, что указанное соответствие $\boldsymbol{\tau}$ является ***взаимнооднозначным*** и сохраняет ***соответствие*** между ***результатами*** выполнения операций ***сложения*** и ***умножения*** на числа в линейных пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbb{E}^n$:

$$\mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}} \qquad\qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}}+\check{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{y} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{y}} \qquad\qquad \alpha\cdot\mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \alpha\cdot\check{\mathbf{x}}$$

Написанные выше формулы означают то, что отображение $\boldsymbol{\tau}$ является ***изоморфизмом*** между линейными пространствами $\mathbf{X}$ и $\mathbb{E}^n$.

Покажем, что соответствие $\boldsymbol{\tau}$ будет также ***непрерывным*** в обе стороны: из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{E}^n$ и из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbf{X}$.

Действительно для $\forall\,\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ :

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{e}_j\right\|_{\mathbf{X}} \leqslant \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\|\mathbf{e}_j\|_{\mathbf{X}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{e}_j\|^2_{\mathbf{X}}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|\alpha_j\|^2\right)^{1/2} = \boldsymbol{\gamma}\|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n}\,,$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n}\|\,\mathbf{e}_j\,\|^2_{\mathbf{X}}\right)^{1/2}$.

Поэтому

$$\|\,\mathbf{y}\,-\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \,\leqslant\, \gamma\cdot\|\,\check{\mathbf{y}}\,-\,\check{\mathbf{x}}\,\|_{\mathbb{E}^n} \tag{2}$$

Покажем теперь, что существует константа $m>0$ такая, что

$$\|\,\mathbf{y}\,-\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \,\geqslant\, m\cdot\|\,\check{\mathbf{y}}\,-\,\check{\mathbf{x}}\,\|_{\mathbb{E}^n} \tag{3}$$

Рассмотрим функцию:

$$f\,(\check{\mathbf{x}}) \overset{def}{=} f\,(\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\,,\alpha_n\,) \overset{def}{=} \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{e}_j\right\|_{\mathbf{X}} \,=\, \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \,\geqslant\, 0\,.$$

Эта функция, в силу определения, обладает тем свойством, что:

$$f(\check{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbb{O}_{\mathbf{X}} \overset{\boldsymbol{\tau}}{\implies} \check{\mathbf{x}} = \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n} ,$$

т.е. может обращаться в нуль ***только*** на элементе $\mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$.

Оценка

$$\left| f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \right| = \left| \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} - \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{X}} \right| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{X}} \leqslant \boldsymbol{\gamma} \cdot \|\check{\mathbf{x}}-\check{\mathbf{y}}\|_{\mathbb{E}^n}$$

показывает, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — ***непрерывная*** функция, т.е. при $\check{\mathbf{x}} \to \check{\mathbf{y}}$ в пространстве $\mathbb{E}^n$ $f(\check{\mathbf{x}}) \to f(\check{\mathbf{y}})$ в пространстве $\mathbf{X}$.

В пространстве $\mathbb{E}^n$ рассмотрим множество $\mathbf{S} : \left\{ \alpha_i \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1 \right\}$ — это единичная сфера пространства $\mathbb{E}^n$.

Т.к. сфера $\mathbf{S}$ ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ множество, а потому ***компактное*** в $\mathbb{E}^n$ множество, то в силу ***замкнутости*** $\mathbf{S}$, это множество — ***компакт***.

По теореме К. Вейерштрасса, ***непрерывная*** функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***на компакте*** $\mathbf{S}$ достигает своего ***минимума*** $m$ хотя бы в одной точке $\check{\mathbf{x}}_* \in \mathbf{S} : f(\check{\mathbf{x}}_*) = m$.

При этом ***обязательно*** $m > 0$.

Таким образом, для $\forall \check{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$ :

$$f(\check{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \geqslant m > 0 .$$

Далее имеем для $\check{\mathbf{x}} \neq \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$ :

$$f(\check{\mathbf{x}}) \overset{def}{=} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = \|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\left( \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \right)^{1/2}} \mathbf{e}_j \right\|_{\mathbf{X}} \geqslant m \cdot \|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n} ,$$

которое, очевидно, будет также справедливо и при $\check{\mathbf{x}} = \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$ .

Т.к. полученное неравенство справедливо для ***всех*** элементов пространства $\mathbb{E}^n$ , то оно означает ***непрерывность*** построенного в начале доказательства отображения $\boldsymbol{\tau}$ из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbf{X}$ .

Непрерывность отображения $\boldsymbol{\tau}$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{E}^n$ была доказана выше.

$\square$

В некоторых случаях, в теории и приложениях полезно в линейном пространстве $\mathbf{X}$ ”параллельно“ рассматривать две нормы. В такой ситуации пространство $\mathbf{X}$ с первой нормой можно рассматривать, как линейное нормированное пространство $\mathbf{X}_1$ , а то же линейное пространство со второй нормой, как $\mathbf{X}_2$ .

**Определение 39.** *Две **нормы*** $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *в **линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *называются **эквивалентными**, если существуют такие **постоянные*** $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ *, что для любого* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *справедливо двойное неравенство:*

$$\varkappa_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \varkappa_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \ .$$

Заметим, что отсутствующая в приведенном определении ”симметрия“ относительно использования норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ , легко ”восстанавливается“ , т.к.

$$\frac{1}{\varkappa_2} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \frac{1}{\varkappa_1} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \ .$$

Если пространство $\mathbf{X}$ ***конечномерное***, то полученные при доказательстве теоремы об изоморфизме неравенства (2) и (3) позволяют утверждать, что ***нормы*** в пространствах $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ ***эквивалентны***.

Частное рассуждение подобного рода, важное с точки зрения конкретных ***значений*** констант $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, содержит

**Пример**. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы $\|\,\mathbf{x}\,\|_1 \overset{def}{=} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\,x_j\,|$ и $\|\,\mathbf{x}\,\|_2 \overset{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} |\,x_j\,|$ ***эквивалентны***, т.к.

$$\|\,\mathbf{x}\,\|_1 \leqslant \|\,\mathbf{x}\,\|_2 \leqslant n\cdot\|\,\mathbf{x}\,\|_1\,,$$

где $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = n$.

**Следствие 2.** *В любом **конечномерном** линейном нормированном пространстве* $\mathbf{X}$ *с базисом* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *сходимость **по норме эквивалентна покоординатной** сходимости, т.е. последовательность векторов* $\{\,\mathbf{x}_k\,\}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *будет сходиться к вектору* $\mathbf{x}_0$ *при* $k \to \infty$, ***тогда** и **только тогда**, когда **все** последовательности, составленные из "одноимённых" координат векторов* $\{\,\mathbf{x}_k\,\}$ *будут сходиться к "одноимённой" координате вектора* $\mathbf{x}_0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство следует из неравенств (2) и (3), обоснованных выше.

**Следствие 3.** *Любое **конечномерное** линейное нормированное пространство* $\mathbf{X}$ ***полное**.*

Действительно, ***любое*** конечномерное линейное нормированное пространство $\mathbf{X}$ размерности $n$ ***полно***, т.к. оно ***непрерывно изоморфно*** полному пространству $\mathbb{E}^n$. ( ***Полнота*** $\mathbb{E}^n$ была доказана в параграфе 3 главы 1 ).

**Следствие 4.** *Всякое* ***конечномерное*** *подпространство* $\mathbf{L}_m$ *в* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***замкнуто****, т. е. обязательно является* ***замкнутым подпространством*** $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ базис $\mathbf{L}_m$, а последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ сходится к вектору $\mathbf{x}_0$ при $k \to \infty$ в пространстве $\mathbf{X}$.

Покажем, что вектор $\mathbf{x}_0$ принадлежит подпространству $\mathbf{L}_m$.

В самом деле, каждый вектор последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ имеет разложение по базису $\mathbf{L}_m$:

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1^{(k)}\mathbf{e}_1 + \alpha_2^{(k)}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m^{(k)}\mathbf{e}_m ,$$

где $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$ — коэффициенты разложения элемента $\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$.

Каждая из последовательностей $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$ координат указанных разложений, согласно следствию $(10)$, является сходящейся числовой последовательностью.

Обозначим пределы этих последовательностей $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_m^{(0)}$ и рассмотрим вектор:

$$\alpha_1^{(0)}\mathbf{e}_1 + \alpha_2^{(0)}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m^{(0)}\mathbf{e}_m .$$

Очевидно, что этот вектор принадлежит $\mathbf{L}_m$ и, в силу ***единственности*** предела в метрическом пространстве $\mathbf{X}$, совпадает с вектором $\mathbf{x}_0$. $\square$

$\boxed{\textit{Бесконечномерное}}$ подпространство в ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ может быть и ***не замкнуто***.

**Пример** 15. Пусть пространство $\mathbf{X} = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а $\mathbf{L}$ его ***бесконечномерное*** линейное подпространство, порожденное ***всеми*** степенями независимого переменного $t$ : $\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n, \ldots\}$, — т.е. $\mathbf{L}$ — множество ***всех*** многочленов с вещественными коэффициентами в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Оно ***не замкнуто*** в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, т.к. предел последовательности многочленов в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***может*** не быть многочленом.

Поэтому $[\mathbf{L}] \neq \mathbf{L}$.

**Теорема Ф. Рисса** $^\bullet$

Для любого ***замкнутого подпространства*** в ***линейном нормированном пространстве*** имеет место важная

**Теорема 7** (***Ф. Рисс).*** *Пусть* $\mathbf{L}$ ***замкнутое подпространство*** *в* ***линейном нормированном*** *пространстве* $\mathbf{X}$, *не совпадающее с* $\mathbf{X}$ : $\mathbf{L} \subset \mathbf{X}$, *но* $\mathbf{L} \neq \mathbf{X}$.

*Тогда* $\forall \varepsilon > 0$ *в пространстве* $\mathbf{X}$ $\exists \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}$, *с нормой* $1$ : $\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{X}} = 1$ *такой, что* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{L}$ :

$$\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} > 1 - \varepsilon,$$

*т.е. элемент* $\bar{\mathbf{u}}$ *находится на* ***положительном*** *расстоянии от* ***всех*** $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$.

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{u}_0$ любой элемент $\mathbf{X}$ не принадлежащий подпространству $\mathbf{L}$.

Рассмотрим на $\mathbf{L}$ числовую функцию

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \geqslant 0$$

Т.к. множество значений функции $f(\mathbf{x})$ ограничено снизу, то существует их точная нижняя $\inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} f(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = d$ и хотя бы одна минимизирующая последовательность $\{\mathbf{x}_n\} \in \mathbf{L}$ такая, что:

$$d \leqslant \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_n\|_{\mathbf{X}} < d + \varepsilon\,.$$

Заметим, что $d > 0$, т.к. иначе элемент $\mathbf{u}_0$ был бы ***предельным*** элементом всякой минимизирующей для $f(\mathbf{x})$ последовательности, и, в силу того, что $\mathbf{L}$ ***замкнутое*** подпространство в $\mathbf{X}$, обязан бы был принадлежать $\mathbf{L}$, что, однако, противоречит исходному предположению.

Далее, т.к. $d = \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}}$, то $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\mathbf{x}_0 \in \mathbf{L}$ такой, что

$$0 < d \leqslant \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} < d + d\cdot\varepsilon\,.$$

Положим

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}}}\,.$$

Очевидно, что $\bar{\mathbf{u}} \notin \mathbf{L}$, т.к. иначе бы, вопреки предположению, и элемент $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}$.

Кроме того, очевидно, что $\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{X}} = 1$.

Возьмём любой элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и пусть

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_0 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Тогда $\mathbf{v} \in \mathbf{L}$ и

$$\|\,\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} = \left\| \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0}{\|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\,\|_{\mathbf{X}}} - \mathbf{x} \right\|_{\mathbf{X}} =$$

$$= \frac{1}{\|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\,\|_{\mathbf{X}}} \cdot \|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0 - \|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\,\| \cdot \mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} =$$

$$= \frac{1}{\|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\,\|_{\mathbf{X}}} \cdot \|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\,\|_{\mathbf{X}} > \frac{1}{d + d \cdot \varepsilon} \cdot \|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\,\|_{\mathbf{X}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{d + d \cdot \varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon \,.$$

$\square$

### Конечномерность и компактность •

**Теорема 8.** *Для того, чтобы* ***подпространство*** $\mathbf{L}$ *линейного нормированного пространства* $\mathbf{X}$ *было* $\boxed{\textit{конечномерным}}$, ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы* ***каждое ограниченное*** *множество элементов из* $\mathbf{L}$ *было* ***компактно****.*

*Доказательство.* ***Необходимость****.*

Пусть $\mathbf{L}$ $n$-мерно.

Тогда по доказанному выше пространство $\mathbf{L}$ ***непрерывно изоморфно*** евклидову пространству $\mathbb{E}^n$ и всякое ***ограниченное*** множество элементов $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$ взаимнооднозначно и взаимнонепрерывно преобразуется в ***ограниченное*** же множество $\mathbf{N} \in \mathbb{E}^n$.

Поскольку всякое ***ограниченное*** множество $\mathbf{N} \in \mathbb{E}^n$ ***компактно***, то в каждом таком множестве $\mathbf{N}$ найдётся хотя бы одна бесконечная ***фундаментальная*** последовательность.

Пусть эта последовательность $\{\,\check{\mathbf{x}}_k\,\}$.

Тогда каждому элементу этой последовательности будет отвечать единственный элемент множества $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$, т.е. в $\mathbf{M}$ мы получаем последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$.

В силу ***непрерывности*** изоморфного соответствия последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ будет ***фундаментальной*** в $\mathbf{M}$, а потому содержащее последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ множество $\mathbf{M}$ будет ***компактным***.

***Достаточность***.

Пусть всякое ***ограниченное*** множество $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$ ***компактно***.

Покажем, что в этом случае пространство $\mathbf{L}$ — ***конечномерно***.

Возьмём в $\mathbf{L}$ произвольный элемент $\mathbf{x}_1$ с нормой $1$ : $\|\mathbf{x}_1\| = 1$.

Рассмотрим линейное подпространство $\mathbf{L}_1$, ***порождаемое*** единственным элементом $\mathbf{x}_1$.

Если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, то теорема доказана.

Если же $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_1$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_2$, что, во-первых, $\|\mathbf{x}_2\| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_1$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \geqslant 1/2$.

Обозначим через $\mathbf{L}_2$ линейное ***подпространство*** в $\mathbf{L}$ — линейную оболочку векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

Если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$, то теорема доказана.

Если же $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_2$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_3$, что, во-первых, $\|\mathbf{x}_3\| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_2$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\| \geqslant 1/2$ и $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| \geqslant 1/2$.

Продолжая процесс дальше, мы на каждом шаге этого процесса имеем только ***две возможности***: либо ***при некотором*** $n$ подпространство $\mathbf{L}_n$, построенное как линейная оболочка — множество ***всех линейных комбинаций*** элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, получаемых на каждом шаге элементов пространства $\mathbf{L}$, совпадает с $\mathbf{L}$ : $\mathbf{L} = \mathbf{L}_n$, процесс построения новых векторов ***обрывается*** на данном шаге и теорема, таким образом, ***доказана***.

Либо процесс ***продолжается бесконечно***, т.е. для ***всякого*** $n$ имеет место ***вторая*** возможность: $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_n$, и тогда по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_{n+1}$, что, во-первых, $\| \mathbf{x}_{n+1} \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до ***всех*** элементов подпространства $\mathbf{L}_n$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1 \| \geqslant 1/2$, и $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_2 \| \geqslant 1/2$, и так далее: $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \| \geqslant 1/2$.

В этом случае мы ***эффективно*** строим ***бесконечную*** последовательность векторов из пространства $\mathbf{L}$ — $\{ \mathbf{x}_k \}$ такую, что во-первых, $\| \mathbf{x}_k \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_k$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m \| \geqslant 1/2$ при $m < k$.

Но, указанная таким образом ***ограниченная*** последовательность $\{ \mathbf{x}_k \}$ ***не может*** содержать бесконечной ***фундаментальной*** подпоследовательности, что противоречит ***компактности*** единичной сферы пространства $\mathbf{L}$. $\square$

## Банаховы пространства

**Определение 40.** ***Полное*** *линейное нормированное пространство называется* ***банаховым*** *пространством* ***( В-пространством )****.*

Если линейное нормированное пространство ***неполно***, то, в силу теоремы о пополнении ( параграф $4$ главы $1$ ), его можно ***пополнить***.

Вообще говоря, ***пополнение*** линейного нормированного пространства не обязано быть ***линейным*** пространством.

Однако, можно показать, что среди пополнений ***обязательно*** есть ***банахово*** пространство с ***нормой***, согласованной с первоначальной, в том смысле, что ее значения на части этого пространства, соответствующей ***пополняемому*** пространству $\mathbf{X}$, ***совпадают*** со значениями, даваемыми ***первоначальной*** нормой.

**Определение 41.** *Пусть* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ *некоторые элементы* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$ *.*

*Выражение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$$

*формально представляющее из себя* ***бесконечную*** *сумму всех элементов множества* $\{\mathbf{x}_k\}$ , $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *называется* ***рядом,*** *составленным из элементов* $\{\mathbf{x}_k\}$ *.*

"Параллельно" с ***рядом*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ рассмотрим для каждого $n$ ***конечную сумму***

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k \ ,$$

которая ***называется*** $n$-ой ***частичной суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ .

**Определение 42.** ***Ряд*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *называется* ***сходящимся*** *к* ***элементу*** $\mathbf{x}$ *, если* ***последовательность*** *частичных сумм этого ряда* $\{\mathbf{s}_n\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k\right\}$ ***сходится*** *к* $\mathbf{x}$ *, т.е.*

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty \ .$$

***Элемент*** $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$ *, к которому сходится последовательность* $\{\mathbf{s}_n\}$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *, называется* ***суммой ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ .

В силу ***полноты*** пространства $\mathbf{X}$ для сходимости ***последовательности*** частичных сумм $\{\mathbf{s}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы эта последовательность была ***фундаментальной***.

Сделанное выше замечание позволяет сформулировать ***достаточное*** условие сходимости рядов из элементов в ***банаховом*** пространстве.

**Утверждение 21** (***Обобщённый признак К. Вейерштрасса).*** *Пусть все* ***элементы*** $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ***ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***мажорируются*** *числами* $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *т.е. для всех* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_k \ .$$

*Пусть* ***числовой ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ ,$$

*составленный из* ***неотрицательных*** *чисел* $\alpha_k$ *,* ***сходится****.*

*Тогда* ***ряд*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***сходится*** *в банаховом пространстве* $\mathbf{X}$ *к некоторому его* ***элементу*** $\mathbf{x}$ *.*

*Доказательство.* Неравенство

$$\|\,\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\,\|_{\mathbf{X}} = \|\,\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_{n+2} + \cdots + \mathbf{x}_{n+p}\,\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}$$

показывает, что в силу ***критерия Коши*** для ***числового*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ , правая часть этого неравенства $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \to 0$ при $n \to \infty , \forall\, p > 0$ и, следовательно, ***последовательность*** $\mathbf{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k$ ***частичных сумм*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{X}$ .

Поэтому в пространстве $\mathbf{X}$ ***существует*** такой элемент $\mathbf{x}$ , что $\mathbf{x} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{s}_n$ .

Этот ***элемент*** $\mathbf{x}$ и будет ***суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ . □

***Упражнения и задачи к параграфу*** 1.

1. Доказать ***бесконечномерность*** пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

2. Множество $\mathbf{M}$ в ***линейном*** пространстве $\mathbf{X}$ называется ***выпуклым***, если оно вместе с любыми своими точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ содержит все точки $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ , такие, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$ , или, выражаясь ***геометрическим*** языком, целиком содержит ***отрезок***, концами которого являются точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ .

Показать, что любой ***шар*** в линейном ***нормированном*** пространстве является ***выпуклым*** множеством.

3*. Доказать, что ***аксиома треугольника*** в определении линейного ***нормированного*** пространства и условие ***выпуклости единичного шара*** этого пространства ***эквивалентные*** утверждения.

4. Пусть $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n$ ***базис*** $n$-мерного ***линейного*** пространства $\mathbf{X}$.

Тогда ***всякий*** элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ имеет ***единственное*** разложение:

$$\mathbf{x} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \;.$$

Показать, что каждая из формул

$$\|\mathbf{x}\|_I \;=\; \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\, \alpha_j \,|$$

и

$$\|\mathbf{x}\|_{II} \;=\; \sum_{j=1}^{n} |\, \alpha_j \,|$$

определяет ***норму*** в пространстве $\mathbf{X}$.

5. Доказать, что ***нормы*** $\|\mathbf{x}\|_I$ и $\|\mathbf{x}\|_{II}$ в ***любом конечномерном*** линейном пространстве $\mathbf{X}$, введённые в предыдущем упражнении, ***эквивалентны*** (см. определение 39).

## 2.2 Линейные операторы

### Определение и примеры

**Определение 43.** *Пусть* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *два* ***линейных нормированных пространства****.*

***Отображение*** $\mathbf{A}$ *из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$ *называется* ***линейным оператором****, если для* ***любых*** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ *и* ***любых*** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ :

$$\mathbf{A}\big(\alpha\,\mathbf{x}_1 \,+\, \beta\,\mathbf{x}_2\big) \;=\; \alpha\,\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \,+\, \beta\,\mathbf{A}\mathbf{x}_2 \;.$$

**Пример** 1. Оператор $\mathbb{O}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$ этот оператор ставит в соответствие нулевой элемент $\mathbb{O}_{\mathbf{X}}$ этого пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{O}\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbb{O}_{\mathbf{X}}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

**Пример** 2. Оператор $\mathbb{E}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие тот же самый элемент $\mathbf{x}$ этого же пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{E}\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

**Пример** 3. Оператор $\mathbf{\Lambda}$ определяется следующим условием: при некотором заранее фиксированном числе $\lambda$ каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\lambda \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства: $\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} \overset{def}{=} \lambda \cdot \mathbf{x}$.

**Пример** 4. Пусть $\alpha(t)$ непрерывная на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функция одного вещественного переменного $t$, т.е. некоторый фиксированный ***элемент*** пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Для всякого элемента $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определим оператор $\mathbf{A}$ ( умножения на функцию ) $\alpha(t)$ следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x} \overset{def}{=} x(t)$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\alpha(t) \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{def}{=} \alpha(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

## Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма оператора

**Теорема 9.** ***Линейный оператор*** $\mathbf{A}$, ***непрерывный*** *в точке* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ ***непрерывен*** *в* ***любой*** *другой точке линейного пространства* $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Действительно, пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в точке $\mathbf{x}_0$, то есть $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ такое, что:

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta \tag{1}$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ***любые*** точки $\mathbf{X}$, то, обозначая $\mathbf{x} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{x}_0$ и используя ***линейность*** $\mathbf{A}$, из (1) получим:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{Ax}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta\,.$$

То есть:

$$\|\mathbf{Au} - \mathbf{Av}\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta\,.$$

Но, справедливость этих неравенств, как раз, и означает ***непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$ в точке $\mathbf{u}$ (или $\mathbf{v}$). □

В дальнейшем мы будем опускать нижние индексы у знака ***нормы***, указывающие на ***пространство***, в котором она определена, если это ясно из контекста.

**Определение 44.** *Оператор* $\mathbf{A}$ *называется* ***ограниченным****, если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\exists$ ***постоянная*** $\mathbf{M} > 0$ *такая, что:*

$$\|\mathbf{Ax}\| \leqslant \mathbf{M} \cdot \|\mathbf{x}\|\,.$$

***Множество*** *всех таких возможных постоянных* $\mathbf{M}$ ***ограничено снизу*** *нулем и, поэтому, имеет* ***нижнюю грань****.*

*Эта* ***нижняя грань обозначается*** $\|\mathbf{A}\|$ *и называется* ***нормой оператора*** $\mathbf{A}$.

**Утверждение 22.**

$$\|\mathbf{A}\| \;=\; \sup_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \;.$$

*Доказательство.* Обозначим правую часть этого предполагаемого равенства через $\mathbf{L}$.

Из ***ограниченности*** $\mathbf{A}$ следует $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \;\leqslant\; \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ и поэтому $\mathbf{L} \;\leqslant\; \|\mathbf{A}\|$.

С другой стороны

$$\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\| \;=\; 1, \quad \text{и потому:} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \;=\; \left\|\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|}\right)\right\| \cdot \|\,\mathbf{x}\,\| \;\leqslant\; \mathbf{L}\,\|\mathbf{x}\| \;.$$

Следовательно $\|\mathbf{A}\| \;\leqslant\; \mathbf{L}$.

Окончательно: $\|\mathbf{A}\| \;=\; \mathbf{L} \;=\; \sup\limits_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$. □

Оказывается, что свойства ***ограниченности*** и ***непрерывности*** линейного оператора не являются ***независимыми***.

**Теорема 10.** ***Ограниченный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** *и, наоборот,* ***непрерывный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***ограничен***.

*Доказательство.* Действительно, в силу ***ограниченности*** $\mathbf{A}$,

$$\forall \varepsilon \;>\; 0, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \;\leqslant\; \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \;\leqslant\; \varepsilon \;,$$

если

$$\|\mathbf{x}\| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{A}\|} \;.$$

Но это означает ***непрерывность*** $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$, а, поэтому, и в ***любой*** точке пространства $\mathbf{X}$.

Доказательство ***обратного*** утверждения проведем ***от противного***.

Пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в $\mathbb{O}$, но ***не ограничен***.

Тогда найдется последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$, $\|\mathbf{x}_n\| = 1$, такая, что:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x_n}\| \geqslant n, \quad n = 1, \ldots$$

Последовательность

$$\mathbf{y}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{n}$$

сходится к $\mathbb{O}$ при $n \to \infty$, но $\|\mathbf{A}\mathbf{y}_n\| \geqslant 1, \quad n = 1, \ldots$.

Это ***противоречит*** непрерывности $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$. □

## Линейный оператор в $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$

**Пример** 5. В ***линейной алгебре*** показывается, что ***любое линейное*** отображение $\mathbf{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ задается ***матрицей*** $\mathcal{A}$, имеющей $n$ столбцов и $m$ строк:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

***Действие*** этого оператора на ***элемент*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ***определяется*** как ***умножение матрицы*** $\mathcal{A}$ на ***столбец*** $(x_1, \ldots, x_n)$ по известному из линейной алгебры классическому правилу.

Введем в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ ***норму***:

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i| \, .$$

**Утверждение 23.** ***Оператор*** $\mathbf{A}$, *порожденный матрицей* $\{a_{ij}\}$, *— линейный* ***ограниченный*** *оператор из* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$ *в* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$.

*Доказательство.* Действительно, образ элемента $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть элемент $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, где

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \qquad \|\mathbf{y}\| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \leqslant \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \cdot \|\mathbf{x}\| \,.$$

Отсюда:

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \tag{2}$$

Покажем, что ***правая*** часть неравенства равна его ***левой*** части.

Пусть ***максимум*** в правой части (2) ***достигается*** на индексе $i_0 \in \{1, \dots, m\}$.

Рассмотрим ***элемент*** $\mathbb{R}^n$, определенный следующим образом: $x_j = sgn\,(a_{i_0 j})$, где $sgn\,(\,\cdot\,)$ означает ***знак*** соответствующего элемента матрицы.

Ясно, что $\|\mathbf{x}\| = 1$. Кроме того:

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i_0 j} \,|, \quad \text{а} \quad |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \quad \text{при } i \neq i_0 \,.$$

Следовательно:

$$\max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left( \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right)$$

□

**Линейный интегральный оператор,**

**действующий из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$**

**Пример** 6. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***интегральный оператор***, действующий по формуле:

$$\mathbf{Ax} \overset{def}{=} \mathbf{A}x\,(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)x(s)\,ds, \quad \mathbf{a} \leqslant\, s,\, t \,\leqslant\, \mathbf{b}\;.$$

Функция $\mathcal{K}\,(t,\, s)$ называется ***ядром*** интегрального оператора.

Мы предполагаем функцию $\mathcal{K}\,(t,\, s)$ ***непрерывной*** на множестве $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \,\times\, [\mathbf{a},\mathbf{b}]\,$.

Выше определённый интегральный оператор, обычно, называют интегральным оператором ***Фредгольма.***

***Непосредственно*** из свойств интеграла следует ***линейность*** введенного оператора.

Кроме того:

$$\left|\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)x(s)\,ds\right| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x}\,\| \,\cdot\, \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds\;.$$

***Оценка***, полученная в правой части неравенства, не зависит от $t$ и поэтому:

$$\|\,\mathbf{Ax}\,\| \;\leqslant\; \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds \,\cdot\, \|\,\mathbf{x}\,\|\;,$$

и

$$\|\,\mathbf{A}\,\| \;\leqslant\; \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds \tag{3}$$

**Замечание.** Можно показать, что оценка (3) является ***точной***: ***норма*** оператора $\mathbf{A}$ равна правой части ***оценки*** (3).

**Пример неограниченного оператора**

Пусть $\mathbf{X}$ ***линейное подпространство*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, состоящее из всех ***непрерывно дифференцируемых*** функций.

Линейное подпространство $\mathbf{X}$ — линейное ***нормированное пространство*** с ***нормой***, наследуемой из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Рассмотрим ***оператор дифференцирования***

$$\mathbf{Ax} \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\,[\,x\,(t)\,]\ .$$

***Оператор*** $\mathbf{A}$, очевидно, ***линеен***. Покажем, что ***оператор*** $\mathbf{A}$ ***неограничен***, как оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В самом деле, ***множество*** элементов

$$\mathbf{x}_n \overset{def}{=} x_n\,(t) \equiv sin\,nt, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\dots\ ,$$

пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ при

$$n > \frac{\boldsymbol{\pi}}{2\max\{\,|\mathbf{a}|,\,|\mathbf{b}|\,\}}\ ,$$

принадлежит ***единичной сфере*** пространства $\mathbf{X}$ с центром в нуле: $\mathbb{O} \overset{def}{=} x\,(t) \equiv 0$.

Если же к указанным функциям применить оператор $\mathbf{A}$, то соответствующие ***образы*** указанных элементов $\mathbf{Ax}_n$ ***не*** будут ***ограничены все*** сразу, при достаточно большом $n$, никакой фиксированной постоянной:

$$\|\mathbf{Ax}_n\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left|\frac{d}{dt}\,[x_n\,(t)]\right| = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |n\cdot cos\,nt| = n\cdot \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |cos\,nt| = n \to \infty\,.$$

Заметим, что рассматривая оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, как оператор действующий из пространства $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, являющегося собственной частью $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, мы получим ***ограниченный*** оператор, т.к.

$$\left\| \frac{d}{dt}\mathbf{x} \right\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left| \frac{d}{dt}\left[\, x\,(t)\,\right] \right| \leqslant \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \ ,$$

в силу чего

$$\left\| \frac{d}{dt} \right\|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]\to\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant 1 \ .$$

## Вполне непрерывные операторы

**Определение 45.** ***Линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$*, действующий из* ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ *в* ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$*, называется* ***вполне непрерывным*** *(компактным) оператором, если образ* ***любой ограниченной*** *в* $\mathbf{X}$ *последовательности* $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ *содержит* ***сходящуюся*** *в* $\mathbf{Y}$ ***подпоследовательность****.*

**Пример**. Любой ***линейный*** оператор, действующий из пространства $\mathbb{E}^m$ в пространство $\mathbb{E}^n$, — ***вполне непрерывен***.

Действительно, линейный оператор $\mathbf{A}$ является ***ограниченным*** и потому всякое ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^m$ множество $\mathbf{M}$ переводит в ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ множество $\mathbf{N} = \mathbf{A}\,(\,\mathbf{M}\,)$.

А в силу ***конечной*** размерности $n$ пространства $\mathbb{E}^n$, множество $\mathbf{N}$, ***компактно*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ для ***всякого*** ограниченного множества $\mathbf{M}$, что и означает ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$, т.к. в $\mathbb{E}^n$ ***всякая*** последовательность Коши сходится.

**Пример**. Рассмотрим ***интегральный оператор Фредгольма*** из примера 6.

Если ядро $\mathcal{K}(t,\, s)$ этого оператора ***непрерывно*** на множестве $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то оператор Фредгольма является ***вполне непрерывным*** оператором из пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Действительно, пусть

$$y\,(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)x(s)\,ds\ .$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ шар радиуса $r$ — множество $\mathbf{M}_r$ элементов этого пространства таких, что $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;\leqslant\; r$.

Обозначим $\mathbf{K} \;=\; \max\limits_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]\,\times\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |\,\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)\,|$.

Тогда

$$\max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, t\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,y\,(t)\,| \;\leqslant\; \mathbf{K}\cdot|\,\mathbf{b} \;-\; \mathbf{a}\,|\cdot \max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, s\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,x\,(s)\,|\ ,$$

а потому:

$$\|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;=\; \max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, t\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,y\,(t)\,| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{A}\,\|\cdot r\ ,$$

что означает ***равномерную ограниченность*** всех функций из образа $\mathbf{A}\,(\,\mathbf{M}_r\,)$.

Т.к. функция $\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)$ ***непрерывна*** на ***компакте*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то, в силу утверждения 16 главы 1, эта функция ***равномерно непрерывна*** на указанном компакте, а потому $\forall\,\varepsilon \;>\; 0 \quad \exists\,\delta\,(\varepsilon) \;>\; 0$ такое, что, в частности:

$$|\,\mathcal{K}\ (\,t_1,\ s\,)\;-\mathcal{K}\ (\,t_2,\ s\,)\,| \;<\; \frac{\varepsilon}{r\cdot|\mathbf{b}-\mathbf{a}|}, \quad \text{если} \quad |\,t_1 \;-\; t_2\,| \;<\; \delta\,(\varepsilon),$$

$$t_1,\, t_2 \;\in\; [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \forall\, s \;\in\; [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\ .$$

Поэтому все функции $y(t)$ из образа $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$ ***равностепенно непрерывны***, т.е. $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:

$$|\,y\,(t_1) - y\,(t_2)\,| = \left|\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_1, s)x(s)\,ds - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_2, s)x(s)\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)\big| \cdot \big|x(s)\big|\,ds < \varepsilon\,.$$

Поэтому, если $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant r$, то функции, ***определяемые*** интегралом (1), согласно теореме Арцела (см. § 5, главы 1) образуют подмножество, которое ***компактно*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В силу полноты пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, из этого следует ***полная непрерывность*** рассматриваемого интегрального оператора.

**Утверждение 24.** *Всякий* ***вполне непрерывный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***непрерывен****.*

*Доказательство.* Действительно, множество $\{\,\mathbf{Ax} : \|\,\mathbf{x}\,\| = 1\}$ ***компактно*** в $\mathbf{Y}$ и, поэтому, ***ограничено***, то есть $\exists\,\mathbf{C} > 0$ :

$$\sup_{\|\,\mathbf{x}\,\| = 1} \|\,\mathbf{Ax}\,\| < \mathbf{C}\,.$$

Следовательно оператор $\mathbf{A}$ ***ограничен*** и, поэтому, ***непрерывен***. □

***Упражнения и задачи к параграфу*** 2.

1. Показать, что ***линейный*** оператор, действующий из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, переводит ***нуль*** пространства $\mathbf{X}$ – $\mathbb{O}_{\mathbf{X}}$, в ***нуль*** пространства $\mathbf{Y}$ – $\mathbb{O}_{\mathbf{Y}}$.

2. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести ***норму*** по формуле:

$$\|\,\mathbf{x}\,\| = \sum_{i=1}^{n} |\,x_i\,|\,.$$

Показать, что ***норма линейного оператора*** $\mathbf{A}$ примера (1) в этом случае дается равенством:

$$\| \mathbf{A} \| = \max_j \left( \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right)$$

<u>Указание</u>. Использовать в рассуждениях ***элемент*** пространства $\mathbb{R}^n$ вида: $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где $1$ стоит на месте с номером $j_0$, на котором ***достигается*** максимум правой части оценки.

3. Показать, что ***линейный оператор*** $\mathbf{A}$, действующий из ***евклидова*** пространства $\mathbb{E}^n$ в аналогичное $\mathbb{E}^m$, ***норма*** которого определяется формулой (1), имеет следующую ***оценку*** нормы:

$$\| \mathbf{A} \| \leqslant \left( \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 \right)^{1/2} .$$

4*. Доказать ***точность*** оценки (3), в случае $\mathcal{K}(t, s) \geqslant 0$.

5. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{L}_2$ по формуле $\mathbf{Ax} = t \cdot x(t)$.

6. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{1}, \mathbf{2}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = t^2 \cdot x(1)$.

7. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, если ***ядро*** этого интегрального оператора имеет вид: $\mathcal{K}(t, s) = t \cdot s$.

8. Доказать ***линейность*** и найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$ по формуле: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = (x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$.

9. Доказать ***линейность*** и найти ***норму*** функционала $f$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$

по формуле:

$f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

10. Доказать ***линейность*** и оценить ***норму*** функционала $f$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ по формуле: $f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\frac{1}{2}} x(t)\,dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\mathbf{1}} x(t)\,dt$.

11. Доказать ***линейность*** и ***оценить норму функционала*** $f$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ по формуле: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot x(0) + \mathbf{b} \cdot x(1)$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ некоторые ***фиксированные*** вещественные числа.

## 2.3 Пространство линейных операторов. Линейные операторные уравнения и обратные операторы

### Линейное пространство линейных операторов

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ два ***линейных*** оператора, определенных в ***линейном*** пространстве $\mathbf{X}$ и действующих в ***линейное*** пространство $\mathbf{Y}$.

Тогда, естественным образом можно определить ***линейные*** операторы $\mathbf{C} \overset{def}{=} \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\mathbf{D} \overset{def}{=} \lambda \cdot \mathbf{A}$ (или $\lambda \cdot \mathbf{B}$), где $\lambda$ произвольное ***действительное*** число.

**Определение 46.** *Именно, по определению:*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{x}\,.$$

$$(\lambda \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{x} \overset{def}{=} \lambda\,(\mathbf{A}\mathbf{x})\,.$$

**Определение 47.** *Можно также определить* ***нулевой*** *оператор* $\mathbf{O}$ :

$$\mathbf{O}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \mathbb{O}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

*и* ***противоположный*** *оператор* $(-\mathbf{A})$ *к (произвольному) линейному оператору* $\mathbf{A}$ :

$$(-\mathbf{A})\,\mathbf{x} \stackrel{def}{=} -(\mathbf{A}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}\,.$$

**Утверждение 25.** *Совокупность всех* ***линейных операторов****, действующих из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$*, — образует* ***линейное пространство*** *—* $\mathbf{L}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*.*

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения всех аксиом, определяющих ***линейное пространство***.

Мы рекомендуем, чтобы читатель самостоятельно проверил ***все*** восемь аксиом из определения линейного пространства и таким образом ***убедился*** в справедливости сформулированной теоремы.

### Норма в линейном пространстве линейных операторов

**Утверждение 26.** *Если* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *— линейные* ***нормированные*** *пространства, то множество* ***линейных ограниченных*** *операторов, действующих из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$*, само является* ***линейным нормированным пространством****,* ***норма*** *каждого* ***элемента*** *которого есть введенная нами в параграфе* 2 ***норма*** *линейного оператора.*

*Полученное* ***линейное нормированное пространство*** *будем* ***обозначать*** $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*, чтобы отличать его от* ***линейного*** *простран-*

*ства* $\mathbf{L}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ *введенного выше.*

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения для $\mathbf{L}_\mathbf{O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})$ всех 3-х аксиом, определяющих линейное ***нормированное*** пространство.

Читателю мы рекомендуем самостоятельно провести ***все*** необходимые рассуждения.

### Сопряжённое пространство к линейному пространству

Особо отметим частный случай пространства $\mathbf{L}_\mathbf{O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ в котором в качестве $\mathbf{Y}$ фигурирует пространство $\mathbb{E}^1$.

**Определение 48.** *Пространство* $\mathbf{L}_\mathbf{O}\,\left(\mathbf{X},\,\mathbb{E}^1\right)$ *называется пространством,* ***сопряжённым*** *к* $\mathbf{X}\,,$ *и, обычно,* ***обозначается*** $\mathbf{X}^*$.

***Элементы*** *пространства* $\mathbf{X}^*$ *— всевозможные* ***непрерывные*** *(ограниченные)* ***линейные функционалы*** *над* $\mathbf{X}$.

Для пространства $\mathbf{X}^*$, сопряжённого к заданному ***линейному нормированному пространству*** $\mathbf{X}\,,$ справедливо одно очень важное свойство — такое пространство всегда ***полно***.

Отмеченное свойство вытекает из значительно более общего факта:

**Теорема 11.** *Если* $\mathbf{Y}$ *—* ***банахово*** *пространство, то и* $\mathbf{L}_\mathbf{O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})$ *—* ***банахово*** *пространство.*

*Доказательство.* Действительно, пусть $\{\,\mathbf{A}_n\,\}$ ***фундаментальная*** последовательность операторов из пространства $\mathbf{L}_\mathbf{O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ то есть

$$\lim_{m,\,n\,\to\,\infty} \|\,\mathbf{A}_m\,-\,\mathbf{A}_n\,\|\;=\;0 \qquad (1)$$

Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ : $\lim\limits_{m,n\to\infty} \| \mathbf{A}_m\mathbf{x} - \mathbf{A}_n\mathbf{x} \| = 0$, в силу чего последовательность $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{Y}$.

В силу ***полноты*** $\mathbf{Y}$, последовательность $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ***сходится*** в $\mathbf{Y}$ к некоторому его ***элементу***, вообще говоря, зависящему от элемента $\mathbf{x}$.

Таким образом, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ выше определено (предельное) ***отображение***, которое мы обозначим через $\mathbf{A}$ и которое, в силу своего определения, действует из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$.

По определению отображения $\mathbf{A}$, используя свойства предельного перехода в линейном нормированном пространстве, получим:

$$\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty}(\lambda\mathbf{A}_n\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}_n\mathbf{y}) =$$
$$= \lambda \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n\mathbf{x} + \mu \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n\mathbf{y} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}\mathbf{x},$$

что и означает ***линейность*** получившегося отображения $\mathbf{A}$.

В силу ***фундаментальности*** последовательности $\{\mathbf{A}_n\}$, ***нормы*** всех операторов $\mathbf{A}_n$ ограничены в совокупности:
$\exists\, \mathbf{C} > 0 \quad \|\mathbf{A}_n\| \leqslant \mathbf{C}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$.

Далее, в силу ***непрерывности нормы***:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}_n\mathbf{x}\| \leqslant \mathbf{C}\,\|\mathbf{x}\|,$$

что означает ***ограниченность*** отображения $\mathbf{A}$.

Поэтому, сконструированное нами ***отображение*** $\mathbf{A}$ будет принадлежать $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Остается доказать, что последовательность операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к построенному выше оператору $\mathbf{A}$ :

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{A}_n - \mathbf{A} \| = 0 \tag{2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу (1) при достаточно больших $m$ и $n$, $(m, n \geqslant N(\varepsilon))$ :

$$\| \mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n \| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x}\|$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$.

В результате будем иметь неравенство:

$$\|\mathbf{A_n} - \mathbf{A}\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x}\| \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon) ,$$

которое доказывает соотношение (2), а с ним и наше утверждение. □

**Следствие 5.** *Так как* $\mathbb{E}^1$ — ***банахово*** *пространство, то, в силу доказанного утверждения,* $\mathbf{X}^* = \mathbf{L_O}\left(\mathbf{X}, \mathbb{E}^1\right)$ — ***всегда банахово****, независимо от того* ***полно*** $\mathbf{X}$ *или нет.*

### Поточечная сходимость в пространстве линейных операторов

В ***линейном нормированном пространстве*** операторов $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, кроме стандартной сходимости операторов ***по норме***, часто приходится рассматривать и другой вид сходимости операторов, который называется ***поточечной*** сходимостью операторов в $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

**Определение 49.** *Последовательность операторов* $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *из пространства* $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *сходится* ***поточечно***
*к оператору* $\mathbf{A} \in \mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ :

$$\|\mathbf{A}_n\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathbf{Y}} \to 0 , \quad \textit{при } n \to \infty .$$

*Для* ***поточечной сходимости*** *операторов соответствующим образом определяются и* ***фундаментальные*** *(относительно* ***поточечной*** *сходимости) последовательности операторов* $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots,$ *из* ***пространства*** $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

**Замечание.** Очевидно, что в пространстве операторов $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ из сходимости последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots,$ ***по норме*** к оператору $\mathbf{A}$, следует ***поточечная*** сходимостью этой же последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ к тому же самому оператору $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Обратное заключение ***неверно***, что показывает нижеследующий

**Пример**. В линейном нормированном пространстве $\ell_\mathbf{2}$ рассмотрим ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{P}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots,$ определяемых для всякого элемента $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \dots, x_n, \dots)$ пространства $\ell_\mathbf{2}$ следующим образом:

$$\mathbf{P}_n\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \overset{def}{=} \mathbf{x}_n .$$

Т.к. $\mathbf{x} \in \ell_\mathbf{2}$, то

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_n\mathbf{x}\|_{\ell_\mathbf{2}} \overset{def}{=} \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_{\ell_\mathbf{2}} = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2} \to 0$$

при $n \to \infty$, что, как раз, и означает, что ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{P}_n\}$ ***поточечно*** сходится к ***единичному*** оператору $\mathbf{E}$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$, переводящему всякий элемент пространства $\mathbf{x}$ из $\ell_\mathbf{2}$ снова в этот же элемент $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{P}_n\mathbf{x} \to \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{при } n \to \infty .$$

Однако, сходимость последовательности операторов $\{\mathbf{P}_n\}$ ***по норме*** к тому же ***единичному*** оператору $\mathbf{E}$ ***не имеет места***, т.е.

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{P}_n\|_{\mathbf{L_O}(\ell_2,\ell_2)} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty ,$$

т.к. при ***любом*** $n$, например, для вектора $\mathbf{e}_{n+1} \stackrel{def}{=} (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ из $\ell_2$, где $1$ стоит на месте с номером $n+1$, имеем:

$$\|\mathbf{E}\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{P}_n\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = \|\mathbf{e}_{n+1} - \mathbb{O}\|_{\ell_2} = \|\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = 1 .$$

Поэтому, для ***всех*** $n$

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{P}_n\|_{\mathbf{L_O}(\ell_2,\ell_2)} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}=1} \|\mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{P}_n\mathbf{x}\|_{\ell_2} \geqslant \|\mathbf{E}\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{P}_n\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = 1 \not\to 0 .$$

### Произведение операторов и обратный оператор

**Определение 50.** *Если* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ *— три* ***линейных*** *пространства, оператор* $\mathbf{A}$ *действует из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$, *а* $\mathbf{B}$ *— оператор, действующий из* $\mathbf{Y}$ *в* $\mathbf{Z}$, *то можно определить* ***произведение*** *(композицию) операторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) .$$

*Таким образом, оператор* $\mathbf{C}$ *действует из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Z}$ *и будет* ***линейным*** *оператором, если* ***линейны*** *оба оператора* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$.

**Определение 51.** *Оператор* $\mathbf{C}$, ***действующий из*** $\mathbf{Y}$ ***в*** $\mathbf{X}$ *называется* ***обратным*** *к оператору* $\mathbf{A}$, *действующему из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$, *если:*

$$\mathbf{CAx} = \mathbf{x}\,, \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

$$\tag{3}$$

$$\mathbf{ACy} = \mathbf{y}\,, \qquad \forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$$

**Утверждение 27.** ***Обратный*** *оператор, если он* ***существует***, *—* ***единственен***.

*Доказательство.* Действительно, если $\mathbf{D}$ некоторый другой ***обратный*** к $\mathbf{A}$, то , в силу второго из равенств (3): $\mathbf{D}\,(\,\mathbf{AC}\,)\,\mathbf{y} = \mathbf{Dy}$, а, в силу первого равенства (3) $(\,\mathbf{DA}\,)\,\mathbf{Cy} = \mathbf{Cy}$, следовательно $\mathbf{Cy} = \mathbf{Dy}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, что означает совпадение операторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$. □

***Обратный*** к $\mathbf{A}$ оператор, который выше, в формуле (3) был обозначен $\mathbf{C}$, обычно ***обозначается*** символом $\mathbf{A}^{-1}$.

**Теорема 12.** ***Существование обратного*** *оператора к оператору* $\mathbf{A}$ ***эквивалентно однозначной разрешимости*** *операторного уравнения:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y} \tag{4}$$

*Доказательство.* Действительно, пусть $\mathbf{A}$ имеет ***обратный*** — $\mathbf{A}^{-1}$.

Тогда $\forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ элемент $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, ***очевидно***, является решением уравнения (4). Покажем, что это решение — ***единственное***.

В самом деле, в противном случае, пусть $\mathbf{z}$ — какое-либо решение (4), отличное от $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Тогда:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{z}\right) = \mathbb{O}\,.$$

Подействовав на это равенство оператором $\mathbf{A}^{-1}$, получим:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbb{O} \quad \text{или} \quad \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\ .$$

Пусть теперь уравнение (4) ***однозначно разрешимо*** при любом $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Обозначим это решение $\mathbf{C}(\mathbf{y})$.

Покажем, что $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ — ***линейное*** отображение.

Действительно, $\forall\, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in \mathbf{Y}$, рассмотрим линейную комбинацию $\alpha\,\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{y_2}$.

Тогда $\mathbf{C}(\alpha\,\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{y_2})$ — ***единственное*** решение уравнения (4) с правой частью $\alpha\,\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{y_2}$.

Но, из ***линейности*** $\mathbf{A}$ следует, что $\alpha\,\mathbf{C}\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{C}\mathbf{y_2}$ — ***решение*** этого же уравнения.

Поэтому, в силу ***единственности*** решения уравнения (4) :

$$\mathbf{C}(\alpha\,\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{y_2}) = \alpha\,\mathbf{C}\mathbf{y_1} + \beta\,\mathbf{C}\mathbf{y_2}\ ,$$

и, следовательно, $\mathbf{C}$ — ***линейный*** оператор.

***Непосредственно*** проверяется, что оператор $\mathbf{C}$ удовлетворяет условиям (3), то есть $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. $\square$

### Достаточное условие ограниченности обратного оператора

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ ***линейные нормированные пространства***, то можно ставить вопрос о ***непрерывности*** (ограниченности) ***обратного*** оператора $\mathbf{A}^{-1}$.

**Теорема 13.** *Пусть* $\mathbf{A}$ ***линейное*** *отображение* ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ $\boxed{\textit{на}}$ ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$ *такое, что для некоторого* $\mathbf{m} > 0$ *выполнено условие:*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \geqslant \mathbf{m} \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{5}$$

*Тогда* ***существует*** *обратный оператор* $\mathbf{A}^{-1}$ *и, кроме того, справедлива следующая* ***оценка нормы*** *этого* ***обратного*** *оператора:*

$$\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \leqslant 1/\mathbf{m} .$$

Заметим, что сам оператор $\mathbf{A}$ не предполагается ***непрерывным***.

*Доказательство.* Действительно, так как $\mathbf{A}$ — отображение $\boxed{\textit{на}}$ $\mathbf{Y}$, то $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, уравнение (4) ***имеет*** решение, которое, в силу (5), ***единственно***.

Следовательно оператор $\mathbf{A}^{-1}$ существует.

Полагая в (5) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, получим:

$$\left\| \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \right\| \leqslant 1/\mathbf{m} \cdot \| \mathbf{y} \| ,$$

что и означает утверждаемую ***оценку нормы*** обратного оператора. □

**Пример**. Пусть $\mathbf{Y} = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а пространство $\mathbf{X}$ — ***линейное подпространство*** в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из ***дифференцируемых*** функций, обращающихся в $0$ в точке $t = \mathbf{a}$.

Под $\mathbf{A}$ будем понимать ***оператор***, ставящий в соответствии ***функции***, определенной на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, — ***ее производную***.

То есть:

$$\mathbf{A}\, x(t) = x'(t), \quad x(\mathbf{a}) = 0 .$$

***Отображение*** $\mathbf{A}$ есть отображение $\boxed{\textbf{\textit{на}}}$ $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то есть уравнение

$$x'(t) \;=\; y(t), \quad x(\mathbf{a}) \;=\; 0$$

***имеет*** решение при любой $y(t) \in \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Оно, ***очевидно***, дается формулой:

$$x(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{t} y(\tau)\,d\tau \;.$$

Кроме того, выполнено и условие (5).

Действительно, $\forall\,\mathbf{f} \in \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \left\| \int\limits_{\mathbf{a}}^{t} f(\tau)\,d\tau \right\| \leqslant \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;.$$

Подставим в него, вместо $f$, — $x'(t)$, и получим неравенство (5) с

$$\mathbf{m} \;=\; \frac{1}{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \;.$$

Сам оператор $\mathbf{A}\,x(t) \;=\; x'(t)$ не является ***непрерывным*** на $\mathbf{X}$, что было показано ранее в п. 2.2.

## Теорема Банаха об обратном операторе

В следующем утверждении линейное нормированное пространство $\mathbf{X}$, на котором задан ***линейный*** оператор $\mathbf{A}$, предполагается ***банаховым***, и оператор $\mathbf{A}$ действует в это же самое пространство $\mathbf{X}$.

**Теорема 14** (***С. Банах)***. *Пусть* $\mathbf{A}$ ***ограниченный линейный*** *оператор, действующий из* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{X}$ *и* $\|\,\mathbf{A}\,\| < 1$.

*Тогда оператор* $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***имеет ограниченный обратный*** *и при этом:*

$$\left\| (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}\,.$$

*Здесь под* $\mathbf{E}$ *понимается* ***тождественный*** *оператор:* $\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

*Доказательство.* Проверим выполнение в случае ***теоремы Банаха*** условий ***теоремы*** 8.

Рассмотрим операторное уравнение:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Его можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x} \tag{6}$$

В силу условия: $\|\,\mathbf{A}\,\| < 1$, оператор в ***правой части*** уравнения (6) ***сжимающий*** $\forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, и уравнение (6) ***имеет единственное*** решение.

Поэтому ***отображение*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ является отображением $\boxed{\textit{на}}$ $\mathbf{X}$.

Кроме того, в силу неравенства из утверждения 2 § 1 :

$$\|\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}\,\| = \|\,\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}\,\| \geqslant \Big|\,\|\,\mathbf{x}\,\| - \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \|\,\mathbf{x}\,\|\,\Big| = \Big(1 - \|\,\mathbf{A}\,\|\Big) \cdot \|\,\mathbf{x}\,\|\,,$$

то есть для оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ справедливы условия ***теоремы*** 8, где постоянная $\mathbf{m} = 1 - \|\,\mathbf{A}\,\|$.

Теорема Банаха доказана. □

Следствием теоремы Банаха является следующее

**Утверждение 28.** *Пусть оператор* $\mathbf{A}$, *действующий из* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$ $\boxed{в}$ ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$, *имеет* ***ограниченный обратный*** $\mathbf{A}^{-1}$, *и* $\mathbf{B}$ ***линейный непрерывный*** *оператор из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$ *и его* ***норма*** *удовлетворяет неравенству:*

$$\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \cdot \| \mathbf{B} \| < 1 \tag{7}$$

*Тогда оператор* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *также имеет* ***ограниченный обратный****,* ***определяемый*** *формулой:*

$$\left( \mathbf{A} + \mathbf{B} \right)^{-1} = \left( \mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{A}^{-1} , \tag{8}$$

*где* $\mathbf{E}$ — ***единичный*** *оператор в* $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* Действительно, оператор $\left( \mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right)$ удовлетворяет условиям ***теоремы Банаха*** и, поэтому, имеет ***обратный*** (из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$).

Формула (8) проверяется ***непосредственно***, с учетом того, что:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A}\left( \mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right) .$$

$\square$

Если $\mathbf{Y}$ — ***банахово*** пространство, то ***обратный*** к $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ допускает, при условии (7), также и такое ***представление***:

$$\left( \mathbf{A} + \mathbf{B} \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} ,$$

где $\mathbf{E}$ — ***единичный*** оператор в $\mathbf{Y}$.

## Собственные значения и спектр линейного оператора

**Определение 52.** *Элемент* $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$ ***линейного*** *пространства* $\mathbf{X}$, *в котором действует оператор* $\mathbf{A}$, *называется* ***собственным элементом****, если для некоторого действительного числа* $\lambda$ *выполнено равенство:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{9}$$

*Число* $\lambda$ *называется* ***собственным значением****, соответствующим* ***собственному элементу*** $\mathbf{x}$.

**Определение 53.** *Значение параметра* $\lambda$ *называется* ***регулярным*** *для оператора* $\mathbf{A}$, *если при этом значении* $\lambda$ *существует* ***ограниченный*** *обратный оператор по отношению к оператору* $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$.

*Этот оператор* — $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \stackrel{def}{=} \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{A}}$, *называется* ***резольвентой*** *оператора* $\mathbf{A}$, *а множество регулярных значений* $\lambda$ *называется* ***резольвентным*** *множеством оператора* $\mathbf{A}$.

*Множество значений параметра* $\lambda$, ***не являющихся регулярными****, образуют* ***спектр*** *оператора* $\mathbf{A}$.

Таким образом, все ***собственные значения*** $\lambda$ оператора $\mathbf{A}$ ***входят*** в ***спектр*** этого оператора, т.к. при таком значении $\lambda$
$\boldsymbol{ker}(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbb{O}\} \neq \{\mathbb{O}\}$,
и, поэтому, оператор $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***необратим***.

**Пример** 1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ оператор $\mathbf{A}$ ***умножения*** на независимую ***переменную*** $t$, определяемый для ***всякого***

элемента $\mathbf{x} \equiv x(t)$ этого пространства ***формулой***:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = t \cdot x(t) \ .$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ операторное уравнение:

$$(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{y} \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}], \quad \text{или} \quad \lambda\,x(t) - t\,x(t) = y(t) \qquad (10)$$

$\mathbf{1}^\circ$. Если значение $\lambda$ лежит ***вне отрезка*** $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, то это ***уравнение*** имеет ***единственное*** решение при любой ***функции*** $y(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ :

$$x(t) = \frac{1}{\lambda - t}\,y(t) \ .$$

Эта формула определяет ограниченный оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \overset{def}{=} \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{A}}$ для $\forall\, y(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, поэтому все значения $\lambda_0$ из ***дополнения*** отрезка $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ являются ***регулярными*** для рассматриваемого оператора, и принадлежат ***резольвентному*** множеству оператора $\mathbf{A}$.

$\mathbf{2}^\circ$. Все значения $\lambda_0$ из ***отрезка*** $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ принадлежат ***спектру*** рассматриваемого оператора $\mathbf{A}$, т.к., если в качестве правой части уравнения (10) взять ***любую*** непрерывную на отрезке $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ функцию $y(t)$, такую, что в точке $t = \lambda_0 : y(\lambda_0) = a \neq 0$, то, уравнение (10) ***не имеет*** решения $x(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, т.к. левая часть ***равна нулю*** при $t = \lambda_0$, а правая часть ***не равна нулю*** в силу условия $y(\lambda_0) = a \neq 0$.

В заключение заметим, что ***ни одно*** значение $\lambda_0$ из отрезка $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ ***не является собственным значением*** для оператора $\mathbf{A}$.

**Пример** 2. Пусть пространство, в котором действует оператор $\mathbf{A}$, есть $\mathbf{X} = \mathbb{E}^n$, а сам оператор $\mathbf{A}$ задан квадратной ***симметричной*** матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Тогда уравнение, определяющее ***резольвенту***, в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{array}{lcl} (a_{1\,1} - \lambda)x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n & = & y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \cdots + (a_{n\,n} - \lambda)x_n & = & y_n \end{array}$$

т.е. является системой $\mathbf{n}$ ***алгебраических уравнений*** относительно $\mathbf{n}$ неизвестных $(x_1, \dots, x_n)$ с ***симметричной*** матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, и правой частью $(y_1, \dots, y_n)$.

$\mathbf{1}^\circ$. Если значение $\lambda$ ***не является корнем характеристического уравнения*** матрицы системы, то ***определитель*** этой системы ***отличен от нуля*** и система имеет ***единственное*** решение при ***любой*** правой части $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{E}^n$, что означает ***регулярность*** всякого такого значения $\lambda$, т.к. в данном случае существует ***резольвента***, порождённая ***обратной*** к $(\lambda\,\mathcal{E} - \mathcal{A})$ матрицей, где $\mathcal{E}$ — единичная матрица.

$\mathbf{2}^\circ$. Если значение $\lambda$ является ***корнем характеристического уравнения*** матрицы системы, то ***определитель*** этой системы ***равен нулю*** и система перестаёт быть разрешимой для ***любой*** правой части, т.е. в рассматриваемом случае оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$, определяемый матрицей $(\lambda\,\mathcal{E} - \mathcal{A})$, — ***необратим***.

Поэтому ***все корни характеристического многочлена*** матрицы системы ***являются точками спектра оператора*** $\mathbf{A}$.

В рассматриваемом случае ***каждый корень характеристического многочлена*** матрицы будет ***собственным значением оператора*** $\mathbf{A}$, порождённого матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij}),\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 3.

1. Как ***определяются*** элементы $-\mathbf{A}$ и $\mathbb{O}$ в ***линейном пространстве*** линейных операторов $\mathbf{L}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ ?

2. Показать выполнение ***аксиом нормы*** в ***линейном пространстве*** линейных ограниченных операторов $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$.

3. Показать, что произведение ***линейных ограниченных*** операторов есть ***линейный ограниченный*** оператор и его ***норма*** не превосходит произведения ***норм*** сомножителей.

4. Показать, что оператор ***дифференцирования***, заданный на линейном ***подпространстве*** дифференцируемых функций из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с условием $x(\mathbf{a}) = 0$ и ***действующий*** $\boxed{\textit{в}}$ $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, не является ***непрерывным***.

Указание. Рассмотреть ***последовательность*** функций:
$x_n\,(t) = 1/n\,\sin n(t - \mathbf{a})$.

5. Показать, что ***в условиях*** теоремы Банаха оператор $(\,\mathbf{E} - \mathbf{A}\,)^{-1}$ может быть ***представлен*** в виде ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n$, ***сходящегося*** в смысле ***нормы*** пространства операторов $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{X})$.

6. Пусть $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный*** оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$, а оператор $\mathbf{B}$ ***принадлежит*** $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{X})$.

***Доказать***, что $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ ***вполне непрерывные*** операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$.

7. В пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ задан ***интегральный*** оператор
$\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\ s\,)x\,(s)\,ds$, и ***последовательность интегральных*** опе-

раторов $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\} = \left\{\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{P}_n(t, s)x(s)\,ds\right\}$, где ядро $\mathcal{K}(t, s)$ интегрального оператора $\mathbf{A}$ ***непрерывно*** на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}$, а ***ядра*** $\mathcal{P}_n(t, s)$ ***последовательности*** операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ являются ***полиномами*** степени $n$, удовлетворяющими условию:
$\max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t, s\leqslant \mathbf{b}} |\mathcal{K}(t, s) - \mathcal{P}_n(t, s)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сходятся ли операторы $\{\mathbf{A}_n\}$ к оператору $\mathbf{A}$ и, если сходятся, то определить тип сходимости: ***по норме*** или ***поточечно*** ?

8. В пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ задан ***интегральный*** оператор
$\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds$, и ***последовательность интегральных*** операторов $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\} = \left\{\int\limits_{\mathbf{a_n}}^{\mathbf{b_n}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds\right\}$, где ядра $\mathcal{K}(t, s)$ интегрального оператора $\mathbf{A}$ и последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ ***непрерывны*** на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}$, а соответствующие отрезки $[\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ удовлетворяют условию: $[\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}] \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_n \to \mathbf{b}$ при $n \to \infty$.

Сходятся ли операторы $\{\mathbf{A}_n\}$ к оператору $\mathbf{A}$ и, если сходятся, то определить тип сходимости: ***по норме*** или ***поточечно*** ?

9. Пусть операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определены формулами: $\mathbf{Ax} = t \cdot x(t)$, $\mathbf{Bx} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\,d\tau$.

Будут ли операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ***перестановочны*** ?

10. Пусть операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определены формулами: $\mathbf{Ax} = t^2x(t)$, $\mathbf{Bx} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\,d\tau$ и
$\mathbf{Cx} = x(\mathbf{a}) + t \cdot x(\mathbf{b})$.

Какие из указанных операторов являются ***вполне непрерывными*** ?

11. Пусть оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$ определен формулой: $\mathbf{Ax} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2j}$ .

Показать, что оператор $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный***, если его рассматривать как оператор действующий из пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ в $\mathbb{E}^1$ .

12. Имеет ли оператор $\mathbf{A}$ , действующий на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\,d\tau$ ***собственные значения*** и ***собственные векторы*** ?

13*. Показать, что для операторного уравнения $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , где $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \mathcal{K}(t,\, s)x(s)\,ds$ , — ***оператор Вольтерра***, а ядро $\mathcal{K}(t,\, s)$ ***интегрального*** оператора $\mathbf{A}$ непрерывно на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t,\, s \leqslant \mathbf{b}$ , все значения параметра $\lambda \neq 0$ ***регулярны***, т.е. интегральное уравнение $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \mathcal{K}(t,\, s)x(s)\,ds = \lambda x(t)$ имеет лишь ***тривиальное*** решение.

14. Показать, что если значение параметра $\lambda$ ***регулярно*** для оператора $\mathbf{A}$ , то это же значение $\lambda$ будет ***регулярным*** и для оператора $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ , если $\|\mathbf{B}\|$ достаточно ***мала***.

15. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t,\, s)x(s)\,ds$ , с ***ядром*** $\mathcal{K}(t,\, s) = \cos(t+s)$ ***на промежутках***:

а). $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = [\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}]$

б). $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \left[\mathbf{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ ?

# Глава 3

# Гильбертово пространство. Линейные отображения гильбертовых пространств

## 3.1 Определение гильбертова пространства. Простейшие свойства

### Пространство со скалярным произведением

**Определение 54.** ***Линейное пространство*** $\mathbf{X}$ *называется* ***пространством со скалярным произведением****, если любым* ***двум*** *элементам* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ *поставлено в соответствии* ***число*** *( элемент* $\mathbb{R}^1$ *), называемое* ***скалярным произведением*** *этих элементов и обозначаемое* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$*, таким образом, что выполнены следующие условия —* ***аксиомы скалярного произведения****:*

**1°** *. —* ***Аксиома симметрии****:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) .$$

**2**° . — ***<u>Аксиома линейности</u>***:

$$(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v},\, \mathbf{z}) = \lambda (\mathbf{u},\, \mathbf{z}) + \mu (\mathbf{v},\, \mathbf{z}) \,.$$

**3**° . — ***<u>Аксиома невырожденности</u>***:

$(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \geqslant 0,$ *и из условия* : $(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) = 0\,,$ *следует, что* $\mathbf{u} = \mathbb{O}$ .

Из условий **1**° — **3**° легко получаются

***Неравенство Коши - Буняковского:***

$$\big|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})\big| \leqslant \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} \cdot \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} \tag{1}$$

***Неравенство треугольника:***

$$\sqrt{(\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} + \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} \tag{2}$$

Докажем неравенство (1) .

Пусть $\lambda$ — действительное число.

В силу свойств **1**° — **3**° :

$$(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v},\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\lambda (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + \lambda^2 (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \geqslant 0 \,.$$

Ввиду ***неотрицательности*** выписанного ***квадратичного***, относительно $\lambda$, ***трехчлена***, его ***дискриминант неположителен***, то есть:

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v})^2 \leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \tag{3}$$

Неравенство (3) ***эквивалентно*** неравенству (1) , а неравенство (2) , — простое ***следствие*** неравенства (1) .

Действительно:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\,(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\,|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})| + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})}\sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = \Big(\sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} + \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})}\Big)^2$$

Свойства $\mathbf{1^\circ - 3^\circ}$ ***скалярного произведения*** и неравенства (1) и (2) позволяют ввести в линейном пространстве со скалярным произведением ***норму*** любого элемента $\mathbf{u}$ этого ***пространства*** по формуле:

$$\|\,\mathbf{u}\,\| \;=\; \sqrt{(\,\mathbf{u},\,\mathbf{u}\,)} \tag{4}$$

Очевидно, что для нормы, порождаемой скалярным произведением, справедливо ***тождество параллелограмма***:

$$\|\,\mathbf{x} + \mathbf{y}\,\|^2 + \|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\|^2 \;=\; 2\big(\|\,\mathbf{x}\,\|^2 + \|\,\mathbf{y}\,\|^2\big)$$

**Определение 55.** ***Полное*** *пространство* ***со скалярным произведением*** *называется* ***гильбертовым*** *пространством.*

Приведем несколько примеров ***линейных пространств со скалярным произведением***.

## Примеры пространств со скалярным произведением

**Пример** 1. ***Пространство*** $\mathbb{E}^n$ — примера 1 § 1 главы I является ***линейным пространством со скалярным произведением***, определяемым формулой:

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \tag{5}$$

Так как это пространство ***полно***, то оно — ***гильбертово***.

**Пример** 2. ***Пространство*** $\ell_{\mathbf{2}}$ — ( пример 3 § 1 главы I ), — ***гильбертово***, а ***скалярное произведение*** в нем задается формулой:

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i \tag{6}$$

Так как:

$$|\,x_i\,y_i\,| \leqslant \frac{1}{2}\big(\,x_i^2 + y_i^2\,\big)\,, \quad \forall\; i\;,$$

и, по определению пространства $\ell_2$, ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ ***сходятся***, то ряд (6) сходится ***абсолютно*** и правая часть (6) определена корректно.

Аксиомы $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ скалярного произведения, ***очевидно***, выполнены.

**Пример** 3. ***Линейное пространство непрерывных на отрезке*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функций становится пространством ***со скалярным произведением***, если последнее определить формулой:

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x\,(t)\cdot y\,(t)\,dt \tag{7}$$

Полученное пространство совпадает с рассматриваемым нами ранее пространством $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ из примера 7 § 1 главы I.

Это пространство ***не полно*** и, следовательно, ***не гильбертово***.

Любое ***линейное пространство со скалярным произведением*** можно ***пополнить*** так, что ***пополнение*** станет ***гильбертовым*** пространством, причем ***скалярное произведение*** в пополняемом пространстве будет совпадать со скалярным произведением в гильбертовом пространстве ( точнее на подмножестве этого гильбертова пространства ***изометричном*** пополняемому пространству ) ( см. § 4 главы I ).

**Пример** 4. Рассмотрим ***пополнение*** неполного пространства со скалярным произведением, сконструированного в предыдущем примере.

Среди его возможных пополнений будет пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, введённое в § 4 главы 1 . Это пространство — ***гильбертово***.

***Скалярное произведение*** в нём определяется формулой (7), интеграл в которой понимается ***в смысле Лебега***. (См. § 4 главы I, или, более подробно, [1], [7]).

## Слабая сходимость в пространстве со скалярным произведением

В ***любом*** линейном пространстве со скалярным произведением справедливо

**Утверждение 29.** ***Скалярное произведение*** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *является* ***непрерывной*** *функцией* ***своих аргументов*** *в смысле* ***сходимости****, порождённой* ***нормой*** (4).

*То есть:*

$$\lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{8}$$

*если:*

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \| = 0 .$$

**Доказательство** утверждения (8) следует из цепочки неравенств:

$$\big| (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \big| \leqslant \big| (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n - \mathbf{y}) - (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \big| \leqslant$$
$$\leqslant \| \mathbf{x}_n \| \cdot \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \| + \| \mathbf{y} \| \cdot \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| .$$

Т.к. последовательнось $\{ \| x_n \| \}$ ***ограничена***, то правая часть последнего неравенства стремится к $0$ при $n \to \infty$.

**Утверждение 30.** *Частным случаем утверждения* 29 *является следующее* ***предельное*** *равенство:*

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X} : \quad \lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{9}$$

*если:*

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| = 0 \, .$$

***Обратить*** это утверждение нельзя:
из ***справедливости*** соотношения (9) для последовательности $\{ \mathbf{x}_n \}$ $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, вообще говоря, ***не следует*** сходимость $\mathbf{x}_n$ к $\mathbf{x}$ ***по норме***.

**Определение 56.** *Последовательность элементов* $\{ \mathbf{x}_n \}$ *в* ***линейном пространстве со скалярным произведением*** *называется* ***слабо сходящейся*** *к* ***элементу*** $\mathbf{x}$*, если выполнено условие* (9)*.*

**Пример** 5. Примером ***слабо сходящейся*** ( но ***не сходящейся сильно***, т.е. в смысле ***нормы***), последовательности, является последовательность элементов пространства $\ell_\mathbf{2}$ из примера 5 § 2 главы I:

$$\mathbf{x}_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \ldots) \, ,$$

где 1 стоит на $n$-ом месте.

Эта ***последовательность слабо сходится*** к $\mathbb{O}_{\ell_\mathbf{2}}$ в $\ell_\mathbf{2}$.

Действительно:

$\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_\mathbf{2}, \quad (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Утверждение 31.** ***Слабо сходящаяся последовательность*** *имеет только* ***один*** *слабый предел.*

*Доказательство.* Действительно, пусть $\{ \mathbf{x}_n \}$ имеет ***два*** слабых предела $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$.

Из (9) следует, что $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \ \forall \mathbf{y}$ или $(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$.

Полагая $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$, получим в силу свойства $3^\circ$ ***скалярного произведения***: $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. □

## Ортогональность и замкнутость множеств в пространстве со скалярным произведением

**Определение 57.** ***Два*** *элемента* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, *принадлежащие* ***линейному пространству со скалярным произведением****, называются* ***ортогональными****, если:*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

**Утверждение 32.** *Пусть* $\mathbf{x}$ – ***фиксированный*** *элемент* ***линейного пространства со скалярным произведением*** $\mathbf{X}$.

*Множество* $\mathbf{L}$ *элементов пространства* $\mathbf{X}$, ***ортогональных*** *фиксированному* ***элементу*** $\mathbf{x}$, *является* ***замкнутым подпространством*** *в* $\mathbf{X}$.

*Доказательство.* То, что $\mathbf{L}$ — ***линеал***, т.е. линейное подпространство в $\mathbf{X}$, сразу следует из свойств $1^\circ - 3^\circ$ ***скалярного произведения***.

***Замкнутость*** $\mathbf{L}$ немедленно следует из утверждения (9) о ***непрерывности*** скалярного произведения. □

Важным примером ***подпространства*** в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением*** является множество $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, состоящее из ***всевозможных линейных комбинаций*** $N < \infty$ ***линейно независимых*** элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$, то есть множество вида:

$$\{ c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_N \boldsymbol{\xi}_N \} , \tag{10}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — ***произвольные*** действительные числа.

***Подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, обычно, называют ***линейной оболочкой*** системы элементов $\{ \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N \}$.

**Утверждение 33.** *Множество* (10) ***замкнутое подпространство*** *в* $\mathbf{X}$.

Это утверждение было доказано в главе II (§ 1 следствие 3) для ***произвольных*** линейных ***нормированных*** пространств.

Ниже мы приведём ещё одно доказательство сформулированного утверждения, использующее ***специфику*** пространств ***со скалярным произведением***. Оно интересно само по себе. Кроме того, возможно, что читатель не ознакомился с содержанием соответствующих страниц параграфа 1 главы II, помеченных знаком $^{\bullet}$.

То, что множество (10) — ***линейное подпространство*** в $\mathbf{X}$, — ***очевидно***. Покажем его ***замкнутость***.

Если ***элемент*** $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ имеет вид (10), то соответствующие ***коэффициенты*** $c_1, \ldots, c_N$ ***однозначно определяются*** набором скалярных произведений:

$$(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1), \ldots, (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N)\,.$$

Действительно, пусть:

$$\mathbf{z} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_N \boldsymbol{\xi}_N\,. \tag{11}$$

Умножая ***скалярно*** правую и левую часть этого равенства последовательно на $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$, получим совокупность равенств:

$$\begin{array}{ccccc} c_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1) & + \cdots + & c_N(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) & = & (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \cdots & + \cdots + & \cdots & = & \cdots \\ c_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_N) & + \cdots + & c_N(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) & = & (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N)\,, \end{array} \tag{12}$$

которую можно рассматривать, как ***систему линейных алгебраических уравнений*** относительно $c_1, \ldots, c_N$.

***Матрица*** $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ системы (12) называется ***матрицей Грама системы*** элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$.

**Утверждение 34.** ***Определитель матрицы Грама*** $\boldsymbol{det}\,\boldsymbol{\mathcal{G}} \neq 0$.

*Доказательство.* Действительно, если $\boldsymbol{det}\,\boldsymbol{\mathcal{G}} = 0$, то имеется ***линейная зависимость*** между ***столбцами*** матрицы Грама.

Представим предполагаемую ***зависимость*** в виде:

$$d_1 \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} + d_2 \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} + \cdots + d_N \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} = \mathbb{O},$$

где $\mathbb{O}$ — ***нуль-элемент*** $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$.

То есть:

$$\begin{aligned} (d_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \cdot \boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) &= \quad 0 \\ \cdots \quad + \cdots + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ (d_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \cdot \boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) &= \quad 0 \end{aligned}$$

Умножим $i$-ую строчку этих равенств на $d_i$ и просуммируем по $i$ от $1$ до $N$.

Получим: $(d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N, d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N) = 0$.

Откуда следует, что: $d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N = \mathbb{O}$, то есть элементы $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$ ***линейно зависимы***, вопреки нашему предположению об их ***независимости***.

Поэтому $\boldsymbol{det}\,\boldsymbol{\mathcal{G}} \neq 0$ и существует ***обратная*** матрица $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1}$. $\square$

***Коэффициенты*** $\{ c_i \}$ в равенстве (1) и его ***правая часть*** связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{c} = ( c_1, \dots, c_N ) .$$

Из (13) следует ***замкнутость линеала*** (линейного пространства) (10).

Действительно, пусть $\mathbf{z}_k$, $k = 1, 2, \dots$ — ***последовательность*** элементов линеала (10) и $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{z} \| = 0$.

Нужно показать, что элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ также ***имеет представление*** (10) с ***некоторым*** набором коэффициентов $( c_1, \dots, c_N )$.

Рассмотрим последовательность элементов из пространства $\mathbb{R}^N$ вида:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \quad \dots \quad, \begin{pmatrix} (\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Так как $\mathbf{z}_k \to \mathbf{z}$, при $k \to \infty$, то, в силу ***непрерывности*** скалярного произведения:

$$\lim_{k \to \infty} ( \mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_i ) = ( \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_i ), \quad i = 1, 2, \dots, N . \tag{14}$$

Введем в пространстве $\mathbb{R}^N$ ***норму***, как в примере 1 § 2 главы II. Тогда, из представлений $\mathbf{z}_k$ в виде: $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^{(k)} \boldsymbol{\xi}_i$, следует, что: $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1}$

будет ***линейным ограниченным*** оператором в этом вспомогательном пространстве.

Поэтому из (14) будет следовать ***покомпонентная*** сходимость при $k \to \infty$, коэффициентов $c_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots N$, к ***некоторым*** значениям. Пусть эти ***предельные*** коэффициенты будут $c_1, , \ldots , c_N$ и $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{\xi}_i$.

Из неравенства: $\quad \| \mathbf{z}_k - \mathbf{w} \| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left| c_i^{(k)} - c_i \right| \cdot \| \boldsymbol{\xi}_i \|$

и ***сходимости*** $c_i^{(k)} \to c_i$, при $k \to \infty$, $\forall i = 1, \ldots , N$, следует что: $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{w} \| = 0$.

Но, по предположению: $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{z} \| = 0$.

Поэтому $\mathbf{z} = \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{\xi}_i$ и ***замкнутость*** линеала (10) доказана.

Рассуждая аналогично, можно установить ***полноту*** линейного ***подпространства*** (10), независимо от того полно ***объемлющее*** рассматриваемое подпространство ***пространство*** $\mathbf{X}$ или нет.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 1.

1. Проверить выполнение аксиом $1^\circ - 3^\circ$ для (4).

2. Доказать ***полноту подпространства*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10).

3. Можно ли ввести в пространстве $\mathbb{R}^1$ ***скалярное произведение*** по формуле: $(x, y) = x \cdot y$ ?

4. ***Доказать***, что в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением*** справедливо ***тождество параллелограмма***:

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2\Big( \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 \Big).$$

5*. Пусть в ***линейном нормированном*** пространстве $\mathbf{X}$ для любой пары его элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ справедливо ***тождество параллелограмма***.

***Доказать***, что ***функция*** двух переменных $\mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ :

$$(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) \overset{def}{=} \frac{1}{4}\Big( \|\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \,\|^2 + \|\, \mathbf{x} - \mathbf{y} \,\|^2 \Big)$$

определяет ***скалярное произведение*** в пространстве $\mathbf{X}$.

## 3.2 Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество и некоторые ее следствия

### Теорема о проекции

Напомним данное выше

**Определение 58.** ***Множество*** $\mathbf{Q}$, *лежащее в* ***линейном*** *пространстве* $\mathbf{X}$, *называется* ***выпуклым****, если* $\forall\, \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}$ ***отрезок:*** $\alpha\, \mathbf{x} + (1 - \alpha)\, \mathbf{y}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *также* ***принадлежит*** $\mathbf{Q}$.

**Теорема 15.** *Пусть* $\mathbf{Q}$ ***замкнутое выпуклое*** *множество в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{w}$ *— некоторый* ***фиксированный*** *элемент* $\mathbf{H}$.

***Существует единственный*** *элемент* $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$ *такой, что:*

$$\|\, \mathbf{z} - \mathbf{w} \,\| = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\, \mathbf{u} - \mathbf{w} \,\| = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\, \mathbf{u} - \mathbf{w} \,\|$$

***Элемент*** $\mathbf{z}$ *называется* ***метрической проекцией*** *элемента* $\mathbf{w}$ ***на*** $\mathbf{Q}$.

*Доказательство.* Пусть $\{\, \mathbf{x}_n \,\}$ последовательность элементов $\mathbf{Q}$ и

$$\lim_{n \to \infty} \|\, \mathbf{x}_n - \mathbf{w} \,\| = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\, \mathbf{u} - \mathbf{w} \,\| = d$$

Такая последовательность всегда ***существует***, по определению $\mathbf{inf}$ .

Покажем, что при наших предположениях существует ***предел*** этой последовательности.

Равенство ***параллелограмма***, примененное к элементам $\mathbf{x}_n - \mathbf{w}$ и $\mathbf{x}_m - \mathbf{w}$ , дает:

$$\left\|\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|\mathbf{x}_m - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{w}\|^2\Big) - \left\|\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} - \mathbf{w}\right\|^2 \qquad (1)$$

Если $m, n \to \infty$ , то $\lim\limits_{m\to\infty} \| \mathbf{x}_m - \mathbf{w} \| = \lim\limits_{n\to\infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{w} \| = d$ .

В силу ***выпуклости*** $\mathbf{Q}$ :

$$\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} \in \mathbf{Q} \quad \text{и поэтому} \quad \left\|\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} - \mathbf{w}\right\|^2 \geqslant d^2$$

Следовательно, при достаточно больших $m, n$ , правая часть (1) будет меньше любого наперед заданного положительного $\varepsilon$ .

И, таким образом, последовательность $\{ \mathbf{x}_n \}$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{H}$ .

Так как пространство $\mathbf{H}$ ***гильбертово***, то последовательность $\{ \mathbf{x}_n \}$ ***имеет предел*** $\mathbf{z}$ , который, в силу ***замкнутости*** $\mathbf{Q}$ , принадлежит $\mathbf{Q}$ .

В силу ***непрерывности нормы*** $\| \mathbf{z} - \mathbf{w} \| = d$ .

Покажем ***единственность*** такого элемента $\mathbf{z}$ .

Пусть $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{Q}$ ***отличный*** от $\mathbf{z}$ элемент, на котором достигается ***минимум*** расстояния до $\mathbf{w}$ .

Подставляя в равенство (1) $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}_1$ вместо $\mathbf{x}_m$ и $\mathbf{x}_n$ , получим:

$$\| \mathbf{z} - \mathbf{z}_1 \| \leqslant 0 ,$$

и, следовательно, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1$ .

Теорема полностью доказана. □

### Условия, определяющие проекцию

Получим теперь ***необходимое*** ( и ***достаточное*** ) условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

Пусть $\mathbf{z_w}$ ***метрическая проекция*** элемента $\mathbf{w}$ ***на*** $\mathbf{Q}$.

В силу ***определения*** $\mathbf{z_w}$, и ***выпуклости*** множества $\mathbf{Q}$, имеем $\forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{Q}$ :

$$\Big\| \mathbf{w} - \Big( (1-\lambda)\, \mathbf{z_w} + \lambda\, \mathbf{u} \Big) \Big\|^2 \geqslant \| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} \|^2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \,,$$

или

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} + \lambda\, ( \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) \|^2 \geqslant \| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} \|^2 \,, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \qquad (2)$$

Раскрывая левую часть неравенства (2), получим:

$$2\lambda\, ( \mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) + \lambda^2\, ( \mathbf{z_w} - \mathbf{u}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) \geqslant 0 \,.$$

Откуда:

$$( \mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) \geqslant -\frac{\lambda}{2}\, ( \mathbf{z_w} - \mathbf{u}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) \,.$$

Т.к. $\lambda$ ***произвольное*** число из $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, то это неравенство может выполняться только, если:

$$( \mathbf{z_w} - \mathbf{w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u} ) \leqslant 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{Q} \qquad (3)$$

Следовательно, неравенство (3) ***необходимое*** условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

Покажем, что $\mathbf{z_w}$ ***единственный*** элемент $\mathbf{Q}$ для которого неравенство (3) выполнено.

Пусть $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{Q}$, $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_\mathbf{w}$, и, аналогично (3) :

$$(\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Q} \tag{4}$$

Из (3), (4) следует, что:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z}_\mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 .$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 .$$

Следовательно $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_\mathbf{w}$.

Поэтому выполнение условия:

$$(\mathbf{z} - \mathbf{w}, \mathbf{z} - \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Q},$$

для какого-либо элемента $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$, означает, что $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\mathbf{w}$ и условие (3) не только ***необходимое***, но и ***достаточное*** условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

## Проекция на подпространство

Важным частным случаем ***замкнутого выпуклого*** множества в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ является всякое его ***замкнутое подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) § 1, которое мы, для простоты, обозначим $\mathbf{H}_1$.

Пусть $w$ произвольный элемент $\mathbf{H}$.

Найдем его ***проекцию*** на ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$.

Заметим, что какой бы элемент $\mathbf{h}$ из ***подпространства*** $\mathbf{H}_1$ мы бы ни взяли, элементы $\mathbf{z}_\mathbf{w} + \mathbf{h}$ и $\mathbf{z}_\mathbf{w} - \mathbf{h}$ ***принадлежат*** этому же ***подпространству***.

Подставляя эти элементы вместо $\mathbf{u}$ в неравенство (3), имеем:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{h}) \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, -\mathbf{h}) \leqslant 0 \,.$$

А это возможно только в том случае, когда выполняется следующее условие ***ортогональности***:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{h}) = 0 \,, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{H}_1 \tag{5}$$

Пусть

$$\mathbf{z_w} = \sum_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{\xi}_i \tag{6}$$

Из условия ***ортогональности*** (5) легко получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения (6).

Действительно: $\left( \mathbf{w} - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \right) = 0 \,, \quad j = 1, \ldots, N \,,$ или

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \left( \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \right) = \left( \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_j \right) \,, \quad j = 1, \ldots, N \tag{7}$$

Матрица этой системы — уже знакомая нам ***матрица Грама*** $\boldsymbol{\mathcal{G}}$.

В § 1 мы установили, что ***определитель*** $\boldsymbol{det\,\mathcal{G}} \neq 0$.

Поэтому, ***решив*** систему (7), мы по формуле (6) ***найдем*** искомую ***проекцию***.

## Неравенство Бесселя

Задача нахождения ***проекции*** на ***подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, порожденное системой линейно независимых элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$, упрощается, если система $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i=1}^N$ ***ортонормирована***, то есть:

$$\| \boldsymbol{\xi}_i \| = 1, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \text{и} \quad \left( \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j \right) = 0 \quad \text{при}\, i \neq j \,.$$

В этом случае матрица Грама $\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}$ — ***единичная***, и

$$c_i = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i), \quad i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

Кроме того: $\|\mathbf{z_w}\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i)^2$ .

В силу (5) $\mathbf{w} - \mathbf{z_w}$ и $\mathbf{z_w}$ ***ортогональны***.

Поэтому:

$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{w} - \mathbf{z_w}\|^2 + \|\mathbf{z_w}\|^2$ , и, следовательно, $\|\mathbf{z_w}\|^2 \leqslant \|\mathbf{w}\|^2$ , то есть:

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i)^2 \leqslant \|\mathbf{w}\|^2 \tag{9}$$

Неравенство (9) называется ***неравенством Бесселя***.

Оно справедливо для ***любого*** элемента ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}$ и ***любой*** ( конечной ) ***ортонормированной*** системы его элементов.

**Замечание.** Теорема ***о проекции*** и рассмотренные нами ее следствия остаются справедливыми в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением***, если предположить ***полноту*** $\mathbf{Q}$ , как ***метрического*** пространства.

Действительно, используемая в доказательстве теоремы последовательность $\mathbf{x}_n$ принадлежит $\mathbf{Q}$ и ***полнота*** этого множества обеспечивает корректность последующих рассуждений.

Т.к. подпространство $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) § 1 ***полно*** в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением***, то ***неравенство Бесселя*** (9) справедливо независимо от полноты ***объемлющего*** пространства $\mathbf{H}$ .

## Ортонормированные системы в пространстве со скалярным произведением

Следствием теоремы о проекции и замечания в конце предыдущего пункта является следующее

**Утверждение 35.** *В любом* ***бесконечномерном линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***со скалярным произведением****, в частности, гильбертовом,* ***существует счетная ортонормированная система*** *элементов.*

*Доказательство.* Действительно, возьмем произвольный ***ненулевой*** элемент $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbf{X}$ и ***нормируем*** его, то есть, образуем элемент:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\| \boldsymbol{\xi}_1 \|} .$$

По условию ***существует*** элемент $\boldsymbol{\xi}_2$ ***линейно независимый*** от $\mathbf{e}_1$ .

Спроектируем его на ***подпространство*** $\{ c_1 \mathbf{e}_1 \}$, ***порожденное*** элементом $\mathbf{e}_1$ .

Элемент $\boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1$ будет, в силу (5) и (8), ***ортогонален*** $\mathbf{e}_1$ .

Обозначим

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1)}{\| \boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1) \|} .$$

Имеем:

$\| \mathbf{e}_1 \| = \| \mathbf{e}_2 \| = 1$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ .

Элементы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, по предположению, порождают ***подпространство*** в $\mathbf{X}$, ***не совпадающее*** с $\mathbf{X}$.

Возьмем элемент $\boldsymbol{\xi}_3$, ***линейно независимый*** с $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и спроектируем его на ***подпространство*** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, порождаемое $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

***Нормируем*** разность между $\boldsymbol{\xi}_3$ и его проекцией на $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и обозначим эту ***нормированную разность*** через $\mathbf{e}_3$.

Элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ***взаимноортогональны*** и ***нормированы***, по построению.

В силу предположенной ***бесконечномерности*** $\mathbf{X}$, этот процесс можно продолжать ***неограниченно***.

Результатом его будет ***ортогональная*** система элементов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ из $\mathbf{X}$. □

**Замечание.** Применённый при доказательстве утверждения 35 способ построения ортонормированной системы векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ в бесконечномерном линейном пространстве $\mathbf{X}$ со скалярным произведением, называется ***процессом ортогонализации Грама - Шмидта***.

Если ***пространство*** со скалярным произведением ***конечномерно*** (конкретно — $N$-***мерно***), то примененная нами конструкция приводит к построению ***ортонормированного базиса*** такого пространства, исходя из произвольной ***линейно независимой системы*** $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N\}$ элементов этого пространства.

## Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Пусть теперь $\mathbf{H}$ — ***бесконечномерное гильбертово*** пространство и $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***счетная ортонормированная система*** его элементов.

Пусть $\mathbf{x}$ — некоторый элемент пространства $\mathbf{H}$.

Сопоставим элементу $\mathbf{x}$ формальный ***ряд***

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i \tag{10}$$

Этот ряд, обычно, называется ***рядом Фурье*** элемента $\mathbf{x}$ по системе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

В силу неравенства ***Бесселя*** — (9), — числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2 \tag{11}$$

***сходится***.

Обозначим

$$\mathbf{S}_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i$$

— ***частичную сумму*** ряда Фурье $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i$.

Так как система $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***ортонормирована***, то $\forall\, n,\, p \geqslant 1$

$$\|\,\mathbf{S}_{n+p} - \mathbf{S}_n\,\|^2 = \sum_{i\,=\,n\,+\,1}^{n\,+\,p} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2$$

Из этого равенства и из сходимости ряда (11) немедленно следует сходимость ряда Фурье (10).

## Равенство Парсеваля и полнота системы элементов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$

Обозначим сумму ряда Фурье (10) — $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$.

Вообще говоря, $\mathbf{S}\,(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$.

Для теории и приложений важно знать, когда сумма ряда Фурье $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$ элемента $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$ совпадает с $\mathbf{x}$ и возможен ли случай такого совпадения для ***всех*** элементов $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$.

Рассмотрим тождество

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}(\mathbf{x}) + [\,\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{x})\,] \tag{12}$$

Справедливо равенство:

$$\|\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)^2 \tag{13}$$

Действительно, из ***ортонормированности*** системы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ следует:

$$\|\,\mathbf{S}_n\,\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)^2 \tag{14}$$

Так как последовательность $\mathbf{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)\cdot \mathbf{e}_i$ сходится к $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, то, в силу ***непрерывности*** нормы в гильбертовом пространстве, из равенства (14) следует:

$$\lim_{n\to\infty} \|\,\mathbf{S}_n\,\|^2 = \|\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 ,$$

и, следовательно, равенство (13) справедливо.

***Непосредственно*** устанавливается справедливость тождества

$$(\,\mathbf{x},\, \mathbf{S}(\mathbf{x})\,) = \|\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 ,$$

из которого следует ортогональность $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$.

Из (12) имеем

$$\|\,\mathbf{x}\,\|^2 = \|\,\mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 + \|\,\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 .$$

С учетом (13) это тождество можно переписать так:

$$\|\,\mathbf{x}\,\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)^2 = \|\,\mathbf{x} - \mathbf{S}(\mathbf{x})\,\|^2 .$$

Таким образом, мы доказали

**Утверждение 36.** *Для справедливости равенства:*

$$\mathbf{S}\,(\mathbf{x}) \;=\; \mathbf{x}$$

***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы выполнялось* ***равенство Парсеваля****:*

$$\|\,\mathbf{x}\,\|^2 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2 \qquad (15)$$

**Утверждение 37.** *Для того, чтобы* ***равенство Парсеваля*** *было справедливо для любого* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{H}$, ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы в* $\mathbf{H}$ *не существовало* ***ненулевого*** *элемента, ортогонального всем* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

*Доказательство.* ***Достаточность****.*

Пусть такого элемента нет, но в $\mathbf{H}$ существует элемент $\mathbf{y}$, для которого равенство Парсеваля не справедливо.

Тогда ненулевой элемент $\mathbf{y} - \mathbf{S}\,(\mathbf{y})$, очевидно, будет ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Получаем противоречие.

***Необходимость****.*

Пусть равенство Парсеваля выполнено для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, но существует ненулевой элемент $\mathbf{h} \neq \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$, ортогональный всем $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Очевидно, что $\mathbf{S}\,(\mathbf{h}) \;=\; \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$.

Из равенства Парсеваля (15) следует, что $\|\,\mathbf{h}\,\| \;=\; 0$.

И, таким образом, мы снова получили противоречие. □

**Замечание.** Выполнимость условия утверждения 37 (7), целиком зависит только от свойств системы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

**Определение 59.** ***Ортонормированная*** *система* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, *для которой в* $\mathbf{H}$ *не существует* ***ненулевого*** *элемента,* ***ортогонального*** *всем элементам этой системы, называется* ***полной.***

Утверждение 37 можно сформулировать так.

Для того, что бы ***равенство Парсеваля*** было справедливо для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, ***необходимо*** и ***достаточно*** чтобы система $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ была ***полной***.

## Теорема об ортогональном разложении

Следующее утверждение также является следствием теоремы о проекции и часто используется. Оно называется ***теоремой об ортогональном разложении*** или ***теоремой Б. Леви***.

**Утверждение 38.** *Пусть* $\mathbf{H}$ ***гильбертово*** *пространство и* $\mathbf{H}_1$ *его* ***замкнутое*** *подпространство.*

***Любой*** *элемент* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}$ *допускает* ***представление:***

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \,, \tag{16}$$

*где* $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{H}_1$, *а* $\mathbf{z}_2$ ***ортогонально*** $\mathbf{H}_1$.

***Обе части*** *разложения* (16) *определяются по* $\mathbf{z}$ ***однозначно.***

*Доказательство.* Действительно, спроектируем $\mathbf{z}$ на $\mathbf{H}_1$ и обозначим эту ***проекцию*** $\mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$.

Так как $\mathbf{H}_1$ — ***подпространство***, то определяющее проекцию неравенство (3) превращается в равенство (5) :

$$\big(\mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}), \mathbf{h}\big) = 0, \quad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{H}_1 \,.$$

Следовательно элементы $\mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$ ***ортогональны***, и $\mathbf{z}$ допускает ***представление*** (16), в котором:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}) .$$

Предположим, что существует ***другое*** ортогональное разложение:

$$\mathbf{z} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 \in \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{H}_1 .$$

Тогда:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbb{O} .$$

Так как $\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 \in \mathbf{H}_1$, а $\mathbf{z}_2$ и $\mathbf{w}_2$ ***ортогональны*** $\mathbf{H}_1$, то из этого равенства следует:

$$\| \mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 \|^2 + \| \mathbf{z}_2 - \mathbf{w}_2 \|^2 = 0 ,$$

и, следовательно $\mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{w}_2$. □

**Утверждение 39.** ***Множество*** *элементов* $\mathbf{H}$, ***ортогональных*** *фиксированному* ***линейному*** *подпространству* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, *является* ***замкнутым подпространством*** *в* $\mathbf{H}$.

**Замечание.** Частный случай этого утверждения, когда $\mathbf{H}_1$ порождено единственным элементом $\mathbf{x}$ доказан в § 1.

Общий случай составляет содержание задачи 3 к этому параграфу и ***рассматривается*** аналогично.

**Определение 60.** ***Множество*** *элементов пространства* $\mathbf{H}$, ***ортогональных*** *фиксированному линейному* ***подпространству*** $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, *есть* ***подпространство***, *обычно* ***обозначаемое*** $\mathbf{H}_1^{\perp}$.

*Оно называется* ***ортогональным дополнением*** *к* $\mathbf{H}_1$.

С использованием нового обозначения, равенство (16) можно символически записать в виде: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_1^{\perp}$ .

Это равенство нужно понимать так: ***любое*** подпространство $\mathbf{H}_1$ ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}$ порождает разложение $\mathbf{H}$ в сумму ( в смысле равенства (16) ) ***двух ортогональных*** друг другу ***подпространств***, одно из которых совпадает с $\mathbf{H}_1$ .

## Теорема об общем виде линейного функционала

Одним из следствий теоремы об ортогональном разложении является теорема ***об общем виде линейного непрерывного функционала*** в ***гильбертовом пространстве***.

**Теорема 16** (***Ф. Рисс).*** ***Любой линейный функционал*** $\ell(\mathbf{x})$ , *определенный в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ , *имеет вид:*

$$\ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell) , \tag{17}$$

*где элемент* $\mathbf{x}_\ell \in \mathbf{H}$ *и* ***единственным*** *образом определяется по* $\ell(\mathbf{x})$ .

*При этом:*

$$\| \ell \| = \| \mathbf{x}_\ell \| .$$

*Доказательство.* Рассмотрим в $\mathbf{H}$ ***множество*** $\mathbf{N}_\ell$ элементов, на которых функционал $\ell(\mathbf{x})$ ***обращается*** в $0$ .

В силу ***линейности*** и ***непрерывности*** функционала $\ell$ множество $\mathbf{N}_\ell$ — линейное ***подпространство*** в $\mathbf{H}$ .

Рассмотрим $\mathbf{N}_\ell^{\perp}$ — ***ортогональное дополнение*** $\mathbf{N}_\ell$ в $\mathbf{H}$ .

***Любые*** два элемента из $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ ***линейно зависимы***, то есть ***пространство*** $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ ***одномерно***.

Действительно, пусть $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ два различных элемента из $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$.

Тогда $\ell(\mathbf{z}_1) \neq 0, \ell(\mathbf{z}_2) \neq 0$ и ***элемент*** $\mathbf{w} = \ell(\mathbf{z_1})\,\mathbf{z_2} - \ell(\mathbf{z}_2)\,\mathbf{z}_1 \in \mathbf{N}_\ell{}^\perp$.

С другой стороны, ***очевидно***: $\ell(\mathbf{w}) = 0$ и поэтому $\mathbf{w} \in \mathbf{N}_\ell$.

Но, в силу ***ортогональности*** $\mathbf{N}_\ell$ и $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ у них нет общих точек, кроме точки $\mathbb{O}$.

Поэтому $\mathbf{w} = \mathbb{O}$ и элементы $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ ***линейно зависимы***.

Пусть $\mathbf{e}_0$ элемент $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ такой, что: $\|\,\mathbf{e}_0\,\| = 1$.

Любой элемент $\mathbf{H}$ может быть представлен в виде: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell} + \mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp}$, где $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell}$ и $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp}$ — проекции $\mathbf{x}$ на соответствующие ***подпространства***.

В силу формул (8): $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp} = (\,\mathbf{x}, \mathbf{e}_0\,) \cdot \mathbf{e}_0$.

Следовательно:

$$\ell(\mathbf{x}) = (\,\mathbf{x}, \mathbf{e}_0\,) \cdot \ell(\mathbf{e}_0) = (\,\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell\,), \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_\ell = \ell(\mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0$$

Кроме того:

$$\|\,\ell\,\| = \sup_{\|\,\mathbf{x}\,\|=1} |\,\ell(\mathbf{x})\,| = \sup_{\|\,\mathbf{x}\,\|=1} \left|\,(\,\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell\,)\,\right| \leqslant \|\,\mathbf{x}_\ell\,\|.$$

Но:

$$\ell\left(\frac{\mathbf{x}_\ell}{\|\,\mathbf{x}_\ell\,\|}\right) = \left(\frac{\mathbf{x}_\ell}{\|\,\mathbf{x}_\ell\,\|}, \mathbf{x}_\ell\right) = \|\,\mathbf{x}_\ell\,\|,$$

и, следовательно: $\|\,\ell\,\| = \|\,\mathbf{x}_\ell\,\|$.

Предположим, что $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}_\ell$ и также порождает представление того же самого линейного функционала (17): $\ell(\mathbf{x}) = (\,\mathbf{x}, \mathbf{x}'\,)$.

Тогда для $\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{H}$: $(\,\mathbf{x}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}_\ell\,) = 0$.

Полагая в последнем равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_\ell$, получаем, что $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_\ell$ и, тем самым, теорема Ф. Рисса полностью доказана. $\square$

***Упражнения и задачи к параграфу*** 2.

1. Объяснить, почему ***подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) из § 1 является ***выпуклым*** множеством.

2. Показать, что любая ( ***конечная*** ) ***ортонормированная*** система ***линейно независима***.

3. Доказать приведенное в тексте параграфа утверждение о том, что $\mathbf{H}_1^\perp$ всегда является ***замкнутым***, независимо от ***замкнутости*** или ***незамкнутости*** $\mathbf{H}_1$.

4. Показать, что система функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\, t \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

является ( ***бесконечной*** ) ***ортонормированной*** системой в пространстве $\mathbb{L}_2 [ -\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi} ]$, но она ***не полна*** в этом пространстве.

5. Показать, что любая ***счетная ортонормированная*** последовательность в ***пространстве со скалярным произведением слабо сходится*** к $\mathbb{O}$.

6*. Доказать, что ***любое*** сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ ***непрерывно изоморфно*** пространству $\ell_2$.

## 3.3 Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

### Сопряжённый оператор к линейному оператору

Пусть $\mathbf{A}$ ***линейный непрерывный*** оператор, действующий из ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}_1$ в ***гильбертово*** пространство $\mathbf{H}_2$.

Если $\mathbf{y}$ — ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}_2$, а элемент $\mathbf{x}$ ***пробегает*** $\mathbf{H}_1$, то выражение $\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} (\mathbf{Ax}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_2}$, определяет ***линейный*** функционал $\ell_{\mathbf{A}}$ в ***пространстве*** $\mathbf{H}_1$.

Так как $\big|(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})\big| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, то этот функционал ***ограничен***.

По теореме Ф. Рисса о представлении линейного непрерывного функционала, функционал $\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ может быть представлен в виде:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_2} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})_{\mathbf{H}_1}, \tag{1}$$

где $\mathbf{z}$ — некоторый ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}_1$, ***однозначно*** определенный оператором $\mathbf{A}$ и элементом $\mathbf{y}$.

Равенство (1) позволяет ***каждому*** элементу $\mathbf{y} \in \mathbf{H_2}$ поставить в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_1$.

Это соответствие, ***очевидно***, линейно, кроме того, по теореме о представлении: $\|\ell_{\mathbf{A}}\| = \|\mathbf{z}\|$.

С другой стороны, по определению ***нормы*** функционала:

$$\|\ell_{\mathbf{A}}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \big|\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\big| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \big|(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})\big| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Поэтому:

$$\| \mathbf{z} \| \leqslant \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{y} \| \tag{2}$$

и, следовательно, равенство (1) порождает ***линейный ограниченный*** оператор из $\mathbf{H}_2$ в $\mathbf{H}_1$.

Этот оператор называется ***сопряженным*** к оператору $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^*$. Таким образом, в равенстве (1) : $\mathbf{z} = \mathbf{A}^* \mathbf{y}$.

Из (2) следует, что $\| \mathbf{A}^* \| \leqslant \| \mathbf{A} \|$.

Положим в (1) $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}_1$ :

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{H}_2} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{H}_1}$$

и $\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x}) \leqslant \| \mathbf{A}^* \| \, \| \mathbf{A} \| \, \| \mathbf{x} \|^2$ и, следовательно: $\| \mathbf{A} \|^2 \leqslant \| \mathbf{A}^* \| \, \| \mathbf{A} \|$.

Откуда $\| \mathbf{A} \| \leqslant \| \mathbf{A}^* \|$, то есть ***нормы оператора*** $\mathbf{A}$ и его ***сопряженного*** $\mathbf{A}^*$ ***всегда совпадают***: $\| \mathbf{A}^* \| = \| \mathbf{A} \|$.

## Самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве

**Определение 61.** *Если пространства* $\mathbf{H}_1$ *и* $\mathbf{H}_2$ *совпадают, то* ***сопряженный*** *оператор* $\mathbf{A}^*$ *действует в том же пространстве, что и оператор* $\mathbf{A}$.

*В этом случае для* ***некоторых*** *операторов* $\mathbf{A}$ *может оказаться, что* $\mathbf{A}^*$ *и* $\mathbf{A}$ *совпадают.*

***Если*** *такое* ***совпадение*** *имеет место, то оператор* $\mathbf{A}$ *называют* ***самосопряженным***.

**Определение 62.** ***Линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$, *действующий в* ***линейном пространстве со скалярным произведением*** $\mathbf{X}$ *(не обязательно* ***полном****) называется* ***симметричным****, если:*

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}: \qquad (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \tag{3}$$

Из определения ***самосопряженного*** оператора в ***гильбертовом*** пространстве следует, что для ***непрерывного*** оператора в гильбертовом пространстве, из ***симметричности*** следует ***самосопряженность*** и, ***наоборот***.

Поэтому для ***ограниченных*** линейных операторов в гильбертовом пространстве термины ***симметричный*** и ***самосопряженный*** характеризуют одно и тоже ***свойство*** оператора и они взаимозаменяемы.

## Собственные векторы оператора в гильбертовом пространстве

Остальная часть этого параграфа посвящена исследованию ***симметричного*** (самосопряженного) ***вполне непрерывного*** оператора $\mathbf{A}$ в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

Согласно параграфу 3 главы II, мы называем элемент $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$ пространства $\mathbf{H}$, в котором действует оператор $\mathbf{A}$, ***собственным вектором*** (или элементом), если для некоторого действительного числа $\lambda$ выполнено равенство:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \tag{4}$$

Число $\lambda$ называется ***собственным значением*** оператора $\mathbf{A}$, соответствующим ***собственному вектору*** $\mathbf{x}$.

**Утверждение 40.** *Множество* *собственных векторов* ***линейного непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$, *соответствующих* ***фиксированному*** *собственному значению* $\lambda$, *образуют* ***подпространство*** *в* $\mathbf{H}$, *а абсолютная величина* ***любого*** *собственного значения* ***не превышает*** $\| \mathbf{A} \|$.

Доказательство этого утверждения ***непосредственно*** следует из (4).

## Существование собственного вектора у вполне непрерывного оператора

Собственные векторы существуют не у ***всякого*** линейного ограниченного оператора в $\mathbf{H}$. Однако справедлива

**Теорема 17.** *У* ***любого симметричного*** *(самосопряженного)* ***вполне непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$, *действующего в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ *и* ***отличного*** *от оператора* $\mathbf{O}$, ***существует ненулевое собственное значение*** *и соответствующий ему* ***собственный вектор***.

*Доказательство.* Рассмотрим функционал: $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax})$.

Поскольку $\mathbf{A}$ ***линейный ограниченный*** оператор, то:

$$\sup_{\| \mathbf{x} \| = 1} \Phi(\mathbf{x}) = \| \mathbf{A} \|^2 .$$

По определению ***верхней грани***, существует последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$, $\| \mathbf{x}_n \| = 1$, такая, что: $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(\mathbf{x}_n) = \| \mathbf{A} \|^2$.

Поскольку $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывен***, последовательность $\{ \mathbf{Ax}_n \}$ содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность.

Ей соответствует ***подпоследовательность*** последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$, которую мы ***обозначим*** $\{\mathbf{f}_n\}$.

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\mathbf{f}_n) = \|\mathbf{A}\|^2, \quad \|\mathbf{f}_n\| = 1$, и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}\mathbf{f}_n = \mathbf{z}, \quad (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\mathbf{f}_n) = \|\mathbf{A}\|^2 \tag{4}$$

Рассмотрим выражение:

$$\Big\| \mathbf{A^2 f}_n - \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \mathbf{f}_n \Big\|^2 = \big(\mathbf{A^2 f}_n, \mathbf{A^2 f}_n\big) - 2\|\mathbf{A}\|^2 \cdot \big(\mathbf{A^2 f}_n, \mathbf{f}_n\big) + \|\mathbf{A}\|^4 \tag{5}$$

В силу (4) и ***симметричности*** оператора $\mathbf{A}$ :

$$\lim_{n\to\infty} \big(\mathbf{A^2 f}_n, \mathbf{A^2 f}_n\big) = (\mathbf{Az}, \mathbf{Az}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(\mathbf{A^2 f}_n, \mathbf{f}_n\big) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{Af}_n, \mathbf{Af}_n) = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{A}\|^2 .$$

Поэтому ***правая часть*** равенства (5) имеет ***предел*** при $n \to \infty$ равный:

$$(\mathbf{Az}, \mathbf{Az}) - \|\mathbf{A}\|^4 \leqslant 0 \tag{6}$$

***Левая часть*** равенства (5), очевидно, имеет тот же ***предел***.

В силу ***положительности*** обеих частей равенства (5) при любом $n = 1, 2, \ldots,$ неравенство (6) выполняется, как равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| \mathbf{A^2 f}_n - \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \mathbf{f}_n \Big\| = 0 .$$

В силу (4), отсюда следует ***сходимость*** последовательности $\{\mathbf{f}_n\}$ к некоторому элементу $\mathbf{f}$, $\|\mathbf{f}\| = 1$, и:

$$\mathbf{A^2 f} - \|\mathbf{A}\|^2 \cdot \mathbf{f} = \mathbb{O} \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать в виде:

$$\Big(\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\| \cdot \mathbf{E}\Big) \cdot \Big(\mathbf{A} - \|\mathbf{A}\| \cdot \mathbf{E}\Big)\mathbf{f} = \mathbb{O} ,$$

или:

$$\Big(\mathbf{A} + \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{E}\Big) \cdot \Big(\mathbf{Af} - \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{f}\Big) = \mathbb{O}\,.$$

Последнее равенство возможно только в том случае, если выполнено хотя бы одно из условий:

**1°**. $\mathbf{f}$ — ***собственный вектор*** $\mathbf{A}$ (с ***собственным значением*** $\lambda = \|\,\mathbf{A}\,\|$),

**2°**. $\Big(\mathbf{Af} - \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{f}\Big)$ — ***собственный вектор*** оператора $\mathbf{A}$ (с ***собственным значением*** $\lambda = -\|\,\mathbf{A}\,\|$).

Теорема доказана. □

### Теорема о спектральном разложении вполне непрерывного оператора

Так как ***любое*** собственное значение по модулю не превосходит $\|\,\mathbf{A}\,\|$, ***доказательство*** теоремы демонстрирует у всякого самосопряжённого вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$ наличие хотя бы одного собственного ***вектора*** с собственным ***значением*** $\lambda_1 : |\lambda_1| = \|\,\mathbf{A}\,\|$.

Пусть $\mathbf{e}_1$ ***нормированный собственный вектор*** с ***собственным значением*** $-\|\,\mathbf{A}\,\|$ или $\|\,\mathbf{A}\,\|$.

В силу теоремы ***об ортогональном разложении*** из § 2, пространство $\mathbf{H}$ можно представить в виде: $\mathbf{H} = \{\mathbf{e}_1\} \oplus \{\mathbf{e}_1\}^{\perp} = \{\mathbf{e}_1\} \oplus \mathbf{H}_1$, где ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$ — ***ортогональное дополнение*** к ***одномерному подпространству*** $\{\mathbf{e}_1\}$ в $\mathbf{H}$, и, поэтому, само является ***гильбертовым*** пространством.

Кроме того ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$ ***инвариантно*** относительно действия оператора $\mathbf{A}$, то есть: $\mathbf{A}(\mathbf{H}_1) \subseteq \mathbf{H}_1$.

Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_1$, то есть $(\mathbf{z}, \mathbf{e}_1) = 0$, то:

$$(\mathbf{Az}, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{z}, \mathbf{Ae}_1) = \lambda_1 \cdot (\mathbf{z}, \mathbf{e}_1) = 0 .$$

В силу сказанного, оператор $\mathbf{A}$ можно теперь рассматривать как оператор, ***действующий*** лишь в $\mathbf{H}_1$, и повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, если $\mathbf{A}\big(\mathbf{H}_1\big) \neq \mathbb{O}$, получим новый ***нормированный собственный вектор*** $\mathbf{e}_2$ с некоторым ***собственным значением*** $\lambda_2$.

При этом, т.к. $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, то: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2|$ и $\mathbf{e}_2$ ***ортогонален*** $\mathbf{e}_1$.

Далее можно рассмотреть ***подпространство*** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, порожденное векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и его ***ортогональное дополнение*** в $\mathbf{H}$, подпространство $\mathbf{H}_2$: $\mathbf{H} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \oplus \mathbf{H}_2$.

Аналогично доказательству ***инвариантности*** $\mathbf{H}_1$ относительно $\mathbf{A}$, можно показать ***инвариантность*** $\mathbf{H}_2$ относительно $\mathbf{A}$.

Рассматривая оператор $\mathbf{A}$, как оператор из $\mathbf{H}_2$ в $\mathbf{H}_2$, если $\mathbf{A}\big(\mathbf{H}_2\big) \neq \mathbb{O}$, можно получить ***нормированный собственный вектор*** $\mathbf{e}_3$ с ***собственным значением*** $\lambda_3$.

При этом: $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ***взаимно ортогональны***.

Этот ***процесс выделения ортонормированных собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$ можно ***продолжать*** и дальше.

При этом образуется ***последовательность собственных векторов***: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots$, и соответствующая ***последовательность***

***собственных значений***: $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \cdots, \lambda_n,\, \cdots$, такая, что:

$$\left|\lambda_1\right| \geqslant \left|\lambda_2\right| \geqslant \left|\lambda_3\right| \geqslant \cdots \geqslant \left|\lambda_n\right| \geqslant \cdots \tag{8}$$

**Утверждение 41.** *Какое бы число* $\delta > 0$ *мы ни взяли, последовательность* (8) *содержит лишь* ***конечное*** *число членов* $\lambda_k$, *таких, что:* $\lambda_k \geqslant \delta$.

*Доказательство.* Действительно, пусть утверждение не верно, тогда $\exists$ ***бесконечная*** система $\{\mathbf{e}_n\}$ ***ортонормированных собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$ и

$$\|\mathbf{A}\mathbf{e}_m - \mathbf{A}\mathbf{e}_n\|^2 = \|\lambda_m\,\mathbf{e}_m - \lambda_n\,\mathbf{e}_n\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2 \geqslant 2\,\delta^2 \tag{9}$$

для всех натуральных $m$ и $n$.

Но, неравенство (9), ***очевидно***, противоречит ***полной непрерывности*** оператора $\mathbf{A}$. □

Из этого утверждения следует:

**1°**. Каждому ***собственному значению*** соответствует лишь ***конечное*** число ***линейно независимых собственных элементов*** оператора $\mathbf{A}$.

**2°**. ***Последовательность*** собственных чисел, ***не равных*** $0$, — $\{\lambda_n\}$, — ***или сходится*** к $0$, ***или содержит*** лишь ***конечное*** число членов.

Если ***последовательность*** собственных чисел ***бесконечна***, то ей соответствует ***бесконечная*** ( счетная ) ***последовательность*** ортонормированных ***собственных векторов*** $\{\mathbf{e}_n\}$.

Пусть $\mathbf{x}$ некоторый элемент пространства $\mathbf{H}$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированная система собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, для которых $|\,\lambda_i\,| > 0$.

В § 2 мы показали, что

$$\mathbf{x} = \sum_i (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)\, \mathbf{e}_i + \mathbf{h}$$

и $\mathbf{h}$ ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ переводит элемент $\mathbf{h}$ в $\mathbb{O}_{\mathbf{H}}$, то есть $\mathbf{h} \in \mathbf{ker A}$.

Действительно, элемент $\mathbf{h}$ ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}$ и, следовательно, $\forall\, N \geqslant 1$ подпространству $\mathbf{H}_N \subseteq \mathbf{H}$, порожденному элементами $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Это означает, что $\mathbf{h} \in \bigcap\limits_N \mathbf{H}_N^{\perp}$.

Каждое подпространство $\mathbf{H}_N^{\perp}$ инвариантно относительно действия оператора $\mathbf{A}$.

По построению, норма оператора $\mathbf{A}$ относительно пространства $\mathbf{H}_N^{\perp}$ не превосходит $|\,\lambda_N\,|$.

Пусть ненулевых $\lambda_i$ конечное число — $N$.

Тогда оператор $\mathbf{A}$ переводит все элементы подпространства $\mathbf{H}_N^{\perp}$ в $\mathbb{O}_{\mathbf{H}}$.

( В противном случае мы могли бы выполнить ещё один шаг процесса и получить ещё один ***ненулевой*** собственный элемент. )

Поэтому, в рассматриваемом случае: $\mathbf{h} \in \mathbf{ker A}$.

Если число ненулевых $\lambda_i$ бесконечно, то при $\mathbf{h} \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{H}_i^{\perp}$ справедливо неравенство: $\|\,\mathbf{Ah}\,\| \leqslant |\,\lambda_i\,|$.

Т.к. $\lim\limits_{i\to\infty} |\,\lambda_i\,| = 0$, то $\|\,\mathbf{Ah}\,\| = 0$ и снова $\mathbf{h} \in \mathbf{ker A}$. Сказанное выше можно представить в виде теоремы:

**Теорема 18** (***о спектральном разложении***). *Любой* ***симметричный вполне непрерывный*** *оператор в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ *имеет* ***конечную*** *или* ***счетную*** *систему* ***ортонормированных собственных векторов*** $\{\mathbf{e}_i\}$ *с* ***ненулевыми собственными значениями*** $\lambda_i$ .

***Любой*** *элемент* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *может быть представлен в виде:*

$$\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}_i + \mathbf{h}, \quad \textit{где} \quad \mathbf{Ah} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}\,, \quad \textit{и}$$

$$\mathbf{Ax} = \sum_i \lambda_i \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \tag{10}$$

***Равенство*** (10) *называется* ***спектральным разложением*** *оператора* $\mathbf{A}$ .

Доказанная теорема обобщает известное утверждение ***линейной алгебры*** о том, что ***симметричная*** матрица имеет в ***некотором*** ортогональном базисе ***диагональный вид***.

Из утверждений этой теоремы следует, что ***ортонормированная система собственных векторов*** с ***ненулевыми*** собственными значениями симметричного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$ ***полна*** в $\mathbf{H}$ ***тогда и только тогда***, когда: $\mathbf{ker A} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$ .

***Упражнения и задачи к параграфу*** 3.

1. Показать, что любой ***непрерывный*** оператор в ***евклидовом*** пространстве $\mathbb{E}^n$ ***вполне непрерывен***.

2. Пусть для всякого $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_2$ , оператор $\mathbf{A}$ действует по формуле:

$$\mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2j}$$

Показать, что оператор $\mathbf{A}$ — ***вполне непрерывный*** оператор из $\ell_2$ в $\mathbb{E}^1$.

3. Доказать, что ***линейный*** оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^n$, ***симметричен*** тогда и только тогда, когда ***симметрична*** представляющая его ***матрица***.

4. Выписать ***сопряженный*** оператор к оператору $\mathbf{A}$ в $\mathbb{E}^2$, ***определяемому*** матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

5. Показать, что $\big(\mathbf{A}^*\big)^* = \mathbf{A}$ и $\big(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\big)^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

6. Проверить, что если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ ***сопряжённые*** друг другу операторы, то $\mathbf{A} + \mathbf{A}^*$, $\mathbf{AA}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ — ***самосопряжённые*** операторы и $\|\,\mathbf{AA}^*\,\| = \|\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\,\| = \|\,\mathbf{A}\,\|^2$.

7. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\,\mathbf{e}_i\,\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Тогда всякому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ соответствует его ***ряд Фурье*** относительно системы $\{\,\mathbf{e}_i\,\}$, $i = 1, 2, \ldots$ : $\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathbf{e}_i$

Оператор $\mathbf{A}$ действующий на всякий элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ по формуле: $\mathbf{Ax} \stackrel{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot c_i \cdot \mathbf{e}_i$ , называется оператором ***нормального*** типа.

Показать, что оператор ***нормального*** типа в гильбертовом пространстве будет иметь ***ограниченный*** обратный ***тогда*** и ***только тогда***, когда ***существует*** такая постоянная величина $\gamma > 0$, что выполняется неравенство: $\inf\limits_n |\,\lambda_n\,| \geqslant \gamma$.

8. Показать, что оператор ***нормального*** типа в гильбертовом пространстве (см. определение в упражнении 7) будет ***вполне непрерывным*** тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

9*. Показать, что для всякого ***ограниченного*** оператора $\mathbf{A}$, действующего в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ по формуле $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, в пространстве $\ell_2$ существует "***подобный***" оператору $\mathbf{A}$, ***ограниченный*** оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\|\mathcal{A}\|_{\ell_2 \to \ell_2} = \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{H}\to\mathbf{H}}$.

Указание. В соответствии с задачей 6 § 2, любое сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ ***непрерывно изоморфно*** пространству $\ell_2$. Поэтому всякой "паре" векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \overset{def}{=} \mathbf{Ax} \in \mathbf{H}$, отвечает при указанном изоморфизме "пара" векторов $\check{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_2$ и $\check{\mathbf{y}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \ell_2$, которая и определяет действие оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\ell_2$ по формуле: $\mathcal{A}\check{\mathbf{x}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \ell_2$.

10. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ в пространстве $\ell_2$, построенный в предыдущей задаче для заданного оператора $\mathbf{A}$, будет ***вполне непрерывным*** тогда и только тогда, когда вполне непрерывным будет исходный оператор $\mathbf{A}$.

11. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Показать, что тогда всякий ***линейный*** оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ может быть задан бесконечной ***матрицей*** $\mathcal{A} = (a_{ij})$, ***определяемой*** равенством: $\mathbf{h}_j = \mathbf{Ae}_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mathbf{e}_i$.

Написать формулы для вычисления ***элементов*** $(a_{ij})$ матрицы $\mathcal{A}$.

12. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов. Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ ***ограниченный*** оператор. Показать, что тогда $\exists\, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^1_+$, что для $\forall\,(x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall\,(y_1, \ldots, y_n)$ имеет место

неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right|^2 \leqslant \mathbf{K} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

13. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, ***ортонормированных*** векторов.

Пусть $\exists\, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^1_+$, что для $\forall\,(x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall\,(y_1, \ldots, y_n)$ имеет место неравенство:

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right|^2 \leqslant \mathbf{K} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

Показать, что тогда оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ — ***ограниченный***.

14. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, ***ортонормированных*** векторов.

Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ ***ограниченный*** оператор.

Получить оценку снизу ***нормы*** оператора $\mathbf{A}$ :

$$\sup_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right\} \leqslant \|\,\mathbf{A}\,\|^2_{\mathbf{H}}$$

15. Показать, что оператор $\mathbf{A}$, заданный бесконечной ***матрицей*** $\mathcal{A} = (a_{ij})$ относительно ***полной*** системы $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, ***ортонормированных*** векторов $\{\mathbf{e}_j\}$ в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$, и действующий по формуле $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mathbf{e}_i$ ***вполне непрерывен***, если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$.

## 3.4 Примеры самосопряженных вполне непрерывных операторов в пространстве $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$

### Пример 1

Пусть $\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)$ ***непрерывная*** на множестве $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\times[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функция двух переменных.

Из свойств интеграла ( Лебега ) следует, что для любого элемента $x\,(s)$ из пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***корректно*** определена функция

$$y\,(\,t\,)\ =\ \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)x\,(s)\,ds \tag{1}$$

**Утверждение 42.** ***Интеграл*** *в правой части* (1) *определяет* ***линейный*** *оператор из* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *в* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *и этот оператор* ***вполне непрерывен***.

*Доказательство.* Действительно, интеграл в правой части (1) зависит от параметра $t$ и определяет ***поточечно*** некоторую функцию.

Рассмотрим ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***множество*** $\mathbf{M}_r$ элементов $\mathbf{x}\,\equiv\,x\,(s)$ :

$$\mathbf{M}_r:\ \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}x^2\,(s)\,ds\ \leqslant\ r^2$$

***Обозначим*** $\mathbf{K}\,=\,(\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}\,)^{1/2}\cdot r\,.$

Тогда, в силу неравенства ***Коши - Буняковского***:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}|\,x\,(s)\,|\,ds\ \leqslant\ (\,\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}\,)^{1/2}\cdot\left[\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}x^2\,(s)\,ds\right]^{1/2}\ \leqslant\ \mathbf{K}$$

Покажем, что образ множества $\mathbf{M}_r \subset \mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — ***множество*** $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$, ***компактно*** в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а тогда ***и в пространстве*** $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Действительно, т.к функция $\mathcal{K}(t, s)$ ***непрерывна*** на ***компакте*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то, в силу утверждения 16 главы 1, эта функция ***равномерно непрерывна*** на указанном компакте, а потому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что, в частности:

$$|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon),$$
$$t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad \forall s \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

Поэтому все функции $y(t)$ из множества $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$, во-первых, ***равностепенно непрерывны***, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:

$$\Big| y(t_1) - y(t_2) \Big| = \left| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_1, s) x(s)\, ds - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_2, s) x(s)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Big| \mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s) \Big| \cdot \Big| x(s) \Big|\, ds < \varepsilon \tag{2}$$

А, во-вторых, ***ограничены*** одной и той же ***константой***:

$$\left| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Big| \mathcal{K}(t, s) \Big|^2 ds \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \Big| x(s) \Big|^2 ds} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{L}_2} \cdot \max_{[\mathbf{a},\mathbf{b}] \times [\mathbf{a},\mathbf{b}]} |\mathcal{K}(t, s)| \cdot \sqrt{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \tag{3}$$

Поэтому, если $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant r$, то функции, ***определяемые*** интегралом (1), согласно теореме Арцела (см. § 5, главы 1) образуют подмножество, которое ***компактно*** в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

В свою очередь, каждая такая функция порождает ***элемент*** $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ (§ 4 главы 1) и, следовательно, ***интегральный оператор*** (1) порождает ***отображение*** $\mathbf{A}$ из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В силу свойства ***линейности интеграла***, это отображение ***линейное***.

Пусть $Y(t)$ ***элемент*** $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, ***содержащий*** функцию $y(t)$, равную значению интеграла в правой части (1).

Если последовательность функций $\{\,y_n(t)\,\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то последовательность элементов $\{\,Y_n(t)\,\} \in \mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Действительно:

$$\|\,\mathbf{Y}_m - \mathbf{Y}_n\,\|^2_{\mathbb{L}_2} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [y_m(t) - y_n(t)]^2\,ds \leqslant \|\,\mathbf{y}_m - \mathbf{y}_n\,\|^2_{\mathbb{C}} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (4)$$

Так как функции $y(t)$, получающиеся при отображении $\mathbf{A}$ из элементов $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, принадлежащих шару: $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant r$, образуют, как мы установили, ***компактное*** множество в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то, в силу (4), образ шара $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant r$ при отображении $\mathbf{A}$ ***компактен*** в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и, следовательно, ***интегральный оператор*** (1) — ***линейный вполне непрерывный*** оператор из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. $\square$

**Утверждение 43.** *Если* $\mathcal{K}(t,\,s) = \mathcal{K}(s,\,t)$, *то полученный оператор будет* ***симметричным*** *(самосопряженным) в* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

*Доказательство.* Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то:

$$\begin{aligned}(\mathbf{z}, \mathbf{Ax}) &= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left( z(t) \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds \right) dt = \\ &= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x(s) \cdot \left( \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} z(t) \mathcal{K}(t, s)\, dt \right) ds = (\mathbf{x}, \mathbf{Az})\end{aligned} \tag{5}$$

Последнее равенство справедливо в силу предположенной ***независимости*** значений функции $\mathcal{K}(t, s)$ от перестановки ее аргументов. □

**Замечание.** При выводе равенства (5) мы воспользовались возможностью в нашем случае ***переставлять*** пределы интегрирования в ***повторном*** интеграле Лебега (см. [1], [7]).

## Пример 2

Пусть $f(t)$ ***непрерывная на отрезке*** $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ функция.

Рассмотрим ***дифференциальное*** уравнение

$$-y'' = f \tag{6}$$

с ***краевыми условиями***

$$y(\mathbf{0}) = y(\boldsymbol{\pi}) = 0 .$$

Решение ***краевой задачи*** (6) можно выразить ***в квадратурах***, т.е. представить в виде интегралов от заданной функции $f(t)$.

Действительно, ***общее решение*** дифференциального уравнения (6) записывается в виде:

$$y(t) = -\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\, d\tau\, ds + \mathbf{C}t + \mathbf{C}_1 ,$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1$ — произвольные постоянные.

Для выполнения ***дополнительных условий*** нужно, чтобы:

$$\mathbf{C}_1 = 0\,, \qquad \big(y(\mathbf{0}) = 0\big)\,,$$

и

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\,d\tau\,ds\,, \qquad \big(y(\boldsymbol{\pi}) = 0\big)\,.$$

Таким образом:

$$y(t) = -\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\,d\tau\,ds + \frac{t}{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\,d\tau\,ds \tag{7}$$

В ***повторных*** интегралах правой части этого равенства можно ***поменять*** порядок интегрирования.

Произведя эту операцию, получим:

$$y(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} f(\tau)(\tau - t)\,d\tau + \frac{t}{\boldsymbol{\pi}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} f(\tau)(\boldsymbol{\pi} - \tau)\,d\tau$$

Это равенство можно записать в виде:

$$y(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}(t, \tau) f(\tau)\,d\tau\,, \tag{8}$$

где

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{cases} \tau - t + \frac{t}{\pi}(\boldsymbol{\pi} - \tau), & \tau \leqslant t \\ \frac{t}{\pi}(\boldsymbol{\pi} - \tau), & \tau > t \end{cases}$$

или

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{cases} \tau\left(1 - \frac{t}{\pi}\right), & \tau \leqslant t \\ t\left(1 - \frac{\tau}{\pi}\right), & \tau > t \end{cases}$$

***Ядро интегрального оператора*** (8) — $\mathcal{K}(t, \tau)$, называется ***функцией Грина краевой задачи*** (6).

***Функция Грина***, во-первых, ***симметрична*** относительно своих аргументов $t, \tau$, а, во-вторых, ***непрерывна*** всюду на компакте $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \times [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, и, в-третьих, удовлетворяет ***условию Липшица*** по первому аргументу (см. задачу 1 к этому параграфу).

Поэтому (см. пример 1) — ***интегральный оператор***, определяемый формулой (8), является ***вполне непрерывным симметричным*** оператором из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ и для него справедлива доказанная в § 3 теорема ***о спектральном разложении***.

В этом конкретном случае можно явно найти ***собственные функции*** и соответствующие им ***ненулевые собственные значения***.

Действительно, искомые ***собственные функции*** оператора (8) удовлетворяют равенству:

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}\,(t,\, s)\,y\,(s)\,ds \;=\; \lambda \cdot y\,(t) \tag{9}$$

Каждую конкретную функцию $y\,(s) \in \mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ интегральный оператор (8) переводит в ***непрерывную*** функцию и, следовательно, ***любой*** собственный элемент соответствующего оператора — ***непрерывная*** на $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ функция (точнее ***класс*** эквивалентных функций, — элемент пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, содержащий непрерывную функцию).

Но, если $y\,(s)$ ***непрерывна***, то, в силу построения оператора (8), интеграл в левой части (9) ***дважды дифференцируем*** по $t$.

Если ***обозначить*** его через $z\,(t)$, то в силу (7):

$$-z''\,(t) \;=\; y\,(t), \quad z\,(\mathbf{0}) \;=\; z\,(\boldsymbol{\pi}) \;=\; 0\,.$$

В силу (9): $y\,(\mathbf{0}) \;=\; y\,(\boldsymbol{\pi}) \;=\; 0$.

Кроме того, из (9) следует, что:

$$z''(t) = \lambda \cdot y''(t) .$$

Следовательно, ***ненулевые*** $\lambda$ и $y(t)$ должны быть ***нетривиальными*** решениями следующей ***краевой задачи***, называемой ***задачей Штурма - Лиувилля***:

$$-\lambda y''(t) = y(t), \quad y(\mathbf{0}) = y(\boldsymbol{\pi}) = 0 \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda \leqslant 0$ ***нетривиального*** решения задачи (10) ***не существует***.

При $\lambda > 0$ ***общее решение*** дифференциального уравнения из (10) имеет вид:

$$y(t) = \mathbf{C_1} \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \mathbf{C_2} \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

Так как $y(\mathbf{0}) = 0$, то $\mathbf{C}_2 = 0$.

Удовлетворение второго ***краевого условия*** $y(\boldsymbol{\pi}) = 0$ возможно, если:

$$\sin \frac{\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = n\,\boldsymbol{\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда:

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

***Одномерное*** пространство, порожденное каждым таким ***собственным значением***, имеет вид:

$$\{ c \cdot \sin n\,t \} .$$

Т.к.:

$$\| \sin n\,t \|_{\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}]} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \sin^2 n\,t\,dt = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} ,$$

то система $\left\{ \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}} \sin n\, t \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ — ***ортонормированная система собственных функций*** оператора (8) и $\forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ :

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}\,(\,t,\ s\,) f\,(s)\, ds \ = \ \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left( \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} f\,(s) \sin\, ns\, ds \right) \cdot \sin\, nt$$

***Можно*** показать, что полученная ортонормальная система ***полна*** в $\mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Для этого нужно убедиться, что ***ядро*** оператора (8) — $\mathbf{ker A}$, — содержит только ***нулевой элемент*** $\mathbb{O}$ или ***непосредственно*** установить, что в $\mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ нет ***ненулевых*** элементов, ***ортогональных всем*** функциям $\sin n\, t$, $n = 1, 2, \ldots$.

В последнем можно убедиться, используя некоторые результаты о сходимости ***стандартных рядов Фурье***.

Мы не будем на этом останавливаться.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 4.

1. Проверить ***симметричность функции Грина*** в (8) и выполнение ***условия Липшица*** по первому аргументу.

2. Не используя явный вид решения ***задачи Штурма - Лиувилля*** (10), показать, что ***любые*** два ее решения, с разными $\lambda_i$, ***ортогональны***.

## 3.5 Линейные уравнения с вполне непрерывным симметричным оператором

### Представление решения

Рассмотрим ***операторное*** уравнение в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ :

$$\lambda\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}\,, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный симметричный*** оператор, $\lambda$ — некоторое действительное ***число***.

Используя доказанную в § 3 теорему ***о спектральном разложении*** оператора $\mathbf{A}$, можно получить ***явное*** представление решения уравнения (1) через ***собственные значения*** и ***собственные элементы*** оператора $\mathbf{A}$.

Пусть $\{\lambda_i\}$ последовательность ***ненулевых*** собственных значений оператора $\mathbf{A}$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ соответствующая последовательность ***ортонормированных*** собственных элементов.

***Любой*** элемент $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$ допускает, согласно теореме о спектральном разложении § 3, представление:

$$\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{c_i}\,\mathbf{e_i} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \in \mathbf{kerA}\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{c}_i$ и элемент $\mathbf{h}$ ***однозначно*** определяются по $\mathbf{x}$.

Поэтому, ***любое*** решение уравнения (1) имеет представление в виде (2).

Представим элемент $\mathbf{y}$ в виде:

$$\mathbf{y} = \sum_i (\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{e}_i + \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\mathbf{y})$$

В силу (1):

$$\lambda\,\mathbf{h} + \lambda\cdot\sum_i \mathbf{c}_i\,\mathbf{e}_i - \sum_i \lambda_i\cdot\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{e}_i = \sum_i (\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i + \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)$$

Учитывая ***ортогональность*** $\mathbf{kerA}$ и ***подпространства***, образованного всеми $\mathbf{e}_i$, получим:

$$\lambda\,\mathbf{h} = \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,), \qquad \sum_i \mathbf{c}_i\,(\,\lambda - \lambda_i\,)\cdot\mathbf{e}_i = \sum_i (\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i \tag{3}$$

**Зависимость решения уравнения (1) от параметра $\lambda$**

Рассмотрим несколько ***возможных*** случаев ***взаимного*** расположения значений параметра $\lambda$ и собственных значений оператора $\mathbf{A}$ - $\{\,\lambda_i\,\}$.

**1°.** $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\lambda} \neq \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{i}$, $i = 1, 2, \ldots.$

Из равенств (3) можно ***однозначно*** определить ***неизвестный*** элемент $\mathbf{h}$ и ***коэффициенты*** $\mathbf{c}_i$.

Именно:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)}{\lambda}\,; \qquad \mathbf{c}_i = \frac{(\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)}{\lambda - \lambda_i}$$

Решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)}{\lambda} + \sum_i \frac{(\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i}{\lambda - \lambda_i} \tag{4}$$

Так как, по предположению $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ то:

$$d = \inf_i \left|\,\lambda - \lambda_i\,\right| \neq 0$$

Действительно:

$$\left|\,\lambda - \lambda_i\,\right| \geqslant \Big|\,|\,\lambda\,| - |\,\lambda_i\,|\,\Big|$$

Если число ***ненулевых*** $\lambda_i$ ***конечно***, то правая часть этого неравенства ограничена снизу положительной постоянной.

Поэтому в рассматриваемом случае $d \neq 0$.

Если число ***ненулевых*** $\lambda_i$ ***бесконечно***, то $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

В этом случае выберем столь большое $N$, чтобы при $i \geqslant N$ выполнялось неравенство:

$$\Big|\,|\,\lambda\,| - |\,\lambda_i\,|\,\Big| \geqslant \frac{|\,\lambda\,|}{2}$$

Таким образом для $i \geqslant N$

$$|\,\lambda - \lambda_i\,| \geqslant \frac{|\,\lambda\,|}{2}$$

Для оставшихся в рассматриваемом случае номеров $i < N$ правая часть нужного неравенства ограничена снизу некоторой положительной величиной, т.к. $\lambda \neq \lambda_i,\, i = 1,\, 2,\, \ldots.$

Поэтому, и в случае бесконечного числа ***ненулевых*** $\lambda_i$, — $d \neq 0$.

Итак, в случае $\mathbf{1}^\circ$, можно утверждать, что уравнение (1) имеет ***единственное*** решение при ***любом*** $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$.

Это решение может быть представлено в виде (4).

Согласно § 3 главы II, оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$, в этом случае, имеет ***обратный*** — $\big(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A}\big)^{-1}$.

Из представления (4) следует его ***ограниченность***. Более того, ***норма*** этого оператора равна:

$$\max\left(\frac{1}{|\,\lambda\,|},\, \frac{1}{d}\right)\ ,$$

(см. задачу 1 к этому параграфу).

$\mathbf{2^\circ}$. $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, но $\boldsymbol{\lambda}$ ***совпадает*** с ***одним*** из ***собственных значений*** $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i_0}}$.

В этом случае, равенствам (3) можно удовлетворить только, если выполнено условие:

$$(\mathbf{y}, \{\mathbf{e}_{\mathbf{i_0}}\}) = 0 \tag{5}$$

Здесь $\{\mathbf{e}_{i_0}\}$ ***конечное*** множество линейно независимых ***собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$, соответствующих ***собственному значению*** $\lambda_{i_0}$.

При выполнении условия (5), равенства (3) удовлетворяются, если:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\mathbf{y})}{\lambda}\,;\ \mathbf{c}_i = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)}{\lambda - \lambda_i}, \text{ если } \lambda_i \neq \lambda_{i_0}\,;\ \mathbf{c}_i\text{—произвольно, если} \lambda_i = \lambda_{i_0}$$

Решение уравнения (1), в рассматриваемом случае, имеет вид:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\mathbf{y})}{\lambda} + \sum_{i,\, \lambda_i \neq \lambda_{i_0}} \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{i,\, \lambda_i = \lambda_{i_0}} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{e}_i \tag{6}$$

Из (6) видно, что, в случае $\mathbf{2^\circ}$, совокупность решений уравнения (1) образует ***подмножество*** (гиперплоскость) в пространстве $\mathbf{H}$, являющееся ***суммой конечномерного подпространства*** и некоторого ***фиксированного*** элемента $\mathbf{H}$.

Упомянутое ***конечномерное подпространство*** есть ***множество*** решений уравнения (1) с правой частью $\mathbf{y} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$ при $\lambda = \lambda_{i_0}$.

$\mathbf{3^\circ}$. $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$.

В этом, в некотором смысле, ***особом*** случае, из первого равенства (3) следует, что $\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\mathbf{y}) = \mathbb{O}$ и, поэтому, для разрешимости уравнения (1) ***необходимо***, чтобы его правая часть $\mathbf{y}$ была бы ***ортогональна*** $\mathbf{kerA}$.

Остальные условия (3), ***очевидно***, выполняются при:

$$\mathbf{c}_i = -\frac{(\mathbf{y},\, \mathbf{e}_i)}{\lambda_i}\ ,$$

и ***любое*** решение уравнения (1) должно иметь вид:

$$-\sum_i \frac{(\mathbf{y},\, \mathbf{e}_i)}{\lambda_i}$$

Однако, этот ***ряд*** будет определять ***элемент*** $\mathbf{H}$ только, если:

$$\sum_i \frac{(\mathbf{y},\, \mathbf{e}_i)^2}{\lambda_i^2} < \infty \tag{7}$$

Условие (7) выполнено для ***любого*** $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$, если существует лишь ***конечное*** число отличных от $0$ ***собственных значений***.

Последнее заведомо справедливо, ***например***, тогда, когда пространство $\mathbf{H}$, в котором рассматривается операторное уравнение (1), ***конечномерно***.

В ***общем случае*** условие ***сходимости*** ряда в левой части (7), — ***дополнительное*** (помимо условия ортогональности ядру оператора $\mathbf{kerA}$) условие ***на правую часть*** уравнения (1), ***обеспечивающее*** его ***разрешимость***.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 5.

1. Показать, что в случае $\mathbf{1}^\circ$ ***норма обратного*** оператора $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ равна:

$$\max\left(\frac{1}{|\,\lambda\,|},\ \frac{1}{d}\right)\ .$$

2. Пусть $\mathbf{A}$ ***линейный ограниченный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Согласно определению § 3 главы II, оператор $\mathbf{R}_\lambda = \left(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}$, если он ***непрерывен***, называется ***резольвентой*** оператора $\mathbf{A}$, а множество ***чисел*** $\lambda$, для которых резольвента ***существует***, называется ***резольвентным множеством*** оператора $\mathbf{A}$.

Показать, что ***резольвентное множество открыто*** в $\mathbb{E}^1$.

3. ***Дополнительное*** к резольвентному множеству оператора $\mathbf{A}$ ***множество*** точек ***действительной оси*** называется ***спектром*** (§ 3 главы II) оператора $\mathbf{A}$.

Описать ***спектр вполне непрерывного симметричного*** оператора $\mathbf{A}$.

Указание. Отдельно рассмотреть случаи ***конечномерного*** и ***бесконечномерного*** пространств $\mathbf{H}$.

## 3.6 Линейные уравнения с произвольным вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве

### Уравнения с оператором, обладающим замкнутой областью значений

Пусть $\mathbf{B}$ — ***линейный ограниченный*** оператор в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

**Утверждение 44.** ***Ортогональное дополнение*** *к* ***множеству значений*** *оператора* $\mathbf{B}$ – $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, *— есть* $\ker\mathbf{B}^*$, *то есть:*

$$\mathbf{B}(\mathbf{H})^{\perp} = \ker\mathbf{B}^*$$

*Доказательство.* Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})^{\perp}$, то $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$ :

$$(\mathbf{Bx}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}^{*}\mathbf{z}) = 0 .$$

Так как $\mathbf{x}$ ***произвольный*** элемент $\mathbf{H}$ то, поэтому, $\mathbf{B}^{*}\mathbf{z} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{ker B}^{*}$.

Наоборот, если $\mathbf{z} \in \mathbf{ker B}^{*}$, то из равенства соответствующих ***скалярных произведений*** следует, что:

$$(\mathbf{Bx}, \mathbf{z}) = 0 ,$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$, то есть $\mathbf{z} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})^{\perp}$.

Если $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ — ***замкнутое*** множество, то, по теореме ***об ортогональном разложении***, (см. утверждение 2 § 2 главы III):

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \oplus \mathbf{ker B}^{*} \tag{1}$$

Поэтому, для оператора $\mathbf{B}$ с ***замкнутой*** областью ***значений***, операторное уравнение:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{y} \tag{2}$$

разрешимо ***тогда*** и ***только тогда***, когда $\mathbf{y}$ ***ортогонально ядру*** $\mathbf{B}^{*}$.

□

**Замкнутость области значений оператора $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ вполне непрерывный оператор в $\mathbf{H}$ и $\lambda \neq 0$**

Нашей ближайшей целью будет установление ***замкнутости*** области ***значений*** оператора $\mathbf{B}$ вида $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\lambda \neq 0$ и $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный*** оператор в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

Предварительно установим ***замкнутость*** области ***значений*** линейного непрерывного оператора $\mathbf{B}$, действующего в ***пространстве*** $\mathbb{E}^n$.

В этом случае оператор $\mathbf{B}$ описывается квадратной ***матрицей*** размера $n \times n$, которую мы будем обозначать $\mathcal{B}$.

Из ***линейной алгебры*** известно ( ***теорема Кронекера - Капелли*** ), что ***разрешимость*** уравнения вида (2) в ***линейном*** пространстве $\mathbb{R}^n$ связана с ***рангом расширенной*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{b})$ этой системы.

Если $\mathbf{r}_1$ — ***ранг расширенной*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{b})$ совпадает с $\mathbf{r}$ — ***рангом*** матрицы $\mathcal{B}$ : $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$, то система ***разрешима***.

В ***противном*** случае разрешимости ***нет***.

Очевидно, что операторное уравнение (2) в ***пространстве*** $\mathbb{E}^n$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно разрешимо в ***линейном*** пространстве $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что множество $\mathbf{B}(\mathbb{E}^n)$ ***не замкнуто*** и ***ранг*** $\mathcal{B}$ равен $\mathbf{r}$.

Тогда, для некоторой ***предельной точки*** $\mathbf{y}$ множества $\mathbf{B}(\mathbb{E}^n)$, ***ранг*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{y})$ ***больше*** $\mathbf{r}$, то есть в ***расширенной*** матрице найдется ***подматрица*** размера $(\mathbf{r}+\mathbf{1}) \times (\mathbf{r}+\mathbf{1})$ с определителем ***не равным*** $0$.

Так как определитель ***непрерывная*** функция ***элементов*** матрицы, то и в ***расширенной*** матрице $(\mathcal{B}; \tilde{\mathbf{y}})$, где $\| \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \|_{\mathbb{E}^n}$ достаточно ***мала***, ***определитель*** соответствующей ***подматрицы*** будет отличен от $0$ и система линейных уравнений, соответствующая уравнению (2), будет ***неразрешима*** для ***всех*** правых частей $\tilde{\mathbf{y}}$, ***близких*** по норме $\mathbb{E}^n$ к $\mathbf{y}$.

Но, это противоречит тому, что $\mathbf{y}$ — ***предельная*** точка области ***разрешимости***.

Итак, область ***значений любого линейного*** (непрерывного) оператора $\mathbf{B}$ в $\mathbb{E}^n$ ***замкнута*** и справедливо равенство $(1)$.

## Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (случай операторов конечного ранга)

Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ и $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$, $k = 1, \ldots, N$, — две ***линейно независимые системы*** элементов пространства $\mathbf{H}$.

Эти системы позволяют ***определить*** линейный оператор в пространстве $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_k) \cdot \mathbf{e}_k \tag{3}$$

Область ***значений*** оператора $\mathbf{A}$ лежит в ***конечномерном подпространстве***, образованном системой $\{\mathbf{e}_k\}$.

Поэтому такие операторы часто называют ***операторами конечного ранга***.

***Непосредственно*** проверяется, что

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{y}, \mathbf{e}_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k \tag{4}$$

Кроме того, как оператор $\mathbf{A}$, так и оператор $\mathbf{A}^*$ ***вполне непрерывны*** (см. упражнение 1 к этому параграфу).

Пусть $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, $\lambda \neq 0$, где $\mathbf{A}$ задается равенством $(3)$.

В дальнейших рассуждениях будем, ***без ограничения общности***, считать $\lambda = 1$.

Из определения ***сопряженного*** оператора ***непосредственно*** следует (с учетом соглашения: $\lambda = 1$), что $\mathbf{B}^* = \mathbf{E} - \mathbf{A}^*$.

Рассмотрим три ***тесно связанные*** между собой операторных уравнения:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{y}\,, \tag{5}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbb{O}\,, \tag{6}$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{A}^*\mathbf{z} = \mathbb{O}\,. \tag{7}$$

В силу (3), ***решение*** уравнения (5), если оно существует, ***должно*** иметь вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^{N} c_i\,\mathbf{e}_i\,, \tag{8}$$

где $c_i$ некоторые числа.

Подставляя выражение (8) в уравнение (5), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k\,\mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_i\,(\,\mathbf{e}_i,\,\boldsymbol{\psi}_k\,)\cdot\mathbf{e}_k = \mathbf{Ay} = \sum_{k=1}^{N}(\,\mathbf{y},\,\boldsymbol{\psi}_k\,)\cdot\mathbf{e}_k$$

или:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(c_k - \sum_{i=1}^{N} c_i\,(\,\mathbf{e}_i,\,\boldsymbol{\psi}_k\,) - (\,\mathbf{y},\,\boldsymbol{\psi}_k\,)\right)\cdot\mathbf{e}_k = \mathbb{O}\,.$$

Так как $\{\mathbf{e}_k\}$, по предположению, ***линейно независимы***, то отсюда следует:

$$c_k - \sum_{i=1}^{N} c_i\,(\,\mathbf{e}_i,\,\boldsymbol{\psi}_k\,) = (\,\mathbf{y},\,\boldsymbol{\psi}_k\,), \quad k = 1,\,\ldots\,,N \tag{9}$$

Мы получили ***систему*** линейных алгебраических уравнений с ***матрицей***:

$$a_{i\,k} = \boldsymbol{\delta}_{i\,k} - (\,\mathbf{e}_i,\,\boldsymbol{\psi}_k\,)$$

для нахождения ***коэффициентов*** в формуле (8), где $\boldsymbol{\delta}_{i\,k}$ — символ Кронекера:

$$\boldsymbol{\delta}_{i\,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k\,. \end{cases}$$

Линейное операторное уравнение (5) и ***система линейных алгебраических уравнений*** (9) ***эквиваленты*** в том смысле, что $\mathbf{y}$ принадлежит образу пространства $\mathbf{H}$ при действии на него оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ :

$$\mathbf{y} \in \{ (\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{H}) \} ,$$

***тогда*** и ***только тогда***, когда ***разрешима*** система (9) и ***каждое*** решение (9) порождает ***решение*** (5) и, ***наоборот***.

Точно также, ***система*** (9) с ***нулевыми*** правыми частями и ***уравнение*** (6) ***эквивалентны*** в том же смысле.

Рассуждая аналогично тому, как это мы это делали при выводе системы (9), можно получить систему линейных алгебраических уравнений, ***эквивалентную*** операторному уравнению (7).

Действительно, если решение $\mathbf{z}$ уравнения (7) ***существует***, то оно должно иметь ***вид***:

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{N} c_k\, \boldsymbol{\psi}_k$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\, \boldsymbol{\psi}_i - \sum_{i=1}^{N} \left( \sum_{k=1}^{N} c_k\, \boldsymbol{\psi}_k,\, \mathbf{e}_i \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_i = \mathbb{O}$$

В силу ***линейной независимости*** системы $\{ \boldsymbol{\psi}_i \}$ :

$$c_i - \sum_{k=1}^{N} c_k\, (\boldsymbol{\psi}_k,\, \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{10}$$

и полученная таким образом ***система линейных алгебраических уравнений эквивалентна операторному*** уравнению (7).

Матрицы систем (9) и (10) ***сопряжены***.

Рассмотрим эквивалентное системе (9) операторное уравнение в пространстве $\mathbb{E}^n$.

Для его разрешимости ( а, следовательно, и разрешимости системы (9) ) ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы столбец правых частей (9), рассматриваемый как элемент $\mathbb{E}^n$, был ортогонален в $\mathbb{E}^n$ всем решениям однородного сопряжённого уравнения (10) ( утверждение 44, применительно к уравнению (9) ).

Упомянутое ***условие ортогональности*** имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{N} (\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}_k) \cdot c_k = 0 , \tag{11}$$

где $\{ c_k \}_{k=1}^{N}$ — ***любое*** решение уравнения (10).

Условие (11) можно переписать в виде:

$$\Big( \mathbf{y}, \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{\psi}_k \Big) = 0 \tag{12}$$

Но ***элемент***

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{N} c_k \boldsymbol{\psi}_k ,$$

где $\{ c_k \}$ — решение (10), ***удовлетворяет*** уравнению (7), то есть ***принадлежит*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ и, наоборот, любое решение (7) имеет такой вид.

В силу всего сказанного, условие: $\mathbf{y}$ ***ортогонально*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$, — ***необходимо*** и ***достаточно*** для ***разрешимости*** уравнения (5) с оператором $\mathbf{A}$, определяемым формулой (3).

Другими словами, область ***значений*** оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***совпадает*** с ***ортогональным дополнением*** к $\mathbf{ker}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$, и, поэтому ***замкнута***.

Кроме этого, ***размерности*** $\mathbf{ker}(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ и $\mathbf{ker}(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ ***совпадают***, так как в силу ***взаимооднозначного соответствия*** между решениями уравнений (6) и (7) , и решениями соответствующих ***систем линейных алгебраических уравнений***, любая совокупность ***линейно независимых*** решений (6) или (7) порождает совокупность ***линейно независимых*** решений ***систем линейных алгебраических уравнений*** и, ***наоборот***.

В частности, операторное уравнение

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

с оператором $\mathbf{A}$ вида (3), ***разрешимо*** $\forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ ***тогда*** и ***только тогда***, когда ***не существует нетривиальных*** решений ***однородного*** уравнения:

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbb{O}.$$

## Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (общий случай)

Оказывается, что утверждения о разрешимости уравнения (5) справедливы не только для уравнений с оператором $\mathbf{A}$ ***конечного*** ранга, но и для уравнений (5), в которых $\mathbf{A}$ произвольный ***вполне непрерывный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Предпошлем дальнейшему несколько простых замечаний.

$\mathbf{1}^\circ$. Так как любой ***вполне непрерывный*** оператор $\mathbf{A}$ переводит ***ограниченное*** множество в ***компактное*** и оператор $\mathbf{A}^*$ ***ограничен*** и, поэтому, переводит ***сходящиеся*** последовательности в ***сходящиеся***, то оператор $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***вполне непрерывен***.

$\mathbf{2}^\circ$. Кроме того $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***симметричен*** (см. упражнения к § 3).

$\mathbf{3}^\circ$. Наконец: $\mathbf{ker A^*A} = \mathbf{ker A}$.

Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{ker A}$, то есть $\mathbf{Az} = \mathbb{O}$, то и $\mathbf{A^*Az} = \mathbb{O}$.

Наоборот, если $\mathbf{A^*Az} = \mathbb{O}$, то $(\mathbf{A^*Az}, \mathbf{z}) = (\mathbf{Az}, \mathbf{Az}) = 0$, т.е. $\mathbf{Az} = \mathbb{O}$, и $\mathbf{z} \in \mathbf{ker A}$.

В силу сказанного, для ***вполне непрерывного симметричного*** оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ справедливо утверждение теоремы ***о спектральном разложении*** § 3 этой главы.

В частности, ***любой*** элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ допускает разложение:

$$\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \boldsymbol{\psi}_i + \mathbf{h}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{\psi}_i$ — ***ортонормированная система собственных элементов*** $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ с ***ненулевыми*** собственными значениями $\lambda_i$ и $\mathbf{h} \in \mathbf{ker A^*A} = \mathbf{ker A}$.

Подействовав на равенство (13) оператором $\mathbf{A}$, будем иметь такое представление оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Ax} = \sum_i (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i \tag{14}$$

Справа здесь стоит ***сходящийся*** (или обрывающийся) ***ряд*** элементов гильбертова пространства $\mathbf{H}$.

Рассмотрим теперь ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{A}_N\}$:

$$\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i \tag{15}$$

Система элементов $\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i$ ***ортогональна***.

Действительно:

$$\big(\,\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i,\,\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; \big(\,\boldsymbol{\psi}_i,\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; \lambda_j\,\cdot\,\big(\,\boldsymbol{\psi}_i,\,\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; 0, \quad \forall\, i,\, j \tag{16}$$

Следовательно, она ***линейно независима*** и формула (15) определяет оператор ***конечного ранга*** ( вида (3) ).

Из (16) следует также, что все ***ненулевые собственные значения*** оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***больше*** нуля.

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{N\to\infty} \|\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,\| \;=\; 0 \tag{17}$$

Действительно:

$$\|\,(\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,)\mathbf{x}\,\|^2 \;=\; \left\|\,\sum_{i=N+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\,(\,\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i\,)\,\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,\right\|^2$$

Из (16) следует, что последовательность

$$\left\{\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$$

***ортонормирована***.

Поэтому ( см. § 2 ):

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i)\,\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i\,\left(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i\right)^2 \leqslant \lambda_{N+1}\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i)^2 \leqslant \lambda_{N+1}\cdot\|\,\mathbf{x}\,\|^2$$

Отсюда

$$\|\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,\| \;\leqslant\; \lambda_{N+1}\;,$$

и, так как:

$$\lim_{N\to\infty}\lambda_{N+1} \;=\; 0\;,$$

равенство (17) справедливо.

Рассмотрим теперь уравнения (5) — (7), в которых $\mathbf{A}$ произвольный ***вполне непрерывный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Выберем $N$ таким, чтобы $\| \mathbf{A} - \mathbf{A}_N \| < 1$ и ***обозначим***:

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}_N = \mathbf{C}_N .$$

Уравнения (5), (6) можно переписать в виде:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)\,\mathbf{x} - \mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbf{y}\ ; \qquad (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)\,\mathbf{x} - \mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbb{O} \tag{18}$$

В силу ***теоремы Банаха*** (§ 3 главы II), оператор $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)$ имеет ***непрерывный обратный***, и, поэтому, уравнения (18) можно переписать в ***эквивалентном*** виде:

$$\mathbf{x} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}_1\ ;\ \mathbf{x} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbb{O} \tag{19}$$

Но оператор $\left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N$ является оператором ***конечного ранга***.

Это следует из формулы (15) и ***линейной независимости*** элементов $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)^{-1} \cdot \mathbf{A}\psi_i$ (см. упражнения к этому параграфу).

В силу доказанного ранее, область значений оператора $\left(\mathbf{E} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\right)$ ***замкнута***.

Теперь мы можем доказать ***замкнутость*** и ***области значений*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ ***произвольный вполне непрерывный*** оператор.

Действительно, пусть $\mathbf{y}$ ***предельная*** точка области значений $\{(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,(\mathbf{H})\}$.

Так как оператор $\left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}$ ***непрерывен***, то точка

$\mathbf{y}_1 = \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{y}$ — ***предельная*** для ***области значений*** оператора $\left(\mathbf{E} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\right)$.

А так как последняя ***замкнута***, то первое уравнение (19) с правой частью $\mathbf{y}_1 = \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{y}$ ***разрешимо***.

Но, оно ***эквивалентно*** уравнению (18) с правой частью $\mathbf{y}$ .

Поэтому $\mathbf{y}$ принадлежит ***области значений*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ и, следовательно, эта область ***замкнута***.

Поэтому уравнение (5) с ***вполне непрерывным*** оператором $\mathbf{A}$ разрешимо ***тогда*** и ***только тогда***, когда элемент $\mathbf{y}$ ***ортогонален*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ .

Так как второе уравнение (18) ***эквивалентно*** второму уравнению (19), то ***пространство*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***конечномерно***.

***Размерность*** пространства $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ совпадает с ***размерностью*** пространства $\mathbf{ker}\left(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)^{-1}\mathbf{A}_N\right)$.

***Сопряженное*** уравнение ко второму уравнению (19) имеет вид:

$$\mathbf{z} - \mathbf{A}_N^* \left[ (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)^{-1} \right]^* \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{A}_N^* \left[ (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N^*)^{-1} \right] \mathbf{z} = \mathbb{O} \quad (20)$$

Мы воспользовались при этом соотношениями справедливыми для любых ***непрерывных*** операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathbf{H}$ :

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^* \quad \text{и} \quad \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^* = \left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}$$

(см. упражнения к этому параграфу).

Поэтому ***размерность*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ совпадает с ***размерностью пространства решений*** уравнения (20).

Но, между решениями уравнения (20) и решениями уравнения (7) можно установить ***взаимнооднозначное*** соответствие при помощи оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N^*)$.

Действительно, если $\mathbf{z}$ какое-либо ***решение*** уравнения $(20)$, то:

$$\mathbf{w} = \left( \mathbf{E} - \mathbf{C}_N^* \right)^{-1} \mathbf{z}$$

***удовлетворяет*** уравнению:

$$\mathbb{O} = (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N^*)\,\mathbf{w} - \mathbf{A}_N^* \mathbf{w} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)\,\mathbf{w}$$

и, ***наоборот.***

Поэтому, ***размерности*** $\ker(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ и $\ker(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ ***совпадают*** для любого ***вполне непрерывного*** оператора $\mathbf{A}$.

Результаты нашего анализа можно представить в виде

**Теорема 19.** *Для любого* ***вполне непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$ *в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ :

$\mathbf{1}^\circ$. *Операторное* ***уравнение*** $(5)$ *разрешимо* ***тогда*** *и* ***только тогда,*** *когда его* ***правая часть ортогональна пространству решений*** *уравнения* $(7)$.

$\mathbf{2}^\circ$. ***Размерности*** *пространств решений уравнений* $(6)$ *и* $(7)$ ***конечны*** *и* ***равны.***

$\mathbf{3}^\circ$. *Уравнение* $(5)$ ***разрешимо*** $\forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ ***тогда*** *и* ***только тогда,*** *когда уравнение* $(6)$ *имеет* ***лишь нулевое*** *решение.*

Доказанную теорему, обычно, связывают с именами ***Фредгольма*** и ***Рисса.***

***Упражнения и задачи к параграфу*** 6.

1. Доказать ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$, задаваемого равенством $(3)$.

2. Проверить ***сопряженность*** операторов (3) и (4).

3. Показать, что любой ***ограниченный*** оператор $\mathbf{B}$ переводит ***компактное*** множество в ***компактное***.

4. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ***ограниченные линейные*** операторы, то $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$.

Если $\mathbf{A^{-1}}$ ***существует*** и ***ограничен***, то $\mathbf{A}^*$ имеет ***ограниченный обратный*** и $\left(\mathbf{A^{-1}}\right)^* = \left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}$.

5. Показать, что в ***бесконечномерном*** гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ ***вполне непрерывный*** оператор ***не может*** иметь ***ограниченного обратного***.

<u>Указание</u>. Рассмотреть соотношение: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{E}$.

6. Показать ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}^*$, ***сопряженного*** к ***вполне непрерывному*** $\mathbf{A}$.

7. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, с ***ядром*** $\mathcal{K}(t, s) = \cos(t + s)$ ***на промежутке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ ?

8. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, с ***ядром*** $\mathcal{K}(t, s) = \cos(t + s)$ ***на промежутке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$ ?

9. Решить ***интегральное*** уравнение

$$x(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\pi} \cos(t + s)\, x(s)\, ds + 1$$

# Глава 4

# Нелинейные отображения линейных нормированных пространств

## 4.1 Дифференциальное и интегральное исчисление для абстрактных функций

### Определения производной и интеграла от абстрактных функций

**Определение 63.** ***Функцией числового аргумента*** *со* ***значениями*** *в* ***линейном нормированном пространстве*** *мы будем называть* ***отображение числового*** *множества из* $\mathbb{E}^1$ *в* ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{X}$.

*Для краткости, будем называть такие отображения* ***абстрактными функциями*** *и, иногда, использовать для них, в целях сокращения записи, обозначение:* $\mathcal{A}$*-функция.*

Так как любое подмножество $\mathbb{E}^1$ является ***метрическим пространством***, то можно говорить о ***непрерывности*** абстрактной функции ***в*** некоторой ***точке*** множества ее определения (см. § 4 главы 1).

Если ***множество определения*** функции в $\mathbb{E}^1$ ***открыто***, то можно определить ***производную*** абстрактной функции ***в*** любой ***точке*** этого множества, аналогично тому, как это делается в математическом анализе для ***обычных*** функций одного переменного.

**Определение 64.** *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *—* ***абстрактная функция****, определенная на интервале* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *из* $\mathbb{E}^1$.

***Элемент*** $\mathbf{z}$ *называется* ***производной*** $\mathbf{x}(t)$ ***в точке*** $t_0 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, *если:*

$$\lim_{\Delta t \to o} \left\| \frac{\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta t} - \mathbf{z} \right\|_{\mathbf{X}} = 0 .$$

*Как и в случае* ***обычной*** *функции одного переменного,* ***элемент*** $\mathbf{z}$ ***обозначается*** $\mathbf{x}'(t_0)$.

Взятие производной от произвольной ***линейной комбинации абстрактных функций*** производится по тем же правилам, что и дифференцирование ***линейной комбинации обычных функций***.

Напротив, так как элементы ***линейного нормированного пространства***, вообще говоря, нельзя ***умножать*** и ***делить*** друг на друга, то нельзя говорить о дифференцировании ***произведения*** и ***частного*** абстрактных функций.

Обсудим некоторые факты, связанные с ***интегрированием*** абстрактных функций.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — ***абстрактная функция***, заданная на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

***Интеграл Римана*** от ***абстрактной функции*** по ***отрезку*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определяется аналогично интегралу Римана от ***обычной*** функции одного переменного, как предел (если он существует) соответствующих ***интегральных сумм***.

Можно показать, что ***непрерывная*** на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ $\mathcal{A}$-функция ***интегрируема***.

Соответствующий интеграл, как и в случае обычных функций, обозначается $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt$, и является некоторым ***элементом*** пространства $\mathbf{X}$.

## Свойства интегралов от абстрактных функций

Свойства ***операции интегрирования*** абстрактных функций ***аналогичны*** таковым же для ***обычных*** функций.

**1°**. ***Линейность*** операции интегрирования:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big(\lambda \cdot \mathbf{x}(t) + \mu \cdot \mathbf{y}(t)\big)\, dt = \lambda \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt + \mu \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{y}(t)\, dt$$

Это равенство справедливо, если интегралы в ***правой*** и ***левой*** его части ***существуют***.

В частности, оно справедливо для ***непрерывных*** $\mathcal{A}$-функций.

**2°**. ***Оценка*** интеграла от абстрактной функции:

$$\left\| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt \right\| \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \|\, \mathbf{x}(t)\, \|\; dt \tag{1}$$

Неравенство (1) справедливо при условии ***существования*** соответствующих интегралов.

В частности, оно справедливо для ***непрерывных*** $\mathcal{A}$-функций.

Утверждения **1°** и **2°** ***следуют*** из ***непосредственно*** проверяемых соотношений для ***интегральных сумм*** и последующего ***предель-***

***ного перехода***.

***Связь*** между операциями ***дифференцирования*** и ***интегрирования*** абстрактных функций такая же, как и для ***обычных*** функций.

**Замечание.** Следует иметь в виду, что для абстрактных функций, вообще говоря, не справедливы ***теоремы о промежуточных значениях*** , например, теоремы ***Ролля*** и ***Лагранжа***.

В силу этого, непосредственное перенесение ***доказательств*** соответствующих теорем о связи операций интегрирования и дифференцирования ***не всегда возможно***.

**3°** . ***Теорема Ньютона - Лейбница***.

Для обычных функций справедливо:

**Утверждение 45.** *Если* $x(t)$ ***непрерывно дифференцируема на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *то:*

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x'(t)\,dt \;=\; x(\mathbf{b}) \;-\; x(\mathbf{a}) \tag{2}$$

Соотношение (2) для ***обычных*** функций чаще всего доказывается с использованием утверждения:

**Утверждение 46.** *Для любой* ***непрерывной*** *на* ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *функции* $x(t)$ *справедливо равенство:*

$$\left( \int\limits_{\mathbf{a}}^{t} x(\tau)\,d\tau \right)' \;=\; x(t) \tag{3}$$

Из равенства (3) следует (2), если учесть, что для ***обычных*** функций из равенства: $x'(t) \;=\; 0, \quad \forall\, t \,\in\, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***следует***, что: $x(t) \;=\; const$ .

Последнее ***утверждение*** есть ***следствие*** из ***теоремы Ролля***, которая, как мы отметили выше, для $\mathcal{A}$-функций ***несправедлива***.

Поэтому, хотя равенство (3) ***легко*** доказать для произвольной абстрактной функции ( см. упражнения к этому параграфу ), ***непосредственный*** переход от (3) к (2) ***невозможен***.

Чтобы ***обойти*** это препятствие, поступим следующим образом.

Пусть $\mathbf{f}$ ***любой*** элемент ***сопряженного*** к $\mathbf{X}$ ***пространства*** $\mathbf{X}^*$, то есть любой ***линейный непрерывный функционал*** на $\mathbf{X}$.

Тогда, рассматривая интеграл, как предел интегральных сумм, в силу непрерывности $\mathbf{f}$ для любой ***непрерывной*** на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ абстрактной функции $\mathbf{x}(t)$ :

$$\mathbf{f}\left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt\right) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t)\Big)\, dt \tag{4}$$

Рассмотрим ***обычную*** функцию на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ : $z(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t)\Big)$.

Если $\mathbf{x}(t)$ ***дифференцируема*** в точке $t$, то: $z'(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}'(t)\Big)$ ( проверяется ***непосредственно*** ).

Если $\mathbf{x}'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и $z'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и для нее выполняется ***утверждение*** теоремы Ньютона - Лейбница:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} z'(t)\, dt = z(\mathbf{b}) - z(\mathbf{a})$$

Но, это означает, что:

$$\mathbf{f}\left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt\right) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(\mathbf{b})\Big) - \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(\mathbf{a})\Big), \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbf{X}^* \tag{5}$$

Отсюда ***следует*** соотношение (2), если учесть

**Утверждение 47.** *Если* $\mathbf{X}$ — ***линейное нормированное пространство*** *и* $\mathbf{X}^*$, — ***сопряженное*** *к нему* ***пространство****, то из условия* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall\, \mathbf{f} \in \mathbf{X}^*$, *следует, что* $\mathbf{x} = \mathbb{O}_{\mathbf{X}}$.

Само это ***утверждение*** — следствие ***теоремы Хана - Банаха*** о продолжении линейных функционалов ( см., например, [2] ).

Если $\mathbf{X}$ ***линейное нормированное пространство со скалярным произведением***, то равенство (5), в силу теоремы Ф. Рисса ( § 2 главы III ), можно записать в виде:

$$\left( \mathbf{y}, \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt \right) = \big( \mathbf{y}, \mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a}) \big), \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{X}.$$

Полагая в этом соотношении: $\mathbf{y} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt - \mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a})$, приходим к равенству (2).

## Оценка разности значений абстрактной функции

Равенство (2) и неравенство (1) позволяют получить ***оценку*** разности значений ***абстрактной*** функции через её производную.

Именно, если $\mathbf{x}'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то:

$$\| \mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a}) \| \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \| \mathbf{x}'(t) \|\, dt \leqslant (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \| \mathbf{x}'(t) \| \qquad (6)$$

Для ***обычных*** функций одного переменного оценка (6) может быть ***уточнена*** ( теорема о промежуточном значении Лагранжа ).

Однако, как мы уже отмечали, такое уточнение в ***общем случае невозможно***.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 1.

1. Привести ***пример*** невыполнения утверждения ***теоремы Ролля*** для ***абстрактных*** функций.

<u>Указание</u>. Рассмотреть ***отображение*** из $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^2$.

2. Доказать ***соотношение*** (3) для произвольной непрерывной абстрактной функции.

3. Показать справедливость ***равенства*** (4) (для ***непрерывной*** абстрактной функции $\mathbf{x}(t)$).

## 4.2 Дифференцирование нелинейных отображений

### Дифференцируемость по Фреше

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — ***отображение*** из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$.

**Определение 65.** *Отображение (**оператор**)* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *называется **сильно дифференцируемым** (дифференцируемым **по Фреше**) в **точке*** $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, *если **существует линейный ограниченный** оператор* $\mathbf{A}$, *такой, что:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{h} + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \qquad \lim_{\|\mathbf{h}\| \to 0} \frac{\|\omega(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (1)$$

***Оператор*** $\mathbf{A}$, *в этом случае, называется **производной Фреше** отображения* $\mathbf{F}$ *в **точке*** $\mathbf{x}$.

***Элемент*** $\mathbf{A}\mathbf{h} \in \mathbf{Y}$ *называется **дифференциалом Фреше** отображения* $\mathbf{F}$ *в **точке*** $\mathbf{x}$.

*Для* ***производной*** *Фреше* — $\mathbf{A}$, *и* ***дифференциала*** *Фреше* — $\mathbf{Ah}$, *часто используются* ***обозначения:*** $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ *и* $d\,\mathbf{F}(\mathbf{x},\,\mathbf{h})$ – ***соответственно.***

**Утверждение 48.** *Может существовать только* ***один линейный непрерывный*** *оператор, удовлетворяющий соотношению* $(1)$.

*Доказательство.* Действительно, пусть $\mathbf{B}$ ***линейный*** оператор, ***отличный*** от $\mathbf{A}$, для которого также выполнено соотношение (1), но возможно, с другим остатком $\omega_1(\mathbf{x},\,\mathbf{h})$.

Тогда:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{h} = \omega(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) - \omega_1(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) \tag{2}$$

Зафиксируем ***элемент*** $\mathbf{h}$ и рассмотрим ***семейство*** элементов $t \cdot \mathbf{h}$.

Из (2) следует:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{h} = \frac{\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h}) - \omega_1(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})}{t}$$

В силу (1):

$$\lim_{t \to 0}\left\|\frac{\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})}{t}\right\| \leqslant \lim_{t \to 0}\left(\frac{\|\,\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})\,\|}{\|\,t\,\mathbf{h}\,\|} + \frac{\|\,\omega_1(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})\,\|}{\|\,t\,\mathbf{h}\,\|}\right)\cdot\|\,\mathbf{h}\,\| = 0$$

Поэтому: $\mathbf{Ah} = \mathbf{Bh}$.

Отсюда, ввиду произвольности $\mathbf{h}$, следует: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. □

**Замечание.** ***Существование производной Фреше*** у ***нелинейного оператора*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ во многих случаях позволяет использовать в ***окрестности точки*** $\mathbf{x}$ вместо полного ***нелинейного*** оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ его ***аффинную часть*** – $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$, так как результат действия

***аффинного*** оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ ***аппроксимирует*** ( тем точнее, чем меньше $\|\mathbf{h}\|$ ) ***результат*** действия оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$.

При переходе к ***другой*** точке $\mathbf{x_1}$ пространства $\mathbf{X}$ ***отображение*** $\mathbf{F}$ ***может*** остаться ***дифференцируемым***, но при этом, вообще говоря, $\mathbf{F}'(\mathbf{x_1}) \neq \mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

## Пример 1 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^1$

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ***отображение*** из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^1$, задаваемое ***функцией*** $n$ переменных: $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Если в некоторой ***окрестности*** точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ***существуют непрерывные частные производные*** $F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, то, как известно из курса ***математического анализа***:

$$F(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - F(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \left[F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_1 + \cdots + F'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_n\right] + \omega(x_1, \ldots, x_n; h_1, \ldots, h_n),$$

причем:

$$\lim_{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0} \frac{|\,\omega(x_1, \ldots, x_n;\, h_1, \ldots, h_n)\,|}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0\,.$$

Равенство (3), в рассматриваемом случае, ***полностью*** соответствует ***определению*** (1).

***Линейный*** ( относительно $\mathbf{h}$ ) функционал:

$$F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_1 + \cdots + F'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_n = \big(\ell(\mathbf{x}), \mathbf{h}\big)$$

в обычном ***математическом анализе*** называется ***дифференциалом*** функции $\mathbf{F}$ в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается $d\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$.

**Определение 66.** *В равенстве* (3) *участвует* ***набор частных производных:*** $\{ F'_{x_1}, \ldots , F'_{x_n} \}$.

*Этот* ***набор*** *называется* ***градиентом*** *функции* $F(x_1, \ldots , x_n)$, *и, таким образом,* ***градиент*** *это* ***элемент*** *пространства* $\mathbb{E}^n$.

***Градиент*** *зависит от точки* $(x_1, \ldots , x_n) \in \mathbb{E}^n$.

*Возникающее отображение из* $\mathbb{E}^n$ *в* $\mathbb{E}^n$ : $(x_1, \ldots , x_n) \to \{ F'_{x_1}, \ldots , F'_{x_n} \}$ *называется* ***градиентным отображением.***

## Пример 2 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^m$

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ***отображение*** из ***пространства*** $\mathbb{E}^n$ в ***пространство*** $\mathbb{E}^m$.

Оно задается ***набором*** функций:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots , x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots , x_n) \end{cases} \tag{4}$$

Если в некоторой ***окрестности*** точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots , x_n)$ ***существуют*** непрерывные ***частные производные*** всех ***функций*** из (4), то из (3) ***легко*** получить, что:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{1\,x_1} & \cdots & f'_{1\,x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{m\,x_1} & \cdots & f'_{m\,x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \omega(x_1, \ldots , x_n; h_1, \ldots , h_n),$$

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{E}^n} \to 0} \frac{\|\omega(\mathbf{x}; \mathbf{h})\|_{\mathbb{E}^m}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{E}^n}} = 0 .$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, ***производной Фреше*** будет ***линейный оператор*** из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^m$, ***порожденный матрицей частных производных*** от ***компонент*** отображения $\mathbf{F} - \{ f_1, \ldots, f_m \}$.

**Определение 67.** ***Матрица****, составленная из* ***частных производных*** *от* ***компонент*** *отображения* $\mathbf{F} - \{ f_1, \ldots, f_m \}$, *называется* ***матрицей Якоби*** *отображения* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (4) *в* ***точке*** $\mathbf{x} = ( x_1, \ldots, x_n )$.

### Пример 3 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пусть $g(s, \tau)$ — ***функция*** 2-х переменных, определенная и ***непрерывная*** в полосе: $\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}$, $-\infty < \tau < \infty$.

Кроме того, пусть ***существует*** частная производная $g'_\tau(s, \tau)$, для которой выполнено ***условие Липшица***:

$| g'_\tau(s, \tau_1) - g'_\tau(s, \tau_2) | \leqslant \mathbf{L} \cdot | \tau_1 - \tau_2 |$, где постоянная $\mathbf{L}$ ***не зависит*** от $s, \tau_1, \tau_2$ : $\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}$, $-\infty < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Рассмотрим ***оператор***, действующий из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***по правилу***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = g(s, x(s)) \tag{5}$$

Оператор (5) ***дифференцируем по Фреше*** в любой ***точке*** $x(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и его ***дифференциал Фреше*** в ***точке*** $x(s)$ :

$$d F(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = g'_\tau(s, x(s)) \cdot h(s) \tag{6}$$

*Доказательство.* Действительно, используя ***теорему Лагранжа*** при фиксированном $s$ :

$$g\,(s, x\,(s) + h\,(s)) - g\,(s, x\,(s)) = g'_\tau\,(s, x\,(s) + \theta \cdot h\,(s)) \cdot h\,(s) =$$
$$= g'_\tau\,(s, x\,(s)) \cdot h\,(s) + [g'_\tau\,(s, x\,(s) + \theta \cdot h\,(s)) - g'_\tau\,(s, x\,(s))] \cdot h\,(s) =$$
$$= g'_\tau\,(s, x\,(s)) \cdot h\,(s) + \omega\,(\mathbf{x}, \mathbf{h})\ , \quad 0 \leqslant \theta\,(s) \leqslant 1\ .$$

В силу сделанных относительно функции $g$ предположений:

$$\|\,\omega\,(\,\mathbf{x}, \mathbf{h}\,)\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant \mathbf{L} \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}} h^2\,(s) = \mathbf{L} \cdot \|\,\mathbf{h}\,\|^2_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

Таким образом, равенство (6) ***справедливо***. □

### Дифференциалы Фреше $n$-го порядка

Если ***производная Фреше*** отображения $\mathbf{F}\,(\mathbf{x})$ ***существует*** на некотором ***подмножестве*** $\mathbf{X}$ ( в частности, во всех точках $\mathbf{X}$ ), то можно рассмотреть ***отображение***:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{F}'\,(\mathbf{x})} \mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,)\ ,$$

где $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,)$ — ***пространство линейных непрерывных операторов*** из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ .

Так как $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,)$ само является ***линейным нормированным пространством*** ( см. глава II ), то можно, ***аналогично*** (1), ввести понятие ***второй производной Фреше*** отображения $\mathbf{F}\,(\mathbf{x})$ :

$$(\,\mathbf{F}'\,)'\,(\mathbf{x}) \ = \ \mathbf{F}''\,(\mathbf{x})$$

Следует помнить, что $\mathbf{F}''\,(\mathbf{x})$ — ***линейный оператор*** из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,)$ .

Поэтому ***результатом*** операции $\mathbf{F}''\,(\mathbf{x})$ будет не элемент пространства $\mathbf{X}$ , а ***линейный оператор*** из ***пространства*** $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}\,)$ **!**

Отправляясь от ***второй*** производной Фреше отображения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, можно определить ***третью***, ***четвертую*** и т.д. ***производные Фреше*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Более подробно смотри, например, [5, глава II].

## Дифференцируемость отображения по Гато

Пусть отображение $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ имеет ***производную*** (***Фреше***) в ***точке*** $\mathbf{x}$. Зафиксируем элемент $\mathbf{h}$ и рассмотрим $\mathcal{A}$-***функцию*** $\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})$. Из (1) имеем (если $t \neq 0$):

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{Ah} + \frac{\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})}{t} \quad \text{и}$$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})}{t} \right\| = \lim_{t \to 0} \|\mathbf{h}\| \frac{\|\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})\|}{\|t\,\mathbf{h}\|} = 0$$

Поэтому ***абстрактная функция*** $\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})$ имеет ***производную*** в ***точке*** $t = 0$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}))\Big|_{t=0} = \mathbf{Ah} \tag{7}$$

Формула (7) бывает удобна при вычислении производной.

***Выражение*** в левой части равенства (7) может ***иметь смысл*** и в том случае, когда отображение $\mathbf{F}$ ***не имеет*** в точке $\mathbf{x}$ ***производной Фреше***.

**Определение 68.** ***Выражение*** $\frac{d}{dt}\big(\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})\big)\Big|_{t=0}$, *если оно* ***определено*** *для* ***любого*** $\mathbf{h} \in \mathbf{X}$, *называется* ***дифференциалом Гато*** *отображения* $\mathbf{F}$ *в* ***точке*** $\mathbf{x}$, *или* ***слабым*** *дифференциалом отображения* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Как мы только что ***показали***, из существования ***производной Фреше следует*** существование ***дифференциала Гато***.

***Обратная импликация***, вообще говоря, ***не справедлива***.

## Вариация отображения $\big($в точке $(\mathbf{x})$ по направлению $(\mathbf{h})\big)$

**Определение 69.** *При* ***фиксированных*** $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{h}$, $\|\mathbf{h}\| = 1$, *рассмотрим*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{t}$$

*Предельный* ***элемент*** *( из* $\mathbf{Y}$ *), если он* ***существует****, называется* ***вариацией*** *отображения* $\mathbf{F}$ *в* ***точке*** $\mathbf{x}$ *по* ***направлению*** $\mathbf{h}$.

*Этот* ***элемент*** *обычно обозначается* $\mathbf{Var}\,[\mathbf{F}(\mathbf{x};\,\mathbf{h})]$.

Из ***существования дифференциала Гато вытекает существование вариации по любому направлению***, но ***обратное***, вообще говоря, ***не верно***.

Предположим, что отображение $\mathbf{F}$ ***непрерывно дифференцируемо по Фреше на множестве*** в пространстве $\mathbf{X}$, содержащем ***отрезок***, ***соединяющий*** точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в $\mathbf{X}$.

Рассмотрим ***абстрактную функцию***:

$$\varphi(t) = \mathbf{F}\big((1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}\big) = \mathbf{F}\big(\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big), \quad \mathbf{0} \leqslant t \leqslant \mathbf{1}$$

**Утверждение 49.** *Функция* $\varphi(t)$ *имеет* ***непрерывную производную на отрезке*** $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

*При этом:*

$$\varphi'(t) = \mathbf{F}'\big(\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{8}$$

*Здесь* $\mathbf{F}'$ — ***производная Фреше*** *отображения* $\mathbf{F}$.

*Доказательство.* Действительно:

$$\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)-\mathbf{F}\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big) =$$
$$= \mathbf{F}'\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)\cdot\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\omega\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}),\,\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big),$$

причем, в силу (1), $\|\omega\| \to 0$, если $\Delta t \to 0$.

Деля обе части этого равенства на $\Delta t$ и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим равенство (8). □

## Оценка остатка при дифференцировании по Фреше

Так как мы предположили ***непрерывную дифференцируемость*** $\mathbf{F}$, то $\varphi'(t)$ — ***непрерывная функция*** $t$ и, в силу равенства (2), имеем:

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{b})-\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\mathbf{F}'\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\,dt \quad (9)$$

Если $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ ***непрерывна*** по $\mathbf{x}$ ***на множестве***, включающем ***отрезок*** между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|$ ***непрерывна*** и во всех точках такого отрезка выполнено неравенство:

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{x})\| \leqslant \mathbf{N}_1, \tag{10}$$

где $\mathbf{N}_1$ ***не зависит*** от $\mathbf{x}$, то из (9) следует:

$$\big\|\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})\big\| \leqslant \mathbf{N}_1\cdot\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

**Замечание.** Эта ***оценка — аналог оценки*** (6) для ***абстрактных функций***.

Предположим теперь, что $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ не только ***непрерывно*** зависит от $\mathbf{x}$, но ***на множестве***, включающем ***отрезок*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, выполнено ***условие Липшица***:

$$\left\| \mathbf{F}'(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{y}) \right\| \leqslant \mathbf{N}_2 \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \tag{11}$$

В этом случае, из (9) следует:

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left[\mathbf{F}'\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\right] \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, dt\,,$$

и, с учетом (11):

$$\left\| \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left[\mathbf{F}'\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\right] (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, dt \right\| \leqslant \mathbf{N}_2 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} t\, dt = \frac{\mathbf{N}_2}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \tag{12}$$

Сравнивая равенства (12) и (1), мы видим, что предположение (11) ведет к эффективной ***оценке*** остаточного члена $\omega$ в определении ***производной*** отображения $F$.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 2.

1. Показать, что в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ ***функционал*** $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ***дифференцируем по Фреше***. Найти его ***дифференциал***.

2. Показать, что в любом ***линейном нормированном пространстве функционал*** нормы $\|\mathbf{x}\|$ ***не дифференцируем по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$, но ***имеет*** в этой ***точке вариацию*** по всем направлениям.

<u>Указание</u>. Показать, что функционал $\|\mathbf{x}\|$ ***не дифференцируем по Гато*** в ***точке*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$.

3. Пусть $\mathbf{A}$ — ***ограниченный оператор***, действующий из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$, а ***отображение*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$ ***дифференцируемо по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x}$.

Показать, что ***отображение*** $\mathbf{F}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{AF}(\mathbf{x})$ также будет ***дифференцируемо по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x}$. Чему равна $\mathbf{F}_1'(\mathbf{x})$ ?

4. Пусть $\mathcal{K}(t, s)$ ***непрерывная*** функция на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а функция $g(u, v)$ удовлетворяет условиям примера 3.

Показать, что нелинейный ***интегральный оператор***, определяемый формулой:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) \cdot g(s, x(s))\, dt \ ,$$

как оператор из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, ***дифференцируем по Фреше*** в любой ***точке пространства*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Чему равна $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ ?

5. Объяснить почему справедливо неравенство (10).

## 4.3 Метод Ньютона

### Предварительные построения

Метод Ньютона — это процесс последовательных приближений (***итерационный процесс***), предназначенный для (приближенного) ***решения операторного уравнения***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{O} \ , \tag{1}$$

где $\mathbf{F}$ ***нелинейный оператор*** из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$.

Будем предполагать:

$\mathbf{1}^\circ$. ***Существует решение*** $\mathbf{x}^*$ уравнения (1).

$\mathbf{2}^\circ$. ***Оператор*** $\mathbf{F}$ ***дифференцируем по Фреше*** и ***всюду*** в $\mathbf{X}$ ***выполнено*** условие (11) из § 2.

$\mathbf{3}^\circ$. Выполнено ***условие регулярности***, то есть ***оператор*** $\mathbf{F}'$ ***непрерывно обратим*** в каждой ***точке*** $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, и, кроме того существует постоянная $m > 0$ такая, что:

$$\left\| \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1} \right\| < \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{x}_0$ — какая-либо точка $\mathbf{X}$.

Уравнение (1) можно, ***очевидно***, представить в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbb{O} \tag{3}$$

и задачу поиска ***решения*** (1) можно заменить на задачу поиска ***решения уравнения*** (3), но уже относительно ***неизвестного*** элемента $\mathbf{h}$.

Процесс Ньютона основан на следующих интуитивных соображениях.

$\mathbf{1}^\circ$. Если $\mathbf{x}_0$ ***достаточна близка*** к $\mathbf{x}^*$, то решение уравнения (3), относительно $\mathbf{h}$, имеет ***малую норму***.

$\mathbf{2}^\circ$. В силу ***дифференцируемости*** $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \tag{4}$$

Это ***приближенное*** равенство тем ***точнее***, чем ***меньше*** $\|\mathbf{h}\|$.

$\mathbf{3}^\circ$. В силу (4) можно пытаться (приближенно) определить ***решение*** уравнения (3), решая ***линейное*** относительно $\mathbf{h}$ ***операторное уравнение***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \mathbb{O} \tag{5}$$

**4°**. В силу ***предположения*** 3°, уравнение (5) ***имеет единственное*** решение: $\mathbf{h}_0 = -\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$

**5°**. Можно ожидать, что элемент $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ будет ***лучше*** приближать решение $\mathbf{x}^*$, чем ***начальный*** элемент $\mathbf{x}_0$.

**6°**. ***Заменяя*** $\mathbf{x}_0$ ***на*** $\mathbf{x}_1$ и рассуждая аналогично, можно найти элемент $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$

## Итерационный процесс Ньютона

Вообще, если $\mathbf{x}_n$ ***найдено***, то ***можно*** найти $\mathbf{x}_{n+1}$ по правилу:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \tag{6}$$

**Определение 70.** ***Рекуррентная последовательность*** (6) *называется* ***итерационным процессом Ньютона*** *(методом Ньютона) для приближенного* ***решения*** *уравнения* (1).

Проанализируем возможность ***сходимости*** этой последовательности к решению уравнения (1).

**Теорема 20.** *Если* ***выполнены предположения*** 1° – 3°, *то справедлива* ***оценка:***

$$\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \frac{2}{\mathbf{mN_2}} \cdot \left\| \frac{\mathbf{mN_2}}{2} (\mathbf{x_0} - \mathbf{x}^*) \right\|^{2^{n+1}} \tag{7}$$

*В частности, если*

$$\| \mathbf{x_0} - \mathbf{x}^* \| < \frac{2}{\mathbf{mN_2}}, \tag{8}$$

*то последовательность* (6) ***сходится*** *к* $\mathbf{x}^*$.

*Доказательство.* Действительно:

$$\| \mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \left\| \mathbf{x_n} - \mathbf{x}^* + \mathbf{F}'(\mathbf{x_n})^{-1} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x_n}) \right] \right\| \qquad (9)$$

Разность $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x_n})$ представим согласно (12) из § 2, то есть:

$$\begin{gathered} \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n) + \omega, \\ \text{где} \quad \| \omega \| \leqslant \frac{\mathbf{N_2}}{2} \cdot \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\| . \end{gathered}$$

Используя это представление в неравенстве (9), получим:

$$\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|^2$$

Оценивая аналогично предыдущему $\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|$ через $\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{n-1} \|$, и так далее, раз за разом повторяя рассуждения, получим:

$$\begin{gathered} \| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \cdot \left( \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \right)^2 \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|^4 \leqslant \\ \leqslant \cdots \leqslant \left( \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n} \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0 \|^{2^{n+1}} = \\ = \frac{2}{\mathbf{mN_2}} \cdot \left\| \frac{\mathbf{mN_2}}{2} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0) \right\|^{2^{n+1}} \end{gathered}$$

Оценка (7) доказана. Условие (8), ***очевидно***, обеспечивает ***сходимость*** $\mathbf{x}_n$ к $\mathbf{x}^*$ при $n \to \infty$. □

Простые примеры показывают ***отсутствие сходимости*** последовательности (6), если величина $\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^* \|$ не согласована с величинами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{N_2}$.

При нарушении условия ***регулярности*** (2), процесс Ньютона может оказаться ***неосуществимым***.

Название ***метод Ньютона*** заимствовано у ***классического*** метода нахождения ***корня*** уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — ***обычная*** функция ***числового*** переменного $x$.

В этом случае $f$ может рассматриваться как ***отображение*** $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^1$, а ***процесс*** (6) имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Этот ***итеративный процесс*** решения уравнения $f(x) = 0$, называемый также ***методом касательных***, традиционно связывают с именем ***Ньютона***.

***Упражнения и задачи к параграфу*** 3.

1. Для ***отображения*** $f$ из $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^1$ показать на примере ***отсутствие сходимости*** последовательности (6) даже при наличии ***регулярности***, если начальное приближение $x_0$ выбрано ***далеко*** от ***корня*** $x^*$.

2. Привести ***пример функции*** $f$ и выбора ***начального приближения*** $x_0$ таких, что процесс Ньютона ***не осуществим*** (начиная с $x_0$).

## 4.4 Экстремальные задачи в нормированных пространствах

### Предварительные соображения и основные определения

Пусть $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ вещественный ***функционал***, заданный на ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$.

Рассмотрим его значения на некотором подмножестве $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$.

**Определение 71.** ***Элемент*** $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ *называется* ***точкой*** *( элементом )* ***локального максимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$*, если* ***существует*** *число* $r > 0$ *такое, что:*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

*для* ***всех*** $\mathbf{x}$*, принадлежащих* $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{M}$.

*Если неравенство* (1) *выполняется в* $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{M}$ *при* ***любом*** $r$*, то* $\mathbf{x}_0$ *называется точкой* ***глобального максимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$.

**Определение 72.** *Если знак неравенства в* (1) *поменять на* ***противоположный****, сохранив при этом все прочие предположения, получится определение* ***локального*** *и* ***глобального минимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$ *соответственно.*

### Необходимые условия экстремума

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mathbf{M}$ ***выпуклое множество*** в $\mathbf{X}$, в частности, когда $\mathbf{M} = \mathbf{X}$.

Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ точка ***локального максимума*** функционала $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{z}$ некоторая, отличная от $\mathbf{x}_0$, точка $\mathbf{M}$.

Тогда ***отрезок*** $\mathbf{x}_0 + t \cdot \frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|}$, $0 \leqslant t \leqslant \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|$ ***целиком*** принадлежит $\mathbf{M}$ (в силу выпуклости $\mathbf{M}$).

Рассмотрим ***числовую*** функцию: $\varphi(t) = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}_0 + t\,\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|}\right)$.

В силу (1) ***функция*** $\varphi(t)$ имеет ***локальный максимум*** по $t$ в точке $t = 0$.

Предположим, что $\varphi(t)$ имеет в точке $t = 0$ ***одностороннюю производную*** $\varphi'_+(0)$.

Поскольку $\varphi(t)$ ***убывает***, по крайней мере, на достаточно ***малом*** отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{t_1}]$, то:

$$\varphi'_+(0) \leqslant 0 \tag{2}$$

В силу определения ***вариации*** по направлению (§ 2), условие (2) означает ***неположительность*** вариации функционала $\mathbf{\Phi}$ в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ ***по направлению*** $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x}_0}{\| \mathbf{z} - \mathbf{x}_0 \|}$.

Будем, ***для краткости***, называть указанное выше $\mathbf{h}$, где $\mathbf{z}$ — некоторая точка $\mathbf{M}$, — ***направлением***, ***ведущим*** в $\mathbf{M}$ из точки $\mathbf{x}_0$.

Из (2) следует, что, если $\mathbf{x}_0$ точка ***локального максимума*** $\mathbf{\Phi}$ на $\mathbf{M}$, и ***существует вариация*** $\mathbf{\Phi}$ в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ ***по*** некоторому ***направлению*** $\mathbf{h}$, ***ведущему*** в $\mathbf{M}$ из $\mathbf{x}_0$, то ***необходимо***:

$$\mathbf{Var}\,[\,\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})\,] \leqslant 0 \tag{3}$$

В частности, если функционал $\mathbf{\Phi}$ ***дифференцируем по Фреше***, то:

$$\mathbf{\Phi}'\,(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{h}) \leqslant 0 \tag{4}$$

на ***любом*** направлении $\mathbf{h}$, ***ведущем*** из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{M}$.

Если $\mathbf{x}_0$ ***внутренняя*** точка $\mathbf{M}$, то из (4) следует, что ***линейный функционал*** $\mathbf{\Phi}'\,(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{h})$ ***неположителен*** для ***любого*** $\mathbf{h} \in \mathbf{X}$.

Поэтому:

$$\mathbf{\Phi}'\,(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{h}) \equiv 0 \tag{5}$$

В случае, когда $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ ( $\mathbf{H}$ — ***гильбертово*** пространство ) ***линейный*** функционал $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,)$ можно представить в виде ***скалярного произведения***: $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,) = \big(\,\mathbf{w}\,(\mathbf{x}_0),\,\mathbf{h}\,\big)$ .

***Элемент*** $\mathbf{w}\,(\mathbf{x}_0)$ , "представляющий" по теореме Рисса линейный функционал $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,)$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ , называется ***градиентом функционала*** $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)$ и обозначается $\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,)$ .

Условия (4) и (5) можно поэтому представить в виде:

$$(\,\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,,\,\mathbf{h}\,) \leqslant 0 \tag{6}$$

или

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,) = 0 \tag{7}$$

Т.к. $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}_0}{\|\,\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\,\|}$ , то из (6) , следует неравенство:

$$(\,\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,,\,\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\,) \leqslant 0, \quad \forall\,\mathbf{z} \in \mathbf{M}\ ,$$

являющееся ***необходимым условием максимума***.

Если теперь $\mathbf{x}_0$ ***точка минимума*** $\mathbf{\Phi}$ на $\mathbf{M}$ ( локальная или глобальная ), то аналогичные рассуждения приведут нас к ***необходимым*** условиям ***минимума*** вида (3) — (5) , но ***знаки неравенств*** нужно заменить на ***противоположные***.

Следующие ниже примеры 1 и 2 служат кратким ***введением*** в ***математическую дисциплину***, называемую ***вариационным исчислением***.

## Пример 1 — простейшая задача классического вариационного исчисления

Рассмотрим в ***пространстве*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ( оно определено в примере 5 § 1 главы I ) ***непрерывно дифференцируемых*** функций на ***отрезке*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***интегральный*** функционал:

$$\boldsymbol{\Phi}\,(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f\,\big(\,s,\;x\,(s),\;x'\,(s)\,\big)\,ds \tag{8}$$

Предположим, что, во-первых, ***порождающая функция*** $f\,(s,\,u,\,v)$ ***непрерывна*** по $s,\,u,\,v$ в области $\Omega : \{\,\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}\,;\, -\infty < u,\,v < -\infty\,\}$, во-вторых, ***обладает*** в точках этой области ***непрерывными частными производными*** $f'_u$, $f'_v$ и, кроме того, ***во всех*** точках области $\Omega$ выполнены неравенства:

$$|\,f'_u\;(\,s,\,u_1,\,v_1\,)\;-\;f'_u\;(\,s,\,u_2,\,v_2\,)\,|\;\leqslant\;\mathbf{L}\cdot(\,|\,u_1\;-\;u_2\,|\;+\;|\,v_1\;-\;v_2\,|\,)\,,$$

$$|\,f'_v\;(\,s,\,u_1,\,v_1\,)\;-\;f'_v\;(\,s,\,u_2,\,v_2\,)\,|\;\leqslant\;\mathbf{L}\cdot(\,|\,u_1\;-\;u_2\,|\;+\;|\,v_1\;-\;v_2\,|\,)\,,$$

в которых ***постоянная Липшица*** $\mathbf{L}$ ***не зависит*** от $s,\,u,\,v$.

**Утверждение 50.** *При сделанных предположениях* ***функционал*** (8) ***дифференцируем по Фреше всюду*** *в* $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

*Доказательство.* Сделанные относительно ***порождающей*** функционал (8) ***функции*** $f$ предположения, позволяют записать:

$$\boldsymbol{\Phi}\,(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{d}{dt}\big[f\,\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s),\; x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)\big]\;dt\,ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\;\big[\,f'_u\,\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s), x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)h\,(s) +$$

$$+\; f'_v\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s), x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)h'\,(s)\big]\;ds\,dt$$

Отсюда: $\quad \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) =$

$$= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [f'_u\,(s,x(s),x'(s))\,h(s) + f'_v\,(s,x(s)x'(s))\,h'(s)]\;ds +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\left\{\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}[f'_u\,(s,x(s)+t\,h(s),x'(s)+t\,h'(s)) - f'_u\,(s,x(s),x'(s))]\,h(s)\,ds +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}[f'_v\,(s,x(s)+t\,h(s),x'(s)+t\,h'(s)) - f'_v\,(s,x(s),x'(s))]\,h'(s)\,ds\right\}dt =$$

$$= \ell(\mathbf{x}) + \omega(\mathbf{x},\mathbf{h})$$

Из предположенной ***непрерывности*** $f'_u$ и $f'_v$ следует, что линейный функционал $\ell(\mathbf{x})$ в этом равенстве — ***непрерывный линейный функционал*** в $\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, а $|\omega(\mathbf{x},\mathbf{h})|$ нетрудно ***оценить*** с использованием неравенств (12) из § 2 этой главы: $\quad |\omega(\mathbf{x},\mathbf{h})| \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} t \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\{\mathbf{L}(|h(s)|+|h'(s)|)\,|h(s)| + \mathbf{L}(|h(s)|+|h'(s)|)\,|h'(s)|\}\;ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{2}\cdot\mathbf{L}\cdot 2\cdot\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \mathbf{L}\cdot\|\mathbf{h}\|^2_{\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

Полученные оценки показывают ***дифференцируемость по Фреше функционала*** (8) в ***пространстве*** $\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. □

При этом его ***дифференциал Фреше*** в ***точке*** $x(s)$ определяется формулой:

$$d\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\{\,f'_u\,(\,s,\,x(s),x'(s)\,)\;h(s) + f'_v\,(\,s,\,x(s),x'(s)\,)\;h'(s)\,\}\;ds$$

Если теперь $x_0(s)$ ***элемент*** $\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, на котором ***достигается локальный минимум*** (или максимум) функционала (8), то согласно условию (5), $\quad d\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\,\mathbf{h}) \underset{\mathbf{h}}{\equiv} 0$, $\quad$ или $\quad \forall\,\mathbf{h}\in\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ :

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\{f'_u\,(s,x(s),x'(s))\,h(s) + f'_v\,(s,x(s),x'(s))\,h'(s)\}\;ds = 0 \qquad (9)$$

Хотя пространство $\mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***не является гильбертовым***, тем не менее, ***необходимое*** условие экстремума, и в этом случае, удается свести к условию (9), аналогичному условию (7), — к ***операторному уравнению***, которому должна удовлетворять экстремальная ***точка*** $\mathbf{x}_0$.

Нам понадобится следующее вспомогательное

**Утверждение 51.** *Если* $f(s)$ ***непрерывная*** *на отрезке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *функция и для* ***любой*** *функции* $h(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *выполнено равенство:*

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s)h(s)\,ds = 0, \tag{10}$$

*то* $f(s) \equiv 0$ *на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *и это утверждение останется справедливым, если в* (10) *использовать только те функции* $h(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *для которых* $h(\mathbf{a}) = h(\mathbf{b}) = 0$.

*Доказательство.* Действительно, пусть $f(s) \neq 0$ в некоторой ***точке*** $s_0 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Так как $f(s)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то ***найдется*** некоторый ***интервал*** $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \subseteq [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, на котором $f(s) \neq 0$ и потому сохраняет знак.

Будем теперь в качестве функции $h(s)$ в (10) рассматривать только такие функции, которые всюду, вне $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, равны $0$.

***Очевидно***, внутри $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ можно подобрать значения $h(s)$ так, чтобы $h(s)$, во-первых, была ***непрерывна*** на всём отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и, во-вторых, на некотором внутреннем интервале $(\mathbf{c_1}, \mathbf{d_1}) \subset (\mathbf{c}, \mathbf{d})$, сколь угодно мало отличающемся от последнего, ***совпадала*** с $f(s)$.

Тогда равенство $(10)$ ***не выполнено***, следовательно, наше ***предположение противоречит условию*** утверждения. $\square$

Рассмотрим теперь тождество $(9)$.

Обозначим для краткости:

$$f'_u\,(\,s,\,x_0\,(s), x'_0\,(s)\,)\;=\;m\,(s)\,;\qquad f'_v\,(\,s,\,x_0\,(s), x'_0\,(s)\,)\;=\;n\,(s)$$

В силу наших предположений $m\,(s)$ и $n\,(s)$ ***непрерывны*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Тождество $(9)$ в этих обозначениях примет вид:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,m\,(s)\,h\,(s)\;+\;n\,(s)\,h'\,(s)\,]\;ds\;\equiv\;0,\quad \forall\,\mathbf{h}\,\in\,\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \qquad (11)$$

Такое равенство возможно только, если $m\,(s)$ и $n\,(s)$ подчинены некоторым ***дополнительным*** условиям.

Обозначим: $\quad M\,(s)\;=\;\int\limits_{\mathbf{a}}^{s} m\,(\tau)\,d\tau$ .

Тождество $(11)$ можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,M'\,(s)\cdot h\,(s)\;+\;n\,(s)\cdot h'\,(s)\,]\;ds\;\equiv\;0\;.$$

Учтем, что $M\,(\mathbf{a})\;=\;0$ и, интегрируя по частям первое слагаемое под знаком интеграла в $(11)$, получим:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} M'\,(s)\cdot h\,(s)\,ds\;=\;M\,(s)\cdot h\,(s)\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} M\,(s)\cdot h'\,(s)\,ds\;.$$

Поэтому, предыдущее тождество перепишется в виде:

$$M\,(\mathbf{b})\cdot h\,(\mathbf{b})\;+\;\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,n\,(s)\;-\;M\,(s)\,]\cdot h'\,(s)\,ds\;\equiv\;0\;.$$

Здесь $h'\,(s)$ — ***любая непрерывная*** функция и $h\,(s)$ любая ее ***первообразная***.

В частности, это тождество должно удовлетворяться при $h\,(s)\;\equiv\;1$.

Но, это возможно ***только***, если: $M(\mathbf{b}) = 0$.

Учтя это условие, мы видим, что тождество (11) свелось к интегральному соотношению:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, n(s) - M(s)\,] \cdot h'(s)\, ds \equiv 0 \tag{12}$$

Кроме этого, должно быть: $M(\mathbf{a}) = M(\mathbf{b}) = 0$, а так как $h'(s)$ — ***любая непрерывная*** функция, то в силу утверждения 51 :

$$n(s) - M(s) \equiv 0 \quad \text{на } [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,, \tag{13}$$

и дополнительно: $M(\mathbf{a}) = M(\mathbf{b}) = 0$.

Поэтому $n(s)$ обязана быть ***дифференцируемой*** и:

$$n'(s) \equiv M'(s) \equiv m(s)\,.$$

Кроме того, из (13) следует, что: $n(\mathbf{a}) = n(\mathbf{b}) = 0$.

***Окончательно***, из тождества (13) мы получаем такое ***следствие***:

Если $x_0(s)$ — ***экстремальная точка*** функционала (8), то ***функция*** $x_0(s)$ ***необходимо*** удовлетворяет ***дифференциальному уравнению***:

$$f'_x\big(s,\, x(s),\, x'(s)\big) - \frac{d}{ds}\big[\, f'_{x'}(s,\, x(s),\, x'(s))\,\big] = 0 \tag{14}$$

и условиям:

$$f'_{x'}(\mathbf{a},\, x(\mathbf{a}),\, x'(\mathbf{a})) = f'_{x'}(\mathbf{b},\, x(\mathbf{b}),\, x'(\mathbf{b})) = 0$$

на концах отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Дифференциальное уравнение (14) называется ***уравнением Эйлера*** для функционала (8).

### Пример 2 — задача вариационного исчисления с закреплёнными концами

Рассмотрим теперь функционал (8) с теми же, что и раньше условиями на ***порождающую функцию*** $f$, но будем искать условия его (локального) ***минимума*** на ***подмножестве*** $\mathbf{M} \subset \mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, которое состоит из функций $\mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с ***фиксированными*** в концах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ значениями: $x(\mathbf{a}) = A$, $x(\mathbf{b}) = B$.

***Непосредственно*** проверяется ***выпуклость*** множества $\mathbf{M}$.

Поэтому, для ***минимизирующего элемента*** должно выполняться условие (4).

Учитывая полученную в примере 1 формулу для ***производной Фреше*** функционала (8), видим, что в ***точке минимума*** $x_0(s)$ должны выполняться условия:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \{f'_u\,(s, x_0(s), x'_0(s)) \cdot h(s) + f'_v\,(s, x_0(s), x'_0(s)) \cdot h'(s)\}\, ds \leqslant 0\,, \tag{15}$$

$$x_0(\mathbf{a}) = A, \quad x_0(\mathbf{b}) = B,$$

для ***всех допустимых направлений*** $\mathbf{h}$, т.е. идущих из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{M}$.

А для того, чтобы ***направление*** $\mathbf{h}$ ***вело*** бы в $\mathbf{M}$, ***очевидно***, нужно потребовать, чтобы:

$$h(\mathbf{a}) = h(\mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{16}$$

Очевидно, что если $\mathbf{h}$ ***допустимо***, то и ***направление*** — $-\mathbf{h}$, – также ***допустимо***.

Следовательно, ***неравенство*** в (15) должно удовлетворяться, как ***равенство***.

Мы получили ***необходимое*** условие минимума, по виду совпадающие с (9), но с ***дополнительными*** краевыми условиями в (15) и (16).

Преобразуем равенство (15) аналогично тому, как мы преобразовывали равенство (9).

Учитывая краевые условия, мы получим соотношение вида (12) в котором $h'(s)$ уже ***не произвольная*** непрерывная функция, а такая, ***первообразная*** которой удовлетворяет сразу двум ***дополнительным*** условиям: $h(\mathbf{a}) = 0$ и $h(\mathbf{b}) = 0$.

Из (12), в этом случае, уже ***не следует*** условие: $M(s) = n(s)$.

Но, как мы увидим ниже, из (12) ***следует, в этом случае***, что:

$$n(s) - M(s) \equiv const \tag{17}$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 52.** *Если* $f(s)$ *—* ***непрерывная*** *на отрезке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *функция и*

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s) \cdot h'(s)\, ds = 0, \quad h(s) \in \mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad h(\mathbf{a}) = 0,\, h(\mathbf{b}) = 0\,, \tag{18}$$

*то:* $f(s) \equiv const$.

*Доказательство.* ***Легко*** показать, что условие (18), определяющее справедливость заключения утверждения 52, можно заменить на эквивалентное ему:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s)\, g(s)\, ds = 0 \tag{19}$$

для любой ***непрерывной*** функции $g(s)$ такой, что: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} g(s)\,ds = 0$ .

Действительно, любая допустимая в условиях утверждения функция $h(s)$ имеет вид: $h(s) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{s} g(\tau)\,d\tau$ , где $g(\tau)$ — произвольная ***непрерывная*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функция.

Тогда условие $h(\mathbf{a}) = 0$, очевидно, выполнено, а условие $h(\mathbf{b}) = 0$ ***эквивалентно*** условию: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} g(\tau)\,d\tau = 0$ .

Теперь покажем, что из (19) ***следует*** заключение утверждения 52 , т.е. что $f(s) \equiv const$.

Пусть $f(s)$ — ***непрерывная*** функция, для которой выполнено (19).

***Очевидно***:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[ f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] ds = 0 \tag{20}$$

Пусть теперь $\ell(s)$ любая ***непрерывная*** функция.

Ее можно представить в виде: $\ell(s) = \lambda(s) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau$ ,

где $\lambda(s) = \ell(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau$ , и $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \lambda(s)\,ds = 0$ .

Рассмотрим тождество:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[ f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \ell(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[ f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \lambda(s)\,ds + \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[ f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] ds$$

В ***правой части*** этого равенства ***первое*** слагаемое равно 0 в силу (19), а ***второе*** — в силу (20).

Поэтому: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[ f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \ell(s)\,ds = 0$ для ***любой непрерывной*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функции $\ell(s)$.

Тогда, в силу утверждения 51 наша функция $f(s)$ должна удовлетворять ***интегральному*** уравнению:

$f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\, d\tau = 0$ , с ядром $\mathcal{K}(s, \tau) = \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , которое является, таким образом, интегральным уравнением с оператором конечного ранга $(N = 1)$ (см. (3), § (6) главы III).

***Непрерывным*** решением такого уравнения могут быть ***только постоянные*** функции $f(s) \equiv const$ , т.е. утверждение 52 доказано.

□

Вернемся к равенству (12) при краевых условиях в (15) и (16).

Из только что доказанного утверждения 52, получаем (17).

Отсюда, как и в примере 1, следует ***дифференцируемость*** $n(s)$ и равенство $n'(s) = m(s)$.

Следовательно, ***минимизирующий элемент*** $x_0(s)$ и в этом случае должен удовлетворять ***уравнению Эйлера*** (14).

***Дополнительные*** условия на решение этого уравнения — ***краевые*** условия, содержащиеся в (15).

***Упражнения и задачи к параграфу*** 4.

1. Пользуясь рассуждениями примеров 1 и 2 получить ***необходимые*** условия ***минимума*** функционала (8) при одном ***дополнительном*** условии: $x(\mathbf{a}) = 0$.

2. Показать, что в случае $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 1$ из условия (18) ***утверждения*** 52 ***следует***, что: $f(s) \equiv 0$.

3. В ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ найти ***градиент*** функционала: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{c}, \mathbf{x})$ , где $\mathbf{c}$ некоторый ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}$.

# Литература


[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа. М. "Физматлит". 2006г.

[2] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев Краткий курс функционального анализа. М. "Высшая школа". 1982г.

[3] В. А. Треногин Функциональный анализ. М. "Физматлит". 2002г.

[4] Л. Э. Эльсгольц Вариационное исчисление. М. "URSS". 2006г.

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров Теория экстремальных задач. М. "Наука". 1974г.

[6] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева Задачи и упражнения по функциональному анализу. М. "Физматлит". 2002г.

[7] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани Теоремы и задачи функционального анализа. М. "Наука". 1988г.

# Оглавление