Семинар 6.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda = 2, \ \lambda = 4$$

$\lambda_1 = 2:$

$$(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_2 = 4: \quad (A - \lambda E)\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha_2 = 3 \\ \beta_2 = 1 \end{matrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{4t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \qquad \det X(t) = -2e^{6t}$$

$$X^{-1}(t) = \frac{-e^{-6t}}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} & -3e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X^{-1}(t)\bar{f} = -\frac{e^{-6t}}{2} \begin{pmatrix} e^{4t} & -3e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-6t}}{2} \begin{pmatrix} 2e^{7t} - 15e^{3t} \\ -2e^{5t} + 5e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{t} + \frac{15}{2}e^{-3t} \\ e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-5t} \end{pmatrix}$$

$$c_1(t) = \int \left(-e^{t} + \frac{15}{2}e^{-3t}\right) dt = -e^{t} - \frac{5}{2}e^{-3t} + \tilde{c}_1$$

$$c_2(t) = \int \left(e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-5t}\right) dt = -e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t} + \tilde{c}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 3e^{4t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{t} - 5/2\, e^{-t} + \tilde{c}_1 \\ -e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-5t} + \tilde{c}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{3t} - \frac{5}{2} e^{-t} + c_1 e^{2t} - 3e^{3t} + \frac{3}{2} e^{-t} + 3\tilde{c}_2 e^{4t} \\ -e^{3t} - \frac{5}{2} e^{-t} + c_1 e^{2t} - e^{3t} + \frac{1}{2} e^{-t} + \tilde{c}_2 e^{4t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 e^{2t} + 3\tilde{c}_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t} \\ \tilde{c}_1 e^{2t} + \tilde{c}_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Метод подбора:

Общее решение однородной системы имеет вид: $x_{oo} = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{4t}$

$y_{oo} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t}$

Подберем два частных решения отвечающих квазимногочленам

$f_1 = \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$ $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = a_1 e^{3t} \\ y_1 = b_1 e^{3t} \end{cases}$ Подставим эту функцию в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 e^{3t} = 5a_1 e^{3t} - 3b_1 e^{3t} + 2e^{3t} \\ 3b_1 e^{3t} = a_1 e^{3t} + b_1 e^{3t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1 - 3b_1 + 2 = 0 \\ a_1 - 2b_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a_1 = -4 \\ b_1 = -2 \end{matrix}$$

Второе частное решение

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 e^{-t} \\ b_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$ Подставим в систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_2 e^{-t} = 5a_2 e^{-t} - 3b_2 e^{-t} \\ -b_2 e^{-t} = a_2 e^{-t} + b_2 e^{-t} + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a_2 - 3b_2 = 0 \\ a_2 + 2b_2 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_2 = b_2 \\ a_2 + 2b_2 = -5 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_2 = -1 \\ b_2 = -2 \end{matrix}$$

Операторный метод.

Замечание: Операторный метод применяется для решения задачи Коши. т.е. когда в явном виде заданы начальные условия $x(0)$, $y(0)$. Здесь я выразил эти значения из общего решения полученного в первом способе через c_1 и c_2

$$x(t) \doteqdot X(p)$$
$$y(t) \doteqdot Y(p)$$
$$\dot{x}(t) \doteqdot pX - c_1 - 3c_2 + 5$$
$$\dot{y}(t) \doteqdot pY - c_1 - c_2 + 4$$

$$\begin{cases} pX - c_1 - 3c_2 + 5 = 5X - 3Y + \dfrac{2}{p-3} \\ pY - c_1 - c_2 + 4 = X + Y + \dfrac{5}{p+1} \end{cases}$$

Это позволяло получить ответ ровно в таком же виде, ценой достаточно неприятных вычислений.

$$\begin{cases} (p-5)X + 3Y = \dfrac{2}{p-3} + c_1 + 3c_2 - 5 \\ -X + (p-1)Y = \dfrac{5}{p+1} + c_1 + c_2 - 4 \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на $(p-5)$ и сложим с первым,

$$((p-5)(p-1)+3)Y = \frac{2}{p-3} + \frac{5(p-5)}{p+1} +$$
$$+ c_1 + 3c_2 - 5 + (c_1 + c_2 - 4)(p-5)$$

$$(p^2 - 6p + 8)Y = \frac{2}{p-3} + \frac{5(p+1) - 30}{p+1} + c_1 + 3c_2 - 5 +$$
$$+ (c_1 + c_2 - 4)(p-5)$$

$$(p-2)(p-4)Y = \frac{2}{p-3} - \frac{30}{p+1} + c_1 + 3c_2 + (c_1 + c_2 - 4)(p-5)$$

$$Y = \frac{2}{(p-3)(p-2)(p-4)} - \frac{30}{(p+1)(p-2)(p-4)} + \frac{c_1 + 3c_2}{(p-2)(p-4)} +$$
$$+ \frac{(c_1 + c_2 - 4)(p-5)}{(p-2)(p-4)}$$

$$Y = \frac{-2}{p-3} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-4} - \frac{2}{p+1} + \frac{5}{p-2} - \frac{3}{p-4} -$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{c_1+3c_2}{p-2} + \frac{1}{2}\,\frac{c_1+3c_2}{p-4} + \frac{3}{2}\,\frac{c_1+c_2-4}{p-2} -$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{c_1+c_2-4}{p-4} = \frac{-2}{p-3} + \frac{c_1}{p-2} + \frac{c_2}{p-4} - \frac{2}{p+1}$$

$$X = (p-1)Y - c_1 - c_2 + 4 = \frac{-2(p-1)}{p-3} + \frac{c_1(p-1)}{p-2} + \frac{c_2(p-1)}{p-4}$$

$$- \frac{2(p-1)}{p+1} - c_1 - c_2 + 4 - \frac{5}{p+1} = \frac{-2(p-3)-4}{p-3} +$$

$$+ \frac{c_1(p-2)+c_1}{p-2} + \frac{c_2(p-4)+3c_2}{p-4} - \frac{2(p+1)-4}{p+1} -$$

$$- c_1 - c_2 + 4 - \frac{5}{p+1} = -\frac{4}{p-3} + \frac{c_1}{p-2} + \frac{3c_2}{p-4} - \frac{1}{p+1}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t} \end{cases}$$

Д. 3. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$