1 Кватернионы

Кватернионы можно определить как множество формальных сумм $a+ib+jc+kd$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а i, j, k определяются следующими соотношениями $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.
Множество кватернионов обозначается как $\mathbb{H}$.

Сложение двух кватернионов покомпонентное, и таким образом, свойства поля $\mathbb{R}$ индуцируются (для операции сложения) на кватернионы, т.е. оно будет ассоциативным и коммутативным.
Умножение должно быть дистрибутивно относительно сложения, так что достаточно уметь умножать базисные кватернионы.
Таблица умножения для кватернионов выглядит следующим образом:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Из таблицы умножения можно заметить, что разные кватернионные “единицы” не коммутируют, а антикоммутируют: $ij = k$ и $ji = -k$. Таким образом, если знать, что $ij = k$, то остальное выводится из ассоциативности умножения. Например, $ik = iij = -j$, поскольку $i^2 = -1$.
Правило умножения базисных кватернионов получается из формулы $ij = k$ циклическими перестановками: $ij = k, jk = i, ki = j$.

Сопряженным к $q = a+ib+jc+kd$ называется кватернион $\overline{q} = a-ib-jc-kd$.

Нормой кватерниона называется величина $\|q\| := \sqrt{q \cdot \overline{q}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.
Обозначается: $N(q)$, $\|q\|$.

Если кватернион $q = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \|q\| = 0$, а поэтому всякий ненулевой кватернион обратим: $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|}$.

Множество $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ является мультипликативной группой, а $\mathbb{H}$ является примером некоммутативного тела.

Также кватернионы можно определить через **комплексные матрицы** вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

Тогда $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
Свойства такого представления.

1. Сопряженному кватерниону соответсвует сопряженная матрица;

2. Квадрат нормы кватерниона равен определителю матрицы.

Аналогично комплексным числам, кватернионы можно определить через **вещественные матрицы** вида:

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

При таком определении вытекают следующие свойства.

1. Сопряженному кватерниону соответсвует транспонированная матрица;

2. Норма кватерниона равна корню из определителя матрицы.

Подгруппы и факторгруппы группы Q_8

Если h — любой элемент Q_8, отличный от 1 и -1, то $h^2 = -1$. Поэтому любая подгруппа (отличная от тривильной $\{1\}$) содержит элемент -1. Первую подгруппу получаем, если ограничимся элементами $\{1, -1\}$.
Так как элемент -1 входит в любую (нетривиальную) подгруппу, то элементы i и $-i$ либо оба входят, либо оба не входят в подгруппу. То же верно для j и $-j$, k и $-k$. Так как (нетривиальная) подгруппа в группе кватернионов может содержать только 2 или 4 элемента (по теореме Лагранжа), то мы получаем еще только 3 подгруппы: $\{1, -1, i, -i\}, \{1, -1, j, -j\}, \{1, -1, k, -k\}$.
Все подгруппы нормальны.
$Q_8/\{1, -1\} = \{\{1, -1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}\}$.
$Q_8/\{1, -1, i, -i\} = \{\{1, -1, i, -i\}, \{j, -j, k, -k\}$.
Первая факторгруппа изоморфна V_4, факторгруппы по трем подгруппам 4-го порядка изоморфны C_2.

Коммутант и центр группы Q_8

Элементы 1 и -1 коммутируют со всеми остальными элементами группы кватернионов. Поэтому если один из элементов g_1, g_2 совпадает с 1 или -1, то $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = 1$. Если g - любой элемент, отличный от 1 и -1, то $g \cdot (-g) = -g^2 = -(-1) = 1$, т. е. $g^{-1} = -g$. Поэтому, если g_1 и g_2 - элементы, отличные от 1 и -1, то $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = g_1 g_2 (-g_1)(-g_2) = g_1 g_2 g_1 g_2 = (g_1 g_2)^2$. Но квадрат любого элемента в группе кватернионов равен 1 или -1. Поэтому коммутант может содержать только элементы 1 и -1, а так как группа кватернионов не коммутативна, то коммутант отличен от $\{1\}$. Следовательно, коммутант — это $\{1, -1\}$.
Так как 1 и -1 (и только они) коммутируют со всеми остальными элементами группы кватернионов, то $Z(G) = \{1, -1\}$.