Зан. 10. Линейные неоднородные дифф. ур-я высших порядков. ①

ЛНДУ (N). $L(y)=f(x)$.

(1) $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$.

Замеч. чаще будем рассм. случай $a_j(x)=a_j=const$.

Теор. о структуре общего решения ЛНДУ:

$$y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.},$$

где $y_{о.о.}$: $L(y_{оо})=0$; $y_{ч.н.}$: $L(y_{ч.н.})=f(x)$.

Замеч. $y_{о.о.}=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$,

где $\{y_1(x),\ldots,y_n(x)\}$ – ФСР однор. ур-я $L(y)=0$.

1. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Пусть $\{y_1,\ldots,y_n\}$ – ФСР соотв. однор. ур-я.
Ищем общее реш. неоднор. ур-я в виде:

$$y=C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n,$$

где неизвестные ф-ии $C_1(x),\ldots C_n(x)$ опред. из сист. ур-ний:

$$\begin{cases} C_1'y_1+\ldots+C_n'y_n=0\\ C_1'y_1'+\ldots+C_n'y_n'=0\\ \ldots\ldots\\ C_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$

Для $n=2$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'\\ C_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x)\end{cases}$$

Линейные неоднородные ур-я высших порядков.

Решить д. ур. II порядка методом вариации постоянных. (1а)

Из задачника (Романко). $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. (ТР, №1а по старому и по новому ТР). №3 по новому ТР

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i.$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \Rightarrow y_{гн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$

$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$

$y_1' = -\sin x, \quad y_2 = \cos x.$

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \times \sin x \\ + \\ \times \cos x \end{vmatrix}$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\cos x}; \quad C_1'(x) = -\frac{C_2' \sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + B$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + A.$$

$B = const$

$A = const$

Ответ: $y = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| \cdot \sin x - 1.$

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} + A\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + B\right)\sin x.$$

Линейные неоднор. ур-я высших порядков

1. Решить ур-е методом вариации произвольных постоянных (Т.Р. №1а). ②

№3 нов.

1.1. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{2e^{-x}}{\cos 2x}.$

а) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$

$D = 4 - 20 = -16;$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2};$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i.$

$y_{одн.} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

б) $y_2 = e^{-x}(C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x).$

$y_1 = e^{-x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x.$

$$(*)\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' = \dfrac{2e^{-x}}{\cos 2x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{e^{-x}}(\cos 2x \cdot C_1' + \sin 2x \cdot C_2') = 0. \Rightarrow \boxed{C_2' = -\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot C_1'} \\ \cancel{e^{-x}}(-\cos 2x - 2\sin 2x)C_1' + \cancel{e^{-x}}(-\sin 2x + 2\cos 2x)C_2' = \dfrac{2\cancel{e^{-x}}}{\cos 2x} \end{cases}$$

Умножим на $\cos 2x$:

$$(-\cos^2 2x - 2\sin 2x\cos 2x)C_1' + (-\sin 2x\cos 2x + 2\cos^2 2x)\left(-\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right)C_1' = 2.$$

$$C_1'\left(\cancel{-\cos^2 2x} - 2\sin 2x\cos 2x + \cancel{\cos^2 2x} - \frac{2\cos^3 2x}{\sin 2x}\right) = 2.$$

Решим систему (*) по „правилу Крамера"

③

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\cos 2x - 2\sin 2x & -\sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -\cancel{\sin 2x \cos 2x} + 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x + \cancel{\sin 2x \cos 2x} = 2.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \frac{2}{\cos 2x} & -\sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -\cos 2x - 2\sin 2x & \frac{2}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 2$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2\sin 2x}{2\cos 2x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x};$$

$$C_1(x) = \int -\frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{d\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + \tilde{C}_1$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1; \quad C_2(x) = x + \tilde{C}_2.$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^{-x}\cos 2x + \tilde{C}_2 e^{-x}\sin 2x + e^{-x}\left(\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\cos 2x + x\sin 2x\right).$

Занятие 10.

№ 239. Доказать, что любое решение ур-я (4)

$$y^{V} - y^{IV} - 9y''' + y'' + 20y' + 12y = 0 \qquad (1)$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0 \quad \text{и} \quad y'' - 4y = 0. \qquad (2)$$

Решение.

$$(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3)(\lambda^2 - 4) =$$

$$= \lambda^5 - \lambda^4 \underline{- 5\lambda^3} - 3\lambda^2 \underline{- 4\lambda^3} + 4\lambda^2 + 20\lambda + 12 =$$

$$= \lambda^5 - \lambda^4 - 9\lambda^3 + \lambda^2 + 20\lambda + 12;$$

Это - характеристич. многочлен д. ур-я (1), т.е. корни хар. ур-ний (1) и (2) совпадают.

Найти частные решения уравнений, удовл. заданным условиям на бесконечности. (5)

Пример 1. Найти частное решение ур-я

$$y'' + 4y' + 5y = 8\cos x,$$ ограниченное при $x \to -\infty$.

Решение. $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda+2)^2 + 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + 2(\cos x + \sin x).$$

При $x \to -\infty$ $e^{-2x} \to +\infty$ при любых C_1 и $C_2 \neq 0$.

и I слагаемое будет неограничено при $x \to -\infty$.

$\Rightarrow$ нужно взять $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Ответ: $y = 2(\cos x + \sin x)$.

Пример 2. Найти частное решение ур-я

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + e^{-x}\cos x,$$

удовл. условию: $y \to 2$ при $x \to +\infty$.

Решение. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$; $(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$

Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x).$$

Если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, $y(x)$ неограничено при $x \to +\infty$.

При $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

$$y_{\text{частн.}} = 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

При $x \to +\infty$ $y_{\text{частн.}} \to 2$, ч.т.д.

Ответ: $y = 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$.

Уравнение Эйлера.

$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = f(x)$, $x>0$.

Заменой $\boxed{x=e^t}$ сводится к лин.ур-ю с пост. коэфф.

Пример.

$$x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3$$

$x=e^t$; $t=\ln x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} = y'_t\cdot\frac{1}{e^t} = e^{-t}y'_t;$$

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}(y'_x) = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}y'_t) = e^{-t}(-e^{-t}y'_t + e^{-t}y''_{tt})$$

$$y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt}-y'_t).$$

$$\cancel{e^{2t}\cdot e^{-2t}}(y''_{tt}-y'_t) - \cancel{e^{t}\cdot e^{-t}}y'_t - 3y = 4e^{3t}$$

$$y''_{tt} - 2y'_t - 3y = 4e^{3t}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

$$y_{oo} = C_1e^{-t}+C_2e^{+3t}$$

$$y_ч = a\cdot t\cdot e^{3t}$$

$$y_ч' = a(e^{3t}+3te^{3t}) = ae^{3t}(1+3t)$$

$$y_ч'' = ae^{3t}[3+9t+3] = ae^{3t}(6+9t)$$

$$a(6+9t) - 2a(1+3t) - 3t = 4$$

$4a=4$; $a=1$.

$$y_{он} = C_1e^{-t}+C_2e^{+3t}+te^{3t}$$

Ответ: $y = C_1\cdot\frac{1}{x} + C_2\cdot x^3 + \ln x\cdot x^3$.

Дома:
ТР, № 1, 2, 3б,
№4, №5б.

Дома: № 196. $x^2y''+xy'+y=10x^2$

№ 198. $x^2y''+xy'+y=-2\sin(\ln x)$.

Ответы: № 196. $y = C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+2x^2$

№ 198. $y = C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+\ln x\cdot\cos(\ln x)$.

Вариант 1.

Назвать тип дифф. уравнения.
Указать метод его решения.

1. $\sqrt{4+y^2}\,dx = y\sqrt{1+x^2}\,dy$
2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$
3. $y' = \frac{x+2y-3}{-2x-2+y}$
4. $y' - \frac{y}{x} = x^2$
5. $y' + xy = (1+x)\cdot e^{-x}\cdot y^2$
6. $3x^2e^y\,dx + (x^3e^y - 1)\,dy$
7. $y'''\cdot x\ln x = y''$
8. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$
9. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$
10. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+3x}$

Вариант 2.

Назвать тип дифф. уравнения
Указать метод его решения

1. $2x(1+y^2)\,dx + \sqrt{2-x^2}\,dy = 0$
2. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$
3. $y' = \frac{x+6y-7}{8x-y-7}$
4. $y' - y\cos x = \sin 2x$
5. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{2}{3}\sin x\cdot y^4$
6. $xy^2\,dx + y(x^2+y^2)\,dy = 0$
7. $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$
8. $y'' = 2y\;3 + 5\cos x - 4$
9. $y^{(4)} + y^{(3)} = 12x + 6$
10. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}}$