Практическое занятие №12
Вычеты

Краткие теоретические сведения

12.1. Вычет в конечной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0, т.е. в кольце K : $0 < |z - z_0| < \rho_0$. Тогда в этом кольце функция $f(z)$ представляется сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{12.1}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \qquad \gamma_\rho: |z - z_0| = \rho, \qquad 0 < \rho < \rho_0. \tag{12.2}$$

Определение 1. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* z_0 называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = c_{-1}. ▲$$

12.2. Вычисление вычета в полюсе $z = z_0$ ($z_0 \neq \infty$).

Случай простого полюса.

Если z_0 — полюс первого порядка для функции $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{12.3}$$

Пусть $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ *и* $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда $z = z_0$— полюс первого порядка для функции $f(z)$ и

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}. \tag{12.4}$$

Случай кратного полюса.

Если z_0 — полюс порядка m для функции $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{res} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \tag{12.5}$$

12.3. Вычет в бесконечно удаленной точке ($z_0 = \infty$)

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\rho_0 < |z| < \infty$. Тогда в этой области

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{12.6}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \quad \rho_0 < \rho < \infty, \qquad \gamma_\rho: |z| = \rho. \tag{12.7}$$

Определение 2. *Вычетом функции* $f(z)$ *в точке* $z_0 = \infty$ называется число $(-c_{-1})$, где c_{-1} – коэффициент при z^{-1} ряда Лорана (12.9) функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1} ▲$$

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $\rho_1 < |z - z_0| < \infty$. Тогда в этом кольце она представляется рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n, \tag{12.8}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{\rho_2}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,, \qquad \gamma_{\rho_2}: |z - z_0| = \rho_2, \qquad \rho_1 < \rho_2 < \infty. \quad (12.9)$$

Ряд (12.12) также является рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом $b_{-1} = c_{-1}$. Поэтому

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -b_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_{\rho_2}} f(\xi)\, d\xi. \qquad (12.10)$$

● Другие способы нахождения вычета в бесконечно удаленной точке:

1) Если $f(z) \sim \frac{A}{z}$ при $z \to \infty$, то $\underset{z=\infty}{res} f(z) = -A$. (12.11)

2) Если $f(z) \sim \frac{A}{z^k}, k \geq 2$ при $z \to \infty$, то $\underset{z=\infty}{res} f(z) = 0$.
(12.12)

Контрольные вопросы по теоретической части

1) Дайте определение *вычета* функции $f(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$.
2) Как вычислить вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$ в случае простого полюса?
3) Как вычислить вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 \neq \infty$ в случае кратного полюса?
4) Дайте определение *вычета* функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$.
5) Как можно найти вычет функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$?

Практические задания

Найти вычеты указанных ниже функций относительно каждого из ее полюсов, отличных от ∞:

1) $f(z) = \dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{z\left(1-e^{2z}\right)}$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - 1}$;

4) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}$;

5) $f(z) = \dfrac{\cos 4z}{(z-2)^6}$;

6) $f(z) = tg\, \dfrac{1}{z-1}$.

Найти вычеты функций относительно точки $z = \infty$:

7) $f(z) = \dfrac{z^4+z}{z^6-1}$;

8) $f(z) = z\cos^2 \dfrac{\pi}{z}$;

9) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-1} \sin \dfrac{1}{z}$.

Найти вычеты указанных ниже функций относительно всех конечных изолированных особых точек:

10) $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$;

11) $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$;

12) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$.

Домашнее задание: №№ 13.408, 13.411, 13.414, 13.419, 13.426, 13.428, 13.429.
Типовой расчет: задачи №№ 5,6. (разбор задач типового расчета приведен в примере 9 лекции 12)