Теория вероятностей и математическая статистика
Лектор А.А. Лобузов
Семестр 6 Лекция 10

Параметрические гипотезы

Рассматривается статистическая модель $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}), \mathscr{P})$.

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения $\mathscr{L}$ наблюдаемой случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$.

Статистическая гипотеза называется **параметрической**, если она строится на предположениях о параметрах $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ функции распределения $F(x; \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^r$, Θ – множество параметров.

Основная гипотеза определяется подмножеством $\Theta_0 \subset \Theta$: $\mathbf{H}_0 = \{\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r) \in \Theta_0\}$, а конкурирующая гипотеза подмножеством $\Theta_1 \subset \Theta$: $\mathbf{H}_1 = \{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1\}$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \varnothing$. Если $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, то гипотеза называется альтернативной, а каждое значение $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$ называется альтернативой. Если множество Θ_0 содержит только один элемент, то гипотеза $\mathbf{H}_0$ называется простой. Аналогично, если множество Θ_1 содержит только один элемент, то гипотеза $\mathbf{H}_1$ называется простой.

Выбор гипотезы определяется критической областью $\mathscr{X}_{кр} = \mathscr{X}_1 \subset \mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^N$:

если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathscr{X}_1$, то гипотеза $\mathbf{H}_0$ отвергается (принимается гипотеза $\mathbf{H}_1$);

если $\mathbf{x}=(x_1, x_2,..., x_N)\in\mathscr{X}_0=\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_1$, то гипотеза $\mathbf{H}_0$ принимается (отвергается гипотеза $\mathbf{H}_1$);

где $\mathbf{x}=(x_1, x_2,..., x_N)$ − реализация случайной выборки $\mathbf{X}=(X_1, X_2,..., X_N)$.

Иногда критическую область $\mathscr{X}_1$ называют критерием. Обычно критическую область задают с помощью специально выбранной статистики $T_N(\mathbf{X})=T_N(X_1, X_2,..., X_N)$, которая называется числовым критерием: $\mathscr{X}_1=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_N)\in\mathscr{X}: T(\mathbf{x})\in U_{кр}\subset\mathbb{R}\}$. Область обычно имеет один из следующих видов: $U_{кр}=\{x\in\mathbb{R}: x>z_{кр}\}$, $U_{кр}=\{x\in\mathbb{R}: x<z_{кр}\}$ $U_{кр}=\{x\in\mathbb{R}: x<z_{кр,1}\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x>z_{кр,2}\}$.

Вероятности ошибок первого рода $\mathrm{P}(\mathbf{X}=(X_1, X_2,\ldots, X_N)\in\mathscr{X}_1|\mathbf{H}_0)$ и второго рода $\mathrm{P}(\mathbf{X}=(X_1, X_2,\ldots, X_N)\in\mathscr{X}_0|\mathbf{H}_1)$ можно выразить через функцию мощности: $W(\boldsymbol{\theta})=W(\mathscr{X}_1;\boldsymbol{\theta})=\mathrm{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{X}\in\mathscr{X}_1)$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,...,\theta_r)\in\Theta$.

Вероятность ошибки первого рода $\mathrm{P}(\mathbf{X}\in\mathscr{X}_1|\mathbf{H}_0)=W(\boldsymbol{\theta})$ при $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$; вероятность ошибки второго рода $\mathrm{P}(\mathbf{X}\in\mathscr{X}_0|\mathbf{H}_1)=1-W(\boldsymbol{\theta})$ при $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$.

Пусть $\alpha\in(0,1)$ и $W(\boldsymbol{\theta})\le\alpha$ для всех $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$, причем существует такое $\boldsymbol{\theta}^*\in\Theta_0$, что $W(\boldsymbol{\theta}^*)=\alpha$, то критическая область (критерий) $\mathscr{X}_1$ называется критической областью (критерием) уровня значимости α и обозначается $\mathscr{X}_{1\alpha}$.

Если $W(\mathscr{X}^*_{1\alpha};\boldsymbol{\theta})\le W(\mathscr{X}_{1\alpha};\boldsymbol{\theta})$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$ и $W(\mathscr{X}^*_{1\alpha};\boldsymbol{\theta})\ge W(\mathscr{X}_{1\alpha};\boldsymbol{\theta})$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$, причем существует такое $\boldsymbol{\theta}^*\in\Theta_1$, что $W(\mathscr{X}^*_{1\alpha};\boldsymbol{\theta}^*)>W(\mathscr{X}_{1\alpha};\boldsymbol{\theta}^*)$, то критерий $\mathscr{X}_{1\alpha}^{*}$ называется более равномерно мощным, чем критерий $\mathscr{X}_{1\alpha}$. Если критерий $\mathscr{X}_{1\alpha}^{*}$ более равномерно мощный, чем все другие критерии уровня значимости α, то он называется равномерно наиболее мощным критерием уровня значимости α для проверки гипотезы $\mathbf{H}_0$.

Если критерий $\mathscr{X}_1$ является критерием уровня значимости α и $W(\boldsymbol{\theta}) \geq \alpha$ для всех $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$, то критерий $\mathscr{X}_1$ называется несмещенным.

Равномерно наиболее мощный критерий среди всех критериев уровня значимости α существует достаточно редко, чаще можно найти равномерно наиболее мощный критерий в классе несмещенных критериев уровня значимости α.

Рассмотрим случай, когда $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta_1\}$. Основная гипотеза $\mathbf{H}_0 = \{\theta = \theta_0\} = \{F_\xi(x) = F(x, \theta_0)\}$, альтернатива $\mathbf{H}_1 = \{\theta = \theta_1\} = \{F_\xi(x) = F(x, \theta_1)\}$. Фиксируем уровень значимости $\alpha = W(\mathscr{X}_{1\alpha}; \theta_0)$ и будем искать критерий $\mathscr{X}_{1\alpha}$, у которого максимальная мощность $\alpha = W(\mathscr{X}_{1\alpha}; \theta_1)$. Для построения наиболее мощного критерия в этом случае используют статистику правдоподобия:

$T_N(\mathbf{x}) = \dfrac{L(\mathbf{x}; \theta_1)}{L(\mathbf{x}; \theta_0)}$, где $L(\mathbf{x}; \theta_i) = \prod\limits_{j=1}^{N} f(x_j, \theta_i)$ − функция правдоподобия числовой выборки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ при значении параметра $\theta = \theta_i$, $i = 0,1$.

Следует заметить, что $L(\mathbf{x}; \theta_0) = \prod\limits_{j=1}^{N} f(x_j, \theta_0)$ является значением плотности распределения случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ выборочного пространства $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ в случае справедливости гипотезы $\mathbf{H}_0 = \{\theta = \theta_0\} = \{F_\xi(x) = F(x,\theta_0)\}$, а $L(\mathbf{x};\theta_1) = \prod_{j=1}^{N} f(x_j,\theta_1)$ – значение плотности распределения случайного вектора $\mathbf{X}$ в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$ выборочного пространства в случае справедливости гипотезы $\mathbf{H}_1 = \{\theta = \theta_1\} = \{F_\xi(x) = F(x,\theta_1)\}$.

При широких предположениях о плотности $f(x,\theta)$ верна следующая теорема.

Теорема Неймана-Пирсона.

Существует наиболее мощный критерий проверки гипотезы $\mathbf{H}_0 = \{F_\xi(x) = F(x,\theta_0)\}$ против гипотезы $\mathbf{H}_1 = \{F_\xi(x) = F(x,\theta_1)\}$ при уровне значимости α, который задается критической областью

$\mathscr{X}_{1\alpha} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathscr{X} : T_N(\mathbf{x}) \geq z_\alpha\}$, где значение z_α находится из соотношения $\mathrm{P}(T_N(\mathbf{x}) \geq z_{\alpha 1} | \mathbf{H}_0) = 1 - \alpha$.