Занятие № 7.

Линейные неоднородные системы с постоянными коэффициентами.

Метод подбора частного решения.

(1) $\frac{dX}{dt} = AX + f(t)$, $A = (a_{ij})$, $i,j = 1, 2, \ldots, n$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

(1') $\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t)$,

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Соотв. однородная система:

(2) $\frac{dX}{dt} = AX$; X_{oo} – общее решение однородной системы.

Обозначим $X_{чн}$ – частное решение неоднор. системы (1).

Тогда $\boxed{X_{он} = X_{oo} + X_{чн}.}$

Для нахождения $X_{чн}$ используются:

1) метод вариации произвольн. пост.
2) метод неопред. коэфф-тов; 3) операторный метод.

Теор. Принцип суперпозиции.

Пусть $X^{I}(t)$ – решение системы $\frac{dX^{I}}{dt} = A(t)X^{I} + f_1(t)$

$X^{II}(t)$ – — // — $\frac{dX^{II}}{dt} = A(t)X^{II} + f_2(t)$;

Тогда $X(t) = X^{I} + X^{II}$ – реш. системы $\frac{dX}{dt} = A(t)X + f_1(t) + f_2(t)$.

Домашнее задание.

ТР № 3 (1а, 1б).

Филиппов: № 834, 835, 836, 843 (метод неопр. коэфф.)

№ 847, 848 (метод вариации постоянных).

II. Метод неопределенных коэфф.
(или метод подбора частного решения).

Применяется, когда ф-ии $f_i(t)$ в $(1')$ – квазимногочлены, т.е. ф-ии вида:

$$f_i(t) = P_{m_i}(t) e^{\alpha t} \cos\beta t + Q_{m_i}(t) e^{\alpha t} \sin\beta t.$$

Решение ищется в виде:

$$x_i(t) = P^i_{m+s}(t) e^{\alpha t} \cos\beta t + Q^i_{m+s}(t) e^{\alpha t} \sin\beta t,$$

где $m = \max m_i$, $P^i_{m+s}(t)$ – многочлены; $Q^i_{m+s}(t)$

$S=0$, если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ <u>не</u> явл. корнем хар. ур-я;

$S \neq 0$, если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ <u>явл.</u> корнем хар. ур-я кратности S.

Принцип суперпозиции:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{f}_1(t) + \bar{f}_2(t)$$

$\bar{x}(t) = \bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t)$, где
$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = A\bar{x}_1 + \bar{f}_1(t)$$
$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = A\bar{x}_2 + \bar{f}_2(t)$$

<u>Пример 1</u> (ТР, №3, б).

$$(*)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Найдём общее реш. однор. системы: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1).$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 = -1.$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\bar{v}_1 + C_2 e^{2t}\bar{v}_2.$$

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \left[\begin{aligned} x_{одн.}(t) &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \\ y_{одн.}(t) &= -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t}. \end{aligned}\right.$$

Частное решение неодн. системы ищем в виде:

$$\begin{aligned} x_r &= A\sin t + B\cos t \\ y_r &= C\sin t + D\cos t \end{aligned} ; \quad \begin{aligned} \dot{x} &= +A\cos t - B\sin t \\ \dot{y} &= C\cos t - D\sin t \end{aligned} \to (*)$$

$$A\cos t - B\sin t = C\sin t + D\cos t - 5\cos t$$

$$C\cos t - D\sin t = 2A\sin t + 2B\cos t + C\sin t + D\cos t.$$

$$\begin{aligned} &\text{при } \cos t: \\ &\text{при } \sin t: \end{aligned} \left\{\begin{aligned} A &= D - 5 \\ C &= 2B + D \\ -B &= C \\ -D &= 2A + C \end{aligned}\right.$$

Исключим C и D.

$$\left\{\begin{aligned} -B &= 2B + D \\ -D &= 2A - B \\ C &= -B \\ D &= A + 5. \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} &3B + A + 5 = 0 \\ &2A - B + A + 5 = 0 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} A + 3B &= -5 \\ 3A - B &= -5. \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{A = -2, \ B = -1, \ C = 1, \ D = 3.}$$

Ответ:
$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t$$
$$y(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t.$$

$B = 3A + 5$

$A + 9A + 15 = -5$

$10A = -20 \Rightarrow \boxed{A = -2} \Rightarrow B = -6 + 5 = -1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow D = -2 + 5 = 3.$

Пример 2. (ТР, №3б)

$$(*)\quad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y+2e^{t}\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+2y-3e^{4t}\end{cases}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3=$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-3).\quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$$

$$x_{oo}=C_1e^{t}+C_2e^{3t}\qquad \lambda=1:\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\ v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad \lambda=3:\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\ v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$y_{oo}=-C_1e^{t}+C_2e^{3t}$$

Поскольку $\lambda_0=1$ явл. корнем хар. ур-я, ищем част. реш. в виде:

$$x_ч=(A_1+A_2t)e^{t}+A_3e^{4t}$$
$$y_ч=(B_1+B_2t)e^{t}+B_3e^{4t}.\qquad (*)$$

$$\dot x_ч=A_2e^{t}+(A_1+A_2t)e^{t}+4A_3e^{4t}=(A_1+A_2+A_2t)e^{t}+4A_3e^{4t}$$
$$\dot y_ч=B_2e^{t}+(B_1+B_2t)e^{t}+4B_3e^{4t}=(B_1+B_2+B_2t)e^{t}+4B_3e^{4t}.$$

$$\begin{cases}(A_1+A_2+A_2t)e^{t}+4A_3e^{4t}=(2A_1+2A_2t)e^{t}+2A_3e^{4t}+\\ \qquad\qquad +(B_1+B_2t)e^{t}+B_3e^{4t}+2e^{t}\\ (B_1+B_2+B_2t)e^{t}+4B_3e^{4t}=(A_1+A_2t)e^{t}+A_3e^{4t}+(2B_1+2B_2t)e^{t}+2B_3e^{4t}-3e^{4t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-A_1+A_2-B_1=2\\ A_1+B_1-B_2=0\\ A_2+B_2=0\\ 2A_3-B_3=0\\ 2B_3-A_3=-3\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}A_1=0\\ A_2=1\\ A_3=-1\\ B_1=-1\\ B_2=-1\\ B_3=-2.\end{array}\qquad \begin{cases}x_ч=te^{t}-e^{4t}\\ y_ч=(-1-t)e^{t}-2e^{4t}.\end{cases}$$

Ответ:
$$x(t)=C_1e^{t}+C_2e^{3t}+te^{t}-e^{4t}$$
$$y(t)=-C_1e^{t}+C_2e^{3t}+(-1-t)e^{t}-2e^{4t}.$$

Дома:
ТР, №3 (1а, 1б)
№ 834, 835, 836, 843
(метод неопр. коэф.)
№ 847, 848
(метод вар. пост.)

Занятие 7.

II. Решение систем неоднородных дифф. ур-ний операторным методом. (ТР №3, п.3)

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{f}(t); \quad f_i(t) = e^{\alpha t}\left[P_{m_i}(t)\cos\beta t + Q_{r_i}(t)\sin\beta t\right] \\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \end{cases}$$

Обозначим $\underset{(n\times 1)}{X(p)} \risingdotseq \underset{(n\times 1)}{x(t)}$; $\underset{(n\times 1)}{\Phi(p)} \risingdotseq \underset{(n\times 1)}{f(t)}$;

Тогда по теореме о дифф-ии оригинала:

$$pX(p) - \bar{x}_0 = AX(p) + \Phi(p);$$

$$\underset{(n\times n)}{(pE-A)}X(p) = x_0 + \Phi(p)$$

$$X(p) = (pE-A)^{-1}x_0 + (pE-A)^{-1}\Phi(p). \quad * \quad \text{решение задачи Коши } x(t)$$

$$x(t) \risingdotseq X(p).$$

Пример 3 (ТР, №3 в).

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t} & x(0)=1 \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} & y(0)=1. \end{cases}$$

$$e^{t} \risingdotseq \frac{1}{p-1}; \quad e^{4t} \risingdotseq \frac{1}{p-4}.$$

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1; \quad \dot{y}(t) \risingdotseq pY(p) - 1.$$

$$\begin{cases} pX - 1 = 2X + Y + \frac{2}{p-1} \\ pY - 1 = X + 2Y - \frac{3}{p-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-2)X - Y = \frac{2}{p-1} + 1 \\ -X + (p-2)Y = -\frac{3}{p-4} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (p-2)X - Y = \frac{p+1}{p-1} \\ -X + (p-2)Y = \frac{p-7}{p-4} \end{cases}$$

$$Y = (p-2)X - \frac{p+1}{p-1}$$

$$-X + (p-2)\left[(p-2)X - \frac{p+1}{p-1}\right] = \frac{p-7}{p-4}$$

$$\left[(p-2)^2 - 1\right]X - \frac{(p-2)(p+1)}{p-1} = \frac{p-7}{p-4}$$

$$(p^2 - 4p + 3)X = \frac{p-7}{p-4} + \frac{(p-2)(p+1)}{p-1}; \qquad p^2 - 4p + 3 = (p-3)(p-1)$$

$$X(p) = \frac{p-7}{(p-4)(p-3)(p-1)} + \frac{(p-2)(p+1)}{(p-3)(p-1)^2}$$

$$X(p) = \frac{(p-7)(p-1) + (p-2)(p+1)(p-4)}{(p-4)(p-3)(p-1)^2} = \frac{p^2 - 8p + 7 + (p^2 - p - 2)(p-4)}{(p-4)(p-3)(p-1)^2}$$

$$X(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{C}{p-3}+\frac{D}{p-4}=\frac{\cancel{p^2}-8p+7+p^3\cancel{-p^2}-2p-4p^2+4p+8}{(p-1)^2(p-3)(p-4)}=$$

$$=\frac{p^3-4p^2-6p+15}{(p-1)^2(p-3)(p-4)}$$

$$A(p-1)(p-3)(p-4)+B(p-3)(p-4)+C(p-1)^2(p-4)+D(p-1)^2(p-3)=$$
$$=p^3-4p^2-6p+15$$

$p=1:\quad 6B=6 \Rightarrow B=1$

$p=3:\quad -4C=27-36-18+15=-39+27=-12 \Rightarrow C=3$

$p=4:\quad 9D=\cancel{64}-\cancel{64}-24+15=-9 \Rightarrow D=-1$

$p^3:\quad A+C+D=1;\ A+3-1=1 \Rightarrow A=-1$

$$X(p)=\frac{-1}{p-1}+\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{3}{p-3}-\frac{1}{p-4}$$

$\boxed{x(t)=-e^t+te^t+3e^{3t}-e^{4t}}$ $\quad x(0)=1$ (верно).

$y=\dot{x}-2x-2e^t$ (из первого ур-я системы).

$y=\cancel{-e^t}\cancel{+e^t}+te^t+9e^{3t}-4e^{4t}\cancel{+2e^t}-2te^t-6e^{3t}+2e^{4t}\cancel{-2e^t}$

$\boxed{y(t)=-te^t+3e^{3t}-2e^{4t}}$ $\quad y(0)=1$ (верно).

Совпадает с ответом примера №2 при $C_1=-1$, $C_2=3$.

Самостоятельная работа.

Найти решение системы лин. неоднор. ур-ний методом подбора ч. реш.

Условие	Ответ
Вар. 1 $\begin{cases}\dot{x}=-2x-y+37\sin t\\ \dot{y}=-4x-5y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-6t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16\sin t-15\cos t\\-10\sin t+14\cos t\end{pmatrix}$
Вар. 2 $\begin{cases}\dot{x}=3x-5y-2e^{t}\\ \dot{y}=x-y-e^{t}\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}+C_2e^{t}\begin{pmatrix}\cos t+2\sin t\\\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{t}\\0\end{pmatrix}$
Вар. 3 $\begin{cases}\dot{x}=-2x-y+36t\\ \dot{y}=-4x-5y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-6t}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30t-29\\28-24t\end{pmatrix}$
Вар. 4 $\begin{cases}\dot{x}=11x-8y+4e^{7t}\\ \dot{y}=20x-13y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 4t-\cos 4t\\\sin 4t-2\cos 4t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^{7t}\\e^{7t}\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 4t+\cos 4t\\\cos 4t+2\sin 4t\end{pmatrix}$
Вар. 5 $\begin{cases}\dot{x}=6x-3y+30e^{t}\\ \dot{y}=15x-6y+45t\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\sin 3t\\2\sin 3t-\cos 3t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos 3t\\2\cos 3t+\sin 3t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}21e^{t}-15t\\45e^{t}-30t+5\end{pmatrix}$
Вар. 6 $\begin{cases}\dot{x}=5x+4y+7e^{2t}\\ \dot{y}=-9x-7y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\left[t\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}7e^{2t}\\-7e^{2t}\end{pmatrix}$
Вар. 7 $\begin{cases}\dot{x}=-5x-y\\ \dot{y}=x-3y-9e^{2t}\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\left[t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right]+\frac{1}{4}e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$
Вар. 8 $\begin{cases}\dot{x}=3x+2y-e^{-t}\\ \dot{y}=-2x-2y-e^{-t}\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}t\\1-2t\end{pmatrix}$

ТР, задача 3, вар. 24.
№3.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = -2x - 5y + (3-t)e^{-2t} \end{cases} \qquad x(0) = 8, \quad y(0) = -4.$$

п.2) Операторным методом найти частное решение системы, уд. нач. усл.

$x(0) = \frac{24}{3} \cdot (-1)^{24} = 8;$

$y(0) = 24 (\mathrm{mod}\,5) \cdot (-1)^{24+1} = 4 \cdot (-1) = -4.$

Решение.

$x(t) \risingdotseq \mathcal{X}(p), \; y(t) \risingdotseq \mathcal{Y}(p).$

$\dot{x}(t) \risingdotseq p\mathcal{X}(p) - x(0) = p\mathcal{X}(p) - 8;$

$\dot{y}(t) \risingdotseq p\mathcal{Y}(p) - y(0) = p\mathcal{Y}(p) + 4.$

$$(3-t)e^{-2t} = 3e^{-2t} - te^{-2t} \risingdotseq \frac{3}{p+2} + \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+2}\right)$$

$$(3-t)e^{-2t} \risingdotseq \frac{3}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2} = \frac{3p+5}{(p+2)^2}$$

$$\begin{cases} p\mathcal{X} - 8 = \mathcal{X} + 4\mathcal{Y} \\ p\mathcal{Y} + 4 = -2\mathcal{X} - 5\mathcal{Y} + \frac{3p+5}{(p+2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)\mathcal{X} - 4\mathcal{Y} = 8 \\ 2\mathcal{X} + (p+5)\mathcal{Y} = \frac{3p+5}{(p+2)^2} - 4 = \frac{3p+5-4(p^2+4p+4)}{(p+2)^2} = \end{cases}$$ Операторная система ур-ний.

$$= \frac{3p+5-4p^2-16p-16}{(p+2)^2} = \frac{-4p^2-13p-11}{(p+2)^2}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = (p-1)(p+5) + 8 = p^2 + 4p + 3 = (p+3)(p+1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ \frac{-4p^2-13p-11}{(p+2)^2} & p+5 \end{vmatrix} = 8(p+5) - \frac{4(4p^2+13p+11)}{(p+2)^2}$$

②

$$X(p)=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{8p+40}{p^2+4p+3}-\frac{4(4p^2+13p+11)}{(p+2)^2(p^2+4p+3)}\overset{\text{обозн.}}{=}X^{I}(p)+X^{II}(p).$$

$$X^{I}(p)=\frac{8p+40}{p^2+4p+3}=\frac{A}{p+3}+\frac{B}{p+1}=\frac{Ap+A+Bp+3B}{(p+3)(p+1)}$$

$$\begin{cases}A+B=8\\A+3B=40\end{cases}\quad 2B=32\quad B=16\qquad A=8-16=-8\quad A=-8$$

$$X^{I}(p)=\frac{-8}{p+3}+\frac{16}{p+1}\risingdotseq\boxed{-8e^{-3t}+16e^{-t}\overset{\text{обозн.}}{=}x^{I}(t)}$$

$$X^{II}(p)=\frac{-16p^2-52p-44}{(p+2)^2(p+3)(p+1)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{(p+2)^2}+\frac{C}{p+3}+\frac{D}{p+1}$$

$$A(p+2)(p+3)(p+1)+B(p+3)(p+1)+C(p+2)^2(p+1)+D(p+2)^2(p+3)=$$
$$=-16p^2-52p-44$$

$p=-2$: $\quad -B=-64+104-44=-4;\quad B=4$

$p=-1$: $\quad 2D=-16+52-44=-8;\quad D=-4$

$p=-3$: $\quad -2C=-16\cdot9+52\cdot3-44=-32;\quad C=16$

при p^3: $\quad A+C+D=0\Rightarrow A=-C-D=4-16=-12;\quad A=-12$

$$X^{II}(p)=-\frac{12}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}+\frac{16}{p+3}-\frac{4}{p+1};$$

$$\boxed{x^{II}(t)=-12e^{-2t}+4te^{-2t}+16e^{-3t}-4e^{-t}}$$

Проверка:
$x(0)=8$ (верно).

$$\boxed{x(t)=x^{I}(t)+x^{II}(t)=8e^{-3t}+12e^{-t}+e^{-2t}(4t-12)}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}p-1 & 8\\ 2 & \dfrac{-4p^2-13p-11}{(p+2)^2}\end{vmatrix}=-\frac{(p-1)(4p^2+13p+11)}{(p+2)^2}-16$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta}=Y(p)=-\frac{(p-1)(4p^2+13p+11)}{(p^2+4p+3)(p+2)^2}-\frac{16}{p^2+4p+3}\overset{\text{обозн.}}{=}Y_2(p)+Y_1(p)$$

$$y(p)=\frac{-16}{p^2+4p+3}-\frac{4p^3+13p^2+11p-4p^2-13p-11}{(p+2)^2(p+1)(p+3)}=y_1(p)+y_2(p)$$ 3

$$y_1(p)=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+3}=\frac{A(p+3)+B(p+1)}{(p+1)(p+3)}=\frac{-16}{(p+1)(p+3)}$$

$p: A+B=0$ $\quad B=-A$ $\quad$ $B=8$

$p^0: 3A+B=-16.$ $\quad 3A-A=-16,$ $\quad$ $A=-8$

$$y_1(p)=\frac{-8}{p+1}+\frac{8}{p+3}\doteqdot \underbrace{-8e^{-t}+8e^{-3t}}=y^{I}(t)$$

$$y_2(p)=\frac{-4p^3-9p^2+2p+11}{(p+2)^2(p+1)(p+3)}=\frac{A^{=10}}{p+2}+\frac{B^{=-3}}{(p+2)^2}+\frac{C^{=-16}}{p+3}+\frac{D^{=2}}{p+1}$$

$$A(p+2)(p+3)(p+1)+B(p+3)(p+1)+C(p+2)^2(p+1)+D(p+2)^2(p+3)=$$
$$=-4p^3-9p^2+2p+11.$$

$p=-2;\ -B=32-36-4+11=3;$ $\quad B=-3$

$p=-3;\ -2C=4\cdot27-81-6+11=$
$=108-87+11=21+11=32;$ $\quad C=-16$

$p=-1;\ 2D=4-\cancel{9-2+11}=4;$ $\quad D=2.$

$y_2(p)\doteqdot$ $\quad p^3: A+C+D=-4;$
$A-16+2=-4;$ $\quad A=10.$

$$\doteqdot\underbrace{10e^{-2t}+3te^{-2t}-16e^{-3t}+2e^{-t}}=y^{II}(t);\ y(t)=y^{I}(t)+y^{II}(t)$$

$$\boxed{y(t)=-8e^{-3t}+6e^{-t}+(3t+10)e^{-2t}}$$

Проверка: $y(0)=-4$ (верно).

Ответы к самостоятельной работе:
«Решить неоднородную с.л.у.
методом подбора частного решения».

Вариант 1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16\sin t - 15\cos t \\ -10\sin t + 14\cos t \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30t - 29 \\ -24t + 28 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 4t - \cos 4t \\ \sin 4t - 2\cos 4t \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin 4t + \cos 4t \\ \cos 4t + 2\sin 4t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{7t} \\ e^{7t} \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 2\sin 3t - \cos 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21e^{t} - 15t \\ 45e^{t} - 30t + 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\left[t\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 7e^{2t} + 4t^2 - 16t + 28 \\ -7e^{2t} - 5t^2 + 22t - 39 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{4} e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Вариант 8.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ 1 - 2t \end{pmatrix}$$