Задача 1.

1.1. Даны две кривые, одна задана параметрически, $\alpha(t) = (t-1, t^2)^T$, другая задана уравнением $y^2 + x^2/4 = 1$.

а) Найти репер Френе и кривизну кривой $\alpha(t)$.

б) Найти угол между кривой $\alpha(t)$ и кривой, заданной уравнением $F(x,y) = 0$, в т. $M_0(0,1)$.

в) Для обеих кривых написать уравнения соприкасающихся окружностей в т. M_0, сделать чертеж.

Решение: а) $\dot\alpha(t) = (1, 2t)^T$, $\vec\tau = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1,2t)^T$, $\vec\nu = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t,1)^T$. Репер Френе для плоской кривой – это тройка $(\alpha(t); \vec\tau(t), \vec\nu(t)$. Вектор нормали $\vec\nu$ получается из $\vec\tau$ поворотом против часовой стрелки на $90°$. Чтобы построить $\vec\nu$ по $\vec\tau$ нужно поменять местами координаты вектора $\vec\tau$ и затем изменить знак у первой координаты.

Находим $\ddot\alpha(t) = (0,2)^T$ и кривизну

$$k = \frac{\det[\dot\alpha\ddot\alpha]}{|\dot\alpha|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

б) Чтобы записать уравнение второй кривой в неявном виде $F(x,y) = 0$, нужно перенести все выражения в равенстве в одну часть. Например, перенесем все в левую часть, тогда $F(x,y) = y^2 + x^2/4 - 1$.

Угол между кривыми в точке M_0, т.е. угол между касательными к кривым в этой точке, равен углу между нормалями к кривым в этой точке. Нормалью к неявно заданной кривой является градиент $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y)^T = (x/2, 2y)^T$, $\operatorname{grad} F(M_0) = (0,2)^T$. Удобно вместо последнего вектора взять коллинеарный ему вектор единичной длины $\vec n = (0,1)^T$.

Для кривой $\alpha(t)$ имеем $M_0 = \alpha(1)$. Далее, $\dot\alpha(1) = (1,2)^T$ и $\vec N = (-2,1)^T$ – нормаль к кривой $\alpha(t)$ в точке M_0, $|\vec N| = \sqrt5$. Находим косинус угла между кривыми в точке M_0:

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec n, \vec N\rangle}{\sqrt{\langle \vec n, \vec n\rangle \cdot \langle \vec N, \vec N\rangle}} = \frac{\langle \vec n, \vec N\rangle}{|\vec n| \cdot |\vec N|} = \frac{0\cdot(-2) + 1\cdot 1}{1\cdot\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5}.$$

Другой способ нахождения угла состоит в использовании какой-нибудь параметризации второй кривой (см. ниже), в этом случае находим касательный вектор ко второй кривой и ищем косинус угла между касательными векторами к нашим кривым.

в) Радиус соприкасающейся окружности к кривой α в точке $\alpha(t)$ равен $1/|k(t)|$, а ее центр – это точка $\alpha(t) + \dfrac{1}{k(t)}\vec\nu(t)$. Для точки M_0 центр соприкасающейся окружности – это точка $\alpha(1) + \dfrac{1}{k(1)}\vec\nu(1)$, ее радиус равен $1/|k(1)|$. Находим: $\vec\nu(1) = \frac{1}{\sqrt5}(-2,1)^T$, $k(1) = \dfrac{2}{5\sqrt5}$, $1/k(1) = 5\sqrt5/2$. Поэтому

$\alpha(1) + \dfrac{1}{k(1)}\vec\nu(1) = (0,1)^T + \frac52(-2,1)^T = (-5, 7/2)^T$ и $(x+5)^2 + (y-7/2)^2 = 125/4$ – уравнение искомой окружности.

Ту же самую задачу для второй кривой можно решить несколькими способами. Поскольку вторая кривая – это эллипс, ее можно параметризовать следующим образом: $\beta(t) = (2\cos t, \sin t)^T$. Точка M_0 получается при $t = \pi/2$. Можно в качестве параметра в окрестности точки M_0 взять x. Поскольку $y = \sqrt{1 - x^2/4}$, получаем параметризацию $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2/4})^T$. Точка M_0 получается при $x = 0$. Имея параметризацию можно дальше действовать так же как в задаче для кривой α.

Еще один способ – использовать следующую формулу для кривизны неявно заданной кривой:

$$k = \pm \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}} = \pm \frac{2F''_{xy}F'_xF'_y - F''_{xx}F'^2_y - F''_{yy}F'^2_x}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}.$$

Далее надо найти центр соприкасающейся окружности и затем ее радиус равный расстоянию от центра этой окружности до точки $M_0(x_0, y_0)$. Центр соприкасающейся окружности – это одна из точек $(x_0, y_0) \pm \frac{1}{|k(M_0)|} \cdot \frac{\mathrm{grad}\,(M_0)}{|\mathrm{grad}\,(M_0)|}$. Берем знак противоположным знаку значения функции F в точке близкой к M_0 и лежащей на касательной к кривой в точке M_0. Уравнение касательной пишем используя градиент: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) = 0$. Тогда $(x_0+\delta, y_\delta)$ – близкая точка на касательной, где δ мало и y_δ находится из соотношения $F'_x(M_0)\delta + F'_y(M_0)(y_\delta - y_0) = 0$.

Наконец можно прямо найти центр кривизны и затем расстояние от него до точки M_0, т.е. найти радиус соприкасающейся окружности. Если через X и Y обозначить координаты центра кривизны, то для неявно заданной кривой их можно найти по формулам:

$$\begin{cases} X = x + F'_x \cdot \dfrac{F'^2_x + F'^2_y}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}} \\ Y = y + F'_y \cdot \dfrac{F'^2_x + F'^2_y}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

а для параметрически заданной кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$ – по формулам:

$$\begin{cases} X = x(t) - \dot{y}(t) \cdot \dfrac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}} = x - \dot{y} \cdot \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}} \\ \\ Y = y(t) + \dot{x}(t) \cdot \dfrac{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \ddot{x}(t) \\ \dot{y}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}} = y + \dot{x} \cdot \dfrac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

В нашей задаче есть еще один способ – воспользоваться теоремой о том, что в окрестности точки существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой точка M_0 служит началом координат и кривая является графиком функции $y_1 = \varphi(x_1)$, причем $y_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + o(x_1^2)$, где k – кривизна. В окрестности точки M_0 введем систему координат $x_1 = x$, $y_1 = y - 1$. Имеем

$$y = \sqrt{1 - x^2/4} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + o(x^2), \quad \text{т.е.} \quad y_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2}{4} + o(x_1^2).$$

Следовательно, $k = -\frac{1}{4}$, и, значит, радиус соприкасающейся окружности равен 4. Поскольку кривая ориентирована в окрестности точки M_0 по возрастанию $x_1 = x$, единичная нормаль равна $(0,1)^T$, поэтому центр соприкасающейся окружности имеет координаты $(0,1)^T - 4(0,1)^T = -3(0,1)^T = (0,-3)^T$, а ее уравнение – вид $x^2 + (y+3)^2 = 16$.

4.1. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$, $R_2(5,1)$. Найти опорные точки квадратичной кривой

Безье, соединяющей точки $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$ так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0? Сделать чертеж.

Решение:
Пусть Q – точка пересечения прямых, проходящих через $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$ соответственно. Тогда квадратичная кривая Безье с опорными точками P_2, Q, R_0 и является искомой частью сплайна (кривая Безье подходит к первой и последней опорным точкам касаясь соответственно первого и последнего звеньев).

Найдем пересечение прямых. Первая прямая имеет направляющий вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1)^T$, и проходит через P_2. Поэтому ее уравнение: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1}$, или $y = 2-x$. Вторая прямая проходит через точку R_0 и ее направляющий вектор равен $\overrightarrow{R_0R_1} = (1,1)^T$, поэтому ее уравнение имеет вид: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1}$, или $y = x-3$. Находим координаты точки Q, решая систему из двух уравнений прямых. Имеем $2-x = x-3$, поэтому $x = 2,5$ и $y = -0,5$.

В двух других случаях будут получаться точки возврата и построенный сплайн не будет гладким. Чтобы сплайн получался гладким, в ломаной построенной по точкам P_1, P_2, Q, R_0, R_1, не должно быть наложения звеньев, т.е. звенья должны пересекаться только в концевых точках. По другому можно сказать, что на прямой, проходящей через точки P_1, P_2, Q, точки P_1 и Q должны располагаться по разные стороны от точки P_2. Аналогично, на прямой, проходящей через точки Q, R_0, R_1, точки Q и R_1 должны располагаться по разные стороны от точки R_0.

Задача 7.

7.1. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек конуса $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, au)^T$, $u > 0$, $a > 0$.

Решение:
Находим частные производный первого и второго порядков от f:

$f'_u = (\cos v, \sin v, a)^T$.
$f'_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)^T$,
$f''_{uu} = (0,0,0)^T$,
$f''_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)^T$,
$f''_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)^T$.

Находим матрицу первой фундаментальной формы:

$g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = 1 + a^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f'_u, f'_v\rangle = 0$, $g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = u^2$,

$$g = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\det g} = u\sqrt{1+a^2}, \qquad g^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2} \end{bmatrix}.$$

Далее находим элементы матрицы второй фундаментальной формы (определители получаем разложением по третьей строке):

$$\sqrt{\det g}\ h_{11} = \det[f'_u f'_v f''_{uu}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uu}\rangle = \begin{bmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ h_{11} = 0.$$

$$\sqrt{\det g}\ h_{12} = \det[f'_u f'_v f''_{uv}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uv}\rangle = \begin{bmatrix} \cos v & -u\sin v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v & u\cos v \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ h_{12} = h_{21} = 0.$$

$$\sqrt{\det g}\ h_{22} = \det[f'_u f'_v f''_{uv}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uv}\rangle = \begin{bmatrix} \cos v & -u\sin v & -u\cos v \\ \sin v & u\cos v & -u\sin v \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix} = au^2 \ \Rightarrow\ h_{22} = \frac{au}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Здесь $\langle\cdot\,,\cdot\,,\cdot\rangle$ – это смешанное произведение трех векторов в $\mathbb{R}^3$.

Итак, матрица второй фундаментальной формы имеет вид:

$$\mathrm{II} = [h_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{au}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix}.$$

Далее, находим матрицу основного оператора поверхности:

$$L = g^{-1}\cdot \mathrm{II} = [g_{ij}]^{-1}[h_{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{au}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{u\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{a}{u\sqrt{1+a^2}}, \quad K = k_1 k_2 = 0, \quad H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{a}{2u\sqrt{1+a^2}}.$$

Базисные векторы f'_u, f'_v – собственные векторы опрератора L. Они определяют главные направления. Конус является поверхностью вращения, мередианы – это исходяшие из вершины конуса прямые. Эти прямые и ортогональные им касательные к паралелям дают главные направления. Отметим также, что исходяшие из вершины прямые, лежащие на конусе, являются линиями кривизны и одновременно асимптотическими линиями.

Поскольку $K = 0$, а $H \neq 0$, точки на конусе параболические.