Теория вероятностей и математическая статистика
Лектор А.А. Лобузов
Семестр 6 Лекция 6

Точечные оценки функций параметров

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ – случайная выборка
из распределения $F(x, \boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$,
$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta}) = (\tau_1(\theta_1, ..., \theta_r), ..., \tau_l(\theta_1, ..., \theta_r))$ – функция параметров $\theta_1, ..., \theta_r$.
Статистика $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = (\tilde{\tau}_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}), ..., \tilde{\tau}_r(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$
– несмещенная оценка функции $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$, если $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$.
Статистика $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = (\tilde{\tau}_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}), ..., \tilde{\tau}_r(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$
– асимптотически несмещенная оценка функции $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$,
если $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) \xrightarrow[N \to \infty]{} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$.

Статистика $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = (\tilde{\tau}_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}), ..., \tilde{\tau}_r(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$ – состоятельная оценка
функции $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$, если $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) \xrightarrow[N \to \infty]{P} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$,
т.е. $P(|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})| < \varepsilon) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$ для любого $\varepsilon > 0$
или $P(|\tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})| \geq \varepsilon) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

Статистика $\boldsymbol{\tau}^*_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = (\tau^*_1(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}), ..., \tau^*_r(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}))$ – оптимальная оценка
функции $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\theta})$ в классе оценок $\mathscr{E}$, если

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} \boldsymbol{\tau}^*_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}) = \inf\{\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{X}),\ \tilde{\boldsymbol{\tau}}_N(\boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{E}\}.$$

Пример.
Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ выборка из показательного распределения
с плотностью $f_\xi(x; \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \in [0, +\infty); \\ 0, & x \in (-\infty, 0); \end{cases} \quad \lambda > 0.$

Найдем оценку функции $\tau(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$. Так как $\mathbf{M}\xi = \dfrac{1}{\lambda} = \tau(\lambda)$,
то в качестве оценки $\tau(\lambda)$ можно взять выборочное среднее $\tilde{\tau}(\lambda) = \dfrac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j$.

.

Метод получения точечных оценок

Метод моментов

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x, \theta_1, ..., \theta_r)$.

Моменты распределения зависят от параметров $\theta_1, ..., \theta_r$

$$\mu_1 = \mu_1(\theta_1, ..., \theta_r),$$
$$\ldots$$
$$\mu_k = \mu_k(\theta_1, ..., \theta_r),$$
$$\ldots$$
$$\mu_r = \mu_r(\theta_1, ..., \theta_r).$$

Получаем систему из r уравнений с r неизвестными.

Если найти выражения $\theta_k = g_k(\mu_1, ..., \mu_r)$, $k = 1, ..., r$,

то получим оценки параметров $\theta_1, ..., \theta_r$ по методу моментов

$$\tilde{\theta}_k(X_1, X_2, ..., X_N) = g_k(\overline{\mu}_1, ..., \overline{\mu}_r), \ k = 1, ..., r, \text{ где}$$

$$\overline{\mu}_k(X_1, X_2, ..., X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j^k$$

Пример 1а. Геометрическое распределение

Пусть $\mathbf{X}=(X_1, X_2, ..., X_N)$ − случайная выборка объёма N из геометрического распределения с параметром θ:

$P(X_j=k)=(1-\theta)^k\theta$, $k=0,1,...$

Математическое ожидание $\mu_1 = \dfrac{1-\theta}{\theta}$.

Выражаем θ через μ_1: $\theta=\dfrac{1}{1+\mu_1}$.

Получаем оценку θ по методу моментов

$$\tilde{\theta}(X_1, X_2, ..., X_N)=\frac{1}{1+\bar{\mu}_1}=\frac{N}{N+\sum_{j=1}^{N} X_j}$$

Метод максимального правдоподобия

Пусть $\mathbf{X}=(X_1, X_2, ..., X_N)$ − случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x,\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_r)$.

Пусть

$$f(x,\boldsymbol{\theta})=\begin{cases} f(x,\boldsymbol{\theta}) - \textit{плотность, если } \xi - \textit{непрерывная с.в.} \\ \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\xi=x), \textit{ если } \xi - \textit{дискретная с.в.} \end{cases}$$

Функция правдоподобия

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\theta})=\prod_{j=1}^{N} f(X_j,\boldsymbol{\theta})$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1,x_2,...,x_N,\boldsymbol{\theta})=\begin{cases}\prod\limits_{j=1}^{N} f(x_j,\boldsymbol{\theta}), \textit{если } \xi - \textit{непрерывная с.в.}\\ \prod\limits_{j=1}^{N} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\xi=x_j), \textit{если } \xi - \textit{дискретная с.в.}\end{cases}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln L(\mathbf{X},\boldsymbol{\theta})=\sum_{j=1}^{N}\ln f(X_j,\boldsymbol{\theta})$$

$$\ln L(x_1,x_2,...,x_N,\boldsymbol{\theta})=\sum_{j=1}^{N}\ln f(x_j,\boldsymbol{\theta})$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}=(\tilde{\theta}_1,...,\tilde{\theta}_r)=\arg\max(\ln L(x_1,x_2,...,x_N,\theta_1,...,\theta_r))$$

$\tilde{\boldsymbol{\theta}}=(\tilde{\theta}_1,...,\tilde{\theta}_r)$ − удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\ln L(x_1,x_2,...,x_N,\theta_1,...,\theta_r)=0\\ k=1,...,r\end{cases}$$

Пример 1б. Геометрическое распределение

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ − случайная выборка объёма N из геометрического распределения с параметром θ:

$P(X_j = k) = (1-\theta)^k\,\theta$, $k = 0, 1, ...$

Найдем функцию правдоподобия

$$L(x_1, x_2, ..., x_N, \theta) = \prod_{j=1}^{N} (1-\theta)^{x_j}\,\theta = \theta^N (1-\theta)^{\sum x_j}$$

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_N, \theta) = N \ln\theta + (\sum_{j=1}^{N} x_j)\ln(1-\theta)$$

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_N, \theta) = N(\ln\theta + \bar{\mu}_1 \ln(1-\theta))$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\mathbf{x}, \theta) = N\left(\frac{1}{\theta} - \frac{\bar{\mu}_1}{1-\theta}\right) = 0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $\bar{\mu}_1(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$.

Находим оценку максимального правдоподобия параметра θ

$$\tilde{\theta}(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{1+\bar{\mu}_1} = \frac{N}{N + \sum_{j=1}^{N} x_j}$$