Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российкий технологический университет - МИРЭА

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчёт
по предмету: «Методы математического анализа»
III семестр

Вариант 18

Выполнил студент группы КМБО-02-19
Проскуряков Иван

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Москва 2020

Задача 1. *Исследовать на сходимость числовые ряды:*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2(1-e^{\sin\frac{1}{n^2}})$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln^3 n+1}}$

Решение:

а) 1) Проверим ряд на абсолютную сходимость:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(1-\exp(\sin\dfrac{1}{n^2}))$ и проверим его на сходимость: если он будет сходится, то исходный ряд будет сходиться абсолютно.

i. Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\exp(\sin\frac{1}{n^2})) = [\infty * 0] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n^3}\cos\frac{1}{n^2}(-\exp(\sin\frac{1}{n^2}))}{-\frac{2}{n^3}} = -\lim_{n\to\infty} 1*1 = -1$$

Как видно, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(1-\exp(\sin\dfrac{1}{n^2}))$ не выполнен необходимый признак сходимости и, следовательно, он расходится, $\Rightarrow$ исходный не сходится абсолютно.

2) Проверим условную сходимость исходного ряда:

i. Очевидно, данный ряд не будет удовлетворять признаку сходимости знакочередующихся рядов Лейбница, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| \neq 0$. А т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд и вовсе расходится, т.к. не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

Ответ: ряд расходится.

б) 1) Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n+1}} = 0$$

Необходимый признак сходимости выполнен, следовательно, нужны доп. исследования.

2) Сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$:

Прежде всего проверим сходимость самого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$ с помощью интегрального признака сходимости:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}} = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^{\frac{3}{2}} x} = -2\ln^{-\frac{1}{2}} x \Big|_2^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{\ln 2}}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$ сходится.

3) Сравним в предельной форме ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n + 1}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ln^{\frac{3}{2}} n}{n\sqrt{\ln^3 n + 1}} = 1$$

Следовательно, по признаку сравнения в предельной форме, исходный ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Задача 2. *Исследовать знакочередующийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{\dfrac{2+n^2}{3+n^3}}$ *на абсолютную и условную сходимость.*

Решение:

I) Исследуем ряд на абсолютную сходимость:
Для этого рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2+n^2}{3+n^3}}$ и установим его сходимость или расходимость(если он будет сходиться, то исходный ряд будет сходиться абсолютно):

1) Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+n^2}{3+n^3}}=0$$

Необходимый признак сходимости выполнен, проведём дополнительные исследования.

2) Сравним в предельной форме с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+n^2}{3+n^3}}*\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n^2}}{n+\frac{3}{n^2}}}*\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^3}}}=1$$

Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{2+n^2}{3+n^3}}$ расходится по признаку сравнения, следовательно, исходный ряд не сходится абсолютно.

II) Исследуем на условную сходимость:
Проверим условную сходимость по признаку Лейбница:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2+n^2}{3+n^3}}=0$ - первое условие для признака Лейбница выполнено.

2) Проверим монотонность:

$$\left(\sqrt{\frac{2+x^2}{3+x^3}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2+x^2}{3+x^3}}}*\left(\frac{2n(3+n^3)-3n^2(2+n^2)}{(3+n^3)^2}\right)=\frac{-n^4-6n^2+6n}{2\sqrt{\frac{2+x^2}{3+x^3}}(3+n^3)^2}=$$

$$=\frac{-n(n^3+6n+6)}{\dots}$$

Выражение в знаменателе дроби будет всегда положительно. Исследуем выражение в числителе: $-n < 0$, $\Rightarrow$ Знак выражения в числителе будет зависеть от $(n^3 + 6n + 6)$

Пусть $P(n) = n^3 + 6n + 6, \Rightarrow P'(n) = 3n^2 + 6 > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, следовательно, $P(n)$ монотонно возрастает и т.к. $P(1) > 0$, то и $P(n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Теперь очевидно, что $\left(\sqrt{\dfrac{2+x^2}{3+x^3}}\right)' < 0$ и следовательно $|a_n|$ монотонно убывает. Отсюда следует выполнение признака Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

Ответ: ряд сходится условно.

Задача 3. *Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+3n)}{n^3\sqrt[3]{n}+1}x^n$$

Решение:

1. Найдём область абсолютной сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{2^{n+1}((n+1)^2+3(n+1))(n^3\sqrt[3]{n}+1)}{(n+1)^3(\sqrt[3]{n+1}+1)2^n(n^2+3n)} =$$

$$= 2|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2((1+\frac{1}{n^2})+3(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}))}{n^2(1+\frac{3}{n})}\frac{n^{\frac{10}{3}}(1+\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}})}{n^{\frac{10}{3}}(1+\frac{1}{n})^3(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})} = 2|x| < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{при } x \in (-0.5, 0.5) \text{ ряд сходится}$$

2. Исследуем точки $\{-0.5\}, \{0.5\}$:

   1) $x = \frac{1}{2}$: получаем ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{n^3\sqrt[3]{n}+1}$. Теперь сравним его с рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ (который очевидно сходится):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{4}{3}}n^{\frac{6}{3}}(1+\frac{3}{n^2})}{n^{\frac{10}{3}}(1+\frac{1}{n^3\sqrt[3]{n}})} = 1$$

   Следовательно, по признаку сравнения в предельной форме ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{n^3\sqrt[3]{n}+1}$ сходится.

   2) $x = -\frac{1}{2}$: получаем ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+3n}{n^3\sqrt[3]{n}+1}$, который, как видно из предыдущего действия, сходится абсолютно.

Ответ: область сходимости - отрезок $[-0.5, 0.5]$.

Задача 4 (а,б)**.** *Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$. Указать область сходимости полученного ряда. Найти $f^{(k)}(x_0)$, если $k = 100+$№варианта.*

а) $f(x) = \sin x \cos^2 x, x_0 = 0$

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{2+3x+x^2}, x_0 = 1$

Решение:

а) 1) Преобразуем исходное выражение: $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \cos x = \dfrac{1}{4}(\sin 3x + \sin x)$

2) Из разложения в ряд Маклорена следует:

i. $\sin 3x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

ii. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}\left[(-1)^n\left(\dfrac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dfrac{1}{(2n+1)!}\right)\right]$

4) $f^{(118)}(x_0) = 0$

5) Область сходимости - вся действительная прямая, т.к. ряд получен из рядов, сходящихся на всей числовой прямой.

б) 1) Упростим исходное выражение:

$$f(x) = 1 - \frac{3x+2}{x^2+3x+2} = 1 - \frac{3x+2}{(x+1)(x+2)} = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}$$

2) Чтобы воспользоваться разложением функции в ряд Маклорена, введём замену $t = x - 1$, тогда:

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2+t} - \frac{4}{3+t}$$

3)

$$\frac{1}{2+t} = \frac{1}{2} * \frac{1}{1-\frac{-t}{2}} = \frac{1}{2} * \left[1 - \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \dots + (-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n$$

4) $\dfrac{1}{3+t} = \dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{1-\frac{-t}{3}} = \dfrac{1}{3} * \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{t}{3}\right)^n$

5)

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} * \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n - \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{t}{4} + \frac{4t}{9}\right) + \left(\frac{1}{2} * \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} * \left(\frac{t}{3}\right)^2\right) +$$

$$+ \dots + t^k \left[\frac{(-1)^k 3^{k+1} + (-1)^{k+1} 2^{k+3}}{6^{k+1}}\right] + o(t^k)$$

6) Введя обратную замену, получим искомое разложение:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{(x-1)}{4} + \frac{4(x-1)}{9}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} * \left(\frac{(x-1)}{2}\right)^2 - \frac{4}{3} * \left(\frac{(x-1)}{3}\right)^2\right) + \dots +$$

$$+ (x-1)^k \left[\frac{(-1)^k 3^{k+1} + (-1)^{k+1} 2^{k+3}}{6^{k+1}}\right] + o((x-1)^k)$$

7) Найдём область сходимости:
Т.к. ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-1}{3}\right)^n$$

сходятся лишь если $\dfrac{|x-1|}{2} < 1, \dfrac{|x-1|}{3} < 1$ соответственно, то:

$$\begin{cases} \frac{|x-1|}{2} < 1 \\ \frac{|x-1|}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$$

Отсюда интервая сходимости полученного ряда: $x \in (-1, 3)$

8) $f^{(118)}(x_0) = 118! * \left(\dfrac{3^{119} - 2^{121}}{6^{119}}\right)$

Пояснение. *Для нахождения области осталось проверить поведение ряда на концах интервала, это несложная задача: необходимо подставить концевые точки и проверить сходимость ряда в них. Как это сделать? В лекциях есть теоремы о сходимости рядов вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$*. Автор забыл это сделать, но, тем не менее, этот номер ему зачли.*

Задача 5. *Используя признак Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{(x-4)^{n^2}}$ *на промежутке* $[1, 2]$.

Решение:

а) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$ на промежутке $[1, 2]$:

$$\frac{n^{n+1}}{(x-4)^{n^2}} < \frac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$$

При этом ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$ положителен на заданном промежутке.

б) Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$ сходится на $[1, 2]$:

1) Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \exp((n+1)\ln n - n^2 \ln 2) = \exp(-\infty) = 0$$

2) Проверим по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n^2+2n+1)}{n^n * n * 2^{2n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+2+\frac{1}{n})}{2^{2n+1}} = e * \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$ сходится.

в) Из всего вышеизложенного следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1}}{2^{n^2}}$ является мажорантой исходного ряда и, следовательно, исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

Ч.т.д.

Задача 6. $y = \cos(x/3)$, $l = \pi$

а) *Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по косинусам. Построить графики второй, третьей, десятой частичных сумм. Написать равенство Парсеваля для полученного ряда. Сумму какого числового рада можно отыскать с помощью полученного равенства?*

б) *Разложить $y = f(x)$, заданную на полупериоде $(0, l)$, в ряд Фурье по синусам. Построить графики второй, третьей, десятой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.*

в) *Разложить функцию $y = f(x)$ в ряд Фурье, продолжая её на полупериод $(-l, 0)$ функцией, равной 0. Построить графики второй, четвёртой, десятой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.*

Решение:

а) Разложим $f(x) = \cos(x/3)$ по косинусам на заданном полупериоде и проведём все необходимые вычисления:

1) Найдём коэффициенты для разложения в ряд Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3)dx = \frac{2}{\pi} * 3\sin(x/3)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x/3)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x/3 + nx)dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x/3 - nx)dx = \frac{(-1)^n 3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{1+3n} + \frac{1}{1-3n}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n 3\sqrt{3}}{\pi(1-9n^2)} = \frac{(-1)^{n+1}3\sqrt{3}}{\pi(9n^2-1)}$$

Подробное вычисление:

$$\int\limits_0^{\pi}\cos(x/3+nx)dx = \int\limits_0^{\pi}\cos\left(\frac{1+3n}{3}x\right)dx = \frac{3}{1+3n}\sin\left(\frac{1+3n}{3}x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3}{1+3n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi n\right) - 0\right] = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi n) + \frac{1}{2} * 0\right)}{1+3n} = \frac{(-1)^n 3\sqrt{3}}{2(1+3n)}$$

$$\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{1-3n}{3}x\right)dx = \frac{3}{1-3n}\sin\left(\frac{1-3n}{3}x\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi n) - \frac{1}{2}*0\right)}{1-3n} = \frac{(-1)^n 3\sqrt{3}}{2(1-3n)}$$

Имеем разложение функции $f(x)$ в ряд :

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3\sqrt{3}}{\pi(9n^2-1)}$$

2) Запишем равенство Парсеваля:
Вычислим левую часть равенства:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x/3)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)dx = 1+\frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = 1+\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

Теперь запишем равенство:

$$1+\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{27}{2\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{27}{\pi^2(9n^2-1)^2}$$

Из получившегося равенства имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(9n^2-1)^2} = \frac{1}{27} + \frac{\sqrt{3}}{36\pi} - \frac{1}{2\pi^2}$$

3) Выпишем S_2, S_3, S_{10} и построим для них графики:

$$S_n = a_0/2 + \sum_{n=1}^{n} a_n\cos(nx)$$

$S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{35\pi}\cos 2x$

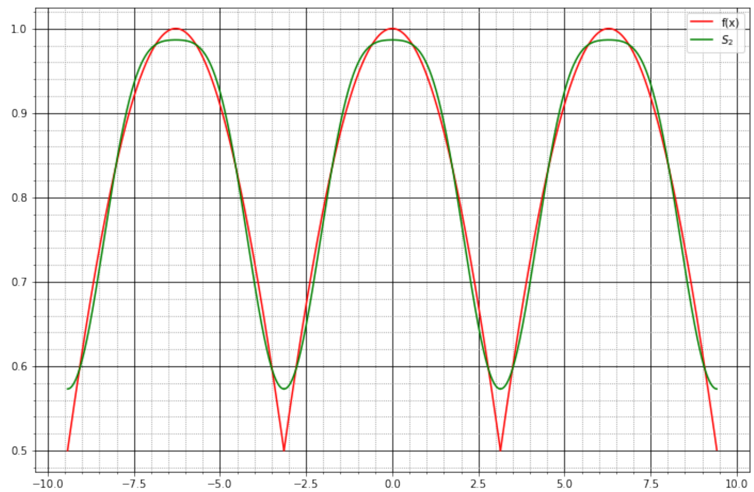
$S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{35\pi}\cos 2x + \frac{3\sqrt{3}}{80\pi}\cos 3x$

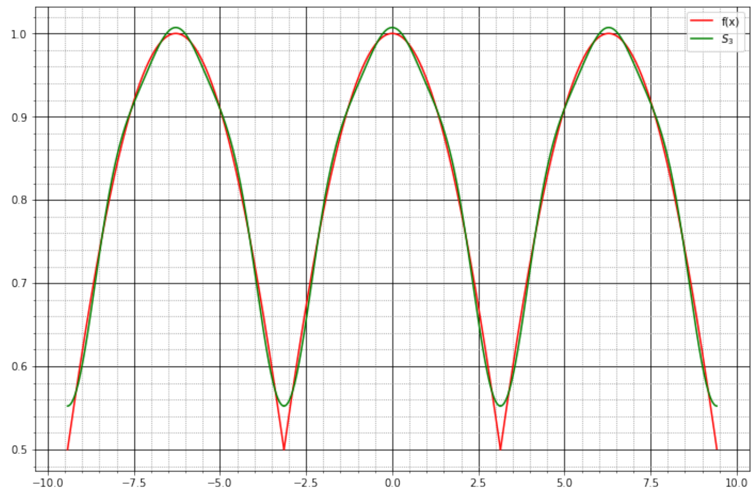
$S_{10} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{35\pi}\cos 2x + \frac{3\sqrt{3}}{80\pi}\cos 3x - \frac{3\sqrt{3}}{143\pi}\cos 4x +$

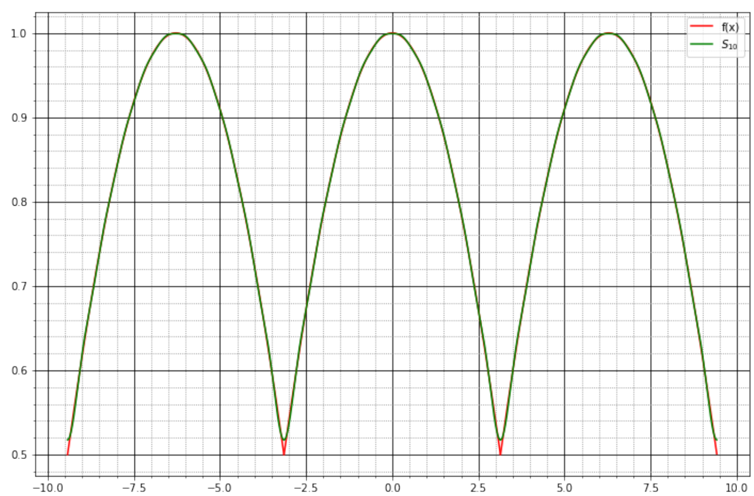
$+\frac{3\sqrt{3}}{224\pi}\cos 5x - \frac{3\sqrt{3}}{323\pi}\cos 6x + \frac{3\sqrt{3}}{440\pi}\cos 7x - \frac{3\sqrt{3}}{575\pi}\cos 8x + \frac{3\sqrt{3}}{728\pi}\cos 9x -$

$-\frac{3\sqrt{3}}{899\pi}\cos 10x$

Графики для S_2, S_3, S_{10} соответственно:







б)

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x/3), & x \in (0, \pi) \\ -\cos(x/3), & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

$f(x)$ - нечётная и периодическая.
Разложим её по синусам на заданном полупериоде и проведём все необходимые вычисления:

1) Вычислим коэффициенты ряда Фурье для данной функции:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(nx+\frac{x}{3})dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(nx-\frac{x}{3})dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{3n+1}(-1)\cos\left(\frac{3n+1}{3}x\right)\Bigg|_0^\pi\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{3}{3n-1}(-1)*\right.$$

$$\left.*\cos\left(\frac{3n-1}{3}x\right)\Bigg|_0^\pi\right] = \left|\begin{array}{l} \cos\left(\pi n+\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi n)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 0 = (-1)^n\frac{1}{2} \\ \\ \cos\left(\pi n-\frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi n)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 0 = (-1)^n\frac{1}{2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}*3*(-1)*\left[\frac{1}{3n+1}\left((-1)^n\frac{1}{2}-1\right) + \frac{1}{3n-1}\left((-1)^n\frac{1}{2}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n-1}\right) = \frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{\pi(9n^2-1)}$$

Итак, $b_n = \dfrac{9n(2+(-1)^{n+1})}{\pi(9n^2-1)}$, тогда имеем следующее разложение:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{\pi(9n^2-1)}\sin(nx)$$

2) Покажем, что ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{\pi(9n^2-1)}\sin(nx)$ сходится неравномерно.
Поведём от противного:

- Пусть ряд сходится равномерно на всей действительной прямой, тогда по определению $\forall\varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N \& \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.
- Для определённости положим $\varepsilon = \varepsilon_0$ и перейдём к пределу в последнем неравенстве при $x \to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+}|S(x) - S_n(x)| \le \varepsilon_0 \Leftrightarrow |\lim_{x\to 0^+}S(x) - \lim_{x\to 0^+}S_n(x)| \le \varepsilon_0$$

-в силу непрерывности модуля.

При этом $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 1$. Учитывая это и беря во внимание непрерывность S_n, получим:

$$|S_n(0) - 1| \le \varepsilon_0 \Leftrightarrow \varepsilon_0 - 1 \le S_n(0) \le \varepsilon_0 + 1$$

- Однако по определению $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, следовательно:

  $$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = S(0) = 0$$

  - тогда для $\varepsilon_0 \ \exists N_1 : \ \forall n_1 > N_1 \ \Rightarrow |S_n(0) - 0| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow -\varepsilon_0 < S_n(0) < \varepsilon_0$.

  Таким образом получаем противоречие и, следовательно, ряд сходится не равномерно.

3) Выпишем S_2, S_3, S_{10} и построим для них графики:

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} b_n \sin(nx)$$

$$S_2 = \frac{9*1*(2+1)}{8\pi}\sin x + \frac{9*2*(2-1)}{35\pi}\sin 2x$$

$$S_3 = \frac{9*1*(2+1)}{8\pi}\sin x + \frac{9*2*(2-1)}{35\pi}\sin 2x + \frac{9*3*(2+1)}{80\pi}\sin 3x$$

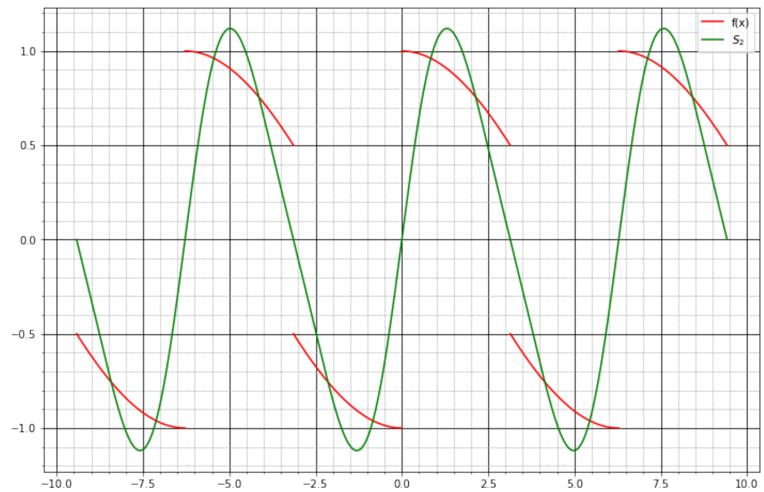
$$S_{10} = \frac{9*1*(2+1)}{8\pi}\sin x + \frac{9*2*(2-1)}{35\pi}\sin 2x + \frac{9*3*(2+1)}{80\pi}\sin 3x +$$

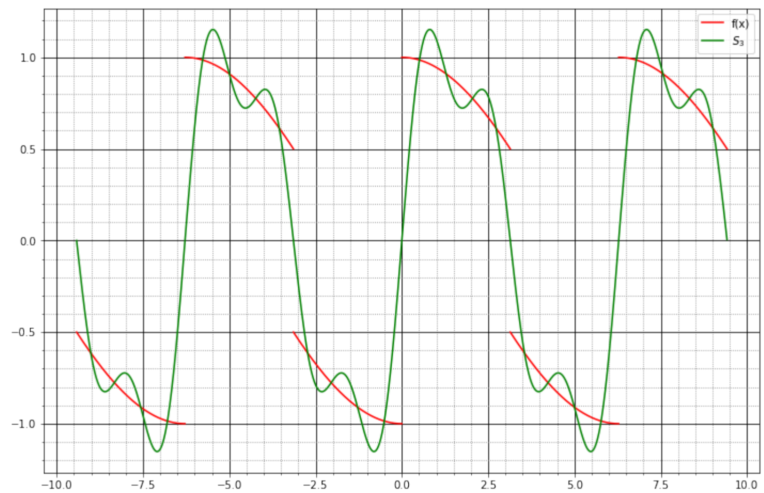
$$+\frac{9*4*(2-1)}{143\pi}\sin 4x + \frac{9*5*(2+1)}{224\pi}\sin 5x + \frac{9*6*(2-1)}{323\pi}\sin 6x +$$

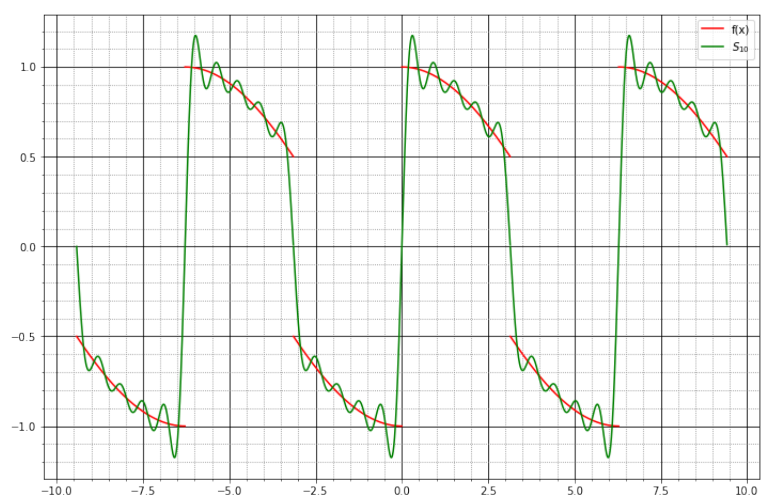
$$+\frac{9*7*(2+1)}{440\pi}\sin 7x + \frac{9*8*(2-1)}{575\pi}\sin 8x + \frac{9*9*(2+1)}{728\pi}\sin 9x +$$

$$+\frac{9*10*(2-1)}{899\pi}\sin 10x$$

Графики для S_2, S_3, S_{10} соответственно:







в)

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{x}{3}\right), & x\in(0,\pi)\\ 0, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

$f(x)$ - ни чётная, ни нечётная; периодическая.
Разложим её в ряд Фурье на заданном полупериоде и произведём необходимые вычисления:

1) Найдём коэффициенты разложения:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3)dx=\frac{1}{\pi}*3\sin(x/3)\Big|_0^{\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3)\cos(nx)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3+nx)dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3-nx)dx=\frac{(-1)^n3\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{1+3n}+\frac{1}{1-3n}\right)=$$

$$\frac{(-1)^n3\sqrt{3}}{2\pi(1-9n^2)}=\frac{(-1)^{n+1}3\sqrt{3}}{2\pi(9n^2-1)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\cos(x/3)\sin(nx)dx=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}\right)*\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{2\pi(9n^2-1)}$$

2) Получаем следующее разложение:

$$f(x)=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}3\sqrt{3}}{2\pi(9n^2-1)}\cos(nx)+\frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{2\pi(9n^2-1)}\sin(nx)\right)$$

3) Т.к. функция имеет точки разрыва, то соответствующий ряд равномерно сходиться не может, следовательно, имеем неравномерную сходимость. (Формально это доказывается абсолютно аналогично тому, как было доказано в предыдущем пункте.)
Формально:

- Предположим, что ряд

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}3\sqrt{3}}{2\pi(9n^2-1)}\cos(nx)+\frac{9n(2+(-1)^{n+1})}{2\pi(9n^2-1)}\sin(nx)\right)$$

сходится равномерно. Это значит, что:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N\, \&\, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

- Для определённости положим $\varepsilon = \varepsilon_0$ и перейдём к пределу при $x \to 0^+$:

  $$\lim_{x\to 0^+} |S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon_0 \Leftrightarrow |\lim_{x\to 0^+} S(x) - \lim_{x\to 0^+} S_n(x)| \leq \varepsilon_0$$

  Т.к. $S_n(x)$ непрерывна и $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x) = 1$, имеем:

  $$|S_n(0) - 1| \leq \varepsilon_0 \Leftrightarrow S_n(0) \in U_{\varepsilon_0}(1)$$

- С другой стороны, т.к. ряд сходится:

  $$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(0^-) = S(0^-) = 0$$

  А т.к. $S_n(x)$ непрерывна, то $S_n(0^-) = S_n(0)$ и окончательно получим:

  $$\lim_{n\to\infty} S_n(0) = 0 \Leftrightarrow \text{для } \varepsilon_0\, \exists\, N_1 = N_{\varepsilon_0} : \forall n_1 > N_1 \Rightarrow |S_n(0)| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow S_n(0) \in U_{\varepsilon_0}(0)$$

  Теперь придадим ε_0 конкретное значение (допустим $\varepsilon = 0.0001$) и увидим противоречие:

  $$\begin{cases} S_n(0) \in U_{0.0001}(1) \\ S_n(0) \in U_{0.0001}(0) \end{cases}$$

  Иными словами, получаем, что $S_n(0)$ лежит в радиусе 0.0001 от точки 0 и от точки 1 одновременно, чего быть не может. Получили противоречие.

4) Выпишем S_2, S_3, S_{10}:

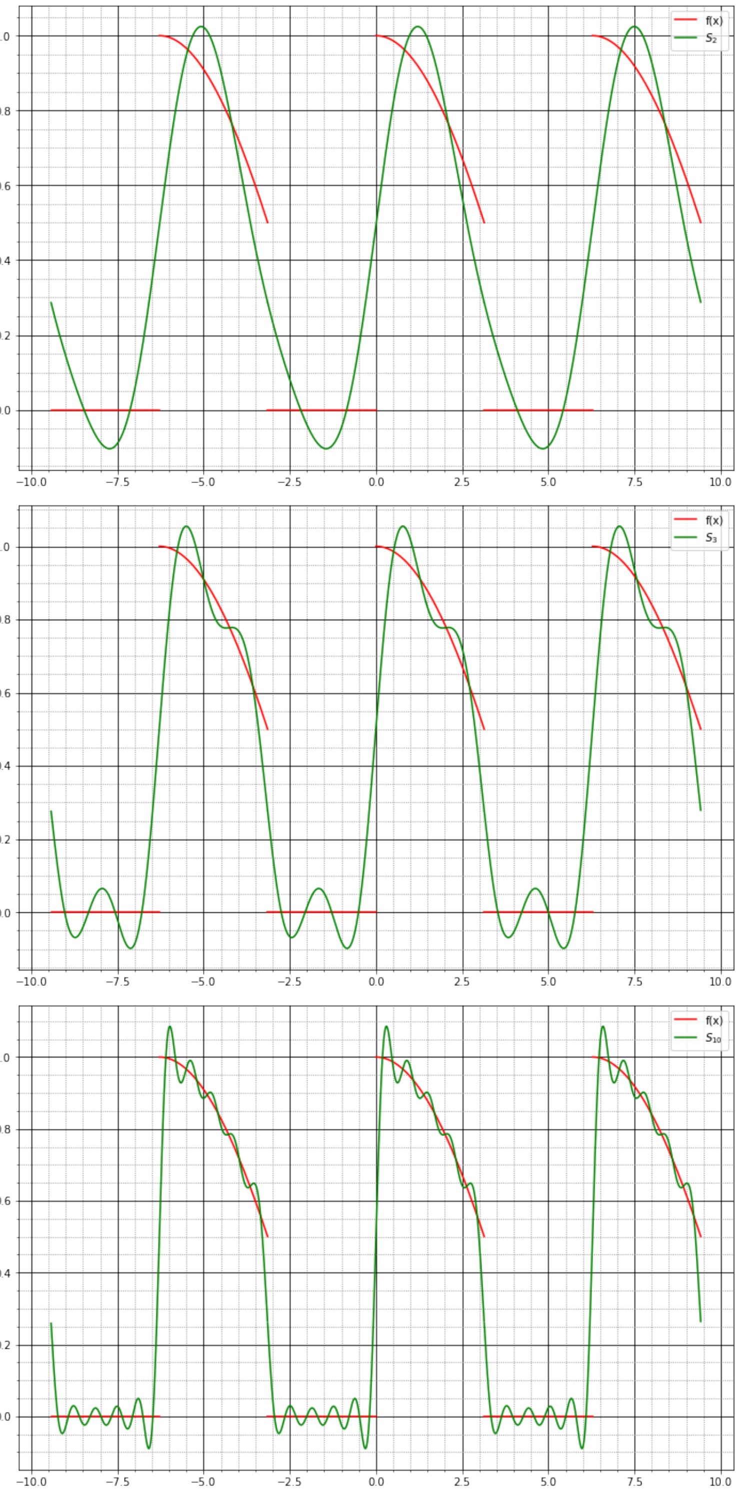
$$S_n = a_0/2 + \sum_{n=1}^{n} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

$$S_2 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{16\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{70\pi}\cos 2x + \frac{27}{16\pi}\sin x + \frac{18}{70\pi}\sin 2x$$

$$S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{16\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{70\pi}\cos 2x + \frac{3\sqrt{3}}{160\pi}\cos 3x + \frac{27}{16\pi}\sin x +$$
$$+ \frac{18}{70\pi}\sin 2x + \frac{81}{160\pi}\sin 3x$$

$$
\begin{aligned}
S_{10} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{16\pi}\cos x - \frac{3\sqrt{3}}{70\pi}\cos 2x + \frac{3\sqrt{3}}{160\pi}\cos 3x - \frac{3\sqrt{3}}{286\pi}\cos 4x + \\
+ \frac{3\sqrt{3}}{448\pi}\cos 5x - \frac{3\sqrt{3}}{646\pi}\cos 6x + \frac{3\sqrt{3}}{880\pi}\cos 7x - \frac{3\sqrt{3}}{1150\pi}\cos 8x + \\
+ \frac{3\sqrt{3}}{1456\pi}\cos 9x - \frac{3\sqrt{3}}{1789\pi}\cos 10x + \frac{27}{16\pi}\sin x + \frac{18}{70\pi}\sin 2x + \frac{81}{160\pi}\sin 3x + \\
+ \frac{36}{286\pi}\sin 4x + \frac{135}{448\pi}\sin 5x + \frac{54}{646\pi}\sin 6x + \frac{189}{880\pi}\sin 7x + \frac{72}{1150\pi}\sin 8x + \\
+ \frac{243}{1456\pi}\sin 9x + \frac{90}{1798\pi}\sin 10x
\end{aligned}
$$

Графики для S_2, S_3, S_{10} соответственно:



Задача 7. *Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

длины $l = 2$, закреплённой на концах: $u(0,t) = u(2,t) = 0$ и удовлетворяющей следующим начальным условиям:

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \le x \le 1 \\ 5(2-x), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$f(x) = 0$$

Решение:

1) Будем искать решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{\pi k t}{l}\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k t}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$$

При $l = 2$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{\pi k t}{2}\right) + B_k \sin\left(\frac{\pi k t}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right)$$

2) Найдём коэффициенты A_k, B_k:

- $A_k = 0$, т.к. $A_k = \dfrac{2}{2} \displaystyle\int_0^2 f(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx$
- Вычислим B_k:

$$B_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^2 \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi k} \left[5 \int_0^1 x \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx + \right.$$

$$\left. + 5 \int_1^2 (2-x) \sin\left(\frac{\pi k x}{2}\right) dx \right] = \frac{2}{\pi k} \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) * \left(\frac{10}{\pi k} - \frac{10}{\pi k}\right) + \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) * \right.$$

$$\left. * \left(\frac{20}{(\pi k)^2} + \frac{20}{(\pi k)^2}\right) \right) = \frac{80}{(\pi k)^3} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

- Подробные вычисления:

$$5\int\limits_0^1 x\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right), & v = -\frac{2}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -5x\frac{2}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_0^1 + 5*2*\frac{1}{\pi k}\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx = -\frac{10}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) +$$

$$+\frac{20}{(\pi k)^2}\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{10}{\pi k}\left(\frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right)$$

$$5\int\limits_1^2 (2-x)\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx = 10\int\limits_1^2 \sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx - 5\int\limits_1^2 x\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx =$$

$$= -10\frac{2}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_1^2 + 5x\frac{2}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \frac{10}{\pi k}\int\limits_1^2 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)dx =$$

$$= -\frac{20}{\pi k}\left[\cos(\pi k) - \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right] + \frac{10}{\pi k}\left[2\cos(\pi k) - \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right] -$$

$$-\frac{20}{(\pi k)^2}\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{10}{\pi k}\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) + \frac{20}{(\pi k)^2}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$$

3) Запишем ответ:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{80}{(\pi k)^3}\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi kt}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\right)$$

Задача 8. *Найти приближенное решение задачи Коши*

$$y'' + x^2y' + 3xy = 3x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Требуется, чтобы погрешность не превосходила 0.001 *при* $x \in [0, 0.5]$.

Решение:

1) Найдём решение в виде степенного ряда:
$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots$
$y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$, $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n * n * x^{n-1}$, $y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n * n * (n-1) * x^{n-2}$.

2) Подставим данные степенные ряды в исходное выражение:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n * n * (n-1) * x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n * n * x^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+1} = 3x$$

$$2 * 1 * c_2 + 3c_0 + \sum_{n=3}^{\infty} c_n * n * (n-1) * x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n * c_n + 3 * c_n) * x^{n+1} = 3x$$

3) Введём следующую замену:

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n * n * (n-1) * x^{n-2} = [n-2 := k+1, n-3 := k] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+3} * (k+3) * (k+2) * x^{k+1} = 2 * 3 * c_3x + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+3}(n+3)(n+2)x^{n+1}$$

4) Имеем:

$$2c_2 + 6c_3x + 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n * c_n + 3 * c_n + c_{n+3} * (n+3) * (n+2)) * x^{n+1} = 3x$$

$c_0 = 0, c_1 = 0$ - т.к. $y(0) = 0, y'(0) = 0$
$6c_3 = 3, \Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}$ - т.к. $3x = 6c_3x$

5) Выразим оставшиеся коэффициенты:

$$(n+3)(n+2)c_{n+3} + (n+3)c_n = 0 \Rightarrow (n+2)c_{n+3} + c_n = 0 \Rightarrow c_{n+3} = -\frac{c_n}{n+2}$$

6) Теперь найдём сумму первых k членов ряда с заданной погрешностью. Для этого достаточно дойти до такого члена ряда, чтобы $|c_i x^i| < \epsilon$ для максимального x на отрезке (таким является $x = 0.5$). По условию $\epsilon < 0.001$.

$$
\begin{array}{ll}
c_0 = 0, & c_0 x^0 = 0 \\
c_1 = 0, & c_1 x^1 = 0 \\
c_2 = 0, & c_2 x^2 = 0 \\
c_3 = 0.5, & c_3 x^3 = 0.5^4 = 0.0625 > \epsilon \\
c_4 = -\frac{c_1}{3} = 0, & c_4 x^4 = 0 \\
c_5 = -\frac{c_2}{4} = 0, & c_5 x^5 = 0 \\
c_6 = -\frac{c_3}{5} = -0.1, & |c_6| x^6 = 0.1 * 0.5^6 = 0.0015625 > \epsilon \\
c_7 = -\frac{c_4}{6} = 0, & c_7 x^7 = 0 \\
c_8 = -\frac{c_5}{7} = 0, & c_8 x^8 = 0 \\
c_9 = -\frac{c_6}{8} = \frac{1}{80}, & c_9 x^9 = \frac{1}{80} * 0.5^9 \approx 0.00002 < \epsilon
\end{array}
$$

Следовательно, с точностью до $\epsilon < 0.001$ имеем ответ:

$$y \approx 0.5x^2 - 0.1x^6 + \frac{1}{80}x^9$$

Задача 9. *Приближённо вычислить определённый интеграл*

$$\int_0^1 x^8 \cos(x) dx$$

Оценка погрешности $\epsilon \leq 0.0001$.

Решение:

1) Разложим функцию $\cos(x)$ в окрестности нуля, воспользовавшись разложением в ряд Маклорена:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Тогда

$$x^8 \cos(x) = x^8 - \frac{x^{10}}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{8!} - \frac{x^{18}}{10!} + \cdots$$

- сходится на всей числовой прямой.

2)

$$\int_0^1 x^8 \cos(x) dx = \left(\frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{2! * 11} + \frac{x^{13}}{4! * 13} - \frac{x^{15}}{6! * 15} + \frac{x^{17}}{8! * 17} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^{19}}{10! * 19} + \cdots \right) \Bigg|_0^1 \approx \frac{1}{9} - \frac{1}{2 * 11} + \frac{1}{24 * 13} - \frac{1}{24 * 6 * 15} + \frac{1}{8! * 17} \approx 0.0684002$$

Подробные вычисления:

$$\frac{1}{22} \approx 0.45 > \epsilon$$

$$\frac{1}{24 * 13} \approx 0.003 > \epsilon$$

$$\frac{1}{24 * 6 * 15} \approx 0.0005 > \epsilon$$

$$\frac{1}{8! * 17} \approx 0.000001 < \epsilon$$