Раздел 2. Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве

Лекция 3 Ряды в пространствах со скалярным произведением.

Бесконечные системы элементов.

Пусть теперь у нас бесконечная (счётная) система векторов (элементов) $Q = \{f_1, f_2, \dots\}$.

Система векторов называется полной, если её линейная оболочка плотна в X: $[L(Q)] = X$.

Замечание: эта полнота не имеет отношения к полноте пространства. Одном словом обозначаются совершенно различные понятия.

Утверждение: если система векторов полна, то её ортогональное дополнение тривиально. (Было доказано: элемент, ортогональный всюду плотному множеству – нулевой элемент).

Замечание. Обратное утверждение (если ортогональное дополнение тривиально, то система полна) справедливо в случае, если пространство $X = H$ гильбертово.

Утверждение: пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нём есть полная счётная система элементов.

Доказательство. Пусть пространство сепарабельно. Это значит, что оно содержит счётное всюду плотное множество элементов. Линейная оболочка элементов этого множества тем более плотна в X и, следовательно, эти элементы образуют полную систему.

Пусть теперь в нашем пространстве есть полная счётная система элементов. Рассмотрим множество конечных линейных комбинаций элементов нашей системы с рациональными коэффициентами. Это множество счётно и плотно в линейной оболочке рассматриваемой системы (т.е. во множестве конечных линейных комбинаций с произвольными действительными коэффициентами). Но из полноты системы следует, что эта линейная оболочка, в свою очередь, плотна в X. Следовательно, счётное множество конечных линейных комбинаций с рациональными коэффициентами также плотно в X. Сепарабельность доказана.

Замечание. Для конечномерного пространства существует конечная полная система (базис), которую, однако, всегда можно расширить до счётной (с потерей линейной независимости).

Замечание. Это доказательство не использует никакой специфики пространств со скалярным произведением и справедливо также для ЛНП.

Рассмотрим теперь некоторую счётную систему $Q = \{f_1, f_2, \dots\}$ (не обязательно полную) и сопоставим ей расширяющуюся последовательность подпространств $Y_n = L\{f_1, \dots, f_n\}$, при этом $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots Y_n \subset Y_{n+1} \subset \dots$ Очевидно, $\forall y \in L(Q) \, \exists \, n : y \in Y_n$, откуда $L(Q) = \cup_n Y_n$.

Подпространства $Y_n^\perp$ образуют сужающуюся последовательность:

$Y_1^\perp \supset Y_2^\perp \supset \dots Y_n^\perp \supset Y_{n+1}^\perp \supset \dots$

Утверждение: $L^\perp(Q) = \cap_n Y_n^\perp$.
Действительно, $h \in L^\perp(Q) \Rightarrow \forall n : h \in Y_n^\perp \Leftrightarrow h \in \cap_n Y_n^\perp$.
С другой стороны, $h \in \cap_n Y_n^\perp \Leftrightarrow \forall n : h \in Y_n^\perp \Rightarrow \forall n : h \perp f_n$.

Пусть теперь w – некоторый элемент пространства X, $z_n = P_n z$ и $h_n = P_n^\perp w$ – его ортогональные проекции на Y_n и $Y_n^\perp$ соответственно, а P_n и $P_n^\perp$ – соответствующие ортопроекторы, при этом $w = z_n + h_n$.

Утверждение: числовая последовательность $\|h_n\|$ монотонно невозрастающая. Действительно,

$$\|h_{n+1}\| = \min_{y \in Y_{n+1}} \|w - y\| \le \min_{y \in Y_n} \|w - y\| = \|h_n\| .$$

Следствие: последовательность $\|z_n\|$ монотонно неубывающая, поскольку $\|z_n\|^2 = \|w\|^2 - \|h_n\|^2$.
Следствие: последовательности $\|h_n\|$ и $\|z_n\|$ имеют пределы (как монотонные ограниченные: значения их элементов лежат между нулём и $\|w\|$).

Обозначим $d = \lim_{n\to\infty} \|h_n\|$.
Утверждение: $d = \rho(w, L(Q))$. Действительно,
$\forall y \in L(Q) \, \exists \, n : y \in Y_n \Rightarrow \rho(w, y) \ge \rho(w, Y_n) = \|h_n| \ \ge d$.
Это значит, что d – нижняя грань для множества расстояний от w до элементов $L(Q)$. То, что это точная нижняя грань, следует из равенства
$d = \lim_{n\to\infty} \|w - z_n\|$, $z_n \in Y_n \subset L(Q)$.
Замечание: z_n – минимизирующая последовательность.
Следствие: $d = \rho(w, [L(Q)])$.

Если Q – полная система, то $\|h_n\| \to 0$, и тогда последовательность z_n сходится в пространстве X к элементу w: $\lim_{n\to\infty} z_n = w$.

Если система Q полной не является, мы пока что ничего не можем утверждать о сходимости последовательностей z_n и h_n в пространстве X (притом, что числовые последовательности из норм $\|z_n\|$ и $\|h_n\|$, как мы уже знаем, сходятся).
Замечание. Как мы увидим далее, достаточным условием сходимости этих последовательностей является гильбертовость пространства X.

Предположим, что хотя бы одна из последовательностей z_n и h_n имеет предел, тогда имеет предел и другая последовательность (почему?), т.е. $z_n \to z$ и $h_n \to h$, и $w = z + h$. Очевидно, $z \in [L(Q)]$ (как предел последовательности элементов из $L(Q)$). Покажем, что $h \in L^\perp(Q)$. Действительно, для произвольных натуральных m и $n \ge m$ справедливо включение $h_n \in Y_n^\perp \subset Y_m^\perp$. Это значит, что элементы последовательности h_n, начиная с $n = m$ и далее, принадлежат подпространству $Y_m^\perp$, а поскольку это подпространство замкнуто, то и предельный элемент также ему принадлежит: $h \in Y_m^\perp$. Отсюда в силу произвольности m заключаем, что $h \in \cap_m Y_m^\perp = L^\perp(Q)$. Таким образом, мы получаем разложение элемента w в ортогональную сумму слагаемых, лежащих в $[L(Q)]$ и $L^\perp(Q)$ (ещё раз повторяю – при условии сходимости хотя бы одной из последовательностей

z_n и h_n).

Бесконечные ортонормированные системы в пространствах со скалярным произведением

Для получения явного представления для элементов z_n и h_n последовательно ортогонализуем систему Q по Граму-Шмидту. Процедура ортогонализации на каждом шаге такая же, как и при ортогонализации конечных систем. При этом если какой-либо элемент лежит в линейной оболочке предыдущих, мы исключаем его из системы. Может оказаться, что после такого исключения в системе Q останется лишь конечное число линейно независимых элементов, тогда мы приходим к задаче о проекции на конечномерное подпространство, уже рассмотренной нами ранее.

Будем теперь считать, что $Q = \{f_1, f_2, \dots\}$ – счётная линейно независимая система элементов (что эквивалентно тому, что произвольная конечная подсистема $\{f_1, \dots, f_n\}$ линейно независима).

Утверждение: $\forall n : Y_n = L\{f_1, \dots, f_n\} = L\{e_1, \dots, e_n\}$ (докажите).

Следствие: $L(Q) = L\{e_1, e_2, \dots\}$ (далее будем писать $L\{e\}$).

Следствие: полнота системы элементов $\{e_1, e_2, \dots\}$ эквивалентна полноте системы элементов $\{f_1, f_2, \dots\}$.

В результате ортогонализации получаем бесконечную ортонормированную систему элементов $\{e_i, i = 1, 2, \dots\}$: $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Снова рассмотрим произвольный элемент $w \in X$ и его ортопроекции z_n на подпространства Y_n. Поскольку теперь в каждом из этих подпространств есть ортонормированный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, мы можем записать эти проекцию в виде

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} (w, e_i) e_i \,,$$

причём для различных n такие проекции отличаются лишь числом слагаемых.

Числа (w, e_i) называются коэффициентами Фурье для элемента w по системе $\{e_j,\, j = 1, 2, \dots\}$.

Утверждение: все коэффициенты Фурье для элемента w равны нулю $\Leftrightarrow w \in L^{\perp}\{e\}$ (доказать).

Следствие: для элементов $w_{1,2}$ все коэффициенты Фурье совпадают $\Leftrightarrow$ $w_2 - w_1 \in L^{\perp}\{e\}$ (доказать).

Свойство минимальности коэффициентов Фурье заданного элемента гильбертова пространства: расстояние от w до z_n меньше расстояния до любой другой линейной комбинации элементов $\{e_1, \dots, e_n\}$ (поскольку z_n – метрическая проекция).

Выпишем выражение для h_n:

$$h_n = w - z_n = w - \sum_{i=1}^{n} (w, e_i) e_i \in Y_n^{\perp}$$

(обратите внимание на сходство этой формулы и формулы ортогонализации по Граму-Шмидту). Тогда

$$w = \sum_{i=1}^{n} (w, e_i) e_i + h_n \, .$$

Примеряя теорему Пифагора, получаем:

$$\|w\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(w, e_i)|^2 + \|h_n\|^2 \, ,$$

откуда снова вытекает знакомое нам неравенство Бесселя:

$$\|z_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(w, e_i)|^2 \le \|w\|^2 \, .$$

В левой части неравенства стоят частичные суммы ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(w, e_i)|^2$$

с неотрицательными членами. Поскольку множество частичных сумм ограничено, ряд сходится, и справедливо неравенство Бесселя для рядов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(w, e_i)|^2 \le \|w\|^2 \, .$$

Из него вытекает, что последовательность коэффициетов Фурье произвольного элемента пространства по произвольной ортонормированной системе всегда принадлежит пространству l_2, и норма этой последовательности в l_2 не превосходит нормы исходного элемента w в исходном пространстве X.

Утверждение: произвольная ортонормированная система в пространстве со скалярным произведением слабо сходится к нулю.
Действительно, из необходимого признака сходимости числовых рядов вытекает, что $\forall w \in X : |(w, e_i)|^2 \to 0$, откуда $\forall w \in X : (w, e_i) \to 0$.

Вернёмся теперь к равенству $\|w\|^2 = \|z_n\|^2 + \|h_n\|^2$ и устремим n к бесконечности. Поскольку оба слагаемых в правой части имеют предел, получаем:

$$\|w\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(w, e_i)|^2 + d^2 \, ,$$

где, напомню, $d = \lim_{n\to\infty} \|h_n\| = \rho(w, L\{e\})$.

Если система элементов $\{e\}$ полна в X, то для произвольного $w \in X$ второе слагаемое обращается в нуль, и тогда мы получаем равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(w, e_i)|^2 = \|w\|^2 ,$$

являющееся конкретизацией неравенства Бесселя для случая полных ортонормированных систем. Это равенство можно интерпретировать следующим образом: оператор, сопоставляющий произвольному элементу пространства X последовательность его коэффициентов Фурье по полной ортонормированной системе элементов, осуществляет изометрическое вложение X в l_2. Этот оператор, очевидно, линеен и инъективен (в силу изометричности). Что касается сюрьективности, то её наличие или отсутствие, как мы увидим ниже, зависит от того, является ли пространство X гильбертовым.

Ортонормированная система элементов $\{e\}$ называется замкнутой, если для произвольного элемента w этого пространства выполнено равенство Парсеваля.

Замечание. Здесь понятие замкнутости не имеет отношения к замкнутости множеств. Одно слово для различных понятий (как и с полнотой).

Утверждение. Если ортонормированная система с пространстве со скалярным произведением полна, то она замкнута (доказали).

Утверждение. Если ортонормированная система с пространстве со скалярным произведением замкнута, то она полна.
Действительно, выполнение равенства Парсеваля означает, что $\forall w \in X$: $d = \rho(w, L\{e\}) = 0$. Это значит, что $L\{e\}$ плотно в X, и, следовательно, система $\{e\}$ полна.

Таким образом, для ортонормированных систем полнота эквивалентна замкнутости.

Замечание. По формулировке это очень похоже на утверждение, что в полном метрическом пространстве замкнутость его подмножества эквивалентна его полноте как метрического подпространства. На самом деле, разумеется, здесь чисто внешнее сходство, а смысл совершенно иной.

Ряды в гильбертовом пространстве.

Рассмотрим ряд (уже не числовой, а в пространстве X)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (w, e_i) e_i .$$

Такой ряд называется рядом Фурье для элемента w по системе $\{e_j,\, j = 1, 2, \dots\}$ (или просто по системе $\{e\}$). Возникает вопрос о сходимости такого ряда, а если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом w.

Мы знаем ответ на этот вопрос для случая полной системы $\{e\}$. В этом случае для произвольного $w \in X$: $h_n \to o$, $z_n \to w$, что и означает сходимость ряда Фурье к элементу w, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(w, e_i)e_i = w\,.$$

Второй случай: система $\{e\}$ неполна, но при этом $w \in [L\{e\}]$, тогда $\|h_n\| \to \rho(w, L\{e\}) = 0$, т.е. $h_n \to o$ и $z_n \to w$. Это снова означает сходимость ряда к элементу w, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(w, e_i)e_i = w\,.$$

Таким образом, произвольный элемент из замыкания линейной оболочки ортонормированной системы $\{e\}$ является суммой собственного ряда Фурье по этой системе или, как говорят, раскладывается в ряд Фурье.
Обратно, пусть некоторый элемент раскладывается в ряд Фурье. Это значит, что он является пределом частичных сумм, которые суть элементы линеала $L\{e\}$, а, следовательно, сам элемент принадлежит его замыканию. Таким образом, принадлежность элемента w замкнутому подпространству $[L\{e\}]$ является необходимым и достаточным условием того, что он раскладывается в ряд Фурье по системе $\{e\}$.

Ещё один очевидный случай: система $\{e\}$ неполна, при этом $w \in L^{\perp}\{e\}$ (считаем $w \neq o$), тогда $\forall n : z_n = o$, все коэффициеты Фурье равны нулю и ряд также сходится, но не к w, а к нулевому элементу. При этом $h_n = w$ при любом n, и, соответственно, $z_n \to o$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(w, e_i)e_i = o\,.$$

Ряд Фурье сходится, но сумма ряда очевидно не совпадает с элементом w.

Рассмотрим более общий случай: не предполагаем полноты системы $\{e\}$ и не предполагается принадлежности элемента w какому-либо подпространству. Пусть, однако, элемент w и система $\{e\}$ таковы, что ряд Фурье сходится, тогда сходится также последовательность h_n, и справедливо равенство $w = z + h$, где

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{i=1}^{\infty}(w, e_i)e_i\,, \quad h = \lim_{n\to\infty} h_n\,.$$

Как уже было сказано выше, в этом случае $z \in [L\{e\}]$, $h \in L^{\perp}\{e\}$ (в силу замкнутости подпространств). В этом случае $\forall n : (h, e_n) = 0$,
$(w, e_n) = (z, e_n)$, т.е. все коэффициенты Фурье для исходного элемента w и для суммы ряда z совпадают, т.е. ряд Фурье для w одновременно является и рядом Фурье для z. Как указано выше, $h = o$ и $w = z$ тогда и только тогда, когда $w \in [L\{e\}]$.

Всё это, однако, справедливо лишь при условии, что ряд Фурье сходится. Возникает вопрос о том, когда, кроме вышеперечисленных простых случаев, можно гарантировать эту сходимость.

Чтобы ответить на этот вопрос, нам будет удобно сперва рассмотреть ещё чуть более общую задачу о сходимости ортогонального ряда вида

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \,,$$

где α_i – некоторые числа, а e_i – ортонормированные элементы пространства.

Утверждение. Если ряд S сходится, то он является рядом Фурье для своей суммы по системе $\{e\}$.
Действительно, $(S, e_i) = \lim_{n\to\infty}(S_n, e_i) = \alpha_i$, где

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

– частичные суммы ряда S в пространстве X.

Утверждение: необходимым условием сходимости ряда S является сходимость числового ряда

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \,.$$

Доказательство. Пусть последовательность α_i не является квадратично суммируемой. Тогда квадраты норм частичных сумм ряда S согласно теореме Пифагора равны

$$\|S_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = A_n$$

и являются частичными суммами расходящегося числового ряда A. Отсюда следует, что числовая последовательность $\|S_n\|^2$ неограничена, но тогда неограничена и последовательность S_n в пространстве X. Отсюда следует, что эта последовательность не может иметь предела, а следовательно, исходный ряд S расходится.
Замечание. Мы могли бы вместо этого рассуждения сослаться на факт квадратичной суммируемости последовательности коэффициентов ряда Фурье.

Утверждение. Если числовой ряд A сходится, то последовательность частичных сумм S_n фундаментальна.
Доказательство. Найдём квадрат нормы разности частичных сумм S_n и S_m, считая для определённости $n > m$:

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i|^2 = A_n - A_m \,.$$

Поскольку ряд A сходится, числовая последовательность A_n фундаментальна, а отсюда следует и фундаментальность последовательности S_n в пространстве X.

Утверждение: если пространство $X = H$ – гильбертово, то ряды A и S одновременно сходятся либо одновременно расходятся.

Утверждение: если подпространство $[L\{e\}]$ является полным метрическим пространством с метрикой, порождённой скалярным произведением, то ряды A и S одновременно сходятся либо одновременно расходятся.
Замечание: при этом объемлющее пространство X может и не быть полным.

Вернёмся к рассмотрению рядов Фурье. Мы установили, что последовательность z_n фундаментальна, поскольку последовательность коэффициентов Фурье квадратично суммируема. Отсюда следует, что и последовательность h_n также фундаментальна, поскольку $h_n = w - z_n$.

Утверждение. Если подпространство $[L\{e\}]$ является полным метрическим пространством, то ряд Фурье сходится для любого $w \in X$. Тогда сходится и последовательность h_n, и предельный элемент лежит в ортогональном дополнении: $h \in L^{\perp}\{e\}$.

Утверждение. Если подпространство $L^{\perp}\{e\}$ является полным метрическим пространством, сходится последовательность h_n для любого $w \in X$. Тогда сходится и ряд Фурье.

Утверждение. Если пространство $X = H$ гильбертово, то ряд Фурье любого элемента w по любой ортонормированной системе $\{e\}$ сходится, и одновременно сходится и последовательность h_n.

Во всех этих случаях

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} (w, e_i) e_i + h = z + h\,,$$

где

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} (w, e_i) e_i \in [L\{e\}]\,, \quad h \in L^{\perp}\{e\}\,,$$

т.е. произвольный элемент w может быть представлен в виде ортогональной суммы элемента из подпространства $Y = [L\{e\}]$ и его ортогонального дополнения. У нас была подобная теорема об ортогональном разложении для конечномерного подпространства Y, теперь мы её обобщили на более общий (хотя и не самый общий) случай. Проанализируем, какими же свойствами должно обладать подпространство Y.

Утверждение: подпространство Y сепарабельно. Действительно, счётная система $\{e\}$ полна в Y, а мы знаем, что в этом случае Y сепарабельно (счётное плотное множество – конечные линейные комбинации с рациональным коэффициентами). Обратно, если Y – сепарабельное подпространство, то в нём можно построить полную ортонормированную систему ортогонализацией плотного счётного набора элементов.

Таким образом, мы установили, что если X – пространство со скалярным произведением, $Y \subset X$ – его сепарабельное замкнутое подпространство, и по крайней мере одно из подпространств Y или $Y^\perp$ является полным метрическим пространством, то произвольный элемент пространства раскладывается в сумму элементов, один из которых является его ортогональной проекцией на Y, а другой – на $Y^\perp$. Иначе говоря, $X = Y \oplus Y^\perp$.
(Ранее мы это доказали для случая конечномерных подпространств Y, очевидно являющихся полными сепарабельными метрическими пространствами.)

Случай, когда $X = H$ – гильбертово.
Если H – гильбертово пространство, а $Y \subset H$ – его сепарабельное замкнутое подпространство, то произвольный элемент пространства раскладывается в сумму элементов, один из которых является его ортогональной проекцией на Y, а другой – на $Y^\perp$. То есть $H = Y \oplus Y^\perp$.
(В этом случае любое замкнутое подпространство является полным метрическим пространством.)

Если само пространство H сепарабельно, то Y – произвольное замкнутое подпространство (которое, очевидно, также сепарабельно).

Замечание. Ещё раз хочу напомнить, что в словосочетании "замкнутое подпространство", слово "замкнутое" можно опустить, поскольку подпространство замкнуто по определению.

Рассмотрим теперь вопрос о критерии (необходимом и достаточном условии) полноты системы элементов $Q = \{f\}$. Мы знаем, что если эта система полна, то ортогональное дополнение $L^\perp(Q)$ к её линейной оболочке тривиально (т.е. состоит только из нулевого элемента). Покажем, что *в гильбертовом пространстве* это условие является не только необходимым, но и достаточным.

Действительно, мы установили, что для произвольного элемента гильбертова пространства справедливо представление $w = z + h$, где
$z \in [L\{e\}] = [L\{f\}]$, $h \in L^\perp\{e\} = L^\perp\{f\}$. Но если мы знаем, что последнее подпространство тривиально, то $h = o$ и $w = z \in [L\{f\}]$, т.е. линеал $L\{f\}$ всюду плотен в H и система $\{f\}$ полна.

Таким образом: система $\{f\}$ в гильбертовом пространстве полна тогда и тоько тогда, когда её ортогональное дополнение тривиально.

В этом случае произвольный элемент пространства раскладывается в ряд Фурье по системе $\{e\}$, получаемой ортогонализацией исходной системы $\{f\}$: ряд Фурье для этого элементу сходится к самому этому элементу. Если же ортогональное дополнение нетривиально, то сумма ряда может отличаться от исходного элемента на слагаемое, лежащее в этом ортогональном дополнении.

Изоморфизм пространств со скалярным произведением

Два пространства со скалярным произведением изоморфны, если есть взаимно однозначное отображение этих пространств, сохраняющее скалярное произведение.

Теорема. Произвольное сепарабельное гильбертово пространство изоморфно либо E^n (если оно конечномерно), либо l_2 (если оно бесконечномерно).

Доказательство. Если пространство со скалярным произведением сепарабельно, то в нём можно ортогонализацией счётного плотного множества построить либо конечную (если пространство конечномерно), либо счётную полную ортонормированную систему элементов $\{e\}$.

Если пространство конечномерно, возьмём полученную систему в качестве базиса и представим произвольный элемент пространства x в виде суммы

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,,$$

где n – размерность пространства, а $\alpha_i = (x, e_i)$. Это равенство, очевидно, устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами $x \in X$ и наборами $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $y \in X$ – также некоторый элемент пространства, который мы представим в виде суммы

$$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \,,$$

где $\beta_j = (y, e_j)$. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \,,$$

что представляет собой скалярное произведение векторов α и β в пространстве E^n. Таким образом, установлен изоморфизм пространств X как E^n как пространств со скалярным произведением (очевидно, гильбертовых).

Пусть теперь пространство X бесконечномерно и сепарабельно. Разложим произвольный элемент $x \in X$ в ряд Фурье по системе $\{e\}$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \,,$$

где $\alpha_i = (x, e_i)$. Как было установлено, последовательность коэффициентов Фурье квадратично суммируема. Таким образом, мы имеем отображение $X \to l_2$, сопоставляющее элементу $x \in X$ последовательность $\alpha \in l_2$.

Для того, чтобы это отображение было сюрьективным (а тогда и биективным), нужно, чтобы любой ряд с коэффициентами из l_2 сходился в

X и задавал некоторый элемент $x \in X$. Для этого, как мы видели, достаточно, чтобы пространство X было гильбертовым, $X = H$. Это условие является также необходимым, поскольку указанная биекция, как мы видели, устанавливает между X и l_2 изометрический изоморфизм, а поскольку пространство l_2 является полным (гильбертовым), то таким же будет и пространство X.

Покажем, что пространства $X = H$ и l_2 изоморфны не только как ЛНП, но и как пространства со скалярным произведением. Мы можем для этого сослаться на формулу, которая позволяет выразить скалярное произведение через нормы элементов. Другой способ – непосредственное вычисление скалярного произведения элементов x и

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \,,$$

где $\beta_j = (y, e_j)$. Введём обозначения

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \,, \quad y_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \,,$$

при этом, очевидно, $x_n \to x$, $y_n \to y$. Воспользовавшись непрерывностью скалярного произведения, получаем:

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \,,$$

что представляет собой скалярное произведение последовательностей α и β в пространстве l_2. Теорема доказана.

Замечание. Частный случай доказанного утверждения, устанавливающий изоморфизм пространств l_2 и $L_2[a, b]$, известен как теорема Рисса-Фишера.

Замечание. У нас была теорема Вейерштрасса о сходимости рядов в банаховых пространствах. Если её применить к ряду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \,,$$

то получим, что такой ряд гарантированно сходится в случае сходимости числового ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \,,$$

т.е. в случае $\alpha \in l_1$. Ортогональность ряда приводит к тому, что требование на коэффициенты существенно ослабляется: $\alpha \in l_2$.

Если рассмотреть обычный тригонометрический ряд Фурье, то признак Вейерштрасса при абсолютной суммируемости последовательности коэффициентов обестпечит нам сходимость не только в $L_2[a,b]$, но и в $C[a,b]$, т.е. равномерную, и в этом случае сумма ряда – непрерывная функция. Если же есть только квадратичная суммируемость, то и сходимость можно гарантировать только в $L_2[a,b]$, т.е. "сходимость в среднем". При этом сумма ряда – не обязательно непрерывная функция. Если точнее, то сумма ряда, элемент $L_2[a,b]$ – не функция, а класс функций, которые могут отличаться на множестве меры нуль, у всех таких функций один и тот же ряд Фурье, и поточечной сходимости также может не быть. Т.е. с одной стороны, раскладывать в ряд мы можем более широкий класс функций, но с другой – сходимость ряда оказывается существенно хуже.