Лекция №7

Автономные системы.

Определение. Система нормального вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{1}$$

у которой правая часть не содержит независимую переменную t, называется автономной системой.

Будем считать, что f_i –непрерывный функции.

Определение. Точка $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ называется особой точкой для системы (1), если в ней все $f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$. Точка называется неособой, если в ней хотя бы одна из функций $f_i(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$

Теорема. *В окрестности любой неособой точки система* (1) *эквивалентна системе с меньшим числом уравнений.*

Доказательство. Пусть точка $(x_1^0, \dots, x_n^0) = \boldsymbol{x}^0$ неособая точка для системы (1), тогда хотя бы одна из функций f_i отлична от 0 в этой точке. Пусть это функция $f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$. В силу непрерывности функций f_i, $f_1 \neq 0$ в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$. Поделим все уравнения системы (1), начиная со второго на первое уравнение. Получим, что в окрестности точки $\boldsymbol{x}^0$, где f_1

отличная от нуля, система (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{f_2}{f_1} \\ \dfrac{dx_3}{dx_1} = \dfrac{f_3}{f_1} \\ \quad \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dx_1} = \dfrac{f_n}{f_1} \end{cases}$$

с меньшим числом уравнений. Здесь x_1 - уже не функция, а независимая переменная. □

Геометрический смысл автономной системы.

Определение. Для системы (1) пространство $(x_1, \ldots, x_n)$ (точнее та область, в которой определены все функции f_i) называется фазовым пространством.

В каждой точке фазового пространства определен вектор

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Таким образом в фазовом пространстве задано поле направлений.

Любое решение $myvecx(t)$ системы (1) задаёт линию в фазовом пространстве. Эта линия называется траекторией или фазовой траекторией.

В каждой точке фазового пространства траектория, проходящая через эту точку, касается вектора поля направлений, построенного в этой точке.

Это следует из того что касательный вектор к линии,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

заданной параметрически, имеет координаты

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Свойства фазовых траекторий

1) Сдвиг по времени.
Если $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ – решение системы (1), то $\forall c = \mathrm{const}$ $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t + c)$ – тоже решение системы (1) и оба эти решения имеют одну и ту же траекторию.

Действительно:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}(t+c)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}(t+c)}{d(t+c)}\frac{d(t+c)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t+c)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

Если траектория $\boldsymbol{\varphi}(t)$ проходит через точку $\boldsymbol{x}^1$ в момент времени t_1, т.е $\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$, то траектория $\boldsymbol{\varphi}(t + c)$ будет проходить через эту точку в момент времени $t_1 - c$.

Далее будем предполагать, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условию Липшица, то есть

$$\exists k \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \quad |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leqslant k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

2) Через каждую точку фазового пространства проходит одна и только одна траектория. Всякие два решения, проходящие через одну и ту же точку отличаются только сдвигом по времени.

Действительно:

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$, проходящие через одну и ту же точку $\boldsymbol{a}$, решения системы (1)

$$\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\psi}(t_2) = \boldsymbol{a}$$

Обозначим

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t + t_2 - t_1).$$

Это тоже решение системы (1). Оно удовлетворяет навальному условию

$$\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{\psi}(t_2) = \boldsymbol{a}.$$

Таким образом решения $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$ удовлетворяют одному и тому же навальному условию и следовательно по теореме единственности решения задачи Коши

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\psi}(t + t_2 - t_1).$$

То есть $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$ отличаются лишь сдвигом во времени и имеют одну и ту же траекторию.

*Следствие 1.*Траектория не может войти в особую точку за конечное время.

Действительно:

Пусть $\boldsymbol{a}$ – особая точка, то есть $\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \boldsymbol{a}$ – решение. Если траектории решений $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и $\boldsymbol{\psi}(t)$ не совпадают, то они не имеют общих точек. Значит $\boldsymbol{\psi}(t) \neq \boldsymbol{a}$ при всех t.

Решение $\boldsymbol{\psi}(t)$ может приближаться к особой точке только при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

2) Если $\boldsymbol{x}(t)$ – решение системы (1), $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_2)$, $t_2 > t_1$ и $\boldsymbol{x}(t) \not\equiv \mathbf{const}$, то решение периодическое, у него есть наименьший положительный период, траектория – замкнутая кривая без самопересечений.

Действительно:

Функция $\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{x}(t + t_2 - t_1)$ тоже решение, $\boldsymbol{\varphi}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{x}(t_1)$. По теореме единственности

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{x}(t), \text{ то есть } \boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}(t + \underbrace{t_2 - t_1}_{T}).$$

Таким образом $\boldsymbol{x}(t)$ периодическая функция. У всякой непрерывной периодической функции существует наименьший период T_0. Траектория $\boldsymbol{x}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T_0)$ – замкнутая кривая, так как $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(T_0)$. Если она имеет самопересечения, то $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_2)$ при некоторых $t_1,\, t_2 \in (0, T_0)$. В силу доказанного выше, тогда решение $x(t)$ имело бы период $T = |t_2 - t_1| < T_0$. Это невозможно, так как T_0 – наименьший положительный период.

4) Классификация фазовых траекторий автономной системы.

Каждая траектория автономной системы принадлежит одному из трех типов:

1) особая точка,

2) замкнутая кривая без самопересечений,

3) незамкнутая кривая без самопересечений.

Действительно:

Если $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{const} \Rightarrow 1)$.
Если $\boldsymbol{x}(t) \not\equiv \mathbf{const}$ и $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{x}(t_2)$ при некоторых $t_1 \neq t_2 \Rightarrow 2)$.
Если $\boldsymbol{x}(t_1) \neq \boldsymbol{x}(t_2)$ при любых $t_1 \neq t_2 \Rightarrow 3)$.

4)Групповое свойство.

Обозначим через $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{a})$ решение системы (1) с начальными условиями $\boldsymbol{\varphi}(0, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$. Тогда

$$\boldsymbol{\varphi}(t_2, \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{\varphi}(t_2 + t_1, \boldsymbol{a}). \tag{2}$$

Действительно:

Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. Тогда $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{a}))$ – решение системы (1) с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t + t_1, \boldsymbol{a})$ – тоже решение с начальным условием $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$. По теореме единственности $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{y}(t)$, значит

$$\boldsymbol{\varphi}(t_2, \boldsymbol{\varphi}(t_1, \boldsymbol{a})) = \boldsymbol{\varphi}(t_2 + t_1, \boldsymbol{a}).$$