# Лекция №15

## Устойчивость по первому приближению (продолжение).

**Пример** (1). *Устойчиво ли нулевое решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - cx^3, \\ \dot{y} = -bx^3 - cy^3? \end{cases} \tag{1}$$

При $b = c = 0$ система линейна, $\lambda_{1,2} = 0$, жорданова клетка размера 2. По теореме об условиях устойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами нулевое решение неустойчиво.

При других $b$ и $c$ имеем критический случай, возможна как устойчивость, так и неустойчивость.

При $b > 0$ возьмем $v = 2y^2 + bx^4$. Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = -4bcx^6 - 4cy^4.$$

Если $c > 0$, то

$$\frac{dv}{dt} < 0, \quad |x| + |y| \neq 0.$$

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Если же $c = 0$, то

$$\frac{dv}{dt} \equiv 0.$$

По теореме Ляпунова об устойчивости, нулевое решение устойчиво, но не асимптотически устойчиво, так как

$$v(x(t), y(t)) \equiv \text{const} \not\to 0.$$

При $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$, нулевое решение неустойчиво. Доказательство как в примере двумя лекциями ранее, с функцией $v = xy$.

**Пример** (2). *При каких значениях параметра* $a \in \mathbb{R}$ *нулевое решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + (2-a)y, \\ \dot{y} = ax - 3y + (a^2 - 2a - 3)x^2 \end{cases} \tag{2}$$

*асимптотически устойчиво, устойчиво, неустойчиво?*

Составляем характеристическое уравнение для линейной части системы

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-a \\ a & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \;\; \lambda^2 + 2\lambda + a^2 - 2a - 3 = 0.$$

По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2 < 0, \;\; \lambda_1 \cdot \lambda_2 = a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1).$$

В зависимости от значения параметра $a$ получаем

1) $-1 < a < 3$, тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, существует корень $\lambda > 0$. По теореме об устойчивости по первому приближению нулевое решение неустойчиво.

2) $a < -1$ или $a > 3$, тогда $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Учитывая, что $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$, получаем два случая:

   - если $\lambda_1, \lambda_2$ вещественные, то $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$,
   - если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \alpha = -1$.

   В обоих случаях нулевое решение асимптотически устойчиво по теореме об устойчивости по первому приближению.

3) $a = -1$ или $a = 3$, тогда $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$. Корни простые, а система (2) линейная. В силу теоремы об условиях устойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами нулевое решение устойчиво, но не асимптотически из-за наличия корня $\lambda_1 = 0$.