Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российкий технологический университет - МИРЭА

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчёт
по предмету: «Алгебра и геометрия»
III семестр

Вариант 18

Выполнил студент группы КМБО-02-19
Проскуряков Иван

№	1	2	3	4	5	6	7	8
	+	+	+	+	+	+	+	+

Москва 2020

Задача 1. *Найти все целочисленные решения уравнения* $24x - 13y = 1$

Решение:

1) Проверим существование решения:
НОД(24, 13) = 1 $\Rightarrow$ решение существует.

2) Найдём частное решение:

$$x = 6, y = 11$$

Проверка: $24 * 6 - 13 * 11 = 144 - 143 = 1, \Rightarrow (6, 11)$ - частное решение.

3) Запишем общее решение:

$$\begin{cases} x = 6 + (-13)t \\ y = 11 - 24t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

4) Проверка: $24(6 - 13t) - 13(11 - 24t) = 144 - 143 - 24 * 13t + 13 * 24t = 1$

Задача 2. *Найти в* $\mathbb{Z}_{15}$ *все решения уравнения* $x^2+10=5$ *или доказать, что их нет.*

Решение:

1) Упростим выражение:

$$x^2+10=5 \Rightarrow x^2 \equiv -5 \equiv 10 \pmod{15}$$

Отсюда имеем:

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=1 \Rightarrow (x-3)^{-1}=(x+3)$$

2) Рассмотрим множество всех обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_{15}$ - мультипликативную группу $\mathbb{Z}_{15}^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$ (элемент обратим $\Leftrightarrow$ он взаимнопрост с основанием кольца). Нетрудно проверить следующие соотношения:

$$\begin{array}{rcl} 2^{-1} & = & 8 \\ 4^{-1} & = & 4 \\ 7^{-1} & = & 13 \\ 11^{-1} & = & 11 \\ 14^{-1} & = & 14 \end{array}$$

Среди пар обратимых элементов нас интересуют те пары, где один элемент больше другого на 6. Таких пар 2: 2 и 8, 7 и 13. Теперь разрешим следующие уравнения:

$$\begin{cases} x-3=2 \\ x+3=8 \end{cases} \Rightarrow x=5$$

$$\begin{cases} x-3=7 \\ x+3=13 \end{cases} \Rightarrow x=10$$

Отсюда имеем ответ: $x_1=5, x_2=10$.

Задача 3. *Доказать, что данное подмножество $H \subset \mathbb{Z}_n$ является группой по умножению. Найти ее порядок. Представить ее в виде произведения циклических групп.*

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{16}$$

$$H = \mathbb{Z}_{16}^* \text{ - все обратимые элементы кольца}$$

Решение:

I Докажем, что H - группа по умножению:
$H = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ - т.к. элемент кольца вычетов обратим $\Leftrightarrow$ он взаимнопрост с основанием кольца.

1. Операция '*' в исходном кольце коммутативна и ассоциативна, очевидно остаётся таковой и в $\mathbb{Z}_{16}^*$. Нейтральным элементом по умножению в $\mathbb{Z}_{16}^*$ является 1 - единица исходного кольца.
2. Теперь, чтобы доказать, что H - группа, построим таблицу Кэли, в которой покажем, что операция умножения не выводит из H, а также то, что у каждого элемента в H существует обратный:

$*$	1	3	5	7	9	11	13	15
1	1	3	5	7	9	11	13	15
3	3	9	15	5	11	1	7	13
5	5	15	9	3	13	7	1	11
7	7	5	3	1	15	13	11	9
9	9	11	13	15	1	3	5	7
11	11	1	7	13	3	9	15	5
13	13	7	1	11	5	15	9	3
15	15	13	11	9	7	5	3	1

Из таблицы видно, что $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$ и $\forall h \in H \exists h^{-1} \in H$, следовательно, H - мультипликативная группа.

II Найдём порядок группы H:

$$|H| = |\mathbb{Z}_{16}^*| = \varphi(16) = 2^4 - 2^3 = 8$$

где $\varphi(x)$ - функция Эйлера.

III Представим H как произведение циклических групп:

1. В H присутствуют следующие циклическе подгруппы:
   $< 3 >_4 = \{3, 9, 11, 1\}$, $< 7 >_2 = \{7, 1\}$

$$H \cong < 3 >_4 \times < 7 >_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1. < 3 >_4 \cap < 7 >_2 = \{1\} \\ 2. H = < 3 >_4 * < 7 >_2 = \{a * b | \forall a \in < 3 >_4, \forall b \in < 7 >_2\} \\ 3. < 3 >_4 \lhd H, < 7 >_2 \lhd H \end{cases}$$

2. Условия 1 и 3 из перечня выше очевидно выполняются (3-е условие выполнено, т.к. исходная группа коммутативна), остётся проверить второе. Иными словами, необходимо показать, что любой элемент из H единственным образом предствляется произведением элементов из $< 3 >_4$ и $< 7 >_2$.
   Опишем $< 3 >_4 * < 7 >_2$ «табличкой умножения»:

$*$	$1_{<3>}$	3	9	11
$1_{<7>}$	1	3	9	11
7	7	5	15	13

   Из таблицы выше следует, что любой элемент из H единственным образом выражается как произведение элементов из подгрупп $< 3 >_4, < 7 >_2$, следовательно, выполнено условие 2 и H представимо как внутреннее прямое произведение своих циклических подгрупп, т.е.:

$$H \cong < 3 >_4 \times < 7 >_2$$

Задача 4. *Перечислить возможно большее число неизоморфных групп порядка N_1 и N_2. Доказать, что перечисленные группы попарно не изоморфны.*

$$N_1 = 22, N_2 = 15$$

Решение:

I Опишем все неизоморфные группы порядка 22:

Т.к. порядок группы имеет вид $2p$, где $p > 2$ - простое число ($p = 11$), то группа, имеющая данный порядок, будет изоморфна либо C_{22}, либо D_{11} (но не обеим сразу). Объясняется это тем, что, если в группе есть элемент порядка 22, то группа будет циклической и между ней и C_{22} будет очевидный изоморфизм. Если же такого элемента не будет, то в группе найдётся элемент порядка p, который будет порождать циклическую подгруппу, и элемент порядка 2, не входящий в циклическую подгруппу порядка p, такой, что, если $ord(a) = 11, ord(b) = 2$, то будет иметь место определяющее соотношение диэдральной группы: $a = b * a^{-1} * b^{-1}$, откуда и будет следовать, что данная группа будет изоморфна D_{11}.

II Определим неизоморфные группы порядка 15:

Пусть $n(p)$ - число силовских р-подгрупп исходной группы. Тогда для произвольной группы порядка 15 имеем: $n(3) = 1 = n(5)$. Т.к. все р-подгруппы сопряжены друг другу, то 3-подгруппа и 5-подгруппа сопряжены самим себе и, следовательно, являются нормальными подгруппами исходной группы.

Пусть А - 3-подгруппа, В - 5-подгруппа, тогда $A \cap B = e$, т.к. $C_3 \cong A, C_5 \cong B$, $C_3 \cap C_5 = \{1\} = \{e\}$.

При этом, т.к. A, B - нормальные, то $ab = ba \forall a, b \in A, B$. Также в AB для каждого элемента содержится и обратный к нему, следовательно, AB - это подгруппа в исходной группе. А т.к. $|AB| = |A||B| = 15$, то исходная группа является прямым внутренним произведением своих подгрупп A, B. Иными словами для исходной группы G следует, что если $|G| = 15$, то $G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong C_3 \times C_5$.

Задача 5. *Доказать, что отображение φ абелевой группы $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ в себя, задаваемое формулой $\varphi(x) = 2x$, является гомоморфизмом. Найти его ядро и образ. Найти фактор-группу $G/Ker\varphi$.*

Решение:

I Докажем, что φ - гомоморфизм:

1) $\varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y$
2) $\varphi(x) + \varphi(y) = 2x + 2y$
3) Следовательно $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, отсюда φ - гомоморфизм, т.к. сохраняет групповую операцию.

II Найдём ядро гомоморфизма:

1) $Ker\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = 0\}$
2) $\varphi(g) = 2g = (2g_1, 2g_2) = 0$, где $g_1 \in \mathbb{Z}_4, g_2 \in \mathbb{Z}_{10}$, но тогда:

$$\begin{cases} 2g_1 = 0, g_1 \in \mathbb{Z}_4 \\ 2g_2 = 0, g_2 \in \mathbb{Z}_{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2g_1 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow g_1 \in \{0, 2\} \\ 2g_2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow g_2 \in \{0, 5\} \end{cases}$$

Отсюда ядро гомоморфизма имеет вид:

$$Ker\varphi = \{(0,0), (2,0), (0,5), (2,5)\}$$

III $G/Ker\varphi \cong ?$

1) $|G/Ker\varphi| = 10 = |G|/|Ker\varphi|$
2) По теореме о гомоморфизме $G/Ker\varphi \cong Im\varphi$, следовательно для определения фактора группы по ядру достаточно рассмотреть образ гомоморфизма и понять, чему он изоморфен. $|Im\varphi| = 10$.

$$Im\varphi = \{(0,0), (0,2), (0,4), (0,6), (0,8), (2,0), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8)\}$$

.

3) Нетрудно видеть, что $Im\varphi \cong \mathbb{Z}_{10}$. Покажем это:

Степень	Элемент
1	$(2,2)$
2	$(0,4)$
3	$(2,6)$
4	$(0,8)$
5	$(2,0)$
6	$(0,2)$
7	$(2,4)$
8	$(0,6)$
9	$(2,8)$
10	$(0,0)$

Задача 6. *($n = 7$, $\alpha = (64125)$, $\beta = (65)(24)(37)$)*

I Пусть $G \subseteq S_n$ - подгруппа, порождённая перестановками α и β. Коммутативна ли она? Какой из известных вам групп она изоморфна?

II Является ли подгруппа группы G, порождённая элементом α, нормальной подгруппой? Если да, найти фактор-группу по ней.

III То же задание для подгруппы, порождённой элементом β.

Решение:

I Чтобы найти группу, изоморфную данной, необходимо определить её структуру. Поэтому определим её порядок, порядки её элементов; определим коммутативность этой группы. После этого можно будет понять, какая группа является изоморфной данной.

1) $ord\alpha = 5$.
Выпишем степени элемента α (они понадобятся в дальнейшем):

$$\begin{aligned} \alpha &= (64125) \\ \alpha^2 &= (61542) \\ \alpha^3 &= (62451) \\ \alpha^4 &= (65214) \\ \alpha^5 &= (1)(2)(4)(5)(6) \end{aligned}$$

2) $ord\beta = 2$

3) Определим, является ли группа коммутативной. Чтобы доказать её некоммутативность, достаточно предъявить нетривиальный коммутант двух любых элементов из G.

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$$
$$a = \alpha\beta = (64125)(65)(24)(37)$$
$$b = \alpha = (64125)$$
$$[\alpha\beta, \alpha] = \left| \begin{aligned} ab = \alpha\beta\alpha &= (64125)(65)(24)(37)(64125) = (65)(42)(37) \\ a^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} &= (65)(24)(37)(65214) \\ b^{-1} &= (65214) \end{aligned} \right| =$$

$$= (65)(42)(37)(65)(24)(37)(65214)(65214) = (62451) \neq e$$

Отсюда видно, что в группе есть элемент с нетривиальным коммутантом, следовательно, группа не коммутативна.

4) Подытожим всё, что мы знаем о структуре данной группы:

- Имеет две циклические подгруппы $< \alpha >, < \beta >$, пересекающиеся по нейтральному элементу и имеющие порядки 5 и 2 соответственно.

- Некоммутативна.
- Для элемента β выполняется следующее: $\beta^{-1} = \beta$

На основе вышеизложенного можно предположить, что наша группа изоморфна D_n. Чтобы доказать это, достаточно показать, что:

- Для любых элементов a из $< \alpha >$ выполняется определяющее соотношение диэдральной группы: $\beta a \beta^{-1} = a^{-1}$.
- $|G| = 2n$.

5) Найдём $|G|$:

- Группа G некоммутативна и образована произведениями степеней подстановок α и β. Следовательно, в ней лежат следующие элементы:

$$e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3, \beta\alpha^4, \alpha\beta, \alpha^2\beta, \alpha^3\beta, \alpha^4\beta$$

- Обозначим $A =< \alpha >$. Нужно показать, что

$$A\beta = \beta A$$

Или, что то же самое:

$$\beta A \beta^{-1} = A$$

Это будет значить, что $G = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3, \beta\alpha^4\}$. Чтобы это показать, вычислим $\forall a \in A$ значение $\beta a \beta^{-1}$:

  – Проведём вспомогательные вычисления:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= \alpha^4 \\ (\alpha^2)^{-1} &= \alpha^3 \\ (\alpha^3)^{-1} &= \alpha^2 \end{aligned}$$

  – Непосредственно вычисление:

$$\begin{aligned} a = \alpha: &\quad (65)(24)(37)(64125)(65)(24)(37) = (65214) = \alpha^4 = \alpha^{-1} \\ a = \alpha^2: &\quad (65)(24)(37)(61542)(65)(24)(37) = (62451) = \alpha^3 = (\alpha^2)^{-1} \\ a = \alpha^3: &\quad (65)(24)(37)(62451)(65)(24)(37) = (61542) = \alpha^2 = (\alpha^3)^{-1} \\ a = \alpha^4: &\quad (65)(24)(37)(65214)(65)(24)(37) = (64125) = \alpha^1 = (\alpha^4)^{-1} \end{aligned}$$

Теперь видно, что $\forall a \in A \Rightarrow \beta a \beta^{-1} \in A$. Это доказывает, что

$$G = \{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3, \beta\alpha^4\}$$

. Следовательно, $|G| = 10 = 2 * 5$.

6) Теперь покажем, что $G \cong D_5$:
Т.к. $|G| = 5 * 2$, G имеет подгруппы $< \alpha >, < \beta >$ с порядками 5 и 2 соответственно, и т.к. для любого элемента из $< \alpha >$ выполняется определяющее соотношение диэдральной группы ($\beta a \beta = a^{-1}$ - показано выше), то

$$G \cong D_5$$

II Чтобы подгруппа $< \alpha >= A$ была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее:

$$\forall g \in G \Rightarrow gAg^{-1} = A \tag{1}$$

1) Проверим нормальность A:
   - Если $g \in < \beta > \subset G$, то 1 выполняется автоматически (т.к. $|bAb^{-1}| = 5$ и $\forall a \in A \Rightarrow bab^{-1} \in A$).
   - Если $g = ba^k : b \in < \beta >, a^k \in < \alpha >$:
   $$ba^k A(ba^k)^{-1} = b(a^k A)(ba^k)^{-1} = bA(ba^k)^{-1} = b(Aa^{-k})b^{-1} = bAb^{-1} = A$$
   - Если $g = a^k b$:
   $$a^k bA(a^k b)^{-1} = a^k(bAb^{-1})a^{-k} = a^k Aa^{-k} = A$$
   - Если $g = a^k$:
   $$a^k Aa^{-k} = A$$

   Следовательно, $\forall g \in G \Rightarrow gAg^{-1} = A$, отсюда $A \lhd G$.
2) Найдём G/A:
   - $|G : A| = 2$
   - $G/A = \{eA, \beta A\}$
   При этом $(\beta A)(\beta A) = (\beta A \beta)A = A$

   Отсюда можно заключить, что $G/A \cong (\mathbb{Z}_2, +)$.

III Чтобы показать, что подгруппа $< \beta >= B$ нормальной не является, достаточно показать, что не выполнено следующее условие (условие того, что подгруппа B является нормальной):

$$\forall g \in G \Rightarrow g^{-1}Bg \subseteq B$$

Показать это просто:
- Возьмём $g = \alpha = (64125)$, $g^{-1} = (65214)$
- Вычислим $g^{-1}Bg$:

$$(65214)\,\{e, (65)(24)(37)\}\,(64125) = \{(65214), (65214)(65)(24)(37)\}\,(64125) =$$
$$= \{e, (65214)(65)(24)(37)(64125)\} = \left| \begin{array}{l} (24)(64125) = (625)(14) \\ (65214)(65) = (6214) \end{array} \right| =$$
$$= \{e, (614)(25)(14)(37)\} = \{e, (16)(25)(37)\} \not\subseteq B$$

Следовательно, группа B нормальной не является.

Задача 7. *Пусть G - множество матриц $A \in GL(n, Zp)$, удовлетворяющих указанным условиям. Доказать, что G является группой относительно операции умножения матриц. Найти $|G|$. Коммутативна ли она? Какой из известных Вам групп она изоморфна?*

Решение:

$$G = \left\{ A \in SL(2, \mathbb{Z}_7) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ \& \ \det(A) = 1 \right\}$$

I Докажем, что $(G, *)$ - группа:

1) Присутствует бинарная ассоциативная операция, отсюда G - полугруппа.
2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - нейтральный элемент - лежит в G: $a = 1 \in \mathbb{Z}_7$, $b = 0 = -b$. Следовательно, G - моноид.
3) Т.к. $\forall A \in G \Rightarrow \det(A) = 1$, то и $\forall A \in G \exists A^{-1}$. При этом строится A^{-1} следующим образом:
$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$$

Следовательно, G - группа по определению.

II Найдём порядок группы G:

1) Чтобы найти порядок группы, достаточно найти количество таких пар (a, b), для которых матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ будет принадлежать G, т.е. нужны все такие пары (a, b), где $a, b \in \mathbb{Z}_7$, для которых $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$.

   Отыщем такие пары:

   - Для удобства выпишем таблицу квадратов для всех элементов из $\mathbb{Z}_7$:

g	1	2	3	4	5	6
g^2	1	4	2	2	4	1

   - Проведём вычисления:

$$\begin{array}{lll} b = 0: & a^2 = 1 + 0 = 1, & a = 1, 6 \\ b = 1: & a^2 = 1 - 1 = 0, & a = 0 \\ b = 2: & a^2 = 1 - 4 = -3 = 4, & a = 2, 5 \\ b = 3: & a^2 = 1 - 2 = 6, & a = \varnothing \quad \Rightarrow \exists\, 8 \text{ пар} \\ b = 4: & a^2 = 1 - 2 = 6, & a = \varnothing \\ b = 5: & a^2 = 1 - 4 = 4, & a = 2, 5 \\ b = 6: & a^2 = 0, & a = 0 \end{array}$$

$|G| = 8$, т.к. $\exists$ 8 вариатнов пар (a, b), удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 = 1$.

III Докажем коммутативность:

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

2)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & a\beta + b\alpha \\ -b\alpha - a\beta & a\alpha - b\beta \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & a\beta + b\alpha \\ -b\alpha - a\beta & a\alpha - b\beta \end{pmatrix}$$

Следовательно, $AB = BA \, \forall A, B \in G$, т.е. группа G - коммутативна.

IV Найдём группу, изоморфную данной:

1) Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \in G$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^5 = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix},$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^7 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, A^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Отсюда легко видеть, что G является циклической с образующим элементом A. А т.к. $|G| = 8$, то $G \cong (\mathbb{Z}_8, +)$.

Задача 8. *(k = 8, n = 11)*

I *Какой цикленный тип могут иметь элементы порядка k в S_n? Какие из них четные, а какие нечетные? Выпишите по одной подстановке каждого типа и найдите количество подстановок каждого типа.*

II *Для одной из выписанных подстановок α найти множество подстановок β, перестеновочных с α(т.е.$\alpha\beta = \beta\alpha$). Доказать, что это группа,найти ее порядок и определить, какой из известных групп она изоморфна.*

Решение:

I $\alpha \in S_{11}$, $ord\alpha = 8$

1) Возможные цикленные типы:

$$\alpha: \ (8, 1, 1, 1) \tag{1}$$
$$\alpha: \ (8, 2, 1) \tag{2}$$

2) Чётность:

- (1): $sgn\alpha = (-1)^{(8-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)} = -1$ - нечётная подстановка.
- (2): $sgn\alpha = (-1)^{(8-1)+(2-1)+(1-1)} = 1$ - чётная подстановка.

3) Примеры:

- Для (1): $\alpha = (12345678)(9)(10)(11)$
- Для (2): $\alpha = (12345678)(9\,10)(11)$

4) Количество подстановок каждого типа:
Чтобы сформировать первый цикл, необходимо выбрать k элементов из n, таких возможностей будет C_n^k; затем необходимо сформировать второй и последующие циклы. Чтобы последующие циклы были независимы, выбирать для них значения будем как $C_{n-k}^{l_2}$ - для второго, $C_{n-k-l_2}^{l_3}$ - для третьего и т.д., пока не перечислим все циклы. Перемножив построенные таким образом C_m^p, получим количество различных числовых наборов, которые будут формировать циклы. Теперь необходимо учесть тот факт, что перестановка внутри последовательности генерирует новый цикл. Для этого воспользуемся фактом: $(i_1 \cdots i_k) = (i_2 i_3 \cdots i_k i_1) = \cdots = (i_k i_1 i_2 \cdots)$ - отсюда видно, что для подсчёта всех уникальных циклов длины k достаточно рассмотреть все возможные перестановки элементов $\{i_2, i_3, \cdots, i_k\}$ - всего $k-1$ штука; таких перестановок будет $(k-1)!$ - для цикла длиной k. Проделав подсчёт для каждого цикла и перемножив с произведением, получившимся после перемножения всех C_m^p, получим ответ. Также отметим, что если длины каких-либо циклов совпадают, то такой подход к подсчёту может захватывать повторяющиеся варианты перестановки; чтобы этого избежать, достаточно поделить получившееся произведение на $u!$, где u - количество таких повторений.

- Для (1): $C_{11}^8 * (8-1)! = \dfrac{11!}{24}$
- Для (2): $C_{11}^8 * (8-1)! * C_3^2 * (2-1)! = \dfrac{11!}{16}$

II $\alpha = (123456748)$

1) $G = \{\beta \mid \alpha\beta = \beta\alpha\} = \{\beta \mid \alpha = \beta\alpha\beta^{-1}\}$
2) $$\beta\alpha\beta^{-1} = (\beta(1)\beta(2)\beta(3)\beta(4)\beta(5)\beta(6)\beta(7)\beta(8)) = (12345678) = (23456781) = \\ = \dots = (81234567)$$

   Т.е., чтобы подстановка $(\beta(1)\beta(2)\beta(3)\beta(4)\beta(5)\beta(6)\beta(7)\beta(8))$ совпала с α, достаточно выбрать значение для $\beta(1)$, тогда для остальных $\beta(i)$ из цикла значения установятся однозначно. При этом $\beta(1)$ пробегает значения от 1 до 8, следовательно, имеем 8 вариантов.
3) Учтём также, что остаётся ещё 3 позиции, не попавших в цикл. Их подстановка β может переводить друг в друга любыми способами: всего 3! таких способа.
4) Итого: $|G| = 8 * 3! = 48$
5) Докажем, что G - это группа:
   - Т.к. $G \subset S_{11}$, то достаточно проверить, является ли G подгруппой в S_{11}. Если это так, то G автоматически будет и группой. Чтобы G была подгруппой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:
   $$\forall g_1, g_2 \in G \Rightarrow g_1 g_2 \in G \tag{3}$$
   $$\forall g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G \tag{4}$$
   - Проверим выполнение условия (3):
   $$\beta_1, \beta_2 \in G, \Rightarrow \alpha(\beta_1\beta_2) = (\alpha\beta_1)\beta_2 = \beta_1\alpha\beta_2 = \beta_1(\alpha\beta_2) = \beta_1\beta_2\alpha \Rightarrow \beta_1\beta_2 \in G$$
   - Проверим выполнение условия (4):
   $$\alpha = \beta\alpha\beta^{-1} | * \beta^{-1} \Rightarrow \beta^{-1}\alpha = \alpha\beta^{-1} \Rightarrow \beta^{-1} \in G$$

   Т.к. условия (3), (4) выполнены, то $G < S_{11}$ и, следовательно, G - группа.
6) Теперь найдём группу, изоморфную G. Для этого заметим, что $G = H_1 \times H_2$, где $H_1 =< \alpha >$, $H_2 = \{e, (9\,10), (9\,11), (10\,11), (9\,10\,11), (9\,11\,10)\}$.
   Это действительно так, т.к.:
   $$\begin{cases} H_1, H_2 - \text{подгруппы} \\ H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ H_1 * H_2 = G \\ \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2 \Rightarrow h_1h_2 = h_2h_1 - \text{т.к. это произведение независимых циклов} \end{cases}$$
   Теперь заметим, что $H_1 \cong C_8$, а $H_2 \cong S_3$. Тогда $G = H_1 \times H_2 \cong C_8 \times S_3$, $G \cong C_8 \times S_3$