Решение задач к занятию 14

С помощью вычетов вычислить интегралы

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, $a>1$.

<u>Решение</u>: Введем комплексную переменную $z=e^{ix}$. Тогда

$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $dz = ie^{ix}dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a+\cos x} = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{z^2+1}{2z}} = \oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z^2+2az+1}{2z}} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{2\,dz}{z^2+2az+1} =$$

Найдем особые точки подынтегральной функции

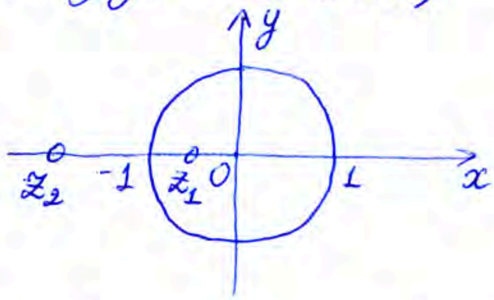
$$f(z) = \frac{2}{z^2+2az+1}:$$

$z^2+2az+1=0$

$z_{1,2} = -a\pm\sqrt{a^2-1}$ (Согласно условию задачи $a^2-1>0$)

$-1<z_1<0$, $z_2<-1$

Обе точки – полюса 1-го порядка для функции $f(z)$.



Внутрь контура интегрирования попала точка z_1.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{2}{(z^2+2az+1)'} = \lim_{z\to z_1}\frac{2}{2z+2a} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z+a} =$$

$$= \frac{1}{z_1+a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

Продолжим вычисление интеграла:

$$= \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

<u>Ответ</u>: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x}$, $a>b>0$

<u>Решение</u>: $z=e^{ix}$, $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin^2 x = 1-\cos^2 x =$

$$= 1-\frac{1}{4}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = \frac{2z^2-z^4-1}{4z^2}$$

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{a+b\cos x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2z^2-z^4-1}{4z^2}\cdot\frac{dz}{iz\left(a+\frac{b(z^2+1)}{2z}\right)} =$$

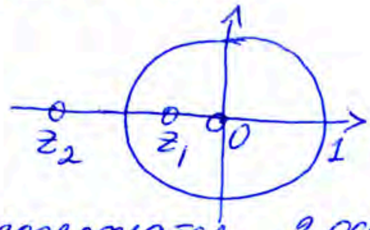
$$= -\frac{2}{4i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2\,dz}{z^2(bz^2+2az+b)} =$$

Рассмотрим подынтегральную функцию $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}$

Найдем ее особые точки:

$$z^2(bz^2+2az+b)=0 \iff \left[\begin{array}{l} z=0\\ bz^2+2az+b=0 \quad (1)\end{array}\right.$$

(1) $\quad z_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b}$



$-1<z_1<0, \quad z_2<-1$

Внутри контура интегрирования содержатся 2 особые точки:

$z=0$ — П2

$z=z_1=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ — П1

Найдем вычеты:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{(z^2-1)^2}{bz^2+2az+b}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{2(z^2-1)\cdot 2z\,(bz^2+2az+b)-(z^2-1)^2\cdot(2bz+2a)}{(bz^2+2az+b)^2} = -\frac{2a}{b^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{(z^2-1)^2/z^2}{(bz^2+2az+b)'} = \lim_{z\to z_1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2bz+2a)} = \frac{(z_1^2-1)^2}{2z_1^2(bz_1+a)}$$

$$(z_1^2-1) = \frac{a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2}{b^2}-1 = \frac{2a^2-2b^2-2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}(\sqrt{a^2-b^2}-a)}{b^2}$$

$$\frac{(z_1^2-1)^2}{2z_1^2} = \frac{4(a^2-b^2)\cancel{(\sqrt{a^2-b^2}-a)}^2}{b^{4}}\cdot\frac{\cancel{b^2}}{2\cancel{(-a+\sqrt{a^2-b^2})}^2} = \frac{2(a^2-b^2)}{b^2}$$

$$bz_1+a = -a+\sqrt{a^2-b^2}+a = \sqrt{a^2-b^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{2(a^2-b^2)}{b^2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

Продолжим вычислять интеграл, используя 1-ую теорему о вычетах:

$= -\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i \left\{ \operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) \right\} =$

$= -\pi \left\{ -\frac{2a}{b^2} + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} \right\} = \frac{2\pi\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{b^2}$

<u>Ответ</u>: $\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$

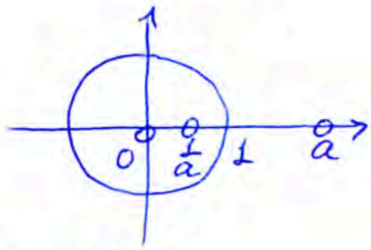
3) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}, \quad a>1$

<u>Решение:</u> $z=e^{ix}$, $\cos x = \frac12\left(z+\frac1z\right)$, $\cos 3x = \frac12\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right) =$
$= \frac12\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$, $dx = \frac{dz}{iz}$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac14\left(\frac{z^6+1}{z^3}\right)^2}{1+a^2-\cancel{2}a\cdot\frac{z^2+1}{\cancel{2}z}}\cdot\frac{dz}{iz} =$$

$$= \frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z^6+1)^2\,dz}{z^6\left[(1+a^2)z-az^2-a\right]} = -\frac{1}{4i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{(z^{12}+2z^6+1)\,dz}{z^6(z-a)(az-1)} =$$

Особые точки $f(z) = \frac{z^{12}+2z^6+1}{z^6(z-a)(az-1)}$:



$z=0$ П6, $z=a$ П1, $z=\frac1a$ П1

Внутри контура интегрирования находятся точки $z=0$ и $z=\frac1a$

Найдём вычет в точке $z=0$. Использование формулы для вычисления вычета в полюсе порядка m приводит к очень громоздким вычислениям. Согласно этой формуле

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{5!}\lim_{z\to0}\left[z^6 f(z)\right]^{(5)} = \frac{1}{5!}\lim_{z\to0}\left(\frac{z^{12}+2z^6+1}{(z-a)(az-1)}\right)^{(5)}$$

Поэтому воспользуемся определением вычета в конечной точке и найдём коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Для этого разложим $f(z)$ в кольце $0<|z|<\frac1a$:

$$\frac{1}{(z-a)(az-1)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{za-1}$$

$A(az-1)+B(z-a)=1$

$$\begin{cases} aA+B=0 \\ -A-Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{a^2-1} \\ B=-\frac{a}{a^2-1} \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{z^{12}+2z^6+1}{z^6}\cdot\frac{1}{a^2-1}\cdot\left(\frac{1}{z-a}-\frac{a}{az-1}\right) =$$

$$= \left(z^6+2+\frac{1}{z^6}\right)\cdot\frac{1}{a^2-1}\cdot\left(-\frac{1}{a(1-\frac{z}{a})}+\frac{a}{1-az}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2-1}\left(z^6+2+\frac{1}{z^6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n + a\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2-1}\left(z^6+2+\frac{1}{z^6}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{n+1}-\frac{1}{a^{n+1}}\right)z^n$$

Степень z^{-1} получается при умножении $\frac{1}{z^6}$ на z^5 $\Rightarrow$

$$c_{-1} = \frac{1}{a^2-1}\cdot\left(a^6-\frac{1}{a^6}\right) = \frac{a^{12}-1}{a^6(a^2-1)} = \operatorname*{res}_{z=0} f(z)$$

Найдем вычет $f(z)$ в точке $z=\frac{1}{a}$:

$$\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{a}} f(z) = \lim_{z\to\frac{1}{a}} \frac{z^{12}+2z^6+1}{z^6(z-a)}\cdot\frac{1}{(az-1)'} = \frac{\frac{1}{a^{12}}+\frac{2}{a^6}+1}{\frac{1}{a^6}\left(\frac{1}{a}-a\right)\cdot a} = \frac{1+2a^6+a^{12}}{a^6(1-a^2)}$$

Продолжим вычисление интеграла

$$= -\frac{1}{4i}2\pi i\left\{\operatorname*{res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\frac{1}{a}} f(z)\right\} = -\frac{\pi}{2}\left\{\frac{a^{12}-1}{a^6(a^2-1)}+\frac{1+2a^6+a^{12}}{a^6(1-a^2)}\right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cdot\left\{\frac{-2-2a^6}{a^6(1-a^2)}\right\} = \frac{\pi(1+a^6)}{a^6(a^2-1)}$$

Ответ: $\frac{\pi(1+a^6)}{a^6(a^2-1)}$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

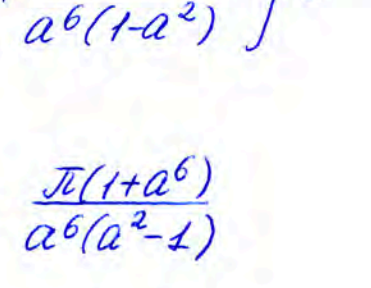
Решение: Рассмотрим подынтегральную функцию как функцию комплексной переменной z

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$$

Особые точки $f(z)$: $z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i(\pi+2\pi k)}{4}}$, $k=0,1,2,3$ — П1

В верхней полуплоскости лежат точки

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$



$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{z^2+1}{4z^3} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}+1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}+e^{-\frac{3\pi i}{4}}\right)$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{z^2+1}{4z^3} = \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}}+1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} = \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right)$$

Согласно теореме, сформулированной в теоретической части этого занятия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \left\{ \underset{z=z_0}{\text{res}}\, f(z) + \underset{z=z_1}{\text{res}}\, f(z) \right\} = \frac{2\pi i}{4}\left\{ \underline{e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \underline{\underline{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} + \right.$$

$$\left. + \underline{\underline{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}} + \underline{e^{-i\frac{9\pi}{4}}} \right\} = \frac{\pi i}{2}\left\{2e^{-i\frac{\pi}{4}} + 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right\} = \frac{\pi i}{2}\left\{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} = \frac{\pi i}{2}\left(-2i\sqrt{2}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

<u>Ответ</u>: $\pi\sqrt{2}$.

5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a>0$

<u>Решение</u>: Функция $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ удовлетворяет условиям теоремы.

Найдем особые точки $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$

$z_1 = ia$ П2

$z_2 = -ia$ П2

В верхней полуплоскости расположена только одна особая точка z_1.

$$\underset{z=ia}{\text{res}}\, f(z) = \lim_{z\to ia}\left[(z-ia)^2 f(z)\right]' = \lim_{z\to ia}\left(\frac{z^2(z-ia)^2}{[(z-ia)(z+ia)]^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to ia}\left(\frac{z^2}{(z+ia)^2}\right)' = \lim_{z\to ia} \frac{2z(z+ia)^2 - z^2\cdot 2(z+ia)}{(z+ia)^4} =$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{2z(z+ia) - 2z^2}{(z+ia)^3} = \frac{2ia\cdot 2ia - 2\cdot(-a^2)}{(2ia)^3} = \frac{1}{4ia}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \underset{z=ia}{\text{res}}\, f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4ia} = \frac{\pi}{2a}$$

<u>Ответ</u>: $\dfrac{\pi}{2a}$

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}dx$

<u>Решение</u>: Рассм. $f(z) = \dfrac{z^2}{z^4-(2iz+3)^2}$

Найдем особые точки этой функции:

$z^4 - (2iz+3)^2 = 0$

$(z^2 - 2iz - 3)(z^2 + 2iz + 3) = 0$

$z^2 - 2iz - 3 = 0$ или $z^2 + 2iz + 3 = 0$

$z = i \pm \sqrt{-1+3}$ $\qquad$ $z = -i \pm \sqrt{-1-3} = -i \pm 2i$

$z_1 = i + \sqrt{2}$ $\qquad$ $z_3 = i$

$z_2 = i - \sqrt{2}$ $\qquad$ $z_4 = -3i$

Все особые точки являются полюсами 1-го порядка функции $f(z)$. При этом точки z_1, z_2, z_3 лежат в верхней полуплоскости, а z_4 – в нижней.

Согласно замечанию к теореме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}\,dx = -2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_4} f(z) = -2\pi i \cdot \lim_{z\to -3i} \frac{z^2}{(z^4-(2iz+3)^2)'} =$$

$$= -2\pi i \cdot \lim_{z\to -3i} \frac{z^2}{4z^3-2(2iz+3)\cdot 2i} = -2\pi i \cdot \frac{-9}{4\cdot 27i-4i(6+3)} = \frac{\pi}{4}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{4}$