ТИПОВОЙ РАСЧЕТ
по курсу «Комплексный анализ»
для студентов КМБО-19 (лектор Шатина А.В.)

Задача №1. Найти все значения параметра α , при которых сходится интеграл:

1) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^\alpha} dx$	11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg^\alpha x dx}{(x^2+2)(e^x-1)^3}$
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x^\alpha} dx$	12) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)-2\ln x}{(\sqrt[4]{x+1}-1)^\alpha \cdot arctgx} dx$
3) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^\alpha x}$	13) $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln\frac{1}{x} dx$
4) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} dx}{(x-1)^\alpha \ln x}$	14) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{1-x} dx$
5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg 2x}{x^\alpha} dx$	15) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{1-x} dx$
6) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{e^{-x} - \ln x}{(1+x^\alpha)^{\alpha-2}} dx$	16) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln^\alpha (1/x)}{tgx} dx$
7) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(\exp(1/x^2)-1)^\alpha} dx$	17) $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} dx$
8) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x \cdot \sqrt[3]{arctg(1/x)}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$	18) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln^\alpha (1/x)}{\sqrt{tgx}} dx$
9) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{\ln x}}$	19) $\int\limits_0^1 (1-x)^\alpha \sin\frac{\pi}{1-x} dx$
10) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}$	20) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \cdot \sqrt[4]{\ln^3 x}}$

Задача №2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на указанном множестве:

1) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad E = [0;2]$	11) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}, \ E = [0;1]$
2) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\left((x-\alpha)^2 + 1\right)}, \ E = (2;+\infty)$	12) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{\alpha}}, \ E = [0;1)$
3) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x} dx, \ E = (-1;0)$	13) $\int_{0}^{1} \frac{arctg \alpha x}{(1-x^2)^{\alpha}} dx, \ E = [0;1)$
4) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x} dx, \ E = (-1/2;0)$	14) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \cdot arctgx}{x^2 + \alpha} dx, \ E = (0;+\infty)$
5) $\int_{0}^{1} \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad E = (0;1)$	15) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha} arctgx}{4 + x^3} dx, \ E = (0;2)$
6) $\int_{0}^{1} \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad E = (0;10)$	16) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{\alpha} arctgx}{4 + x^4} dx, \ E = (0;2)$
7) $\int_{0}^{1} \frac{x^2 \alpha - \alpha^3}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad E = (0;1)$	17) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+\alpha}}{e^x} dx, \ E = [0;+\infty)$
8) $\int_{3}^{+\infty} \frac{\alpha + x}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} dx, \quad E = (0;+\infty)$	18) $\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \ E = (0;+\infty)$
9) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha + x^2}{1 + (\alpha^2 + x^2)^2} dx, \ E = [0;+\infty)$	19) $\int_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \ E = (-1;1)$
10) $\int_{0}^{1} \frac{\alpha dx}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)}, \quad E = (0;+\infty)$	20) $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha} x dx}{1 + x^3}, \ E = (0;+\infty)$

Указание: в вариантах 1,2,8,9,16 показать, что интеграл сходится равномерно на указанном множестве. В остальных вариантах показать, что интеграл сходится неравномерно на указанном множестве.

Задача №3. Вычислить интегралы, используя метод дифференцирования по параметру, а также значения известных интегралов (интегралов Лапласа (5.11), Эйлера-Пуассона, Френеля):

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+2x+2}dx$	11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2}\operatorname{ch}6x dx$
2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{x^2+4x+5}dx$	12) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}dx$
3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}dx,\ \alpha>0$	13) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}dx,\ \lvert\alpha\rvert<1$
4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx,\ \alpha>0$	14) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \lvert\alpha\rvert<1$
5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\alpha x}{x^2-2x+5}dx,\ \alpha>0$	15) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$
6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2\alpha x}{x^2-6x+10}dx,\ \alpha>0$	16) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx,\ \lvert\alpha\rvert<1$
7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{4x^2+4x+5}dx,\ \alpha>0$	17) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\cdot\sin^3\beta x}{x^2}dx,\alpha>0,\ \beta>0$
8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2+2x)e^{-(x^2-4x)}dx$	18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2+4x+5)dx$
9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2-2x)e^{-4x^2+12x}dx$	19) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2x dx$
10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\operatorname{ch}3x dx$	20) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 4x dx$

Задача №4. Используя эйлеровы интегралы, вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x-2}\ln(x-2)}{x^2+5x+6}dx$	11) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{\sin x}}{(1+0{,}5\cos x)^{3/2}}dx$
2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}\ln(x-1)}{x^2+2x}dx$	12) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{(1+0{,}25\cos x)^4}dx$
3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}\ln(x-1)}{x^2+4x+3}dx$	13) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{(1+0{,}5\cos x)^5}dx$
4) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-2}\ln(x-2)}{x^2-1}dx$	14) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}{\left(4\sin^2 x+\cos^2 x\right)^4}dx$
5) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\ln(x-2)}{x^2+x-2}dx$	15) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)^2}}{(x+1)^3}dx$
6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^2(1-x)^6}{\left(1+x^2\right)^5}dx$	16) $\int\limits_{2}^{3} \frac{\sqrt[4]{(x-2)^3(3-x)}}{(x+1)^3}dx$
7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^4(1-x)^6}{\left(1+x^2\right)^6}dx$	17) $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(3-x)}}{(x+2)^3}dx$
8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x\cdot\cos^{5/2} x}{(\sin x+\cos x)^6}dx$	18) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)^2}\,(x+2)}$
9) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^{5/2} x\cdot\cos^{7/2} x}{(\sin x+\cos x)^8}dx$	19) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(3-x)}\,(x+1)}$
10) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x\cdot\cos^6 x}{\left(\sin^2 x+4\cos^2 x\right)^6}dx$	20) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{1+x^2}$

Задача № 5. Используя функции Бесселя первого рода, найти решение задачи Коши:

1) $x^2y'' + 8xy' + 4x^2y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
2) $x^2y'' + 8xy' + 9x^2y = 0,\ \ y(0) = 1/3,\ y'(0) = 0$.
3) $x^2y'' + 4xy' + 5x^2y = 0,\ \ y(0) = 1/2,\ y'(0) = 0$.
4) $x^2y'' + 4xy' + 6x^2y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.
5) $x^2y'' + 2xy' + 3x^2y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
6) $x^2y'' + 2xy' + 4x^2y = 0,\ \ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.
7) $x^2y'' + 10xy' + 2x^2y = 0,\ \ y(0) = 1/2,\ y'(0) = 0$.
8) $x^2y'' + 10xy' + 5x^2y = 0,\ \ y(0) = 1/3,\ y'(0) = 0$.
9) $x^2y'' + 6xy' + 2x^2y = 0,\ \ y(0) = 4,\ y'(0) = 0$.
10) $x^2y'' + 6xy' + 3x^2y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.
11) $x^2y'' + 2xy' + (3x^2 - 2)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
12) $x^2y'' + 2xy' + (9x^2 - 2)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
13) $x^2y'' + 4xy' + (5x^2 - 4)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/2$.
14) $x^2y'' + 4xy' + (5x^2 - 4)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.
15) $x^2y'' + 2xy' + (4x^2 - 2)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/3$.
16) $x^2y'' + 6xy' + (3x^2 - 6)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
17) $x^2y'' + 6xy' + (4x^2 - 6)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$.
18) $x^2y'' + 2xy' + (7x^2 - 2)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$.
19) $x^2y'' + 4xy' + (9x^2 - 4)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/2$.
20) $x^2y'' + 6xy' + (2x^2 - 6)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/5$.

Задача №6. Выразить через полные эллиптические интегралы следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}\cdot\sqrt{16-x^2}}$	11) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}\cdot\sqrt{x^2-4}}$
2) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{12-x^2}} dx$	12) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{81+x^2}\cdot\sqrt{9-x^2}}$
3) $\int\limits_6^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-36}}$	13) $\int\limits_0^6 \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}\cdot\sqrt{48-x^2}}$
4) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{49+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}$	14) $\int\limits_0^6 \frac{\sqrt{36-x^2}}{\sqrt{64-x^2}} dx$
5) $\int\limits_0^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}\cdot\sqrt{50-x^2}}$	15) $\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{144+x^2}\cdot\sqrt{x^2-25}}$
6) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{30-x^2}} dx$	16) $\int\limits_0^{11} \frac{x^2 dx}{\sqrt{169-x^2}\cdot\sqrt{121-x^2}}$
7) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}}$	17) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}\cdot\sqrt{x^2-4}}$
8) $\int\limits_7^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-49}\cdot\sqrt{x^2-1}}$	18) $\int\limits_0^5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{225-x^2}} dx$
9) $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{12-x^2}}$	19) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}\cdot\sqrt{16-x^2}}$
10) $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{8-x^2}} dx$	20) $\int\limits_0^{10} \frac{\sqrt{100-x^2}}{\sqrt{121-x^2}} dx$

Задача №7. Представить функцию интегралом Фурье (N − номер варианта):
Вар. 1,2,3,4

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{|x|}{N}, & |x|\le N, \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

Вар. 5,6,7,8

$$f(x)=\begin{cases} -x+N\operatorname{sgn}x, & |x|\le N, \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

Вар. 9,10,11,12

$$f(x)=\begin{cases} N\operatorname{sgn}x, & |x|\le N, \\ 0, & |x|>N. \end{cases}$$

Вар. 13,14,15,16

$$f(x)=\begin{cases} 2x+N, & x\in[-N/2;0], \\ N, & x\in(0;N/2], \\ 0, & |x|>N/2. \end{cases}$$

Вар. 17,18,19,20

$$f(x)=\begin{cases} \sin Nx, & |x|\le 4\pi/N, \\ 0, & |x|>4\pi/N. \end{cases}$$

Задача №8. Используя свойства ортогональных многочленов Лежандра, Эрмита, Чебышева, Лагерра, решить следующие задачи.

В задачах 1)-4), найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению, если задано значение этой функции в точке $x=1$:

1) $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-20y(x),\ y(1)=4$.

2) $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-30y(x),\ y(1)=8$.

3) $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-42\,y(x),\ y(1)=3$.

4) $\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-56\,y(x),\ y(1)=2$.

В задачах 5)-8) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Лежандра:

5) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x+1)P_7(x)\right]^2dx$.

6) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x-1)P_8(x)\right]^2dx$.

7) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x+2)P_9(x)\right]^2dx$.

8) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x-2)P_{10}(x)\right]^2dx$.

В задачах 9)-12) разложить заданные функции в ряд по многочленам Эрмита:

9) $f(x)=\cos 2x$.

10) $f(x)=\sin 2x$.

11) $f(x)=\cos 4x$.

12) $f(x)=\sin 4x$.

В задачах 13)-16) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Чебышева:

13) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xT_{13}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

14) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{\left[(2x+1)T_{14}(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

15) $\int\limits_0^1 \frac{xT_{15}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

16) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\left[(2x-1)T_{16}(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

В задачах 17)-20) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Лагерра:

17) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{5/2}\left[L_{10}^{1/2}(x)\right]^2 dx.$

18) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{3/2}\left[L_{10}^{-1/2}(x)\right]^2 dx$

19) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{3}\left[L_{10}^{1}(x)\right]^2 dx.$

20) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{3/2}\left[L_{8}^{-1/2}(x)\right]^2 dx$