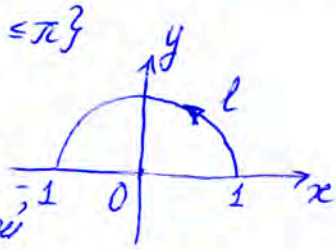
Решение задач практического занятия №9 (16.03.2020)

1) $\int\limits_l (2z+1)\bar z\,dz$, $l=\{z: |z|=1,\ 0\le \arg z\le\pi\}$



Решение:

Запишем параметрическое уравнение кривой l: $z=e^{it}$, $0\le t\le\pi$.

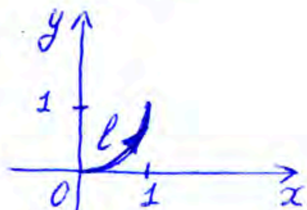
Тогда $\bar z = e^{-it}$, $dz = ie^{it}dt$,

$$\int\limits_l(2z+1)\bar z\, dz = \int\limits_0^\pi (2e^{it}+1)e^{-it}\, i e^{it}\, dt = i\int\limits_0^\pi (2e^{it}+1)\,dt =$$

$$= i\left(\frac{2}{i}e^{it} + t\Big|_0^\pi\right) = 2e^{i\pi}+i\pi-2 = -2+i\pi-2 = -4+i\pi$$

Ответ: $-4+\pi i$

2) $\int\limits_l \mathrm{Im}\, z\, dz$, $l=\{z=x+ix^2,\ 0\le x\le 1\}$



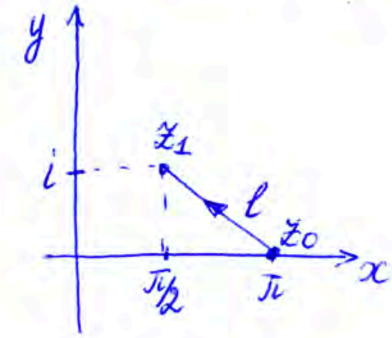
Решение: Кривая l задана параметрически, параметром является x.

Так как $\forall z\in l$ $\mathrm{Im}\, z = x^2$, $dz=(1+2ix)dx$, то

$$\int\limits_l \mathrm{Im}\, z\, dz = \int\limits_0^1 x^2(1+2ix)\,dx = \frac{x^3}{3}+2i\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac13+\frac i2$$

Ответ: $\frac13+\frac i2$

3) $\int\limits_l \cos\bar z\, dz$, l - отрезок прямой от точки $z_0=\pi$ до точки $z_1=\frac\pi2+i$



Решение: Получим уравнение кривой l в параметрическом виде. Сначала найдем уравнение прямой на плоскости Oxy, проходящей через точки $M_1(\pi;0)$ и $M_2(\frac\pi2;1)$

$$y=kx+b$$
$$\begin{cases} 0=k\pi+b \\ 1=k\cdot\frac{\pi}{2}+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-\frac{2}{\pi} \\ b=2 \end{cases}$$

Тогда параметрическое уравнение кривой l примет вид:

$$z = x+i\left(-\frac{2}{\pi}x+2\right), \quad \pi\ge x\ge\frac{\pi}{2}$$

Вычислим интеграл:

$$\bar z = x+i\left(\frac{2}{\pi}x-2\right),$$

$$\cos\bar z = \frac12\left(e^{i\bar z}+e^{-i\bar z}\right) = \frac12\left(e^{ix-\frac{2x}{\pi}+2}+e^{-ix+\frac{2x}{\pi}-2}\right),$$

$$dz=\left(1-\frac{2i}{\pi}\right)dx,$$

$$\int\limits_l \cos\bar z\,dz=\int\limits_{\pi}^{\pi/2}\frac12\left(e^{ix-\frac{2x}{\pi}+2}+e^{-ix+\frac{2x}{\pi}-2}\right)\left(1-\frac{2i}{\pi}\right)dx=$$

$$=\frac12\left(1-\frac{2i}{\pi}\right)\left(\frac{1}{i-\frac{2}{\pi}}e^{ix-\frac{2x}{\pi}+2}+\frac{1}{\frac{2}{\pi}-i}e^{-ix+\frac{2x}{\pi}-2}\Bigg|_{\pi}^{\pi/2}\right)=$$

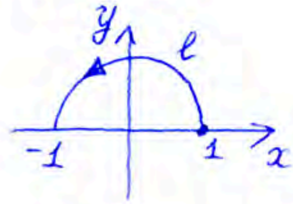
$$=\frac12\left(1-\frac{2i}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}-i}\right)\cdot\left[-e^{i\frac{\pi}{2}-1+2}+e^{-i\frac{\pi}{2}+1-2}+e^{i\pi-2+2}-e^{-i\pi+2-2}\right]=$$

$$=\frac12\,\frac{\pi-2i}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2-\pi i}\cdot\left[-ie-ie^{-1}\cancel{-1}\cancel{+1}\right]=-\frac{i}{2}\,\frac{\pi-2i}{2-\pi i}\left(e+e^{-1}\right)=$$

$$=-i\,\mathrm{ch}\,1\cdot\frac{(\pi-2i)(2+\pi i)}{4+\pi^2}=-i\,\mathrm{ch}\,1\cdot\frac{2\pi+\pi^2 i-4i+2\pi}{4+\pi^2}=\frac{\pi^2-4-4\pi i}{\pi^2+4}\cdot\mathrm{ch}\,1.$$

Ответ: $\dfrac{(\pi^2-4-4\pi i)}{\pi^2+4}\cdot\mathrm{ch}\,1$

4) $\displaystyle\int\limits_l\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}$, $l=\{z:\ |z|=1,\ 0\le\arg z\le\pi\}$, $\sqrt[3]{1}=1$



Решение: Запишем уравнение кривой l в параметрическом виде:

$l:\ z=e^{it},\ 0\le t\le\pi$

Ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в точке $z_0=1$, что соответствует $t=0$.

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{e^{it}}=e^{i\frac{t}{3}+\frac{i2\pi k}{3}}$$

$$t=0:\quad e^{\frac{i2\pi k}{3}}=1\quad\Rightarrow\quad k=0$$

Вычислим интеграл:

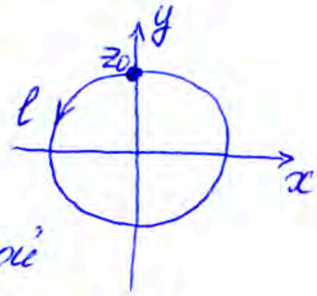
$$\int\limits_l\frac{dz}{\sqrt[3]{z}}=\int\limits_0^{\pi}\frac{ie^{it}dt}{e^{it/3}}=i\int\limits_0^{\pi}e^{\frac{2t}{3}i}dt=\cancel{i}\cdot\frac{3}{2\cancel{i}}e^{\frac{2t}{3}i}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac32\left[e^{\frac{2\pi i}{3}}-e^0\right]=\frac32\left[\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}-1\right]=\frac32\left[-\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}-1\right]=$$

$$=\frac32\left[-\frac32+i\frac{\sqrt3}{2}\right]=\frac{3\sqrt3}{4}\left(-\sqrt3+i\right)$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt3}{4}\left(-\sqrt3+i\right)$

5) $\int\limits_l \mathrm{Ln}\, z\, dz$, $\quad l = \{ z : |z| = 1 \}$, $\quad \mathrm{Ln}\, i = \frac{\pi i}{2}$



Решение: Кривая l – это окружность единичного радиуса с центром в точке $z=0$. Параметрическое уравнение этой кривой имеет вид:

$$l: \quad z = e^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{5\pi}{2}.$$

Начальное значение параметра t соответствует точке $z_0 = i$, в которой по условию задачи выделяется ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\, z$.

Согласно определению $\quad \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$

Так как $\quad \mathrm{Ln}\, z_0 = \frac{\pi i}{2}$, то

$$\ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \frac{\pi i}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

Следовательно, $\quad \forall\, z \in l$

$$\mathrm{Ln}\, z = it.$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_l \mathrm{Ln}\, z\, dz = \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} it \cdot i e^{it} dt = -\int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} t e^{it} dt = -\int\limits_{\pi/2}^{\frac{5\pi}{2}} t\, d\left(\frac{e^{it}}{i}\right) =$$

$$= -\left\{ t \cdot \frac{e^{it}}{i} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} - \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} \frac{e^{it}}{i} dt \right\} = -\left\{ \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{1}{i} e^{\frac{5\pi i}{2}} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{i} e^{i\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i^2}\left(e^{it} \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} \right) \right\} = -\left\{ \frac{5\pi}{2} \cdot \frac{i}{i} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{i}{i} + 0 \right\} = -2\pi$$

Ответ: -2π

6) $\int\limits_l e^z dz$, $\quad l = \{ z = x + iy : y = x^3, \ 1 \le x \le 2 \}$.

Решение: Функция $f(z) = e^z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Согласно следствию 2 интеграл не зависит от выбора кривой, а определяется положением начальной и конечной точки кривой. Здесь $z_0 = 1 + i$, $z_1 = 2 + 8i$.

Первообразная функции $f(z) = e^z$ является $F(z) = e^z$.

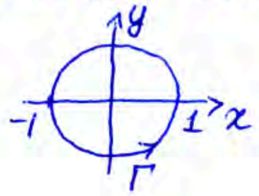
Согласно формуле Ньютона – Лейбница

$$\int\limits_l e^z dz = \int\limits_{1+i}^{2+8i} e^z dz = e^z \Big|_{1+i}^{2+8i} = e^{2+8i} - e^{1+i} =$$

$= e^2(\cos 8 + i\sin 8) - e(\cos 1 + i\sin 1) = e^2\cos 8 - e\cos 1 + i(e^2\sin 8 - e\sin 1)$

<u>Ответ:</u> $e^2\cos 8 - e\cos 1 + i(e^2\sin 8 - e\sin 1)$

7) а) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$

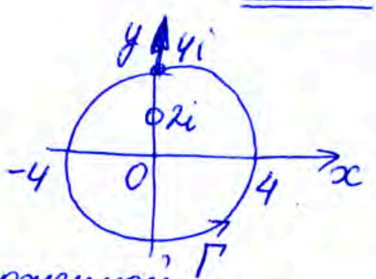


<u>Решение:</u> Функция $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$

аналитична в области D, ограниченной контуром Γ: $|z|=1$, и непрерывна в $\bar{D}$. Согласно теореме 1а (теореме Коши для односвязной области)

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$$

<u>Ответ:</u> 0



б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{z-2i}\,dz$

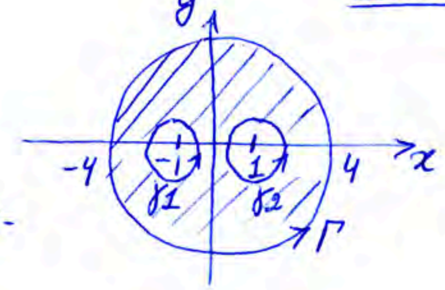
<u>Решение:</u> В точке $z = 2i$, расположенной внутри контура Γ: $|z|=4$, нарушается аналитичность функции $f(z) = \frac{z^2}{z-2i}$.

Представим $f(z)$ в виде: $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-2i}$, $f_1(z) = z^2$.

Функция $f_1(z)$ аналитична внутри Γ и на Γ. Согласно интегральной формуле Коши (5)

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma^+} \frac{f_1(z)}{z-2i}\,dz = 2\pi i \cdot f_1(2i) = 2\pi i(2i)^2 = -8\pi i$$

<u>Ответ:</u> $-8\pi i$



8) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}\,dz$

<u>Решение:</u> Аналитичность подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1}$$

нарушается в точках $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$, расположенных внутри контура Γ: $|z| = 4$.

Построим внутри Γ окружности γ_1, γ_2 с центрами в точках z_1, z_2 достаточно малого радиуса. Получим многосвязную область, в которой $f(z)$ аналитична и непрерывна вплоть до ее границы.

Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)\,dz$$

Для вычисления интеграла по контуру γ_1 функцию $f(z)$ представим в виде:

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{z+1}, \quad f_1(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z-1}.$$

А для вычисления интеграла по контуру γ_2 положим

$$f(z) = \frac{f_2(z)}{z-1}, \quad f_2(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+1}$$

Функции $f_1(z), f_2(z)$ аналитичны внутри контуров γ_1, γ_2 соответственно и на самих контурах. Согласно интегральной формуле Коши (5) получим:

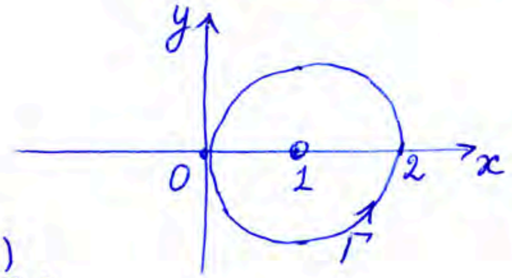
$$\oint_{\gamma_1^+} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_1^+} \frac{f_1(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\cdot f_1(-1) = 2\pi i\cdot \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-2} = \pi i$$

$$\oint_{\gamma_2^+} f(z)\,dz = \oint_{\gamma_2^+} \frac{f_2(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i\cdot f_2(1) = 2\pi i\cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{2} = \pi i$$

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

Ответ: $2\pi i$

9) $$\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$$



Решение: $$f(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{f_1(z)}{(z-1)^2},$$

$$f_1(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-3}$$

Функция $f_1(z)$ аналитична внутри Γ и на Γ, где $\Gamma: |z-1|=1$

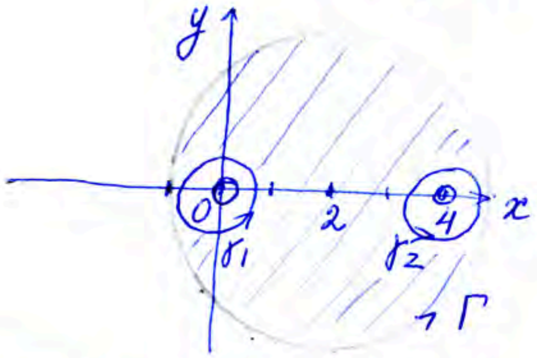
Согласно интегральной формуле Коши (6)

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma^+} \frac{f_1(z)}{(z-1)^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(1) = 2\pi i \left(\frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi z}{4}(z-3) - \sin\frac{\pi z}{4}}{(z-3)^2} \Bigg|_{z=1} \right) =$$

$$= 2\pi i\ \frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cdot(-2) - \sin\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi i}{2}\cdot \frac{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right) i$$

Ответ: $-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)i$

10) $$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}\,dz$$



Решение: $\Gamma: |z-2|=3$

$$f(z)=\frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^2(z-4)}$$

Аналитичность $f(z)$ нарушается в точках $z_1=0$ и $z_2=4$, расположенных внутри контура Γ. Построим окружности γ_1, γ_2 с центрами в точках $z_1=0$, $z_2=4$ достаточно малого радиуса. Получим многосвязную область, в которой $f(z)$ аналитична. Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz$$

Далее,

$$\oint\limits_{\gamma_1^+} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_1^+} \frac{f_1(z)}{z^2}dz \overset{(6)}{=} \frac{2\pi i}{1!} f_1'(0) = 2\pi i \cdot \left(\frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z-4}\right)'\Bigg|_{z=0} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{\operatorname{sh} e^{i\pi z}\cdot e^{i\pi z}\cdot i\pi\cdot(z-4) - \operatorname{ch} e^{i\pi z}}{(z-4)^2}\right|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{sh}1\cdot i\pi\cdot(-4)-\operatorname{ch}1}{16} =$$

$$= -\frac{\pi i}{8}\left(\operatorname{ch}1 + i4\pi \operatorname{sh}1\right),$$

$$\oint\limits_{\gamma_2^+} f(z)dz = \oint\limits_{\gamma_2^+} \frac{f_2(z)}{z-4}dz \overset{(5)}{=} 2\pi i\, f_2(4) = 2\pi i \left(\frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^2}\Bigg|_{z=4}\right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{ch} e^{4\pi i}}{16} = \frac{\pi i}{8}\operatorname{ch}1,$$

$$\oint\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = -\frac{\pi i}{8}\left(\operatorname{ch}1 + i4\pi \operatorname{sh}1\right) + \frac{\pi i}{8}\operatorname{ch}1 = \frac{\pi^2}{2}\cdot\operatorname{sh}1$$

Ответ: $\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sh}1$