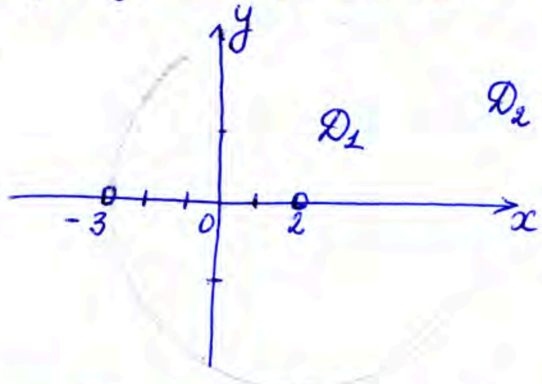
Решение задач практического занятия №10 (18.03.2020)

1) Найти все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z+3)}\,, \quad z_0=2$$

Решение: Представим функцию $f(z)$ в виде суммы простейших дробей:

$$f(z)=\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+3}$$



$$A(z+3)+B(z-2)=1$$

$$z=-3: \quad -5B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{5}$$

$$z=2: \quad 5A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$f(z)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{z+3}$$

Аналитичность функции $f(z)$ нарушается в точках $z=2$ и $z=-3$. Комплексную плоскость z можно разбить на две кольцевые области с центром в точке $z_0=2$, в которых функция $f(z)$ аналитична:

$$D_1: \ 0<|z-2|<5 \ ; \quad D_2: \ 5<|z-2|$$

В области D_1:

$$f(z)=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(z-2)+5}=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{25\left(1+\frac{z-2}{5}\right)}\ \overset{\text{см. разложение 7)}}{=\!=}$$

$$=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{25}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{5}\right)^n$$

$$f(z)=\frac{1}{5(z-2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}}(z-2)^n\ , \quad z\in D_1$$

В области D_2:

$$f(z)=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{5[(z-2)+5]}=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{5(z-2)\left[1+\frac{5}{z-2}\right]}\ \overset{7)}{=\!=}$$

$$=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{5(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5}{z-2}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{5(z-2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}=\frac{1}{5(z-2)}-\frac{1}{5(z-2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}5^{n-1}}{(z-2)^{n+1}}=$$

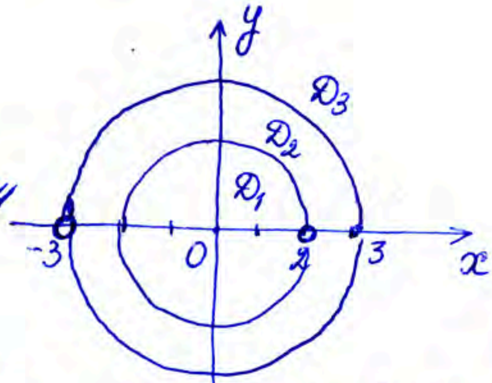
$$[k=n+1]$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5^{k-2}}{(z-2)^k}$$

Ответ: $f(z) = \dfrac{1}{5(z-2)} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}} (z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 5;$

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 5^{k-2}}{(z-2)^k}, \quad |z-2| > 5$$

2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+3)}, \quad z_0 = 0$



В этой задаче комплексную плоскость z можно разбить на 3 кольцевые области с центром в точке $z_0 = 0$, в которых функция $f(z)$ аналитична:

$D_1: |z| < 2$; $D_2: 2 < |z| < 3$; $D_3: |z| > 3$

Получим разложение $f(z)$ по степеням z в каждой из указанных областей.

В области D_1:

$$f(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z+3} = -\frac{1}{10(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{15(1+\frac{z}{3})} \overset{6),7)}{=}$$

$$= -\frac{1}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{10 \cdot 2^n} - \frac{(-1)^n}{15 \cdot 3^n}\right] \cdot z^n$$

В области D_2:

$$f(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{1}{5z(1-\frac{2}{z})} - \frac{1}{15(1+\frac{z}{3})} \overset{6),7)}{=}$$

$$= \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{15} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n = \underset{[k=n+1]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5 \cdot z^{n+1}}} + \underset{[k=n]}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{15 \cdot 3^n}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{5 \cdot z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{15 \cdot 3^k}$$

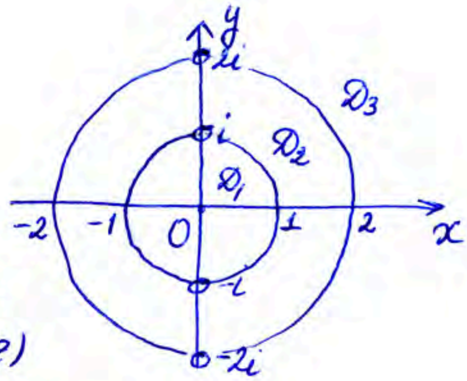
В области D_3:

$$f(z) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z+3} = \frac{1}{5z(1-\frac{2}{z})} - \frac{1}{5z(1+\frac{3}{z})} \overset{6),7)}{=}$$

$$= \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{5z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2^n}{5} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{5}\right] \cdot \frac{1}{z^{n+1}} =$$

$$= \underset{[k=n+1]}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1} \cdot 3^n}{5 z^{n+1}}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k-1} + (-1)^k \cdot 3^{k-1}}{5 z^k}$$

3) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}$, $z_0 = 0$



Аналитичность $f(z)$ нарушается в точках $\pm i$, $\pm 2i$

Комплексная плоскость z разбивается на 3 кольцевые области, в которых $f(z)$ аналитична (с центром в точке z_0):

D_1: $|z|<1$; D_2: $1<|z|<2$; D_3: $|z|>2$

В области D_1:

$$f(z) = z\left(\frac{A}{z^2+4} + \frac{B}{z^2+1}\right), \quad A(z^2+1)+B(z^2+4)=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \quad B=\frac{1}{3}, \quad A=-\frac{1}{3}$$

$$f(z) = \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{z}{3}\left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}\right) \overset{7)}{=}$$

$$= \frac{z}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{4}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right)\cdot z^{2n+1}$$

В области D_2:

$$f(z) = \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{z}{3}\cdot\left(\frac{1}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} - \frac{1}{4\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}\right) =$$

$$= \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{4}\right)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3z^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3\cdot 4^{n+1}}\cdot z^{2n+1}$$

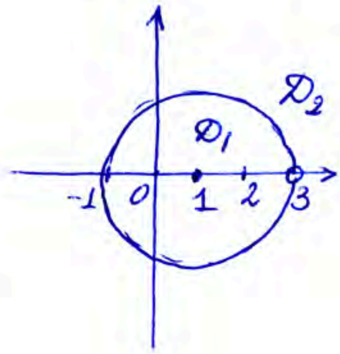
В области D_3:

$$f(z) = \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} - \frac{1}{z^2\left(1+\frac{4}{z^2}\right)}\right) \overset{7)}{=}$$

$$= \frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z^2}\right)^n - \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^2}\right)^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3}\left(1-4^n\right)\cdot\frac{1}{z^{2n+1}}$$

4) $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$, $z_0 = 1$



Аналитичность $f(z)$ нарушается в точке $z=3$. Выделяем 2 кольцевые области с центром в точке $z_0=1$, в которых $f(z)$ аналитична.

D_1: $|z-1|<2$; D_2: $|z-1|>2$

В области D_1:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = -\left(\frac{1}{(z-1)-2}\right)' = -\left(-\frac{1}{2\left(1-\frac{z-1}{2}\right)}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n\right)' = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(z-1)^k}{2^{k+2}}$$

$[k=n-1]$

В области D_2:

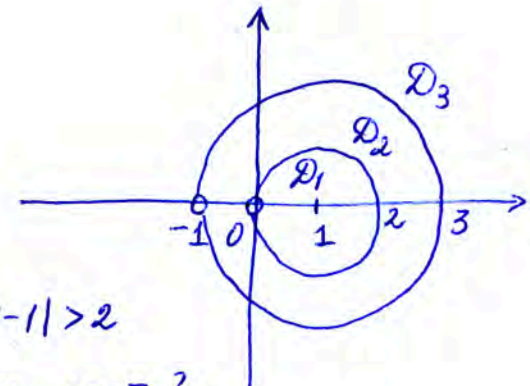
$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2} = -\left(\frac{1}{z-3}\right)' = -\left(\frac{1}{(z-1)-2}\right)' = -\left(\frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{2}{z-1}\right)}\right)' =$$

$$= -\left(\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}} =$$

$[k=n+2]$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k-2}(k-1)}{(z-1)^k}$$

5) $f(z) = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z+1)}$, $z_0 = 1$



Здесь следует получить разложение $f(z)$ в трех областях:

D_1: $|z-1|<1$; D_2: $1<|z-1|<2$; D_3: $|z-1|>2$

Разложим $f(z)$ в сумму простейших дробей:

$$f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1} ; \qquad Az(z+1) + B(z+1) + Cz^2 = z^2+z-1$$

$z=0$: $B=-1$

$z=-1$: $C=-1$

z^2: $A+C=1 \Rightarrow A=2$

$$f(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z+1}$$

В области D_1:

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)+1} + \left(\frac{1}{z}\right)' - \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{2}{(z-1)+1} + \left(\frac{1}{(z-1)+1}\right)' - \frac{1}{(z-1)+2} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\right)' - \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})} =$$

$$= 2\sum_{\substack{n=0\\ [k=n]}}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \sum_{\substack{n=1\\ [k=n-1]}}^{\infty}(-1)^n n(z-1)^{n-1} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=0\\ [k=n]}}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+1)(z-1)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(z-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[2(-1)^k + (-1)^{k+1}(k+1) + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\right]\cdot(z-1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[1-k-\frac{1}{2^{k+1}}\right]\cdot(z-1)^k$$

В области D_2:

$$f(z) = \frac{2}{(z-1)+1} + \left(\frac{1}{(z-1)+1}\right)' - \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{2}{(z-1)(1+\frac{1}{z-1})} +$$

$$+ \left(\frac{1}{(z-1)(1+\frac{1}{z-1})}\right)' - \frac{1}{2(1+\frac{z-1}{2})} = \frac{2}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} +$$

$$+ \left(\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}\right)' - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{(z-1)^{n+1}} +$$

$$+ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\right)' - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n = \sum_{\substack{n=0\\ [k=n+1]}}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{\substack{n=0\\ [k=n+2]}}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(z-1)^{n+2}} -$$

$$- \sum_{\substack{n=0\\ [k=n]}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2}{(z-1)^k} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-2}(k-1)}{(z-1)^k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(z-1)^k =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(1+k)}{(z-1)^k} + \frac{2}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(z-1)^k$$

В области D_3:

$$\frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{(z-1)(1+\frac{2}{z-1})} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{\substack{n=0\\ [k=n+1]}}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}}{(z-1)^k};$$

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(1+k)}{(z-1)^k} + \frac{2}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}}{(z-1)^k} =$$

$$= \frac{3}{z-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(1+k+2^{k-1})}{(z-1)^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(1+k+2^{k-1})}{(z-1)^k}$$

6) $f(z) = z\,e^{\frac{1}{z-2}}$, $z_0 = 2$

Функция $f(z)$ аналитична в кольце $D: 0<|z-2|<\infty$

В области D:

$$f(z) = [(z-2)+2]\,e^{\frac{1}{z-2}} \overset{1)}{=} [(z-2)+2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n-1}n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z-2)^n n!} = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^k(k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(z-2)^k k!} =$$

$[k=n-1]$ $\quad$ $[k=n]$

$$= (z-2) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(k+1)!}+\frac{2}{k!}\right]\cdot\frac{1}{(z-2)^k} = (z-2) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+3}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{(z-2)^k}$$

7) $f(z) = z^3\cos\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$

В области $D: 0<|z|<\infty$

$$f(z) = z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,z^{2n-3}} = z^3 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\,z^{2n-3}}$$

8) $f(z) = z\cdot\sin\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}$, $z_0 = -1$

В области $D: 0<|z+1|<\infty$

$$f(z) = [(z+1)-1]\cdot\sin\left(\frac{z^2+2z+1-1}{(z+1)^2}\right) = [(z+1)-1]\cdot\sin\left(1-\frac{1}{(z+1)^2}\right) =$$

$$= [(z+1)-1]\cdot\left(\sin 1\cos\frac{1}{(z+1)^2} - \cos 1\sin\frac{1}{(z+1)^2}\right) \overset{2),3)}{=}$$

$$= [(z+1)-1]\cdot\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!((z+1)^2)^{2n}} - \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!((z+1)^2)^{2n+1}}\right) =$$

$$= [(z+1)-1]\cdot\left(\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{4n}} - \cos 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z+1)^{4n+2}}\right) =$$

$$\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!(z+1)^{4n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos 1}{(2n+1)!(z+1)^{4n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin 1}{(2n)!(z+1)^{4n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!(z+1)^{4n+2}}}$$

Подобные члены здесь не приводятся.

9) $f(z) = z\cos\dfrac{\pi(z+3)}{z+1}$, $z_0 = -1$

Функция $f(z)$ аналитична в кольце D : $0 < |z+1| < \infty$.

В области D:

$$f(z) = z\cos\left[\pi\left(1+\frac{2}{z+1}\right)\right] = -z\cos\frac{2\pi}{z+1} = -((z+1)-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{2\pi}{z+1}\right)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$=[1-(z+1)]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!\,(z+1)^{2n}} = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z+1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2\pi)^{2n}}{(2n)!(z+1)^{2n-1}}}}$$

10) $f(z) = e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}$, $z_0 = 1$

В области D : $0 < |z-1| < \infty$

$$f(z) = e^{-\frac{2(z-1)^2+2}{(z-1)^2}} = e^{-2+\frac{2}{(z-1)^2}} = e^{-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(z-1)^2}\right)^n\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{e^2 n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{2n}}}}$$