Раздел 4. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве

Лекция 9 Полярное разложение для произвольного компактного оператора в гильбертовом пространстве.

Квадратичная форма самосопряжённого оператора

Приведём несколько определений и фактов, относящихся к симметричным (самосопряжённым) операторам (не обязательно компактным). Некоторые из них будут использованы в дальнейшем, некоторые просто полезно знать.

Квадратичной формой симметричного (самосопряжённого) оператора $A = A^*$ называется выражение (Ax, x).

Квадратичная форма оператора – это его билинейная форма (Ax, y) при совпадающих значениях аргументов, т.е. при $y = x$.

Замечание. Мы сейчас говорим об ограниченных самосопряжённых операторах, но понятие квадратичной формы обобщается и на операторы неограниченные.

Билинейная форма симметричного оператора выражается через квадратичную. Действительно,

$$\begin{aligned}(A(x+y),(x+y)) &= (Ax,x)+(Ax,y)+(Ay,x)+(Ay,y) = \\ &= (Ax,x)+2(Ax,y)+(Ay,y)\,,\end{aligned}$$

поскольку $(Ay, x) = (y, Ax) = (Ax, y)$.
Аналогично

$$(A(x-y),(x-y)) = (Ax,x)-2(Ax,y)+(Ay,y)\,,$$

откуда

$$(Ax,y) = \frac{(A(x+y),(x+y))-(A(x-y),(x-y))}{4}\,.$$

Замечание. Эта формула напоминает формулу, позволяющую выразить скалярное произведение через квадрат нормы. Это не удивительно, поскольку скалярное произведение и скалярный квадрат элемента – это билинейная и квадратичная формы единичного оператора E соответственно:
$(x, y) = (Ex, y)$, $\|x\|^2 = (Ex, x)$.
Замечание. Для квадратичных форм справедлив также аналог тождества параллелограмма:

$$(A(x+y),(x+y))+(A(x-y),(x-y)) = 2((Ax,x)+(Ay,y))\,.$$

Утверждение: если квадратичная форма симметричного оператора тождественно равна нулю, то этот оператор нулевой.
Это следует из того, что в этом случае его билинейная форма также тождественно равна нулю.

Замечание. Если оператор не является симметричным, то равенство
$\forall x:\ (Ax,x)=0$ может выполняться и для отличных от нуля операторов – например, для оператора поворота на прямой угол в пространстве E^2.

Утверждение. Билинейная (квадратичная) форма линейной комбинации операторов равна линейной комбинации билинейных (соответственно, квадратичных) форм операторов:

$$((\alpha A+\beta B)x,y)=\alpha(Ax,y)+\beta(Bx,y)\,,$$
$$((\alpha A+\beta B)x,x)=\alpha(Ax,x)+\beta(Bx,x)\,.$$

Утверждение. Если квадратичные формы двух симметричных операторов совпадают, то совпадают и сами операторы.
(Квадратичная форма их разности тождественно равна нулю.)

Справедлива очевидная оценка:

$$|(Ax,x)|\le\|Ax\|\cdot\|x\|\le\|A\|\cdot\|x\|\cdot\|x\|=\|A\|\cdot\|x\|^2\,.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|\le\|A\|\,.$$

Замечание: это неравенство можно получить и так:

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|\le\sup_{\|x\|=\|y\|=1}|(Ax,y)|=\|A\|\,.$$

Утверждение: на самом деле справедливо равенство:

$$\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|=\|A\|\,.$$

Для доказательства временно обозначим левую часть буквой M:

$$M:=\sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|\,.$$

Мы знаем, что $M\le\|A\|$, нам нужно получить оценку в другую сторону.

Прежде всего, заметим, что для произвольного элемента $x\ne o$ (не обязательно нормированного)

$$|(Ax,x)|=|(Ax^0,x^0)|\cdot\|x\|^2\le M\|x\|^2\,,$$

где $x^0=x/\|x\|$ – нормированный элемент. При $x=o$ неравенство также выполнено, поскольку обе его части равны нулю.

Оценим теперь по модулю значение билинейной формы оператора, воспользововшись её представлением через квадратичную, полученной только что оценкой и тождеством параллелограмма:

$$|(Ax,y)|=\frac{|(A(x+y),(x+y))-(A(x-y),(x-y))|}{4}\le$$
$$\le\frac{|(A(x+y),(x+y))|+|(A(x-y),(x-y))|}{4}\le$$
$$\le\frac{M\|x+y\|^2+M|x-y\|^2}{4}=\frac{M(\|x+y\|^2+|x-y\|^2)}{4}=\frac{M(\|x\|^2+|y\|^2)}{2}\,.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax, y)| \le \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \frac{M(\|x\|^2 + |y\|^2)}{2} = M\,.$$

Утверждение доказано.

Замечание. Отсюда немедленно следует серия равенств для нормы симметричного оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|<1} |(Ax, x)| = \sup_{\|x\|\ne 0} \frac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}\,.$$

Кроме того, норма симметричного оператора – это наименьшая константа M в оценке

$$|(Ax, x)| \le M\|x\|^2$$

(докажите).

Введём теперь обозначения:

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)\,, \qquad M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)\,.$$

Утверждение:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \max\{|m_A|, |M_A|\}\,.$$

Утверждение. Все собственные числа симметричного оператора лежат на отрезке $[m_A, M_A]$.
Действительно, если $Ae = \lambda e$, $\|e\| = 1$, то
$(Ae, e) = (\lambda e, e) = \lambda(e, e) = \lambda \in [m_A, M_A]$.

В конечномерных пространствах m_A и M_A – наименьшее и наибольшее собственные числа симметричного оператора.

Утверждение (без доказательства): значения m_A и M_A – нижняя и верхняя точные границы спектра оператора A:

$$m_A = \inf \sigma(A)\,, \qquad M_A = \sup \sigma(A)\,.$$

Тогда, очевидно, $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.
Поскольку спектр – замкнутое множество, справедливо включение
$m_A, M_A \in \sigma(A)$, а инфинум и супремум можно заменить минимумом и максимумом.

Симметричный оператор называется неотрицательным (неположительным), если его квадратичная форма неотрицательна (неположительна) для любых x:

$$A \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in X : (Ax, x) \ge 0$$

(для $A \le 0$ аналогично).
Утверждение: $A \ge 0 \Leftrightarrow m_A \ge 0$, и аналогично $A \le 0 \Leftrightarrow M_A \le 0$.

Симметричный оператор называется положительным (отрицательным), если его квадратичная форма положительна (отрицательна) для любых $x \neq 0$:

$$A > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq 0 : (Ax, x) > 0$$

(для $A < 0$ аналогично).
Утверждение: $A > 0 \Leftrightarrow A \geq 0 \wedge KerA = \{o\}$, и аналогично $A < 0 \Leftrightarrow A \leq 0 \wedge KerA = \{o\}$.

Симметричный оператор называется положительно (отрицательно) определённым, если $\exists \delta > 0 \forall x \in X : (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$ (или, соответственно, $(Ax, x) \leq -\delta \|x\|^2$).
Утверждение. Оператор A положительно определён $\Leftrightarrow m_A > 0$, при этом в качестве δ можно взять m_A. Соответственно, оператор A отрицательно определён $\Leftrightarrow M_A < 0$, при этом в качестве δ можно взять $|M_A|$.
Утверждение. Положительно (трицательно) определённый оператор непрерывно обратим (поскольку $0 \notin \sigma(A)$).

В конечномерных пространствах неотрицательные (неположительные, положительные, отрицательные) симметричные операторы – это те, все собственные числа которых неотрицательны (соответственно, неположительны, положительны, отрицательны). Поэтому в таких пространствах любой положительный (отрицательный) оператор является положительно (отрицательно) определённым, при этом в роли δ можно взять наименьшее значение среди модулей собственных чисел оператора. В бесконечномерном случае это уже не так.
Утверждение. В бесконечномерном пространстве компактный симметричный оператор не может быть положительно (отрицательно) определённым, поскольку для таких операторов $0 \in \sigma(A)$. Поэтому для неотрицательного (в частности, положительного) компактного оператора $m_A = 0$, а для неположительного (в частности, отрицательного) $M_A = 0$.

Замечание. Если $A > 0$, то его билинейная форма (Ax, y) обладает всеми свойствами скалярного произведения, а величина $\sqrt{(Ax, x)}$ – соответственно, свойствами нормы.

Замечание. У разных авторов терминология может различаться, и под положительными операторами могут пониматься неотрицательные или наоборот. В то же время под положительной (отрицательной) определённостью все авторы понимают одно и то же.

Замечание. Если $A - B \leq 0$, то пишут $A \leq B$ (аналогично со всеми остальными знаками неравенства). Таким образом, на множестве ограниченных симметричных операторов можно ввести отношение частичного порядка.

Полярное разложение компактного оператора

Перейдём теперь к рассмотрению компактных, но не обязательно симметричных операторов. Наша задача – на основе спектрального разложения для компактного симметричного оператора получить некоторый его аналог для произвольного компактного оператора, действующего из H в H.

Пусть сначала A – ограниченный (не обязательно компактный) оператор в гильбертовом пространстве (вообще говоря, несимметричный). Рассмотрим родственный ему оператор A^*A.

Утверждение: $Ker A^*A = Ker A$.

То, что $Ker A^*A \supset Ker A$, очевидно: $Ax = o \Rightarrow A^*Ax = o$.

В обратную сторону:

$$A^*Ax = o \Rightarrow (A^*Ax, x) = 0 \Rightarrow (Ax, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = o\,.$$

То есть образ оператора A не содержит ненулевых элементов, принадлежащих ядру сопряжённого оператора A^*.

Замечание. Далее будет установлено, что образ A и ядро A^* взаимно ортогональны.

Утверждение: оператор A^*A симметричен (было доказано).

Утверждение: оператор A^*A неотрицателен.

Действительно, $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$.

Утверждение: все собственные числа оператора A^*A неотрицательны.

Действительно, если $A^*Ax = \lambda x$, то

$(A^*Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|^2 \geq 0$, откуда $\lambda \geq 0$.

Альтернативное доказательство: $\lambda \geq m_{A^*A} \geq 0$.

Теперь переходим к рассмотрению случая, когда оператор A компактен.

Утверждение: если A компактен, то A^*A компактен (как произведение ограниченного и компактного).

Тогда для A^*A справедлива теорема Гильберта-Шмидта. Следовательно, существует конечный или счётный набор ортонормированных собственных элементов e_i, отвечающих ненулевым неотрицательным (по доказанному выше) собственным числам $\lambda_i = s_i^2$, и произвольный элемент $x \in H$ представляется в виде

$$x = \sum_i (x, e_i)e_i + h\,,$$

где $h \in Ker A^*A = Ker A$. Числа $s_i = \sqrt{\lambda_i}$ называются сингулярными числами оператора A.

Вычислим значение Ax с учётом его линейности, непрерывности и равенства $Ah = o$:

$$Ax = \sum_i (x, e_i)Ae_i\,.$$

Утверждение: $\|Ae_i\| = s_i$. Действительно,

$$\|Ae_i\|^2 = (Ae_i, Ae_i) = (A^*Ae_i, e_i) = (s_i^2 e_i, e_i) = s_i^2\,.$$

Обозначим $f_i = (Ae_i)^0 = Ae_i/s_i$, тогда $Ae_i = s_i f_i$, и

$$Ax = \sum_i s_i(x, e_i)f_i\,.$$

Полученная формула даёт так называемое полярное разложение для компактного оператора A.

Утверждение: $A^* f_i = s_i e_i$.
Действительно, $A^*(Ae_i/s_i) = A^*Ae_i/s_i = (s_i^2 e_i)/s_i = s_i e_i$.

Очевидно, система векторов $\{f_i\}$ нормирована. Покажем, что она ортогональна.
С одной стороны,

$$(A^*Ae_i, e_j) = (s_i^2 e_i, e_j) = s_i^2 \delta_{ij} = s_i s_j \delta_{ij}\,.$$

С другой стороны,

$$(A^*Ae_i, e_j) = (Ae_i, Ae_j) = (s_i f_i, s_j f_j) = s_i s_j (f_i, f_j)\,.$$

Отсюда вытекает, что $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$. Таким образом, мы получили вторую ортонормированную систему в пространстве H.

Замечание. Фигурирующая в полярном разложении сумма может быть как конечной,так и бесконечной. При этом последовательность s_i монотонно невозрастающая. Если число слагаемых в сумме бесконечно, то $s_i \to 0$.

Замечание. Из полученного представления вытекает, что произвольный компактный оператор в гильбертовом пространстве вполне непрерывен. Если число слагаемых конечно, то он является оператором конечного ранга, а если бесконечно, то

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(x, e_i) f_i = \sum_{i=1}^{N} s_i(x, e_i) f_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} s_i(x, e_i) f_i = A_N x + C_N x\,.$$

Утверждение: $\|C_N\| = |s_{N+1}\|$.
Действительно,

$$\|C_N x\|^2 = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} s_i(x, e_i) f_i \right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} s_i^2 |(x, e_i)|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=N+1}^{\infty} s_{N+1}^2 |(x, e_i)|^2 = s_{N+1}^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \leq s_{N+1}^2 \|x\|^2\,.$$

С другой стороны, для $x = e_{N+1}$ неравенство превращается в равенство.

Таким образом, $A = A_N + C_N$, оператор A_N имеет конечный ранг N, а норма оператора C_N выбором N может быть сделана меньше любого наперёд заданного положительного числа. Эти построения абсолютно аналогичны тем, которые ранее были проделаны для симметричного компактного оператора.

Мы установили, что в гильбертовых пространствах компактность и полная непрерывнось равносильны.
Замечание. Мы знали, что оператор, сопряжённый к вполне непрерывному, вполне непрерывен. Теперь мы знаем, что оператор, сопряжённый к компактному, компактен (поскольку, как выяснилось, это одно и то же).

Замечание. Полярное разложение можно, разумеется, применить и в том случае, если сам компактный оператор A является самосопряжённым, $A^* = A$, и тогда $A^*A = A^2$. Собственные элементы e_i такого оператора те же, что и у A, а собственные числа суть квадраты собственных чисел оператора A. Тогда сингулярные числа s_i – это модули собственных чисел оператора A, а элементы f_i совпадают либо с e_i, если i-е собственное число оператора A положительно, либо с $-e_i$, если это число отрицательно.

Замечание о смысле термина "полярное разложение". Согласно теореме о спектральном разложении компактного симметричного оператора,

$$A^*Ax = \sum_i s_i^2(x, e_i)e_i \, .$$

Оператор $|A|$, действующий по правилу

$$|A|x = \sum_i s_i(x, e_i)e_i \, ,$$

называется модулем оператора A.

Пусть теперь оператор U действует по правилу $Ue_i = f_i$. Оператор U изометрически переводит $[L\{e\}]$ в $[L\{f\}]$, его действие на $L^{\perp}\{e\} = KerA$ для нас несущественно (можем продолжить нулевым или единичным оператором). Тогда справедливо равенство

$$A = U|A| \, ,$$

согласно которому оператор A представляется в виде произведения компактного симметричного оператора $|A|$ (модуля) и изометрического на $[L\{e\}]$ оператора U.

Замечание. Оператор $|A|$ является квадратным корнем из оператора A^*A в том смысле, что $|A|$ – симметричный неотрицательный оператор (поскольку $(|A|x, x) = \sum_i s_i(x, e_i)^2 \geq 0$), и $|A|^2 = A^*A$.

Замечание. Полярное разложение, понимаемое как представление оператора в виде произведения неотрицательного самосопряжённого и изометрического, может быть рассмотрено и для операторов, не являющихся компактными. Такое разложение основано на том обстоятельстве, что у симметричного неотрицательного оператора A^*A всегда существует (и притом единственный) неотрицательный квадратный корень $|A|$.

Утверждение. Полярное разложение для оператора A^* имеет вид

$$A^*y = \sum_i s_i(y, f_i)e_i \, .$$

Действительно,

$$(Ax, y) = \left(\sum_i s_i (x, e_i) f_i, y \right) = \sum_i (x, s_i e_i)(f_i, y) =$$

$$= \left(x, \sum_i s_i e_i (f_i, y) \right) = \left(x, \sum_i s_i (y, f_i) e_i \right) = (x, A^* y) \, .$$

Утверждение. Элементы $\{f_i\}$ – собственные элементы компактного симметричного оператора AA^*, полярное разложение для которого имеет вид

$$AA^* y = \sum_i s_i^2 (y, f_i) f_i \, .$$

Действительно, из полученного представления для оператора A^* вытекает, что

$$(A^* y, e_i) = s_i (y, f_i) \, ,$$

и поэтому

$$AA^* y = \sum_i s_i (A^* y, e_i) f_i = \sum_i s_i (s_i (y, f_i)) f_i = \sum_i s_i^2 (y, f_i) f_i \, .$$

Пример. Мы знаем, что интегральный оператор Фредгольма

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, \tau) x(\tau) \, d\tau$$

с непрерывным ядром $K(t, \tau)$ компактен в $L_2[a, b]$. Отсюда вытекает, что существуют две ортонормированные системы функций $\{e_i(t)\}$ и $\{f_i(t)\}$ и положительные числа $\{s_i\}$ такие, что

$$(Ae_i)(t) = \int_a^b K(t, \tau) e_i(\tau) \, d\tau \, = s_i f_i(t) \, ,$$

$$(A^* f_i)(t) = \int_a^b K(\tau, t) f_i(\tau) \, d\tau \, = s_i e_i(t) \, ,$$

и действие оператора A на произвольную функцию $x(t) \in L_2[a, b]$ может быть представлено в виде

$$(Ax)(t) = \sum_i s_i f_i(t) \int_a^b e_i(\tau) x(\tau) \, d\tau \, ,$$

причём если сумма бесконечная, то $s_i \to 0$. Аналогично

$$(A^* y)(t) = \sum_i s_i e_i(t) \int_a^b f_i(\tau) y(\tau) \, d\tau \, .$$

При этом
$$K(t,\tau)=\sum_i s_i f_i(t)e_i(\tau)\,,$$
где сходимость, вообще говоря, в $L_2([a,b]\times[a,b])$.
Функции $\{e_i(t)\}$ и $\{f_i(t)\}$ непрерывны и являются собственными функциями интегральных операторов A^*A и AA^* с симметричными ядрами
$$\hat{K}(t,\tau)=\int_a^b K(s,t)K(s,\tau)\,ds$$
и
$$\tilde{K}(t,\tau)=\int_a^b K(t,s)K(\tau,s)\,ds$$
соответственно, а соответствующие собственные числа этих операторов равны s_i^2.
Пояснение:
$$(A^*Ax)(t)=\int_a^b K(s,t)(Ax)(s)\,ds\,=\int_a^b K(s,t)\left(\int_a^b K(s,\tau)x(\tau)\,d\tau\right)\,ds\,=$$
$$=\int_a^b\left(\int_a^b K(s,t)K(s,\tau)\,ds\right)x(\tau)\,d\tau\,=\int_a^b \hat{K}(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\,,$$
$$(AA^*x)(t)=\int_a^b K(t,s)(A^*x)(s)\,ds\,=\int_a^b K(t,s)\left(\int_a^b K(\tau,s)x(\tau)\,d\tau\right)\,ds\,=$$
$$=\int_a^b\left(\int_a^b K(t,s)K(\tau,s)\,ds\right)x(\tau)\,d\tau\,=\int_a^b \tilde{K}(t,\tau)x(\tau)\,d\tau\,.$$

Замечание. Если $\{e\}$ и $\{f\}$ – две произвольные равномощные ортонормированные системы в H, а $\{s\}$ – последовательность положительных чисел, количественно согласованная с $\{e\}$ и $\{f\}$ и стремящаяся к нулю в случае, если эта последовательность бесконечна, то формула $Ax=\sum_i s_i(x,e_i)f_i$ определяет некоторый вполне непрерывный и, следовательно, компактный оператор в H. В зависимости от характера стремления s_i к нулю различают специальные классы в пространстве компактных операторов, обладающие некоторыми дополнительными свойствами. Так, если $s\in l_2$, то соответствующие операторы называют операторами Гильберта-Шмидта, а в случае $s\in l_1$ – ядерными операторами. Можно показать, что эти классы являются подпространствами (замкнутыми линеалами) в пространстве компактных операторов, которое, в свою очередь, является подпространством в $L_O(H)$.

Замечание. Мы предполагали, что A действует из H в H. Ничего (или почти ничего), однако, не изменится, если считать, что A действует из пространства H_1 в H_2. В этом случае A^* действует из H_2 в H_1, A^*A – компактный симметричный оператор в H_1, $\{e\}$ – ортонормированная система в H_1, а $\{f\}$ – в H_2.