Раздел 4. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве

Лекция 10 Нормальная разрешимость операторов и линейные уравнения с компактным симметричным оператором.

Необходимое условие разрешимости операторного уравнения и нормальная разрешимость оператора.

Рассмотрим операторное уравнение

$$Bx = y\,,$$

где $B : H_1 \to H_2$ – линейный ограниченный оператор. Нас интересует вопрос о существовании решения этого уравнения (единственность сейчас не затрагиваем, но ответ мы знаем: решение единственно, если ядро оператора тривиально). Очевидный (и тавтологический) ответ такой: решение существует, если y принадлежит образу оператора. Однако как определить, принадлежит ли элемент y этому образу? В конечномерном случае (для $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{K}^n$, где $\mathbb{K}$ – произвольное поле) у нас есть теорема Кронекера-Капелли: образ оператора – линейная оболочка столбцов его матрицы. В бесконечномерном случае хотелось бы иметь описание образа оператора в каких-то других терминах. К сожалению, в общем случае критерий (необходимое и достаточное условие) принадлежности элемента образу оператора сформулировать затруднительно, но можно получить необходимый признак такой принадлежности, который в ряде случаев оказывается и достаточным.

Итак, получим необходимое условие разрешимости операторного уравнения $Bx = y$. Пусть $z \in H_2$ ортогонален образу оператора B: $z \in Im^{\perp} B$. Это значит, что $\forall y \in Im\, B : y \perp z$, т.е. $(y, z)_2 = 0$. Поэтому необходимым условием принадлежности элемента y образу оператора B является следующее: $\forall z \in Im^{\perp} B : (y, z)_2 = 0$.

Что означает последнее соотношение? Оно означает, что $y \in (Im^{\perp} B)^{\perp} = [Im\, B]$. А это, вообще говоря, не совсем то же самое, что $y \in Im\, B$, поскольку $Im\, B$ может быть незамкнутым линеалом. В этом случае может оказаться, что элемент y, удовлетворяющий необходимому условию, принадлежит $[Im\, B] \setminus Im\, B$, и в этом случае уравнение $Bx = y$ не будет иметь решений. Однако если $Im\, B$ замкнут, то в этом случае $(Im^{\perp} B)^{\perp} = Im\, B$, и тогда необходимое условие разрешимости становится также и достаточным.

Теперь разберёмся, что из себя представляет ортогональное дополнение к образу оператора. Если $z \perp Im\, B$, то $\forall x \in H_1 : (Bx, z)_2 = 0$. Но это значит, что $\forall x \in H_1 : (x, B^* z)_1 = 0$, откуда, в свою очередь, следует, что $B^* z = o$, т.е. $z \in Ker\, B^*$. Обратно, пусть $z \in Ker\, B^*$, тогда $B^* z = o$, откуда $\forall x \in H_1 : (x, B^* z)_1 = 0$, или $\forall x \in H_1 : (Bx, z)_2 = 0$, что означает, что $z \perp Im\, B$.

Таким образом, мы установили, что $Im^{\perp} B = Ker\, B^*$, и, в свою очередь,

$Ker^{\perp} B^* = [Im\, B]$. Тогда, в силу теоремы Беппо Леви,

$$H_2 = [Im\, B] \oplus Ker\, B^*$$

(напомню, что ядро ограниченного оператора B^* – замкнутое подпространство).

Отсюда следует, что необходимое условие разрешимости уравнения $Bx = y$ – ортогональность элемента y ядру сопряжённого оператора B^* (что означает, что $y \in [Im\, B]$). Если при этом образ оператора B замкнут (т.е. $Im\, B = [Im\, B]$), то условие $y \perp Ker\, B^*$ является и достаточным условием разрешимости уравнения.

Замечание. Если уравнение $Bx = y$ разрешимо для $\forall y \in Ker^{\perp} B^*$, то оператор B называется нормально разрешимым. Здесь "нормально" – от слова "нормаль", т.е. перпендикуляр: для любого элемента y, перпендикулярного (ортогонального) ядру сопряжённого оператора, уравнение $Bx = y$ имеет решение.

Теорема (Хаусдорф). Оператор B нормально разрешим тогда и только тогда, когда область его значений замкнута.

Мы эту теорему только что доказали (для гильбертовых пространств).

Замечание. Ещё раз напоминаю: образ оператора – линеал. Если он замкнут, то это подпространство (а в частном случае – всё пространство).

Давайте повторим всё доказательство ещё раз – кратко и более формально. Итак, для выполнения условия $y \in Im\, B$ необходимо $y \in [Im\, B]$, а если $Im\, B$ замкнуто, но эти условия эквивалентны.

В свою очередь, $[Im\, B] = (Im^{\perp} B)^{\perp}$. Таким образом, $y \in Im\, B \Rightarrow y \perp Im^{\perp} B$.

Докажем, что $Im^{\perp} B = Ker\, B^*$. Действительно,

$$z \perp Im\, B \Leftrightarrow \forall x \in H_1 : (Bx, z)_2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in H_1 : (x, B^* z)_1 = 0 \Leftrightarrow B^* z = o \Leftrightarrow z \in Ker\, B^*$$

Таким образом, $Im\, B \subset [Im\, B] = Ker^{\perp} B^*$ (т.е. $y \in Im\, B \Rightarrow y \perp Ker\, B^*$), а для операторов с замкнутой областью значений $Im\, B = Ker^{\perp} B^*$ (т.е. $y \in Im\, B \Leftrightarrow y \perp Ker\, B^*$).

Замечание. Если B – плотноопределённый оператор (возможно, неограниченный), то результат останется тем же: если равенство $(x, B^* z) = 0$ выполняется для любого x из всюду плотного множества, то $B^* z = o$.

Замечание. Если $B = B^*$, то необходимое условие разрешимости уравнения $Bx = y$ – ортогональность y ядру самого оператора B.

Замечание. В конечномерном случае все линеалы замкнуты. все операторы нормально разрешимы. Необходимое и достаточное условие существования решения системы линейных алгебраических уравнений: вектор правых частей системы должен быть ортогонален всем решениям сопряжённой однородной системы. (Матрица системы, вообще говоря, прямоугольная, не обязательно квадратная. При стандартном скалярном произведении в E^n

сопряжённая однородная система – система с транспонированной матрицей и нулями в правой части.)

Замечание. Операторы конечного ранга в бесконечномерных пространствах также нормально разрешимы, поскольку их область значений – конечномерное подпространство.

Замечание. Ранее мы уже рассматривали вопрос о разрешимости операторых уравнений в банаховых пространствах, и мы могли бы просто воспользоваться полученными тогда результатами, поскольку гильбертовы пространства – частный случай банаховых. Тем не менее, специфика гильбертовых пространств позволяет провести доказательства быстрее и проще. Напомню, что роль элементов $z \in H_2$, ортогональных образу оператора, в банаховом пространстве играют элементы сопряжённого пространства – линейные ограниченные функционалы f, обращающиеся в нуль на этом образе. Соответственно, под ортогональным дополнением к образу оператора понималось подпространство в сопряжённом пространстве. В гильбертовом пространстве теорема Рисса-Фреше позволяет нам отождествить исходное пространство и сопряжённое. Соответственно, и сопрояжённый оператор теперь действует не из сопряжённого пространства в сопряжённое, а из H_2 в H_1.
Наибольшие упрощения в случае гильбертовых пространств в сравнении с банаховыми происходят при доказательстве теоремы Хаусдорфа. В случае банаховых пространств нам пришлось специально доказывать, что для любого элемента, не принадлеждащего замыканию образа оператора, найдётся функционал из ортогонального дополнения к этому образу, не обращающийся в нуль на данном элементе. В случае же гильбертовых пространств теорема Хаусдорфа немедленно вытекает из равенства $Im^{\perp} B = Ker\, B^*$ и теоремы Беппо Леви об ортогональном разложении (или равенства $(Im^{\perp} B)^{\perp} = [Im\, B]$, вытекающего из этой теоремы).
Окончательные формулировки в случае банаховых и гильбертовых пространств совпадают практически дословно, но смысл их несколько различается, поскольку ортогональность в гильбертовом пространстве – это отношение между элементами самого пространства, а в банаховом – между элементами исходного пространства и сопряжённого.

В дальнейшем мы неоднократно будем обращаться как к необходимому условию разрешимости, так и к теореме Хаусдорфа при анализе разрешимости тех или иных операторных уравнений. При этом мы ограничимся операторами, действующими из гильбертова пространства в себя, т.е. $H_1 = H_2 = H$.

Операторное уравнение с компактным симметричным оператором.

Рассматриваем уравнение вида

$$\lambda x - Ax = y\,.$$

Оно называется уравнением первого рода, если $\lambda = 0$, и второго рода, если $\lambda \neq 0$. В последнем случае представляется в виде

$$\lambda x = Ax + y\,.$$

Оператор B, о котором шла речь в предыдущем разделе – это оператор $\lambda E - A$.

Если A – компактный (вполне непрерывный) симметричный оператор, то, согласно теореме об ортогональном разложении, он обладает конечной или счётной ортонормированной системой собственных векторов $\{e_j\}$, отвечающих ненулевым собственным числам $\{\lambda_j\}$, $\|A\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$, и если система бесконечна, то $\lambda_m \to 0$. Система $\{e_j\}$ полна на ортогональном дополнении к ядру оператора.

Вектор y представляется в виде ортогональной суммы

$$y = \sum_j (y, e_j)e_j + h_y\,,$$

где $h_y = Pr_{KerA}y$ – ортогональная проекция элемента y на ядро оператора A. Если ядро $KerA$ тривиально, то последнее слагаемое отсутствует (или, если угодно, равно o).

Вектор x – решение уравнения – если существует, то также представляется в виде ортогональной суммы

$$x = \sum_j \alpha_j e_j + h_x\,,$$

где числа $\alpha_j = (x, e_j)$ и элемент $h_x = Pr_{KerA}x \in KerA$ подлежат определению. При этом

$$Ax = \sum_j \alpha_j \lambda_j e_j\,.$$

Тогда операторное уравнение принимает вид

$$\lambda \left(\sum_j \alpha_j e_j + h_x \right) - \sum_j \alpha_j \lambda_j e_j = \sum_j (y, e_j)e_j + h_y\,.$$

Последовательно умножая левую и правую части уравнения на $e_1, e_2, \ldots$, мы получаем систему уравнений (конечную или бесконечную) относительно $\{\alpha_j\}$:

$$(\lambda - \lambda_j)\alpha_j = (y, e_j)\,.$$

Спроецировав левую и правую части уравнения на $KerA$ (если оно нетривиально), получим уравнение относительно h_x:

$$\lambda h_x = h_y\,.$$

Проанализируем полученную систему для различных случаев взаимного разсположения значений λ и собственных чисел $\{\lambda_j\}$.

1. $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_j$: параметр λ не совпадает ни с нулём, ни с каким-либо из собственных чисел.

   В этом случае система однозначно разрешима при любых правых частях,
$$\alpha_j = \frac{(y, e_j)}{\lambda - \lambda_j}\,,$$
   и
$$h_x = \frac{h_y}{\lambda}$$
   (в случае тривиального ядра $h_x = o$). Тогда решение исходного операторного уравнения, если оно существует, представляется в виде
$$x = \sum_j \frac{(y, e_j) e_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{h_y}{\lambda}\,,$$
   и нам осталось выяснить, представляет ли полученная сумма какой-либо элемент пространства (иначе говоря, сходится ли ряд), и если да, то действительно ли он удовлетворяет исходному уравнению.

   Прежде всего, заметим, что множество значений знаменателей $\{\lambda - \lambda_j\}$ отделено от нуля: ни одно из этих чисел, по предположению, в нуль не обращается, и λ не является предельной точкой множества $\{\lambda_j\}$, поскольку последнее либо конечно, либо имеет единственную предельную точку нуль. Отсюда следует, что
$$d = \inf_j |\lambda - \lambda_j| > 0\,,$$
   и тогда числовой ряд
$$\sum_j \frac{(y, e_j)^2}{|\lambda - \lambda_j|^2} \leq \sum_j \frac{(y, e_j)^2}{d^2} = \frac{1}{d^2} \sum_j (y, e_j)^2 \leq \frac{\|y\|^2}{d^2}$$
   сходится, откуда следует и сходимость соответствующего ряда для элемента x в гильбертовом пространстве.

   Применив к элементу x оператор $\lambda E - A$, с учётом его линейности и непрерывности, убедимся, что результат действительно совпадает с y (проверить!). Таким образом, мы обнаружили, что при таких значениях λ операторное уравнение однозначно резрешимо при любой правой части.

   Выражение, в котором x выражено через y, определяет оператор $R_\lambda(A) = (\lambda E - A)^{-1}$ – резольвенту оператора A. Это линейный ограниченный оператор, его норма равна $1/d$, если ядро оператора A тривиально, и равна
$$\max\left(\frac{1}{d}, \frac{1}{|\lambda|}\right)\,,$$

если ядро A нетривиально (доказать). Таким образом, все значения λ, отличные от нуля и собственных чисел, принадлежат резольвентному множеству оператора A.

Замечание. Однозначная разрешимость уравнения $(\lambda E - A)x = y$ означает, в частности, что образ оператора $\lambda E - A$ – всё пространство H. Отсюда вытекает, что ядро оператора $(\lambda E - A)^* = (\lambda E - A)$ тривиально. Действительно, однородное уравнение (при $y = o$) имеет единственное решение $x = o$.

2. Значение λ – ненулевое собственное число оператора A и совпадает с одним или несколькими значениями λ_j.

   В этом случае оператор $(\lambda E - A)^* = (\lambda E - A)$ имеет нетривиальное ядро – собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ. Необходимое условие разрешимости уравнения $(\lambda E - A)x = y$ – ортогональность y этому подпространству, т.е. равенства
$$(y, e_j) = 0\,, \quad \lambda_j = \lambda\,.$$

   Действительно, в уравнениях
$$(\lambda - \lambda_j)\alpha_j = (y, e_j)$$
   коэффициенты при α_j в этом случае обращаются в нуль, так что необходимым условием их разрешимости является обращение в нуль правых частей. В последнем случае решениями таких уравнений являются любые значения α_j. Напомним, что таких значений j может быть лишь конечное число.

   Что касается остальных номеров j, то сообветствующие им значения α_j по-прежнему определяются однозначно, равно как и последнее слагаемое h_x, принадлежащее ядру оператора A. В результате решения уравнения, если они существуют, определяются формулой
$$x = \sum_{j:\lambda_j \neq \lambda} \frac{(y, e_j)e_j}{\lambda - \lambda_j} + \frac{h_y}{\lambda} + \sum_{j:\lambda_j = \lambda} \alpha_j e_j\,.$$

   Поскольку λ не является предельной точкой множества $\{\lambda_j\}$, найдётся некоторая окрестность λ, не содержащая элементов множества $\{\lambda_j\}$, отличных от самого λ. Это означает, что
$$d = \inf_{j:\lambda_j \neq \lambda} |\lambda - \lambda_j| > 0\,,$$
   откуда следует сходимость ряда – первого слагаемого из формулы для x. Подстановка этой формулы в уравнение позволяет убедиться, что оно удовлетворяется при произвольных значениях α_j, отвечающих $\lambda_j = \lambda$.

Таким образом, установлена разрешимость операторного уравнения на ортогональном дополнении к $Ker(\lambda E - A)^* = Ker(\lambda E - A)$. Оператор $\lambda E - A$ нормально резрешим, его образ – замкнутое подпространство $(Ker(\lambda E - A))^{\perp}$. Решение уравнения, когда оно существует, не единственно и определяется с точностью до произвольного решения однородного уравнения, т.е. элемента $Ker(\lambda E - A)$. В этом смысле ситуация вполне аналогична конечномерному случаю.

Оператор $\lambda E - A$ не имеет обратного, собственные числа оператора A принадлежат его спектру.

3. $\lambda = 0$

   В этом случае мы приходим к уравнению первого рода, имеющему вид

$$-Ax = y$$

   или

$$Ax = -y\,.$$

   Здесь следует ожидать неожиданностей, поскольку, как было установлено ранее, компактный оператор в бесконечномерном пространстве не может иметь ограниченного обратного даже в случае, когда его ядро тривиально.

   Необходимым условием разрешимости операторного уравнения является ортогональность правой части ядру оператора $A^* = A$, т.е. условие

$$h_y = o\,.$$

   Действительно, уравнение для проекции на $KerA$ в этом случае принимает вид

$$0 \cdot h_x = h_y$$

   и разрешимо только при обращении правой части в o. Если последнее условие выполнено, то $h_x \in KerA$ – произвольное решение однородного уравнения. Если значение 0 не является собственным числом A и ядро тривиально, то условие $h_y = o$ выполняется автоматически, и $h_x = o$.

   Будем считать, что по тем или иным причинам $h_y = o$, и рассмотрим уравнения для коэффициентов α_j, принимающие вид

$$-\lambda_j \alpha_j = (y, e_j)\,.$$

   Эти уравнения однозначно разрешимы:

$$\alpha_j = -\frac{(y, e_j)}{\lambda_j}\,,$$

   и решения операторного уравнения, если они существуют, имеют вид

$$x = -\sum_j \frac{(y, e_j) e_j}{\lambda_j} + h_x\,.$$

Если оператор A имеет конечный ранг, то сумма в этой формуле конечна, и вопроса о сходимости не возникает. Подставив полученное выражение в уравнение, убеждаемся, что оно выполняется при любом $h_x \in KerA$. При этом $KerA$ может быть (а может и не быть) тривиально в случае, когда само пространство H конечномерно, в противном случае оно заведомо нетривиально и бесконечномерно. Образ оператора – конечномерное замкнутое подпространство, линейная оболочка собственных векторов $\{e_j\}$. Оператор нормально разрешим, решение определяется с точностью до произвольного элемента $KerA$. Однозначная разрешимость возможна лишь в конечномерном случае, если ранг оператора совпадает с размерностью H. В этом случае значение $\lambda = 0$ принадлежит резольвентному множеству, в противном случае – спектру оператора.

Рассмотрим теперь случай, когда система $\{e_j\}$ бесконечна. В этом случае $\lambda_j \to 0$, и нуль заведомо принадлежит спектру оператора – замкнутому множеству, содержащему все свои предельные точки.

Сходимость рассматриваемого ряда в гильбертовом пространстве в этом случае эквивалентна сходимости числового ряда

$$\sum_j \frac{(y, e_j)^2}{|\lambda_j|^2} .$$

Этот ряд может сходиться или расходиться в зависимости от того, каков элемент y. Если ряд сходится, элемент x при произвольном $h_x \in KerA$ является решением операторного уравнения (проверьте!), в противном случае уравнение решений не имеет.

Как мы видим, оператор A не является нормально разрешимым, множество его значений незамкнуто и состоит из таких элементов

$$y = \sum_j \beta_j e_j ,$$

что одновременно сходятся ряды

$$\sum_j |\beta_j|^2$$

и

$$\sum_j \left| \frac{\beta_j}{\lambda_j} \right|^2 .$$

Утверждение. Для любой числовой последовательности $\lambda_j \to 0$ найдётся последовательность $\{\beta_1, \beta_2, \dots\} \in l_2$ такая, что последовательность $\{\beta_1/\lambda_1, \beta_2/\lambda_2, \dots\} \notin l_2$. В этом случае $y = \sum_j \beta_j e_j$ не будет принадлежать образу оператора A.

Доказательство. Поскольку $\lambda_j \to 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists j_n : |\lambda_{j_n}| < \frac{1}{n}\,,$$

причём $j_n \neq j_m$ при $n \neq m$.
Рассмотрим последовательность

$$\beta_j = \begin{cases} 0\,, & j \neq j_n\,, \\ \frac{1}{n}\,, & j = j_n\,. \end{cases}$$

Очевидно, $\beta \in l_2$, поскольку

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

В то же время $\{\beta_1/\lambda_1, \beta_2/\lambda_2, \dots\} \notin l_2$, поскольку эта последовательность содержит бесконечное число элементов вида $\beta_{j_n}/\lambda_{j_n}$, модуль которых превосходит единицу.

Замечание. Для некоторых $\beta \in l_2$ последовательность $\{\beta_j/\lambda_j\}$ не будет даже ограничена. Например, если выбрать в рассмотренном примере j_n из условия $|\lambda_{j_n}| < n^{-2}$, то $|\beta_{j_n}/\lambda_{j_n}| > n$.

Если решение операторного уравнения существует, то оно определено с точностью до произвольного решения однородного уравнения, т.е. до произвольного элемента $KerA$. Если ядро оператора A тривиально, то формула

$$x = -\sum_j \frac{(y, e_j)e_j}{\lambda_j}$$

определяет линейный оператор $-A^{-1}$, областью определения которого является область значений оператора A. Этот оператор неограничен, что следует из равенства

$$-A^{-1}e_j = -\frac{e_j}{\lambda_j}\,.$$

Пример. Интегральный оператор Фредгольма A на отрезке $[a, b]$ с непрерывным симметричным ядром – симметричный компактный оператор в пространстве $L_2[a, b]$. Уравнение первого рода $-Ax = y$ разрешимо заведомо не для всех $y \in L_2[a, b]$ хотя бы потому, что все функции из образа A непрерывны, а пространство $L_2[a, b]$ содержит в том числе и разрывные функции. В то же время уравнение второго рода $\lambda x = Ax + y$ однозначно разрешимо на всём $L_2[a, b]$ при всех ненулевых λ, не являющихся собственными числами оператора A.