Решение задач к занятию 16

1) С помощью вычетов найти оригинал изображения

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$$

Решение: Особыми точками функции $F(p)$ являются полюсы 1-го порядка $p_1=2$, $p_2=-2$ и полюсы 2-го порядка $p_3=i$, $p_4=-i$. Найдем согласно теореме 1 вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в каждой из этих точек

$$\operatorname*{res}_{p=2} F(p)e^{pt}=\lim_{p\to 2}\frac{(p-2)e^{pt}}{(p^2+1)^2(p^2-4)}=\lim_{p\to 2}\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2(p+2)}=\frac{e^{2t}}{100}$$

$$\operatorname*{res}_{p=-2} F(p)e^{pt}=\lim_{p\to -2}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p^2+1)^2(p^2-4)}=\lim_{p\to -2}\frac{e^{pt}}{(p^2+1)^2(p-2)}=-\frac{e^{-2t}}{100}$$

$$\operatorname*{res}_{p=i} F(p)e^{pt}=\lim_{p\to i}\left[(p-i)^2F(p)e^{pt}\right]'=\lim_{p\to i}\left[\frac{e^{pt}}{(p+i)^2(p^2-4)}\right]'=$$

$$=\lim_{p\to i}\left[\frac{te^{pt}(p+i)^2(p^2-4)-e^{pt}\left[2(p+i)(p^2-4)+(p+i)^2\cdot 2p\right]}{(p+i)^4(p^2-4)^2}\right]'=$$

$$=\frac{te^{it}(2i)^2(-5)-e^{it}[4i\cdot(-5)+(2i)^2\cdot 2i}{(2i)^4\cdot(-5)^2}=\frac{te^{it}\cdot 20+e^{it}\cdot 28i}{400}=\frac{e^{it}(5t+7i)}{100}$$

$$\operatorname*{res}_{p=-i} F(p)e^{pt}=\lim_{p\to -i}\left[(p+i)^2F(p)e^{pt}\right]'=\lim_{p\to -i}\left[\frac{e^{pt}}{(p-i)^2(p^2-4)}\right]'=$$

$$=\lim_{p\to -i}\frac{te^{pt}(p-i)^2(p^2-4)-e^{pt}\left[2(p-i)(p^2-4)+(p-i)^2\cdot 2p\right]}{(p-i)^4(p^2-4)^2}=$$

$$=\frac{te^{-it}(-2i)^2(-5)-e^{-it}[-4i\cdot(-5)+(-2i)^2\cdot 2(-i)]}{16\cdot 25}=$$

$$=\frac{te^{-it}\cdot 20-e^{-it}[20i+8i]}{16\cdot 25}=\frac{e^{-it}(20t-28i)}{400}=\frac{e^{-it}(5t-7i)}{100}$$

Используя формулу (16.1), получим

$$f(t)=\sum_{k=1}^{4}\operatorname*{res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right)=\frac{e^{2t}}{100}-\frac{e^{-2t}}{100}+\frac{e^{it}(5t+7i)}{100}+\frac{e^{-it}(5t-7i)}{100}=$$

$$=\frac{1}{50}\cdot\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}+\frac{t}{10}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+\frac{7i^2}{50}\cdot\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{50}\,\mathrm{sh}\,2t+\frac{t}{10}\cdot\cos t-\frac{7}{50}\sin t.$$

2) Найти оригинал изображения

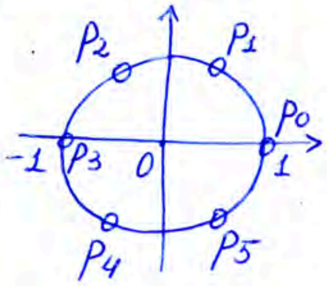
$$F(p) = \frac{p^5}{p^6-1}$$

Решение: Найдем особые точки функции $F(p)$

$$p^6 - 1 = 0$$

$$p_k = \sqrt[6]{1} = e^{i\cdot\frac{2\pi k}{6}} = e^{\frac{i\pi k}{3}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5 \quad - \text{П1}$$

Согласно теореме 1



$$f(t) = \sum_{k=0}^{5} \operatorname*{res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \operatorname*{res}_{p=p_k} \frac{p^5 e^{pt}}{p^6-1} = \sum_{k=0}^{5} \lim_{p\to p_k} \frac{p^5 e^{pt}}{(p^6-1)'} =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \lim_{p\to p_k} \frac{\cancel{p^5} e^{pt}}{6\cancel{p^5}} = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{6} e^{p_k t} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ e^{t} + e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + e^{-t} + e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ 2\operatorname{ch} t + e^{\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) + e^{-\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}t} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\left\{ 2\operatorname{ch} t + e^{\frac{t}{2}} \cdot 2\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + e^{-\frac{t}{2}} \cdot 2\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{ \operatorname{ch} t + \cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right) \right\} = \frac{1}{3}\operatorname{ch} t + \frac{2}{3}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}.$$

Ответ: ↑

3) $F(p) = \dfrac{1}{p^2-4p+3}$

Решение: Особые точки функции $F(p)$:

$$p^2 - 4p + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(p-1)(p-3) = 0 \Rightarrow p_1 = 1,\ p_2 = 3 \quad - \text{П1}.$$

$$f(t) = \operatorname*{res}_{p=1}[F(p)e^{pt}] + \operatorname*{res}_{p=3}[F(p)e^{pt}] = \operatorname*{res}_{p=1} \frac{e^{pt}}{p^2-4p+3} + \operatorname*{res}_{p=3} \frac{e^{pt}}{p^2-4p+3} =$$

$$= \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}}{(p^2-4p+3)'} + \lim_{p\to 3} \frac{e^{pt}}{(p^2-4p+3)'} = \lim_{p\to 1} \frac{e^{pt}}{2p-4} + \lim_{p\to 3} \frac{e^{pt}}{2p-4} =$$

$$= \frac{e^t}{-2} + \frac{e^{3t}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{t}\right).$$

Ответ ↑

4) Найти косинус-преобразование Фурье для функции

$$f(t) = \frac{1}{t^2+a^2} \quad (a>0)$$

Решение:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos\omega t \, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\omega t}{t^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^2+a^2} dt \overset{\omega>0}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=ia} \frac{e^{i\omega z}}{z^2+a^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \cdot \lim_{z\to ia} \frac{e^{i\omega z}}{2z} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \frac{e^{-\omega a}}{2ia} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot e^{-\omega a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-\omega a}}{a}$$

Таким образом, при $\omega > 0$ $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-\omega a}}{a}$

В силу четности функции $F_c(\omega)$ получим

<u>Ответ</u>: $F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-|\omega| a}}{a}$.

5) Найти синус-преобразование Фурье для функции

$$f(t) = \frac{t}{t^2+a^2} \quad (a>0)$$

Решение:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin\omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{t \sin\omega t}{t^2+a^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \sin\omega t}{t^2+a^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{i\omega t}}{t^2+a^2} dt \overset{\omega>0}{=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=ia} \frac{z e^{i\omega z}}{z^2+a^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \lim_{z\to ia} \frac{z e^{i\omega z}}{2z} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \cdot \frac{e^{-\omega a}}{2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \pi e^{-\omega a} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega a}$$

Итак, $F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega a}$, $\omega > 0$. Продолжая $F_s(\omega)$ нечетным образом на промежуток $(-\infty; 0)$, получим

<u>Ответ</u>: $F_s(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}\omega \, e^{-|\omega| a}$.

6) Найти преобразование Фурье для функции

$$f(t)=\frac{t-1}{4t^2-8t+5}$$

<u>Решение</u>: Рассмотрим отдельно случаи $\omega>0$ и $\omega<0$.

а) Если $\omega>0$, то $-\omega<0$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2\pi i)\sum_{Im z_k<0}\underset{z=z_k}{\mathrm{res}}\left[f(z)e^{-i\omega z}\right]$$

Найдем особые точки функции $f(z)$:

$$4z^2-8z+5=0$$

$$z_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{4}=\frac{4\pm 2i}{4}=\frac{2\pm i}{2}=1\pm\frac{i}{2}$$

Точка $z_1=\frac{2+i}{2}$ лежит в верхней полуплоскости, а точка $z_2=\frac{2-i}{2}$ – в нижней. Продолжим вычисление $F(\omega)$.

$$F(\omega)=-\sqrt{2\pi}\,i\cdot\underset{z=z_2}{\mathrm{res}}\frac{(z-1)e^{-i\omega z}}{4z^2-8z+5}=-\sqrt{2\pi}\,i\lim_{z\to z_2}\frac{(z-1)e^{-i\omega z}}{8z-8}=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\,i\lim_{z\to z_2}\frac{e^{-i\omega z}}{8}=-\frac{\sqrt{2\pi}\,i}{8}e^{-i\omega\left(1-\frac{i}{2}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2\pi}\,i}{8}e^{-\frac{\omega}{2}-i\omega}\qquad(\omega>0)$$

б) Если $\omega<0$, то $-\omega>0\Rightarrow$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\cdot\underset{z=z_1}{\mathrm{res}}\left[f(z)e^{-i\omega z}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,i\lim_{z\to z_1}\frac{(z-1)e^{-i\omega z}}{8z-8}=\sqrt{2\pi}\,i\lim_{z\to z_1}\frac{e^{-i\omega z}}{8}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,i\cdot\frac{1}{8}e^{-i\omega\left(1+\frac{i}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2\pi}\,i}{8}e^{\frac{\omega}{2}-i\omega}\qquad(\omega<0)$$

Результаты, полученные в пунктах а) и б) можно записать в виде одной формулы

<u>Ответ</u>: $F(\omega)=-\frac{\sqrt{2\pi}\,i}{8}\,\mathrm{sign}\,\omega\cdot e^{-\frac{|\omega|}{2}-i\omega}$

7) Найти преобразование Фурье для функции

$$f(t)=\frac{t-2}{t^2+4}$$

Решение: Найдем особые точки функции $f(z)=\frac{z-2}{z^2+4}$

$$z^2+4=0$$

$$z_1=2i\ ,\quad z_2=-2i\ \ - \text{П1}$$

а) $\omega>0$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2\pi i)\cdot \underset{z=z_2}{\mathrm{res}}\left[f(z)e^{-i\omega z}\right]=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\,i\cdot \underset{z=-2i}{\mathrm{res}}\ \frac{(z-2)e^{-i\omega z}}{z^2+4}=-\sqrt{2\pi}\,i\cdot\lim_{z\to-2i}\frac{(z-2)e^{-i\omega z}}{2z}=$$

$$=-\sqrt{2\pi}\,i\cdot\frac{(-2i-2)e^{-i\omega(-2i)}}{-4i}=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(1+i)e^{-2\omega}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i)e^{-2\omega}$$

б) $\omega<0$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\pi i\cdot \underset{z=z_1}{\mathrm{res}}\left[f(z)e^{-i\omega z}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,i\cdot \underset{z=2i}{\mathrm{res}}\ \frac{(z-2)e^{-i\omega z}}{z^2+4}=\sqrt{2\pi}\,i\cdot\lim_{z\to2i}\frac{(z-2)e^{-i\omega z}}{2z}=$$

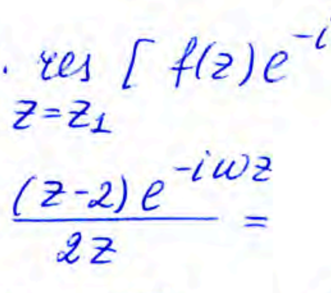
$$=\sqrt{2\pi}\,i\cdot\frac{(2i-2)}{4i}e^{\omega}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}(-1+i)e^{2\omega}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i)e^{2\omega}$$

Ответ: $F(\omega)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\mathrm{sign}\,\omega\cdot i\right)e^{-2|\omega|}$

8) С помощью теоремы Руше найти число нулей функции

$F(z)=z^8+5z^7-z^4+2$ в области $K:\ 4<|z|<6$

Решение: Область K - это кольцо (многосвязная область).



Найдем сначала число нулей в круге $D_1:\ |z|<6$ с границей $\Gamma_1:\ |z|=6$

Положим $f(z)=z^8$, $g(z)=5z^7-z^4+2$.

$\forall z\in\Gamma_1$

$|f(z)|=|z|^8=6^8$

$|g(z)|=|5z^7-z^4+2|\le 5|z|^7+|z|^4+2=5\cdot6^7+6^4+2<5\cdot6^7+6^7=6^8$

$\Rightarrow \ |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma_1$

В круге D_1 число нулей функции $F(z)$ равно числу нулей функции $f(z)$, т.е. $N_F = 8$.

Рассмотрим теперь круг D_2 меньшего радиуса: $|z| < 4$ с границей Γ_2: $|z| = 4$.

Положим $f(z) = 5z^7$, $g(z) = z^8 - z^4 + 2$.

На границе Γ_2:

$|f(z)| = 5|z|^7 = 5 \cdot 4^7$

$|g(z)| = |z^8 - z^4 + 2| \le |z^8| + |-z^4| + 2 = |z|^8 + |z|^4 + 2 = 4^8 + 4^4 + 2$

Заметим, что $5 \cdot 4^7 = 4 \cdot 4^7 + 4^7 = 4^8 + 4^7 > 4^8 + 4^4 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma_2$

В круге D_2 $N_F = N_f = 7$.

Тогда в кольце K $N_F = 8 - 7 = 1$. <u>Ответ</u>: 1