ЛЕКЦИЯ 11. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

1. Формула Лиувилля

Пусть дано дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=f(x). \tag{1}$$

И пусть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ − линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения:

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0. \tag{2}$$

Тогда общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$y_{oo}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

где C_1, C_2 − произвольные постоянные. А общее решение неоднородного уравнения (1) представляется в виде суммы общего решения уравнения (2) и частного решения уравнения (1):

$$y_{он}(x)=y_{oo}(x)+y_ч(x).$$

Пусть $y_1(x)$ − некоторое решение уравнения (2). Тогда второе линейно независимое решение $y_2(x)$ будем искать в виде:

$$y_2(x)=y_1(x)z(x).$$

Тогда

$$y_2'(x)=y_1'(x)z(x)+y_1(x)z'(x),$$

$$y_2''(x)=y_1''(x)z(x)+2y_1'(x)z'(x)+y_1(x)z''(x).$$

Подставим полученные выражения для функции $y_2(x)$ и ее производных в уравнение (2):

$$y_1''z+2y_1'z'+y_1z''+a(x)\left(y_1'z+y_1z'\right)+b(x)y_1z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y_1''+a(x)y_1'+b(x)y_1\right)z+y_1z''+\left(2y_1'+a(x)y_1\right)z'=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1z''+\left(2y_1'+a(x)y_1\right)z'=0. \tag{3}$$

Полученное относительно неизвестной функции $z(x)$ дифференциальное уравнение 2-го порядка (3) допускает понижение степени. Полагая $z'(x)=p(x)$: получим:

$$y_1p'+\left(2y_1'+a(x)y_1\right)p=0.$$

Откуда следует:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\left(2y_1' + a(x)y_1\right)}{y_1}dx,$$

$$\ln p = -2\ln|y_1| - \int a(x)dx,$$

$$p = e^{\ln\left(\frac{1}{y_1^2}\right) - \int a(x)dx} = \frac{1}{y_1^2}\cdot e^{-\int a(x)dx} = z'(x),$$

$$z(x) = \int e^{-\int a(x)dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}.$$

Тогда

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\cdot\int e^{-\int a(x)dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}.} \tag{4}$$

Формула (4) называется *формулой Лиувилля*.

2. Определение функций Бесселя

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0,\ \ \nu > 0. \tag{5}$$

Определение 1. Дифференциальное уравнение (5) называется *уравнением Бесселя*, где ν − некоторый числовой параметр, называемый *индексом уравнения*. Любое решение уравнения Бесселя называется *функцией Бесселя*▲

Будем искать решение уравнения (5) в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x) = x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r}. \tag{6}$$

Тогда

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_k x^{k+r-1},\ y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_k x^{k+r-2}. \tag{7}$$

Подставим (6), (7) в (5):

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)x^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r} -$$

$$-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)-\nu^2\right]x^{k+r-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]x^{k+r-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0\left[r^2-\nu^2\right]x^{r-2}+a_1\left[(1+r)^2-\nu^2\right]x^{r-1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}\right\}x^{k+r-2}=0.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_0\left[r^2-\nu^2\right]=0,\ a_1\left[(1+r)^2-\nu^2\right]=0, \tag{8}$$

$$a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}=0,\ k=2,3,... \tag{9}$$

Можно считать, что $a_0\neq 0$. Тогда из (8) следует, что $r=\pm\nu$. Если $r=\nu$, то из (8), (9) получим:

$$a_1=0,\ a_2=-\frac{a_0}{(2+\nu)^2-\nu^2}=-\frac{a_0}{2^2(\nu+1)},$$

$$a_3=0,\ a_4=-\frac{a_2}{(4+\nu)^2-\nu^2}=\frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!},...$$

$$a_{2m-1}=0,\ a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)m!},\ m=1,2,... \tag{10}$$

Коэффициент a_0 в (10) положим равным $a_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$. В силу формулы понижения для гамма-функции

$$\Gamma(\nu+1)\cdot(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)=\Gamma(\nu+m+1).$$

Тогда коэффициент a_{2m} преобразуется следующим образом:

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!},\ m=1,2,...$$

Частное решение уравнения (5) примет вид:

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+\nu}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)m!}.$$

Это решение называется *функцией Бесселя первого рода* и обозначается $J_\nu(x)$. Таким образом,

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)m!},\ x\in(-\infty;+\infty),\nu>0. \qquad (11)$$

Утверждение 1. Степенной ряд (11) сходится $\forall x\in(-\infty;+\infty)$ и $\nu>0$.

Доказательство: Так как

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{a_{m+1}(x)}{a_m(x)}\right|=\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{m+1}(x/2)^{2m+2+\nu}\,\Gamma(m+\nu+1)m!}{\Gamma(m+\nu+2)(m+1)!(-1)^m(x/2)^{2m+\nu}}\right|=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{(x/2)^2}{(m+\nu+1)(m+1)}\right|=0\ \ \forall x\in\mathbb{R},$$

то согласно признаку Даламбера ряд (11) сходится $\forall x\in\mathbb{R}$, причем на любом конечном отрезке действительной оси сходимость будет равномерной.■

Если параметр ν не является целым числом, то при $r=-\nu$ можно получить другое линейно независимое с (11) решение уравнения Бесселя:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)m!},\ x\in(-\infty;+\infty),\nu>0. \qquad (12)$$

Если $\nu\notin\mathbb{Z}$, то решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы, так как их разложения в ряды начинаются с различных степеней x. Поэтому линейная комбинация $C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$ может равняться нулю только при $C_1=C_2=0$. Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x),\ \nu\notin Z, \qquad (13)$$

где C_1,C_2 − произвольные постоянные.

Утверждение 2. При целом $n>0$ имеет место равенство:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),\ n = 1,2,\dots. \tag{14}$$

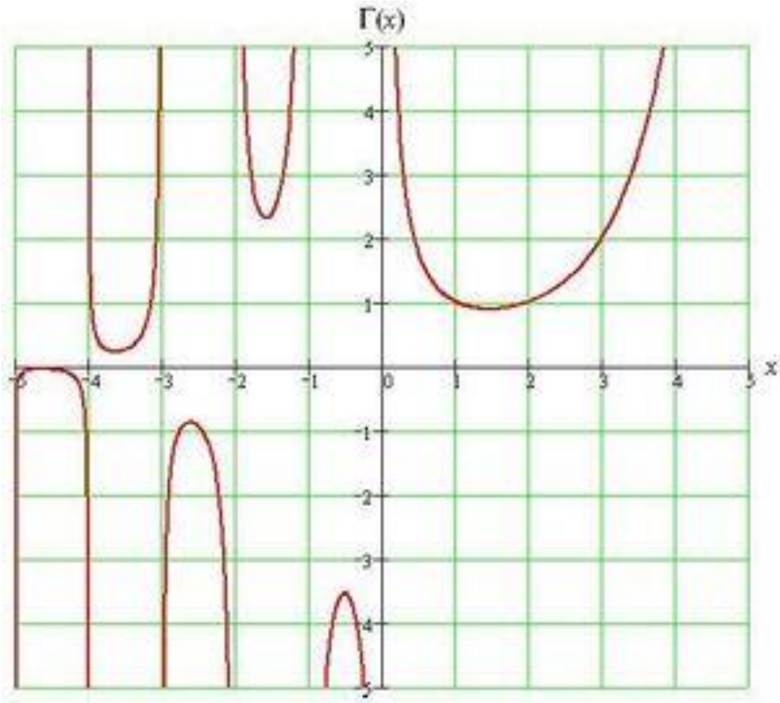
Решение: Согласно равенству (12)

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)m!}\ . \tag{15}$$

Заметим, что $\lim\limits_{x \to -m} \Gamma(x) = \infty$, $m = 0,1,2,\dots$, следовательно,

$\lim\limits_{x \to -m} (1/\Gamma(x)) = 0$, $m = 0,1,2,\dots$ (см. рис. 1). Поэтому первые n слагаемых в правой части (15) равны нулю. Тогда

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)m!} = [k = m-n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)(k+n)!} =$$



$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1)k!} = (-1)^n J_n(x)\ \blacksquare$$

Рис. 1

Таким образом, при $\nu = n$, $n \in N$ функции $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ линейно зависимы. Второе линейно независимое с $J_n(x)$ решение уравнения Бесселя (5) обозначается $Y_n(x)$ и называется *функцией Бесселя второго рода*.

Функции Бесселя второго рода определяются следующим образом:

$$\boxed{Y_n(x) = \lim_{\nu \to n} \frac{\cos \pi\nu \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}, \ \nu \notin Z, \ n \in Z.} \qquad (16)$$

Функции Бесселя первого и второго рода изучены очень тщательно и, в частности, составлены подробные таблицы их значений.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(\lambda^2 x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0, \ \lambda > 0, \qquad (17)$$

а) если $\nu \notin Z$; б) если $\nu = n$, $n \in N$.

Решение: а) Выполним замену независимой переменной $t = \lambda x$ и рассмотрим функцию $y_1(t) = y\left(\frac{t}{\lambda}\right) = y(x)$. Обозначая точками сверху производные по t, получим:

$$\dot{y}_1(t) = y'(x)\dot{x} = y'(x)\frac{1}{\lambda}, \ \ddot{y}_1(t) = y''(x)\frac{1}{\lambda}\dot{x} = y''(x)\frac{1}{\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$y'(x) = \lambda \dot{y}_1(t), \ y''(x) = \lambda^2 \ddot{y}_1(t).$$

В результате выполненных преобразований уравнение (17) примет вид:

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 \lambda^2 \ddot{y}_1(t) + \left(\frac{t}{\lambda}\right)\lambda \dot{y}_1(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) y_1(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 \ddot{y}_1(t) + t\dot{y}_1(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) y_1(t) = 0. \qquad (18)$$

Поделив обе части равенства (18) на t^2, получим для функции $y_1(t)$ уравнение Бесселя:

$$\ddot{y}_1(t)+\frac{1}{t}\dot{y}_1(t)+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)y_1(t)=0. \tag{19}$$

Так как $\nu \notin Z$, то общее решение уравнения (19) записывается в виде:

$$y_1(t)=C_1J_\nu(t)+C_2J_{-\nu}(t).$$

Откуда

$$y(x)=C_1J_\nu(\lambda x)+C_2J_{-\nu}(\lambda x).$$

б) Если $\nu=n$, $n=1,2,...,$ то рассуждая аналогично, получим следующее выражение для общего решения уравнения (17):

$$y(x)=C_1J_n(\lambda x)+C_2Y_n(\lambda x) \ \blacksquare$$