# Методы комплексного анализа

ФИО преподавателя: Шатина Альбина Викторовна
e-mail: shatina@mirea.ru

# КОНСУЛЬТАЦИЯ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА»

## Методы комплексного анализа (4-й семестр)

## 01.03.02

| Тема | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Max балл | 5 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 5 | 50 |
| Ответ | | | | | | | | | | |
| Баллы | | | | | | | | | | |

**Тема 1. Комплексные числа и функции**

**Тема 2. Условия Коши-Римана**

**Тема 3. Конформные отображения**

**Тема 4. Ряды Тейлора и Лорана**

**Тема 5. Изолированные особые точки**

**Тема 6. Вычеты**

**Тема 7. Теоремы о вычетах**

**Тема 8. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов**

**Тема 9. Определения и теоремы**

**Приказ № 629 от 27.05.2020**

Общая продолжительность тестирования 90 минут.
Возможное количество попыток прохождения теста: 1 попытка.
Условие успешного прохождения теста – получение не менее 15 баллов за тест.

Шкала оценивания результатов экзамена:

0 - 15 баллов – «2» − «неудовлетворительно»

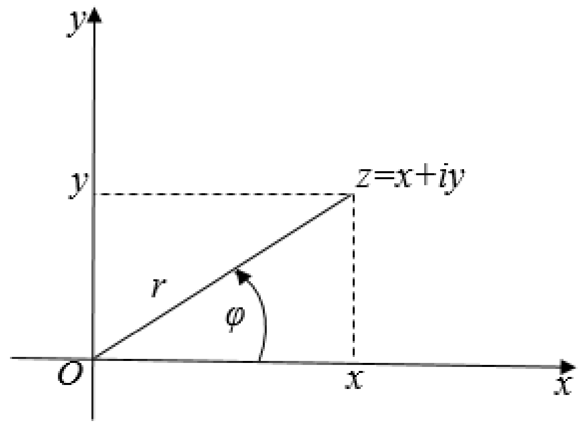
16 - 45 баллов – «3» − «удовлетворительно»

46 - 60 баллов – «4» − «хорошо»

61 - 75 баллов – «5» − «отлично»

Итоговая сумма баллов по дисциплине складывается из баллов, набранных студентом при прохождении теста (0-50 баллов), и баллов, характеризующих активность работы студента в семестре (0-25 баллов), которые могут быть добавлены преподавателем при успешном прохождении тестирования.

**Тема 1. Комплексные числа и функции**




Алгебраическая форма: $z = x + iy$.

Модуль комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент комплексного числа: $\varphi = \mathrm{Arg}z = \{\arg z + 2\pi k| \quad k \in \mathbb{Z}\}$;

$\arg z \in (-\pi; \pi]$ – главное значение аргумента.

Аргумент числа $z = 0$ не определен.

Аргумент числа $z = x + iy$ определяется системой равенств $\begin{cases} \cos\varphi = x/r\,, \\ \sin\varphi = y/r\,. \end{cases}$

Или

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}(y/x), \quad x > 0; \\ \mathrm{arctg}(y/x) + \pi, \quad x < 0, y \geq 0; \\ \mathrm{arctg}(y/x) - \pi, \quad x < 0, y < 0; \\ \pi/2, \quad x = 0, \quad y > 0; \\ -\pi/2, \quad x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Формула Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Показательная форма: $z = re^{i\varphi}$.

## Основные элементарные функции комплексной переменной

1) Дробно-рациональная

$$w = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

2) Показательная функция

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

3) Тригонометрические функции:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

4) Гиперболические функции:

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z}, \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z}.$$

5) Логарифмическая функция (многозначная функция):

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

6) Общая степенная функция (многозначная):

$$w = z^a = e^{a \mathrm{Ln} z}.$$

7) Общая показательная функция (многозначная):

$$w = a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}.$$

8) Обратные тригонометрические и гиперболические функции (многозначные):

$$\mathrm{Arcsin}z, \mathrm{Arccos}z, \mathrm{Arctg}z, \mathrm{Arcctg}z, \mathrm{Arch}z, \mathrm{Arsh}z, \mathrm{Arth}z, \mathrm{Arcth}z.$$

**1.1.** Найдите все значения степени $(i-1)^{2i}$. Выберите верный ответ:

a) $e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi n}\left(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\right),\ n\in\mathbb{Z}$

b) $e^{\frac{3\pi}{4}+2\pi n}\left(\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$

c) $e^{-\frac{\pi}{4}-2\pi n}\left(\cos\left(\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right),\ n\in\mathbb{Z}$

d)* $e^{-\frac{3\pi}{2}-4\pi n}\left(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\right),\ n\in\mathbb{Z}$

*Решение*:

$$(i-1)^{2i} = e^{2i\,\mathrm{Ln}(i-1)} =$$

$$= e^{2i\left\{\ln|i-1|+i\left(\arg(i-1)+2\pi k\right)\right\}} =$$

$$= e^{2i\left\{\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)\right\}} = e^{2i\ln\sqrt{2}-\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi k\right)} =$$

$$= e^{-\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi k\right)}\left(\cos\left(2\ln\sqrt{2}\right)+i\sin\left(2\ln\sqrt{2}\right)\right) =$$

$$= e^{-\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi k\right)}\left(\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\right)$$

**1.2.** Решите уравнение $\operatorname{tg} 2z = 3i$. Выберите верный ответ.

a) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n - \dfrac{i}{2}\ln 2,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $\pi n - \dfrac{i}{2}\ln 4,\ n \in \mathbb{Z}$

c)* $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2} + i\ln\sqrt[4]{2},\ n \in \mathbb{Z}$

d) $\pi n + i\ln 4,\ n \in \mathbb{Z}$

*Решение*:

$$\frac{\sin 2z}{\cos 2z} = 3i \Leftrightarrow \frac{\left(e^{i2z} - e^{-i2z}\right)2}{2i\left(e^{i2z} + e^{-i2z}\right)} = 3i \Leftrightarrow \frac{\left(e^{i2z} - e^{-i2z}\right)}{\left(e^{i2z} + e^{-i2z}\right)} = -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{i4z} - 1}{e^{i4z} + 1} = -3 \Leftrightarrow e^{i4z} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4iz = \operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4iz = \ln\frac{1}{2} + i(\pi + 2\pi n) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4i}\ln 2 + \frac{1}{4}(\pi + 2\pi n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{i}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$$

## Тема 2. Условия Коши-Римана

**2.1.** Выясните, может ли функция $u(x,y)=e^{-2y}\cos(2x-3)+4xy$ являться действительной частью аналитической функции $f(z)$. В случае положительного ответа найдите $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$. Выберите верный ответ:

a) да, $v(x,y)=-e^{-2y}\sin(2x-3)+y^2-x^2+C$

b)* да, $v(x,y)=e^{-2y}\sin(2x-3)+2y^2-2x^2+C$

c) нет

d) да, $v(x,y)=e^{-2y}\sin(2x-3)+2x^2-2y^2+C$

*Решение*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2e^{-2y}\sin(2x-3)+4y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4e^{-2y}\cos(2x-3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^{-2y}\cos(2x-3)+4x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4e^{-2y}\cos(2x-3),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\Rightarrow u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$$

Найдем $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$. Из первого условия Коши-Римана получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{-2y}\sin(2x-3) + 4y,\ v(x,y) = \int\left(-2e^{-2y}\sin(2x-3) + 4y\right)dy = e^{-2y}\sin(2x-3) + 2y^2 + C(x).$$

Откуда следует:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{-2y}\cos(2x-3) + C'(x). \quad \text{(a)}$$

С другой стороны, из 2-го условия Коши-Римана получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{-2y}\cos(2x-3) - 4x. \quad \text{(b)}$$

Из (a) и (b) $\Rightarrow C'(x) = -4x,\ C(x) = -2x^2 + C_1 \Rightarrow$

$$v(x,y) = e^{-2y}\sin(2x-3) + 2y^2 - 2x^2 + C_1.$$

## Тема 3. Конформные отображения

**3.1.** Найдите образ $E$ области $D=\{z:|z|<2,-\pi/3<\arg z<-\pi/6\}$ при отображении $w=(-\sqrt{3}+i)z^2$. Выберите верный вариант ответа:

a) $E=\{w:|w|<4,-\pi/3<\arg w<\pi/3\}$

b) $E=\{w:|w|<4,\ \pi/6<\arg w<5\pi/6\}$

c) $E=\{w:|w|<8,\ \pi/3<\arg w<2\pi/3\}$

d)* $E=\{w:|w|<8,\ \pi/6<\arg w<\pi/2\}$

*Решение*: Данное отображение представим в виде композиции трех отображений:

$$w = w_3 \circ w_2 \circ w_1,$$

$w_1 = z^2$ ;

$w_2 = |-\sqrt{3}+i|w_1 = 2w_1$ ;

$w = w_3 = e^{i5\pi/6}w_2$ . Здесь учтено, что $\arg(-\sqrt{3}+i)=5\pi/6$.

На рисунках 4.5а - 4.5г показано, как преобразуется область $D$ на каждом шаге.

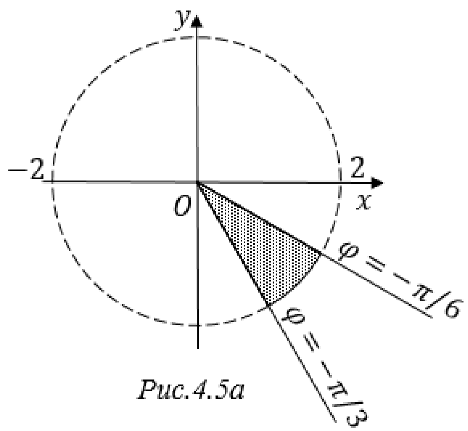



*Рис.4.5а*

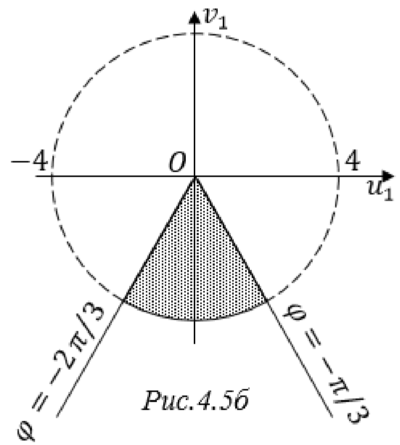



*Рис.4.5б*

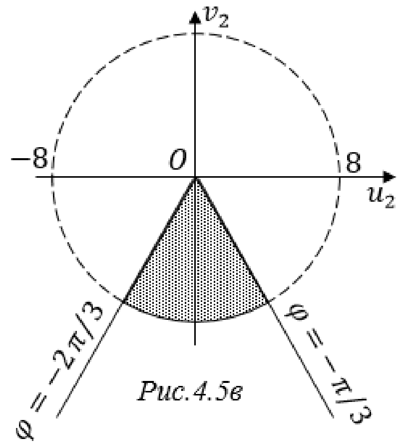



*Рис.4.5в*

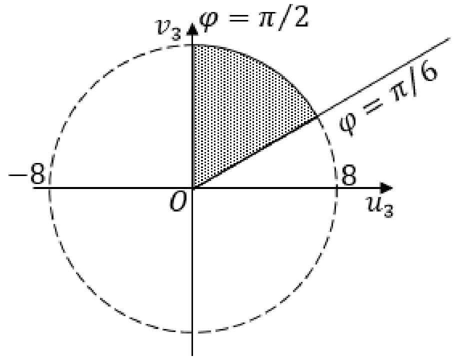


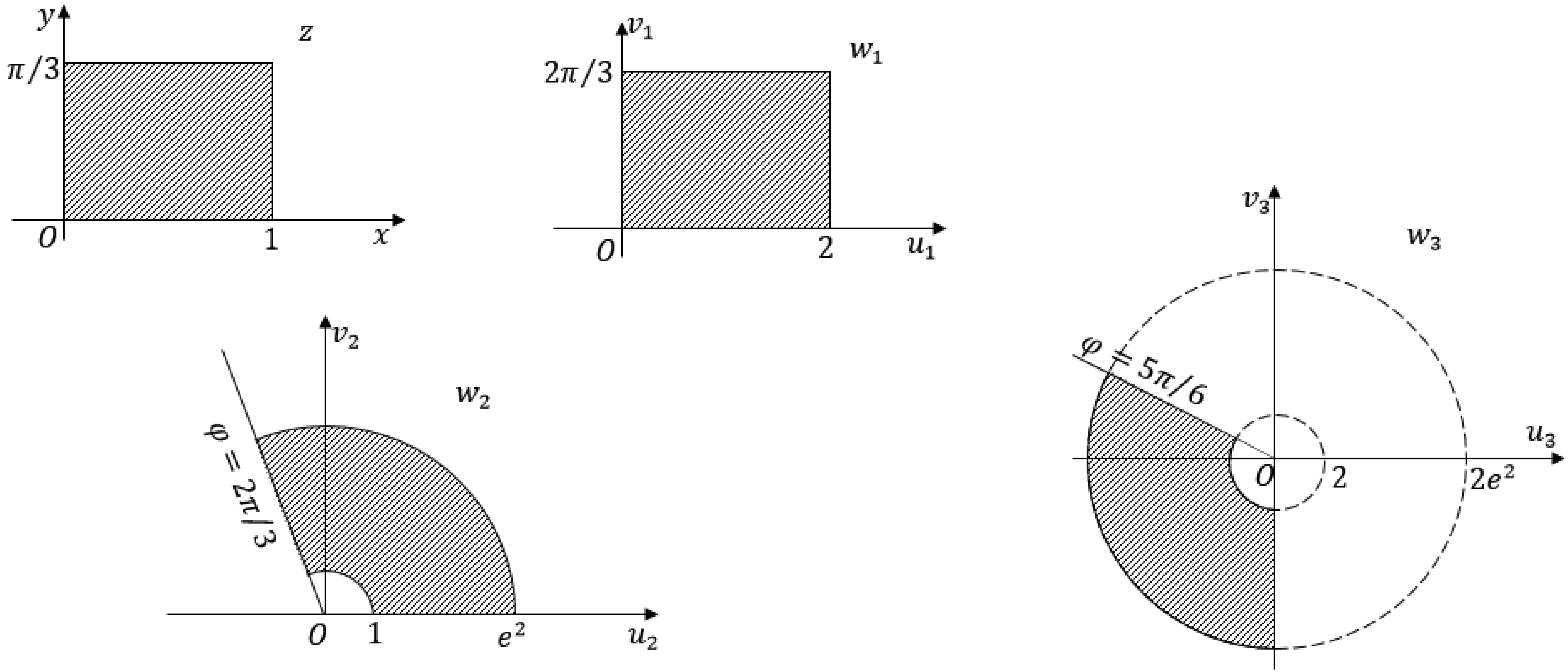

*Рис.4.5г*

*Ответ*: $E = \{w\colon |w| < 8,\ \pi/6 < \arg w < \pi/2\}$

**3.2.** Найдите образ $E$ области $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi/3\}$ при отображении $w = \left(-\sqrt{3} + i\right)e^{2z}$.

*Решение*: Данное отображение представим в виде композиции трех отображений:

$w_1 = 2z$ ; $w_2 = e^{w_1}$; $w = w_3 = 2e^{5\pi i/6} w_2$ .




*Ответ*: $E = \{w : 2 < |w| < 2e^2,\ 5\pi/6 < \arg w < 3\pi/2\}$

**Тема 4. Ряды Тейлора и Лорана**

Разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора с центром в точке $z_0 = 0$:

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty;$

2) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < \infty;$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

4) $\mathrm{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < \infty;$

5) $\mathrm{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

6) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1;$

7) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$

**4.1.** Разложение функции $f(z)=\dfrac{4}{z(z-4)}$ по степеням $z$ в области $D=\{z:4<|z|<+\infty\}$ имеет вид:

a) $f(z)=-\dfrac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{4^{n+1}}$

b)* $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{z^{n+1}}$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{z^{n+1}}$

d) $f(z)=-\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}4^n z^n$

*Решение*: $f(z)=\dfrac{4}{z(z-4)}=\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z-4}=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-4}$

$A(z-4)+Bz=4$

$z=0:\ -4A=4\Rightarrow A=-1$

$z=4:\ 4B=4\Rightarrow B=1$

В области $D$:

$$\frac{1}{z-4}=\frac{1}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}\Rightarrow f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}.$$

**Тема 5. Изолированные особые точки**

**Определение 1.** Точка $z_0$ называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность точки $z_0$: $0 < |z - z_0| < \rho$, в которой функция $f(z)$ является однозначной и аналитической, а в самой точке $z_0$ функция $f(z)$ либо не определена, либо не является однозначной и аналитической. Аналогично, точка $z = \infty$ называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической в некотором кольце $\rho < |z - a| < \infty$. ▲

**Определение 2.** Изолированная особая точка однозначного характера $z_0$ функции $f(z)$ называется:

а) устранимой особой точкой, если $\exists$ конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ ;

б) полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

в) существенной особой точкой, если не $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ . ▲

**Примеры:** а) $z_0 = 0$ – устранимая особая точка для функций $\dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{e^z - 1}{z}, \dfrac{1-\cos z}{z^2}$.

б) $z = -1$ – полюс для функции $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$.

в) $z = 0$ – существенно особая точка для функций $e^{1/z}, e^{1/z^2}, \sin\dfrac{2}{z}, \cos\dfrac{1}{z}$.

**Определение 3.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $K: 0 < |z - z_0| < \rho$. Тогда в этом кольце функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{5.1}$$

Ряд (5.1) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$. При этом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n - \text{правильная часть}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} - \text{главная часть ряда (5.1).}$$

**Определение 4.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $R < |z - z_0| < \infty$ . Тогда в этом кольце

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{5.2}$$

Ряд (5.2) называется рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n - \text{главная часть}, \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} - \text{правильная часть ряда (5.2).}$$

**Определение типа особой точки по главной части ряда Лорана**

| Тип особой точки $z_0$ функции $f(z)$ | Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ |
|---|---|
| Устранимая | отсутствует |
| Полюс | содержит конечное число членов |
| Существенно особая | содержит бесконечное число членов |

**Определение порядка полюса для точки $z_0 \neq \infty$**

<table>
<tr><td rowspan="4">Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка $m$ для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда</td><td>1) в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_\rho(z_0)$ точки $z_0$, т.е. в области $0 < |z - z_0| < \rho$, функция $f(z)$ представляется рядом: $$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, m > 0, c_{-m} \neq 0.$$</td></tr>
<tr><td>2) $f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^m}$ при $z \to z_0$,<br>где $A$ – некоторое отличное от нуля комплексное число.</td></tr>
<tr><td>3) $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$, где функция $h(z)$ аналитична в точке $z_0$ и $h(z_0) \neq 0$.</td></tr>
<tr><td>4) точка $z_0$ является нулем порядка $m$ для функции $$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, z \neq z_0, \\ 0, z = z_0, \end{cases}$$ т.е. $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(m-1)}(z_0) = 0, g^{(m)}(z_0) \neq 0.$</td></tr>
</table>

**Определение порядка полюса для бесконечно удаленной точки**

| | |
|---|---|
| Точка $z = \infty$ является полюсом порядка $m$ для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда | 1) в области $\rho < \|z - a\| < \infty$, функция $f(z)$ представляется рядом: $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n (z-a)^n, m > 0, c_m \neq 0.$$ |
| | 2) $f(z) \sim A(z-a)^m$ при $z \to \infty$, где $A$ – некоторое отличное от нуля комплексное число. |
| | 3) $f(z) = h(z)(z-a)^m$, функция $h(z)$ аналитична в некоторой области $\rho < \|z - a\| < \infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) \neq 0$. |

**5.1.** Для функции $f(z) = z^2 \sin\dfrac{\pi}{z}$ точка $z = \infty$ является:

a) существенно особой точкой

b) полюсом 2-го порядка

c) устранимой особой точкой

d)* полюсом 1-го порядка

*Решение*: При $z \to \infty$

$\sin\dfrac{\pi}{z} \sim \dfrac{\pi}{z} \Rightarrow f(z) \sim z^2 \cdot \dfrac{\pi}{z} = \pi z \Rightarrow z = \infty -$ полюс первого порядка для $f(z)$. Или:

$$f(z) = z^2 \sin\frac{\pi}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^{2n+1} = z^2\left(\frac{\pi}{z} - \frac{\pi^3}{3!z^3} + \frac{\pi^5}{5!z^5} - \ldots\right) = \pi z - \frac{\pi^3}{3!z} + \frac{\pi^5}{5!z^3} - \ldots \Rightarrow z = \infty - \Pi 1$$

**5.2.** Для функции $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{3z^7}$ точка $z=0$ является:

a) существенно особой точкой
b) полюсом 7-го порядка
c) устранимой особой точкой
d)* полюсом 5-го порядка

*Решение*: В кольце $0<|z|<\infty$

$$f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{3z^7}=\frac{1}{3z^7}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(z^2\right)^n}{n!}-1\right)=\frac{1}{3z^7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}=\frac{1}{3z^7}\left(z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\frac{z^8}{4!}+\ldots\right)=\frac{1}{3z^5}+\frac{1}{3\cdot 2!z^3}+\frac{1}{3\cdot 3!z}+\frac{z}{3\cdot 4!}+\ldots$$

$\Rightarrow z=0-$полюс 5-го порядка для функции $f(z)$.

**5.3.** Для функции $f(z)=z\sin\dfrac{2}{z-3}$ точка $z=3$ является:

a)* существенно особой точкой
b) полюсом 1-го порядка
c) устранимой особой точкой
d) полюсом 2-го порядка

*Решение*: В кольце $0<|z-3|<\infty$

$$f(z)=z\sin\frac{2}{z-3}=(z-3+3)\sin\frac{2}{z-3}=(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-3}\right)^{2n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-3}\right)^{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n+1}}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n+1}}.$$

Точка $z=3$ является существенно особой.

**5.4.** Для функции $f(z)=\dfrac{6z^8+5z^5-2}{z^5+7}$ точка $z=\infty$ является:

a) существенно особой точкой
b)* полюсом 3-го порядка
c) устранимой особой точкой
d) полюсом 5-го порядка

*Решение*: $f(z)=\dfrac{6z^8+5z^5-2}{z^5+7}=\dfrac{z^8\left(6+5/z^3-2/z^8\right)}{z^5\left(1+7/z^5\right)}$

При $z\to\infty$ $f(z)\sim 6z^3 \Rightarrow z=\infty -$ полюс 3-его порядка для функции $f(z)$.

## Тема 6. Вычеты

### Вычет в конечной точке

Пусть функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки $z_0$, т.е. в кольце $K\,:\ 0 < |z - z_0| < \rho_0$. Тогда в этом кольце функция $f(z)$ представляется сходящимся рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,, \qquad \gamma_\rho\colon |z - z_0| = \rho, \qquad 0 < \rho < \rho_0. \tag{6.1}$$

**Определение 1.** Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0$ называется коэффициент $c_{-1}$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$: $\operatorname*{res}\limits_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$. ▲

**Вычисление вычета в полюсе $\boldsymbol{z = z_0}$ $(\boldsymbol{z_0} \neq \infty)$.**

*Случай простого полюса*.

Если $z_0$ — полюс первого порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{6.2}$$

Пусть $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке $z_0$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$ , $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тогда $z = z_0$— полюс первого порядка для функции $f(z)$ и

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z)}. \tag{6.3}$$

*Случай кратного полюса.*

Если $z_0$ — полюс порядка m для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \tag{6.4}$$

**Вычет в бесконечно удаленной точке ($z_0 = \infty$)**

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $\rho_0 < |z-a| < \infty$. Тогда в этой области

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \ \ \rho_0 < \rho < \infty, \qquad \gamma_\rho: |z-a| = \rho\,. \tag{6.5}$$

**Определение 2.** Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ называется число $(-c_{-1})$, где $c_{-1}$ – коэффициент при $(z-a)^{-1}$ ряда Лорана (6.5) функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} \blacktriangle$$

● Другие способы нахождения вычета в бесконечно удаленной точке:

1) Если $f(z) \sim \frac{A}{z}$ при $z \to \infty$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A.$ (6.6)

2) Если $f(z) \sim \frac{A}{z^k}, k \geq 2$ при $z \to \infty$, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$ (6.7)

**6.1.** Вычет функции $f(z)=z\sin\frac{2}{z-3}$ в точке $z=3$ равен:

a)* $6$
b) $1/3$
c) $-1/3$
d) $1/6$

*Решение*: В кольце $0<|z-3|<\infty$

$$f(z)=z\sin\frac{2}{z-3}=(z-3+3)\sin\frac{2}{z-3}=(z-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-3}\right)^{2n+1}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-3}\right)^{2n+1}=$$

$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{2^{2n+1}}{(z-3)^{2n+1}},\ c_{-1}=\frac{3\cdot 2}{1!}=6\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=3} f(z)=6.$$

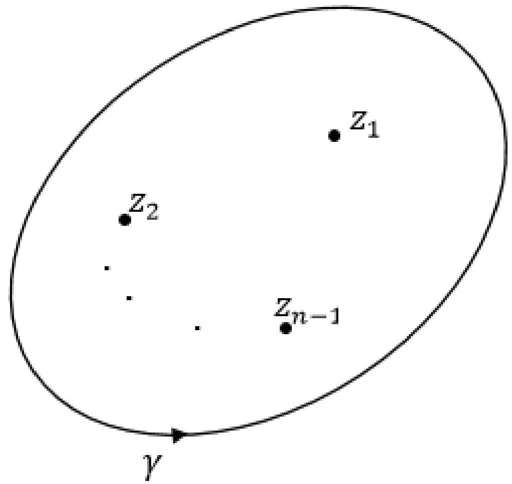
**6.2.** Вычет функции $f(z)=\frac{5z^4+6z^2-2}{z^5+7}$ в точке $z=\infty$ равен:

a) $5$
b) $5/7$
c)* $-5$
d) $-2/7$

*Решение*: $f(z)=\frac{5z^4+6z^2-2}{z^5+7}=\frac{z^4\left(5+6/z^2-2/z^4\right)}{z^5\left(1+7/z^5\right)}\sim\frac{5}{z}$ при $z\to\infty\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-5$.

## Тема 7. Теоремы о вычетах

***Теорема 1.*** Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D$ за исключением особых точек $z_1, \cdots, z_{n-1}$, лежащих в этой области. Тогда для любого простого замкнутого контура $\gamma$, лежащего в области $D$ и охватывающего эти точки, справедливо равенство




$$\oint_{\gamma^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)\,. \blacksquare$$

***Теорема 2.*** Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости за исключением изолированных особых точек $z_1, \cdots, z_{n-1}$ и $z_n = \infty$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0. \ \blacksquare$$

**7.1.** Вычислите контурный интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{e^z dz}{z^2\left(z^2+9\right)}$.

Выберите правильный ответ:

a)* $2\pi i/9$

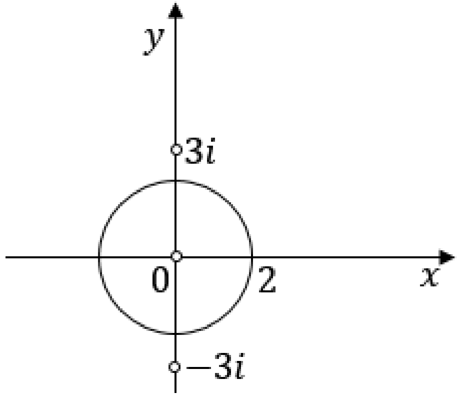
b) $18\pi i$

c) $-\pi i/9$

d) $\pi i/18$

*Решение*: Особые точки функции

$$f(z)=\frac{e^z}{z^2\left(z^2+9\right)}:\ z=0\ (\Pi 2),\ z=\pm 3i\ (\Pi 1).$$




Внутри контура интегрирования расположена точка $z=0$.
Найдем вычет функции в этой точке:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right]'=\lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z}{z^2+9}\right]'=\lim_{z\to 0}\frac{e^z\left(z^2+9\right)-2ze^z}{\left(z^2+9\right)^2}=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}.$$

Согласно первой теореме о вычетах $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z dz}{z^2\left(z^2+9\right)}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=\frac{2\pi i}{9}$.

**7.2.** Вычислите контурный интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{dz}{\left(z^6-1\right)(z+4)}$.

Выберите правильный ответ:

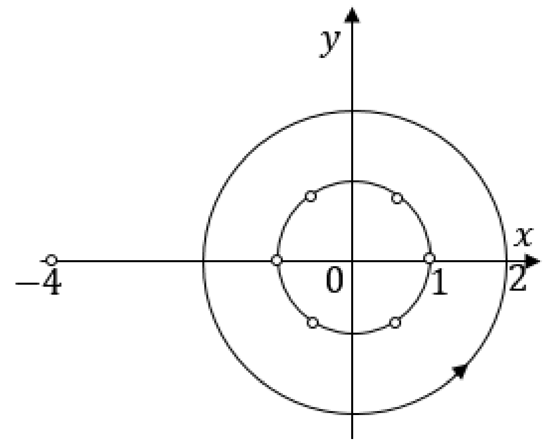
a)* $-\dfrac{2\pi i}{4095}$

b) $\dfrac{2\pi i}{4095}$

c) $-\dfrac{2\pi i}{1023}$

d) $2\pi i/1023$

*Решение*: Особые точки функции $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^6-1\right)(z+4)}$: $z=-4$ (П1), $z_k=\sqrt[6]{1}=e^{\frac{2\pi ki}{6}}$, $k=0,1,\ldots,5$ (П1).




Внутри контура интегрирования расположены точки

$$z_k=\sqrt[6]{1}=e^{\frac{2\pi ki}{6}},\ k=0,1,\ldots,5 \text{ (П1)}.$$

Согласно второй теореме о вычетах

$$\sum_{k=0}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{res}_{z=-4} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)=-\left(\operatorname*{res}_{z=-4} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

Найдем вычеты в точках $z=-4$ и $z=\infty$:

$$\operatorname*{res}_{z=-4} f(z)=\lim_{z\to-4}\left[(z+4)\,f(z)\right]=\lim_{z\to-4}\frac{1}{z^6-1}=\frac{1}{(-4)^6-1}=\frac{1}{4095};$$

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0, \text{ так как } f(z)=\frac{1}{\left(z^6-1\right)(z+4)}\sim\frac{1}{z^7},\ z\to\infty.$$

Согласно первой и второй теоремах о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{dz}{\left(z^6-1\right)(z+4)}=2\pi i\sum_{k=0}^{5}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z)=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=-4} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right)=-2\pi i\left(\frac{1}{4095}+0\right)=-\frac{2\pi i}{4095}.$$

**7.3.** Вычислите контурный интеграл $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\cos 2z dz}{(z+1)^6}$.

Выберите правильный ответ:

a) $(2\pi i/9)\cos 2$

b)* $(8\pi i/15)\sin 2$

c) $64\pi i \sin 2$

d) $64\pi i \cos 2$

*Решение*: Особая точка функции $f(z) = \frac{\cos 2z}{(z+1)^6}$: $z = -1\,(\Pi 6)$. Эта точка лежит внутри контура интегрирования. Найдем вычет функции $f(z)$ в точке $z = -1$:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(6-1)!} \lim_{z\to -1}\left[(z+1)^6 f(z)\right]^{(5)} = \frac{1}{120}\lim_{z\to -1}\left[\cos 2z\right]^{(5)} = \frac{1}{120}\lim_{z\to -1}(-32\sin 2z) = -\frac{32}{120}\sin(-2) = \frac{4\sin 2}{15}.$$

Согласно первой теореме о вычетах:

$$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\cos 2z dz}{(z+1)^6} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \frac{4\sin 2}{15} = \frac{8\pi i}{15}\sin 2.$$

## Тема 8. Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов

***Теорема 1.*** Пусть $f(x)$ — рациональная функция вещественной переменной $x$, т.е. $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени $n$ и $m$ соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $(m - n) \geq 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \blacksquare$$

***Замечание 1***. В ряде случаев более удобным оказывается рассмотрение особых точек функции $f(z)$, расположенных в нижней полуплоскости. Можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

***Теорема 2.*** Пусть $F(z)$ − правильная рациональная дробь и $F(z)$ непрерывна на всей действительной оси. Тогда при $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]. \blacksquare \tag{8.1}$$

***Замечание 2.*** Если $\alpha < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]. \tag{8.2}$$

***Замечание 3.*** Если выполнены условия теоремы 2 и $F(x)$ − действительная функция на R, то при $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos\alpha x dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i\sum_{\mathrm{Im}z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]\right\}, \qquad (8.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin\alpha x dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\alpha x}dx = \mathrm{Im}\left\{2\pi i\sum_{\mathrm{Im}z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k}\left[F(z)e^{i\alpha z}\right]\right\}. \qquad (8.4)$$

**8.1.** Вычислите интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^4}$. Выберите правильный ответ:

a) π/3
b) 11π/32
c)* 5π/16
d) 9π/32

*Решение:* Подынтегральная функция удовлетворяет условиям теоремы 1. Перейдем в комплексную плоскость:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}.$$

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости одну особую точку $z = i$ — полюс 4-го порядка.

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{3!}\lim_{z\to i}[(z-i)^4 f(z)]''' = \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z-i)^4}\right)''' = \frac{1}{6}\lim_{z\to i}\frac{(-4)(-5)(-6)}{(z+i)^7} = -\frac{20}{(2i)^7} = \frac{5}{32i}.$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\cdot\frac{5}{32i} = \frac{5\pi}{16}.$$

**8.2.** Вычислите интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx$. Выберите правильный ответ:

a)* $-\pi e^{-10} \sin 5$
b) $\pi e^{-10} \sin 5$
c) $\pi e^{-10} \cos 5$
d) $2\pi e^{-10} \cos 5$

*Решение:*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{5ix}}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$F(z) = \frac{z-1}{z^2 - 2z + 5}$$

которая является правильной рациональной дробью и удовлетворяет условиям теоремы 2.
Особые точки функции $F(z)$: $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = 1 - 2i$ (П1). Точка $z_1$ лежит в верхней полуплоскости.
Согласно замечанию 2

$$I = \mathrm{Re} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{5ix}}{x^2 - 2x + 5} dx = \mathrm{Re}\left\{2\pi i \cdot \underset{z=z_1}{\mathrm{res}} \left[F(z)e^{5iz}\right]\right\}.$$

Найдем вычет функции $F(z)e^{5iz}$ в точке $z_1$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1}\left[F(z)e^{5iz}\right] = \operatorname*{res}_{z=1+2i}\left[\frac{(z-1)e^{5iz}}{z^2-2z+5}\right] = \lim_{z\to1+2i}\frac{(z-1)e^{5iz}}{(z^2-2z+5)'} =$$

$$= \lim_{z\to1+2i}\frac{(z-1)e^{5iz}}{2z-2} = \lim_{z\to1+2i}\frac{e^{5iz}}{2} = \frac{1}{2}e^{5i(1+2i)} = \frac{e^{-10}}{2}(\cos5 + i\sin5).$$

Тогда

$$I = \operatorname{Re}\left\{2\pi i\cdot\frac{e^{-10}}{2}(\cos5 + i\sin5)\right\} = -\pi e^{-10}\sin5.$$

## Тема 9. Определения и теоремы

1) Комплексные числа и действия над ними. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Возведение в степень и извлечение корня $n$-ой степени из комплексного числа. Комплексно-сопряженное число.

2) Последовательности комплексных чисел. Определение предела последовательности комплексных чисел. Понятие бесконечно удаленной точки и расширенной комплексной плоскости. Сфера Римана.

3) Кривые и области на комплексной плоскости.

4) Определение функции комплексной переменной. Определение однолистной функции на заданном множестве. Определение многозначной функции. Основные элементарные функции комплексной переменной: дробно-рациональная, показательная, тригонометрические, гиперболические, логарифмическая, общая степенная, общая показательная, обратные тригонометрические и гиперболические функции.

5) Предел и непрерывность функции комплексной переменной.

6) Определение производной функции комплексной переменной в точке. Условия Коши-Римана. Определение аналитической функции. Условия Коши-Римана в полярных координатах. Гармоничность действительной и мнимой части аналитической функции.

7) Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения. Критерий конформности.

8) Конформные отображения, осуществляемые линейной, степенной и показательной функциями.

9) Дробно-линейная функция. Аналитичность, однолистность. Свойства дробно-линейного отображения: групповое свойство, круговое свойство, свойство сохранения симметрии, единственность дробно-линейного отображения, переводящего три различные точки в три различные точки.

10) Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Аналитичность, область однолистности. Образы окружностей и лучей при отображении функцией Жуковского. Примеры отображений, осуществляемых функцией Жуковского. Профили Жуковского.

11) Регулярные ветви многозначных функций: $w = \sqrt[n]{z}$, $w = Lnz$. Конформные отображения, ими осуществляемые. Функция, обратная функции Жуковского.

12) Конформные отображения, осуществляемые тригонометрическими и гиперболическими функциями.

13) Применение принципа симметрии для отображения областей с разрезами. Отображения круговых луночек.

14) Определение интеграла от функции комплексной переменной, его связь с криволинейными интегралами.

15) Интегральная теорема Коши для односвязной области. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.

16) Интеграл от аналитической функции, его независимость от пути интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.

17) Интегральная формула Коши для аналитической функции. Существование производных всех порядков у аналитической функции.

20) Разложение аналитической в круге функции в ряд Тейлора. Формулы для коэффициентов.

21) Ряд Лорана. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.

22) Изолированные особые точки однозначного характера и их классификация.

23) Определение ряда Лорана в окрестности конечной особой точки и в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд Лорана в окрестности устранимой особой точки, в окрестности полюса и в окрестности существенно особой точки.

24) Нули аналитической функции. Связь между порядком нуля и порядком полюса.

25) Определение вычета функции в конечной точке. Вычисление вычета в простом и кратном полюсе. Определение вычета функции в бесконечно удаленной точке.

26) Первая теорема о вычетах. Вторая теорема о вычетах.

27) Приложение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов от рациональных функций.

28) Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} R(x)dx$, где $R(x)$ - правильная рациональная дробь, $a > 0$.

29) Теорема о логарифмическом вычете.

30) Принцип аргумента.

31) Теорема Руше.

32) Теорема Лиувилля.

33) Теорема единственности. Понятие об аналитическом продолжении.

**Литература:**

1) Шатина А.В. Методы комплексного анализа. Конспект лекций. – М.: МИРЭА –Российский технологический университет, 2019. - Электронное издание, номер гос. регистрации 0321901879 от 26.06.2019. (2.9 мб).

2) Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 248 с.

3) Сборник задач по математике для ВТУЗов в 4 частях под общей редакцией А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. Ч3. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2007.

4) Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М. Наука, 1989.

5) Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2009.

6) Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

7) Краснов М.Л., Киселев А.М. и др. Вся высшая математика. Часть 4. Эдиториал. УРСС. М. 2001.

8) Теория функций комплексной переменной. Лекции и практикум. Под общей редакцией И.М. Петрушко. Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2010.

9) Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями. / В.Г. Крупнин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2012.

10) Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 365 с.

11) Половинкин Е.С. Теория функций комплексного переменного. М.:МНФРА-М, 2018 – 254 с.

# Спасибо за внимание!