Методическое пособие по дифференциальным уравнениям для специальности «прикладная математика и информатика»01.03.02

4-й семестр

Примеры решения задач типового расчета

Составила Потепалова А.Ю.

Задача №1.

а) Методом исключения неизвестных найти решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка:

x`=-y+2z (1)

y`=x+3y-z (2)

z`=-2x-y+4z (3)

Решение. Метод состоит в исключении переменных y и z и получении дифференциального уравнения 3-го порядка относительно переменной x.

Дифференцируем уравнение (1) и подставляем производные y` и z` из уравнений (2) и (3):

x``=-y`+2z`=-x-3y+z-4x-2y+8z=-5x-5y+9z (4)

Дифференцируем еще раз:

x```=5y-10z-5x-15y+5z-18x-9y+36z

x```=-23x-19y+31z (5)

Объединяя уравнения (1) и (4), получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно y и z.

$$\begin{cases} -y+2z=x` \\ -5y+9z=x``+5x \end{cases}$$

Решения этой системы:

y=-2x``+9x`-10x, z=-x``+5x`-5x (6)

Подставляя (6) в (5), получаем дифференциальное уравнение 3-го порядка для переменной x:

$x```-7x``+16x`-12x=0$ (7)

Соответствующее характеристическое уравнение: $s^3-7s^2+16s-12=0$.

Найдем корни характеристического уравнения. Проверим, что число 2 является его корнем. С помощью деления «в столбик» найдем остальные корни характеристического уравнения.

$(s-2)^2(s-3)=0$, то есть $s=2$- корень кратности 2 и $s=3$- корень кратности 1.

Решение уравнения (7) имеет вид: $x(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_3e^{3t}$ (8)
Дифференцируем (8) и подставляем в (6):

$y(t)=c_2e^{2t}-c_3e^{3t}$, $z(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$.

<u>Ответ:</u> $x(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_3e^{3t}$, $y(t)=c_2e^{2t}-c_3e^{3t}$, $z(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$.

б) Методом собственных векторов (Эйлера) найти решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений третьего порядка.

$$\begin{cases} x` = -y + 2z \\ y` = x + 3y - z \\ z` = -2x - y + 4z \end{cases}$$

Решение. Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A:

$\det(A-sE)=-s^3+7s^2-16s+12=-(s-2)^2(s-3)=0$.

Корни характеристического уравнения: $s=2$ - корень кратности 2, $s=3$- корень кратности 1.

Найдем собственный вектор v_1, соответствующий собственному значению $s=2$: $v_1=(1,0,1)^т$. Ранг матрицы $(A-2E)$ равен двум:$r=2$, $n-r=3-2=1$, следовательно, других (линейно независимых с v_1) собственных векторов нет. Найдем присоединенный вектор v_2 из уравнения $(A-sE)v_2=v_1$.

$V_2=(0,1,1)^т$.

Найдем собственный вектор v_3, соответствующий собственному значению $s=3$: $v_3=(1,-1,1)^т$.

Для записи ответа используем формулу:

$(x,y,z)^т=c_1e^{2t}v_1+c_2e^{2t}(tv_1+v_2)+c_3e^{3t}v_3$. Получаем ответ:

$(x,y,z)^т=C_1e^{2t}(1,0,1)^т+C_2e^{2t}[t(1,0,1)^т+(0,1,1)^т]+C_3e^{3t}(1,-1,1)^т$,

что совпадает с ответом, полученным в пункте а).

Ответ:

$x(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_3e^{3t}$, $y(t)=c_2e^{2t}-c_3e^{3t}$, $z(t)=e^{2t}(c_1+c_2t)+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$.

Задача №2.

а) Найти матричную экспоненту e^{At}, используя фундаментальную систему решений ответствующей линейной системы уравнений.

$$\begin{cases} x` = -2x + 5y \\ y` = -4x + 6y \end{cases}$$

Решение. Матрица системы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения матрицы А:

$Det(A-sE)=s^2-4s+8=(s-2)^2+4=0$;

$(s-2)^2=-4$; $s-2=2i$ или $s-2=-2i$; $s_1=2+2i$, $s_2=2-2i$.

Известно, что паре комплексно-сопряженных собственных значений $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$ соответствует жорданова клетка:

$J=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Ей соответствует матричная экспонента:

$e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{\alpha t}cos\beta t & e^{\alpha t}sin\beta t \\ -e^{\alpha t}sin\beta t & e^{\alpha t}cos\beta t \end{pmatrix}$

В нашем случае $J=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{2t}cos2t & e^{2t}sin2t \\ -e^{2t}sin2t & e^{2t}cos2t \end{pmatrix}$

Матрица А связана с жордановой формой J невырожденным преобразованием:

$A=T^{-1}JT$, или $TA=JT$, где $T=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$- неизвестная матрица.

Найдем матрицу T методом неопределенных коэффициентов. Для коэффициентов a,b,c,d получаем систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ a-2c-2d=0 \\ 5a+4b-2d=0 \\ 2b+5c+4d=0 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $a=2c+2d$, $b=-5/2c-2d$, где c и d-параметры.

Пусть $c=2$, $d=-1$, тогда $a=2$, $b=-3$.

$T=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $T^{-1}=\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ -2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Искомую матричную экспоненту получаем, перемножая матрицы:

$e^{At}=T^{-1}e^{Jt}T$

<u>Ответ:</u> $e^{At}=e^{2t}\begin{pmatrix} cos2t-2sin2t & 5/2sin2t \\ -2sin2t & cos2t+2sin2t \end{pmatrix}$

№2, б) Решить задачу Коши с помощью найденной матричной экспоненты.

$\begin{cases} x` = -2x+5y \\ y` = -4x+6y \end{cases}$ $x(0)=-1$, $y(0)=3$.

<u>Решение.</u>

$(x,y)^T=e^{At}(x_0,y_0)^T$

<u>Ответ:</u> $x(t)=e^{2t}(19/2sin2t-cos2t)$, $\quad$ $y(t)=e^{2t}(8sin2t+3cos2t)$.

№2,в)Для данной матрицы A найти матричную экспоненту e^{At} операторным методом.

$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. Воспользуемся формулой $e^{At}=L^{-1}[(pE-A)^{-1}]$, где $L[f(t)]$- преобразование Лапласа.

A-pE= $\begin{pmatrix} -2-p & 5 \\ -4 & 6-p \end{pmatrix}$ pE-A= $\begin{pmatrix} p+2 & -5 \\ 4 & p-6 \end{pmatrix}$

det(pE-a)=(p+2)(p-6)+20=$(p-2)^2$+4, $(pE-A)^{-1}$= $\frac{1}{(p-2)^2+4}\begin{pmatrix} p-6 & 5 \\ -4 & p+2 \end{pmatrix}$

Найдем оригиналы для всех элементов полученной матрицы, используя таблицу оригиналов и изображений.

<u>Ответ:</u> $e^{At} = e^{2t}\begin{pmatrix} cos2t - 2sin2t & 5/2sin2t \\ -2sin2t & cos2t + 2sin2t \end{pmatrix}$

(совпадает с результатом, полученным в пункте 2а).

Задача №3.

Найти общее решение линейной системы неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} x` = -2x - 2y - e^{-t}\sin 3t \\ y` = 5x + 4y \end{cases} \quad (1)$$

Решение.

а) Общее решение неоднородной системы равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Найдем сначала <u>общее решение</u> соответствующей <u>однородной системы методом собственных векторов</u>.

$$\begin{cases} x` = -2x - 2y \\ y` = 5x + 4y \end{cases} . \quad (2)$$

Матрица системы: A=$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Найдем собственные значения матрицы A.

det(A-sE)=s^2-2s+2 =0, s_1=1+i, s_2=1-i.

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. Найдем собственный вектор v= $(\alpha,\beta)^T$,соответствующий корню s=1+i.

$$\beta = \frac{-3-i}{2}\alpha, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ -3-i \end{pmatrix}$$

Частное решение системы, соответствующее корню s=1+i:

$$\binom{x}{y} = e^{(1+i)t}v = e^{t}(cost + isint)\begin{pmatrix} 2 \\ -3-i \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы представляет собой линейную комбинацию действительной и мнимой частей вектора $e^{(1+i)t}v$:

$$\binom{x_0}{y_0} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 2cost \\ -3cost + sint \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 2sint \\ -cost - 3sint \end{pmatrix} \tag{3}$$

Отметим, что решение однородной системы получено в вещественной форме.

Найдем <u>частное решение неоднородной системы</u> (1) <u>методом подбора неопределенных коэффициентов</u>. Исходя из вида квазимногочлена $-e^{-t}\sin 3t$, будем искать решение в виде:

$$x_ч = Ae^{-t}\cos 3t + Be^{-t}\sin 3t, \quad y_ч = Ce^{-t}\cos 3t + De^{-t}\sin 3t. \tag{4}$$

Здесь A,B,C,D-неопределенные коэффициенты. Подставим $x_ч, y_ч$ в исходную систему (1) и приравняем коэффициенты в подобных слагаемых.

В первом уравнении при множителе $e^{-t}\sin 3t$ получим:

$$-3A-B+2B+2D=-1, \text{ или } -3A+B+2D=-1 \tag{5}$$

В первом уравнении при множителе $e^{-t}\cos 3t$ получим:

$$A+3B+2A+2C=0, \quad \text{или} \quad A+3B+2C=0 \tag{6}$$

Во втором уравнении при множителе $e^{-t}\sin 3t$ получим:

$$-3C-D-5B-4D=0, \text{ или } 5B+3C+5D=0 \tag{7}$$

Во втором уравнении при множителе $e^{-t}\cos 3t$ получим:

$$-C+3D-5A-4C=0, \text{ или } 5A+5C-3D=0 \tag{8}$$

Объединяя равенства (5),(6),(7),(8), получим систему алгебраических неоднородных уравнений 4-го порядка.

$$\begin{cases} -3A + B + 2D = -1 \\ A + 3B + 2C = 0 \\ 5B + 3C + 5D = 0 \\ 5A + 5C - 3D = 0 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид:

$$A=9/20,\ B=1/10,\ c=-3/8,\ D=1/8 \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4) , получим, что частное решение неоднородной системы (1) имеет вид:

$$x_ч=e^{-t}(9/20\cos3t+1/10\sin3t),\quad y_ч=e^{-t}(-3/8\cos3t+1/8\sin3t) \quad (10)$$

Теперь объединим (3) и (10) и получим

Ответ:

$$x(t)=2C_1e^t\cos t+2C_2e^t\sin t+ e^{-t}(9/20\cos3t+1/10\sin3t) \quad (11)$$

$$y(t)=(-3C_1-C_2)e^t\cos t+(C_1-3C_2)e^t\sin t+ e^{-t}(-3/8\cos3t+1/8\sin3t) \quad (12)$$

б) Найти решение задачи Коши операторным методом.

$$\begin{cases} x` = -2x-2y-e^{-t}\sin3t \\ y` = 5x+4y \end{cases} \qquad x(0)=1,\ y(0)=0.$$

Решение.

Искомые функции x(t), y(t) имеют изображения по Лапласу, обозначим их X(p),Y(p). По теореме дифференцирования оригинала получим изображения производных:

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p)-1,\ \ \dot{y}(t) \risingdotseq pY(p)$$

По таблице изображений получим: $e^{-t}\sin3t \risingdotseq \frac{3}{(p+1)^2+9}$

Для изображений X(p), Y(p) получаем систему операторных уравнений:

$$\begin{cases} pX-1=-2X-2Y-\dfrac{3}{(p+1)^2+9} \\ pY=5X+4Y \end{cases}$$

Эту систему удобно решать с помощью «правила Крамера».

$X(p)=\Delta_x/\Delta$, $Y(p)=\Delta_y/\Delta$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ 5 & -p+4 \end{vmatrix}=-(p^2-2p+2)$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} \dfrac{p^2+2p+7}{p^2+2p+10} & 2 \\ 0 & -p+4 \end{vmatrix}=\frac{-(p-4)(p^2+2p+7)}{p^2+2p+10}$$

$$X(p) = \frac{(p-4)(p^2+2p+7)}{(p^2-2p+2)(p^2+2p+10)}$$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{(p^2+2p+7)}{p^2+2p+10} \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5\frac{(p^2+2p+7)}{(p^2+2p+10)}$,

$Y(\mathrm{p}) = \frac{5(p^2+2p+7)}{(p^2-2p+2)(p^2+2p+10)}$

Изображения X(p),Y(p) представляют собой правильные дроби. Для того, чтобы перейти от изображения X(p),Y(p) к оригиналам x(t),y(t), представим каждую дробь в виде суммы простейших дробей.

$$X(p) = \frac{Ap+B}{(p^2-2p+2)} + \frac{Cp+D}{(p^2+2p+10)}$$

Методом неопределенных коэффициентов находим:

A=11/20, B=-59/20, C=9/20, D=3/4.

Запишем *X(p)* в виде, удобном для перехода от изображения к оригиналу: $X(p)=X_1(p)+X_2(p)$

$$X_1(p) = \frac{11}{20}\frac{(p-1)}{(p-1)^2+1} - \frac{48}{20}\frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$X_2(p) = \frac{9}{20}\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{1}{10}\frac{3}{(p+1)^2+3^2}$$

Воспользуемся таблицей оригиналов и изображений и получим <u>искомую функцию x(t):</u>

$x(t)= 11/20e^{t}\cos t - 48/20e^{t}\sin t + 9/20e^{-t}\cos 3t + 1/10e^{-t}\sin 3t$.

Полученное решение удовлетворяет заданному начальному условию:

x(0)= 11/20+9/20=1 .

Оригинал для изображения Y(p) находится аналогично.

$$Y(p) = \frac{Mp+N}{(p^2-2p+2)} + \frac{Lp+R}{(p^2+2p+10)}$$

M=3/8, N=7/2, L=-3/8, R=0, $Y(p)=Y_1(p)+Y_2(p)$

$$Y_1(p) = \frac{3}{8}\frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{31}{8}\frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$Y_2(p) = -\frac{3}{8}\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{1}{8}\frac{3}{(p+1)^2+3^2}$$

По таблице оригиналов и изображений получаем функцию y(t):

$y(t)=3/8e^{t}\cos t+31/8e^{t}\sin t-3/8e^{-t}\cos 3t+1/8e^{-t}\sin 3t$.

Ответ: $x(t)= 11/20e^{t}\cos t-48/20e^{t}\sin t +9/20e^{-t}\cos 3t+1/10e^{-t}\sin 3t$,

$y(t)=3/8e^{t}\cos t+31/8e^{t}\sin t-3/8e^{-t}\cos 3t+1/8e^{-t}\sin 3t$.

С точностью до коэффициентов C_1 , C_2 ответ совпадает с результатом (11),(12) и удовлетворяет начальным условиям x(0)=1, y(0)=0.

Задача №4.

Исследуйте на устойчивость линейные системы из задач №1,2,3.

Решение.

1) Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы системы:

$$\lambda_{1,2} = 2 > 0, \lambda_3 > 0$$

Точка покоя (0,0,0) неустойчива согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости.

2) Матрица системы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

Собственные значения матрицы системы: $\lambda_1 = 2 + 2i, \lambda_2 = 2 - 2i.$

Действительные части этих чисел положительны, следовательно, точка покоя (0,0) неустойчива согласно первой теореме Ляпунова об устойчивости. Тип точки покоя - «фокус».

3) Матрица системы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Собственные значения матрицы системы: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i.$

Аналогично пункту 2), точка покоя – неустойчивый «фокус».

Задача №5.

Определите тип особой точки однородной системы 2-го порядка из задачи №3. Изобразите фазовые траектории вблизи положения равновесия.

Решение. Система однородных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x` = -2x - 2y \\ y` = 5x + 4y \end{cases}$$

Собственные значения матрицы системы: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i.$

Тип точки покоя – «неустойчивый фокус», фазовые траектории имеют вид спиралей. Движение по траекториям происходит от центра. Выясним, движется ли фазовая точка по часовой стрелке или против хода часов. Для этого вычислим значение производной x` в точке (0,1): x`(0,1)=-2<0, следовательно, x(t) уменьшается и движение происходит против часовой стрелки.

Для точек покоя «седло» или «узел» необходимо найти прямолинейные траектории. Для этого можно использовать собственные векторы матрицы системы или подставить y=kx в исходную систему уравнений:

x`=-2x-2kx=(-2-2k)x; kx`=5x+4kx=(5+4k)x;

Следовательно, (5+4k)/k=-2-2k; 5+4k=k(-2-2k).

Для углового коэффициента k прямолинейной траектории получаем квадратное уравнение $2k^2+6k+5=0$. Его дискриминант D=-4<0, поэтому в данном случае прямолинейных траекторий нет.

Задача №6.

Исследуйте на устойчивость тривиальное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\begin{cases} x` = \ln(e^y - 2x) \\ y` = (\cos x - \sin y)^4 (\cos y + \sin x)^3 \end{cases}$$

Решение. Обозначим правые части уравнений:

$f(x,y)= \ln(e^y-2x)$, $g(x,y)=(\cos x-\sin y)^4(\cos y+\sin x)^3$.

Убедимся, что точка (0,0) является положением равновесия системы: f(0,0)=0, g(0,0)=0. Найдем частные производные первого порядка и их значения в точке (0,0):

$f`_x=-2/(e^y-2x)$; $f`_x(0,0)=-2$;

$f`_y=e^y/(e^y-2x)$; $f`_y(0,0)=1$;

$g`_x=-4\sin x(\cos x-\sin y)^3(\cos y+\sin x)^3+3\cos x(\cos y+\sin x)^2(\cos x-\sin y)^4$; $g`_x(0,0)=3$;

$g`_y=-4\cos y(\cos y+\sin x)^3(\cos y+\sin x)^3-3\sin y(\cos y+\sin x)^2(\cos x-\sin y)^4$; $g`_y(0,0)=-4$.

Линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} x` = -2x + y \\ y` = 3x - 4y \end{cases}$$

Найдем собственные значения матрицы системы:

$$\det(A - \lambda E) = (-2 - \lambda)(-4 - \lambda) - 3 = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda + 1)(\lambda + 5)$$

Собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5$ вещественны и отрицательны. Точка покоя - «узел» асимптотически устойчива.

Задача №7.

Найти все точки покоя системы двух дифференциальных уравнений. Линеаризовать систему в окрестности каждого положения равновесия, исследовать его на устойчивость. Определить характер фазовых траекторий в окрестности положения равновесия.

$$\begin{cases} x` = (x - y)(1 - 2x) \\ \quad y` = 2x(x - 1) \end{cases}$$

Решение. Точки покоя – это те точки, в которых x`=0, y`=0, поэтому возникает система уравнений: (x-y)(1-2x)=0, 2x(x-1)=0. Система имеет два решения: (0,0) и (1,1). Обозначим точки покоя: A(0,0), B(1,1).

<u>Исследуем точку A(0,0).</u> Раскрывая скобки, получим:

$x`=-2x^2+2xy+x-y$; $y`=2x^2-2x$

Линеаризуем эту нелинейную систему в окрестности точки (0,0).

В окрестности точки A(0,0) смещения x и y малы, поэтому отбросим слагаемые второго порядка малости $2x^2+2xy$, $2x^2$.Соответствующая линейная система имеет вид:

$\begin{cases} x` = x - y \\ y` = -2x \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

Найдем собственные значения матрицы линейной системы:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Собственные числа вещественны и имеют разные знаки:

$\lambda_1 = 2 > 0, \lambda_2 = -1 < 0$. Тип точки покоя – «седло» (неустойчиво).

Исследуем точку B(1,1).

Сделаем замену переменных: u=x-1, v=y-1, тогда x=u+1, y=v+1.

В новых переменных система имеет вид:

$$\begin{cases} u` = -2(u+1)2 + 2(u+1)(v+1) + u + 1 - v - 1 \\ v` = 2(u+1)^2 - 2(u+1) \end{cases}$$

Точка покоя имеет координаты (0,0). Отбросим в правых частях уравнений слагаемые второго порядка. Линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} u` = -u + v \\ v` = 2u \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы линейной системы:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

Собственные числа вещественны и имеют разные знаки:

$\lambda_1 = 1 > 0, \lambda_2 = -2 < 0$. Тип точки покоя – «седло» (неустойчиво).

Ответ. Данная нелинейная система уравнений имеет две точки покоя A(0,0), B(1,1) типа «седло», которые являются неустойчивыми.