Лекция №1

Системы дифференциальных уравнений

Системой нормального вида называется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{1}$$

В такой системе число уравнений равно числу неизвестных функций. В левой части каждого уравнения системы стоит первая производная одной из неизвестных функций, в правой части производных нет.

Уравнение $\dot{x} = f(t, x)$ является частным случаем такой системы. К системам нормального вида сводятся дифференциальные уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Действительно, введя новые переменные по стандартным формулам $x_1 = y$, $x_2 = y'$, …, $x_n = y^{(n-1)}$, придём к частному случаю системы нормального вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & x_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n, \\ \dot{x}_n & = & f(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \tag{3}$$

К системам нормального вида сводятся также многие более сложные системы и системы возникающие в различных областях науки и техники.

Более общие системы, составленные из уравнений вида (2) называются каноническими системами. Дадим более точное определение таких систем.

Системой канонического вида называется система

$$y_i^{(n_i)} = f_i(t, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_k^{(n_k-1)}), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Число уравнений равно числу неизвестных функций. Каждое уравнение системы (4) разрешено относительно старшей производной соответствующей неизвестной функции.

Действуя также как и в случае одного уравнения вида (2), система канонического вида может быть сведена к системе нормального вида. Число уравнений в этой нормальной системе будет равно $n = n_1 + \ldots + n_k$.

Действительно, рассмотрим пример, систему канонического вида

$$\begin{cases} y_1'' &= f_1(t, y_1, y_1', y_2), \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_1', y_2). \end{cases}$$

Вместо y_1 введём две новые переменные $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1'$, вместо y_2– новую переменную $x_3 = y_2$. В результате получим систему нормального вида:

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= f_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ x_3' &= f_2(t, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Для исследования общих свойств систем нормального вида (1) удобно использовать векторные обозначения

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n).$$

Тогда система (1) запишется в виде одного векторного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{5}$$

Определение. Вектор-функция $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ определённая на интервале $(a,\, b)$ и при постановке в (5) обращающая его в тождество на этом интервале называется решением системы (5).

Напомним, что в силу теоремы существования и единственности при определенных условиях на вектор-функцию $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ задача Коши

$$\left\{ \begin{array}{cl} \dot{\boldsymbol{x}} & = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) & = \boldsymbol{x}^0 \end{array} \right. \tag{6}$$

имеет единственное решение. При разных начальных условиях $\boldsymbol{x}^0$ получим разные решения.

Определение. Общим решением системы (5) называется вектор-функция $\boldsymbol{x}(t, C_1, \ldots, C_n)$ такая, что для любого допустимого набора значений констант $C_1 = C_1^0, \ldots, C_n = C_n^0$ вектор-функция $\boldsymbol{x}^0(t, C_1^0, \ldots, C_n^0)$ является решением системы (5).

Определение. Общим интегралом системы (5) называется ее общее решение, заданное в виде неявной функции $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}) = 0$, где $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_n)$.

Скалярная запись общего интеграла:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(t, x_1, \ldots, x_n, C_1, \ldots, C_n) = 0. \end{cases}$$

Стандартная запись общего интеграла:

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n(t, x_1, \ldots, x_n) = C_n. \end{cases}$$

Определение. Вектор-функция $\mathbf{\Phi}(t, \boldsymbol{x})$, такая что для любого решения $\boldsymbol{x}(t)$, $t \in (a, b)$ системы (5) $\mathbf{\Phi}(t, \boldsymbol{x}(t)) = \text{const}$ для $\forall t \in (a, b)$, называется интегралом (первым интегралом) системы.

Методы интегрирования систем общего вида.

1. Метод исключения неизвестных.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{y}, \\ \dot{y} &= \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{\dot{x}} \Rightarrow \dot{y} = -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \Rightarrow -\frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ddot{x}x + \dot{x}^2 = 0.$$

В последнем выражении узнаем полную производную

$$\frac{d\,\dot{x}x}{d\,t} = 0 \Rightarrow \dot{x}x = \frac{C_1}{2} \Rightarrow \frac{d\,x^2}{d\,t} = C_1 \Rightarrow x^2 = C_1 t + C_2.$$

Отсюда

$$x = \pm\sqrt{C_1 t + C_2} \Rightarrow \dot{x} = \pm\frac{C_1}{2\sqrt{C_1 t + C_2}} \Rightarrow y = \pm\frac{2\sqrt{C_1 t + C_2}}{C_1}.$$

2. Метод выделения интегрируемых комбинаций.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{1}{y}, \\ \dot{y} &= \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Разделим первое уравнение системы на второе, получим уравнение, зависящее от двух переменных:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{x}{y} \Rightarrow \int \frac{d\,x}{x} = \int \frac{d\,y}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + ln|C_1| \Rightarrow x = C_1 y.$$

Нам нужно ещё одно соотношение, связывающее x и y. Умножим первое уравнение системы на y, второе – на x и сложим:

$$y\dot{x} + x\dot{y} = 2 \Rightarrow \frac{d\,xy}{d\,t} = 2 \Rightarrow xy = 2t + C_2.$$

Таким образом общий интеграл системы

$$\begin{cases} \frac{x}{y} & = C_1, \\ xy & = 2t + C_2 \end{cases}.$$

Симметричная форма записи нормальной системы.

Запишем систему (1)в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)} = dt, \\ \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)} = dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_n}{f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)} = dt. \end{cases} \tag{7}$$

Приравняв левые части системы (7), получим соотношение

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,\ldots,x_n)} = \ldots$$
$$= \frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\ldots,x_n)} = dt, \tag{8}$$

или в более общем виде

$$\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t,x_1,\ldots,x_n)} = \ldots$$
$$= \frac{dx_n}{f_n(t,x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dt}{g}. \tag{9}$$

Соотношения (8), (9) являются симметрично формой записи нормальной системы (1).

Определение. Интегральный кривой системы (5)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n),\, \boldsymbol{f} = (f_1,\ldots,f_n))$$

называется кривая в $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящая из точек $(t,\boldsymbol{x}(t)) = (t,x_1(t),\ldots,x_n(t))$, где $\boldsymbol{x}(t)$, $t \in (a,b)$– решение системы (5).

Замечание. *В силу единственности решения задачи Коши, интегральные кривые не имеют общих точек.*