Типовой Расчет II Семестр Тришин Никита Вариант 27

I Номер

Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_5 - 5x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 11x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$ ч

Запишем систему уравнений в матричном виде.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 5 & -1 & -11 & -3 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 5 & -1 & -11 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$ поменяем местами первый и второй столбец ($x_1 \leftrightarrow x_2$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & -7 & 2 \\ 11 & 1 & -12 & 34 & -5 \\ -1 & 5 & -11 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_2 + 2A_1 \\ A_3 - 11A_1 \\ A_4 + A_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & -19 & -3 & 4 \\ 0 & -32 & 76 & 12 & -16 \\ 0 & 8 & -19 & -1 & 4 \end{pmatrix} A_2 - A_4 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -32 & 76 & 12 & -16 \\ 0 & 8 & -19 & -1 & 4 \end{pmatrix} x_1 \leftrightarrow x_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 76 & -32 & -16 \\ 0 & -1 & -19 & 8 & 4 \end{pmatrix} A_3 + 4A_4 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -19 & 8 & 4 \end{pmatrix} A_3 + 4A_2 (\text{Отбросим } 3 - \text{ю строчку}), A_1 + A_2, A_4 - 0{,}5A_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19 & 8 & 4 \end{pmatrix} x_3 \leftrightarrow x_5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -19 \end{pmatrix} A_1 - \frac{1}{4}A_3 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3\frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -19 \end{pmatrix}$$ Теперь важно не перепутать местами переменные!

$x_1 \leftrightarrow x_2$, $x_1 \leftrightarrow x_4$, $x_3 \leftrightarrow x_5$, т. е. текущий порядок $x_2\ x_4\ x_5\ x_1\ x_3$

x_2, x_4, x_5 — базисные

x_1, x_3 — свободные

$$\begin{cases} x_2 + x_1 - 3\dfrac{1}{4}x_3 = 0 \\ -2x_4 = 0 \\ 4x_5 + 8x_1 - 19x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3\dfrac{1}{4}x_3 - x_1 \\ x_4 = 0x_1 + 0x_3 \\ x_5 = 4{,}75x_3 - 2x_1 \end{cases}$$ Пусть $x_1 = c_1, x_3 = c_2$

Тогда $X = \begin{pmatrix} c_1 + 0c_2 \\ -c_1 + 3{,}75c_2 \\ 0c_1 + c_2 \\ 0c_1 + 0c_2 \\ -2c_1 + 4{,}75c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}25 \\ 1 \\ 0 \\ 4{,}75 \end{pmatrix}$

II Номер

Найти общее решение в зависимости от значения параметра λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + (2\lambda - 1)x_2 + (\lambda + 2)x_3 = 1 \\ (\lambda - 1)x_2 + (\lambda - 3)x_3 = 1 + \lambda \\ \lambda x_1 + (3\lambda - 2)x_2 + (3\lambda + 1)x_3 = 2 - \lambda \end{cases}$$

Представим систему уравнений в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda + 2 & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 3 & | & 1 + \lambda \\ \lambda & 3\lambda - 2 & 3\lambda + 1 & | & 2 - \lambda \end{pmatrix} A_3 - A_1 \sim \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda + 2 & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 3 & | & 1 + \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 2\lambda - 1 & | & 1 - \lambda \end{pmatrix} A_3 - A_2 \sim$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda - 1 & \lambda + 2 & | & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 3 & | & 1 + \lambda \\ 0 & 0 & \lambda + 2 & | & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$\det = \lambda * (\lambda - 1) * (\lambda + 2) = \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2)$

$\Rightarrow$ СЛАУ не может быть решена при $\lambda = 0; 1; -2$

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2(2\lambda - 1) + x_3(\lambda + 2) = 1 \\ x_2(\lambda - 1) + x_3(\lambda - 3) = 1 + \lambda \\ x_3(\lambda + 2) = 1 - \lambda \end{cases}$$

x_1, x_2 – базисные x_3 – свободная

$$x_3 = \frac{1 - \lambda}{\lambda + 2}$$

$$x_2 = \frac{1 + \lambda - \dfrac{(\lambda - 3) * (1 - \lambda)}{\lambda + 2}}{\lambda - 1} = \frac{(1 + \lambda) * (\lambda + 2) - (\lambda - 3) * (1 - \lambda)}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)}$$
$$= \frac{\lambda^2 + 3\lambda + 2 - (-\lambda^2 + 4\lambda - 3)}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)} = \frac{2\lambda^2 - \lambda + 5}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)}$$

$$x_1 = \frac{1 - \frac{(2\lambda^2 - \lambda + 5) * (2\lambda - 1)}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)} - \frac{(1 - \lambda) * (\lambda + 2)}{\lambda + 2}}{\lambda} = \frac{\lambda - \frac{4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 11\lambda - 5}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)}}{\lambda} =$$

$$\frac{\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 - 11\lambda + 5}{\lambda * (\lambda - 1) * (\lambda + 2)} = \frac{-3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 13\lambda + 5}{\lambda * (\lambda - 1) * (\lambda + 2)}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-3\lambda^3 + 5\lambda^2 - 13\lambda + 5}{\lambda * (\lambda - 1) * (\lambda + 2)} \\ \frac{2\lambda^2 - \lambda + 5}{(\lambda - 1) * (\lambda + 2)} \\ \frac{1 - \lambda}{\lambda + 2} \end{pmatrix}, \text{при } \lambda \neq 0; 1; -2$$

Решим для случаев $\lambda = 0; 1; -2$

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & +2 & | & 1 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 \\ 0 & -2 & +1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 \\ -1 & -3 & | & 1 \\ -2 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} A_3 - (A_1 + A_2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 1 \\ -1 & -3 & | & 1 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $x_1 \in (-\infty; +\infty) = c_1, x_3 = 0$

$-x_2 = 1 \; x_2 = -1 = c_2$

$1 + x_3 = 1$

$x_3 = 0$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0c_1 + 0c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\infty; +\infty) \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 1 & 1 & 4 & | & 1 \end{pmatrix} A_3 - A_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0 \; x_3 = -1$ Противоречие! Значит, решений нет.

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & -5 & | & -1 \\ -2 & -8 & -5 & | & 4 \end{pmatrix} \sim A_3 - (A_1 + A_2) \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & -3 & -5 & | & -1 \\ 0 & -2 & 0 & | & 4 \end{pmatrix}$$

Очевидно, $x_2 = -2 = c_1$. Тогда $-2x_1 - 3c_1 = 1 \; \left| \; x_1 = \frac{-3c_1 - 1}{2} \; = 2.5 \right|$

$-3c_1 - 5x_3 = -1 \; x_3 = \frac{1 - 3c_1}{5} = \frac{7}{5}$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2} \\ c_1 \\ \frac{1}{5} - \frac{3}{5}c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

III Номер

Линейный оператор $\mathcal{A}\ V^3 \rightarrow V^3$ определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.

1)Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в подходящем базисе $(\overline{\imath, \jmath}, \bar{k})$

2)Определить в какую точку переходят точки с координатами (1,0,0) и (-1,2,1) под действием отображения α

Отображение $\mathcal{A}$: проектирование на ось $2x = 2y = -z$

1)Сначала выберем подходящий базис. Пусть $\overline{e_1} = (1; 1; -2)$ – вектор, параллельный оси

$\overline{e_2}; \overline{e_3} - \text{векторы, перпендикулярные оси } 2x = 2y = -z$

$\overline{e_2} = (x_2; y_2; z_2)$

$(\overline{e_1}; \overline{e_2}) = x_2 + y_2 - 2z_2 = 0$

$\overline{e_2} = (1; 1; 1)$

Аналогично

$\overline{e_3} = (1; -1; 0)$

Причем $(\overline{e_2}; \overline{e_3}) = 0$

Проверим линейную независимость векторов

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1 + 2) = 6 \neq 0$$

$\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$ линейно независимы. Также, так как мы работаем в трехмерном пространстве, то этих трех векторов достаточно, чтобы выразить любые векторы в данном пространстве.

Значит $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$ образуют базис $Б_1$. В будущем мы узнаем, что этот базис – собственный (то есть составлен из собственных векторов). Матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $Б_1$ будет:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь выведем матрицу оператора для канонического базиса Б $\{\bar{\imath}; \bar{\jmath}; \bar{k}\}$

Пусть $\bar{x}$- произвольный вектор, который мы проектируем на ось $2x = 2y = -z$

$\bar{h} -$ направляющий вектор оси, $2x = 2y = -z$

$\bar{\text{c}} -$ искомая проекция $\bar{a}$ на ось

Заметим, что $\bar{c} = \lambda * \bar{h} \Rightarrow |\bar{c}| = \lambda * |\bar{h}| \Rightarrow \lambda = \dfrac{|\bar{c}|}{|\bar{h}|}$

Угол между вектором $\bar{a}$ и осью можно вычислить следующим образом

$\cos(\bar{x}; \bar{h}) = \dfrac{(\bar{x}; \bar{h})}{|\bar{x}||\bar{h}|}$

Заметим, что $\cos(\bar{x}; \bar{c}) = \dfrac{|\bar{c}|}{|\bar{x}|} = \cos(\bar{x}; \bar{h}) \Rightarrow \dfrac{|\bar{c}|}{|\bar{x}|} = \dfrac{(\bar{x}; \bar{h})}{|\bar{x}||\bar{h}|} \Rightarrow |\bar{c}| = \dfrac{(\bar{x}; \bar{h})}{|\bar{h}|} \Rightarrow \lambda * |\bar{h}| = \dfrac{(\bar{x}; \bar{h})}{|\bar{h}|}$

$$\lambda = \frac{(\bar{x}; \bar{h})}{(\bar{h})^2}$$

Пусть $\bar{h} = (1,1,2)$

$\bar{c} = \mathcal{A}(\bar{x}) = \dfrac{(\bar{x}; \bar{h})}{(\bar{h})^2} * \bar{h}$

$\mathcal{A}(\bar{\imath}) = \dfrac{1}{6} * \bar{h} = (\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3})$

$\mathcal{A}(\bar{\jmath}) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} * \dfrac{\bar{h}}{\sqrt{6}} = \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; -\dfrac{1}{3}\right)$

$\mathcal{A}(\bar{k}) = \dfrac{-2}{\sqrt{6}} * \dfrac{\bar{h}}{\sqrt{6}} = \left(-\dfrac{2}{6}; -\dfrac{2}{6}; \dfrac{4}{6}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Теперь сделаем проверку. Составим матрицу перехода от базиса Б_1 в базис Б.

$\bar{e_1} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$

$\bar{e_2} = \bar{\imath} + \bar{\jmath} + \bar{k}$

$\bar{e_3} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + 0\bar{k}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Теперь найдем матрицу C^{-1}

$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$C_{11}^T = 1\ C_{12}^T = 1\ C_{13}^T = -2$

$C_{21}^T = 2\ C_{22}^T = 2\ C_{23}^T = 2$

$C_{31}^T = 3\ C_{32}^T = -3\ C_{33}^T = 0$

$C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Проверим, правильно ли была найдена обратная матрица.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} * \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = E$

А теперь проверим, правильно ли была найдена матрица оператора с помощью формулы

$$A = C * A_1 * C^{-1}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Все сходится $\Rightarrow$ матрица оператора была найдена верно!

2) $\bar{x} = (1; 0; 0)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\bar{x}) = (\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{3})$

$\bar{y} = (-1; 2; 1)$

$$(-1 \quad 2 \quad 1) * \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}\right)$$

IV Номер

Пусть A- матрица оператора $\mathcal{A}$ из задачи 3 в каноническом базисе $\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\mathcal{A}$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Сначала найдем собственные значения

$$\mathcal{A}\bar{a} = \lambda\bar{a}$$

$$(A - \lambda E)\bar{a} = 0$$

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \lambda & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{6} - \lambda & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1}{6} - \lambda\right)^2 * \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \frac{1}{54} + \frac{1}{54} - \left(\frac{1}{9} * \left(\frac{1}{6} - \lambda\right) + \frac{1}{36} * \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \frac{1}{9} * \left(\frac{1}{6} - \lambda\right)\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{36} - \frac{1}{3}\lambda + \lambda^2\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) + \frac{1}{27} - \left(\frac{2}{9}\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) + \frac{1}{54} - \frac{1}{36}\lambda\right) = 0$$

$$\frac{1}{54} - \frac{2}{9}\lambda + \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{1}{36}\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{27} + \frac{2}{9}\lambda - \frac{1}{54} + \frac{1}{36}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$\lambda^2(1-\lambda)=0$

$\lambda=0;1;0$

Найдем собственные векторы

$\lambda=0$

$$A-0E=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}A_1-A_2\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}A_3-2A_2\sim(\frac{1}{6}\quad\frac{1}{6}\quad-\frac{1}{3})\sim$$

$\sim(1;1;-2)$

$x_1+x_2-2x_3=0$

$2x_3=x_1+x_2$

$$\begin{cases}x_1=a\\ x_2=b\\ x_3=\frac{1}{2}(a+b)\end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix}a\\ b\\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$c_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix};c_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Заметим, что c_1 и c_2 перпендикулярны оси $2x=2y=-z$ так как

$\big(c_1;(1;1;-2)\big)=0$ и $\big(c_2;(1;1;-2)\big)=0$(скалярное произведение)

Векторы, перпендикулярные оси, переходят в нулевой вектор при проектировании на ось.

$\lambda=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}-\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-5 & 1 & -2\\ 1 & -5 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-5 & 1 & -2\\ 1 & -5 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-6 & 6 & 0\\ 1 & -5 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -5 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=x_2=a\\ 2x_2=-x_3\end{cases}$$

$x_3 = -2a$

$c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Этот собственный вектор лежит на оси $2x = 2y = -z$ и при проектировании переходит в себя.
Итак, составим собственный базис

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2S_2 \\ 2S_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_3 + S_2 \\ \frac{1}{2} S_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} S_2 - S_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} S_2 \leftrightarrow S_3 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Совпадает с матрицей из 3-го номера!

V Номер

1) Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ является линейным оператором в пространстве P_n многочленов степени не выше n

2) Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в каноническом базисе P_n

3) Существует ли обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$? Если да, найти его матрицу

4) Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $\mathcal{A}$

$n = 3; 3tp(t) - t^2 * \dfrac{dp(t)}{dt}$

$\overline{e_3} = t^3\ \overline{e_2} = t^2\ \overline{e_1} = t\ \overline{e_0} = 1$

$P_3(\bar{x}) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$

$P_3(\bar{y}) = b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0$

1) Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y} \in P_n$
$P_3(\bar{x} + \bar{y}) = (a_3 + b_3)t^3 + (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$

$\mathcal{A}(\bar{x}) = 3t(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) - t^2(3a_3t^2 + 2a_2t + a_1)$

$\mathcal{A}(\bar{y}) = 3t(b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0) - t^2(3b_3t^2 + 2b_2t + b_1)$

$$\mathcal{A}(\bar{x} + \bar{y}) = 3t\big((a_3 + b_3)t^3 + (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)\big) - t^2(3(a_3 + b_3)t^2 + 2(a_2 + b_2)t + (a_1 + b_1))$$

$$\mathcal{A}(\bar{x}) + \mathcal{A}(\bar{y}) = 3t(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) - t^2(3a_3t^2 + 2a_2t + a_1) + 3t(b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0) - t^2(3b_3t^2 + 2b_2t + b_1) =$$

$$3t(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 + b_3t^3 + b_2t^2 + b_1t + b_0) - t^2(3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 + 3b_3t^2 + 2b_2t + b_1) =$$

$$3t\big((a_3+b_3)t^3+(a_2+b_2)t^2+(a_1+b_1)t+(a_0+b_0)\big) - t^2\big(3(a_3+b_3)t^2+2(a_2+b_2)t+(a_1+b_1)\big) = \mathcal{A}(\bar{x}+\bar{y})$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda\bar{x} = \lambda a_3 t^3 + \lambda a_2 t^2 + \lambda a_1 t + \lambda a_0$

$\lambda\mathcal{A}(\bar{x}) = \lambda\big(3t(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0) - t^2(3a_3t^2+2a_2t+a_1)\big)$

$\mathcal{A}(\lambda\bar{x}) = 3t(\lambda a_3t^3+\lambda a_2t^2+\lambda a_1t+\lambda a_0) - t^2(3\lambda a_3t^2+2\lambda a_2t+\lambda a_1) =$

$$3t\lambda(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0) - \lambda t^2(3a_3t^2+2a_2t+a_1) = \lambda\big(3t(a_3t^3+a_2t^2+a_1t+a_0) - t^2(3a_3t^2+2a_2t+a_1)\big) = \lambda\mathcal{A}(\bar{x})$$

Следовательно, $\mathcal{A}$- линейный оператор.

2) $\mathcal{A}(\bar{e_0}) = 3t - t^2 * 0 = 3t = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\bar{e_1}) = 3t^2 - t^2 = 2t^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\bar{e_2}) = 3t^3 - t^2 * 2t = t^3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}(\bar{e_3}) = 3t^4 - t^2 * 3t^2 = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

3) Не существует, так как $\det A = 0$

4) Найдем образ и ядро $\mathcal{A}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&0&0&0&1&0&0&0\\3&0&0&0&0&1&0&0\\0&2&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$Im\,\mathcal{A} = \alpha(3;0;0;0) + \beta(0;2;0;0) + \gamma(0;0;1;0)$

$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \alpha(1;0;0;0)$

$\operatorname{def}\mathcal{A} = 1$

$rg\,\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{A} = \dim V$

$3 + 1 = 4$

VI Номер

Оператор $\mathcal{A}$ действует на матрицы, образующие линейное подпространство M в пространстве матриц второго порядка.

1)Доказать, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор в M.

2)Найти матрицу оператора $\mathcal{A}$ в каком-нибудь базисе M.

3)Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $\mathcal{A}$.

4)Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$(напомним, что в этой задаче векторами являются матрицы)

5)Доказать, что оператор $\mathcal{A}$ является оператором простого типа. Выписать матрицу оператора $\mathcal{A}$ в собственном базисе.

$M = \left\{X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}\right\}\ \alpha + \beta + \delta + \gamma = 0$

$\mathcal{A}(X) = BX - XB \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1)Пусть $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \delta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \in M$

$$\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \delta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \delta_1 - \beta_1 & \gamma_1 - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \beta_1 - \delta_1 \end{pmatrix}$$

$\delta_1 - \beta_1 + \gamma_1 - \alpha_1 + \alpha_1 - \gamma_1 + \beta_1 - \delta_1 = 0$(Это действительно так, в примере все сокращается)

$\mathcal{A}(X) \in M$

Аналогично, $\mathcal{A}(Y) \in M$

$$\mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) = \begin{pmatrix} \delta_1 - \beta_1 & \gamma_1 - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \beta_1 - \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_2 - \beta_2 & \gamma_2 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \gamma_2 & \beta_2 - \delta_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \delta_1 - \beta_1 + \delta_2 - \beta_2 & \gamma_1 - \alpha_1 + \gamma_2 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_2 - \gamma_2 & \beta_1 - \delta_1 + \beta_2 - \delta_2 \end{pmatrix}$$

$\delta_1 - \beta_1 + \delta_2 - \beta_2 + \gamma_1 - \alpha_1 + \gamma_2 - \alpha_2 + \alpha_1 - \gamma_1 + \alpha_2 - \gamma_2 + \beta_1 - \delta_1 + \beta_2 - \delta_2 = 0$

(Все сокращается, значит это верно) $\mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) \in M$

$$\mathcal{A}(X + Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \delta_1 + \delta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \\ \delta_1 + \delta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 + \delta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 + \delta_2 - \beta_1 - \beta_2 & \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \delta_1 - \delta_2 & \beta_1 + \beta_2 - \delta_1 - \delta_2 \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{A}(X) + \mathcal{A}(Y) \in M$$

$\lambda\mathcal{A}(X) = \lambda\begin{pmatrix} \delta_1 - \beta_1 & \delta_1 - \alpha_1 \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \beta_1 - \delta_1 \end{pmatrix} \quad \lambda\delta_1 - \lambda\beta_1 + \lambda\gamma_1 - \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_1 - \lambda\gamma_1 + \lambda\beta_1 - \lambda\delta_1 = 0$

$\lambda\mathcal{A}(x) \in M$

$$\mathcal{A}(\lambda X)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1&\lambda\beta_1\\\lambda\delta_1&\lambda\gamma_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1&\lambda\beta_1\\\lambda\delta_1&\lambda\gamma_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda(\delta_1-\beta_1)&\lambda(\gamma_1-\alpha_1)\\\lambda(\alpha_1-\gamma_1)&\lambda(\beta_1-\delta_1)\end{pmatrix}=\lambda\mathcal{A}(x)$$

$\mathcal{A}$- линейный оператор в М

2) $\gamma=\alpha+\beta+\delta$

$$\mathcal{A}(X)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\delta&-\alpha-\beta-\delta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\delta&-\alpha-\beta-\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\delta&-\alpha-\beta-\delta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\-\alpha-\beta-\delta&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta-\beta&-2\alpha-\beta-\delta\\2\alpha+\beta+\delta&\beta-\delta\end{pmatrix}$$

$$\delta-\beta-2\alpha-\beta-\delta+2\alpha+\beta+\delta+\beta-\delta=0$$

$\mathcal{A}(X)\in M$

$$X=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\delta&-\alpha-\beta-\delta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ $E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$-базис

Найдем матрицу оператора в этом базисе.

$$\mathcal{A}(E_1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(E_2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(E_3)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Матрица оператора $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&-1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$ в базисе

$E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$ $E_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$

3)Найдем образ $\mathcal{A}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-2&-1&-1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-2&-1&-1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$Im\,\mathcal{A}=a(0;-1;1)+b(2;-1;-1)$

$\ker\mathcal{A}=a(0;0;1)$

$rg\,\mathcal{A}+\operatorname{def}\mathcal{A}=\dim V$

$2+1=3$

4) Найдем собственные значения $\mathcal{A}$

$|A-\lambda E|=0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$=0

$\lambda*(1-\lambda^2)+2-2+2(1+\lambda)-2(1-\lambda)-\lambda=-\lambda^3+4\lambda=0$

$\lambda(4-\lambda^2)=0$

$\lambda=0;2\,;-2$

Найдем собственные векторы

$\lambda=0$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_3+A_2 \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1-x_2-x_3=0 \\ -x_2+x_3=0 \end{cases}$

x_3 – свободный, $x_1; x_2$ – базисные

$x_3=c_1$

$x_2=c_1$

$-2x_1-c_1-c_1=0$

$x_1=-c_1$

$X=c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C_1=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=0$

$\lambda=2$

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_3+A_1 \\ A_2-A_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

x_3 – свободный, x_1, x_2 – базисные

$x_3=c_1$

$\begin{cases} -2x_1-x_2+x_3=0 \\ -2x_2=0 \end{cases}$

$x_2=0c_1$

$-2x_1-0+c_1=0$

$x_1=-\frac{1}{2}c_1$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 - A_3 \\ A_2 + A_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

x_3 – свободный, x_1, x_2 – базисные

$c_1 = x_3$

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_2 = -c_1$

$2x_1 - c_1 + 3c_1 = 0$

$x_1 = -c_1$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, $C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – собственные векторы $\mathcal{A}$

5)Докажем, что $\mathcal{A}$- оператор простого типа, т. е. составим базис из его собственных векторов.(Б $= \{C_1, C_2, C_3\}$)

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{линейно независима}$$

Размерность базиса совпадает с размерностью линейного оператора $\Rightarrow$ полнота

Значит, Б- базис $\mathcal{A}$.

Значит $\mathcal{A}$- линейный оператор простого типа.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$матрица $\mathcal{A}$ в собственном базисе.