14 семинар. Второй способ решения восьмой задачи.

Привожу теоретическое обоснование приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

1) В задаче не сказано, что квадратичная форма задана в евклидовом пространстве. А если даже предположить, что пространство евклидово, не сказано, в каком базисе она задана. Поэтому мы сами задаем скалярное произведение (старое, если оно было, можно забыть) по формуле

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = X^TY = X^TEY.$$

Билинейность, симметричность и положительная определенность очевидны, как и то, что базис в этом скалярном произведении становится ортонормированным – ведь матрица билинейной формы, то есть матрица Грама скалярного произведения, единичная.

2) Рассмотрим матрицу B квадратичной формы. С удивлением или без него убеждаемся, что матрица симметричная. Поэтому, если бы это была матрица линейного оператора, то наложение двух условий – симметричность матрицы и ортонормированность базиса – позволяли бы утверждать, что оператор самосопряженный. Но ведь на матрице не написано, матрицей чего она является, поэтому мы временно умыкнем её у квадратичной формы и будем считать, что это матрица $A = B$ (самосопряженного, как мы поняли) оператора.

3) Самосопряженный оператор, как было доказано на лекции, обладает совершенно чудесными свойствами. Например, все корни характеристического уравнения у него действительные, их алгебраическая кратность совпадает с геометроической (то есть если какой-то корень характеристического уравнения имеет кратность k, то обязательно найдутся k линейно независимых собственных векторов с этим собственным значением), собственные векторы с различными собственными значениями попарно ортогональны, и вообще такой оператор имеет ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.

Если все корни характеристического уравнения окажутся простыми (то есть будут иметь кратность 1), то найдя для каждого из них собственный вектор и поделив его на его длину, мы найдем этот базис. Если же есть кратный корень, то , возможно, придется применить метод ортогонализации Грама-Шмидта, который Вы уже знаете по задаче 7.

4) Матрица A' оператора в построенном базисе диагональна, причем она связана со старой матрицей по формуле

$$A' = C^{-1}AC.$$

Вспоминаем, что мы с самого начала побеспокоились о том, чтобы первоначальный базис был ортонормированным, а поскольку новый базис также ортонормированный, то матрица C перехода от старого базиса кновому ортогональна, что означает, что

$$C^{-1} = C^T$$

Поэтому можно считать, что

$$A' = C^TAC.$$

Далее, если рассмотреть исходную квадратичную форму в построенном базисе, то ее матрица будет равна

$$B' = C^TBC.$$

А поскольку $B = A$, получаем, что

$$B' = A',$$

то есть приведя линейный оператор к диагональному виду, мы и квадратичную форму привели к сумме квадратов.

5) Наконец, в конце задачи требовалось проверить закон инерции квадратичной формы, который утверждает, что каким бы способом Вы не приводили квадратичную форму к сумме квадратов, число положительных слагаемых (это так называемый положительный индекс инерции i_+), как и число отрицательных слагаемых (отрицательный индекс инерции i_-) всегда получается одним и тем же. Кстати, сумма $i_+ + i_-$ совпадает с рангом матрица квадратичной формы (его можно назвать рангом самой квадратичной формы).