Раздел 2. Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве

Лекция 2 Ортогональная проекция на конечномерное подпространство.

Ортогональность и ортогональное дополнение.

Элементы $x, y \in X$ называются взаимно ортогональными ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$.
Отношение $\perp$ симметрично: $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$ (при этом не рефлексивно и не транзитивно).

Утверждение (теорема Пифагора):

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Действительно,

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Утверждение (многомерный вариант теоремы Пифагора):

$$g_i \perp g_j\,, i \neq j \Rightarrow \left\| \sum_j g_j \right\|^2 = \sum_j \|g_j\|^2$$

(например, по индукции). Пока что речь идёт о конечных суммах, далее обобщим на ряды.

Замечание: сумму двух или нескольких попарно ортогональных элементов пространства называют ортогональной суммой.

Утверждение: попарно ортогональная система ненулевых элементов $\{g_1, \ldots, g_m\}$ линейно независима.
Действительно, пусть

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_m g_m = o\,.$$

Докажем, что в этом случае все коэффициенты $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, т.е. линейная комбинация тривиальна. Для этого скалярно умножим это равенство на g_k. В силу попарной ортогональности в левой части останется единственное слагаемое $\alpha_k \|g_k\|^2$, а правая часть равна нулю: $\alpha_k \|g_k\|^2 = 0$. Поскольку $g_k \neq o$, отсюда следует, что $\alpha_k = 0$. Из произвольности k вытекает тривиальность линейной комбинации.

Альтернативное доказательство – через теорему Пифагора. Все слагаемые линейной комбинации взаимно ортогональны. Вычислив скалярный квадрат левой и правой части равенства, получаем:

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2 \|g_k\|^2 = 0\,.$$

В левой части все члены неотрицательны, при этом $\|g_k\|^2 \neq 0$, откуда следует равенство нулю всех коэффициентов α_k.

Замечание: для бесконечной системы (счётной или несчётной) попарно ортогональных элементов доказанное утверждение также справедливо. Доказательство такое же, единственное отличие – общее число слагаемых линейной комбинации заранее не фиксировано (но конечно).

Утверждение: $x \perp x \Rightarrow x = o$ (из аксиомы невырожденности). Элемент, ортогональный сам себе – нулевой элемент пространства.

Утверждение: если элемент ортогонален всем элементам пространства X, то это нулевой элемент (поскольку ортогонален, в том числе, и самому себе).

Следствие: если

$$\forall x \in X : \, (x, y') = (x, y'') \, ,$$

то $y' = y''$ (поскольку $\forall x \in X : \, (x, y' - y'') = 0$).

Утверждение: если элемент ортогонален всем элементам всюду плотного множества в пространстве X, то это нулевой элемент.

Доказательство. Пусть элемент x ортогонален всем элементам всюду плотного множества. В силу плотности множества найдётся последовательность $\{x_k\}$ его элементов, сходящаяся к x: $x_k \to x$. Но тогда $(x, x_k) \to (x, x)$. С другой стороны, $(x, x_k) = 0$ для всех k, поэтому $(x, x) = 0$ и $x = o$.

Следствие: если для всех элементов x, принадлежащих всюду плотному множеству, $(x, y') = (x, y'')$, то $y' = y''$.

Элемент x и множество Q взаимно ортогональны ($x \perp Q$ или $Q \perp x$), если x ортогонален всем элементам этого множества.

Множества $Q_{1,2} \subset X$ называются взаимно ортогональными ($Q_1 \perp Q_2$), если любая пара их элементов взаимно ортогональна:

$$\forall x \in Q_1 \, \forall y \in Q_2 : \, (x, y) = 0 \, .$$

Если $Q \perp Q$, то Q либо пустое множество, либо состоит из единственного элемента o.

Множества $\{Q_\alpha\}$ образуют ортогональное семейство, если множества этого семейства попарно ортогональны: $Q_\alpha \perp Q_\beta$, если $\alpha \neq \beta$.

Утверждение: если $Q_1 \perp Q_2$ и $x \in Q_1 \cap Q_2$, то $x = o$ (потому что $x \perp x$).

Следствие: если $Q_1 \perp Q_2$, то пересечение $Q_1 \cap Q_2$ либо пусто, либо состоит из единственного элемента o. Второй вариант реализуется, в частности, в случае, если $Q_{1,2}$ – линеалы.

Утверждение: если элемент $w \in X$ представляется в виде ортогональной суммы $w = z + h$, $z \in Q_1$, $h \in Q_2$, $Q_1 \perp Q_2$, то такое представление единственно.

Доказательство: пусть $w = z + h = z' + h'$, $z' \in Q_1$, $h' \in Q_2$, тогда

$$z - z' = h' - h \in Q_1 \cap Q_2 \Rightarrow z - z' = h' - h = o \Rightarrow z' = z \wedge h' = h \, .$$

Если линеалы $Y_{1,2} \subset X$ взаимно ортогональны, то их прямая сумма называется ортогональной суммой и обозначается так:

$$Y_1 + Y_2 = Y_1 \oplus Y_2 \,.$$

В силу доказанного, представление элемента ортогональной суммы $Y_1 \oplus Y_2$ в виде суммы элементов из Y_1 и Y_2 единственно (что, собственно, и означает, что ортогональная сумма линеалов является их прямой суммой).
Замечание: как правило, понятие ортогональной суммы используют применительно к подпространствам (замкнутым линеалам).

Ортогональное дополнение к элементу:

$$x^{\perp} = \{y \in X : (x, y) = 0\} \,.$$

Замечание: $o^{\perp} = X$ (ортогональное дополнение к нулевому элементу – всё пространство).

Утверждение: $x^{\perp}$ – подпространство.
Докажем линейность. Пусть $y_{1,2} \in x^{\perp}$, тогда

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2) = 0 \,,$$

т.е. $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in x^{\perp}$.
Докажем замкнутость. Пусть $y_m \in x^{\perp}$, и $y_m \to y^*$, тогда

$$(x, y^*) = \lim_{m\to\infty} (x, y_m) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0 \,,$$

т.е. $y^* \in x^{\perp}$.

Утверждение: $L(x) \oplus x^{\perp} = X$.
Если $x = o$, то утверждение справедливо в силу $o^{\perp} = X$.
Пусть теперь $x \neq o$. Очевидно, $L(x) \oplus x^{\perp} \subset X$. Нам нужно доказать обратное включение $L(x) \oplus x^{\perp} \supset X$. Последнее означает, что произвольный элемент $w \in X$ может быть представлен в виде ортогональной суммы $w = \alpha x + h$, где $h \in x^{\perp}$.
Построим это разложение в явном виде. Положим $\alpha = (w, x)/\|x\|^2$ и докажем, что

$$h = w - \alpha x = w - \frac{(w, x)x}{\|x\|^2} \in x^{\perp} \,.$$

Действительно,

$$(h, x) = (w, x) - \frac{(w, x)(x, x)}{\|x\|^2} = 0 \,.$$

Утверждение доказано.

Замечание. Мы, между прочим, уствновили, что при $x \neq o$ коразмерность подпространства $x^{\perp}$ равна единице.

Замечание. Слагаемые αx и h называют ортогональными проекциями элемента w на подпространства $L(x)$ и $x^{\perp}$ соответственно. В дальнейшем мы обобщим понятие ортогональной проекции (ортопроекции) на другие подпространства и множества.

Замечание. Доказанное утверждение – самый первый простейший вариант теоремы о разложении пространства со скалярным произведением в ортогональную сумму подпространств.

Ортогональное дополнение к множеству:

$$Q^{\perp} = \{y \in X\,, \forall x \in Q : (x, y) = 0\}\,.$$

Утверждение: $Q^{\perp} \perp Q$ (по определению ортогональности множеств).

Утверждение: $Q^{\perp}$ – максимальное множество, ортогональное Q: если $Q' \perp Q$, то $Q' \subset Q^{\perp}$.
Действительно, $y \in Q' \Rightarrow \forall x \in Q : (x, y) = 0 \Rightarrow y \in Q^{\perp}$.

Утверждение: $Q^{\perp}$ – замкнутое подпространство, независимо от линейности (или нелинейности) и замкнутости (или незамкнутости) Q. Доказательство этого утверждения буквально повторяет доказательство линейности и замкнутости $x^{\perp}$.
Линейность:

$$y_{1,2} \in Q^{\perp} \Rightarrow \forall x \in Q : (x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x, y_1) + \alpha_2 (x, y_2) = 0\,.$$

Замкнутость:

$$y_m \in Q^{\perp},\, y_m \to y^* \Rightarrow \forall x \in Q : (x, y^*) = \lim_{m\to\infty} (x, y_m) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0\,.$$

Утверждение: $u \in Q \cap Q^{\perp} \Rightarrow u = o$ (было для произвольных взаимно ортогональных множеств).

Утверждение: если элемент $w \in X$ представляется в виде ортогональной суммы $w = z + h$, $z \in Q$, $h \in Q^{\perp}$, то такое представление единственно (также было доказано для произвольных взаимно ортогональных множеств).

Замечание. В этом случае элемент z называется ортогональной проекцией w на Q, а h – на $Q^{\perp}$.

Утверждение: $(Q^{\perp})^{\perp} \supset Q$. Это вытекает из того, что $Q \perp Q^{\perp}$, а $(Q^{\perp})^{\perp}$ – максимальное множество, ортогональное $Q^{\perp}$.

Утверждение: если произвольный элемент $w \in X$ представляется в виде ортогональной суммы $w = z + h$, $z \in Q$, $h \in Q^{\perp}$, то $(Q^{\perp})^{\perp} = Q$.

Доказательство. Пусть $z' \in (Q^{\perp})^{\perp}$, представим его в виде ортогональной суммы $z' = z + h$, $z \in Q$, $h \in Q^{\perp}$. На это равенство можно посмотреть как на разложение вида

$$o + z' = h + z\,,\, h \in Q^{\perp}\,,\, z \in (Q^{\perp})^{\perp}\,.$$

В силу единственности $o = h$, $z' = z \in Q$.

Замечание. В этом случае $Q = (Q^{\perp})^{\perp}$ и $Q^{\perp}$ – замкнутые подпространства, и

$$X = Q \oplus Q^{\perp}\,,$$

пространство X раскладывается в ортогональную сумму подпространств Q и $Q^{\perp}$.

Утверждение:

$$Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow Q_1^{\perp} \supset Q_2^{\perp}\,.$$

Действительно,

$$y \in Q_2^{\perp} \Rightarrow \forall x \in Q_2 :\ (x, y) = 0 \Rightarrow \forall x \in Q_1 \subset Q_2 :\ (x, y) = 0 \Rightarrow y \in Q_1^{\perp}\,.$$

В некоторых случаях справа равенство: $Q_1^{\perp} = Q_2^{\perp}$.

Утверждение: $Q^{\perp} = [Q]^{\perp}$.

Действительно, пусть $x_m \in Q$, $x_m \to x^* \in [Q]$. Тогда

$$\forall y \in Q^{\perp} : (x^*, y) = \lim_{m\to\infty} (x_m, y) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0 \Rightarrow y \in [Q]^{\perp}\,.$$

Утверждение: $Q^{\perp} = (L(Q))^{\perp}$ (в силу линейности скалярного произведения).

Тогда

$$Q^{\perp} = [Q]^{\perp} = (L(Q))^{\perp} = (L[Q])^{\perp} = [L(Q)]^{\perp} = [L[Q]]^{\perp}\,.$$

Обозначение: $L^{\perp}(Q)$.

Замечание: $[L(Q)] = [L[Q]]$ (было доказано).

Утверждение: $(Q^{\perp})^{\perp} \supset [L(Q)]$.

Действительно, $(Q^{\perp})^{\perp} = ([L(Q)]^{\perp})^{\perp} \supset [L(Q)]$.

Замечание: далее для случая, когда пространство X гильбертово, будет доказано, что здесь равенство.

Утверждение:

$$\forall x \in Q : (x, w) = (x, z) \Rightarrow w - z \in Q^{\perp}$$

(поскольку $\forall x \in Q : (x, (w - z)) = 0$).

Ортогональная разность

Если $Y \subset X$ и $Y_1 \subset Y$ – линеалы, то множество $Y_2 = Y \cap Y_1^{\perp}$ называется ортогональной разностью Y и Y_1 и обозначается

$$Y_2 = Y \ominus Y_1\,.$$

Замечание: как правило, понятие ортогональной разности используют применительно к подпространствам (замкнутым линеалам).

Замечание. Далее считаем $Y_1 \subsetneq Y$ (если $Y_1 = Y$, то $Y \ominus Y = \{o\}$).

Утверждение: Y_2 – линеал (как пересечение двух линеалов). Если Y – подпространство, то Y_2 – подпространство (как пересечение двух подпространств).

Утверждение: если $Y = Y_1 \oplus Y_2$, то $Y_2 = Y \ominus Y_1$ и $Y_1 = Y \ominus Y_2$. Докажем первое из этих равенств (второе доказывается аналогично).
Из $Y_2 \subset Y$ и $Y_2 \perp Y_1$ вытекает, что $Y_2 \subset Y \cap Y_1^{\perp} = Y \ominus Y_1$.
Докажем обратное включение. Произвольный элемент $y \in Y$ представляется в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$. Тогда $(y, y_1) = \|y_1\|^2$. Если $y \in Y \ominus Y_1 \subset Y_1^{\perp}$, то это скалярное произведение равно нулю, поэтому $y_1 = o$ и $y = y_2 \in Y_2$.

Утверждение: если $Y_2 = Y \ominus Y_1$, то $Y_1 \subset Y \ominus Y_2$ (поскольку $Y_1 \subset Y$ и $Y_1 \perp Y_2$).

Замечание: равенства, вообще говоря, может не быть. Например, если линеал Y_1 плотен в Y, то $Y_2 = \{o\}$, и $Y \ominus Y_2 = Y$.

Утверждение: если $Y_2 = Y \ominus Y_1$, то $Y_1 \oplus Y_2 \subset Y$ (поскольку $Y_{1,2} \subset Y$ и $Y_1 \perp Y_2$).

Замечание: равенства, вообще говоря, может не быть. Например, если линеал Y_1 плотен в Y, то $Y_2 = \{o\}$, и $Y_1 \oplus Y_2 = Y_1 \subsetneq Y$.

Замечание: будет доказано, что в случае, когда Y_1 – полное метрическое пространство, из $Y_2 = Y \ominus Y_1$ следует $Y = Y_1 \oplus Y_2$, и тогда $Y_1 = Y \ominus Y_2$. Это, в частности, справедливо, если Y_1 – подпространство, а X или Y – гильбертово пространство.

Построение ортогональной проекции на конечномерное подпространство.

Вернёмся к рассмотрению замкнутого подпространства $Y = L\{f\}$ – линейной оболочки линейно независимой системы элементов
$Q = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Наша задача – представить произвольный элемент $w \in X$ в виде ортогональной суммы $w = z + h$, где $z \in Y$, а $h \in Y^{\perp} = L^{\perp}\{f\}$.

Чтобы решить эту задачу, вычислим скалярные произведения
$\gamma_i = (w, f_i)$, $i = 1, \ldots, n$ и решим систему линейных алгебраических уравнений $G\alpha = \gamma$. Построим элемент

$$z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j \in Y ,$$

где $\alpha = G^{-1}\gamma$. По доказанному ранее, $(z, f_i) = \gamma_i = (w, f_i)$, откуда
$\forall y \in Y : (z, y) = (w, y)$, и тогда $h = w - z \in Q^{\perp} = Y^{\perp}$.

Таким образом, мы установили, что если $Y \subset X$ – конечномерное подпространство пространства X со скалярным произведением, то произвольный элемент пространства раскладывается в сумму элементов, один из которых является его ортогональной проекцией на Y, а другой – на $Y^{\perp}$. Иначе говоря, $X = Y \oplus Y^{\perp}$.

Это утверждение доказано пока что только для конечномерного подпространства Y произвольного пространства со скалярным произведением (не обязательно гильбертова). Ранее оно было доказано для случая одномерного подпространства $Y = L(x)$. Далее такое разложение будет обобщено на произвольное замкнутое подпространство гильбертова пространства.

Замечание. Оператор P_Y, сопоставляющий элементу w его ортогональную проекцию z на подпространство Y (т.е. $z = P_Y w$), называется оператором ортогонального проектирования (проецирования) на это подпространство, или ортопроектором. Аналогичным образом мы можем рассмотреть ортопроектор $P_{Y^\perp} = P_Y^\perp$ на подпространство $Y^\perp$, и тогда $h = P_Y^\perp w$. Сумма этих проекторов – единичный оператор ($P_Y + P_Y^\perp = E$), их произведение – нулевой ($P_Y P_Y^\perp = P_Y^\perp P_Y = O$).
Если из контекста понятно, о проекциях на какие подпространства идёт речь, то пишут просто P и $P^\perp$.

Утверждение. Норма ортопроекции элемента на подпространство не превосходит нормы самого элемента, т.е. $\|z\| \le \|w\|$ или $\|z\|^2 \le \|w\|^2$. Это следствие из теоремы Пифагора: $\|w\|^2 = \|z\|^2 + \|h\|^2$. Ниже получим из него неравенство Бесселя.

Замечание. Утверждение справедливо и для бесконечномерного подпространства (в предположении, что ортогональная проекция существует).

Следствие. Норма оператора ортогонального проектирования равна единице. Действительно, $\|Pw\| = \|z\| \le \|w\|$, откуда $\|P\| \le 1$. С другой стороны, $Pz = z$ и $\|Pz\| = \|z\|$.

Утверждение. Если элемент $z \in Y$ – ортогональная проекция элемента $w \in X$ на подпространство Y, то он является ближайшим к w элементом этого подпространства.
Доказательство. Пусть $w = z + h$, $z \in Y$, $h \in Y^\perp$, квадрат расстояния от w до z равен $\|w - z\|^2 = \|h\|^2$.
Пусть теперь $y \in Y$ – некоторый элемент. Тогда квадрат рассотяния от w до этого элемента равен

$$\|w - y\|^2 = \|(w - z) + (z - y)\|^2 =$$
$$= \|h + (z - y)\|^2 = \|h\|^2 + \|z - y\|^2 \ge \|h\|^2\,,$$

и при $y \ne z$ неравенство строгое. При доказательстве воспользовались ортогональностью $z - y \in Y$ и $h \in Y^\perp$ и теоремой Пифагора.

Замечание. Утверждение справедливо и для бесконечномерного подпространства (в предположении, что ортогональная проекция существует).

Замечание:

$$\|h\| = \min_{y \in Y} \|w - y\| = \rho(w, Y)\,,$$

минимум достигается при $y = z$.

Замечание. Ближайший к w элемент множества называется метрической проекцией w на это множество. Таким образом, ортогональная проекция w на подпространство одновременно является и метрической проекцией.

Ортогональные и ортонормированные системы элементов.

Если система элементов $\{g_1, \dots, g_n\}$ ортогональна, $g_i \perp g_j$, $i \neq j$, то матрица Грама диагональна: $G_{ij} = (g_i, g_j) = \|g_i\|^2 \delta_{ij}$, и тогда

$$\alpha_i = \frac{\gamma_i}{\|g_i\|^2} = \frac{(w, g_i)}{\|g_i\|^2} \, ,$$

не приходится решать систему уравнений. Ортогональная проекция элемента w на линейную оболочку $L\{g\}$ имеет вид

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{(w, g_i) g_i}{\|g_i\|^2} \, .$$

Замечание. Отсюда, между прочим, вытекает формула для ортопроектора $P = P_Y$:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\cdot, g_i) g_i}{\|g_i\|^2} \, ,$$

точкой в правой части обозначен элемент, на который действует оператор.

Если система элементов $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормирована, $e_i \perp e_j$, $i \neq j$, $\|e_i\| = 1$, то матрица Грама единичная: $G_{ij} = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, и

$$\alpha_i = \gamma_i = (w, e_i)$$

(ковариантные и контравариантные координаты совпадают). Ортогональная проекция элемента w на линейную оболочку $L\{e\}$ имеет вид

$$z = \sum_{i=1}^{n} (w, e_i) e_i \, ,$$

соответствующая формуда для ортопроектора имеет вид

$$P = \sum_{i=1}^{n} (\cdot, e_i) e_i \, .$$

Пусть дана исходная система $\{f_i, i = 1, \dots, n\}$ общего вида (не ортогональная, не нормированная). Она образует базис в $Y = L\{f\}$ (если в системе есть линейно зависимые элементы – отбрасываем). Наша задача: построить ортонормированный базис в Y.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

В два этапа: сначала строим ортоготнальные элементы $\{g_i, i = 1, \dots, n\}$, потом нормируем и получаем $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ – ортонормированный базис в Y.

Первый шаг:

$$g_1 = f_1 \, , \quad e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} \, .$$

Второй шаг. Из f_2 вычитаем его проекцию на e_1, после чего нормируем:

$$g_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 \,, \quad e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} \,.$$

Дальнейшие шаги: из f_{j+1} вычитаем его проекцию на линейную оболочку первых j векторов, далее нормируем:

$$g_{j+1} = f_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} (f_{j+1}, e_i)e_i \,, \quad e_{j+1} = \frac{g_{j+1}}{\|g_{j+1}\|} \,.$$

Этот элемент ненулевой в силу предположения о линейной незваисимости системы $\{f_i, i = 1, \ldots, n\}$, в противном случае отбрасываем и переходим к следующему номеру.

В результате описанной процедуры получаем ортонормированный базис в Y.

Замечание. Убедимся, что $g_{j+1} \perp e_k$, $k = 1, \ldots, j$:

$$(g_{j+1}, e_k) = (f_{j+1}, e_k) - \sum_{i=1}^{j} (f_{j+1}, e_i)(e_i, e_k) =$$
$$= (f_{j+1}, e_k) - \sum_{i=1}^{j} (f_{j+1}, e_i)\delta_{ik} = (f_{j+1}, e_k) - (f_{j+1}, e_k) = 0 \,.$$

Замечание. При практической реализации может оказаться более удобным при ортогонализации работать не с $\{e\}$, а с $\{g\}$. В этом случае выражение для g_{j+1} принимает вид

$$g_{j+1} = f_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \frac{(f_{j+1}, g_i)g_i}{\|g_i\|^2} \,.$$

Замечание. При практической реализации может оказаться более удобным заменить какой-либо элемент g_i коллинеарным ему $\tilde{g}_i$, отличающимся на произвольный удобный нам ненулевой числовой множитель. На окончательный результат это никак не повлияет.

Ещё раз выпишем выражение для ортопроекции w на Y:

$$z = \sum_{i=1}^{n} (w, e_i)e_i \,.$$

Квадрат её нормы (по теореме Пифагора) равен

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(w, e_i)|^2 \,.$$

Отсюда вытекает неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{n} |(w, e_i)|^2 \le \|w\|^2$$

(поскольку $\|z\|^2 \le \|w\|^2$).

Для ортогонального (но не нормированного) базиса

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{(w, g_i) g_i}{\|g_i\|^2} \,,$$

квадрат нормы равен

$$\|z\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|(w, g_i)|^2}{\|g_i\|^2} \,,$$

и неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|(w, g_i)|^2}{\|g_i\|^2} \le \|w\|^2 \,.$$

Замечание: модуль в выражениях $|(w, e_i)|^2$ и $|(w, g_i)|^2$ ставим, чтобы равенства и неравенства оставались справедливы в комплексных пространствах.