Разбор задач, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 21.03.2020

1. Объясните, почему подпространство $L\{f\}$ – линейная оболочка элементов $f_1, \ldots, f_N$ – является выпуклым множеством.

   Решение. Выпуклым называется множество, которое вместе с любыми элементами x, y содержит и отрезок, их соединяющий, т.е. все точки вида $\alpha x + \beta y$, где $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$. Но произвольный линеал (и, в частности, подпространство) содержит вместе с любой парой элементов x, y все линейные комбинации этих элементов вида $\alpha x + \beta y$. В частности, он содержит и выпуклые линейные комбинации, для которых выполняются указанные условия на коэффициенты.

2. Покажите, что любая конечная ортонормированная система линйно независима.

   Решение. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – ортонормированная система, и пусть линейная комбинация входящих в неё элементов равна нулю:
   $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k + \cdots + \alpha_n e_n = o$.
   Докажем, что такая линейная комбинация тривиальна, т.е. все её коэффициенты равны нулю.
   Возьмём произвольный номер k и докажем, что $\alpha_k = 0$. Для этого скалярно усножим левую и правую части векторного равенства на e_k:
   $\alpha_1(e_1, e_k) + \cdots + \alpha_k(e_k, e_k)) + \cdots + \alpha_n(e_n, e_k) = (o, , e_k)$.
   В силу ортонормированности системы $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, поэтому все слагаемые в левой части с $i \neq k$ обращаются в нуль, и в левой части остаётся единственное слагаемое, равное α_k. Кроме того, нулю равна и правая часть, и поэтому $\alpha_k = 0$. В силу произвольности k мы получаем, что нулю равны все коэффициенты, т.е. линейная комбинация тривиальна. По определению это означает, что система элементов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ линейно независима.

3. Докажите, что $Y^\perp$ всегда замкнуто, независимо от замкнутости или незамкнутости Y.

   Решение. Пусть h^* – предельная точка $Y^\perp$, тогда существует последовательность $\{h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots\}$ элементов из $Y^\perp$, пределом которой является h^*. Нам нужно доказать, что $h^* \in Y^\perp$.
   Действительно, поскольку $h_n \in Y^\perp$, это означает, что h_n ортогонально любому элементу множества Y: $\forall y \in Y \, \forall n : \, (h_n, y) = 0$. Но отсюда следует, что $(h^*, y) = \lim_{n\to\infty}(h_n, y) = 0$ для $\forall y \in Y$, что и означает, что $h^* \in Y^\perp$.

4. Покажите, что система функций

   $$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \, , \; n = 1, 2, \ldots \right\}$$

   является бесконечной ортонормированной системой в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, но она не полна в этом пространстве.

Решение. Система функций бесконечна, поскольку бесконечно (счётно) множество индексов, и для различных индексов функции также различны.
Докажем ортонормированность. Пусть e_n – элементы указанной системы, тогда

$$(e_n, e_m) = \int_{-\pi}^{\pi} e_n(t)\, e_m(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, \sin mt\, dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n-m)t - \cos(n+m)t}{2}\, dt = \ldots$$

Рассмотрим отдельно случаи $m \neq n$ и $m = n$. Если $m \neq n$, то

$$(e_n, e_m) = \cdots == \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(n-m)t}{n-m} - \frac{\sin(n-m)t}{n-m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0\,,$$

поскольку равны нулю все синусы как на верхнем, так и на нижнем пределах.
Если $m = n$, то $\cos(n-m)t = 1$, и

$$(e_n, e_n) = \cdots == \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2nt}{2}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi - \frac{\sin 2nt}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 1\,.$$

Таким образом, $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$, ортонормированность доказана.
Неполнота системы следует из того обстоятельства, что ортогональное дополнение к этой системе нетривиально. Все элементы системы – нечётные функции на отрезке $[-\pi, \pi]$, откуда следует их ортогональность произвольной чётной функции на этом отрезке – в частности, тождественной единице.

5. Покажите, что любая счётная ортонормированная система в пространстве со скалярным произведением слабо сходится к o.

   Решение. Напомню: слабая сходимость последовательности $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ к нулевому элементу означает, что $\forall x \in X : \lim_{n\to\infty}(x, e_n) = 0$
   (X – пространство со скалярным произведением). Это обстоятельство вытекает из неравенства Бесселя

   $$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

   и необходимого признака сходимости числовых рядов.

6. Докажите, что любое сепарабельное гильбертово пространство H непрерывно изоморфно пространству l_2.

Уточнение: речь идёт о бесконечномерных гильбертовых пространствах. Конечномерные пространства изоморфны E^n, где n – размерность пространства.

Решение. Если пространство H сепарабельно, то оно содержит счётное плотное множество элементов $\{f_n\}$. Применим к этому множеству процемм ортогонализации Грама-Шмидта, отбрасывая те элементы плотного множества, которые входят в линейную оболочку предыдущих. В результате получим ортонормированную систему $\{e_n\}$, которая будет полной в пространстве H.
Действительно, линейная оболочка этой системы образует плотное множество в H, поскольку она содержит исходное плотное множество $\{f_n\}$ (это следует из того обстоятельства, что каждый элемент f_n принадлежит линейной оболочке первых n элементов ортонормированной системы). Если получившаяся ортонормированная система конечна, то пространство конечномерно, а если бесконечна, то бесконечномерно.

Поскольку система $\{e_n\}$ полна, произвольный элемент $x \in H$ раскладывается в ряд Фурье по этой системе:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n ,$$

причём справедливо равенство Парсеваля

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 .$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\alpha_n = (x, e_n)$ квадратично суммируема, т.е. принадлежит пространству l_2. Обратно, если некоторая последовательность α_n принадлежит l_2, а пространство H полное (гильбертово), то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n ,$$

сходится, поскольку последовательность его частичных сумм фундаментальна, и для элемента $x \in H$, являющегося суммой ряда, значения α_n являются коэффициентами Фурье. Таким образом, установлена биекция между пространствами H и l_2, причём эта биекция, является линейным изоморфизмом (коэффициенты Фурье для линейной комбинации элементов является линейной комбинацией коэффициентов Фурье элементов). Кроме того, это отображение является изометрией, что следует из равенства Парсеваля, поэтому H и l_2 изоморфны как ЛНП. А поскольку

$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} ,$$

мы заключаем, что из совпадения норм соответствующих жлементов в H и l_2 следует и совпадение скалярных произведений, т.е. H и l_2 изоморфны и как гильбертовы пространства.

Замечание. Ниже будут использованы следующие обозначения:
$\hat{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l_2$ – последовательность коэффициентов Фурье элемента $x \in H$, а τ – непрерывный изоморфизм между H и l_2, сопоставляющий элементу $x \in H$ соответствующую последовательность $\hat{x} \in l_2$.

Задачи, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 18.04.2020

1. Покажите, что любой непрерывный оператор в евклидовом пространстве E^n компактен.

2. Пусть для всякого $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l_2$ оператор A действует по формуле
$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2j}\,.$$
Покажите, что оператор A – компактный оператор из l_2 в E^1.

3. Докажите, что линейный оператор A, действующий из E^n в E^n, симметричен тогда и только тогда, когда симметрична представляющая его матрица.

4. Выпишите сопряжённый оператор к оператору A в E^2, определяемому матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Покажите, что $(A^*)^* = A$ и $(A^*A)^* = A^*A$.

6. Проверьте, что если A и A^* – сопряжённые друг к другу операторы, то $A + A^*$, AA^* и A^*A – самосопряжённые операторы и $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.

7. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов. Тогда всякому элементу $x \in H$ соответвтует ряд Фурье относительно системы $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

   Оператор A, действующий на всякий элемент $x \in H$ по формуле $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i$, называется оператором нормального типа.

   Покажите, что оператор нормального типа в гильбертовом пространстве будет иметь ограниченный обратный тогда и только тогда, когда существует такая постоянная величина $\gamma > 0$, что выполняется неравенство $\inf_n |\lambda_n| \geq \gamma$.

8. Покажите, что оператор нормального типа в гильбертовом пространстве будет компактным тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

9. Покажите, что для всякого ограниченного оператора A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H по формуле $y = Ax$, в пространстве l_2 существует "подобный"оператору A ограниченный оператор $\hat{A}$ такой, что $\|\hat{A}\|_{l_2\to l_2} = \|A\|_{H\to H}$. При этом оператор $\hat{A}$ определяется следующим образом: $\hat{A}\hat{x} = \hat{y}$, где
$\hat{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in l_2$ и $\hat{y} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in l_2$ – те элементы l_2, которые соответствуют при непрерывном изоморфизме τ сепарабельного гильбертова пространства H и l_2 элементам $x \in H$ и $y \in H$.

10. Покажите, что оператор $\hat{A}$ в пространстве l_2, построенный в предыдущей задаче для заданного оператора A, будет компактным тогда и только тогда, когда компактным будет исходный оператор A.