ЛЕКЦИЯ 8. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

I. Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ кусочно-монотонна и ограничена на отрезке $[-l;l]$. Тогда функция $f(x)$ может иметь только точки разрыва первого рода на этом отрезке, и в точках непрерывности $f(x)$ может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right) \tag{8.1}$$

где

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx,\ \ k=0,1,2,...$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx,\ \ k=1,2,... \tag{8.2}$$

В точках разрыва в левой части равенства (8.1) $f(x)$ надо заменить на полусумму односторонних пределов

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Подставим в (8.1) вместо коэффициентов a_k, b_k их выражения (8.2):

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{\pi ku}{l}du\cdot\cos\frac{\pi kx}{l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{\pi ku}{l}du\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\left[\cos\frac{\pi ku}{l}\cdot\cos\frac{\pi kx}{l}+\sin\frac{\pi ku}{l}\cdot\sin\frac{\pi kx}{l}\right]du.$$

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{\pi k(u-x)}{l}du. \tag{8.3}$$

Далее будем предполагать, что функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, т.е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right| dx = M < +\infty .$$

В равенстве (8.3) будем неограниченно увеличивать l. Первое слагаемое в правой части (8.3) стремится к нулю при $l \to +\infty$.

Рассмотрим второе слагаемое в (8.3). Положим

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l},\ \omega_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots,\ \omega_n = \frac{\pi n}{l}, \ldots$$

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{l};\ \ \Delta\omega_n \to 0 \text{ при } l \to +\infty .$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(u) \cos \frac{\pi k (u-x)}{l} du = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(u) \cos\left[\omega_k (u-x)\right] \Delta\omega_k du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\omega_k) \Delta\omega_k ,$$

где

$$\varphi(\omega_k) = \int_{-l}^{l} f(u) \cos\left[\omega_k (u-x)\right] du,\ \omega_k = \frac{\pi k}{l},\ k = 1, 2, \ldots$$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму для функции

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^{l} f(u) \cos\left[\omega(u-x)\right] du$$

на промежутке $(0; +\infty)$. Переходя в (8.3) к пределу при $l \to +\infty$, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos\left[\omega(u-x)\right] du \ . \qquad (8.4)$$

Определение 1. Формула (8.4) называется *формулой Фурье*, а интеграл в правой части формулы (8.4) – *интегралом Фурье* для функции $f(x)$. ▲

Следует отметить, что формула (8.4) справедлива в точках непрерывности функции $f(x)$. В точках разрыва данной функции

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos\left[\omega(u-x)\right] du \ . \qquad (8.4a)$$

Теорема 1 (Теорема Дини сходимости интеграла Фурье). Пусть

1) функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке действительной оси и абсолютно интегрируема на всей действительно прямой;

2) при некотором $h > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^h \frac{|\Phi(t)|}{t} dt,$$

где $\Phi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$, $S_0 = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Тогда

$$S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos\left[\omega(u - x_0)\right] du \quad \blacksquare$$

Замечание. Условие 2) теоремы может быть заменено условием

2)* в точке x функция f имеет либо конечную производную, либо конечные односторонние производные.

II. Преобразование Фурье

Еще раз выпишем формулу (8.4):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos\left[\omega(u - x)\right] du \tag{8.4}$$

Заметим, что подынтегральная функция в (8.4) является четной относительно переменной ω. Поэтому равенство (8.4) можно переписать следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos\left[\omega(x - u)\right] du \tag{8.5}$$

Так как $\left| f(u) \sin\left[\omega(x - u)\right] \right| \le \left| f(u) \right|$ и функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси, то согласно признаку Вейерштрасса несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin\left[\omega(x - u)\right] du$$

сходится равномерно по параметру ω на любом отрезке $[-\eta;\eta]$, $\eta>0$, и является непрерывной функцией переменной ω на $\mathbb{R}$. Поэтому для любого $\eta>0$ существует интеграл

$$\int_{-\eta}^{\eta} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\left[\omega(x-u)\right]du = 0. \tag{8.6}$$

В силу нечетности подынтегральной функции по ω интеграл (8.6) равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать сходимость несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\left[\omega(x-u)\right]du. \tag{8.7}$$

Определение 2. Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке действительной оси. Если существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx,$$

то он называется *главным значением интеграла* $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ и обозначается буквами v.p. Таким образом,

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx \; \blacktriangle$$

Отличие этого определения от обычного определения несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ состоит в том, что в обычном смысле несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ определяется как предел интегралов $\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)dx$ при независимом стремлении $\xi\to-\infty$, $\eta\to+\infty$. Здесь же рассматривается частный случай, когда $\xi=-\eta$, $\eta\to+\infty$. Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла, которое совпадает с несобственным. Обратное неверно. У функции может существовать главное значение интеграла, а несобственный интеграл при этом может быть расходящимся. Например, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}xdx$ не существует как несобственный, однако, он существует в смысле главного значения, которое равно нулю.

Из определения главного значения интеграла и равенства (8.6) следует, что

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\left[\omega(x-u)\right]du = 0\,. \tag{8.8}$$

Умножив обе части равенства (8.8) на $\dfrac{i}{2\pi}$ и сложив с равенством (8.5), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{i\omega(x-u)}du\right), \tag{8.9}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (8.9) называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

Формулу (8.9) можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}du\right). \tag{8.10}$$

Далее равенство (8.10) можно представить в виде композиции двух отображений:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i\omega u}du\,, \tag{8.11}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right). \tag{8.12}$$

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$, тогда функция $F(\omega)$, определяемая формулой (8.11), называется *преобразованием Фурье функции* $f(x)$. Если необходимо подчеркнуть, что рассматривается преобразование Фурье функции f, то для преобразования Фурье используется следующее обозначение: $F[f]$ ▲

Следует отметить, что, хотя преобразование Фурье определено для абсолютно интегрируемой функции, ее преобразование Фурье совсем не обязательно будет абсолютно интегрируемой функцией.

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Решение: Пусть $\omega \ne 0$, тогда

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega x}dx =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-i\omega x}}{(-i\omega)}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{(-i\omega)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Если $\omega=0$, то

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом,

$$F[f]=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin\omega}{\omega}, & \omega\neq 0\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & \omega=0\end{cases} \tag{8.13}$$

Как известно, функция (8.13) не является абсолютно интегрируемой на $(-\infty;+\infty)$.

Итак, если функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси, во всех ее точках непрерывна и имеет либо конечные производные, либо конечные односторонние производные, то для нее справедливо равенство (8.10), которое равносильно композиции отображений (8.11), (8.12). Формула (8.12) называется формулой обращения для преобразования Фурье.

Надо отчетливо понимать разницу между формулами (8.11) и (8.12). Первая из них является не формулой, а определением, в котором несобственный интеграл существует в обычном смысле, а вторая – является формулой, которая доказывается при некоторых дополнительных условиях на $f(x)$ (например, $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и дополнительно является непрерывной на $(-\infty;+\infty)$). При этом интеграл в формуле (8.12) понимается в смысле главного значения.

Если функция $f(x)$ обладает определенной четностью, то возможна модификация формул (8.11), (8.12). Формулу Фурье (8.5) перепишем в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\left[\cos\omega x\cos\omega u+\sin\omega x\sin\omega u\right]du. \tag{8.14}$$

Если $f(x)$ − четная функция, то из (8.14) получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos\omega x\cos\omega u du\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega x d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos\omega u du. \tag{8.15}$$

Если $f(x)$ − нечетная функция, то из (8.14) получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\omega\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\sin\omega x\sin\omega u du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\sin\omega u du. \qquad (8.16)$$

Формула (8.15) является формулой Фурье для четной непрерывной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, а (8.16) – для нечетной непрерывной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютна интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$. Тогда ее можно непрерывно продолжить четным образом на промежуток $(-\infty;0)$ по закону $f(-x)=f(x)$, а если $f(0)=0$, то и нечетным образом по закону $f(-x)=-f(x)$. Тогда при выполнении еще и условий теоремы 1 для одной и той же функции $f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$ выполняются равенства (8.15) и (8.16).

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$. Тогда функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\cos\omega u du$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_c(\omega)$ или $F_c[f]$, а функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(u)\sin\omega u du$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_s(\omega)$ или $F_s[f]$ ▲

Для четной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $F[f]=F_c[f]$, а для нечетной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $F[f]=-iF_s[f]$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, абсолютно интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$ и в каждой точке этого промежутка имеет либо конечную производную, либо конечные односторонние производные. Тогда имеет место формула обращения для косинус-преобразования Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega x d\omega,\ x\in[0;+\infty),$$

а если $f(0)=0$, то имеет место и формула обращения для синус-преобразования Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega x d\omega,\ \ x\in[0;+\infty)\ \blacksquare$$

Отметим, что если $f(0)\neq 0$, то формула обращения для синус-преобразования Фурье имеет место для $x\in(0;+\infty)$.

Пример 2. Используя косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-\alpha x},\ \alpha>0,\ x\geq 0$, вычислить интегралы Лапласа:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x d\omega}{\alpha^2+\omega^2},\ \ I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x d\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Решение: Согласно определению косинус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-\alpha x}$ имеем:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha u}\cos\omega u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Согласно определению синус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-\alpha x}$ имеем:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha u}\sin\omega u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Используя утверждение теоремы 2, получим:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\ \ x\in[0;+\infty)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega,\ \ x\in(0;+\infty).$$

Откуда следует, что

$$I_1=\frac{\pi}{2\alpha}f(x)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x},\ x\geq 0;\ \ I_2=\frac{\pi}{2}f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha x},\ x>0.$$

Учитывая свойства четности по x интегралов $I_1,\ I_2$, можно выписать значения этих интегралов для любых значений x.

Ответ: $I_1=\dfrac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|x|},\ I_2=\dfrac{\pi}{2}e^{-\alpha|x|}\operatorname{sgn}x,\ x\in(-\infty;+\infty).$

Свойства преобразования Фурье

1) *Линейность*. Если существует преобразование Фурье для функций f и g, то для любых постоянных α и β справедливо равенство

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g].$$

2) *Непрерывность*. Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то ее преобразование Фурье $F(\omega)$ − непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, причем $\lim\limits_{\omega\to+\infty} F(\omega)=\lim\limits_{\omega\to-\infty} F(\omega)=0$.

3) *Преобразование Фурье производной*. Если функция f и ее производные до порядка n включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F\left[f^{(k)}\right]=(i\omega)^k F[f],\ k=1,2,...,n.$$

4) *Производная преобразования Фурье*. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x), xf(x), x^2 f(x),..., x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $F(\omega)$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до порядка n включительно, причем

$$F^{(k)}[f]=(-i)^k F\left[x^k f\right],\ k=1,2,...,n.$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ x\in(-1;0),\\ 1,\ x\in(0;1),\\ 0, x=0,\ |x|>1.\end{cases}$$

Решение: Функция $f(x)$ является нечетной. Поэтому для интеграла Фурье справедлива формула (8.16):

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int_0^{+\infty} f(u)\sin\omega u du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int_0^{1}\sin\omega u du=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\omega x\left[\left.\frac{-\cos\omega u}{\omega}\right|_0^1\right]d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega.$$

Таким образом, в точках непрерывности функции $f(x)$, т.е. при $x\neq 0;\pm1$, имеет место равенство:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega,\ x\neq 0,\ x\neq\pm1. \qquad (8.17)$$

В точках разрыва левую часть равенства (8.17) следует заменить на полу сумму односторонних пределов:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega. \qquad (8.18)$$

Используя равенство (8.18), можно получить значения несобственных интегралов. Например, для $x=1$ из (8.18) получим:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega,$$

откуда следует, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}.$$

Полагая в (8.18) $x=1/2$, получим

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)}{2\omega}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Решение: Пусть $f_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Для этой функции, учитывая значения интегралов Лапласа в примере 2, получим:

$$F[f_1]=F_c[f_1]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f_1(x)\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}dx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-|\omega|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-|\omega|}.$$

Используя свойство 3, получим:

$$F[f]=F\left[f_1^{(3)}\right]=(i\omega)^3F[f_1]=(i\omega)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}.$$

Ответ: $(i\omega)^3\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}$.

Пример 5. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=x^2e^{-|x|}$.

Решение: Введем в рассмотрение функцию $f_1(x)=e^{-|x|}$. Тогда $f(x)=x^2f_1(x)$. Согласно свойству 4 для преобразования Фурье

$$F[f]=F\left[x^2f_1\right]=i^2F''[f_1]=-F''[f_1].$$

В силу четности функции $f_1(x)$

$$F[f_1]=F_c[f_1]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos\omega x dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Тогда

$$F'\left[f_1\right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2},\ F''\left[f_1\right] = \frac{2\sqrt{2}\left(3\omega^2 - 1\right)}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^3}.$$

Ответ: $F\left[f\right] = \dfrac{2\sqrt{2}\left(1-3\omega^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^3}$.