ЛЕКЦИЯ 2. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Центральным называется силовое поле, в котором сила направлена в одну точку – центр силового поля (полюс силы).

Обычно центр силового поля выбирают за начало системы отсчета и можно считать, что сила $\vec{F}$ направлена по радиус-вектору:

$$\vec{F} = F \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \tag{1.1}$$

где F - величина силы, причем она может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от того, направлена сила от центра (отталкивание) или к центру (притяжение).

СВОЙСТВА ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОЛЯ.

1. *В центральном поле выполняется закон сохранения кинетического момента.*

Так как момент центральной силы $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ относительно полюса силы равен нулю, то из закона изменения кинетического момента $\vec{K} = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right]$

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}$$

следует, что кинетический момент в центральном поле сохраняется:

$$\left[\vec{r}, m\vec{v}\right] = \vec{K}_0 = Const. \tag{1.2}$$

2. *Все траектории в центральном поле – плоские.*

Так как радиус-вектор материальной точки в любой момент времени ортогонален постоянному вектору $\vec{K}_0$, то ее траектория лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{K}_0$ и проходящей через начало системы отсчета. Плоскость движения определяется радиусом-вектором материальной точки $\vec{r}_0$ и ее скоростью $\vec{v}_0$ в начальный момент времени $t = 0$. Пусть координаты вектора $\vec{K}_0 = \left[\vec{r}_0, m\vec{v}_0\right] = (A, B, C)$. Тогда уравнение плоскости движения

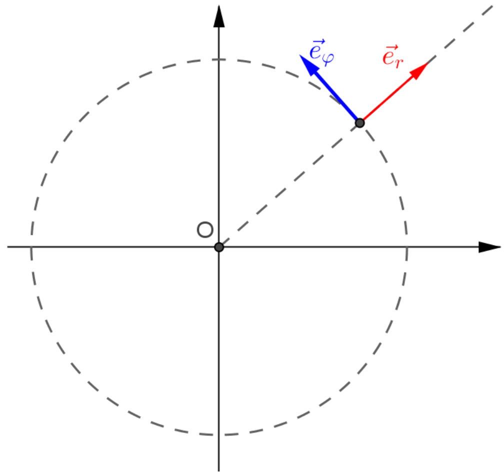
$$Ax + By + Cz = 0.$$

3. *Уравнения движения в полярных координатах.*

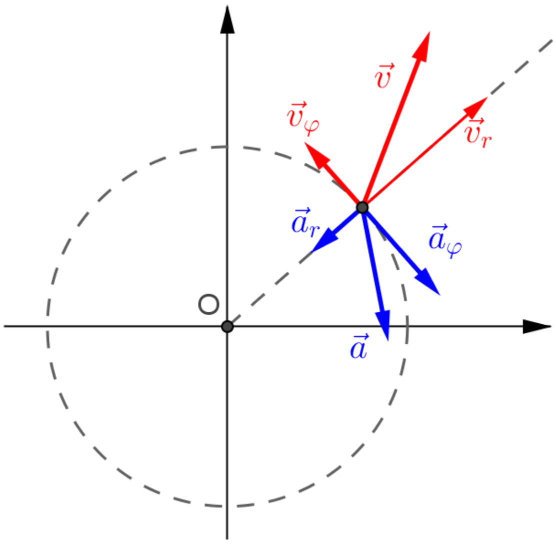
Так как движение в центральном поле происходит в плоскости, для его описания удобно использовать полярные координаты:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Единичный вектор *радиального направления* (направленного по радиус-вектору) равен $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Единичный вектор *трансверсального направления* (касательного координатным линиям $r = Const$ - окружностям) равен $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.



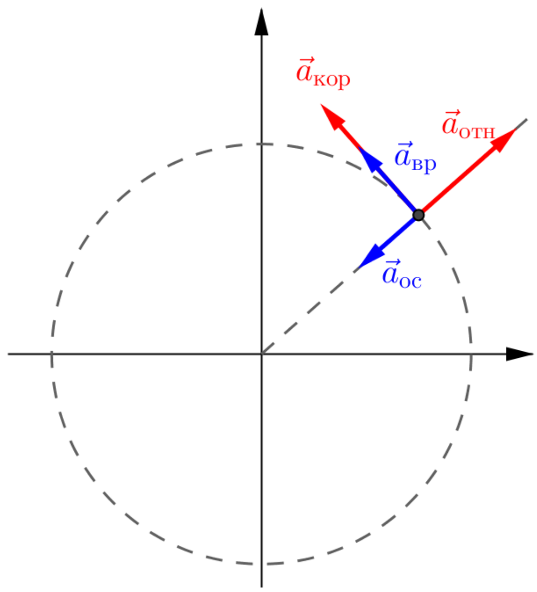
Проекции скорости и ускорения на радиальное направление называются соответственно радиальной скоростью $v_r = (\vec{v}, \vec{e}_r)$ и радиальным ускорением $a_r = (\vec{a}, \vec{e}_r)$. Проекции скорости и ускорения на трансверсальное направление называются соответственно трансверсальной скоростью $v_\varphi = (\vec{v}, \vec{e}_\varphi)$ и трансверсальным ускорением $a_\varphi = (\vec{a}, \vec{e}_\varphi)$.



Чтобы вывести компоненты скорости и ускорения точки в полярных координатах, представим ее движение как сложное. Пусть точка движется по радиальному лучу, а луч вращается вокруг начала координат. Свяжем относительную систему отсчета с лучом. Тогда относительная скорость точки направлена по лучу и равна $\dot{r}$. Угловая скорость вращения луча равна $\dot{\varphi}$. Переносная скорость совпадает с вращательной $\vec{v}_{пер} = \vec{v}_{вр} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, направлена перпендикулярно радиус-вектору, т.е. по трансверсальному направлению, и равна $v_{пер} = v_{вр} = r\dot{\varphi}$. Таким образом,

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Относительное ускорение точки направлено по лучу и равно $\ddot{r}$. Угловое ускорение равно $\varepsilon = \ddot{\varphi}$. Переносное ускорение есть сумма вращательного ускорения $\vec{a}_{вр} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}]$, направленного трансверсально и равного по величине $r\ddot{\varphi}$, и осестремительного ускорения, направленного к точке *O* и равного по величине $r\dot{\varphi}^2$. Кориолисово ускорение $\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{отн}]$ направлено трансверсально и равно по величине $2\dot{r}\dot{\varphi}$. Таким образом,



$$\begin{aligned} a_r &= a_{отн} - a_{ос} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \\ a_\varphi &= a_{вр} + a_{кор} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{aligned}.$$

Уравнения движения (второй закон Ньютона) в проекциях на радиальное и трансверсальное направление запишутся как

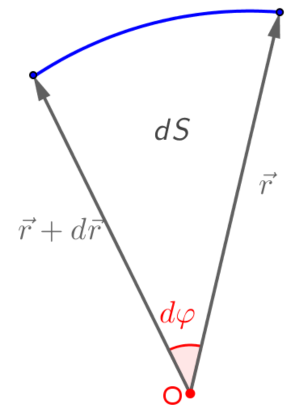
$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}. \qquad (1.3)$$

4. *Интеграл площадей* (геометрический смысл закона сохранения кинетического момента).

Вычислим величину кинетического момента в полярных координатах. Из (1.2)

$$\frac{K_0}{m} = \left|\left[\vec{r}, \vec{v}\right]\right| = \left|\left[\vec{r}, \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi\right]\right| = \left|\left[\vec{r}, \vec{v}_\varphi\right]\right| = r^2\dot{\varphi}. \tag{1.4}$$

Это равенство имеет простую геометрическую интерпретацию. Площадь dS криволинейного сектора между двумя бесконечно близкими радиус-векторами материальной точки равна



$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Величину $\dot{S} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ называют *секторной скоростью*. Она представляет собой скорость, с которой изменяется площадь, заметаемая радиус-вектором материальной точки при ее движении. Из закона сохранения кинетического момента следует

ТЕОРЕМА О СЕКТОРНОЙ СКОРОСТИ. В центральном поле секторная скорость есть величина постоянная.

Константа $c = \dfrac{K_0}{m}$ называется *постоянной площадей*. Формула (1.4) в виде

$$r^2\dot{\varphi} = c \tag{1.5}$$

называется *интегралом площадей*. Секторная скорость равна $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{c}{2}$.

5. *Формулы Бине.*

В полярных координатах траектория материальной точки задается уравнением $r = r(\varphi)$. Если траектория известна, то скорость материальной точки и силу, действующую на нее, можно вычислить по формулам Бине:

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] \text{ - 1-я формула Бине.} \tag{1.6}$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] \text{ - 2-я формула Бине} \tag{1.7}$$

Выведем эти формулы.

Имеем

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{1.8}$$

Из интеграла площадей (1.5)

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}. \tag{1.9}$$

Тогда радиальную скорость можно записать как

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{c}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.10}$$

Подставив выражения (1.9) и (1.10) в формулу (1.8), получим первую формулу Бине (1.6).

Для вычислением силы воспользуемся первым из уравнений движения (1.3). Продифференцировав по времени выражение для радиальной скорости (1.10), получим

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Тогда

$$F = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m\left(-\frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{c^2}{r^3}\right).$$

Вынося за скобку $-\frac{c^2}{r^2}$, получим вторую формулу Бине (1.7).

6. Если величина силы зависит только от расстояния до центра поля, т.е. $F = F(r)$ (изотропное поле), то *центральное поле является потенциальным и потенциальная энергия равна*

$$U(r) = -\int F(r)dr. \tag{1.11}$$

Действительно, используя формулу (1.1) для центральной силы, вычислим ее элементарну работу

$$dA = \left(\vec{F}(r), d\vec{r}\right) = F(r) \cdot \frac{(\vec{r}, d\vec{r})}{r}.$$

Так как

$$(\vec{r}, d\vec{r}) = xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2}d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}dr^2 = rdr,$$

то

$$dA = F(r)dr \text{ -}$$

элементарная работа является полным дифференциалом и можно ввести функцию $U(r)$ – потенциальную энергию, такую, что

$$dU = -dA = -F(r)dr.$$

Функция $U(r)$ вычисляется как интеграл (1.11).

7. Закон сохранения энергии в центральном поле.

Если центральное поле потенциально (например, $F = F(r)$), то выполняется закон сохранения полной механической энергии

$$T + U = h = Const\,.$$

Кинетическую энергию, пользуясь формулой (1.8), а также интегралом площадей (1.5), запишем как

$$T = \frac{mv^2}{2} = m\frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mc^2}{2r^2}\,.$$

Закон сохранения энергии тогда приобретает вид

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mc^2}{2r^2} + U(r) = h\,. \tag{1.12}$$

Введем функцию

$$\tilde{U}(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + U(r)\,.$$

Тогда закон сохранения энергии (1.12) примет вид

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \tilde{U}(r) = h\,. \tag{1.13}$$

Функция $\tilde{U}(r)$ называется *эффективной потенциальной энергией*.

Из уравнения (1.13) следует, что *радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с потенциальной энергией* $\tilde{U}(r)$.

ЛЕКЦИЯ 3. ТРАЕКТОРИИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА.

СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ.

Уравнения движения в центральном поле имеют два первых интеграла: интеграл площадей

$$r^2\dot{\varphi} = c \tag{3.1}$$

и интеграл энергии

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \tilde{U}(r) = h\,, \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{U}(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + U(r)\text{ -} \tag{3.3}$$

эффективная потенциальная энергия.

Выразим радиальную скорость $\dot{r}$ из (3.2):

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2(h-U(r))}{m} - \frac{c^2}{r^2}}\,.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, получим

$$t = t(r) = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2(h-U(r))}{m} - \frac{c^2}{r^2}}} + Const\,. \tag{3.5}$$

Эта формула дает зависимость радиальной компоненты движения от времени в неявном виде $t = t(r)$.

Из (3.1)

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}\,. \tag{3.6}$$

Разделим (3.6) на (3.4), получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm\frac{c}{r^2\sqrt{\frac{2(h-U(r))}{m} - \frac{c^2}{r^2}}}\,.$$

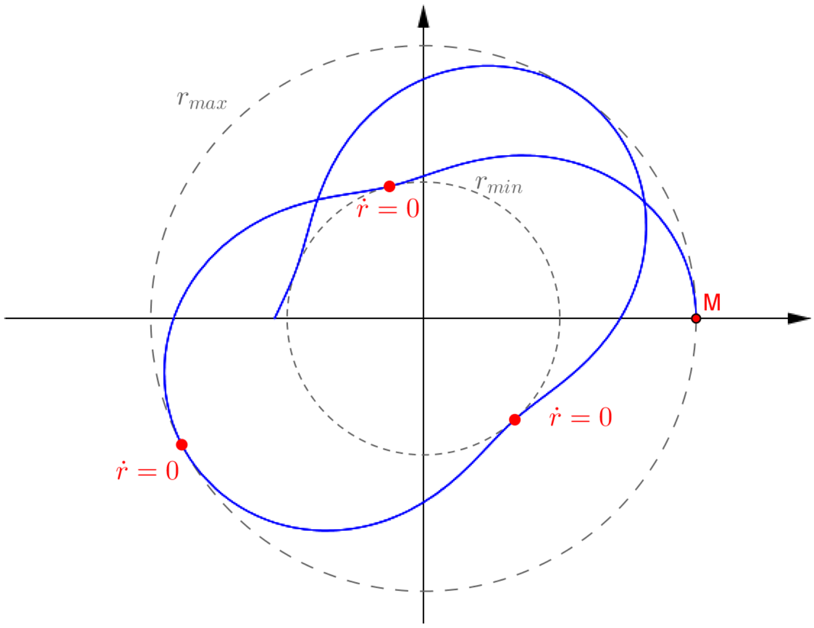
Интегрируя, получаем

$$\varphi = \pm \int \frac{c\,dr}{r^2 \sqrt{\frac{2(h - U(r))}{m} - \frac{c^2}{r^2}}} + Const. \tag{3.7}$$

Формула (3.7) дает уравнение траектории в виде $\varphi = \varphi(r)$.

Из интеграла площадей (3.1) следует, что $\dot{\varphi}$ никогда не меняет знака и не обращается в ноль, т.е. материальная точка движется всегда в одну сторону, не может остановиться и повернуть.

Из интеграла энергии (3.2) следует, что при данном значении полной энергии *h* движение возможно только в той области значений *r*, для которых $\tilde{U}(r) \le h$. При значениях *r* таких, что $\tilde{U}(r) = h$, радиальная скорость $\dot{r}$ обращается в ноль. Но это не означает остановки, т.к. $\dot{\varphi} \ne 0$. Это – точки поворота траектории, в которых функция $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.



Если область допустимых значений *r* имеет только нижнюю границу, т.е. $r \ge r_{min}$, то движение материальной точки инфинитно: траектория уходит в бесконечность. Если область допустимых значений имеет нижнюю и верхнюю границы, т.е. $r_{min} \le r \le r_{max}$, то движение финитно – траектория лежит внутри кольца, ограниченного двумя окружностями $r = r_{min}$ и $r = r_{max}$.

Финитная траектория не обязательно замкнута. За время, в течение которого *r* изменяется от r_{max} до r_{min} и опять до r_{max}, радиус-вектор материальной точки поворачивается на угол

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{c\,dr}{r^2 \sqrt{\frac{2(h - U(r))}{m} - \frac{c^2}{r^2}}}.$$

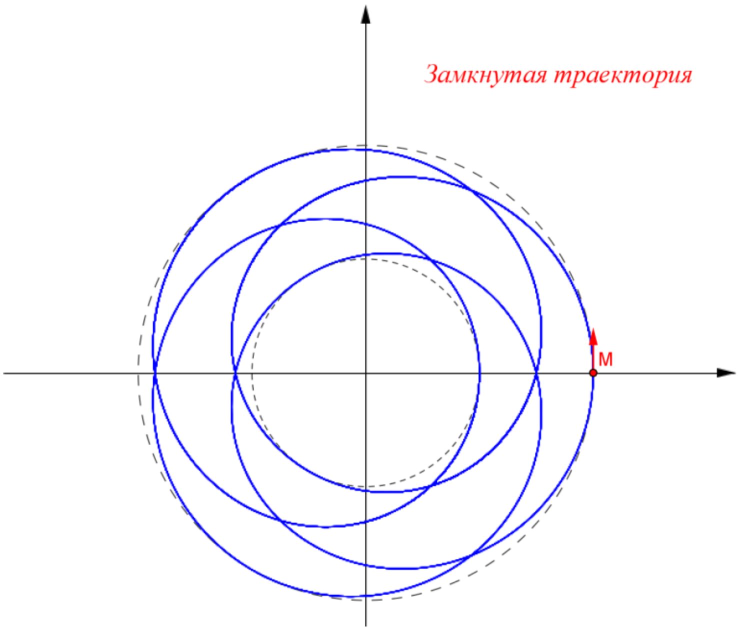
Условие замкнутости траектории

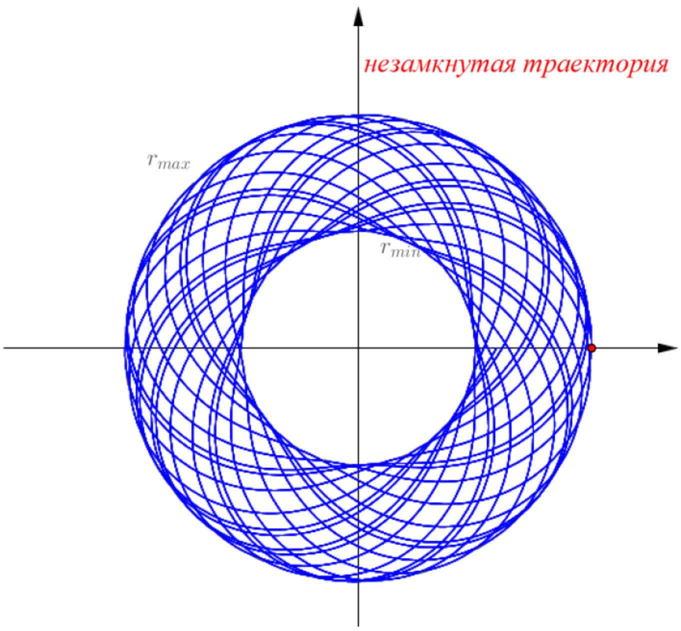
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi k}{n}.$$

Тогда через *n* периодов траектория замкнется, сделав *k* полных оборотов.

Существуют только два типа полей, в которых все финитные траектории замкнуты. Это поле ньютоновского потенциала $U = \frac{1}{r}$ и поле пространственного осциллятора с потенциалом $U = r^2$.

В случае незамкнутой финитной траектории она с течением времени полностью заполняет все кольцо между двумя граничными окружностями.





ЗАДАЧА. Какова траектория материальной точки, если область допустимых значений r состоит только из одной точки r_0?

КЕПЛЕРОВА ЗАДАЧА.

Изучим движение в поле ньютоновского гравитационного потенциала $U = -\frac{\mu m}{r}$. Интеграл энергии имеет вид

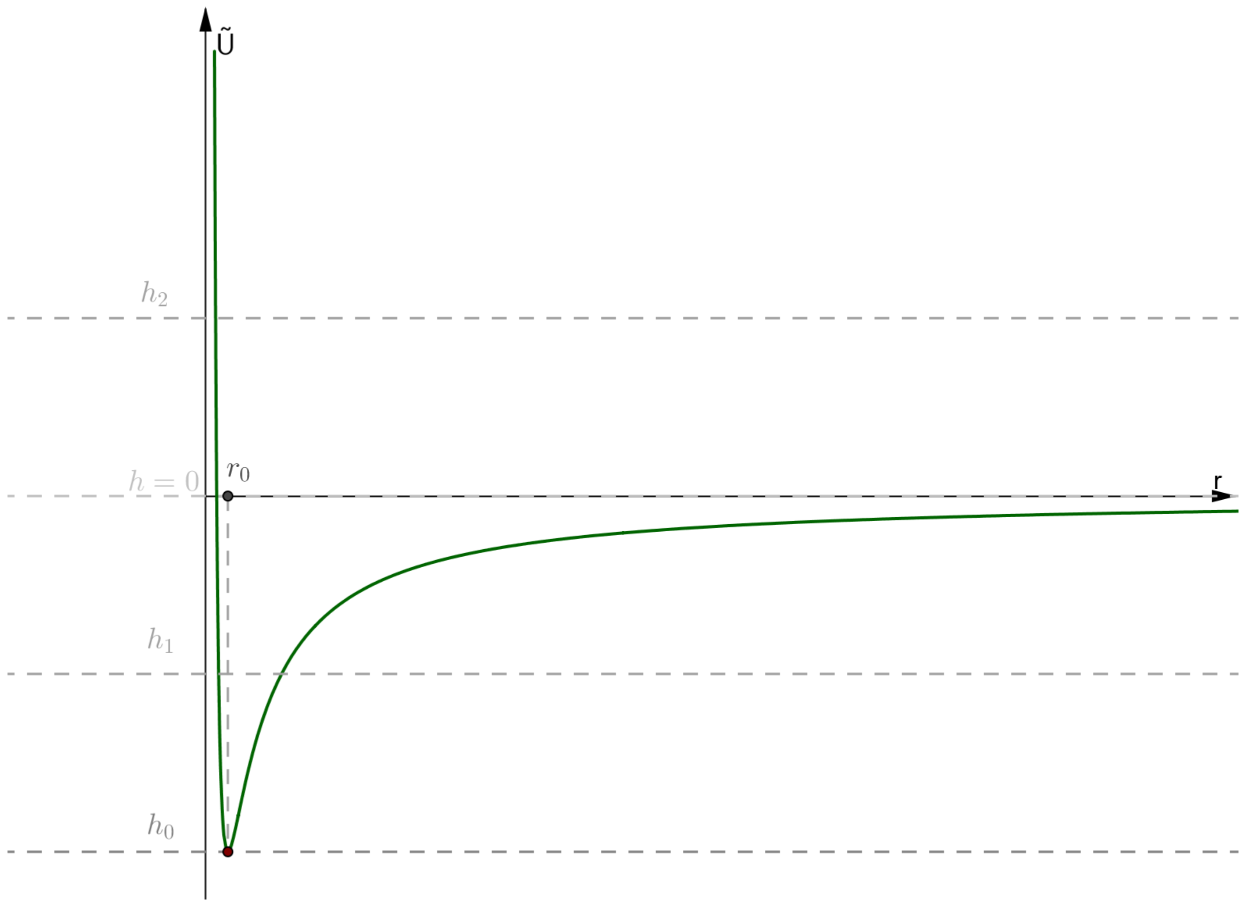
$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mc^2}{2r^2} - \frac{\mu m}{r} = h. \tag{3.8}$$

Эффективная потенциальная энергия

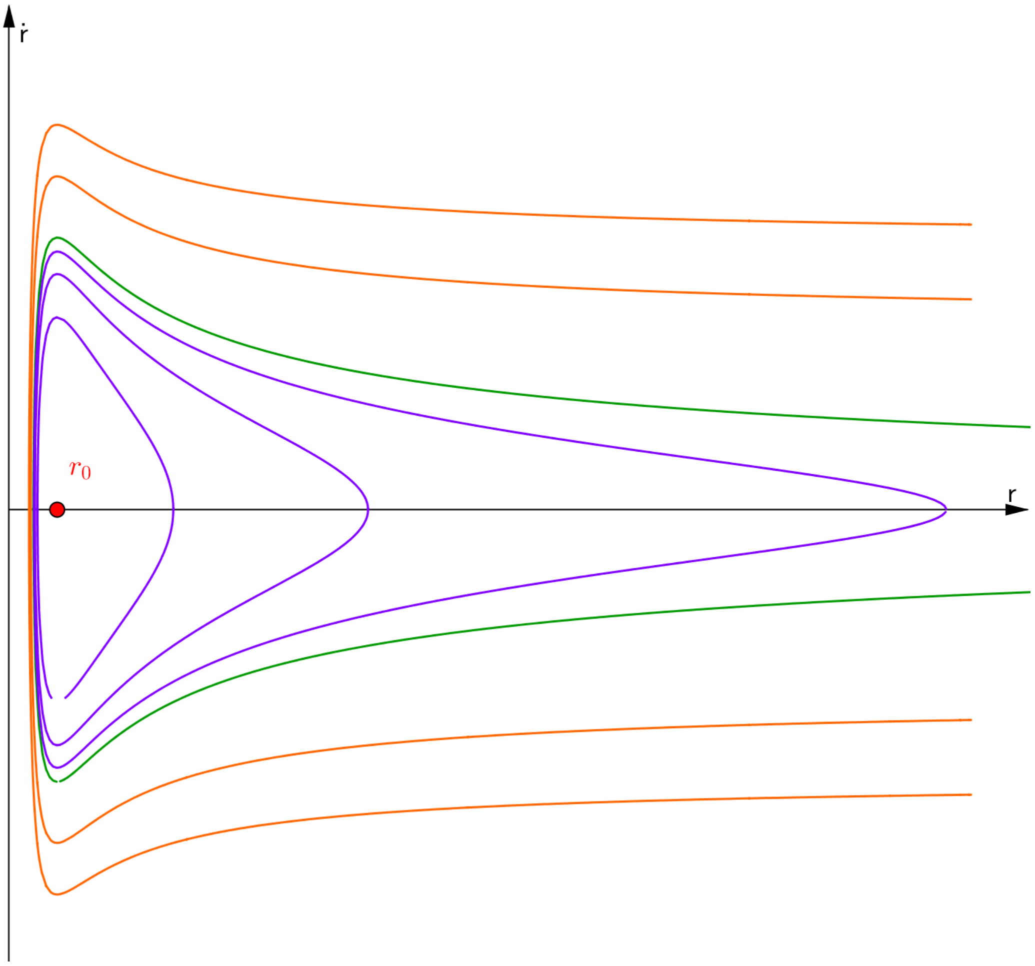
$$\tilde{U} = \frac{mc^2}{2r^2} - \frac{\mu m}{r}. \tag{3.9}$$

Построим фазовый портрет для уравнения (3.8).

При значении полной энергии h_0 (минимальное значение $\tilde{U}(r)$) траектория – окружность с радиусом r_0. При $h < 0$ движение существовать не может. При $h_0 < h < 0$ r имеет минимальное и максимальное значения – точки пересечения прямой $h = Const$ с графиком функции $\tilde{U}(r)$ и траектории – финитные. При $h \geq 0$ прямая $h = Const$ имеет только одну точку пересечения с графиком функции $\tilde{U}(r)$ - r_{min} и траектории становятся инфинитными, причем при $h = 0$ скорость на бесконечности стремится к 0, при $h > 0$ - скорость на бесконечности стремится к пределу, отличному от нуля.



Ũ
h_2
$h = 0$
r_0
r
h_1
h_0



ṙ
r_0
r

Выведем уравнение траекторий. Подставим выражение (3.9) в формулу (3.7) и проинтегрируем , получим

$$\varphi = \int \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\frac{2h}{m} - \frac{c^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}} = -\int \frac{d\frac{c}{r}}{\sqrt{\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2}} = \arccos\frac{\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}}{\sqrt{\frac{2h}{m} + \frac{\mu^2}{c^2}}}.$$

Выразим r через φ:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{m\mu^2}} \cdot \cos\varphi}$$

.

Положим $\frac{c^2}{\mu} = p$, $\sqrt{1 + \frac{2hc^2}{m\mu^2}} = e$. Тогда окончательно получим уравнение траекторий в поле тяготения Ньютона:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Это – уравнение кривых второго порядка. Вид кривой определяется значением эксцентриситета *e*, которое в свою очередь определяется полной энергией *h*. При *e*=0 получается круговая орбита $r = r_0$. При $0 < e < 1$ - эллипс. При $e = 1$ парабола; при $e > 1$ - гипербола.

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

Небесная механика – наука о движении небесных тел под действием силы всемирного тяготения Ньютона.

В основе небесной механики лежат три закона, открытые Кеплером (1571-1630).

1. Орбиты всех планет и комет солнечной системы представляют собой конические сечения (т.е. кривые второго порядка), в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. Площади, заметаемые радиус-векторами планет, имеющими начало в Солнце, прямо пропорциональны времени движения планет (т.е. закон площадей).
3. Планеты движутся по эллипсам. Квадраты их периодов *T* обращения вокруг Солнца прямо пропорциональны кубам больших полуосей эллипсов:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}.$$

Законы Кеплера были открыты экспериментально на основе наблюдений за движением планет.

ТЕОРЕМА НЬЮТОНА (1687 г.) *Законы Кеплера справедливы тогда и только тогда, когда сила взаимодействия планет с Солнцем выражается формулой*

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.10)$$

где M – масса Солнца,

m – масса планеты,

γ - универсальная гравитационная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточность уже доказана при решении задачи Кеплера. Докажем необходимость.

Уравнение эллипса в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

($p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр; $e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $2c$ – расстояние между фокусами; начало полярной системы отсчета (полюс) выбирается в правом фокусе.)

Вычислим силу по 2-й формуле Бине:

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Из уравнения эллипса

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\varphi}{p};$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\sin\varphi;$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos\varphi;$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left(-\frac{e}{p}\cos\varphi + \frac{1+e\cos\varphi}{p}\right) = -\frac{mc^2}{pr^2}. \qquad (3.11)$$

Т.е. сила обратно пропорциональна квадрату расстояния до Солнца.

Покажем, что постоянная $\mu = \frac{c^2}{p}$ (постоянная Гаусса) одинакова для всех планет.

Из 2 закона Кеплера следует, что секторная скорость $\frac{c}{2}$ постоянна. Тогда $S(t) = \frac{c}{2}t$.

За период T обращения вокруг Солнца радиус-вектор планеты заметает всю площадь эллипса, которая равна $S=\pi ab$. Значит, $\frac{c}{2}T=\pi ab$. Следовательно, $c=\frac{2\pi ab}{T}$.

Подставив это в формулу (3.11), получим

$$F=-\frac{4m\pi^2a^3}{T^2r^2}.$$

Значит,

$$\mu=\frac{4\pi^2a^3}{T^2}.$$

Согласно 3-му закону Кеплера, отношение $\frac{T^2}{a^3}$ одинаково для всех планет Солнечной системы, следовательно, зависит только от массы Солнца. Пусть $\mu=\gamma M$. Тогда получаем формулу для силы всемирного тяготения (3.10).

ЛЕКЦИЯ 4. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ). УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА I РОДА.

1. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК СО СВЯЗЯМИ.

Если движению системы материальных точек ничто не препятствует, т.е. каждая из точек системы может занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольную скорость, то такая система называется *свободной*. Если же на положения точек и их скорости наложены ограничения, то такая система будет несвободной. Ограничения на движение системы называются в механике *связями*. Если связь налагает ограничения только на положение системы, т.е. координаты точек, то такая связь называется *геометрической* или *голономной*.

Например, точки могут двигаться только по поверхности, заданной в пространстве уравнением

$$\varphi(t, x, y, z) = 0\,. \tag{4.1}$$

Тогда (4.1) будет математическим выражением связи.

Связи, налагаемые на точки системы, стесняют свободу движения этих точек, отклоняя их движения от того, которое они имели бы при отсутствии этих связей. Но аналогично проявляется действие сил на материальные точки. Силы тоже отклоняют движение от того, которое имела бы свободная материальная точка. Это послужило основанием для введения в механику аксиомы, которая называется *принцип освобождения от связей*.

ПРИНЦИП ОСВОБОЖДЕНИЯ ОТ СВЯЗЕЙ. Действие связей можно заменить соответствующими силами, которые называются *реакциями связей*, и считать механическую систему свободной, находящейся под действием дополнительных сил – сил реакции связей.

Реакция связи представляет собой силу, приложенную в точке системы, которая соприкасается со связью, причем направление силы реакции противоположно тому направлению, по которому связь препятствует перемещению материальной точки. Если связь представляет собой гладкую поверхность (4.1), то сила реакции направлена по нормали к этой поверхности: $\vec{R} \parallel \operatorname{grad}\varphi$, где $\vec{R}$ - сила реакции связи.

Таким образом, уравнения движения системы материальных точек со связями можно записать в виде

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i,\ i = 1,\ldots,n \tag{4.2}$$

Здесь $m_1,\ldots,m_n$ - массы материальных точек, $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n$ - их радиус-векторы, $\vec{F}_i$ - равнодействующая всех активных сил, внутренних и внешних, действующих на *i*-ю материальную точку, $\vec{R}_i$ - реакция связи для *i*-й точки.

Если активные силы $\vec{F}_i$, действующие на точки системы, обычно известны, то силы реакции $\vec{R}_i$ неизвестны и их нужно найти из уравнений движения (4.2) и уравнений связей, которые наложены на систему. Будем рассматривать только голономные связи. Тогда система связей, наложенных на механическую систему, можно записать в виде

$$
\begin{cases}
\varphi_1(t, x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0 \\
\varphi_2(t, x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0 \\
\dots \\
\varphi_l(t, x_1, y_1, z_1, \dots x_n, y_n, z_n) = 0
\end{cases}, \qquad (4.3)
$$

l- число связей.

Таким образом, полная система уравнений движения системы материальной точек со связями – это (4.2) (второй закон Ньютона) и (4.3) – уравнения связей.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА (ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ).

Рассмотрим два близких положения системы материальных точек, удовлетворяющих связям (4.3) *в один и тот же момент времени t*. То есть, придадим бесконечно малые приращения координатам точек системы, считая время постоянным параметром. Такие бесконечно малые приращения координат в механике называются *вариациями* и обозначаются символом “ δ ”:

$$
\{\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i\},\ i = 1\dots, n. \qquad (4.4)
$$

Бесконечно малые приращения, удовлетворяющие системе (4.3), называются *возможными перемещениями*.

При движении системы силы, действующие на систему, совершают работу. По определению, элементарная работа силы $\vec{F}$ на бесконечно малом *действительном* перемещении $d\vec{r}$ равна $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$ - скалярному произведению силы $\vec{F}$ и бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$. Аналогично, элементарная работа силы $\vec{F}$ на *возможном* перемещении $\delta\vec{r}$ равна по определению $\delta A = (\vec{F}, \delta\vec{r})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементарной работой системы сил $\{\vec{F_i}, i = 1, \dots, n\}$ на возможных перемещениях (4.4) называется величина

$$
\delta A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F_i}, \delta\vec{r_i}) = \sum_{i=1}^{n} (F_{ix}\delta x_i + F_{iy}\delta y_i + F_{iz}\delta z_i), \qquad (4.5)
$$

где $\vec{F_i} = (F_{ix}, F_{iy} F_{iz})$ - компоненты вектора силы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Связи называются *идеальными*, если элементарная работа сил реакции связей на любом возможном перемещении равна нулю:

$$
\delta A = \sum_{i=1}^{n} (\vec{R_i}, \delta\vec{r_i}) = \sum_{i=1}^{n} (R_{ix}\delta x_i + R_{iy}\delta y_i + R_{iz}\delta z_i) = 0. \qquad (4.6)
$$

Например, если материальная точка движется по гладкой (в физическом смысле) поверхности, то сила реакции связи ортогональна поверхности, работа силы реакции будет равна 0, т.е. связь – идеальная. Если же поверхность шершавая, то появится еще компонента силы реакции, направленная по касательной к поверхности. Эту силу реакции называют силой трения. В этом случае связь не идеальна.

Выразим силы реакции $\vec{R_i}$ из уравнений движения (4.2) и подставим в (4.6), получим

$$
\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} - \vec{F_i}, \delta\vec{r_i} \right) = 0. \qquad (4.7)
$$

Или в координатной записи

$$\sum_{i=1}^{n}\Big((m_i\ddot{x}_i - F_{ix})\delta x_i + (m_i\ddot{y}_i - F_{iy})\delta y_i + (m_i\ddot{z}_i - F_{iz})\delta z_i\Big) = 0\,. \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.7) (или (4.8)) называется *общим уравнением динамики*. Принцип Даламбера-Лагранжа состоит в том, что уравнение (4.8) является необходимым и достаточным условием действительного движения механической системы.

Выведем уравнения для возможных перемещений. Так как

$$\delta\varphi_i = \varphi_i(t, x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, z_1+\delta z_1, \ldots x_n+\delta x_n, y_n+\delta y_n, z_n+\delta z_n) - \varphi_i(t, x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0\,, \qquad (4.9)$$

то в первом приближении

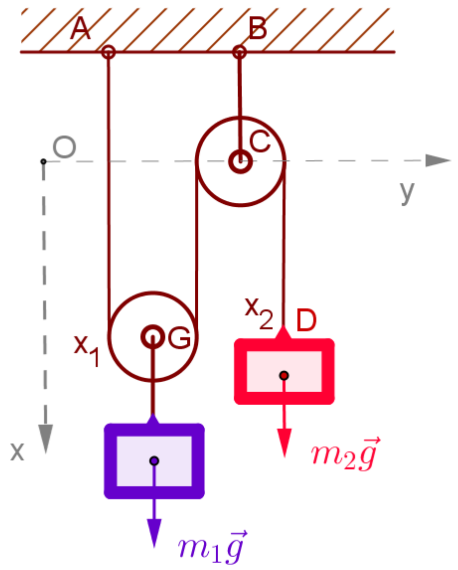
$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\cdot\delta x_i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}\cdot\delta y_i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right) = 0 \\
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}\cdot\delta x_i + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}\cdot\delta y_i + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right) = 0 \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_i}\cdot\delta x_i + \frac{\partial\varphi_l}{\partial y_i}\cdot\delta y_i + \frac{\partial\varphi_l}{\partial z_i}\cdot\delta z_i\right) = 0\,.
\end{gathered} \qquad (4.10)$$

Общее уравнение динамики описывает самый общий случай движения системы материальных точек с идеальными связями. Его удобно использовать, так как оно не содержит сил реакций.

3.АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ.

- Находим активные силы $\vec{F_i}$, действующие на систему, и записываем общее уравнение динамики (4.8).
- Выписываем уравнения связей (4.3).
- Выбираем независимые параметры (обобщенные координаты), полностью описывающие систему. Их должно быть $3n-l$ (n точек, l связей). Это могут быть какие-то из координат x_i, y_i, z_i. Обозначим эти обобщенные координаты $q_1,\ldots,q_{3n-l}$.
- Выражаем x_i, y_i, z_i, $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, \ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ через $q_1,\ldots,q_{3n-l}$ и и их вариации $\delta q_1,\ldots,\delta q_{3n-l}$, собираем вместе члены, содержащие δq_i.
- Так как вариации обобщенных координат независимы и их можно выбирать произвольно, то последовательно выбирая возможные перемещения так, что вариация одной из координат не равна 0, а все остальные равны 0, получим, что выражения в скобках, стоящие при каждом δq_i, должны обращаться в ноль.
- Приравниваем их нулю. Это и будут уравнения движения.

ПРИМЕР. К системе невесомых блоков на нерастяжимой нити подвешены грузы массой m_1 и m_2 (рис.) . На грузы действует сила тяжести. Определить ускорение грузов.



РЕШЕНИЕ.

Выберем координаты, как показано на рисунке.
Положение груза m_1 можно определять координатой x_1 точки G - центром подвижного блока, (так как груз m_1 жестко скреплен с блоком G), положение груза m_2 координатой x_2 точки D.

Общее уравнение динамики:

$$(m_1\ddot{x}_1 - m_1 g)\delta x_1 + (m_2\ddot{x}_2 - m_2 g)\delta x_2 = 0. \qquad (4.11)$$

Длина нити AD постоянна. Это – связь. Уравнение связи $AD = 2x_1 + x_2 + c$, (в постоянную c входит кусочек нити от точки A до оси y и две полуокружности блоков; участок нити между блоками CG равен x_1). Варьируя связь, получаем

$$2\delta x_1 + \delta x_2 = 0 \Rightarrow \delta x_2 = -2\delta x_1.$$

Выберем в качестве независимой координаты x_1 Дважды дифференцируя связь по времени, получаем

$$\ddot{x}_2 = -2\ddot{x}_1.$$

Подставляем это в общее уравнение динамики и приводим подобные члены:

$$\left((m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + (2m_2 - m_1)g\right)\cdot\delta x_1 = 0.$$

Отсюда

$$(m_1 + 4m_2)\ddot{x}_1 + (2m_2 - m_1)g = 0,$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}g,$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2(2m_2 - m_1)}{m_1 + 4m_2}g.$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА I РОДА.

Система (4.10) – однородная линейная система l-го порядка относительно $3n$ переменных $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i,\ i = 1,\dots,n$. Пространство решений этой системы имеет размерность $3n - l$. Это значит, что $3n - l$ вариаций $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ мы можем выбирать произвольно (*независимые вариации*), а остальные l вариаций будут через них выражаться (*зависимые вариации*).

Будем решать уравнение (4.8) с ограничениями (4.10) методом множителей Лагранжа.

Умножим первое уравнение системы (4.10) на λ_1, второе – на λ_2, ..., последнее – на λ_l. Числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ называются множителями Лагранжа. Множителей Лагранжа столько же, сколько уравнений связи. Вычтем полученные произведения из уравнения (4.8). После перегруппировки слагаемых, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(m_i\ddot{x}_i - F_{ix} - \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i + \left(m_i\ddot{y}_i - F_{iy} - \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i + \left(m_i\ddot{z}_i - F_{iz} - \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right) = 0\,. \quad (4.12)$$

Подберем множители так, чтобы выражения в скобках при *зависимых* вариациях обратились в ноль. Тогда в уравнении (4.12) останутся только $3n-l$ слагаемых, содержащие *независимые вариации* $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$. Так как независимые вариации мы можем выбирать произвольно, то выберем их таким образом, чтобы вариация одной из координат, например, δx_α, была отлична от нуля, а все другие равнялись нулю. Тогда в уравнении (4.12) останется только одно слагаемое, содержащее δx_α:

$$\left(m_i\ddot{x}_\alpha - F_{\alpha x} - \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\alpha}\right)\delta x_\alpha = 0\,.$$

Так как $\delta x_\alpha \neq 0$, то выражение в скобках должно равняться нулю.

Последовательно выбирая возможные перемещения так, чтобы одна *независимая* вариация координат была отлична от нуля, а все остальные *независимые* вариации равнялись нулю, мы получим, что все выражения в скобках при *независимых* вариациях в (4.12) равны нулю.

Таким образом, мы получаем, что множители при *всех* вариациях координат в уравнении (4.12) равны нулю. При *зависимых* вариациях - потому что мы так подобрали множители Лагранжа λ_i. При *независимых* - как следствие независимости их выбора. Получаем систему из $3n$ уравнений

$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = F_{ix} + \sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} \\ m_i\ddot{y}_i = F_{iy} + \sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial y_i} \quad , \\ m_i\ddot{z}_i = F_{iz} + \sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial z_i}, \end{cases} \qquad (4.13)$$

$$i = 1,\ldots,n\,.$$

Уравнения (4.13) называются *уравнениями Лагранжа I рода.* Вместе с уравнениями связи (4.3) уравнения (4.13) представляют собой полную систему уравнений движения механической системы со связями.

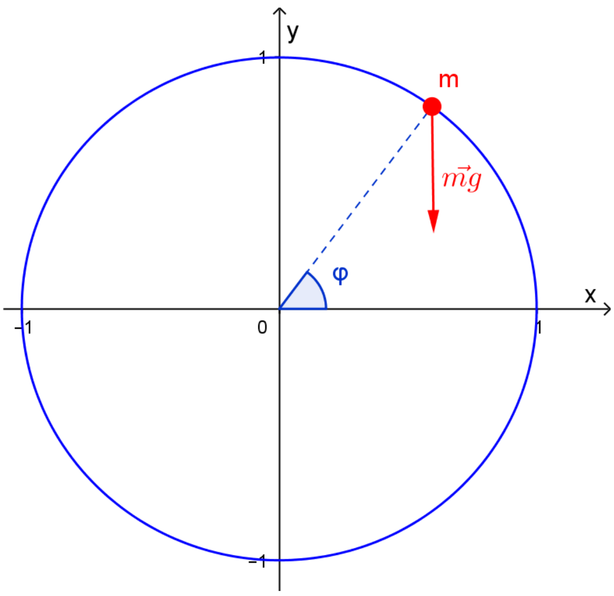
Если сравнить уравнения (4.13) с уравнениями движения

$$m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \vec{R}_i,\, i = 1,\ldots,n\,,$$

то становится понятным физический смысл множителей Лагранжа: сила реакции связей, действующая на i -ю массу, равна

$$\vec{R}_i = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j \operatorname{grad}\varphi_j\,. \qquad (4.14)$$

ПРИМЕР. Материальная точка массы m движется без трения в вертикальной плоскости по кольцу радиуса 1 под действием силы тяжести. Найти уравнения движения. Найти силу реакции.



РЕШЕНИЕ. Координаты точки $(x; y)$. На точку действует сила тяжести $\vec{F} = (0; -mg)$. Уравнение связи

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2x; \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y.$$

Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2\lambda x \\ m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y \end{cases}, \tag{4.16}$$

составляющие вместе с уравнением связи (4.15) полную систему уравнений для нахождения $x(t), y(t)$ и множителя λ.

Чтобы исключить множитель λ (который пока не известен) из уравнений (4.16), умножим первое уравнение системы на y, второе – на x и вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$m(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = mgx. \tag{4.17}$$

Теперь умножим первое уравнение на x, второе – на y и сложим:

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = -mgy + 2\lambda \tag{4.18}$$

- уравнение для определения λ. Здесь мы учли уравнение связи (4.15).

Далее удобно ввести полярный угол φ:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi; & y &= \sin\varphi; \\ \dot{x} &= -\dot{\varphi}\sin\varphi; & \dot{y} &= \dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} = \frac{d\left(y\dot{x} - x\dot{y}\right)}{dt} = \frac{d\left(-\dot{\varphi}\sin^2\varphi - \dot{\varphi}\cos^2\varphi\right)}{dt} = -\ddot{\varphi}.$$

Поэтому окончательно уравнение движения (4.17) примет вид

$$\ddot{\varphi} = -g\cos\varphi.$$

Теперь продифференцируем по времени уравнение связи (4.15):

$$x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} = 0. \tag{4.19}$$

Продифференцируем (4.19) еще раз:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0.$$

Отсюда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=-\dot{\varphi}^2 .$$

Подставим это в уравнение (4.18) и получим выражение для λ :

$$\lambda=\frac{1}{2}m\left(g\sin\varphi-\dot{\varphi}^2\right).$$

Из уравнения (4.14) получаем выражение для силы реакции связи

$$\begin{cases} R_x=\lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=2\lambda x \\ R_y=\lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=2\lambda y \end{cases}.$$

То есть сила реакции направлена по радиусу вектору и равна по величине

$$R=2\lambda=\left(g\sin\varphi-\dot{\varphi}^2\right).$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА.

- Находим активные силы, действующие на систему;
- Выписываем уравнения связи;
- Выписываем уравнения Лагранжа I рода (4.13);
- Исключаем из полученных уравнений множители Лагранжа (там, где это возможно и требуется в задаче). Это будут уравнения движения;
- Находим множители Лагранжа и силы реакции связей (4.14)(если требуется в задаче).

ЛЕКЦИЯ 5. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Рассмотрим систему из *n* материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots m_n$ и радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - *масса системы*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Центр масс системы* – точка C с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \qquad (5.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ - *количество движения*, или *импульс* системы.

Продифференцируем выражение для радиус-вектора центра масс по времени, получим

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{v}_c \qquad (5.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\vec{v}_c$ - *скорость центра масс системы*.

Из формулы (5.2) следует, что

$$\vec{P} = M\vec{v}_c \,. \qquad (5.3)$$

То есть *количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра масс.*

Движение системы материальных точек удобно рассматривать как сложное, выбрав в качестве относительной системы отсчета систему, начало которой находится в центре масс и которая движется со скоростью центра масс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Система отсчета с началом в точке C (центре масс системы), движущаяся поступательно со скоростью $\vec{v}_c$ (скоростью центра масс), называется *системой отсчета Кёнига*.

ЗАДАЧА. Доказать, что импульс системы относительно системы отсчета Кёнига равен нулю.

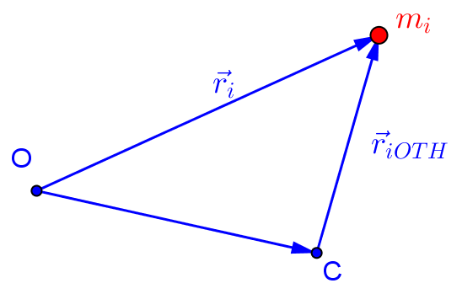
Доказательство. Согласно теореме о сложении скоростей в сложном движении $\vec{v}_i = \vec{v}_{iOTH} + \vec{v}_c$. Тогда

$$\vec{P}_{OTH} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{iOTH} = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{v}_c = \vec{P} - M\vec{v}_c = \vec{0}. \qquad (5.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i\right]$ - *кинетический момент*, или *момент количества движения* системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$ - *кинетическая энергия* системы.

ТЕОРЕМЫ КЁНИГА О КИНЕТИЧЕСКОМ МОМЕНТЕ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.



ТЕОРЕМА 1. Кинетический момент $\vec{K}$ системы равен сумме ее относительного кинетического момента и момента вектора импульса $\vec{P}$ системы (вектор $\vec{P}$ считается приложенным в центре масс системы):

$$\vec{K} = \left[\overrightarrow{OC}, \vec{P}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_{iOTH}, m_i\vec{v}_{iOTH}\right]. \tag{5.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\overrightarrow{OC} + \vec{r}_{iOTH}, m_i\vec{v}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\overrightarrow{OC}, m_i\vec{v}_i\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_{iOTH}, m_i\vec{v}_i\right] =$$
$$= \left[\overrightarrow{OC}, \vec{P}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_{iOTH}, m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{iOTH})\right].$$

Второе слагаемое в этой сумме можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\vec{r}_{iOTH}, \vec{v}_c\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_{iOTH}, m_i\vec{v}_{iOTH}\right].$$

Но $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_{iOTH} = \vec{0}$ (т.к. центр масс находится в начале системы отсчета Кенига). Поэтому первая сумма равна нулю и получаем формулу (5.5).

ТЕОРЕМА 2. Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре масс системы и имеющая массу системы, и кинетической энергии относительного движения системы:

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iOTH}^2. \tag{5.6}$$

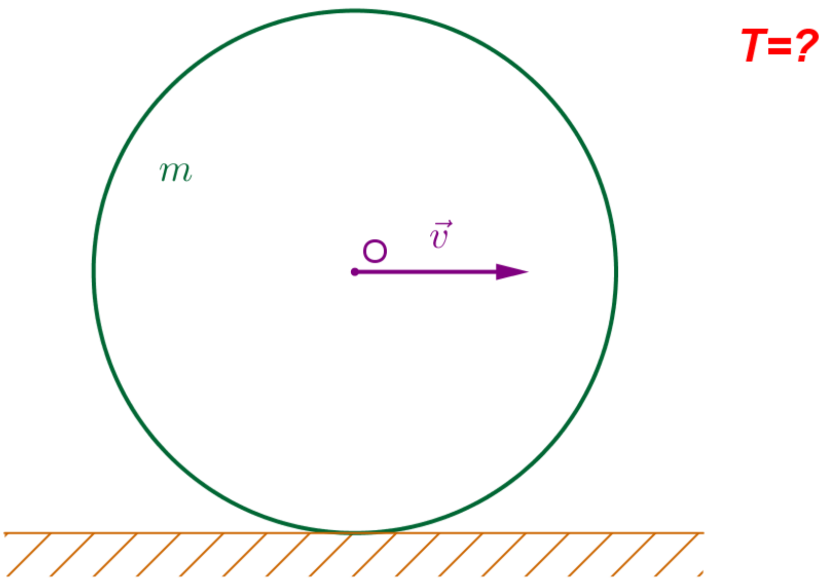
Под относительным движением здесь понимается движение относительно системы отсчета Кенига.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_{iOTH}, \vec{v}_c + \vec{v}_{iOTH}) =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c, \vec{v}_c) + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c, \vec{v}_{iOTH}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_{iOTH}, \vec{v}_{iOTH}) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)v_c^2 + \left(\vec{v}_c, \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{iOTH}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{iOTH}^2.$$

Но из (5.4) следует, что второе слагаемое равно нулю. Поэтому получаем (5.6).

ЗАДАЧА. Тонкий обруч массы m катится без проскальзывания по прямой с постоянной скоростью $\vec{v}$. Чему равна кинетическая энергия обруча?



ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН.

Силы, которые действуют на материальные точки системы, можно разделить на внешние и внутренние. Внешние силы действуют на точки системы со стороны внешних по отношению к системе объектов. Внутренние силы действуют между точками системы и подчиняются 3-му закону Ньютона. Пусть

$\vec{F}_i$ - внешняя сила, действующая на i-ю точку системы;

$\vec{f}_{ij}$ - сила, действующая на m_i со стороны m_j,

$\vec{f}_{ii} = \vec{0}$.

Согласно 3-му закону Ньютона,

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}. \qquad (5.7)$$

Уравнения движения для материальных точек системы:

$$\frac{d\overrightarrow{m_i v_i}}{dt} = \overrightarrow{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{f_{ij}} \quad , \quad i = 1, \ldots n. \qquad (5.8)$$

ТЕОРЕМА 3. Производная по времени (скорость изменения) количества движения (импульса) системы равна равнодействующей всех внешних сил:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}. \qquad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Просуммируем уравнения движения (5.8) по i от 1 до n, получим

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{m_i v_i}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}+\sum_{i,j=1}^{n}\overrightarrow{f_{ij}}\,.$$

В силу (5.7) все внутренние силы взаимно уничтожатся и получится (5.9).

Другая формулировка той же теоремы:

ТЕОРЕМА 4. (О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС) Центр масс системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, под действием силы, равной равнодействующей всех внешних сил:

$$M\frac{d\overrightarrow{v_c}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{F_i}$$

(в силу формулы (5.3)).

ТЕОРЕМА 5. (ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА) Скорость изменения кинетического момента системы равна главному моменту внешних сил:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{M}\,, \tag{5.10}$$

Где

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r_i},\overrightarrow{F_i}\right]$$

- главный момент внешних сил.

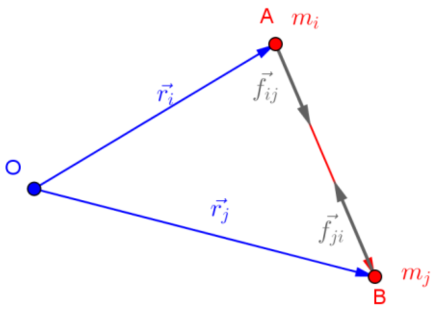
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим (5.8) векторно на $\vec{r_i}$ слева и просуммируем по *i*:

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r_i},\overrightarrow{F_i}\right]+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\vec{r_i},\overrightarrow{f_{ij}}\right]. \tag{5.11}$$

Рассмотрим сумму двух слагаемых:

$$\left[\vec{r_i},\overrightarrow{f_{ij}}\right]+\left[\vec{r_j},\overrightarrow{f_{ji}}\right]=\left[\vec{r_i},\overrightarrow{f_{ij}}\right]+\left[\vec{r_i}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{f_{ji}}\right]=\left[\vec{r_i},\overrightarrow{f_{ij}}+\overrightarrow{f_{ji}}\right]+\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{f_{ji}}\right]=\vec{0}\,,$$

т.к. $\vec{r_j}=\vec{r_i}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{f_{ji}}\parallel\overrightarrow{AB}$ и в силу (5.7).



Поэтому вторая сумма в (5.11) равна нулю и получаем (5.10).

Если $\vec{M}=\vec{0}$, то $\vec{K}=\overrightarrow{Const}$ - закон сохранения кинетического момента.

ТЕОРЕМА 6. (ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ в дифференциальной форме). Дифференциал кинетической энергии системы равен элементарной работе всех сил системы:

$$dT=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{F_i},d\vec{r_i}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\overrightarrow{f_{ij}},d\vec{r_i}\right). \tag{5.12}$$

(Доказательство: умножим скалярно (5.8) на $d\vec{r}_i$ и просуммируем по *i*).

ТЕОРЕМА 7. (ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ в интегральной форме). Приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время:

$$T(t_2)-T(t_1)=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_i,d\vec{r}_i\right)+\sum_{i,j=1}^{n}\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f}_{ij},d\vec{r}_i\right)$$

(Доказательство: интегрируем (5.12)).

ТЕОРЕМА 8. (ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ). Если все силы потенциальны, то при движении системы ее полная энергия сохраняется:

$$T+U=h=Const\,.$$

Основной динамической характеристикой материальной точки является масса – мера инертности, то есть способности сопротивляться изменению движения. У абсолютно твердого тела, кроме массы, есть еще одна характеристика меры инертности – тензор инерции. В этой лекции выводится формула тензора инерции абсолютно твердого тела и изучаются его свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Абсолютно твердым телом называется механическая система, расстояние между точками которой не меняются в ходе движения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Моментом инерции системы материальных точек относительно некоторой оси l называется величина*

$$I_l = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \rho_{(k)}^2, \tag{6.1}$$

где $m_{(1)}, m_{(2)}, \dots m_{(n)}$ - массы материальных точек, $\rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \dots \rho_{(n)}$ - их расстояния до прямой *l*.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой лекции номер точки мы заключаем в скобки для удобства дальнейших вычислений.

Соответственно, моментом инерции абсолютно твердого тела называется величина

$$\iiint_V \mu(x,y,z)\rho^2(x,y,z)dV, \tag{6.2}$$

где $\mu(x,y,z)$ - плотность распределения массы, $\rho(x,y,z)$ - расстояние от точки с координатами (x,y,z) до прямой *l*.

В дальнейшем в этой лекции мы будем считать, что абсолютно твердое тело дискретно, и вместо знака интеграла будем писать знак суммы.

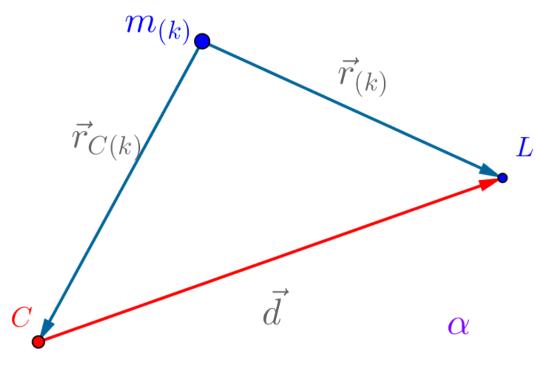
ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА. *Момент инерции системы материальных точек относительно некоторой оси l равен моменту инерции относительно параллельной ей оси l_C, проходящей через центр масс системы, плюс Md^2, где M- масса системы, d - расстояние между осями:*

$$I_l = I_{Cl} + Md^2. \tag{6.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную прямой *l* и проходящую через центр масс *C*.

Расстояние от точки с массой $m_{(k)}$ до оси *l* (или l_C) равно расстоянию от ее проекции на плоскость α до этих прямых. Поэтому можно считать, что все точки системы расположены в плоскости α. Точка *L* - пересечение прямой *l* и плоскости α. Тогда

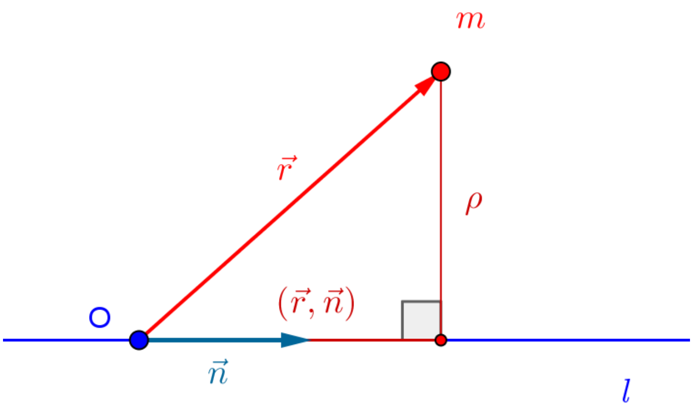


$$I_l = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\rho_{(k)}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(\vec{r}_{(k)}, \vec{r}_{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(\vec{r}_{C(k)} + \vec{d}, \vec{r}_{C(k)} + \vec{d}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(\vec{r}_{C(k)}, \vec{r}_{C(k)}\right) + 2\sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(\vec{r}_{C(k)}, \vec{d}\right) + \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(\vec{d}, \vec{d}\right).$$

Первая сумма равна $\sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\rho_{C(k)}^2 = I_{Cl}$. Вторую сумму можно переписать в виде $\left(\sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\vec{r}_{C(k)}, \vec{d}\right) = 0$, так как C – центр масс. Третья сумма равна Md^2. Приходим к формуле (6.3) ■.

Будем теперь рассматривать моменты инерции твердого тела относительно прямых l, проходящих через фиксированную точку O. Пусть $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный направляющий вектор прямой l: $(\vec{n}, \vec{n}) = 1$. Для удобства вычислений будем обозначать координаты точек и векторов (x_1, x_2, x_3). Радиус-вектор точки с массой m будет $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Проекция вектора $\vec{r}$ на прямую l равна скалярному произведению



$$(\vec{r}, \vec{n}) = x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i n_i .$$

Из прямоугольного треугольника (см. рис.)

$$\rho^2 = r^2 - (\vec{r}, \vec{n})^2. \tag{6.4}$$

$$(\vec{r}, \vec{n})^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i n_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} x_j n_j\right) = \left(\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j n_i n_j\right). \tag{6.5}$$

$$1 = (\vec{n}, \vec{n}) = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} n_i n_j ,$$

то есть

$$r^2 = r^2 \cdot 1 = r^2 \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} n_i n_j . \tag{6.6}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Подставляем (6.5) и(6.6) в (6.4) и получаем формулу для квадрата расстояния точки m от прямой l:

$$\rho^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) n_i n_j . \tag{6.7}$$

Теперь просуммируем по точкам $m_{(k)}$:

$$I_l = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \rho_{(k)}^2 = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \sum_{i,j=1}^{3} \left(r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j}\right) n_i n_j . \tag{6.8}$$

Здесь $\left(x_{(k)1}, x_{(k)2}, x_{(k)3}\right)$ - координаты точки с массой $m_{(k)}$. Поменяем порядок суммирования в (6.8):

$$I_l = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \left(r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j}\right) \right) n_i n_j . \tag{6.9}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрица* $I_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \left(r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j} \right)$ *называется тензором инерции системы материальных точек* $m_{(1)}, m_{(2)}, \ldots m_{(n)}$ *относительно полюса O.*

Момент инерции I_l относительно оси *l*, проходящей через точку *O* запишется как

$$I_l = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} n_i n_j, \tag{6.10}$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный направляющий вектор оси *l*.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, с непрерывно распределенной массой, то сумма заменяется на интеграл по объему:

$$I_{ij} = \iiint_V \mu(x_1, x_2, x_3) \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dV .$$

Если же тело – плоская фигура, или поверхность, или кривая, то интеграл по объему заменяется интегралом по соответствующей мере.

Вернемся теперь к обычным обозначениям координат (x, y, z) и выпишем формулы для матрицы инерции и явные формулы ее компонент.

$$I = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Диагональные элементы матрицы инерции обычно записывают с одним индексом.

$$I_x = I_{xx} = I_{11} = \iiint_V \mu(x,y,z) \left(r^2 - x^2 \right) dV = \iiint_V \mu(x,y,z) \left(y^2 + z^2 \right) dV .$$

Аналогично

$$I_y = \iiint_V \mu(x,y,z) \left(x^2 + z^2 \right) dV ,$$

$$I_z = \iiint_V \mu(x,y,z) \left(x^2 + y^2 \right) dV ,$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\iiint_V \mu(x,y,z) xy dV , \tag{6.12}$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\iiint_V \mu(x,y,z) xz dV ,$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\iiint_V \mu(x,y,z) yz dV .$$

Мы видим, что матрица инерции – симметрична.

Компоненты I_x, I_y, I_z называют *осевыми моментами инерции*. Это – моменты инерции относительно соответствующих координатных осей (Ox, Oy, Oz). Осевой момент инерции представляет собой меру инертности тела при его вращении вокруг соответствующей оси. Величины I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} называются *центробежными моментами инерции*. Их можно трактовать как меру несимметричности распределения массы. Действительно, если, к примеру, тело симметрично относительно плоскости Oxy (что подразумевает симметричность формы и распределения массы, т. е. $\mu(x, y, -z) = \mu(x, y, z)$), то совершая в интеграле для I_{xy} замену координат $z \to -z$, получим, что, с одной стороны, интеграл меняет знак, а с другой, в силу симметричности, он не должен измениться. Откуда следует, что $I_{xy} = 0$.

ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ.

Разделим обе части равенства (6.10) на I_l и введем обозначения:

$$\frac{n_1}{\sqrt{I_l}} = x, \frac{n_2}{\sqrt{I_l}} = y, \frac{n_3}{\sqrt{I_l}} = z . \tag{6.13}$$

Тогда (с учетом обозначений (6.11)) получим

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{yz}yz + 2I_{xz}xz = 1. \tag{6.14}$$

Это - уравнение поверхности второго порядка, а именно, эллипсоида (т.к. квадратичная форма I положительно определена, по определению, $I_l = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\rho_{(k)}^2 \geq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Эллипсоид (6.14) называется эллипсоидом инерции абсолютно твердого тела относительно точки O.*

Эллипсоид инерции можно привести к диагональному виду

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1. \tag{6.15}$$

Здесь A, B, C - собственные числа квадратичной формы I_{ij}. A, B, C положительны. Диагональный вид тензор инерции имеет в базисе из собственных векторов.

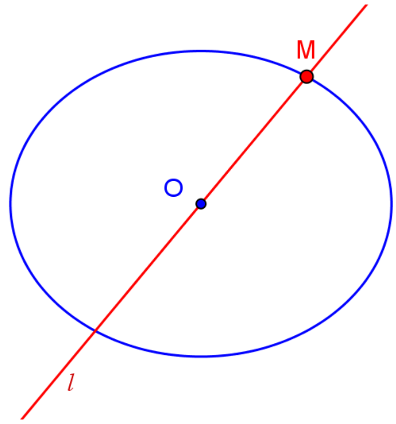
Оси, в которых эллипсоид инерции имеет вид (6.15), называются *главными осями инерции*. Числа A, B, C назваются *главными моментами инерции.* Если точка *O* - центр масс твердого тела, то оси называются *главными центральными осями инерции*. Числа A, B, C в этом случае называются *главными центральными моментами инерции.*

СВОЙСТВА МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ.

1. Неравенство треугольника: $I_x + I_y \geq I_z$, $I_y + I_z \geq I_x$, $I_z + I_x \geq I_y$. В частности, неравенство треугольника выполняется для главных моментов инерции: $A + B \geq C, \quad B + C \geq A, \quad C + A \geq B$.
2. Для плоской фигуры (расположенной в плоскости Oxy) $I_x + I_y = I_z$.
3. В некоторых случаях эллипсоид инерции твердого тела может быть цилиндром (в каких?).

Эти свойства легко доказываются непосредственно с помощью формул (6.12) и предлагаются в качестве упражнения.

Пусть мы построили эллипсоид инерции относительно точки *O*. Как найти момент инерции относительно оси *l*?



Пусть прямая *l* пересекает эллипсоид в точке $M(x, y, z)$. Тогда

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}{I_l} = \frac{1}{I_l}.$$

Здесь мы воспользовались формулами (6.13). Отсюда $I_l = \dfrac{1}{OM^2}$.

Для вычисления моментов инерции применяются те же методы, что и для нахождения координат центра масс, а именно:

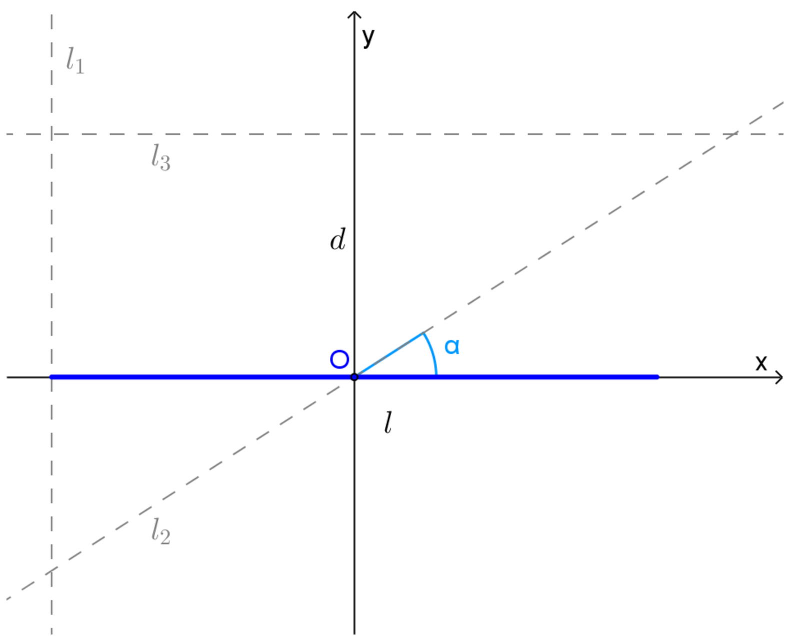
- Группировка: Если твердое тело V есть объединение двух частей: $V = V_1 \cup V_2$, то $I_l(V) = I_l(V_1) + I_l(V_2)$, где *l* – ось, относительно которой считается момент инерции.
- Метод отрицательных масс
- Метод симметрии
- Теорема Гюйгенса-Штейнера.

ПРИМЕР 1. Найти момент инерции однородного проволочного кольца массы *m*, имеющего форму окружности радиуса *R*, относительно оси, проходящей через середину окружности перпендикулярно ее плоскости. Толщиной кольца пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Все точки окружности расположены на расстоянии *R* от оси, поэтому момент инерции будет такой же, как и у материальной точки массы *m* относительно оси, то есть $I_z = mR^2$.

ПРИМЕР 2. Для однородного тонкого стержня массы *m* и длины *l* вычислить

(a) Момент инерции относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (центр масс)
(b) Момент инерции относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец
(c) Момент инерции относительно оси, параллельной стержню и отстоящей от него на расстояние *d*
(d) Тензор инерции для точки *O*
(e) Написать уравнение эллипсоида инерции
(f) Момент инерции относительно прямой, составляющей со стержнем угол α и проходящей через его середину.



РЕШЕНИЕ.

(a) В силу симметрии, моменты инерции относительно всех прямых, перпендикулярных стержню и проходящих через его середину, равны.

$$I_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu(x)x^2dx = 2\frac{m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2dx = \frac{2m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12}.$$

Здесь $\mu(x)$ - плотность распределения массы. Так как стержень однородный, она равна $\frac{m}{l}$.

(b) Момент инерции относительно оси l_1 считаем по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$I_{l_1} = I_y + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

(c) Аналогично, так как $I_x = 0$ (все точки стержня расположены на оси Ox), то $I_{l_3} = I_x + md^2 = md^2$.

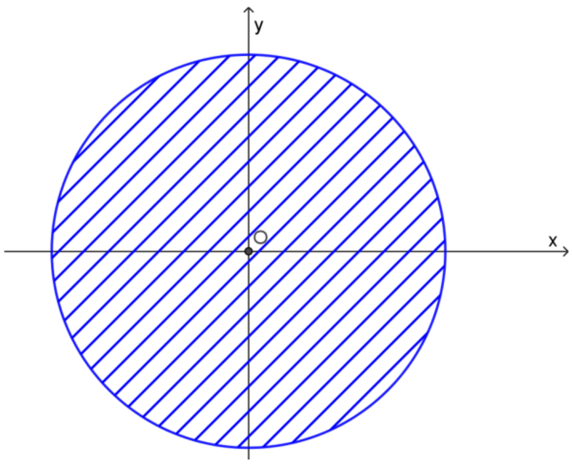
(d) $I_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}$.

(e) Эллипсоид инерции – цилиндр: $\frac{ml^2}{12}y^2 + \frac{ml^2}{12}z^2 = 1$.

(f) Направляющий вектор прямой l_2: $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$.

$$I_{l_2} = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}n_in_j = \frac{ml^2}{12}\sin^2\alpha .$$

ПРИМЕР 3. Найти моменты инерции однородного диска массы *m* и радиуса *R* относительно осей, проходящих через центр диска.



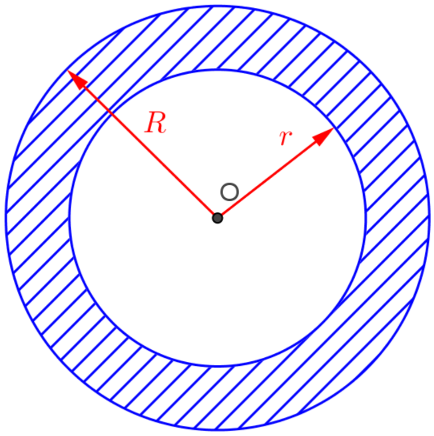
РЕШЕНИЕ. $\mu = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$. Интегралы считаем в полярных координатах. $dS = rdrd\varphi$.

$$I_z = \iint_S \mu(x,y)(x^2+y^2)dS = \mu\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3dr = \frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

$$I_x = \iint_S \mu(x,y)(y^2+z^2)dS = \mu\iint_S y^2dS = \mu\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R r^3dr = \frac{mR^2}{4}.$$

Из соображений симметрии ясно, что $I_y = I_x$. Более того, так как фигура плоская, выполняется равенство $I_z = I_x + I_y$, и интеграл для I_x можно вообще не считать, так как $I_y = I_x = \frac{1}{2}I_z$. Все центробежные моменты инерции $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

ПРИМЕР 4. Вычислить момент инерции однородного кольца массы m, внешний и внутренний радиусы которого равны соответственно R и r относительно оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной его плоскости.



РЕШЕНИЕ. Плотность распределения массы $\mu = \dfrac{m}{S} = \dfrac{m}{\pi(R^2 - r^2)}$.

Заполним внутренний круг отрицательной массой с плотностью $-\mu$. Тогда можно считать, что система состоит из сплошного диска радиуса R с плотностью распределения массы μ и сплошного диска радиуса r с плотностью $-\mu$. Масса диска с радиусом R равна $m_1 = \mu S_1 = \mu \pi R^2$. Масса диска с радиусом r равна $m_2 = -\mu S_2 = -\mu \pi r^2$ Из предыдущей задачи момент инерции $I_{zR} = \dfrac{m_1 R^2}{2} = \dfrac{\mu \pi R^4}{2}$, $I_{zr} = \dfrac{m_2 r^2}{2} = \dfrac{-\mu \pi r^4}{2}$.

$$I_z = I_{zR} + I_{zr} = \frac{\mu\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{m(R^4 - r^4)}{R^2 - r^2} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}.$$

ЛЕКЦИЯ 7. ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

В этой лекции выводятся формулы для кинетического момента и кинетической энергии абсолютно твердого тела с одной неподвижной точкой. Выводятся уравнения физического маятника.

Рассмотрим движение абсолютно твердого тела, одна точка которого закреплена – точка *O*. В прошлой лекции мы ввели понятие тензора инерции I_{ij} абсолютно твердого тела относительно полюса *O*.

Оказывается, кинетический момент и кинетическая энергия твердого тела связаны простыми формулами с тензором инерции, которые мы сейчас выведем.

КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

ТЕОРЕМА 1. *Кинетический момент* $\vec{K} = (K_1, K_2, K_3)$ *абсолютно твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки O, равен*

$$K_i = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_j, \tag{7.1}$$

где $\vec{\omega}$ *- вектор угловой скорости,* I_{ij} *- тензор инерции относительно полюса O. Тензор инерции* I *действует как линейный оператор в пространстве угловых скоростей*

$$\vec{K} = I\vec{\omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По-прежнему будем считать, что абсолютно твердое тело – это дискретная механическая система из *n* материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

По определению, кинетический момент $\vec{K}$ системы материальных точек – это сумма кинетических моментов отдельных точек:

$$\vec{K} = \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_{(k)}, \overrightarrow{m_{(k)}v_{(k)}}\right] = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left[\vec{r}_{(k)}, \overrightarrow{v_{(k)}}\right], \tag{7.2}$$

где индексом (k) обозначены величины, относящиеся к *k*-той материальной точке.

Из формулы для распределения скоростей в абсолютно твердом теле мы знаем, что скорость $\vec{v}_A$ точки *A* с радиус-вектором $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ равна

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \left[\vec{\omega}, \vec{r}_A\right].$$

Скорость точки *O* равна по предположению нулю, поэтому

$$\vec{v}_{(k)} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{(k)}\right]. \tag{7.3}$$

Для вычисления (7.2), выведем сначала величину $\left[\vec{r}, \vec{v}\right]$ для одной точки, опустив индексы. Радиус-вектор точки $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

$$\left[\vec{r}, \vec{v}\right] = \left[\vec{r}, \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]\right] = \vec{\omega}\left(\vec{r}, \vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right). \tag{7.4}$$

Здесь мы воспользовались формулой двойного векторного произведения

$$[\vec{A},[\vec{B},\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A},\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A},\vec{B}).$$

Распишем теперь равенство (7.4) покоординатно:

$$\left[\vec{r},\vec{v}\right]_i = r^2\omega_i - \left(\vec{\omega},\vec{r}\right)x_i = r^2\omega_i - \sum_{j=1}^{3}\omega_j x_j x_i\,. \qquad (7.5)$$

Представим ω_i как $\omega_i = \sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\omega_j$, где δ_{ij} - символ Кронекера, и подставим в формулу (7.5), получим окончательно

$$\left[\vec{r},\vec{v}\right]_i = \sum_{j=1}^{3}\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)\omega_j\,. \qquad (7.6)$$

Подставим (7.6) в формулу (7.2) для кинетического момента и поменяем порядок суммирования, получим для *i*-той компоненты

$$K_i = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left[\vec{r}_{(k)},\overrightarrow{v_{(k)}}\right]_i = \sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\sum_{j=1}^{3}\left(r_{(k)}^2\delta_{ij} - x_{(k)i}x_{(k)j}\right)\omega_j = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{(k)}\left(r_{(k)}^2\delta_{ij} - x_{(k)i}x_{(k)j}\right)\right)\omega_j$$

Выражение в круглых скобках - это, по определению, компонента I_{ij} тензора инерции, поэтому

$$K_i = \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_j$$

■.

В частном случае, когда координатные оси совпадают с главными осями эллипсоида инерции, тензор инерции I_{ij} имеет диагональный вид и компоненты кинетического момента вычисляются как

$$K_x = I_x\omega_x,\; K_y = I_y\omega_y,\; K_z = I_z\omega_z\,. \qquad (7.7)$$

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, например, оси координат Oz, $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ и

$$\vec{K} = I\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I_{xz}\omega\\I_{yz}\omega\\I_z\omega\end{pmatrix}.$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ.

ТЕОРЕМА. *Кинетическая энергия T абсолютно твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки O, равна*

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} I_{ij}\omega_i\omega_j, \qquad (7.8)$$

или кинетическая энергия равна половине значения квадратичной формы I на векторе угловой скорости $\vec{\omega}$.

Кинетический момент $\vec{K}$ *и кинетическая энергия T связаны соотношением*

$$T = \frac{1}{2}(\vec{K}, \vec{\omega}). \qquad (7.9)$$

Доказательство. Кинетическая энергия твердого тела равна

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_{(k)} v_{(k)}^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_{(k)} \left\| \left[\vec{\omega}, \vec{r}_{(k)} \right] \right\|^2}{2}. \qquad (7.10)$$

$$\left\| \left[\vec{\omega}, \vec{r} \right] \right\|^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha = \omega^2 r^2 \left(1 - \cos^2 \alpha\right) = \omega^2 r^2 - \left(\vec{\omega}, \vec{r}\right)^2. \qquad (7.11)$$

Здесь α - угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$.

Выражение $\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right)^2$ можно записать как

$$\left(\vec{\omega}, \vec{r}\right)^2 = \left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) \cdot \left(\vec{\omega}, \vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i \cdot \sum_{j=1}^{3} \omega_j x_j = \sum_{i,j=1}^{3} \omega_i \omega_j x_i x_j,$$

а ω^2 как

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^{3} \omega_i^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \delta_{ij} \omega_i \omega_j,$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Тогда формула (7.11) запишется как

$$\left\| \left[\vec{\omega}, \vec{r} \right] \right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) \omega_i \omega_j. \qquad (7.12)$$

Подставляем (7.12) в формулу (7.10) и меняем порядок суммирования:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \sum_{i,j=1}^{3} \left(r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j} \right) \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{n} m_{(k)} \left(r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j} \right) \right) \omega_i \omega_j.$$

Выражение в круглых скобках - это I_{ij}, что дает формулу (7.8). ■

Формулу (7.9) предлагается проверить самостоятельно в качестве упражнения.

УРАВНЕНИЯ СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Так как абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы, для описания его движения нужно 6 уравнений. Это – уравнение движения центра масс

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F} \qquad (7.13)$$

где m – масса твердого тела, $\vec{v}_C$ - скорость центра масс, $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил, действующих на тело, и уравнения для кинетического момента:

$$\frac{d}{dt} \vec{K} = \vec{M}, \qquad (7.14)$$

где $\vec{M}$ - главный момент сил, действующих на твердое тело. Эти уравнения для механической системы были выведены в лекции 3.

Уравнения (7.13) и (7.14), представляющие полную систему уравнений движения твердого тела, удобно записывать в системе отсчета, жестко связанной с твердым телом, так как в этой системе тензор инерции *I* постоянен и уравнения выглядят наиболее просто.

Направим оси системы отсчета, жестко связанной с твердым телом, по главным осям инерции, так что тензор инерции имеет диагональный вид

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Проекции вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат, жестко связанной с твердым телом, будем обозначать $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$. Производная вектора в подвижной системе координат, как доказано на лекциях в прошлом семестре, равна

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + [\vec{\Omega}, \vec{A}],$$

где символом $\frac{d'}{dt}$ обозначено, что мы дифференцируем только *компоненты* вектора. Добавочный член получается от дифференцирования ортов подвижной системы отсчета, так как они также зависят от времени.

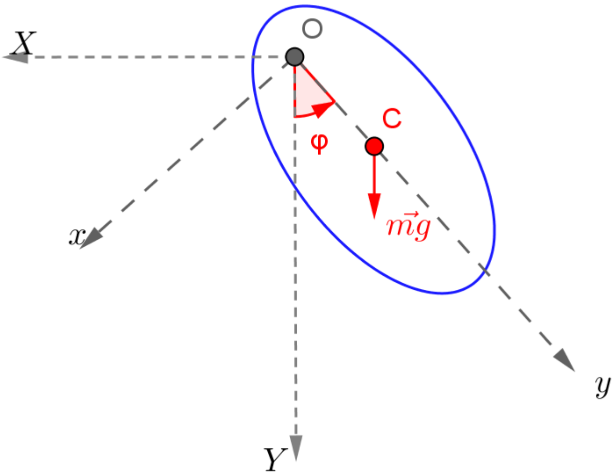
Компоненты вектора кинетического момента $\vec{K}$ в выбранных осях вычисляются по формулам (7.7). Обозначим $\vec{v}_C = (V_x, V_y, V_x)$, $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$ - в проекциях на оси подвижной системы. Уравнения (7.13) и (7.14) в проекциях на оси, жестко связанные с телом, запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{dV_x}{dt} + \Omega_y V_z - \Omega_z V_y\right) &= F_x \\ m\left(\frac{dV_y}{dt} + \Omega_z V_x - \Omega_x V_z\right) &= F_y \\ m\left(\frac{dV_z}{dt} + \Omega_x V_y - \Omega_y V_x\right) &= F_z \end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\Omega_x}{dt} + (I_z - I_y)\Omega_y\Omega_z &= M_x \\ I_y \frac{d\Omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\Omega_z\Omega_x &= M_y \\ I_z \frac{d\Omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\Omega_x\Omega_y &= M_z \end{aligned} \tag{7.16}$$

Уравнения (7.15) и (7.16) называются *уравнениями Эйлера*.

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.



Выберем неподвижную систему отсчета $OXYZ$ так, чтобы ось OZ совпала с осью вращения, плоскость OXY проходила через центр масс C, ось OY направим вертикально вниз. Связанную с маятником систему отсчета выберем так, чтобы ось Oz совпала с OZ, ось Oy проходит через центр масс тела C. Пусть $OC = a$. Положение маятника полностью определяется углом φ поворота – углом между вертикалью OY и направлением на центр масс OC (ось Oy). Тогда $\vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi})$, $\vec{F} = (mg\sin\varphi, mg\cos\varphi, 0)$,

$$\vec{M} = [\overrightarrow{OC}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ mg\sin\varphi & mg\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -amg\sin\varphi \,..$$

.

Из последнего уравнения (7.16) получаем

$$I_z\ddot{\varphi} = -amg\sin\varphi\,,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{amg}{I_z}\sin\varphi = 0\,.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением движения математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\,,$$

получаем, что физический маятник движется по такому же закону, что и математический маятник длиной $l = \frac{I_z}{ma}$. Величина $\frac{I_z}{ma}$ называется приведенной длиной физического маятника.

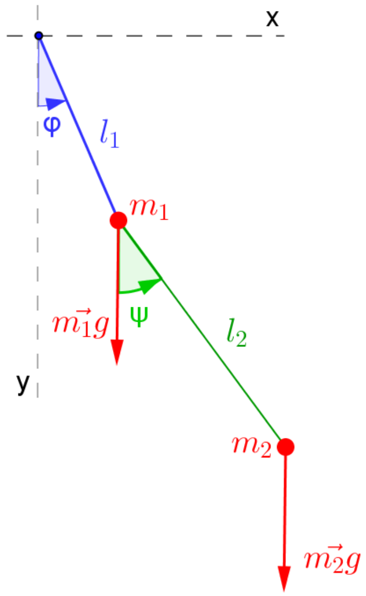
В классической механике Ньютона движение механической системы описывается с помощью 2 закона динамики, путем непосредственного нахождения сил, действующих на систему. Существуют и другие способы нахождения уравнений движения. Один из них – лагранжева механика.

Пусть состояние механической системы, состоящей из N материальных точек с массами $m_1,\dots,m_N$ и радиус-векторами $\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N$, полностью определяется *n* независимыми параметрами $q_1,\dots,q_n$ - обобщенными координатами:

$$\vec{r}_k=\vec{r}_k(q_1,\dots,q_n,t),\quad k=1,\dots N, \tag{8.1}$$

причем $\vec{r}_k$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции параметров $q_1,\dots,q_n$.

(8.1) – это уравнения связей, записанные в явном виде. Множество *K* всех возможных значений $q_1,\dots,q_n$ называется конфигурационным пространством. Число *n* обобщенных координат – степенью свободы механической системы.



ПРИМЕР. ДВОЙНОЙ МАЯТНИК.

Состояние двойного маятника описывается двумя углами: φ и ψ.

Конфигурационное пространство – тор.

Траектории материальной точки в евклидовом пространстве соответствует некоторая гладкая кривая $q_1(t)\dots,q_n(t)$ в конфигурационном пространстве. Величины

$\dot{q}_1(t)\dots,\dot{q}_n(t)$ называются обобщенными скоростями.

В лагранжевой механике механическая система полностью описывается функцией *L*, называемой функцией Лагранжа, или лагранжианом, зависящей от обобщенных координат, скоростей и времени

$$L=L(q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n,t)=L(q,\dot{q},t),$$

где для краткости обозначено $q=(q_1,\dots,q_n)$. Движение системы подчиняется следующему условию, называемому *принципом наименьшего действия*.

Пусть в моменты времени t_1 и t_2 система занимает положения $q(1)$ и $q(2)$ в конфигурационном пространстве. Пусть действительному движению системы соответствует в конфигурационном пространстве кривая, $\gamma(t)=(q_1(t),\dots,q_n(t))$ соединяющая точки $q(1)$ и $q(2)$. Рассмотрим пространство всех гладких кривых в конфигурационном пространстве, ведущих из точки $q(1)$ в момент времени t_1 в точку $q(2)$ в момент времени t_2. Тогда на γ функционал действия

$$S[\gamma]=\int\limits_{\gamma}L(q,\dot{q},t)dt$$

имеет наименьшее значение.

ТЕОРЕМА. Функционал $S[\gamma]$ имеет минимум на кривой $\gamma(t)=(q_1(t),\dots,q_n(t))$ среди всех гладких кривых , ведущих из точки $q(1)$ в момент времени t_1 в точку $q(2)$ в момент времени t_2 , тогда и только тогда, когда вдоль кривой γ выполняются уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\, i=1,\dots n. \qquad (8.2)$$

Уравнения (8.2) называются уравнениями Эйлера-Лагранжа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим близкие к $\gamma(t)$ кривые $\gamma(t)+\delta\gamma(t)=(q_1(t)+\delta q_1(t),\dots,q_n(t)+\delta q_n(t))$, причем

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0,\, i=1,\dots,n \qquad (8.3)$$

- условие того, что все кривые начинаются в точке $q(1)$ и кончаются в точке $q(2)$.

Условие экстремума функционала – обращение в ноль первой вариации (линейного приращения):

$$\delta S=S[\gamma+\delta\gamma]-S[\gamma]=\int_{t_1}^{t_2}L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t)dt-\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q,\dot{q},t)dt=0.$$

Учитывая, что вариации берутся в один и тот же момент времени *t*, получаем

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt. \qquad (8.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для простоты мы опустили индексы обобщенных координат и суммирование по ним. То есть, к примеру, выражение $\frac{\partial L}{\partial q}\delta q$ следует понимать как $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i$.

Преобразуем интеграл от второго слагаемого. Для этого поменяем порядок дифференцирования $\delta\dot{q}=\frac{d(\delta q)}{dt}$ и проинтегрируем по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d(\delta q)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\cdot\delta q\; dt. \qquad (8.5)$$

Подставим (8.5) в (8.4) и получим

$$\delta S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\; dt.$$

В силу (8.3) первое слагаемое обращается в ноль. Поэтому

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\; dt=0.$$

Это равенство должно выполняться для любых функций δq, обращающихся в ноль при $t = t_1$ и $t = t_2$. Необходимое и достаточное условие этого – равенство нулю выражения в скобках. Поэтому вдоль γ выполняются уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

или, возвращаясь к записи с индексами, получаем уравнения Эйлера-Лагранжа (8.2) ■.

Покажем теперь, что уравнения Лагранжа – это и есть уравнения движения механической системы, т.е. в декартовых координатах совпадают со вторым законом Ньютона, если определить функцию Лагранжа как $L = T - U$, где *T* – кинетическая энергия, *U* – потенциальная энергия системы.

ТЕОРЕМА (*Принцип наименьшего действия Гамильтона*). Движения механической системы совпадают с экстремалями функционала действия $S[\gamma] = \int_\gamma L dt$, где $L = T - U$ - разность кинетической и потенциальной энергии.

Доказательство. Так как действие – скалярная функция, достаточно проверить выполнение теоремы в декартовых координатах.

Действительно, пусть *i*-я материальная точка имеет массу $m_i = m$ и декартовы координаты $(x; y; z)$.

Положим $q_1 = x; q_2 = y; q_3 = z$. Тогда кинетическая энергия равна $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \ldots$.

Потенциальная энергия $U = U(x, y, z, \ldots)$. Многоточие здесь означает переменные, относящиеся к другим материальным точкам системы. Тогда $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x$, где F_x - проекция силы, действующей на точку, на ось *x*, и уравнение Лагранжа, соответствующее координате *x*, переходит в

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x.$$

Аналогично

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = F_y,$$

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = F_z.$$

Получаем, что уравнения Лагранжа в декартовых координатах – это и есть 2-й закон Ньютона ■.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ называется *обобщенным импульсом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $\frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$ - называется обобщенной силой.

Правомерность этих определений обусловлена тем, что в декартовых координатах эти величины переходят в обычные импульс и силу.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЛАГРАНЖЕВОЙ МЕХАНИКЕ.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ.

Вычислим полную производную лагранжиана L по времени вдоль траекторий системы. Так как вдоль траекторий обобщенные координаты и скорости – функции времени, подчиняющиеся системе уравнений Лагранжа, нужно дифференцировать лагранжиан как сложную функцию. Имеем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i . \quad (8.6)$$

Согласно одному из постулатов классической механики, законы природы в замкнутой системе не должны зависеть от времени. Математически это выражается тем, что лагранжиан замкнутой системы не зависит явно от времени, т.е. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Выразим $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ из уравнений Лагранжа (8.2) и подставим в (8.6), получим

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \right).$$

Или

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \right) = 0 . \quad (8.7)$$

Чуть позже мы докажем, что в обобщенных координатах кинетическая энергия замкнутой системы есть

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j .$$

Для квадратичной функции выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T .$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T .$$

Из (8.7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - U) = T + U = E = Const .$$

Таким образом, мы показали, что величина $E = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$ есть полная механическая энергия системы и доказали закон сохранения энергии:

В замкнутых системах полная энергия сохраняется.

ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенная координата q_α называется *циклической*, если лагранжиан от нее не зависит.

Из уравнения Лагранжа для циклической координаты q_α следует, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \, ,$$

Т.е получаем, что $$p_\alpha = Const$$

- закон сохранения импульса.

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ.

N материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_N$. Их радиус-векторы

$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots q_n, t)$, скорости \vec v_i=\frac {d\vec r_i}{dt}$, $i = 1, \ldots N$

ТЕОРЕМА. Кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} a_j \dot{q}_j + a_0 \, ,$$

где a_{jk}, a_j, a_0 - функции обобщенных координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть имеется N материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_N$. Их радиус-векторы $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots q_n, t)$ - функции обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ и времени. Вычислим кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=N}^{n} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\right]\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)\right]\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} a_j \dot{q}_j + a_0 \, ,$$

где введены обозначения

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right),$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right).$$

Если связи стационарные, то $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, $a_0 = a_i = 0$ и кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k . \qquad (8.8)$$

Формулой (8.8) мы уже воспользовались при выводе закона сохранения энергии.