Занятие №7.
Конформные отображения.
Тригонометрические и гиперболические функции.
Принцип симметрии.

1) Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \cos z$:
1) прямая $x = C$;
2) прямая $y = C$;
3) полуполоса $0 < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0$;
4) прямоугольник $0 < x < \pi,\ -h < y < h\ \ (h > 0)$.

2) Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = \operatorname{tg} z$ полоса $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

3) Отобразить плоскость с разрезами по отрезку $[-\alpha i; 0]\ \ (\alpha > 1)$ и нижней половине единичной окружности на верхнюю полуплоскость.

4) Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезами по отрезку $[-1; b], 0 < b < 1,$ действительной оси и по дуге окружности с концами в точках $e^{\pm i\alpha}$, проходящей через точку $z = -1$.

Дополнительные задачи на конформные отображения

5) Отобразить область $D = \{z : |z+1| > 1, |z+2| < 2\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$.

6) Отобразить полуполосу $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхний полукруг $|w| < 1,\ \operatorname{Im} w > 0$.

7) Отобразить полуполосу $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$

8) Отобразить полуполосу $D = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 0,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ на полукруг $|w| < 2,\ \operatorname{Im} w < 0$.

9) Отобразить на нижнюю полуплоскость круговую луночку $|z-1| > 1,\ |z-3| < 3$.

10) Отобразить на верхнюю полуплоскость полуполосу $x < 1,\ 0 < y < h$.

11) Показать, что функция $w = \cos\frac{\pi(z-2)}{2z}$ отображает область $D = \{z : |z-1| > 1, |z+1| > 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

Домашнее задание: подготовиться к контрольной работе.

Ответы:

1) 1) гипербола с фокусами в точках ± 1: $\frac{u^2}{\cos^2 C} - \frac{v^2}{\sin^2 C} = 1$;

2) эллипс с фокусами в точках ± 1: $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1$;

3) в 4-ый квадрант;

4) внутренность эллипса $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 C} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 C} = 1$ с разрезами по отрезкам $[-\operatorname{ch} h; -1]$ и $[1; \operatorname{ch} h]$.

2) полукруг $|w| < 1,\ \operatorname{Re} w > 0$.

3) $w=\sqrt{\dfrac{\sqrt{z^2-1}+z-i}{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha+1}(z-i)-\sqrt{z^2-1}}}$;

4) $w=\sqrt{\dfrac{\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{b_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}-\sqrt{z_1^2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}}$, $z_1=\dfrac{1+z}{1-z}$, $b_1=\dfrac{1+b}{1-b}$;

5) $w=e^{w_1}$, $w_1=2\pi i(z+2)/z$;

6) $w=e^{w_1}$, $w_1=\pi iz/2$;

7) $w=-\cos\dfrac{\pi z}{2}$;

8) $w=-2e^{-i\pi z}$;

9) $w=-e^{w_1}$, $w_1=\dfrac{3\pi i}{2}\left(\dfrac{z-2}{z}\right)$;

10) $w=-\cos\dfrac{\pi(z-1)}{h}$.