ЛЕКЦИЯ 12. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Рассмотрим дифференциальное уравнение *Бесселя* второго порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0\,,\ \ \nu>0. \qquad (1)$$

Было показано, что частным решением уравнения (1) является *функция Бесселя первого рода* $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)m!},\ x\in(-\infty;+\infty),\nu>0. \qquad (2)$$

Если параметр ν не является целым числом, то при $r=-\nu$ можно получить другое линейно независимое с (2) решение уравнения Бесселя:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)m!},\ x\in(-\infty;+\infty),\nu>0. \qquad (3)$$

Если $\nu\notin\mathbb{Z}$, то решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы, и общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x),\ \ \nu\notin\mathbb{Z}, \qquad (4)$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Если $\nu=n,\ n\in\mathbb{N}$, то функции $J_n(x),\ J_{-n}(x)$ линейно зависимы:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x),\ n=1,2,\ldots.$$

Второе линейно независимое с $J_n(x)$ решение уравнения Бесселя (1) обозначается $Y_n(x)$ и называется *функцией Бесселя второго рода*. Функции Бесселя второго рода определяются следующим образом:

$$\boxed{Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\pi\nu\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},\ \nu\notin Z\,,\ n\in Z\,.} \qquad (5)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x)=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x),\ \ n\in\mathbb{Z}. \qquad (6)$$

где C_1,C_2 – произвольные постоянные.

Функции Бесселя первого и второго рода изучены очень тщательно и, в частности, составлены подробные таблицы их значений.

● Дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(\lambda^2 x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0\ ,\ \ \lambda > 0 \tag{7}$$

с помощью замены независимой переменной $t = \lambda x$ сводится к уравнению (1).

Если $\nu \notin \mathbb{Z}$, то общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x). \tag{8}$$

Если $\nu = n,\ n = 0,1,2,\ldots$, то общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$y(x) = C_1 J_n(\lambda x) + C_2 Y_n(\lambda x). \tag{9}$$

Пример 1. Найти решение задачи Коши:

$$x^2 y''(x) + 6xy'(x) + \left(2x^2 - 6\right) y(x) = 0\ , \tag{10}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{5}. \tag{11}$$

Решение: Будем искать решение уравнения (10) в виде:

$$y(x) = x^\alpha u(x). \tag{12}$$

Подставляя в уравнение (10) указанное выражение для функции $y(x)$ и ее производных

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} u(x) + x^\alpha u'(x),$$

$$y''(x) = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} u(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} u'(x) + x^\alpha u''(x),$$

получим:

$$x^{\alpha+2} u'' + (2\alpha + 6) x^{\alpha+1} u' + [\alpha(\alpha - 1) + 6\alpha - 6] x^\alpha u + 2x^{\alpha+2} u = 0\ .$$

Поделим обе части последнего равенства на x^α :

$$x^2 u'' + (2\alpha + 6) xu' + \left(2x^2 + \alpha^2 + 5\alpha - 6\right) u = 0.$$

Параметр α подберем так, чтобы получить для функции $u(x)$ уравнение вида (7):

$$2\alpha + 6 = 1 \Rightarrow \alpha = -5/2,\ \alpha^2 + 5\alpha - 6 = -49/4.$$

Тогда

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + \left[2x^2 - \frac{49}{4}\right] u(x) = 0, \tag{13}$$

т.е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (7), в котором $\lambda = \sqrt{2},\ \nu = 7/2$.
Общее решение уравнения (13) согласно (8) имеет вид:

$$u(x) = C_1 J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right).$$

С учетом (12) для общего решения уравнения (10) получим:

$$y(x) = \frac{1}{x^{5/2}}\left\{C_1 J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right)\right\}.$$

Постоянные $C_1,\ C_2$ найдем, используя условия (11). Согласно равенствам (2), (3)

$$\frac{1}{x^{5/2}} J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{x^{5/2}} J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-6}}{2^{m-7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m-\frac{5}{2}\right)}.$$

В силу условий (11) функция $y(x)$ ограничена в точке $x = 0$, т.е. не может содержать отрицательные степени x, следовательно, $C_2 = 0$.
Поэтому

$$y(x) = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)},$$

$$y'(x) = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1) x^{2m}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)} =$$

$$= C_1\left\{\frac{1}{2^{7/4}\Gamma(9/2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1) x^{2m}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)}\right\}.$$

Так как $y'(0) = \frac{1}{5}$, то $\frac{C_1}{2^{7/4}\Gamma(9/2)} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2^{7/4}}{5}\Gamma(9/2) = \frac{2^{7/4}}{5}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4}\sqrt{\pi} = \frac{21\sqrt{\pi}}{2^{9/4}}$$

Ответ: $y(x)=\dfrac{21\sqrt{\pi}}{2^{9/4}x^{5/2}}J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right).$

Пример 2. Доказать равенство

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,. \tag{14}$$

Решение: При $\nu=1/2$ из формулы (2) получим:

$$J_{1/2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+1/2}}{\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}+1\right)m!}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}\Gamma\left(m+\dfrac{1}{2}+1\right)\cdot m!}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}\cdot\dfrac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot m!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^m\cdot(2m+1)!!\cdot m!}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\ \blacksquare$$

Рекуррентные соотношения

Пример 3. Доказать рекуррентные соотношения:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x). \tag{16}$$

Решение: Согласно (2)

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=\frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot 2m\cdot x^{2m-1}}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot x^{2m-2}}{2^{2m+\nu-1}\Gamma(m+\nu+1)(m-1)!}=[k=m-1]=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k}}{2^{2k+\nu+1}\Gamma(k+1+\nu+1)k!} =$$

$$= -\frac{1}{x^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu+1)}}{\Gamma(k+1+(\nu+1))k!} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Формула (16) доказывается аналогично ■

Пример 4. Доказать справедливость рекуррентных соотношений:

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \tag{17}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x), \tag{18}$$

$$J'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x). \tag{19}$$

Решение: Равенство (15) запишем в виде:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{J'_\nu(x)}{x^\nu} - \frac{\nu J_\nu(x)}{x^{\nu+1}}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

После умножения последнего равенства на $x^{\nu+1}$ получим

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x). \tag{20}$$

Выполняя операцию дифференцирования в (16) и умножая полученное равенство на $x^{-\nu+1}$, получим:

$$\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{21}$$

Равенство (21) равносильно (19). Далее, вычитая из равенства (21) равенство (20), получим (17). А в результате сложения (21) и (20), получим (18). ■

Ортогональность функций Бесселя

В уравнении (1) положим $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Тогда

$$y'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{u(x)}{2x^{3/2}},\ y''(x) = \frac{u''(x)}{\sqrt{x}} - \frac{u'(x)}{x^{3/2}} + \frac{3u(x)}{x^{5/2}}.$$

Для функции $u(x)$ получаем приведенное уравнение Бесселя:

$$u''(x)+\left(1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)u(x)=0\,. \qquad (22)$$

При $x\to\infty$ выражение в круглых скобках в (22) стремится к единице, а соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$u''(x)+u(x)=0\,.$$

Последнее дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения: $u_1(x)=\cos x$, $u_2(x)=\sin x$.

Имеет место следующее асимптотическое представление функций Бесселя первого и второго рода при больших значениях аргумента:

Теорема 1. При $x\to+\infty$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right] \blacksquare$$

Из этого утверждения следует, что функции Бесселя имеют бесконечное число нулей на действительной оси. На рис.1 представлены графики функций Бесселя 1-го рода $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, а на рисунке 2 – графики функций Бесселя 2-го рода $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $Y_2(x)$.

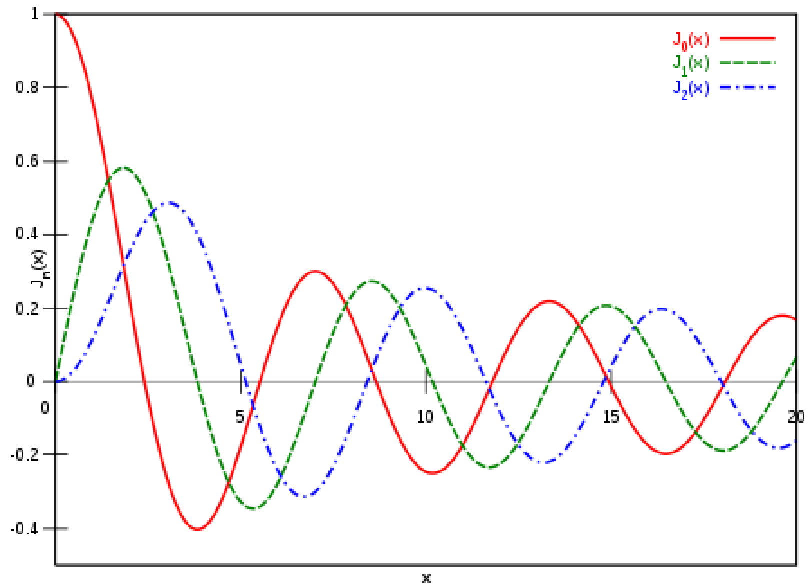

Рис. 1

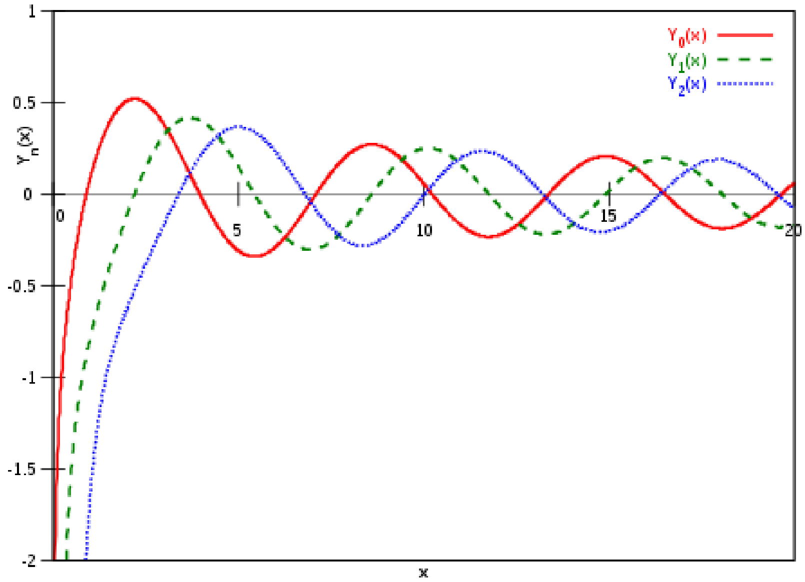

Рис. 2

Теорема 2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – нули функции Бесселя $J_\nu(x)$, т.е. $J_\nu(\xi_k) = 0,\ k = 1,2,\ldots$. Тогда при $n \neq m$

$$\int_0^1 x \cdot J_\nu(\xi_n x) \cdot J_\nu(\xi_m x) dx = 0. \tag{23}$$

Доказательство: Пусть $p \neq q$. Положим

$$y(x) = J_\nu(px), z(x) = J_\nu(qx).$$

Согласно формулам (7), (8)

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(p^2 x^2 - \nu^2\right) y(x) = 0, \tag{24}$$

$$x^2 z''(x) + xz'(x) + \left(q^2 x^2 - \nu^2\right) z(x) = 0. \tag{25}$$

Умножая обе части уравнений (24), (25) на $(-z(x)/x)$, $(y(x)/x)$ соответственно и складывая полученные в результате умножения уравнения, получим:

$$x(z''y - y''z) + z'y - y'z + \left(q^2 - p^2\right) xyz = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x(z'y - y'z)]' = \left(p^2 - q^2\right) xyz.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по отрезку $[0;1]$:

$$x(z'y - y'z)\Big|_0^1 = \left(p^2 - q^2\right) \int_0^1 xy(x) z(x) dx \Leftrightarrow$$

$$qJ_\nu'(q)J_\nu(p) - pJ_\nu'(p)J_\nu(q) = \left(p^2 - q^2\right)\int_0^1 xJ_\nu(px)J_\nu(qx)dx\,.$$

Если $p = \xi_n, q = \xi_m$, $n \neq m$, то левая часть последнего равенства обратится в ноль, и так как $p \neq q$, то получим соотношение (23) ■