Раздел 3. Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

Лекция 8 Примеры самосопряжённых компактных операторов в пространстве $L_2[a, b]$.

1. Интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметричным ядром.

   Пусть $K(t, s) \in C([a, b] \times [a, b])$ – непрерывная по совокупности переменных функция на квадрате $[a, b] \times [a, b]$.

   Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма вида $y = Ax$, где $x \in L_2[a, b]$,
$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\, ds\,,$$
   интеграл понимается в смысле Лебега.

   Утверждение: интеграл сходится при любом $t \in [a, b]$.

   Чтобы убедиться в этом, рассмотрим действие оператора на $C_{L_2}[a, b]$ – плотном линеале в $L_2[a, b]$. В этом случае интеграл превращается в интеграл Римана и сходится как интеграл от непрерывной функции по отрезку. При любом фиксированном t этот интеграл – линейный функционал над $C_{L_2}[a, b]$. Покажем, что он ограничен.

   Действительно, в силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца,
$$|y(t)| \le \left(\int_a^b |K(t, s)|^2\, ds\right)^{1/2} \left(\int_a^b |x(s)|^2\, ds\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\int_a^b |K(t, s)|^2\, ds\right)^{1/2} \cdot \|x\|_2\,,$$
   откуда и следует ограниченность функционала. Следовательно, его можно по непрерывности продолжить на всё пространство $L_2[a, b]$, это продолжение осуществляется с помощью интеграла Лебега.

   Утверждение: этот интеграл задаёт непрерывный оператор из $L_2[a, b]$ в $C[a, b]$.

   Для доказательства снова рассмотрим действие оператора в $C_{L_2}[a, b]$. Функция $y(t)$ непрерывна в силу непрерывности функции $K(t, s)$. Оценим норму y в $C[a, b]$:
$$\|y\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |y(t)| \le \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |K(t, s)|^2\, ds\right)^{1/2} \cdot \|x\|_2\,,$$

откуда следует ограниченность (и непрерывность) оператора в $C_{L_2}[a,b]$. На всё пространство $L_2[a,b]$ оператор продолжается по непрерывности с сохранением нормы.

Следствие: интеграл задаёт непрерывный оператор из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Доказательство: оператор вложения из $C[a,b]$ в $L_2[a,b]$ ограничен.

Небезынтересно получить оценку для нормы оператора. Для этого выпишем оценку для квадрата модуля функции $y(t)$

$$|y(t)|^2 \leq \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \cdot \|x\|_2^2$$

и проинтегрируем её:

$$\|y\|_2^2 = \int_a^b |y(t)|^2\,dt \leq \iint_{[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)|^2\,ds\,dt \cdot \|x\|_2^2\,,$$

откуда, извлекая квадратный корень, получаем искомую оценку:

$$\|A\| \leq \left(\iint_{[a,b]\times[a,b]} |K(t,s)|^2\,ds\,dt \right)^{1/2}.$$

Замечание. Подчеркнём, что выражение в правой части неравенства – это верхняя оценка для нормы, но не сама норма.
Замечание. Эти построения можно рассматривать как ещё одно доказательство ограниченности оператора A.

Утверждение: оператор A компактен как оператор из $L_2[a,b]$ в $C[a,b]$.

Для доказательства нам нужно убедиться, что образ произвольного ограниченного множества в $L_2[a,b]$ есть предкомпактное множество в $C[a,b]$.

По теореме Арцела-Асколи предкомпактное множество в $C[a,b]$ – это множество (равномерно) ограниченное и равностепенно непрерывное.

Пусть $x \in M \subset S_r(o)$ (в пространстве $L_2[a,b]$). Тогда

$$\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty \leq \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \right)^{1/2} \cdot \|x\|_2 \leq$$
$$\leq \max_{t\in[a,b]} \left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds \right)^{1/2} \cdot r\,.$$

Ограниченность доказана.

Докажем равностепенную непрерывность. Для этого оценим модуль разности $|y(t') - y(t'')|$ при близких значениях аргумента, вновь считая

$x \in C_{L_2}[a,b]$ и воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского-Шварца

$$|y(t') - y(t'')| = \left| \int_a^b (K(t', s) - K(t'', s)) x(s)\, ds \right| \le$$

$$\le \left(\int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2\, ds \right)^{1/2} \left(\int_a^b |x(s)|^2\, ds \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2\, ds \right)^{1/2} \cdot \|x\|_2 \le$$

$$\le \left(\int_a^b |K(t', s) - K(t'', s)|^2\, ds \right)^{1/2} \cdot r\,,$$

на $x \in L_2[a,b]$ оценка переносится по непрерывности заменой интеграла Римана интегралом Лебега.

Поскольку функция $K(t,s)$ непрерывна на компакте $[a,b] \times [a,b]$, она равномерно непрерывна. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :$$
$$\left\{ |t' - t''| + |s' - s''| < \delta \Rightarrow |K(t', s) - K(t'', s)| < \frac{\varepsilon}{r\sqrt{b-a}} \right\}.$$

Выбирая $|t' - t''| < \delta$ и учитывая, что $s' = s'' = s$, получаем оценку:

$$|y(t') - y(t'')| \le \left(\int_a^b \left| \frac{\varepsilon}{r\sqrt{b-a}} \right|^2 ds \right)^{1/2} \cdot r = \varepsilon\,,$$

что и доказывает равностепенную непрерывность.

Таким образом, мы установили, что образ произвольного ограниченного множества в $L_2[a,b]$ предкомпактен в $C[a,b]$, что и означает компактность оператора $A : L_2[a,b] \to C[a,b]$.

Утверждение: оператор A компактен как оператор из $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Это следует из непрерывности вложения $C[a,b]$ в $L_2[a,b]$: множество, предкомпактное в $C[a,b]$, предкомпактно и в $L_2[a,b]$. Поэтому образ произвольного ограниченного множества из $L_2[a,b]$ предкомпактен в $L_2[a,b]$.

Утверждение. $A = O \Leftrightarrow K(t,s) \equiv 0$.
То, что функция $K(t,s)$, тождественно равная нулю, порождает нулевой оператор, очевидно. Пусть теперь эта функция отлична от нуля при некоторых значениях (t_*, s_*). Тогда, в силу непрерывности, она

отлична от нуля и на некотором прямоугольнике $[t_1, t_2] \times [s_1, s_2] \subset [a, b] \times [a, b]$, содержащем точку (t_*, s_*), и сохраняет на нём свой знак.

Возьмём теперь функцию $x(s) = \theta([s_1, s_2])$, равную единице на отрезке $[s_1, s_2]$ и нулю вне её. Такая функция принадлежит пространству $L_2[a, b]$. Применив к ней оператор A, получим функцию

$$y(t) = \int_{s_1}^{s_2} K(t, s)\, ds\,,$$

отличную от нуля по крайней мере при $t \in [t_1, t_2]$ (т.е. на множестве положительной меры): знак $y(t)$ на этом отрезке совпадает со знаком $K(t_*, s_*)$ (это следует, например, из теоремы о среднем). Отсюда вытекает, что оператор A отличен от O.

Найдём оператор, сопряжённый к A. Как обычно, сначала найдём его действие на плотном множестве непрерывных функций, где интеграл риманов и в повторном интеграле можно менять порядок интегрирования. Поскольку раньше у нас было $y = Ax$, во избежание недоразумений второй сомножитель обозначим буквой z:

$$(Ax, z) = \int_a^b (Ax)(t) z(t)\, dt = \int_a^b \left(\int_a^b K(t, s) x(s)\, ds \right) z(t)\, dt =$$
$$= \int_a^b x(s) \left(\int_a^b K(t, s) z(t)\, dt \right) ds = \int_a^b x(s) (A^* z)(s)\, ds = (x, A^* z)\,.$$

Поскольку x – произвольный элемент всюду плотного множества, заключаем, что для непрерывных z

$$(A^* z)(s) = \int_a^b K(t, s) z(t)\, dt\,.$$

На $L_2[a, b]$ продолжаем по непрерывности (она доказывается так же, как для A), при этом риманов интеграл заменяется лебеговым. В отличие от оператора A, интегрирование ведётся по первому аргументу функции $K(t, s)$.

Замечание. Последняя формулой заменой обозначений преобразуется к виду

$$(A^* x)(t) = \int_a^b K(s, t) x(s)\, ds\,.$$

Утверждение: $A = A^*$ тогда и только тогда, когда

$$\forall s, t \in [a, b] : \, K(t, s) = K(s, t)\,.$$

Действительно, рассмотрим разность операторов A и A^*:

$$((A - A^*)x)(t) = \int_a^b (K(t,s) - K(s,t))x(s)\,ds\,.$$

Как показано выше, этот оператор нулевой тогда и только тогда, когда $K(t,s) - K(s,t) \equiv 0$.

В силу теоремы Гильберта-Шмидта интегральный оператор Фредгольма с симметричным ядром $K(t,s) = K(s,t)$ обладает конечным или счётным набором ортонормированных собственных элементов (собственных функций) $\{e_m\}$, и

$$(Ax)(t) = \sum_m \lambda_m (x, e_m) e_m(t) = \sum_m \lambda_m e_m(t) \int_a^b e_m(s)x(s)\,ds\,.$$

Отсюда, между прочим, вытекает, что

$$K(t,s) = \sum_m \lambda_m e_m(t) e_m(s)\,,$$

сходимость ряда, вообще говоря, среднеквадратическая.

Покажем, что собственные функции оператора A, отвечающие ненулевым собственным числам, непрерывны. Действительно, из равенства

$$Ae_m = \lambda_m e_m\,,$$

вытекает, поскольку $\lambda_m \neq 0$,

$$e_m = \frac{1}{\lambda_m} Ae_m\,.$$

Мы видели, что все функции вида $y = Ax$ принадлежат $C[a,b]$, откуда и вытекает непрерывность функций e_m.

Замечание. К сожалению, термин "ядро оператора"применительно к интегральным операторам оказывается многозначным: наряду с множеством элементов пространства, которые оператор переводит в тождественный нуль, он означает и функцию $K(t,s)$.

2. Разрешающий оператор для простейшей краевой задачи.

   Ищем решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

   $$-\ddot{x}(t) = f(t)\,,$$

   удовлетворяющие краевым условиям

   $$x(0) = x(\pi) = 0\,.$$

Функцию f считаем непрерывной (пока что), тогда решение краевой задачи, если оно существует, двукратно непрерывно дифференуируемо: $x \in C^2[0,\pi]$. Потом условия на функцию f будут ослаблены.

Находим $\dot{x}$:

$$\dot{x}(t) = -\int_0^t f(\tau)\,d\tau + C$$

(C – константа, подлежащая определению).

Интегрируем ещё раз, учитывая условие $x(0) = 0$:

$$x(t) = -\int_0^t \left(\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right) ds + Ct\,.$$

Находим C из условия $x(\pi) = 0$:

$$-\int_0^\pi \left(\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right) ds + C\pi = 0\,,$$

откуда

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right) ds\,,$$

и тогда

$$x(t) = -\int_0^t \left(\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right) ds + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^s f(\tau)\,d\tau\right) ds\,.$$

Для приведения этого выражения к более удобному виду поменяем порядок интегрирования. В первом интеграле область интегрирования на плоскости (s,τ) – треугольник $0 \le \tau \le s \le t$, во втором – треугольник $0 \le \tau \le s \le \pi$. После перестановки интегралов получаем

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)\,ds\right) d\tau + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_\tau^\pi f(\tau)\,ds\right) d\tau = \\
&= -\int_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \frac{t}{\pi}\int_0^\pi (\pi-\tau)f(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_0^t \left(-(t-\tau) + \frac{t}{\pi}(\pi-\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \int_t^\pi \frac{t}{\pi}(\pi-\tau)f(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_0^t \frac{\tau(\pi-t)}{\pi} f(\tau)\,d\tau + \int_t^\pi \frac{t(\pi-\tau)}{\pi} f(\tau)\,d\tau = \\
&= \int_0^\pi K(t,\tau)f(\tau)\,d\tau\,,
\end{aligned}$$

где функция

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \tau(\pi-t)/\pi\,, & \tau \le t \\ t(\pi-\tau)/\pi\,, & \tau \ge t \end{cases}$$

носит название функции Грина для рассматриваемой краевой задачи. Эта функция непрерывна, симметрична относительно перестановки аргументов (t, τ) и, таким образом, разрешающий оператор краевой задачи оказывается фредгольмовым оператором с непрерывным симметричным ядром. Дополнительно заметим, что эта функция кусочно-линейная и при $t \neq \tau$ удовлетворяет однородному (когда $f = 0$) уравнению, а при $t = \tau$ имеет единичный скачок первой производной.

Таким образом, оказалось, что рассматриваемый оператор – частный случай рассмотренного выше, и если его рассмотреть как оператор в пространстве $L_2[0, \pi]$, он оказывается компактным самосопряжённым (симметричным) оператором, для которого справедлива теорема Гильберта-Шмидта. Это означает, что этот оператор обладает конечной или счётной ортонормированной системой собственных функций. Найдём их.

Обозначив, как и раньше, оператор буквой A, запишем уравнение, для собственного числа λ и собственного элемента e:

$$Ae = \lambda e\,.$$

Мы уже установили, что собственные функции оператора Фредгольма с непрерывным ядром, отвечающие ненулевым собственным числам, непрерывны. Но мы знаем, что если функция f непрерывна, то $x = Af$ – решение краевой задачи

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) = f(t) \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $e(t) \in C^2[0, \pi]$, и

$$\begin{cases} -\lambda \ddot{e}(t) = e(t) \\ e(0) = e(\pi) = 0 \end{cases}$$

Мы получили – с точностью до расположения спектрального параметра λ, который обычно стоит не при второй производной, а при самой функции – классическую задачу Штурма-Лиувилля. Напомню, как она решается.

Если $\lambda > 0$, дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения $\sin\left(t/\sqrt{\lambda}\right)$ и $\cos\left(t/\sqrt{\lambda}\right)$, а общее его решение имеет вид

$$e(t) = \alpha \sin \frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \beta \cos \frac{t}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

Для того, чтобы удовлетворялось краевое условие при $t = 0$, мы должны положить $\beta = 0$, и тогда $\alpha \neq 0$, поскольку мы интересуемся нетривиальными решениями, не равными нулю тождественно. В этом случае граничное условие при $t = \pi$ удовлетворится при дискретном наборе $\lambda = \lambda_m$ таких, что $1/\sqrt{\lambda_m} = m$, $m = 1, 2, \ldots$, или $\lambda_m = 1/m^2$.

Если $\lambda < 0$, дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения, которые нам удобно выбрать в виде $\operatorname{sh}\left(t/\sqrt{-\lambda}\right)$ и $\operatorname{ch}\left(t/\sqrt{-\lambda}\right)$, и тогда общее его решение имеет вид

$$e(t) = \alpha \operatorname{sh} \frac{t}{\sqrt{-\lambda}} + \beta \operatorname{ch} \frac{t}{\sqrt{-\lambda}} \,.$$

Для того, чтобы удовлетворялось краевое условие при $t = 0$, мы должны положить $\beta = 0$, и тогда $\alpha \neq 0$, поскольку мы интересуемся нетривиальными решениями, не равными нулю тождественно. В этом случае граничное условие при $t = \pi$ не удовлетворяется ни при каком $\lambda < 0$, поскольку гиперболический синус не обращается в нуль ни при каком ненулевом значении аргумента. Таким образом, краевая задача при $\lambda < 0$ нетривиальных решений не имеет.

Если $\lambda = 0$, уравнение не является дифференциальным и имеет только тривиальное решение.

Таким образом, мы установили, что оператор A имеет счётный набор положительных собственных чисел, равных обратным квадратам натуральных чисел. Как и полагается собственным числам компактного оператора, их последовательность стремится к нулю. Соответствующие собственные функции с точностью до множителя равны синусам аргументов, кратных t. Непосредственным интегрированием легко убедиться, что эти функции попарно ортогональны в $L_2[0,\pi]$ при несовпадающих значениях индекса m (проверьте!). Для того, чтобы элементы e_m были нормированными, коэффициенты α при всех значениях m с точностью до знака, который мы возьмём положительным, должны быть равны $\sqrt{2/\pi}$ (проверьте!). Таким образом, нормированными решениями этой задачи Штурма-Лиувилля являются функции

$$e_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mt \,, m \in \mathbb{N} \,,$$

соответствующие собственные числа равны

$$\lambda_m = \frac{1}{m^2} \,,$$

а действие оператора A на произвольный элемент $f \in L_2[0,\pi]$ может быть представлено в виде ряда

$$(Af)(t) = \int_0^\pi K(t,\tau) f(s) \, d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^\infty \frac{\sin mt}{m^2} \int_0^\pi \sin m\tau \, f(\tau) \, d\tau \,.$$

Остаётся вопрос о полноте полученной системы. Покажем, что ядро оператора A тривиально.

То, что $KerA$ не может содержать ненулевых непрерывных функций, очевидно: в этом случае из $Af = o$ следует $-\ddot{0} = f$.

Пусть теперь $f \in L_2[a,b] \backslash C[a,b]$. Нам будет удобно вернуться к первоначальному представлению для оператора A:

$$x(t) = (Af)(t) =$$
$$= -\int_0^t \left(\int_0^s f(\tau)\, d\tau \right) ds + \frac{t}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^s f(\tau)\, d\tau \right) ds =$$
$$= \int_0^t z(s)\, ds\,,$$

где

$$z(t) = -\int_0^t f(\tau)\, d\tau + C\,,$$

при этом

$$C = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^s f(\tau)\, d\tau \right) ds\,.$$

Первый шаг – исследование свойств функции $z(t)$.

При $f \in C[a,b]$ интеграл $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ понимался в смысле Римана. Заметим, что при произвольном фиксированном t этот интеграл – ограниченный линейный функционал на $C_{L_2}[a,b]$, и его можно по непрерывности продолжить на всё пространство $L_2[a,b]$; такое продолжение, как мы знаем, даётся интегралом Лебега. Таким образом, функция $f \in L_2[a,b]$ оказывается интегрируемой по Лебегу на произвольном отрезке $[a,t]$.

Покажем теперь, что такой интеграл непрерывно зависит от верхнего предела t (в курсе матанализа этот факт доказывался в отношении интеграла Римана). Оценим разность значений интеграла от $f \in L_2[a,b]$ при близких значениях верхнего предела. Пусть $a \le t' \le t'' \le b$, тогда

$$\left| \int_0^{t''} f(\tau)\, d\tau - \int_0^{t'} f(\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_{t'}^{t''} f(\tau) \cdot 1\, d\tau \right| \le$$
$$\le \sqrt{\int_{t'}^{t''} |f(\tau)|^2\, d\tau} \cdot \sqrt{\int_{t'}^{t''} 1^2\, d\tau} \le \|f\|_2 \cdot \sqrt{t'' - t'}$$

(при оценке воспользовались неравенством Коши-Буняковского-Шварца). Мы установили равномерно непрерывную зависимость интеграла от верхнего предела: разность значений интеграла не превосходит ε, если $|t'' - t'| \le (\varepsilon / \|f\|_2)^2$.

Отсюда следует, что функция $z(t)$ непрерывна и, тем самым, интегрируема уже в смысле Римана, а функция

$$x(t) = \int_0^t z(s)\, ds = -\int_0^t \left(\int_0^s f(\tau)\, d\tau \right) ds + Ct = (Af)(t)$$

непрерывно дифференцируема, и $\dot{x}(t) = z(t)$. Если она тождественно равна нулю, то тождественно равна нулю и функция $z(t)$, т.е.

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau + C \equiv 0\,,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\forall t', t'' \in [a,b] : \int_{t'}^{t''} f(\tau)\, d\tau = 0\,,$$

а тогда равен интеграл от функции f по любому измеримому множеству. Отсюда вытекает, что функция $f(t)$ равна нулю почти всюду, т.е. ей соответствует нулевой элемент пространства $L_2[0,\pi]$. Следовательно, ядро тривиально. Отсюда вытекает полнота полученной тригонометрической системы собственных функций в $L_2[0,\pi]$, а это значит, что произвольная квадратично интегрируемая функция допускает представление

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin mt \int_0^{\pi} \sin m\tau\, x(\tau)\, d\tau\,.$$

Напомню, что сходимость понимается в смысле нормы пространства $L_2[0,\pi]$, которая допускает отличие функций на множестве меры нуль.

Замечание. Если $f \in L_2[a,b] \backslash C[a,b]$, то функцию $x = Af \notin C^2[a,b]$ называют обобщённым решением краевой задачи, при этом $(-f)$ – обобщённая вторая производная от x. Функция $x(t)$, обладающая второй квадратично суммиуемой обобщённой производной, принадлежит к классу Соболева: $x \in W_2^2[a,b]$.