ЛЕКЦИЯ 3. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ПО ПАРАМЕТРУ

В лекции 2 была сформулирована и доказана теорема 3 о дифференцировании по параметру собственного интеграла (правило Лейбница). Применим эту теорему для вычисления интеграла.

Пример 5. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)dx,\ \ |a|\neq 1.$$

Решение: Подынтегральная функция $f(x,a)=\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\dfrac{2\cos x+2a}{1+2a\cos x+a^2}$ непрерывны в прямоугольнике

$$G=\{(x,a): 0\le x\le\pi,\ a_1\le a\le a_2\},$$

где отрезок $[a_1;a_2]$ принадлежит одному из промежутков: $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ или $(1;+\infty)$. Поэтому выполнены условия теоремы 3 и

$$\frac{dI(a)}{da}=\int_0^{\pi}\frac{\partial\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)}{\partial a}dx=\int_0^{\pi}\frac{2\cos x+2a}{1+2a\cos x+a^2}dx.$$

Выполним замену переменной в определенном интеграле: $t=tg(x/2)$.

Тогда $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ и

$$\frac{dI(a)}{da}=\int_0^{+\infty}\frac{2\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)+2a}{1+2a\cdot\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)+a^2}\cdot\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)}=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{t^2(a-1)+(a+1)}{t^2(a-1)^2+(a+1)^2}\cdot\frac{dt}{\left(1+t^2\right)}=\frac{4}{a-1}\int_0^{+\infty}\frac{\left(t^2+\alpha\right)dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)\left(t^2+1\right)},$$

где $\alpha=\dfrac{a+1}{a-1}$.

Выполняя дальнейшие вычисления, получим:

$$I'(a)=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}+\frac{1}{t^2+1}\right\}dt=$$

$$=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\left\{\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+\operatorname{arctg}t\right\}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\left\{\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Знак плюс в последнем выражении берется для $\alpha > 0$ $(|a| > 1)$, а знак минус – для $\alpha < 0$ $(|a| < 1)$.

Если $|a| > 1$, то $I'(a) = \dfrac{2\pi}{a}$, следовательно, $I(a) = 2\pi \ln|a| + C$.
Найдем константу C:

$$2\pi \ln|a| + C = \int_0^\pi \ln\left(1 + 2a\cos x + a^2\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \int_0^\pi \ln\left(1 + 2a\cos x + a^2\right)dx - \pi \ln a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \int_0^\pi \ln \frac{\left(1 + 2a\cos x + a^2\right)}{a^2} dx.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $a \to \infty$, получим $C = 0$. Следовательно, $I(a) = 2\pi \ln|a|$.

Если $|a| < 1$, то $I'(a) = 0$, следовательно, $I(a) = C_1$. Так как $I(0) = 0$, то $C_1 = 0 \Rightarrow I(a) = 0$.

Ответ: $I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln|a|, & |a| > 1; \\ 0, & |a| < 1. \end{cases}$

Теорема 4. Пусть функции $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $G = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, функции $\varphi(y), \psi(y)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[c; d]$, а значения этих функций принадлежат отрезку $[a; b]$. Тогда функция $\Phi(y)$, определяемая формулой (2.3), дифференцируема на отрезке $[c; d]$, причем

$$\Phi'(y) = f(\psi(y), y) \cdot \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \cdot \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \tag{2.5}$$

Доказательство: Рассмотрим функцию трех переменных

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)dx\,; a \le u \le b, a \le v \le b, c \le y \le d.$$

Частные производные функции F первого порядка имею вид:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = f(v,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,y).$$

Функцию $\Phi(y)$ можно представить в виде:

$$\Phi(y) = F\big(y, \varphi(y), \psi(y)\big).$$

Частные производные F'_v, F'_u непрерывны в силу условия теоремы на множестве

$$D = \{(y,u,v)\colon c \le y \le d, a \le u \le b, a \le v \le b\}.$$

Покажем, что частная производная F'_y непрерывна на множестве D. Возьмем

$$y, y + \Delta y \in [c; d];\ u, u + \Delta u \in [a; b]; v, v + \Delta v \in [a; b]$$

и оценим полное приращение функции F'_y:

$$\left|\Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y}\right| = \left|\int\limits_{u+\Delta u}^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx - \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{u+\Delta u}^{u} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx + \int\limits_u^v \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx - \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_u^v \left(\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) dx\right| + \left|\int\limits_{u+\Delta u}^{u} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_v^{v+\Delta v} \frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} dx\right|.$$

Так как частная производная $\partial f / \partial y$ непрерывна в прямоугольнике G, то она ограничена на этом множестве по теореме Вейерштрасса, а по теореме Кантора она равномерно непрерывна в G, следовательно,

$$\exists M > 0\colon |\partial f / \partial y| < M.$$

Кроме того, $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ такое, что при условии $|\Delta y| < \delta$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y}\right| \le \left|\int\limits_u^v \varepsilon dx\right| + M|\Delta u| + M|\Delta v| \le \varepsilon|v - u| + M|\Delta u| + M|\Delta v| <$$

$$< \varepsilon(b-a) + M|\Delta u| + M|\Delta v|.$$

Следовательно,

$$\lim_{\rho\to 0} \Delta \frac{\partial F(y,u,v)}{\partial y} = 0, \qquad \rho = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta u^2 + \Delta v^2},$$

и частная производная $\partial F/\partial y$ является непрерывной функцией на множестве D.

Так как частные производные первого порядка функции F непрерывны, то функцию $\Phi(y) = F\big(y, \varphi(y), \psi(y)\big)$ можно дифференцировать по y по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d\Phi(y)}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} =$$

$$= \int_u^v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx - f(u,y)\frac{du}{dy} + f(v,y)\frac{dv}{dy}.$$

Полагая $u = \varphi(y), v = \psi(y)$, получим равенство (2.5). ■

Пример 6. Найти $F'(y)$, если $F(y) = \int\limits_{3y}^{y^2} \exp(yx^2)dx$.

Решение: Функции $\varphi(y) = 3y,\ \psi(y) = y^2$ непрерывны и имеют непрерывные производные на всей числовой оси, а функция $f(x,y) = \exp(yx^2)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2\exp(yx^2)$

непрерывны во всей плоскости (x,y). Согласно теореме 4 и формуле (2.3)

$$F'(y) = \exp\left(y\cdot\left(y^2\right)^2\right)\cdot 2y - \exp\left(y\cdot(3y)^2\right)\cdot 3 + \int\limits_{3y}^{y^2} x^2\exp(yx^2)dx.$$

Ответ: $F'(y) = 2y\exp(y^5) - 3\exp(9y^3) + \int\limits_{3y}^{y^2} x^2\exp(yx^2)dx$.

Пример 7. Найти дважды дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\varphi(x) = x^2 + 4\int_0^x (x-y)\varphi(y)dy. \qquad (2.6)$$

Решение: Продифференцируем дважды по x обе части равенства (2.6):

$$\varphi'(x) = 2x + 4(x-x)\varphi(x) + 4\int_0^x \frac{\partial[(x-y)\varphi(y)]}{\partial x}dy = 2x + 4\int_0^x \varphi(y)dy;$$

$$\varphi''(x) = 2 + 4\varphi(x). \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид:

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x - 1/2.$$

Так как $\varphi(0) = 0$, то $C_1 - 1/2 = 0$. Далее, так как $\varphi'(x) = 2C_1 \operatorname{sh} 2x + 2C_2 \operatorname{ch} 2x$ и $\varphi'(0) = 0$, то $C_2 = 0$.

Ответ: $\varphi(x) = 1/2 \operatorname{ch} 2x - 1/2$.

Теорема 5. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $G = \{(x, y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), интегрируема на отрезке $[c; d]$, причем

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Доказательство: Докажем более общее равенство:

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x, y)\,dy, \quad c \le \eta \le d. \tag{2.8}$$

Левая часть равенства (2.8) представляет собой функцию

$$F_1(\eta) = \int_c^\eta I(y)dy.$$

В силу условий теоремы функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c; d]$, следовательно, функция $F_1(\eta)$ дифференцируема на отрезке $[c; d]$ как интеграл с переменным верхним пределом и

$$\frac{dF_1(\eta)}{d\eta} = I(\eta) = \int_a^b f(x, \eta)dx.$$

Правая часть равенства (2.8) представляет собой функцию

$$F_2(\eta) = \int_a^b \varphi(x, \eta)dx\,, \quad \varphi(x, \eta) = \int_c^\eta f(x, y)dy.$$

Функция $\varphi(x, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 3, следовательно, функция $F_2(\eta)$ дифференцируема на отрезке $[c; d]$ и

$$\frac{dF_2(\eta)}{d\eta} = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, \eta)}{\partial \eta} dx = \int_a^b f(x, \eta)dx.$$

Таким образом,

$$\frac{dF_1(\eta)}{d\eta} = \frac{dF_2(\eta)}{d\eta} \Rightarrow F_1(\eta) = F_2(\eta) + C.$$

Так как $F_1(c) = F_2(c) = 0$, то $C = 0 \Rightarrow F_1(d) = F_2(d)$, откуда и следует утверждение теоремы. ■

Пример 8. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ 0 < a < b.$$

Решение: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \left(\left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_0^1 \right) dy =$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{(b+1)}{(a+1)}.$$

Здесь функция $f(x, y) = x^y$ непрерывна в прямоугольнике

$$G = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, \ a \le y \le b\},$$

т.е. выполнены условия теоремы 5.

Ответ: $\ln\dfrac{(b+1)}{(a+1)}$.

Пример 9. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x}\right) \frac{dx}{\cos x}, \ 0 < a < 1.$$

Решение: $\displaystyle I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x) - \ln(1 - a\cos x)}{\cos x} dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^a \left[\frac{1}{1 + y\cos x} + \frac{1}{1 - y\cos x} \right] dy = \int_0^a dy \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{1 - y^2\cos^2 x} =$$

$$= \int_0^a dy \int_0^{\pi/2} \frac{(-2)d\,\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}^2 x + 1 - y^2 \mathrm{ctg}^2 x} = \int_0^a dy \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1 - y^2)u^2 + 1} =$$

$$= \int_0^a \left(\left. \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} \mathrm{arctg}\left(u\sqrt{1 - y^2}\right) \right|_0^{+\infty} \right) dy = \int_0^a \frac{\pi dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pi \arcsin a.$$

Здесь функция $f(x,y)=\dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ непрерывна в прямоугольнике

$$G=\{(x,y):0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le a\},$$

и выполнены условия теоремы 5.

Ответ: $\pi \arcsin a$.