Решение типовых задач

Задача 1

Найдите общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ двумя способами: а) сведя систему к уравнению 3-го или 2-го порядка с помощью исключения неизвестных; б) отыскав собственные числа и собственные и присоединенные векторы матрицы A и составив по ним ФСР системы. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение

а) Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2z & (1) \\ \dot{y} = x + 3y - z & (2) \\ \dot{z} = -2x - y + 4z & (3) \end{cases}$$

Метод состоит в исключении функций y и z и получении дифференциального уравнения 3-го порядка для функции . Дифференцируем уравнение (1) и подставляем $\dot{y}$ и $\dot{z}$ из уравнений (2) и (3):

$$\ddot{x} = -\dot{y} + 2\dot{z} = -x + 3y + z - 4x - 2y + 8z = -5x - 5y + 9z \qquad (4)$$

Дифференцируем еще раз:

$$\dddot{x} = -5y - 10z - 5x - 15y + 5z - 18x - 9y + 36z$$
$$\dddot{x} = -23x - 19y + 31z \qquad (5)$$

Из (1) и (4) получим

$$\begin{cases} y = -2\ddot{x} + 9\dot{x} - 10x \\ z = -\ddot{x} + 5\dot{x} - 5x \end{cases} \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получаем дифференциальное уравнение 3-го порядка для функции x:

$$\dddot{x} - 7\ddot{x} + 16\dot{x} - 12x = 0. \qquad (7)$$

Соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Убедимся, что $\lambda = 2$ является его корнем. С помощью деления «в столбик» найдем остальные корни характеристического уравнения. $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$, то есть $\lambda = 2$ – корень кратности 2 и $\lambda = 3$ – корень кратности 1.

Решение уравнения (7) имеет вид:

$$x(t) = e^{2t}(C_1 + C_2 t) + C_3 e^{3t}. \qquad (8)$$

Дифференцируем (8) и подставляем в (6):

$$y(t) = C_2e^{2t} - C_3e^{3t}, \quad z(t) = e^{2t}(C_1 + C_2t) + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}.$$

б) Матрица системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda = 2$ – корень кратности 2, $\lambda = 3$ – корень кратности 1. Найдем собственный вектор $\bar{v}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $(A - 2E)$ равен двум: $r = 2, \quad n - r = 3 - 2 = 1$, следовательно, других (линейно независимых с $\bar{v}_1$) собственных векторов нет. Найдем присоединенный вектор $\bar{v}_2$ из уравнения $(A - \lambda E)\bar{v}_2 = \bar{v}_1$.

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор $\bar{v}_3$, соответствующий собственному значению $\lambda = 3$:

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для записи ответа используем формулу:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\bar{v}_1 + C_2e^{2t}(t\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + C_3e^{3t}\bar{v}_3$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + C_3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что совпадает с ответом, полученным в пункте а).