Занятие №2.

Основные элементарные функции комплексной переменной.

Дробно-рациональная, показательная, тригонометрические, гиперболические, логарифмическая, общая степенная, общая показательная, обратные тригонометрические и гиперболические функции.

1) Доказать, что:

1) $\sin iz = i\,\mathrm{sh}\,z$; 2) $\cos iz = \mathrm{ch}\,z$; 3) $\mathrm{tg}\,iz = i\,\mathrm{th}\,z$; 4) $\mathrm{ctg}\,iz = -i\,\mathrm{cth}\,z$

2) Выделить действительную и мнимую части следующих функций:

1) $w = e^{1-z}$; 2) $\sin z$; 3) $\cos z$; 4) $\mathrm{tg}\,z$; 5) $\mathrm{sh}\,z$; 6) $\mathrm{ch}\,z$; 7) $\mathrm{th}\,z$.

3) Вычислить значения функций в указанных точках:

1) $\cos(2+i)$; 2) $\sin 2i$; 3) $tg(2-i)$; 4) $ctg\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$; 5) $\frac{7}{\sqrt{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{4} + i\ln 7\right)$; 6) $th\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$;

7) $Ln4$: 8) $Ln\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; 9) $Ln(-1)$; 10) $Ln(2-3i)$.

4) Найти все значения степеней:

1) 2^i; 2) $(1+i)^i$; 3) $(3-4i)^{i+1}$; 4) i^i.

5) Получить аналитические выражения для указанных ниже функций и для каждой из них найти значение в соответствующей точке z_0:

1) $w = \mathrm{Arcsin}\,z,\ z_0 = i$;

2) $w = \mathrm{Arctg}\,z,\ z_0 = i/3$.

6) Решить уравнения:

1) $\cos z = 2i$; 2) $\sin z - \cos z = 3$.

7) Найти все корни следующих уравнений:

1) $\cos z = \mathrm{ch}\,z$; 2) $\sin z = i\,\mathrm{sh}\,z$; 3) $\cos z - i\,\mathrm{sh}\,2z$.

Домашнее задание:

№№ 12.54, 12.58, 12.64, 12.72, 12.80, 12.82, 12.84, 12.86;

№№ 12.13, 12.14.

Типовой расчет: задачи № 1, 2.

Ответы:

2)1) $w = e^{1-z} = e^{1-x}(\cos y - i\sin y)$; 2) $\sin z = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$;

3) $\cos z = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - i\sin x\,\mathrm{sh}\,y$; 4) $\mathrm{tg}\,z = \frac{\sin 2x + i\,\mathrm{sh}\,2y}{\cos 2x + \mathrm{ch}\,2y}$; 5) $\mathrm{sh}\,z = \mathrm{sh}\,x\cos y + i\,\mathrm{ch}\,x\sin y$;

6) $\mathrm{ch}\,z = \mathrm{ch}\,x\cos y + i\,\mathrm{sh}\,x\sin y$; 7) $\mathrm{th}\,z = \frac{\mathrm{sh}\,2x + i\sin 2y}{\mathrm{ch}\,2x + \cos 2y}$.

3) 4) $\frac{8+15i}{17}$; 5) $\frac{12\sqrt{2}(1+i)}{7}$; 6) $\frac{40+9i}{41}$; 7) $\ln 4 + i(0+2\pi k), k\in\mathbb{Z}$; 8) $i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$;

9) $i(\pi+2\pi k), k\in\mathbb{Z}$; 10) $\ln\sqrt{13} + i\left(2\pi k - \mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right), k\in\mathbb{Z}$.

4) 1) $(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)e^{-2\pi n},\ n\in\mathbb{Z}$; 2) $\left(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right)e^{\left(2n-\frac{1}{4}\right)\pi},\ n\in\mathbb{Z}$;

3) $\mathrm{Arcsin}\,z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)$; $\mathrm{Arcsin}\,i = \left\{2\pi k - i\ln\left(\sqrt{2}-1\right); 2\pi k + \pi - i\ln\left(\sqrt{2}+1\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$;

4) $\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$, $\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{3}\right) = \pi k + \frac{i}{2}\ln 2, k \in \mathbb{Z}$;

6) 1) $\left\{2\pi k + \frac{\pi}{2} - i\ln\left(2+\sqrt{5}\right); 2\pi k - \frac{\pi}{2} - i\ln\left(\sqrt{5}-2\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$;

2) $\left\{2\pi k + \frac{3\pi}{4} - i\ln\frac{\left(3\pm\sqrt{7}\right)}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

7) 1) $\pi k\left(1\pm i\right), k \in \mathbb{Z}$; 2) $\pi k\left(1+i\right), \frac{\pi\left(1+2k\right)}{1+i}, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi\left(4k-1\right)}{2\left(1-2i\right)}, \frac{\pi\left(4k+1\right)}{2\left(1+2i\right)}, k \in \mathbb{Z}$.