Разбор задач, которые должны были быть рассмотрены на общем практическом занятии 16.05.2020

1. Пусть $q(t)$ – заданная непрерывная функция. Покажите, что любые два решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = \lambda x(t) \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$

отвечающие различным значениям λ, взаимно ортогональны в пространстве $L_2[a, b]$.

Решение. Сначала установим симметричность оператора A, заданного на множестве двукратно непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в точках a и b, и определяемого формулой

$$(Ax)(t) = -\ddot{x}(t) + q(t)x(t)\,.$$

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ – произвольные функции из области определения оператора A, тогда

$$\begin{aligned} (Au, v) = \int_a^b \left(-\ddot{u}(t) + q(t)u(t)\right) v(t)\,dt = \\ = -\int_a^b \ddot{u}(t)v(t)\,dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = -\int_a^b v(t)\,d\dot{u}(t) + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = -\left.\left(v(t)\dot{u}(t)\right)\right|_a^b + \int_a^b \dot{u}(t)\,dv(t) + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = \int_a^b \dot{u}(t)\dot{v}(t)\,dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = \int_a^b \dot{v}(t)\,du(t) + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = \left.\left(\dot{v}(t)u(t)\right)\right|_a^b - \int_a^b u(t)\,d\dot{v}(t) + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = -\int_a^b u(t)\ddot{v}(t)\,dt + \int_a^b q(t)u(t)v(t)\,dt = \\ = \int_a^b u(t)\left(-\ddot{v}(t) + q(t)v(t)\right)\,dt = (u, Av) \end{aligned}$$

Мы двукратно проинтегрировали по частям, при этом внеинтегральные члены обращаются в нуль из-за обращения в нуль на границах функций u и v.

Пусть теперь $x_{1,2}(t)$ – ненулевые решения задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие несовпадающим значениям $\lambda_{1,2}$. Это значит, что $x_{1,2}(t)$ суть собственные функции оператора A: $Ax_{1,2} = \lambda_{1,2}x_{1,2}$.

Воспользовавшись полученным выше тождеством, получим:

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)\,.$$

С другой стороны,

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)\,,$$

а

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)\,,$$

поэтому

$$\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)\,,$$

или, иначе,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0\,,$$

откуда

$$(x_1, x_2) = 0\,,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ортогональность доказана.

Замечание. В условии указано, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Что будет, если значения λ совпадают для двух функций? Фактически это означат, что функции пропорциональны и могут отличаться лишь числовым множителем. Действительно, если бы нашлись две линейно независимые решения задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие одному и тому же собственному числу, то они тем самым образовали бы фундаментальную систему решений линейного ОДУ второго порядка

$$-\ddot{x}(t) + (q(t) - \lambda)x(t) = 0\,,$$

и тогда произвольное решение этого уравнения представлялось бы в виде их линейной комбинации. Но это означало бы, что все решения уравнения удовлетворяют нулевым краевым условиям на границах отрезка. В то же время известна, что задача Коши для такого уравнения имеет решение на отрезке для любых начальных условий: например, мы можем потребовать, чтобы значение функции в точке a было равно единице (а производная, например, нулю или любому другому значению). Пришли к противоречию. Следовательно, кратность собственных чисел оператора Штурма-Лиувилля не может превосходить единицы.

Замечание. Можно было бы рассмотреть задачу Штурма-Лиувилля и с другими краевыми условиями, также обеспечивающими ортогональность – например, потребовать обращения первой производной в нуль на границах отрезка или периодичности функции вместе с производной.

2. Пусть A – симметричный компактный оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве H, $\{\lambda_i\}$ – последовательность его ненулевых собственных чисел, упорядоченных по убыванию модуля, λ – некоторое число, отличное от нуля и от значений λ_i, и

$$d = \inf_i |\lambda - \lambda_i| \neq 0 \,.$$

Покажите, что

$$\left\|(\lambda E - A)^{-1}\right\| = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right) \,.$$

Решение. Согласно теореме Гильберта-Шмидта,

$$Ax = \sum_i \lambda_i \alpha_i e_i \,,$$

где e_i – ортонормированная система собственных элементов, при этом

$$x = \sum_i \alpha_i e_i + h \,,$$

где $h \in KerA$, при этом

$$\|x\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 + \|h\|^2 \,.$$

Пусть

$$y = (\lambda E - A)x = \sum_i \beta_i e_i + \hat{h} \,,$$

приччм

$$\|y\|^2 = \sum_i \beta_i^2 + \|\hat{h}\|^2 \,.$$

Тогда

$$(\lambda E - A)x = \sum_i (\lambda - \lambda_i)\alpha_i e_i + \lambda h \,,$$

т.е.

$$\beta_i = (\lambda - \lambda_i)\alpha_i \,, \quad \hat{h} = \lambda h \,,$$

тогда

$$\alpha_i = (\lambda - \lambda_i)^{-1}\beta_i \,, \quad h = \lambda^{-1}\hat{h} \,,$$

и тогда

$$x = (\lambda E - A)^{-1} y = \sum_i (\lambda - \lambda_i)^{-1}\beta_i e_i + \lambda^{-1}\hat{h} \,.$$

Эта формула дачт единственное решение уравнения $(\lambda E - A)x = y$ при условии сходимости ряда

$$\sum_i (\lambda - \lambda_i)^{-2}\beta_i^2$$

Этот ряд сходится по признаку сравнения, поскольку

$$\forall i : \left|(\lambda - \lambda_i)^{-2}\right| \le d^{-2}\,,$$

и сходится ряд

$$\sum_i \beta_i^2\,.$$

Таким образом, оператор $(\lambda E - A)^{-1}$ корректно определчн на всчм пространстве. Найдчм его норму. Для этого выполним оценку:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \sum_i |\lambda - \lambda_i|^{-2}\beta_i^2 + |\lambda|^{-2}\|\hat{h}\|^2 \le \\ \le d^{-2}\sum_i \beta_i^2 + |\lambda|^{-2}\|\hat{h}\|^2 \le \\ \le \left[\max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right)\right]^2 \left(\sum_i \beta_i^2 + \|\hat{h}\|^2\right) = \\ = \left[\max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right)\right]^2 \|y\|^2\,.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\left\|(\lambda E - A)^{-1}\right\| = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right)\,.$$

Осталось доказать равенство. Рассмотрим несколько случаев.

- $|\lambda| \le d$, $Ker A$ нетривиально. Тогда возьмчм

  $$y = \hat{h}\,, \quad (\lambda E - A)^{-1}y = (\lambda E - A)^{-1}\hat{h} = \lambda^{-1}\hat{h} = \lambda^{-1}y\,,$$

  и тогда

  $$\frac{\left\|(\lambda E - A)^{-1}y\right\|}{\|y\|} = \frac{\left\|\lambda^{-1}y\right\|}{\|y\|} = \frac{1}{|\lambda|} = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right)\,,$$

  норма достигается на элементах ядра.

- $|\lambda| \le d$, $Ker A$ тривиально. В этом случае последовательность $\{\lambda_i\}$ бесконечна, $\lambda_i \to 0$,

  $$\|(\lambda E - A)^{-1}e_i\| = \|(\lambda - \lambda_i)^{-1}e_i\| = \frac{1}{|\lambda - \lambda_i|} \to \frac{1}{|\lambda|} = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right)\,,$$

  норма не достигается.

  Замечание. В этом случае $d = |\lambda|$, поскольку $|\lambda - \lambda_i| \to |\lambda|$. Все собственные числа λ_i имеют один и тот же знак, отличный от знака λ.

- $|\lambda| > d$. Точная нижняя грань d множества $|\lambda - \lambda_i|$ либо достигается, либо является пределом какой-либо мминимизирующей подпоследовательности. Однако мы знаем, что последовательность $|\lambda - \lambda_i|$ и любая ечˌ подпоследовательность стремится к $|\lambda| > d$, поэтому нижняя грань должна достигаться на некотором элементе: $d = |\lambda - \lambda_{i_0}|$. Тогда, выбрав $y = e_{i_0}$, получаем:

  $$\|(\lambda E - A)^{-1} e_{i_0}\| = \|(\lambda - \lambda_{i_0})^{-1} e_{i_0}\| = \frac{1}{|\lambda - \lambda_i|} = \frac{1}{d} = \max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right),$$

  норма достигается на элементе e_{i_0}.

3. Покажите, что резольвентное множество непрерывного оператора открыто.

   Доказательство основано на открытости множества ограниченных операторов, вытекающем, в свою очередь, из теоремы Банаха. Этот факт уже был у нас, когда мы изучали операторы в банаховых пространствах.

4. Опишите спектр компактного симметричного оператора в случае конечномерного и бесконечномерного гильбертова пространства.

   Спектр оператора – множество таких λ, для которых оператор $\lambda E - A$ не имеет ограниченного обратного.

   В конечномерном случае все линейные операторы ограничены и компактны, оператор задачтся матрицей и непрерывно обратим тогда и только тогда, когда определитель матрицы отличен от нуля. Соответственно, спектр состоит из таких λ, для которых матрица оператора $\lambda E - A$ имеет нулевой определитель, т.е. из собственных чисел этого оператора. Нулевое значение принадлежит спектру, если A имеет нетривиальное ядро, и не принадлежит ему в противном случае.

   В бесконечномерном случае число 0 всегда принадлежит спектру компактного симметрического оператора независимо от того, является ли оно его собственным значением. Если ядро оператора тривиально, то у него есть обратный оператор, но он не является ограниченным, и область его опредедения, совпадающая с областью значений A, не покрывает всего пространства. Кроме того, спектр оператора содержит его собственные числа. Все прочие значения, как мы показали, принадлежат резольвентному множеству.

5. Докажите компактность оператора, задаваемого равенством

   $$Ax = \sum_{k=1}^{N} (x, \psi_k) e_k \, .$$

   Этот оператор ограничен и имеет конечный ранг, поэтому он переводит произвольное ограниченное множество в ограниченное множество, лежащее в конечномерном подпространстве. Такое множество предкомпактно.

6. Проверьте, что оператор, сопряжённый к рассмотренному выше, задаётся формулой

$$Ay = \sum_{k=1}^{N} (y, e_k)\psi_k \,.$$

Действительно,

$$(Ax, y) = \left(\sum_{k=1}^{N} (x, \psi_k) e_k, y \right) = \sum_{k=1}^{N} (x, \psi_k)\,(e_k, y) =$$
$$= \left(x, \sum_{k=1}^{N} (e_k, y)\psi_k \right) = (x, A^* y)$$

7. Покажите, что любой ограниченный оператор переводит компактное множество в компактное.

Уточнение: имеется в виду предкомпактное в предкомпактное. Нам нужно показать, что произвольная последовательность в образе предкомпактного множества имеет фундаментальную подпоследовательность. Действительно, возьмҷм какую-либо последовательность в образе множества. У каждого еҷ элемента есть по крайней мере один прообраз в исходном предкомпактном множестве. Возьмҷм последовательность таких прообразов. В силу предкомпактности исходного множества у неҷ найдҷтся фундаментальная подпоследовательность. Образ этой подпоследовательности при действии линейного ограниченного оператора будет фундаментальной подпоследовательностью исходной последовательности.

8. Если A и B – ограниченные линейные операторы, то $(AB)^* = B^* A^*$.

Эту задачу уже рассматривали.

$$(ABx, y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$$

С другой стороны, $(ABx, y) = (x, (AB)^* y)$.

9. Если A^{-1} существует и ограничен, то A^* имеет ограниченный обратный и $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Тоже рассматривали. $AA^{-1} = E$, тогда $(AA^{-1})^* = (A^{-1})^* A^* = E$. Аналогично $A^{-1}A = E$, и тогда $(A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^* = E$. Полученные равенства означают, что $(A^{-1})^*$ является одновременно левым и правым обратным для A^*, т.е. просто обратным.

10. Покажите, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве H компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.

И это рассматривали, причҷм применительно к пространствам со скалярным произведением. Если бы существовал ограниченный обратный к компактному оператору, то произведение таких операторов также было бы компактно. Но это произведение – единичный оператор, некомпактный в бесконечномерных пространвтсах.

11. Покажите, что в гильбертовом пространстве оператор, сопряжённый к компактному оператору, компактен.

    Это следует из того, что он вполне непрерывен. Для произвольного компактного оператора справедливо полярное разложение

    $$Ax = \sum_i s_i(x, e_i) f_i \,,$$

    где $\{e_i\}$ и $\{f_i\}$ – ортонормированные системы (конечные или бесконечные), а последовательность $\{s_i\}$ монотонно не возрастает и стремится к нулю (если она не обрывается). Сопряжчнный оператор имеет вид

    $$A^* x = \sum_i s_i(x, f_i) e_i \,.$$

    Если сумма конечна, то оператор имеет конечный ранг и тем самым компактен. Если сумма бесконечна, то его можно представить в виде

    $$A^* x = \sum_{i=1}^{N} s_i(x, f_i) e_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} s_i(x, f_i) e_i = A_N x + C_N x \,.$$

    Оператр A_N имеет конечный ранг, а норма $\|C_N\| = s_{N+1}$ выбором N может быть сделана сколь угодно малой. Это означает, что A^* вполне непрерывен, а следовательно и компактен.

Задачи, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 16.05.2020 для групп КМБО-01,02,05-17.

1. Приведите пример невыполнения теоремы Ролля для абстрактных функций.

2. Покажите, что в гильбертовом пространстве функционал (x, x) дифференцируем по Фреше. Найдите этот дифференциал.

3. Покажите, что в любом линейном нормированном пространстве функционал нормы $\|x\|$ не дифференцируем по Фреше в точке $x = o$, но имеет в этой точке вариацию по всем направлениям.

4. Пусть A – ограниченный оператор, действующий из ЛНП X в X, а отображение $F(x)$ из X в X дифференцируемо по Фреше в точке x. Покажите, что отображение $F_1(x) = AF(x)$ также будет дифференцируемо по Фреше в точке x. Чему равна ечҷ производная?

5. Пусть $K(t, s)$ – непрерывная функция на $[a, b] \times [a, b]$, а функция $g(u, v)$ – функция двух переменных, определчнная и непрерывная в полосе $[a, b] \times \mathbb{R}$. Кроме того, существует частная производная g_v, удовлетворяющая условию Липшица $|g_v(u, v_1) - g_v(u, v_2)| \leq L|v_1 - v_2|$, где L не

зависит от u и v. Покажите, что нелинейный интегральный оператор, определяемый формулой

$$F(x) = \int_a^b K(t,s) \cdot g(s, x(s))\, ds\,,$$

как оператор из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, дифференцируем по Фреше в любой точке пространства $C[a,b]$, и найдите производную.