1. Постулаты классической механики. Принцип относительности Галилея. Состояние механической системы. Принцип детерминированности Ньютона.

Постулаты клас мех:

а) Пространство Трёхмерно

б) Пространство Евклидово

в) Существует 4-ая координата - время

1. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.
2. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует. (импульс, сила из массы и скорости)
3. Сила действия равна силе противодействия.

Принцип относительности галилея: Существуют системы отсчета, называемые инерциальными. Её свойства:

а) Все законы природы во все моменты времени одинаковы во всех системах отсчёта

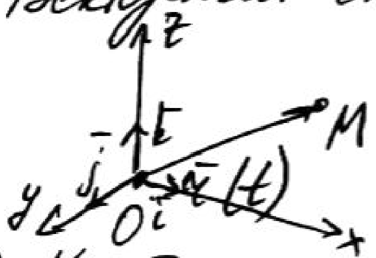
б) Если система отсчета движения относительно данной системы равномерно и прямолинейно, то она тоже инерциальна.

Состояние мех. системы - совокупность положения скоростей всех точек механической системы.

Принцип детерменированности Ньютона - состояние системы характеризуют все моменты времени.

2. Кинематика материальной точки. Векторный, координатный, естественный способы описания движения материальной точки. Скорость, ускорение материальной точки. Закон движения. Траектория.

1) Векторный способ



$$\bar v = \frac{d\bar r}{dt}$$

$$\bar a = \frac{d^2\bar r}{dt} = \frac{d\bar v}{dt}$$

2) Координатный

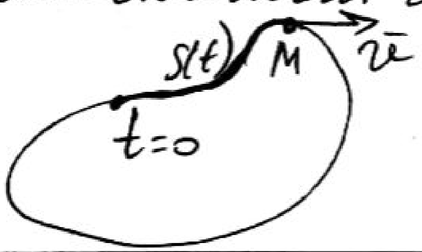
$$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k$$

$$\bar r = (x, y, z)$$

$$\bar v = (\dot x, \dot y, \dot z)$$

$$\bar a = (\ddot x, \ddot y, \ddot z)$$

3) Естественный способ



$S(t)$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec r = \vec r(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}$$

- траектория

Законы механики:

Первый закон Ньютона

Тело находится в состоянии равномерного и прямолинейного движения или покоится, если на него не оказывают действия другие тела или их действия взаимно компенсируются. Данный закон также называют законом инерции. При этом следует учитывать, что механическое движение всегда является относительным. Это значит, что в одной системе отсчета тело может покоиться, в другой двигаться с ускорением.

В математическом виде закон Ньютона можно записать как:

$$\overline{F} = \sum \overline{F}_i = 0, \quad \overline{a} = 0 \rightarrow \overline{v} = const \, (1)$$

.

Второй закон Ньютона

Равнодействующая всех сил, приложенных к телу равна произведению массы рассматриваемого тела на его ускорение:

$$\overline{F} = m\overline{a} \, (2) \, .$$

Данный закон можно формулировать и относительно ускорения. Тогда его формулировка будет следующей:

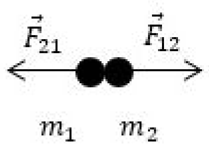
Ускорение, которое приобретает тело под воздействием силы $\overline{F}$ прямо пропорционально данной силе и обратнопропорционально массе тела:

$$\overline{a} = \frac{\overline{F}}{m} \, (3)$$

Третий закон Ньютона

Данный закон можно коротко сформулировать следующим образом: Действие равно противодействию. Что обозначает следующее: В том случае, если на одно тело оказывает воздействие другое тело с некоторой силой, то второе тело действует на первое с силой равной по модулю и противоположной по направлению (рис.1). В математической формулировке третий закон Ньютона запишется как:

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21} \, (5)$$



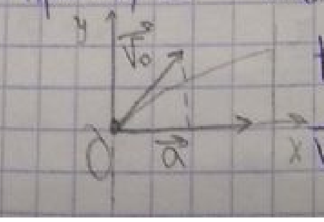
3. Равноускоренное движение материальной точки. Вывод закона движения.

Равноуско́ренное движе́ние — движение тела, при котором его ускорение а постоянно по модулю и направлению.

$$\vec r(t) = \vec r_0 + \vec v_0 t + \frac{\vec a t^2}{2}.$$

В случае равноускоренного движения любая из компонент скорости, например Vx = V0x + Ax * t, зависит от времени линейно.

Пример 1 равноускоренное движение ($a = Const$)



$t = 0$ $\quad \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec a$

$\vec v(0) = \vec v_0$

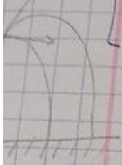
$\vec v = \frac{d^2\vec r}{dt} = t\vec a + \vec c \quad t = 0 \quad \vec c = \vec v_0$

$\vec r = \frac{t^2}{2}\vec a + \vec v_0 t + \vec r_0$ кв. ф-ция от времени

1) $\vec v_0 \parallel \vec a$ — тр. движ. по прямой

2) $\vec v_0 \nparallel \vec a$ движение плоское.

$\vec r_0 = \vec 0$

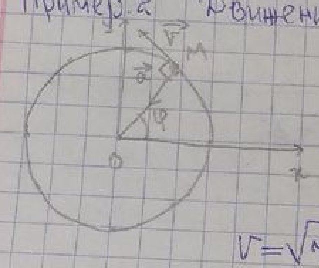


$$\begin{cases} x = a\frac{t^2}{2} - v_{0x}t \\ y = v_{0y}t \end{cases}$$

$t = \frac{y}{v_{0y}}$

$x = \frac{a}{2v_{0y}^2}\cdot y^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0y}}y$ ветв. параболы

Пример 2 Движение по окр-ти (равном)



$|\vec v| = Const$

$OM = r$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x = -r\sin\varphi\cdot\dot\varphi \\ \dot y = r\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$v = \sqrt{r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi} = r\dot\varphi$

Опр. угловой скорости 1.

При движении по окр-ти $\omega = \dot\varphi$

$\boxed{v = r\omega}$ $\quad \omega = const = \dot\varphi$

$= r\dot\varphi$

$$\begin{cases} \ddot x = -r\dot\varphi^2\cos\varphi \\ \ddot y = -r\dot\varphi^2\sin\varphi \end{cases}$$

$a = r\dot\varphi^2 = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$

$\vec a = -r\dot\varphi^2(\cos\varphi, \sin\varphi)$

4. Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Связь линейной и угловой скорости, ускорение при равномерном движении по окружности. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость как вектор. Связь линейной и угловой скорости при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.

Равномерное движение по окружности движение по окружности с неизменной по модулю скоростью.

Равномерное движение точки по окружности является движением с ускорением. Оно всегда направлено к центру окружности и называется *центростремительным, или нормальным. Модуль центростремительного ускорения:*

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

Угловая скорость - *скалярная величина, показывающая, насколько изменяется угол поворота за время*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

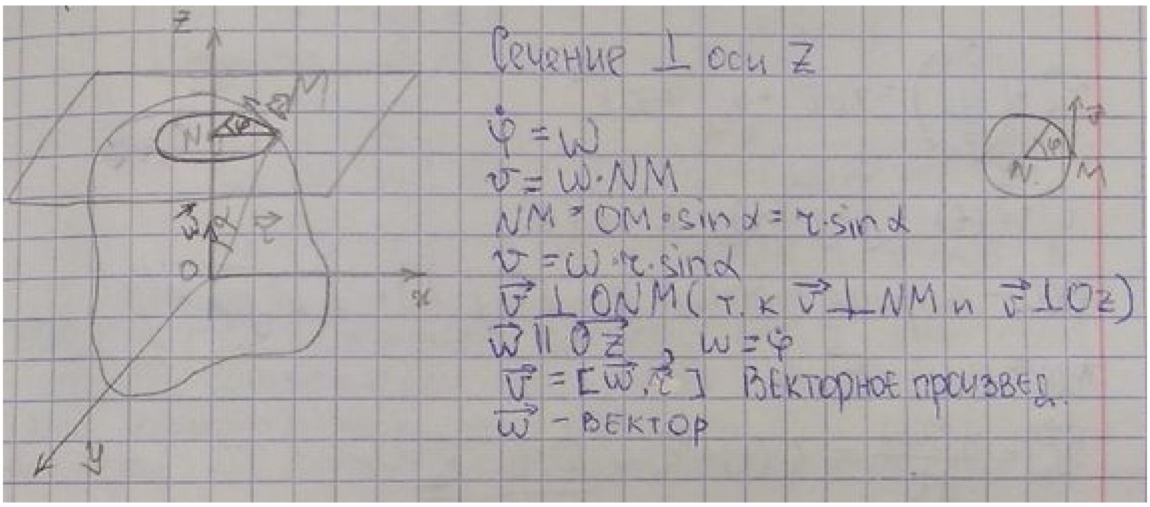
Если T - период обращения, ν - частота обращения, то угловая скорость выражается по формулам:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

*П*ри движении по окружности угловая и линейная скорости связаны соотношением $V = \omega R.$

Модуль центростремительного ускорения можно также определить по формуле $a_n = \omega^2 R.$

Твердое тело - мех система, в которой расстояние между 2 точками не меняется с течением времени*.*



Угловая скорость при вращении тела вокруг неподвижной оси это вектор, направленный вдоль оси вращения, равный производной угла, что

5. Ускорение точки при криволинейном движении в проекции на естественные оси. Тангенциальное направление. Направление главной нормали. Тангенциалеьное ускорение, нормальное ускорение. Радиус кривизны траектории. Теорема об ускорении точки в проекции на естественные оси. Лемма о движении материальной точки с постоянной скоростью.

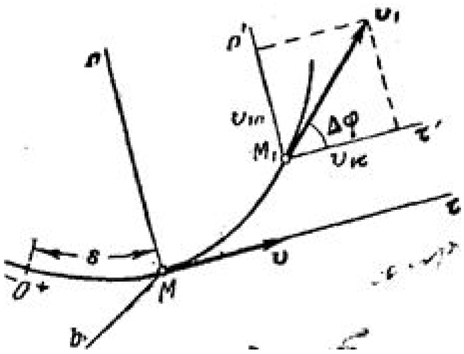
При естественном способе задания движения вектор $\vec{a}$ определяют по его проекциям на оси Mτnb, имеющие начало в точке *M* и движущиеся вместе с нею (рис.11). Эти оси, называемые осями естественного трехгранника (или скоростными (естественными) осями), направлены следующим образом: ось Mτ - вдоль касательной к траектории в сторону положительного отсчета расстояния *s*; ось Mn - по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb - перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую тройку. Нормаль Mn, лежащая в соприкасающейся плоскости (в плоскости самой кривой, если кривая плоская), называется главной нормалью, а перпендикулярная к ней нормаль Mb - бинормалью.

Естественные оси – это подвижные оси, связанные с движущейся точкой M и образующие правую прямоугольную систему координат. Плоскость, проходящая через обе нормали (главную нормаль n и бинормаль b), называется нормальной плоскостью. Координатная плоскость, проходящая через касательную нормаль n, называется соприкасающейся плоскостью.

Соприкасающуюся плоскость в некоторой точке M кривой можно определить также, как предельное положение плоскости, проходящей через касательную в точке M и любую точку кривой M_1, когда последняя стремится в пределе к совпадению с точкой M.

При движении точки по траектории направления естественных осей непрерывно изменяются

соприкасающейся плоскостью.



Проекция ускорения точки на какую-нибудь неподвижную координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты точки

$$\left.\begin{array}{l} w_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x};\quad w_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y};\quad w_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\ddot{z}, \\ w=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \\ \cos(\widehat{\overline{w},\overline{i}})=\frac{\ddot{x}}{w};\ \cos(\widehat{\overline{w},\overline{j}})=\frac{\ddot{y}}{w};\ \cos(\widehat{\overline{w},\overline{k}})=\frac{\ddot{z}}{w} \end{array}\right\} \quad (11\text{-}3)$$

2. Естественный способ задания движения точки заключается в том, что а) задается траектория точки (ОМА рис. 139); б) задается закон движения точки по траектории:

$$s=f(t), \qquad (11\text{-}4)$$

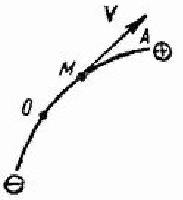


Рис. 139.

где $s=\overset{\frown}{OM}$, O — начало отсчета дуг; M — текущее положение точки на траектории. Знак $(+)$ показывает положительное направление отсчета дуг, а знак $(-)$ — отрицательное направление..

Проекция v_τ вектора скорости точки на касательную к траектории равна первой производной по времени от дуговой координаты точки:

$$v_\tau=\frac{dS}{dt}=\dot{S} \qquad (11\text{-}5а)$$

Если $\frac{dS}{dt}>0$, то скорость точки направлена в положительную сторону отсчета дуг S, а если $\frac{dS}{dt}<0$, то — в отрицательную сторону.

Модуль вектора скорости точки равен абсолютной величине первой производной по времени от дуговой координаты точки:

$$|\overline{v}|=\left|\frac{dS}{dt}\right|=|\dot{S}|=|v_\tau| \qquad (11\text{-}5)$$

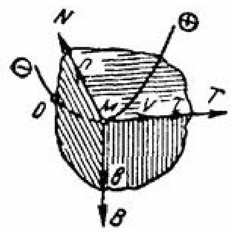


Рис. 140.

Для нахождения ускорения точки пользуются естественными осями T, N, B, (рис. 140)

T — касательная к траектории точки M, N — главная нормаль, направленная в сторону вогнутости траектории, B — бинормаль

Проекция ускорения точки на касательную к траектории точки равна первой производной по времени от алгебраической величины скорости:

$$w_\tau=\frac{dv_\tau}{dt}=\dot{v}. \qquad (11\text{-}6)$$

Проекция ускорения точки на главную нормаль к траектории точки равна квадрату скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории:

$$w_n=\frac{v^2}{\varrho}. \qquad (11\text{-}7)$$

Проекция ускорения точки на бинормаль к траектории равна нулю:

$$w_b=0$$

$$w=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2};\qquad w=\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^2};\ \operatorname{tg}\mu=\frac{\varrho}{v^2}\frac{dv}{dt}, \qquad (11\text{-}8)$$

где $\mu=(\widehat{\overline{w},\overline{w}_n})$ (рис. 141).

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения величины (модуля) скорости. Тангенциальное ускорение всегда коллинеарно скорости.
1) Если тангенциальная составляющая ускорения сонаправлена со скоростью, то движение будет ускоренное (см. рис. 2)

$\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$

Рис. 2. Тангенциальная составляющая ускорения сонаправлена со скоростью

2) Если тангенциальная составляющая ускорения противонаправлена скорости, то движение будет замедленным (см. рис. 3).

$\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{v}$

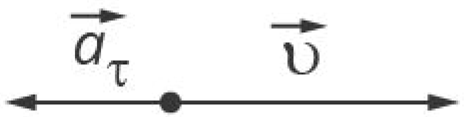


Рис. 3. Тангенциальная составляющая ускорения противонаправлена скорости

Нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Нормальное ускорение всегда перпендикулярно скорости и направлено к центру по радиусу траектории, по которой движется тело (см. рис. 4).

6. Задача о движении подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Лемма о производной по времени ортогонального оператора. Теорема об эквивалентности кососимметрического оператора в трехмерном пространстве и векторного умножения ($A\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$). Формулы Пуассона для производных по времени ортов координатных осей подвижной системы отсчета.

получена путем дифференцирования равенства (5.1).

Л. ***Оператор*** $A = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}$ ***кососимметричен*** $(A = -A')$ ***и эквивалентен операции векторного умножения, а именно,*** $A\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},\ \forall\, \mathbf{r} \in E^3$.

▲ Заметим, что операция транспонирования ортогонального оператора приводит к обратному оператору $\Gamma' = \Gamma^{-1}$. Продифференцируем равенство $\Gamma^{-1}\Gamma = E$ и получим $(\Gamma^{-1})^{\cdot}\Gamma + \Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = 0$. Далее, $(\Gamma^{-1})^{\cdot}\Gamma = (\Gamma')^{\cdot}\Gamma = (\dot{\Gamma})'\Gamma = (\Gamma'\dot{\Gamma})' = A'$ и предыдущее равенство можно переписать в виде $A' + A = 0$, что и доказывает кососимметричность оператора A. ▼

Производные по времени от ортов подвижной системы координат (*формулы Пуассона*)

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \quad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}.$$

Замечание

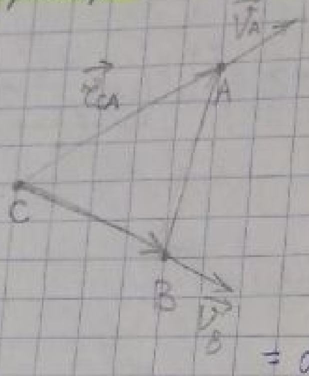
Формулы Пуассона – скорости точек, определяемых радиус-векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

7. Сложное движение материальной точки. Теорема о сложении скоростей в сложном движении. Определение переносной скорости.

Теорема о сложении скоростей $\vec{V}_{абс} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}$

$\vec{V}_{пер} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}']$

Пример. (Равномерно расширяющаяся вселенная)



$\vec{V}_A = \alpha \vec{r}_{CA}$ $\quad \vec{V}_B = \alpha \vec{CB}$

Есть ли центр? нет

$\forall B$, $\vec{V}_{пер} =$

$\vec{V}_{отн\,A} = \vec{V}_{абс} - \vec{V}_{пер} = \vec{V}_A - \vec{V}_B =$

$= \alpha \cdot \vec{CA} - \alpha \cdot \vec{CB} = \alpha(\vec{CA} - \vec{CB}) = \alpha \vec{BA}$

Т. о сложении ускорений в сложном движении точки

кориолисово

$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$, где

$\vec{a}_{пер} = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}'] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$, где

$\vec{a}_0$ – ускорение т. О – начала подвижной с-мы отсчёта. $\ddot{x}_0 i + \ddot{y}_0 j + \ddot{z}_0 k$

$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ – угловое ускорение

$[\vec{\varepsilon}, \vec{r}']$ – вращательное ускорение

$[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}']]$ – осестремительное ускорение

$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{V}_{отн}]$ – кориолисово ускорение

Док-во:

8. Теорема Кориолиса о сложении ускорений в сложном движении материальной точки. Кориолисово ускорение. Две формулы для осестремительного ускорения. Угловое ускорение. Ускорение в полярных координатах как сложное движение точки. Формулы для радиальной и трансверсальной составляющих ускорения.

> При составном движении абсолютное ускорение точки равно векторной сумме относительного переносного и кориолисова (поворотного) ускорений:
>
> $$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}},$$
>
> где
>
> $\vec{a}_{\text{кор}} = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{от}}]$ – кориолисово ускорение.

$\bar{a}_{\text{ос}} = \bar{\omega} \times \bar{v}$ - **осестремительное ускорение**

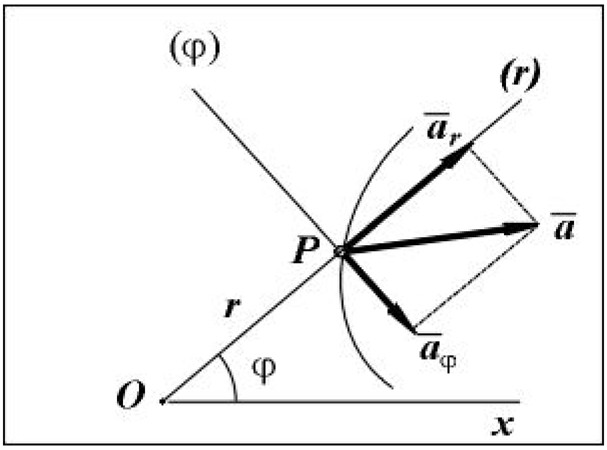
слагаемое $\varepsilon \times AB = W_{BA}$ – вращательное ускорение

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{W}_{BA}^{\text{ос}}$ - осестремительное ускорение.

Вектор ускорения **а** точки направлен в сторону вогнутости траектории и определяется своими проекциями a_r и a_φ на оси Pr и Pφ по формулам:

$$a_r = d^2r/dt^2 - r\,(d\varphi/dt)^2 = \ddot{r} - r\,(\dot{\varphi})^2;$$

$$a_\varphi = r\,(d^2\varphi/dt^2) + 2\,(dr/dt)\,(d\varphi/dt) = r\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,.$$



Величины a_r и a_φ соответсвенно называются *радиальным* и *трансверсальным* ускорениями точки.

Радиальное и трансверсальное ускорения могут быть как положительными, так и отрицательными (на рисунке показан случай, когда радиальное ускорение положительное, а трансверсальное - отрицательное).

Модуль ускорения $a = (a_r^2 + a_\varphi^2)^{1/2}$.

Формулы для радиальной и трансверсальной составляющих ускорения.

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi},$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}$$

9. Абсолютно твердое тело. Число степеней свободы абсолютно твердого тела. Теоремы о распределении скоростей и ускорений при движении абсолютно твердого тела.

Абсолютно твёрдое тело — механическая система, обладающая только поступательными и вращательными степенями свободы.

Для того, чтобы однозначно задать положение твердого тела в пространстве, надо зафиксировать три его точки, не лежащие на одной прямой. Одна материальная точка имеет три степени свободы (три декартовы координаты x, y, z). Две материальные точки, жестко связанные между собой, имеют 3 + 3 - 1 = 5 степеней свободы. В этом случае координаты точек x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 не являются независимыми величинами, так как имеется уравнение связи

$$\ell^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \,, \tag{1.1}$$

где ℓ - расстояние между точками.

Таким образом, в общем случае для твердого тела получаем 3 + 3 + 3 - 3 = 6 степеней свободы. При этом имеются три уравнения связи, выражающие постоянство расстояний между каждой парой точек.

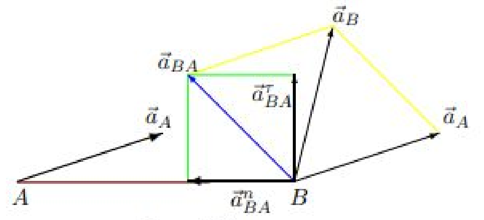
Определение. *Вектор $\vec{\omega}$, проекции которого определяются формулами (36) называется вектором угловой скорости твердого тела.*

В итоге получаем $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$. Эта формула называется основной формулой кинематики А.Т.Т. и выражает **Теорему о распределении скоростей при движении абсолютно твердого тела.**

Скорость произвольной точки А.Т.Т. равняется геометрической сумме вектора скорости полюса и скорости точки во вращении вокруг полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\tau}_{BA} + \vec{a}^{n}_{BA} \tag{71}$$

Формула выражает теорему о распределении ускорений при плоском движении:



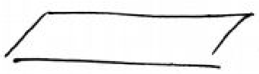
Теорема. Ускорение произвольной точки тела при плоском движении равняется геометрической сумме векторов ускорения полюса, вращательного и осестремительного ускорений.

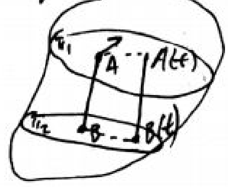
10. Следствия из формулы распределения скоростей при движении абсолютно твердого тела. Частные случаи движения абсолютно твердого тела. Поступательное движение. Вращение вокруг неподвижной оси. Плоскопараллельное движение.

11. Свойства плоско-параллельного движения. Теоремы о скоростях точек отрезка. Теорема о существовании мгновенного центра скоростей.

II ~~поступательное~~ Плоско-параллельное движение -

- назыв. движение, при кот. все скорости параллельны одной плоскости





$A \in \pi_1$, $B \in \pi_2$

$AB \perp \pi_1, \pi_2$

$A(t)B(t) = \overline{AB}$

=> A и B описывают одинаковые траектории в параллельных плоскостях

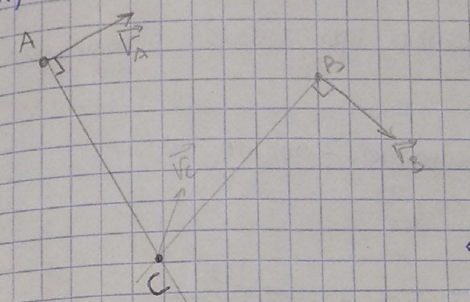
св-ва пл-парал дв.

1) Теорема (о сущ. мгн. центра скоростей)

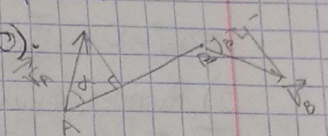
Если $\exists$ 2 точки, скорости которых различны, то $\exists$ точка C скорость которой равна нулю

т. C наз. мгновенный центр скоростей

а) $\vec{V}_A \nparallel \vec{V}_B$



0).



$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$

Докажем, что $\vec{V}_C = \vec{0}$

«От противного»:

Пусть $\vec{V}_C \ne \vec{0}$ => по св-ву 0)

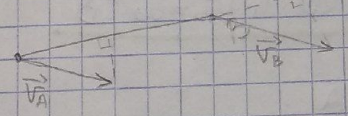
Проекция $\vec{V}_C$ на AC равна 0 => $\vec{V}_C \perp AC$

Проекция $\vec{V}_C$ на BC равна 0 (по св-ву 0) => $\vec{V}_C \perp BC$ =>

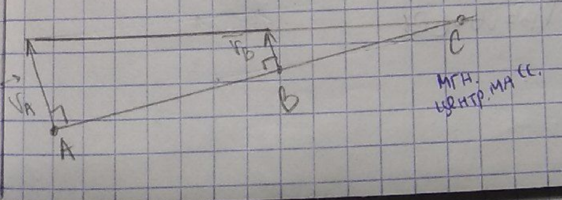
=> $AC \perp \vec{V}_C$, $BC \perp \vec{V}_C$ => $AC \parallel BC$ — противоречие

б) $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_B$, $V_A \ne V_B$

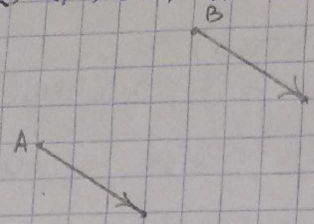
$\vec{V}_A \perp AB$, $\vec{V}_B \perp AB$.



- не может быть



2) $\exists A, B,\ \vec{V}_A = \vec{V}_B \Rightarrow$ дв поступ (т.е. $\forall M \in T,\ \vec{V}_M = \vec{V}$)



$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AB}] \quad (A\text{-полюс})$$

$$\underset{\vec{V}}{\vec{V}_B} = \underset{\vec{V}}{\vec{V}_A} \Rightarrow [\vec{\omega}, \vec{AB}] = 0$$

т.к. $\vec{\omega} \perp$ пл-ти π (пл-ть движения) $\Rightarrow$

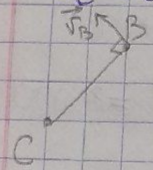
$\Rightarrow \vec{\omega} = 0 \quad \vec{V}_M = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AM}] = \vec{V}$

3) Распределение скоростей при плоском параллельном дв.

$\vec{V}_B = \vec{V}_A + [\vec{\omega}, \vec{AB}]$

A – C мгн. центр. скоростей – полюс

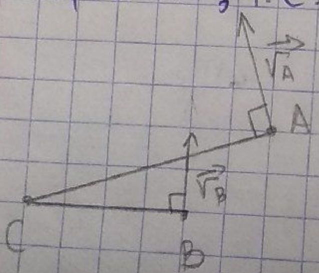
$\vec{V}_C = \vec{0}$



$$\vec{V}_B = \underset{0}{\vec{V}_C} + [\vec{\omega}, \vec{CB}] = \underbrace{[\vec{\omega}, \vec{CB}]}_{\perp \vec{CB}},\ \vec{\omega} \perp \text{пл-ти фигуры}$$

$\vec{V}_B = \omega \cdot CB$

Вывод: При плоском-параллельном движении скорости распределены так, как если бы в данный момент времени фигура вращалась вокруг мгн. центра скоростей, т.е. $\forall B,\ \vec{V}_B \perp \vec{CB}$ и $\vec{V}_B = \omega \cdot CB$



$V_A = \omega \cdot CA$

$V_B = \omega \cdot CB$

12. Аксиомы механики (законы Ньютона). Две основные задачи динамики. Движение со связями. Виды связей: голономные (геометрические), кинематические, стационарные, нестационарные, неосвобождающие, освобождающие. Примеры. Принцип освобождения от связей. Силы реакции связей.

3) Аксиомы динамики (Законы Ньютона).

1. ∃ класс выделенных систем отсчёта, назыв. инерциальными, в кот. материальная т., если на неё не действ. силы, движется равномерно и прямолин. или покоится.
2. $m\vec{a} = \vec{F}$ (речь про материальную точку)

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$$ (Основной закон динамики)

3. $A \xrightarrow{\bar{F}_1} \quad \xleftarrow{\bar{F}_2} B \qquad \bar{F}_2 = -\bar{F}_1$

(Сила действия равна силе противодействия)

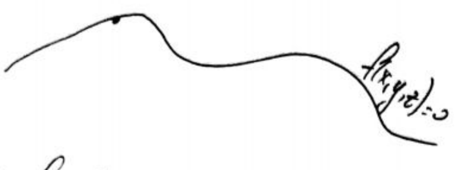
Свободное движение - движению мат. т. ничего не препятствует.

4) Связи

9

Ограничения на движение системы назыв. связями.

$m(x,y,z)$ · $f(x,y,z)=0$



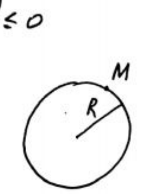
Виды связей:

I Геометрическая (ограничение на полож. точек, не на скорости)

$f(x,y,z)=0$

$f(x,y,z)\leq 0$

Пример:



$x^2+y^2+z^2=R^2$

II Кинематическая

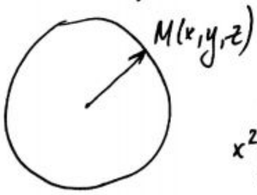
$f(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0$

≤ 0

III Стационарная:

$$f(x,y,z) \begin{matrix} =0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

Нестационарная: $f(t,x,y,z) \begin{matrix} =0 \\ \leq 0 \end{matrix}$



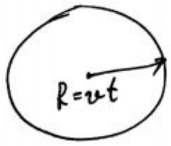
$R=vt$

$x^2+y^2+z^2=v^2t^2$

IV Неосвобождающая: $f(x,y,z)=0$

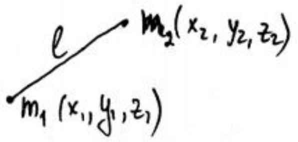
Освобождающая: $f(x,y,z)\geq 0$, $f(x,y,z)\leq 0$

Пример:



$x^2+y^2+z^2 \leq v^2t^2$

освобожд. связь



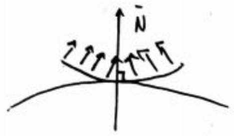
$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$

$m_1(x_1, y_1, z_1)$ $\qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \leq l^2$ – Освобожд. связь.

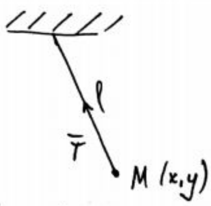
V Реакции связей – препятствие связей движению

Идея: замена связей силами

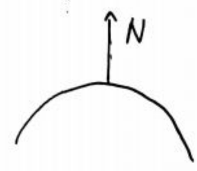
Действие связей можно заменить соотв. силами, кот. назыв. реакциями связей и считать механич. систему свободной сист., на кот. действ. доп. силы – силы реакции связей

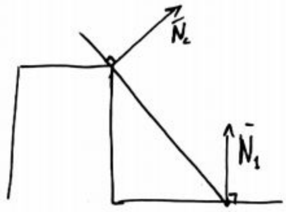


$f(x, y, z)=0$



$x^2+y^2=l^2$





- Активные силы и силы реакции

Внешние (по отн. к системе) и внутренние (т.е. действ. между мат. точками самой системы)

Первая (прямая) задача динамики. По заданному движению, совершаемому точкой данной массы, требуется найти неизвестную действующую силу.

Вторая (обратная) задача динамики. По заданным силам, действующим на точку данной массы, и заданным начальным условиям движения требуется найти закон движения точки.

13. Скользящие векторы. Правила сложения скользящих векторов. Сложение параллельных и антипараллельных скользящих векторов. Момент силы. Пара сил. Эквивалентные преобразования пары сил. Теорема о приведении системы скользящих векторов к равнодействующей и паре сил. Инварианты системы скользящих векторов.

14. Определение центра масс системы материальных точек. Формулы для координат центра масс при непрерывном распределении массы по объему, по поверхности, по кривой.

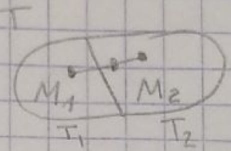
Опр. Точка C с радиус-вектором $\vec{r}_c = (\sum_{i=1}^{n} m_i r_i)/(\sum_{i=1}^{n} m_i)$ наз. центром масс с-мы мат точек $m_1, \dots, m_n$

15. Методы вычисления центра масс составных тел и тел, обладающих симметрией: метод группировки, метод симметрии, метод отрицательных масс. Центр масс треугольника (однородной треугольной пластины), дуги окружности, сектора.

Св-ва центра масс:

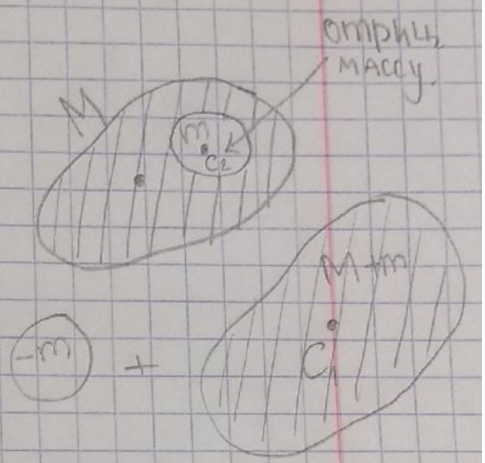
1) Симметрия: Есть ось симметрии => Ц масс в оси сим.

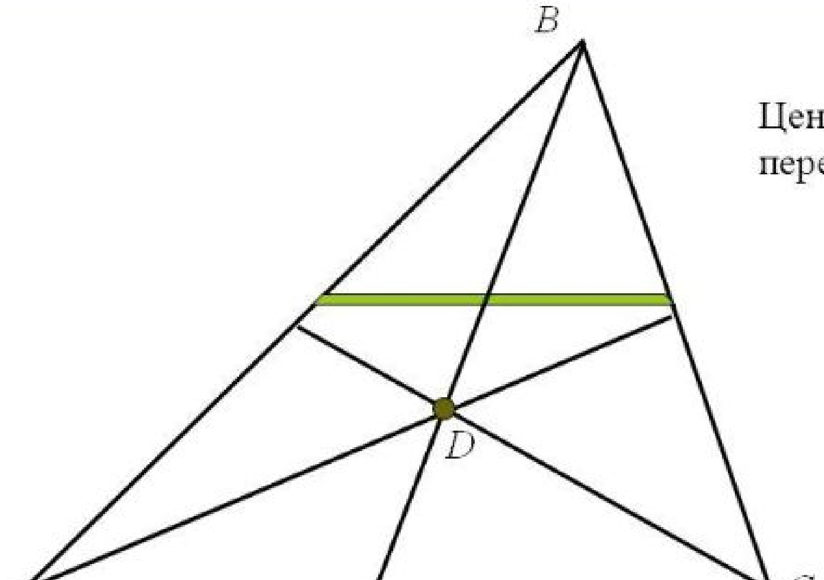
2) Группировка:



3) Метод отрицательных масс

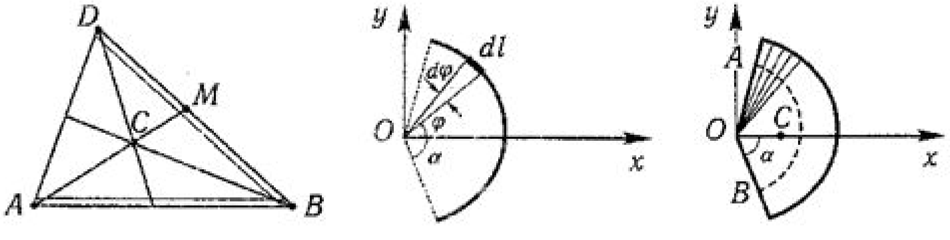
$$\vec{r}_C = \frac{(m+M)\vec{r}_{C_1} - m\vec{r}_{C_2}}{M}$$





Центр масс – в точке пересечения медиан

$$DM = \frac{1}{3}BM$$



а б в

Рисунок 1.10

Центр тяжести дуги окружности

Дуга имеет ось симметрии (рисунок 1.10, б). Центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $y_C = 0$.

$$x_C = \frac{1}{L}\int_L x\,dl,$$

dl – элемент дуги, $dl = Rd\varphi$, R – радиус окружности, $x = R\cos\varphi$, $L = 2\alpha R$,

$$x_C = \frac{1}{2\alpha R}\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi R d\varphi = \frac{R^2}{2\alpha R}\sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Следовательно:

$$x_C = R(\sin\alpha/\alpha).$$

Центр тяжести кругового сектора

Сектор радиуса R с центральным углом 2α имеет ось симметрии Ox, на которой находится центр тяжести (рисунок 1.10, в).

Разбиваем сектор на элементарные секторы, которые можно считать треугольниками. Центры тяжести элементарных секторов располагаются на дуге окружности радиуса $(2/3)R$.

Центр тяжести сектора совпадает с центром тяжести дуги AB:

$$x_C = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

16. Динамика материальной точки. Определение импульса (количества движения). Основной закон динамики для материальной точки (2-й закон Ньютона). Определение кинетического момента (момента импульса), момента силы. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема о сохранении кинетического момента. Случай центральной силы.

17. Модель гармонического осциллятора (груз на пружинке). Закон движения.

18. Модель математического маятника. Вывод уравнения движения.