Занятие 13. Линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть $\Omega \subset R^3$, Ω – область.

$$(1)\quad a_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + a_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

лин. однор. ур-е в частных производных (I пор.)

Здесь $a_1(\ldots), a_2(\ldots), a_3(\ldots)$ – заданные ф-ии, непр.-дифф. в обл. Ω;

$u(x,y,z)$ – искомая ф-ия.

Составим характеристическую систему для ур. (1):

$$(2)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = a_1(x,y,z) \\ \dot{y}(t) = a_2(x,y,z) \\ \dot{z}(t) = a_3(x,y,z). \end{cases}$$ (в нормальной форме) или $$\frac{dx}{a_1(x,y,z)} = \frac{dy}{a_2(x,y,z)} = \frac{dz}{a_3(x,y,z)}$$ (в симметричной форме)

Найдём два независимых первых инт-ла системы (2):

$$u_1(x,y,z) = C_1$$
$$u_2(x,y,z) = C_2.$$

Общим решением уравнения (1) наз. ф-ия:

$$u(x,y,z) = \Phi[u_1(x,y,z),\ u_2(x,y,z)],$$

где $\Phi[u_1, u_2]$ – произвольная непр.-дифф. ф-ия.

Замечание. Если $u(x,y,z) = \text{const}$, то производная ф-ии $u(x,y,z)$ в силу системы (2) даёт ур-е (1).

Пример 1 (№ 11.69).

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

1) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$

$\ln C_1+\ln|x|=\ln|y|$

$y=C_1x$

$C_1=\frac{y}{x}$

2) $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$

$\ln|x|=\ln|z|-\ln C_2$

$z=C_2x$

$C_2=\frac{z}{x}$

Ответ: $u=f\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$.

Пример 2 (№ 1170).

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}$$

Решаем методом выделения интегрируемых комбинаций

1) $\frac{dx-dy}{x-z-y+z}=\frac{dz}{2z}$

$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dz}$

$2\ln|x-y|=\ln|z|+\ln C_1$

$C_1=\frac{(x-y)^2}{z}$

2) $\frac{dx+dy+2dz}{x-z+y-z+4z}=\frac{dz}{2z}$

$\frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z}=\frac{1}{2}\frac{dz}{z}$

$\ln|x+y+2z|=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{2}\ln C_2$

$(x+y+2z)^2=C_2z$

$C_2=\frac{(x+y+2z)^2}{z}$

Ответ: $u=f\left[\frac{(x-y)^2}{z};\ \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right]$.

Уравнения в частных производных (2а)

2. Дано д.ур. в ч.пр.:

$$a_1(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z). \qquad (6)$$

Нужно найти поверхность $z = z(x,y)$, удовл. ур-ю (6) и проходящую через заданную линию:

$$L: \; x = u(t), \; y = v(t), \; z = w(t). \qquad (7)$$

Решение.

Составим характеристич. систему

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b}. \qquad (8)$$

Найдём два независимых первых интеграла системы (8):

$$\Phi_1(x,y,z) = C_1, \qquad \Phi_2(x,y,z) = C_2. \qquad (9)$$

Подставим $x(t), y(t), z(t)$ из (7). Получим:

$$\begin{cases} C_1 = \tilde{\Phi}_1(t), \\ C_2 = \tilde{\Phi}_2(t) \end{cases}$$

Исключая параметр t из этой системы, получим соотн-е $F(C_1, C_2) = 0$.

Подставим C_1 и C_2 из (9):

$$F(\Phi_1(x,y,z), \Phi_2(x,y,z)) = 0.$$ – искомое решение.

Пример 3.

Найти общее решение ур-я

$$x\cancel{z}\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Решение. Составим характер. систему:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy};$$ найдём её первые интегралы.

I. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$\ln|x| = \ln|y| + \ln C_1$

$\ln C_1 = \ln x - \ln y = \ln\frac{x}{y}$

$\boxed{C_1 = \frac{x}{y}}$; $x = C_1 y$ (*).

II. $\frac{dy}{\cancel{y}z} = \frac{dz}{x\cancel{y}}$

$\frac{dy}{z} \overset{(*)}{=} \frac{dz}{C_1 y}$

$C_1 y\,dy = z\,dz$

$C_1\frac{y^2}{2} + \frac{C_2}{2} = \frac{z^2}{2}$

(*) $\frac{x}{\cancel{y}}\cdot y^{\cancel{2}} + C_2 = z^2$

$\boxed{C_2 = z^2 - xy}$

O

Общее решение:

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 - xy\right) = 0.$$

Доп. задание: найти пов-ть, прох. через кривую $y = x^2$, $z = x^3$. Пусть $x = t$; тогда $y = t^2$, $z = t^3$.

$C_1 = \frac{x}{y} = \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$; $C_2 = (t^3)^2 - t\cdot t^2 = t^6 - t^3$.

исключим t: $t = 1/C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{C_1^6} - \frac{1}{C_1^3}$.

Подставим C_1 и C_2:

$z^2 - xy = \left(\frac{y}{x}\right)^6 - \left(\frac{y}{x}\right)^3$ – искомое решение.

(ур-е поверхности).

Пример 4 (№ 1171) Найти решение ур-я:

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial z}=0.$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial z}=0.$$

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{-y+x}$$

1) $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$

$$x\,dx=y\,dy$$

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right)-d\left(\frac{y^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{1}{2}d(x^2-y^2)=0$$

$$\boxed{x^2-y^2=C_1}$$

2) $\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dz}{-y+x}$

$$-d(x-y)=dz$$

$$\cancel{\frac{d(x-y)}{-(x-y)}}=\cancel{\frac{dz}{-(x-y)}}$$

$$|x-y|=z+C_2$$

$$\boxed{C_2=-x+y-z}$$

Ответ: $u=f(x^2-y^2;\,-x+y-z)$.

Пример 5. (№ 1174)

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}-yz\cdot\frac{\partial z}{\partial z}=0.$$

$$\frac{dx}{xy}=-\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{-yz}$$

?

1) $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$

$$x\,dx=-y\,dy$$

$$\boxed{x^2+y^2=C_1.}$$

2) $\frac{dx}{xy}=\frac{dz}{-yz}$

$$\frac{dx}{x}=\frac{-dz}{z}$$

$$\ln|x|=-\ln|z|+\ln C_2$$

$$C_2=xz$$

Ответ: $u=f(x^2+y^2;\,xz)$.

Пример 6. (№ 1194).

Найти поверхность, удовл. данному ур-ю и проход. через данную линию.

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x, \quad L: x=0,\ z=y^2.$$

Решение.

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}\overset{?}{=}\frac{dz}{x}.$$

1) $\frac{dx}{y\cdot \cancel{y}}=\frac{dy}{x\cdot \cancel{y}}$

$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}$

$x\,dx=y\,dy$

$\frac{1}{2}dx^2-\frac{1}{2}dy^2=0$

$\boxed{x^2-y^2=-C_1}$ (обозн.)

2) $\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{\cancel{x}}$

$\frac{dy}{y}=dz$

$z=\ln|y|+C_2$

$\boxed{C_2=z-\ln|y|}.$

Найдём пов-ть, проход. через линию L. Исключим x и z. $x=0,\ z=y^2$.

$$\begin{cases}-C_1=0^2-y^2;\ C_1=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{C_1}.\\ C_2=y^2-\ln y \Rightarrow C_2=C_1-\ln\sqrt{C_1}.\end{cases}$$

– подставим C_1 и C_2 из рамочек.

$$z-\ln|y|=y^2-x^2-\frac{1}{2}\ln(y^2-x^2).$$

(сошлось с ответом).

Пример 7. (№ 11.95) ⑥

Найти поверхность, удовл. данному ур-ю и проходящую через данную линию.

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2+y^2; \qquad L: y=1,\ z=x^2$$

Решение.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} \overset{?}{=} \frac{dz}{x^2+y^2}$$

1) $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{y}$

$-2\ln|x| = \ln|y| - \ln C_1$

$\ln C_1 = \ln|y| + \ln x^2$

$\boxed{C_1 = x^2\cdot y}$

2) $\dfrac{x\,dx - \frac{1}{2}y\,dy}{\cancel{x^2+y^2}} = \dfrac{dz}{\cancel{x^2+y^2}}$

$d\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} - z\right) = 0.$

$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} - z = \dfrac{C_2}{4}$

$\boxed{C_2 = 2x^2-y^2-4z}.$

Промежут. ответ:

$u = f[x^2y,\ 2x^2-y^2-4z].$

3) $L: y=1,\ z=x^2$ (параметр – x).

$$\begin{cases} C_1 = x^2\cdot 1 \\ C_2 = 2x^2-1-4x^2 = -1-2x^2 \end{cases}$$

$C_2 = -1-2C_1.$

$2C_1 + C_2 = -1.$

Ответ: $2x^2y + (2x^2-y^2-4z) = -1$ (сошлось с ответом).

Пример 8 (№ 1196). (7)

Найти пов-ть, удовл. данному ур-ю и проход. через данную линию.

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy\ ;\qquad L:\ x=2,\ z=y^2+1.$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\overset{?}{=}\frac{dz}{z-xy}$$

1) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$

$\ln|x|=\ln|y|-\ln C_1$

$$\boxed{C_1=\frac{y}{x}.}$$

2) $\dfrac{dz+y\,dx+x\,dy}{z-\cancel{xy}+\cancel{yx}+xy}=\dfrac{dx}{x}$

$$\frac{d(z+xy)}{z+xy}=\frac{dx}{x}$$

$\ln|z+xy|=\ln|x|+\ln C_2$

$$\boxed{C_2=\frac{z+xy}{x}.}$$

Найдём пов-ть, проход. через линию L.

3) $L:\begin{cases}x=2\\ z=y^2+1\end{cases}$

$C_1=\frac{y}{2}\ ;\quad C_2=\frac{y^2+1+2y}{2}=\frac{(y+1)^2}{2}=\frac{(2C_1+1)^2}{2}$

$y=2C_1$

$$C_2=\frac{(2C_1+1)^2}{2}.$$

$$\frac{z+xy}{x}=\frac{(y+1)^2}{2}$$

Ответ: $2(z+xy)=x(y+1)^2.$