ЛЕКЦИЯ 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Механика – наука о движении механических систем.

Простейшая механическая система – *материальная точка.*

Определение. *Материальной точкой называется геометрическая точка, имеющая массу.*

Определение. *Механическая система – это совокупность материальных точек.*

Изменение положения точки в пространстве со временем называется *движением.*

ПОСТУЛАТЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

В основе классической механики лежат следующие постулаты, являющиеся экспериментальными фактами.

1. Пространство – трехмерное евклидовое пространство. То есть, положение материальной точки в пространстве определяется тремя независимыми координатами, а расстояние между точками определяется естественной евклидовой метрикой.
2. Есть еще четвертая координата – время, которое в классической механике рассматривается как параметр, т.е. независимая переменная.
3. Любое движение в механике рассматривается относительно некоторой *системы отсчета.* Система отсчета – это система координат + часы. Начало системы координат, направления ее осей, а также начальный момент времени $t=0$ можно выбирать произвольно.
4. *Принцип относительности Галилея*. Существуют системы отсчета, в которых законы механики формулируются наиболее просто. Эти системы отсчета называются *инерциальными*. Инерциальные системы обладают следующими свойствами:
   a) Все законы природы во все моменты времени одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.
   b) Если система отсчета движется относительно данной инерциальной системы равномерно и прямолинейно, то она тоже инерциальна.
5. Одинаковость законов природы во всех инерциальных системах отсчета математически проявляются в ковариантной, т.е. векторной записи этих законов. Все физические характеристики являются или скалярами, или векторами, или тензорами, преобразующимися соответствующим образом при переходе от одной системы отсчета к другой.
6. Основной характеристикой механической системы является совокупность положений и скоростей всех ее точек в данный момент времени. Эта совокупность называется *состоянием механической системы*.
7. *Принцип детерминированности Ньютона*. Начальное состояние системы (в момент времени $t=0$) однозначно определяет все её движение (т.е. состояние во все последующие моменты времени).

Теоретическая механика состоит из трех разделов:

1. Кинематика.
2. Статика.
3. Динамика.

В кинематике изучаются геометрические характеристики движения безотносительно к причинам, вызывающим движение. Геометрическими характеристиками являются скорость, ускорение, траектория, закон движения.

Статика изучает условия равновесия механических систем под действием приложенных к системе сил.

Динамика изучает движение механической системы под действием приложенных к системе сил.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

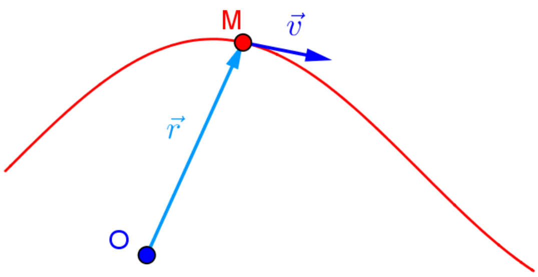
При движении точка описывает в пространстве кривую, которая называется *траекторией*.

Положение точки в пространстве как функция времени называется *законом движения*.

Существуют три способа описания движения материальной точки.

ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ.

Выберем в пространстве некоторую точку O, которую примем за начало системы отсчета. Тогда положение материальной точки M можно задать радиус-вектором $\vec{r}$ - вектором, начало которого находится в точке O, а конец – в точке, в которой в данный момент находится материальная точка. Основные кинематические характеристики движения:



- $\vec{r}=\vec{r}(t)$ - закон движения;
- $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ - скорость точки (по определению);
- $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ -ускорение точки (по определению).

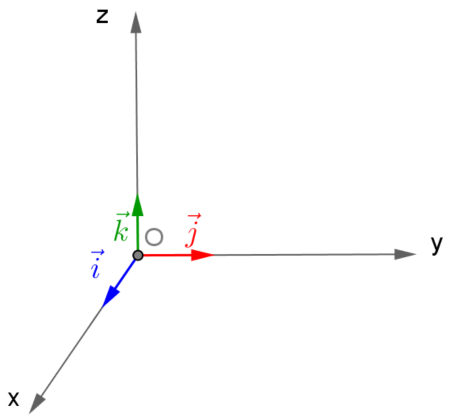
Скорость точки направлена по касательной к траектории.

Если известен закон движения $\vec{r}=\vec{r}(t)$, можно определить скорость и ускорение точки. И наоборот, зная ускорение в любой момент времени, а также начальное положение $\vec{r}_0$ и начальную скорость $\vec{v}_0$ точки, можно найти закон движения и траекторию:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\int_0^t \vec{a}(t)dt\,, \tag{1.1}$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\int_0^t \vec{v}(t)dt\,. \tag{1.2}$$

КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ.



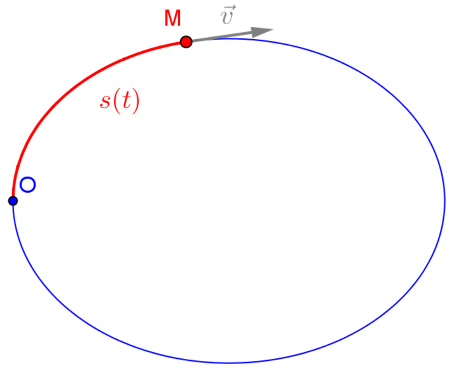
Выберем систему координат $Oxyz$ с началом в точке O. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные направляющие векторы соответствующих осей (орты). Тогда радиус вектор $\vec{r}$ точки можно разложить по базису $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и перейти к координатному способу задания движения:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Положение точки в пространстве описывается тремя координатами (x, y, z). Основные кинематические характеристики движения при координатном способе:

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ - закон движения; (1.3)
- $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ - скорость. В механике производные по времени обозначаются точками. Величина скорости $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$.
- $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ - ускорение. Величина ускорения $a = |\vec{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$.
- Из уравнений (1.3) можно определить, по какой траектории движется точка. Например, если движение происходит в плоскости, можно исключить из уравнений t и получить уравнение траектории в виде $f(x, y) = 0$.

ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ.

Пусть известна траектория точки. Зафиксируем положение точки в начальный момент времени. Тогда положение точки на траектории, а значит, и в пространстве, полностью задается функцией $s(t)$ - путем, пройденным точкой от момента времени $t = 0$. Такой способ описания движения называется естественным. Время t в этом случае можно считать параметром вдоль кривой. Функция $s(t)$ называется законом движения вдоль траектории. Вектор скорости точки $\vec{v}$ также известен, так как он направлен по касательной к траектории, а величина его равна $v = \dot{s}(t)$:



$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v\,.$$

ПРИМЕР. РАВНОУСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Равноускоренным называется движение, при котором вектор ускорения $\vec{a}$ постоянен (и по величине, и по направлению). Таким, к примеру, является локальное движение в поле тяжести Земли ($\vec{a} = \vec{g}$ - ускорение свободного падения).

Из интеграла (1.1) получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,.$$

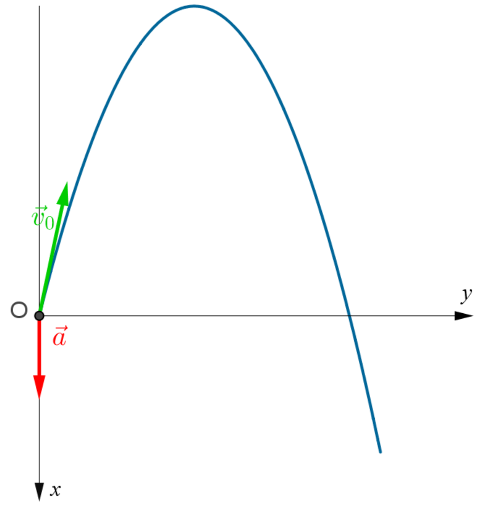
Интегрируя это выражение еще раз, получим закон движения в векторной форме:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\,. \tag{1.4}$$

Чтобы вычислить траекторию, перейдем к координатной форме. Рассмотрим два случая.

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$ не коллинеарны. Из закона движения (1.4) следует, что в этом случае траектория лежит в плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$. Выберем систему отсчета таким образом, что ее начало совпадает с положением точки в начальный момент времени (и тогда $\vec{r}_0 = \vec{0}$), ось Ox направим вдоль вектора $\vec{a}$, ось Oy - перпендикулярно ей в плоскости движения. Тогда векторы ускорения и начальной скорости имеют координаты $\vec{a} = (a, 0)$, $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, а закон движения (1.4) в координатной форме запишется как

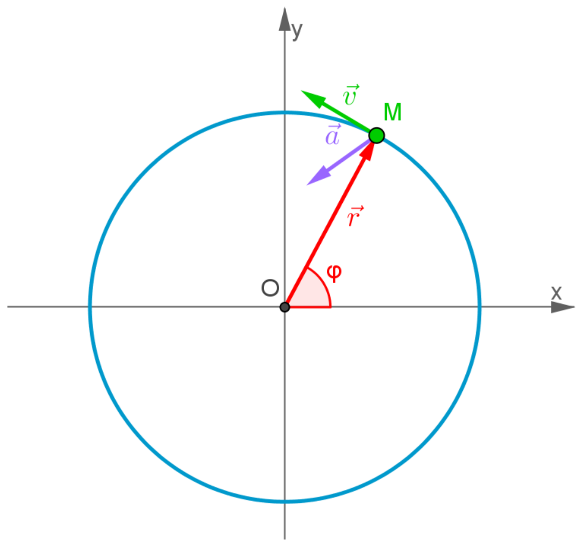
$$\begin{cases} x = v_{0x}t + \dfrac{at^2}{2} \\ y = v_{0y}t \end{cases}. \tag{1.5}$$



Исключая из уравнений (1.5) время *t*, получим, что траектория точки – парабола

$$x = \frac{v_{0x}}{v_{0y}} y + \frac{a}{2v_{0y}^2} y^2\,.$$

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$ коллинеарны. В этом случае из закона движения (1.4) следует, что траектория – прямая. Действительно, выбрав опять начало системы отсчета в начальном положении точки ($\vec{r}_0 = \vec{0}$), получим , что $\vec{r}(t) \parallel \vec{a} \parallel \vec{v}_0$. Закон движения вдоль прямой задается квадратичной функцией $x = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где x – координата вдоль прямой.



Движение по окружности удобно описывать в полярных координатах:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Продифференцировав по времени, получим декартовы компоненты скорости:

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}. \qquad (1.6)$$

Величина $\dot{\varphi} = \omega$ называется *угловой скоростью*.

Величина скорости v равна

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r\dot{\varphi} = r\omega.$$

Продифференцируем (1.6) еще раз и получим компоненты ускорения:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}.$$

Представим ускорение $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

где

$$\vec{a}_\tau = \begin{pmatrix} -r\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ r\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

- проекция ускорения на касательное направление к окружности, оно называется *касательным*, или *тангенциальным ускорением*;

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ -r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

- проекция ускорения на радиальное направление, оно называется *нормальным ускорением*.

Касательное ускорение характеризует изменение величины скорости. Нормальное ускорение характеризует изменение направления вектора скорости.

В частности, если точка движется по окружности с постоянной скоростью $\dot{\varphi} = \omega = Const$, касательное ускорение равно нулю, ускорение точки направлено к центру окружности и равно по величине

$$|\vec{a}| = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}.$$

ТЕОРЕМА. Точка движется с постоянной по величине скоростью. Тогда вектор ускорения перпендикулярен вектору скорости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = Const$. Продифференцируем по времени, получим

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}, \vec{v}) = 2\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}\right) = 2(\vec{a}, \vec{v}) = 0 \to \vec{a} \perp \vec{v} .$$

Q.E.D.