ЛЕКЦИЯ 4. КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Абсолютно твердым телом* называется механическая система, расстояния между точками которой не меняются в процессе движения, т.е. для любых точек A и B твердого тела $AB = Const$, или

$$\left|\vec{r}_A - \vec{r}_B\right| = Const .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Свободным называется такое движение механической системы, при котором на положения материальных точек, ее составляющих, не наложены никакие ограничения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Число степеней свободы системы* – число независимых параметров, определяющих положение всех точек системы.

ПРИМЕРЫ.

1. Свободная материальная точка. Ее положение в пространстве определяется тремя декартовыми координатами. Число степеней свободы – 3.
2. Механическая система, состоящая из n свободных материальных точек. Число степеней свободы - $3n$.
3. Точка движется по окружности. Положение точки определяется одним параметром – полярным углом φ. Такая механическая система имеет одну степень свободы.

Сколько степеней свободы имеет абсолютно твердое тело?

ТЕОРЕМА.

Абсолютно твердое тело имеет 6 степеней свободы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть A, B, C – произвольные точки твердого тела, не лежащие на одной прямой. Их положение в пространстве задается 9-ю координатами. Но так как мы знаем расстояния AB, BC и AC (мы считаем, что расстояния между любыми двумя точками твердого тела известными), мы можем составить три уравнения на эти 9 координат, и выразить какие-либо 3 координаты через остальные 6. Таким образом, для определения в пространстве трех точек A, B и C твердого тела требуется 6 параметров. Положение любой другой точки твердого тела M определяется однозначно, так как для нахождения трех координат точки M у нас есть три уравнения - известные расстояния AM, BM и CM.

Действительно, если закрепить одну точку A твердого тела, то оно может вращаться свободно вокруг этой точки. Если закрепить еще одну точку B, то тело может вращаться уже только вокруг оси AB. Если закрепить еще одну точку C, не лежащую на прямой AB, то твердое тело будет неподвижно, т.е. положение всех точек будет определено однозначно.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ В АБСОЛЮТНО ТВЕРДОМ ТЕЛЕ.

Пусть A - произвольная точка твердого тела, $\vec{v}_A$ - ее скорость, $\vec{a}_A$ - ее ускорение. Тогда мгновенное движение абсолютно твердого тела можно представить как поступательное движение со скоростью $\vec{v}_A$ и одновременное вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку *A*, определяемой вектором угловой скорости ω. Скорость и ускорение любой другой точки *B* твердого тела выражаются формулами

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}], \tag{4.1}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{AB}] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}]\right]. \tag{4.2}$$

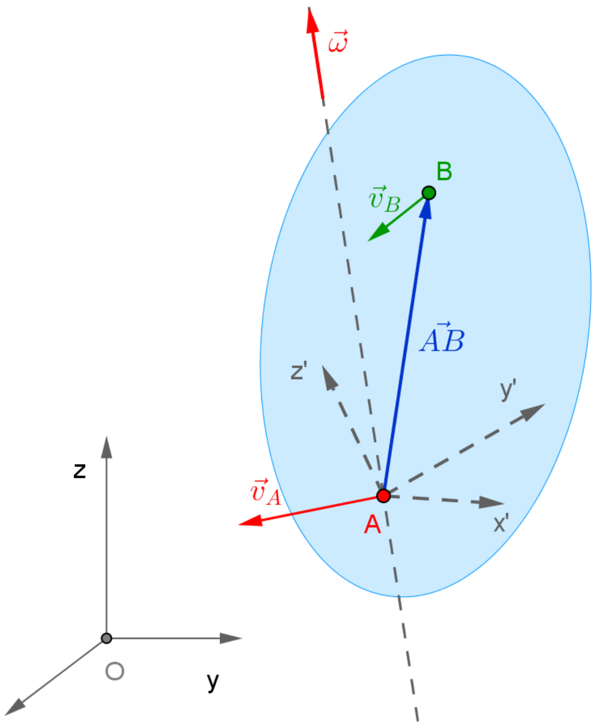
Точка *A* называется *полюсом*. Вектор $\vec{a}_{вр} = [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{AB}]$ называется *вращательным* ускорением. Вектор $\vec{a}_{oc} = \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}]\right]$ называется *осестремительным* ускорением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Выберем подвижную систему отсчета, жестко связанную с твердым телом и с началом в точке *A*. Применим формулу сложения скоростей в сложном движении

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{otn} + \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}\,'].$$

для точки B. Имеем $\vec{v}_{abs} = \vec{v}_B$, $\vec{v}_0 = \vec{v}_A$, $\vec{r}\,' = \overrightarrow{AB}$. Относительная скорость $\vec{v}_{otn}$ точки *B* равна нулю, так как тело покоится относительно подвижной системы координат. Поэтому абсолютная скорость – скорость точки *B*, совпадает с ее переносной скоростью и выражается формулой (4.1).



Аналогично, из формулы сложения ускорений для точки *B*

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{otn} + \vec{a}_{per} + \vec{a}_{kor},$$
$$\vec{a}_{per} = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,']\right],$$
$$\vec{a}_{kor} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{otn}],$$

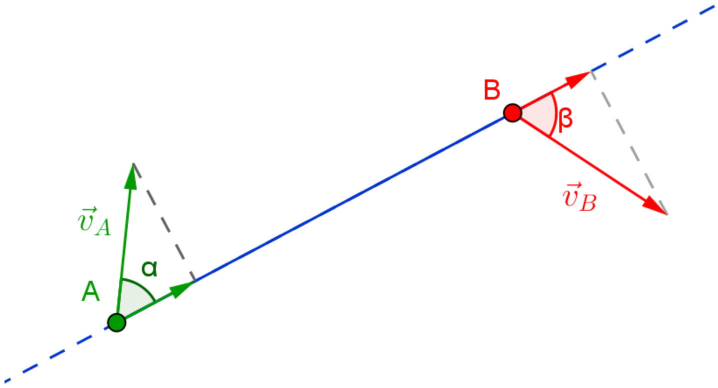
получаем, что ее относительное ускорение $\vec{a}_{otn}$ и кориолисово ускорение $\vec{a}_{kor}$ равны нулю и абсолютное ускорение – ускорение точки *B* $\vec{v}_B$ совпадает с переносным ускорением и вычисляется по формуле (4.2),

Q.E.D.

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ.

СЛЕДСТВИЕ 1. Проекции скоростей любых двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть A – полюс. Тогда

$$\left(\vec{v}_B, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{v}_A + [\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}], \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{v}_A, \overrightarrow{AB}\right) + \left([\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}], \overrightarrow{AB}\right).$$

Так как $\left([\vec{\omega}, \overrightarrow{AB}], \overrightarrow{AB}\right) = 0$, то получаем

$$\left(\vec{v}_B, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\vec{v}_A, \overrightarrow{AB}\right),$$

Q.E.D.

Это следствие имеет простую механическую интерпретацию: если бы проекции скоростей точек A и B на прямую AB были бы не равны, то длина отрезка AB должна была бы изменяться, а это не так.

СЛЕДСТВИЕ 2. Чтобы найти скорость любой точки M твердого тела, достаточно знать скорости трех точек, не лежащих на одной прямой.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если скорости трех точек, не лежащих на одной прямой, равны, то движение – поступательное.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать следствия 2 и 3.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

I. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

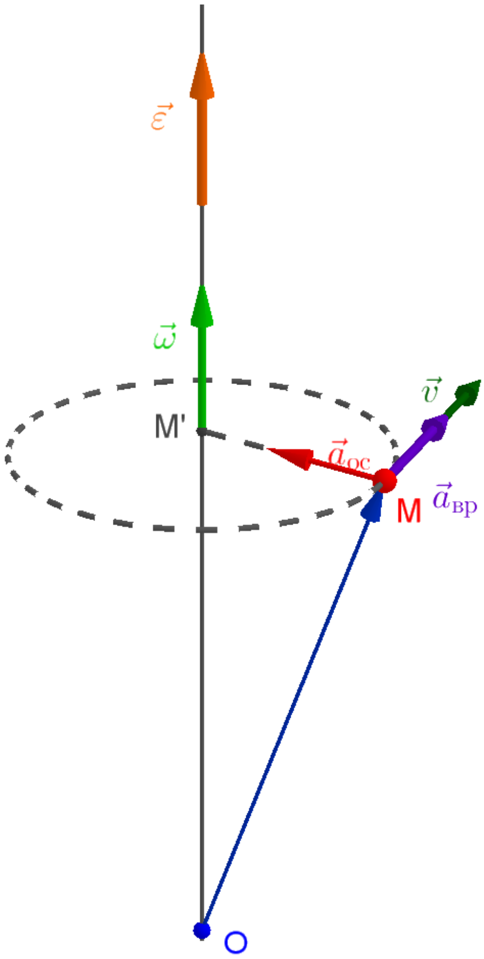
При поступательном движении вращение отсутствует, т.е. $\vec{\omega} = 0$ и все точки твердого тела движутся с одинаковой скоростью $\vec{v}$. При поступательном движении все точки твердого тела описывают одинаковые траектории с точностью до параллельного переноса:

$$\vec{r}_A(t) - \vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(0) - \vec{r}_B(0) = \vec{r}_0.$$

(Т.к. $\dfrac{d\vec{r}_A(t)}{dt} - \dfrac{d\vec{r}_B(t)}{dt} = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$).

II. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

Выберем в качестве полюса некоторую точку *O* на оси вращения и пусть *M*- произвольная точка твердого тела, не лежащая на оси. *M'* – проекция точки *M* на ось вращения, $MM' = d$.



Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена по оси вращения. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ также направлено по оси вращения, так как угловая скорость не изменяет направления в пространстве, а может только меняться по величине. Причем, $\vec{\varepsilon}$ сонаправлено $\vec{\omega}$, если вращение происходит с ускорением, и противонаправлено $\vec{\omega}$, если вращение замедляется. Точка М движется в плоскости, перпендикулярной оси вращения, по окружности радиуса *d.* Так как скорость и ускорение полюса *O* равны нулю, то формулы (4.1) и (4.2) для скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ точки *M* имеют вид

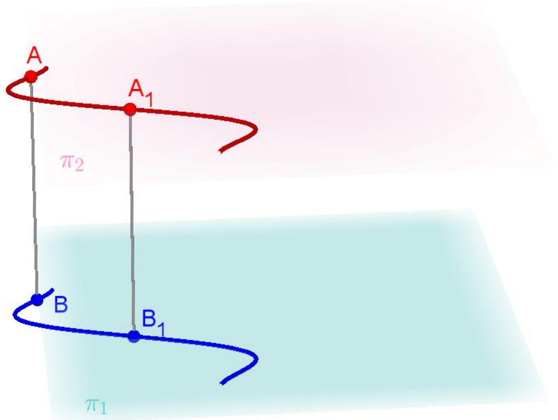
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}],$$

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{OM}] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}]\right].$$

Скорость точки *M* направлена по касательной к окружности и равна по величине ωd. Вращательное ускорение $\vec{a}_{вр} = [\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{OM}]$ направлено так же, как и скорость $\vec{v}$ - по касательной к окружности: в сторону вращения, если вращение ускоряется, и противоположно, если вращение замедляется. По величине оно равно $a_{вр} = \varepsilon d$. Осестремительное ускорение $\vec{a}_{ос} = \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \overrightarrow{OM}]\right]$, как уже было доказано в предыдущей лекции, направлено к оси вращения и равно по величине $a_{ос} = \omega^2 d$. Так как осестремительное и вращательное ускорение ортогональны, модуль полного ускорения вычисляется по теореме Пифагора и равен $a = d\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вращательное ускорение – это тангенциальное ускорение точки a_τ. Осестремительное ускорение – это нормальное ускорение a_n.

III. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ.



Плоскопараллельным называется движение твердого тела, при котором скорости всех его точек параллельны некоторой неподвижной плоскости π.

Рассмотрим два сечения твердого тела плоскостями π_1 и π_2, параллельными плоскости π и отрезок *AB* такой, что $A \in \pi_2, B \in \pi_1, AB \perp \pi$. Отрезок *AB* движется параллельно самому себе, так как точка *A* все время остается в плоскости π_2, точка *B* – в плоскости π_1 и длина отрезка *AB* не изменяется и равна расстоянию между плоскостями, то есть, он все время перпендикулярен плоскостям. Поэтому траектории точек *A* и *B* одинаковы с точностью до параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, для изучения плоскопараллельного движения твердого тела достаточно изучить движение любого его сечения, параллельного плоскости π, т.е. движение плоской фигуры в своей плоскости. При этом векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ направлены перпендикулярно плоскости π.

СВОЙСТВА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

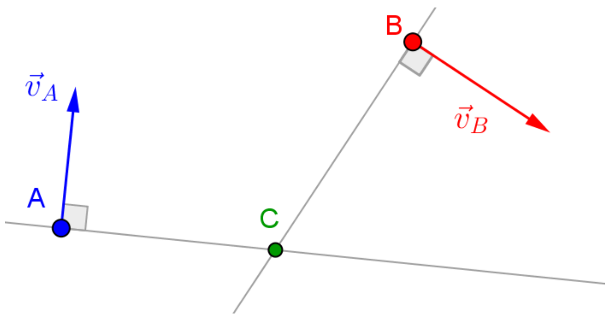
Согласно сказанному выше, будем считать, что твердое тело – это плоская фигура, которая движется в своей плоскости.

ТЕОРЕМА.

1) Если существуют две точки, скорости которых различны, то существует единственная точка *C*, скорость которой равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*. Мгновенное движение фигуры – это мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей.
2) Если существуют две точки, скорости которых равны (по величине и направлению), то движение является мгновенно поступательным.

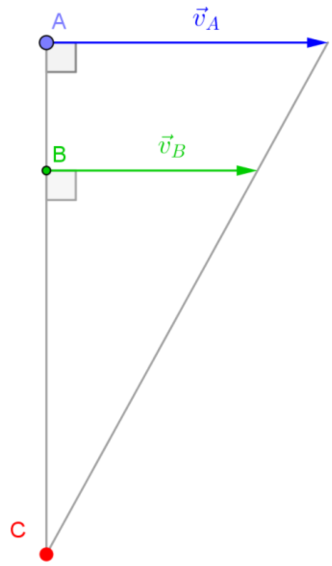
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть есть две точки *A* и *B* плоской фигуры и их скорости соответственно $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$.



   a) Пусть $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ не коллинеарны. Проведем через точку *A* прямую, перпендикулярную $\vec{v}_A$, а через точку *B* – прямую, перпендикулярную $\vec{v}_B$. Докажем, что точка *C* пересечения этих прямых- мгновенный центр скоростей, то есть, $\vec{v}_C = \vec{0}$.

Предположим, что $\vec{v}_C \neq \vec{0}$. Тогда по следствию 1 из теоремы о распределении скоростей в твердом теле проекция скорости точки *C* на прямую *AC* должна быть равна проекции скорости точки *A* на эту прямую, то есть, нулю. Отсюда, $\vec{v}_C \perp AC$. Аналогично, $\vec{v}_C \perp BC$. Противоречие. Следовательно, $\vec{v}_C = \vec{0}$.



   b) Пусть $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ коллинеарны. Тогда $\vec{v}_A = k\vec{v}_B$. Скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ перпендикулярны прямой *AB*, иначе не выполнялось бы следствие 1. Пусть *C* - точка пересечения прямой, проведенной через концы векторов скоростей, и прямой AB. Докажем, что C - мгновенный центр скоростей.

Примем точку C за полюс. Тогда скорости точек A и В по формуле распределения скоростей (4.1)

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \overrightarrow{CA}],$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + [\vec{\omega}, \overrightarrow{CB}].$$

Умножим второе уравнение на k и вычтем из первого. Учитывая, что $CA = kCB$ (из подобия треугольников), получим

$$\vec{0} = (1-k)\vec{v}_C.$$

Так как $k \neq 1$, $\vec{v}_C = 0$.

c) Пусть точка C – полюс. Так как $\vec{v}_C = \vec{0}$, скорость любой точки A выражается по формуле

$$\vec{v}_A = [\vec{\omega}, \overrightarrow{CA}].$$

Скорость направлена перпендикулярно вектору $\overrightarrow{CA}$ и ее величина равна

$$v_A = \omega \cdot CA. \tag{4.3}$$

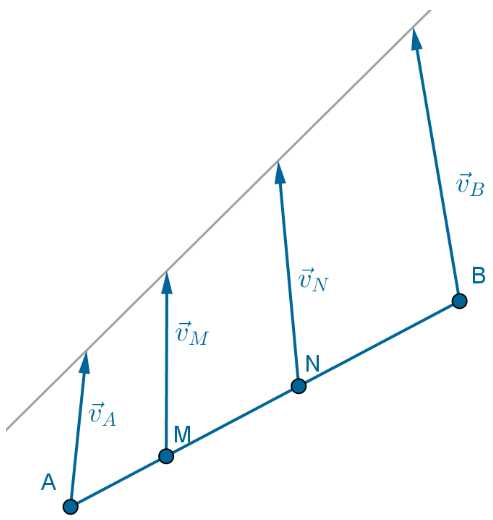
То есть скорости распределены так, как если бы фигура совершала мгновенное вращение вокруг неподвижной точки C.

Единственность мгновенного центра скоростей, а также пункт 2) теоремы предлагается доказать в качестве упражнения.

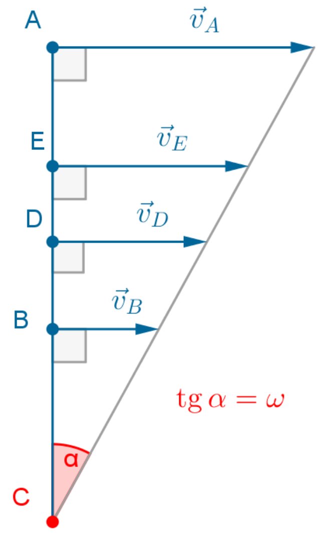
Q.E.D.

Мгновенный центр скоростей, вообще говоря, не остается неподвижным. Он перемещается как в пространстве, так и в твердом теле. Его траектория на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а его траектория относительно плоской фигуры – *подвижной центроидой*.

ТЕОРЕМА. *Концы векторов точек отрезка лежат на прямой*.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.



(a) Рассмотрим сначала случай, когда мгновенный центр скоростей C лежит на прямой AB. Тогда все скорости перпендикулярны прямой AB и из формулы (4.3) получаем

$$\frac{v_A}{CA} = \frac{v_D}{CD} = \frac{v_B}{CB} = \omega .$$

Прямоугольные треугольники подобны и концы скоростей лежат на прямой, составляющей с прямой AB угол α такой, что $\mathrm{tg}\,\alpha = \omega$.

(b) Пусть теперь мгновенный центр скоростей C не лежит на прямой AB. Рассмотрим относительную систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью $\vec{v}_A$. В относительной системе отсчета скорость точки A равна нулю, то есть, она является мгновенным центром скоростей и концы векторов относительных скоростей лежат на прямой AA_1. Так как абсолютные скорости получаются прибавлением к относительным скоростям одного и того же вектора переносной скорости $\vec{v}_A$, то концы векторов абсолютных скоростей будут лежать на прямой PP_1, получающейся параллельным переносом прямой AA_1 на вектор AA_1.