МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

"Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики"

МГТУ МИРЭА

Институт кибернетики

Кафедра высшей математики

Шпаргалка

По дисциплине

«Функциональный анализ»

Выполнили:
Студенты групп КМБ-13
Снесаревский В.П.
Исаева Д.В.
Сорокина Л.В.
Голубев М.А.
Смирнов К.В.
Тихонова Н.А.
Гусева С.А.
Свинцова А.А.
Еременко А.Р.
Анохина О.А.
Великанова А.М.
Шишкова П.О.
Гордеева Н.В.

Преподаватель:
Плаченов А.Б.

Москва 2016

Содержание

1 Метрические пространства

1.1 Определение и примеры метрических пространств

1.1.1 Подробно проверить аксиомы метрики:

-

1.1.2 Сформулировать определение подпространства $\mathbb{E}^n$, принятое в линейной алгебре и аналитической геометрии

Подпространство $\mathbb{E}^n$ — подмножество $X \subset \mathbb{E}^n$ такое, что $\forall x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\colon \alpha x + \beta y \in X$

1.1.3 Пусть $x(t) \geq 0$ непрерывна на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}t = 0$ Доказать, что $x(t) \equiv 0$ на $[a, b]$

Пусть $x(t) \not\equiv 0$. Тогда $\int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}t = |x(t)|(b-a) = 0$
$|x(t)| > 0, b - a \neq 0$ — противоречие

1.1.4 Мн-во X состоит из элементов $x = (x_1 ... x_n ...)$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$. $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_i - y_i|$. Доказать, что это метрическое пространство, или l_1 (а также пр-во с Манхэттанской метрикой).

Неотрицательность и симметричность очевидны.
Неравенство треугольника: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_i - z_i| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_i - y_i| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_i - z_i|$
Так как все эти ряды сходятся (по св-вам сх-ся рядов, их сумма и разность - тоже сходящиеся ряды), мы можем перейти к покомпонентному неравенству.
$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$
А дальше наш любимый приём. $|x_i - y_i| = a$, $|y_i - z_i| = b$
$|a + b| \leq |a| + |b|$ - а это уже аксиома.

1.1.5 Пусть множество X состоит из сходящияхся последовательностей. Доказать, что $\rho(x, y) = \sup |x_i - y_i|$ — метрика

1. $x = y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$ — очевидно $(x = y \Leftrightarrow x_i = y_i \forall i)$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — очевидно
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$
   $\forall i \quad |x_i - z_i| \leq |x_y - y_i| + |y_i - z_i| \leq \sup |x_i - z_i| \leq |x_y - y_i| + \sup |y_i - z_i| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$
   Если выполняется для любого i, выполняется и для $\sup |x_i - z_i| = \rho(x, z)$ — метрика доказана

1.1.6

1.1.7

1.1.8 Можно ли на прямой $(-\infty < x < \infty)$ ввести метрику по формуле $\rho(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$?

1. $\operatorname{arctg}|x-y| \geq 0$ — очевидно

2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ — очевидно

3. $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}|x-y| = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$
   $x = y \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}|x-y| = 0 \Rightarrow \rho(x,y) = 0$

4. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$
   $\operatorname{arctg}|x-z| \leq \operatorname{arctg}|x-y| + \operatorname{arctg}|y-z|$. Возьмем $x-y=a, y-z=b \Rightarrow x-z=a+b, a \geq 0, b \geq 0$
   $\operatorname{arctg}|a+b| \leq \operatorname{arctg}|a| + \operatorname{arctg}|b|$
   $|a+b| \leq \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}|a| + \operatorname{arctg}|b|)$
   $a+b \leq \frac{a+b}{1-ab}$
   $(1-ab)(a+b) \leq a+b \Rightarrow -ab(a+b) \leq 0$ — очевидно, т.к. $ab \geq 0$

1.2 Сходимость. Замкнутые и открытые множества

1.2.1 Может ли счетное пересечение открытых множеств не быть открытым?

Рассмотрим множества $M_n = (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$ и их пересечение $M = \cap M_n$
Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty} a + \frac{1}{n} = a$, получим, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall n > N \quad |a - (a - \frac{1}{n})| = \frac{1}{n} < \varepsilon$
То есть не существует окрестности точки a, целиком лежащей в M — множество не открытое.
Также, проведя аналогичные рассуждения для b, получим, что $M = [a, b]$

1.2.2 Может ли счетное объединение замкнутых множеств не быть замкнутым?

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ и возьмем внутри него отрезок $[a_0, b_0]$.
Будем расширять этот отрезок, добавляя получившийся отрезок в объединение: $[a_0, b_0] \subset [a_1, b_1], a_1 = a_0 - \varepsilon_1, b_1 = b_0 + \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0$ Продолжаем расширять отрезок, на каждом шаге уменьшая ε: $0 < \varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$
В итоге получим множество отрезков, вложенных друг в друга, но не содержащих исходный отрезок $[a, b]$. Точки a и b будут предельными точками множества, не принадлежащими ему, т.е. множество — не замкнутое

1.2.3 Показать, что любой открытый шар $S(a, r)$ в метрическом пространстве X является открытым множеством, а множество точек таких, что $\rho(a, x) \leq r$ (замкнутый шар) — замкнутым множеством

Рассмотрим произвольную точку x внутри шара, т.е. $\rho(x, a) < r$. Очевидно, что найдется такая точка у, что $\rho(x, a) < \rho(y, a) < r$. То есть найдется открытый шар радиуса $\rho(x, y)$ с центром в точке x, содержащий только точки шара S. Отсюда получим, что шар — открытое множество
Рассмотрим внешность замкнутого шара $(\rho(a, x) > r)$. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что это — открытое множество. Т.к. дополнение открытого множества замкнуто, замкнутый шар — замкнутое множество ■

1.2.4 Обозначим A' множество всех предельных точек заданного множества A. Построить на прямой $\mathbb{R}$ такое множество A, чтобы множество $A'' = (A')'$ было непустым, а множество A''' — пустым

Точка называется **предельной** для множества, если любая ее выколотая окрестность имеет с этим множеством непустое пересечение.
Поскольку по условию $A''' = \varnothing$, все точки множества A'' — **изолированные** (существует выколотая окрестность, не содержащая точек множества).
Мысль по теме. $A = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right\}, A' = \left\{\frac{1}{n}\right\}, A'' = \varnothing$

1.2.5 Доказать, что множество A' замкнуто, каково бы ни было множество A

Пусть A — открытое множество. Предположим, что A' — тоже открытое. По определению объединение множества с множеством его предельных точек замкнутое. Но $A \cup A'$ — открытое, т.к. по предположению оба множества — открытые. Противоречие, A' — замкнутое
Пусть A — замкнутое, т.е. $A' \subset A$ или $A \cap A' = A' \Rightarrow A'$ — замкнутое

1.2.6 Доказать, что $[M]$ - замкнутое множество

$[M]$-объединение самого множества и множества его предельных точек.
Множество замкнутое, если все его предельные точки ему самому и принадлежат.
Очевидно.

1.2.7 Доказать, что существуют множества ни замкнутые, ни открытые и открытые и замкнутые одновременно

1. Рассмотрим $[a, b)$. Оно не является открытым, т.к. любая окрестность точки a содержит точки, не принадлежащие множеству. Но при этом оно не является замкнутым, т.к. существуют последовательности, стремящиеся к b, т.е. b — предельная точка, не принадлежащая множеству

2. Рассмотрим множество $\varnothing$. Оно не имеет элементов, т.е. множно сказать, что любой его элемент входит в него со своей окрестностью. Также множно сказать, что ему принадлежат все его предельные точки, т.е. множество и открытое, и замкнутое

1.2.8

1.2.9

1.2.10 Доказать включение $[M \cap N] \subset ([M] \cap [N])$. Можно ли заменить $\subset$ на $=$?

Множеству $[M \cap N]$ (1) принадлежат все предельные точки множества $M \cap N$
Множеству $([M] \cap [N])$ (2) принадлежат все предельные точки, принадлежащие одновременно множеству M и множеству $N \Rightarrow$ Множество (2) не меньше множества (1)
Так как предельные точки пересечения являются предельными каждого из множеств, множно сказать, что $[M \cap N] = ([M] \cap [N])$

1.2.11 Следует ли из $[M] \subset [N]$ вложенность $M \subset N$?

Рассмотрим частный случай $[M] = [N]$, M — замкнутое, N — открытое. Существуют точки из $[M] = [N]$, принадлежащие M, но не принадлежащие N, т.е. $M \not\subset N$

1.2.12

1.2.13 Пусть M — множество всех точек $x(x_1, \dots, x_n, \dots)$ пространства l_2, у которых все координаты положительны. Будет ли указанное множество открыто?

Рассмотрим такую точку x, координаты которой образуют бесконечно убывающую последовательность (при этом они все положительны, т.е. стремятся к нулю сверху). Для этой точки нельзя подобрать открытый шар, целиком лежащий в множестве, т.к. какое бы ε мы не взяли, найдется такой $x_j < \varepsilon$. То есть множество не является открытым

1.2.14 Пусть вещественная функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Доказать, что множество G точек, где $f(x) < 1$ открыто

Условие непрерывности $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$
Если $\forall x \; f(x) \geq 1$, то $G = \varnothing$ — открытое и замкнутое одновременно
Если $\forall x \; f(x) < 1$, то $G = \mathbb{R}$ — открытое по определению
Иначе рассмотрим произвольную точку x такую, что $f(x) < 1$. Возьмем $\varepsilon = 1 - f(x)$ (модуль не обязателен, т.к. $f(x) < 1$). Из условия непрерывности найдется такое δ, что $|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Очевидно, что δ-окрестность точки x принадлежит G. Поскольку это выполняется для любой произвольной точки из множества, оно открыто ■

1.2.15

1.2.16 Доказать, что $\mathbb{C}[a, b]$ сепарабельно

Мн-во $M \subset X$ всюду плотно, если замыкание - это всё X. ($[M] = X$)
Множество сепарабельно, если в нём есть счётное всюду плотное мн-во.
Множество всех многочленов P с действительными коэффициентами счётно. И оно является подмножеством $\mathbb{C}[a, b]$
Далее, по теореме Вейерштрасса: Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то существует последовательность многочленов $P_n(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$ сходящаяся к $f(x)$ т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P_n(x)$ с номером n зависящим от ε такой, что $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
сразу для всех x из сегмента $[a, b]$
Иными словами, непрерывную на сегменте функцию можно равномерно на этом сегменте приблизить многочленом с наперед заданной точностью ε .
Множество функций $f(x)$(т.е всё мн-во) является замыканием для P $\blacksquare$

1.2.17

1.3 Полные метрические пространства

1.3.1

1.3.2

1.3.3 Пусть последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к непрерывной на $[a, b]$ функции $x(t)$ в смысле метрики $\rho(x, y)\sqrt{\int\limits_a^b [x(t) - y(t)]^2 \mathrm{d}t}$. Показать на примере, что такая сходимость не влечет сходимости в метрике $\mathbb{C}[a, b]$

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t)$, задаваемых следующим образом:
$\begin{cases} x_n(a) = 1 \\ x_n(t) = 0, \frac{1}{n} \leq t \leq b \end{cases}$
На участке от a до $\frac{1}{n}$ функция представляет собой прямую
Видно, что при $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b x_n(t) \mathrm{d}t = 0$ (равно как и предел интеграла от квадрата функции)
То есть функция сходится в метрике ρ к функции $x(t) = 0$
В метрике $\mathbb{C}[a, b]$, где расстояние задается как $\rho(x, y) \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$, расстояние от каждой из $x_n(t)$ до $x(t)$ равно 1, т.е. последовательность не сходится к этой функции

1.3.4

1.3.5 Показать полноту метрического пространства

3.5.

$$X = \{ x : x = (x_1, x_2, x_3 \ldots) ;\ x_1, x_2 \ldots \in \mathbb{R} \}$$

$$X = \mathbb{R}^n$$

$$\rho(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

$$\mathbb{R}^n_{max}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : \forall m, n > N : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$\max_{1 \le i \le n} |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall i \in [1; n]\ |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon$$

$$|x^{(m)} - x^{(n)}| < \varepsilon$$

Смотрите ка, мы в E^1.

$x^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{E^1} x^*$ — предел

$$|x^{(m)} - x^*| < \varepsilon$$

Покажем, что $x^* \in (\mathbb{R}^n, \rho)$.

$$|x^{(m)} - x^*| < \varepsilon$$

т.е. $\forall i \in [1; n]\ |x_i^{(m)} - x^*| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ это верно и для максимума

$$\max |x_i^{(m)} - x^*| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ пр-во полное.

1.3.6 Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с метрикой $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, полным?

$|\operatorname{arctg} x_n - \operatorname{arctg} x_m| < \varepsilon$, $\quad \varphi_n = \operatorname{arctg} x_n$, $\quad |\varphi_n - \varphi_m| < \varepsilon$ — последовательность фундаментальна в $\mathbb{E}^1$

По критерию Коши $\varphi_n \to \varphi$. Предположим, что $x_n \to x$. Если $\varphi = \operatorname{arctg} x$, то $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ Но если $\varphi_n \to \frac{\pi}{2}$, то предела нет, т.е. пространство неполное

1.3.7 Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с метрикой $\rho(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$, полным?

Рассмотрим фундаментальную последовательность x_n, т.е. $\operatorname{arctg} |x_n - x_m| < \varepsilon$

$|x_n - x_m| < \operatorname{tg} \varepsilon$ — последовательность фундаментальна в $\mathbb{E}^1$

По критерию Коши существует предел: $|x_n - x| \to 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} |x_n - x| \to 0$ — последовательность имеет предел в заданной метрике, пространство полное ■

1.3.8

1.3.9 Дано: $\mathbb{Q}$ со стандартной метрикой $\rho = |x - y|$. Доказать, что $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ является фундаментальной, но не имеет предела.

Решение. Эта последовательность стремится к e, которое не лежит в этом пространстве, оно иррациональное.

На всякий случай, фундаментальность:

Последовательность называется фундаментальной, если $\lim\limits_{m,n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$

$(1 + \frac{1}{n})^n - (1 + \frac{1}{m})^m)$

При стремлении к бесконечности все дроби в биномиальном разложении уйдут в 0, а разность единиц тоже 0.

1.3.10

1.4 Пополнение метрических пространств

1.4.1

1.4.2

1.4.3 Показать, что функция $f(x) = x \cdot \chi(x)$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$ и ее интеграл равен $\frac{1}{2}$

Рассмотрим функцию $\chi(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Q} \\ 1, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ По свойству 1 интеграла Лебега он сохраняет значение при изменении значения функции на множестве меры нуль (счетном). Заменив во всех рациональных числах $x \cdot \chi(x)$ на x, получим $x \cdot \chi(x) \to x$ на всем отрезке. От этой функции существует интеграл Римана, а значит, и интеграл Лебега, причем они равны $\int\limits_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

1.5 Отображения метрических пространств

1.5.1 Непрерывны ли функционалы на $\mathbb{C}[a,b]$

5.1. Непр-ть функционалов. $C[a,b]$

а) $f(x) = x(a)$

$|f(x) - f(y)| = |x(a) - y(a)| \le \rho_C(x,y)$

$\delta = \varepsilon$, тогда $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f — непр-й.

б) $f(x) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

$|f(x) - f(y)| = |\max|x(t)| - \max|y(t)|| \le$

$\le \rho(x,y)$.

$\Rightarrow f$ — непр-й.

в) $f(x) = \max x(t)$

$|f(x) - f(y)| = |\max x(t) - \max y(t)| =$

$= |x(t_1) - y(t_2)| \le \rho(x,y)$

$\Rightarrow f$ непр-й.

г) $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$.

$|f(x) - f(y)| = \left|\int_a^b x(t)\,dt - \int_a^b y(t)\,dt\right| =$

$= \left|\int_a^b [x(t) - y(t)]\,dt\right| \le \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt \le$

$\le \rho(x,y)\int_a^b dt = \rho(x,y)(b-a)$

$\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$, f непр-й.

д) $f(x) = \begin{cases} 0, & x(t) \text{ хотя бы где-то отр.} \\ 1/2, & x(t) \equiv 0 \\ 1, & x(t) \ge 0, \text{ но не } x(t) \equiv 0. \end{cases}$

$|f(x) - f(y)| \le 1$.

1.5.2 Непрерывны ли на пространстве $\mathbb{D}_1[a,b]$ функционалы

- $f(x) = x(a)$
- $f(x) = \int\limits_a^b \sqrt{1+[x'(x)]^2}\mathrm{d}t$

1.5.3 Непрерывны ли функции $f(x) = \rho(x,A) = \inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$ и $g(x) = \varphi(x,A) = \sup\limits_{y\in A}\rho(x,y)$, где A — множество в метрическом пространстве X?

$f(x)$: Пусть $x, x_1 \in X, y \in A$. Тогда $f(x) \leq \rho(x,y) \leq \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y)$
Перейдя к точной нижней грани справа, получим $f(x) \leq f(x_1) + \rho(x,x_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) - f(x_1) \leq \rho(x,x_1)$.
Проведя аналогичные действия для $f(x_1)$, получим$|f(x) - f(x_1)| \leq \rho(x,x_1)$, из чего и следует непрерывность

1.5.4

1.5.5 Отображение F на $\mathbb{R}_+$ переводит т. x в $1+\frac{1}{x}$. Будет ли оно сжимающим в метрическом пр-ве X со стандартной метрикой $\rho = |x-y|$?

Чтобы отображение было сжимающим - A - отображение (X, ρ_x) в себя. Должно выполняться нер-во $\rho(A(x), A(y)) \leq q\rho(x,y)$, $0 < q < 1$, $A(z) = z$ - неподвижная точка.
Итак, проверяем $\rho(F(x), F(y)) \leq q\rho(x,y)$.
$|(x+\frac{1}{x}) - (y+\frac{1}{y})| = |(x-y+\frac{y-x}{xy}| = |x-y||1-\frac{1}{xy}|$
первый сомножитель - как раз наша метрика, возвращаемся к проверяемому неравенству, а вот второй, который должен быть в роли q, отнюдь не константа, он зависит от xy. Это не сжимающее отображение

1.5.6 **Рассмотрим систему $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$ как операторное уравнение в $\mathbb{E}^n$. Показать, что оператор A, задаваемый правой частью, будет сжимающим, если $\sum\limits_{i-1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$**

гл 1 § 5 №6

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\rho(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2}$$

$$y_i^{(1)} - y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j^{(1)} + b_i) + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_j^{(2)} + b_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})$$

$$(y_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i^{(1)} - y_i^{(2)})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_j^{(1)} - x_j^{(2)})^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

$$\rho(y^{(1)}, y^{(2)}) \leqslant \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

при $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} < 1$ отображение сжимающее

1.5.7

1.6 Компактные метрические пространства

1.6.1

1.6.2 Показать, что множество функций из $\mathbb{C}[a,b]$, выделяемое неравенством $\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| \leq 1$, замкнуто, но не компактно

Множество замкнуто, т.к. $\forall t \in [a,b] \quad |f(x)| \leq 1$ — единичный шар
Если взять функцию такую, что $x(b) = 1, x(b-\delta) = -1,\ \delta \to 0$, то равностепенная непрерывность не соблюдается, множество некомпактно

1.6.3 Доказать, что компактное пространство ограничено

Пусть X — компактное пространство. Предположим, что оно неограничено. Выделим в нем неограниченную последовательность $\{x_k\}$ и ее фундаментальную подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$.
По определению $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 : \quad \forall m, n > N\ |x_{k_n} - x_{k_m}| < \varepsilon$ — подпоследовательность ограничена.
Устремив $m \to \infty$, получим, что исходная последовательность тоже ограничена, что противоречит предположению, т.е. множество X — ограниченное

1.6.4 При каких a, b множество $\{x_n(t) = t^n\}$ компактно в пространстве $\mathbb{C}[a,b]$?

По теореме Арцела, для компактности необходимо доказать равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность.
Ограниченность имеет место при $t \in [-1,1]$: $M = 1$
Липшицевость, а следовательно, и равностепенная непрерывность имеет место при $|t| < 1$
То есть множество компактно при $a, b \in (-1, 1)$

2 Линейные нормированные пространства и линейные операторы

2.1 Основные определения

2.1.1 Доказать бесконечномерность пространства $\mathbb{C}_{L_2}[a,b]$

2.1.2 Множество M в линейном пространстве X называется выпуклым, если оно вместе с любыми своими точками x, y содержит все точки $z = \alpha x + \beta y$ такие, что $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ (отрезок, концами которого являются x и y). Покажите, что любой шар в линейном нормированном пространстве — выпуклое множество

Шар $S_r^{x_0}$ — множество точек x таких, что $\rho(x_0, x) \leq r$
Частный случай при $x_0 = 0$: $\|x\| \leq r$. Поскольку при параллельном переносе расстояния сохраняются ($\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$), будем рассматривать именно этот случай (**прим**. Говорить это не обязательно. Просто берем как данность, что центр шара — в нуле)
Возьмем точки $x, y \in Q$ и точку $z = \alpha x + \beta y$. $\|z\| = \|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\| \leq (\alpha+\beta)r \leq r$ (т.к. $\alpha + \beta = 1$). То есть $z \in S_r$, множество выпуклое.

2.1.3

2.1.4 $B = e_1, e_2, ..., e_n$ - базис n-мерного линейного пр-ва X. Каждый элемент имеет единственное разложение $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Доказать, что формулы $\|x\|_I = \max\limits_{1\leq j\leq n} |\alpha_j|$ и $\|x\|_{II} = \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_j|$ определяют нормы в этом пр-ве

Для этого нам надо проверить аксиомы нормы.
1)$\|x\| \geq 0$ и, если $\|x\| = 0$, то $x = \overline{o}$
Неотрицательность очевидна, там везде модули.
Если норма равна 0, т.е сумма коэффициентов равна 0, то это нулевой вектор — единственный, который раскладывается по базису с нулевым координатами 2)$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|$
$x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i e_i$
$\|\lambda x\|_I = \max\limits_{1\leq j\leq n} |\lambda\alpha_j|$
$\|\lambda x\|_{II} = \sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda\alpha_j|$
Модуль произведения равен произведению модулей, поэтому λ - константу мы можем преспокойненько вынести и из максимума, и из суммы.
3)$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
При сложении векторов, разложенных по базису склаываются их коэффициенты.
$x + y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2 + .. = (\alpha_1 + \alpha_2)e_1 + ...$
$\max\limits_{1\leq j,i\leq n} |\alpha_j + \alpha_i| \leq \max\limits_{1\leq j\leq n} |\alpha_j| + \max\limits_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|$ Модуль суммы меньше суммы модулей, это очевидно.
$\sum\limits_{j,i=1}^{n} |\alpha_j + \alpha_i| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_j| + \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_i|$
Аналогично и здесь можно перейти к покомпонентному неравенству.

2.1.5 Доказать, что нормы $\|x\|_I = \max\limits_{1 \le j \le n} |a_j|$ и $\|x\|_{II} = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_j|$ эквивалентны

$\|x\|_I \le \|x\|_{II}$, т.к. в сумму входит и максимальный по модулю элемент. Но при этом $\|x\|_{II} \le n \cdot \max\limits_{1 \le j \le n} |a_j|$ (равенство достигается, если все элементы равны по модулю)
То есть $\|x\|_I \le \|x\|_{II} \le n \cdot \|x\|_I$ — нормы эквивалентны

2.2 Линейные операторы

2.2.1

2.2.2

2.2.3

2.2.4

2.2.5

2.2.6 Найти норму оператора A, действующего на каждый элемент $x = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[1, 2]$ по формуле $Ax = t^2 \cdot x$

2.2.7 Найти норму оператора A, действующего на каждый элемент $x = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[0, 1]$ по формуле $Ax = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t, s)x(s)\mathrm{d}s$, если ядро этого оператора имеет вид $\mathcal{K}(t, s) = t \cdot s$

Оператор Ax — интегральный оператор Фредгольма. Его норма вычисляется по формуле $\|A\| \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |\mathcal{K}(t, s)|\mathrm{d}s = \max\limits_{t\in[0,1]} \int\limits_0^1 |ts|\mathrm{d}s$. Видно, что максимум достигается при $t = 1$: $\|A\| \leq \int\limits_0^1 s\mathrm{d}s = \frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

2.2.8

2.2.9 Доказать линейность и найти норму функционала, действующего на элементы $x = (x_1...x_n...)$ пространства l_2

$f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$

Линейность.

$f(\alpha x + \beta y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha x_k + \beta y_k}{k} = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}$

Норма.

$\|f(x)\| = \max \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right|$

По неравенству Коши-Буняковского для l_2:

$\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right|^2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)$

$\|f(x)\| = \max \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \right| = max \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{k}|^2 \right)} \sqrt{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)}$

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\frac{1}{k}|^2 \right) = \frac{\pi^2}{6}$

Правая часть -как раз метрика в l_2

Теперь нам надо посмотреть, где норма будет достигаться, но это будет отнюдь не на единичном шаре, т.к ряд 1/n вообще будет расходиться.

Равенство в неравенство Коши-Буняковского достигается, когда векторы коллинеарны

Это значит, что $x_k = \lambda \cdot \frac{1}{k}$ — именно при этом условии норма достигается

Из приравнивания ряда к единице выводим, что эта $\lambda = \frac{6}{\pi^2}$

2.2.10 Доказать линейность и оценить норму функционала $f(x) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\mathrm{d}t$ в пространстве $\mathbb{C}[0,1]$

1. $f(\alpha x + \beta y) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \alpha x(t)\mathrm{d}t + \beta y(t) - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \alpha x(t)\mathrm{d}t + \beta y(t)\mathrm{d}t =$
$$= \alpha \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\mathrm{d}t \right) + \beta \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} y(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(t)\mathrm{d}t \right) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
2. $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$
$$|f(x)| = \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x(t)\mathrm{d}t \right| + \left| \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x(t)\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

2.2.11