Раздел 4. Линейные уравнения с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве

Лекция 11 Линейные уравнения с произвольным компактным оператором в гильбертовом пространстве.

Уравнения первого рода.

Начнём с рассмотрения уравнений первого рода вида

$$Ax = y$$

(разумеется, с тем же успехом можно было бы рассмотреть, как в прошлом разделе, уравнение $-Ax = y$, чтобы в дальнейшем включить это уравнение в семейство уравнений вида $\lambda x - Ax = y$, но мы не будем этого делать). Оператор A считаем действующим из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2.

1. Операторы в конечномерных пространствах.

   Пусть, для определённости, $A : E^n \to E^m$ (все другие конечномерные вещественные пространства со скалярным произведением им изоморфны). Оператор задаётся матрицей $m \times n$, которую мы будем называть той же буквой A, с элементами a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$: если

   $$y = Ax\,, \quad x \in E^n\,, \quad y \in E^m\,,$$

   то

   $$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

   Ранг матрицы равен $r \le \min(m, n)$. Ядро оператора является $n-r$-мерным подпространством в E^n, его размерность называют числом нулей оператора. Образ оператора – линейная оболочка столбцов матрицы A, r-мерное подпространство в E^m, его коразмерность $m - r$ называют дефектом оператора. Если $m \ne n$, то по крайней мере одно из этих значений (число нулей или дефект, их общее название – индексы дефекта) отлично от нуля.

   Ортогональное дополнение к образу оператора – это ортогональное дополнение к системе столбцов матрицы A, т.е. множество решений системы уравнений

   $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

   которая в матричном виде может быть записана как

   $$A^t z = o_n\,,$$

где o_n – нулевой вектор пространства E^n. Поскольку матрица A^t представляет сопряжённый оператор A^* (вспомните, почему это так), отсюда следует, что ортогональное дополнение к образу A совпадает с ядром A^*, а дефект A с числом нулей A^* (и наоборот, число нулей A с дефектом A^*).

Уравнение

$$Ax = y$$

разрешимо тогда и только тогда, когда y принадлежит образу оператора – линейной оболочке его столбцов. Для этого необходимо и достаточно, чтобы элемент y был ортогонален ортогональному дополнению к образу оператора, т.е. ядру сопряжённого: $\forall z \in KerA^* : (y, z) = 0$. Оператор A нормально разрешим, решение (когда оно существует) определено с точностью до произвольного слагаемого, принадлежащего $KerA$, т.е. решения операторного уравнения (иными словами, системы линейных алгебраических уравнений)

$$Ah = o_m\,.$$

Замечание. При построениях мы использовали понятия, относящиеся к пространствам со скалярным произведениям, однако разрешимость систем линейных алгебраических уравнений никак не связана с наличием или отсутствием скалярного произведения. Соответственно, полученные результаты можно переформулировать на чисто алгебраическом языке: в частности, условие равенства нулю сумм вида $\sum_{i=1}^{n} y_i z_i$ вовсе не обязательно трактовать геометрически, как ортогональность векторов.

Мы можем также считать, что вектор y принадлежит исходному пространству $\mathbb{R}^m$, элементами которого являются вектор-столбцы ("контравариантные векторы"), а z – пространству линейных функционалов (линейных форм) над $\mathbb{R}^m$, элементами которого являются вектор-строки ("ковариантные векторы"), и тогда сумма произведений компонент – это просто действие формы z на вектор y или матричное произведение строки на столбец. Для такой интерпретации нет необходимости не только в эвклидовой структуре (скалярное произведение), но и в метрической, при этом ортогональность понимается в том же смысле, как мы понимали ортогональность элементов ЛНП и сопряжённого к нему.

2. Операторы конечного ранга.

   Оператор конечного ранга – это оператор с конечномерной областью значений. Если $v_1, \ldots, v_n \in H_2$ – базисные элементы образа оператора A, то произвольный элемент вида Ax представляется в виде линейной комбинации этих базисных элементов. Коэффициенты такой линейной комбинации – линейные функционалы от x. Если мы ограничимся рассмотрением ограниченных операторов, то и функционалы также ограничены и по теореме Рисса представляются в виде скалярных произведений x и некоторых элементов $u_1, \ldots, u_n \in H_1$. Таким образом, произвольный ограниченный оператор конечного ранга представляется в виде

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j \, .$$

Обратно, любой оператор такого вида с произвольными наборами векторов $u_1, \ldots, u_n \in H_1$ и $v_1, \ldots, v_n \in H_2$ является оператором конечного ранга, поскольку его образ лежит в линейной оболочке $L\{v\}$ и, возможно, с нею совпадает.

Сопряжённый оператор $A^* : H_2 \to H_1$ имеет вид

$$A^* z = \sum_{j=1}^{n} (z, v_j) u_j \, .$$

Этот факт уже был нами доказан ранее, но давайте повторим доказательство:

$$(Ax, z) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j, z \right) = \sum_{j=1}^{n} (x, u_j)(v_j, z) =$$

$$= \left(x, \sum_{j=1}^{n} u_j (v_j, z) \right) = \left(x, \sum_{j=1}^{n} (z, v_j) u_j \right) = (x, A^* z) \, .$$

Если система $\{v\}$ линейно зависима, число слагаемых можно сократить. Действительно, пусть, для определйнности, n-ый элемент v_n представляется в виде линейной комбинации остальных:

$$v_n = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j v_j \, ,$$

где μ_j – некоторые числа. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{n-1} (x, u_j) v_j + (x, u_n) \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{n-1} (x, u'_j) v_j \, ,$$

где

$$u'_j = u_j + \mu_j u_n \, .$$

Если система $\{u\}$ линейно зависима, число слагаемых также можно сократить. Действительно, пусть, для определйнности, n-ый элемент u_n представляется в виде линейной комбинации остальных:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j u_j \, ,$$

где ν_j – некоторые числа. Тогда

$$Ax = \sum_{j=1}^{n-1}(x, u_j)v_j + \left(x, \sum_{j=1}^{n-1} \nu_j u_j\right) v_n = \sum_{j=1}^{n-1}(x, u_j)v'_j \,,$$

где

$$v'_j = v_j + \nu_j v_n \,.$$

Как мы видим, в этом случае образ оператора A не совпадает с линейной оболочкой $L\{v\}$ и является её подпространством.

Пусть теперь обе системы векторов линейно независимы. Докажем, что в этом случае образ оператора совпадает с $L\{v\}$. Для этого рассмотрим уравнение

$$Ax = y \,,$$

где $y \in L\{v\}$, и докажем её разрешимость. Поскольку система $\{v\}$ линейно независима, элемент y единственным образом представляется в виде линейной комбинации

$$y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \,,$$

где β_j – некоторые числа. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}(x, u_j)v_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j \,,$$

откуда, в силу линейной независимости $\{v\}$, получаем систему уравнений для элемента x:

$$(x, u_j) = \beta_j \,, \quad j = 1, \ldots, n \,.$$

Такая задача была рассмотрена ранее, она разрешима для любых значений $\{\beta_j\}$ и любой линейно независимой системы $\{u\}$, её решение имеет вид

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j + h \,,$$

где α_j – компоненты вектора $\alpha = G^{-1}\beta$, G – матрица Грама с элементами (u_i, u_j), невырожденная в силу линейной независимости $\{u\}$, а $h \in L^{\perp}\{u\}$ – произвольный элемент из ортогонального дополнения к системе $\{u\}$, являющийся решением однородного уравнения

$$Ah = o \,.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $Ax = y$ – принадлежность y линейной оболочке $L\{v\}$ или, в силу её замкнутости, ортогональности y к $L^{\perp}\{v\}$. Элементы ортогонального дополнения $z \in L^{\perp}\{v\}$ определяются условием

$$(z, v_j) = 0\,, \quad j = 1, \dots, n\,,$$

что, в силу линейной независимости $\{u\}$, эквивалентно равенству

$$A^* z = \sum_{j=1}^{n} (z, v_j) u_j = o\,.$$

Оператор A нормально разрешим, его индексы дефекта определяются размерностями пространств $H_{1,2}$ и бесконечны, если эти пространства бесконечномерные.

Замечание. Разумеется, представление для оператора конечного ранга не единственно. Наименьшее число слагаемых, равное рангу операторов достигается тогда, когда система $\{v\}$ линейно независима и образует базис в $Im\,A$. Любой выбор базисных элементов единственным образом определяет разложение элемента Ax по этому базису, поэтому функционалы, определяющие коэффициенты разложения, а также представляющие их по теореме Рисса-Фреше элементы $\{u\}$ определяются уже однозначно. В силу доказанного выше система $\{u\}$ линейно независима, в противном случае ранг оператора был бы меньше числа слагаемых, и система $\{v\}$ не образовывала бы базис образа оператора. Хотя элементы системы $\{u\}$ зависят от выбора базиса $\{v\}$, тем не менее, их линейная оболочка от этого выбора не зависит. Это следует из того факта, что ортогональное дополнение к ней – ядро оператора A. Поэтому, каков бы ни был выбор базиса $\{v\}$, соответствующая система элементов $\{u\}$ также образует некоторый базис в n-мерном подпространстве пространства H_1 – ортогональном дополнении к $Ker\,A$.

Задача. Пусть мы перешли от базиса $\{v\}$ подпространства $Im\,A$ к новому базису $\{v'\}$, и пусть известна матрица перехода. Найдите связь между соответствующими наборами элементов $\{u\}$ и $\{u'\}$ – базисами пространства $Ker^{\perp}A$.

Замечание. Системы $\{v\}$ и $\{u\}$ могут быть одновременно ортогонализованы. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся полярным разложением для оператора конечного ранга

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} s_j (x, e_j) f_j = \sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j\,.$$

Здесь $v_j = \sqrt{s_j} f_j$, $u_j = \sqrt{s_j} e_j$, $\{e\}$ – ортонормированная система, состоящий из собственных элементов оператора A^*A, $\{f\}$ – ортонормированная система, состоящий из собственных элементов оператора AA^*, а s_j – положительные сингулярные числа оператора A. Мы видим, что в этом случае обе системы $\{v\}$ и $\{u\}$ оказываются ортогональными, при этом элементы $\{e\}$ образуют ортонормированный базис подпространства $Ker^{\perp} A \subset H_1$, а $\{f\}$ – ортонормированный базис подпространства $Im\, A \subset H_2$. Разумеется, любая из систем $\{v\}$ или $\{u\}$, но, вообще говоря, только одна из них может быть дополнительно нормирована, если выбрать $v_j = f_j$, $u_j = s_j e_j$ или $v_j = s_j f_j$, $u_j = e_j$.

3. Компактные операторы бесконечного ранга.

   Такие операторы могут быть представлены с помощью полярного разложения
$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (x, e_j) f_j \,,$$
   где $\{e\}$ и $\{f\}$ – ортонормированные системы в H_1 и H_2 соответственно, $\{s\}$ – положительная монотонно невозрастающая бесконечно малая последовательность сингулярных чисел. Сопряжённый оператор A^* задаётся равенством
$$A^* z = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (z, f_j) e_j \,.$$
   Действительно,
$$(Ax, z) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j (x, e_j) f_j, z \right) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (x, e_j)(f_j, z) =$$
$$= \left(x, \sum_{j=1}^{\infty} s_j e_j (f_j, z) \right) = \left(x, \sum_{j=1}^{\infty} s_j (z, f_j) e_j \right) = (x, A^* z)\,.$$
   Образ оператора A – линеал, лежащий в замыкании $[L\{f\}]$ линейной оболочки элементов $\{f\}$, ортогональное дополнение к образу – это ортогональное дополнение $L^{\perp}\{f\}$ к этой системе. Такому ортогональному дополнению принадлежат элементы $z \in H_2$, удовлетворяющие системе уравнений
$$(z, f_j) = 0\,, \quad j = 1, 2, \dots \,,$$
   что эквивалентно одному операторному уравнению
$$A^* z = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (z, f_j) e_j = o\,.$$
   Пусть $y \in [L\{f\}]$, т.е.
$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j \,,$$

где последовательность β_j квадратично суммируема. Рассмотрим уравнение

$$Ax = y\,,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j (x, e_j) f_j = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j\,.$$

В силу ортонормированности системы $\{f\}$ отсюда следует, что

$$s_j(x, e_j) = \beta_j\,, \quad j = 1, 2, \dots\,,$$

т.е.

$$(x, e_j) = \frac{\beta_j}{s_j}\,, \quad j = 1, 2, \dots\,,$$

и тогда решение, если оно существует, представляется в виде

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta_j}{s_j} e_j + h\,,$$

где $h \in L^{\perp}\{e\}$ – произвольное решение однородного уравнения

$$Ah = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (h, e_j) f_j = o\,.$$

Полученная формула при произвольном $h \in KerA$ определяет решение уравнения $Ax = y$ (проверить!) при условии, что $y \in [L\{f\}]$, и, дополнительно, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j / s_j) f_j$ сходится. Последнее условие эквивалентно сходимости числового ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{\beta_j}{s_j} \right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{(y, f_j)}{s_j} \right|^2\,.$$

Это условие определяет то множество элементов $y \in [L\{f\}]$, которое принадлежит образу оператора A, и для которых уравнение
$Ax = y$ разрешимо. Это множество не замкнуто и не совпадает с $[L\{f\}]$ (доказательство такое же, как при рассмотрении уравнения первого рода с симметричным компактным оператором), поэтому оператор A не является нормально разрешимым.

Если система $\{e\}$ полна в H_1, ядро оператора A тривиально, и формула

$$x = A^{-1} y = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(y, f_j)}{s_j} e_j$$

определяет обратный оператор $A^{-1} : H_2 \to H_1$, областью определения которого является образ оператора A.

Утверждение: оператор A^{-1} неограничен (вспомнить доказательство).

Пример: Интегральный оператор Фредгольма A на отрезке $[a,b]$ с гладким ядром является компактным оператором в $L_2[a,b]$. Его образ лежит в пространстве $C[a,b]$ и не может совпадать с $L_2[a,b]$ даже в случае, когда уравнение $Ax=o$ имеет только тривиальное решение, поскольку содержит только гладкие функции.

Уравнения второго рода.

Под уравнениями второго рода мы будем понимать уравнение вида

$$\lambda x - Ax = y\,,$$

где оператор $A : H \to H$ компактен. Эквивалентные формы записи:

$$(\lambda E - A)x = y$$

и

$$\lambda x = Ax + y\,.$$

Обратите внимание, что, в отличие от уравнений первого рода, наличие единичного оператора предполагает совпадение пространств H_1 и H_2.

1. Операторы в конечномерных пространствах.

   Пусть, для определённости, $A : E^n \to E^n$ (все другие конечномерные вещественныепространства со скалярным произведением им изоморфны). Оператор задаётся квадратной матрицей $n \times n$, которую мы будем называть той же буквой A, с элементами a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$. Операторное уравнение

   $$\lambda x - Ax = y$$

   представляется в виде системы линейных алгебраических уравнений

   $$\lambda x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

   или

   $$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{ij} - a_{ij})x_j = y_i\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

   где δ_{ij} – символ Кронекера. Соответствующему ему однородному уравнению

   $$\lambda\hat{x} - A\hat{x} = o$$

   отвечает система

   $$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{ij} - a_{ij})\hat{x}_j = 0\,, \quad i = 1,\ldots,n\,,$$

а сопряжённому однородному уравнению

$$\lambda z - A^* z = o \quad -$$

система

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) z_i = 0\,, \quad j = 1, \ldots, n$$

(суммирование идёт по первому индексу).

Если число λ не является собственным числом мартицы (и оператора) A, то матрица $\lambda E - A$ невырождена, её ранг равен n, неоднородное уравнение имеет единственное решение при произвольном y, а однородные имеют лишь тривиальные решения, индексы дефекта равны нулю.

Если λ является собственным числом A, то матрица $\lambda E - A$ вырождена, её ранг $r < n$, образ оператора – подпространство размерности r, ортогональное дополнение к нему – ядро оператора $\lambda E - A^*$, т.е. собственное подпространство A^*, отвечающее собственному числу λ, имеет размерность $n - r$. Такую же размерность имеет ядро оператора $\lambda E - A$, собственное подпространство оператора A.

Необходимым и достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения $(\lambda E - A)x = y$ является ортогональность правой части всем решениям однородной сопряжённой задачи, т.е. всем элементам собственного подпространства сопряжённого оператора:

$$\forall z \in Ker(\lambda E - A^*) : (y, z) = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = 0\,.$$

Решение неоднородного уравнения, если оно существует, не единственно и определено с точностью до произвольного элемента собственного подпространства оператора A.

Оператор $\lambda E - A$ нормально разрешим, поскольку его образ конечномерен и, тем самым, замкнут.

Замечание. Число различных собственных чисел – корней характеристического уравнения – не превосходит n.

Замечание. В конечномерном случае значение $\lambda = 0$ ничем не отличается по своим свойствам от других чисел (собственным или не собственных).

Замечание (повторение замечания, сделанного при обсуждении уравнений первого рода). При построениях мы использовали понятия, относящиеся к пространствам со скалярным произведениям, однако разрешимость систем линейных алгебраических уравнений никак не связана с наличием или отсутствием скалярного произведения. Соответственно, полученные результаты можно переформулировать на чисто алгебраическом языке: в частности, условие равенства нулю сумм вида $\sum_{i=1}^n y_i z_i$ вовсе не обязательно трактовать геометрически, как ортогональность векторов.

2. Операторы конечного ранга.

Уравнение второго рода для оператора конечного ранга A имеет вид

$$\lambda x = Ax + y = \sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j + y = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i + y$$

(системы $\{u\}$ и $\{v\}$ линейно независимы).

Связанные с ним однородные уравнения для A и A^* имеют вид

$$\lambda \hat{x} = A\hat{x} = \sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i$$

и

$$\lambda z = A^* z = \sum_{i=1}^{n} (x, v_i) u_i = \sum_{j=1}^{n} (x, v_j) u_j$$

(нам будет удобно использовать разные обозначения для индексов суммирования).

Здесь для нас уже будет существенно, что $\lambda \neq 0$.

Начнём с преобразования неоднородного уравнения. Разделив его на λ, получаем:

$$x = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} (x, u_j) v_j + \frac{y}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i + \frac{y}{\lambda}\,.$$

Это равенство позволяет определить структуру решения (если оно существует): элемент x представляется в виде линейной комбинации векторов $\{v\}$ и фиксированного слагаемого y/λ:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j + \frac{y}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i + \frac{y}{\lambda}\,,$$

где коэффициенты $\{\xi\}$ подлежат определению.

Вычислим вектор Ax:

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j + \frac{y}{\lambda}, u_i \right) v_i$$

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i v_i + \frac{y}{\lambda} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j + \frac{y}{\lambda}, u_i \right) v_i + y\,,$$

или, после сокращения,

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i v_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j + \frac{y}{\lambda}, u_i\right) v_i \,.$$

Мы видим, что в обеих частях уравнения стоят лишь линейные комбинации элементов v_i. В силу их линейной независимости, это векторное равенство эквивалентно равенству коэффициентов при всех v_i:

$$\lambda\xi_i = \left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j v_j + \frac{y}{\lambda}, u_i\right) \,, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

или

$$\lambda\xi_i = \sum_{j=1}^{n}\xi_j \left(v_j, u_i\right) + \frac{(y, u_i)}{\lambda} \,, \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

Перенося сумму в левую часть, приводим систему к окончательному виду:

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{ij} - (v_j, u_i))\xi_j = \frac{(y, u_i)}{\lambda} \,, \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

Мы от операторного уравнения в гильбертовом пространстве путём равносильных преобразований пришли к системе алгебраических уравнений для коэффициентов. Любое решение этой системы, если оно существует, определяет вектор x, удовлетворяющий исходному уравнению, и наоборот.

Теперь мы можем воспользоваться результатами, полученными ранее, поскольку структура полученной системы лишь обозначениями отличается от рассмотренной нами ранее.

Если λ не является собственным числом матрицы с матричными элементами $a_{ij} = (v_j, u_i)$, то система однозначно разрешима при любой правой части (т.е. при любом векторе y). Оператор $\lambda E - A$ непрерывно обратим: вектор правых частей системы непрервыно зависит от y, а матрица, обратная к матрице системы, задачт также непрерывный линейный оператор. Число λ принадлежит резольвентному множеству оператора A. В этом случае однородные системы

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{ij} - (v_j, u_i))\hat{\xi}_j = 0 \,, \quad i = 1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda\delta_{ij} - (v_j, u_i))\eta_i = 0 \,, \quad j = 1, \ldots, n$$

имеют лишь тривиальные решения.

Если λ – собственное число указанной матрицы, то однородные системы имеют нетривиальные решения, причём размерности пространств решений совпадают. Неоднородная система в этом случае разрешима не при любых правых частях. Необходимым и достаточным условием разрешимости являнтся выполнение равенства

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}(y,u_i)\eta_i = 0\,,$$

где $\{\eta\}$ – произвольное решение сопряжённой однородной системы. При выполнении условий разрешимости решение неоднородной системы $\{\xi\}$ не единственно и определено с точностью до произвольного решения $\{\hat{\xi}\}$ однородной системы.

Теперь осталось связать это с операторными уравнениями $\lambda\hat{x} = A\hat{x}$ и $\lambda z = A^*z$. Первое из них является частным случаем уравнения $\lambda\hat{x} = A\hat{x} + y$ при $y = o$, поэтому, повторяя все выкладки, получаем, что

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^{n}\hat{\xi}_j v_j\,,$$

где коэффициенты $\hat{\xi}_j$ удовлетворяют приведённой выше однородной системе. Второе же отличается перестановкой векторов $\{u\}$ и $\{v\}$, поэтому

$$z = \sum_{i=1}^{n}\eta_i u_i\,,$$

и коэффициенты η_i удовлетворяют однородной системе с транспонированной матрицей (проведите сами эти преобразования). Но тогда необходимое и достаточное условие разрешимости неоднородной системы после умножения на $\lambda \neq 0$ принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n}(y,u_i)\eta_i = \left(y,\sum_{i=1}^{n}\eta_i u_i\right) = (y,z) = 0\,.$$

Это равенство должно выполняться при произвольном наборе коэффициентов η_i, удовлетворяющих сопряжённой однородной системе, т.е. при произвольном z, удовлетворяющем уравнению $(\lambda E - A^*)z = o$. То, что это условие не только необходимое, но и достаточное, означает нормальную разрешимость оператора $\lambda E - A$ и замкнутость его области значений. Дефект этого оператора конечен и совпадает с числом нулей оператора $\lambda E - A^*$, а тем самым и с числом нулей оператора $\lambda E - A$. Таким образом, собственные подпространства операторов $\lambda E - A$ и $\lambda E - A^*$ при ненулевых λ конечномерны, их размерности совпадают между собой.

При выполнении условия разрешимости решение неоднородного операторного уравнения не единственно и определено с точностью до произвольного слагаемого, принадлежащего собственному подпространству оператора, отвечающему собственному числу λ.

Замечание. Оператор A имеет конечный ранг, но оператор $\lambda E - A$ имеет отнюдь не конечный ранг, тем не менее, нам удалось свести операторное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений порядка n.

Замечание. Число различных собственных собственных чисел оператора ранга n не превосходит n. Размерность собственного подпространства оператора ранга n, отвечающего ненулевому собственному числу, не превосходит n. Сумма размерностей всех собственных подпространств оператора ранга n, отвечающих ненулевым собственным числам, не превосходит n. Ядро оператора конечного ранга в бесконечномерном пространстве бесконечномерно.

Замечание. Спектр оператора конечного ранга состоит из его собственных чисел. В конечномерном пространстве общее их число не превосходит n, при этом нуль может входить, а может и не входить в их число. В бесконечномерном случае число собственных чисел, отличных от нуля, не превосходит ранга оператора, при этом обязательно присутствует нуль – собственное число бесконечной кратности.

3. Компактные операторы бесконечного ранга.

   Рассмотрим уравнение второго рода с компактным оператором бесконечного ранга

$$(\lambda E - A)x = y\,.$$

   Напомним, что такой оператор представляется в виде

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} s_j (x, e_j) f_j\,,$$

   где $\{e\}$ и $\{f\}$ – ортонормированные системы в H, а $\{s\}$ – положительная монотонно невозрастающая бесконечно малая последовательность.

   Зафиксируем $\lambda \neq 0$, тогда найдётся такое значение n, что $s_{n+1} < |\lambda|$. Представим оператор A в виде суммы

$$A = A_n + C_n\,,$$

   где

$$A_n x = \sum_{j=1}^{n} s_j (x, e_j) f_j\,,$$

$$C_n x = \sum_{j=n+1}^{\infty} s_j (x, e_j) f_j\,,$$

A_n – оператор ранга n, а $\|C_n\| = s_{n+1} < |\lambda|$.

Представим наше операторное уравнение в виде

$$\lambda \left(E - \frac{C_n}{\lambda} \right) x - A_n x = y \,.$$

Поскольку

$$\left\| \frac{C_n}{\lambda} \right\| = \left\| \frac{s_{n+1}}{\lambda} \right| < 1 \,,$$

оператор

$$E - \frac{C_n}{\lambda} \,,$$

согласно теореме Банаха, имеет ограниченный обратный. Подействовав этим оператором на левую и правую части уравнения, получаем:

$$\lambda x + \left(E - \frac{C_n}{\lambda} \right)^{-1} A_n x = \left(E - \frac{C_n}{\lambda} \right)^{-1} y \,.$$

Поскольку оператор A_n имеет ранг n, оператор

$$\tilde{A}_n = \left(E - \frac{C_n}{\lambda} \right)^{-1} A_n$$

также имеет ранг n. (Действительно, его образ – результат действия на n-мерное подпространство $Im\, A_n$ непрерывно обратимого оператора $(E - C_n/\lambda)^{-1}$, переводящего линейно независимые элементы в линейно независимые – в частности, базис $Im\, A_n$ в базис $Im\, \tilde{A}_n$.) Поэтому мы можем воспользоваться теми результатами, которые получили при изучении уравнений второго рода с операторами конечного ранга. (Для этого, кстати, не обязательно знать, что оператор $\tilde{A}_n$ имеет ранг в точности n, достаточно, что он конечен.)

Это значит, что если λ не является собственным числом оператора $\tilde{A}_n$, то уравнение однозначно разрешимо при любой правой части. При этом однородные уравнения

$$(\lambda E - \tilde{A}_n)\hat{x} = o$$

и

$$(\lambda E - \tilde{A}_n^*)\tilde{z} = o$$

имеют лишь тривиальные решения.

Замечание. В этом случае $\lambda E - A$ непрерывно обратим как композиция непрерывно обратимых операторов, число λ принедлежит его резольвентному множеству.

Если λ является собственным числом опернатора $\tilde{A}_n$, то уравнение разрешимо не при любой правой части. При этом однородные уравнения имеют нетривиальные решения, размерности собственных подпространств конечны (не превосходят n) и совпадают между собой.

Если уравнение разрешимо, то в этом случае решение не единственно и определено с точностью до произвольного решения уравнения $(\lambda E - \tilde{A}_n)\hat{x} = o$.

Преобразуем это уравнение:

$$(\lambda E - \tilde{A}_n)\hat{x} = \left(\lambda E - \left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right)^{-1} A_n\right)\hat{x} =$$

$$= \left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right)^{-1} \left(\lambda \left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right) - A_n\right)\hat{x} =$$

$$= \left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right)^{-1} (\lambda E - C_n - A_n)\,\hat{x} =$$

$$= \left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right)^{-1} (\lambda E - A)\,\hat{x} = o\,.$$

Поскольку первый сомножитель непрерывно обратим, это уравнение эквивалентно следующему:

$$(\lambda E - A)\,\hat{x} = o\,,$$

то есть $\hat{x}$ – собственный элемент оператора A, отвечающий собственному числу λ.

Необходимое и достаточное условие разрешимости неоднородного уравнения имеет вид

$$\left(\left(E - \frac{C_n}{\lambda}\right)^{-1} y, \tilde{z}\right) = 0\,,$$

или

$$\left(y, \left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right)^{-1} \tilde{z}\right) = 0\,,$$

где $\tilde{z}$ – произвольное решение уравнения $(\lambda E - \tilde{A}_n^*)\tilde{z} = o$.

Обозначим

$$z = \left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right)^{-1} \tilde{z}\,,$$

тогда

$$\tilde{z} = \left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right) z\,,$$

и

$$(\lambda E - \tilde{A}_n^*)\left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right) z = o\,.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$(\lambda E - \tilde{A}_n^*)\left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right) z = \left(\lambda E - A_n^* \left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right)^{-1}\right)\left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right) z =$$

$$= \left(\lambda \left(E - \frac{C_n^*}{\lambda}\right) - A_n^*\right) z = (\lambda E - C_n^* - A_n^*)\, z = (\lambda E - A^*) z = o\,.$$

Это означает, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения является ортогональность правой части ядру сопряжённого оператора $\lambda E - A^*$, т.е. собственному подпространству оператора A^*, отвечающему собственному числу λ. Отсюда следует нормальная разрешимость оператора $\lambda E - A$ и замкнутость его образа.

Утверждение: существует не больше n собственных чисел компактного оператора (с учётом кратности), превосходящих по модулю $n+1$-е сингулярное число. Действительно, все эти числа одновременно являются собственными числами оператора ранга n, а общая кратность ненулевых чисел такого оператора не превосходит n.

Утверждение: у множества собственных чисел компактного оператора не может быть предельных точек, отличных от нуля. Действительно, если бы такая точка была, то вне окрестности нуля, не содержащей эту точку, содержалось бы бесконечное число собственных чисел. В то же время количество сингулярных чисел (с уччтом кратности), расположенных вне этой окрестности, конечно. Пришли к противоречию с доказанным выше утверждением.

Утверждение: ненулевые собственные числа компактного оператора можно занумеровать в порядке невозрастания их модуля. При этом $|\lambda_n| \leq s_n$. Действительно, вне любой окрестности нуля может быть лишь конечное число собственных чисел, которые можно занумеровать указанным способом. Далее можно последовательно уменьшать эту окрестность, при этом новые числа не будут влиять на нумерацию занумерованных ранее. Если стремить радиус окрестности к нулю, каждое ненулевое собственное число на некотором этапе окажется вне окрестности и будет занумеровано. Оценка для $|\lambda_n|$ вытекает из доказанного утверждения: существует не более $n-1$ собственного числа, превосходящего по модулю s_n.

Утверждение: спектр компактного оператора в бесконечномерном пространстве состоит из конечного или счётного набора ненулевых собственных чисел, а также числа нуль (независимо от того, является ли оно собственным числом). Действительно, собственные числа оператора принадлежат его спектру, число нуль также принадлежит спектру компектного оператора, поскольку в бесконечномерном пространстве у компактного оператора не может быть ограниченного обратного (было доказано). В то же время все ненулевые значения, не являющиеся собственными, принадлежат резольвентному множеству, поскольку, как доказано выше, оператор $\lambda E - A$ в этом случае непрерывно обратим.

Таким образом, для операторов в конечномерном пространстве, операторов конечного ранга и компактных операторов в бесконечномерном пространстве уствновлены следующие факты:

1. Неоднородное уравнение второго рода либо однозначно разрешимо при любой правой части, и тогда соответствующее однородное уравнение и сопряжённое к однородному имеют лишь тривиальные решения; либо решение существует не при любой правой части, и тогда однородные уравнения имеют нетривиальные решения.

2. В последнем случае число λ является общим собственным числом операторов A и A^*, при этом размерности соответствующих собственных подпространств конечны и совпадают.

3. Вне круга сколь угодно малого радиуса с центром в нуле может находиться лишь конечное число собственных чисел компактного оператора с учётом кратности.

4. Если λ является собственным числом оператора A, то неоднородное уравнение либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений. В последнем случае разность двух произвольных решений неоднородного уравнения является решением однородного уравнения.

5. Для того, чтобы неоднородное уравнение второго рода имело решения, необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения была ортогональна всем решениям однородного сопряжённого уравнения.

Замечание. Эти факты были для интегральных операторов уствновлены Фредгольмом и обобщены на произвольные компактные операторы Риссом.

Замечание. Операторы с совпадающими конечными индексами дефекта называются фредгольмовыми. Операторы с конечными, но не обязательно совпадающими индексам дефекта называются нётеровыми.