12 семинар

Мы по семинарам отстаем от лекций. Я не помню, когда у нас назначен дополнительный семинар, давайте проведем его на этой неделе.

Переходим к **Конторольным вопросам** по второй теме - линейные операторы.

6.1 Что такое линейный оператор? Привести примеры линейных операторов в пространствах V^3, $\mathbb{R}^n$, P_n. Какой вектор сохраняется при действии любого линейного оператора?

Определение линейного оператора каждый из Вас использовал при решении 5-й и 6-й задач типового расчета, поэтому я не сомневаюсь, что его Вы знаете. Примеры операторов в V^3 можно взять из разных вариантов третьей задачи. В $\mathbb{R}^n$ – из контрольного вопроса 6.3, взяв другие коэффициенты. В P_n – из различных вариантов 5-й задачи или из того же вопроса 6.3. Не забудьте только в первую очередь взять просто оператор дифференцирования. Если Вы хотя бы на одну секунду задумались по поводу последнего вопроса о неподвижном векторе, это тревожный звонок. Возможно, самоизоляция вредит Вашему здоровью. Специалисты предупреждают о раннем развитии деменции)).

6.2 Какие из следующих отображений, действующих на геометрические векторы $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V^3$, являются линейными операторами (векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ фиксированы):

а) $\mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{a}$, $\bar{a} \neq \bar{0}$

Если Вы предполагаете, что отображение не является линейным, старайтесь придумать наиболее простое объяснение этому. В данном случае таким объяснением может служить тот факт, что нулевой вектор обязан, как мы уже поняли в пункте 6.1, переходить в нулевой.

б) $\mathcal{A}(x) = x + a$; $a \neq 0$

Аналогичное соображение (или какое-нибудь другое)позволяет сделать аналогичный вывод.

в) $\mathcal{A}(x) = \alpha x$

Ответ писать не буду в силу его очевидности, отмечу только, что такой оператор называется гомотетией.

г) $\mathcal{A}(x) = (x, a)x$

Конечно, здесь всё плохо. Например, при умножении вектора на число это число вынесется в квадрате.

д) $\mathcal{A}(x) = [x, a]$

Вспомните свойства векторного произведения, и всё Вам станет ясно.

е) $\mathcal{A}(x) = [[x, a], b]$

См. объяснения в пункте д).

ж) $\mathcal{A}(x) = (x, a)a$, $|a| = 1$ (каков геометрический смысл?)

См. третью задачу типового расчета.

з) $\mathcal{A}(x) = (x, x)a$

См. объяснения в пункте г).

и) $\mathcal{A}(x) = (x_1^2, x_3, 0)$

Хоть со сложением, хоть с умножением на число – всё плохо.

к) $\mathcal{A}(x) = (2x_1 - x_3, x_2 + x_3, x_1)$

Линейные операции с координатами дадут линейный оператор. На всякий случай аккуратно проверьте это.

л) $\mathcal{A}(x) = (\sin x_1, \cos x_2, 0)$

Подумать, что здесь всё ок, могут только те, кто считает, что синус суммы равен сумме синусов и синус лямбда икс равен лямбда на синус икс.

м) $\mathcal{A}$ – поворот вокруг оси OZ на угол α.

Какая разница – сложить векторы, а потом повернуть получившийся вектор, или сначала повернуть векторы, а потом получившиеся векторы сложить?

н) $\mathcal{A}(x) = x - (x, a)a,\ |a| = 1$ (каков геометрический смысл?)

См. объяснения в пункте ж).

6.3 Какие из следующих отображений являются линейными операторами в пространстве L:

а) $L = \mathbb{R}^4$; $\mathcal{A}(x) = (x_1 + x_4, x_1 - x_2, 0, x_4 - x_3)$

Можно непосредственно проверить линейность, а можно предварительно записать действие оператора с помощью умножения на матрицу (если сами не сообразите, посмотрите наши семинары – такую задачу мы делали). А затем сослаться на дистрибутивность умножения матриц свойство $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

б) $L = \mathbb{R}^4$; $\mathcal{A}(x) = (x_4 + 1, x_2 - x_3, x_1, 0)$

Всё бы хорошо, да вот затесалась эта странная единица – портит нам статистику. Проще всего посмотреть, куда переходит 1 (как мы уже дважлы делали), но можно и по-другому.

в) $L = \mathcal{L}[\cos t, \sin t]$; $(\mathcal{A}(x))(t) = x'(t)$

Кроме ссылки на линейность операции дифференцирования $((_1u + c_2v)' = c_1u' + c_2v')$, не забудьте проверить, что мы не выходим за пределы $L/$

г) $L = \mathcal{L}[\cos t, \sin t]$; $(\mathcal{A}(x))(t) = x'(t) - x(0)$

См. объяснения в пункте в.

д) $L = P_3$; $(\mathcal{A}(p))(t) = p(t + h) - p(t)$

Здесь h – любое, но фиксированное число (естественно, действительное). Если мозги плохо работают для любого, но фиксированного числа h, подставьте вместо h число $31415926535, 2718281828459045$.

е) $L = P_n$; $(\mathcal{A}(p))(t) = p'(t)$

ж) $L = P_n$; $(\mathcal{A}(p))(t) = tp(t)$

См. объяснения в пункте г.))

з) $L = P_n$; $(\mathcal{A}(p))(t) = p(t) - tp'(t) + t^2p''(t)$

А мы в пятой задаче типового расчета делали и не такое.

и) $L = P$ (пространство всех многочленов; объяснить, почему это линейное пространство); $(\mathcal{A}(p))(t) = tp(t)$

Сравните эту задачу с задачей в пункте ж). Почему ответ в этой задаче отличается от ответа в той?

к) $(\mathcal{A}(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n))(t) = a_0t + \frac{a_1t^2}{2 + \frac{a_2t^3}{3}} + \ldots + \frac{a_nt^{n+1}}{n+1}$

6.4 Что такое матрица линейного оператора в данном базисе? Как она изменится, если поменять местами два базисных вектора? Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ переводит векторы $e_1 = (1,\ 0.\ 0)$, $e_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $e_3 = (0,\ 0,\ 1)$ соответственно в векторы $f_1(1,\ 2,\ 3)$, $f_2 = (3,\ 2,\ 1)$, $f_3 = (6,\ 6,\ 6)$. Какова его матрица в базисе $[e_1,\ e_2,\ e_3]$?

На этот момент Вы уже как минимум трижды искали матрицу оператора (в задачах 3, 4 и 5 типового расчета), так что про первый вопрос ничего не пишу. Поскольку про формулу $A_2 = C^{-1}A_1C$ нас спрашивают в пункте 6.7, сейчас ей пользоваться некорректно. Пусть для простоты мы поменяли местами первый и второй базисные векторы. Теперь в новой матрице первым столбцом служат коэффициенты не первого базисного вектора, а второго, так что первые два столбца нужно поменять местами. Ну и первые две строчки заодно нужно тоже поменять местами. Сообразите сами – маленькие. Про последний вопрос вообще говорить не хочется в силу его простоты.

6.5 Известна матрица оператора в некотором базисе. По какой формуле преобразуются координаты векторов под действием этого оператора?

Надеюсь, про АХи-БАХи все помнят))

Задание на дом – доделать все задачи до последнего в теме Линейные операторы. В Следующий раз разберем сложные вопросы.