Уважаемые студенты!

Сегодня у нас по плану должно состояться занятие, компенсирующее прошедшие и будущие пропуски из-за праздников и пандемии. В каждой группе эти изменения в расписании происходят независимо, а это сбивает общую шеренгу субботних занятий, чего не хотелось бы. Поэтому сегодня я вам высылаю содержание занятия, которое стоит вне общего ряда и относится скорее к уже пройденной тематике, а именно - к теореме Хана-Банаха. Мы с вами займёмся продолжениями линейных ограниченных функционалов в банаховых пространствах с сохранением нормы. Общая формулировка такая: функционал задан на подпространстве Y пространства X, нужно подобрать его расширение на всё пространство так, чтобы норма расширенного функционала на всём пространстве совпадала с нормой исходного функционала на подпространстве. Мы рассмотрим простейший вариант, когда пространство Y одномерное, а пространство X двумерное.

Сначала мы рассмотрим общую задачу о расширении линейного функционала в линейном пространстве, не касаясь вопроса о том, что за норма введена в данном пространстве. В результате мы получим семейство всевозможных расширений. А на втором этапе мы посмотрим, как выбирать из полученного семейства то или те, которые удовлетворяют условию сохранения нормы.

Итак, пусть функционал f задан на одномерном подпространстве Y формулой $f(x) =< x, f >= x_1f_1 + x_2f_2$, где $f_{1,2}$ – заданные числа. Требуется описать все возможные линейные расширения этого функционала на пространство $\mathbb{R}^2$.

Что такое одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$? Это прямая, проходящая через начало координат. Уравнение такой прямой может быть задано одним из нескольких эквивалентных способов. Мы, например, можем задать общее уравнение такой прямой в виде $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$, где $g(x) =< x, g >= x_1g_1 + x_2g_2$ – линейный функционал, $g_{1,2}$ – заданные числа, компоненты вектора нормали. Другой способ – с помощью векторного уравнения прямой, т.е. $Y = \{x = \alpha c\, , \alpha \in \mathbb{R}\}$, где $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ – направляющий вектор. Эти способы эквивалентны, g и c друг из друга получаются поворотом на прямой угол.

Опишем все линейные функционалы $F(x) =< x, F >= x_1F_1 + x_2F_2$, значения которых на Y совпадают со значениями функционала f. Для этого заметим, что разность $F(x) - f(x)$ должна на Y обращаться в нуль. Эта разность также есть линейный функционал, а поскольку Y определяется условием $g(x) = 0$, то все линейные функционалы, обнуляющие Y, пропорциональны g. (Пояснение: пространство линейных функционалов над $\mathbb{R}^2$ двумерно, и если бы какой-либо функционал, линейно независимый с g, обратился бы в нуль на Y, то на Y занулялись бы вообще все линейные функционалы). Таким образом, $F - f = \lambda g$, откуда $F = f + \lambda g$, что даёт нам при $\lambda \in \mathbb{R}$ однопараметрическое семейство расширений функционала f с Y на всё пространство $\mathbb{R}^2$.

Рассмотрим пару примеров.

- Пусть $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 5x_2 = 0\}$, $f(x) = -x_1 + 2x_2$, тогда
$F(x) = -x_1 + 2x_2 + \lambda(3x_1 + 5x_2) = (-1 + 3\lambda)x_1 + (2 + 5\lambda)x_2$

- Пусть $Y = \{x = \alpha(5, -3)\,, \alpha \in \mathbb{R}\}$, $f(x) = -x_1 + 2x_2$, тогда
$g(x) = 3x_1 + 5x_2 = 0$,
$F(x) = -x_1 + 2x_2 + \lambda(3x_1 + 5x_2) = (-1 + 3\lambda)x_1 + (2 + 5\lambda)x_2$

На самом деле это одна и та же задача, но по-разному сформулированная.

Теперь второй этап. Нужно выбрать параметр λ так, чтобы выполнялось равенство $\|F\|_X = \|f\|_Y$. Здесь уже важно, какая норма в пространстве $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$. Выражения для $\|F\|_X$ в стандартных пространствах вы знаете, а для вычисления $\|f\|_Y$ достаточно взять произвольный ненулевой элемент подпространства Y (например, c) и вычислить отношение $|f(c)|/\|c\|$ (для всех прочих элеменов это отношение будет таким же). А дальше решаем уравнение относительно λ.

Можно поступить по-другому. Мы можем не вычислять $\|f\|_Y$, а вместо этого найти такое λ, при котором значение $\|F\|_X$ будет наименьшим. Действительно, для любого расширения $\|F\|_X \geq \|f\|_Y$, а с другой стороны теорема Хана-Банаха нам гарантирует существование расширения, при котором есть равенство. Очевидно, среди всех расширений оно будет давать наименьшее значение $\|F\|_X$.

Рассмотрим примеры. Возьмём те же f и Y, что и раньше, а в качестве X рассмотрим $\mathbb{R}^2_{\max}$, $\mathbb{R}^2_1$ и E^2.

- $X = \mathbb{R}^2_{\max}$, $X^* = \mathbb{R}^2_1$, $\|c\| = \max\{5, 3\} = 5$, $f(c) = -5 - 6 = -11$, $\|f\|_Y = 11/5$, $\|F\| = |-1 + 3\lambda| + |2 + 5\lambda|$. Эта функция от λ зависит кусочно-линейно (график – ломаная), на $\pm\infty$ стремится к $+\infty$ и имеет минимум в одной из точек излома, где какое-то из слагаемых обращается в нуль.
У нас два кандидата: $\lambda = 1/3$, когда $\|F\| = |2 + 5/3| = 11/3$ и $\lambda = -2/5$, при этом $\|F\| = |-1 - 6/5| = 11/5$. Подходит второй вариант, $F(x) = -(11/3)x_1$.

  Замечание. В данном случае решение единственное, но при других значениях входящих в задачу констант ломаная могла бы иметь горизонтальный участок, и тогда было бы бесконечно много расширений, удовлетворяющих условию задачи.

- $X = \mathbb{R}^2_1$, $X^* = \mathbb{R}^2_{\max}$, $\|c\| = 5+3 = 8$, $f(c) = -5-6 = -11$, $\|f\|_Y = 11/8$, $\|F\| = \max\{|-1+3\lambda|, |2+5\lambda|\}$. Эта функция от λ – максимум из двух "птичек", кусочно-линейная (график – ломаная), на $\pm\infty$ стремится к $+\infty$ и имеет минимум в одной из точек излома, где значения сравниваемых функций совпадают: левая "птичка" на восходящей ветви, правая на нисходящей. Решаем улавнение $2 + 5\lambda = 1 - 3\lambda$, откуда $\lambda = -1/8$, $\|F\| = 2-5/8 = 1+3/8 = 11/8$, $F(x) = -(11/8)x_1 + (11/8)x_2$.

- $X = E^2$, $X^* = E^2$, $\|c\|^2 = 5^2 + 3^2 = 34$, $f(c) = -5 - 6 = -11$, $\|f\|_Y = 11/\sqrt{34}$, $\|f\|^2_Y = 121/34$, $\|F\|^2 = (-1 + 3\lambda)^2 + (2 + 5\lambda)^2$ (нам удобнее работать с квадратами норм). Квадратичная функция от λ, график – парабола ветвями вверх, минимум в вершине параболы, которая является стационарной точкой. Приравниваем производную нулю: $2 \cdot 3(-1 + 3\lambda) + 2 \cdot 5(2 + 5\lambda) = 0$, откуда $\lambda = -7/34$, $\|F\|^2 = (-55/34)^2 + (33/34)^2 = 121/34$, $F(x) = -(55/34)x_1 + (33/34)x_2$.

Замечание. Разумеется, возможны и иные подходы к решению задачи, использующие специфику того или иного пространства. Можно было, пользуясь уравнением прямой Y, предварительно преобразовать функционал f, выразив его действие на Y только через одну из координат или через их сумму (разность). А в последнем варианте можно было просто найти проекцию вектора коэффициентов функционала f на направление вектора c.