ЛЕКЦИЯ 14.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Пусть на некотором промежутке $(a;b)$ действительной оси задана весовая функция $\rho(x)\geq 0$. На множестве непрерывных действительных функций введем *скалярное произведение*:

$$(f_1, f_2)=\int_a^b \rho(x) f_1(x) f_2(x)dx. \qquad (1)$$

Определение 1. Две функции $f_1(x),\ f_2(x)$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Говорят, что функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ образуют *ортогональную систему*, если они попарно ортогональны, т.е. $(\varphi_n,\ \varphi_m)=0,\ n\neq m$ ▲

Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система линейно независимых функций. Тогда ее можно ортогонализовать относительно скалярного произведения (1):

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),$$

$$\varphi_2(x)=\psi_2(x)-\frac{(\psi_2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x),$$

....

$$\varphi_n(x)=\psi_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\psi_n,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k(x). \qquad (2)$$

Преобразование (2) называется *процессом ортогонализации Шмидта*.

Лемма. При любом n система многочленов

$$1, x, x^2,..., x^n \qquad (3)$$

линейно независима на заданном отрезке $[a;b]$.

Доказательство: Пусть система (3) линейно зависима. Тогда существуют числа $c_0, c_1, c_2,...., c_n$ не все равные нулю такие, что

$$c_0+c_1x+c_2x^2+....+c_nx^n=0 \quad \forall x\in[a;b].$$

Выберем на отрезке $[a;b]$ $(n+1)$ различных точек:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < b\,.$$

Тогда

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots. + c_n x_1^m = 0 \\ c_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + \ldots. + c_n x_2^m = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 + c_1 x_{n+1} + c_2 x_{n+1}^2 + \ldots. + c_n x_{n+1}^m = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) является однородной системой линейных уравнений относительно $c_0, c_1, c_2, \ldots., c_n$. Ее определителем является *определитель Вандермонда* Δ. Так как все точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ различны, то $\Delta \neq 0$, следовательно, система (4) имеет только нулевое решение $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots. = c_n = 0$. Полученное противоречие означает, что предположение о линейной зависимости системы (3) неверно и эта система линейно независима ■

Процесс ортогонализации системы (3) на различных промежутках числовой оси с различными весовыми функциями приводит к следующим системам классических ортогональных многочленов:

$[a;b]$	$\rho(x)$	Обозначение	Название многочлена
$[-1;1]$	1	$P_n(x)$	Лежандра
$(-\infty;+\infty)$	$e^{-x^2/2}$	$H_n(x)$	Эрмита
$(-1;1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)$	Чебышева
$(0;+\infty)$	$x^\alpha e^{-x},\ \alpha > -1$	$L_n^\alpha(x)$	Лагерра

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная система многочленов, полученная из системы (3) с помощью ортогонализации (2). Укажем ряд общих свойств:

Свойство 1. $p_n(x)$ – многочлен степени n.

Свойство 2. x^k есть линейная комбинация $p_0(x),\ p_1(x),\ldots,p_k(x)$.

Свойство 3. Следующие три формы ортогональности эквивалентны:

(a) $\int\limits_a^b \rho(x)p_n(x)\,p_m(x)dx=0,\ n\neq m,\ n,m=0,1,2,\ldots$

(b) $\int\limits_a^b \rho(x)p_n(x)x^k dx=0,\ \ n=1,2,\ldots,\ k=0,1,\ldots,n-1$

(c) $\int\limits_a^b \rho(x)p_n(x)G_{n-1}(x)dx=0,\ \ n=1,2,\ldots,\ G_{n-1}(x)$ – произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

Доказательство: (a) $\Rightarrow$ (b) Согласно свойству 2

$$x^k=\alpha_0 p_0(x)+\alpha_1 p_1(x)+\ldots+\alpha_k p_k(x),\ k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Следовательно,

$$\left(p_n,x^k\right)=\left(p_n,\alpha_0 p_0+\alpha_1 p_1+\ldots+\alpha_k p_k\right)=$$

$$=\alpha_0\left(p_n,p_0\right)+\alpha_1\left(p_n,p_1\right)+\ldots+\alpha_k\left(p_n,p_k\right)=0.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) импликация очевидна.

(c) $\Rightarrow$ (a) Пусть для определенности $m<n$. Из (c) следует, что $\left(p_n,x^k\right)=0,\ k=0,1,2,\ldots,n-1$. Так как

$$p_m(x)=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_m x^m\ ,$$

то $\left(p_n,p_m\right)=0$.

Свойство 4. На интервале $(a;b)$ функция $p_n(x)$ имеет ровно n различных вещественных корней.

Доказательство: Так как $(p_n,1)=0,\ n=1,2,\ldots$, то $p_n(x)$ меняет знак на интервале $(a;b)$. Следовательно, функция $p_n(x)$ имеет хотя бы один корень на интервале $(a;b)$. Пусть число таких корней $k,\ k<n$. Обозначим их $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_k : a<x_1<x_2<\ldots<x_k<b$ (в каждой точке $x_i\ (i=1,2,\ldots,k)$ многочлен $p_n(x)$ меняет знак). Тогда $p_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)$ не меняет знак на интервале $(a;b)$. Но с другой стороны, если $k<n$, то в силу свойства 3

$$\int_a^b \rho(x)p_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\,dx=0,$$

что возможно лишь в случае, если знак подынтегрального выражения меняется. Поэтому $k\geq n$. Но многочлен $p_n(x)$ не может иметь более n корней. Следовательно, $k=n$.

Свойство 5. Для каждой системы ортогональных многочленов имеет место *формула Родрига*:

$$p_n(x)=\frac{1}{K_n\cdot\rho(x)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\rho(x)q^n(x)\right], \qquad (5)$$

где $K_n=const,\ q(x)$ − фиксированный многочлен, не зависящий от n, $\rho(x)$ – весовая функция ($\rho(x)\geq 0$).

Свойство 6. Каждый многочлен из заданной системы ортогональных многочленов удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+\lambda_n y(x)=0, \qquad (6)$$

где $a(x),\ b(x)$ − многочлены, не зависящие от n, λ_n − числа;

Свойство 7. Для любых трех последовательно взятых ортогональных многочленов из заданной системы функций $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо рекуррентное соотношение вида:

$$p_n(x)=(A_n x+B_n)p_{n-1}(x)+C_n p_{n-2}(x),\ n=2,3,\ldots \qquad (7)$$

A_n, B_n, C_n − некоторые константы.

Доказательство: Выберем число A_n так, чтобы в выражении $p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x)$ уничтожился коэффициент при x^n. Тогда

$$p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x) = D_0 p_0(x) + \ldots + D_{n-1} p_{n-1}(x). \tag{8}$$

Далее, согласно свойству 3

$$(x p_{n-1}, p_k) = (p_{n-1}, x p_k) = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-3$$

Будем умножать обе части (8) скалярно на $p_0,\ p_1, \ldots,\ p_{n-3}$. Получим:

$(D_0 p_0, p_0) = 0 \Rightarrow D_0 = 0$;

$(D_1 p_1, p_1) = 0 \Rightarrow D_1 = 0$;

…………………………;

$(D_{n-3} p_{n-3}, p_{n-3}) = 0 \Rightarrow D_{n-3} = 0$.

Тогда из (8) следует

$$p_n(x) - A_n x p_{n-1}(x) = D_{n-2} p_{n-2}(x) + D_{n-1} p_{n-1}(x),$$

откуда и получаем рекуррентное соотношение (7).

Проиллюстрируем общие свойства ортогональных многочленов на примере ***многочленов Лежандра***, рассмотренных в предыдущей лекции.

1. Формула Родрига (5) для многочленов Лежандра $P_n(x)$ имеет вид:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Здесь $K_n = 2^n n!, \rho(x) = 1,\ q(x) = x^2 - 1.$

2. Многочлен Лежандра $P_n(x)$ является решением дифференциального уравнения вида (6):

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right) y'(x)\right] = -n(n+1) y(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - x^2\right) y''(x) - 2x y'(x) + n(n+1) y(x) = 0, \tag{10}$$

в котором $a(x)=1-x^2,\ b(x)=-2x,\ \lambda_n=n(n+1)$.

3. Для многочленов Лежандра справедливо рекуррентное соотношение вида (7):

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\ n=1,2,\ldots.\Leftrightarrow$$

$$P_n(x)=\frac{(2n-1)}{n}xP_{n-1}(x)-\frac{n-1}{n}P_{n-2}(x),\ n=2,3,\ldots. \qquad (11)$$

Здесь $A_n=\dfrac{2n-1}{n}, B_n=0, C_n=-\dfrac{n-1}{n}$.

4. Свойство ортогональности для многочленов Лежандра имеет вид:

$$(P_n,P_m)=\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ 2/(2n+1),\ m=n.\end{cases}$$

5. Функция

$$W(x,h)=\frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}},x\in[-1;1],\ h\in(-1;1) \qquad (12)$$

является производящей функцией многочленов Лежандра, т.е.

$$W(x,h)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n,\ x\in[-1;1],\ h\in(-1;1). \qquad (13)$$