Занятие 1

1. Доказать, что значения вектор-функций $\forall t \in \mathbb{R}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$
$\vec{x}_1(t) = (\cos t, \sin t, e^{2t})^T$, $\vec{x}_2(t) = (-\sin t, \cos t, 2e^{2t})^T$, $\vec{x}_3(t) = (-\cos t, -\sin t, 4e^{2t})^T$.

2. При каких α вектора $\vec{b}_1 = (1,2,3)^T, \vec{b}_2 = (3,1,-2)^T, \vec{b}_3 = (2,-2,\alpha)^T$ образуют базис положительной ориентации?
Решение
$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix}; \quad \det T = \alpha - 18 - 8 - 6 - 4 - 6\alpha = -36 - 5\alpha > 0, \quad \alpha < -\frac{36}{5}$$

3. Являются ли базисы $\vec{a}_1 = (1,0,1)^T, \vec{a}_2 = (1,0,-1)^T, \vec{a}_3 = (1,1,1)^T$ и $\vec{b}_1 = (-2,0,1)^T, \vec{b}_2 = (2,0,1)^T, \vec{b}_3 = (2,-2,2)^T$ одинаково ориентированными?

4. Найти объем параллелотопа, построенного на векторах $\vec{a}_1 = (1,-2,3,2)^T$, $\vec{a}_2 = (-1,2,3,2)^T$, $\vec{a}_3 = (1,2,-3,2)^T, \vec{a}_4 = (1,2,3,-2)^T$.

5. Найти обобщенное векторное произведение

   a) a) $(3,-4)^T$

   b) b) $(3,2,-1)^T, (-2,5,-1)^T$

   c) c) $(0,0,1,1)^T, (1,0,0,1)^T, (0,1,1,0)^T$

   Решение
$$a) \begin{vmatrix} 3 & e_1 \\ -4 & e_2 \end{vmatrix} = 3e_2 + 4e_1, \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & e_1 \\ 2 & 5 & e_2 \\ -1 & -3 & e_3 \end{vmatrix} = -e_1 + 11e_2 + 19e_3,$$
$$c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & e_2 \\ 1 & 0 & 1 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 & e_4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \\ 1 & 0 & e_4 \end{vmatrix} - e_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-e_2 + e_3 - e_4) - e_1 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

6. Найти координаты точки q в репере $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $p\,(0,1)$, $\vec{a}_1 = (2,1)^T, \vec{a}_2 = (0,3)^T$, если в стандартном репере ее координаты $(3,4)$.

Домашнее задание

1. Найти координаты точки q в репере $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $p(2,3)$, $\vec{a}_1 = (1,1)^T, \vec{a}_2 = (0,2)^T$, если в стандартном репере ее координаты $(0,-3)$.

2. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1,-2,3,3)^T$, $\vec{b} = (2,1,-1,5)^T$, если матрица Грама
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Найти обобщенное векторное произведение a) $(1,-5)^T$, b) $(1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,0,1)^T$.

Занятие 2

Кривая. Длина дуги. Натуральная параметризация.

1. Написать уравнение касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $t_0 = 1$

   a) $\alpha(t) = (t^2, t^3)^T$

   b) $\alpha(t) = (t^2, t^3, 2t)^T$

   c) $\alpha(t) = (t^2, t^3, 2t, t^4)^T$

2. Колесо радиуса r катится по дороге. Найти траекторию точки, находящейся на расстоянии d от его центра.

   Решение. Движение координат центра колеса: $y = r$, $x = vt$. Вращение точки вокруг неподвижного центра: $x = d\cos(\omega t + \varphi)$, $y = d\sin(\omega t + \varphi)$. Чтобы при $t = 0$ обод колеса был в точке $(0, 0)$, положим $\varphi = -\pi/2$. Далее используем соотношение между линейной и угловой скоростью $v = \omega r$ (т.к. катится колесо радусом r) и положим $\omega = 1$.

   [$x = rt - d\sin t$, $y = r - d\cos t$, при $d = r$ эта кривая называется циклоидой]

3. Найти длину одной арки циклоиды. [8r]

   Решение. Циклоида задается вектор-функцией $\alpha(t) = (rt - r\sin(t), r - r\cos(t))^T$, ее производная (вектор скорости) $\dot\alpha(t) = (r - r\cos(t), r\sin(t))^T$. Длина дуги – это интеграл от модуля скорости,

$$l\left[\alpha(t)\right]|_a^b = \int_a^b |\dot\alpha(t)|\, dt, \quad l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = 2r\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\frac{dt}{2} = -4r\cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi} = 8r.$$

4. Найти выражение для длины дуги кривой, заданной

   a) В декартовых координатах, $y = y(x)$.

   b) В полярных координатах, $\rho = \rho(\varphi)$

   Решение.

   a) Линия задается как график функции $y = y(x)$. Параметрическое уравнение $\alpha(x) = (x, y(x))$, $\alpha'(x) = (1, y'(x))$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$.

   b) В полярных координатах кривая задается как график функции $\rho = \rho(\phi)$.
   $\alpha(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $\alpha'(\varphi) = (-\rho\sin\varphi + \rho'\cos\varphi, \rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)$,
   $L = \int_a^b \sqrt{(-\rho\sin(\varphi) + \rho'\cos(\varphi))^2 + (\rho\cos(\varphi) + \rho'\sin(\varphi))^2}d\varphi = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho'^2)}d\varphi$.

5. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

6. Найти натуральную параметризацию окружности радиуса R с центром в т. (0,0). [$\alpha(s) = (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R})^T$]

7. Найти кривую единичной скорости, положительно-эквивалентную цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(\frac{x}{a})$ $\left[\beta(s) = \left(a\ln\left(\frac{s}{a} + \sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}\right), a\sqrt{1 + \frac{s^2}{a^2}}\right)\right]$

   Решение. Параметрическое уравнение $\alpha(x) = \left(x, a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}\right)^T$.

$\alpha'(x) = \left(1, a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)^T = \left(1, \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\right)^T$, $|\alpha'(x)| = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

Длина дуги от точки $x=0$ до т. x_1 $\quad s = \int_0^{x_1} \mathrm{ch}\,\frac{x}{a} dx = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\,\Big|_0^{x_1} = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x_1}{a}$.

Теперь, чтобы получить уравнение кривой единичной скорости, надо в уравнении $\beta(s) = \left(x(s), a\,\mathrm{ch}\,\frac{x(s)}{a}\right)^T$ явно выразить величины, стоящие в правой части, через длину дуги s. Имеем $a\,\mathrm{ch}\,\frac{x(s)}{a} = a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}} = a\sqrt{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}$. Далее,

$s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}) = \frac{a}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, откуда $\frac{2s}{a} = t - \frac{1}{t}$, $t^2 - 2\frac{st}{a} - 1 = 0$. Решаем квадратное уравнение, $e^{x/a} = t = \dfrac{\frac{2s}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{a}\right)^2 + 4}}{2}$, $x = a\ln\left[\frac{s}{a} + \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1}\right]$.

Окончательно получим $\beta(s) = \left(a\ln\left[\frac{s}{a} + \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^2+1}\right],\ a\sqrt{1+\left(\frac{s}{a}\right)^2}\right)$.

Домашнее задание

1. Найти наиболее удаленные от начала координат касательные к астроиде $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)^T$.

2. Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

3. Найти длину одного витка винтовой линии $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$.

4. Найти натуральную параметризацию винтовой линии $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$.

Занятие 3

Касательные. Порядок касания. Кривизна.

1. Под каким углом пересекаются линии $y = \cos x$ и $y = \sin x$? $[\cos\phi = 1/3]$

2. Написать уравнения касательной и нормали к линиям:

   a) $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{3}$

   b) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$

   c) $x^3 + y^3 = 3xy$ в точке $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

3. Найти порядок касания линий $y = \sin(x)$ и $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$ в начале координат. $[k = 3]$

4. Кривая задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Найти кривизну k, указать точки, где кривизна минимальна и максимальна, выписать k_{min} и k_{max}. $[k = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}]$

5. Найти выражения для вычисления кривизны при задании кривой:

   a) в декартовых координатах, т.е. уравнением $y = y(x)$ $[k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}]$.

   b) в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ $[k = \frac{-\ddot{\rho}\rho + 2\dot{\rho}^2 + \rho^2}{(\dot{\rho}^2+\rho^2)^{3/2}}]$.

   Решение.
   Используем формулу для нахождения кривизны k плоской кривой, $k = \dfrac{\det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}$.

   a) Параметрическое уравнение $\alpha(x)^T = (x, y(x))$, $\alpha' = (1, y')^T$, $\alpha'' = (0, y'')^T$, кривизна

   $$k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\sqrt{1^2 + (y^2)'}^3} = \frac{y''}{\sqrt{1 + (y^2)'}^3}.$$

   b) Параметрическое уравнение $\alpha(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin(\varphi))^T$,

   $\alpha'(\varphi) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^T$,

   $\alpha''(\varphi) = (\rho''\cos\varphi - \rho'\sin\varphi - \rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi,\ \rho''\sin\varphi + \rho'\cos\varphi + \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^T$.

   $$\det[\alpha,'\alpha''] = \begin{vmatrix} \rho'\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi) & \rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi \\ \rho'\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi) & \rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho''\rho + 2\rho'^2 + \rho^2$$

   $$|\alpha'| = \sqrt{(\rho'\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi))^2 + (\rho'\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi))^2)} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$$

   $$k = \frac{-\rho''\rho + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

6. Найти кривизну линии $y = \sin x$. Что происходит с центром соприкасающейся окружности при изменении знака кривизны? $[k = \frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}]$

7. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна длине радиус-вектора этой точки $[k = 3\rho/a^2]$.

Домашнее задание

1. Найти уравнение окружности, имеющей с параболой $y = x^2$ в начале координат касание наибольшего порядка. $[x^2 + (y - 1/2)^2 = (1/2)^2]$

2. Найти многочлен $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, имеющий с линией $y = f(x)$ в точке $A(0, f(0))$ касание не менее n-го порядка. $[a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)]$

3. Найти кривизну кривых:

   a) $\alpha(t) = (t^2, t^3)^T$

   b) $\rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$

4. Найти максимальную и минимальную (с учетом знака) кривизну кривой $\alpha(t) = (t, t^3)^T$.

Занятие 4

1. Найти радиус кривизны кривой $y = \ln x$ в точке (1,0), построить соприкасающуюся окружность.

   Решение. Кривизна кривой, заданной уравнением $y = y(x)$: $k(x) = \dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$.
   Находим производные $y' = 1/x$, $y'' = -x^{-2}$. Кривизна
   $k(x) = \dfrac{-x^{-2}}{\left(\sqrt{1+1/x^2}\right)^3}$, $k(1) = \dfrac{-1}{\left(1\sqrt{1+1}\right)^3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, радиус кривизны $R(1) = \dfrac{1}{|k|} = 2\sqrt{2}$.

   Натуральное уравнение кривой. Кривые Безье.

2. Записать параметрические уравнения клотоиды (спирали Корню), описываемой натуральным уравнением $k = as$, проходящей через точку (x_0, y_0), причем в этой точке угол наклона касательной $\theta_0 = 0$. Схематически построить образ кривой, учитывая, что $\int\limits_0^\infty \cos t^2\,dt = \int\limits_0^\infty \sin t^2\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

   Решение.
   $\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(s)ds = \int_0^s k(s)ds = as^2/2$. Далее, $x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^s \cos\theta(s)ds = \int_0^s \cos\frac{as^2}{2}ds$, $y(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^s \sin\theta(s)ds = \int_0^s \sin\frac{as^2}{2}ds$. Последние два интеграла (интегралы Френеля) не выражаются через элементарные функции. С ростом длины дуги растет кривизна, и спираль Корню закручивается все сильнее вокруг точек, которые можно найти, используя приведенные в условии интегралы.

3. Выписать общее уравнение кривой Безье 2-го порядка. Доказать, что для кривых Безье второго порядка касательные в точках P_0 и P_2 пересекаются в точке P_1.

4. Выписать общее уравнение кривой Безье 3-го порядка. Какие опорные точки задают уравнения касательных в точках P_0 и P_3? Выписать направляющие векторы этих касательных.

5. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$, $R_2(5,1)$. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$ так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0?

Домашнее задание

1. Найти радиус кривизны кривой $y^2 = ax$ в точке (0,0), построить соприкасающуюся окружность.

2. Записать натуральное уравнение окружности радиуса 5.

3. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-4,0)$, $P_1(-3,2)$, $P_2(-1,0)$ и $R_0(4,0)$, $R_1(3,2)$, $R_2(1,0)$. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. P_2 и R_2 так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0?

Занятие 5

Особые точки плоских кривых

1. Аккуратно постройте образы следующих кривых на листе клетчатой бумаги. Указать тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках.

   a) $\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T$

   b) $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)^T$

   c) $\alpha(t) = (t^3 + 2, t^2 - 1)^T$

   d) $y^2 = ax^2 + x^3 <=> F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$

   e) $y^2 = x^4 - x^6 <=> F(x, y) = x^4 - x^6 - y^2$

   Решение a). Производная $\dot{\alpha}(t) = (4t^3, 2t - 5t^4)^T$ вектор-функции $\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T$ обращается в ноль при $t = 0$, а значит $\alpha(0) = (0, 0)^T$ – особая точка. Находим следующие две отличные от нуля производные в этой точке:
   $\ddot{\alpha}(t) = (12t^2, 2 - 20t^3)^T$, $\ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T$,
   $\dddot{\alpha}(t) = (24t, -60t^2)^T$,
   $\alpha^{(4)}(t) = (24, -120t)^T$, $\alpha^{(4)}(0) = (24, 0)^T$.
   Это производные 2-го и 4-го порядка, поэтому тип точки $(p, q) = (2, 4)$, p и q четные, а значит $(0, 0)^T$ – точка возврата 2-го рода. Касательный вектор в этой точке задается первой отличной от нуля производной, это $\ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T$, уравнение касательной $x = 0$.

   Решение d). Найдем точки, в которых нарушаются условия теоремы о неявной функции, т.е. $dF = 0$ или $F_x' = F_y' = 0$: $F_x' = 2ax + 3x^2 = 0$, $F_y' = -2y = 0$. Имеем 2 точки, $A(0, 0)$ и $B(-\frac{2}{3}a, 0)$. Проверим, лежат ли эти точки на кривой: $F(0, 0) = 0$, $F(-\frac{2}{3}a, 0) = \frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3 \neq 0$ при $a \neq 0$. Таким образом, A лежит на кривой и является особой точкой, B не лежит на кривой.

   Находим вторые производные в точке $A(0, 0)$: $F_{xx}'' = 2a + 6x = 2a$, $F_{yy}'' = -2$, $F_{xy}'' = 0$. Т.о., второй дифференциал представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a$. Будем искать в т.$A$ направления, в которых d^2F обращается в ноль.
   При $a < 0 => \Delta > 0$, форма положительно или отрицательно определена и в малой окрестности точки A в ноль не обращается, A – изолированная особая точка. При $a > 0 => \Delta < 0$, условие $d^2F = 2a(x - 0)^2 - 2(y - 0)^2 = 2(\sqrt{a}x + y)(\sqrt{a}x - y) = 0$ удовлетворяется при $(\sqrt{a}x \pm y) = 0$ – это уравнения 2-х касательных, A – точка самопересечения (узел). При $a = 0 => \Delta = 0$, условие $d^2F = -2(y - 0)^2 = 0$ задает одну касательную $y = 0$, A – точка возврата 1-го рода (в данном случае; в общем случае $a = 0$ возможна также точка самокасания), поскольку при $a = 0$ имеем $y^2 = x^3$, т.е. $y = \pm x\sqrt{x}$.

   Для построения образов кривых полезно найти точки пересечения с осью Ox, подставив $y = 0$ в $F(x, y) = 0$: $ax^2 + x^3 = 0$, $x^2(a + x) = 0$, точки $x = 0$; $x = -a$ и заметить, что $F(x, -y) = F(x, y)$, а значит, кривая симметрична относительно оси Ox.

2. Кривая Безье 3-го порядка задана своими опорными точками $P_0(-1, 0)$, $P_1(-a, 1)$, $P_2(a, 1)$, $P_3(1, 0)$. При каком значении параметра a кривая имеет особую точку? Указать тип особой точки, построить образ кривой. Схематически построить образ кривой при меньшем и большем значениях параметра.

Решение. Дифференцируем $\alpha(t) = (-1,0)(1-t)^3 + (-a,1)3t(1-t)^2 + (a,1)3t^2(1-t) + (1,0)t^3$ и приравниваем к нулю. Сначала рассмотрим уравнение для y-компонент; a в него не входит, получаем $t = 1/2$. При $t = 1/2$ уравнение для x-компонент дает $a = -1$, особая точка $\alpha(1/2) = (0, 3/4)$. Тип точки $(p,q) = (2,3)$, это точка возврата 1-го рода. При $a < -1$ кривая имеет точку самопересечения.

Домашнее задание

Аккуратно постройте образы следующих кривых на листе клетчатой бумаги. Указать тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках.

1. $\alpha(t) = (4t^2, 3t^2 + 3t)^T$
2. $\alpha(t) = (t^2, t^4 + t^5)^T$
3. $y^2 = -x^2 + x^4$
4. $y^2(a-x) = x^3$ (циссоида)
5. Может ли кубическая кривая Безье иметь точку возврата 2-го рода?

Занятие 6

Кривые в R^3 и R^n

1. Найти векторы τ, ν, β кривой $x = t, y = t^2, z = t^3$ в точке $M(2,4,8)$. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости к кривой в этой точке.
   Решение: $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)^T$, $\dot\alpha(t) = (1, 2t, 3t^2)^T$, $\ddot\alpha(t) = (0, 2, 6t)^T$. Точке M отвечает значение параметра $t = 2$.
   $\tau = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|}$; $\tau(2) = \frac{(1,4,12)}{\sqrt{1+16+144}} = \frac{(1,4,12)}{\sqrt{161}}$
   $$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 4 & 2 & j \\ 12 & 12 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 2 & 2 & j \\ 0 & 12 & k \end{vmatrix} = 24i - 12j + 2k$$
   $\beta = \frac{\dot\alpha\times\ddot\alpha}{|\dot\alpha\times\ddot\alpha|} = \frac{(12,-6,1)}{\sqrt{181}}$, $\nu = \beta \times \tau$.
   Касательная $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$,
   нормальная плоскость $x + 4y + 12z - 114 = 0$,
   соприкасающаяся плоскость $12x - 6y + z - 8 = 0$.

2. Показать, что кривая $x = 1 + 3t + 2t^2, y = 2 - 2t + 5t^2, z = 1 - t^2$ плоская; найти плоскость в которой она лежит.
   Решение:
   $\alpha(t) = (1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2)^T$, $\dot\alpha(t) = (3+4t, -2+10t, -2t)^T$, $\ddot\alpha(t) = (4, 10, -2)^T$.
   $$\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) = \begin{vmatrix} 3+4t & 4 & i \\ -2t+10 & 10 & j \\ -2t & -2 & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & i \\ -2 & 5 & j \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 2(2i + 3j + 19k).$$
   Так как этот вектор (сонаправленный с бинормалью β) не зависит от t, кривая является плоской.
   Выберем любую точку на кривой; $t = 0$ отвечает точка $M(1,2,1)$.
   Кривая лежит в плоскости $2(x-1) + 3(y-2) + 19(z-1) = 0$.

3. Найти все функции $f(t)$ такие, что кривая $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, f(t))^T$ является плоской. [$f' = -f'''$]

4. Найти кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$. [$k = a/(a^2+b^2)$, $\varkappa = b/(a^2+b^2)$]

   Решение
   $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$, $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)^T$, $\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)^T$.
   Далее находим $\begin{vmatrix} i & -a\sin t & -a\cos t \\ j & a\cos t & -a\sin t \\ k & b & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\, i - ab\cos t\, j + a^2\, k$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$.
   Кривизна $k = \dfrac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.
   Чтобы найти кручение, надо посчитать третью производную $\alpha^{(3)}(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)^T$,
   $$\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t \\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = ba^2$$
   Кручение $\varkappa = \dfrac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \dfrac{ba^2}{a^2\left(\sqrt{b^2+a^2}\right)^2} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Еще задачи

1. Найти последний вектор базиса Френе. $\alpha(t) = (t^3, t^2, 2t^2 + t, t^3 + t^2 - 1)^T$.
   $E_4 = \frac{e_1 + e_2 - e_4}{\sqrt{3}}$; кривая лежит в гиперплоскости $\perp E_4$.

2. Найти базисные векторы репера Френе винтовой линии $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)^T$. Проверить, что ν пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а β образует с осью постоянный угол.

Домашнее задание

1. Найти уравнение касательной и соприкасающейся плоскости к кривой $x^2 = 4y, x^3 = 24z$ в точке (6,9,9).

2. Найти кривизну и кручение $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t, z = at$
   Ответ: Кручение $\varkappa = \frac{(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha})}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2} = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$
   Кривизна: $k = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}$.

3. Доказать, что кривая лежит в гиперплоскости, написать уравнение этой гиперплоскости

   a) $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})^T$

   b) $\alpha(t) = (2t^2 + t + 1, 3t^2 - 2t + 75, t^2 - 2t + 4)$ $[P : 4(x - 1) - 5(y - 75) - 7(z - 4) = 0]$