Лекция №16

Особые точки нелинейной автономной системы.

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{1}$$

координаты особых точек определяются из уравнений

$$f_1(p_1, p_2) = 0, \quad f_2(p_1, p_2) = 0.$$

Для исследования особой точки (p_1, p_2) надо перенести в нее начало координат заменой $x_1 = p_1 + y_1$, $x_2 = p_2 + y_2$ и выделить линейные по y_1, y_2 члены, например, с помощью формулы Тейлора. Получается система

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + \varphi_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = cy_1 + dy_2 + \varphi_2(y_1, y_2), \end{cases} \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2} \Bigg|_{\substack{x_1 = p_1 \\ x_2 = p_2}},$$

$$\varphi_1,\, \varphi_2 = o(r), \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \to 0,$$

Замечание. *Условие на φ_i выполнено, если f_1, $f_2 \in C^2$ в (1).*

Теорема. *Если для матрицы A имеем $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$ (а в случае $\lambda_1 = \lambda_2$ еще φ_1, $\varphi_2 = O(r^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, или в (1)*

f_1, $f_2 \in C^2$), то особая точка $(0,0)$ системы (2) имеет тот же тип, что для системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2, \\ \dot{y}_2 = cy_1 + dy_2. \end{cases}$$

При этом сохраняются направления подхода траекторий к особой точке (но прямолинейные траектории могут замениться кривыми), направления закручивания и устойчивость.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и не входит в программу нашего курса.