# ЛЕКЦИИ

## 1. Постулаты классической механики. Принцип относительности Галилея. Состояние механической системы. Принцип детерминированности Ньютона.

Теоретическая механика – наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел. В основе классической механики лежат постулаты:

1) пространство трехмерное, т.е. в любой точке можно ввести 3 линейно-независимых вектора
2) пространство евклидово, т.е. можно ввести скалярное произведение, расстояние, ортогональный базис
3) существует ещё одна координата (независимая переменная, параметр) – время
4) в механике движение рассматривается относительно системы отсчета; система отсчёта состоит из системы координат, часов и выбранного начальный момента времени
5) **принцип относительности Галилея**: механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета, т.е. описывающие их законы динамики одинаковы
6) одинаковость законов природы с математической точки зрения: все физические величины являются ковариантными (при смене базиса пространства изменяются так же, как и базис) скалярами, тензорами, векторами
7) основной характеристикой механической системы является совокупность всех положений и скоростей в данный момент времени; состояние системы – совокупность всех положений и скоростей

Инерциальные системы отсчёта обладают следующими свойствами:

1) все законы природы во все моменты времени одинаковы для всех инерциальных систем отсчёта
2) если система отсчёта двигается относительно данной инерциальной системы отсчёта равномерно и прямолинейно, она тоже инерциальная

**Принцип детерминированности Ньютона**: начальное состояние системы (координаты точек и их скорости в момент $t = 0$) однозначно определяет всё её движение, т.е. её состояние во все последующие моменты времени.

## 2. Кинематика материальной точки. Векторный, координатный, естественный способы описания движения материальной точки. Скорость, ускорение материальной точки. Закон движения. Траектория.

Движение – изменение положения в пространстве в зависимости от времени. Траектория – линия, которую описывает тело в течение движения. Способы задания движения:

1) векторный: $\vec{r}(t)$ – закон движения, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (т.е. скорость направлена по касательной к траектории), $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$
2) координатный: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$
3) естественный: Известны траектория, положение в начальный момент и $S(t)$ – пройдённый путь. $v = \frac{dS}{dt}$

## 3. Равноускоренное движение материальной точки. Вывод закона движения.

Равноускоренное движение – это движение тела, при котором его ускорение постоянно по модулю и направлению (пример: выстрел из пушки под углом к горизонту). Здесь $\bar{a} - const \Rightarrow \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} = \bar{a} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial t} = \bar{v} = \int \bar{a} dt = \overline{v_0} + \bar{a}t, \bar{r} = \overline{r_0} + \overline{v_0}t + \frac{\bar{a}t^2}{2}$ .

## 4. Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Связь линейной и угловой скорости, ускорение при равномерном движении по окружности. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость. Связь линейной и угловой скорости при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси.

$\dot\varphi = \omega$ – **угловая скорость** (скаляр)

$\overrightarrow{l_r} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ – вектор нормали к единичной окружности (радиус-вектор точки)

$\overrightarrow{l_\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ – единичный вектор тангенциального направления

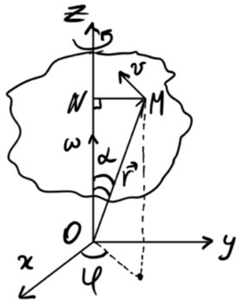
$\vec v = (\dot x, \dot y) = r\dot\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi) = r\dot\varphi\overrightarrow{l_\varphi}$, $v = |\vec v| = r\dot\varphi = r\omega$

$\vec a = (\ddot x, \ddot y)$, $\begin{cases} \ddot x = -r\sin\varphi\,\ddot\varphi - r\cos\varphi\,(\dot\varphi)^2 \\ \ddot y = r\cos\varphi\,\ddot\varphi - r\sin\varphi\,(\dot\varphi)^2 \end{cases}$. $\vec a = r\ddot\varphi\overrightarrow{l_\varphi} - r\dot\varphi\overrightarrow{l_r} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$

$\overrightarrow{a_\tau} = r\ddot\varphi l_\varphi$, $\overrightarrow{a_\tau} = r(\dot\varphi)^2\overrightarrow{l_r} = r\omega^2\overrightarrow{l_r}$, $|\overrightarrow{a_\tau}| = r\ddot\varphi = \frac{dv}{dt}$, $|\overrightarrow{a_\tau}| = r\omega^2$

**Равномерное движение по окружности:** $v = [\vec v] = const$, значит $\dot\varphi = const$ следовательно, $\ddot\varphi = 0$, то есть $\overrightarrow{a_\tau} = 0$. $\overrightarrow{a_\tau}$ показывает, как изменяется скорость, остаётся только $\overrightarrow{a_n}$ направленное по радиусу.

**Лемма о движении с постоянной по величине скоростью:** $\vec a \perp \vec v$. Доказательство: $v = const$ следовательно, $(\vec v, \vec v) = v^2 = const$, $0 = \frac{d}{dt}(\vec v, \vec v) = (\vec a, \vec v) + (\vec v, \vec a) = 2(\vec a, \vec v) = 0$, а значит $\vec a \perp \vec v$, т.к. $\vec a \neq 0$ и $\vec v \neq 0$.




**Вращение абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси:** (абсолютно твёрдое тело – это тело, расстояние между любыми точками которого не меняется со временем) $NM = r\sin\alpha$, $v = \dot\varphi NM = NM\omega = r\omega\sin\alpha$, $|\vec\omega| = \dot\varphi$, $\vec\omega \parallel OZ$, $\vec v \perp OZ$, $\vec v \perp \vec\omega$, $\vec v \perp \vec r$, $\vec v = [\vec\omega, \vec r]$.

**Угловая скорость** при вращении тела вокруг неподвижной оси: $\vec\omega$ – вектор угловой скорости, направленный по оси вращения, и равный по величине $\dot\varphi$. Тогда $\vec v = [\vec\omega, \vec r]$.

**5. Ускорение точки при криволинейном движении в проекции на естественные оси. Тангенциальное направление. Направление главной нормали. Тангенциальное ускорение, нормальное ускорение. Радиус кривизны траектории. Теорема об ускорении точки в проекции на естественные оси. Лемма о движении материальной точки с постоянной скоростью.**

$v = \frac{dS}{dt} = \dot S$. $\vec\tau$ – единичный вектор касательного направления, $\vec v = v\vec\tau$.

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec\tau + v\frac{d\vec\tau}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec n = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$. $\vec n$ – направление главной нормали, единичный вектор, ортогональный тангенциальному направлению. $\vec n \perp \vec\tau$, $\frac{d\vec\tau}{dt} \perp \vec\tau$, $\frac{d\vec\tau}{dt} = k\vec n$, $k = \frac{v}{\rho}$, $\rho$ – радиус кривизны траектории в заданной точке.

**Теорема**: ускорение точки $\vec a = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}$. $\overrightarrow{a_\tau}$ – тангенциальное ускорение ($\overrightarrow{a_\tau} = \frac{dv}{dt}\vec\tau = \ddot S\vec\tau$), $\overrightarrow{a_n}$ – нормальное ускорение ($\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\vec n$).

Движение с постоянной по модулю скоростью называется равномерным.

**6. Задача о движении подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Лемма о производной по времени ортогонального оператора. Теорема об эквивалентности кососимметрического оператора в трехмерном пространстве и векторного умножения ($A\vec r = [\vec w, \vec r]$). Формулы Пуассона для производных по времени ортов координатных осей подвижной системы отсчета.**

$Oxyz$ – неподвижная система отсчёта, а $Ox'y'z'$ - подвижная система отсчёта, и $M$ – фиксированная точка в системе $Ox'y'z'$. $\vec r = \overrightarrow{OM} = x_0\vec{\imath'} + y_0\vec{k'} + z_0\vec{\jmath'}$ в $Ox'y'z'$, и $\vec r = \overrightarrow{OM} = x\vec\imath + y\vec k + z\vec\jmath$ в $Oxyz$.

Две системы координат связаны: $\vec r = O(t)\overrightarrow{r_0}$, где $O(t)$ – ортогональная матрица ($OO^T = E$, т.е. $O^T = O^{-1}$). $\overrightarrow{r_o}$ – координаты точки $M$ в $Oxyz$ в начальный момент времени и постоянное её положение в $x'y'z'$.

Заметим, что $\bar{r} = OO^{-1}r = OO^{T}r$, тогда $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{O}(t)\overrightarrow{r_0} = \dot{O}O^{T}\vec{r}$, $A = \dot{O}O^{T}$, $\vec{v} = A\vec{r}$.

**Теорема**: $A$ – кососимметрическая матрица ($A^{T} = -A$). Доказательство: $A^{T} = \left(\dot{O}O^{T}\right)^{T} = O^{T}\dot{O}$. $A + A^{T} = \dot{O}O^{T} + O^{T}\dot{O} = \frac{d}{dt}(OO^{T}) = \frac{d}{dt}E =$ нулевой матрице.

**Теорема**: кососимметрический оператор $A$ в трёхмерном пространстве – это линейный оператор вектора умножения на фиксированный вектор $\vec{w}$, т.е. $A\vec{r} = [\vec{w}, \vec{r}]\ \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$. $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$. $\begin{matrix} w_3 = -a_{12} \\ w_2 = a_{13} \\ w_1 = -a_{23} \end{matrix}$, значит $A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство: $\vec{r} = (x, y, z)$. $A\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 z - w_3 y \\ w_3 x - w_1 z \\ w_1 y - w_2 x \end{pmatrix}$. $[\vec{w}, \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(w_2 z - w_3 y) + \vec{j}(w_3 x - w_1 z) + \vec{k}(w_1 y - w_2 x)$.

**Следствие 1**: движение подвижной системы отсчёта $Ox'y'z'$ есть последовательность бесконечно малых вращений относительно осей, определяемых вектором $\vec{w}$.

**Следствие 2**: $M$ – произвольная точка в подвижной системе координат $Ox'y'z'$. Если $M$ лежит на $Ox'$, то $\overline{OM} = \overline{\imath'}$ – радиус-вектор точки $M$, из формулы $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = A\vec{r} = [\vec{w}, \vec{r}]$ получаем $\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \left[\vec{w}, \vec{\imath'}\right]$. Выбирая другие положения точки $M$ получим **формулы Пуассона** для производных по времени ортов координатных осей подвижной системы отсчета: $\begin{cases} \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \left[\vec{w}, \vec{\imath'}\right] \\ \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \left[\vec{w}, \vec{\jmath'}\right] \\ \frac{d\vec{k}}{dt} = \left[\vec{w}, \vec{k'}\right] \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{dt} = [\vec{w}, \vec{n}]$

7. **Сложное движение материальной точки. Теорема о сложении скоростей в сложном движении. Определение переносной скорости.**

**Определения**: Абсолютное движение – движение относительно неподвижной системы отсчёта. Относительное движение – движение относительно подвижной системы отсчёта. Абсолютная скорость – скорость относительно неподвижной системы отсчёта. Относительная скорость – скорость относительно подвижной системы отсчёта.

$Oxyz$ – неподвижная система отсчёта, $Ox'y'z'$ – подвижная система отсчёта, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор в неподвижной системе отсчёта, а $\vec{r'} = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор в подвижной системе отсчёта. $\overrightarrow{r_0}$ – вектор начала подвижной системы отсчёта. $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{r'}$.

$\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$. $\overrightarrow{v_{\text{отн}}} = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'}$ ($\overrightarrow{v_{\text{отн}}} \neq \frac{d\vec{r'}}{dt}$, т.к. $\vec{\imath'} = \vec{\imath'}(t), \vec{\jmath'} = \vec{\jmath'}(t), \vec{k'} = \vec{k'}(t)$). $\overline{v_0} = \frac{d\overline{r_0}}{dt} = \dot{x}_0\vec{\imath} + \dot{y}_0\vec{\jmath} + \dot{z}_0\vec{k}$ – скорость точки $O'$ начала координат подвижной системы отсчёта. $\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_0}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}\right) + \frac{d}{dt}\left(x'\overline{\imath'} + y'\overline{\jmath'} + z'\overline{k'}\right) = \left(\dot{x}_0\vec{\imath} + \dot{y}_0\vec{\jmath} + \dot{z}_0\vec{k}\right) + \left(\dot{x}'\overline{\imath'} + \dot{y}'\overline{\jmath'} + \dot{z}'\overline{k'}\right) + \left(x'\frac{d}{dt}\overline{\imath'} + y'\frac{d}{dt}\overline{\jmath'} + z'\frac{d}{dt}\overline{k'}\right) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + x'\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\imath'}\right] + y'\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{\jmath'}\right] + z'\left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{k'}\right] = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \left[\overrightarrow{w}, x'\overline{\imath'} + y'\overline{\jmath'} + z'\overline{k'}\right] = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{r'}\right]$. **Формула сложения скоростей**: $\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \overrightarrow{v_{\text{пер}}}$, $\overrightarrow{v_{\text{пер}}} = \overrightarrow{v_0} + \left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{r'}\right]$. Итог: $\begin{cases} \overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \overrightarrow{v_{\text{пер}}} \\ \overrightarrow{v_{\text{отн}}} = \dot{x}'\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}'\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'} \\ \overrightarrow{v_{\text{пер}}} = \overrightarrow{v_0} + \left[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{r'}\right] \\ \overrightarrow{v_0} = \dot{x}_0\vec{\imath} + \dot{y}_0\vec{\jmath} + \dot{z}_0\vec{k} \end{cases}$, $\overrightarrow{w} = \frac{d\varphi}{dt}$, $\overrightarrow{r'} = x'\overline{\imath'} + y'\overline{\jmath'} + z'\overline{k'}$

Переносная скорость ($\overrightarrow{v_{\text{пер}}}$) – скорость той точки подвижной системы, которая в данный момент совпадает с материальной точкой.

**Следствие 1**: если $\overrightarrow{v_{\text{отн}}} = 0$, т.е. точка $\text{M}$ покоится в подвижной системе отсчёта, то абсолютная скорость совпадает с переносной скоростью.

**Следствие 2**: переносная скорость одинакова для всех точек подвижной системы отчёта, т.е. $\left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right] = 0\ \forall \overrightarrow{r'} \Rightarrow \vec{w} = 0 \Rightarrow$ подвижная система отсчёта не вращается, а движется поступательно (т.е. все точки движутся с одной скоростью).

**8. Теорема Кориолиса о сложении ускорений в сложном движении материальной точки. Две формулы для осестремительного ускорения.**

$\overrightarrow{a_{\text{абс}}} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_0} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \frac{d}{dt}\left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]$. Здесь $\overrightarrow{v_0} = \dot{x}_0\vec{\imath} + \dot{y}_0\vec{\jmath} + \dot{z}_0\vec{k} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{v_0}}{dt} = \ddot{x}_0\vec{\imath} + \ddot{y}_0\vec{\jmath} + \ddot{z}_0\vec{k} = \overrightarrow{a_0}$ – ускорение точки $O'$. $\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{\text{отн}}} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}\overrightarrow{k'}\right) = \left(\ddot{x}\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'}\right) + \left(\dot{x}\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right) = \left(\ddot{x}\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'}\right) + \left(\dot{x}\left[\vec{w}, \overrightarrow{\imath'}\right] + \dot{y}\left[\vec{w}, \overrightarrow{\jmath'}\right] + \dot{z}\left[\vec{w}, \overrightarrow{k'}\right]\right) = \left(\ddot{x}\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'}\right) + \left[\vec{w}, \dot{x}\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}\overrightarrow{k'}\right] = \overrightarrow{a_{\text{отн}}} + [\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}]$, где $\overrightarrow{a_{\text{отн}}} = \ddot{x}\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'}$ – ускорение в относительной системе отсчёта. $\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ – **угловое ускорение**. $\frac{d}{dt}\left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right] = \left[\frac{d}{dt}\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right] + \left[\vec{w}, \frac{d}{dt}\overrightarrow{r'}\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + \left[\vec{w}, \frac{d}{dt}\left(x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}\right)\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + \left[\vec{w}, \dot{x}'\overrightarrow{\imath'} + \dot{y}'\overrightarrow{\jmath'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'}\right] + \left[\vec{w}, x'\frac{d}{dt}\overrightarrow{\imath'} + y'\frac{d}{dt}\overrightarrow{\jmath'} + z'\frac{d}{dt}\overrightarrow{k'}\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + [\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}] + \left[\vec{w}, x'\left[\vec{w}, \overrightarrow{\imath'}\right] + y'\left[\vec{w}, \overrightarrow{\jmath'}\right] + z'\left[\vec{w}, \overrightarrow{k'}\right]\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + [\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right]$, где $\overrightarrow{r'}$ - координаты точки в подвижной системе.

$\overrightarrow{a_{\text{абс}}} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{a_{\text{отн}}} + [\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}] + \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right] + [\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}] = \overrightarrow{a_{\text{отн}}} + \overrightarrow{a_{\text{пер}}} + \overrightarrow{a_{\text{кор}}}$ – закон сложения ускорений. Здесь $\overrightarrow{a_{\text{пер}}} = \overrightarrow{a_0} + \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right] = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{a_{\text{вр}}} + \overrightarrow{a_{\text{ос}}}$ – переносное ускорение, $\overrightarrow{a_{\text{вр}}} = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right]$ - вращательное ускорение, $\overrightarrow{a_{\text{ос}}} = \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right]$ - осестремительное ускорение (направлено к оси вращения), $\overrightarrow{a_{\text{кор}}} = 2[\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}]$ – Кориолисово ускорение.

Итог: $\begin{cases} \overrightarrow{a_{\text{абс}}} = \overrightarrow{a_{\text{отн}}} + \overrightarrow{a_{\text{пер}}} + \overrightarrow{a_{\text{кор}}} \\ \overrightarrow{a_{\text{отн}}} = \ddot{x}\overrightarrow{\imath'} + \ddot{y}\overrightarrow{\jmath'} + \ddot{z}\overrightarrow{k'} = \overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{a_\tau} \\ \overrightarrow{a_{\text{пер}}} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{a_{\text{вр}}} + \overrightarrow{a_{\text{ос}}} \\ \overrightarrow{a_0} = \ddot{x}_0\vec{\imath} + \ddot{y}_0\vec{\jmath} + \ddot{z}_0\vec{k} \\ \overrightarrow{a_{\text{вр}}} = \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{r'}\right] \\ \overrightarrow{a_{\text{ос}}} = \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{r'}\right]\right] \\ \overrightarrow{a_{\text{кор}}} = 2[\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}] \end{cases}$ $, \vec{w} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{w}}{dt}, \overrightarrow{r'} = x'\overrightarrow{\imath'} + y'\overrightarrow{\jmath'} + z'\overrightarrow{k'}$

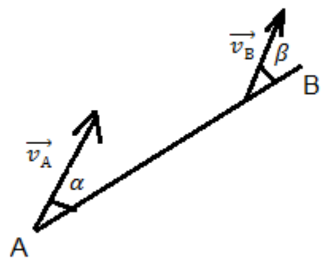
**9. Абсолютно твердое тело. Число степеней свободы абсолютно твердого тела. Теоремы о распределении скоростей и ускорений при движении абсолютно твердого тела.**

Пусть система состоит из $n$ материальных точек, тогда у этой системы $3n$ параметров. Ограничения, которые накладываются на положение материальных точек, называются связями. При наличии связей, количество независимых параметров $q_1, \dots, q_k$ (обобщённые координаты) меньше $3m$ и координаты любой точки задаются функцией $\overline{r_\imath} = (t, q_1, \dots, q_k), i = \overline{1, n}$ (в такой системе $k$ степеней свободы).

Абсолютно твердое тело – механическая система, расстояние между точками которой не меняется в процессе движения. Степеней свободы твердого тела 6 (3 поступательных вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

Пусть известны положение, скорость и ускорение точки А, хотим найти эти параметры для точки В абсолютно твёрдого тела. $\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \overrightarrow{v_{\text{отн}}} + \overrightarrow{v_{\text{пер}}}$ , $\overrightarrow{v_{\text{пер}}} = \overrightarrow{v_{\text{A}}} + \left[\vec{w}, \vec{r'}\right]$ , $\overrightarrow{v_{\text{отнB}}} = 0$, т.к. подвижная система жестко связана с твердым телом $\overrightarrow{v_{\text{абс}}} = \overrightarrow{v_{\text{B}}} = \overrightarrow{v_{\text{пер}}} = \overrightarrow{v_{\text{A}}} + \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]$. Получили $\overrightarrow{v_{\text{B}}} = \overrightarrow{v_{\text{A}}} + \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]$ – **формула распределения скоростей** в абсолютно твердом теле. $\overrightarrow{a_{\text{абс}}} = \overrightarrow{a_{\text{отн}}} + \overrightarrow{a_{\text{пер}}} + \overrightarrow{a_{\text{кор}}}$ , $\overrightarrow{a_{\text{пер}}} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{r'}\right] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \vec{r'}\right]\right] + \overrightarrow{a_0}$ , $\overrightarrow{a_{\text{кор}}} = 2\left[\vec{w}, \overrightarrow{v_{\text{отн}}}\right]$ , $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{w}}{dt}$. Подвижная система жестко связана с твердым телом, поэтому $\overrightarrow{a_{\text{отн}}} = 0$ , $\overrightarrow{v_{\text{отн}}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{a_{\text{кор}}} = 0$ и $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_{\text{абс}}} = \overrightarrow{a_{\text{пер}}} = \overrightarrow{a_{\text{A}}} + \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{\text{AB}}\right] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]\right]$. Получили $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_{\text{A}}} + \left[\vec{\varepsilon}, \overrightarrow{\text{AB}}\right] + \left[\vec{w}, \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]\right]$ – **формула распределения ускорений** в твердом теле.

**Следствия из формулы распределения скоростей при движении абсолютно твердого тела. Частные случаи движения абсолютно твердого тела. Поступательное движение. Вращение вокруг неподвижной оси. Плоскопараллельное движение.**

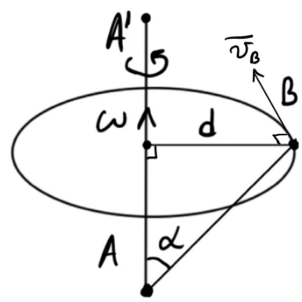



1) В каждый момент времени проекции скоростей любых 2 точек на прямую, проходящую через эти точки, равны между собой ($v_{\text{A}} cos\alpha = v_B cos\beta$). Док-во: : $\overrightarrow{v_{\text{B}}} = \overrightarrow{v_{\text{A}}} + \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]$, А - полное $\left(\overrightarrow{v_{\text{B}}}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) = \left(\overrightarrow{v_A}, \overrightarrow{\text{AB}}\right) + \left(\left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right], \overrightarrow{\text{AB}}\right)$ (где $\left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right] = 0$) , т.е. $v_B AB cos\beta = v_{\text{A}} AB cos\alpha \Rightarrow v_{\text{A}} cos\alpha = v_B cos\beta$, если бы проекции не совпадали, то расстояние не сохранялось бы.

2) Чтобы найти скорость в любой точке твердого тела, достаточно знать скорости 3 точек, не лежащих на одной прямой.

3) Если скорости 3 точек, не лежащих на одной прямой равны, то движение поступательно.

**Поступательное движение**: вращение отсутствует ($\vec{w} = 0$), тогда $\overrightarrow{v_{\text{B}}} = \overrightarrow{v_{\text{A}}} = \overrightarrow{v(t)}$ (все точки движутся с одной скоростью, описывают одну и ту же траекторию) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , $\frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \vec{v}$; $\overrightarrow{r_{\text{A}}} = \int_0^t \overrightarrow{v(t)}dt + \overrightarrow{r_{\text{A}}}(0)$; $\overrightarrow{r_B} = \int_0^t \overrightarrow{v(t)}dt + \overrightarrow{r_B}(0) \Rightarrow$ с точностью до постоянного вектора траектории совпадают, $\overrightarrow{r_{\text{A}}} - \overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_{\text{A}}}(0) - \overrightarrow{r_B}(0)$ (одна траектория получается из другой параллельным переносом).



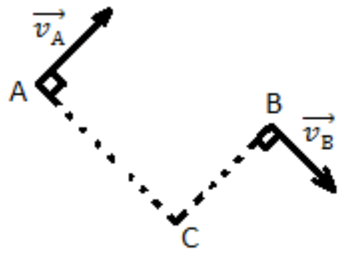

**Вращение вокруг неподвижной оси**: $\overrightarrow{v_{\text{A}}} = 0$, $\overrightarrow{v_{\text{B}}} = \left[\vec{w}, \overrightarrow{\text{AB}}\right]$. Точка В движется по окружности на пересечении сфер с центрами А' и А, эта окружность перпендикулярна АА'. $\overrightarrow{v_{\text{B}}}$ касательна к этой окружности. $\overrightarrow{v_{\text{B}}} = \vec{w} AB sin\alpha = wd$ – формула распределения скоростей.

Плоскопараллельное движение – это движение, при котором все скорости параллельны одной плоскости в любой момент времени.

**10. Свойства плоскопараллельного движения. Теоремы о скоростях точек отрезка. Теорема о существовании мгновенного центра скоростей.**

При плоскопараллельном движении А всегда $\in \pi_1$ , В всегда $\in \pi_2$ , АВ всегда движется параллельно самому себе; $AB - const$; $\overrightarrow{A(t)B(t)} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ точки А и В описывают движение траектории в параллельных плоскостях, т.е. для плоскопараллельного движения достаточно решить плоскую задачу на какой-то плоскости, т.к. на всех плоскостях одно и то же.

Точка С называется **мгновенным центром скоростей** (МЦС), если $\overrightarrow{v_{\text{C}}}$ = 0 (но это не покоящаяся точка). Если существуют 2 точки, скорости которых различны, то ∃! точка $C$ : $\overrightarrow{v_{\text{C}}} = 0$ (С - центр скоростей). Если существуют 2 точки, скорости которых равны ($\overrightarrow{v_{\text{A}}} = \overrightarrow{v_{\text{B}}}$),




то это движение поступательно. При поступательном движении нет центра скоростей. Докажем (от противного), что C – центр скоростей в данный момент, т.е. $\overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} = 0$. Пусть $\overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} \neq 0$: знаем, что проекции $\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}}$ и $\overrightarrow{v_{\mathrm{C}}}$ на AC и проекции $\overrightarrow{v_{\mathrm{C}}}$ и $\overrightarrow{v_{\mathrm{B}}}$ на BC попарно равны между собой и численно равны нулю $\Rightarrow \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} = 0$. Пришли к противоречию $\Rightarrow \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} = 0$. Такая точка единственна, т.к. если есть вторая точка, скорость которой равна нулю, то тело покоится.

$\overrightarrow{v_{\mathrm{A}}} = \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} + [\vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}], \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} = 0$; $|\overrightarrow{v_A}| = |[\vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}]| = wCA$

$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} + [\vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{C}B}], \overrightarrow{v_{\mathrm{C}}} = 0$; $|\overrightarrow{v_B}| = |[\vec{w}, \overrightarrow{\mathrm{C}B}]| = wCB$

Отсюда $w = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC}$

**11. Аксиомы механики (законы Ньютона). Две основные задачи динамики. Движение со связями. Виды связей: голономные (геометрические), кинематические, стационарные, нестационарные, неосвобождающие, освобождающие. Примеры. Принцип освобождения от связей. Силы реакции связей.**

Динамика изучает факторы, влияющие на движение. Движение зависит от окружающей среды. Характеристики этой среды – силы. Сила ($\vec{F}$) – количественная характеристика способности окружающей среды или других тел изменять движение механической системы. Инерция – свойство системы сопротивляться другим телам. Масса ($m$) – мера инерции (количественная характеристика).

**Аксиомы динамики** (законы Ньютона):

1) существует класс систем отсчёта, называемых инерциальными, в которых материальная точка, если на неё не действуют силы, движется равномерно и прямолинейно или покоится.
2) $m\vec{a} = \vec{F}$ или $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ – основной закон динамики (для материальной точки)
3) два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и разыми по направлению (действие равно противодействию)

Если движению тела (или материальной точки) ничего не препятствует, то движение тела называют свободным (точка может принимать любое положение и любую скорость). В противном случае оно называется несвободным (т.е. когда есть ограничения на положение или скорость). Связи – ограничения на движение системы.

Виды связей:

1) геометрическая – ограничения только на положение, на скорость ограничений нет. Например, $f(x, y, z) = 0$, $f(x, y, z) < 0$. Пример: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ - точка на поверхности сферы
2) кинематическая – ограничены положение и скорость. Пример: $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$, $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) < 0$
3) стационарные (не зависят от времени) $f(x, y, z) = 0$ и нестационарные $f(t, x, y, z) = 0$. Пример нестационарной связи: $R = vt$, $x^2 + y^2 + z^2 = v^2t^2$
4) не освобождающие задаются в виде уравнений, а освобождающие в виде неравенств. Пример освобождающей связи: надуваемый шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq v^2t^2$.

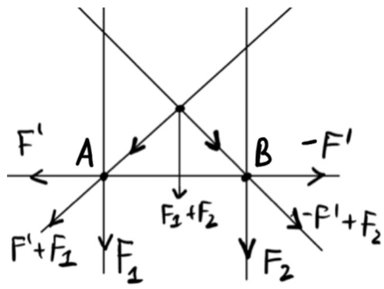
Реакция связей пытается изменить движение системы, т.е. не дать движению быть свободным. **Принцип освобождения**: действие связей можно изменить соответствующими силами, которые называются реакциями связей, и счесть механическую систему свободной, на которую действуют дополнительные силы – силы реакции связей. Примеры: сила натяжения, сила реакции опоры (идеальные связи, т.к. направлены перпендикулярно), сила трения (тангенциальная составляющая неидеальной связи).

**12. Скользящие векторы. Правила сложения скользящих векторов. Сложение параллельных и антипараллельных скользящих векторов.**

Векторы в механике бывают трёх типов:

1) свободные векторы – имеют длину и направление, т.е. они не зависят от точки приложения. Сложение – перенос и правило параллелограмма
2) закреплённые векторы – характеризуются величиной, направлением и точкой приложения. Сложение – можем складывать только векторы с одной точкой приложения. Примеры: вектор скорости, вектор ускорения, радиус-вектор
3) скользящие векторы – векторы которые можно переносить вдоль линии действия. Характеризуются линией действия и величиной

**Сложение**: если векторы имею общую линию действия, складываем модули. Если линии действия пересекаются, то складываем векторы в точке пересечения, получая новые модуль и прямую. Если линии действия $F_1, F_2$ не пересекаются, векторы сонаправлены: возьмём два противоположных вектора $F'$, равных по величине, с линией действия $AB$ ($AB$ пересекает данные линии в точках $A$ и $B$).




**13. Определение центра масс системы материальных точек. Формулы для координат центра масс при непрерывном распределении массы по объему, по поверхности, по кривой.**

Центр масс – это геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы материальных точек как целого. Для двух точек центр масс находится по формуле $\vec{r_c} = \frac{\vec{r_a}F_a+\vec{r_b}F_b}{F_a+F_b}, F_i = m_i a_i$ (силы могут быть как положительные, так и отрицательные). По индукции можно доказать общую формулу: $\overline{r_R} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{r_i}F_i}{\sum_{i=1}^{n}F_i}$. При непрерывном распределении массы по кривой $\overline{r_R} = \frac{\int_\gamma \bar{r}dm}{\int_\gamma dm}, dm = \rho dl$ ($dm = \rho ds$ для поверхности). При непрерывном распределении массы по объёму, $\overline{r_R} = \frac{\iint_S \rho(x,y)\bar{r}ds}{\iint_S \rho(x,y)ds}$.

**14. Методы вычисления центра масс составных тел и тел, обладающих симметрией: метод группировки, метод симметрии, метод отрицательных масс. Центр масс треугольника, дуги окружности, сектора.**

Метод группировки: из формулы $\vec{r_c} = \frac{\vec{r_a}F_a+\vec{r_b}F_b}{F_a+F_b}$ при равных ускорениях всех точек тела можно получить соотношение $\vec{r_c} = \frac{\vec{r_a}m_a+\vec{r_b}m_b}{m_a+m_b}$.

Метод симметрии: при равномерном распределении массы по площади (объёму), центр масс тела совпадает с точкой пересечения всех его осей симметрии, например точкой пересечения диагоналей для параллелограмма, точкой пересечения медиан для треугольника, центром окружности.

Метод отрицательных масс: если тело «дырявое», можно считать его массу отрицательной, и находить массу всего тела методом группировки для «целого» тела и «дырки».

Найдём центр масс дуги окружности. Из принципа симметрии, он расположен на оси абсцисс. По формуле из предыдущего пункта, $x_{\text{ц.м.}} = \frac{\int_{AB} xdl}{\int_{AB} dl} = \left\{\begin{matrix} x = rcos(\varphi) \\ y = rsin(\varphi) \end{matrix}, dl = rd\varphi\right\} = \frac{2R^2\int_0^\alpha \cos(\varphi)d\varphi}{2R\int_0^\alpha d\varphi} = \frac{2R^2 sin(\varphi)|_0^\alpha}{2R\varphi|_0^\alpha} = \frac{Rsin(\alpha)}{\alpha}$. Для сектора результат похожий: $x_{\text{ц.м.}} = \frac{\iint_S xds}{\iint_S ds} = \left\{\begin{matrix} x = rcos(\varphi) \\ y = rsin(\varphi) \end{matrix}, ds = rdrd\varphi\right\} = \frac{2\int_0^R r^2dr\int_0^\alpha \cos(\varphi)d\varphi}{2\int_0^R r^2dr\int_0^\alpha d\varphi} = \frac{\frac{r^3}{3}|_0^R \sin(\alpha)}{\frac{r^2}{2}|_0^R \alpha} = \frac{2R^3\sin(\alpha)}{3R^2\alpha} = \frac{2Rsin(\alpha)}{3\alpha}$.

15. **Динамика материальной точки. Определение импульса (количества движения). Основной закон динамики для материальной точки (2-й закон Ньютона). Определение кинетического момента (момента импульса), момента силы. Теорема об изменении кинетического момента. Теорема о сохранении кинетического момента. Случай центральной силы.**

В динамике есть 2 основные задачи: по известным силам определить движение (траекторию, скорость, положение) – прямая задачи, и найти силы зная движение – обратная задача.

**Основной закон динамики** (2-й закон Ньютона): $m\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}\Leftrightarrow\frac{dm\bar{v}}{dt}=\bar{F}\Leftrightarrow dm\bar{v}=\bar{F}dt$. Количественной характеристикой движения является импульс $\bar{p}=m\bar{v}$ ($\bar{F}dt$ – элементарный импульс силы). Тогда 2-й закон Ньютона можно записать в интегральной форме: $\overline{p_2}-\overline{p_1}=\int_{t_1}^{t_2}dm\bar{v}=\int_{t_1}^{t_2}\bar{F}dt$. Если $\bar{F}=0$, то получим закон сохранения импульса: $\bar{p}-const$.

16. **Определение кинетической энергии, работы силы на перемещении. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной форме.**

$\bar{K}=[\bar{r},m\bar{v}]$ – кинетический момент материальной точки (момент количества движения), $\bar{B}=[\bar{r},\ \bar{A}]$ – момент вектора $\bar{A}$, $\bar{M}=[\bar{r},\bar{F}]$ – момент силы. Теорема (об изменении кинетического момента): производная по времени от момента количества движения точки относительно какого-то начала отсчёта равна моменту действующей силы относительно того же центра. Доказательство: $\frac{d\bar{K}}{dt}=\frac{d}{dt}[\bar{r},m\bar{v}]=\left[\frac{d\bar{r}}{dt},m\bar{v}\right]+\left[\bar{r},\frac{dm\bar{v}}{dt}\right]=[\bar{v},m\bar{v}]+[\bar{r},\bar{F}]=[\bar{r},\bar{F}]=\bar{M}$. Следствие: $\bar{M}=0\Rightarrow\bar{K}-const$ (движение плоское), это возможно если $\bar{F}=0$ или $\bar{r}\parallel\bar{F}$ (такая сила $\bar{F}$ называется центральной).

$T=\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия материальной точки. $\frac{dT}{dt}=\frac{d\frac{mv^2}{2}}{dt}=\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}=\frac{m}{2}\frac{d(\bar{v},\bar{v})}{dt}=m\left(\bar{v},\frac{d\bar{v}}{dt}\right)=\left(\bar{v},m\frac{d\bar{v}}{dt}\right)=(\bar{v},\bar{F})=\left(\frac{d\bar{r}}{dt},\bar{F}\right)\Rightarrow\frac{dT}{dt}=(\bar{v},\bar{F})$ – скорость изменения кинетической энергии. Дифференциальная форма теоремы об изменении кинетической энергии: $dT=(\bar{F},d\bar{r})$. $dA=(\bar{F},d\bar{r})=F_xdx+F_ydy+F_zdz,\bar{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$ – элементарная работа силы $\bar{F}$ по перемещению $d\bar{r}$. В интегральной форме получаем: $T_2-T_1=\int_\gamma dT=\int_\gamma dA=\int_\gamma F_xdx+F_ydy+F_zdz=A$ – полная работа силы $\bar{F}$ вдоль траектории $\gamma$ (приращение кинетической энергии материальной точки за конечное время равно работе силы вдоль траектории точки).

17. **Понятие силового поля. Условие потенциальности силового поля. Потенциальная энергия (потенциал поля). Закон сохранения энергии. Связь работы и потенциальной энергии в потенциальном силовом поле.**

Пусть $\bar{F}(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ не зависит от скорости, т.е. в каждой точке пространства задан вектор $\bar{F}$, связанный не с материальной точкой, а с точкой пространства. В этом случае говорят, что задано силовое поле. Пример: $m\bar{g}$ – силовое поле силы тяжести. Силовое поле называется потенциальным, если существует скалярная функция, такая что силовое поле равно минус градиенту этой функции ($\exists U(t,x,y,z):\bar{F}=-grad(U)=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)$). Такая функция называется потенциалом поля или потенциальной энергией. Заметим, что $dA=F_xdx+F_ydy+F_zdz=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$ (если поле стационарно, т.е. $F,U$ не зависят от времени, $dA=-dU$) , тогда $T_2-T_1=-\int_\gamma dU=U_1-U_2\Rightarrow U_1+T_1=U_2+T_2\Rightarrow U+T=h-const$ – полная энергия системы. Если поле потенциальное, то работа не зависит от траектории, а зависит только от начальной и конечной точек (работа по замкнутому контуру равна нулю).

Теорема (о сохранении механической энергии): если силы, действующие на математическую точку, потенциальные, и потенциал не зависит от времени, то при движении полная механическая энергия сохраняется. Пример потенциальной силы: поле силы тяжести: $F_y = m\bar{g} \Rightarrow U = -mgy$ – потенциал гравитационного поля. Предположим, что есть какая-то сила, хотим определить, что она потенциальная, т.е. $\bar{F} = (F_x, F_y, F_z)$ и $\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$. Требуется проверить, выполняются ли равенства: $\begin{cases} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y \partial z} \end{cases}$, если они выполняются, то можно найти $U$ путём интегрирования.

**18. Модель гармонического осциллятора (груз на пружинке). Закон движения. Модель математического маятника. Вывод уравнения движения.**

$F_x = -k(x - l_0)$, где $l_0$ – длина пружины в не деформированном состоянии, $k$ – коэффициент жёсткости, тогда $U = \frac{k(x-l_0)^2}{2}$. $F = -k(x - l_0) \Leftrightarrow m\ddot{x} = -k(x - l_0) \Leftrightarrow \{\xi = x - l_0\} \Leftrightarrow m\ddot{\xi} = -k\xi \Leftrightarrow m\ddot{\xi} + k\xi = 0$ – уравнение гармонического осциллятора.

Математический маятник: сила натяжения – связь, задаётся уравнением $x^2 + y^2 = l^2$. Запишем основной закон динамики (в векторном виде): $m\frac{d^2\bar{r}}{dt} = m\bar{g} + \bar{T}$, проектируя на координатные оси получим $\begin{cases} m\ddot{x} = -Tsin(\varphi) \\ m\ddot{y} = mg - Tcos(\varphi) \end{cases}$. Введём полярные координаты: $\begin{cases} x = lsin(\varphi) \\ y = lcos(\varphi) \end{cases}$, $\begin{cases} \dot{x} = lcos(\varphi)\dot{\varphi} \\ \dot{y} = -lsin(\varphi)\dot{\varphi} \end{cases}$, $\begin{cases} \ddot{x} = lcos(\varphi)\ddot{\varphi} - lsin(\varphi)(\dot{\varphi})^2 \\ \ddot{y} = -lsin(\varphi)\ddot{\varphi} - lcos(\varphi)(\dot{\varphi})^2 \end{cases}$, подставив эти значения в предыдущую систему и исключив Т получим уравнение математического маятника $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$, $T = -\frac{m\ddot{x}}{in(\varphi)} = ml((\dot{\varphi})^2 - ctg(\varphi)\ddot{\varphi})$.