

Асташова И.В.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Конспект лекций для студентов 2 курса
механико-математического факультета
МГУ им. М.В.Ломоносова
(2-й поток)

2 семестр 2014-2015 уч.год

Москва 2015

Содержание

1	Системы дифференциальных уравнений	3
1.1	Системы дифференциальных уравнений первого порядка.	3
1.1.1	Сведение уравнения n -ого порядка к нормальной системе первого порядка . .	4
1.1.2	Сведение системы в нормальной форме к уравнению n -ого порядка	4
1.1.3	Первые интегралы.	5
1.2	Линейные системы с постоянными коэффициентами.	7
1.2.1	Экспонента матрицы.	7
1.2.2	Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.	10
1.2.3	Решение линейных систем с правой частью специального вида.	11
1.2.4	Метод вариации произвольных постоянных.	12
1.3	Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка.	12
1.3.1	Определитель Вронского.	13
1.3.2	Общее решение линейной системы дифференциальных уравнений.	15
1.4	Фазовые портреты.	16
1.4.1	Фазовая плоскость.	16
1.4.2	Свойства траекторий.	17
1.4.3	Классификация положений равновесия линейной однородной автономной системы.	18
1.4.4	Области зависимости типа особой точки от коэффициентов системы.	25
1.4.5	Фазовый портрет автономной нелинейной системы.	25
1.4.6	Предельные циклы.	26
1.4.7	Уравнение Ньютона для уравнения $\ddot{x} + f(x) = 0$	27
1.5	Устойчивость решения	28
1.5.1	Простейшие типы точек покоя (положений равновесия)	30
1.5.2	Устойчивость по первому приближению.	31
1.5.3	Основные теоремы об устойчивости	35
1.6	Системы дифференциальных уравнений с параметром	37
1.6.1	Производная системы по начальным условиям.	38
2	Уравнения с частными производными первого порядка	38
2.1	Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.	39
2.2	Общее решение линейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка.	40
2.3	Общее решение квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка.	40
2.4	Постановка задачи Коши	42

1 Системы дифференциальных уравнений

1.1 Системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим систему из m дифференциальных уравнений первого порядка от n переменных:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, \\ \dots \\ F_m(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0. \end{cases}$$

Определение 1.1. Система дифференциальных уравнений первого порядка называется **системой в нормальной форме (нормальной системой)**, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), и система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Векторная запись: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$.

Определение 1.2. Система дифференциальных уравнений первого порядка называется **линейной системой**, если она имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{cases}$$

Векторная запись: $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$.

Определение 1.3. Система дифференциальных уравнений первого порядка называется **автономной**, если она имеет вид:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Определение 1.4. **Решением системы** дифференциальных уравнений первого порядка $\mathbf{x} = \varphi(t)$ ($x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$) называется любой набор дифференцируемых функций, обращающий все уравнения системы в тождество.

Нормой вектора: $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Определение 1.5. **Задачей Коши** для системы дифференциальных уравнений первого порядка называется задача отыскания решения системы, удовлетворяющего начальным условиям:

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_1^0, \\ \dots \\ x_n(t_0) = x_n^0. \end{cases}$$

Определение 1.6. Непрерывно дифференцируемая функция $\psi(t, x_1, \dots, x_n)$ называется **первым интегралом** системы, если она постоянна вдоль решений системы (если $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ — решение системы, то $\psi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{const}$).

Определение 1.7. Система n независимых первых интегралов образует **общий интеграл** системы

$$\begin{cases} \psi_1(t, x_1, \dots, x_n) = c_1, \\ \psi_2(t, x_1, \dots, x_n) = c_2, \\ \dots \\ \psi_n(t, x_1, \dots, x_n) = c_n. \end{cases}$$

Замечание 1.1. Все теоремы для линейных уравнений переносятся и на случай линейных систем.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.1. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны в D . Тогда решение задачи Коши (1.1) существует и единственно на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$, где $h = \frac{r}{\sqrt{M^2 + 1}}$, а r — радиус шара S с центром в (\mathbf{x}^0, t_0) , целиком лежащего в области D , $M = \sup_S \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\|$.

Теорема 1.2. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ определена и непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, и частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны в D . Пусть существуют непрерывные на $(\alpha, \beta) \ni t_0$ функции $a(t)$ и $b(t)$, такие, что:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \leq a(t) \|\mathbf{x}\| + b(t).$$

Тогда решение задачи Коши (1.1) продолжается на весь интервал (α, β) , $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

1.1.1 Сведение уравнения n -ого порядка к нормальной системе первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n -ого порядка:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}\right).$$

Введем переменные x_1, x_2, \dots, x_n следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ x_2 &= x', \\ x_3 &= x'' = (x')' = x'_2, \\ &\dots \\ x_n &= x^{(n-1)} = (x^{(n-2)})' = x'_{n-1}. \end{aligned}$$

Тогда $x'_n = (x^{(n-1)})' = x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$.

Таким образом, рассматриваемое уравнение можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = x_3, \\ \dots \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

1.1.2 Сведение системы в нормальной форме к уравнению n -ого порядка

Для сведения нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

к обыкновенному дифференциальному уравнению необходимо продифференцировать первое уравнение $n - 1$ раз, считая x_i функциями от t , заменяя их производные функциями из системы, например:

$$x''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \dot{x}_n = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n = \Phi_2(t, x_1, \dots, x_n).$$

Продолжая дифференцирование, мы получим систему

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_1'' &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} f_n = \Phi_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_1''' &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} f_n = \Phi_3(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots & \\ x_1^{(n-1)} &= \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_n} f_n = \Phi_{n-1}(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.2)$$

и уравнение, вынесенное отдельно:

$$x_1^{(n)} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n} f_n = \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Будем считать, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда нелинейная система (1.2) разрешима относительно x_2, \dots, x_n , при этом они выражаются через $t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$. Эти выражения необходимо подставить в уравнение (1.3), тогда получим дифференциальное уравнение n -го порядка

$$x_1^{(n)} = \Phi_n(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}). \quad (1.4)$$

Осталось показать, что, x_1 — решение (1.4), и что x_1, \dots, x_n , найденные из системы (1.2), составляют решение исходной системы.

Имеем $\dot{x}_1 = f_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}(\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) &= 0, \\ \dots & \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_1}(\dot{x}_1 - f_1) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) &= 0. \end{aligned}$$

Так как $\dot{x}_1 = f_1$, то первое слагаемое в каждой строке равно нулю. Так как определитель получившейся относительно $\dot{x}_i - f_i$ системы не равен нулю, то

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1, \\ \dot{x}_2 = f_2, \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n. \end{cases}$$

1.1.3 Первые интегралы.

Определение 1.8. *Первым интегралом* нормальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1.5)$$

называется такая функция $v(t, x_1, \dots, x_n)$, что она постоянна вдоль любого решения этой системы. Выражение $v(t, x_1, \dots, x_n) = c$ называется **общим интегралом системы**.

Замечание 1.2. Если $v(t, x_1, \dots, x_n)$ — первый интеграл системы (1.5), то его производная вдоль решения равняется нулю, то есть

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} \dot{x}_n = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Справедливо и обратное, то есть функция, удовлетворяющая такому условию, является первым интегралом системы.

Пример 1.1.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2 - t}{y}, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Необходимо выяснить, являются ли функции $\varphi_1 = t^2 + 2xy$, $\varphi_2 = x^2 - ty$ первыми интегралами системы.

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 2t + 2(x^2 - t)\frac{y}{y} + 2x(-x) = 0,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -y - 2x\left(\frac{x^2 - t}{y}\right) \neq 0.$$

Ответ: φ_1 — первый интеграл, φ_2 — не является первым интегралом.

Физический смысл первого интеграла.

Первый интеграл выражает закон сохранения. (Например, закон сохранения энергии, количества движения и т. д.)

Геометрический смысл первого интеграла.

Пусть существует $i : \frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$. Тогда уравнение $v(t, x_1, \dots, x_n) = c$ определяет поверхность в \mathbb{R}^{n+1} , состоящую из интегральных линий системы (через каждую точку поверхности проходит единственная интегральная кривая).

Замечание 1.3. Пусть v_1, \dots, v_m — первые интегралы системы. Они постоянны вдоль решений системы, поэтому функция $F(v_1, \dots, v_m)$ также постоянна вдоль решений системы, то есть она тоже первый интеграл. Следовательно, первых интегралов бесконечно много.

Определение 1.9. Система первых интегралов $v_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, k$ называется **функционально независимой** в области, если в каждой точке этой области

$$\text{rank} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} = k, \quad k \leq n.$$

Замечание 1.4. Из линейной зависимости следует функциональная зависимость, но не наоборот. Например, t и t^2 зависимы функционально, но не линейно.

Теорема 1.3. Система (1.5) в окрестности любой точки $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ имеет n функционально независимых первых интегралов.

Доказательство. Через каждую точку проходит единственное решение

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n).$$

Так как

$$\varphi_i(t_0, c_1, \dots, c_n) = c_i,$$

то матрица $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} \right)$ единичная, поэтому применима теорема о неявной функции, и можно выразить

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

По теореме о неявной функции $\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} \right) \cdot \det \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = 1$, следовательно, $\det \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$, и $\text{rank} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = n$, таким образом, получилась система независимых первых интегралов. \square

Теорема 1.4. Автономная система в окрестности неособой точки имеет $n - 1$ функционально независимых первых интегралов, не зависящих от времени.

Доказательство. Автономную систему в окрестности неособой точки можно привести к эквивалентной системе из $n - 1$ уравнений, где x_1 считается временем:

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_2}{a_1} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{a_n}{a_1} \end{cases}$$

(так как точка неособая, то можно считать, что $a_1 \neq 0$). □

Теорема 1.5 (без доказательства). Произвольный первый интеграл системы (1.5) v в окрестности точки $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$ выглядит как композиция n функционально независимых первых интегралов v_1, \dots, v_n в окрестности $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$, а именно,

$$v(t, x_1, \dots, x_n) = F(v_1, \dots, v_n),$$

где F — дифференцируемая функция. Если система автономна, то не зависящий от времени первый интеграл в окрестности неособой точки выглядит как композиция $n - 1$ функционально независимых и независимых от времени первых интегралов v_1, \dots, v_{n-1}

$$v(x_1, \dots, x_n) = F(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

1.2 Линейные системы с постоянными коэффициентами.

1.2.1 Экспонента матрицы.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — вектор-функция, A — матрица размера $n \times n$ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Теорема 1.6. Решение задачи Коши задается формулой $\mathbf{x}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{x}_0$.

Определение 1.10. Экспонентой матрицы называется ряд $e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$.

Покажем, что этот ряд сходится абсолютно.

Нормой линейного оператора $\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является $\|\mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{|\mathcal{B}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |\mathcal{B}\mathbf{x}|$. Действительно, проверим свойства нормы:

$$1. \quad \|\mathcal{B}\| \geq 0, \quad \|\mathcal{B}\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{B} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\|\mathcal{B}\| = 0$, тогда для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем $|\mathcal{B}\mathbf{x}| = 0$ и $\mathcal{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, следовательно, $\mathcal{B} = \mathbf{0}$. □

$$2. \quad \|\lambda\mathcal{B}\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{B}\|.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|(\lambda\mathcal{B})\mathbf{x}| = |\lambda| |\mathcal{B}\mathbf{x}| = |\lambda| \cdot |\mathcal{B}\mathbf{x}|,$$

тогда

$$\|\lambda\mathcal{B}\| = |\lambda| \cdot \|\mathcal{B}\|.$$

□

$$3. \quad \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\frac{|\mathcal{B}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq \|\mathcal{B}\|,$$

тогда

$$|\mathcal{B}\mathbf{x}| \leq \|\mathcal{B}\| \cdot |\mathbf{x}|.$$

При этом

$$|(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x}| = |\mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}| \leq |\mathcal{A}\mathbf{x}| + |\mathcal{B}\mathbf{x}| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot |\mathbf{x}| + \|\mathcal{B}\| \cdot |\mathbf{x}|,$$

поэтому справедливо следующее неравенство:

$$\frac{|(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|.$$

Возьмем супремум по всем $\mathbf{x} \neq 0$ от обеих частей полученного неравенства, таким образом, получаем требуемое

$$\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|.$$

□

4. $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|.$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ справедливо

$$|\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}| = |\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x})| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot |\mathcal{B}\mathbf{x}| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\| \cdot |\mathbf{x}|.$$

Тогда

$$\frac{|\mathcal{A}\mathcal{B}\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$$

и

$$\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|.$$

□

5. $\|E\| = 1.$

Доказательство. Очевидно.

□

Продолжим доказательство абсолютной сходимости нашего ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ по норме $\|\cdot\|$, введенной выше. В силу свойств 3 и 4 для любого $l \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{k=m}^{m+l} \frac{B^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m}^{m+l} \frac{\|B\|^k}{k!}.$$

Устремив $m \rightarrow +\infty$, получим сходимость рядов $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|^k}{k!}$ по признаку Коши. Но это выполнено только в полном пространстве. В нашем случае $\mathcal{B} \simeq B \in \mathbb{R}^{n^2}$, а пространство \mathbb{R}^{n^2} полное.

Утверждение 1.1.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Доказательство. Заметим, что $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(e^{A\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}_0) = A e^{A\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}_0 = A \mathbf{x}(t).$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= A e^{At} = \frac{d}{dt} \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right) = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = \\ &= A \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right) = A e^{At}. \end{aligned}$$

□

Завершим доказательство теоремы.

Доказательство. Заметим, что $e^{A0} = E$. Тогда имеем $\mathbf{x}(0) = e^{A0} \cdot \mathbf{x}_0 = E \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$. □

Свойства экспоненты.

1. $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$.

Доказательство.

$$e^{A+B} = E + (A+B) + \frac{(A+B)^2}{2!} + \frac{(A+B)^3}{3!} + \dots$$

Необходимо показать, что

$$e^{A+B} = \left(E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \right) \left(E + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots \right).$$

Сравним коэффициенты при степенях в левой и правой частях уравнения. При нулевой степени имеем $E = E$, при первой степени: $A + B = A \cdot E + E \cdot B$, при второй степени:

$$\frac{(A+B)^2}{2!} = \frac{(A+B)(A+B)}{2} = \frac{A^2 + B^2 + AB + BA}{2} = \frac{A^2}{2!} + \frac{B^2}{2!} + AB$$

и так далее. □

2. Если $B = T^{-1} A T$, то $e^B = T^{-1} e^A T$.

Доказательство.

$$B^k = (T^{-1} A T)^k = T^{-1} A T T^{-1} A T \dots T^{-1} A T = T^{-1} A^k T.$$

Суммируя полученные равенства, получаем требуемое. □

- 3.

$$\exp \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{A_{k-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{A_k} \end{pmatrix}$$

Доказательство. Следует из 2. □

4. Если \mathbf{h} — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ , то $e^{A\mathbf{h}} = e^{\lambda\mathbf{h}}$.

Доказательство. Так как $A\mathbf{h} = \lambda\mathbf{h}$, то $\frac{A^k\mathbf{h}}{k!} = \frac{\lambda^k\mathbf{h}}{k!}$ и, суммируя полученные равенства, получаем требуемое. □

Экспонента жордановой клетки.

Рассмотрим жорданову клетку

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N.$$

Тогда используя свойства матричной экспоненты, получаем

$$e^{Jt} = e^{\lambda Et} \cdot e^{Nt} = e^{\lambda t} E e^{Nt} = e^{\lambda t} \left(E + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right) =$$

$$= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Практическое вычисление матричной экспоненты и решение линейной системы.

1. Решение системы дифференциальных уравнений.

В силу свойств матричной экспоненты i -ый столбец матрицы e^{At} есть решение системы уравнений $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ (x_i — i -ая координата вектор-функции \mathbf{x}). При этом $\det e^A = e^{\text{Tr}A}$.

2. Приведение матрицы к жордановой форме.

Пусть известна такая матрица T , что матрица $J = T^{-1} A T$ имеет жорданову форму, то есть состоит из жордановых клеток. Тогда в силу свойств матричной экспоненты нетрудно найти $e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$.

1.2.2 Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Рассматривается однородная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}.$$

Для нахождения решений этой системы можно использовать метод Эйлера.

Необходимо найти собственные значения матрицы A :

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

У такого уравнения есть n решений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, возможно комплексных.

Первый случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

В этом случае каждому собственному значению соответствует собственный вектор \mathbf{v}^i . Решение системы имеет следующий вид:

$$x_{00} = c_1 \mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \mathbf{v}^n e^{\lambda_n t}.$$

Второй случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$.

В этом случае собственному значению λ_1 соответствуют k линейно независимых собственных векторов \mathbf{v}^i .

Если $\mathbf{k} = \mathbf{m}$, то часть решения, соответствующая этому собственному значению, имеет вид:

$$x = c_1 \mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m \mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t}.$$

Если $\mathbf{k} < \mathbf{m}$, то часть решения, соответствующая этому собственному значению, имеет вид:

$$x = c_1 \mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_m \mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t} + \begin{pmatrix} P_r^1(t) \\ \vdots \\ P_r^n(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

где $r = m - k$, а $P_r^i(t)$ — многочлены степени r , коэффициенты которых находятся методом неопределенных коэффициентов.

Случай комплексных решений.

Рассмотрим системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \tag{1.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}_1(t) + i\mathbf{f}_2(t), \tag{1.7}$$

где матрица $A(t)$, вектор-функции $\mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{f}_2(t)$ принимают действительные значения, а \mathbf{x} — комплексные.

Определение 1.11. Комплекснозначная функция $\mathbf{x}(t)$ называется решением системы (1.6) или (1.7), если она обращает их в тождества.

Утверждение 1.2. Если $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ — решение системы (1.7), то $\mathbf{u}(t)$ — решение системы $\dot{\mathbf{u}} = A(t)\mathbf{u} + \mathbf{f}_1(t)$, а $\mathbf{v}(t)$ — решение системы $\dot{\mathbf{v}} = A(t)\mathbf{v} + \mathbf{f}_2(t)$.

Продолжим описание метода Эйлера.

Третий случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$.

Пусть $\lambda_1 = a + ib$. Так как коэффициенты характеристического многочлена действительны, то каждому комплексному корню уравнения соответствует комплексно сопряженный корень, поэтому пусть $\lambda_2 = a - ib$. Этим собственным значениям соответствуют комплекснозначные собственные вектора $\mathbf{v}^{1,2} = \mathbf{v}_1 \pm i\mathbf{v}_2$. Тогда часть решения, соответствующая λ_1 и λ_2 имеет вид:

$$x = c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}) + c_2 \operatorname{Im}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}).$$

Четвертый случай: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$.

В этом случае собственному значению λ_1 соответствуют k линейно независимых собственных векторов \mathbf{v}^i . При этом собственному значению, сопряженному λ_1 , соответствуют k линейно независимых сопряженных собственных векторов.

Если $\mathbf{k} = \mathbf{m}$, то часть решения, соответствующая λ_1 и сопряженному собственному значению, имеет вид:

$$x = c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}) + \dots + c_m \operatorname{Re}(\mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t}) + c_{m+1} \operatorname{Im}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}) + \dots + c_{2m} \operatorname{Im}(\mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t})$$

Если $\mathbf{k} < \mathbf{m}$, то часть решения, соответствующая λ_1 и сопряженному собственному значению, имеет вид:

$$x = c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}) + \dots + c_m \operatorname{Re}(\mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t}) + c_{m+1} \operatorname{Im}(\mathbf{v}^1 e^{\lambda_1 t}) + \dots + c_{2m} \operatorname{Im}(\mathbf{v}^m e^{\lambda_1 t}) +$$

$$+ e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t} \begin{pmatrix} P_r^1(t) \\ \vdots \\ P_r^n(t) \end{pmatrix} \cos(\operatorname{Re} \lambda_1 t) + e^{\operatorname{Re} \lambda_1 t} \begin{pmatrix} Q_r^1(t) \\ \vdots \\ Q_r^n(t) \end{pmatrix} \sin(\operatorname{Re} \lambda_1 t).$$

где $r = m - k$, а $P_r^i(t), Q_r^i(t)$ — действительные многочлены степени r , коэффициенты которых находятся методом неопределенных коэффициентов.

1.2.3 Решение линейных систем с правой частью специального вида.

Рассматривается неоднородная система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t).$$

Ее решение представляется как $\mathbf{x}_{\text{он}} = \mathbf{x}_{\text{оо}} + \mathbf{x}_{\text{чн}}$. Обозначим через $P_m(t)$ многочлен степени m . Если

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} P_{m_1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{m_n}^n(t) \end{pmatrix} e^{at},$$

то

$$\mathbf{x}_{\text{чн}}(t) = \begin{pmatrix} S_{m+r}^1(t) \\ \vdots \\ S_{m+r}^n(t) \end{pmatrix} e^{at},$$

где $m = \max(m_1, \dots, m_n)$, r — кратность корня a характеристического уравнения.

Если

$$\mathbf{f}(t) = e^{at} \left(\begin{pmatrix} P_{m_1}^1(t) \\ \vdots \\ P_{m_n}^n(t) \end{pmatrix} \cos(bt) + \begin{pmatrix} Q_{l_1}^1(t) \\ \vdots \\ Q_{l_n}^n(t) \end{pmatrix} \sin(bt) \right),$$

то

$$\mathbf{x}_{\text{чн}}(t) = e^{at} \left(\begin{pmatrix} R_{m+r}^1(t) \\ \vdots \\ R_{m+r}^n(t) \end{pmatrix} \cos(bt) + \begin{pmatrix} T_{m+r}^1(t) \\ \vdots \\ T_{m+r}^n(t) \end{pmatrix} \sin(bt) \right),$$

где $m = \max(m_1, \dots, m_n, l_1, \dots, l_n)$, r — кратность корня $a + ib$ характеристического уравнения.

1.2.4 Метод вариации произвольных постоянных.

Рассматривается неоднородная система

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t).$$

Ее решение удобно искать в виде:

$$\mathbf{x}(t) = c_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\mathbf{x}_n(t).$$

При подстановке такого выражения в систему получаем набор дифференциальных уравнений, позволяющих найти $c_1(t), \dots, c_n(t)$.

1.3 Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Определение 1.12. *Линейной системой дифференциальных уравнений первого порядка называют систему вида*

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad (1.8)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $f_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, — непрерывные функции.

Определение 1.13. *Линейная система называется **однородной**, если $\mathbf{f}(t) = 0$, то есть система вида*

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}. \quad (1.9)$$

Определение 1.14. *Нормой $A(t)$ (обозначение $\|A\|$) называется*

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее будем использовать обозначения: $a(t) = \|A\|$, $b(t) = |\mathbf{f}(t)| = \left(\sum_{j=1}^n f_j^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$

Определение 1.15. *Задачей Коши для системы (1.8) называется задача отыскания решения системы, удовлетворяющего начальным условиям:*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Теорема 1.7 (о существовании, единственности и продолжаемости решения на интервал). *Пусть $a_{ij}(t)$, $f_j(t)$ — непрерывные функции на (α, β) , где $i, j = 1, \dots, n$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Тогда решение задачи Коши (1.10) существует, единственно и продолжается на весь интервал.*

Доказательство. По теореме существования и единственности у задачи Коши (1.10) существует единственное решение на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Оценим правую часть системы

$$|A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)| \leq |A(t)\mathbf{x}| + |\mathbf{f}(t)| \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\| + |\mathbf{f}(t)|.$$

Действительно, пусть y_i — i -ый элемент столбца $A(t)\mathbf{x}$.

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n.$$

Из неравенства Коши следует, что

$$|y_i|^2 = (a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|^2.$$

Тогда

$$|A(t)\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = (|y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Так как $|A(t)\mathbf{x}| + |\mathbf{f}(t)| \leq a(t)\|\mathbf{x}\| + b(t)$, то из теоремы о продолжаемости решения следует, что решение продолжается на весь интервал. \square

1.3.1 Определитель Вронского.

Определение 1.16. Система функций $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ называется **линейно зависимой** на интервале (α, β) , если существует набор действительных чисел c_1, \dots, c_n , не всех равных нулю, такой, что $c_1\mathbf{x}^1(t), \dots, c_n\mathbf{x}^n(t) = 0$ при любом $t \in (\alpha, \beta)$.

Определение 1.17. Если из равенства $c_1\mathbf{x}^1(t), \dots, c_n\mathbf{x}^n(t) = 0$ при любом $t \in (\alpha, \beta)$ следует, что $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, то система функций $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ называется **линейно независимой**.

Замечание 1.5. Линейная зависимость системы функций $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ в каждой точке t не означает линейную зависимость системы.

Например, $\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ линейно независимы, но линейно зависимы в каждой точке t .

Определение 1.18. Любая система $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ линейно независимых решений системы (1.9) называется **фундаментальной системой решений**.

Определение 1.19. Матрица, столбцы которой являются фундаментальной системой решений, называется **фундаментальной матрицей** системы. Обозначим ее через:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 1.20. **Определителем Вронского** называется определитель фундаментальной матрицы.

$$W_{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)}(t) = \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

$$W(t) = \det \Phi(t).$$

Рассмотрим определитель Вронского для произвольной системы функций.

Теорема 1.8. Пусть $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ линейно зависимы на (α, β) . Тогда $W_{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)}(t) = 0$ на (α, β) .

Следствие 1.1. Если $W_{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)}(t) \neq 0$, то $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ линейно независимы на (α, β) .

Теорема 1.9. Если существует значение $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, такое, что $W(t_0) = 0$, и коэффициенты системы (1.9) непрерывны на (α, β) , то $W(t) \equiv 0$, и $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $W(t_0) = 0$. Тогда существует ненулевой набор чисел c_1, \dots, c_n , такой, что

$$c_1\mathbf{x}^1(t_0) + \dots + c_n\mathbf{x}^n(t_0) = 0, \text{ где } \mathbf{x}^i(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^i(t_0) \\ \vdots \\ x_n^i(t_0) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}^n(t).$$

Она является решением системы (1.9), поскольку представляет собой линейную комбинацию решений системы. При этом по условию, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. У системы (1.9) есть решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$. По теореме существования и единственности получаем, что $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}^n(t) = \mathbf{0}$ при любом $t \in (\alpha, \beta)$. Это означает, что $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ линейно зависимы и $W_{\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)}(t) = 0$ на (α, β) . \square

Теорема 1.10 (Формула Лиувилля–Остроградского). *Определитель Вронского для матрицы, составленной из решений системы (1.9), можно найти по формуле Лиувилля–Остроградского*

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds}.$$

Доказательство. Найдем производную вронскиана:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i-1}^1 & \dots & x_{i-1}^j & \dots & x_{i-1}^n \\ \dot{x}_i^1 & \dots & \dot{x}_i^j & \dots & \dot{x}_i^n \\ x_{i+1}^1 & \dots & x_{i+1}^j & \dots & x_{i+1}^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^j & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Но \mathbf{x}^j — решения однородной системы уравнений (1.9), то есть

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1^j \\ \vdots \\ \dot{x}_i^j \\ \vdots \\ \dot{x}_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}(t) & \dots & a_{in}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_i^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\dot{x}_i^j = a_{i1}(t)x_1^j + \dots + a_{in}(t)x_n^j = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k^j.$$

Заменив строчки с производными в выражении производной вронскиана этим выражением, получаем:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i-1}^1 & \dots & x_{i-1}^j & \dots & x_{i-1}^n \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k^1 & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k^j & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k^n \\ x_{i+1}^1 & \dots & x_{i+1}^j & \dots & x_{i+1}^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^j & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k^j - a_{i1}x_1^j - \dots - a_{ii-1}x_{i-1}^j - a_{ii+1}x_{i+1}^j - \dots - a_{in}x_n^j = a_{ii}x_i^j.$$

Определитель не изменится при таком преобразовании строк, поэтому

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^j & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i-1}^1 & \dots & x_{i-1}^j & \dots & x_{i-1}^n \\ a_{ii}(t)x_i^1 & \dots & a_{ii}(t)x_i^j & \dots & a_{ii}(t)x_i^n \\ x_{i+1}^1 & \dots & x_{i+1}^j & \dots & x_{i+1}^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^j & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ii} W_{\bar{x}^1(t), \dots, \bar{x}^n(t)}(t) = W(t) \text{Tr} A(t),$$

тогда,

$$\dot{W}(t) = W(t) \text{Tr} A(t),$$

$$\begin{aligned}\frac{W'(t)}{W(t)} dt &= \text{Tr} A(t) dt, \\ \int_{t_0}^t \frac{W'(t)}{W(t)} dt &= \int_{t_0}^t \text{Tr} A(t) dt, \\ \ln|W(t)| - \ln|W(t_0)| &= \int_{t_0}^t \text{Tr} A(t) dt,\end{aligned}$$

и

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds}.$$

□

1.3.2 Общее решение линейной системы дифференциальных уравнений.

Определение 1.21. *Общим решением системы (1.9) называется совокупность функций, содержащая все решения системы, и только их.*

Теорема 1.11. *Пусть $\mathbf{x}^1(t), \dots, \mathbf{x}^n(t)$ — фундаментальная система решений системы (1.9). Тогда общее решение системы имеет вид:*

$$\mathbf{x}_{oo}(t) = c_1 \mathbf{x}^1(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^n(t),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные постоянные.

Доказательство. Очевидно, что любая такая комбинация является решением. То, что всякое решение представляется в таком виде, следует из теоремы существования и единственности. □

Замечание 1.6. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица, то $\mathbf{x}_{oo} = X(t) c$, где $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Замечание 1.7. Если $X(t)$ — фундаментальная матрица, то $Y(t) = X(t) C$, где C — невырожденная матрица, тоже является фундаментальной матрицей.

Перейдем к рассмотрению неоднородной системы (1.8).

Теорема 1.12. *Общее решение неоднородной системы (1.8) образуется как сумма общего решения соответствующей однородной системы (1.9) и частного решения неоднородной системы (1.8):*

$$\mathbf{x}_{on} = \mathbf{x}_{oo} + \mathbf{x}_{чн}.$$

Доказательство. Очевидно, что такое выражение является решением. Для доказательства того, что такой вид имеют все решения, рассмотрим два различных частных решения неоднородной системы: $\mathbf{x}_{чн}$ и $\tilde{\mathbf{x}}_{чн}$. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{чн} &= A\mathbf{x}_{чн} + \mathbf{f}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{чн} = A\tilde{\mathbf{x}}_{чн} + \mathbf{f}, \\ (\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{чн} - \dot{\mathbf{x}}_{чн}) &= A(\tilde{\mathbf{x}}_{чн} - \mathbf{x}_{чн}),\end{aligned}$$

то есть произвольное решение представляет собой сумму решения однородной системы $(\tilde{\mathbf{x}}_{чн} - \mathbf{x}_{чн})$ и частного неоднородной системы:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{чн} = (\tilde{\mathbf{x}}_{чн} - \mathbf{x}_{чн}) + \mathbf{x}_{чн}.$$

□

1.4 Фазовые портреты.

1.4.1 Фазовая плоскость.

Рассматривается автономная система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.11)$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$.

Имеем $t \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ (решение системы) $\rightarrow \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$ — касательный вектор к графику

решений рассматриваемой системы. Таким образом, получаем определенное векторное поле.

Определение 1.22. Пространство переменных x_1, \dots, x_n называется **фазовым пространством** системы (1.11).

Пример 1.2. Рассмотрим следующую автономную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}.$$

Продифференцируем первое уравнение системы

$$\ddot{x} = \dot{y} = -x,$$

тогда

$$\ddot{x} = -x,$$

$$\ddot{x} + x = 0,$$

откуда

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$\dot{y} = -C_1 \cos t - C_2 \sin t,$$

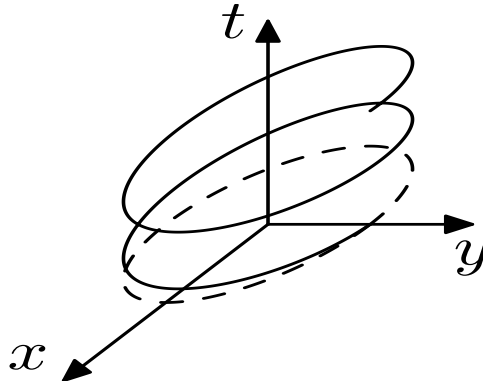
$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

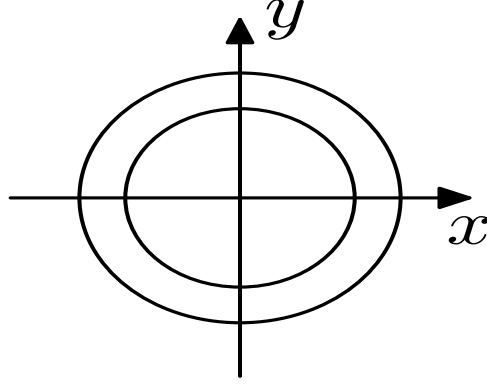
Таким образом, мы получаем решение системы:

$$\begin{cases} x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin t \right) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(t + \varphi), \\ y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(t + \varphi). \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что пространство решений представляет собой окружности:

$$x^2 + y^2 = \tilde{C}_1^2.$$





Определение 1.23. Кривая $t \rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ называется **фазовой кривой или траекторией**.

Далее будем предполагать, что $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, непрерывны в некоторой области $D \in \mathbb{R}^n$. Тогда по теореме существования и единственности траектории не пересекаются. Если $x_i(t) = c_i$, $c_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, n$, то траектория — это точка.

Определение 1.24. **Неподвижной точкой системы (стационарной точкой, положением равновесия)** называется точка $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$, такая, что $f_i(\mathbf{x}^0) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

1.4.2 Свойства траекторий.

Рассматривается автономная (не зависящая от времени явно) система линейных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

Определение 1.25. **Траекторией** называется линия (или точка) в (x_1, \dots, x_n) , вычерченная решением системы $\mathbf{x}(t)$ при изменении времени t .

Следующие утверждения описывают свойства траекторий автономной системы.

Теорема 1.13. Если $\mathbf{x}(t)$ — решение (1.12), то $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + c)$ — тоже решение (1.12), и соответствующие им траектории равны.

Доказательство.

$$\mathbf{x}'(t) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \Rightarrow \mathbf{x}'(t + c) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + c)) \Rightarrow \mathbf{y}'(t) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)).$$

Равенство траекторий очевидно — траектория $\mathbf{y}(t)$ проходит через все точки траектории $\mathbf{x}(t)$ с отставанием c . \square

Это означает, что одной траектории соответствует множество решений.

Теорема 1.14. Траектории либо совпадают, либо не имеют общих точек.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы единственности решения. \square

Теорема 1.15. Решение не входит в особую точку за конечное время.

Доказательство. Если решение входит в особую точку за конечное время, то оно само особая точка (следует из предыдущей теоремы). \square

Теорема 1.16. Непостоянное решение $\mathbf{x}(t)$, такое, что $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ периодическое, имеет наименьший период, и его траектория — замкнутая линия без самопересечений.

Доказательство. Заметим, что $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + t_2 - t_1)$ — решение, более того, $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_1)$. По теореме единственности $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, поэтому $\mathbf{x}(t + d) \equiv \mathbf{x}(t)$, где $d = t_2 - t_1$. Таким образом, $\mathbf{x}(t)$ — периодическое решение с периодом d (возможно, не наименьшим). Мы получили, что решение $\mathbf{x}(t)$ периодическое, непостоянное, поэтому у него есть наименьший период p . Очевидно, что траектория замкнута. Предположим, что есть самопересечение траектории, тогда ее период обязан быть меньше минимального, приходим к противоречию. \square

Теорема 1.17. *Любая траектория — либо точка, либо замкнутая кривая без самопересечений, либо незамкнутая кривая без самопересечений.*

Доказательство. Решение $\mathbf{x}(t)$ либо постоянно, либо $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, либо $\mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Первый случай соответствует точке, второй — замкнутой кривой, третий — незамкнутой. Самопересечение незамкнутой траектории влечет, что его решение периодическое — противоречие. \square

1.4.3 Классификация положений равновесия линейной однородной автономной системы.

Рассматривается линейная однородная автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy. \end{cases} \quad (1.13)$$


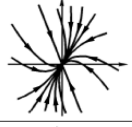
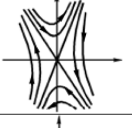
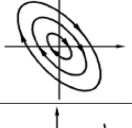

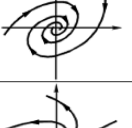
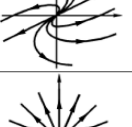
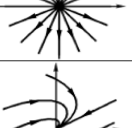
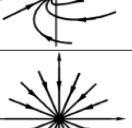

Заметим, что $(0, 0)$ — положение равновесия системы.

Введем обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.18. *В зависимости от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ возможны следующие типы положений равновесия (см. таблицу).*

Таблица. Фазовые траектории положения равновесия линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

№	Корни характеристического уравнения	Точка покоя	Фазовый портрет	Устойчивость (неустойчивость) тривиального решения
1	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел		Неустойчиво
2	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$	Устойчивый узел		Асимптотически устойчиво
3	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$	Седло		Неустойчиво
4	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$	Центр		Устойчиво по Ляпунову
5	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha > 0$	Неустойчивый фокус		Неустойчиво
6	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\alpha < 0$	Устойчивый фокус		Асимптотически устойчиво
7	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 > 0$, искл. случай 7а	Неустойчивый вырожденный узел		Неустойчиво
7а	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, a > 0$	Неустойчивый дикритический узел		Неустойчиво
8	$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1 < 0$, искл. случай 8а	Устойчивый вырожденный узел		Асимптотически устойчиво
8а	$\begin{cases} y' = ay \\ z' = az \end{cases}, a < 0$	Устойчивый дикритический узел		Асимптотически устойчиво

Доказательство. Найдем корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0.$$

Тогда Жорданова форма J матрицы A может иметь один из следующих видов:

Случай I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Если $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, тогда в жордановом базисе имеем систему:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{y}_1 = \lambda_2 y_1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_1 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \end{cases}$$

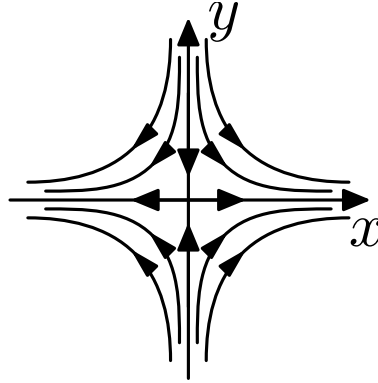
или

$$\ln \frac{x_1}{C_1} = \lambda_1 t,$$

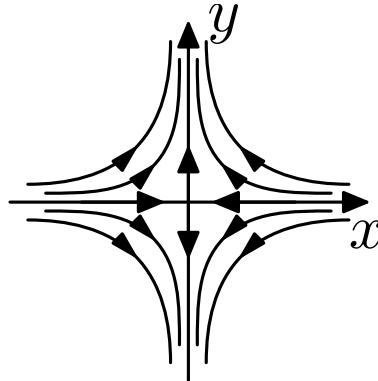
$$y_1 = C_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \frac{x_1}{C_1}} = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

1а) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ — седло

$$(a) \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$$



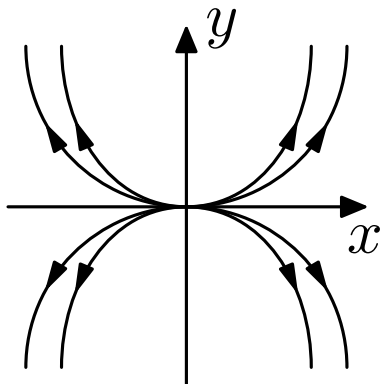
$$(b) \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$$



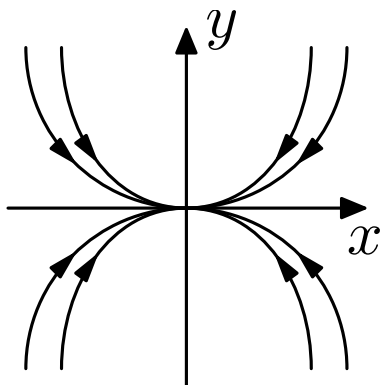
$$1б) \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

$$(a) |\lambda_2| > |\lambda_1|.$$

Неустойчивый узел:

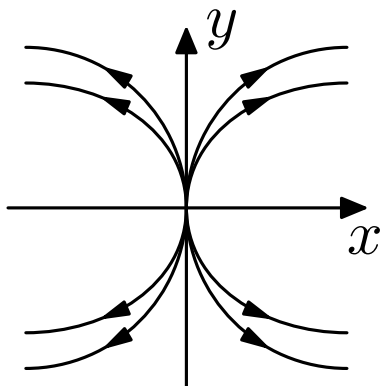


Устойчивый узел:

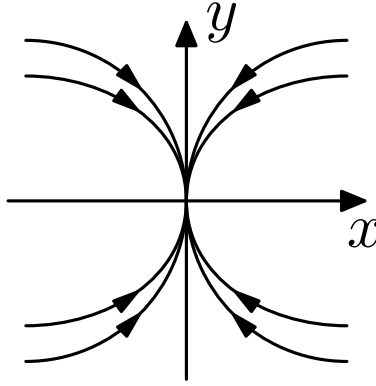


$$(b) |\lambda_2| < |\lambda_1|.$$

Неустойчивый узел:



Устойчивый узел:



Таким образом, траектории касаются направления, определяемого собственным вектором, отвечающим наименьшему по модулю собственному значению.

2. $\lambda_1 = \lambda_2$.

Если $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, то в жордановом базисе получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \\ y_1 = C_2 e^{\lambda_1 t}, \end{cases}$$

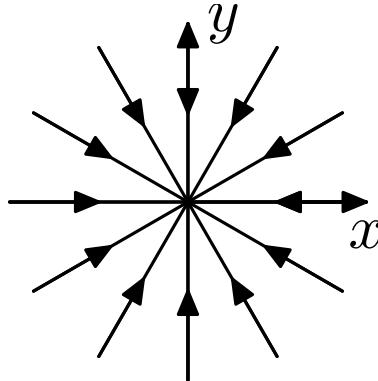
откуда

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{C_2}{C_1},$$

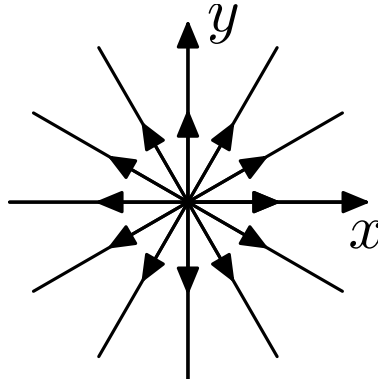
или

$$y_1 = \frac{C_2}{C_1} x_1.$$

Если $\lambda_1 < 0$, то имеем устойчивый дикритический узел:



Если $\lambda_1 > 0$, то имеем неустойчивый дикритический узел:



Если $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, то в жордановом базисе получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + y_1, \\ \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + C_2 e^{\lambda_1 t}, \\ y_1 = C_2 e^{\lambda_1 t}. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение системы методом вариации произвольной постоянной

$$\dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = C_2 e^{\lambda_1 t},$$

$$\dot{x}_1 - \lambda_1 x_1 = 0,$$

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t},$$

$$x_1 = C_1(t) e^{\lambda_1 t},$$

$$C_1'(t) e^{\lambda_1 t} = C_2 e^{\lambda_1 t},$$

$$C_1(t) = C_2 t + C_1.$$

Таким образом, получаем решение системы

$$\begin{cases} x_1 = (C_2 t + C_1) e^{\lambda_1 t}, \\ y_1 = C_2 e^{\lambda_1 t}, \end{cases}$$

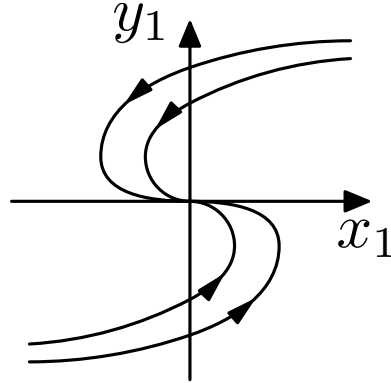
или

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{y_1}{C_2},$$

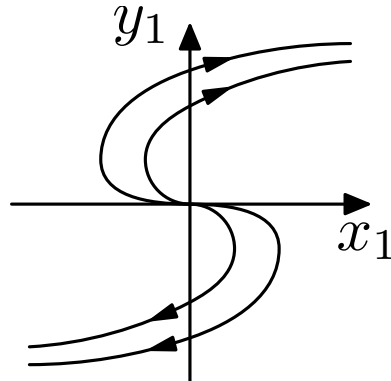
и, подставляя выражение для t в первое уравнение системы, находим

$$x_1 = \frac{C_2}{\lambda_1} e^{\ln \frac{y_1}{C_2}} \ln \frac{y_1}{C_2} + C_1 e^{\ln \frac{y_1}{C_2}} = \frac{y_1}{\lambda_1} \ln \frac{y_1}{C_2} + C_1 \frac{y_1}{C_2}.$$

$\lambda_1 < 0$ — устойчивый вырожденный узел:



$\lambda_1 > 0$ — неустойчивый вырожденный узел:



Случай II. $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $b \neq 0$.

1. $a \neq 0$. Пусть собственному значению $\lambda_1 = a + bi$ соответствует собственный вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$, где $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$A\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v},$$

откуда

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + i\mathbf{w}) &= (a + bi)(\mathbf{u} + i\mathbf{w}), \\ A\mathbf{u} + iA\mathbf{w} &= (a\mathbf{u} - b\mathbf{w}) + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{w}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{cases} A\mathbf{u} = a\mathbf{u} - b\mathbf{w}, \\ A\mathbf{w} = b\mathbf{u} + a\mathbf{w}. \end{cases}$$

Разложим решение системы (1.13) по базису \mathbf{u} , \mathbf{w}

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u} + y_1\mathbf{w}.$$

Тогда получим

$$\dot{x}_1\mathbf{u} + \dot{y}_1\mathbf{w} = A(x_1\mathbf{u} + y_1\mathbf{w}) = x_1A\mathbf{u} + y_1A\mathbf{w}$$

или

$$\dot{x}_1\mathbf{u} + \dot{y}_1\mathbf{w} = x_1(a\mathbf{u} - b\mathbf{w}) + y_1(b\mathbf{u} + a\mathbf{w}),$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + by_1, \\ \dot{y}_1 = -bx_1 + ay_1. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам $x_1 = r \cos \varphi$, $y_1 = r \sin \varphi$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = ar \cos \varphi + br \sin \varphi, \\ \dot{y}_1 = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = -br \cos \varphi + ar \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = ar \cos^2 \varphi + br \sin \varphi \cos \varphi - br \cos \varphi \sin \varphi + ar \sin^2 \varphi = ar, \\ r\dot{\varphi} = -br \cos^2 \varphi + ar \sin \varphi \cos \varphi - ar \sin \varphi \cos \varphi - br \sin^2 \varphi = -br, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = ar, \\ \dot{\varphi} = -b, \end{cases} \quad (1.14)$$

откуда получаем

$$\begin{cases} r = C_1 e^{at}, \\ \varphi = -bt + C_2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} t = \frac{1}{a} \ln \frac{r}{C_1}, \\ \varphi = -\frac{b}{a} \ln \frac{r}{C_1} + C_2, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} t = \frac{C_2 - \varphi}{b}, \\ r = C_1 e^{-\frac{a}{b}(\varphi - C_2)} \tilde{C}_1 e^{-\frac{a}{b}\varphi}, \quad \tilde{C}_1 = C_1 e^{\frac{aC_2}{b}}. \end{cases}$$

Таким образом, при $a > 0$ получаем логарифмическую спираль, которая закручивается в направлении точки $(0, 0)$, а при $a < 0$ — раскручивается от точки $(0, 0)$. Тип особой точки — фокус.

2. $a = 0$.

Из системы (1.14)

$$\begin{cases} \dot{r} = 0, \\ \dot{\varphi} = -b, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} r = c, \\ \varphi = -bt, \end{cases}$$

то есть имеем концентрические окружности. Тип особой точки — центр.

Замечание 1.8. При переходе к базису из собственных векторов совершается линейное преобразование, которое может приводить к растяжению (или сжатию) и повороту, но качественно картина траекторий не меняется.

Случай III. Если жорданова форма матрицы имеет один из следующих видов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то получим вырожденные случаи. □

1.4.4 Области зависимости типа особой точки от коэффициентов системы.

Рассматривается линейная автономная система (1.13).

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 \\ \operatorname{Re} \lambda_2 < 0 \end{cases} \quad \text{— область устойчивости.}$$

Введем обозначения $\delta = -\operatorname{Tr} A^2 - (a + d)$, $\Delta = ad - bc$.

Тогда

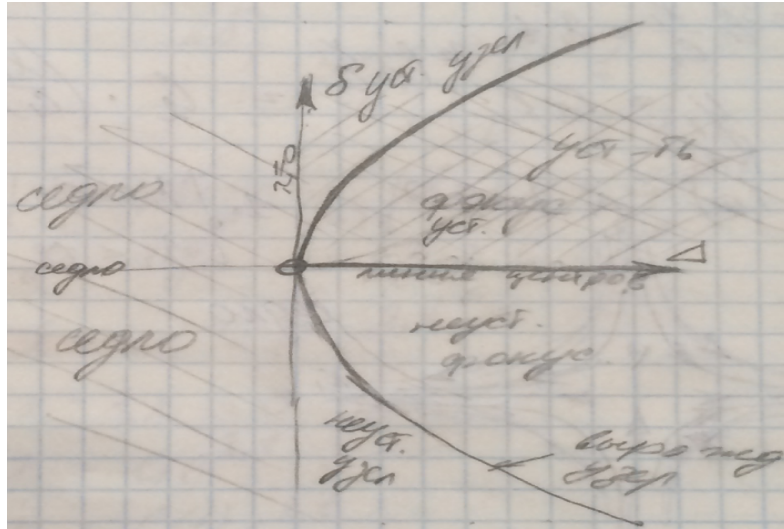
$$\begin{aligned} \lambda^2 + \delta\lambda + \Delta &= 0, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\Delta}}{2}, \end{aligned}$$

и в новых обозначениях имеем: $\begin{cases} \delta > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ — область устойчивости.

При $\delta^2 - 4\Delta = 0$ или $\Delta = \frac{\delta^2}{4}$ получим, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, $\begin{cases} \Delta > \frac{\delta^2}{4} \\ \delta \neq 0 \end{cases}$ — устойчивые и неустойчивые фокусы, $\begin{cases} \Delta > \frac{\delta^2}{4} \\ \delta = 0 \end{cases}$ — центр.

Если $\Delta < \frac{\delta^2}{4}$, $\delta \neq 0$, то корни характеристического уравнения действительные, одного знака, и получаем тип особой точки — устойчивый узел ($\delta > 0$) или неустойчивый узел ($\delta < 0$).

Если $\Delta < 0$, то корни характеристического уравнения действительные, разных знаков, и получаем тип особой точки — седло.



1.4.5 Фазовый портрет автономной нелинейной системы.

Рассматривается нелинейная автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Найдем положения равновесия (особые точки $M_1(x_1, y_1), \dots, M_k(x_k, y_k), \dots$) системы:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Заменой переменных перенесем точки M_k в начало координат $(0, 0)$:

$$\begin{cases} u = x - x_k, \\ v = y - y_k, \end{cases}$$

переносим M_k в $(0, 0)$. В окрестности начала координат, используя формулу Тейлора для функций двух переменных, линеаризуем нелинейную систему (если это возможно), и для полученной линейной системы изучим характер положения равновесия $(0, 0)$.

После замены координат рассматриваемая система переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{P}(u, v), \\ \dot{v} = \tilde{Q}(u, v), \end{cases}$$

где $\tilde{P}(0, 0) = \tilde{Q}(0, 0) = 0$.

Разложим функции $\tilde{P}(u, v)$, $\tilde{Q}(u, v)$ в окрестности точки $(0, 0)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv + f_1(u, v), \\ \dot{v} = cu + dv + f_2(u, v), \end{cases} \quad (1.15)$$

где $f_1 \sim \bar{O}(\sqrt{u^2 + v^2})$, $f_2 \sim \bar{O}(\sqrt{u^2 + v^2})$. После линеаризации исходная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = au + bv, \\ \dot{v} = cu + dv. \end{cases} \quad (1.16)$$

Теорема 1.19. Если точка $(0, 0)$ — положение равновесия типа узел, фокус, седло для системы (1.16), то точка $(0, 0)$ — положение равновесия типа узел, фокус, седло для системы (1.15) соответственно. Если точка $(0, 0)$ — положение равновесия типа центр для системы (1.16), то она является положением равновесия типа центр, либо фокус для системы (1.15).

1.4.6 Предельные циклы.

Определение 1.26. *Предельным циклом* автономной системы называется замкнутая траектория, у которой существует окрестность, целиком заполненная траекториями системы, бесконечно приближающимися к замкнутой траектории при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$.

Замечание 1.9. Внутри предельного цикла находится особая точка фокус.

Теорема 1.20 (Принцип кольца (достаточное условие существования предельного цикла)). Если на плоскости существует кольцо $\{(x, y) | r^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}$, так что все траектории системы, пересекающие границу, либо одновременно входят в него, либо выходят из него. Тогда внутри кольца существует предельный цикл (устойчивый или неустойчивый).

Пример 1.3. Исследуем вопрос о существовании предельного цикла следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x - y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Особая точка линейной системы: $(0, 0)$.

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i \quad \text{— устойчивый фокус.}$$

Перейдем к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -r \cos \varphi - r \sin \varphi + r^3 \cos \varphi, \\ \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = r \cos \varphi - r \sin \varphi + r^3 \sin \varphi, \\ \begin{cases} \frac{dr}{dt} = -r \cos^2 \varphi - r \sin \varphi \cos \varphi + r^3 \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - r \sin^2 \varphi + r^3 \sin^2 \varphi = r^3 - r, \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi - r^2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{dr}{dt} = r^3 - r = r(r-1)(r+1), \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Если $0 < r < 1$, то $\frac{dr}{d\varphi} < 0$.

Если $r > 1$, то $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. Таким образом, получаем $r = 1$ — неустойчивый предельный цикл. При $r = 0$ имеем устойчивый фокус.

Упражнение. Исследовать вопрос существования предельного цикла системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + x^3, \\ \dot{y} = -x - y + y^3. \end{cases}$$

1.4.7 Уравнение Ньютона для уравнения $\ddot{x} + f(x) = 0$.

Сведем уравнение к системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $E(x, y) = \int_{x_0}^x f(s) ds + \frac{y^2}{2}$, выражающую полную энергию системы, $u(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds$ — потенциальная энергия, $T(y) = \frac{y^2}{2}$ — кинетическая энергия.

Вдоль решения системы имеем $E(x, y) = C$. Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = f(x) \cdot \dot{x} + \frac{2y}{2} \cdot \dot{y} = yf(x) + y(-f(x)) = 0.$$

Интегрируя уравнение

$$dE(x, y) = f(x) dx + y dy = 0.$$

получаем

$$u(x) + \frac{y^2}{2} = C,$$

или

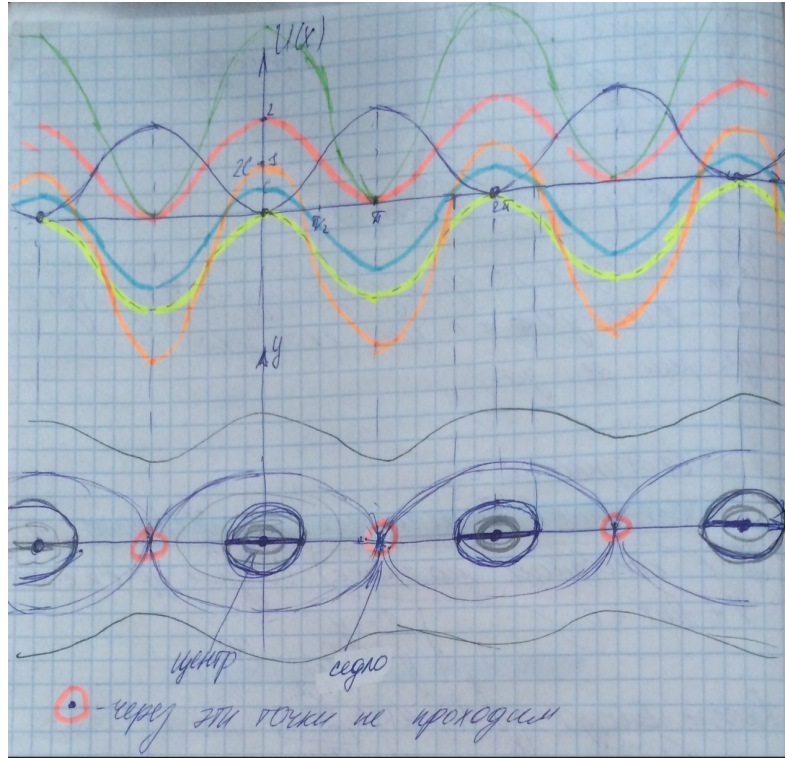
$$y = \pm \sqrt{2(C - u(x))}.$$

Заметим, что $u(x) \leq C$, поэтому $C - u(x) \geq 0$.

Рассмотрим уравнение колебаний маятника: $\ddot{x} + \sin x = 0$. Потенциальная энергия имеет вид

$$u(x) = \int_0^x \sin s ds = 1 - \cos x.$$

На основании полученного уравнения построим траектории системы.



Уравнение колебания маятника с трением:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + a \sin x = 0.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -f(x). \end{cases}$$

Заменой переменных, избавившись от члена с \dot{x} , можно свести уравнение к предыдущему случаю.

1.5 Устойчивость решения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.17)$$

Определение 1.27. Решение $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, системы (1.17) называется **устойчивым**, или, точнее, **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $y(t)$ системы (1.17), начальные значения которого удовлетворяют неравенствам $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$, для всех $t \leq t_0$ справедливы неравенства

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.18)$$

Таким образом, устойчивость означает, что близкие по начальным значениям решения остаются близкими для всех $t \leq t_0$.

Определение 1.28. Если существует $\varepsilon > 0$, такое, что при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $y(t)$ условия (1.18) не выполняются, то решение $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, называется **неустойчивым**.

Определение 1.29. Если решение $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, системы (1.17) устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.19)$$

при $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, то решение $\phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, называется **устойчивым асимптотически**.

Замечание 1.10. Из неограниченности решения не следует его неустойчивость.

Пример 1.4.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + t - x, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Найдем решение соответствующего линейного однородного уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ x_{oo} &= C e^{-t}. \end{aligned}$$

Вариацией произвольной постоянной находим общее решение неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} x_o &= C(t)e^{-t}, \\ C'(t)e^{-t} &= 1 + t, \\ C(t) &= \int_{t_0}^t e^t(t+1)dt = t e^t + C, \\ x_o &= C e^{-t} + t. \end{aligned}$$

Решая задачу Коши, получим, что $\phi(t) = t$. Теперь найдем решение, удовлетворяющее другому начальному условию: $x(0) = x_0$. Тогда $x^0(t) = x_0 e^{-t} + t$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $x_0 < \varepsilon$, то $|\phi(t) - x^0(t)| = |x^0| \cdot |e^{-t}| < \varepsilon$ для любого $t \leq 0$, и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} (|e^{-t}| \cdot |x_0|) = 0$. То есть, выбрав $\delta = \varepsilon$, мы доказали устойчивость и асимптотическую устойчивость решения $\phi(t) = t$.

Замечание 1.11. Из ограниченности решения, как и из ограниченности остальных решения, не следует его неустойчивость.

Пример 1.5. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = \sin^2 x.$$

Найдем решение

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2 x,$$

откуда

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int dt, \\ \sin x = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -\operatorname{ctg} x = t - C, \\ x = \pi n, n \in \mathbb{N}, \\ x = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(C - t), \\ x = \pi n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Все решения получились ограниченными. Для любого $\delta > 0$, $\delta < \pi$ имеем $x(0) = \delta$, следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi$. Это означает неустойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$.

Замечание 1.12. Из одного условия (1.19) не следует устойчивость решения.

Исследование вопроса устойчивости некоторого решения $\bar{\mathbf{y}}(t)$ системы 1.17 может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения (точки покоя, положения равновесия) $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ соответствующей системы, получающейся преобразованием исходной к новым переменным с помощью замены:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}(t).$$

Тогда в новых переменных система примет вид:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i(t)}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_2(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.20)$$

Исследуемому решению $\bar{\mathbf{y}}(t)$ системы (1.17) соответствует тривиальное решение $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (1.20), и его исследование на устойчивость можно заменить исследованием на устойчивость данного тривиального решения. В дальнейшем без ограничения общности считаем, что на устойчивость исследуется тривиальное решение или, что одно и то же, расположенная в начале координат точка покоя системы уравнений. Для нее сформулируем определение устойчивости.

Определение 1.30. Точка покоя $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ системы (1.20) называется *устойчивой по Ляпунову*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что:

$$|\mathbf{x}(t_0)| < \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t)| < \varepsilon, \quad t \leq t_0.$$

1.5.1 Простейшие типы точек покоя (положений равновесия)

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $(0, 0)$ решений линейной системы двух дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \quad (1.21)$$

Будем искать решение (1.21) в виде $x(t) = \alpha_1 e^{kt}$, $y(t) = \alpha_2 e^{kt}$, используя характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0,$$

где α и β находятся с точностью до постоянного множителя непосредственной подстановкой в исходную систему, то есть

$$(a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0. \quad (1.22)$$

Возможны следующие случаи:

1. Корни характеристического уравнения k_1 и k_2 действительные и различные.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = c_1 \alpha_1 e^{k_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{k_2 t}, \\ y = c_1 \beta_1 e^{k_1 t} + c_2 \beta_2 e^{k_2 t}, \end{cases}$$

где константы α_i , β_i получены из соотношения (1.22) при $k = k_i$, а c_j - произвольные. Здесь возможно следующее:

- Если $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива и носит название *устойчивого узла*.
- Если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то случай переходит в предыдущий при замене t на $-t$. Следовательно, траектории имеют тот же вид, но противоположное направление движения точки. А, значит, точка покоя неустойчива по Ляпунову и носит название *неустойчивого узла*.
- Точка покоя неустойчива по Ляпунову и в случае $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Называем такую точку *седлом*.

2. Корни характеристического уравнения комплексны: $k_{1,2} = p \pm qi$, $q \neq 0$.

Общее решение системы (1.21) представимо в виде:

$$\begin{cases} x = e^{pt} (c_1 \cos qt + c_2 \sin qt), \\ y = e^{pt} (\tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt), \end{cases}$$

где постоянные c_1 , c_2 произвольны, а \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 получаются из них определенной линейной комбинацией (подстановкой общей данной формулы в исходную систему). Здесь возможно следующее:

- Если $p < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива и носит название *устойчивого фокуса*.
- Если $p > 0$, то точка покоя неустойчива по Ляпунову и носит название *неустойчивого фокуса*.

- Если $p = 0$, то решения получаются периодическими, их периоды совпадают, а, значит, траектории — замкнутые кривые. Наблюдаем устойчивость по Ляпунову и отсутствие асимптотической устойчивости. Положение равновесия в этом случае носит название *центра*.

3. Корни характеристического уравнения совпадают.

Общее решение имеет вид:

$$\begin{cases} x = e^{kt} (c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 t), \\ y = e^{kt} (c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 t), \end{cases}$$

где все постоянные введены аналогично случаю 1, но не исключена возможность $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, в случае которой α_1 и β_1 будут произвольными постоянными. Возможно следующее:

- Если $k > 0$, то точка покоя является устойчивым узлом, который в случае $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ носит название *дискритического узла*, который также является асимптотически устойчивым.
- Если $k < 0$, то замена t на $-t$ приводит к предыдущему случаю. Аналогично, получаем неустойчивый узел.

Замечание 1.13. Более подробная классификация точек покоя приведена в таблице фазовых траекторий.

1.5.2 Устойчивость по первому приближению.

Теорема 1.21 (Условие устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами). Пусть в линейной системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1.23)$$

матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда выполнено:

1. Если для любого $i = 1, \dots, n$, все $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.
2. Если для любого $i = 1, \dots, n$, все $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ и не существует такого собственного значения λ_i с нулевой вещественной частью, что в жордановой форме матрицы A клетка, отвечающая ему, имеет размерность больше единицы, то нулевое решение системы (1.23) устойчиво по Ляпунову.

Если же клетка, отвечающая собственному значению с нулевой вещественной частью, имеет размерность больше единицы, то нулевое решение системы (1.23) неустойчиво.

3. Если среди собственных значений существует хотя бы одно λ_k , такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, то нулевое решение системы (1.23) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Из раздела о системах линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует, что общее решение (1.23) имеет в векторной записи вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}_{r_1}^1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}_{r_2}^2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \dots + \mathbf{P}_{r_m}^m \cdot e^{\lambda_m t},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — различные собственные значения матрицы A , и размеры соответствующих им жордановых клеток равны: $r_1 + 1, r_2 + 1, \dots, r_m + 1$. При $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ представим соответствующее слагаемое общего решения системы:

$$\mathbf{P}(t) e^{\alpha t} \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

Первый пункт теоремы следует из того, что $\mathbf{P}(t) \cdot e^{\alpha t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, в случае, когда $\alpha < 0$, независимо от степени многочлена $\mathbf{P}(t)$, а $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$ — ограничены. Поэтому в первом случае все решения системы стремятся к нулю, что означает асимптотическую устойчивость нулевого решения. Во втором случае $\alpha = 0$, тогда соответствующее слагаемое, принимающее вид $\mathbf{P}(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}(t) \sin \beta t$, ограничено только в том случае, когда максимальная степень многочленов $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ не превышает нуля, то есть только в том случае, когда жорданова клетка, отвечающая значению $\lambda = \beta i$, имеет размер, равный единице. Если это выполнено для всех мнимых собственных значений, то мы имеем

ограниченность общего решения и устойчивость по Ляпунову нулевого решения. Если же значению $\lambda = \beta i$ соответствует жорданова клетка большего размера, то найдется неограниченное частное решение, что означает неустойчивость нулевого решения.

В третьем случае слагаемое, соответствующее собственному значению с положительной действительной частью $\alpha > 0$, неограничено, так как: $\mathbf{P}(t) \cdot e^{\alpha t} \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \infty$, независимо от степени многочлена $\mathbf{P}(t)$, а $\sin\beta t$ и $\cos\beta t$ — ограничены. Нулевое решение неустойчиво. \square

Теорема 1.22 (Об устойчивости по первому приближению). *Рассмотрим систему*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varphi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.24)$$

Пусть при $t \geq 0$, $|\mathbf{x}| \leq \rho_0$ функция $\varphi \in C^1$, $|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \gamma(\mathbf{x})|\mathbf{x}|$, $\gamma(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ при $\mathbf{x} \rightarrow 0$.

1. Если действительные части всех собственных значений матрицы A строго меньше нуля ($\operatorname{Re} \lambda_j < 0$), то нулевое решение системы (1.24) асимптотически устойчиво.
2. Если есть хоть одно собственное значение матрицы A с положительной действительной частью ($\exists \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0$), то нулевое решение системы (1.24) неустойчиво.
3. Если есть хоть одно собственное значение матрицы A с нулевой действительной частью, а остальные — с неположительной ($\max \operatorname{Re} \lambda_j = 0$), то устойчивость зависит не только от матрицы A , но и от $\varphi(t, \mathbf{x})$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда все $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$.

Оценим столбцы матрицы e^{tA} . Это фундаментальная матрица для системы $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$, ее столбцы $\psi^1(t), \dots, \psi^n(t)$ — решения этой системы. Каждое решение имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + \mathcal{P}_m(t)e^{\lambda_m t},$$

где $\mathcal{P}_i(t)$ — многочлены, коэффициенты которых есть векторы из \mathbb{R}^n . Пусть $\alpha > 0$ такое, что все $\operatorname{Re} \lambda_j < -\alpha < 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$ имеем

$$|\mathcal{P}_i(t)e^{\lambda_j t}| = |\mathcal{P}_i(t)e^{(\lambda_j + \alpha)t}| \leq c_j e^{-\alpha t}.$$

Поэтому при некотором значении c справедливо

$$|\psi^k(t)| \leq c e^{-\alpha t} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Рассмотрим такую функцию Ляпунова

$$v(\mathbf{x}) = \int_0^\infty |e^{\tau A} \mathbf{x}|^2 d\tau.$$

Решение системы $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ с начальным условием $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ есть

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA} \mathbf{x} = x_1 \psi^1(t) + \dots + x_n \psi^n(t).$$

Поэтому

$$|e^{\tau A} \mathbf{x}|^2 = |\mathbf{y}(\tau)|^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(\tau) x_i x_j, \quad d_{ij}(\tau) = \psi^i(\tau) \psi^j(\tau).$$

Из полученной оценки решения следует, что $|d_{ij}(\tau)| \leq c^2 e^{-2\alpha\tau}$. Пользуясь этим, преобразуем функцию Ляпунова:

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = \int_0^\infty d_{ij}(\tau) d\tau = b_{ji}.$$

Используемые интегралы сходятся в силу полученных оценок.

Найдем $\frac{dv}{dt}$ в силу системы $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$. Имеем

$$\left. \frac{dv(\mathbf{x})}{dt} \right|_{\dot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}} = \left. \frac{dv(\mathbf{y}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_0^\infty |e^{\tau A} \mathbf{y}(t)|^2 d\tau \Big|_{t=0},$$

где $\mathbf{y}(t)$ — решение системы $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ с начальным условием $\mathbf{y}(0) = \mathbf{x}$, то есть $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{x}$. Подынтегральное выражение равно $|e^{\tau A}e^{tA}\mathbf{x}|^2 = |e^{(\tau+t)A}\mathbf{x}|^2$. Переход от τ к $s = \tau + t$ дает

$$\left. \frac{d}{dt} \int_0^\infty |e^{\tau A}\mathbf{y}(t)|^2 d\tau \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int_t^\infty |e^{sA}\mathbf{x}|^2 ds \right|_{t=0} = -|e^{tA}\mathbf{x}|^2 \Big|_{t=0} = -|e^{tA}\mathbf{x}|^2 \Big|_{t=0} = -|\mathbf{x}|^2.$$

Теперь найдем производную функции Ляпунова в силу системы (1.24)

$$\left. \frac{dv(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(1.24)} = (\text{grad } v(\mathbf{x})) \cdot (A\mathbf{x} + \varphi(t, \mathbf{x})) = (\text{grad } v(\mathbf{x})) \cdot A\mathbf{x} + (\text{grad } v(\mathbf{x})) \cdot \varphi(t, \mathbf{x}).$$

Первое слагаемое — это $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}}$, и мы его уже нашли.

Оценим второе слагаемое. Пользуясь неравенством Коши и считая $|b_{ij}| \leq b$, $i, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{dv}{dx_i} = 2 \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j, \quad \left(\frac{dv}{dx_i} \right)^2 \leq 4 \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq 4b^2 n |\mathbf{x}|^2.$$

$$|\text{grad } v(\mathbf{x})|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dv}{dx_i} \right)^2 \leq 4b^2 n^2 |\mathbf{x}|^2; \quad |\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \gamma(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|.$$

Поэтому

$$\left. \frac{dv(\mathbf{x})}{dt} \right|_{(1.24)} \leq -|\mathbf{x}|^2 + 2bn |\mathbf{x}| \cdot \gamma(\mathbf{x}) |\mathbf{x}| \leq -\frac{1}{2} |\mathbf{x}|^2$$

в той области, где $\gamma(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{4bn}$. Кроме того, из вида функции Ляпунова следует, что $v(\mathbf{0}) = 0$, $v(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, выполнены условия теоремы об устойчивости, и нулевое решение устойчиво.

Рассмотрим второй случай, при котором существует собственное значение с положительной вещественной частью. Без ограничения общности считаем, что $\text{Re } \lambda_j > 0$ при $j = 1, \dots, m$, и $\text{Re } \lambda_{m+k} \leq 0$ при $k = 1, \dots, n - m$. Существует матрица S , приводящая матрицу A к почти треугольному виду, то есть

$$S^{-1}AS = \Lambda + B,$$

где Λ — диагональная матрица из собственных значений, матрица B верхнетреугольная и имеет лишь нули на главной диагонали, причем $\|B\| \leq \epsilon_0$, где ϵ_0 можно выбирать сколь угодно малым. Пусть α — такая константа, что

$$0 < \alpha < \min_{1 \leq j \leq m} \text{Re } \lambda_j.$$

Проводя замену

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} S \mathbf{y}$$

с вообще говоря комплексными S и \mathbf{y} , получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = (\Lambda - \alpha E) \mathbf{y} + \psi(t, \mathbf{y}), \quad (1.25)$$

где матрица $(\Lambda - \alpha E)$ не имеет собственных значений с нулевой правой частью и

$$\psi(t, \mathbf{y}) = e^{-\alpha t} S^{-1} \varphi(t, e^{\alpha t} S \mathbf{y}).$$

Так как $|\varphi(t, \mathbf{x})| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|$ при $\|\mathbf{x}\| \leq h(\varepsilon)$ ($h(\varepsilon) > 0$), то

$$\|\psi(t, \mathbf{y})\| \leq \|s^{-1}\| \|S\| \|\mathbf{y}\|,$$

если $\|\mathbf{y}\| \leq e^{-\alpha t} \|S\|^{-1} h(\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$v(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^m |y_j|^2 - \sum_{k=1}^{n-m} |y_{m+k}|^2 \right).$$

Так как $\frac{d}{dt}|y_s|^2 = \bar{y}_s \frac{dy_s}{dt} + y_s \frac{d\bar{y}_s}{dt}$, то производная в силу системы будет иметь вид:

$$\left. \frac{dv(\mathbf{y})}{dt} \right|_{(1.25)} = \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}(\lambda_j - \alpha) |y_j|^2 + \sum_{k=1}^{n-m} (-\operatorname{Re}(\lambda_{m+k} - \alpha)) |y_{m+k}|^2 + \rho(t, \mathbf{y}) \|\mathbf{y}\|^2,$$

где $\rho(t, \mathbf{y}) = O(\varepsilon)$ при $\|\mathbf{y}\| \leq e^{-\alpha t} \|S\|^{-1} h(\varepsilon)$. Пусть $\beta = \min_{j,k} (\operatorname{Re}(\lambda_j - \alpha) - \operatorname{Re}(\lambda_{m+k} - \alpha))$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left. \frac{dv(\mathbf{y})}{dt} \right|_{(1.25)} \geq \frac{\beta}{2} \|\mathbf{y}\|^2 \geq \beta v(\mathbf{y}).$$

Следовательно, при $t_0 = 0$ и $v(\mathbf{y}(0)) > 0$ получаем

$$v(\mathbf{y}(t)) \geq v(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t},$$

то есть

$$\|\mathbf{y}(t)\|^2 \geq 2v(\mathbf{y}(0)) e^{\beta t}, \quad (1.26)$$

если только $\|\mathbf{y}\| \leq e^{-\alpha t} \|S\|^{-1} h(\varepsilon)$.

Пусть $\delta > 0$ произвольно мало. Можно выбрать $\mathbf{y}(0)$ так, что $\|\mathbf{y}(0)\| < \delta$, $v(\mathbf{y}(0)) > 0$. Из оценки (1.26) следует, что в некоторый момент $t_1 > 0$ будет выполнено $\|\mathbf{y}(t_1)\| \geq e^{-\alpha t_1} \|S\|^{-1} h(\varepsilon)$. Возврат к прежней переменной показывает, что тривиальное решение неустойчиво по Ляпунову, что и требовалось доказать.

Примером, иллюстрирующим третье утверждение теоремы, является следующая система

$$\begin{cases} \dot{x} = y - cx^3, \\ \dot{y} = -bx^3 - cy^3. \end{cases}$$

При различных значениях параметров возможна как устойчивость (разных видов), так и неустойчивость. \square

Замечание 1.14. В случае неположительности действительных частей всех корней характеристического уравнения и наличия хотя бы одного корня с нулевой действительной частью исследование по первому приближению невозможно.

Для исследования устойчивости по первому приближению приведем условия отрицательности всех действительных частей корней характеристического уравнения.

Рассмотрим уравнение с действительными коэффициентами:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0. \quad (1.27)$$

Теорема 1.23. *Необходимым условием отрицательности действительных частей всех корней уравнения (1.27) является: $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. В случае $n \leq 2$ это условие необходимое и достаточное.*

Теорема 1.24 (Критерий Рауса–Гурвица). *Для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (1.27) необходимо и достаточно положительности всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

то есть

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots$$

Теорема 1.25 (Условие Лъенара–Шипара). *Для отрицательности действительных частей всех корней уравнения (1.27) необходимо и достаточно:*

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \dots, \quad a_i > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1.5.3 Основные теоремы об устойчивости

Рассматривается система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \mathbf{f}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \quad (1.29)$$

Пусть в n -мерной области D задана функция $v(\mathbf{x})$.

Определение 1.31. Производной функции v в силу системы (1.29) называется

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(??)} = \frac{dv}{dx_1} \cdot f_1(t, \mathbf{x}) + \frac{dv}{dx_2} \cdot f_2(t, \mathbf{x}) + \dots + \frac{dv}{dx_n} \cdot f_n(t, \mathbf{x}). \quad (1.30)$$

Теорема 1.26 (Ляпунова об устойчивости). Пусть в системе (1.29) выполнено $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Если существует дифференцируемая в некоторой окрестности $|\mathbf{x}| < \rho$ начала координат функция $v(\mathbf{x})$, такая, что:

1. $v(\mathbf{x}) \geq 0, v(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$,
2. $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.29)} \leq 0$ при $t \geq T$,

то тривиальное решение системы (1.29) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Зафиксируем положительное $\varepsilon \geq \rho$.

Пусть в области $|\mathbf{x}| = \varepsilon$ минимальным значением функции $v(\mathbf{x})$ будет являться $v(\mathbf{x}^*)$ и по условию теоремы $v(\mathbf{x}^*) = m > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$, такое, что $v(\mathbf{x}) < m$ при $|\mathbf{x}| < \delta$.

Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.29) с начальным условием $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$. Пусть оно существует либо не на всем интервале $t_0 \leq t < \infty$, либо оно не остается в области $|\mathbf{x}| < \varepsilon$.

В силу следствия из теоремы о продолжаемости решения в замкнутой ограниченной области существует t_1 , такое, что

$$|\mathbf{x}(t_1)| = \varepsilon, |\mathbf{x}(t)| < \varepsilon, t_0 \leq t < t_1.$$

В силу выбора m, δ имеем

$$v(\mathbf{x}(t_0)) < m, v(\mathbf{x}(t_1)) \geq m.$$

Но по условию $v(t)$ не возрастает. Получаем противоречие.

Таким образом, $\mathbf{x}(t)$ при данном начальном условии остается в области $|\mathbf{x}| < \varepsilon$, что доказывает устойчивость нулевого решения по Ляпунову. \square

Пример 1.6. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases} \quad (1.31)$$

Пусть

$$\begin{aligned} v &= x^4 + y^4, \quad v \geq 0, \\ v = 0 &\Leftrightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.31)} = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0$$

Таким образом, нулевое решение системы устойчиво по Ляпунову.

Теорема 1.27 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). Пусть в системе (1.29) выполнено $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Если существует дифференцируемая в некоторой окрестности $U_\rho(0) = \{|\mathbf{x}| < \rho\}$ начала координат функция $v(\mathbf{x})$, такая, что:

1. $v(\mathbf{x}) \geq 0, v(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$,
2. $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(??)} \leq -w(t) < 0$ при $t \geq T, w(t) \in C(U_\rho(0))$,

то тривиальное решение системы (1.29) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Возьмем ε и δ из предыдущих рассуждений. Предшествующая теорема гласит о том, что нулевое решение устойчиво и любое решение $\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$ остается в $U_\varepsilon(0)$ при $t_0 \leq t < \infty$.

Предположим, что среди данных решений существует такое, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ не выполнено. Это означает, что существуют

$$\eta > 0, t_0 < t_1 < t_2 < \dots, t_n \rightarrow \infty, \eta \leq |\mathbf{x}(t_i)| \leq \varepsilon.$$

Но по условию теоремы будет существовать такое $\mu > 0$, что $v(\mathbf{x}) \geq \mu$ в замкнутой области $\eta \leq |\mathbf{x}| \leq \varepsilon$. Также $v(\mathbf{x}(t))$ как функция от t убывает, следовательно, $v(\mathbf{x}(t)) > \mu$.

Из непрерывности $v(\mathbf{x})$ заключаем, что данное решение $\mathbf{x}(t)$ никогда не попадет в некоторую область $U_\gamma(0)$, $0 < \gamma < \eta$, в которой функция $v(\mathbf{x}) < \mu$. Но в замкнутой области $\gamma < |\mathbf{x}| < \varepsilon$ непрерывная функция $w(\mathbf{x})$ имеет минимум $\beta > 0$. Откуда

$$v(\mathbf{x}(t)) = v(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{dv(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau} d\tau \leq v(\mathbf{x}(t_0)) - \beta(t - t_0) \rightarrow -\infty.$$

Приходим к противоречию, таким образом, все рассматриваемые решения $\mathbf{x}(t)$ с начальными условиями $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$ стремятся к нулю. \square

Пример 1.7. Исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases} \quad (1.32)$$

Пусть

$$\begin{aligned} v &= x^2 + y^2, \quad v \geq 0, \\ v = 0 &\Leftrightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.32)} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2xy - 2x + 2xy - 2y^4 = -2(x^4 + y^4) < 0 \text{ при } x \neq 0 \text{ или } y \neq 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы асимптотически устойчиво.

Теорема 1.28 (Теорема Четаева о неустойчивости). Рассматривается система

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (1.33)$$

Пусть $\mathbf{x}(t) \equiv 0$ — решение этой системы. Пусть область D пространства \mathbf{x} лежит в шаре $S(|\mathbf{x}|, \varepsilon)$, а ее граница $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $0 \in \Gamma_0$, $|\mathbf{x}| < \varepsilon$ на Γ_0 , $|\mathbf{x}| = \varepsilon$ на Γ_1 , Γ_1 может быть пустым. Пусть в $D \cup \Gamma$ существует непрерывная функция $v(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}) = 0$ на Γ_0 , а в D имеем $v \in C^1$, $v(\mathbf{x}) > 0$, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(1.33)} \geq \omega(\mathbf{x}) > 0$, и функция ω непрерывна в $D \cap \Gamma$. Тогда нулевое решение системы неустойчиво.

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть нулевое решение устойчиво. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}(t_0) \in D$, $|\mathbf{x}(t_0)| < \delta$, останется в шаре S при $t_0 \leq t < \infty$. Пока $\mathbf{x}(t) \in D$, имеем $\left. \frac{dv(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{(1.33)} > 0$, значит, $v(\mathbf{x}(t))$ возрастает и $v(\mathbf{x}(t)) > v(\mathbf{x}(t_0)) = v_0 > 0$. Та часть D_0 множества $D \cup \Gamma$, где $v(\mathbf{x}) \geq v_0$ — ограниченное замкнутое множество (в предельных точках этого множества, ввиду непрерывности $v(\mathbf{x})$ также имеем $\mathbf{x} \in D \cup \Gamma$, $v(\mathbf{x}) \geq v_0$). Решение $\mathbf{x}(t)$ не может выйти из D_0 , так как на Γ_0 имеем $v(\mathbf{x}) = 0$, а на Γ_1 решение не попадает, так как $|\mathbf{x}(t)| < \varepsilon$. На D_0 имеем $\omega(\mathbf{x}) \geq \beta > 0$,

$$\frac{d}{dt} v(\mathbf{x}(t)) \geq \omega(\mathbf{x}(t)) \geq \beta, v(\mathbf{x}(t)) - v(\mathbf{x}(t_0)) \geq \beta(t - t_0) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Это противоречит ограниченности функции $v(\mathbf{x})$ в D_0 . Следовательно, нулевое решение неустойчиво. \square

1.6 Системы дифференциальных уравнений с параметром

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{a}(\mu), \end{cases} \quad (1.34)$$

где $\mu \in (\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, $(t, \mathbf{x}) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Определение 1.32. Решением задачи (1.34) называется вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mu)$, обращающая уравнения системы в тождество, и удовлетворяющая начальному условию при каждом μ .

Приведем без доказательства теорему о непрерывной зависимости решения задачи (1.34) от параметра.

Теорема 1.29. Пусть $\mu \in (\alpha, \beta)$, $(t, x) \in D$, $(t_1, t_2) \ni t_0$, и \mathbf{f} , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ непрерывны по совокупности переменных.

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, такой что $(t_0, \mathbf{x}) \in D$, определено решение $\mathbf{x} = \varphi(t, \mu_0)$ исходной задачи при $\mu = \mu_0$, имеющее максимальную область существования $[t_1, t_2] \ni t_0$. Пусть в окрестности $V = (t, \mathbf{x}) : t \in [t_1, t_2], \|\mathbf{x} - \varphi(t, \mu_0)\| \leq \rho$ определены и непрерывны \mathbf{f} , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, вектор-функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mu)$ непрерывна при $\mu \in (\alpha, \beta)$.

Тогда существует такое $\eta > 0$, что для любого такого $\mu \in (\alpha, \beta)$, что $|\mu - \mu_0| < \eta$ решение $\varphi(t, \mu)$ непрерывно.

Теорема 1.30. Пусть $\mu \in (\alpha, \beta)$, $(t, \mathbf{x}) \in D$, $(t_1, t_2) \ni t_0$. Пусть \mathbf{f} , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$, $\mathbf{a}'(\mu)$ непрерывны по совокупности переменных. (Пусть решение задачи (1.34) существует при любом $\mu \in (\alpha, \beta)$.) Тогда существуют $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, $u_i = u_i(t, \mu)$, непрерывные в области $t \in (t_1, t_2)$, $\mu \in (\alpha, \beta)$, причем, u_i являются решениями системы уравнений в вариациях

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, i = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$u_i(t_0) = \mathbf{a}'(\mu).$$

Здесь $f_i = f_i(t, x_1(t, \mu), \dots, x_n(t, \mu))$, где $x_i(t, \mu)$ — решения исходной системы при некотором μ .

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in (\alpha, \beta)$. Рассмотрим $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mu} = \lim_{\tilde{\mu} \rightarrow \mu} \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\tilde{\mu} - \mu}$, где \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}}$ — решения задач (1.34) при μ и $\tilde{\mu}$ соответственно. Обозначим $\mathbf{v}(t, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\tilde{\mu} - \mu}$ при $\tilde{\mu} \neq \mu$. Вычислим $\dot{\mathbf{v}}(t, \tilde{\mu})$. Имеем:

$$\dot{\mathbf{v}}(t, \tilde{\mu}) = \frac{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{x}}}{\tilde{\mu} - \mu} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} (\mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mu)) =$$

(обозначим $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + s(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$, $\mu^* = \mu + s(\tilde{\mu} - \mu)$, где $0 \leq s \leq 1$, и $\mathbf{F}(s) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*, \mu^*)$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} (\mathbf{F}(1) - \mathbf{F}(0)) = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 \mathbf{F}'(s) ds = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*} (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu^*} (\tilde{\mu} - \mu) \right) ds = \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*} ds + \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu^*} ds = \mathbf{v}(t, \tilde{\mu}) \mathbf{H}(t, \tilde{\mu}) + \mathbf{h}(t, \tilde{\mu}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{H}(t, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^*} ds$ и $\mathbf{h}(t, \tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mu^*} ds$. Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}(t, \tilde{\mu}) = \mathbf{v}(t, \tilde{\mu}) \mathbf{H}(t, \tilde{\mu}) + \mathbf{h}(t, \tilde{\mu}), \\ \mathbf{v}(t_0, \tilde{\mu}) = \frac{\mathbf{a}(\tilde{\mu}) - \mathbf{a}(\mu)}{\tilde{\mu} - \mu}. \end{cases} \quad (1.35)$$

Подынтегральные функции в уравнениях выше непрерывны как функции $t, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mu, \tilde{\mu}, s$, а сами интегралы непрерывны как функции от $t, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mu, \tilde{\mu}$. Система (1.35) получена для функции $\mathbf{v}(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} \neq \mu$

Доопределим функцию $\mathbf{v}(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} = \mu$ как решение уравнения из системы (1.35) с начальным условием $\mathbf{v}(t_0, \mu) = \mathbf{a}'(\mu)$. По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра $\mathbf{v}(t, \mu)$ будет определено и при $\tilde{\mu} = \mu$.

При $\tilde{\mu} \neq \mu$ подынтегральные функции в выражениях выше зависят только от $t, \mathbf{x}^* = \mathbf{x}, \mu^* = \mu$ (не зависят от s), поэтому

$$\mathbf{H}(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad h(t, \mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu},$$

следовательно, из системы (1.35) получаем

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{pmatrix}, \text{ где } \dot{u}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu}, i = 1, \dots, n, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{v}(t_0, \mu) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t_0, \mu) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t_0, \mu) \end{pmatrix} = \mathbf{a}'(\mu). \quad (1.37)$$

Таким образом, по теореме о непрерывной зависимости решения системы (1.36)–(1.37) от параметра получаем, что $u_i(t, \mu)$ непрерывны по t и μ (заметим, что правая часть системы (1.36) непрерывна). Далее, варьируя $\mu \in (\alpha, \beta)$, можно доказать непрерывную зависимость производной от параметра на всем интервале. \square

1.6.1 Производная системы по начальным условиям.

Рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

где $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$.

Обозначим: $u_i^k = \frac{\partial x_i}{\partial x_0^k}$.

Теорема 1.31. Пусть $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда функции u_i^k непрерывны по x_0^k и удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^k &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j^k, \\ u_i^k(t_0) &= \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы, если положить $\mu = x_0^k$. \square

2 Уравнения с частными производными первого порядка

Определение 2.1. Уравнение вида

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, называется **уравнением с частными производными первого порядка**.

Определение 2.2. Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n),$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, называется **линейным неоднородным** уравнением с частными производными первого порядка. Если $b(x_1, \dots, x_n) = 0$, то уравнение называется **линейным однородным**.

Определение 2.3. Уравнение вида

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u),$$

где $a_1, \dots, a_n, b \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, называется **квазилинейным неоднородным** уравнением с частными производными первого порядка. Если $b(x_1, \dots, x_n, u) = 0$, то уравнение называется **квазилинейным однородным**.

2.1 Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается уравнение

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Составим систему уравнений характеристик

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)}$$

Также систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. Функция $u(x_1, \dots, x_n)$ является решением линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка тогда и только тогда, когда она является независимым от времени первым интегралом системы (2.1).

Доказательство. Если $u(x_1, \dots, x_n)$ — независимый от времени первый интеграл, то он постоянен вдоль решений системы (2.1). Тогда производная вдоль решения этой системы равна

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{x(t)} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \dot{x}_n = \frac{\partial u}{\partial x_1} a_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} a_n = 0.$$

Первый интеграл — решение системы, и наоборот: если $u(x_1, \dots, x_n)$ — решение уравнения, то из этого равенства следует, что оно постоянно вдоль решений системы (2.1) и не зависит от времени. \square

Теорема 2.2. Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка имеет вид

$$F(v_1, \dots, v_{n-1}) = 0,$$

где v_1, \dots, v_{n-1} — функционально независимые первые интегралы системы (2.1), а $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ — дифференцируемая функция.

Доказательство. Это следует из предыдущей теоремы (решение — первый интеграл) и теоремы об общем виде первого интеграла. \square

Пример 2.1. Рассматривается следующее уравнение в частных производных первого порядка:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Выпишем систему уравнений характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Решая ее уравнения, находим первые интегралы $\frac{x}{y} = C_1$, $\frac{y}{z} = C_2$. Тогда решение уравнения имеет вид:

$$u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

2.2 Общее решение линейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается неоднородное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n).$$

Для него **система уравнений характеристик** имеет вид

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)} = \frac{du}{b(x_1, \dots, x_n)}$$

Также систему можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{u} = b(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

У такой системы есть n функционально независимых первых интегралов $v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)$, и общее решение имеет вид

$$F(v_1, \dots, v_n) = 0,$$

где F — дифференцируемая функция (то есть $u(x_1, \dots, x_n)$ задается неявно.) Если только v_n зависит от u , то общее решение системы имеет примет вид:

$$v_n = G(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

2.3 Общее решение квазилинейного неоднородного уравнения в частных производных первого порядка.

Рассматривается квазилинейное неоднородное уравнение

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, u).$$

Для него **система уравнений характеристик** имеет вид

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{b(x_1, \dots, x_n, u)} \quad (2.2)$$

Также систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \dots, x_n, u), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \dots, x_n, u), \\ \dot{u} = b(x_1, \dots, x_n, u). \end{cases}$$

У такой системы есть n функционально независимых первых интегралов $v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)$, и общее решение имеет вид

$$F(v_1, \dots, v_n) = 0,$$

где F — дифференцируемая функция (то есть $u(x_1, \dots, x_n)$ опять задается неявно.)

Теорема 2.3 (без доказательства). *Решение квазилинейного уравнения состоит из его характеристик.*

Теорема 2.4 (Об общем решении квазилинейного уравнения). *Пусть $v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)$ — система функционально независимых первых интегралов системы (2.2). Тогда функция $u(x_1, \dots, x_n)$ является решением уравнения (2.2) в окрестности точки M тогда и только тогда, когда*

$$F(v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0,$$

где F — дифференцируемая функция, $F(M) = 0$, $F'_u \neq 0$ в точке M .

Доказательство. Если $F(v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0$, то производная вдоль решений системы характеристик

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{x(t)} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial F}{\partial u} \dot{u} = \frac{\partial F}{\partial x_1} a_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} a_n + \frac{\partial F}{\partial u} b.$$

По теореме о неявной функции, условия которой выполнены (так как $F'_u \neq 0$ в точке M), для неявной функции $u(x_1, \dots, x_n)$ справедливо

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Подставив это выражение и поделив на $\frac{\partial F}{\partial u}$, мы докажем требуемое.

Покажем, что других решений нет. Пусть, например, $a_1(M) \neq 0$. Тогда в окрестности точки M характеристики уравнения удовлетворяют системе

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i}{a_1}, \quad \frac{du}{dx_1} = \frac{b}{a_1}. \quad (2.3)$$

Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n) \in C^1$ — произвольное решение (2.2), $M = (x_{10}, \dots, x_{n0}, u_0)$ — точка на его графике. Решение (2.3) с начальными условиями

$$x_i(x_{10}) = c_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$z(x_{10}) = f(x_{10}, c_2, \dots, c_n) + c_{n+1},$$

обозначим через

$$x_i = \varphi_i(x_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}), \quad i = 2, \dots, n,$$

$$u = \varphi_{n+1}(x_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}).$$

При $x_1 = x_{10}$, $c_i = x_{i0}$, $i = 2, \dots, n$, $c_{n+1} = 0$ получаем точку M . В этой точке $\det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j} \right)_{i=2, \dots, n} = 1$, поэтому по теореме о неявной функции можно выразить c_i :

$$c_i = \omega_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 2, \dots, n+1.$$

Получается, что ω_i — первые интегралы системы (2.3). Поверхность $\omega_{n+1} = 0$ совпадает с поверхностью $u = f(x_1, \dots, x_n)$, так как они обе состоят из характеристик с одинаковыми начальными условиями, где $c_{n+1} = 0$. Как первый интеграл w_{n+1} представляется в виде

$$w_{n+1} = F(v_1, \dots, v_n),$$

где v_1, \dots, v_n — независимая система первых интегралов.

Поскольку $w_{n+1}(x_{10}, \dots, x_{n0}, u) = c_{n+1} = u - f(x_{10}, \dots, x_{n0})$, то и $F'_u \neq 0$. □

Для нахождения первых интегралов можно использовать следующую лемму

Лемма 2.1. Если числа a_i, b_i такие, что $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = l$, то для любого набора k_1, \dots, k_n справедливо

$$\frac{k_1 a_1 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + \dots + k_n b_n} = l.$$

Пример 2.2. Рассмотрим неоднородное уравнение в частных производных

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

Выпишем систему уравнений характеристик

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{x^2},$$

откуда

$$x dx = 2 dz \Rightarrow \frac{x^2}{2} - 2z = c_1$$

и

$$\frac{1dx + 1dy}{1(2x) + 1(y - x)} = \frac{d(x + y)}{x + y} = \frac{dx}{2x} \Rightarrow \frac{x + y}{\sqrt{x}} = c_2$$

Тогда общее решение уравнения можно записать в виде $F\left(\frac{x^2}{2} - 2z, \frac{x+y}{\sqrt{x}}\right) = 0$ или $z = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}G\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}}\right)$.

2.4 Постановка задачи Коши

Определение 2.4. Задачей Коши называется задача нахождения решения уравнения

$$a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z),$$

проходящего через кривую

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \eta(t). \end{cases}$$

Теорема 2.5. Решение задачи Коши существует и единственно в окрестности дуги кривой, на которой выполнено **условие нехарактеристичности**

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Замечание 2.1 (Геометрический смысл условия нехарактеристичности). Вектор (a_1, a_2, b) касательный к характеристике. Вектор (φ', ψ', η') касательный к кривой, через которую должно проходить решение. Это условие означает, что проекции этих векторов на плоскость (x, y) не параллельны.

Доказательство. Решение такого уравнения состоит из характеристик. Из каждой точки кривой $(\varphi(s), \psi(s), \eta(s))$ выходит единственная характеристика $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$. По теореме о непрерывной зависимости решения системы уравнений характеристик непрерывны и непрерывно зависят от начальных условий, поэтому $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ — непрерывная функция. Образует ли она поверхность $z = z(x, y)$?

Система

$$\begin{cases} x = x(t, s), \\ y = y(t, s), \end{cases}$$

по теореме о неявной функции обратима, то есть приводима к виду:

$$\begin{cases} t = t(x, y), \\ s = s(x, y), \end{cases}$$

если в некоторой точке

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пусть $(\varphi(s), \psi(s), \eta(s)) = (x(0, s), y(0, s), z(0, s))$. Рассмотрим точку $(0, s)$. В ней $\frac{dx}{dt} = a_1$, $\frac{dy}{dt} = a_2$, что следует из системы уравнений характеристик.

Так как $(\varphi(s), \psi(s)) = (x(0, s), y(0, s))$, то $\frac{dx}{ds} = \varphi'$, $\frac{dy}{ds} = \psi'$. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{dt} & \frac{dy}{ds} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следовательно, применима теорема о неявной функции, и поверхность получается как

$$z = z(t(x, y), s(x, y)).$$

Ее единственность следует из единственности характеристик. □