Решение задач к занятию 15

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)e^{ix}}{x^2+4x+104}\,dx$

Решение: Здесь $F(x)=\frac{x+2}{x^2+4x+104}$ – правильная рациональная дробь, $F(x)$ непрерывна на всей действительной оси. Параметр α в формуле (15.1) равен 1 $(\alpha=1>0)$.

Особые точки функции комплексной переменной $F(z)$ совпадают с особыми точками функции $F(z)\cdot e^{iz}$. Найдем их:

$$z^2+4z+104=0$$

$$z_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-104}=-2\pm 10i$$

Точка $z_1=-2+10i$ лежит в верхней полуплоскости ($Im z_1>0$), а точка $z_2=-2-10i$ – в нижней полуплоскости. Обе точки – полюса 1-го порядка.

$$\underset{z=z_1}{res}\,[F(z)e^{iz}]=\underset{z=z_1}{res}\frac{(z+2)e^{iz}}{z^2+4z+104}=$$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{(z+2)e^{iz}}{(z^2+4z+104)'}=\lim_{z\to z_1}\frac{(z+2)e^{iz}}{2z+4}=\lim_{z\to z_1}\frac{e^{iz}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{i(-2+10i)}=\frac{1}{2}e^{-2i-10}=\frac{1}{2}e^{-10}(\cos 2-i\sin 2)$$

Согласно теореме 1 (формула (15.1)):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)e^{ix}dx=2\pi i\,\underset{z=z_1}{res}[F(z)e^{iz}]=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-10}(\cos 2-i\sin 2)=$$

$$=\pi i e^{-10}(\cos 2-i\sin 2)=$$

$$=\pi e^{-10}(\sin 2+i\cos 2)$$

Ответ: $\pi e^{-10}(\sin 2+i\cos 2)$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$

Решение. Функция $F(x)=\frac{x}{x^2-2x+10}$ – непрерывна на $\mathbb{R}$, принимает вещественные значения и представляет собой правильную рациональную дробь.

Воспользуемся замечанием 2 к теореме 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx=Re\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x e^{ix}}{x^2-2x+10}dx=Re\Big\{2\pi i\sum_{Im z_k>0}res[F(z)e^{iz}]\Big\}=$$

Особые точки $F(z)e^{iz}$:

$$z^2-2z+10=0$$

$$z_{1,2}=1\pm\sqrt{1-10}=1\pm 3i \;;\; z_1=1+3i\;;\; z_2=1-3i;$$ (полюсы 1-го порядка)

$$Im\, z_1>0 \;,\; Im\, z_2<0.$$

$$\underset{z=z_1}{res}\left[F(z)e^{iz}\right]=\underset{z=z_1}{res}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}=\lim_{z\to z_1}\frac{ze^{iz}}{(z^2-2z+10)'}=\lim_{z\to z_1}\frac{ze^{iz}}{2z-2}=$$

$$=\frac{z_1e^{iz_1}}{2(z_1-1)}=\frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{2(\cancel{1}+3i-\cancel{1})}=\frac{1}{6i}\cdot(1+3i)e^{-3}(\cos 1+i\sin 1)=$$

$$=\frac{e^{-3}}{6i}(\cos 1+i\sin 1+3i\cos 1-3\sin 1).$$ Продолжим вычисление интеграла

$$= Re\left\{2\pi \cancel{i}\cdot\frac{e^{-3}}{6\cancel{i}}(\cos 1-3\sin 1+i(\sin 1+3\cos 1))\right\}=\frac{\pi e^{-3}}{3}(\cos 1-3\sin 1)$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{x^2+4x+20}=Im\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}dx}{x^2+4x+20} =$$

Функция $F(x)=\frac{x}{x^2+4x+20}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Особые точки функции $F(z)\cdot e^{iz}$:

$$z^2+4z+20=0$$

$$z_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-20}=-2\pm 4i \quad - П1$$

$$\underset{z=z_1}{res}\left[F(z)e^{iz}\right]=\lim_{z\to z_1}\frac{ze^{iz}}{(z^2+4z+20)'}=\lim_{z\to z_1}\frac{ze^{iz}}{2z+4}=\frac{z_1e^{iz_1}}{2(z_1+2)}=$$

$$=\frac{(-2+4i)e^{i(-2+4i)}}{2(-\cancel{2}+4i+\cancel{2})}=\frac{1}{4i}(-1+2i)e^{-4}(\cos 2-i\sin 2)=$$

$$=\frac{e^{-4}}{4i}(-\cos 2+i\sin 2+2i\cos 2+2\sin 2)$$

$$= Im\left\{2\pi i\cdot\underset{z=z_1}{res}\left[F(z)e^{iz}\right]\right\}=Im\left\{2\pi\cancel{i}\cdot\frac{e^{-4}}{4\cancel{i}}(2\sin 2-\cos 2+i(\sin 2+2\cos 2))\right\}$$

$$=\frac{\pi e^{-4}}{2}(\sin 2+2\cos 2)$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi}{2e^4}(\sin 2+2\cos 2)$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$, $a>0$, $b>0$

Решение:

Подынтегральная функция $f(x)=\frac{x\sin ax}{x^2+b^2}$ является четной. Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx \overset{(15.4)}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot \underset{z=ib}{\mathrm{res}}\left[\frac{ze^{iaz}}{z^2+b^2}\right]\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\lim_{z\to ib}\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)'}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{2\pi i\cdot\lim_{z\to ib}\frac{\cancel{z}e^{iaz}}{\cancel{2z}}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\pi i e^{-ab}\right\} = \frac{1}{2}\pi e^{-ab}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}e^{-ab}$

5) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$

Решение: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}dx}{(x^2+4)^2} =$

Особые точки функции $\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$: $z_1=2i$, $z_2=-2i$ – П2

Найдем вычет этой функции в точке z_1, лежащей в верхней полуплоскости:

$$\underset{z=2i}{\mathrm{res}}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2} = \lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2\cdot\frac{e^{iz}}{[(z-2i)(z+2i)]^2}\right)' = \lim_{z\to 2i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2}\right)' =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)^2-e^{iz}\cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} = \lim_{z\to 2i}\frac{ie^{iz}(z+2i)-2e^{iz}}{(z+2i)^3} =$$

$$= \frac{ie^{-2}\cdot 4i-2e^{-2}}{(4i)^3} = \frac{-6e^{-2}}{-64i} = \frac{3}{32e^2 i}$$

Продолжим вычисление интеграла:

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{2\pi i\ \underset{z=2i}{\mathrm{res}}\frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{2\pi \cancel{i}\cdot\frac{3}{32e^2\cancel{i}}\right\} = \frac{3\pi}{32e^2}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{32e^2}$

6) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{2ix}}{x^2+2x+2}\,dx \;=$$

Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{z+1}{z^2+2z+2}$.

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 1

Найдем особые точки $F(z)e^{2iz}$: $z^2+2z+2=0$

$z_{1,2} = -1 \pm i$ – П1

$\operatorname{Im} z_1 > 0$, $\operatorname{Im} z_2 < 0$

Вычислим вычет $F(z)e^{2iz}$ в точке z_1:

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} F(z)e^{2iz} = \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{(z+1)e^{2iz}}{z^2+2z+2} = \lim_{z\to z_1} \frac{(z+1)e^{2iz}}{(z^2+2z+2)'} =$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{(z+1)e^{2iz}}{2z+2} = \frac{1}{2}e^{2iz_1} = \frac{1}{2}e^{2i(-1+i)} = \frac{1}{2}e^{-2-2i} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2}(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$= \operatorname{Im}\left\{2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} F(z)e^{2iz}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\cancel{2}\pi i\, \frac{1}{\cancel{2}}e^{-2}(\cos 2 - i\sin 2)\right\} =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\pi i e^{-2}\cos 2 + \pi e^{-2}\sin 2\right\} = \pi e^{-2}\cos 2$$

<u>Ответ</u>: $\pi e^{-2}\cos 2$

7) $$\int_{0}^{+\infty} \frac{(x^2-b^2)\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx, \quad a>0,\ b>0$$

<u>Решение</u>: Эта задача отличается от предыдущих тем, что подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{(x^2-b^2)\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ имеет на действительной оси точку устранимого разрыва $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -a$.

Обозначим буквой I исходный интеграл и заметим, что $f(x)$ – четная функция. Тогда

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{(x^2-b^2)\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-b^2)\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx =$$

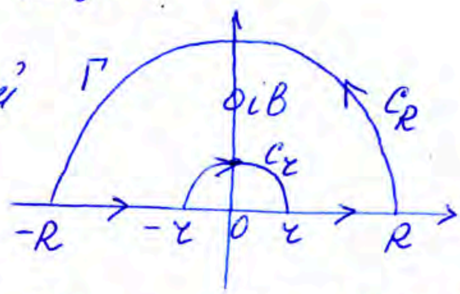
$$= \frac{1}{2}\, Im \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-b^2)e^{iax}}{x(x^2+b^2)}\,dx$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной

$$h(z) = \frac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}.$$

Эта функция имеет особые точки: $z=0$, $z=ib$, $z=-ib$, которые являются полюсами 1-го порядка

Построим замкнутый контур Γ, состоящий из двух дуг полуокружностей C_r, C_R и двух отрезков действительной оси:



$$\Gamma = [-R;-r] \cup C_r \cup [r;R] \cup C_R$$

Значение r и R выберем так, чтобы внутри Γ оказалась особая точка $z=ib$. Согласно первой теореме о вычетах

$$\oint\limits_{\Gamma} h(z)dz = 2\pi i \cdot \underset{z=ib}{res}\, h(z) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\int\limits_{-R}^{-r} \frac{(x^2-b^2)e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx + \int\limits_{C_r} \frac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz + \int\limits_{r}^{R} \frac{(x^2-b^2)e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx + \int\limits_{C_R} \frac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \underset{z=ib}{res}\, h(z) \qquad (*)$$

Выполним последовательно вычисления в $(*)$:

1) $$\underset{[t=-x]}{\int\limits_{-R}^{-r} \frac{(x^2-b^2)e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx} + \underset{[t=x]}{\int\limits_{r}^{R} \frac{(x^2-b^2)e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx} = \int\limits_{R}^{r} \frac{(t^2-b^2)e^{-iat}}{(-t)(t^2+b^2)}(-dt) +$$

$$+ \int\limits_{r}^{R} \frac{(t^2-b^2)e^{iat}}{t(t^2+b^2)}dt = \int\limits_{r}^{R} \frac{(t^2-b^2)(e^{iat}-e^{-iat})}{t(t^2+b^2)}dt =$$

$$= 2i \int\limits_{r}^{R} \frac{(t^2-b^2)\sin at}{t(t^2+b^2)}dt \xrightarrow[R\to+\infty]{r\to 0} 2i \cdot I$$

2) $$\int\limits_{C_r} \frac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz$$

Заметим, что $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z^2+b^2}=-1$

Следовательно, $\dfrac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z^2+b^2}=-1+g_1(z)$, где $\lim\limits_{z\to 0} g_1(z)=0$

$$h(z)=(-1+g_1(z))\cdot\frac{1}{z}$$

Вычислим интеграл в пункте 2) непосредственно с помощью параметризации кривой интегрирования

$C_r:\ z=re^{i\varphi}$, $\pi\geq\varphi\geq 0$

$$\int\limits_{C_r} h(z)\,dz=\int\limits_{C_r}[-1+g_1(z)]\cdot\frac{dz}{z}=\int\limits_{\pi}^{0}[-1+g_1(re^{i\varphi})]\cdot\frac{rie^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}}=$$

$$=i\int\limits_{\pi}^{0}[-1+g_1(re^{i\varphi})]\,d\varphi \xrightarrow[r\to 0]{} i\pi$$

3) $\displaystyle\int\limits_{C_R}\frac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ согласно лемме Жордана

(для функции $g(z)=\dfrac{z^2-b^2}{z(z^2+b^2)}$ выполнены условия а), б) леммы Жордана)

4) $\operatorname*{res}\limits_{z=ib} h(z)=\lim\limits_{z\to ib}[(z-ib)h(z)]=\lim\limits_{z\to ib}\dfrac{(z^2-b^2)e^{iaz}}{z(z+ib)}=\dfrac{-2b^2e^{-ab}}{ib\cdot 2ib}=e^{-ab}$

Подставляя результаты вычислений в пунктах 1)–4) в равенство (*) и переходя к пределу при $r\to 0$, $R\to+\infty$, получим:

$$2iI+i\pi+0=2\pi i\cdot e^{-ab}$$

$$\Rightarrow\quad I=\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)$$

<u>Ответ</u>: $\pi\left(e^{-ab}-\frac{1}{2}\right)$