13 семинар

6.6 Что такое сумма, произведение линейных операторов? Что происходит с матрицами линейных операторов при сложении, умножении операторов?

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x); \quad (\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2))(x) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x))$$

Вспомним формулу $\mathcal{A}(x) = \text{Б}AX$.

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x) = \text{Б}A_1X + \text{Б}A_2X = \text{Б}(A_1 + A_2)X \Rightarrow$$

матрица суммы операторов равна сумме матриц слагаемых.

$$(\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2))(x) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x)) = \mathcal{A}_1(\text{Б}A_2X) = \text{Б}A_1(A_2X) = \text{Б}(A_1A_2)X \Rightarrow$$

матрица произведения операторов равна произведению матриц сомножителей.

6.7 Как образуется матрица перехода от данного базиса к новой системе векторов? Каков критерий базисности новой системы? Как преобразуются координаты векторов и матрица линейного оператора при переходе к другому базису? Что происходит при этом с определителем матрицы?

Надеюсь, все помнят, что координаты векторов нового базиса, разложенных по старому базису, нужно записывать по столбцам, а не по строкам.

В условии, правда, говорится не о новом базисе, а о новой систкме векторов, но это не меняет сути дела – записывать все равно будем по столбцам. А по поводу критерия базисности – во-первых столбцов должно быть столько же, сколько векторов в исходном базисе, а во-вторых определитель матрицы перехода должен быть отличен от нуля. Если же мы говорим не о базисе всего пространства, а о базисе линейной оболочки, натянутой на эту систему, то о числе столбцов мы не должны заботиться, а вот ранг матрицы должен быть равен числу векторов в системе.

Изменение координат векторов и матрицы оператора при замене базиса – об этом лень писать, эти формулы все должны помнить наизусть. Ну и выводить их, конечно.

Определитель матрицы оператора при замене базиса не меняется:

$$\det(A_2) = \det(C^{-1}A_1C) = \det(C^{-1} \cdot \det(A_1) \cdot \det(C) = \det(A_1).$$

6.8 Какие матрицы называются подобными? Какие свойства подобия матриц Вы знаете? Как связаны между собой определители подобных матриц?

$A \sim B$, если существует матрица C такая, что $A = C^{-1}BC$. Другими словами, матрицы подобны, если они являются матрицами одного и того же оператора (C здесь выступает как матрица перехода к новому базису). Свойства подобия нужно уметь выводить двумя способами – непосредственно из определения и исходя из того, что они являются матрицами одного и того же оператора (и тогда свойства становятсмя совершенно прозрачными). Три свойства подобия говорят о том, что подобие является отношением эквивалентности: рефлексивность ($A \sim A$), симметричность ($A \sim B \Rightarrow B \sim A$), транзитивность ($A \sim B \sim D \Rightarrow A \sim D$). Отнеситесь к этому пункту с полной серьезностью. Он нам еще понадобится в третьем семестре.

То, что определители подобных матриц совпрадают, мы доказали в предыдущем пункте.

6.9 Какой оператор называется невырожденным? Что такое обратный оператор? Каков критерий его существования? Как найти матрицу обратного оператора? Известно, что линейный оператор $\mathcal{A}$ переводит вектор $x \neq \bar{0}$ в нуль вектор. Существует ли $\mathcal{A}^{-1}$?

Мы оператор называли невырожденным, если он является мономорфизмом, то есть если он разные векторы переводит в разные (что равносильно тому, что ядро оператора состоит только из нулевого вектора). В конечнометном пространстве (а у нас по сути встречаются только такие) невырожденность равносильна изоморфности, то есть мономорфность приводит и к эпиморфности. Про обратный оператор писать не буду,защищая пятую задачу типового расчета Вы уже должны были на эту тему высказаться.

6.10 Что такое собственный вектор линейного оператора? Каков геометрический смысл собственного вектора в пространстве V^3? Пусть x – собственный вектор. Укажите ещё какой-нибудь собственный вектор, отвечающий тому же собственному значению. Могут ли быть

линейно зависимыми собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям?

Не забудьте наряду с условием $\mathcal{A}(x) = \lambda x$ упомянуть, что собственный вектор предполагается ненулевым. Геометрический смысл – это, естественно, коллинеарность собственно вектора x и его образа $\mathcal{A}(x)$ под действием оператора.

Все векторы вида Cx, где x – собственный вектор, а $C \neq \bar{0}$,являются собственными с тем же собственным значением – это следует ихз линейности оператора: $\mathcal{A}(Cx) = C\mathcal{A}(x) = C \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot (Cx)$.

С последним вопросом разбирайтесь самостоятельно; на лекции линейную независимость собственных векторов с различными собственными значениями я доказывал.

6.11 Верны ли утверждения:
а) если λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то λ^k – собственное значение оператора $\mathcal{A}^k$;
б) Если x – собственный вектор операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с собственными значениями λ и μ соответственно, то x – собственный вектор для $\mathcal{AB}$; $\mathcal{A} + \mathcal{B}$; $\mathcal{A} - \mathcal{B}$? Если да, то с каким собственным значением?

Первое утверждение, естественно, справедливо, причем не только для натуральных k, но и для всех целых. Например, $\mathcal{A}^2(x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}(x) = \lambda^2 x$; для обратного оператора мы имеем $\mathcal{A}(x) = \lambda x \Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(\lambda x) = x \Rightarrow \lambda\mathcal{A}^{-1}(x) = x$; $\mathcal{A}^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x$ (если, конечно, обратный оператор существует).

Переходим ко второму утверждению. Оно также справедливо. Доказывайте его сами.

6.12 Исходя из геометрического смысла оператора $\mathcal{A} : V^3 \to V^3$, указать его собственные значения и собственные векторы. Обладает ли он базисом из собственных векторов? Если да, то как выглядит матрица оператора в этом базисе? Является ли оператор невырожденным? Пункты а), б), в), г) – как в третьей задаче типового расчета, так что с ними разбирайтесь сами. В пункте д) – оператор $\mathcal{A}(x) = [x, a]$, $a \neq \bar{0}$.

Ненулевые векторы, коллинеарные a, конечно будут собственными с $\lambda = 0$, поскольку они переходят в нулевой вектор. Больше собственных векторов нет, поэтому и собственного базиса нет. Оператор вырожденный, поскольку есть векторы, переходящие в нулевой.

6.13 Что такое характеристический многочлен линейного оператора? Зачем он нужен? Как он зависит от выбора базиса? Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения оператора в V^3. Выписать его характеристический многочлен. Чему равен определитель матрицы оператора?

Защищая 4-ю и 6-ю задачи, Вы уже ответили на вопросы про характеристическое уравнение и доказали, что он не зависит от базиса. Если нам даны 3 собственных значения оператора в трехмерном пространстве, то характеристический многочлен равен

$\det(A - \lambda E) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Ну а определитель $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

6.14 Как находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора в n-мерном пространстве?

Глупый вопрос.))

6.15 Что такое оператор простого типа? Как выглядит матрица оператора в базисе из собственных векторов? Каково достаточное условие оператора простого типа? Является ли оно необходимым? Что означает диагонализуемость матрицы?

Все операторы в задачах 3, 4, 6 являются операторами простого типа, что означает, что они имеют базисы, состоящие из собственных векторов. И каждый раз, найдя базис из собственных векторов, мы, естественно, получали диагональную матрицу (это и означало диагонализуемость матрицы – наличие базиса, в котором матрица становится диагональной). Достаточное условие оператора простого типа – если все корни характеристического уравнения действительные и различные (то есть нет кратных корней). Необходимым это условие не является. Скажем, если взять тождественный оператор, все корни характеристического уравнения у него равны 1, а у него в любом базисе матрица единичная. И все операторы из третьей задаче также могут служить иллюстрацией к этой теме.

6.16 Матрица оператора в некотором базисе – треугольная. Каковы собственные значения этого оператора?

Естественно, числа, стоящие на диагонали, и будут собственными значениями оператора.

6.17 Показать, что оператор, заданный матрицей E_{ij} со всеми нулями, кроме 1 на месте i, j, переводит базисный вектор e_j в e_i, а остальные базисные векторы – в нулевой вектор. Пользуясь этим, вычислить $E_{ij}E_{kl}$.

Легкая задача.

6.18 Интерпретируя матрицу A как матрицу линейного оператора, вычислить A^n, где
а) A – треугольная матрица n-го порядка с нулевыми элементами на главной диагонали;
б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $n = -1,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$.

В пункте а) получается нулевая матрица, так как оператор с такой матрицей переводит каждый базисный вектор e_k в линейную оболочку базисных векторов с меньшими индексами. В результате линейное пространство при каждом применении оператора съеживается и в конце концов исчезает.

В пункте б) $n = -1$ – это шутка, так как обратного оператора у оператора с такой матрицей быть не может – ведь он e_1 переводит в нулевой вектор; $n = 1$ – также шутка; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – прослеживайте путь каждого базисного вектора при двойном применении оператора; $A^3 = A^4 = \ldots = 0$.

6.19 Справедливо ли рассуждение: пусть $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_3$, где $\mathcal{A}_1$ – ненулевой оператор; сократив на $\mathcal{A}_1$, получим $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$?

Смешной для нас вопрос.

6.20 Привести пример линейных операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, для которых $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = 0$, $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 \neq 0$

Смешной вопрос, тем более в условии прямо предлагается обратить свой взор на задачу 6.17.

Теоретические упражнения на тему “Линейные операторы” попробуйте сделать сами. Если не получится – разберу их на следующей неделе.

Обращаю Ваше внимание, что на прошлой неделе я выложил сразу два семинара.