Лекция №12

Линейные однородные уравнения второго порядка.

Будем изучать линейное однородное уравнение второго порядка
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$
У многих таких уравнений, например у уравнения
$$y'' + x^{\alpha}y = 0,$$
решения не выражаются через элементарные функции и неопределенные интегралы. Изучим некоторые методы исследования свойств решений уравнений вида (1) без отыскания самих решений.

Определение. Если $y(x_0) = 0$, то x_0 – нуль решения $y(x)$.

Теорема. *Ненулевое решение* $y(x) \not\equiv 0$ *уравнения* (1) *не может иметь бесконечное число нулей на конечном отрезке* $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ имеет бесконечное число нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$. По теореме Больцано можно выбрать сходящуюся последовательность нулей
$$x_i \xrightarrow[i\to\infty]{} x_0 \in [\alpha, \beta].$$
В силу непрерывности $y(x)$
$$y(x_0) = \lim_{i\to\infty} y(x_i) = 0.$$

По теореме Роля существует последовательность точек t_n, принадлежащих интервалам с концами x_n и x_{n+1}, такая, что $y'(t_n) = 0$. Так как $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и в силу непрерывности $y'(x)$

$$y'(x_0) = \lim_{n\to\infty} y'(t_n) = 0.$$

Следовательно $y(x)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0.$$

По теореме единственности решения задачи Коши $y(x) \equiv 0$. $\square$

Лемма. *Пусть $p(x) \in C^1(a,b)$, тогда существует $a(x)$ такая, что функция $z(x) = a(x)y(x)$ удовлетворяет уравнению*

$$z'' + r(x)z = 0.$$

Доказательство. Обозначим $b(x) = 1/a(x)$. Подставим функцию $y(x) = b(x)z(x)$ в уравнение (1).

$$z''b + 2z'b' + b''z + p(x)(z'b + zb') + q(x)bz = 0,$$
$$bz'' + (2b' + pb)z' + (b'' + pb' + qb)z = 0.$$

Подберем функцию $b(x)$ так, чтобы

$$2b' + pb = 0. \tag{2}$$

Решив уравнение (2), получим

$$b(x) = e^{-\int \frac{p(x)}{2}dx}.$$

Уравнение (1) запишется в виде

$$z'' + r(x)z = 0, \text{ где } r(x) = \frac{b'' + pb' + qb}{b}.$$

Так как $p(x) \in C^1(a,b)$, функция $r(x)$ непрерывна на (a,b). $\square$

Теорема (сравнения Штурма). *Пусть $y(x)$ и $z(x)$ любые отличные от тождественного нуля решения уравнений*

$$y'' + r(x)y = 0, \tag{3}$$
$$z'' + R(x)z = 0 \tag{4}$$

соответственно, $r(x) \leqslant R(x)$ на $[\alpha, \beta]$, $y(x)$ и $z(x)$ определены на $[\alpha, \beta]$, x_1, $x_2 \in [\alpha, \beta]$ два последовательных нуля решения $y(x)$, тогда существует $x_0 \in [x_1, x_2]$ – ноль решения $z(x)$.

Доказательство. Предположим, что $z(x) \neq 0$ на (x_1, x_2). Тогда можно считать, что $z(x) > 0$ и $y(x) > 0$ на (x_1, x_2). Если это не так, то можно рассмотреть функции $-y(x)$ и (или) $-z(x)$, нули при этом останутся теми же. Рассмотрим

$$0 \leqslant (R - r)yz = Rzy - ryz \text{ на } (x_1, x_2).$$

$$\underbrace{Rz}_{-z''}y - \underbrace{ry}_{-y''}z = -z''y + y''z = y''z + y'z' - (z''y + y'z') =$$
$$= (y'z)' - (z'y)' = (y'z - z'y)'.$$

Таким образом

$$0 \leqslant \int\limits_{x1}^{x2} (R - r)yzdx = (y'z - z'y)\Big|_{x1}^{x2} =$$
$$= y'(x_2)z(x_2) - z'(x_2)\underbrace{y(x_2)}_{0} - y'(x_1)zx_1 + z'(x_1)\underbrace{y(x_1)}_{0} =$$
$$= y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1). \tag{5}$$

С другой стороны

$$y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) \leqslant 0. \tag{6}$$

Это следует из того, что

$$y'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{y(x_1 + \Delta x) - y(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1 + \Delta x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

и аналогично

$$y'(x_2) \leqslant 0.$$

Из (5) и (6) следует, что

$$y'(x_2)z(x_2) - y'(x_1)z(x_1) = 0. \tag{7}$$

Так как $y'(x_1) \neq 0$ и $y'(x_2) \neq 0$, иначе $y(x) \equiv 0$, то равенство (7) возможно тогда и только тогда когда

$$z(x_1) = z(x_2) = 0.$$

□

Следствие. *Пусть в условиях Теоремы Штура $y(x)$, $z(x)$ – линейно независимые решения. Тогда существует точка $x_0 \in (x_1, x_2)$ в которой $z(x_0) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $z(x_0) \neq 0$ на (x_1, x_2). Тогда из доказательства теоремы Штурма следует,что

$$\int\limits_{x1}^{x2} (R - r)yzdx = 0, \tag{8}$$

$$z(x_1) = z(x_2) = 0. \tag{9}$$

Так как $(R - r)yz \geqslant 0$, то из (8) следует, что

$$R = r \text{ на } [x_1, x_2].$$

Значит y и z – решения одного и того же уравнения, при этом их определитель Вронского

$$W_{y,z}(x) = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z\Big|_{x=x_1,x_2} = 0.$$

Следовательно $y(x)$ и $z(x)$ – линейно зависимы. □

Следствие. *Нули любых двух не равных тождественно нулю линейно независимых решений уравнения* (1) *строго чередуются.*

Следствие. *Пусть* $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ *- расстояние между двумя соседними нулями* x_{i-1} *и* x_i *любого решения уравнения* (3), *тогда*

$$\delta_i \geqslant \frac{\pi}{\omega}, \text{ если } r(x) \leqslant \omega^2, \tag{10}$$

$$\delta_i \leqslant \frac{\pi}{\omega}, \text{ если } r(x) \geqslant \omega^2. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$z'' + \omega^2 z = 0. \tag{12}$$

Его общее решение имеет вид

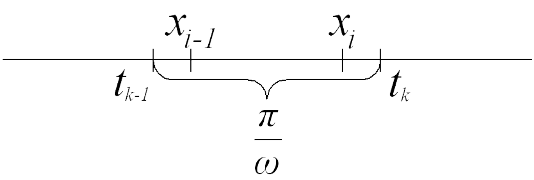
$$z(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Нули решений уравнения (12) задаются формулой

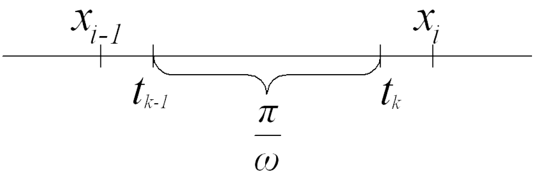
$$t_k = \frac{\pi k - \varphi}{\omega}.$$

Таким образом расстояние между любыми последовательными нулями любого решения $z(t)$ равно π/ω.

Рассмотрим случай (10). По теореме Штурма между любыми последовательными нулями любого решения y лежит ноль любого решения z. Тогда предположение что $\delta_i < \pi/\omega$ приводит к противоречию.



Аналогично рассматривается случай (11). По теореме Штурма между любыми последовательными нулями любого решения z лежит ноль любого решения y. Тогда предположение что $\delta_i > \pi/\omega$ приводит к противоречию.



$\square$

Уравнение Эйлера.

Рассмотрим уравнение вида

$$a_0x^ny^{(n)}(x)+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+a_ny(x)=0, \quad a_i=\mathrm{const}\,. \tag{13}$$

Заменой $x = e^t$ уравнение (13) сводится к уравнение с постоянными коэффициентами

$$b_0y^{(n)}(t)+b_1y^{(n-1)}(t)+...+b_ny(t)=0,$$

характеристический многочлен которого может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned}&P_n(\lambda)=b_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_n=\\ &=a_0\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+a_1\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+2)+...+a_n=0.\end{aligned}$$

Теорема. *Пусть* $y(x)$ *– решение уравнения* (3)*. Тогда если*

$$r(x)\leqslant\frac{1}{4x^2},$$

то на $[0, +\infty)$ *любое решение имеет более одного нуля. Если*

$$r(x) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4x^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

то любое решение имеет на $[0, +\infty)$ *бесконечное множество нулей.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$z'' + \frac{1+\varepsilon}{4x^2} z = 0,$$

это уравнение Эйлера. У него есть частное решение

$$z(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \ln x\right),$$

в случае $\varepsilon > 0$ и

$$z(x) = \sqrt{x},$$

в случае $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим случай

$$r(x) \leqslant \frac{1}{4x^2}.$$

По теореме Штурма в этом случае между любыми двумя последовательными нулями $y(x)$ лежит ноль $z(x) = \sqrt{x}$. Но у $z(x) = \sqrt{x}$ только один ноль. Следовательно у $y(x)$ не может быть двух нулей. Рассмотрим случай

$$r(x) \geqslant \frac{1+\varepsilon}{4x^2}.$$

По теореме Штурма в этом случае между любыми двумя последовательными нулями $z(x) = \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \ln x\right)$ лежит ноль $y(x)$. У $z(x)$ бесконечное число нулей. Следовательно у $y(x)$ тоже бесконечное число нулей. □

12.7

Краевые задачи.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

эта задача всегда имеет единственное решение.

Ситуация меняется если заменить начальные условия краевыми

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2. \end{cases}$$

Пример. *Задача*

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений $y = c \sin x$*.*

Задача

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases}$$

имеет только нулевое решение.

Задача

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1, \end{cases}$$

не имеет решений.

Общая краевая задача.

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = \varphi_1, \\ \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = \varphi_2, \end{cases} \tag{14}$$

$$(\alpha_1, \beta_1) \neq \mathbf{0}, \quad (\alpha_2, \beta_2) \neq \mathbf{0}.$$

Теорема. *Задача* (14) *или однозначно разрешима для всех $f(x)$, φ_1, φ_2, либо для всех $f(x)$, φ_1, φ_2 не является однозначно разрешимой. То есть либо не имеет решений, либо имеет более одного решения.*

Доказательство. Пусть общее решение и имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Тогда для того, чтобы удовлетворить начальным условиям должны выполняться равенства

$$\alpha_i(y_0(x_i) + c_1 y_1(x_i) + c_2 y_2(x_i)) + \\ + \beta_i(y_0'(x_i) + c_1 y_1'(x_i) + c_2 y_2'(x_i)) = \varphi_i, \ i = 1, 2.$$

Таким образом для нахождения c_1 и c_2 имеем систему

$$c_1(\alpha_i y_1(x_i) + \beta_i y_1'(x_i)) + c_2(\alpha_i y_2(x_i) + \beta_i y_2'(x_i)) = \\ = \varphi_i - \alpha_i y_0(x_i) - \beta_i y_0(x_i), \ i = 1, 2.$$

Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(x_1) + \beta_1 y_1'(x_1) & \alpha_1 y_2(x_1) + \beta_1 y_2'(x_1) \\ \alpha_2 y_1(x_2) + \beta_2 y_1'(x_2) & \alpha_2 y_2(x_2) + \beta_2 y_2'(x_2) \end{vmatrix}$$

не зависит от $f(x)$, φ_1, φ_2. Следовательно краевая задача или однозначно разрешима ($\Delta \neq 0$) при любых $f(x)$, φ_1, φ_2, либо имеет бесконечно много решений при некоторых правых частях, а при всех остальных правых частях не имеет решений ($\Delta = 0$). □

Замечание. *Краевая задача однозначно разрешима для любых $f(x)$, φ_1, φ_2 тогда и только тогда когда однородная задача ($f(x) = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$) имеет одно нулевое решение.*