ЛЕКЦИЯ 2. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА ПО ПАРАМЕТРУ. ПРАВИЛО ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$G = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in G$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall (x, y) \in G$ и удовлетворяющей условиям $|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ▲

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной на множестве* G, если она непрерывна в каждой точке этого множества ▲

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* G, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ и удовлетворяющих условиям $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$ ▲

Теорема Кантора. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве. ■

Определение. Пусть при каждом $y \in [c; d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$ как функция переменной x. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{2.1}$$

называется *собственным интегралом, зависящим от параметра* y ▲

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $G = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), непрерывна на отрезке $[c; d]$.

Доказательство: Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике G, то в силу теоремы Кантора она равномерно непрерывна в этом прямоугольнике. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall (x, y),\ (x, y + \Delta y) \in G$ и удовлетворяющих условию $|\Delta y| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

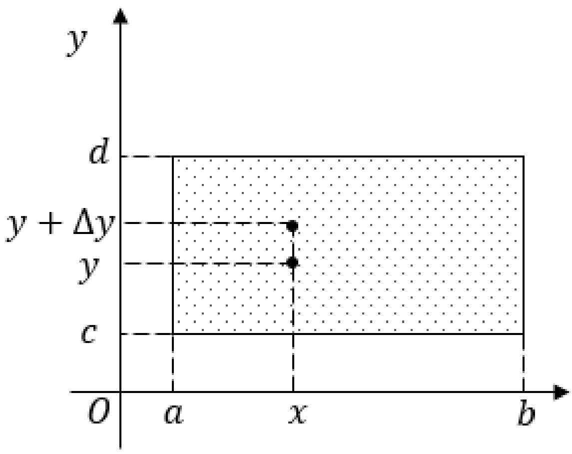


Рис. 1

Тогда

$$|I(y+\Delta y)-I(y)| = \left|\int_a^b f(x,y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y)dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b [f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]dx\right| \le \int_a^b |f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c;d]$. ■

Непрерывность интеграла $I(y)$ на отрезке $[c;d]$ означает, что

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0) \quad \forall y_0 \in [c;d] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y_0)dx \quad \forall y_0 \in [c;d].$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^2 x^3 e^{x^2y^2}dx$.

Решение: Функция $f(x,y) = x^3 e^{x^2y^2}$ непрерывна в прямоугольнике $G = \{(x,y): 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\}$. Это означает, что выполнены условия теоремы 1. Поэтому

$$\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^3 e^{x^2y^2}dx = \int_0^2 \lim_{y\to 0} x^3 e^{x^2y^2}dx = \int_0^2 x^3 dx = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Доказать, что для функции $I(y)=\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}dx$ не может быть выполнен предельный переход при $y\to 0$ под знаком интеграла.

Решение: Пусть $f(x,y)=\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}$. Покажем, что

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 f(x,y)dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{y\to 0} f(x,y)dx. \qquad (2.2)$$

Найдем значение левой части соотношения (2.2):

$$I(y)=\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x^2/y^2}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2/y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1/y^2}\Rightarrow \lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 f(x,y)dx=\lim_{y\to 0}I(y)=\frac{1}{2}.$$

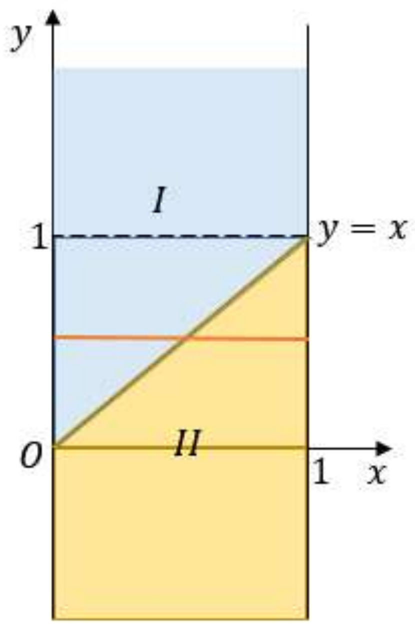
Вычислим правую часть соотношения (2.2). Если $x\in(0;1]$, то

$$\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x/y)^2}{\exp(x/y)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{t}{\exp t}=0.$$

Если $x=0,\ y\neq 0$, то $f(x,y)=0\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0\ \forall x\in[0;1]$. Таким образом, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)dx=0$. Так как $\frac{1}{2}\neq 0$, то предельный переход при $y\to 0$ под знаком интеграла для функции $I(y)$ выполнен быть не может ■

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y)=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{sgn}(x-y)dx,\quad y\in(-\infty;+\infty).$$



Решение: Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)=2x\,\mathrm{sgn}(x-y)$, стоящую под знаком интеграла. Эта функция не является непрерывной в полосе $0\le x\le 1$. Ее можно представить в виде:

$$f(x,y)=\begin{cases}2x,\ \textit{если}\ \ 0\le x\le 1, y<x;\\ 0,\ \textit{если}\ \ 0\le x\le 1, y=x;\\ -2x,\ \textit{если}\ \ 0\le x\le 1, y>x.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x,y)=\begin{cases}2x,\ \text{если}\ (x,y)\in II;\\ 0,\ \text{если}\ 0\le x\le 1, y=x;\\ -2x,\ \text{если}\ (x,y)\in I.\end{cases}$$

Если $y\le 0$, то $F(y)=\int\limits_0^1 2xdx=1$.

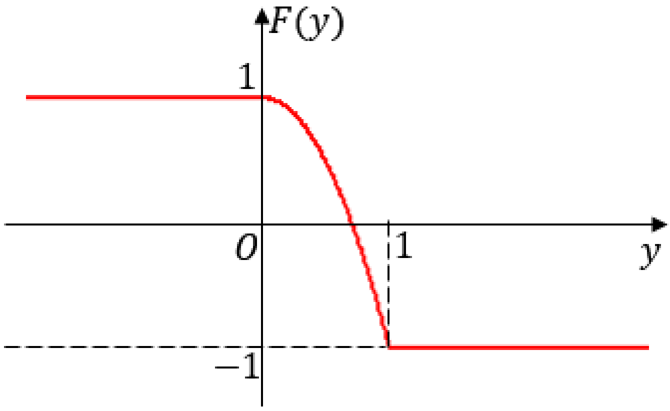
Если $0<y<1$, то $F(y)=\int\limits_0^y(-2x)dx+\int\limits_y^1 2xdx=1-2y^2$.

Если $y\ge 1$, то $F(y)=\int\limits_0^1(-2x)dx=-1$.

Итак,

$$F(y)=\begin{cases}1,\ y\in(-\infty;0];\\ 1-2y^2,\ y\in(0;1);\\ -1,\ y\in[1;+\infty).\end{cases}$$

Откуда следует, что функция $F(y)$ непрерывна на всей числовой оси ■



Наряду с интегралами вида (2.1) рассматривают интегралы более общего вида:

$$\Phi(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x,y)dx. \tag{2.3}$$

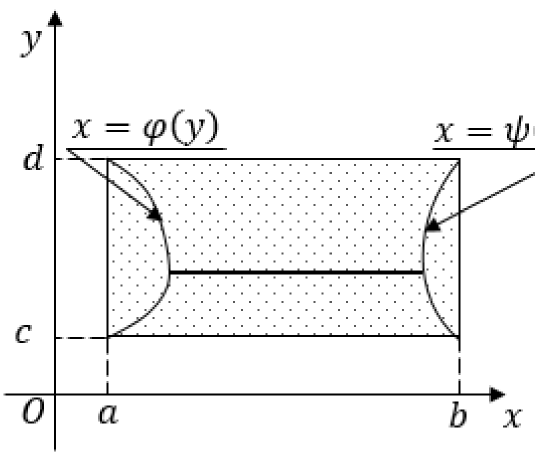


Рис. 2

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $G=\{(x,y): a \le x \le y,\ c \le y \le d\}$, функции $\varphi(y),\ \psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$, а значения этих функций принадлежат отрезку $[a;b]$. Тогда функция $\Phi(y)$, определяемая равенством (2.2), непрерывна на отрезке $[c;d]$, т.е.

$$\lim_{y \to y_0} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx.$$

Доказательство: Заметим, что интеграл $\Phi(y)$ существует как интеграл от непрерывной функции на отрезке $[\varphi(y);\psi(y)]$. Выполним замену переменной: от переменной x перейдем к переменной t согласно соотношению

$$x = (1-t)\varphi(y) + t\psi(y).$$

Тогда $dx = [\psi(y) - \varphi(y)]dt$. Значению $x = \varphi(y)$ соответствует $t = 0$, а значению $x = \psi(y)$ соответствует $t = 1$. В результате выполненной замены переменной

$$\Phi(y) = \int_0^1 f\big((1-t)\varphi(y) + t\psi(y), y\big)\,[\psi(y) - \varphi(y)]dt.$$

Подынтегральная функция

$$g(t,y) = f\big((1-t)\varphi(y) + t\psi(y), y\big)[\psi(y) - \varphi(y)]$$

получается с помощью арифметических операций и композиции непрерывных функций. Поэтому функция $g(t,y)$ непрерывна как функция двух переменных в прямоугольнике

$$K: \{(t,y): 0 \le t \le 1, c \le y \le d\}.$$

Согласно теореме 1 функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c;d]$. ■

Теорема 3. (Правило Лейбница) Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $G=\{(x,y): a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), дифференцируема на отрезке $[c;d]$ и

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx.$$

Доказательство: Пусть y и $y + \Delta y$ принадлежат отрезку $[c;d]$. Рассмотрим приращение функции ΔI:

$$\Delta I = I(y+\Delta y) - I(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y)dx =$$

$$= \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]dx.$$

Тогда

$$\frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} dx.$$

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y, \qquad 0 < \theta < 1;$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} dx.$$

Так как $\partial f/\partial y$ непрерывна в прямоугольнике G, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна в этом прямоугольнике, следовательно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что при выполнении условий
$|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Полагая $x_1 = x_2 = x, y_1 = y + \theta\Delta y, y_2 = y$ и считая $|\Delta y| < \delta$, получим:

$$\left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Тогда

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\right| = \left|\int_a^b \left[\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$I'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\,. \blacksquare$$

Пример 4. Найти $I'(y)$ *при* $y > 0$ *и* $I'(0)$, если

$$I(y)=\int_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx.$$

Решение: Если $y>0$, то для функции $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ выполнены условия теоремы 3 в прямоугольнике

$$G=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ y_1\le y\le y_2\},\ [y_1;y_2]\subset(0;+\infty).$$

Поэтому

$$I'(y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)dx. \tag{2.4}$$

Проверим справедливость равенства (2.4). С одной стороны, вычисляя интеграл $I(y)$ по частям, получим:

$$I(y)=\int_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx = x\ln\left(x^2+y^2\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2dx}{x^2+y^2}=$$

$$=\ln\left(1+y^2\right)-2\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)dx=\ln\left(1+y^2\right)-2\left(x-y\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\ln\left(1+y^2\right)-2+2y\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{y}.$$

Следовательно, $I'(y)=2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{y}$.

С другой стороны,

$$I'(y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)dx=\int_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}\,dx=$$

$$=2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}\Bigg|_0^1=2\,\mathrm{arctg}\frac{1}{y}.$$

Найдем $I'(0)$. Если $y=0$, то условия теоремы 3 не выполнены, так как функция $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ не определена в точке $(0;0)$.

Вычислим $I'(0)$, используя определение производной функции в точке. Для этого предварительно найдем $I(0)$:

$$I(0)=\int_0^1 \ln x^2dx=2\int_0^1\ln x\,dx=2(x\ln x-x)\Big|_0^1=-2.$$

Тогда

$$I'(0)=\lim_{y\to+0}\frac{I(y)-I(0)}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2\right)+2y\,\mathrm{arctg}(1/y)}{y}=$$

$$= \lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y} + \lim_{y\to+0} 2\operatorname{arctg}(1/y) = 0+\pi=\pi .$$

Заметим, что $\forall x \in (0;1]$: $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim\limits_{y\to+0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y} =$

$$= \lim_{y\to+0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)-\ln x^2}{y} =$$

$$= \lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2/x^2\right)}{y} = 0 \;\Rightarrow\; I'(0) \neq \int_0^1 \frac{\partial f(x,0)}{\partial y}dx .$$

Ответ: $I'(y) = 2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}, \quad y>0; \;\; I'(0)=\pi$.