ЛЕКЦИЯ 5. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. СИЛЫВ МЕХАНИКЕ.

В кинематике изучается движение механических систем с геометрической точки зрения. Динамика изучает движение в зависимости от факторов, вызывающих это движение. Эти факторы зависят как от внешней среды, так и от свойств самой механической системы.

Количественной характеристикой способности окружающей среды или других тел изменять движение механической системы является *сила*. Сила характеризуется как величиной, так и направлением воздействия, т.е. является векторной величиной $\vec{F}$.

Силы могут быть *внешними*, т.е. действующими на механическую систему со стороны внешних по отношению к системе объектов, или *внутренними* – действующими между материальными точками, образующими механическую систему.

Кроме того, движение механической системы зависит от способности самой системы сопротивляться изменению движения со стороны внешних тел. Эта способность называется *инерцией*. Т.е. инерция – это свойство механической системы оказывать сопротивление изменению движения со стороны других тел. Количественной характеристикой инерции является масса m. Чем больше масса материальной точки, тем меньше изменяется ее скорость под действием одной и той же силы. Масса – основная динамическая характеристика материальной точки. Масса материальной точки – скалярная положительная величина, не меняющаяся в процессе движения.

АКСИОМЫ ДИНАМИКИ (ЗАКОНЫ НЬЮТОНА)

Аксиомы динамики получены из опыта и формулируются для инерциальных систем.

I. *Первый закон Ньютона, или принцип относительности Галилея*.

Существует класс выделенных систем отсчета, называемых инерциальными, в которых материальная точка, если на нее не действуют силы, движется равномерно и прямолинейно или покоится.

II. *Второй закон Ньютона, или основной закон динамики.*

Произведение массы m материальной точки на ее ускорение $\vec{a}$ равно действующей на нее силе $\vec{F}$:

$$m\vec{a} = \vec{F} .$$

III. *Третий закон Ньютона («действие равно противодействию»)*

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ.

В динамике решаются две основные задачи.

I. Прямая задача. По заданным силам найти движение системы.

Пример: как будет двигаться подвешенный на нерастяжимой нити груз в поле тяжести Земли?

II. Обратная задача. По известному закону движения найти действующие на систему силы.

Пример. Известно, что планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам. Какая сила действует со стороны Солнца на планеты?

ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В МЕХАНИКЕ.

В механике встречаются три типа векторных величин.

I. *Свободные векторы*.

Это векторы, которые можно свободно переносить параллельно самим себе в любую точку пространства. Свободный вектор характеризуется только своей величиной и направлением. Примером свободного вектора является вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Свободные векторы складываются и умножаются на число по обычным правилам для векторов.

II. *Закрепленные векторы*.

Это векторы с фиксированным началом – точкой приложения. Два вектора, равные по величине и одинаковые по направлению, но приложенные в разных точках пространства, считаются разными векторами. Примером закрепленного вектора является радиус-вектор точки $\vec{r}$: его начало всегда находится в начале системы координат. Векторы скорости и ускорения материальной точки - тоже закрепленные векторы. Они приложены к материальной точке.

Закрепленные векторы, приложенные в одной точке, складываются по правилу параллелограмма. Результат сложения – закрепленный вектор, приложенный в той же точке. Векторы, приложенные к разным точкам, складывать нельзя.

III. *Скользящие векторы*.

Это векторы с фиксированной *линией действия*, определяемой их направлением. Скользящие векторы могут свободно скользить вдоль своей линии действия.

Силы в механике – это скользящие векторы.

На механическую систему может действовать несколько сил одновременно. Поэтому встает задача приведения этой системы сил к наиболее простой форме. Для этого нужно определить правила сложения сил - скользящих векторов.

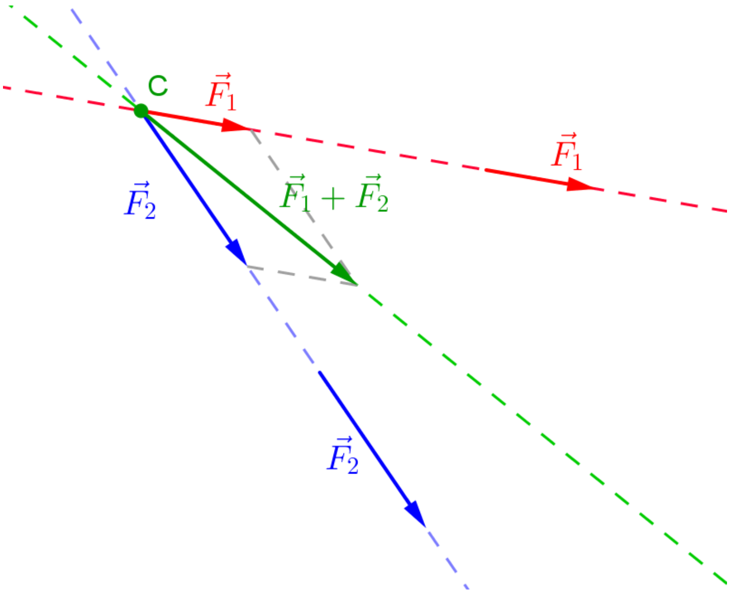
ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ.

1. *Силы с одной линией действия*.

Если силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют одну линию действия, то они складываются по обычному правилу сложения векторов: можно сдвинуть векторы вдоль их линии действия так, что конец вектора $\vec{F}_1$ совпадает с началом вектора $\vec{F}_2$. Результатом сложения будет вектор $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ с той же линией действия.

2. *Сходящиеся силы* (линия действия пересекаются).

Если линии сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ пересекаются, то можно сдвинуть силы вдоль их линий действия в точку пересечения *C* и сложить их по правилу параллелограмма. Результатом будет сила $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, линия действия которой также проходит через точку *C*.



Наоборот, если у нас есть скользящий вектор (сила) $\vec{F}$, мы его можем разложить на две другие силы. Оказывается, этих двух правил достаточно, чтобы вывести правила сложения скользящих векторов в более сложных случаях. Например, когда линии действия сил параллельны.

3. *Параллельные силы*.

Пусть линии действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ параллельны. *A* и *B* – произвольные точки на линиях действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно.

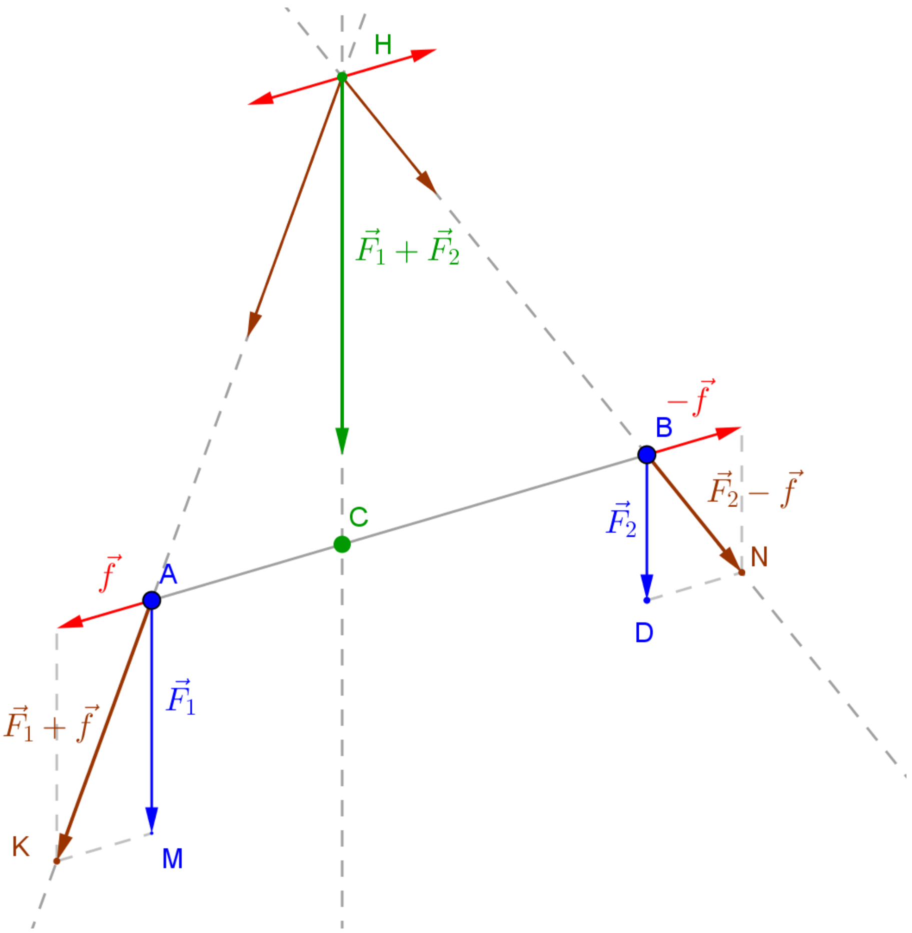
ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ДВУХ СИЛ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ДЕЙСТВИЯ.

Сумма двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ с параллельными линиями действия есть сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, величина которой равна сумме величин сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а линия действия параллельна линиям действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и проходит через точку *C*, делящую отрезок *AB* в отношении $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{F_2}{F_1}$. Радиус вектор точки *C* равен

$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}, \tag{5.1}$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - радиус-векторы точек A и B соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.



Добавим к системе векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ силы $\vec{f}$ и $-\vec{f}$ с линией действия AB. Так как их сумма равна нулю, полученная система сил будет эквивалентна исходной. Сложим векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{f}$. Линия действия вектора $\vec{F}_1+\vec{f}$ проходит через точку A. Аналогично, линия действия вектора $\vec{F}_2-\vec{f}$ проходит через точку B. Линии действия векторов $\vec{F}_1+\vec{f}$ и $\vec{F}_2-\vec{f}$ пересекутся в некоторой точке H. Сложим эти векторы по правилу сложения сходящихся векторов. Получим вектор $\vec{F}_1+\vec{f}+\vec{F}_2-\vec{f}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$. Линия действия этого вектора проходит через точку H и параллельна линиям действия векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Действительно, разложим векторы $\vec{F}_1+\vec{f}$ и $\vec{F}_2-\vec{f}$ соответственно на $\vec{F}_1$ и $\vec{f}$ и $\vec{F}_2$ и $-\vec{f}$, теперь уже в точке H. Тогда векторы $\vec{f}$ и $-\vec{f}$ взаимно уничтожатся, а векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют общую линию действия , параллельную исходным векторам $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Пусть линия действия вектора $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$ пересекает отрезок AB в точке C. Найдем, в каком отношении точка C делит отрезок AB. Из подобия треугольников HAC и AKM $\dfrac{AC}{f}=\dfrac{HC}{F_1}$. Из подобия треугольников HBC и BND $\dfrac{BC}{f}=\dfrac{HC}{F_2}$. Отсюда $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{F_2}{F_1}$, или $F_1\cdot AC=F_2\cdot BC$. Это правило называется *правилом рычага*.

Радиус-вектор точки C вычисляется по известной формуле для радиус-вектора точки, делящей отрезок в заданном отношении, и равен $\vec{r}_C = \dfrac{F_1\vec{r}_1 + F_2\vec{r}_2}{F_1 + F_2}$.

Q.E.D.

ТЕОРЕМА.

Пусть есть система параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Тогда их сумма $\vec{F} = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n$ есть вектор, величина которого равна сумме исходных сил, а линия действия параллельна линиям действия исходных сил и проходит через точку C, радиус-вектор которой равен

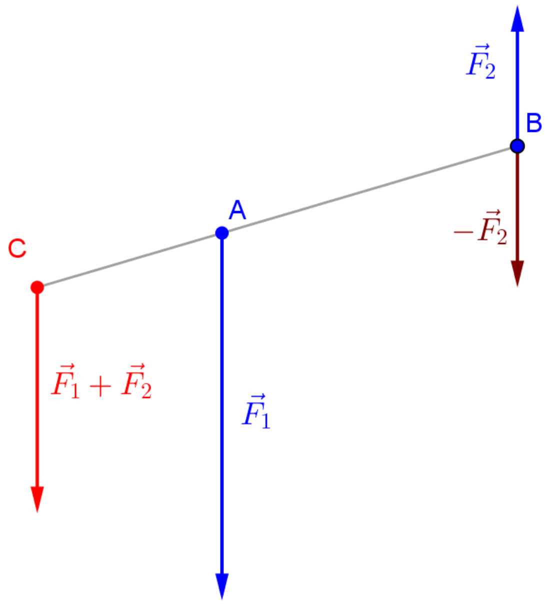
$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + \cdots + F_n\vec{r}_n}{F_1 + \cdots + F_n}, \tag{5.2}$$

где $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ - радиус-векторы некоторых точек на линиях действия сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ соответственно.

Доказательство можно провести по индукции.

4. *Антипараллельные силы.*

Пусть теперь силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ имеют параллельные линии действия, но направлены в противоположные стороны. Их величины обозначим $F_1 = |\vec{F}_1|$ и $F_2 = |\vec{F}_2|$. Пусть $F_1 > F_2$. A и B – произвольные точки на линиях действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно. Построим вектор $-\vec{F}_2$. Его величина также равна F_2. Тогда вектор $\vec{F}_1$ можно разложить на сумму двух параллельных векторов $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ и $-\vec{F}_2$. Величина вектора $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ равна $F_1 - F_2$.



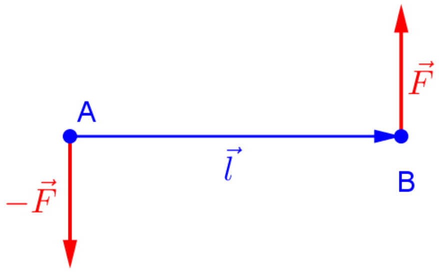
Линия действия вектора $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, согласно правилу рычага, проходит через точку C на прямой AB такую, что $AC(F_1 - F_2) = (BC - AC)F_2$. Отсюда $F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC$ - *правило рычага второго рода*.

Для нахождения радиус- вектора $\vec{r}_C$ точки C, через которую проходит линия действия вектора $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, воспользуемся формулой (5.1). Тогда $\vec{r}_1 = \dfrac{(F_1 - F_2)\vec{r}_C + F_2\vec{r}_2}{F_1}$, откуда

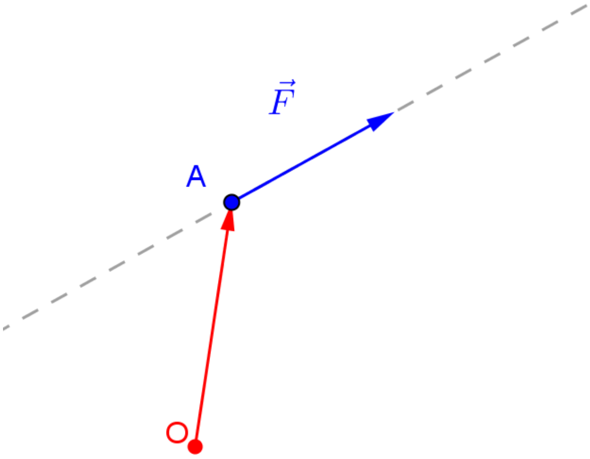
$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 - F_2\vec{r}_2}{F_1 - F_2}.$$

5. *Пара сил.*

Мы вывели правило для сложения антипараллельных сил таких, что $F_1 \neq F_2$. Рассмотрим теперь случай антипараллельных сил, когда $F_1 = F_2$. Такая система из двух антипараллельных сил, одинаковых по величине, называется *парой сил*. Пару сил упростить (сложить) нельзя. Ее основной характеристикой является вектор момента $\vec{M}$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{M} = [\overrightarrow{OA}, \vec{F}]$, где *A* – некоторая точка на линии действия силы $\vec{F}$.



Определение корректно, так как момент $\vec{M}$ не зависит от выбора точки A приложения силы. Он перпендикулярен плоскости, проведенной через полюс *O* и линию действия силы $\vec{F}$ и равен по величине произведению силы на расстояние от полюса до линии действия.

Вычислим момент пары сил. По определению, момент системы сил – сумма моментов отдельных сил. Выберем точки *A* и *B* на линиях действия сил так, чтобы отрезок *AB* был перпендикулярен линии действия силы $\vec{F}$. Обозначим $\vec{l} = \overrightarrow{AB}$. Поэтому $\vec{M} = [\overrightarrow{OB}, \vec{F}] + [\overrightarrow{OA}, -\vec{F}] = [\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \vec{F}] = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}]$. То есть

$$\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}] \qquad (5.3)$$

Как видно из формулы (5.3), момент пары сил не зависит от выбора полюса *O*.

Расстояние *l* между линиями действия сил $\vec{F}$ и $-\vec{F}$ называется *плечом* пары. Вектор $\vec{M}$ момента пары сил перпендикулярен плоскости пары и равен по величине произведению силы на плечо.

С парой сил можно производить операции, не меняющие ее момента.

СВОЙСТВА ПАРЫ СИЛ.

(a) Плечо и величину силы можно изменять пропорционально так, чтобы момент $\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}]$ сохранился. Например, можно уменьшить силу в k раз, увеличив при этом плечо в k раз.
(b) Момент не изменяется при повороте пары сил в своей плоскости.
(c) Пару сил можно перенести параллельно самой себе в любую точку пространства.
(d) Пары сил можно складывать. При этом их моменты складываются векторно.

В самом деле, все эти операции не меняют момент пары сил. Строгое доказательство можно провести геометрически, используя правила сложения скользящих векторов.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать свойства (a)-(d) пары сил, используя правила сложения скользящих векторов.

Из свойств пары сил вытекает, что *момент пары сил* $\vec{M}$ *– свободный вектор*.

СИСТЕМА СИЛ.

Пусть на механическую систему действует система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Точка O – полюс. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ - радиус-векторы точек приложения сил с началом в полюсе O.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

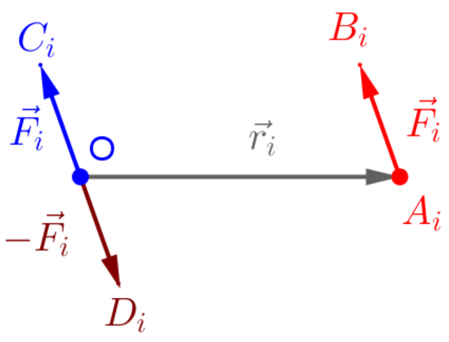
Вектор $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ называется результирующей (силой).

Вектор $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right]$ называется главным (суммарным) моментом сил относительно полюса O.

ТЕОРЕМА. Произвольная система сил (скользящих векторов) $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ приводится к системе, состоящей из результирующей силы $\vec{F}$, не зависящей от выбора полюса O, и суммарного момента $\vec{M}$.

Доказательство.

Для каждой силы $\vec{F}_i$ приложим в точке O две силы $\vec{F}_i$ и $-\vec{F}_i$, сумма которых равна нулю. Получаем систему сил, состаящую из вектора $\vec{F}_i$ с линией действия OC_i и пары сил $\{\overrightarrow{A_iB_i}, \overrightarrow{OD_i}\}$. В результате получим систему сходящихся в точке векторов $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, которую можно сложить и получить результирующую силу $\vec{F}$, и пар сил $\left\{\vec{F}_i, -\vec{F}_i\right\}$



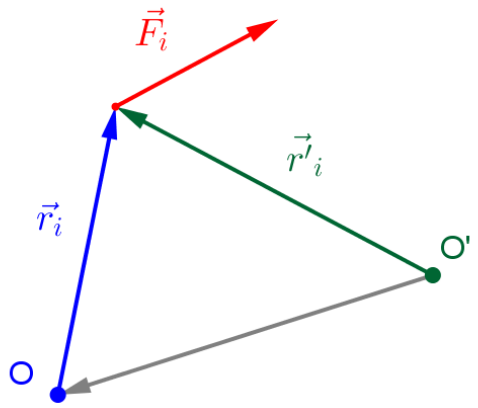
с моментами $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$, которую тоже можно сложить, получив вектор главного момента $\vec{M}$, Q.E.D.

Результирующая $\vec{F}$ не зависит от выбора полюса O. Однако вектор главного момента $\vec{M}$ от выбора полюса O зависит. Существует еще один инвариант относительно выбора полюса O.

ТЕОРЕМА. При изменении полюса проекция главного момента на направление результирующей не меняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Главный момент $\vec{M}'$ системы сил относительно полюса O' равен



$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}'_i, \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i + \overrightarrow{O'O}, \vec{F}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right] + \left[\overrightarrow{O'O}, \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\right] = \vec{M} + \left[\overrightarrow{O'O}, \vec{F}\right].$$

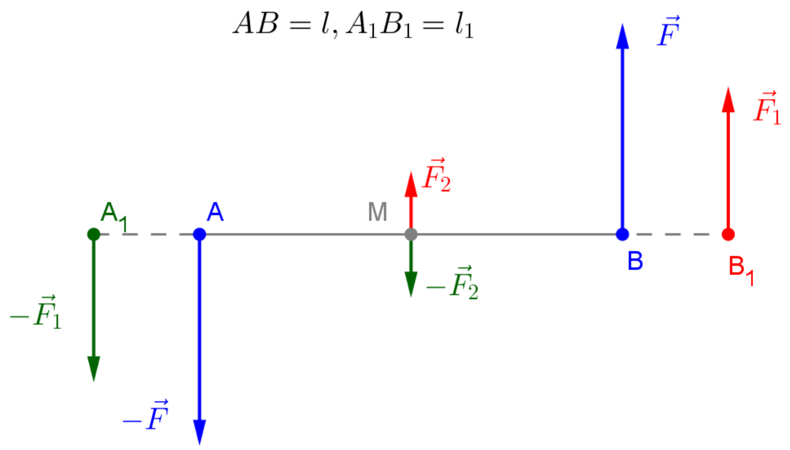
Отсюда

$$\left(\vec{M}', \vec{F}\right) = \left(\vec{M}, \vec{F}\right) + \left(\left[\overrightarrow{O'O}, \vec{F}\right], \vec{F}\right) = \left(\vec{M}, \vec{F}\right),$$

ч.т.д.

ПРИМЕР. Докажем свойство (a) пары сил: плечо и величину силы можно изменять пропорционально так, чтобы момент $\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}]$ сохранился.

Пусть есть пара сил $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ с плечом $AB = l$. Нужно показать, как эквивалентными преобразованиями привести эту пару к паре сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ с плечом $A_1B_1 = l_1$.



Пусть M – середина отрезка AB. Будем считать, что сила $\vec{F}_1$ задана. Разложим силу $\vec{F}$ на две параллельные ей силы $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ так, чтобы линия действия силы $\vec{F}_2$ проходила через точку M. Будем считать, что сила $\vec{F}_1$ задана. Тогда нужно подобрать величину силы $\vec{F}_2$ и длину плеча l_1, то есть, точку приложения B_1. Имеем

$$F_1 + F_2 = F,$$
$$\frac{l}{2} F_2 = \frac{l_1 - l}{2} F_1.$$

Последнее уравнение – это правило рычага. Отсюда находим

$$l_1 = \frac{Fl}{F_1},$$
$$F_2 = F - F_1.$$

Аналогично разложим силу $-\vec{F}$ на силы $-\vec{F}_1$ и $-\vec{F}_2$. Получаем систему из четырех сил. Силы $\vec{F}_2$ и $-\vec{F}_2$ имеют общую линию действия и взаимно уничтожаются. Остается пара сил $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}$ с плечом l_1, причем выполняется равенство $F_1 l_1 = Fl$, то есть момент пары сохраняется, ч.т.д.