Занятие 8.

Метод вариации произвольных постоянных в решении СНДУ(N).

(1) $\frac{d\overline{x}}{dt} = A(t)\cdot\overline{x} + \overline{f}(t)$,

$\underset{(n\times n)}{A(t)} = (a_{ij}(t))$, $\overline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

Рассмотрим соответствующую одноp. систему:

(2) $\frac{d\overline{x}_{одн.}}{dt} = A(t)\,\overline{x}_{одн.}$

Как известно, решение системы (2) задаётся фундаментальной матрицей

$\underset{(n\times n)}{\Phi(t)}$: $\mathring{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, $\det\Phi(t)\neq 0$

(3) $\overline{x}_{одн.} = \Phi(t)\cdot\overline{c}$, где $\overline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Замеч. В случае $A(t) = A = const$ $\Phi(t) = e^{At}$.

Будем искать решение с.(1) в виде:

(4) $\overline{x} = \Phi(t)\cdot\overline{C}(t)$, где $\overline{C}(t) = [C_1(t), \ldots, C_n(t)]^T$

$(4) \xrightarrow{в} (1)$:

$\mathring{\overline{x}} = \mathring{\Phi}(t)\overline{C}(t) + \Phi(t)\mathring{\overline{C}}(t) = \underline{A(t)\Phi(t)C(t)} + \Phi(t)\mathring{\overline{C}}(t) =$

$= \underline{A(t)\Phi(t)\overline{C}(t)} + f(t)$.

Получаем систему алг. ур-ний для $\overline{C}(t)$:

(5) $\boxed{\Phi(t)\mathring{\overline{C}}(t) = f(t)}$

Интегрируя ур-я $\mathring{\overline{C}}(t) = \Phi^{-1}(t)f(t)$, получаем $C_1 = C_1(t), \ldots, C_n = C_n(t)$.

Пример 1. (ТР, №3, п. 1)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Соотв. однор. система:

$\frac{dx}{dt} = y$; $\frac{dy}{dt} = x$; решим её методом исключения неизвестной.

$\ddot{x} = \dot{y} = x$; $\ddot{x} - x = 0$; $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

$$\begin{cases} x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ y_0(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднор. системы ищем в виде:

$x(t) = C_1(t) e^t + C_2(t) e^{-t}$

$y(t) = C_1(t) e^t - C_2(t) e^{-t}$

Для ф-ций $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ имеем систему (5): $\Phi(t)\dot{C}(t) = f(t)$.

$$\begin{cases} C_1'(t) e^t + C_2'(t) e^{-t} = 0 \\ C_1'(t) e^t - C_2'(t) e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases}$$

Систему алгебраич. ур-ний решаем методом подстановки.

$$C_2'(t) = -e^t C_1' e^t = -C_1' e^{2t}$$

$$C_1' \cdot e^t + C_1' \cdot e^{2t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t$$

$$2C_1' \cdot e^t = \frac{1}{t^2} + \ln t;$$

$$C_1'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right) e^{-t}.$$

$$C_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right); \quad C_1'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\ln t\right)e^{-t}$$

Нетрудно убедиться, что

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)+\tilde{C}_1; \quad \boxed{C_2(t)=\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t}-\ln t\right)+\tilde{C}_2};$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\int\left(\ln t+\frac{1}{t^2}\right)e^{-t}dt = \frac{1}{2}J_1+\frac{1}{2}J_2; \quad J_2 = \int\frac{1}{t^2}e^{-t}dt$$

$$J_1 = \int\underbrace{\ln t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-t}dt}_{dv} = \left|\begin{matrix} du=\frac{1}{t}dt \\ v=-e^{-t}\end{matrix}\right| = -\ln t\cdot e^{-t}+\int\underbrace{\frac{1}{t}}_{u}\underbrace{e^{-t}dt}_{dv} = -\ln t\cdot e^{-t}-\frac{1}{t}e^{-t}-$$

$$-\int\frac{1}{t^2}e^{-t}dt = -\ln t\, e^{-t}-\frac{1}{t}e^{-t}-J_2; \quad \boxed{C_1(t)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)e^{-t}+\tilde{C}_1}$$

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}\ln t\, e^{-t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}e^{-t}\cancel{-\frac{1}{2}J_2}\cancel{+\frac{1}{2}J_2}+\tilde{C}_1$$

Общее решение системы: $x(t)=C_1(t)e^{t}+C_2(t)e^{-t}$

$$x(t)=\tilde{C}_1e^{t}+\tilde{C}_2e^{-t}\cancel{-\frac{1}{2}\frac{1}{t}}-\frac{1}{2}\ln t+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}}-\frac{1}{2}\ln t$$

$$\boxed{x(t)=\tilde{C}_1e^{t}+\tilde{C}_2e^{-t}-\ln t}$$

$y(t)=C_1(t)e^{t}-C_2(t)e^{-t}$

$$y(t)=\tilde{C}_1e^{t}-\tilde{C}_2e^{-t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\cancel{\ln t}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-\cancel{\ln t}\right)$$

$$\boxed{y(t)=\tilde{C}_1e^{t}-\tilde{C}_2e^{-t}-\frac{1}{t}}$$

Пример 2. (ТР, №3, п.1). (Филиппов, №846).

$$\frac{dx}{dt}=y+\operatorname{tg}^2 t-1; \quad \frac{dy}{dt}=-x+\operatorname{tg} t.$$

Однор. система: $\frac{dx}{dt}=y$; $\frac{dy}{dt}=-x$.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}=-x; \quad \ddot{x}+x=0.$$

$$\begin{cases} x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t \\ y(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t.\end{cases}$$ – решение соотв. однор. системы.

Пример 2 (продолжение).

Решение неоднор. системы ищем в виде:

(*) $$\begin{cases} x(t) = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t \\ y(t) = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t \end{cases}$$

Для функций $C_1'(t), C_2'(t)$ имеем систему:

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = tg^2 t - 1 & (А) \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = tg\, t. & (Б) \end{cases}$$

(А)$\cdot \cos t$ − (Б)$\cdot \sin t$:

$$C_1'(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) + C_2'(t)(\cancel{\sin t\cos t - \sin t\cos t}) =$$
$$= \frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos^2 t}}\cdot\cancel{\cos t} - \cos t - \cancel{\frac{\sin^2 t}{\cos t}} = -\cos t;$$

итак, $C_1'(t) = -\cos t$ подставим в ур. (Б):

$$\sin t\cos t + C_2'(t)\cos t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$C_2'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} - \sin t = \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)\sin t = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sin t$$

$$C_2(t) = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\cdot\sin t\, dt = \left|\cos t = z\right| = -\int\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)dz =$$
$$= -\left(-\frac{1}{z} - z\right) + \tilde{C}_2 = \boxed{\frac{1}{\cos t} + \cos t + \tilde{C}_2 = C_2(t)} \quad (В)$$

$$C_1'(t) = -\cos t \Rightarrow \boxed{C_1(t) = -\sin t + \tilde{C}_1} \quad (Г);$$

Подставим (В), (Г) в систему (*).

$$x(t) = (-\sin t + \tilde{C}_1)\cos t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + \tilde{C}_2\right)\sin t$$

$$y(t) = -(-\sin t + \tilde{C}_1)\sin t + \left(\frac{1}{\cos t} + \cos t + \tilde{C}_2\right)\cos t$$

Ответ:
$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \tilde{C}_1\cos t + \tilde{C}_2\sin t + tg\, t \\ y(t) &= -\tilde{C}_1\sin t + \tilde{C}_2\cos t + 2. \end{aligned}}$$

Зан. 8. Линейные однородные системы дифф. ур-ний с переменными коэфф-тами. Фундаментальная матрица.

(1) $$\frac{d\bar{X}}{dt} = A(t)\cdot\bar{X}, \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underset{(n\times n)}{A(t)} = (a_{ij}(t))$$

Предполагаем, что компоненты м. $A(t)$ — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ комплексные ф-ии.

Решение сист. (1) — это вектор-ф-ия

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Опр. Вектор-ф-ии $(\bar{X}^1(t), \dots, \bar{X}^n(t))$ называются лин.-зав. на промежутке D, если $\exists C_1 \dots C_n$: $C_1\bar{X}^1(t) + \dots + C_n\bar{X}^n(t) \equiv 0 \ (\forall t \in D)$.

Утв. Если $\bar{X}^1(t)$ и $\bar{X}^2(t)$ — решения с. (1), то $\bar{X}^1(t) + \bar{X}^2(t)$ — решение и $\forall \alpha = const$ $\alpha\bar{X}^1(t)$ — реш.

$\Rightarrow \alpha_1\bar{X}^1(t) + \alpha_2\bar{X}^2(t)$ — тоже решение.

Опр. Фундам. матрица системы (1):

$$\underset{(n\times n)}{\Phi(t)} = \left[X^1(t) \dots X^n(t)\right]$$ — столбцами её явл. n лин.-нез. решений системы.

Теор. Если $\Phi(t)$ — фунд. матрица с. (1), то $\forall$ её реш.:

$$\underset{(n\times 1)}{\bar{X}(t)} = \underset{(n\times n)}{\Phi(x)} \cdot \underset{(n\times 1)}{\bar{C}},$$ т.е. $\bar{X}(t) = C_1X^1(t) + \dots + C_nX^n(t)$.

По заданной фунд. матрице системы (1) однозначно определяется.

Каждый столбец м. $\Phi(t)$ уд. ур-ю $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\dot{\Phi}(t) = A(t)\,\Phi(t)}, \quad t \in D. \qquad (2)$$

Умножим (2) справа на $\Phi^{-1}(t)$:

$$\boxed{A(t) = \dot{\Phi}(t) \cdot \Phi^{-1}(t)}$$

Замечание. Если $A(t) = A = \text{const}$, то $\Phi(t) = e^{At}$.

Пример 3.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det|A - \lambda E| = \lambda^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

Фунд. матрица: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

Пример 4. По заданной фунд. матрице $\Phi(x)$ найти матрицу $A(x)$ лин. однор. системы $\dot{X}(x) = A(x)X(x)$.

(Романко, пример 14, гл. 3).

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det|\Phi(x)| = e^x(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$|\Phi(x)| = e^x.$$

$$\Phi^{-1}(x) = e^{-x}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -e^x \sin x & e^x \cos x \end{pmatrix}.$$

$$\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} e^x(\cos x - \sin x) & -\cos x \\ e^x(\sin x + \cos x) & -\sin x \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \Phi'(x)\Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos^2 x & +\sin x\cos x - 1 \\ \sin x \cos x + 1 & \sin^2 x \end{pmatrix}.$$

Самост. работа.

Дома: подготовиться к КР.
ТР, № 3, п. 1, 2, 3.
Из задачника Филиппова:
№ 847, 848, 849, 850.
Найти e^{At}:
№ 867, 868, 869, 870, 871, 872.