ЛЕКЦИЯ 1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, тогда по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ . \qquad (1.1)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (1.1), то несобственный интеграл в левой части указанного равенства называется *сходящимся*, если такой предел не существует, то – *расходящимся*.

Аналогично, для функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Далее по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (1.2)$$

где c − произвольное действительное число. Причем интеграл в левой части равенства (1.2) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (1.2).

Геометрически в случае $f(x)>0$ интеграл (1.1) есть площадь фигуры, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Для определенности сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов первого типа.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)$, то интеграл (1.1) сходится и равен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)\ \blacksquare$$

Теорема 2. (Признак сравнения) Пусть при $a\le x<+\infty$ выполнено двойное неравенство $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ■

Теорема 3. (Признак сравнения в предельной форме) Если функции $f(x),\ g(x)$ непрерывны и положительны на промежутке $[a;+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно ■

В качестве интеграла сравнения во многих случаях используется интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} dx \ (a>0,\ \alpha>0)\ . \qquad (1.3)$$

Интеграл (1.3) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Теорема 4. Если сходится интеграл $\int\limits_a |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся ■

Теорема 5. (Критерий Коши) Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от непрерывной на промежутке $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists B=B(\varepsilon)>a$ такое, что $\forall B_1 \ge B$ и $\forall B_2 \ge B$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \ ■$$

Следствие. Если $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall B>a \quad \exists B_1 \ge B,\ B_2 \ge B$, для которых $\left|\int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx\right| \ge \varepsilon_0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится ■

Теорема 6. (Признак Дирихле) Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на промежутке $[a;+\infty)$;

2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна на промежутке $[a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится ■

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx. \tag{1.4}$$

Решение: 1) Если $\alpha>1$, то $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$. Согласно признаку сравнения и теореме 4 интеграл (1.4) сходится абсолютно.

2) Если $0<\alpha\le 1$, то интеграл (1.4) сходится согласно признаку Дирихле. Условия теоремы 6 будут выполнены, если положить $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

Покажем, что эта сходимость не является абсолютной, т.е. расходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx. \tag{1.5}$$

Так как $|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, то при $\eta>1$ имеем:

$$\int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx \ge \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta}\frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx. \tag{1.6}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$ сходится согласно признаку Дирихле, если положить $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x^\alpha}dx$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha\in(0;1]$, причем $\lim\limits_{\eta\to+\infty}\int\limits_1^{\eta}\frac{dx}{x^\alpha}=+\infty$. Переходя в (1.6) к пределу при $\eta\to+\infty$, получим

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta}\frac{|\sin x|dx}{x^{\alpha}}=+\infty.$$

Это означает, что интеграл (1.5) расходится.

3) Докажем расходимость интеграла (1.4) при $\alpha\le 0$, используя следствие критерия Коши:

$$\forall B>1\ \ \exists B_1=\frac{\pi}{6}+2\pi m\ge B,\ B_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi m\ge B,\ m\in Z,$$

такие, что

$$\left|\int_{B_1}^{B_2}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\right|=\left|\int_{\pi/6+2\pi m}^{5\pi/6+2\pi m}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\right|=\int_{\pi/6+2\pi m}^{5\pi/6+2\pi m}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx\ge$$

$$\ge\int_{\pi/6+2\pi m}^{5\pi/6+2\pi m}\sin xdx\ge-\cos x\Big|_{\pi/6+2\pi m}^{5\pi/6+2\pi m}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=\varepsilon_0.$$

Ответ: при $\alpha>1$ сходится абсолютно;
при $0<\alpha\le 1$ сходится условно;
при $\alpha\le 0$ расходится.

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$. Тогда по определению

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \qquad (1.7)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (1.7), то несобственный интеграл в левой части указанного равенства называется *сходящимся*, если такой предел не существует, то – *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, если $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ для функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$.

Если $c\in(a;b)$ − точка разрыва функции $f(x)$, $f(x)$ непрерывна на промежутках $[a;c)$, $(c;b]$ и не ограничена в любой окрестности точки c, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b}f(x)dx, \qquad (1.8)$$

Причем интеграл в левой части равенства (1.8) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (1.8).

Геометрически в случае $f(x) > 0$ интеграл (1.7) есть площадь фигуры, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямой $x = a$, вертикальной асимптотой $x = b$ и осью Ox.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости из пункта I.

В качестве интегралов сравнения используются интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} dx\ ,\ \ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} dx\ \ (\alpha > 0)\ . \tag{1.9}$$

Интегралы (1.9) сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Переформулируем критерий Коши для несобственных интегралов (1.7).

Теорема 5а. (Критерий Коши) Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta \in [a;b)$ такое, что $\forall \eta_1, \eta_2 \in [\eta; b)$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| < \varepsilon\ \blacksquare$$

Следствие. Если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \eta \in [a;b)\ \exists \eta_1, \eta_2 \in [\eta; b)$, для которых $\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится ■

Пример 2. Найти значения параметров α, β, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 x^\alpha \ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)dx. \tag{1.10}$$

Решение: 1) Если $\alpha > 0, \beta > 0$, то

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(1/x)}{(1/x)^{\alpha/\beta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{(t)^{\alpha/\beta}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1/t}{(\alpha/\beta)(t)^{\alpha/\beta-1}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(\alpha/\beta)(t)^{\alpha/\beta}} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha}\ln^{\beta}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^{\alpha/\beta}}\right)^{\beta}=0.$$

Доопределяя подынтегральную функцию нулем в точке $x=0$, получим определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[0;1]$ функции, т.е. интеграл (1.10) не является несобственным.

2) Выполним замену переменной $t=\dfrac{1}{x}$:

$$\int_0^1 x^{\alpha}\ln^{\beta}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}}dt=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_1^e\frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}}dt,\ \ I_2=\int_e^{+\infty}\frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}}dt.$$

Исследуем на сходимость интеграл I_1. При $\alpha\in(-\infty;+\infty), \beta\ge 0$ интеграл I_1 является определенным. Если $\beta<0$, то положим $\beta_1=-\beta>0$. Тогда

$$\frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}}=\frac{1}{t^{\alpha+2}\ln^{\beta_1}(1+(t-1))}\approx\frac{1}{(t-1)^{\beta_1}},\ \ t\to 1.$$

Так как интеграл $\displaystyle\int_1^e\frac{dt}{(t-1)^{\beta_1}}$ сходится при $\beta_1<1$, то согласно признаку сравнения в предельной форме интеграл I_1 сходится при $\beta>-1$ и $\alpha\in(-\infty;+\infty)$.

Исследуем на сходимость интеграл I_2.

Если $-1<\beta\le 0,\ \alpha+2>1$, то

$$0\le\frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}}=\frac{1}{t^{\alpha+2}\ln^{\beta_1} t}\le\frac{1}{t^{\alpha+2}},\ t\ge e.$$

Так как интеграл $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dt}{t^{\alpha+2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и интеграл I_2.

Если $\beta>0,\ \alpha+2>1$, то $\alpha+2=1+2\delta,\ \delta>0$,

$$0 \le \frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\ln^{\beta} t}{t^{\delta}} \cdot \frac{1}{t^{1+\delta}},\ t \ge e.$$

Так как $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln^{\beta} t}{t^{\delta}} = 0$, то $\exists M > 0 : 0 \le \dfrac{\ln^{\beta} t}{t^{\delta}} \le M \quad \forall t \in [e; +\infty)$. Следовательно,

$$0 \le \frac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}} \le \frac{M}{t^{1+\delta}},\ t \ge e.$$

Согласно признаку сравнения интеграл I_2 сходится.

Если $\beta > -1,\ \alpha + 2 = 1$, то

$$I_2 = \int_{e}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta} t}{t} dt = \int_{e}^{+\infty} (\ln t)^{\beta} d(\ln t) = \left. \frac{(\ln t)^{\beta+1}}{\beta+1} \right|_{e}^{+\infty} = +\infty$$

т.е. интеграл I_2 расходится.

Если $\beta > -1,\ \alpha + 2 < 1$, то $\dfrac{\ln^{\beta} t}{t^{\alpha+2}} > \dfrac{\ln^{\beta} t}{t}$, $t \ge e$. Так как интеграл $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln^{\beta} t}{t} dt$ расходится, то согласно признаку сравнения расходится и интеграл I_2.

Интеграл (1.10) сходится при условии одновременной сходимости интегралов $I_1,\ I_2$, т.е. при $\alpha + 2 > 1,\ \beta > -1$.

Ответ: $\alpha > -1,\ \beta > -1$.