МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 2

Классическая и геометрическая вероятности

Классическая вероятность

Классическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega = \{\omega_1, \ldots \omega_n\}, \quad |\Omega| = n < \infty$ **;**

2) все $\omega_i \in \Omega$ **равновозможны, т.е.** $P(\{\omega_i\}) = p$ **для всех** $\omega_i \in \Omega$ **.**

При этом из равенства $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{n} p = np = 1$ **следует**

формула классической вероятности

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

для всех событий $A \subseteq \Omega$**,**

где $|A| = m$ **– число элементов в** A**.**

Для нахождения числа элементарных исходов в событиях применяются формулы комбинаторики.

Формулы комбинаторики

1. Число подмножеств $M(\Omega)$ **множества** Ω $(|\Omega| = n)$

равно $|M(\Omega)| = 2^n$.

2. Число способов упорядоченного выбора m **элементов**

из множества Ω $(|\Omega| = n)$ **с возвращением равно** n^m .

3. Число способов упорядоченного выбора m **элементов**

из множества Ω $(|\Omega| = n)$ **без возвращения равно**

$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

Про этой же формуле находится число размещений

n **различимых элементов по** m **местам.**

Формулы комбинаторики

4. Число перестановок n различимых элементов $A_n^n = n!$.

5. Число сочетаний n различимых элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

это также равно числу способов неупорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega| = n$) без возвращения.

6. Число способов распределения n неразличимых элементов по r урнам (в каждой урне может быть от 0 до n элементов) равно $C_{n+r-1}^n = C_{n+r-1}^{r-1} = \dfrac{A_{n+r-1}^n}{n!} = \dfrac{A_{n+r-1}^{r-1}}{(r-1)!} = \dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$.

Задача о выборке

Из множества, содержащего N элементов, среди которых M отмеченных элементов, случайным образом выбирают n элементов. Требуется найти вероятность того, что среди n выбранных будет ровно m отмеченных элементов.
Элементарным событием в этом случае является любой неупорядоченный выбор n элементов из N, поэтому число элементов в множестве всех элементарных исходов Ω равно C_N^n.
Число элементарных исходов в рассматриваемом событии находится по правилу умножения: число способов выбора m элементов из M отмеченных умножается на число способов выбора остальных $n-m$ элементов из $N-M$ неотмеченных.

Поэтому требуемая вероятность находится по формуле

$$P=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Геометрическая вероятность

Геометрическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega \subseteq R^n$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$ **(где** $\mu(\Omega)$ **– мера (площадь, объём) множества** Ω **в** R^n**) ;**

2) вероятность любого события $A \subseteq \Omega$ **пропорциональна его мере** $\mu(A)$**.**

В этом случае $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ **– множество борелевских подмножеств** Ω**.**

Из условия 2) следует, что для всех $A \in \mathcal{A}$: $\mathrm{P}(A) = \alpha \cdot \mu(A)$ **,**

но $\mathrm{P}(\Omega) = 1 = \alpha \cdot \mu(\Omega)$ **, т.е.** $\alpha = \dfrac{1}{\mu(\Omega)}$ **. Отсюда получается**

формула для геометрической вероятности

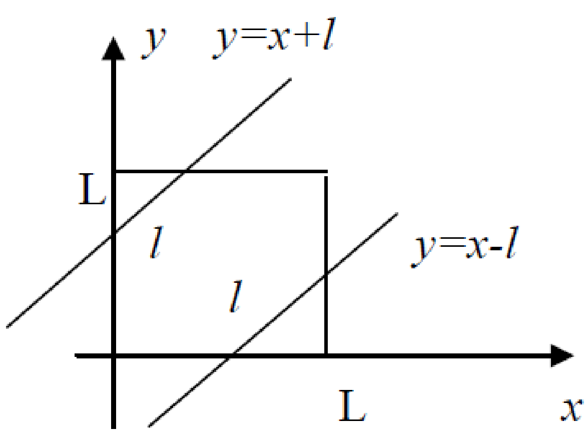
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} .$$

Задача о встрече

Два человека приходят в парк в интервал времени от a до $a+L$. Каждый проводит там время l. Найти вероятность того, что они встретятся.

$$\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le L\ ,\ 0\le y\le L\}$$

$$A=\{(x,y)\in\Omega:\ |y-x|\le l\}$$



$$\mu(\Omega)=L^2\ ,\ \mu(\overline{A})=(L-l)^2\ ,\ \mu(A)=L^2-(L-l)^2$$

$$P(A)=\frac{L^2-(L-l)^2}{L^2}=1-\left(\frac{L-l}{L}\right)^2=\frac{2l}{L}-\left(\frac{l}{L}\right)^2$$

МИРЭА
Российский технологический университет

ЗАДАЧА БЮФФОНА (1777 год)

На плоскость, расчерченную параллельными прямыми с расстоянием a друг от друга, случайным образом бросается игла длиной $l<a$. Найти вероятность того, что игла не пересечет ни одну линию.

$$\Omega=\{(x,\varphi):\ 0\le x\le a/2,\ 0\le\varphi\le\pi\}\subseteq R^2,\ \mu(\Omega)=(a\pi)/2$$

x - расстояние от центра иглы до ближайшей линии;

φ - угол между иглой и линией.

$$A=\{(x,\varphi):\ 0\le\varphi\le\pi,\ x>\frac{1}{2}l\sin\varphi\},\ \mu(\overline{A})=\int_0^\pi\frac{1}{2}l\sin\varphi d\varphi=l$$

$$P(\overline{A})=\frac{2l}{a\pi},\ P(A)=1-\frac{2l}{a\pi}$$