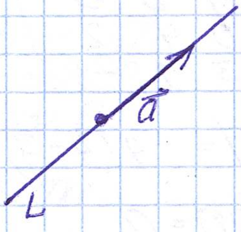
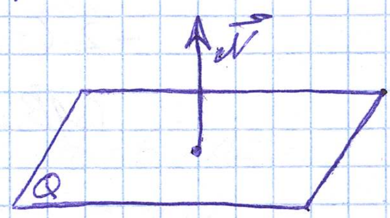
Семинар 7 (14.10.19)

Тема 5. Нахождение углов между прямыми и плоскостями.



(*) $\vec{a} \parallel L$, $\vec{a} \neq \vec{0}$

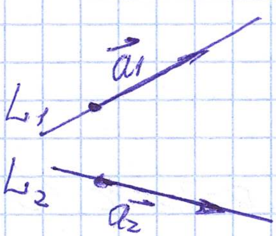
$\vec{a}$ – направляющий вектор прямой L.

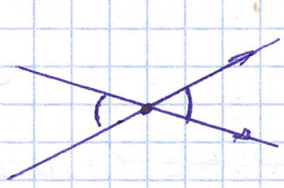


(*) $\vec{N} \perp Q$, $\vec{N} \neq \vec{0}$

$\vec{N}$ – вектор нормали к плоскости Q (нормальный вектор к плоскости Q)

Угол между прямыми



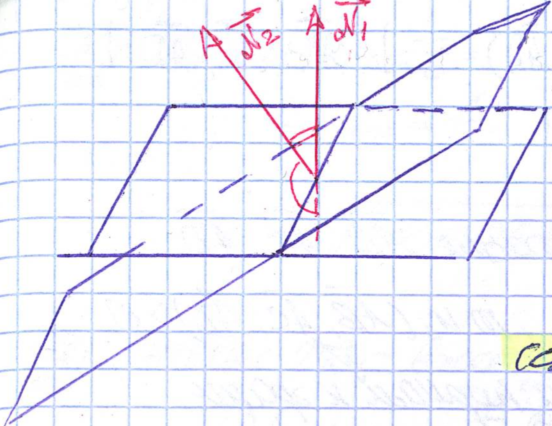


$0^\circ \le \angle(L_1, L_2) \le 90^\circ$

$$\angle(L_1, L_2) = \begin{cases} \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \\ \pi - \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \end{cases}$$

$$\cos\angle(L_1, L_2) = |\cos\angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)| = \frac{|(\vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

Угол между плоскостями

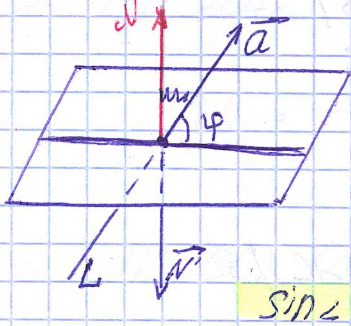


$$0^\circ \le \angle(Q_1, Q_2) \le 90^\circ$$

$$\angle(Q_1, Q_2) = \begin{cases} \angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2) \\ \pi - \angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2) \end{cases}$$

$$\cos\angle(Q_1, Q_2) = |\cos\angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2)| = \frac{|(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$$

Угол между прямой и плоскостью.



$$\angle(L, Q) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{a}, \vec{N}) \\ \angle(\vec{a}, \vec{N}) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$0^\circ \le \angle(L, Q) \le 90^\circ$$

$$\sin\angle(L, Q) = |\cos\angle(\vec{a}, \vec{N})| = \frac{|(\vec{a}, \vec{N})|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{N}|}$$

Задача.

$A = (2, 5, 7)$
$B = (2, 2, 4)$
$C = (-2, -2, 2)$
$D = (1, 0, -2)$

Найти:

1) $V_{\triangle ABCD}$

...

Решение.

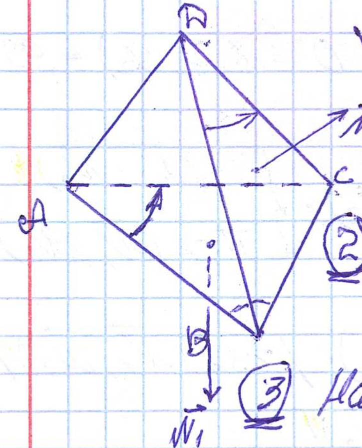
1) $AB = (0, -3, -3)$
$AC = (-4, -7, -5)$
$AD = (-1, -5, -9)$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -4 & -7 & -5 \\ -1 & -5 & -9 \end{vmatrix} =$$

39

$$3 \cdot (\overset{31}{36 - 5}) - 3 \cdot (\overset{13}{20 - 7}) = 93 - 39 = 54$$

$$\begin{array}{r} 93 \\ -\,39 \\ \hline 54 \end{array}$$



$$V_\Delta(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})| = \frac{54}{6} = 9$$

(2) Ориентация $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}$ — правая, т.к. $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})>0$

(3) Найти внеш. нормаль $\vec{N_1}$ к грани ABC

$$\vec{N_1} = (\vec{AC}\times\vec{AB})$$

$$(\vec{AC}\times\vec{AB}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\overset{6}{(21-15)} - \vec{j}\cdot(12) +$$

$$+\vec{k}\cdot(12) = \underline{6\cdot\vec{i} - 12\cdot\vec{j} + 12\cdot\vec{k}}$$

(4) Найти $S_{\Delta ABC}$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot|(\vec{AB}\times\vec{AC})| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+144+144} = \frac{18}{2} = 9$$

(5) $A=(2,5,7)$ Найти внешнюю нормаль к грани BCD

$$\vec{N_2} = (\vec{DB}\times\vec{DC}) = (\vec{BC}\times\vec{BD}) =$$

$\vec{BC} = (-4,-4,-2)$
$\vec{BD} = (-1,-2,-6)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(24-4) - \vec{j}(24-2) + \vec{k}$$

$$\cdot(8-4) = \underline{20\vec{i} - 22\vec{j} + 4\vec{k}}$$

40

⑥ Найти $S_{\triangle BCD}$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot \left| (\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{400 + 484 + 16} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\begin{array}{r} \times 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline + 484 \\ 400 \\ \hline + 884 \\ 16 \\ \hline 900 \end{array}$$

⑦ Найти DD_1 – высоту

$$V_{\triangle ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DD_1 \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$DD_1 = \frac{9 \cdot 3}{9} = \frac{9}{3} = 3$$

⑧ Найти AA_1

$$AA_1 = \frac{3 \cdot V_{\triangle ABCD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{3 \cdot 9}{15} = \frac{9}{5}$$

⑨ $\angle (AB, BC)$ – ?

$$\cos \angle (AB, BC) = \left| \cos \angle (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{12 + 6}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{36}} =$$

$$= \frac{18}{\sqrt{18} \cdot 6} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3\sqrt{18}}{18} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\angle (AB, BC) = 45^\circ$$

⑩ $\angle ABC$ в $\triangle ABC$ 41

$$\angle ABC = \left| \angle (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \right|$$

$\overline{BA} = (0, 3, 3)$

$BC = (-4 -4 -2)$

$$\cos\angle = \frac{-12-6}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{36}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ABC = 135^\circ$$

$$\begin{array}{r} \times\, 22 \\ 12 \\ \hline 44 \\ 22 \\ \hline 264 \\ +120 \\ \hline 384 \\ +48 \\ \hline 432 \end{array}$$

11 $\angle(ABC, BCD)$ — ? $= \angle(\vec{N_1}, \vec{N_2})$

$$\cos(\vec{N_1}, \vec{N_2}) = \frac{|120+12-22+48|}{18\cdot 30} = \frac{432}{18\cdot 30} = \frac{24}{30}$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\angle(ABC, BCD) = \arccos\frac{4}{5}$$

12 $\angle BC = \pi - \angle(\vec{N_1}, \vec{N_2})$ Двугранный угол

Найти двугранный угол $\angle BC$ при ребре BC пирамиды ABCD

$\vec{N_1} = (1, -2, 2)$

$\vec{N_2} = (10, -11, 2)$

$$\cos\angle(\vec{N_1}, \vec{N_2}) = \frac{\overset{32}{10+22}+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{100+121+4}}$$

$$= \frac{36}{3\cdot 5\cdot 3} = \frac{4}{5} \Rightarrow \angle(\vec{N_1}, \vec{N_2}) = \arccos\frac{4}{5}$$

$5\cdot 45$

$5\cdot 5\cdot 9$

$$\angle BC = \pi - \arccos\frac{4}{5}$$