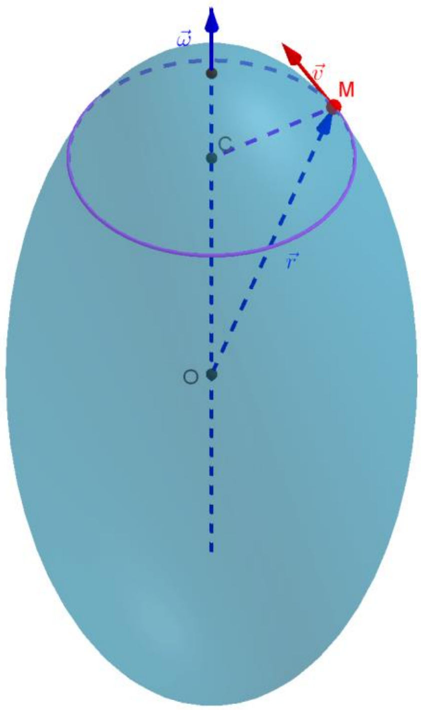
ЛЕКЦИЯ 2. ПОНЯТИЕ ОБ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ. УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ В ПРОЕКЦИЯХ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ.

ПРИМЕР. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ.

Определение. *Абсолютно твердым телом называется механическая система, расстояния между точками которой остаются постоянными в процессе движения.*

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси (см. рис.). Систему отсчета выберем так, чтобы ее начало *O* лежало на оси вращения.

Пусть *M* - произвольная точка тела, не лежащая на оси вращения. Опустим из точки *M* перпендикуляр *CM* на ось вращения. Так как расстояние *CM* постоянно, то точка *M* движется по окружности в плоскости, перпендикулярной оси вращения. В этом примере, как и в предыдущем, положение точки на окружности определяется углом поворота φ вектора $\overrightarrow{CM}$ относительно его начального положения. Этот угол – одинаков для всех точек твердого тела и есть угол поворота твердого тела относительно оси. Скорость точки *M* направлена по касательной к окружности и равна по величине



$v = |\vec{v}| = CM\dot{\varphi} = r\dot{\varphi}\sin\alpha$, (2.1)

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор точки, α - угол между радиус-вектором точки и осью вращения. Если ввести *вектор угловой скорости* $\vec{\omega}$, направленный вдоль оси вращения в ту сторону, чтобы вращение было видно происходящим *против часовой стрелки*, и равный по величине $\dot{\varphi}$, то получим векторную формулу для вычисления вектора скорости для любой точки твердого тела:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \tag{2.2}$$

Действительно, результат векторного произведения (2.2), вектор $\vec{v}$ направлен перпендикулярно оси вращения и радиус – вектору $\vec{r}$, то есть, по касательной к окружности, а величина его равна $\left|[\vec{\omega}, \vec{r}]\right| = r\omega\sin\alpha$, что совпадает с выражением (2.1) для величины скорости.

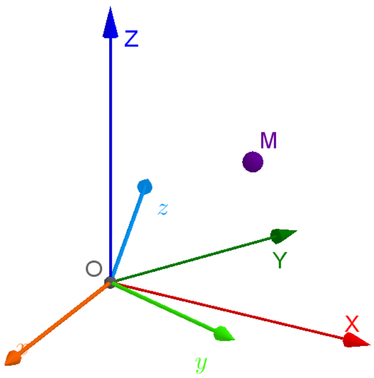
Мы видим, что угловая скорость – это вектор. Соответственно, при переходе от одной системы отсчета к другой он преобразуется как вектор.

На самом деле, угловая скорость – это *псевдовектор*, или *аксиальный* вектор: он преобразуется по векторному закону только при собственных преобразованиях координат, т.е. с положительным определителем, например, при вращениях. А при отражении вектор угловой скорости меняет знак.

Более точное понятие об угловой скорости можно получить из следующего примера.

ПРИМЕР. ВРАЩЕНИЕ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА ОТНОСИТЕЛЬНО НЕПОДВИЖНОЙ.

Пусть имеются две системы отсчета: $OXYZ$ - неподвижная, и $Oxyz$ - движущаяся таким образом, что ее начало отсчета неподвижно и совпадает с началом неподвижной системы отсчета (вращается). Можно считать, что в момент времени $t=0$ система отсчета $Oxyz$ совпадала с $OXYZ$. Пусть *M* – некоторая точка, неподвижная относительно системы отсчета $Oxyz$ и движущаяся с ней («переносимая») относительно системы отсчета $Oxyz$. Требуется найти скорость точки *M* относительно неподвижной системы отсчета.



Пусть $\vec r_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ - радиус вектор точки *M* в подвижной системе $Oxyz$, $\vec r(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ радиус вектор точки *M* в неподвижной системе $OXYZ$, причем $\vec r(0) = \vec r_0$. Так как обе системы координат ортогональны, то координаты радиус-вектора точки *M* в подвижной и неподвижной системах отсчета связаны ортогональным преобразованием

$$\vec r(t) = U(t)\vec r_0 , \tag{2.3}$$

где $U(t)$ - зависящая от времени ортогональная матрица,

$$U(t)\cdot U^T(t) = E . \tag{2.4}$$

Продифференцируем (2.3) по времени, получим

$$\frac{\vec r(t)}{dt} = \dot U(t)\vec r_0 = \dot U \cdot U^{-1}\vec r = \dot U \cdot U^T \vec r . \tag{2.5}$$

Здесь мы воспользовались тем, что обратная матрица к ортогональной совпадает с транспонированной. Обозначим $A = \dot U \cdot U^T$.

ЛЕММА 1. Пусть $U(t)$ - ортогональная матрица. Тогда матрица $A = \dot{U} \cdot U^T$ - кососимметрическая матрица ($A^T = -A$).

Доказательство. Продифференцируем тождество (2.4) по времени:

$$\frac{d}{dt}(U \cdot U^T) = \dot{U} \cdot U^T + U \cdot \dot{U}^T = \dot{U} \cdot U^T + (\dot{U} \cdot U^T)^T = A + A^T = 0,$$

Q.E.D.

Таким образом, мы получили, что скорость точки *M* подвижной системы отсчета относительно неподвижной выражается формулой (2.5), т. е.

$$\vec{v} = A\vec{r},$$

где *A* – кососимметрический оператор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки.

ЛЕММА 2. Кососимметрический оператор в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве есть оператор векторного умножения на фиксированный вектор:

$$A\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \vec{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Доказательство. Поставим в соответствие кососимметрическому оператору *A* вектор $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

таким образом, что $\omega_x = a_{32}, \omega_y = a_{13}, \omega_z = a_{21}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$A\vec{r} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix},$$

Q.E.D.

Также можно заметить, что вектор $\vec{\omega}$ - собственный вектор матрицы *A*, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Это значит, что точки, лежащие на оси, проходящей через неподвижную точку *O* и с направляющим вектором $\vec{\omega}$ в данный момент неподвижны.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА. При вращении подвижной системы отсчета $Oxyz$ относительно неподвижной $OXYZ$ в каждый момент времени *t* существует вектор $\vec{\omega}(t)$ такой, что скорость произвольной точки *M* подвижной системы отсчета выражается формулой

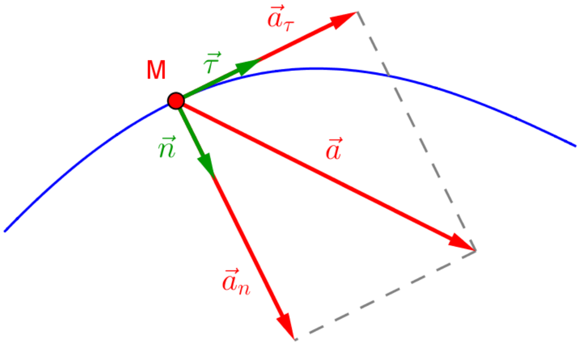
$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \qquad (2.6)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки *M* в неподвижной системе. Вектор $\vec{\omega}(t)$ называется *мгновенной угловой скоростью*. Он определяет *мгновенную ось вращения* – прямую, проходящую через точку *O*, все точки которой в данный момент неподвижны, т.е. их скорость равна нулю.

СЛЕДСТВИЕ. Обозначим орты координатных осей подвижной системы отсчета Ox, Oy, Oz соответственно $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$. Если точка *M* совпадает с концом одного из ортов, ее радиус-вектором будет этот орт. Подставляя в формулу (2.6) последовательно $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, получим *формулы Пуассона* для производных по времени ортов координатных осей подвижной системы отсчета:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{i}'],$$
$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{j}'],$$
$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}, \vec{k}'].$$

УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ ПРИ КРИВОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ В ПРОЕКЦИЯХ НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОСИ.



Рассмотрим материальную точку *M*, которая движется в пространстве по некоторой криволинейной траектории.

Направление, *касательное к траектории* в этой точке, называется *тангенциальным*. Единичный направляющий вектор этого направления обозначается $\vec{\tau}$.

Скорость материальной точки направлена, как мы знаем, по касательной к траектории, т.е.

$$\vec{v} = v\vec{\tau}. \qquad (2.7)$$

Если $s = s(t)$ - закон движения точки по траектории, то $v = \dot{s}$.

Проекция ускорения $\vec{a}$ на тангенциальное направление называется *тангенциальным ускорением*. Оно обозначается $\vec{a}_\tau$.

Так как движение криволинейное, то ускорение, вообще говоря, не коллинеарно скорости. Плоскость, натянутая на векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$, называется *соприкасающейся плоскостью*.

Направление, ортогональное тангенциальному и лежащее в соприкасающейся плоскости, называется *направлением главной нормали*, или просто *нормальным направлением*. Его единичный вектор обозначается $\vec{n}$ и называется *вектором(главной) нормали*. Проекция ускорения $\vec{a}$ на это направление называется *нормальным ускорением* и обозначается $\vec{a}_n$. Таким образом, $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Направление, ортогональное соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Тангенциальное направление, направления главной нормали и бинормали называются *естественными осями* системы координат, связанной с точкой.

ТЕОРЕМА (*об ускорении точки в проекциях на естественные оси*). Ускорение точки равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений, причем их величины равны соответственно

$$a_\tau = \dot{v}, \;\; a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

где ρ - радиус кривизны траектории:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}.$$

Доказательство. Продифференцировав формулу для вектора скорости (2.7), получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{\tau})}{dt} = \dot{v} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{2.8}$$

Так как производная от единичного вектора перпендикулярна ему (см. формулы Пуассона), то $\frac{d\vec{\tau}}{dt} \parallel \vec{n}$ и первое слагаемое в формуле (2.8) – как раз есть тангенциальное ускорение. Далее, $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \vec{n}$, где *s* – естественный параметр (длина кривой), а ρ - радиус кривизны кривой, который, по определению, равен $\rho = \frac{1}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|}$. То есть, второе слагаемое в формуле (2.8) – нормальное ускорение -- равно $\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$,

Q.E.D.

Если сравнить полученную формулу для нормального ускорения с формулой (1.7) из предыдущей лекции для ускорения точки, движущейся по окружности с постоянной скоростью, получим механическую интерпретацию радиуса кривизны:

Радиус кривизны – это радиус окружности, по которой двигалась бы точка с постоянной скоростью *v* и ускорением $\vec{a}_n$.