

Занятие №1. Комплексные числа.

Комплексные числа и действия над ними. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма комплексного числа, комплексно-сопряженное число. Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа. Построение множеств на комплексной плоскости.

I. Представьте число в алгебраической форме:

1) $\frac{2-i}{1+i}$; 2) $(1+i)^{10}$; 3) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 4) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^6}{(i-1)^5}$.

Найдите все значения корней и изобразите их точками на комплексной плоскости:

5) $\sqrt[3]{-i}$; 6) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

7) Представить в тригонометрической форме число: $\left(-\sin \frac{2\pi}{5} + i \cos \frac{2\pi}{5}\right)^9$.

II. Постройте множество точек на комплексной плоскости:

1) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}\right) \geq 1$; 2) $\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}$; 3) $\operatorname{Re} \frac{3}{z} \geq \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right)$; 4) $\operatorname{Im} \frac{z+1}{z-i} = 0$;

5) $|z-i| + |z+i| < 4$; 6) $0 < \operatorname{Re}(2iz) < 1$; 7) $|z| - \operatorname{Re} z < 1$.

III. 1) Определить вид кривой, заданной уравнением:

а) $z(t) = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$, $t \in (-\infty; +\infty)$;

б) $z(t) = 2e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it}$.

2) Из всех чисел, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 25$, найти такие, что $|z-7| + |z-7i|$ принимает наименьшее значение.

3) Решить уравнение:

а) $z^4 - z^2 + 1 = 0$; б) $z^2 = 3 - 4i$.

Домашнее задание:

№№ 12.5-12.8, 12.11, 12.12. (первые две цифры соответствуют номеру главы «Теория функций комплексной переменной» сборника задач 1))

ЛИТЕРАТУРА:

1) Сборник задач по математике для ВТУЗов в 4 частях под общей редакцией А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. ЧЗ. М.: Издательство Физико-математической литературы, 2007.

Ответы:

I. 1) $\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}$; 2) $32i$; 3) $512(1-i\sqrt{3})$; 4) $81(1+i)$;

5) $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$;

6) $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, $z_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$, $z_3 = -z_1$, $z_4 = -z_2$.

7) $\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$

II. 1) круг с центром в точке $z_0 = i/2$ и радиусом $1/2$ с выколотой точкой $z = 0$.

2) открытое кольцо с центром $(-1/2; 1/2)$ и радиусами 1 и 2.

3) полуплоскость $y \geq -3x$ с выколотой точкой $(0; 0)$.

4) $y = x + 1, x \neq 0$. 5) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} < 1$. 6) $-\frac{1}{2} < y < 0$. 7) $x > \frac{y^2 - 1}{2}$.

III. 1)а) $y = x - 2, x \geq 2$. 1)б) $\frac{4x^2}{25} + \frac{4y^2}{9} = 1$. 2) $z_1 = 3 + 4i, z_2 = 4 + 3i$.

3)а) $z_{1,2} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), z_{3,4} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$. 3)б) $z_{1,2} = \pm(2 - i)$.