Теоретические вопросы

2014

Задача 1 (Билет №3)**.** *Дробно-линейная функция. Аналитичность, однолистность. Групповое свойство дробно-линейного отображения. Найти образ окружности* $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ *при отображении* $w = \dfrac{1}{z}$

Решение. *См. картинки '2014_1.jpg'.*

Задача 2 (Билет №4)**.** *Конформные отображения, осуществляемые степенной и показательной функциями. Образы прямых* $Re z = c$, $Im z = c$ *при отображении* $w = z^2$.

Решение. *См. картинку '2014_21.jpg' (там лишь первая часть задания, вторая делается по аналогии).*

Задача 3 (Билет №6)**.** *Свойство сохранения симметрии дробно-линейного отображения. Найти дробно-линейное отображение, переводящее полуплоскость* $Im z > 0$ *на круг* $|w| < 1$.

Решение. *Будем искать отображение вида* $\lambda \dfrac{a+z}{b+z}$. *Т.к. мы хотим перевести* $Im z > 0$ *в* $|z| < 1$, *то отобразим* $i \in \{z : Im z > 0\}$ *в* $0 \in \{z : |z| < 1\}$, *а* $\overline{i} = -i$, *лежащее во вне отображаемой области, для сохранения симметрии отобразим в бесконечно удалённую точку. Т.о. имеем отображение* $\lambda \dfrac{z-i}{z+i}$. *Нетрудно видеть, что* $||w(\{Im z = 0\})|| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$. *Положим* $\lambda = 1$, *тогда будем иметь отображение* $w(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$. *Оно отобразит прямую - границу верхней полуплоскости* $\{Im z = 0\}$ *- в единичную окружность(д/л отображение переводит прямые и окружности в прямые и окружности, здесь прямая будет переходить в окружность, т.к. образ прямой не содержит бесконечно удалённой точки).*

Задача 4 (Билет №16)**.** *Ряд Лорана. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.*

Задача 5 (Билет №17)**.** *Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$, *где* $R(x)$ *- правильная рациональная дробь,* $\alpha > 0$.

Задача 6 (Билет №18)**.** *Теорема о логарифмическом вычете. Принцип аргумента.*

Задача 7 (Билет без номера)**.** *Круговое свойство дробно-линейного отображения. Найти образ* E *области* $D = \{z : |z| < 1, Im z > 0\}$ *при отображении* $w = i\dfrac{1-z}{1+z}$.

Решение. *См. картинки '2014_n1.jpg'.*

2017

Задача 1 (Билет №1). *Интегральная теорема Коши для односвязной области. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.*

Задача 2 (Билет №2). *Интегральная формула Коши для аналитической функции.*

Задача 3 (Билет №3). *Разложение аналитической в круге функции в ряд Тейлора. Формулы для коэффициентов.*

Задача 4 (Билет №5). *Дублирует теор. задачу за 2014 год из билета без номера.*

Практика

Часть 1

Задача 1. *Найти все значения корня* $\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}}$

Решение.

$$\sqrt[4]{-8-i8\sqrt{3}} = \sqrt[4]{16 * \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2\sqrt[4]{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{4\pi+6\pi k}{12}}, k = \overline{0,1,2,3}$$

$$k=0: \;\; 2e^{i\frac{4\pi}{12}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$k=1: \;\; 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$k=2: \;\; 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$k=3: \;\; 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

Задача 2. *Восстановить аналитическую в окрестности точки* z_0 *функцию* $f(z)$ *по известной действительной части* $u(x,y)$ *или мнимой* $v(x,y)$ *и значению* $f(z_0)$.

$$v(x,y) = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}, f(1) = 1+i$$

Решение. *Если функция* $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ *аналитична в окрестности* $z_0 = (x_0,y_0) = (1,1)$, *то согласно условию Коши-Римана для функций* u, v *выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \\[2em] \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u(x,y) = \int \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \right) dx = \frac{x}{x^2+y^2} + c(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + c'(y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow c(y) = const$$

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + const + i\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right), f(1,0) = 1 + const + i = 1 + i \Rightarrow const = 0$$

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(1 - \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2+y^2} + i = \frac{\overline{z}}{z * \overline{z}} + i = \frac{1}{z} + i$$

$$\underline{f(z) = \frac{1}{z} + i}$$

Задача 3. *Представить функцию $f(z)$ рядом в кольце $1 < |z-1| < 2$.*

$$f(z) = \frac{z^3+4}{(z^2-9)z^2}$$

Решение. *1. Введём замену:*

$$z - 1 = t, z = t + 1$$

Тогда начальные условия для разложения запишутся в виде:

$$1 < |t| < 2$$

2. Разложим $f(t) = \dfrac{(t+1)^3+4}{((t+1)^2-9)(t+1)^2}$ на простейшие дроби для дальнейшего разложения в ряд по степеням t:

$$f(t) = \frac{31}{54(t-2)} - \frac{4}{9(1+t)^2} + \frac{23}{54(4+t)}$$

3. Разложим получившиеся дроби по степеням t:

- *Для $\dfrac{1}{t-2}$ будем искать разложение, справедливое при $|t| < 2$:*

$$-\frac{1}{2} * \frac{1}{1-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^m = -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}$$

- *Для $\dfrac{1}{(1+t)^2}$ будем искать разложение, справедливое при $|t| > 1$:*

$$(t+1)^{-2} = \frac{1}{t^2} * \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-2} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(-2-1) * \cdots * (2-k+1)}{k! * t^k}\right)$$

- *Для* $\dfrac{1}{4+t}$ *будем искать разложение, справедливое при* $|t|<4$*:*

$$\frac{1}{4}*\frac{1}{1+\frac{t}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^m}{4^m}=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{4^{n+1}}$$

4. Запишем получившееся разложение:

$$f(t)=\frac{31}{54}\left(-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}}\right)-\frac{4}{9}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(-2-1)*\cdots*(2-k+1)}{k!*t^k}\right)+$$
$$+\frac{24}{54}\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{4^{n+1}}\right)=-\frac{31}{108}-\frac{4}{9}+\frac{12}{108}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{2^{n+2}}\left(-\frac{31}{27}+\frac{(-1)^{n+1}*4}{9}\right)+\frac{4}{9}*\frac{-2(-2-1)*\cdots*(2-n+1)}{n!*t^n}\right)=$$
$$=-\frac{67}{108}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t^n}{2^{n+2}}\left(-\frac{31}{27}+\frac{(-1)^{n+1}*4}{9}\right)+\frac{4}{9}*\frac{-2(-2-1)*\cdots*(2-n+1)}{n!*t^n}\right)$$

5. Введя обратную замену, будем окончательно иметь:

$$f(z)=-\frac{67}{108}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}\left(-\frac{31}{27}+\frac{(-1)^{n+1}*4}{9}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{9}*\frac{-2(-2-1)*\cdots*(2-n+1)}{n!*(z-1)^n}\right)$$

Задача 4. *Представить функцию* $f(z)$ *рядом в окрестности точки* z_0*.*

$$f(z)=\sin^2 z+\frac{1}{(z+1)^3}, z_0=0$$

Решение. *1.* $\sin^2 z=\dfrac{1-\cos 2z}{2}$

2. $\cos 2z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$

3. $(z+1)^{-3}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-3(-3-1)(-3-2)*\cdots*(-3-n+1)}{n!}z^n$

4. $f(z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2z)^{2n}}{(2n)!}+1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-3(-3-1)(-3-2)*\cdots*(-3-n+1)}{n!}z^n$

$$f(z)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2z)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3(-3-1)(-3-2)*\cdots*(-3-n+1)}{n!}z^n$$

Данное разложение справедливо в единичной окрестности z_0 *(в шаре радиусом 1).*

Задача 5. *Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их характер*

$$f(z) = \frac{z+1}{(z^2+1)^2}e^{\dfrac{1}{z-1}} + \frac{z^2}{\sin^3(z+2)}$$

Решение. *Особыми точками называются точки, в которых функция не определена, либо её предел равен бесконечности или не существует вовсе.*

1. $z = \pm i$ *- особые точки типа «полюс» второго порядка.*

2. $z = 1$ *- особая точка. Определим её тип:*

$$z-1 = t, z = t+1$$

$$f(t) = \frac{t+2}{((t+1)^2+1)^2}e^{\dfrac{1}{t}} + \frac{(t+1)^2}{\sin^3(t+3)} = \frac{t+2}{((t+1)^2+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n * n!} + \frac{(t+1)^2}{\sin^3(t+3)} =$$

$$= \frac{t+2}{((t+1)^2+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n * n!} + \frac{(t+1)^2}{\sin^3 3 * \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\left(\frac{t*\operatorname{ctg} 3}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n)!}\right)\right)^3} =$$

$$= \frac{t+2}{((t+1)^2+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n * n!} + \frac{(t+1)^2\sin^{-3}3}{\left(1+\left(-\frac{t^2}{2}\right)+o(t^2)\right)^3} \sim$$

$$\sim \frac{t+2}{((t+1)^2+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{t^n * n!} + (t+1)^2\sin^{-3}3 *$$

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3(-3-1)*\cdot*(-3-n+1)}{n!}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^n}\right)$$

Получается, что это точка с существенной особенностью, т.к. в разложении функции по степеням $(z-1)$ будет бесконечное число слагаемых в главной части.

3. $\sin^3(z+2) = 0, z = -2+\pi k, k \in \mathbb{Z}$ *- особые точки типа «полюс» третьего порядка* ($\sin^3(z+2)$ *имеет ноль третьего порядка в особой точке).*

4. *Точка $z = \infty$ не является изолированной особой точкой.*

Задача 6. *Вычислить интегралы с помощью вычетов:*

а) $\displaystyle\int\limits_C (z+2)e^{1/z}dz; C : |z| < \frac{1}{3}$

б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+2x+17)^2}$

Решение. *а)* $\displaystyle\int\limits_C (z+2)e^{1/z}dz = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+2)e^{1/z}dz$

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+2)e^{1/z}dz = 2\pi i * \underset{p=0}{res}(z+2)e^{1/z}$

2) $\displaystyle(z+2)e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!} = (z+2)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right) \Rightarrow$ *коэффициент при* z^{-1} *будет* $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, *следовательно,* $\underset{p=0}{res}(z+2)e^{1/z} = \frac{5}{2}$

3) $\displaystyle\int\limits_C (z+2)e^{1/z}dz = 2\pi i * \underset{p=0}{res}(z+2)e^{1/z} = 5\pi i$

б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+2x+17)^2}dx$

1) *Найдём особые точки для* $f(z) = \dfrac{z^2dx}{(z^2+2z+17)^2}$*:*

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-(-1+4i))^2(z-(-1-4i))^2}$$

Особые точки $z_1 = -1+4i, z_2 = -1-4i$

2) *Теперь, т.к.* $f(x)$ *непрерывна на действительной прямой, справедливо следующее:*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+17)^2}dx = 2\pi i\sum_{Imz_k>0}\underset{z=z_k}{res}f(z) = 2\pi i\underset{z=-1+4i}{res}f(z)$$

$$\underset{z=-1+4i}{res}f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-(-1-4i))^2}\right)\Bigg|_{z=-1+4i} = \\ = \frac{(2+8i)z}{(z+(1+4i))^3}\Bigg|_{z=-1+4i} = -\frac{17i}{256}$$

Запишем ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+17)^2}dx = 2\pi i\left(-\frac{17i}{256}\right) = -\frac{17\pi}{128}$$

Часть 2

Задача 1. *Найти все значения корня* $\sqrt[3]{i}$

Решение.

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sqrt[3]{i} = e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}}, k = \overline{0,1,2}$$

$$k=0: \quad e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(\cos(\tfrac{\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{\pi}{6})\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}$$

$$k=1: \quad e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \left(\cos(\tfrac{5\pi}{6}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{6})\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}$$

$$k=2: \quad e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Задача 2. *Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$. $u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$. Найти $f'(z)$.*

Решение. *Если функция $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в окрестности $z_0 = (x_0, y_0) = 0$, то согласно условию Коши-Римана для функций u, v выполнены следующие соотношения:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x,y) = \int 2x dy = 2xy + c(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2y + c'(x) = -(-2y-2) = 2y + 2 \Rightarrow c'(x) = 2, c(x) = \int 2dx = 2x + const$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2xy + 2x + const), f(0) = i * const = 0 \Rightarrow const = 0$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2xy + 2x) = x^2 + 2ixy + (iy)^2 - 2y + 2ix =$$

$$= (x+iy)^2 + 2i(x - \frac{1}{i}y) = (x+iy)^2 + 2i(x+iy) =$$

$$= (x+iy)(x+iy+2i) = z * (z+2i) = z^2 + 2iz$$

$$\underline{f(z) = z^2 + 2iz}$$

Найдём $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i\,(2y+2) = 2(x+iy) + 2i = 2z + 2i$$

Задача 3. *Представить функцию $f(z)$ рядом в кольце $1 < |z-2| < 2$.*

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-1)z^2}$$

Решение. *1. Введём замену:*

$$z-2=t, z=t+2$$

Тогда начальные условия для разложения запишутся в виде:

$$1 < |t| < 2$$

2. Разложим $f(t) = \dfrac{t+3}{(t+1)(t+2)^2}$ на простейшие дроби для дальнейшего разложения в ряд по степеням t:

$$f(t) = 2 * \frac{1}{t+1} - 2 * \frac{1}{t+2} - 1 * \frac{1}{(t+2)^2}$$

3. Разложим получившиеся дроби по степеням t:

- *Для $\dfrac{1}{t+1}$ будем искать разложение, справедливое при $|t| > 1$:*

$$\frac{1}{t} * \frac{1}{1+\frac{1}{t}} = \frac{1}{t}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{t^m}$$

- *Для $\dfrac{1}{t+2}$ будем искать разложение, справедливое при $|t| < 2$:*

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^m}{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^m}{2^{m+1}}$$

- *Для $\dfrac{1}{(t+2)^2}$ будем искать разложение, справедливое при $|t| < 2$:*

$$2\left(\frac{t}{2}+1\right)^{-2} = 2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2(-2-1) * \cdots * (2-k+1)}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k\right)$$

4. Запишем получившееся разложение:

$$f(t) = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{t^{m+1}} - 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^m}{2^{m+1}} -$$

$$-2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2(-2-1)*\dots*(2-k+1)}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{t^n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^n}{2^{n+1}} -$$

$$-2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-2-1)*\dots*(2-n+1)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{t^n} - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} t^n -$$

$$-2\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-2-1)*\dots*(2-n+1)}{n!}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right) =$$

$$= -3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{t^n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} t^n \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{-2(-2-1)*\dots*(2-n+1)}{2^n * n!}\right)$$

5. Введя обратную замену, будем окончательно иметь:

$$f(z) = -3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(z-2)^n} +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^n\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{-2(-2-1)*\dots*(2-n+1)}{2^n * n!}\right)$$

Задача 4. *Представить функцию $f(z)$ рядом в окрестности точки z_0.*

$$f(z) = \cos\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}, z_0 = 0$$

Решение.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

Данное разложение справедливо в единичной окрестности z_0 (в шаре радиусом 1).

Задача 5. *Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их характер*

$$f(z) = \frac{1}{e^z + i} + \frac{e^z - 1}{\sin z}$$

Решение. *Особыми точками называются точки, в которых функция не определена, либо её предел равен бесконечности или не существует вовсе.*

1. $e^z = -i, z = Ln(-i) = -\frac{\pi}{2}i + 2i\pi k, k \in \mathbb{Z}$ *- особые точки. Определим их тип:*

$$\lim_{z \to -\frac{\pi}{2}i+2i\pi k} \frac{1}{e^z + i} = \frac{1}{0} = \infty$$

Следовательно, это изолированные особые точки типа «полюс». Определелим его порядок:

$$(e^z + i)\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}i+2i\pi k} = 0,$$

$$(e^z + i)'\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}i+2i\pi k} = -i \neq 0$$

Получается, что это полюс первого порядка (у функции в знаменателе имеется ноль первого порядка).

2. $\sin z = 0, z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ *- особые точки, определим их тип:*

- $k = 2l$*:*

$$\lim_{z \to 2\pi l} \frac{e^z - 1}{\sin z} = 1$$

Тогда точки с чётным k *являются изолированными особыми точками с устранимой особенностью.*

- $k = 2l + 1$*:*

$$\lim_{z \to \pi(2l+1)} \frac{e^z - 1}{\sin z} = \frac{-2}{0} = \infty$$

Тогда при нечётных k *имеем точки типа «полюс». Аналогично предыдущему пункту получим, что это полюс первого порядка.*

3. *Точка* $z = \infty$ *не является изолированной особой точкой.*

Задача 6. *Вычислить интегралы с помощью вычетов:*

а) $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} dz; C : |z| < 1$

б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+26)^2} dx$

Решение. *а)* $\displaystyle\int\limits_C \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2+4)} dz$

1) У $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z^2+4)}$ три особые точки: $z=0,\pm 2i$. При этом в контуре C лежит лишь одна из них $z=0$.

2) Следовательно: $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2+4)}dz=2\pi i*\underset{z=0}{res}f(z)$

3) $\displaystyle\underset{z=0}{res}f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d\left(z^2f(z)\right)}{dz}\bigg|_{z=0}=\frac{e^z(z^2-2z+4)}{(z^2+4)^2}\bigg|_{z=0}=0.25$

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2(z^2+4)}dz=2\pi i*\underset{z=0}{res}f(z)=\frac{\pi i}{2}$

б) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+26)^2}dx$

1) Найдём особые точки для $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+2z+26)^2}$:

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-(-1+5i))^2(z-(-1-5i))^2}$$

Особые точки $z_1=-1+5i, z_2=-1-5i$

2) Теперь, т.к. $f(x)$ непрерывна на действительной прямой, справедливо следующее:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+26)^2}dx=2\pi i\sum_{Imz_k>0}\underset{z=z_k}{res}f(z)=2\pi i\underset{z=-1+5i}{res}f(z)$$

$$\underset{z=-1+5i}{res}f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z-(-1-5i))^2}\right)\bigg|_{z=-1+5i}=$$
$$=\frac{(2+10i)z}{(z+(1+5i))^3}\bigg|_{z=-1+5i}=-\frac{13i}{250}$$

Запишем ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+2x+26)^2}dx=2\pi i\left(-\frac{13i}{250}\right)=-\frac{13\pi}{125}$$

Часть 3

Задача 1. *Найти все значения степени. Ответ записать в алгебраической форме:* $(\sin 3i)^i$.

Решение.

$$(\sin 3i)^i = e^{i\ln|\operatorname{sh}3| - \left(\frac{\pi}{2}+2\pi l\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi l\right)}\left(\cos\ln|\operatorname{sh}3| + i\sin\ln|\operatorname{sh}3|\right) =$$
$$= e^{-\frac{\pi}{2}(1+4l)}\cos(\ln|\operatorname{sh}3|) + ie^{-\frac{\pi}{2}(1+4l)}\sin(\ln|\operatorname{sh}3|), l\in\mathbb{Z}$$

Задача 2. *Решить уравнение:* $\cos z = 2$.

Решение.

$$\left.\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2\right| * 2e^{iz}$$
$$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$$
$$t^2 - 4t + 1 = 0, t_{1,2} = 2\pm\sqrt{3}$$
$$e^{iz} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow iz = Ln\left(2+\sqrt{3}\right) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2i\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow z = -i\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + 2\pi k$$
$$e^{iz} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow iz = Ln\left(2-\sqrt{3}\right) = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + 2i\pi l, l\in\mathbb{Z} \Rightarrow z = -i\ln\left(2-\sqrt{3}\right) + 2\pi l$$