1. Множества. Операции над множествами. Бинарные отношения. Отношения частичного порядка, отношения эквивалентности. Фактор-множества.

Множество - совокупность некоторых элементов, объединённых каким-либо общим признаком. **Операции над множествами**: объедение ($\mathrm{A} \cup B,\ e \in \mathrm{A}$ или $e \in \mathrm{B}$), пересечение ($\mathrm{A} \cap B, e \in \mathrm{A}$ и $e \in \mathrm{B}$), разность ($\mathrm{A} - B$ или $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}, e \in \mathrm{A}$ и $e \notin \mathrm{B}$), симметричная разность ($C = A \oplus B$ или $C = A\Delta B\ C = (A\backslash B) \cup B\backslash A$).

Бинарным отношением R из множества A в множество B называется подмножество прямого произведения A и B и обозначается $R \subset A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ ($aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$).

Отношением частичного порядка на множестве X называется бинарное отношение $R \subset X \times X$, для которого выполнены:

1) рефлексивность ($aRa\ \forall a \in X$),
2) транзитивность ($aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc\ \forall a,b,c \in X$),
3) антисимметричность ($aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b\ \forall a,b \in X$).

Отношение эквивалентности на множестве X — это бинарное отношение, для которого выполнены:

1) рефлексивность ($a{\sim}a\ \ \forall a \in X$),
2) транзитивность ($a{\sim}b, b{\sim}c \Rightarrow a{\sim}c\ \forall a,b,c \in X$),
3) симметричность ($a{\sim}b \Rightarrow\ b{\sim}a\ \forall a,b \in X$).

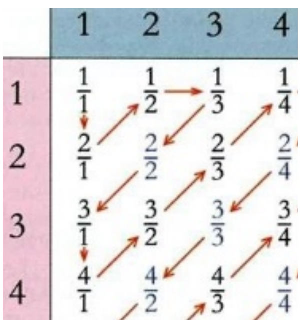
Фактор-множество — это множество всех классов эквивалентности (классом эквивалентности $[a] \subset X$ элемента $a \in X,$ называется подмножество элементов, эквивалентных a, т.е. $[a] = \{x \in X : x{\sim}a\}$, отношение эквивалентности разбивает множество на классы эквивалентности, которые либо совпадают, либо не пересекаются) множества X по заданному отношению $\sim$, обозначается $\mathrm{X}/{\sim}$. Пример: $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N},\ (p,q) \in R, (p_1,q_1)R(p_2,q_2) \Leftrightarrow p_1q_2 = p_2q_1$, тогда $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}/R$ – множество несократимых дробей (каждая из них является представителем своего класса эквивалентности).

2. Бесконечные множества, их мощность. Счётные и несчётные множества, примеры и теоремы. Диагональный процесс нумерации. Счётность множества конечных последовательностей рациональных чисел. Континуум, его несчётность.

Бесконечное множество — это такое множество, что любое конечное множество не превосходит его по мощности.

Счетное множество — это бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами, оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ (самое маленькое из бесконечных множеств). 1) В любом бесконечном множестве найдется счетное подмножество. 2) Всякое подмножество счетного множества конечное или счётное. 3)Множество всех конечных подмножеств счетного множества счётное. 4) Прямое произведение конечного числа счетных множеств счётное. Примеры счетных множеств: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$.

Множество называют **несчетным**, если оно не является, ни счетным, ни конечным.



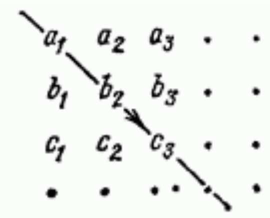
Примеры несчетных множеств: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. A – несчётное, B – счётное, тогда $|A \cup B| = |A|$.

Счётность множества рациональных чисел: необходимо доказать, что между множеством рациональных чисел и множеством натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие. Для доказательства будем использовать диагональный метод Кантора (на картинке). Тогда каждому рациональному числу будет поставлено в соответствие какое-либо натуральное число ($\frac{1}{1} \to 1, \frac{2}{1} \to 2, \frac{1}{2} \to 3, \frac{1}{3} \to 4, \ldots$).

Счётность множества конечных последовательностей рациональных чисел. Поскольку множество рациональных чисел счётно, поставим в соответствие рациональным числам их натуральные номера. $\mathbb{Q} = \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ – счётное, аналогично доказывается, что $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ – счётное (база индукции), $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \times \mathbb{N}$ – счётное (шаг индукции), тогда получаем, что множество всех конечных последовательностей натуральных чисел заданной длины счётно. А поскольку счётное множество счётных множеств счётно (доказывается, используя диагональный процесс нумерации), то множества конечных последовательностей рациональных чисел счётно.

Континуум - мощность множества всех вещественных чисел.

Теорема: Множество всех действительных чисел, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, является несчетным. **Доказательство**: напишем все наши числа $0 < x < 1$ в виде десятичных дробей; предположим, что все они расположены в счетный ряд, где $a_i, b_j, c_k, \ldots$ — любые из цифр $0, 1, \ldots, 9$, взятые в любом порядке. (Замемчание: $0{,}999\ldots = 1{,}000$).



Чтобы образовать десятичную дробь x', отличную от всех чисел схемы, выделим цифры $a_1, b_2, c_3, \ldots$, стоящие на диагонали, и поставим на первом десятичном месте числа x' какую-нибудь цифру a_1', заведомо отличную от a_1, на втором месте какую-нибудь цифру b_2', отличную от b_2, на 3 — c_3', отличную от c_3 и т.д. $x' = 0, a_1' b_2' c_3' \ldots$ Но в таком случае число x' заведомо отлично от числа x_1, т.к. у них 1-е цифры неодинаковы, точно так же $x' \neq x_2$, т.к. вторые цифры различны и т.д. $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ континуум - несчетное множество.

3. Теорема Кантора для произвольного множества.

Обозначим множество всех подмножеств счётного множества A как $P(A)$. Заметим, что $|P(A)| = 2^{|A|}$, поскольку $\forall B \subset A$ можно поставить в соответствие число в двоичной системе, где на i-ом место стоит 1, если элемент с номером i входит в данное подмножество, 0 – если не входит. Мощность множества таких двоичных чисел равна $2^{|A|}$, поскольку на каждое из $|A|$ мест можно поставить одну из 2 цифр.

Теорема: *Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.*

Доказательство: предположим, что $\exists A : |A| = |P(A)| \Leftrightarrow \exists f : x \to B, x \in A, B \subset A$ – биекция. Рассмотрим $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. f – биекция, $B \subseteq A \Rightarrow \exists y \in A : f(y) = B$. Но если $y \in B$, то $y \in f(y)$, а тогда $y \notin B$ по определению B - противоречие. И наоборот, если $y \notin B$, то $y \notin f(y)$, а значит $y \in B$ - тоже противоречие. Значит $|A| \neq |P(A)|$. Заметим, что $P(A)$ содержит множество равномощное A (например, множество всех одноэлементных подмножеств A), а тогда из доказанного следует, что $|P(A)| > |A|$.

Note: достаточно доказать, что множество бесконечных последовательностей из $\{0{,}1\}$ несчётно, значит $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$, а поскольку любое бесконечное множество содержит счётное подмножество, то это неравенство выполняется для всех бесконечных множеств (для конечных доказано выше).

4. Теорема Кантора-Бернштейна.

Теорема: пусть даны два множества A и $B : \begin{cases} |A| \leq |B| \\ |B| \leq |A| \end{cases}$, тогда $|A| = |B|$.

Доказательство: зададим отображения $f : A \to B$ и $g : B \to A$, обозначим $A_0 = A, B_0 = B$. Тогда $f(A_0) = B_1 \subset B_0, f(B_0) = A_1 \subset A_0$, $f(A_1) = B_2 \subset B_1, f(B_1) = A_2 \subset A_1$ и т.д. Рассмотрим $C_k = A_k \backslash A_{k+1}$, $D_k = B_k \backslash B_{k+1}$, $k = 0{,}1, \ldots$, все они непересекающиеся между собой, $C_\infty =$

$\cap_{k=0}^{\infty} A_k$, $D_\infty = \cap_{k=0}^{\infty} B_k$, тогда $A = \cup_{k\geq 0} C_k \cup C_\infty$, $B = \cup_{k\geq 0} D_k \cup D_\infty$. Заметим, что $f(C_k) = f(A_k \backslash A_{k+1}) = B_{k+1} \backslash B_{k+2} = D_{k+1}$, аналогично $G(D_k) = C_{k+1}$, причём $f(C_\infty) = D_\infty, g(C_\infty) = C_\infty$. Мы построили биекцию между $A, B \Rightarrow |A| = |B|$.

5. Полуметрические и метрические пространства. Подпространство метрического (полуметрического) пространства. Неотрицательность расстояния. Второе неравенство треугольника и неравенство многоугольника. Переход от полуметрического к метрическому пространству. Примеры.

Метрическое пространство — это множество X, на котором задана функция $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$ – расстояние, причём:

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – свойство невырожденности,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\ \forall x, y \in X$ – симметричность,
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)\ \forall\ x, y, z \in X$ – неравенство треугольника.

Полуметрическое пространство — это множество X, на котором задана функция $\rho: X \times X \to \mathbb{R}_+$ – расстояние, причём:

1) $\rho(x, x) = 0$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\ \forall x, y \in X$,
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)\ \forall\ x, y, z \in X$.

Подпространство метрического пространства: пусть (X, ρ) — метрическое пространство, тогда $\forall X_1 \subset X \Rightarrow (X_1, \rho)$ также будет метрическим пространством, т.к. свойства метрики (X_1, ρ) наследуются из пр-ва (X, ρ).

Неотрицательность расстояния: $0 = \rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x) \leq 2\rho(x, y) \Rightarrow \rho(x, y) \geq 0$.

Второе неравенство треугольника: $|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leq \rho(x, z)$. Доказательство следует из неравенства четырехугольника: $\forall x, y, u, v \in X: |\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, v)$. Заметим: $\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y)$, откуда $\rho(x, y) - \rho(u, v) \leq \rho(x, u) + \rho(v, y)$. С другой стороны, поступая аналогично, но начиная с $\rho(u, v)$, а не с $\rho(x, y)$, получается: $\rho(u, v) - \rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(v, y)$. Если $u = z, v = y$, то получим второе неравенство треугольника. **Неравенство многоугольника**: $\rho(x_0, x_N) \leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \cdots + \rho(x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \rho(x_k, x_{k+1})$.

Переход от полуметрического к метрическому пространству. Предметрическое пространство можно превратить в метрическое, достаточно устроить выполнение свойства $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$. Для этого зададим отношение эквивалентности: $x \sim y$, если $\rho(x, y) = 0$. Взяв фактормножество по этому отношению эквивалентности, получим метрическое пространство. **Пример**: рассмотрим пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \rho(A, B) = \rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2|$. Введём отношение эквивалентности: $A \sim B \Leftrightarrow x_1 = x_2$, тогда фактор-множество по этому отношению эквивалентности – это множество прямых, параллельных оси OY.

6. Ограниченность метрического пространства и подпространства метрического пространства. Понятие ε-сети. Вполне ограниченные метрические пространства и подпространства. Понятие всюду плотного множества.

Шаром $S_r(a)$ с центром в точке a и радиуса r в метрическом пространстве (X, ρ) называется множество $\{x \in X : \rho(x, a) < r\}$, где x – точка метрического пространства. **Ограниченное метрическое пространство** – это метрическое пространство (X, ρ), целиком принадлежащее некоторому шару $S_r(a)$, $\sup\limits_{x,y\in X} \rho(x, y)$ называется диаметром этого метрического пространства. Подпространство ограниченного метрического пространства ограничено, т.к. оно тоже окажется внутри шара $S_r(a)$, причём его диаметр не будет превосходить диаметр метрического пространства.

ε-окрестностью метрического пространства (X,ρ) называется множество $A_\varepsilon = \{x \in X : \exists y \in A : \rho(x,y) < \varepsilon\} = \cup_{y\in A} S_\varepsilon(y)$. Множество A называется **ε-сетью** метрического пространства (X,ρ), если $\forall x \in X : \exists y \in A : \rho(x,y) < \varepsilon$ (A может быть бесконечным). Если для множества можно найти конечную ε-сеть, то оно ограничено.

Метрическое **пространство** (X,ρ) называется **вполне ограниченным**, если $\forall\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть, иначе говоря, метрическое пространство вполне ограничено, если оно покрывается конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса.

Подпространство (Y,ρ) метрического пространства (X,ρ) **вполне ограничено** тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для Y. Доказательство: покроем X конечным числом шаров радиуса $\varepsilon/2$, в каждом из них выберем по точке подмножества Y (игнорируя шары, которые не пересекаются с Y), получим конечную ε-сеть в Y. Таким образом, подпространство вполне ограниченного пространства вполне ограничено.

7. Предел последовательности элементов метрического пространства. Свойства сходящихся последовательностей. Непрерывность расстояния.

Рассмотрим метрическое пространство (X,ρ), $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ – некоторые его точки. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если $\rho(x_n,x_m) \le C - const\ \forall x_n,x_m \in \{x_n\}$. Последовательность сходится к x^* ($x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^* \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$) если $\rho(x_n,x^*) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тогда x^* – **предел последовательности**.

Если последовательность сходится, то она ограничена. Доказательство: $\rho(x_n,x_m) \le \rho(x_n,x^*) + \rho(x_m,x^*)$, а $\rho(x_n,x^*)$ и $\rho(x_m,x^*)$ - ограничены.

Если существует предел, то он единственный. Доказательство: пусть $x_n \to x^*$ и $x_n \to \hat{x}$. $\rho(\hat{x},x^*) \le \rho(x_n,x^*) + \rho(x_n,\hat{x})$, получается $\rho(\hat{x},x^*) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, но это расстояние не зависит от n, т.е. $\rho(\hat{x},x^*) = 0$, а значит существует единственный предел, если он есть.

Свойство **непрерывности расстояния**: $\left.\begin{matrix} x_n \to x^* \\ y_n \to y^* \end{matrix}\right\} \Rightarrow \rho(x_n,y_n) \longrightarrow \rho(x^*,y^*)$. Доказывается через неравенство четырёхугольника: $|\rho(x_n,y_n) - \rho(x^*,y^*)| \le \rho(x_n,x^*) + \rho(y_n,y^*)$. Кроме того, если $x_n \to x \Rightarrow \rho(x_n,y) \to \rho(x,y)$. Доказательство через второе неравенство треугольника: $|\rho(x_n,y) - \rho(x,y)| \le \rho(x_n,x)$.

8. Понятие о внешней, внутренней и граничной точке множества. Открытые множества. Предельная точка множества и замкнутые множества. Замкнутость множества предельных точек. Замыкание множеств. Плотные множества. Сепарабельные и несепарабельные метрические пространства. Примеры.

Рассмотрим множество $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$. Точка x называется **внутренней** точкой A, если $\exists\varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \subset A$. $\neg A = X \backslash A$ – дополнение A. Точка x называется **внешней** точкой A, если $\exists\varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x) \subset \neg A$. Точка x называется **граничной** точкой A, если $\forall\varepsilon > 0 \Rightarrow S_\varepsilon(x) \cap A \ne \emptyset,\ S_\varepsilon(x) \cap \neg A \ne \emptyset$. Любая точка либо внутренняя, либо внешняя, либо граничная.

Открытое множество - множество, все точки которого внутренние, т.е. множество, любой элемент которого входит в множество вместе со своей окрестностью.

Точка x - **предельная точка** множества A, если любая её выколотая окрестность имеет непустое пересечение с A. Предельная точка является пределом последовательности $x_n \in \left(S_{\varepsilon_n}(x) \cap A\right)\backslash\{x\}, x_n \to x, \rho(x,x_n) \le \varepsilon_n \to 0$. Если точка x

предельная точка множества A, то в любой её окрестности содержится бесконечное число элементов множества A. Множество всех предельных точек множества A обозначим A'. Множество предельных точек замкнутое. Пусть A'' – множество предельных точек множества $A', x \in A'', y \in A'$ – лежит в окрестности x. В любой окрестности $y \in A'$ есть элементы из $A \Rightarrow A' = A''$. Если точка не является предельной для множества, то она изолированная ($x \in A, S_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$).

Замкнутое множество – это множество, которое содержит все свои предельные точки ($A' \subset A$).

Замыкание множества – это $[A] = A \cup A'$ (все его внутренние точки и все граничные). Никакие точки $[A]$ не лежат вне $A \cup A'$, поскольку если $x \in [A]', x_n \in [A], x_n \to x$, то можно представить эту последовательность в виде суммы $x_n = x_{n_A} + x_{n_{A'}}$, тогда хотя бы одна из них бесконечна: если x_{n_A} бесконечна, то $x \in A'$, если $x_{n_{A'}}$ бесконечна, то $x \in A'$, получили, что никакие точки $[A]$ не лежат вне $A \cup A'$.

Если $A \subset B$, множества A называется всюду **плотным** в множестве B, если $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in B\ \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$. Это значит, что $B \subset [A]$. Плотное множество является ε-сетью для $\forall \varepsilon$.

Метрическое пространство называется **сепарабельным**, если в нём есть счётное плотное множество. **Пример**: $\mathbb{R}$ сепарабельно, т.к. в нём есть плотное множество $\mathbb{Q}$. **Пример**: $C[a; b]$ – множество непрерывных функций, по теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно приблизить с помощью многочленов $P[a; b] \subset C[a; b]$, тогда множество многочленов плотно в $C[a; b]$, но не счётно, можем взять множество многочленов с рациональными коэффициентами, их счётное число, тогда пространство $C[a; b]$ сепарабельно. **Пример**: l_1 – пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел, для которых сходится ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$, можем приблизить бесконечную вещественную последовательность конечной рациональной ($\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| < \varepsilon, x_j \in \mathbb{R}, y_j \in \mathbb{Q}$), множество конечных рациональных последовательностей счётно, плотно в l_1, а значит l_1 сепарабельно. **Пример**: l_∞ – пространство бесконечных ограниченных последовательностей, не является сепарабельным. Для этого достаточно доказать, что любая его ε-сеть для какого-то фиксированного ε не будет счётной (не было решено).

9. Замкнутые и открытые множества, их конечные и счётные объединения и пересечения. Дополнения замкнутых и открытых множеств.

Открытое множество - множество, все точки которого внутренние, т.е. множество, для каждого элемента которого входит его окрестность.

Объединение любого набора открытых множеств – открытое множество. Доказательство: $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$ (α может быть конечным или бесконечным). $x \in A$, значит $\exists \alpha : x \in A_\alpha$. Множество A_α – открытое, значит $\exists \varepsilon : S_\varepsilon(x) \subset A_\alpha \subset A$, т.е. $\forall x$ входит в A вместе со своей окрестностью $\Rightarrow A$ – открытое.

Пересечение конечного набора открытых множеств – открытое множество. Доказательство: $A = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$. Пусть $x \in A$, значит $x \in A_n\ \forall n$, где A_n - открытое. Значит, $S_{\varepsilon_n}(x) \subset A_n$. Выберем $\varepsilon = \min\limits_n \varepsilon_n \Rightarrow S_\varepsilon(x) \subset A_n \Rightarrow S_\varepsilon(x) \subset A \Rightarrow A$ - открытое. (Для бесконечного набора не всегда можно выбрать ε).

Замкнутое множество - то, которое содержит все свои предельные точки.

Пересечение любого набора замкнутых множеств – замкнутое множество. Доказательство: $x_n \to x$, $x_n \in B$. Нужно доказать, что $x \in B$. $\forall \alpha : x_n \in B_\alpha \Rightarrow x \in B_\alpha$, B_α – замкнутое. Значит B содержит все пределы $\{x_n\} \Rightarrow x \in B$.

Объединение конечного набора замкнутых множеств – замкнутое множество. Доказательство: $B = \bigcup_{n=1}^{N} B_n, x \in B' \Rightarrow \exists \{x_k\} \to x, x_k \neq x, x_k \in B \Rightarrow x_k \in B_n\ \forall k \Rightarrow$ найдётся хотя бы одно значение $n : x'_k \in B_n, x'_k$ – бесконечная подпоследовательность последовательности x_k, $x'_k \to x$. Т.к. B_n замкнуто $\Rightarrow x \in B_n \subset B$.

Дополнение множества $A \in X$– это множество $B \in X : B = X \backslash A$.

Дополнение к открытому множеству замкнуто. Доказательство: $A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$. Пусть A – открыто, $B = X/A$. Рассмотрим $x \in B'$ – предельную точку, тогда в её окрестности лежит бесконечное число членов B. Если $x \in A$, то в любой окрестности x нет точек из B, тогда все предельные точки лежат в B, а значит B - замкнутое.

Дополнение к замкнутому множеству открыто. Доказательство: пусть B – замкнутое, $A = X/B$. Рассмотрим $x \in A$, нужно доказать, что $\exists S_\varepsilon(x) \subset A$. Если бы в $\forall S_\varepsilon(x)$ был элемент из B, то x был бы предельной точкой, но все предельные точки принадлежат B, т.е. не входят в A, а значит A - открытое.

10. Фундаментальная последовательность. Полные и неполные метрические пространства и подпространства. Связь полноты и замкнутости. Примеры.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall m, n > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной (для пространства E_1 это необходимое и достаточное условие). Доказательство: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow \rho(x_n, x) < {}^{\varepsilon}/_{2}$. Тогда в силу неравенства треугольника $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) < \varepsilon$.

Полное метрическое пространство – это пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится. Если в метрическом пространстве существует не сходящаяся фундаментальная последовательность, то это пространство **неполное**.

Замкнутое подмножество полного метрического пространства тоже полное. Доказательство: пусть (X, ρ) – полное, $Y \subset X$, $\{x_k\}$ – фундаментальная последовательность в $Y \subset X \Rightarrow x_k \in X \Rightarrow x_k$ – всегда сходящаяся в X ($x_k \to x^* \in X$). Y – полное, когда все $x^* \in Y$. Это выполняется тогда, когда Y – замкнуто.

Пример: рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}^n_{\max}$ где $\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|, \rho(x, y) = \|x - y\|$. Рассмотрим последовательность $\{x^{(j)}\} \in \mathbb{R}^n_{\max}$. Эта последовательность фундаментальна, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m, k > N \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(k)}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon\ \forall i \Leftrightarrow x_i^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i^*$. Получили фундаментальные числовые последовательности, которые сходится по критерию Коши, т.е. существует покомпонентная сходимость, $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ – кандидат на роль предела. Требуется доказать, что есть сходимости в смысле пространства. Знаем, что $\rho\left(x^{(m)}, x^*\right) = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(m)} - x_i^*\right|$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_i \in \mathbb{N} : \forall m > N_i \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right| < \varepsilon$. Выберем $N = \max\limits_{1\leq i\leq n} N_i$, возьмём $m > N \Rightarrow m > N_i\ \forall i \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right| < \varepsilon\ \forall i \Rightarrow \max\limits_{1\leq i\leq n}\left|x_i^{(m)} - x_i^*\right| < \varepsilon \Rightarrow \rho\left(x^{(m)}, x^*\right) < \varepsilon$, это означает, что x^* – предел $\{x_k\}$, тогда $\mathbb{R}^n_{\max}$ – полное метрическое пространство.

Пример: рассмотрим метрическое пространство $\mathbb{R}_p^n$ где $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \rho(x,y) = \|x-y\|$. Рассмотрим последовательность $\{x^{(j)}\} \in \mathbb{R}_p^n$. Эта последовательность фундаментальна, тогда $\forall\varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall m,k > N \Rightarrow \left\|x^{(m)} - y^{(k)}\right\| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right|^p} < \varepsilon \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow x_i^{(m)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i^*$. Получили фундаментальные числовые последовательности, которые сходится по критерию Коши, т.е. существует покомпонентная сходимость. Знаем, что $\rho\left(x^{(m)}, x^*\right) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right|^p}$ и $\forall\varepsilon > 0\, \exists N_i \in \mathbb{N} : \forall m > N_i \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right| < \varepsilon$. Тогда найдётся $\mathrm{N} : \forall m > N \Rightarrow \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right| < \varepsilon\, \forall i \Rightarrow \rho\left(x^{(m)}, x^*\right) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left|x_i^{(m)} - x_i^*\right|^p} \le \sqrt[p]{n\varepsilon^p} = \varepsilon\sqrt[p]{n}$, получили, что последовательность сходится (константа ε не влияет на сходимость), тогда $\mathbb{R}_p^n$– полное метрическое пространство.

11. Отображения метрических пространств. Ограниченность оператора (функционала). Непрерывность отображения (оператора, функционала) на языке $\boldsymbol{\varepsilon, \delta}$ и на языке последовательностей, их эквивалентность.

Для двух метрических пространств $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ можно построить отображение $F: X \to Y$ (правило, по которому каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие некоторая точка $y \in Y$). Если $Y \equiv \mathbb{R}$ или $Y \equiv \mathbb{C}$, то такое отображение называется функционалом. Если отображение $\mathrm{y} = F(x)$ инъективно, то можно задать обратное отображение $x = F^{-1}(y) = \{x \in X : F(x) = y\}$.

Оператор $A: X \to Y$ называется **ограниченным**, если каждое ограниченное множество исходного пространства X он переводит в ограниченное множество пространства Y. Если функционал $F: X \to Y$ ограничен на X, то он принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Будем называть линейный оператор $A: X \to Y$ в нормированном пространстве ограниченным, если $\exists C > 0 : \|Ax\| \le C\|x\|$.

Отображение $F: X \to Y$ называется **непрерывным в точке** $x_0 \in X$, если $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in S_\delta(x_0) : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(y, y_0) < \varepsilon$ (непрерывность по Коши). Если X и Y – нормированные пространства с нормами $\| \|_X$ и $\| \|_Y$ соответственно, то оператор $A: X \to Y$ называется **непрерывным в точке** $x_0 \in D(X)$, если $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in D(X) : \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$. Оператор непрерывен в точке x^*, если для любой последовательности $x_n \to x^* \Rightarrow F(x_n) \to F(x^*)$ (непрерывность по Гейне). Докажем, что непрерывность по Гейне эквивалентна непрерывности по Коши. Обозначим $y_n = F(x_n), y^* = F(x^*)$. Пусть есть непрерывность по Коши и $\{x_n\}$ сходится к x^*, хотим доказать, что $\forall\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \Rightarrow \rho_y(y_n, y^*) < \varepsilon$. По признаку Коши, $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in S_\delta(x^*) : \rho_x(x, x^*) < \delta \Rightarrow \rho_y(y, y^*) < \varepsilon$, для фиксированного ε найдётся $S_\delta(x^*)$, найдётся номер N, начиная с которого все члены последовательности x_n попадут в $S_\delta(x^*)$, тогда $\rho_y(y, y^*) < \varepsilon$, т.е. получили сходимость по Гейне. Если же нет сходимости по Коши, т.е. $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \forall x \in S_\delta(x_0) \Rightarrow \rho(y, y_0) \ge \varepsilon$, то нет и непрерывности по Гейне ($x_n \to x^*$, но $F(x_n) \nrightarrow F(x^*)$).

Отображение $F: X \to Y$ называется непрерывным на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке X. Оператор A назовем непрерывным, если он непрерывен в каждой точке $D(A)$.

Утверждение: если линейный оператор A непрерывен в какой-либо точке $x_0 \in X$, то он непрерывен всюду на $D(A)$. Доказательство: пусть A непрерывен в точке $x_0 \in X$. Тогда

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D(A) :\ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Ax - Ax_0\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y < \varepsilon$, иными словами, $\forall x \in D(A) :\ \|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax\|_X < \varepsilon$. Если x_0 – произвольная точка $D(A)$, и $\|x - x_0\| < \delta$, то мы заключаем, что $\|Ax - Ax_0\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y < \varepsilon$.

12. Равномерная непрерывность отображения. Продолжение равномерно непрерывного оператора (функционала), заданного на плотном множестве.

Отображение $F: X \to Y$ равномерно непрерывно, если для всех точек $x_0 \in X$, выполняется условие $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in S_\delta(x_0) : \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(y, y_0) < \varepsilon$, причём для всех точек x_0 значение δ одинаково.

Пусть $F: X \to Y$ – равномерно непрерывное отображение, множество $\widetilde{\mathrm{X}}$ плотно во множестве $X, D(F) = \tilde{X}$, тогда можно продолжить это отображение на множество X с линейностью. Рассмотрим $x_k \in \tilde{X}, x_k \to x^*, x^* \in X$ – сходящуюся фундаментальную последовательность, $y_k = F(x_k)$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |y' - y''| < \varepsilon$, требуется доказать, что $\exists N : \forall n, m > N \Rightarrow \rho(y_n, y_m) < \varepsilon$. Зафиксируем ε, для него можно найти δ и номер $N : \forall n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \delta$, тогда автоматически $\rho(y_n, y_m) < \varepsilon$. Чтобы это выполнялось, должно выполняться условие $F(x^*) \in Y$, т.е. Y должно быть полным. Для этого достаточно определить $F(x^*)$ как $F(x^*) \overset{\text{def}}{\coloneqq} \lim\limits_{k\to\infty} F(x_k)$. Корректность (доопределённое отображение останется равномерно непрерывным): пусть $x_k \to x^*, \widetilde{x_k} \to x^* \Rightarrow \rho(x_k, \widetilde{x_k}) \to 0 \Rightarrow$ в силу равномерной непрерывности $\rho(y_k, \widetilde{y_k}) \to 0$, где $y_k = f(x_k), \widetilde{y_k} = f(\widetilde{x_k})$, тогда предел не зависит от того, лежит последовательность в $\tilde{X}$ или в $X = [\tilde{X}]$.

13. Операторные уравнения. Обратные отображения (операторы). Корректные и некорректные задачи. Достаточное условие непрерывности обратного оператора.

$F: X \to Y, G: X \to Y$, задача – найти такие $x : F(x) = G(x)$.

Случай $G(x) = y - const$, получаем уравнение $F(x) = y$, найти при каких c решение существует (единственно), найти это решение (все, если их несколько). Корректность задачи: если $\forall y \in Y \in B\ \exists!\, x : x = F^{-1}(y)$ (малые изменения y приводят к малым изменениям x – это непрерывность оператора), важна непрерывность обратного оператора.

Случай $G(x) = x$ – отображение в себя, получаем уравнение $F(x) = x$, такой x – неподвижная точка отображения, если она существует.

Достаточное условие непрерывности **обратного оператора**: рассмотрим отображение $F: X \to Y$, где $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ – метрические пространства, здесь $y = F(x)$. Обратное отображение ($F^{-1}: ImF \to X$) непрерывно, если $\rho_y\big(F(x_1), F(x_2)\big) \geq c\rho_x(x_1, x_2), c > 0$. Доказательство: это отображение инъективно, т.к. если $y_1 = y_2, y_1 = F(x_1), y_2 = F(x_2), 0 = \rho_y(y_1, y_2) \geq c\rho_x(x_1, x_2), c > 0 \Rightarrow \rho_x(x_1, x_2) = 0$, т.е. $x_1 = x_2$. Это отображение непрерывно, т.к. $\rho_x(x_1, x_2) = \rho\big(F^{-1}(y_1), F^{-1}(y_2)\big) \leq c\rho(y_1, y_2)$.

14. Сжимающее отображение (сжатие). Теорема о неподвижной точке. Метод простой итерации и оценки погрешности приближений.

Пусть X – метрическое пространство. Отображение $A: X \to X$ называется **сжимающим** (или сжатием), если $\exists\alpha, 0 \leq \alpha < 1 : \forall x, y \in X \Rightarrow \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$.

Точка $x \in X$ называется **неподвижной** точкой отображения $A: X \to X$, если $Ax = x$.

Теорема: Всякое сжимающее отображение $A: X \to X$ в полном метрическом пространстве X имеет неподвижную точку, причём только одну. Доказательство: пусть x_0 – произвольная точка в X. Положим $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$ и т.д.: $x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X. Действительно, для $m \geq n$

мы имеем $\rho(x_n, x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \alpha^n\big(\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\big) \le \alpha^n \rho(x_0,x_1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-n-1}) \le \alpha^n \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.к. $0 \le \alpha < 1$. В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $x \in X$. Из непрерывности отображения A следует, что $Ax = A\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$, тогда x – это неподвижная точка. Итак, существование неподвижной точки доказано. Докажем её единственность. Так как A – сжимающее отображение, то из $Ax = x$, $Ay = y$, следует, что $\rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y) \Rightarrow (1-\alpha)\rho(x,y) \le 0$, здесь $1-\alpha > 0, \rho(x,y) \ge 0$, значит это неравенство выполняется только при $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. Значит неподвижная точка единственно.

Метод простой итерации и оценки погрешности приближений: $\rho(x_n,x_m) = \rho(A^n x_0, A^m x_0) \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le \alpha^n\big(\rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,x_2) + \cdots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\big) \le \alpha^n \rho(x_0,x_1) \cdot (1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-n-1}) \le \alpha^n \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}$, т.е. $\rho(x_n, x^*) \le \alpha^n \frac{\rho(x_0,x_1)}{1-\alpha}$, причём т.к. $0 \le \alpha < 1$, будет справедливой и оценка $\rho(x_n,x^*) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_0,x_1)$, и даже $\rho(x_n,x^*) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1},x_n)$, т.к. $\rho(x_n,x^*) = \rho(Ax_{n-1}, Ax^*) \le \alpha\rho(x_{n-1},x^*)$ и $\rho(x_{n-1},x^*) \le \rho(x_{n-1},x_n) + \rho(x_n,x^*) \Rightarrow \rho(x_{n-1},x^*) \le \rho(x_{n-1},x_n) + \alpha\rho(x_{n-1},x^*) \Rightarrow (1-\alpha)\rho(x_{n-1},x^*) \le \rho(x_{n-1},x_n) \Rightarrow \rho(x_{n-1},x^*) \le \frac{1}{1-\alpha}\rho(x_{n-1},x_n) \Rightarrow \rho(x_n,x^*) \le \alpha\rho(x_{n-1},x^*) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1},x_n) \Rightarrow \rho(x_n,x^*) \le \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho(x_{n-1},x_n)$.

15. Применение принципа сжимающих отображений к трансцендентным уравнениям.

Трансцендентное уравнение – это уравнение, не являющееся алгебраическим (содержат показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции).

Хотим решить уравнение $x + e^x - 5 = 0$. Варианты преобразований: $x = 5 - e^x$ или $e^x = 5 - x \Rightarrow x = \ln(5-x)$. Попытаемся устроить $F: X \to X$ – сжатие, т.е. $|F(x') - F(x'')| \le q|x' - x''|$. По теореме Лагранжа $F(x') - F(x'') = F'(\tilde{x})(x' - x'') \Rightarrow |F(x') - F(x'')| \le |F'(\tilde{x})| \cdot |x' - x''| \Rightarrow |F(x') - F(x'')| \le \max|F'(\tilde{x})| \cdot |x' - x''|$, если $|F'(\tilde{x})| = q < 1$, получим сжатие. В нашем случае удобно взять $F(x) = \ln(5-x) \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{5-x} \Rightarrow q = \max|F'(x)| = \max\frac{1}{|x-5|}$, т.е. отображение будет сжимающимся на $[-\infty; 4] \cup [6; +\infty]$. Имеем соотношение $|\ln(5-x') - \ln(5-x'')| \le \frac{1}{|x-5|} \cdot |x' - x''|$, на $[-\infty; 4] \cup [6; +\infty]$ будет верна оценка $|x_n - x^*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$ и можно искать решение итерационно, вычисляя значения для $q = |F'(x)|$ на разных отрезках.

Общий случай: хотим найти $f(x) = 0$. Перепишем это как $x = x \pm \alpha f(x) = \varphi(x), \alpha > 0$ (плюс когда производная $\varphi'(x)$ отрицательна, минус когда положительна). Чтобы выбрать α оценим нашу функцию: $0 < m \le f'(x) \le M \Rightarrow 1 - \alpha M \le \varphi'(x) \le 1 - \alpha m < 1$. Значение $\alpha = \frac{2}{M+m}$ – оптимальное, т.к. тогда $q \le 1 - \frac{2}{M+m}m = \frac{M-m}{M+m} < 1$. Получаем $x = x - \frac{2f(x)}{M+m} = x - \frac{f(x)}{\frac{M+m}{2}}$, здесь $\frac{M+m}{2}$ – среднее значение $f'(x)$, переписывая $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ получаем формулу Ньютона, а также метод касательных: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

16. Применение принципа сжимающих отображений к системам линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b$, $i = \overline{1,n}$. Определим условия, при которых A будет сжатием. Если отображение A – это сжатие, то ∃! точка $x = (x_1, \dots, x_n) : x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b$.

В пространстве $\mathbb{R}_\infty^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$ получим, что $\rho(y', y'') = \max\limits_i|y_i' - y_i''| = \max\limits_i\left|\sum_j a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right)\right| \le \max\limits_i \sum_j|a_{ij}||x_j' - x_j''| \le \max\limits_i \sum_j|a_{ij}| \max\limits_j|x_j' - x_j''| \le \left(\max\limits_i \sum_j|a_{ij}|\right)\rho(x', x'')$, тогда условие сжимаемости – $\sum_j|a_{ij}| \le \alpha < 1, i = \overline{1,n}$.

В пространстве $\mathbb{R}_1^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|$ получим, что $\rho(y', y'') = \sum_i|y_i' - y_i''| = \sum_i\left|\sum_j a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right)\right| \le \sum_i \sum_j|a_{ij}||x_j' - x_j''| \le \left(\max\limits_i \sum_j|a_{ij}|\right)\rho(x', x'')$, тогда условие сжимаемости – $\sum_j|a_{ij}| \le \alpha < 1, i = \overline{1,n}$.

В пространстве $\mathbb{R}_2^n$ с метрикой $\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ из неравенства Коши-Буняковского получаем $\rho^2(y', y'') = \sum_i\left(\sum_j a_{ij}\left(x_j' - x_j''\right)\right)^2 \le \left(\sum_i \sum_j {a_{ij}}^2\right)\rho^2(x', x'')$, тогда условие сжимаемости – $\sqrt{\sum_i \sum_j {a_{ij}}^2} \le \alpha < 1, i = \overline{1,n}$.

Последовательные приближения имеют вид $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right), x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right), \dots$ где $x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i$, а в качестве $x^{(0)}$ можно взять любую точку из $\mathbb{R}^n$.

Note: если условие сжатия выполняется хотя бы для одной из заданных на одном и том же множестве метрик, то условие сжатие и все вытекающие из него свойства выполняются на этом множестве независимо от выбора метрики (т.е. любое из приведённых условий является достаточным, но ни одно из них не является необходимым). Тогда если $|a_{ij}| < \frac{1}{n}$, то метод применим, если $|a_{ij}| \ge \frac{1}{n}$, то ни одно из условий не выполняется.

17. Применение принципа сжимающих отображений к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Докажем существование единственного решения неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода: $f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy$, где $K(x,y)$ - "ядро" и $\varphi(x)$ – заданные функции, λ - произвольный параметр, f - искомая функция. Предположим, что $K(x,y)$ и $\varphi(x)$ - непрерывны при $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, тогда $|K(x,y)| \le M$. Рассмотрим отображение $g = Af$ полного пространства $C[a,b]$ в себя, задаваемые формулой $g(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$. Имеем $\rho(g_1, g_2) = \max\limits_{x}|g_1(x) - g_2(x)| \le |\lambda| \max\limits_x \int_a^b K(x,y)\left(f_1(y) - f_2(y)\right)dy \le \lambda \max\limits_x \int_a^b K(x,y)dy\, \rho(f_1, f_2)$. Следовательно, при $|\lambda| < \frac{1}{\max\limits_x \int_a^b K(x,y)dy}$ отображение A – сжимающее, тогда из принципа сжимающих отображений заключаем, при таких λ уравнение имеет единственное решение. Последовательные приближения к этому решению имеют вид $f_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f_{n-1}(y)dy + \varphi(x)$, в качестве f_0 можно взять любую непрерывную функцию.

18. Применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка (теоремы Пикара).

Теорема Пикара: задачи Коши $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ имеет единственное решение на некотором интервале, если $f(x,y)$ определена и непрерывна в некоторой плоской области, содержащей точку (x_0, y_0), а также удовлетворяет условию *Липшица*: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le M|y_1 - y_2|$. *Легко заметить*, что эта задача Коши эквивалентна следующему интегральному уравнению: $y = F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)dt$. Требуется доказать, что $F(x)$ – сжатие. Рассмотрим $\tilde{y} = F(\tilde{x}), \hat{y} = F(\hat{x})$, тогда $|\tilde{y}(x) - \hat{y}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}\Big(f\big(t,\tilde{x}(t)\big) - t\big(t,\hat{x}(t)\big)\Big)dt\right| \le \int_{x_0}^{x}\left|f\big(t,\tilde{x}(t)\big) - t\big(t,\hat{x}(t)\big)\right|dt \le \int_{x_0}^{x} M|\tilde{x}(t) - \hat{x}(t)|dt \le M|x - x_0| \cdot \rho_c(\tilde{x},\hat{x})$. Для того, чтобы получить сжатие, требуется чтобы $M|x - x_0| < 1 \Rightarrow |x - x_0| < \frac{1}{M} \Rightarrow$ задача Коши имеет локальное решение не на всей оси, а на отрезке $\left[x_0 - \frac{1}{M}; x_0 + \frac{1}{M}\right]$.

19. Изометрия метрических пространств. Непрерывность и ограниченность изометрических отображений. Идентичность метрических свойств (ограниченность, полнота, сходимость последовательностей) изометричных пространств. Пополнение неполных метрических пространств. Теорема Хаусдорфа (единственность): изометричность всех пополнений неполного метрического пространства. Примеры.

Биекция f между метрическими пространствами (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) является **изометрией**, если $\rho_X(x,y) = \rho_Y\big(f(x), f(y)\big)\, \forall x,y \in X$ и наоборот $\forall x' = \tau(x), y' = \tau(y) \in Y\ \rho_Y(x',y') = \rho_X(x,y)$. Само отображение τ называется изометрией. Пространства, между которыми можно установить изометрическое соответствие называются **изометричными**. Изометричные пространства обладают одинаковыми свойствами, связанными с метрикой: ограниченность, сходимость фундаментальных последовательностей, полнота. Непрерывность изометрических отображений: пусть F – какая-то функция, знаем, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall x \in X :\ \rho_x(x,x^*) < \delta \Rightarrow \rho_x\big(F(x), F(x^*)\big) < \varepsilon$, тогда $\rho_x(x,x^*) = \rho_y\big(f(x), f(x^*)\big) < \delta \Rightarrow \rho_y\Big(F\big(f(x)\big), F\big(f(x^*)\big)\Big) < \varepsilon \Rightarrow F$ – непрерывна в Y.

Полное метрическое пространство Y называется **пополнением** пространства X, если:

1) В Y есть подпространство Y_0, изометричное X.

2) Y_0 всюду плотно в Y, т.е. $[Y_0] = Y$

Все пополнения изометрического пространства изометричны между собой.

Теорема Хаусдорфа: любое неполное метрическое пространство X имеет единственное пополнение Y с точностью до изометричности, оставляющие неподвижными точки из X. Докажем **единственность**, т.е. если Y', Y'' – два дополнения пространства X, то существует такое взаимно однозначное соответствие $\varphi: Y' \to Y''$, что:

1) $\varphi(x) = x\ \forall x \in X$

2) если $x_1' = \varphi(x_1), x_2' = \varphi(x_2)$, то $\rho_1(x_1,x_2) = \rho_2(x_1',x_2')$, где ρ_1 – расстояние в Y', ρ_2 – в Y''

Возьмём $y' \in Y'$, тогда по определению пополнения сущесвует последовательность $\{x_n\}$ точек $X : \{x_n\} \to y'$. Точки $\{x_n\}$ входят и в Y'', т.к. Y'' полно, то $\{x_n\}$ сходится к $y'' \in Y''$. Положим $\varphi(y') = y''$, токое отображение и будет искомой изометрией, т.к. $\varphi(x) = x\ \forall x \in X$, $\exists \left\{x_n^{(1)}\right\} \to y_1' \in Y', \left\{x_n^{(2)}\right\} \to y_2' \in Y', \left\{x_n^{(1)}\right\} \to y_1'' \in Y'', \left\{x_n^{(2)}\right\} \to y_2'' \in Y''$, в силу непрерывности расстояния $\rho_1(y_1',y_2') = \lim_{n\to\infty} \rho_1\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right), \rho_2(y_1',y_2') = \lim_{n\to\infty} \rho_2\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) \Rightarrow \rho_1(y_1',y_2') = \rho_2(y_1',y_2')$.

20. Теорема Хаусдорфа (существование).

Две фундаментальные последовательности $\{x_n\}.\{x'_n\}$ называются **эквивалентными**, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$.

Доказательство **существования**: рассмотрим множество R^* – множество классов эквивалентности всевозможных фундаментальных последовательностей. Возьмём две точки $x^*,y^*\in R^*$, выберем в них некоторые фундаментальные подпоследовательности $\{x_n\},\{y_n\}$, зададим расстояние в R^* таким образом, что $\rho(x^*,y^*)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)$. Докажем, что такой предел существует и не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\}\in x^*,\{y_n\}\in y^*$. В силу неравенства четырёхугольника, $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\le\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)$, т.к. последовательности $\{x_n\},\{y_n\}$ – фундаментальные, $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|\le\varepsilon$ для достаточно больших $n,m\Rightarrow$ последовательность $s_n=\rho(x_n,y_n)$ удовлетворяет критерию Коши, а значит имеет конечный предел. Покажем, что этот предел не зависит от выбора $\{x_n\},\{y_n\}$. Возьмём дополнительно $\{x'_n\}\in x^*,\{y'_n\}\in y^*$, тогда $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x'_n,y'_n)|\le\rho(x_n,x'_n)+\rho(y_n,y'_n)$, т.к. $\{x_n\}\sim\{x'_n\},\{y_n\}\sim\{y'_n\}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x'_n,y'_n)$.

Докажем, что в R^* выполнены аксиомы метрического пространства:

1) вытекает из определения эквивалентности последовательностей – $\rho(x_n,y_n)=0\Leftrightarrow x_n\sim y_n$
2) $\rho(x_n,y_n)=\rho(y_n,x_n)$ – очевидно
3) проверим аксиому треугольника. В R^* она выполнена: $\rho(x_n,z_n)\le\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,z_n)$, переходим к пределу $n\to\infty$ и получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)\le\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)+\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,z_n)\Leftrightarrow$ $\rho(x^*,z^*)\le\ \rho(x^*,y^*)+\rho(y^*,z^*)$.

Докажем, что R можно рассматривать как подмножество R^*. Каждой точке $x\in R$ отвечает некоторый класс эквивалентности фундаментальных последовательностей, сходящихся к x. Этот класс не пуст, если $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\,,y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\Rightarrow\rho(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$, следовательно соотнеся каждой точке $x\in R$ класс $x^*\in R^*$ сходящихся к ней фундаментальных последовательностей, то мы изометрически отобразим R в R^*.

Покажем, что R всюду плотно в R^*. Зафиксируем $x^*\in R^*,\varepsilon>0$, выберем фундаментальную последовательность $\{x_n\}\in x^*$. Тогда $\exists N:\forall m,n>0\Rightarrow\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. Отсюда $\rho(x_n,x^*)=\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_n,x_m)\le\varepsilon\ \forall n>N$, т.е. в произвольной окрестности точки $x^*\in R^*$ содержится некоторая точка из $x_n\in R$, т.е. $[R]=R^*$.

Докажем полноту. По построению R^*, любая последовательность $\{x_n\}\in R$ сходится к некоторой точке $x^*\in R^*$. Поскольку R плотно в R^*, то для любой фундаментальной последовательности $\{x_n^*\}\in R^*$ можно построить эквивалентную последовательность $\{x_n\}\in R$. Для этого достаточно взять в качестве x_n любую точку из $R:\rho(x_n,x_n^*)<\frac{1}{n}$. Построенная последовательность фундаментальна в R и по определению сходится к некоторой точке $x^*\in R^*$. Но тогда и $\{x_n^*\}$ сходится к x^*.

21. Компактное и бикомпактное метрическое пространство (подпространство). Примеры. Бикомпактность конечного множества. Ограниченность компактного множества. Компактность ограниченного множества в $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n_{max}$. Некомпактность единичного шара в $\mathbb{L}_2$.

Метрическое пространство называется **компактным**, если любая последовательность точек содержит фундаментальную подпоследовательность.

Метрическое пространство (X, ρ) называется **бикомпактным**, если любая бесконечная последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Примеры:

1) метрическое пространство X состоящее из конечного числа точек - бикомпкатное.
2) отрезок $[a, b]$ в пространстве E^1 - компактное и бикомпактное множество.
3) интервал (a, b) - компактное, но не бикомпактное множество.
4) $\mathbb{R}^n$ не компактно при любом натуральном n, т.к. множество всех возможных натуральных чисел бесконечно, но не содержит фундаментальной подпоследовательности.

Если есть такая последовательность $\{x_n\}$, что $\exists \varepsilon > 0 : \forall n, m : n \neq m \Longrightarrow \rho(x_n, x_m) \geq \varepsilon$, то из $\{x_n\}$ нельзя выбрать фундаментальную последовательность, значит множество не компактно. Рассмотрим множества $X \subset Y$

1) если Y компактно, то и X компактно.
2) если X некомпактно, то и Y некомпактно.
3) если Y бикомпактно, то и X компактно, если X к тому же замкнуто, оно бикомпактно.

Ограниченность компактного множества. Если метрическое пространство компактное, то оно полное и вполне ограниченное (обратное утверждение также верно). Докажем ограниченность: каждую точку $x \in M$ покроем шаром $S_\varepsilon(x), \varepsilon > 0$. Из компактности следует, что существует конечное число точек $x_1, \dots, x_N$ таких, что шары $S_\varepsilon(x_1), \dots, S_\varepsilon(x_N)$ покрывают множество M. Очевидно, что эти точки образуют конечную ε-сеть для множества M.

Компактность ограниченных множеств. Множество в $\mathbb{R}_2^n$, описываемое неравенствами $\{x = (x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \overline{1, n}\}$ называется параллелепипедом и является бикомпактным (обозначение: $\Pi(a, b)$). Доказательство: последовательность $x^{(k)} \in \Pi(a, b), k = 1,2, \dots$. Числовая последовательность первых координат этих элементов $\left\{x_1^{(k)}\right\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_1^{(k_1)}\right\}$. Подпоследовательность n-тых координат этих элементов, относящихся к элементам, выбранным на $(n-1)$ шаге, содержит сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_n^{(k_n)}\right\}$, и полученная в результате последовательность $\left\{x^{(k_n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \Pi(a, b)$ и принадлежит $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**.**

Бикомпактность $\mathbb{R}_{\max}^n \left(\begin{matrix} x = (x_1, \dots, x_n) \\ y = (y_1, \dots, y_n) \end{matrix}, \ \rho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \right)$. Аналогично предыдущему возьмём последовательность элементов $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ из $A \subset \mathbb{R}_{\max}^n : x_i = \left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}\right) \in A$. A – ограничено, значит любой $x_j^{(i)}$ лежит в пределах некоторого интервала $[a_i, b_i]$, а значит выделим последовательность первых компонент, выделим из элементов со сходящейся первой компонентой, элементы со сходящейся второй, … (до n), получим последовательность с покомпонентной сходимостью, которая сходится в $\mathbb{R}_{\max}^n$.

Некомпактность единичного шара в $\boldsymbol{L_2}$. Рассмотрим замкнутый шар $S(x^0, 1)$ в пространстве L_2 $\left(\begin{matrix} x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 0 \end{matrix}, \ \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} \right)$. С центром в точке $x^0 = (0,0, \dots ,0, \dots)$ и радиусом 1, т.е. множество таких последовательностей действительных чисел, что $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1$.

Множество $S(x^0, 1)$ не является компактным и, тем более, бикомпактным. Действительно, последовательность $S^{(n)} = (0,0, \dots ,0,1,0, \dots)$, где 1 стоит на n-ом месте, не содержит никакой фундаментальной подпоследовательности, т.к. $\rho\left(S^{(n)}, S^{(m)}\right) = \sqrt{2}$, при $n \neq m$. Не компактно даже подмножество элементов, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = 1$.

22. Ограниченность непрерывного на бикомпакте функционала.

Непрерывный функционал $f(x)$, заданный на бикомпакте Q, ограничен. Доказательство (от противного): т.е. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in Q : |f(x_n)| > n$ – не ограничен. Последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся последовательность $\{x_{n_k}\}$, ($n_k \to \infty$ при $n \to \infty$) $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x,\ x \in Q$. В силу непрерывности $f(x)$ на бикомпакте Q: $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x)$, но по построению $\left|f\left(x_{n_k}\right)\right| > n_k$, следовательно $f\left(x_{n_k}\right)$ не сходится - противоречие.

23. Достижение верхней и нижней граней значений непрерывным на бикомпакте функционалом.

Теорема (Вейерштрасса): непрерывный функционал $f(x)$, заданный на бикомпакте Q, достигает на нём своей верхней (нижней) грани. Доказательство: в силу теоремы об ограниченности и непрерывности, функционал ограничен сверху (снизу) на бикомпакте Q. $\exists M = \sup\limits_Q f(x)$ $(\inf\limits_Q f(x))$. По определению верхней (нижней) грани $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in Q : M \geq f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$ $\quad (M \leq f(x_n) \leq M + \frac{1}{n})$ $\quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. С другой стороны, последовательность $\{x_n\}$ в силу бикомпактности Q содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} f x_{n_k} = z$. Тогда в силу непрерывности f и $M \geq f(x_n) \geq M - \frac{1}{n}$ $(M \leq f(x_n) \leq M + \frac{1}{n})$ получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(z) = M$, значит в точке $z \in Q$ достигается верхняя (нижняя) грань f на бикомпакте Q.

24. Равномерная непрерывность непрерывного на бикомпакте функционала.

Непрерывный функционал $f(x)$, заданный на бикомпакте Q, **равномерно непрерывен** на этом бикомпакте, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, если $\rho(x_1, x_2) < \delta\ \forall x_1, x_2 \in Q$.

Доказательство (от противного): $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\ \exists x_1^{(n)}, x_2^{(n)} : \rho\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right) < \frac{1}{n}$, но $\left|f\left(x_1^{(n)}\right) - f\left(x_2^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon_0$. Ввиду того, что Q - бикомпакт, из последовательности $\left\{x_1^{(n)}\right\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_1^{(n_k)}\right\}$, которая сходится к точке x_0 при $n_k \to \infty$ бикомпакта Q. Подпоследовательность $\left\{x_2^{(n_k)}\right\}$ последовательности $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ будет также сходится к точке x_0 при $n_k \to \infty$, т.к. в силу неравенства треугольника и определения последовательностей $\left\{x_1^{(n)}\right\}$, $\left\{x_2^{(n)}\right\}$ $\rho\left(x_2^{(nk)}, x_0\right) \leq \rho\left(x_2^{(nk)}, x_1^{(nk)}\right) + \rho\left(x_1^{(nk)}, x_0\right) < \frac{1}{n_k} + \rho\left(x_1^{(nk)}, x_0\right) \to 0$ при $n_k \to \infty$.

В силу непрерывности функционала обе последовательности $\left\{x_1^{(n_k)}\right\}$, $\left\{x_2^{(n_k)}\right\}$ будут сходиться к одному и тому же значению $f(x_0)$. Но тогда обязательно найдётся $N = N(\varepsilon_0)$ такое, что при $n_k > N$ будет выполнено неравенство $\left|f\left(x_1^{(n_k)}\right) - f\left(x_2^{(n_k)}\right)\right| < \varepsilon_0$, что противоречит предположению.

25. Понятие ε-сети, полная ограниченность и критерий Хаусдорфа компактности метрического пространства. Следствие из критерия (о компактной ε-сети).

Множество компакнто тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено, т.е. для того, чтобы метрическое пространство было компакнтно, нужно чтобы существовала конечная ε-сеть $\forall\varepsilon > 0$. **Доказательство**: пусть A – не вполне ограниченное, т.е. $\exists\varepsilon > 0:$ не найдётся конечный набор шаров. Пусть x_1 – произвольный, тогда $\exists x_2 : \rho(x_1, x_2) > \varepsilon$, т.к. в противном случае x_1 образовывал бы ε-сеть. Эту операцию можно повторять, таким образом $\rho(x_i, x_j) > \varepsilon \Rightarrow$ нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, а значит множество не компакнто. Достаточность: пусть $\forall\varepsilon > 0\, \exists$ конечная ε-сеть, пространство вполне ограничено, последовательность ε_k монотонно стремится к нулю. Каждый элемент последовательности x_i окружим шаром радиуса ε_1, т.к. число шаров конечно, а число элементов бесконечно, в каком-то шаре содержится бесконечное число элементов, далее будем рассматривать только их. Возьмём какой-то $\widehat{x_1} \in S_{\varepsilon_1}(a_1)$, оставим только элементы, номера которых больше $\widehat{x_1}$ и которые лежат в $S_{\varepsilon_1}(a_1)$, выберем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и построим ε_2-сеть на выбранных элементах. Эту операцию можно повторять бесконечно долго. Таким образом, получим $\widehat{x_i}$ – фундаментальную последовательность, т.е. $\rho(\widehat{x_i}, \widehat{x_j}) \le \rho(\widehat{x_i}, a_k) + \rho(a_k, \widehat{x_j}) < \varepsilon_k\ \forall i, j \ge k$, значит множество компактно.

Следствие: пусть $A : \forall\varepsilon$ найдётся компактная ε-сеть, тогда A – компактно. Доказательство: A – исходное множество, B – конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для A, C – конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для B, тогда C – конечная ε-сеть для A.

26. Равностепенная непрерывность множества функций. Достаточные условия равностепенной непрерывности. Достаточное условие отсутствия равностепенной непрерывности.

Множество Q функций $\{\varphi(t)\}$ в пространстве $\mathrm{C}[a, b]$ называется **равностепенно-непрерывным**, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall\varphi(t) \in Q \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$, если $|t_1 - t_2| < \delta$, при $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$.

Условие Липшица (достаточное условие равностепенной непрерывности)**:** если $\exists L :$ $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le L|t_1 - t_2|^\alpha\ \forall\alpha > 0$, то существует равностепенная непрерывность. Доказательство: если взять $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, то $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le L|t_1 - t_2|^\alpha < \varepsilon$

Достаточное условие отсутствия равностепенной непрерывности: если существует последовательность $\{x_n\}$ стремящаяся поточечно к разрывной функции x^*, то любая подпоследовательность сходится к разрывной функции, значит нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, а значит нет равностепенной непрерывности.

Пример сходящейся к разрывной функции: $\begin{cases} 1,\ t \ge \frac{1}{n} \\ nt,\ t \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ -1,\ t \le -\frac{1}{n} \end{cases}$

27. Компактность множества функций в пространстве $\mathbb{C}[a, b]$ (теорема Арцела-Асколи). Необходимость.

Множество Q функций $\{\varphi(t)\}$ в пространстве $C[a, b]$ называется **равномерно ограниченным**, если $\exists M : \forall\varphi(t) \in Q \Longrightarrow |\varphi(t)| \le M\ \forall t \in [a, b]$.

Множество Q функций $\{\varphi(t)\}$ в пространстве $C[a, b]$ называется **равностепенно непрерывным**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall\varphi(t) \in Q \Rightarrow |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$, если $|t_1 - t_2| < \delta$, при $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$.

Теорема (Арцела): для того, чтобы множество функций $Q = \{\varphi(t)\}$ в пространстве $C[a,b]$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы:

1) множество Q было равномерно ограничено в $C[a,b]$
2) множество Q было равностепенно непрерывно в $C[a,b]$

Доказательство (необходимость): существует множество Q функций $\{\varphi(t)\}$ компактное в пространстве $C[a,b]$. Тогда из следствия теоремы Хаусдорфа вытекает ограниченность (всякое компактное множество метрического пространства ограничено).

Докажем равностепенную непрерывность всех $\varphi(t) \in Q$: $\exists \varepsilon > 0$ - произвольное. По критерию компактности Хаусдорфа для $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\Sigma = \{z_i = \psi_i(t)\}_{i=1}^n$ для множества Q, т.е. для любого $x = \varphi(t) \in Q$ всякий замкнутый шар $S_{\varepsilon/3}(x)$ содержит хотя бы одну точку $z_{i_0} = \psi_{i_0}(t)$, $z_{i_0} \in \Sigma$.

$\delta(\varepsilon) > 0$ – такое число существует в силу утверждения, что любое конечное множество функций $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n \in C[a,b]$ – равностепенно непрерывно, $\left|\psi_j(t_1) - \psi_j(t_2)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, если $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)\ \forall t_1, t_2 \in [a;b]$. Тога для произвольной $\varphi(t) \in Q$ найдётся хотя бы одна функция $\psi_{j_0}(t) \in \Sigma : \left|\varphi(t) - \psi_{j_0}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $t \in [a,b]$. Поэтому $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \left|\varphi(t_1) - \psi_{j_0}(t_1)\right| + \left|\psi_{j_0}(t_1) - \psi_{j_0}(t_2)\right| + \left|\psi_{j_0}(t_2) - \varphi(t_2)\right| < \varepsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta\ \forall t_1, t_2 \in [a,b] \Rightarrow \{\varphi(t)\}$ равностепенно непрерывно.

28. Компактность множества функций в пространстве $\mathbb{C}[a,b]$ (теорема Арцела-Асколи). Достаточность.

Доказательство (достаточность): для множества Q функций $\{\varphi(t)\}$ пространства $C[a,b]$ выполнены условия равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности.

В силу равностепенной ограниченности $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: для $\forall \varphi(t) \in Q: |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$, если $|t_1 - t_2| < \delta, \forall t_1, t_2 \in [a,b]$. Возьмём $N \in \mathbb{N}$: $n = \frac{b-a}{N}$ было меньше δ.

…
…
…

29. Определение и свойства линейного пространства. Линейное подмножество линейного пространства (линеал). Линейная оболочка множества элементов линейного пространства.

Множество L называется **линейным пространством**, если

1) для $\forall x, y \in X\ \exists z \in X$, называемый их суммой и обозначаемый $z = x + y$. $z = x + y$ удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $x + y = y + x\ \forall x, y \in X$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)\ \ \forall x, y, z \in X$
3. $\exists 0 \in X : x + 0 = 0 + x = x\ \forall x \in X$
4. $\forall x \in X\ \exists y \in X : x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

2) для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определён элемент $\alpha x \in L$, удовлетворяющий аксиомам:

1. $\exists 1 \in X : 1 * x = x * 1 = x$
2. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Если $\alpha \in \mathbb{R}$ - действительное линейное пространство, а если $\alpha \in \mathbb{C}$ - комплексное линейное пространство.

Свойства линейного пространства:

1) В любом линейном пространств существует единственный нейтральный элемент.

Доказательство: …

2) $a + x = a \Leftrightarrow x = o$

Доказательство: …

3) $\forall x \in L \exists! \, (-x)$

Доказательство: …

4) для любого $\lambda \Longrightarrow \lambda o = o$

Доказательство: …

5) для любого x $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

Доказательство: …

6) $\forall x \in L \Longrightarrow (-1)x = (-x)$

Доказательство: …

7) $\forall L$ существует единственное решение уравнения $a + x = b$: $x = b + (-a)$

Доказательство: …

8) $\lambda x = o \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \lambda = 0 \\ x = o \end{matrix}\right.$

Доказательство: …

9) Если $ax = bx$ при $x \neq o$, то $a = b$

Доказательство: …

Непустое подмножество L' линейного пространства L называется **подпространством**, если оно само является линейным пространством по отношению к операциям сложения и умножения на скаляр в L, т.е. если $\alpha x + \beta y \in L'$ для всех $\alpha, \beta \in K$, для всех $x, y \in L'$.

Линейной оболочкой системы векторов $a_1, \dots, a_k$ называется множество всевозможных комбинаций этих векторов: $L(a_1, \dots, a_k) = \left\{a = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in P, i = \overline{1, k}\right\}$

30. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности. Бесконечномерные линейные пространства.

Элементы $x_1, \dots, x_n$ линейного пространства L называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $a_1, \dots, a_n$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$. В противном случае эти элементы называются линейно независимыми. Бесконечная система элементов $x_1, \dots, x_n, \dots$ называется **линейно независимой**, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Линейные пространства L_1 и L_2 над полем K называются **изоморфными** ($L_1 \cong L_1$), если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : L_1 \to L_2$, согласованное с операциями сложения векторов и умножения на скаляр в этих пространствах. Это означает, что $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$ для всех $x, y \in L_1$ и всех $\alpha \in K$.

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ элементов линейно зависимы, то говорят, что пространство имеет **размерность** n ($\dim L = n$). Если же в L можно указать систему, состоящую из произвольного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L **бесконечномерно**.

Базисом в n-мерном пространстве называется любая система, состоящая из n линейно независимых векторов.

31. Линейные нормированные пространства (ЛНП). Метрика, порождённая нормой. Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на число. Подчинённость и эквивалентность норм для ЛНП с одинаковыми носителями. Различные типы сходимости последовательностей непрерывных функций на отрезке. Полные (банаховы) и неполные ЛНП. Сепарабельные и несепарабельные ЛНП. Примеры.

Однозначная неотрицательная функция $\|x\|$, заданная на линейном пространстве L, называется **нормой**, если

1) $\|x\| = 0$ в том и только том случае, когда x = 0

2) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in L$ (неравенство треугольника);

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ для всех $x \in L$ и $\alpha \in R$ (положительная однородность).

Линейное пространство с нормой $\|.\|$ называется **нормированным пространством**.

Всякое нормированное пространство L является метрическим пространством с метрикой $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Доказательство немедленно вытекает из определения нормы.

Утверждение: в ЛНП операции сложения и умножения на число непрерывны.

Доказательство: $\{x_n\} \to x^*$, $\{y_n\} \to y^*$ при $n \to \infty$. В силу неравенства $\|(x_n - y_n) - (x^* - y^*)\| \le \|x_n - x^*\| + \|y_n - y^*\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Норма $\|.\|_1$ называется **подчинённой** норме $\|.\|_2$, если существует такое число $a > 0$, что $\|x\|_1 \le a\|x\|_2$.

Две нормы называются **эквивалентными**, если существуют такие числа a, b, что $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$

Различные типы сходимости на последовательностей непрерывных функций на отрезке: "просто сходимость", поточечная, по норме, равномерная…

Любое конечномерное линейное нормированное пространство L - полное.

Доказательство:

Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

32. Выпуклость подмножеств линейного пространства. Выпуклость произвольного шара в линейном нормированном пространстве (ЛНП). Выпуклость функционалов и неравенство Йенсена. Достаточное условие выпуклости функции одной переменной. Выпуклость функционала нормы в ЛНП.

Отрезок, соединяющий x и y: $\{\alpha x + \beta y,\ \ \alpha + \beta = 1,\ \ 0 \le \alpha, \beta \le 1\}$

Множество называется **выпуклым**, если со своими двумя элементами оно содержит отрезок, содержащий эти элементы (для любой пары принадлежащих ему точек).

Пересечение выпуклых множеств - выпуклое множество.

… *(выпуклость шара)*

Функционал - числовая функция линейного пространства $f: X \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

График - пара $\{(x, f(x))\}$ или $\{(x,y): y = f(x)\}$. Надграфик $\{(x,y): y \ge f(x)\}$.

Функционал называется **выпуклым** (вниз) если у него выпуклый надграфик. (выпуклый вниз - если выпукло $\{(x,y): y \le f(x)\}$).

Если функционал выпуклый вниз, то справедливо **неравенство Йенсена**: $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),\ \alpha + \beta = 1,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Вывод: $\begin{cases} y_1 \geq f(x_1) \\ y_2 \geq f(x_2) \end{cases}$. Тогда $\{(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)\} \in$ надграфику, т.е. $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq (\alpha y_1 + \beta y_2) \forall x_1, x_2 \in D(f) \forall y_1, y_2$. $(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),\ \alpha + \beta = 1,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ (необходимое и достаточное условие для выпуклости вниз).

И необходимое, и достаточное?..

Необходимое и достаточное условие для выпуклости вверх: $(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),\ \alpha + \beta = 1,\ 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

Рассмотрим функционал "**Норма**": $\|x\|: X \to \mathbb{R}_+, \mathbb{C}_+$:

1) $\forall x \in X: \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Замечание: $\|x\| = 0 \Leftarrow x = 0$ - преднорма.

2) положительная однородность: $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\ \alpha \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

3) неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Линейное нормированное пространство (ЛНП) - линейное пространство с заданной на нём нормой. В нём определены понятия модуля и расстояния.

Если есть линейное нормированное пространство, в нём определяется метрика $\rho(x, y) = \|x - y\|$, удовлетворяющая всем трём аксиомам: 2) из (2), где $\alpha = -1$; 3) $\rho(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Т.е. ЛНП - метрическое пространство.

Норма — это выпуклый функционал. Доказательство: … *(было на какой-то практике)*

33. Линейные отображения линейных пространств (операторы, функционалы), их области определения и области значений. Эквивалентность непрерывности линейного отображения линейного нормированного пространства (ЛНП) в одной точке и равномерной непрерывности во всём пространстве.

А: $X \to Y$ - оператор ; $f: X \to E^1$ - функционал Линейность отображения:$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ - линейность $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ - линейный функционал

Линейный функционал наз. ограниченным, если он ограничен на 1-ом шаре.($\left||x|\right| \leq 1, |f(x)| \leq M$). Оператор ограниченный: $\left||Ax|\right| \leq M$, $\left||x|\right| \leq 1$ ………

34. Ограниченные линейные отображения (операторы, функционалы) линейных нормированных пространств (ЛНП). Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного отображения ЛНП. Норма функционала и оператора, эквивалентность различных определений нормы. Оценка нормы оператора (функционала) через его значения на произвольном шаре.

35. Примеры ограниченных линейных операторов и функционалов и вычисления их норм. Примеры неограниченных линейных операторов и функционалов.

36. Непрерывность линейных отображений конечномерных линейных нормированных пространств (ЛНП). Изоморфизм конечномерных ЛНП одинаковой размерности. Полнота конечномерных ЛНП и замкнутость конечномерных подпространств. Покомпонентная сходимость последовательности элементов конечномерного ЛНП и сходимость по норме, их эквивалентность. Эквивалентность всех норм в конечномерном ЛНП.

37. Теорема Рисса о почти перпендикуляре. Модификация теоремы для случая конечномерного подпространства.

X - лин. нормир.(полное) пр-во, $Y \subset X$ - замкнутое подпространство. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X: \left||x|\right| = 1$ и $\rho(x, Y) > 1 - x$. $\quad \rho(x, Y) = \inf\limits_{y \in Y} \rho(x, y) = \inf\limits_{y \in Y} ||x - y||$

Док-во: $Y \neq X$, $\exists u \in X \backslash Y, d = \rho(u, Y) > 0$ $\left(\rho(u, Y) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists y: \left||u - y|\right| < \varepsilon \Rightarrow u \in [Y] \Rightarrow u \in Y\right)$, $d = \rho(u, Y) = \inf\limits_{y \in Y} \rho||u - y||$; $\forall \varepsilon\ \exists \hat{y}: \left||u - \hat{y}|\right| < d(1 + \varepsilon)$; $v = u - \hat{y}$; $\rho(v, Y) = \rho(u, Y) = d$; $\left||v|\right| < d(1 + \varepsilon)$; $x = \frac{v}{||v||} \Rightarrow \left||x|\right| = 1$ $\rho(x, Y) = \frac{d}{||v||} > \frac{d}{d(1+\varepsilon)} = \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$.

38. Связь конечномерности пространства и компактности всех его ограниченных подмножеств.

Любое ограниченное подмножество конечномерного пр-ва - компактно.

Док-во: Если пространство изоморфно $\mathbb{R}^n_{max}$, то любое ограниченное подмножество компактно, следовательно в изоморфном пространстве ограниченное подмножество - компактно.

39. Ряды в линейных нормированных пространствах. Сходимость ряда, его сумма. Необходимый признак сходимости. Критерий Коши сходимости рядов в банаховых пространствах. Обобщённый признак Вейерштрасса сходимости рядов в банаховых пространствах.

40. Метрические пространства $\mathbb{R}_\Phi$, их свойства. Пополнение неполных пространств $\mathbb{R}_\Phi$.

$\rho(x, y) = |\Phi(\mathrm{x}) - \Phi(\mathrm{y})|$

1) очевидно

2) очевидно

3) $|\Phi(x) - \Phi(z)| \leq |\Phi(x) - \Phi(y)| + |\Phi(y) - \Phi(z)|$. Док-во: $|\Phi(x) - \Phi(z)| = |\Phi(x) - \Phi(y) + \Phi(y) - \Phi(z)| \leq |\Phi(x) - \Phi(y)| + |\Phi(y) - \Phi(z)|$

41. Линейное нормированное пространство $\mathbb{R}^n_{max}$, его свойства.

На мн-ве $\mathbb{R}^n$ можно ввести метрику $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$. $\quad ax + by = (ax_1, \dots, ax_n) + (by_1, \dots, by_n) = (ax_1 + by_1, \dots, ax_n + by_n) \in \mathbb{R}^n$. $O = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $x + O = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0) = x$.

На множестве $\mathbb{R}^n$ можно ввести норму: $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, получив метрическое пространство $\mathbb{R}^n_{max}$.

1) Если $x = O$, то $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |0| = 0$. Если $\|x\| = 0$, то $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0$, т.е. $|x_i| = 0 \forall i$, значит $x = (0, \dots, 0) = O$.

2) $\|ax\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |ax_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |a||x_i| = |a| \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |a|\|x\|$

3) $\|x + y\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\| + \|y\|$

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

1) $\rho(x, x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |0| = 0$; $\rho(x, y) = 0$, значит $\max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0$, т.е. $|x_i - y_i| = 0 \forall i$ или $x_i = y_i \forall i$, а значит $x = y$.

2) $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |-(x_i - y_i)| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| = \rho(y, x)$

3) $\rho(x, z) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |(x_i - y_i) + (y_i - z_i)| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|(x_i - y_i)| + |(y_i - z_i)|) \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| + \max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i - z_i|$

Сходимость, полнота и сепарабельность…

42. Линейное нормированное пространство $\mathbb{R}_1^n$, его свойства.

Мн-во X состоит из эл-ов x (наборов из n действительных чисел : $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Это мн-во, обычно, наз. арифметическим пр-вом $\mathbb{R}^n$.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \rho = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

43. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для конечных последовательностей.

$|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$ - нер-во Коши-Буняковского-Шварца

$|\sum_{i=1}^n a_i b_i|^2 \le \sum_{i=1}^n |a_i|^2 * \sum_{i=1}^n |b_i|^2$. Док-во: Определим функцию $\Phi(\lambda)$: $\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}, \text{док} - \text{во для вещ. чисел}$). $\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \ge 0$. $D \le 0$. $\frac{D}{4} = (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \le 0$. $\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2}$, $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^2 \le \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + \sum_{i=1}^n |b_i|^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2}$.

$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$

44. Линейное нормированное пространство $\mathbb{R}_2^n = \mathbb{E}^n$, его свойства.

Мн-во X состоит из эл-ов x (наборов из n действительных чисел : $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Это мн-во, обычно, наз. арифметическим пр-вом $\mathbb{R}^n$. Зададим в $\mathbb{R}^n$ расстояние $\rho(x, y)$ следующим образом: если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$- два эл-та из $\mathbb{R}^n$, то $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

1)Выражение $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ неотрицательно и может обращаться в нуль только в том случае, когда все квадраты разностей обращаются в нуль, т.е. когда наборы числе $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ полностью совпадают между собой

2)Тоже очевидно будет выполняться

3)Для проверки 3 аксиомы нужно проверить $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2}\right)^2$ для любых $x = \{x_i\}, y = \{y_i\}, z = \{z_i\}$ из X. Обозначим $x_i - z_i = a_i$ и $z_i - y_i = b_i$, тогда:$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\right)^2$ $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)^2$. Раскрывая левую и правую части: $\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2$. Пользуясь нер-вом Коши-Буняковского, можно сказать, что нер-во справедливо.

45. Неравенство Минковского для конечных последовательностей.

$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ нер-во Минковского. Док-во: Используя нер-во Коши-Буняковского, получаем: $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n b_i^2 \le \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} + \sum_{i=1}^n b_i^2 = (\sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |b_i|^2})^2$. Извлекая корни из обеих частей нер-ва, получаем нер-во Минковского.

46. Линейные нормированные пространства $\mathbb{R}_p^n$, их свойства.

$\rho(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p}$, если p=1, то получится$\mathbb{R}_1^n$, если p→ ∞ , то получится $\rho_\infty(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left|\frac{x_i - y_i}{\rho_\infty(x,y)}\right|^p}$, каждое слагаемое не превосходит 1, следовательно,$(\sum_{i=1}^n) \le n$

47. Линейное нормированное пространство $\mathbb{c}_0$, его свойства.

$\mathbb{c}_0$- -пр-во всех числовых последовательностей, сходящихся к нулю (бесконечно малые последовательности), его эл-ты x, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. $\mathbb{c}_0 \subset \mathbb{c}$

48. Линейное нормированное пространство $\mathbb{c}$, его свойства.

$\mathbb{c}$ −пр-во всех сходящихся числовых последовательностей. $\forall x \in \mathbb{c}$ это сходящаяся пос-ть, т.е $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\rho(x, y) = \sup\ |x_n - y_n|$

49. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_\infty$, его свойства.

Пр-во всех таких посл-тей, которые являются ограниченными. Посл-ть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ наз. ограниченной, если $\exists\ c > 0: |x_n| < c, \forall n$. $\forall\ x, y, z \in L_\infty \rho(x, y) = \sup|x_n - y_n|$. Покажем, что $\rho(x, y)$ явл. метрикой: 1) $\rho(x, y) \geq 0$-очевидно; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; x = y \Rightarrow x_n = y_n \Rightarrow |x_n - y_n| \Rightarrow \sup 0 = 0$. В обратную сторону: $\sup|x_n - y_n| \Rightarrow |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow x_n - y_n = 0\ \Rightarrow\ x = y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$-очевидно по св-вам модуля$|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$.

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y); \sup|x_n - y_n| \leq \sup|x_n - z_n| + \sup|z_n - y_n|, \forall n: |x_n - y_n| = |x_n - z_n + z_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|$.

50. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_1$, его свойства.

51. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для бесконечных последовательностей.

52. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_2$, его свойства.

53. Неравенство Минковского для бесконечных последовательностей.

54. Линейные нормированные пространства $\mathbb{L}_p$, их свойства.

55. Линейное нормированное пространство $\mathbb{C}[a, b]$, его свойства.

56. Линейные нормированные пространства $\mathbb{C}_m[a, b] = \mathbb{D}_m[a, b]$, их свойства.

57. Линейное нормированное пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_1}[a, b]$, его свойства.

58. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца для функций.

59. Линейное нормированное пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[a, b]$, его свойства.

60. Некоторые свойства интеграла Лебега. Пополнение пространств $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_1}[a, b]$ и $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[a, b]$.