Лекция №6

Линейные неоднородные системы

Вернемся к рассмотрению линейных неоднородных систем вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t). \tag{1}$$

Метод вариации произвольных постоянных.

Как и в случае линейных неоднородных уравнений, этот метод позволяет найти решение линейной неоднородной системы, если известно общее решение линейной однородной системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

Пусть $\{\boldsymbol{x}^1(t), \dots, \boldsymbol{x}^1(t)$ – ФСР системы (2), $c_1, \dots, c_n$ – произвольные постоянные, тогда общее решение однородной системы (2) запишется в виде

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}^1(t) + \dots + c_n\boldsymbol{x}^n(t).$$

Решение неоднородной системы будем искать в виде

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\boldsymbol{x}^1(t) + \dots + c_n(t)\boldsymbol{x}^n(t) = X(t)\boldsymbol{c}(t), \tag{3}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы (2), $\boldsymbol{c}(t)$ – вектор столбец, состоящий из неизвестных функций $c_1(t)\dots, c_n(t)$

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \dots. \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$$

Подставим (3) в систему (1).

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{X}\boldsymbol{c} + X\dot{\boldsymbol{c}} = AX\boldsymbol{c} + X\dot{\boldsymbol{c}},$$
$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f} = AX\boldsymbol{c} + \boldsymbol{f},$$

следовательно
$$X\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{f}. \tag{4}$$
Так как $X(t)$ – фундаментальная матрица, $\det(X(t)) \neq 0$ $\forall t$ и значит $\exists X^{-1}(t)$ $\forall t$. Таким образом из (4) получаем

$$\dot{\boldsymbol{c}} = X^{-1}\boldsymbol{f},$$

интегрирую последнее равенство и подставляя полученные функции $c_1(t)\ldots, c_n(t)$ в равенство (3), находим общее решение неоднородной системы (1).

Операторный метод.

В случае когда матрица A является матрицей с постоянными коэффициентами, решение системы (1) может быть получено операторным методом.

Пусть $\boldsymbol{x}(t) \risingdotseq \boldsymbol{X}(p)$, $\boldsymbol{f}(t) \risingdotseq \boldsymbol{F}(p)$, применяя преобразование Лапласа к левой и правой частям равенства

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t),$$

получим

$$p\boldsymbol{X}(p) - \boldsymbol{x}(0) = A\boldsymbol{X}(p) + \boldsymbol{F}(p),$$
$$(pE - A)\boldsymbol{X}(p) = \boldsymbol{F}(p) + \boldsymbol{x}(0),$$
$$\boldsymbol{X}(p) = (pE - A)^{-1}(\boldsymbol{F}(p) + \boldsymbol{x}(0)).$$

Замечание. *Операторный метод чаще применяется для решения задачи Коши.*

Метод подбора решения для специального вида правых частей (метод неопределенных коэффициентов).

Определение. Вектором-многочленом называется вектор-функция

$$\boldsymbol{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \ldots\ldots \\ P_n(t) \end{pmatrix},$$

координаты которой $P_1(t), \ldots, P_n(t)$ являются многочленами.

Определение. Степенью вектора-многочлена $\boldsymbol{P}(t)$ называется максимальная из степеней многочленов $P_1(t), \ldots, P_n(t)$

$$\deg \boldsymbol{P}(t) = \max\{\deg P_1(t), \ldots, \deg P_n(t)\}.$$

Определение. Вектором-квазимногочленом называется вектор-функция $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{P}(t)e^{\lambda t}$, где $\boldsymbol{P}(t)$ – вектор-многочлен, $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Вектор-функции

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{P}(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad \operatorname{Im} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{P}(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

называются действительными векторами-квазимногочленами.

Определение. Число λ называется показателем вектор-квазимногочлена, $\deg \boldsymbol{P}(t)$ называется степенью вектор-квазимногочлена.

Пример.

$$a)\ \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \deg \boldsymbol{f}(t) = 1,\ \lambda = 2;$$

$$b)\ \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} (t-1)\sin 3t \\ t^2\cos 3t \end{pmatrix}, \quad \deg \boldsymbol{f}(t) = 2,\ \lambda = 3i;$$

$$c)\ \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ te^{3t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}_1(t) + \boldsymbol{f}_2(t),$$

$$\deg \boldsymbol{f}_1(t) = 0,\ \lambda_1 = -1, \quad \deg \boldsymbol{f}_2(t) = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{P}(t)e^{\lambda_0 t}$, $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, *тогда система* (1) *имеет частное решение вида* $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{Q}(t)e^{\lambda_0 t}$, $\deg \boldsymbol{Q}(t) \leqslant \deg \boldsymbol{P}(t) + k$, *где* k *– максимальный порядок Жордановых клеток, отвечающих* λ_0, *в ЖНФ матрицы* A. *Если таких клеток нет, то есть* λ_0 *не является собственным числом матрицы* A, *то* $k = 0$.

Доказательство. Из линейной алгебры известно, что существует невырожденная матрица перехода T, такая, что

$$T^{-1}AT = J\text{– ЖНФ матрицы } A.$$

После замены неизвестных функций $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ система примет вид

$$T\dot{\boldsymbol{y}} = AT\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t).$$

домножим последнее равенство на T^{-1}

$$\underbrace{T^{-1}T}_{E}\,\dot{\boldsymbol{y}} = \underbrace{T^{-1}AT}_{J}\,\boldsymbol{y} + T^{-1}\boldsymbol{f}(t), \quad \dot{\boldsymbol{y}} = J\boldsymbol{y} + T^{-1}\boldsymbol{f}.$$

Если $\boldsymbol{f}(t)$ – квазимногочлен, то и $T^{-1}\boldsymbol{f}(t)$ – квазимногочлен с тем же показателем и той же степени, что и $myvecf$. Выпишем набор уравнений, отвечающих некоторой жордановой клетке

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m}$$

размера m матрицы J. Можно считать, при необходимости перенумеровав переменные, что рассматриваемая жорданова клетка находится в левом верхнем углу матрицы J. В силу блочно-диагональной структуры ЖНФ первые m координат искомого решения $\boldsymbol{y}$ войдут в эти и только в эти уравнения.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_i y_1 + y_2 + g_1(t), \\ \dot{y}_2 = \lambda_i y_2 + y_3 + g_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_m = \lambda_i y_m + g_m(t). \end{cases} \tag{5}$$

1-ый случай: $\lambda_i \neq \lambda_0$. Начнем решение системы (5) с последнего уравнения. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка. Соответствующий ему характеристический многочлен первой степени имеет единственный корень $\lambda = \lambda_i$. Следовательно у этого уравнения имеется частное решение вида $Q_m(t)e^{\lambda_0 t}$, где $\deg Q_m(t) = \deg g_m(t)$. Подставим y_m в предыдущее уравнение

$$\dot{y}_{m-1} = \lambda_i y_{m-1} + y_m + g_{m-1}(t),$$

$y_m + g_{m-1}$ – квазимногочлен с показателем λ_0 и степени меньшей либо равной

$$\max\{\deg y_m, \deg g_{m-1}\} = \max\{\deg g_m, \deg g_{m-1}\} \leqslant \deg \boldsymbol{f}(t).$$

Проводя аналогичные рассуждения для $y_{m-2}, \dots, y_1$, получим

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

квазимногочлен той же степени, что и

$$\hat{\boldsymbol{g}} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

и тем же показателем λ_0. Следовательно $\deg \hat{\boldsymbol{y}} \leqslant \deg \boldsymbol{f}(t)$.
<u>2-ой случай:</u> $\lambda_i = \lambda_0$. Рассмотрим жорданову клетку с λ_i на диагонали максимального размера k

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}}_{k}.$$

По прежнему будем считать, что она находится в левом верхнем углу матрицы J. В этом случае система уравнений (5) примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_i y_1 + y_2 + g_1(t), \\ \dot{y}_2 = \lambda_i y_2 + y_3 + g_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{y}_{k-1} = \lambda_i y_{k-1} + y_k + g_{k-1}(t), \\ \dot{y}_k = \lambda_i y_k + g_k(t). \end{cases} \tag{6}$$

Как и в первом случае начнем решение системы (6) с последнего уравнения. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка и у него есть частное решение вида $y_k = tQ_k(t)e^{\lambda_0 t}$, $\deg Q_k(t) = \deg g_k(t)$. Далее

$$y_{k-1} = tQ_{k-1}e^{\lambda_0 t},$$
$$\deg Q_{k-1} = \deg(y_k + g_{k-1}) \leqslant \deg \boldsymbol{f} + 1,$$

И так далее

$$\begin{gathered}\deg y_{k-1} \leqslant \deg \boldsymbol{f} + 1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \deg y_1 \leqslant \deg \boldsymbol{f} + k.\end{gathered}$$

Таким образом квазимногочлен

$$\hat{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

имеет показатель λ_0 и степень не превосходящую $\deg \boldsymbol{f} + k$. Переходя к исходным неизвестным функциям получим, что

$$\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y} \text{ – квазимногочлен}$$

с тем же показателем и той же степенью, что и $\boldsymbol{y}$. $\square$

Замечание. *В условиях теоремы k можно взять равным кратности λ_0 как корня характеристического уравнения.*