Практическое занятие № 15
Лемма Жордана.
Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов

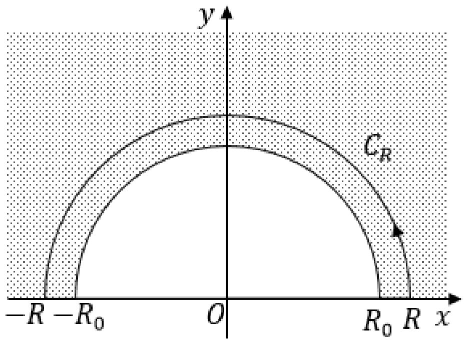
Краткие теоретические сведения

Лемма Жордана. Пусть $\alpha > 0$ и выполнены условия:

а) функция $g(z)$ непрерывна в области $|z| \geq R_0 > 0, \mathrm{Im}z \geq 0$;

б) $M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |g(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, где C_R: $|z| = R$, $\mathrm{Im}z \geq 0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0$. ■



Применение вычетов к вычислению несобственных интегралов

Теорема 1. Пусть $F(z)$ − правильная рациональная дробь и $F(z)$ непрерывна на всей действительной оси. Тогда при $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[F(z) e^{i\alpha z}\right]. \ ■ \tag{15.1}$$

Замечание 1. Если $\alpha < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\alpha x} dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k < 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[F(z) e^{i\alpha z}\right]. \tag{15.2}$$

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 1 и $F(x)$ − действительная функция на $\mathbb{R}$, то при $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos\alpha x dx = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\alpha x} dx = \mathrm{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[F(z) e^{i\alpha z}\right] \right\}, \tag{15.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin\alpha x dx = \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{i\alpha x} dx = \mathrm{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}z_k > 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[F(z) e^{i\alpha z}\right] \right\}. \tag{15.4}$$

Практические задания

С помощью вычетов вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)e^{ix}}{x^2 + 4x + 104} dx$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+4x+20}\,dx$;

4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}\,dx,\ a>0,\ b>0$;

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx$;

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\left(x^2-b^2\right)\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)}\,dx,\ a>0,\ b>0$;

8) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)^2}\,dx,\ a>0,\ b>0$;

9) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx,\ a>0,\ b>0$.

Ответы: **1)** $\pi e^{-10}\left(\sin 2+i\cos 2\right)$; **2)** $\dfrac{\pi e^{-3}}{3}\left(\cos 1-3\sin 1\right)$; **3)** $\dfrac{\pi e^{-4}}{2}\left(\sin 2+2\cos 2\right)$; **4)** $\dfrac{\pi e^{-ab}}{2}$; **5)** $\dfrac{3\pi e^{-2}}{32}$; **6)** $\pi e^{-2}\cos 2$; **7)** $\pi\left(e^{-ab}-\dfrac{1}{2}\right)$.

Домашнее задание: 1) № 13.464; **2)** № 13.467; **3)** № 13.470;

4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x\left(x^2+b^2\right)^2}\,dx,\ a>0,\ b>0$; Ответ: $\dfrac{\pi\left(2-\left(2+ab\right)e^{-ab}\right)}{4b^4}$

5) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}\,dx,\ a>0,\ b>0$. Ответ: $\pi\left(b-a\right)$

Типовой расчет: задача № 8.