Занятие №9.

Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод подбора частного решения (занятие №9)

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n(x) y = 0.$$

$L(y) = f(x)$ – ЛНДУ (N) с пост. коэфф.

Утв. $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$, где $L(y_{оо}) = 0$; $L(y_{чн}) = f(x)$.

Принцип суперпозиции:

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &: L(y_1) = f_1(x) \\ y_2 &: L(y_2) = f_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = y_1(x) + y_2(x).$$

Табличка для квазимногочлена в правой части – см. след. стр.

„квазимодо" означает „как будто".
Что общего в значении слов „квазар", „квазилинейный", „квазистатический"?

Опр. Квазимногочленом наз. функция вида

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_r(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right],$$

где $P_r(x)$, $Q_s(x)$ – многочлены.

Метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения L(y)=f(x).

f(x)	Частное решение
e^{ax}	Ae^{ax}
$a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$	$A_0+A_1x+\ldots+A_mx^m$
$a_1\cos bx+a_2\sin bx$	$A_1\cos bx+A_2\sin bx$
$e^{ax}(a_1\cos bx+a_2\sin bx)$ a+ib - корень характеристического уравнения кратности к	$x^ke^{ax}(A_1\cos bx+A_2\sin bx)$
$e^{ax}[P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\sin bx]$ $m=\max\{r,s\}$ a+ib-не является корнем характеристического уравнения	$e^{ax}[P_m(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$ $P_m(x)=A_0+A_1+\ldots A_mx^m$ $Q_m(x)=B_0+B_1x+\ldots+B_mx^m$
$e^{ax}[P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\sin bx]$ $m=\max\{r,s\}$ a+ib - корень характеристического уравнения кратности к	$x^ke^{ax}[P_m(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx]$

Пример №1. (ТР, №1б). ①

Найти общее решение лин. ур-я 1-го порядка с помощью хар. уравнения и подбора частного решения по правой части.

$y' + y = e^x + xe^{2x}$

$y' + y = 0$

$\lambda + 1 = 0$

$\lambda = -1$

$y_{одн.} = Ce^{-x};$

$f_1(x) = e^x; \quad y_1' + y_1 = e^x$

$y_{ч,1} = Ae^x; \; y_{ч1}' = Ae^x;$

$Ae^x + Ae^x = e^x; \; 2A = 1; A = \frac{1}{2}.$

$y_1(x) = \frac{1}{2}e^x.$

$f_2(x) = xe^{2x}; \; y_2' + y_2 = xe^{2x}$

$y_2 = (Ax + B)e^{2x}$

$y_2' = Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$

$(2Ax + A + 2B)\cancel{e^{2x}} + (Ax+B)\cancel{e^{2x}} = x\cancel{e^{2x}}$

при x: $3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3};$

при x^0: $A + 3B = 0; \quad B = -\frac{A}{3} = -\frac{1}{9}.$

$y_2(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{2x}; \; y(x) = y_{оо} + y_1(x) + y_2(x).$

Ответ: $y_{он} = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)e^{2x}.$

Найти также частное реш.: $y(0) = 1.$

$y(0) = C + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = C + \frac{7}{18} = 1 \Rightarrow C = \frac{11}{18}.$

№2. $y'' - 2y' + y = x^3$ (ТР, №4, 2)).

(Найти частное решение с точностью до коэфф-тов).

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda = 1, \ k = 2.$

$y_{одн.} = e^x (C_1 + C_2 x).$

Для $y_{част.}$: $\alpha = 0, \beta = 0, k = 0, m = 3.$

Ищем частное решение в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_ч &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \\ y_ч' &= A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \\ y_ч'' &= 2A_2 + 6A_3 x. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{в исх. ур-е.}$$

$$2A_2 + 6A_3 x - 2A_1 - 4A_2 x - 6A_3 x^2 + A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 = x^3.$$

при x^0: $2A_2 - 2A_1 + A_0 = 0.$ $\Rightarrow A_0 = 2A_1 - 2A_2 = 36 - 12 = 24.$

при x^1: $6A_3 - 4A_2 + A_1 = 0$ $\Rightarrow A_1 = 4A_2 - 6A_3 = 24 - 6 = 18.$

при x^2: $-6A_3 + A_2 = 0$ $\Rightarrow A_2 = 6A_3 = 6.$; $A_2 = 6.$

при x^3: $A_3 = 1.$

$A_1 = 18$

$A_0 = 24.$

$y_ч = 24 + 18x + 6x^2 + x^3.$

$y_{\substack{общ.\\неодн.}} = e^x (C_1 + C_2 x) + 24 + 18x + 6x^2 + x^3.$

№3. Найти частное решение АНДУ, удовл. данным нач. условиям. (ТР, №3б) и №12)). (3)

$$y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$ $\quad y(0) = -\frac{1}{4}$

$(\lambda+2)(\lambda+1) = 0.$ $\quad y'(0) = -\frac{1}{2}.$

$$y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Ищем участ. в виде:

$$\left.\begin{aligned} y_ч &= A\cos 2x + B\sin 2x. \\ y_ч' &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x \\ y_ч'' &= -4A\cos 2x - 4B\sin 2x \end{aligned}\right\} \to \text{в ур-е.}$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 6A\sin 2x + 6B\cos 2x + 2A\cos 2x + 2B\sin 2x = \sin 2x + 2\cos 2x.$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \cos 2x: -4A + 2A + 6B = 2 \\ &\text{при } \sin 2x: -4B - 6A + 2B = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} -A + 3B = 1 \\ -6A - 2B = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4} \\ B &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$y_{\substack{общ. \\ неодн.}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x.$$

Найдём C_1, C_2, используя нач. условия.

$$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0. \qquad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

$$y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x;$$

$$y'(0) = -2C_1 - C_2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 1. \qquad \begin{aligned} C_1 &= +1 \\ C_2 &= -1 \end{aligned}$$

Ответ: $y_{\substack{общ. \\ неодн}} = e^{-2x} - e^{-x} + \frac{1}{4}(-\cos 2x + \sin 2x).$

II Решить лин. неоднор. ур-е, подобрав частное решение по виду правой части. (ТР, №5б) и №6).

2.1. $y'' - 3y' + 2y = (1+x)e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-1)=0$.

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$

Для $y_{ч.н.}$: $\lambda = 2, k = 1$.

$y_{ч.н.} = \underline{x}(A+Bx)e^{2x}$

$y_ч = (Ax + Bx^2)e^{2x}$

найдем A и B.
подстановкой в исходное уравнение.

$y_ч' = (A+2Bx)e^{2x} + (2Ax + 2Bx^2)e^{2x} = e^{2x}(A + (2A+2B)x + 2Bx^2)$

$y_ч'' = e^{2x}[2A + (4A+4B)x + 4Bx^2 + 2A + 2B + 4Bx]$.

Подставим $y_ч, y_ч', y_ч''$ в исх. ур-е!
(сократим на e^{2x}).

$2A + (\cancel{4A}+4B)x + \cancel{4Bx^2} + 2A + 2B + 4Bx - 3A - \cancel{6Ax} - 6Bx - \cancel{6Bx^2} + \cancel{2Ax} + \cancel{2Bx^2} = 1 + x$.

при x^0: $\begin{cases} A + 2B = 1 \\ +2B = 1. \end{cases}$ при x: $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0. \\ B = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_ч = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

Ответ: $y_{чн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

Пусть $y(0)=1$, $y'(0)=3$. тогда $C_1 = 2$, $C_2 = -1$.

$y_{чн} = 2e^{2x} - e^{x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

Подобрать частное решение по виду правой части.

2.2. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$.

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$.

$\lambda = 2$, $k = 2$.

$y_{oo} = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

$y_{ч1} = A + Bx + Cx^2$

$y_{ч2} = x^2 \cdot De^{2x}$.

$y = y_{oo} + y_{ч1} + y_{ч2}$.

Ответ: $y_{он} = e^{2x}(C_1 + C_2 x + Dx^2) + A + Bx + Cx^2$.

2.3. $y'' - y' = (4x+3)e^x - 2\cos x$.

$\lambda^2 - \lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$y_{oo} = C_1 + C_2 e^x$.

$y_{ч1} = x(Ax + B)e^x$

$y_{ч2} = D\cos x + E\sin x$.

$y = y_{oo} + y_{ч1} + y_{ч2}$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x + (Ax^2 + Bx)e^x + D\cos x + E\sin x$.

3.1. $y''' - 6y'' + 10y' = 13\cos 2x + 10x$.

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$.

$\lambda_1 = 0$. $(\lambda - 3)^2 = -1$.

$\lambda_{2,3} = 3 \pm i$.

$y_{oo} = C_1 + e^{3x}(C_2\cos x + C_3 \sin x)$

$y_{ч1} = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_{ч2} = (Dx + E)x$

$y = y_{oo} + y_{ч1} + y_{ч2}$.

3.2. $y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x.$

$\alpha^3 - 2\alpha^2 = 0$

$\alpha^2(\alpha - 2) = 0$

$\alpha_1 = 0, \ k = 2;$

$\alpha_2 = 2.$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x}.$

$y_{ч1} = A\sin 2x + B\cos 2x$

$y_{ч2} = x^2(D + Ex).$

$y = y_{oo} + y_{ч1} + y_{ч2}.$

3.3. $y^{IV} + 2y'' + y = 18\sin^2 x + 3\sin 2x + x^3$

Преобразуем правую часть:

$f(x) = \underline{9} - 9\cos 2x + 3\sin 2x + \underline{x^3}.$

$\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = 0.$

$(\alpha^2 + 1)^2 = 0.$

$(\alpha - i)^2(\alpha + i)^2 = 0$

$\alpha_{1,2} = i, \ k = 2$

$\alpha_{3,4} = -i, \ k = 2.$

$y_{ч1} = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_{ч2} = D + Ex + Fx^2 + Gx^3.$

$y_{чн} = y_{oo} + y_{ч1} + y_{ч2}.$

$y_{oo} = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x.$

Дома: ТР, №1,2 + ТР, №5б - (методом подбора).

Ефимов, Поспелов, т. 2:

№ 10.346 - 10.353; 10.360 - 10.367;

10.370, 10.374, 10.376,

ТР ВМС: №4(б); №7*.

По новому ТР для КМБ:

№1б)

№2

№4б)

№5б).

(6) ТР, задача №7 (пример выполнения). (для всех групп, кроме КМБ). (вар. №1).

Найти общее решение дифф. ур-я II порядка.

$$2p(y) + 2yy' = e^x + xe^{2x}$$

$$p(y) = yy'' + (y')^2.$$

Решение.

$$2yy'' + 2(y')^2 + 2yy' = e^x + xe^{2x}.$$

$$2(y'\cdot y)' + 2y'y = e^x + xe^{2x}.$$

Замена: $z = y'y = \left(\frac{1}{2}y^2\right)'$

$\to z' + z = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^{2x}$. I способ: метод подбора частного решения

а) $z' + z = 0$. $\quad z_{oo} = C_1 \cdot e^{-x}$

$\lambda + 1 = 0$. $\quad$ II способ: $z = u(x)v(x)$ и т.д.

$\lambda = -1$

б) $z_{част.} = Ae^x + (Bx+C)e^{2x}$; найдём коэфф. A, B, C

$$z' = Ae^x + Be^{2x} + (Bx+C)\cdot 2e^{2x}$$

$$z' = Ae^x + e^{2x}(2Bx + B + 2C) \to \text{в ур-е.}$$

$$Ae^x + e^{2x}(2Bx + B + 2C) + Ae^x + (Bx+C)e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^{2x}.$$

при e^x: $2A = \frac{1}{2}$; $A = \frac{1}{4}$

e^{2x}: $B + 3C = 0$

xe^{2x}: $2B + B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{6}$; $C = -\frac{1}{18}$

$$z_{част.} = \frac{1}{4}e^x + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{18}\right)e^{2x}.$$

$$z_{он} = C_1e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{18}\right)e^{2x}.$$

$$\boxed{y^2 = \frac{e^x}{2} + \left(\frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{9}e^{2x}\right) - C_1e^{-x} + C_2.}$$