МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. ШАТИНА

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА, СПЕЦФУНКЦИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Москва — 2016

УДК 517.38, 517.58
ББК 22.161
Ш 28

Шатина А.В. Интегралы, зависящие от параметра, спецфункции [Электронный ресурс]: Учебно-методическое пособие / под редакцией Шатиной А.В. — М., Московский технологический университет (МИРЭА), 2016

Учебно-методическое пособие посвящено двум разделам высшей математики: интегралам, зависящим от параметра и специальным функциям. Содержащийся в пособии материал разбит на 10 тем, которые включают в себя общую теорию интегралов, зависящих от параметра, а также темы, посвященные специальным функциям, таким как бета и гамма функции, функции Бесселя, ортогональные многочлены. По каждой теме изложены необходимые теоретические сведения, приведены примеры решения задач, предложены задачи для практических занятий и для самостоятельного решения.

Учебное пособие написано на основе курса «Комплексный анализ», предназначенного для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Также оно может быть полезно студентам, обучающимся по другим специальностям и направлениям подготовки с углубленным изучением курса математического анализа.

Автор: Шатина Альбина Викторовна.

Редактор:

Худак Юрий Иосифович, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Высшей математики Института кибернетики Московского технологического университета (МИРЭА)

Рецензенты:

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры Общих проблем управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Поленова Татьяна Матвеевна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры Информатики и прикладной математики Института государственной службы и управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

Минимальный системные требования:

Поддерживаемые ОС: Windows 2000 и выше.

Память: ОЗУ 128МБ.

Жесткий диск: 20 Мб.

Устройства ввода: клавиатура, мышь.

Дополнительные программные средства: Программа Adobe Reader.

Подписано к использованию по решению Редакционно-издательского совета

Московского технологического университета от (дата в формате ДД месяц ГГГГ) г.

Объем: ___ Мб

Тираж: 10

ISBN ______________________

Оглавление

1. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Интегралы с бесконечными пределами

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, тогда по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ . \tag{1.1}$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (1.1), то несобственный интеграл в левой части указанного равенства называется *сходящимся*, если такой предел не существует, то – *расходящимся*.

Аналогично, для функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(-\infty;b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Далее по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1.2}$$

где c – произвольное действительное число. Причем интеграл в левой части равенства (1.2) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (1.2).

Геометрически в случае $f(x)>0$ интеграл (1.1) есть площадь фигуры, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$ и осью Ox.

Признаки сходимости несобственных интегралов

Для определенности сформулируем признаки сходимости несобственных интегралов первого типа.

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)$, то интеграл (1.1) сходится и равен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)\ \blacksquare$$

Теорема 2. (Признак сравнения) Пусть при $a\le x<+\infty$ выполнено двойное неравенство $0\le f(x)\le g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ ■

Теорема 3. (Признак сравнения в предельной форме) Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны и положительны на промежутке $[a;+\infty)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно ■

В качестве интеграла сравнения во многих случаях используется интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} dx \; (a > 0, \; \alpha > 0) \; . \tag{1.3}$$

Интеграл (1.3) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Теорема 4. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, последний интеграл в этом случае называется абсолютно сходящимся ■

Теорема 5. (Критерий Коши) Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ от непрерывной на промежутке $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \; \exists B = B(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B_1 \ge B$ и $\forall B_2 \ge B$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| < \varepsilon \; ■$$

Следствие. Если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > a \quad \exists B_1 \geq B,\ B_2 \geq B$, для которых $\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится ■

Теорема 6. (Признак Дирихле) Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на промежутке $[a;+\infty)$;

2) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, монотонна на промежутке $[a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится ■

Пример 1. Исследовать на абсолютную и условную сходимость при всех значениях параметра α интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx. \tag{1.4}$$

Решение: 1) Если $\alpha > 1$, то $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Согласно признаку сравнения и теореме 4 интеграл (1.4) сходится абсолютно.

2) Если $0 < \alpha \leq 1$, то интеграл (1.4) сходится согласно признаку Дирихле. Условия теоремы 6 будут выполнены, если положить $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

Покажем, что эта сходимость не является абсолютной, т.е. расходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx. \tag{1.5}$$

Так как $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$, то при $\eta > 1$ имеем:

$$\int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx \geq \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx. \tag{1.6}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$ сходится согласно признаку Дирихле, если положить $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x^\alpha} dx$. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha \in (0;1]$, причем $\lim\limits_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$. Переходя в (1.6) к пределу при $\eta \to +\infty$, получим

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x| dx}{x^\alpha} = +\infty .$$

Это означает, что интеграл (1.5) расходится.

3) Докажем расходимость интеграла (1.4) при $\alpha \le 0$, используя следствие критерия Коши:

$$\forall B > 1 \ \ \exists B_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi m \ge B, \ B_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \ge B, \ m \in Z ,$$

такие, что

$$\left| \int\limits_{B_1}^{B_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \left| \int\limits_{\pi/6 + 2\pi m}^{5\pi/6 + 2\pi m} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| = \int\limits_{\pi/6 + 2\pi m}^{5\pi/6 + 2\pi m} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \ge$$

$$\ge \int\limits_{\pi/6 + 2\pi m}^{5\pi/6 + 2\pi m} \sin x dx \ge -\cos x \Big|_{\pi/6 + 2\pi m}^{5\pi/6 + 2\pi m} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = \varepsilon_0 .$$

Ответ: при $\alpha > 1$ сходится абсолютно;
при $0 < \alpha \le 1$ сходится условно;
при $\alpha \le 0$ расходится.

1.2. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Тогда по определению

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x) dx . \qquad (1.7)$$

Если существует конечный предел в правой части равенства (1.7), то несобственный интеграл в левой части указанного равенства называется *сходящимся*, если такой предел не существует, то – *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае, если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ для функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$.

Если $c\in(a;b)$ − точка разрыва функции $f(x)$, $f(x)$ непрерывна на промежутках $[a;c)$, $(c;b]$ и не ограничена в любой окрестности точки c, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx, \tag{1.8}$$

Причем интеграл в левой части равенства (1.8) считается сходящимся, если сходятся оба интеграла в правой части равенства (1.8).

Геометрически в случае $f(x)>0$ интеграл (1.7) есть площадь фигуры, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, прямой $x=a$, вертикальной асимптотой $x=b$ и осью Ox.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости из пункта I.

В качестве интегралов сравнения используются интегралы

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}dx\ ,\ \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}dx\quad(\alpha>0)\ . \tag{1.9}$$

Интегралы (1.9) сходятся при $\alpha<1$ и расходятся при $\alpha\geq 1$.

Переформулируем критерий Коши для несобственных интегралов (1.7).

Теорема 5а. (Критерий Коши) Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной на промежутке $[a;b)$ функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists\eta\in[a;b)$ такое, что $\forall\eta_1,\eta_2\in[\eta;b)$ выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right|<\varepsilon\ \blacksquare$$

Следствие. Если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \eta \in [a;b)\ \exists \eta_1, \eta_2 \in [\eta;b)$, для которых $\left| \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx \right| \geq \varepsilon_0$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится ■

Пример 2. Найти значения параметров α, β, при которых сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)dx. \tag{1.10}$$

Решение: 1) Если $\alpha > 0, \beta > 0$, то

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln(1/x)}{(1/x)^{\alpha/\beta}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{(t)^{\alpha/\beta}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1/t}{(\alpha/\beta)(t)^{\alpha/\beta - 1}} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{(\alpha/\beta)(t)^{\alpha/\beta}} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to +0} x^\alpha \ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +0} \left(\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^{\alpha/\beta}} \right)^\beta = 0.$$

Доопределяя подынтегральную функцию нулем в точке $x = 0$, получим определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[0;1]$ функции, т.е. интеграл (1.10) не является несобственным.

2) Выполним замену переменной $t = \dfrac{1}{x}$:

$$\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^\beta\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}}dt = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int\limits_1^e \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}}dt, \ \ I_2 = \int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}}dt.$$

Исследуем на сходимость интеграл I_1. При $\alpha \in (-\infty;+\infty), \beta \geq 0$ интеграл I_1 является определенным. Если $\beta < 0$, то положим $\beta_1 = -\beta > 0$. Тогда

$$\frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}} = \frac{1}{t^{\alpha+2} \ln^{\beta_1}(1 + (t-1))} \approx \frac{1}{(t-1)^{\beta_1}}, \ \ t \to 1.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^e \frac{dt}{(t-1)^{\beta_1}}$ сходится при $\beta_1 < 1$, то согласно признаку сравнения в предельной форме интеграл I_1 сходится при $\beta > -1$ и $\alpha \in (-\infty;+\infty)$.

Исследуем на сходимость интеграл I_2.

Если $-1 < \beta \le 0,\ \alpha + 2 > 1$, то

$$0 \le \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}} = \frac{1}{t^{\alpha+2}\ln^{\beta_1} t} \le \frac{1}{t^{\alpha+2}},\ t \ge e.$$

Так как интеграл $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+2}}$ сходится, то по признаку сравнения сходится и интеграл I_2.

Если $\beta > 0,\ \alpha + 2 > 1$, то $\alpha + 2 = 1 + 2\delta,\ \delta > 0$,

$$0 \le \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\ln^\beta t}{t^\delta} \cdot \frac{1}{t^{1+\delta}},\ t \ge e.$$

Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln^\beta t}{t^\delta} = 0$, то $\exists M > 0 : 0 \le \frac{\ln^\beta t}{t^\delta} \le M \quad \forall t \in [e;+\infty)$. Следовательно,

$$0 \le \frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}} \le \frac{M}{t^{1+\delta}},\ t \ge e.$$

Согласно признаку сравнения интеграл I_2 сходится.

Если $\beta > -1,\ \alpha + 2 = 1$, то

$$I_2 = \int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^\beta t}{t} dt = \int\limits_e^{+\infty} (\ln t)^\beta d(\ln t) = \left.\frac{(\ln t)^{\beta+1}}{\beta+1}\right|_e^{+\infty} = +\infty$$

т.е. интеграл I_2 расходится.

Если $\beta > -1,\ \alpha + 2 < 1$, то $\frac{\ln^\beta t}{t^{\alpha+2}} > \frac{\ln^\beta t}{t},\ t \ge e$. Так как интеграл $\int\limits_e^{+\infty} \frac{\ln^\beta t}{t} dt$ расходится, то согласно признаку сравнения расходится и интеграл I_2.

Интеграл (1.10) сходится при условии одновременной сходимости интегралов $I_1,\ I_2$, т.е. при $\alpha+2>1,\ \beta>-1$.

Ответ: $\alpha>-1,\ \beta>-1.$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах **1.1-1.10** вычислить интегралы:

1.1. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx \quad (a>0)$;

1.2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx \quad (a>0)$;

1.3. $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n\in N)$;

1.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^\alpha+1)(x^2+1)} \quad (\alpha\in R)$;

1.5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n} \quad (a>0,\ b^2-ac<0,\ n\in N)$;

1.6. $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2-2bx}} \quad (a>0,\ b\ge 0)$;

1.7. $\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x dx \ (\alpha>-1,\ n\in N)$;

1.8. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad (a>1)$;

1.9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}} \quad (0<a<1)$;

1.10. $\int\limits_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx \quad (a<b)$.

В задачах **1.11-1.13** найти значения параметра α, при которых сходятся интегралы:

1.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} dx$; **1.12.** $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(x-1)^{\alpha} \ln x} dx$; **1.13.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctg 2x}{x^{\alpha}} dx$.

В задачах **1.14-1.15** исследовать интегралы на абсолютную и условную сходимость:

1.14. $\int\limits_{0}^{1} (1-x)^{\alpha} \sin \frac{\pi}{1-x} dx$; **1.15.** $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{\alpha}}{x^2+1} \sin \frac{1}{x} dx$.

2. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$$G = \{(x, y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in G$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall (x, y) \in G$ и удовлетворяющей условиям $|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ ▲

Определение. Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной на множестве* G, если она непрерывна в каждой точке этого множества ▲

Определение. Пусть при каждом $y \in [c; d]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a; b]$ как функция переменной x. Тогда интеграл

$$I(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x, y) dx \qquad (2.1)$$

называется *собственным интегралом, зависящим от параметра* y ▲

Наряду с интегралами вида (2.1) рассматривают интегралы более общего вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx. \qquad (2.2)$$

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $G=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), непрерывна на отрезке $[c;d]$ ■

Непрерывность интеграла $I(y)$ на отрезке $[c;d]$ означает, что

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)\quad \forall y_0\in[c;d]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx=\int_a^b f(x,y_0)dx\quad \forall y_0\in[c;d].$$

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $G=\{(x,y): a\le x\le y,\ c\le y\le d\}$, функции $\varphi(y),\ \psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$, а значения этих функций принадлежат отрезку $[a;b]$. Тогда функция $\Phi(y)$, определяемая равенством (2.2), непрерывна на отрезке $[c;d]$, т.е.

$$\lim_{y\to y_0} = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx=\int_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x,y_0)dx \ ■$$

Теорема 3. (Правило Лейбница) Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $G=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$. Тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), дифференцируема на отрезке $[c;d]$ и

$$\frac{dI(y)}{dy}=\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \ ■$$

Теорема 4. Пусть функции $f(x,y)$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $G=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, функции $\varphi(y),\psi(y)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[c;d]$, а значения этих функций принадлежат отрезку $[a;b]$. Тогда функция $\Phi(y)$, определяемая формулой (2.2), дифференцируема на отрезке $[c;d]$, причем

$$\Phi'(y)= f(\psi(y),y)\cdot\psi'(y)- f(\varphi(y),y)\cdot\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \quad ■ \tag{2.3}$$

Теорема 5. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике $G=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$, тогда функция $I(y)$, определяемая равенством (2.1), интегрируема на отрезке $[c;d]$, причем

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \ \blacksquare$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^2 x^3e^{x^2y^2}dx$.

Решение: Функция $f(x,y)=x^3e^{x^2y^2}$ непрерывна в прямоугольнике $G=\{(x,y): 0\le x\le 2,\ -1\le y\le 1\}$. Это означает, что выполнены условия теоремы 1. Поэтому

$$\lim_{y\to 0}\int_0^2 x^3e^{x^2y^2}dx=\int_0^2\lim_{y\to 0}x^3e^{x^2y^2}dx=\int_0^2 x^3dx=4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Доказать, что для функции $I(y)=\int\limits_0^1\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}dx$ не может быть выполнен предельный переход при $y\to 0$ под знаком интеграла.

Решение: Пусть $f(x,y)=\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}$. Покажем, что

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)dx\ne\int_0^1\lim_{y\to 0}f(x,y)dx. \qquad (2.4)$$

Найдем значение левой части соотношения (2.4):

$$I(y)=\int_0^1\frac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2/y^2}d\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2/y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1/y^2}\Rightarrow\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)dx=\lim_{y\to 0}I(y)=\frac{1}{2}.$$

Вычислим правую часть соотношения (2.4). Если $x\in(0;1]$, то

$$\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(x/y)^2}{\exp(x/y)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{t}{\exp t}=0.$$

Если $x=0,\ y\neq 0$, то $f(x,y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0\ \forall x\in[0;1]$. Таким образом, $\int\limits_0^1 \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)dx=0$. Так как $\frac{1}{2}\neq 0$, то предельный переход при $y\to 0$ под знаком интеграла для функции $I(y)$ выполнен быть не может ■

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y)=\int\limits_0^1 2x\,\mathrm{sgn}(x-y)dx,\quad y\in(-\infty;+\infty).$$

Решение: Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)=2x\,\mathrm{sgn}(x-y)$, стоящую под знаком интеграла. Эта функция не является непрерывной в полосе $0\leq x\leq 1$. Ее можно представить в виде:

$$f(x,y)=\begin{cases}2x,\ \textit{если}\ \ 0\leq x\leq 1, y<x;\\ 0,\ \textit{если}\ \ 0\leq x\leq 1, y=x;\\ -2x,\ \textit{если}\ \ 0\leq x\leq 1, y>x.\end{cases}$$

Если $y\leq 0$, то $F(y)=\int\limits_0^1 2xdx=1$.

Если $0<y<1$, то $F(y)=\int\limits_0^y(-2x)dx+\int\limits_y^1 2xdx=1-2y^2$.

Если $y\geq 1$, то $F(y)=\int\limits_0^1(-2x)dx=-1$.

Итак,

$$F(y)=\begin{cases}1,\ y\in(-\infty;0];\\ 1-2y^2,\ y\in(0;1);\\ -1,\ y\in[1;+\infty).\end{cases}$$

Откуда следует, что функция $F(y)$ непрерывна на всей числовой оси ■

Пример 4. Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(a)=\int\limits_0^{\pi}\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)dx,\ |a|\neq 1.$$

Решение: Подынтегральная функция $f(x,a)=\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}=\dfrac{2\cos x+2a}{1+2a\cos x+a^2}$ непрерывны в прямоугольнике

$$G=\{(x,a): 0\le x\le\pi,\ a_1\le a\le a_2\},$$

где отрезок $[a_1;a_2]$ принадлежит одному из промежутков: $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ или $(1;+\infty)$. Поэтому выполнены условия теоремы 3 и

$$\frac{dI(a)}{da}=\int_0^\pi\frac{\partial\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)}{\partial a}dx=\int_0^\pi\frac{2\cos x+2a}{1+2a\cos x+a^2}dx.$$

Выполним замену переменной в определенном интеграле: $t=tg(x/2)$. Тогда $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$ и

$$\frac{dI(a)}{da}=\int_0^{+\infty}\frac{2\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)+2a}{1+2a\cdot\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)+a^2}\cdot\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)}=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{t^2(a-1)+(a+1)}{t^2(a-1)^2+(a+1)^2}\cdot\frac{dt}{\left(1+t^2\right)}=\frac{4}{a-1}\int_0^{+\infty}\frac{\left(t^2+\alpha\right)dt}{\left(t^2+\alpha^2\right)\left(t^2+1\right)},$$

где $\alpha=\dfrac{a+1}{a-1}$.

Выполняя дальнейшие вычисления, получим:

$$I'(a)=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\int_0^{+\infty}\left\{\frac{\alpha}{t^2+\alpha^2}+\frac{1}{t^2+1}\right\}dt=$$

$$=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\left\{\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha}+\operatorname{arctg}t\right\}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{4}{(a-1)(\alpha+1)}\left\{\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Знак плюс в последнем выражении берется для $\alpha>0$ $(|a|>1)$, а знак минус – для $\alpha<0$ $(|a|<1)$.

Если $|a|>1$, то $I'(a)=\dfrac{2\pi}{a}$, следовательно, $I(a)=2\pi\ln|a|+C$.

Найдем константу C:

$$2\pi\ln|a|+C=\int_0^\pi\ln\left(1+2a\cos x+a^2\right)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \int_0^{\pi} \ln\left(1 + 2a\cos x + a^2\right)dx - \pi \ln a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \int_0^{\pi} \ln \frac{\left(1 + 2a\cos x + a^2\right)}{a^2} dx.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $a \to \infty$, получим $C = 0$. Следовательно, $I(a) = 2\pi \ln|a|$.

Если $|a| < 1$, то $I'(a) = 0$, следовательно, $I(a) = C_1$. Так как $I(0) = 0$, то $C_1 = 0 \Rightarrow I(a) = 0$.

Ответ: $I(a) = \begin{cases} 2\pi \ln|a|, & |a| > 1; \\ 0, & |a| < 1. \end{cases}$

Пример 5. Найти $I'(y)$ *при* $y > 0$ *и* $I'(0)$, если

$$I(y) = \int_0^1 \ln\left(x^2 + y^2\right)dx.$$

Решение: Если $y > 0$, то для функции $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ выполнены условия теоремы 3 в прямоугольнике

$$G = \{(x, y): 0 \le x \le 1,\ y_1 \le y \le y_2\},\ [y_1; y_2] \subset (0; +\infty).$$

Поэтому

$$I'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(x^2 + y^2\right)dx. \tag{2.5}$$

Проверим справедливость равенства (2.5). С одной стороны, вычисляя интеграл $I(y)$ по частям, получим:

$$I(y) = \int_0^1 \ln\left(x^2 + y^2\right)dx = x\ln\left(x^2 + y^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2 dx}{x^2 + y^2} =$$

$$= \ln\left(1 + y^2\right) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right)dx = \ln\left(1 + y^2\right) - 2\left(x - y \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \ln\left(1 + y^2\right) - 2 + 2y \operatorname{arctg} \frac{1}{y}.$$

Следовательно, $I'(y) = 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{y}$.

С другой стороны,

$$I'(y)=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(x^2+y^2\right)dx=\int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}\,dx=$$

$$=2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_0^1=2\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

Найдем $I'(0)$. Если $y=0$, то условия теоремы 3 не выполнены, так как функция $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ не определена в точке $(0;0)$. Вычислим $I'(0)$, используя определение производной функции в точке. Для этого предварительно найдем $I(0)$:

$$I(0)=\int_0^1 \ln x^2dx=2\int_0^1 \ln xdx=2(x\ln x-x)\big|_0^1=-2.$$

Тогда

$$I'(0)=\lim_{y\to+0}\frac{I(y)-I(0)}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2\right)+2y\operatorname{arctg}(1/y)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2\right)}{y}+\lim_{y\to+0}2\operatorname{arctg}(1/y)=0+\pi=\pi.$$

Заметим, что $\forall x\in(0;1]$: $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=$

$$=\lim_{y\to+0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(x^2+y^2\right)-\ln x^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to+0}\frac{\ln\left(1+y^2/x^2\right)}{y}=0\ \Rightarrow\ I'(0)\neq\int_0^1\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}dx.$$

Ответ: $I'(y)=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y},\quad y>0;\ I'(0)=\pi$.

Пример 6. Найти $F'(y)$, если $F(y)=\int\limits_{3y}^{y^2}\exp\left(yx^2\right)dx$.

Решение: Функции $\varphi(y)=3y,\ \psi(y)=y^2$ непрерывны на всей числовой оси, а функция $f(x,y)=\exp\left(yx^2\right)$ и ее частная производная по

y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 \exp\left(yx^2\right)$ непрерывны во всей комплексной плоскости.
Согласно теореме 4 и формуле (2.3)

$$F'(y) = \exp\left(y \cdot \left(y^2\right)^2 \right) \cdot 2y - \exp\left(y \cdot (3y)^2\right) \cdot 3 + \int_{3y}^{y^2} x^2 \exp\left(yx^2\right) dx.$$

Ответ: $F'(y) = 2y \exp\left(y^5\right) - 3\exp\left(9y^3\right) + \int_{3y}^{y^2} x^2 \exp\left(yx^2\right) dx$.

Пример 7. Найти дважды дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

$$\varphi(x) = x^2 + 4\int_0^x (x-y)\varphi(y) dy. \tag{2.6}$$

Решение: Продифференцируем дважды по x обе части равенства (2.6):

$$\varphi'(x) = 2x + 4(x-x)\varphi(x) + 4\int_0^x \frac{\partial[(x-y)\varphi(y)]}{\partial x} dy = 2x + 4\int_0^x \varphi(y) dy;$$

$$\varphi''(x) = 2 + 4\varphi(x). \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид:

$$\varphi(x) = C_1 \operatorname{ch} 2x + C_2 \operatorname{sh} 2x - 1/2.$$

Так как $\varphi(0) = 0$, то $C_1 - 1/2 = 0$. Далее, так как $\varphi'(x) = 2C_1 \operatorname{sh} 2x + 2C_2 \operatorname{ch} 2x$ и $\varphi'(0) = 0$, то $C_2 = 0$.

Ответ: $\varphi(x) = 1/2 \operatorname{ch} 2x - 1/2$.

Пример 8. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \ 0 < a < b.$$

Решение: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \left(\left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_0^1 \right) dy =$

$$=\int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln(y+1)\Big|_a^b = \ln\frac{(b+1)}{(a+1)}.$$

Здесь функция $f(x,y) = x^y$ непрерывна в прямоугольнике

$$G = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ a \le y \le b\},$$

т.е. выполнены условия теоремы 5.

Ответ: $\ln\dfrac{(b+1)}{(a+1)}$.

Пример 9. Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интеграл:

$$I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{dx}{\cos x},\ \ 0 < a < 1.$$

Решение: $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+a\cos x) - \ln(1-a\cos x)}{\cos x}\,dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^a \left[\frac{1}{1+y\cos x} + \frac{1}{1-y\cos x}\right] dy = \int_0^a dy \int_0^{\pi/2} \frac{2dx}{1-y^2\cos^2 x} =$$

$$= \int_0^a dy \int_0^{\pi/2} \frac{(-2)d\,\mathrm{ctg}\,x}{\mathrm{ctg}^2 x + 1 - y^2\,\mathrm{ctg}^2 x} = \int_0^a dy \int_0^{+\infty} \frac{2du}{(1-y^2)u^2+1} =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{arctg}\left(u\sqrt{1-y^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\right) dy = \int_0^a \frac{\pi dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \arcsin a.$$

Здесь функция $f(x,y) = \dfrac{2}{1-y^2\cos^2 x}$ непрерывна в прямоугольнике

$$G = \{(x,y): 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le a\},$$

и выполнены условия теоремы 5.

Ответ: $\pi \arcsin a$.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах **2.1-2.3** проверить, выполняется или нет равенство

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx:$$

2.1. $f(x,y)=x^2\sqrt{x^2+y^2}$, $[a,b]=[0;1]$, $y_0=0$;

2.2. $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $[a,b]=[0;1]$, $y_0=0$;

2.3. $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}$, $[a,b]=[0;1]$, $y_0=0$.

В задачах **2.4-2.8** найти указанные пределы:

2.4. $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$; **2.5.** $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_{y}^{y+\sqrt{3}}\dfrac{dx}{1+x^2+y^2}$;

2.6. $\lim\limits_{y\to+\infty}\int\limits_1^2\dfrac{\ln(x+y)}{\ln\left(x^2+y^2\right)}dx$; **2.7.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1\dfrac{dx}{1+(1+x/n)^n}$;

2.8. $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{1}{t}\int\limits_1^3\sin tx\cdot\sqrt{x^2+t^2+tx-1}\,dx$.

В задачах **2.9-2.12** исследовать на непрерывность функцию

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\ y\in R:$$

2.9. $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\ge y\\ -1, & x<y\end{cases}$; $a=0,\ b=1$;

2.10. $F(y)=\int\limits_{-1}^{1}[y+\operatorname{sgn}(x-y)]dx$;

2.11. $F(y)=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn}\left(x^2-y\right)dx$; **2.12.** $F(y)=\int\limits_0^1 x\operatorname{sgn}(x-y)dx$.

В задачах **2.13-2.16** найти $F'(\alpha)$, если

2.13. $F(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$; **2.14.** $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{2\alpha}\dfrac{\sin\alpha x}{x}dx$;

2.15. $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$; **2.16.** $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha^2}^{3\alpha^3} e^{\alpha^2x^2}dx$.

2.17. Найти $F'(y)$, если $F(y)=\int\limits_0^{y^2} dx \int\limits_{x-y}^{x+y} \sin\left(x^2+t^2-y^2\right)dt$.

2.18. Найти $F''(y)$, если $F(y)=\int\limits_0^y (x+y)f(x)dx$, где $f(x)$ – дифференцируемая на R функция.

В задачах **2.19-2.21** найти дважды дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую указанному уравнению:

2.19 $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x (y-x)\varphi(y)dy$;

2.20. $\varphi(x)=1+\lambda\int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy,\ \ \lambda>0$;

2.21. $\varphi(x)=x^2+\lambda\int\limits_0^x (x-y)\varphi(y)dy,\ \ \lambda>0$.

В задачах **2.22-2.23** выяснить, можно или нет вычислить по правилу Лейбница производную функции $F(y)$ в точке $y_0=0$.

2.22. $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$,

$$f(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\dfrac{xy}{x^2+y^2},\ 0<x\le 1,\ 0\le y\le 1;\\ \pi/2,\ \ x=0,\ 0\le y\le 1.\end{cases};$$

2.23. $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$,

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-\frac{x^2}{y}},\ 0\le x\le 1,\ 0<y\le 1;\\ 0,\ \ 0\le x\le 1,\ \ y=0.\end{cases}$$

В задачах **2.24-2.32**, применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

2.24. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x\right) dx,\ ab \neq 0;$

2.25. $\int\limits_0^{\pi} \ln\left(1 + 2a\cos x + a^2\right) dx,\ \ |a| \neq 1;$

2.26. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx\ \ ;$

2.27. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \sin x)}{\sin x} dx\ \ ;$

2.28. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx,\ \ 0 < a < 1;$

2.29. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx,\ \ 0 < a < 1;$

2.30. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a\sin x)}{\sin x} dx,\ \ 0 < a < 1;$

2.31. $\int\limits_0^{a} \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} dx;$

2.32. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{1 + a\cos x}{1 - a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x},\ \ |a| < 1.$

В задачах **2.33-2.35**, применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить следующие интегралы:

2.33. $\int\limits_0^{1} \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,\ a > 0,\ b > 0;$

2.34. $\int\limits_0^{1} \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,\ a > 0,\ b > 0;$

2.35. $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\dfrac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\dfrac{dx}{\sin x},\;\; a>b>0.$

2.36. Используя равенство $\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int\limits_0^1\dfrac{dy}{1+y^2x^2}$, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

3. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве

$$G=\{(x,y): a\le x<+\infty,\; y\in D\},$$

причем множество D может быть как конечным отрезком $[c;d]$, так и в общем случае конечным или полубесконечным интервалом. Рассмотрим несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{3.1}$$

Определение 1. Несобственный интеграл (3.1) называется *сходящимся в точке* $y_0\in D$, если существует конечный предел

$$\lim_{B\to+\infty}\int\limits_a^B f(x,y_0)dx=I(y_0),$$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=B_0(\varepsilon)>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \blacktriangle$$

Определение 2. Несобственный интеграл (3.1) называется *сходящимся на множестве* D, если он сходится в каждой точке этого множества, т.е. $\forall\varepsilon>0$ и $\forall y\in D\ \exists B_0=B_0(\varepsilon,y)>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon\ \blacktriangle$$

Определение 3. Несобственный интеграл (3.1) называется *абсолютно сходящимся на множестве* D, если на множестве D сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x,y)| dx \ \blacktriangle$$

Определение 4. Несобственный интеграл (3.1) называется *равномерно сходящимся на множестве* D, если $\forall \varepsilon > 0$ и $\exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in D$ выполняется неравенство

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x,y) dx \right| < \varepsilon \ \blacktriangle$$

Определение 5. Говорят, что несобственный интеграл (3.1) *сходится неравномерно на множестве* D, если он сходится на множестве D, но при этом $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > a \ \ \exists B_1 = B_1(B) \geq B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in D$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x,y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0 \ \blacktriangle$$

Теорема 1. (Признак Вейерштрасса) Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $G = \{(x,y) : a \leq x < +\infty, \ y \in D\}$ и $\forall y \in D$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; A]$ вещественной оси. Если при этом существует функция $F(x)$ такая, что

1) $|f(x,y)| \leq F(x) \ \forall x \in [a;+\infty), \ \forall y \in D$;

2) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится,

то несобственный интеграл (3.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве D ■

Теорема 2. (Критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл (3.1) сходился равномерно по параметру y на множестве D необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ и $\exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B_1, \ B_2 \geq B_0$ и $\forall y \in D$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x,y) dx \right| < \varepsilon \ \blacksquare$$

Следствие. Если несобственный интеграл (3.1) сходится на множестве D и $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > a$ $\exists B_1 = B_1(B) \geq B,$ $\exists B_2 = B_2(B) \geq B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in D$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0 ,$$

то несобственный интеграл (3.1) сходится неравномерно на множестве D ■

Выше изложенные определение, признак равномерной сходимости и критерий равномерной сходимости сформулированы для несобственных интегралов с бесконечным пределом интегрирования (3.1). Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Пример 1. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} dx$

а) сходится равномерно на множестве $E_1 = [1;+\infty)$;

б) сходится неравномерно на множестве $E_2 = (0;+\infty)$.

Решение: а) Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся определением 4, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найдем $B_0 = B_0(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in [1;+\infty)$ выполнялось неравенство

$$\left| \int_B^{+\infty} e^{-xy} dx \right| < \varepsilon . \qquad (3.2)$$

Имеем:

$$\left| \int_B^{+\infty} e^{-xy} dx \right| = \int_B^{+\infty} e^{-xy} dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int_B^{\eta} e^{-xy} dx = \lim_{\eta \to +\infty} \left(-e^{-xy} \big/ y \Big|_B^{\eta} \right) =$$

$$= \lim_{\eta \to +\infty} \left(-e^{-\eta y} \big/ y + e^{-By} \big/ y \right) = e^{-By} \big/ y \leq e^{-B} < \varepsilon .$$

Последнее неравенство выполняется, если $-B < \ln \varepsilon \Leftrightarrow B > \ln(1/\varepsilon)$.

Положим $B_0 = \max\{2\ln(1/\varepsilon); 0\}$. Тогда $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in [1;+\infty)$ выполнено неравенство (3.2).

б) Докажем неравномерную сходимость интеграла на множестве E_2, используя определение 5. Для любого $y > 0$ интеграл сходится:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty}\left(-e^{-xy}/y\Big|_0^{\eta}\right) = 1/y.$$

Далее, $\forall B \geq 0$ возьмем $y_0 = 1/(B+1)$, $B_1 = B+1$. Тогда

$$\left|\int_{B_1}^{+\infty} e^{-xy_0}dx\right| = -\frac{1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_{B_1}^{+\infty} = \frac{1}{y_0}e^{-B_1y_0} = (B+1)e^{-1} \geq e^{-1} = \varepsilon_0 \blacksquare$$

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-y)^2+1} \tag{3.3}$$

а) на множестве $E_1 = [0;1]$, б) на множестве $E_2 = [0;+\infty)$.

Решение: а) Пользуясь признаком Вейерштрасса, покажем, что интеграл (3.3) сходится равномерно на множестве E_1. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} 1, \ \textit{если} \ x \in [0;1]; \\ \dfrac{1}{(x-1)^2+1}, \ \textit{если}\, x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

Эта функция является мажорантой для функции $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-y)^2-1}$, так как $|f(x,y)| \leq F(x)$ $\forall y \in E_1$, $\forall x \geq 0$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$ сходится. Согласно признаку Вейерштрасса несобственный интеграл (3.3) сходится абсолютно и равномерно на множестве E_1.

б) Покажем, что на множестве E_2 интеграл (3.3) сходится неравномерно. Воспользуемся для этой цели отрицанием критерия Коши (следствием теоремы 2). Интеграл (3.3) сходится $\forall y \in E_2$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-y)^2+1} = \lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta}\frac{d(x-y)}{(x-y)^2+1} = \lim_{\eta\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x-y)\Big|_0^{\eta}\right] =$$
$$= \pi/2 + \operatorname{arctg} y.$$

Заметим, что максимальное значение функция $f(x,y)$ принимает при $x = y$. Поэтому $\forall B > 0$ возьмем $B_1 = B+1$, $B_2 = B+3$, $y_0 = B+2$, тогда

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y_0)dx\right| = \left|\int_{B+1}^{B+3} \frac{dx}{(x-B-2)^2+1}\right| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1}\right| = \operatorname{arctg} t\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} = \varepsilon_0.$$

Таким образом, $\exists \varepsilon_0 = \pi/2 > 0$ такое, что $\forall B > 0$ $\exists B_1 = B_1(B) \geq B$, $\exists B_2 = B_2(B) \geq B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in E_2$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y_0)dx\right| \geq \varepsilon_0 \ \blacksquare$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^y} \tag{3.4}$$

а) на множестве $E_1 = [-1; 2/3]$, б) на множестве $E_2 = [-1;1)$.

Решение: а) При $y \in [-1;0]$ функция $f(x,y) = \dfrac{1}{(x-1)^y}$ как функция переменной x непрерывна на отрезке интегрирования $[1;2]$, а при $y \in (0;2/3]$ эта функция непрерывна на промежутке $(1;2]$ и $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{(x-1)^y} = +\infty$, т.е. интеграл (3.4) является несобственным интегралом от неограниченной функции. При $x \in (1;2]$, $y \in [-1;2/3]$

$$0 < \frac{1}{(x-1)^y} \leq \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = F(x).$$

Интеграл $\int\limits_1^2 F(x)dx$ сходится, следовательно, несобственный интеграл (3.4) сходится равномерно на множестве E_1 по признаку Вейерштрасса.

б) Покажем, что интеграл (3.4) сходится неравномерно на множестве E_2, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B \in (1;2)$ $\exists B_1 \in (1;B]$, $\exists y_0 \in [-1;1)$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_1^{B_1} \frac{1}{(x-1)^{y_0}} dx\right| \geq \varepsilon_0.$$

Так как

$$\left|\int_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx\right|=\int_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx=\frac{(B_1-1)^{1-y_0}}{1-y_0},$$

то, полагая $y_0=2-B,\ B_1=1+(B-1)^{1/(B-1)}$, получим

$$\left|\int_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0 \ \blacksquare$$

Пример 4. Доказать, что несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2, если

$$I(y)=\int_1^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx\,, \tag{3.5}$$

а) $E_1=[0;1]$, б) $E_2=[1;+\infty)$.

Решение: а) Для доказательства равномерной сходимости $I(y)$ на множестве E_1 воспользуемся определением 4. Возьмем $B\ge e$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx=-\int_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\,d\cos x=-\frac{\ln^y x}{x}\cos x\Big|_B^{+\infty}+$$

$$+\int_B^{+\infty}\left(\frac{y\ln^{y-1}x-\ln^y x}{x^2}\right)\cos x dx=\frac{\ln^y B}{B}\cdot\cos B+$$

$$+\int_B^{+\infty}\left(\frac{y\ln^{y-1}x-\ln^y x}{x^2}\right)\cos x dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^y x}{\sqrt{x}}=0\ \ \forall y\in[0;1]$, то $\exists M_1>0,\ \exists M_2>0$ такие, что

$$\left|\frac{\ln^y x\cdot\cos x}{\sqrt{x}}\right|\le M_1\,,\ \left|\frac{\left(y\ln^{y-1}x-\ln^y x\right)\cos x}{\sqrt{x}}\right|\le M_2\ \ \forall x\ge e,\ \forall y\in[0;1].$$

Тогда

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx\right|\le\frac{M_1}{\sqrt{B}}+\int_B^{+\infty}\frac{M_2}{x^{3/2}}dx=\frac{M_1}{\sqrt{B}}+\frac{2M_2}{\sqrt{B}}=\frac{M}{\sqrt{B}},$$

где $M = M_1 + 2M_2$. Если $\frac{M}{\sqrt{B}} < \varepsilon$, то

$$\left| \int_B^{+\infty} \frac{\ln^y x}{x} \cdot \sin x \, dx \right| < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $B_0 = \max\left\{ (M/\varepsilon)^2 + 1; e \right\}$. Тогда $\forall B \geq B_0$, $\forall y \in [0;1]$ выполняется условие (3.6), следовательно, интеграл $I(y)$ сходится равномерно на множестве E_1.

б) Покажем, что интеграл $I(y)$ сходится неравномерно на множестве E_2, используя отрицание критерия Коши, а именно покажем, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > 1\ \exists B_1 = B_1(B) \geq B,\ \exists B_2 = B_2(B) \geq B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in E_2$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} \frac{\ln^{y_0} x}{x} \cdot \sin x \, dx \right| \geq \varepsilon_0. \tag{3.7}$$

Для любого $\forall B > 1$ возьмем $B_1 = \pi/6 + 2\pi n$, $B_2 = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in N, B_1 \geq B,\ B_2 \geq B$. Тогда $\sin x \geq 1/2$ на отрезке $[B_1, B_2]$ и

$$\left| \int_{B_1}^{B_2} \frac{\ln^{y_0} x}{x} \cdot \sin x \, dx \right| \geq \frac{1}{2} \int_{B_1}^{B_2} \frac{\ln^{y_0} x}{x} dx \geq \frac{1}{2} \frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2}.$$

Далее положим $y_0 = \log_{\ln B_1} B_2$ $\left(y_0 \in [1;+\infty) \right)$. Тогда $\frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2} = 1$ и $\exists \varepsilon_0 = \pi/3$, для которого выполняется неравенство (3.7) ■

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Показать что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

а) сходится равномерно на промежутке $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

б) сходится неравномерно на промежутке $\alpha \in (1;+\infty)$.

3.2. Показать, что интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится неравномерно на интервале $(0;1)$.

3.3. Показать что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$

а) сходится равномерно на промежутке $\alpha \in [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

б) сходится неравномерно на промежутке $\alpha \in (1;+\infty)$.

В задачах **3.4-3.11** исследовать на равномерную сходимость интегралы на указанных множествах:

3.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1+x}$, $E = (-1;0)$.

3.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+(x-\alpha)^4}$, $a) E_1 = (-\infty;1]$, $b) E_2 = [0;+\infty)$.

3.6. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{\left(\alpha^2 + x^2\right)^2} dx$, $E = (-1;1)$.

3.7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha}{1+\alpha^2 x^2} dx$, $a) E_1 = [1;3]$, $b)\ E_2 = [1;+\infty)$, $c)\ E_3 = [0;3]$.

3.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^\alpha}$, $a)\ E_1 = [3;+\infty)$, $b)\ E_2 = (1;+\infty)$.

3.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$, $a) E_1 = (-\infty;0]$, $b) E_2 = [0;+\infty)$.

3.10. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$, $a)\ E_1 = [0;2]$, $b)\ E_2 = [0;+\infty)$.

3.11. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4} dx$, $a)\ E_1 = [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 0$, $b)\ E_2 = (0;+\infty)$.

4. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве

$$G = \{(x, y) : a \le x < +\infty,\ y \in D\},$$

причем множество D может быть как конечным отрезком $[c;d]$, так и в общем случае конечным или полу бесконечным интервалом. Рассмотрим несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \qquad (4.1)$$

Теорема 1. (Непрерывность интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве G;

2) несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно на множестве D.

Тогда функция $I(y)$ является непрерывной на множестве D ■

Пример 1. Доказать, что

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx \qquad (4.2)$$

является непрерывной функцией на множестве $D=[0;+\infty)$.

Решение: Введем в рассмотрение функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}, x\in(0;+\infty), y\in[0;+\infty), \\ 1,\ x=0, y\in[0;+\infty). \end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $G=\{(x,y): 0\le x<+\infty,\ 0\le y<+\infty\}$. Покажем, что несобственный интеграл (4.2) сходится равномерно на множестве D. Для любого $B>0$

$$\int_B^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx=-\int_B^{+\infty}\frac{e^{-xy}}{x}d\cos x=-\cos x\cdot\frac{e^{-xy}}{x}\Bigg|_B^{+\infty}+\int_B^{+\infty}\cos x\cdot d\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right).$$

Тогда для оценки модуля интеграла получим:

$$\left|\int_B^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\left|\frac{\cos B}{Be^{By}}\right|+\left|\int_B^{+\infty} d\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)\right|\le\frac{1}{B}+\left|\frac{e^{-xy}}{x}\Bigg|_B^{+\infty}\right|=\frac{1}{B}+\frac{1}{B}=\frac{2}{B}.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=4/\varepsilon>0$ такое, что $\forall B>B_0$ и $\forall y\in D$

$$\left|\int_B^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\frac{2}{B}\le\frac{2}{B_0}=\frac{2\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

Согласно определению равномерно сходящегося несобственного интеграла (определение 4, тема 3) несобственный интеграл (4.2) сходится равномерно на множестве D.

Выполнены условия теоремы 1, следовательно, функция $I(y)$ непрерывна на множестве D ■

Теорема 2. (Интегрирование несобственного интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве
$$G_1 = \{(x,y): a \le x < +\infty,\ c \le y \le d\};$$
2) несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно на отрезке $[c;d]$.

Тогда
$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy \ ■$$

Пример 2. (Интеграл Дирихле) Доказать, что
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \qquad (4.3)$$

Решение: Рассмотрим несобственный интеграл
$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx,\ \ y \in [\delta; B],\ 0 < \delta < B.$$

На отрезке $[\delta; B]$ этот несобственный интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Действительно,
$$\left|e^{-xy} \sin x\right| \le e^{-\delta x}\ \ \forall x \in [0;+\infty),\ \forall y \in [\delta; B] \text{ и } \int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx = \frac{1}{\delta}.$$

Согласно теореме 2
$$\int_\delta^B dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^{+\infty} dx \int_\delta^B e^{-xy} \sin x dy. \qquad (4.4)$$
Вычисляя повторные интегралы в левой и правой частях равенства (4.4), получим:
$$\int_\delta^B dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_\delta^B \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_\delta^B = \operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} \delta,$$

$$\int_0^{+\infty} dx \int_\delta^B e^{-xy}\sin x dy = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{e^{-xy}}{x}\sin x\Bigg|_\delta^B\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(e^{-x\delta}-e^{-xB}\right)\frac{\sin x}{x}dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}\left(e^{-x\delta}-e^{-xB}\right)\frac{\sin x}{x}dx = \operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg}\delta. \qquad (4.5)$$

В примере 1 было показано, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится равномерно на множестве $D=[0;+\infty)$, следовательно является непрерывной функцией на этом множестве. Переходя в равенстве (4.5) к пределу при $B\to+\infty$, а затем к пределу при $\delta\to+0$, получим равенство (4.3) ■

Пример 3. Используя результат предыдущего примера, вычислить интеграл

$$D(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx. \qquad (4.6)$$

Решение: Заметим, что $D(y)$ – нечетная функция. Если $y>0$,то

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{xy}d(xy) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$D(y)=\begin{cases}\pi/2, & y>0,\\ 0, & y=0,\\ -\pi/2, & y<0.\end{cases}$$

Ответ: $D(y)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y$.

Теорема 3. (Дифференцирование несобственного интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на множестве

$$G_1=\{(x,y): a\le x<+\infty,\ c\le y\le d\};$$

2) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ сходится равномерно на отрезке $[c;d]$;

3) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx$ сходится.

Тогда несобственный интеграл (4.1) сходится на отрезке $[c;d]$, является на этом отрезке непрерывно-дифференцируемой функцией и

$$I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \blacksquare$$

Пример 4. Используя дифференцирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}}{x} dx, \ 0 < \alpha < 1.$$

Решение: При $x \to 0$

$$e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2} = 1 - \alpha x^2 - 1 + x^2 + o\left(x^2\right) = (1-\alpha)x^2 + o\left(x^2\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}}{x} = 0$.

На множестве

$$G = \{(x,\alpha): 0 \le x < +\infty, \ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}, \ 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \left(e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}\right)\Big/ x, \ x \in (0;+\infty), \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]; \\ 0, x = 0, \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]. \end{cases}$$

На указанном множестве функция $f(x,\alpha)$ непрерывна вместе со своей частной производной по параметру α:

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \begin{cases} -xe^{-\alpha x^2}, \ x \in (0;+\infty), \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]; \\ 0, x = 0, \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]. \end{cases}$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ по признаку Вейерштрасса. Действительно,

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \le xe^{-\alpha_1 x^2} \quad \forall x \in [0;+\infty),\ \forall \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2];$$

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha_1 x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha_1} e^{-\alpha_1 x^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha_1}.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx$ сходится по признаку сравнения:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx = \int\limits_0^{1} f(x,\alpha_1)dx + \int\limits_1^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx \tag{4.7}$$

Первый из интегралов в правой части (4.7) является определенным, а для второго интеграла при $x \ge 1$ имеет место оценка:

$$|f(x,\alpha_1)| \le \left|\frac{e^{-\alpha_1 x^2}}{x}\right| + \left|\frac{e^{-x^2}}{x}\right| \le e^{-\alpha_1 x^2} + e^{-x^2} \le 2e^{-\alpha_1 x^2} \le 2e^{-\alpha_1 x}.$$

То есть $0 < f(x,\alpha_1) \le 2e^{-\alpha_1 x}$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} 2e^{-\alpha_1 x} dx$ сходится.

Выполнены условия теоремы 3, поэтому можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \left(-xe^{-\alpha x^2}\right) dx = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Откуда следует, что $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C$. Так как $I(1) = 0$, то $C = 0$.

Ответ: $I(\alpha) = -\frac{1}{2}\ln\alpha$.

Теорема 4. (Теорема о перестановке двух несобственных интегралов).

Пусть

1) функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве

$$G_2=\{(x,y): a\le x<+\infty,\ c\le y\le +\infty\};$$

2) несобственный интеграл $F(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[c;d]\subset[c;+\infty)$, а несобственный интеграл $\Phi(x)=\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$ сходится равномерно на любом отрезке $[a;b]\subset[a;+\infty)$;

3) существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x,y)|dy \text{ или } \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} |f(x,y)|dx.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \blacksquare$$

Пример 5. (интеграл Эйлера-Пуассона)

Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона $J=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$, используя перестановку двух несобственных интегралов.

Решение: Введем в рассмотрение функцию $\varphi(t)=\int\limits_0^{+\infty} te^{-(xt)^2}dx$. Заметим, что $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(xt)^2}d(tx)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du=J$ при $t>0$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} te^{-\left(1+x^2\right)t^2}dx\right)dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\varphi(t)dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}Jdt=J\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=J^2.$$

Функция $f(x,t)=te^{-\left(1+x^2\right)t^2}$ непрерывна и неотрицательна на множестве $G_2=\{(x,t): 0\le x<+\infty,\ \varepsilon\le t\le +\infty\}$, $\varepsilon>0$.

Несобственный интеграл $F(t)=\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[\varepsilon;\varepsilon_1]\subset[\varepsilon;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как $0\le f(x,t)\le \varepsilon_1 e^{-\varepsilon^2\left(1+x^2\right)}\le \varepsilon_1 e^{-\varepsilon^2 x}\quad \forall x\ge 0,\ \forall t\in[\varepsilon;\varepsilon_1]$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon_1 e^{-\varepsilon^2 x}dx$ сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty}\varepsilon_1 e^{-\varepsilon^2 x}dx=-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}e^{-\varepsilon^2 x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon^2}.$$

Несобственный интеграл $\Phi(x)=\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x,t)dt$ сходится равномерно на промежутке $[0;+\infty)$, по признаку Вейерштрасса, так как $0\le f(x,t)=te^{-\left(1+x^2\right)t^2}\le te^{-t^2}\ \ \forall x\ge 0,\ \forall t\in[\varepsilon;\varepsilon_1]$ и

$$\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} te^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-t^2}dt^2=-e^{-t^2}\Big|_{\varepsilon}^{+\infty}=e^{-\varepsilon^2}.$$

Проверим выполнение третьего пункта теоремы 4. Для этого рассмотрим функцию двух переменных $\psi(x,\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x,t)dt$ при $x\ge 0,\ \varepsilon\ge 0$. Так как

$$0<\psi(x,\varepsilon)<\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dt=\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2\left(1+x^2\right)}dt=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)},\ \varepsilon\ge 0,$$

и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{2\left(1+x^2\right)}=\frac{\pi}{4}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\psi(x,\varepsilon)dx$ сходится равномерно по параметру ε на отрезке $[0;1]$. Поэтому существует повторный интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)dt = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_\varepsilon^{+\infty} |f(x,t)|dt$. Выполнены условия теоремы 4. Поэтому

$$\int\limits_\varepsilon^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dx = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_\varepsilon^{+\infty} f(x,t)dt = \int\limits_0^{+\infty} \psi(x,\varepsilon)dx \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Далее, используя теорему о непрерывности несобственного интеграла по параметру, получим:

$$J^2 = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dx \right) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dx \right) dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{+\infty} \psi(x,\varepsilon)dt = \int\limits_0^{+\infty} \psi(x,0)dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} f(x,t)dt \right) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Откуда $J = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\alpha^2 x^2\right) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx\ , \ \alpha > 0,\ \beta > 0. \qquad (4.8)$$

Решение: На первом шаге зафиксируем параметр β и будем рассматривать интеграл (4.8) как интеграл, зависящий от параметра α, то есть положим

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\alpha^2 x^2\right) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx\ . \qquad (4.9)$$

Проверим выполнение условий теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру для интеграла (4.9).

1) На множестве

$$G = \{(x,\alpha) : 0 \le x < +\infty,\ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\},\ 0 < \alpha_1 < \alpha_2,$$

функции $f(x,\alpha)$, $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}$, где

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)\operatorname{arctg}\beta x}{x^3}, & x\in(0;+\infty),\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2];\\ \alpha^2\beta,\ x=0,\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\begin{cases}\dfrac{2\alpha\operatorname{arctg}\beta x}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)}, & x\in(0;+\infty),\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2];\\ 2\alpha\beta,\ x=0,\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\end{cases}$$

являются непрерывными.

2) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\alpha\operatorname{arctg}\beta x}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)}dx$ сходится равномерно по параметру α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$. Действительно, $\forall B>0$ и $\forall\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{2\alpha\operatorname{arctg}\beta x}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)}dx\right|\le\frac{\pi}{B}\int\limits_B^{+\infty}\frac{d(\alpha x)}{\left(1+\alpha^2x^2\right)}=\frac{\pi}{B}\operatorname{arctg}(\alpha x)\Big|_B^{+\infty}=$$

$$=\frac{\pi}{B}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\alpha B)\right)<\frac{\pi^2}{2B}.$$

Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=\pi^2/\varepsilon>0$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{2\alpha\operatorname{arctg}\beta x}{x\left(1+\alpha^2x^2\right)}dx\right|<\frac{\pi^2}{2B}\le\frac{\pi^2}{2B_0}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

3) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(x,\alpha_1)dx$ сходится. Действительно,

$$\int\limits_0^{+\infty}f(x,\alpha_1)dx=\int\limits_0^{1}f(x,\alpha_1)dx+\int\limits_1^{+\infty}f(x,\alpha_1)dx. \tag{4.10}$$

Первое слагаемое в правой части (4.10) представляет собой определенный интеграл. Функция $F(x)=\dfrac{\ln\left(1+\alpha_1^2x^2\right)}{x}$ непрерывна на промежутке $[1;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, поэтому $\exists M>0$ такое, что $0<F(x)\le M$. Следовательно, $0<f(x,\alpha_1)\le\dfrac{\pi M}{2x^2}$, $x\in[1;+\infty)$. А так как интеграл

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\pi M}{2x^2} dx$ сходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x, \alpha_1) dx$ сходится по признаку сравнения.

Дифференцируя (4.9) по параметру α , получим:

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\alpha \operatorname{arctg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx \ . \qquad (4.11)$$

На следующем шаге интеграл (4.11) будем рассматривать как несобственный интеграл, зависящий от параметра β :

$$K(\beta) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\alpha \operatorname{arctg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx \ . \qquad (4.12)$$

Для интеграла $K(\beta)$ выполняются условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (проверьте это самостоятельно). Дифференцируя (4.12) по параметру β , получим:

$$K'(\beta) = 2\alpha \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(1+\beta^2 x^2)(1+\alpha^2 x^2)} =$$

$$= 2\alpha \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\beta^2}{(\beta^2-\alpha^2)(1+\beta^2 x^2)} + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-\beta^2)(1+\alpha^2 x^2)} \right) dx =$$

$$= 2\alpha \left(\frac{\beta}{(\beta^2-\alpha^2)} \operatorname{arctg} \beta x + \frac{\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)} \operatorname{arctg} \alpha x \right) \Bigg|_{0}^{+\infty} =$$

$$= 2\alpha \left(\frac{\beta}{(\beta^2-\alpha^2)} \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta} \ .$$

Тогда

$$K(\beta) = \int \frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta} d\beta = \pi\alpha \ln(\alpha+\beta) + C \ .$$

Так как $K(0) = 0$, то $C = -\pi\alpha \ln \alpha$. С учетом (4.11), (4.12) имеем:

$$\Phi'(\alpha) = \pi\alpha \ln(\alpha+\beta) - \pi\alpha \ln \alpha \ .$$

Интегрируя последнее равенство по параметру α , получим:

$$\Phi(\alpha) = \pi \int \alpha (\ln(\alpha+\beta) - \ln \alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \alpha^2 \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha} - \beta^2 \ln(\alpha+\beta) + \alpha\beta \right\} + C_1 \ .$$

Так как $\Phi(0)=0$, то $C_1=\dfrac{\pi\beta^2}{2}\ln\beta$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\ln(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\beta^2\ln\beta-\alpha^2\ln\alpha\right\}$.

Задачи для самостоятельного решения

С помощью дифференцирования по параметру вычислить интегралы:

4.1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-\beta x}dx,\quad \beta>0$;

4.2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \lambda\neq 0$;

4.3. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0$;

4.4. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)}dx,\ \alpha>0,\ \beta>0$;

4.5. а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg\alpha x}{x\left(x^2+1\right)}dx,\ \alpha>0$; б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x}{tgx}dx$; в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2}\ln\sin x dx$;

4.6. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)\ln\left(1+\beta^2x^2\right)}{x^2}dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0$;

4.7. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)arctg\beta x}{x^3}dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0$;

4.8. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}\sin^2\beta x}{x^2}dx,\ \alpha>0$:

4.9. $\displaystyle\int\limits_0^{1}\frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ |\alpha|<1$.

Выяснить, допустима ли перестановка порядка интегрирования в следующих случаях:

4.10. $\int\limits_{1}^{+\infty} dy \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx$;

4.11. $\int\limits_{1}^{+\infty} dy \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{y - x}{\left(x + y\right)^2} dx$.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 1. (Интегралы Фруллани)

а) Пусть

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty)$.

Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}, \ a > 0, \ b > 0. \qquad (5.1)$$

Доказательство: Пусть $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$. Тогда, используя свойство аддитивности и теорему о среднем для определенного интеграла, получим:

$$\int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(ax)}{ax} d(ax) -$$

$$- \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{f(bx)}{bx} d(bx) = \int\limits_{a\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{b\delta_1}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(z)}{z} dz + \int\limits_{b\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{b\delta_1}^{a\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{f(z)}{z} dz = f(\xi) \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{dz}{z} - f(\eta) \int\limits_{a\delta_2}^{b\delta_2} \frac{dz}{z} =$$

$$= f(\xi) \ln \frac{b}{a} - f(\eta) \ln \frac{b}{a} = [f(\xi) - f(\eta)] \ln \frac{b}{a}.$$

Здесь $\xi \in (a\delta_1; b\delta_1)$, $\eta \in (a\delta_2; b\delta_2)$. Переходя к пределу при $\delta_1 \to +0$, $\eta \to +\infty$, получим равенство (5.1).

б) Пусть

1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz$ сходится для любого $A > 0$.

Тогда

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \ a > 0,\ b > 0. \qquad (5.2)$$

Доказательство: Пусть $\delta_1 > 0$. Тогда

$$\int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{f(ax)}{ax} d(ax) -$$

$$- \int\limits_{\delta_1}^{+\infty} \frac{f(bx)}{bx} d(bx) = \int\limits_{a\delta_1}^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz - \int\limits_{b\delta_1}^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz =$$

$$= \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(z)}{z} dz = f(\xi) \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{dz}{z} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \ \ \xi \in (a\delta_1; b\delta_1).$$

Переходя к пределу при $\delta_1 \to +0$, получим равенство (5.2). ■

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I(a;b) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x} dx, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Решение: Так как $\sin^2 ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax)$, $\sin^2 bx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2bx)$, то

$$I(a;b) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos 2bx - \cos 2ax}{x} dx.$$

Функция $f(x) = \cos 2x$ удовлетворяет условиям теоремы 1 (пункт б)) и $f(0) = 1$. Применяя формулу (5.2), получим:

$$I(a;b) = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

Заметим, что если положить $f(x) = \sin^2 x$, то в этом случае не будут выполняться условия 2) теоремы 1 ни в пункте а), ни в пункте б).

Ответ: $I(a;b) = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin x-\sin\alpha x}{x^2}dx,\quad \alpha>0. \tag{5.3}$$

Решение: Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\sin x-\sin\alpha x}{x^2}, x\in(0;+\infty), \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\\ 0,\ x=0, \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2].\end{cases}$$

На множестве $G=\{(x,\alpha): 0\le x<+\infty,\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\}$, $0<\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, функция $\varphi(x,\alpha)$ непрерывна вместе со своей частной производной по параметру α:

$$\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\begin{cases}\dfrac{\sin x-x\cos\alpha x}{x^2}, x\in(0;+\infty), \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\\ 0,\ x=0, \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2].\end{cases}$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$. Действительно,

$$\int\limits_B^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx=\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos\alpha x}{x^2}dx=$$

$$=\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x+x\cos x-x\cos\alpha x}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{\sin x}{x}\bigg|_B^{+\infty}+\int\limits_B^{+\infty}\frac{\cos x-\cos\alpha x}{x}dx=\frac{\sin B}{B}+\left(\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\bigg|_B^{+\infty}\right)+$$

$$+\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx-\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x^2}dx=\frac{\sin\alpha B}{\alpha B}+\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx-\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x^2}dx.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx\right|\le\left|\frac{\sin\alpha B}{\alpha B}\right|+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx\right|+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x^2}dx\right|\le$$

$$\le\left|\frac{1}{\alpha_1 B}\right|+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right|+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{1}{\alpha_1 x^2}dx\right|\le\frac{1}{\alpha_1 B}+\frac{1}{B}+\frac{1}{\alpha_1 B}=\frac{1}{B}\left(1+\frac{2}{\alpha_1}\right).$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B_0 = \frac{2}{\varepsilon}\left(1 + \frac{2}{\alpha_1}\right) > 0$ такое, что $\forall B \geq B_0$ и $\forall \alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]$ выполняются неравенства

$$\left|\int_B^{+\infty} \frac{\partial \varphi(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx\right| \leq \frac{1}{B}\left(1 + \frac{2}{\alpha_1}\right) \leq \frac{1}{B_0}\left(1 + \frac{2}{\alpha_1}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Что и доказывает равномерную сходимость указанного несобственного интеграла.

Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \varphi(x,\alpha_1) dx$ сходится. Действительно,

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x,\alpha_1) dx = \int_0^1 \varphi(x,\alpha_1) dx + \int_1^{+\infty} \frac{\alpha_1 \sin x - \sin \alpha_1 x}{x^2} dx . \qquad (5.4)$$

Первый интеграл в правой части (5.4) является определенным, а второй интеграл сходится по признаку сравнения, так как

$$\left|\frac{\alpha_1 \sin x - \sin \alpha_1 x}{x^2}\right| \leq \frac{\alpha_1 + 1}{x^2}, \quad x \geq 1.$$

Выполнены условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру (теорема 3, тема 4). Применяя эту теорему, вычислим интеграл (5.3):

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos \alpha x}{x^2} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x + x\cos x - x\cos \alpha x}{x^2} dx = -\left.\frac{\sin x}{x}\right|_0^{+\infty} +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos \alpha x}{x} dx = 1 + \ln \alpha . \qquad (5.5)$$

Последний интеграл в цепочке равенств (5.5) можно рассматривать как интеграл Фруллани, в котором $f(x) = \cos x$, $a = 1$, $b = \alpha$. Интегрируя (5.5), получим:

$$I(\alpha) = \int (1 + \ln \alpha) d\alpha = \alpha \ln \alpha + C .$$

Так как $I(0) = 0$, то $C = 0$.

Ответ: $I(\alpha) = \alpha \ln \alpha$.

Пример 3. Используя интеграл Дирихле (4.6), вычислить интеграл

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x-\sin x}{x^3}dx.$$

Решение: Введем в рассмотрение функцию двух переменных

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3},\ x\in(0;+\infty),\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\\ \dfrac{\alpha^3}{6},\ x=0,\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2].\end{cases}$$

Функция $f(x,\alpha)$ и ее частная производная по параметру α

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\alpha x}{x^2},\ x\in(0;+\infty),\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2],\\ \dfrac{\alpha^2}{2},\ x=0,\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2].\end{cases}$$

непрерывны на множестве

$$G=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ \alpha_1\le\alpha\le\alpha_2\},\ 0<\alpha_1<\alpha_2<2.$$

Положим

$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3}dx.\tag{5.6}$$

Вычислим интеграл $J(\alpha)$ с помощью дифференцирования по параметру:

$$J'(\alpha)==\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx,\tag{5.7}$$

$$J''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.\tag{5.8}$$

В последнем равенстве использовался интеграл Дирихле (4.6). Прежде, чем дифференцировать по параметру под знаком интеграла, надо убедиться, что это действие правомерно, т.е. выполняются условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. В рассматриваемом примере следует показать, что интегралы $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ сходятся равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx$ сходится, а функции $f(x,\alpha)$, $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial^2 f(x,\alpha)}{\partial\alpha^2}$ непрерывны на множестве G. Предлагаем читателю самостоятельно проверить выполнение указанных условий.

Из (5.8) следует:

$$J'(\alpha)=\frac{\pi\alpha}{2}+C_1,\ J(\alpha)=\frac{\pi\alpha^2}{4}+C_1\alpha+C_2. \tag{5.9}$$

Покажем, что для несобственных интегралов (5.6), (5.7) выполняются условия теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру (теорема 1, тема 4) на отрезке $[0;\alpha_2]$. Функции $f(x,\alpha)$ и $\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны на множестве

$$G_1=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ 0\le\alpha\le\alpha_2\},\ 0<\alpha_2<2.$$

Для любого $B>0$

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3}dx\right|=\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\alpha}{x^2}dx-\int\limits_B^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^3}dx\right|\le\left|-\frac{\alpha}{x}\Big|_B^{+\infty}\right|+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx\right|=$$

$$=\frac{\alpha_2}{B}+\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx\right|=\frac{\alpha_2}{B}+\frac{1}{2B^2}.$$

.

Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists B_0=\max\left\{\frac{2\alpha_2+1}{\varepsilon};1\right\}>0$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall\alpha\in[0;\alpha_2]$ справедливы неравенства:

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\alpha x-\sin\alpha x}{x^3}dx\right|\le\frac{\alpha_2}{B}+\frac{1}{2B^2}\le\frac{\alpha_2}{B}+\frac{1}{2B}=\frac{2\alpha_2+1}{2B}\le\frac{2\alpha_2+1}{2B_0}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Следовательно, несобственный интеграл (5.6) сходится равномерно на отрезке $[0;\alpha_2]$.

Докажем равномерную сходимость несобственного интеграла (5.7) на отрезке, используя определение равномерно сходящегося на заданном множестве интеграла. Действительно, $\forall B>0$

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx\right|=\left|\int_B^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx-\int_B^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}dx\right|\le\left|-\frac{1}{x}\right|_B^{+\infty}\left|+\left|\int_B^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\right|=\right.$$

$$=\frac{1}{B}+\left|\int_B^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx\right|=\frac{1}{B}+\frac{1}{B}=\frac{2}{B}.$$

Тогда $\forall\varepsilon>0\quad\exists B_0=\frac{4}{\varepsilon}>0$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall\alpha\in[0;\alpha_2]$ справедливы неравенства:

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx\right|\le\frac{2}{B}\le\frac{2}{B_0}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Так как выполнены условия теоремы о непрерывности несобственных интегралов (5.6), (5.7) по параметру на отрезке $[0;\alpha_2]$, то можно выполнить предельный переход при $\alpha\to 0$ под знаком интеграла.

Так как $J'(0)=0$, то из (5.9) получим $C_1=0$. Тогда $J(\alpha)=\frac{\pi\alpha^2}{4}+C_2$. А так как $J(0)=0$, то из (5.9) следует, что $C_2=0$. Поэтому $J(\alpha)=\frac{\pi\alpha^2}{4}$. С учетом того, что $I=J(1)$, получим $I=\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $I=\frac{\pi}{4}$.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx. \tag{5.10}$$

Решение: Проверим выполнение условий теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

1) Функции $f(x,\alpha)=e^{-x^2}\cos 2\alpha x,\ \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=-2xe^{-x^2}\sin 2\alpha x$ непрерывны на множестве

$$G=\{(x,\alpha):\ 0\le x<+\infty,\ -\infty\le\alpha\le+\infty\}.$$

2) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} dx$ сходится равномерно по параметру α на всей вещественной оси согласно признаку Вейерштрасса, так как

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| = \left|2xe^{-x^2} \sin 2\alpha x\right| \le 2xe^{-x^2} = F(x)$$

и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx$ сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty} F(x)dx = \int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

3) Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha)dx$ сходится $\forall \alpha$, так как

$$|f(x,\alpha)| \le e^{-x^2} \text{ и } \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ (интеграл Эйлера-Пуассона).}$$

Применяя к интегралу (5.10) дифференцирование по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} \sin 2\alpha x dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin 2\alpha x \cdot de^{-x^2} =$$

$$= \sin 2\alpha x \cdot e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot 2\alpha \cos 2\alpha x dx = 0 - 2\alpha I(\alpha).$$

Для функции $I(\alpha)$ получили дифференциальное уравнение первого порядка:

$$I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}$. Так как $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ответ: $I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$.

Пример 5. Вычислить интегралы

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx\,,\quad K(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx\,. \qquad (5.11)$$

Решение: Пусть $\alpha>0$. Функции $f(x,\alpha)=\dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=-\dfrac{x\sin\alpha x}{1+x^2}$ непрерывны на множестве $G=\{(x,\alpha):\,0\le x<+\infty,\ \alpha_1\le\alpha<\alpha_2\},\ 0<\alpha_1<\alpha_2$. Покажем, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$. Действительно, $\forall B>0$

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{-x\sin\alpha x}{1+x^2}dx\right|=\left|\frac{1}{\alpha}\int\limits_B^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,d\cos\alpha x\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\alpha}\frac{x\cos\alpha x}{1+x^2}\right|_B^{+\infty}-\frac{1}{\alpha}\int\limits_B^{+\infty}\cos\alpha x\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}dx\Bigg|\le\frac{1}{\alpha}\left|0-\frac{B\cos\alpha B}{1+B^2}\right|+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\left|1-x^2\right|}{\left(1+x^2\right)^2}dx\right|\le\frac{1}{\alpha B}+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{1+x^2}\bigg|_B^{+\infty}\right)=\frac{1}{\alpha B}+\frac{1}{\alpha}\left|\left(0-\frac{B}{1+B^2}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{2}{\alpha B}\le\frac{2}{\alpha_1 B}\,.$$

Тогда $\forall\varepsilon>0\quad\exists B_0=\dfrac{4}{\alpha_1\varepsilon}>0$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$ справедливы неравенства:

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x}dx\right|\le\frac{2}{\alpha_1 B}\le\frac{2}{\alpha_1 B_0}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\,.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно по α на всей действительной оси по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2} = F(x), \quad \int\limits_0^{+\infty} F(x)dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Применяя к интегралу $I(\alpha)$ дифференцирование по параметру, получим:

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{-x\sin\alpha x}{1+x^2}dx. \tag{5.12}$$

При $\alpha > 0$ имеет место равенство (интеграл Дирихле (4.6)):

$$\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx. \tag{5.13}$$

Складывая (5.12) и (5.13), получим:

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x\left(1+x^2\right)}dx. \tag{5.14}$$

Покажем, что для интеграла в правой части (5.14) выполнены условия теоремы о дифференцировании по параметру. Функции

$$\varphi(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha x}{x\left(1+x^2\right)}, \ x \in (0;+\infty), \alpha \in [0;\alpha_2], \\ \alpha, \ x = 0, \ \alpha \in [0;\alpha_2]; \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha x}{1+x^2}, x \in (0;+\infty), \alpha \in [0;\alpha_2], \\ 1, \ x = 0, \ \alpha \in [0;\alpha_2] \end{cases}$$

непрерывны на множестве $G_1 = \{(x,\alpha): 0 \le x < +\infty, \ 0 \le \alpha \le \alpha_2\}$. Несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial\varphi(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ сходится равномерно по параметру α на всей вещественной оси по признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2} \ \forall x \ge 0, \ \forall\alpha, \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Несобственный интеграл $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x,0)dx$ сходится.

Дифференцируя (5.14) по α, получим:

$$I''(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=I(\alpha).$$

Итак, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $I(\alpha)$ четная непрерывная функция на всей вещественной оси, так как функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $G_2=\{(x,\alpha):\,0\le x<+\infty,\,-\infty<\alpha<+\infty\}$ и несобственный интеграл $\int_{0}^{+\infty}f(x,\alpha)dx$ сходится равномерно по α на всей действительной оси;

2) $I''(\alpha)=I(\alpha)$ при $\alpha>0$; (5.15)

3) $I(0)=\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$;

4) $|I(\alpha)|\le\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

Из дифференциального уравнения (5.15) следует, что

$$I(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}.$$

Из ограниченности функции $I(\alpha)$ (условие 4)) следует, что $C_1=0$. Из непрерывности функции $I(\alpha)$ (условие 1)) и условия 3) следует, что $C_2=\pi/2$. Следовательно,

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\ \ \alpha>0.$$

В силу четности функции $I(\alpha)$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|},\ \ \alpha\in(-\infty;+\infty).$$

Из соотношения (5.12) следует, что $I'(\alpha)=-K(\alpha)$, $\alpha>0$. Поэтому

$$K(\alpha)=-I'(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\ \ \alpha>0.$$

В силу нечетности $K(\alpha)$ получим:

$$K(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sgn}\alpha,\ \ \alpha\in(-\infty;+\infty).$$

Заметим, что применять теорему о дифференцировании по параметру в (5.12) нельзя, так как несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{-x\sin \alpha x}{1+x^2}\right)dx = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{-x^2\cos \alpha x}{1+x^2}\right)dx$ расходится.

Ответ: $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|},\ K(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\operatorname{sgn}\alpha,\ \ \alpha\in(-\infty;+\infty).$

Пример 6. (интегралы Френеля) Вычислить *интегралы Френеля*:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx\ , \quad I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx\ .$$

Решение: Выполним замену переменной $t = x^2$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\ .$$

При $t > 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}du = \frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{t}u\right)^2}d\left(\sqrt{t}u\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}. \qquad (5.16)$$

При получении последнего равенства был использован интеграл Эйлера-Пуассона (тема 4, пример 5). Из (5.16) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}du. \qquad (5.17)$$

Тогда

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sin t dt\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}du\ .$$

Перестановка интегралов здесь сразу бы привела к окончательному результату:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}du\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\sin t dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=e^{i\pi/4}}\frac{1}{1+z^4} + \operatorname*{res}_{z=e^{3i\pi/4}}\frac{1}{1+z^4}\right) =$$

$$=\sqrt{\pi}i\left(\lim_{z\to e^{i\pi/4}}\frac{1}{4z^3}+\lim_{z\to e^{3i\pi/4}}\frac{1}{4z^3}\right)=\sqrt{\pi}i\cdot\left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Однако, непосредственная проверка обоснования такой перестановки требует кропотливых преобразований и оценок. Воспользуемся множителем «сходимости» $e^{-\alpha^2 t}$. Введем в рассмотрение интеграл

$$J(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\ \alpha\neq 0\ .$$

С учетом равенства (5.17)

$$J(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\sin t dt\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du\ . \tag{5.18}$$

Покажем, что для функции $f(t,u)=e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t$ выполнены условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов.

1) Функция $f(t,u)$ непрерывна на множестве $G=\{(t,u):0\le t<+\infty,\ \ 0\le u\le+\infty\}$.

2) Несобственный интеграл $F(u)=\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;d]\subset[0;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как $|f(t,u)|\le e^{-\alpha^2 t}$ $\forall u\in[0;d],\ \forall t\in[0;+\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}dt$ сходится.

3) Несобственный интеграл $\Phi(t)=\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)du$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;b]\subset[0;+\infty)$. Действительно, $\forall B>0$

$$\left|\int_B^{+\infty} f(t,u)du\right|=\left|\int_B^{+\infty} e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t du\right|=e^{-\alpha^2 t}|\sin t|\left|\int_B^{+\infty} e^{-u^2 t}du\right|=$$

$$=e^{-\alpha^2 t}|\sin t|\left|\int_{B^2}^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{2\sqrt{p}}dp\right|\le|\sin t|\frac{1}{2B}\int_{B^2}^{+\infty}e^{-pt}dp=\frac{e^{-B^2 t}|\sin t|}{2Bt}\le\frac{1}{2B}.$$

Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=\dfrac{1}{\varepsilon}:\ \forall B\geq B_0$ и $\forall t\in[0;b]$ справедливы оценки:

$$\left|\int_B^{+\infty} f(t,u)du\right|\leq\frac{1}{2B}\leq\frac{1}{2B_0}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Это и означает, что несобственный интеграл $\Phi(t)$ сходится равномерно на любом отрезке $[0;b]\subset[0;+\infty)$.

4) Существует повторный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}du\int\limits_0^{+\infty}|f(t,u)|dt$:

$$\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}|f(t,u)|dt=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}\left|e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}\sin t\right|dt\leq$$

$$\leq\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-\left(\alpha^2+u^2\right)t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{du}{\alpha^2+u^2}=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{u}{\alpha}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\alpha}.$$

Выполнены условия теоремы о перестановке несобственных интегралов. Поэтому из (5.18) получим

$$J(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t\left(u^2+\alpha^2\right)}\sin t\,du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}e^{-t\left(u^2+\alpha^2\right)}\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2}.$$

Функция $\varphi(u,\alpha)=\dfrac{1}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2}$ непрерывна на множестве $G_1=\{(u,\alpha):0\leq u<+\infty,\ -\infty<\alpha<+\infty\}$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(u,\alpha)du$ сходится равномерно по параметру α на всей числовой прямой (например, по признаку Вейерштрасса). Поэтому функция $J(\alpha)$ непрерывна на всей действительной оси и $\lim\limits_{\alpha\to 0}J(\alpha)=J(0)$.

Тогда

$$I = J(0) = \lim_{\alpha\to 0} J(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{1+\left(u^2+\alpha^2\right)^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Такое же значение получается и для интеграла I_1 [4, с. 445-450].

Ответ: $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Используя интегралы Фруллани, Дирихле, Эйлера-Пуассона и дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

5.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x} dx, \ (a>0,\ b>0);$

5.2. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx, \ (a>0,\ b>0);$

5.3. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$;

5.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$;

5.5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x} dx$;

5.6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} dx$;

5.7. $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$;

5.8. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$;

5.9. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x} dx$;

5.10. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$;

5.11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x} dx$;

5.12. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\sin \alpha x - \sin 2\alpha x}{x^3} dx$;

5.13. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2} dx$;

5.14. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos \beta x - 2}{x^2} dx, \ (\alpha > \beta > 0)$;

5.15. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx, \ (\alpha > \beta > 0)$;

5.16. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx, \ (\alpha > \beta > 0)$;

5.17. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2} dx, \ (\alpha > 0)$;

5.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx, \ (\alpha > \beta > 0)$;

5.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^3 x \cos \alpha x}{x^3} dx, \ (\alpha > 0)$;

5.20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\alpha x^2 + 2\beta x\right)} dx, \ (\alpha > 0)$;

5.21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(ax^2 + 2bx\right) e^{-\left(\alpha x^2 + 2\beta x\right)} dx, \ (\alpha > 0)$;

5.22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \left(\alpha > 0,\ \beta > 0\right);$

5.23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx, \left(\alpha > 0\right);$

5.24. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right)} dx$;

5.25. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{1 + x^2} dx, \left(\alpha > 0\right);$

5.26. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx, \left(\alpha > 0\right);$

5.27. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\left(1 + x^2\right)^2} dx, \left(\alpha > 0\right).$

6. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Определение 1. Пусть функция $f\left(x\right)$ абсолютно интегрируема на всей действительной оси. Интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left[a(\omega)\cos x\omega + b(\omega)\sin x\omega\right] dx, \tag{6.1}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(u\right)\cos \omega u du, \tag{6.2}$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(u\right)\sin \omega u du, \tag{6.3}$$

называется *интегралом Фурье функции* f ▲

Подставляя (6.2), (6.3) в интеграл (6.1), преобразуем его следующим образом:

$$\int_0^{+\infty}[a(\omega)\cos x\omega + b(\omega)\sin x\omega]dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)[\cos u\omega \cos x\omega + \sin u\omega \sin x\omega]du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos[\omega(x-u)]du. \qquad (6.4)$$

Подобно тому, как сумма ряда Фурье функции при определенных условиях равна самой функции, интеграл Фурье также представляет собой исходную функцию.

Теорема 1. Пусть

1) функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке действительной оси и абсолютно интегрируема на всей действительно прямой;

2) в точке x функция f имеет либо конечную производную, либо конечные односторонние производные.

Тогда для указанной точки x справедливо равенство

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos[\omega(x-u)]du \ \blacksquare \qquad (6.5)$$

Правая часть равенства (6.5) представляет собой *интеграл Фурье* функции f, а сама формула (6.5) называется *формулой Фурье*.

Если в точке x функция f непрерывна, то равенство (6.5) примет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos[\omega(x-u)]du. \qquad (6.6)$$

В дальнейшем для простоты записи будем считать, что функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси, во всех ее точках непрерывна и имеет либо конечные производные, либо конечные односторонние производные. В этом случае согласно теореме 1 для всех точек действительной оси справедлива формула Фурье (6.6).

Заметим, что подынтегральная функция в (6.6) является четной относительно переменной ω. Поэтому равенство (6.6) можно переписать следующим образом:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos[\omega(x-u)]du. \qquad (6.7)$$

Так как $|f(u)\sin[\omega(x-u)]|\le|f(u)|$ и функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси, то согласно признаку Вейерштрасса несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin[\omega(x-u)]du$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$, кроме того, является непрерывной функцией переменной ω на $\mathbb{R}$. Поэтому для любого $\eta>0$ существует интеграл

$$\int\limits_{-\eta}^{\eta}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin[\omega(x-u)]du=0. \qquad (6.8)$$

В силу нечетности подынтегральной функции по ω интеграл (6.8) равен нулю. Однако при сделанных предположениях относительно функции f нельзя гарантировать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin[\omega(x-u)]du. \qquad (6.9)$$

Определение 2. Пусть функция φ интегрируема на любом конечном отрезке действительной оси. Если существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx,$$

то он называется *главным значением интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ и обозначается буквами v.p. Таким образом,

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_{-\eta}^{\eta}\varphi(x)dx\ \blacktriangle$$

Отличие этого определения от обычного определения несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx$ (тема 1) состоит в том, что в обычном смысле несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ определяется как предел интегралов $\int\limits_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx$ при независимом стремлении $\xi \to -\infty,\ \eta \to +\infty$. Здесь же рассматривается частный случай, когда $\xi = -\eta,\ \eta \to +\infty$. Если для некоторой функции существует несобственный интеграл, то у этой функции существует и главное значение интеграла, которое совпадает с несобственным. Обратное неверно. У функции может существовать главное значение интеграла, а несобственный интеграл при этом может быть расходящимся. Например, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$ не существует как несобственный, однако, он существует в смысле главного значения, которое равно нулю.

Из определения главного значения интеграла и равенства (6.8) следует, что

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin[\omega(x-u)] du = 0. \tag{6.10}$$

Умножив обе части равенства (6.10) на $\dfrac{i}{2\pi}$ и сложив с равенством (6.7), получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{i\omega(x-u)} du \right), \tag{6.11}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (6.11) называется *комплексной записью интеграла Фурье*.

Формулу (6.11) можно переписать в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right). \tag{6.12}$$

Далее равенство (6.12) можно представить в виде композиции двух отображений:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\omega u} du, \tag{6.13}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right). \tag{6.14}$$

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$, тогда функция $F(\omega)$, определяемая формулой (6.13), называется *преобразованием Фурье функции* $f(x)$. Если необходимо подчеркнуть, что рассматривается преобразование Фурье функции f, то для преобразования Фурье используется следующее обозначение: $F[f]$▲

Следует отметить, что, хотя преобразование Фурье определено для абсолютно интегрируемой функции, ее преобразование Фурье совсем не обязательно будет абсолютно интегрируемой функцией.

Пример 1. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Решение: Пусть $\omega\neq 0$, тогда

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-i\omega x}}{(-i\omega)}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{(-i\omega)}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}.$$

Если $\omega=0$, то

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом,

$$F[f]=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{\sin\omega}{\omega}, & \omega\neq 0\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}, & \omega=0\end{cases} \tag{6.15}$$

Как известно, функция (6.15) не является абсолютно интегрируемой на $(-\infty;+\infty)$.

Итак, если функция f абсолютно интегрируема на всей действительной оси, во всех ее точках непрерывна и имеет либо конечные производные, либо конечные односторонние производные, то для нее справедливо равенство (6.12), которое равносильно композиции отображений (6.13), (6.14). Формула (6.14) называется формулой обращения для преобразования Фурье.

Надо отчетливо понимать разницу между формулами (6.13) и (6.14). Первая из них является не формулой, а определением, в котором несобственный интеграл существует в обычном смысле, а вторая – является формулой, которая доказывается при некоторых дополнительных условиях на $f(x)$ (например, $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и дополнительно является непрерывной на $(-\infty;+\infty)$). При этом интеграл в формуле (6.14) понимается в смысле главного значения.

Если функция $f(x)$ обладает определенной четностью, то возможна модификация формул (6.13), (6.14). Формулу Фурье (6.7) перепишем в виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)[\cos\omega x\cos\omega u+\sin\omega x\sin\omega u]du\,. \quad (6.16)$$

Если $f(x)$ − четная функция, то из (6.16) получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos\omega x\cos\omega u du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos\omega x d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos\omega u du\,. \quad (6.17)$$

Если $f(x)$ − нечетная функция, то из (6.16) получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\sin\omega x\sin\omega u du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int_{0}^{+\infty}f(u)\sin\omega u du\,. \quad (6.18)$$

Формула (6.17) является формулой Фурье для четной непрерывной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1, а (6.18) – для нечетной непрерывной функции, удовлетворяющей условиям теоремы 1.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютна интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$. Тогда ее можно непрерывно продолжить четным образом на промежуток $(-\infty;0)$ по закону $f(-x)=f(x)$, а если $f(0)=0$, то и нечетным образом по закону $f(-x)=-f(x)$. Тогда при выполнении еще и условий теоремы 1 для одной и той же функции $f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$ выполняются равенства (6.17) и (6.18).

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$. Тогда функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\cos\omega u du$$

называется *косинус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$ и обозначается $F_c(\omega)$ или $F_c[f]$, а функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(u)\sin\omega u du$$

называется *синус-преобразованием Фурье* функции $f(x)$ и обозначается $F_s(\omega)$ или $F_s[f]$▲

Для четной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $F[f]=F_c[f]$, а для нечетной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $F[f]=-iF_s[f]$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, абсолютно интегрируема на промежутке $[0;+\infty)$ и в каждой точке этого промежутка имеет либо конечную производную, либо конечные односторонние производные. Тогда имеет место формула обращения для косинус-преобразования Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega\ ,\ \ x\in[0;+\infty),$$

а если $f(0)=0$, то имеет место и формула обращения для синус-преобразования Фурье:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega\ ,\ \ x\in[0;+\infty)\blacksquare$$

Отметим, что если $f(0)\neq 0$, то формула обращения для синус-преобразования Фурье имеет место для $x\in(0;+\infty)$.

Пример 2. Используя косинус и синус преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-\alpha x},\ \alpha>0,\ x\geq 0$, вычислить интегралы Лапласа:

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x d\omega}{\alpha^2+\omega^2},\ \ I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x d\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Решение: Согласно определению косинус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-\alpha x}$ имеем:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}\cos\omega u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Согласно определению синус-преобразования Фурье для функции $f(x)=e^{-\alpha x}$ имеем:

$$F_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}\sin\omega u du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Используя утверждение теоремы 2, получим:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha\cos\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega\ ,\ x\in[0;+\infty)$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin\omega x}{\alpha^2+\omega^2}d\omega\ ,\ x\in(0;+\infty).$$

Откуда следует, что

$$I_1=\frac{\pi}{2\alpha}f(x)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha x},\ x\ge 0;\ \ I_2=\frac{\pi}{2}f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha x},\ x>0.$$

Учитывая свойства четности по x интегралов $I_1,\ I_2$, можно выписать значения этих интегралов для любых значений x.

Ответ: $I_1=\dfrac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|x|},\ I_2=\dfrac{\pi}{2}e^{-\alpha|x|}\operatorname{sgn}x,\ x\in(-\infty;+\infty).$

Свойства преобразования Фурье

1) *Линейность.* Если существует преобразование Фурье для функций f и g, то для любых постоянных α и β справедливо равенство

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g].$$

2) *Непрерывность.* Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то ее преобразование Фурье $F(\omega)$ − непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, причем $\lim\limits_{\omega\to+\infty}F(\omega)=\lim\limits_{\omega\to-\infty}F(\omega)=0$.

3) *Преобразование Фурье производной.* Если функция f и ее производные до порядка n включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F\left[f^{(k)}\right]=(i\omega)^k F[f],\ k=1,2,\ldots,n.$$

4) *Производная преобразования Фурье*. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x), xf(x), x^2 f(x),\ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы

на $\mathbb{R}$, то функция $F(\omega)$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до порядка n включительно, причем

$$F^{(k)}[f]=(-i)^k F\left[x^k f\right],\ k=1,2,...,n.$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ x\in(-1;0),\\ 1,\ x\in(0;1),\\ 0, x=0,\ |x|>1.\end{cases}$$

Решение: Функция $f(x)$ является нечетной. Поэтому для интеграла Фурье справедлива формула (6.18):

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int\limits_0^{+\infty}f(u)\sin\omega u du=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\omega x d\omega\int\limits_0^{1}\sin\omega u du=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\omega x\left[\left.\frac{-\cos\omega u}{\omega}\right|_0^1\right]d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega.$$

Таким образом, в точках непрерывности функции $f(x)$, т.е. при $x\neq 0;\pm 1$, имеет место равенство:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega,\ x\neq 0,\ x\neq\pm 1. \qquad (6.19)$$

В точках разрыва левую часть равенства (6.19) следует заменить на полу сумму односторонних пределов:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega. \qquad (6.20)$$

Используя равенство (6.20), можно получить значения несобственных интегралов. Например, для $x=1$ из (6.20) получим:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{4}.$$

Полагая в (6.20) $x = 1/2$, получим

$$1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)}{\omega}d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)}{2\omega}d\omega = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^3\frac{\omega}{2}}{\omega}d\omega = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 4. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Решение: Пусть $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Для этой функции, учитывая значения интегралов Лапласа в примере 2, получим:

$$F[f_1] = F_c[f_1] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f_1(x)\cos\omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x}{1+x^2}dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{-|\omega|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-|\omega|}.$$

Используя свойство 3, получим:

$$F[f] = F\left[f_1^{(3)}\right] = (i\omega)^3 F[f_1] = (i\omega)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}.$$

Ответ: $(i\omega)^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|\omega|}$.

Пример 5. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x^2 e^{-|x|}$.

Решение: Введем в рассмотрение функцию $f_1(x) = e^{-|x|}$. Тогда $f(x) = x^2 f_1(x)$. Согласно свойству 4 для преобразования Фурье

$$F[f] = F\left[x^2 f_1\right] = i^2 F''[f_1] = -F''[f_1].$$

В силу четности функции $f_1(x)$

$$F[f_1] = F_c[f_1] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos\omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\omega^2}.$$

Тогда

$$F'[f_1] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2},\ F''[f_1] = \frac{2\sqrt{2}\left(3\omega^2 - 1\right)}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^3}.$$

Ответ: $F[f] = \dfrac{2\sqrt{2}\left(1-3\omega^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^3}$.

Задачи для самостоятельного решения

Представить функцию интегралом Фурье:

6.1. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le \tau, \\ 0, & |x| > \tau, \ \tau > 0. \end{cases}$

6.2. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a}, & |x| \le a, \\ 0, & |x| > a, \ a > 0. \end{cases}$

6.3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b),\ b > a$.

6.4. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

6.5. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$

6.6. $f(x) = e^{-\alpha|x|}\sin\beta x,\ \alpha > 0$.

6.7. $f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\ \alpha > 0$.

6.8. $f(x) = e^{-x^2}$.

6.9. $f(x) = xe^{-x^2}$.

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$:

6.10. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

6.11. $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

6.12. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le\pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

6.13. $f(x)=xe^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$.

6.14. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-|x|}\right)$.

6.15. $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left(x^2e^{-|x|}\right)$.

7. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Определение 1. Интеграл

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\ (p>0) \tag{7.1}$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровым интегралом второго рода*, а интеграл

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ (p>0,\ q>0) \tag{7.2}$$

называется *бета-функцией* или *эйлеровым интегралом первого рода* ▲

Свойства эйлеровых интегралов

1) $\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. (7.3)

2) *Формула понижения*:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\ p>0. \tag{7.4}$$

3) $\Gamma(n+1)=n!,\ \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\ n\in N$. (7.5)

4) *Формула дополнения*:

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\ 0<p<1. \tag{7.6}$$

5) $B(p,q)=B(q,p),\ (p>0,\ q>0)$ (7.7)

6) $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ (p>0,\ q>1)$,

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q),\ (p>1,\ q>0). \qquad (7.8)$$

7) *Связь между бета и гамма функциями:*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ (p>0,\ q>0). \qquad (7.9)$$

8) $B(p,1-p)=\dfrac{\pi}{\sin \pi p},\ 0<p<1.$ (7.10)

Пример 1. Доказать формулы (7.3)-(7.5).

Решение: Согласно определению (7.1)

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} x^0 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1;$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx=\left[x=t^2\right]=2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, $\forall p>0$ получим:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^p d\left(-e^{-x}\right)=$$

$$=-e^{-x}x^p\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} px^{p-1}e^{-x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}+p\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

Формула (7.5) является прямым следствием формул (7.3), (7.4). Действительно, $\forall n\in N$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\Gamma((n-1)+1)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=$$
$$=n(n-1)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot 1=n!;$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\cdots=$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\ \blacksquare$$

Пример 2. Найти значение выражения $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)$.

Решение: Используя формулы понижения и дополнения, получим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{11}{6}\right)=\frac{11}{6}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{11}{6}\cdot\Gamma\left(1+\frac{5}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{11}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{55}{36}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{55}{36}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/6)}=\frac{55\pi}{18}.$$

Ответ: $\frac{55\pi}{18}$.

Пример 3. Доказать, что гамма-функция непрерывна и бесконечно дифференцируема в области $p>0$. Для ее k-ой производной справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx\,, \qquad (7.11)$$

причем интеграл в правой части (7.11) сходится равномерно на множестве $[p_0;+\infty)$, $p_0>0$.

Решение: Интеграл в правой части равенства (7.11) представим в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx,$$

$$k\in N. \qquad (7.12)$$

Рассмотрим интеграл $I_k=\int_0^1 x^{p_0-1}\cdot\ln^k xdx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$I_k=\int_0^1 x^{p_0-1}\cdot\ln^k xdx=\frac{1}{p_0}\int_0^1\ln^k xdx^{p_0}=\left.\frac{x^{p_0}\ln^k x}{p_0}\right|_0^{+\infty}-$$

$$=-\frac{k}{p_0}\int_0^1 x^{p_0}\cdot\ln^{k-1}x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=-\frac{k}{p_0}I_{k-1}.$$

Используя полученное рекуррентное соотношение, вычислим интеграл I_k:

$$I_k=-\frac{k}{p_0}I_{k-1}=-\frac{k}{p_0}\left(-\frac{k-1}{p_0}\right)I_{k-2}=\ldots=\frac{(-1)^k k!}{p_0^k}I_0=$$

$$=\frac{(-1)^k k!}{p_0^k}\cdot\int\limits_0^1 x^{p_0-1}dx=\frac{(-1)^k k!}{p_0^{k+1}}.$$

Так как

$$\left|x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}\right|\le\left|x^{p_0-1}\cdot\ln^k x\right|=x^{p_0-1}(-1)^k\ln^k x$$

$$\forall x\in(0;1),\ \forall p\ge p_0,$$

и интеграл I_k сходится, то согласно признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx$ сходится абсолютно и равномерно на промежутке $[p_0;+\infty),\ p_0>0$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-1}\cdot e^{-x/2}=0$, то $\exists M>0:\ 0<x^{p-1}\cdot e^{-x/2}\le M$ $\forall x\ge 1$, $\forall p>0$. Следовательно,

$$0<x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}\le M\cdot\ln^k x\cdot e^{-x/2}<M\cdot x^k\cdot e^{-x/2}.$$

А так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}M\cdot x^k\cdot e^{-x/2}dx$ сходится, то второй интеграл в правой части равенства (7.12) сходится абсолютно и равномерно на промежутке $p>0$.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что несобственный интеграл (7.11) сходится равномерно на промежутке $[p_0;+\infty),\ p_0>0$ для любых целых неотрицательных значений k. Поэтому выполнены условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Применяя правило Лейбница, получим:

$$\Gamma'(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx,$$

$$\Gamma''(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^2 x\cdot e^{-x}dx,\ldots\blacksquare \qquad (7.13)$$

Так как $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ и функция $\Gamma(p)$ дифференцируема при $p>0$, то согласно теореме Ролля на интервале $(1;2)$ существует точка p_*

такая, что $\Gamma'(p_*)=0$. А так как в силу (7.13) $\Gamma''(p_*)>0$, то p_* является точкой локального минимума. Приближенные значения для p_* и $\Gamma(p_*)$ имеют вид: $p_* = 1{,}4616,\ \Gamma(p_*) = 0{,}8856$.

Используя формулу понижения (7.4), можно формально определить функцию $\Gamma(p)$ для нецелых отрицательных значений p. Например,

$$\Gamma(-1/2)=\frac{\Gamma(1/2)}{-1/2}=-2\sqrt{\pi},\ \Gamma(-3/2)=\frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}.$$

График функции $\Gamma(p)$ представлен на рис. 7.1.

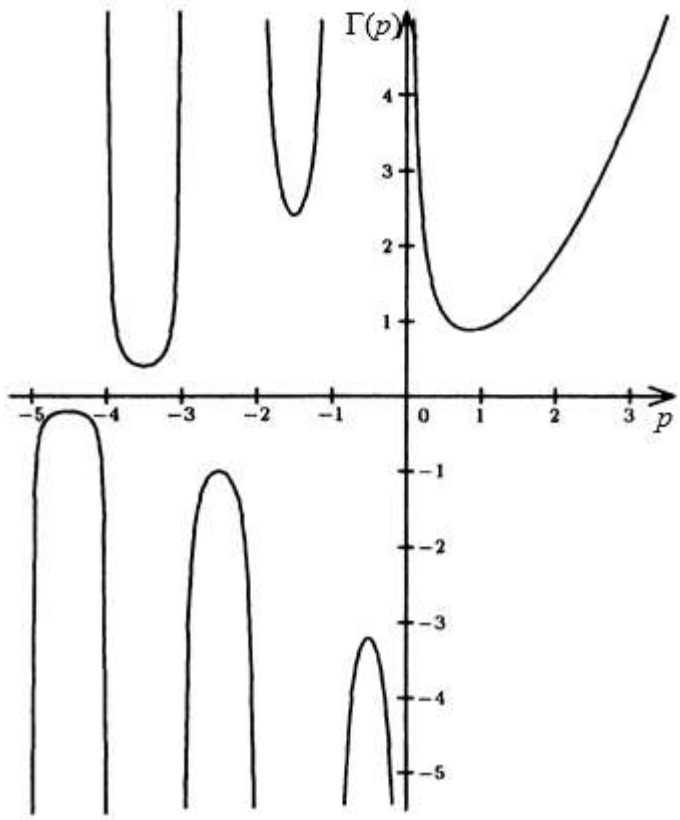

Рисунок 7.1

Пример 4. Доказать формулу понижения (7.8) для бета-функции.
Решение: При $q>1,\ p>0$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 (1-x)^{q-1}d\left(\frac{x^p}{p}\right)=$$

$$=\left.\frac{(1-x)^{q-1}x^p}{p}\right|_0^1+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(q-1)}{p}\int_0^1\left(x^p-x^{p-1}+x^{p-1}\right)(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(x-1)(1-x)^{q-2}dx+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(1-q)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=-\frac{q-1}{p}B(p,q)+\frac{q-1}{p}B(p,q-1).$$

Следовательно,

$$B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ p>0,\ q>1$$

Аналогично доказывается вторая из формул понижения (7.8) ■

Пример 5. Доказать формулу (7.9), связывающую бета и гамма функции.

Решение: В интеграле (7.2) выполним замену переменной $x=\dfrac{t}{t+1}$.

Тогда $t=\dfrac{x}{x-1}$, $1-x=\dfrac{1}{t+1}$, $dx=\dfrac{dt}{(t+1)^2}$ и

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt,\ \left(p>0,\ q>0\right). \qquad (7.14)$$

С учетом представления бета-функции формулой (7.14) преобразуем произведение $B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$:

$$B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt\cdot\int_0^{+\infty}x^{p+q-1}e^{-x}dx=\left[x=(t+1)u\right]=$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}\, dt \cdot \int\limits_0^{+\infty} (t+1)^{p+q-1} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} (t+1) du =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int\limits_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du. \qquad (7.15)$$

Положим $\Phi(t,\xi) = \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du$. Так как $t^{p-1}\Phi(t,\xi) < t^{p-1}\Phi(t,0)$ при $t > 0$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,0)dt$ сходится, так как равен $B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$, то несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt$ сходится равномерно по параметру ξ на любом отрезке $[0;d]$, $d > 0$. Поэтому $\lim\limits_{\xi\to+0} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,0)dt,$ и обосновано последнее равенство в цепочке равенств (7.15).

Воспользуемся теоремой о перестановке двух несобственных интегралов. Проверим выполнение условий теоремы. Рассмотрим функцию

$$f(t,u) = t^{p-1} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u},\ t \ge 0,\ u \ge \xi,\ p \ge 1, q \ge 1.$$

1) На множестве $G = \{(t,u) : t \ge 0,\ u \ge \xi\}$ функция $f(t,u)$ непрерывна.

2) На любом конечном отрезке $t \in [0;a]$ несобственный интеграл $\int\limits_\xi^{+\infty} f(t,u)du$ сходится равномерно, так как $|f(t,u)| \le a^{p-1} u^{p+q-1} e^{-u}$ и

$$\int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du < \int\limits_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du = \Gamma(p+q).$$

3) На любом конечном отрезке $u \in [\xi; b]$ несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)dt$ сходится равномерно, так как $|f(t,u)| \le t^{p-1} b^{p+q-1} e^{-\xi t}$ и

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\xi t} dt = \frac{1}{\xi^p} \Gamma(p).$$

4) Сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} |f(t,u)| du$, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} |f(t,u)| du = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} f(t,u) du = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} \Phi(t,\xi) dt.$$

Переставляя в (7.15) интегралы, получим:

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du = \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-tu} dt =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \int\limits_0^{+\infty} \frac{(tu)^{p-1} e^{-tu}}{u^p} d(tu) =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{q-1} e^{-u} du \cdot \Gamma(p) = \Gamma(q) \cdot \Gamma(p). \qquad (7.16)$$

Из (7.15) и (7.16) следует равенство (7.9), которое пока доказано для $p \ge 1,\ q \ge 1$. Теперь согласно доказанному при $p > 0,\ q > 0$

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} \,. \qquad (7.17)$$

Используя формулы понижения (7.8), (7.4) в левой и правой частях равенства (7.17), получим

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \frac{q}{p+q+1} \cdot \frac{p}{p+q} B(p,q),$$

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{pq\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}.$$

Откуда и следует равенство (7.9) ■

Пример 6. Вычислить интегралы

$$I(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx,\ \ 0<p<1; \tag{7.18}$$

$$I_1(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx,\ 0<p<1; \tag{7.19}$$

$$I_2(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx,\ \ 0<p<1\cdot \tag{7.20}$$

Решение: В интеграле (7.18) выполним замену переменной $t=\dfrac{1}{1+x}$.

Тогда $t=\dfrac{x}{x-1}, x=\dfrac{1-t}{t},\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ и

$$I(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int\limits_0^{1}t^{-p}(1-t)^{p-1}dt=B(1-p,p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}\ .$$

Так как $I_1(p)=I'(p),\ I_2(p)=I''(p)$, то

$$I_1(p)=-\frac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p},\ \ I_2(p)=\frac{\pi^3\left(1+\cos^2\pi p\right)}{\sin^3\pi p}\ \blacksquare$$

Пример 7. Вычислить интеграл $I=\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}dx$.

Решение: Выполним замену переменной $t=x-1$. Тогда

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{t^2+5t+4}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{(t+1)(t+4)}dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{\sqrt{t}(t+1)(t+4)}dt=\frac{4}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+4)}dt-\frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+1)}dt.$$

При получении последнего выражения было использовано разложение рациональной дроби в сумму простейших:

$$\frac{t}{(t+1)(t+4)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t+4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1}\,.$$

Далее воспользуемся полученным в примере 6 значениями для интегралов (7.18), (7.19):

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+1)}dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{(1/2)-1}\ln t}{t+1}dt=I_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2\cos(\pi/2)}{\sin^2(\pi/2)}=0\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+4)}dt = [t=4u] = \int_0^{+\infty} \frac{\ln 4u}{2\sqrt{u}(4u+4)}d(4u) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\ln 4 + \ln u}{2\sqrt{u}(u+1)}du = \frac{\ln 4}{2}\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(u+1)} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{\sqrt{u}(u+1)}du =$$

$$= \frac{\ln 4}{2} I\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} I_1\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} + 0 = \pi \ln 2 .$$

Тогда

$$I = \frac{4}{3}\cdot \pi \ln 2 - \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{4\pi \ln 2}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\pi \ln 2}{3}$.

Пример 8. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение: С помощью дробно-линейной подстановки $t = \frac{2(1-x)}{x+2}$ данный интеграл приводится к виду бета-функции:

$$I = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)^{-1/2}dt = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{24}.$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{6}}{24}$.

Задачи для самостоятельного решения

С помощью эйлеровых интегралов вычислить следующие интегралы:

7.1. $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$; **7.2.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \ (a>0)$;

7.3. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$; **7.4.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

7.5. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$; **7.6.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx$;

7.7. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx$; **7.8.** $\int\limits_{0}^{1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$;

7.9. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}$; **7.10.** $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$;

7.11. $\int\limits_{0}^{1} x\cdot\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$; **7.12** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{\left(1+x^3\right)^2}$;

7.13. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^4 x\cdot\cos^6 x\,dx$; **7.14.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}dx}{(1+x)^{\beta}},\ 0<\alpha<\beta$;

7.15. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{3\alpha}dx}{\sqrt[3]{1-x^3}},\ \left(\alpha>-\frac{1}{3}\right)$; **7.16.** $\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin^p xdx}{1+\cos x},\ p>1$;

7.17. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{p-1}e^{-\alpha x}dx,\ p>0,\ \alpha>0$;

7.18. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x^{\beta}}\,dx,\ \alpha>-1,\ \beta>0$;

7.19. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{-n-1}e^{-\frac{\alpha}{2x^2}}\,dx,\ \alpha>0,\ n\in N$;

7.20. $\int\limits_{0}^{1}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} x^{\beta-1}dx,\ \alpha>0,\ \beta>0$;

7.21. $\int\limits_{1}^{2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,\frac{dx}{(x+3)^2}$;

7.22. $\int\limits_0^1 \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\,\dfrac{dx}{(x+2)^2}$;

7.23. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x^2-x^3}}$;

7.24. $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{(2-x)\cdot\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$;

7.25. $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3}\,dx$;

7.26. $\int\limits_0^1 \dfrac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3}\,dx$;

7.27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{xe^{x/2}}{e^{2x}+1}\,dx$;

7.28. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$;

7.29. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\left(x^2+a^2\right)}\,dx,\ a>0$;

7.30. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{\alpha}\ln x}{x^2+1}\,dx,\ |\alpha|<1$;

7.31. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(x+2)}\,dx$;

7.32. $\int\limits_{-1}^{1} \ln\dfrac{1+x}{1-x}\cdot\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$;

7.33. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}\,dx$;

7.34. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x-2}}\,dx$.

8. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение 1. *Эллиптическими интегралами первого и второго рода в форме Лежандра* называются следующие параметрические интегралы:

$$F(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \tag{8.1}$$

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt,\ 0\le\varphi\le\pi/2,\ 0<k<1. \tag{8.2}$$

Если $\varphi=\pi/2$, то эллиптические интегралы называются *полными.* Для полных эллиптических интегралов первого и второго рода используются следующие обозначения:

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}, \tag{8.3}$$

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt,\quad 0<k<1\blacktriangle \tag{8.4}$$

При $k\in(0;1)$ подынтегральные функции в формулах (8.1)-(8.4) не имеют особых точек.

Рассмотрим некоторые задачи, приводящие к эллиптическим интегралам.

Пример 1. **(Математический маятник)** Найти период колебаний математического маятника.

Решение: Пусть материальная точка массы m подвешена на нерастяжимой нити длины l. Выведем маятник из положения равновесия, отклонив его на угол ϑ_0, $0<\vartheta_0<\pi/2$, и предоставим самому себе, не сообщая начальной скорости. В начальный момент времени кинетическая энергия маятника равна нулю ($T_0=0$), а в момент времени t

$$T=\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2=\frac{1}{2}m\left(l\dot{\vartheta}\right)^2=\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2.$$

Изменение потенциальной энергии маятника за время t равно

$$\Delta\Pi=mgl\left(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0\right),$$

где g − ускорение свободного падения.

Согласно закону сохранения механической энергии $T - T_0 = \Delta\Pi$. Откуда получаем:

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 = mgl(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0},$$

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}},$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}}. \qquad (8.5)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (8.5):

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Далее положим $k = \sin\frac{\vartheta_0}{2}\,(0 < k < 1)$ и введем новую переменную интегрирования φ согласно соотношению $\sin\frac{\vartheta}{2} = k\sin\varphi$. Тогда

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}d\vartheta = k\cos\varphi d\varphi \Rightarrow d\vartheta = \frac{2k\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0} = \sqrt{2\left(k^2 - k^2\sin^2\varphi\right)} = k\sqrt{2}\cos\varphi,$$

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}} = \frac{\sqrt{2}d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

При изменении угла ϑ от нуля до ϑ_0 угол φ меняется от нуля до $\pi/2$. Так как период колебаний математического маятника T равен четырехкратному времени прохождения угла ϑ по отрезку $[0;\vartheta_0]$, то

$$\mathrm{T} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta - \cos\vartheta_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{2}d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k).$$

Ответ: $\mathrm{T} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(k),\ k = \sin\frac{\vartheta_0}{2}$.

Пример 2. **(Длина дуги эллипса)** Найти длину дуги эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 0<b<a. \tag{8.6}$$

Решение: Представим уравнение эллипса (8.6) в параметрической форме:

$$x=a\sin t,\ y=b\cos t,\ 0\le t\le 2\pi.$$

При указанной параметризации начальной точкой является точка на оси Oy с координатами $(0;b)$, а обход эллипса происходит по часовой стрелке.

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt=$$
$$=\sqrt{a^2+\left(b^2-a^2\right)\sin^2 t}dt=a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt,\ \varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}\Big/a.$$

Параметр ε называется эксцентриситетом эллипса.

Длина дуги эллипса с началом в точке $(0;b)$ и концом в точке $(a\sin t;\ b\cos t)$ равна

$$S(t)=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt=aE(t,\varepsilon)\ .$$

Для длины дуги всего эллипса получим:

$$L=4S(\pi/2)=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}dt=4aE(\varepsilon)\ .$$

Ответ: $L=4aE(\varepsilon),\ \varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}\Big/a$.

Получим представление полных эллиптических интегралов в виде степенных рядов, позволяющее при малых значениях параметра k выполнять приближенные вычисления.

Пример 3. Доказать справедливость равенств:

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right], \tag{8.7}$$

$$E(k)=\frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right]. \tag{8.8}$$

Решение: При $x\in(0;1)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n.$$

Откуда следует

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}t,\ 0<k<1. \tag{8.9}$$

Ряд (8.9) мажорируется сходящимся числовым рядом $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$, следовательно, сходится равномерно по параметру t на всей числовой оси и его можно почленно интегрировать. Тогда

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}t\right)dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt. \tag{8.10}$$

Выполним замену переменной $u=\sin^2 t$. Тогда $du=2\sin t\cos t dt$, $dt=\dfrac{du}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}}$,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt=\int_0^1\frac{u^n du}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}}=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{n-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(n+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2n!}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{8.11}$$

Подставляя (8.11) в (8.10), получим равенство (8.7). Аналогично доказывается равенство (8.8).

Пример 4. Доказать, что

$$E'(k)=\frac{E(k)-K(k)}{k},\ K'(k)=\frac{E(k)}{k\left(1-k^2\right)}-\frac{K(k)}{k},\ 0<k<1 \tag{8.12}$$

Решение: В прямоугольнике $G=\{(t,k):\ 0\le t\le\pi/2,\ \alpha\le k\le\beta\}$, $0<\alpha<\beta<1$, функции $f(t,k)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$, $g(t,k)=\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ непрерывны и имеют непрерывные производные любого порядка. Поэтому выполняются условия теоремы о дифференцировании собственного интеграла по параметру. Дифференцируя под знаком интеграла, для функции $E(k)$ получим:

$$E'(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial k}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\pi/2}\frac{-k\sin^2 t\,dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2 t-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt=$$

$$=\frac{1}{k}\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}dt\right)=\frac{1}{k}\left(E(k)-K(k)\right).$$

Докажем вторую из формул (8.12). Продифференцируем по параметру интеграл (8.3):

$$K'(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\right)dt=\int_0^{\pi/2}\frac{k\sin^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\sin^2 t-1+1}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}dt=$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{1}{k}K(k)+\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}. \quad (8.13)$$

Справедливы равенства:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}=\frac{1}{k}K'(k), \quad (8.14)$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{k\cos^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{3/2}}=\int_0^{\pi/2}\cos t\,d\left(\frac{k\sin t}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{1/2}}\right)=$$

$$=\left.\frac{k\cos t\sin t}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{1/2}}\right|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\frac{k\sin^2 t\,dt}{\left(1-k^2\sin^2 t\right)^{1/2}}=$$

$$= 0 + \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2} \frac{k^2 \sin^2 t - 1 + 1}{\left(1 - k^2 \sin^2 t\right)^{1/2}} dt = \frac{1}{k}\left(-E(k) + K(k)\right). \qquad (8.15)$$

Подставляя (8.14), (8.15) в (8.13), получим:

$$K'(k) = -\frac{1}{k}K(k) + \frac{1}{k^2}K'(k) - \frac{1}{k^3}E(k) + \frac{1}{k^3}K(k) \Rightarrow$$

$$K'(k)\left(\frac{1}{k^2} - 1\right) = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^3}\right)K(k) + \frac{1}{k^3}E(k) \Rightarrow$$

$$K'(k) = \frac{E(k)}{k\left(1 - k^2\right)} - \frac{K(k)}{k}.$$

Пример 5. Выразить через полные эллиптические интегралы интеграл

$$\int_0^b \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \; a > b > 0.$$

Решение: Выполним замену переменной $x = b\sin t$ и положим $k = b/a$ $(0 < k < 1)$. Тогда

$$\int_0^b \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 t}}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 t}} b\cos t dt = \frac{b^2}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt =$$

$$= \frac{b^2}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt = \frac{b^2}{a}\left\{\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k^2}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - k^2 \sin^2 t - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} dt \right\} = \frac{b^2}{a}\left\{K(k) + \frac{1}{k^2}E(k) - \frac{1}{k^2}K(k)\right\} =$$

$$= \frac{b^2}{a}\left\{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)K\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{a^2}{b^2}E\left(\frac{b}{a}\right)\right\} = \frac{b^2 - a^2}{a}K\left(\frac{b}{a}\right) + aE\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ответ: $\dfrac{b^2 - a^2}{a}K\left(\dfrac{b}{a}\right) + aE\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать справедливость следующих соотношений для полных эллиптических интегралов:

8.1. $E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$,

8.2. $\int\limits_0^k tK(t)dt=E(k)-\left(1-k^2\right)K(k)$,

8.3. $\int\limits_0^k tE(t)dt=\frac{1}{3}\left(\left(1+k^2\right)E(k)-\left(1-k^2\right)K(k)\right)$.

Выразить через полные эллиптические интегралы следующие интегралы:

8.4. $\int\limits_0^a \frac{\sqrt{b^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$, $(b>a>0)$,

8.5. $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)\left(b^2-x^2\right)}}$, $(b>a>0)$,

8.6. $\int\limits_0^a \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)\left(b^2-x^2\right)}}$, $(b>a>0)$,

8.7. $\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)\left(x^2-b^2\right)}}$, $(a>0, b>0)$,

8.8. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2-a^2\right)\left(x^2-b^2\right)}}$, $(a>b>0)$,

8.9. $\int\limits_0^b \frac{dx}{\sqrt{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2-x^2\right)}}$, $(a>0,\ b>0)$.

8.10. Найти значение гравитационного потенциала в центре однородного (с плотностью $\rho=1$) эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ a>b>c.$$

8.10. Доказать равенство (8.8).

9. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x)=0\ ,\ \ \nu>0. \qquad (9.1)$$

Определение 1. Дифференциальное уравнение (9.1) называется *уравнением Бесселя*, где ν − некоторый числовой параметр, называемый *индексом уравнения*. Любое решение уравнения Бесселя называется *функцией Бесселя*▲

Будем искать решение уравнения (9.1) в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x)=x^r\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}. \qquad (9.2)$$

Тогда

$$y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)a_kx^{k+r-1},\ y''(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)a_kx^{k+r-2}. \qquad (9.3)$$

Подставим (9.2), (9.3) в (9.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)(k+r-1)x^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+r)x^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r}-$$

$$-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(k+r)(k+r-1)+(k+r)-\nu^2\right]x^{k+r-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]x^{k+r-2}+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+r-2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0\left[r^2-\nu^2\right]x^{r-2}+a_1\left[(1+r)^2-\nu^2\right]x^{r-1}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}\right\}x^{k+r-2}=0.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_0\left[r^2-\nu^2\right]=0,\ a_1\left[(1+r)^2-\nu^2\right]=0, \qquad (9.4)$$

$$a_k\left[(k+r)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}=0,\ k=2,3,... \qquad (9.5)$$

Можно считать, что $a_0\neq 0$. Тогда из (9.4) следует, что $r=\pm\nu$. Если $r=\nu$, то из (9.4), (9.5) получим:

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{(2+\nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_0}{2^2(\nu+1)},$$

$$a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{a_2}{(4+\nu)^2 - \nu^2} = \frac{a_0}{2^4(\nu+1)(\nu+2)2!},\ldots$$

$$a_{2m-1} = 0,\ a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu)m!},\ m = 1,2,\ldots \quad (9.6)$$

Коэффициент a_0 в (9.6) положим равным $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$. В силу формулы понижения (7.4) для гамма-функции

$$\Gamma(\nu+1)\cdot(1+\nu)(2+\nu)\cdots(m+\nu) = \Gamma(\nu+m+1).$$

Тогда коэффициент a_{2m} преобразуется следующим образом:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!},\ m = 1,2,\ldots$$

Частное решение уравнения (9.1) примет вид:

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)m!}.$$

Это решение называется *функцией Бесселя первого рода* и обозначается $J_\nu(x)$. Таким образом,

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+\nu+1)m!},\ x \in (-\infty;+\infty), \nu > 0. \quad (9.7)$$

Если параметр ν не является целым числом, то при $r = -\nu$ можно получить другое линейно независимое с (9.7) решение уравнения Бесселя:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m-\nu+1)m!},\ x \in (-\infty;+\infty), \nu > 0. \quad (9.8)$$

Общее решение уравнения (9.1) имеет вид:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),\ \nu \notin Z, \quad (9.9)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Доказать, что при $\nu = n$, $n \in N$, имеет место равенство:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x),\ n=1,2,.... \tag{9.10}$$

Решение: Согласно равенству (9.8)

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)m!}\ . \tag{9.11}$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to -m}\Gamma(x)=\infty$, $m=0,1,2,...$, следовательно, $\lim\limits_{x\to -m}(1/\Gamma(x))=0$, $m=0,1,2,...$ Поэтому первые n слагаемых в правой части (9.11) равны нулю. Тогда

$$J_{-n}(x)=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)m!}=[k=m-n]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+1)(k+n)!}=$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{\Gamma(k+n+1)k!}=(-1)^n J_n(x)\ \blacksquare$$

Таким образом, при $\nu=n$, $n\in N$ функции $J_n(x)$, $J_{-n}(x)$ линейно зависимы. Второе линейно независимое с $J_n(x)$ решение уравнения Бесселя (9.1) обозначается $Y_n(x)$ и называется *функцией Бесселя второго рода*.

Функции Бесселя второго рода определяются следующим образом:

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\pi\nu\cdot J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu},\ \nu\notin Z,\ n\in Z. \tag{9.12}$$

Функции Бесселя первого и второго рода изучены очень тщательно и, в частности, составлены подробные таблицы их значений.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(\lambda^2x^2-\nu^2\right)y(x)=0\ ,\ \lambda>0, \tag{9.13}$$

а) если $\nu\notin Z$; б) если $\nu=n$, $n\in N$.

Решение: а) Выполним замену независимой переменной $t=\lambda x$ и рассмотрим функцию $y_1(t)=y\left(\frac{t}{\lambda}\right)=y(x)$. Обозначая точками сверху производные по t, получим:

$$\dot{y}_1(t) = y'(x)\dot{x} = y'(x)\frac{1}{\lambda},\ \ddot{y}_1(t) = y''(x)\frac{1}{\lambda}\dot{x} = y''(x)\frac{1}{\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$y'(x) = \lambda\dot{y}_1(t),\ y''(x) = \lambda^2\ddot{y}_1(t).$$

В результате выполненных преобразований уравнение (9.13) примет вид:

$$\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2\lambda^2\ddot{y}_1(t) + \left(\frac{t}{\lambda}\right)\lambda\dot{y}_1(t) + \left(t^2 - \nu^2\right)y_1(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2\ddot{y}_1(t) + t\dot{y}_1(t) + \left(t^2 - \nu^2\right)y_1(t) = 0. \qquad (9.14)$$

Поделив обе части равенства (9.14) на t^2, получим для функции $y_1(t)$ уравнение Бесселя:

$$\ddot{y}_1(t) + \frac{1}{t}\dot{y}_1(t) + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right)y_1(t) = 0. \qquad (9.15)$$

Так как $\nu \notin Z$, то общее решение уравнения (9.15) записывается в виде:

$$y_1(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t).$$

Откуда

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 J_{-\nu}(\lambda x).$$

б) Если $\nu = n$, $n = 1,2,\ldots,$ то рассуждая аналогично, получим следующее выражение для общего решения уравнения (9.13):

$$y(x) = C_1 J_n(\lambda x) + C_2 Y_n(\lambda x) \ \blacksquare$$

Пример 3. Найти решение задачи Коши:

$$x^2 y''(x) + 6xy'(x) + \left(2x^2 - 6\right)y(x) = 0\ , \qquad (9.16)$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{5}. \qquad (9.17)$$

Решение: Будем искать решение уравнения (9.16) в виде:

$$y(x) = x^\alpha u(x). \qquad (9.18)$$

Подставляя в уравнение (9.16) указанное выражение для функции $y(x)$ и ее производных

$$y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}u(x) + x^\alpha u'(x),$$

$$y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}u(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}u'(x) + x^\alpha u''(x),$$

получим:

$$x^{\alpha+2}u'' + (2\alpha+6)x^{\alpha+1}u' + [\alpha(\alpha-1)+6\alpha-6]x^{\alpha}u + 2x^{\alpha+2}u = 0\ .$$

Поделим обе части последнего равенства на x^{α}:

$$x^2u'' + (2\alpha+6)xu' + \left[2x^2 + \alpha^2 + 5\alpha - 6\right]u = 0 .$$

Параметр α подберем так, чтобы получить для функции $u(x)$ уравнение вида (9.13):

$$2\alpha + 6 = 1 \Rightarrow \alpha = -5/2,\ \alpha^2 + 5\alpha - 6 = -49/4 .$$

Тогда

$$x^2u''(x) + xu'(x) + \left[2x^2 - \frac{49}{4}\right]u(x) = 0, \qquad (9.19)$$

т.е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (9.13), в котором $\lambda = \sqrt{2},\ \nu = 7/2$. Общее решение уравнения (9.19) согласно результатам предыдущего примера имеет вид:

$$u(x) = C_1 J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right).$$

С учетом (9.18) для общего решения уравнения (9.16) получим:

$$y(x) = \frac{1}{x^{5/2}}\left\{C_1 J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) + C_2 J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right)\right\}.$$

Постоянные C_1, C_2 найдем, используя условия (9.17). Согласно равенствам (9.7), (9.8)

$$\frac{1}{x^{5/2}} J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{m+7/4}\cdot m!\,\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{x^{5/2}} J_{-7/2}\left(\sqrt{2}x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-6}}{2^{m-7/4}\cdot m!\,\Gamma\left(m-\frac{5}{2}\right)}.$$

В силу условий (9.17) функция $y(x)$ ограничена в точке $x = 0$, т.е. не может содержать отрицательные степени x, следовательно, $C_2 = 0$. Поэтому

$$y(x) = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{m+7/4}\cdot m!\,\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)},$$

$$y'(x)=C_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)}=$$

$$=C_1\left\{\frac{1}{2^{7/4}\Gamma(9/2)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m}}{2^{m+7/4}\cdot m!\cdot\Gamma\left(m+\frac{9}{2}\right)}\right\}.$$

Так как $y'(0)=\frac{1}{5}$, то $\frac{C_1}{2^{7/4}\Gamma(9/2)}=\frac{1}{5}\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_1=\frac{2^{7/4}}{5}\Gamma(9/2)=\frac{2^{7/4}}{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\sqrt{\pi}=\frac{21\sqrt{\pi}}{2^{9/4}}$$

Ответ: $y(x)=\frac{21\sqrt{\pi}}{2^{9/4}x^{5/2}}J_{7/2}\left(\sqrt{2}x\right)$.

Пример 4. Доказать равенство

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{9.20}$$

Решение: При $\nu=1/2$ из формулы (9.7) получим:

$$J_{1/2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1/2}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right)m!}=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+1\right)\cdot m!}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^{2m+1}\cdot\frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}}\cdot\sqrt{\pi}\cdot m!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{2^m\cdot(2m+1)!!\cdot m!}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \ \blacksquare$$

Пример 5. Доказать рекуррентные соотношения:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}, \tag{9.21}$$

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_{\nu}(x)\right)=x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x). \qquad (9.22)$$

Решение: Согласно (9.7)

$$\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right)=\frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot 2m\cdot x^{2m-1}}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+\nu+1)m!}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cdot x^{2m-2}}{2^{2m+\nu-1}\Gamma(m+\nu+1)(m-1)!}=[k=m-1]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\cdot x^{2k}}{2^{2k+\nu+1}\Gamma(k+1+\nu+1)k!}=$$

$$=-\frac{1}{x^{\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu+1)}}{\Gamma(k+1+(\nu+1))k!}=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

Формула (9.22) доказывается аналогично ■

Пример 6. Доказать справедливость рекуррентных соотношений:

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_{\nu}(x), \qquad (9.23)$$

$$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_{\nu}(x), \qquad (9.24)$$

$$J'_{\nu}(x)=-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+J_{\nu-1}(x). \qquad (9.25)$$

Решение: Равенство (9.21) запишем в виде:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{J'_{\nu}(x)}{x^{\nu}}-\frac{\nu J_{\nu}(x)}{x^{\nu+1}}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}.$$

После умножения последнего равенства на $x^{\nu+1}$ получим

$$J'_{\nu}(x)-\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)=-J_{\nu+1}(x). \qquad (9.26)$$

Выполняя операцию дифференцирования в (9.22) и умножая полученное равенство на $x^{-\nu+1}$, получим:

$$\frac{\nu}{x}J_{\nu}(x)+J'_{\nu}(x)=J_{\nu-1}(x). \qquad (9.27)$$

Равенство (9.27) равносильно (9.25). Далее, вычитая из равенства (9.27) равенство (9.26), получим (9.23). А в результате сложения (9.27) и (9.26), получим (9.24) ■

Ортогональность функций Бесселя

В уравнении (9.1) положим $y(x)=\dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$. Тогда

$$y'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{x}}-\frac{u(x)}{2x^{3/2}},\ y''(x)=\frac{u''(x)}{\sqrt{x}}-\frac{u'(x)}{x^{3/2}}+\frac{3u(x)}{x^{5/2}}.$$

Для функции $u(x)$ получаем приведенное уравнение Бесселя:

$$u''(x)+\left(1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}\right)u(x)=0. \tag{9.28}$$

При $x\to\infty$ выражение в круглых скобках в (9.28) стремится к единице, а соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид:

$$u''(x)+u(x)=0.$$

Последнее дифференциальное уравнение имеет два линейно независимых решения: $u_1(x)=\cos x,\ u_2(x)=\sin x$.

Имеет место следующее асимптотическое представление функций Бесселя первого и второго рода при больших значениях аргумента [3].

Теорема. При $x\to+\infty$

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right] ■$$

Из этого утверждения следует, что функции Бесселя имеют бесконечное число нулей на действительной оси.

Пример 7. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ − нули функции Бесселя $J_\nu(x)$, т.е. $J_\nu(\xi_k)=0,\ k=1,2,\ldots$. Доказать, что при $n\neq m$

$$\int_0^1 x\cdot J_\nu(\xi_n x)\cdot J_\nu(\xi_m x)dx=0. \tag{9.29}$$

Решение: Пусть $p\neq q$. Положим $y(x)=J_\nu(px), z(x)=J_\nu(qx)$. Согласно результатам, полученным в примере 2,

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(p^2x^2-\nu^2\right)y(x)=0, \tag{9.30}$$

$$x^2z''(x)+xz'(x)+\left(q^2x^2-\nu^2\right)z(x)=0. \tag{9.31}$$

Умножая обе части уравнений (9.30), (9.31) на $(-z(x)/x)$, $(y(x)/x)$ соответственно и складывая полученные в результате умножения уравнения, получим:

$$x(z''y-y''z)+z'y-y'z+\left(q^2-p^2\right)xyz=0 \Leftrightarrow$$
$$[x(z'y-y'z)]'=\left(p^2-q^2\right)xyz.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по отрезку $[0;1]$:

$$x(z'y-y'z)\Big|_0^1=\left(p^2-q^2\right)\int_0^1 xy(x)z(x)dx \Leftrightarrow$$

$$qJ'_\nu(q)J_\nu(p)-pJ'_\nu(p)J_\nu(q)=\left(p^2-q^2\right)\int_0^1 xJ_\nu(px)J_\nu(qx)dx.$$

Если $p=\xi_n, q=\xi_m$, $n \neq m$, то левая часть последнего равенства обратится в ноль, и так как $p \neq q$, то получим соотношение (9.29) ■

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Доказать, что степенной ряд (9.7) сходится $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ и $\nu > 0$, а на любом конечном отрезке действительной оси сходимость является равномерной.

9.2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(4x^2-(9/25)\right)y(x)=0.$$

9.3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(3x^2-4\right)y(x)=0.$$

9.4. Найти решение задачи Коши:

$$x^2y''(x)+2xy'(x)+\left(x^2-2\right)y(x)=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=\frac{1}{3}.$$

9.5. Найти решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)+2xy'(x)+x^2y(x)=0 \text{ , если } y(0)=1.$$

9.6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^2y''(x)+\left((ax)^2-\nu^2+\frac{1}{4}\right)y(x)=0,\ \nu \notin Z,\ a>0.$$

9.7. Вычислить $J_n(0)$, $J'_n(0)$, $n=0,1,2,\ldots.$

9.8. Выразить функции Бесселя первого рода через элементарные функции:

а) $J_{-1/2}(x)$; б) $J_{3/2}(x)$; в) $J_{5/2}(x)$; г) $J_{-3/2}(x)$; д) $J_{-5/2}(x)$.

9.9. Выразить функции Бесселя второго рода через элементарные функции:

$$\text{а)}\, Y_{1/2}(x);\ \text{б)}\, Y_{-1/2}(x);\ \text{в)}\, Y_{3/2}(x);\ \text{г)}\, Y_{-3/2}(x).$$

9.10. Выразить функцию Бесселя $J_4(x)$ через $J_1(x)$ и $J_2(x)$.

9.11. Вычислить интегралы:

$$\text{а)}\int_0^x t^7 J_2(t)dt;\ \text{б)}\int_0^x tJ_0(t)dt;\ \text{в)}\int_0^x t^9 J_4(t)dt;\ \text{г)}\int_0^x t^5 J_2(t)dt.$$

9.12. Доказать, что функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2u''(x)+xu'(x)+\left(x^2-n^2\right)u(x)=0,$$

если

а) $u(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi,\ n\in N$;

б) $u(x)=x^n\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\, d\varphi,\ n\in N$.

10. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

10.1. Общие замечания об ортогональных многочленах

Пусть на некотором промежутке $(a;b)$ действительной оси задана весовая функция $\rho(x)\geq 0$. На множестве непрерывных действительных функций введем *скалярное произведение*:

$$(f_1, f_2)=\int_a^b \rho(x)f_1(x)f_2(x)dx. \tag{10.1}$$

Определение 1. Две функции $f_1(x), f_2(x)$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Говорят, что функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x)$ образуют *ортогональную систему*, если они попарно ортогональны, т.е. $(\varphi_n, \varphi_m)=0,\ n\neq m$ ▲

Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система линейно независимых функций. Тогда ее можно ортогонализовать относительно скалярного произведения (10.1):

$$\varphi_1(x)=\psi_1(x),\ \varphi_2(x)=\psi_2(x)-\frac{(\psi_2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x),\dots,$$

$$\varphi_n(x)=\psi_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\psi_n,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k(x). \tag{10.2}$$

Преобразование (10.2) называется *процессом ортогонализации Шмидта*.

Лемма. При любом n система многочленов

$$1, x, x^2, ..., x^n \tag{10.3}$$

линейно независима на заданном отрезке $[a;b]$.

Доказательство: Пусть система (10.3) линейно зависима. Тогда существуют числа $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$ не все равные нулю такие, что

$$c_0+c_1x+c_2x^2+....+c_nx^n=0 \quad \forall x\in[a;b].$$

Выберем на отрезке $[a;b]$ $(n+1)$ различных точек:

$$a<x_1<x_2<...<x_{n+1}<b\,.$$

Тогда

$$\begin{cases} c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+....+c_nx_1^m=0 \\ c_0+c_1x_2+c_2x_2^2+....+c_nx_2^m=0 \\ .... \\ c_0+c_1x_{n+1}+c_2x_{n+1}^2+....+c_nx_{n+1}^m=0 \end{cases} \tag{10.4}$$

Система (10.4) является однородной системой линейных уравнений относительно $c_0, c_1, c_2, ..., c_n$. Ее определителем является *определитель Вандермонда* Δ. Так как все точки $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ различны, то $\Delta\neq 0$, следовательно, система (10.4) имеет только нулевое решение $c_0=c_1=c_2=....=c_n=0$. Полученное противоречие означает, что предположение о линейной зависимости системы (10.3) неверно и эта система линейно независима ■

Процесс ортогонализации системы (10.3) на различных промежутках числовой оси с различными весовыми функциями приводит к следующим системам классических ортогональных многочленов:

$[a;b]$	$\rho(x)$	Обозначение	Название многочлена
$[-1;1]$	1	$P_n(x)$	Лежандра
$(-\infty;+\infty)$	$e^{-x^2/2}$	$H_n(x)$	Эрмита

$(-1;1)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$T_n(x)$	Чебышева
$(0;+\infty)$	$x^{\alpha}e^{-x},\ \alpha>-1$	$L_n^{\alpha}(x)$	Лагерра

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная система многочленов, полученная из системы (10.3) с помощью ортогонализации (10.2). Укажем ряд общих свойств:

1) $p_n(x)$ – многочлен степени n;

2) на интервале $(a;b)$ функция $p_n(x)$ имеет ровно n различных вещественных корней;

3) для каждой системы ортогональных многочленов имеет место *формула Родрига*:

$$p_n(x)=\frac{1}{K_n\cdot\rho(x)}\cdot\frac{d^n\left[\rho(x)q^n(x)\right]}{dx^n}, \tag{10.5}$$

где $K_n=const,\ q(x)$ – фиксированный многочлен, не зависящий от n.

4) каждый многочлен из заданной системы ортогональных многочленов удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+\lambda_n y(x)=0, \tag{10.6}$$

где $a(x),\ b(x)$ – многочлены, не зависящие от n, λ_n – числа;

5) для любых трех последовательно взятых ортогональных многочленов из заданной системы функций $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо рекуррентное соотношение вида:

$$p_n(x)=(A_n x+B_n)p_{n-1}(x)+C_n p_{n-2}(x),\ n=2,3,... \tag{10.7}$$

A_n,B_n,C_n – некоторые константы.

10.2. Многочлены Лежандра

Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ дифференциальное *уравнение Лежандра*:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-\lambda y(x), \tag{10.8}$$

где λ – некоторое число.

Требуется найти те значения параметра λ, при которых существует отличное от нуля решение уравнения (10.8), ограниченное на отрезке $[-1;1]$ (*задача Штурма-Лиувилля*). Уравнение (10.8) можно переписать в виде:

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-2xy'(x)+\lambda y(x)=0. \tag{10.9}$$

Решение уравнения (10.9) будем искать в виде степенного ряда:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1},\ y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}. \tag{10.10}$$

Подставим (10.10) в (10.9):

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2na_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-[n(n-1)+2n-\lambda]a_n\right\}x^n=0.$$

Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,\ n=0,1,2,...$$

Коэффициенты a_0, a_1 остаются произвольными. При $a_0\neq 0,\ a_1=0$ получим решение, содержащее только четные степени x. При $a_0=0,\ a_1\neq 0$ получим решение, содержащее только нечетные степени x. Если $\lambda=n(n+1)$, то уравнение (10.8) будет иметь решение в виде многочлена, которое ограничено на отрезке $[-1;1]$ и при этом не является тождественным нулем. Следовательно, собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля будут числа

$$\lambda_n=n(n+1), n=0,1,2,.... \tag{10.11}$$

Получим более удобное выражение для собственной функции, соответствующей собственному значению λ_n. Для этого рассмотрим многочлен $u(x)=\left(x^2-1\right)^n$ степени $2n$. Так как $u'(x)=2nx\left(x^2-1\right)^{n-1}$, то

$$\left(x^2-1\right)u'(x)-2nxu(x)=0. \tag{10.12}$$

Продифференцируем равенство (10.12) n раз по переменной x. Для этого будем использовать формулу для n-ой производной произведения двух функций:

$$(f\cdot g)^{(n)}=f^{(n)}g+C_n^1 f^{(n-1)}g'+C_n^2 f^{(n-2)}g''+\ldots+C_n^n f\, g^{(n)}.$$

Получим:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n)}\cdot\left(x^2-1\right)+n\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^{(n-2)}\cdot 2-$$

$$-2nxu^{(n)}(x)-nu^{(n-1)}\cdot 2n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^{(n+1)}\cdot\left(1-x^2\right)+n(n+1)u^{(n-1)}=0.$$

Последнее равенство еще раз продифференцируем по x:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}u^{(n)}\right]+n(n+1)u^{(n)}=0.$$

Таким образом, функция $y(x)=u^{(n)}(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]+n(n+1)y(x)=0. \qquad (10.13)$$

Уравнение (10.13) совпадает с (10.8) при $\lambda=\lambda_n$. Решением уравнения (10.13) будет также и функция $y(x)=Cu^{(n)}(x)$, где C − постоянный множитель. Полагая $C=\dfrac{1}{2^n n!}$, получим следующее решение уравнения (10.13):

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^n},\ n=0,1,2,\ldots. \qquad (10.14)$$

Функции $P_n(x)$ называются *многочленами Лежандра*. Они являются решениями уравнений (10.8), (10.9) с $\lambda=n(n+1)$. Формула (10.14) является формулой Родрига (10.5) для многочленов Лежандра, в которой $K_n=2^n n!, \rho(x)=1,\ q(x)=x^2-1.$

Пример 1. Доказать, что многочлены Лежандра (10.14) обладают свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ 2/(2n+1),\ m=n.\end{cases}$$

Решение: Пусть $m\neq n$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]+n(n+1)P_n(x)=0, \qquad (10.15)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+m(m+1)P_m(x)=0. \tag{10.16}$$

Умножим обе части уравнения (10.15) на $P_m(x)$, а уравнения (10.16) − на $\left(-P_n(x)\right)$. Затем сложим получившиеся равенства и проинтегрируем по отрезку $[-1;1]$:

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]-P_n(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]P_n(x)P_m(x)\right\}dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_m(x)P_n'(x)\left(1-x^2\right)-P_n(x)P_m'(x)\left(1-x^2\right)\Big|_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\left\{\left(1-x^2\right)P_n'(x)P_m'(x)-\left(1-x^2\right)P_m'(x)P_n'(x)\right\}dx+$$

$$+\left(n(n+1)-m(m+1)\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0.$$

Если $m\neq n$, то $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0$.

Рассмотрим случай $m=n$:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{1}{\left(2^n n!\right)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям $2n$ раз и учитывая, что

$$\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n+k)}\Bigg|_{-1}^{1}=0,\ k=0,1,\ldots,n-1,\ \left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(2n)}=(2n)!,$$

получим:

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{(-1)^n(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx. \tag{10.17}$$

Используя эйлеровы интегралы, вычислим интеграл в правой части равенства (10.17):

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n dx=2\int_0^1\left(x^2-1\right)^n dx=2(-1)^n\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\left[x=\sqrt{t}\right]=$$

$$=2(-1)^n\int_0^1(1-t)^n\frac{dt}{2\sqrt{t}}=(-1)^n\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^n dt=(-1)^n B\left(\frac{1}{2},n+1\right)=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+1/2)}=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}\cdot n!}{\frac{(2n+1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}}=\frac{(-1)^n 2^{n+1}n!}{(2n+1)!!}.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{(-1)^n(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\frac{(-1)^n 2\cdot 2^n n!}{(2n+1)!!}=\frac{2\cdot(2n)!}{(2n+1)!}=\frac{2}{(2n+1)}\ \blacksquare$$

Пример 2. Вычислить $P_n(1), n=0,1,\ldots.$

Решение: $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\cdot\left[\left(x^2-1\right)^n\right]^{(n)}=\dfrac{1}{2^n n!}\cdot\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]^{(n)}=$

$$=\frac{1}{2^n n!}\cdot\left\{\left[(x-1)^n\right]^{(n)}(x+1)^n+C_n^1\left[(x-1)^n\right]^{(n-1)}\left[(x+1)^n\right]'+\right.$$

$$\left.+C_n^2\left[(x-1)^n\right]^{(n-2)}\left[(x+1)^n\right]''+\ldots+(x-1)^n\left[(x+1)^n\right]^{(n)}\right\}\Rightarrow$$

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}\cdot n!\cdot(1+1)^n=1.$$

Ответ: $P_n(1)=1, n=0,1,2,\ldots$

Пример 3. Доказать, что всякое решение уравнения

$$\left(1-x^2\right)y''(x)-2xy'(x)+n(n+1)y(x)=0, \qquad (10.18)$$

ограниченное при $x=1$, отличается от многочлена Лежандра $P_n(x)$ только постоянным множителем. В частности, $y=P_n(x)$ − единственное решение уравнения (10.18), удовлетворяющее условию $y(1)=1$.

Решение: Уравнение (10.18) запишем в виде:

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \qquad (10.19)$$

$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\ q(x)=\frac{n(n+1)}{1-x^2}.$$

Если $y_1(x)$ − некоторое частное решение уравнения (10.19), то второе линейно независимое решение этого уравнения может быть найдено по формуле Лиувилля:

$$y_2(x) = y_1(x)\int e^{-\int p(x)dx}\frac{dx}{y_1^2(x)}.$$

С учетом того, что $y_1(x) = P_n(x)$, $e^{-\int p(x)dx} = e^{-\ln(1-x^2)} = \dfrac{1}{1-x^2}$,

получим:

$$y_2(x) = P_n(x)\int\frac{dx}{(1-x^2)P_n^2(x)}.$$

Так как $P_n(1) = 1 \neq 0$, то $x = 1$ − корень кратности 1 знаменателя в подынтегральной функции. Поэтому в разложении дроби на простейшие выделится слагаемое вида $\dfrac{A}{x-1}$, а остальные слагаемые не будут иметь особенностей при $x = 1$. Общее решение уравнения (10.19) запишется в виде:

$$y(x) = C_1P_n(x) + C_2P_n(x)\left(A\ln|x-1| + \varphi(x)\right),$$

где функция $\varphi(x)$ ограничена в точке $x = 1$.

Для ограниченности функции $y(x)$ при $x \to 1$ необходимо потребовать, чтобы $C_2 = 0$. Поэтому $y(x) = C_1P_n(x)$. При дополнительном условии $y(1) = 1$ получим $y(x) = P_n(x)$■

Пример 4. Показать, что функция

$$W(h,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}},\ x \in [-1;1],\ h \in (-1;1) \qquad (10.20)$$

является производящей функцией многочленов Лежандра, т.е.

$$W(h,x) = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n,\ x \in [-1;1],\ h \in (-1;1). \qquad (10.21)$$

Решение: Представим функцию (10.20) в виде ряда по степеням h, обозначив коэффициенты разложения через $y_n(x)$:

$$W(h,x) = \frac{1}{\sqrt{1-2hx+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)h^n. \qquad (10.22)$$

Тогда

$$W(h,1)=\frac{1}{\sqrt{1-2h+h^2}}=\frac{1}{1-h}=\sum_{n=0}^{\infty}h^n \Rightarrow y_n(1)=1.$$

Функция (10.20) удовлетворяет уравнению:

$$h^2\frac{\partial^2 W}{\partial h^2}+\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+2h\frac{\partial W}{\partial h}-2x\frac{\partial W}{\partial x}=0. \qquad (10.23)$$

Подставляя (10.22) в (10.23), получим

$$h^2\sum_{n=2}^{\infty}y_n(x)n(n-1)h^{n-2}+\left(1-x^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}y_n''(x)h^n+$$

$$+2h\sum_{n=1}^{\infty}ny_n(x)h^{n-1}-2x\sum_{n=0}^{\infty}y_n'(x)h^n=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(1-x^2\right)y_n''(x)-2xy_n'(x)+n(n+1)y_n(x)\right\}h^n=0.$$

Откуда следует, что функция $y_n(x)$ удовлетворяет уравнению (10.18). А так как $y_n(1)=1$, то согласно доказанному в примере 4 утверждению $y_n(x)=P_n(x)$ и справедливо разложение (10.21) ■

Пример 5. Доказать справедливость рекуррентного соотношения для многочленов Лежандра:

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\ n=1,2,.... \qquad (10.24)$$

Решение: Дифференцируя по переменой h производящую функцию (10.20), получим:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=\frac{x-h}{\left(1-2hx+h^2\right)^{3/2}}=\frac{x-h}{\left(1-2hx+h^2\right)}W\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(1-2hx+h^2\right)\frac{\partial W}{\partial h}=(x-h)W.$$

Подставим в последнее равенство разложение (10.21):

$$\left(1-2hx+h^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}=(x-h)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^n\Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)h^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}2xnP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)h^{n+1}-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}xP_n(x)h^n+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)h^{n+1}=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)P_{k+1}(x)h^k - \sum_{k=0}^{\infty} 2xkP_k(x)h^k + \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_{k-1}(x)h^k -$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} xP_k(x)h^k + \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(x)h^k = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h, получим:

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$

$$(k+1)P_{k+1}(x) - 2xkP_k(x) + (k-1)P_{k-1}(x) - xP_k(x) + P_{k-1}(x) = 0, k = 1,2,..$$

$$\Leftrightarrow (k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0,\ k = 1,2,....$$

Откуда и следует (10.24) ■

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Используя формулу Родрига (10.14) и рекуррентное соотношение (10.24), найти многочлены Лежандра $P_0(x), P_1(x), ..., P_5(x)$.

10.2. Вычислить $P_n(-1), n = 0,1,....$

10.3. Вычислить $P_n(0), n = 0,1,....$

10.4. Доказать справедливость равенств:

а) $xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x),\ n = 1,2,....$

б) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x),\ n = 1,2,....$ (10.25)

в) $\left(1 - x^2\right)P_n'(x) = \dfrac{n(n+1)}{2n+1}\left[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)\right],\ n = 1,2,....$ (10.26)

10.5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left(1 - x^2\right)\left[P_n'(x)\right]^2 dx,\ n = 1,2,....$

10.6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 P_m(x)dx,\ m = 1,2,.....$

10.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left[xP_n(x)\right]^2 dx\ ,\ n = 1,2,....$

10.8. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1 - x^2\right)y'(x)\right] = -12y(x),$$

удовлетворяющее условию $y(1) = 2$.

10.3. Многочлены Эрмита

Многочлены Эрмита определяются равенством:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2/2}\cdot\frac{d^n\left[e^{-x^2/2}\right]}{dx^n},\ n=0,1,2,... \tag{10.27}$$

Формула (10.27) представляет собой формулу Родрига (10.5), в которой $K_n=(-1)^n,\ \rho(x)=e^{-x^2/2},\ q(x)=1.$

Пример 6. Доказать, что многочлены Эрмита являются решениями дифференциального уравнения

$$y''(x)-xy'(x)+ny(x)=0. \tag{10.28}$$

Решение: Пусть $y(x)=H_n(x)$. Тогда

$$y'(x)=(-1)^n xe^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)+(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(-xe^{-x^2/2}\right)=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+(-x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+C_n^1(-1)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right\}=$$

$$=(-1)^{n+1}e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)},$$

$$y''(x)=(-1)^{n+1}nxe^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}=$$

$$=(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}\right\}.$$

Подставляя указанную функцию $y(x)$ и ее производные в левую часть (10.28), получим:

$$y''(x)-xy'(x)+ny(x)=(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}\right\}-$$

$$-(-1)^{n+1}e^{x^2/2}nx\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+(-1)^n e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}=0 \ \blacksquare$$

Пример 7. Доказать, что для многочленов Эрмита справедливо рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x)=xH_n(x)-nH_{n-1}(x),\ n=1,2,.... \tag{10.29}$$

Решение:

$$xH_n(x)-nH_{n-1}(x)=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}-(-1)^{n-1}e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right\}=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left(xe^{-x^2/2}\right)^{(n)}=(-1)^n e^{x^2/2}\left(-e^{-x^2/2}\right)^{(n+1)}=$$

$$=(-1)^{n+1}e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n+1)}=H_{n+1}(x)\ \blacksquare$$

Пример 8. Доказать, что для многочленов Эрмита справедливо равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}H_n(x)H_m(x)dx=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ \sqrt{2\pi}\cdot n!,\ \ m=n.\end{cases} \tag{10.30}$$

Решение: Из формул (10.27) и (10.29) следует, что $H_n(x)$ − многочлен степени n, и коэффициент при x^n в этом многочлене равен единице. Откуда в частности следует, что $H_n^{(n)}(x)=n!, H_n^{(n+1)}(x)=0$. Пусть для определенности $m<n$. Применяя m раз формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}H_n(x)H_m(x)dx=(-1)^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}H_m(x)dx=$$

$$=(-1)^n\left\{H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}H_m'(x)dx\right\}=\ldots=$$

$$=(-1)^{n+m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(m)}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-m)}dx=$$

$$=(-1)^{n+m}H_m^{(m)}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-m-1)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

Если $m=n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_n(x) dx = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n^{(n)}(x) dx =$$

$$= n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2\sqrt{2} n! \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} n! \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = n!\sqrt{2\pi}.$$

Равенство (10.30) доказано ■

Пример 9. Показать, что функция $\varphi(x,t) = e^{tx - t^2/2}$ является производящей функцией для многочленов Эрмита, т.е. имеет место равенство

$$\varphi(x,t) = e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \qquad (10.31)$$

Решение: Продифференцируем функцию $\varphi(x,t)$ по переменной t :

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = (x-t) e^{tx - t^2/2} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = (x-t)\varphi(x,t). \qquad (10.32)$$

Пусть $\varphi(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^n}{n!}$. Подставим это разложение в равенство (10.32):

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - x \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}(x) \frac{t^k}{k!} - \sum_{n=0}^{\infty} x y_k(x) \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1}(x) \frac{t^k}{(k-1)!} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1(x) - x y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_{k+1}(x) - x y_k(x) + k y_{k-1}(x) \right) \frac{t^k}{k!} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим равенства:

$$y_1(x) - x y_0(x) = 0,$$

$$y_{k+1}(x) - x y_k(x) + k y_{k-1}(x) = 0, \; k = 1,2,\ldots \qquad (10.33)$$

Рекуррентное соотношение (10.33) совпадает с рекуррентной формулой (10.29) для многочленов Эрмита. Осталось показать, что

$$y_0(x) = 1 = H_0(x), \;\; y_1(x) = x = H_1(x).$$

Последние равенства следуют из разложения показательной функции в степенной ряд:

$$\varphi(x,t)=e^{tx-t^2/2}=e^{tx}\cdot e^{-t^2/2}=\left(1+tx+\frac{(tx)^2}{2!}+\ldots\right)\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4\cdot 2!}-\ldots\right)\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

10.9. Используя формулу Родрига (10.27) и рекуррентное соотношение (10.29), найти многочлены Эрмита $H_0(x), H_1(x),\ldots,H_5(x)$.

10.10. Найти $H_n(0), H_n'(0), n=1,2,\ldots$

10.11. Доказать равенства:

а) $H_n'(x)=nH_{n-1}(x)$, б) $H_{n+1}(x)=xH_n(x)-H_n'(x)$, $n=1,2,\ldots$

10.12. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xH_{n-1}(x)}{H_n(x)}, n=1,2,\ldots$

10.13. Получить следующие выражения для многочленов Эрмита:

$$H_{2n}(x)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k)!}C_n^k x^{2k},$$

$$H_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k k!}{(2k+1)!}C_n^k x^{2k+1}, n=0,1,2,\ldots,$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

10.14. Разложить следующие функции по системе многочленов Эрмита, т.е. представить в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(t)H_n(x)$: а) $\operatorname{ch}tx$, б) $\operatorname{sh}tx$, в) $\cos tx$, г) $\sin tx$.

10.4. Многочлены Чебышева

Многочлены Чебышева определяются равенством:

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x), x\in[-1;1],\ n=0,1,2,\ldots \tag{10.34}$$

Укажем ряд основных свойств многочленов Чебышева.

1. Для многочленов Чебышева выполняется рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0,\ n=1,2,\ldots \tag{10.35}$$

2. Функция $T_n(x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)+n^2y(x)=0 \tag{10.36}$$

3. Многочлены Чебышева обладают свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \pi/2,\ m = n \neq 0, \\ \pi,\ \ m = n = 0. \end{cases} \tag{10.37}$$

4. Формула Родрига для многочленов Чебышева имеет вид:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right].$$

Здесь в соответствии с общей формулой (10.5)

$$K_n = \frac{(2n+1)!!}{(-1)^n (2n+1)},\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ q(x) = 1 - x^2.$$

5. Функция

$$\psi(x,t) = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2},\ x \in [-1;1],\ t \in (-1;1) \tag{10.38}$$

является производящей функцией для многочленов Чебышева, т.е. имеет место равенство

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n,\ x \in [-1;1],\ t \in (-1;1)\ . \tag{10.39}$$

6. Многочлены Чебышева обладают *фундаментальным свойством*, которое заключается в следующем. Рассмотрим всевозможные многочлены степени n с коэффициентом равным единице при старшей степени x: $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ x \in [-1;1]$.

Положим $M_{p_n} = \max\limits_{x \in [-1;1]} p_n(x)$. Оказывается, что наименьшее значение величина M_{p_n} достигает для $p_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$. Многочлен $T_n(x)/2^{n-1}$ называется *наименее уклоняющимся от нуля* на отрезке $[-1;1]$.

Пример 10. Доказать рекуррентное соотношение (10.35).

Решение: Пусть $t = \arccos x$. Тогда $x = \cos t$,

$T_{n+1}(x(t)) = \cos[(n+1)t] = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t,$

$T_n(x(t)) = \cos nt,$

$T_{n-1}(x(t)) = \cos[(n-1)t] = \cos nt \cos t + \sin nt \sin t\ .$

Откуда следует:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t -$$
$$- 2\cos t \cos nt + \cos nt \cos t + \sin nt \sin t = 0\ \blacksquare$$

Пример 11. Доказать, что многочлены Чебышева, определяемые равенством (10.34), удовлетворяют дифференциальному уравнению (10.36).

Решение: Пусть $y(x)=T_n(x),\ x=\cos t$.

Тогда $t=t(x)=\arccos x,\ t\in[0;\pi], y(x)=\cos nt$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'(x)=-n\sin nt\cdot\frac{dt}{dx}=-n\sin nt\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{n\sin nt}{\sin t},$$

$$y''(x)=\frac{n^2\cos nt\sin t-n\sin nt\cos t}{\sin^2 t}\frac{dt}{dx}=$$

$$=-\frac{n^2\cos nt\sin t-n\sin nt\cos t}{\sin^3 t}.$$

Подставляя в левую часть равенства (10.36) полученные выражения для $y(x), y'(x), y''(x)$, получим тождественный ноль, что и доказывает свойство 2 ■

Пример 12. Доказать свойство 5, т.е. показать, что функция (10.38) является производящей функцией многочленов Чебышева.

Решение: Пусть $x=\cos\omega$. Преобразуем следующее выражение, используя формулу Эйлера $e^{i\omega}=\cos\omega+i\sin\omega$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-te^{i\omega}}+\frac{1}{1-te^{-i\omega}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-te^{-i\omega}+1-te^{i\omega}}{1-te^{-i\omega}-te^{i\omega}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-2t\cos\omega}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\psi(x,t).$$

При $t\in(-1;1)$

$$\frac{1}{1-te^{i\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{i\omega n},\ \frac{1}{1-te^{-i\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{-i\omega n}.$$

Следовательно,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{i\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{-i\omega n}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos\omega n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos(n\arccos x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n \ ■$$

Задачи для самостоятельного решения

10.15. Доказать свойство ортогональности (10.37).

10.16. Используя формулу (10.34) и рекуррентное соотношение (10.35), найти многочлены Чебышева $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_5(x)$.

10.17. Найти $T_n(0), T_n(1), T_n(-1), n = 0,1,2,\ldots$

10.18. Доказать справедливость следующего соотношения:

$$\left(1-x^2\right)T_n'(x) = n\left(T_{n-1}(x) - xT_n(x)\right).$$

10.19. Показать, что для многочленов Чебышева имеет место равенство:

$$T_n\left(T_m(x)\right) = T_{nm}(x).$$

10.20. Используя результат предыдущей задачи, показать, что

$$T_n(2x-1) = T_{2n}\left(\sqrt{x}\right).$$

10.5. Многочлены Лагерра

Обобщенными многочленами Лагерра называются многочлены

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right],\ n = 0,1,2,\ldots, \alpha > -1 \qquad (10.40)$$

Формула (10.40) представляет собой формулу Родрига (10.5), в которой $K_n = n!,\ \rho(x) = x^\alpha e^{-x},\ q(x) = x$.

При $\alpha = 0$ функции (10.40) обозначаются $L_n(x)$, т.е.

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right], n = 0,1,2,.. \qquad (10.41)$$

Выполним дифференцирование в правой части равенства (10.40):

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] = \left(e^{-x}\right)^{(n)} x^{n+\alpha} + C_n^1\left(e^{-x}\right)^{(n-1)}(n+\alpha)x^{n+\alpha-1} +$$

$$+ C_n^2\left(e^{-x}\right)^{(n-2)}(n+\alpha)(n+\alpha-1)x^{n+\alpha-2} + \ldots +$$

$$+ e^{-x}(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)x^\alpha = (-1)^n e^{-x} x^\alpha \left\{x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x^{n-k}\right\},$$

$$a_{n-k} = (-1)^k C_n^k (\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1). \qquad (10.42)$$

Тогда получим следующее выражение для многочлена Лагерра n-го порядка:

$$L_n^\alpha(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{x^n+\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}x^{n-k}\right\}. \qquad (10.43)$$

Пример 13. Доказать свойство ортогональности многочленов Лагерра:

$$\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)dx=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},\ m=n.\end{cases}$$

Решение: Из равенства (10.43) следует, что $\left(L_n^\alpha(x)\right)^{(n)}=(-1)^n$. Пусть $m<n$. Применяя m раз формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)dx=\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]L_m^\alpha(x)dx=$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]L_m^\alpha(x)dx=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]L_m^\alpha(x)\Big|_0^{+\infty}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{+\infty}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]\left(L_m^\alpha(x)\right)'dx\right\}=\ldots=$$

$$=\frac{(-1)^m}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]\left(L_m^\alpha(x)\right)^{(m)}dx=$$

$$=\frac{(-1)^{2m}}{n!}\int_0^{+\infty}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]dx=\frac{1}{n!}\cdot\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty}=0.$$

Если $m=n$, то

$$\int_0^{+\infty}x^\alpha e^{-x}L_n^\alpha(x)L_n^\alpha(x)dx=\frac{(-1)^{2n}}{n!}\int_0^{+\infty}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\blacksquare$$

Пример 14. Показать, что многочлен Лагерра (10.40) является частным решением дифференциального уравнения второго порядка:

$$xy''(x)+(\alpha+1-x)y'(x)+ny(x)=0. \qquad (10.44)$$

Решение: Воспользуемся формулами (10.43), (10.44) для многочленов Лагерра. Тогда

$$y(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{x^n+\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}x^{n-k}\right\},$$

$$y'(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{nx^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)x^{n-k-1}\right\},$$

$$y''(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{n(n-1)x^{n-2}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{n-k}(n-k)(n-k-1)x^{n-k-2}\right\}.$$

Подставим полученные выражения для функции $y(x)$ и ее производных в левую часть уравнения (10.44) и выполним необходимые преобразования:

$$xy''(x)+(\alpha+1-x)y'(x)+ny(x)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{n(n-1)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{n-k}(n-k)(n-k-1)x^{n-k-1}\right\}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\left\{n(\alpha+1)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)(\alpha+1)x^{n-k-1}\right\}-$$

$$-\frac{(-1)^n}{n!}\left\{nx^n+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)x^{n-k}\right\}+\frac{(-1)^n}{n!}\left\{nx^n+\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}nx^{n-k}\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\left(n^2+\alpha n+a_{n-1}\right)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)x^{n-k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n}a_{n-k}kx^{n-k}\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\left(n^2+\alpha n+a_{n-1}\right)x^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\left[a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)+a_{n-k-1}(k+1)\right]x^{n-k-1}\right\}=0.$$

Равенство нулю последнего выражения цепочки преобразований следует из формулы (10.42) для коэффициентов a_{n-k}. Действительно,

$$a_{n-1}=(-1)C_n^1(\alpha+n)=-n(\alpha+n),$$

$$\frac{a_{n-k}}{a_{n-k-1}}=\frac{(-1)^k C_n^k(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)}{(-1)^{k+1}C_n^{k+1}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)(\alpha+n-k)}=$$

$$=-\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}(\alpha+n-k)}=-\frac{k+1}{(n-k)(\alpha+n-k)}.$$

Откуда и следует, что

$$n^2+\alpha n+a_{n-1}=0,\ a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)+a_{n-k-1}(k+1)=0.$$

Поэтому многочлен Лагерра (10.40) является частным решением уравнения (10.44) ■

Пример 15. Показать, что функция

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{-\frac{xt}{1-t}},\quad |t|<1,\ \alpha>-1, \tag{10.45}$$

является производящей функцией для многочленов Эрмита, т.е. имеет место равенство

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n,\ |t|<1,\ \alpha>-1\ . \tag{10.46}$$

Решение: Для доказательства данного утверждения воспользуемся интегральной теоремой Коши.

Интегральная теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границе Γ и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma$. Тогда $f(z)$ имеет производные любого порядка в области D и $\forall z_0\in D$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (10.40) и интегральной теореме Коши

$$n!x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_x}\frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

где γ_x – малый контур, охватывающий точку x.

Введем новую переменную $t=1-\dfrac{x}{z}$.

Тогда $z=\dfrac{x}{1-t}=\dfrac{xt}{1-t}+x, dz=\dfrac{x}{(1-t)^2}dt$. Если $z=x$, то $t=0$. Выполняя указанную замену переменной, получим:

$$n!x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_0}\frac{\left(\dfrac{x}{1-t}\right)^{n+\alpha}e^{-\frac{xt}{1-t}-x}}{\left(\dfrac{xt}{1-t}\right)^{n+1}}\cdot\frac{x}{(1-t)^2}dt=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}e^{-x}x^{\alpha}\oint_{\gamma_0}\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{dt}{t^{n+1}}=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}e^{-x}x^{\alpha}\oint_{\gamma_0}\frac{\Psi(x,t)}{t^{n+1}}dt=e^{-x}x^{\alpha}\,\frac{\partial^n\Psi(x,0)}{\partial t^n}.$$

Следовательно, $L_n^{\alpha}(x)=\dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n\Psi(x,0)}{\partial t^n}$ и

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi(x,0)}{\partial t^n}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n \ ■$$

Пример 16. Доказать следующее рекуррентное соотношения для полиномов Лагерра:

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)+(x-\alpha-2n-1)L_n^{\alpha}(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)=0,\ n=1,2,... \tag{10.47}$$

Решение: Нетрудно проверить, что функция (10.45) удовлетворяет уравнению

$$(1-t)^2\,\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}+[x-(1-t)(1+\alpha)]\Psi(x,t)=0. \tag{10.48}$$

Подставим в (10.48) разложение (10.46) для производящей функции:

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}nL_n^{\alpha}(x)t^{n-1}+[x-(1-t)(1+\alpha)]\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при t^n, получим (10.47) ■

Задачи для самостоятельного решения

10.21. Используя формулу (10.41) и рекуррентное соотношение (10.47) при $\alpha=0$, найти многочлены Лагерра $L_0(x), L_1(x),..., L_5(x)$.

10.22. Выписать обобщенные многочлены Лагерра

$$L_1^1(x), L_2^1(x), L_3^2(x), L_4^2(x).$$

10.23. Найти $L_n^{\alpha}(0), n=0,1,2,...$

10.24. Доказать справедливость следующего соотношения:

$$xL_{n-1}^{\alpha+1}(x)=(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)-nL_n^{\alpha}(x).$$

10.25. Показать, что для многочленов Лагерра имеет место равенство:

$$\left(L_n^{\alpha}(x)\right)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x).$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1.1. $\dfrac{b}{a^2+b^2}$; **1.2.** $\dfrac{a}{a^2+b^2}$; **1.3.** $n!$; **1.4.** $\pi/4$;

1.5. $\dfrac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\dfrac{\pi\, a^{n-1}}{\left(ac-b^2\right)^{n-1/2}}$;

1.6. 2, *если* $a \ge b \ge 0$; $\dfrac{2a}{b}$, *если* $0 < a < b$;

1.7. $\dfrac{(-1)^n n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$; **1.8.** $\dfrac{\pi}{a\sqrt{a^2-1}}$; **1.9.** $\dfrac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}}$; **1.10.** $\dfrac{\pi(b-a)}{2}$.

1.11. $\alpha > 1$; **1.12.** $\alpha < 0$; **1.13.** $1 < \alpha < 2$.

1.14. *сходится абсолютно при* $\alpha > -1$;
сходится условно при $\alpha \in (-2;-1]$.

1.15. *сходится абсолютно при* $\alpha > -1$;
сходится условно при $\alpha \in (-2;-1]$.

2.1. да; **2.2.** нет; **2.3.** нет; **2.4.** 0,25; **2.5.** $\pi/3$; **2.6.** 0,5; **2.7.** $\ln\dfrac{2e}{1+e}$; **2.8.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$;

2.13. $\dfrac{2\ln\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha}$; **2.14.** $\dfrac{2\left(\sin 2\alpha^2-\sin\alpha^2\right)}{\alpha}$;

2.15. $\displaystyle\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx-\sin\alpha\cdot e^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$;

2.18. $3f(y)+2yf'(y)$; **2.19.** $\sin x$; **2.20.** $ch\left(\sqrt{\lambda}x\right)$; **2.21.** $\dfrac{2}{\lambda}\left[ch\left(\sqrt{\lambda}x\right)-1\right]$;

2.24. $\pi\ln\dfrac{|a|+|b|}{2}$; **2.25.** 0, если $|a|<1$; $2\pi\ln|a|$, если $|a|>1$;

2.26. $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a\cdot\ln\left(1+|a|\right)$; **2.27.** $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)$; **2.28.** $\pi\arcsin a$;

2.29. $\dfrac{1}{2}\arcsin^2 a+2arctg\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\cdot\arcsin a$; **2.30.** $\pi\arcsin a-\arcsin^2 a$;

2.31. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} a \cdot \ln\left(1+a^2\right)$; **2.32.** $\pi \arcsin a$;**2.33.** $\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(a+1)$;

2.34. $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$; **2.35.** $\pi \arcsin\frac{b}{a}$; **2.36.** $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

3.4. сходится неравномерно; **3.5.** $a)$ сходится равномерно;

$b)$ сходится неравномерно; **3.6.** сходится равномерно;

3.7. $a)$ сходится равномерно; $b)$ сходится равномерно; $c)$ сходится неравномерно;

3.8. $a)$ сходится равномерно; $b)$ сходится неравномерно;

3.9. $a)$ сходится равномерно; $b)$ сходится неравномерно;

3.10 $a)$ сходится равномерно; $b)$ сходится неравномерно;

3.11 $a)$ сходится равномерно; $b)$ сходится неравномерно.

4.1. $\ln\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}$; **4.2.** $arctg\frac{\beta}{\lambda}-arctg\frac{\alpha}{\lambda}$; **4.3.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}$;

4.4. $\frac{\pi}{\beta^3}(\alpha\beta-\ln(1+\alpha\beta))$; **4.5.** а) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; 5б) $\frac{\pi}{2}\ln 2$; 5в) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$;

4.6. $2\pi\{(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\alpha\ln\alpha-\beta\ln\beta\}$;

4.7. $\frac{\pi}{2}\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\ln(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\beta^2\ln\beta-\alpha^2\ln\alpha\right\}$;

4.8. $\beta arctg\frac{2\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{4}\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$; **4.9.** $\pi\left(\sqrt{1-\alpha^2}-1\right)$;

4.10. нет; **4.11.** нет.

5.1. $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; **5.2.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$; **5.3.** $\frac{\pi}{2}$; **5.4.** $\frac{\pi}{4}$; **5.5.** $\frac{\pi}{6}$; **5.6.** $\frac{\pi}{4}$; **5.7.** $\frac{\pi}{4}$;

5.8. $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; **5.9.** $\frac{\pi}{4}$; **5.10.** $\frac{3\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; **5.11.** $\frac{3\pi}{16}$; **5.12.** $\frac{\pi\alpha^2}{2}\operatorname{sgn}\alpha$;

5.13. $\frac{\pi\alpha}{4}\operatorname{sgn}\alpha$; **5.14.** $-\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)$; **5.15.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)}$; **5.16.** $\frac{3}{8}\ln\frac{\alpha}{\beta}$;

5.17. $\alpha\ln\alpha-\alpha$; **5.18.** $\frac{\pi}{4}\{|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|\}$; **5.19.** 0; **5.20.** $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\beta^2/\alpha}$;

5.21. $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\beta^2/\alpha}\left\{\frac{\alpha a+2\alpha\beta^2-4b\alpha\beta}{2\alpha^2}\right\}$; **5.22.** $2\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$;

5.23. $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$; **5.24.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}$; **5.25.** $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2\alpha}\right)$;

5.26. $-\sqrt{\pi\alpha}+\frac{\pi}{2}\beta\,\mathrm{sgn}\,\beta$; **5.27.** $\frac{\pi}{4}e^{-\alpha}(1+\alpha)$.

6.1. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\tau\cdot\cos\omega x}{\omega}d\omega$; **6.2.** $\frac{2}{\pi a}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega a)\cos\omega x}{\omega^2}d\omega$;

6.3. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin[\omega(x-a)]-\sin[\omega(x-b)]}{\omega}d\omega$;

6.4. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\cdot\sin\omega x}{1-\omega^2}d\omega$; **6.5.** $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\omega x\cdot\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2}d\omega$;

6.6. $\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\omega\sin\omega x\,d\omega}{\left[\alpha^2+(\beta-\omega)^2\right]\cdot\left[\alpha^2+(\beta+\omega)^2\right]}$;

6.7. $\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)\cos\omega x\,d\omega}{\left[\alpha^2+(\beta-\omega)^2\right]\cdot\left[\alpha^2+(\beta+\omega)^2\right]}$;

6.8. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\omega^2/4}\cos\omega x d\omega$; **6.9.** $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\omega^2/4}\omega\sin\omega x d\omega$;

6.10. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$; **6.11.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\pi\omega}{1-\omega}$; **6.12.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sin\pi\omega}{1-\omega^2}$;

6.13. $-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha\omega}{\left(\alpha^2+\omega^2\right)^2}$; **6.14.** $\frac{2\sqrt{2}\omega^2}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^2}$ **6.15.** $\frac{2\sqrt{2}i\omega\left(1-3\omega^2\right)}{\sqrt{\pi}\left(1+\omega^2\right)^3}$.

7.1. $\frac{\pi}{8}$; **7.2.** $\frac{\pi a^4}{16}$; **7.3.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; **7.4.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; **7.5.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; **7.6.** $\frac{3\pi}{512}$;

7.7. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$; **7.8.** $\Gamma(p+1),\ p>-1$; **7.9.** $\frac{\pi}{\sin(2\pi/5)}$; **7.10.** $\pi\sqrt{2}$;

7.11. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$; **7.12.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$; **7.13.** $\frac{3\pi}{512}$; **7.14.** $B(\beta-\alpha;\alpha)$;

7.15. $\frac{1}{3}B\left(\alpha+\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$; **7.16.** $2^{p-1}B\left(\frac{p-1}{2};\frac{p+1}{2}\right)$; **7.17.** $\frac{\Gamma(p)}{\alpha^p}$;

7.18. $\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$; **7.19.** $2^{\frac{n}{2}-1}\alpha^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$; **7.20.** $\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$.

7.21. $\frac{\pi}{20\sqrt{5}}$; **7.22.** $\frac{\pi\sqrt{6}}{24}$; **7.23.** $\frac{2\pi}{\sqrt[6]{108}}$; **7.24.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$; **7.25.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$; **7.26.** $\frac{3\sqrt[4]{2}\pi}{64}$; **7.27.** $-\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$; **7.28.** 0; **7.29.** $\frac{\pi\ln a}{2a}$; **7.30.** $\frac{\pi^2\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}}$;

7.31. $\frac{\pi\sqrt[3]{4}}{3}\left(\sqrt{3}\ln 2+\pi\right)$; **7.32.** $\frac{2\pi^2}{3}$; **7.33.** $\frac{4\pi\ln 2}{3}$; **7.34.** $-\frac{\pi\ln 3}{2\sqrt{3}}$.

8.4. $bE\left(\frac{a}{b}\right)$; **8.5.** $\frac{1}{b}K\left(\frac{a}{b}\right)$; **8.6.** $b\left(K\left(\frac{a}{b}\right)-E\left(\frac{a}{b}\right)\right)$;

8.7. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}K\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; **8.8.** $\frac{1}{a}K\left(\frac{b}{a}\right)$;

8.9. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}K\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$;

8.10. $\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\lambda_0,k_0)$, $\lambda_0=\arcsin\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$, $k_0=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

9.2. $C_1J_{3/5}(2x)+C_2J_{-3/5}(2x)$; **9.3.** $C_1J_2\left(\sqrt{3}x\right)+C_2Y_2\left(\sqrt{3}x\right)$;

9.4. $\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{3/2}(x)$; **9.5.** $\frac{\sin x}{x}$; **9.6.** $\left(C_1J_\nu(ax)+C_2J_{-\nu}(ax)\right)\sqrt{x}$;

9.7. $J_0(0)=1,\ J_n(0)=0,\ n=1,2,\ldots,$

$$J_0'(0)=0,\ J_1'(0)=\frac{1}{2},\ J_n'(0)=0,\ n=2,3,\ldots$$

9.8. а) $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$; б) $J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$;

в) $J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\sin x-\frac{3}{x}\cos x\right)$;

г) $J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\sin x-\frac{\cos x}{x}\right)$;

д) $J_{-5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{3}{x}\sin x+\left(\frac{3}{x^2}-1\right)\cos x\right)$.

9.9. а) $Y_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$; б) $Y_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$;

в) $Y_{3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin x+\frac{\cos x}{x}\right)$; г) $Y_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$.

9.10. $J_4(x)=\frac{24-x^2}{x^2}J_2(x)-\frac{6}{x}J_1(x)$.

9.11. а) $x^7J_3(x)-4x^6J_4(x)+8x^5J_5(x)$; б) $xJ_1(x)$;

в) $x^9J_5(x)-4x^8J_6(x)+8x^7J_7(x)$; г) $x^5J_3(x)-2x^4J_4(x)$.

10.1. $P_0(x)=1,\ P_1(x)=x, P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right), P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\ P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right).$$

10.2. $P_n(-1)=(-1)^n,\ n=0,1,\ldots.$

10.3. $P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\ n=0,1,2\ldots$

10.4. а) Указание: использовать равенство $(x-h)\frac{\partial W}{\partial x}=h\frac{\partial W}{\partial h}$ и разложение (10.21).

б) Указание: связать $\frac{\partial W}{\partial x}$ с W и использовать (10.24).

в) Указание: использовать уравнение Лежандра и равенство (10.25).

10.5. $\dfrac{n(n+1)}{(2n+1)}$. Указание: воспользоваться формулой (10.26).

10.6. $\begin{cases} 0,\ m=2n, \\ \dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n+2)!!}, m=2n+1. \end{cases}$ **10.7.** $\dfrac{2n^2+2n-1}{(2n+3)(2n-1)(2n+1)}$.

10.8. $y(x)=2P_3(x)=5x^3-3x$.

10.9. $H_0(x)=1, H_1(x)=x, H_2(x)=x^2-1, H_3(x)=x^3-3x,$

$H_4(x)=x^4-6x^2+3, H_5(x)=x^5-10x^3+15x$.

10.10. $H_{2k}(0)=\dfrac{(-1)^k(2k)!}{2^k k!}, H_{2k+1}(0)=0,$

$H'_{2k}(0)=0, H'_{2k+1}(0)=\dfrac{(-1)^k(2k+1)!}{2^k k!}$.

10.12. 1. **10.13.** Указание: использовать рекуррентное соотношение (10.29), равенство б) в задаче 10.11 и метод математической индукции.

10.14. а) $\operatorname{ch} tx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}e^{t^2/2}}{(2n)!}H_{2n}(x)$, б) $\operatorname{sh} tx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n+1}e^{t^2/2}}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$,

в) $\cos tx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n}e^{-t^2/2}}{(2n)!}H_{2n}(x)$,

г) $\sin tx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n+1}e^{-t^2/2}}{(2n+1)!}H_{2n+1}(x)$.

10.16. $T_0(x)=1, T_1(x)=x, T_2(x)=2x^2-1, T_3(x)=4x^3-3x,$

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\ T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$.

10.17. $T_{2k}(0)=(-1)^k, T_{2k+1}(0)=0, k=0,1,2,\ldots,$

$T_n(1)=1, T_n(-1)=(-1)^n, n=0,1,2,\ldots$

10.20. Положить в равенстве задачи 10.19 $m=2$.

10.21. $L_0(x)=1, L_1(x)=1-x, L_2(x)=1-2x+\dfrac{x^2}{2}$,

$$L_3(x)=1-3x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{6},\ L_4(x)=1-4x+3x^2-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{24}.$$

$$L_5(x)=1-5x+5x^2-\frac{5x^3}{3}+\frac{5x^4}{24}-\frac{x^5}{120}.$$

10.22. $L_1^1(x)=-x+2,\ L_2^1(x)=\frac{x^2}{2}-3x+3,$

$$L_3^2(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2-10x+10,\ L_4^2(x)=\frac{x^4}{24}-x^3+\frac{15x^2}{2}-20x+15.$$

10.23. $L_n^\alpha(0)=\dfrac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}{n!}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача №1. Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл:

1) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^\alpha}dx$	11) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg^\alpha x dx}{(x^2+2)(e^x-1)^3}$
2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{x^\alpha}dx$	12) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)-2\ln x}{(\sqrt[4]{x+1}-1)^\alpha\cdot arctgx}dx$
3) $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^\alpha x}$	13) $\int\limits_0^1 x^\alpha\ln\frac{1}{x}dx$
4) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}dx}{(x-1)^\alpha\ln x}$	14) $\int\limits_0^1\frac{x^\alpha\ln x}{1-x}dx$
5) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg2x}{x^\alpha}dx$	15) $\int\limits_0^1\frac{x^\alpha\ln x}{1-x}dx$
6) $\int\limits_3^{+\infty}\frac{e^{-x}-\ln x}{(1+x^\alpha)^{\alpha-2}}dx$	16) $\int\limits_0^{0,5}\frac{\ln^\alpha(1/x)}{tgx}dx$

7) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{\left(\exp\left(1/x^2\right)-1\right)^{\alpha}}dx$	17) $\int_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}\ln x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}dx$
8) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln^{\alpha} x\cdot\sqrt[3]{arctg(1/x)}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	18) $\int_{0}^{0,5}\frac{\ln^{\alpha}(1/x)}{\sqrt{tgx}}dx$
9) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\sqrt{\ln x}}$	19) $\int_{0}^{1}(1-x)^{\alpha}\sin\frac{\pi}{1-x}dx$
10) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}}$	20) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}\cdot\sqrt[4]{\ln^3 x}}$

Задача №2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл на указанном множестве:

1) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\alpha^2-x^2}{\left(\alpha^2+x^2\right)^2}dx,\quad E=[0;2]$	11) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2},\ E=[0;1]$
2) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}\left((x-\alpha)^2+1\right)},\ E=(2;+\infty)$	12) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^{\alpha}},\ E=[0;1)$
3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x}dx,\ E=(-1;0)$	13) $\int_{0}^{1}\frac{arctg\alpha x}{\left(1-x^2\right)^{\alpha}}dx,\ E=[0;1)$
4) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}}{1+x}dx,\ E=(-1/2;0)$	14) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\alpha\cdot arctgx}{x^2+\alpha}dx,\ E=(0;+\infty)$
5) $\int_{0}^{1}\frac{\alpha^2-x^2}{\sqrt{x}\left(\alpha^2+x^2\right)^2}dx,\quad E=(0;1)$	15) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}arctgx}{4+x^3}dx,\ E=(0;2)$
6) $\int_{0}^{1}\frac{\alpha^2-x^2}{\sqrt{x}\left(\alpha^2+x^2\right)^2}dx,\quad E=(0;10)$	16) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}arctgx}{4+x^4}dx,\ E=(0;2)$
7) $\int_{0}^{1}\frac{x^2\alpha-\alpha^3}{\sqrt{x}\left(\alpha^2+x^2\right)^2}dx,\quad E=(0;1)$	17) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{x+\alpha}}{e^x}dx,\ E=[0;+\infty)$

8) $\int\limits_{3}^{+\infty} \dfrac{\alpha + x}{\left(\alpha^2 + x^2\right)^{3/2}} dx, \quad E = (0;+\infty)$	18) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \ E = (0;+\infty)$
9) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\alpha + x^2}{1 + \left(\alpha^2 + x^2\right)^2} dx, \ E = [0;+\infty)$	19) $\int\limits_{0}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx, \ E = (-1;1)$
10) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\alpha dx}{\sqrt{x}\left(\alpha^2 + x^2\right)}, \quad E = (0;+\infty)$	20) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\ln^{\alpha} x dx}{1 + x^3}, \ E = (0;+\infty)$

Указание: в вариантах 1,2,8,9,16 показать, что интеграл сходится равномерно на указанном множестве. В остальных вариантах показать, что интеграл сходится неравномерно на указанном множестве.

Задача №3. Вычислить интегралы, используя метод дифференцирования по параметру, а также значения известных интегралов (интегралов Лапласа (5.11), Эйлера-Пуассона, Френеля):

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{x^2 + 2x + 2} dx$	11) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2} \operatorname{ch} 6x dx$
2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{x^2 + 4x + 5} dx$	12) $\int\limits_{1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}} dx$
3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 \alpha x}{x^2\left(1 + x^2\right)} dx, \ \alpha > 0$	13) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\ln\left(1 - \alpha^2 x^2\right)}{x\sqrt{1 - x^2}} dx, \ \lvert\alpha\rvert < 1$
4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\cos \alpha x}{\left(1 + x^2\right)^2} dx, \ \alpha > 0$	14) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\ln\left(1 - \alpha^2 x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \ \lvert\alpha\rvert < 1$
5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 \alpha x}{x^2 - 2x + 5} dx, \ \alpha > 0$	15) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\ln\left(\alpha^2 + x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos^2 \alpha x}{x^2 - 6x + 10} dx, \ \alpha > 0$	16) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{\ln\left(1 + \alpha^2 x^2\right)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \ \lvert\alpha\rvert < 1$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{4x^2+4x+5}dx,\ \alpha>0$	17) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}\cdot\sin^3\beta x}{x^2}dx, \alpha>0,\ \beta>0$
8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2+2x\right)e^{-\left(x^2-4x\right)}dx$	18) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(x^2+4x+5\right)dx$
9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x^2-2x\right)e^{-4x^2+12x}dx$	19) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2x dx$
10) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2}\ \mathrm{ch}\,3x dx$	20) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 4x dx$

Задача №4. Используя эйлеровы интегралы, вычислить следующие интегралы:

1) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x-2}\ln(x-2)}{x^2+5x+6}dx$	11) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{\sin x}}{(1+0{,}5\cos x)^{3/2}}dx$
2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}\ln(x-1)}{x^2+2x}dx$	12) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^3 x}{(1+0{,}25\cos x)^4}dx$
3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}\ln(x-1)}{x^2+4x+3}dx$	13) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin^4 x}{(1+0{,}5\cos x)^5}dx$
4) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x-2}\ln(x-2)}{x^2-1}dx$	14) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\cdot\cos^4 x}{\left(4\sin^2 x+\cos^2 x\right)^4}dx$
5) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}\ln(x-2)}{x^2+x-2}dx$	15) $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)^2}}{(x+1)^3}dx$
6) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^2(1-x)^6}{\left(1+x^2\right)^5}dx$	16) $\int\limits_{2}^{3} \frac{\sqrt[4]{(x-2)^3(3-x)}}{(x+1)^3}dx$
7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^4(1-x)^6}{\left(1+x^2\right)^6}dx$	17) $\int\limits_{1}^{3} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(3-x)}}{(x+2)^3}dx$

8) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x \cdot \cos^{5/2} x}{(\sin x + \cos x)^6} dx$	18) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)^2}\,(x+2)}$
9) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^{5/2} x \cdot \cos^{7/2} x}{(\sin x + \cos x)^8} dx$	19) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(3-x)}\,(x+1)}$
10) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x \cdot \cos^6 x}{\left(\sin^2 x + 4\cos^2 x\right)^6} dx$	20) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{1+x^2}$

Задача № 5. Используя функции Бесселя первого рода, найти решение задачи Коши:

1) $x^2 y'' + 8xy' + 4x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$.
2) $x^2 y'' + 8xy' + 9x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1/3, \; y'(0) = 0$.
3) $x^2 y'' + 4xy' + 5x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1/2, \; y'(0) = 0$.
4) $x^2 y'' + 4xy' + 6x^2 y = 0, \;\; y(0) = 2, \; y'(0) = 0$.
5) $x^2 y'' + 2xy' + 3x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$.
6) $x^2 y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0, \;\; y(0) = 3, \; y'(0) = 0$.
7) $x^2 y'' + 10xy' + 2x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1/2, \; y'(0) = 0$.
8) $x^2 y'' + 10xy' + 5x^2 y = 0, \;\; y(0) = 1/3, \; y'(0) = 0$.
9) $x^2 y'' + 6xy' + 2x^2 y = 0, \;\; y(0) = 4, \; y'(0) = 0$.
10) $x^2 y'' + 6xy' + 3x^2 y = 0, \;\; y(0) = 2, \; y'(0) = 0$.
11) $x^2 y'' + 2xy' + \left(3x^2 - 2\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$.
12) $x^2 y'' + 2xy' + \left(9x^2 - 2\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 2$.
13) $x^2 y'' + 4xy' + \left(5x^2 - 4\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1/2$.
14) $x^2 y'' + 4xy' + \left(5x^2 - 4\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 3$.
15) $x^2 y'' + 2xy' + \left(4x^2 - 2\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1/3$.
16) $x^2 y'' + 6xy' + \left(3x^2 - 6\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$.
17) $x^2 y'' + 6xy' + \left(4x^2 - 6\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 4$.
18) $x^2 y'' + 2xy' + \left(7x^2 - 2\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 3$.
19) $x^2 y'' + 4xy' + \left(9x^2 - 4\right) y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1/2$.

20) $x^2 y'' + 6xy' + \left(2x^2 - 6\right)y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1/5.$

Задача №6. Выразить через полные эллиптические интегралы следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^4 \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}\cdot\sqrt{16-x^2}}$	11) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}\cdot\sqrt{x^2-4}}$
2) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{12-x^2}}dx$	12) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{81+x^2}\cdot\sqrt{9-x^2}}$
3) $\int\limits_6^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{x^2-36}}$	13) $\int\limits_0^6 \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}\cdot\sqrt{48-x^2}}$
4) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{49+x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}}$	14) $\int\limits_0^6 \frac{\sqrt{36-x^2}}{\sqrt{64-x^2}}dx$
5) $\int\limits_0^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}\cdot\sqrt{50-x^2}}$	15) $\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{144+x^2}\cdot\sqrt{x^2-25}}$
6) $\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{30-x^2}}dx$	16) $\int\limits_0^{11} \frac{x^2 dx}{\sqrt{169-x^2}\cdot\sqrt{121-x^2}}$
7) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}}$	17) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}\cdot\sqrt{x^2-4}}$
8) $\int\limits_7^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-49}\cdot\sqrt{x^2-1}}$	18) $\int\limits_0^5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{225-x^2}}dx$
9) $\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}\cdot\sqrt{12-x^2}}$	19) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}\cdot\sqrt{16-x^2}}$
10) $\int\limits_0^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{8-x^2}}dx$	20) $\int\limits_0^{10} \frac{\sqrt{100-x^2}}{\sqrt{121-x^2}}dx$

Задача №7. Представить функцию интегралом Фурье (N – номер варианта):
Вар. 1,2,3,4

$$f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{|x|}{N}, & |x|\le N,\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

Вар. 5,6,7,8

$$f(x)=\begin{cases}-x+N\operatorname{sgn}x, & |x|\le N,\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

Вар. 9,10,11,12

$$f(x)=\begin{cases}N\operatorname{sgn}x, & |x|\le N,\\ 0, & |x|>N.\end{cases}$$

Вар. 13,14,15,16

$$f(x)=\begin{cases}2x+N, & x\in[-N/2;0],\\ N, & x\in(0;N/2],\\ 0, & |x|>N/2.\end{cases}$$

Вар. 17,18,19,20

$$f(x)=\begin{cases}\sin Nx, & |x|\le 4\pi/N,\\ 0, & |x|>4\pi/N.\end{cases}$$

Задача №8. Используя свойства ортогональных многочленов Лежандра, Эрмита, Чебышева, Лагерра, решить следующие задачи.

В задачах 1)-4), найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению, если задано значение этой функции в точке $x=1$:

1) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-20y(x),\ y(1)=4.$

2) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-30y(x),\ y(1)=8.$

3) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-42\,y(x),\ y(1)=3.$

4) $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)y'(x)\right]=-56\,y(x),\ y(1)=2.$

В задачах 5)-8) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Лежандра:

5) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x+1)P_7(x)\right]^2dx.$

6) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x-1)P_8(x)\right]^2dx.$

7) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x+2)P_9(x)\right]^2dx.$

8) $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x-2)P_{10}(x)\right]^2dx.$

В задачах 9)-12) разложить заданные функции в ряд по многочленам Эрмита:

9) $f(x)=\cos 2x.$

10) $f(x)=\sin 2x.$

11) $f(x)=\cos 4x.$

12) $f(x)=\sin 4x.$

В задачах 13)-16) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Чебышева:

13) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{xT_{13}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

14) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\left[(2x+1)T_{14}(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

15) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{xT_{15}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

16) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{\left[(2x-1)T_{16}(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

В задачах 17)-20) вычислить интеграл, используя свойства многочленов Лагерра:

17) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{5/2} \left[L_{10}^{1/2}(x)\right]^2 dx.$

18) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{3/2} \left[L_{10}^{-1/2}(x)\right]^2 dx$

19) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{3} \left[L_{10}^{1}(x)\right]^2 dx.$

20) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} x^{3/2} \left[L_{8}^{-1/2}(x)\right]^2 dx$

Список литературы

1) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. – СПб.: Лань, 2016. – 800 с.
2) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3. – СПб.: Лань, 2009. – 656 с.
3) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
4) Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — М.: Дрофа, 2004. — 711 с.
5) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 504 с.
6) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 472 с.
7) Асланян А.Г., Приходько А.В., Татаринцев А.В. Математический анализ. Интегралы, зависящие от параметра. Спецфункции. – М.: МИРЭА, 2002. — 87 с.
8) Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. — 368 с.
9) Брычков Ю.А. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. Справочник. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 512 с.
10) Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — Долгопрудный: Интеллект, 2007. — 343 с.

11) Андре-Анго Математика для электро- и радио-инженеров. – М.: Наука, 1967. – 779 с.
12) Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. – М.: Высшая школа, 1970. — 512 с.
13) Бабич В.М., Григорьева Н.С. Ортогональные разложения и метод Фурье. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1983. —240 с.

Сведения об авторе

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Высшей математики Института кибернетики Московского технологического университета (МИРЭА).