ЛЕКЦИЯ 10. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Эйлеровыми интегралами называются гамма и бета функции:

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\ (p>0), \tag{1}$$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ (p>0,\ q>0). \tag{2}$$

В лекции 9 были изучены некоторые свойства, которыми обладают гамма и бета функции. Докажем равенство, связывающее обе эти функции.

Связь между бета и гамма функциями

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ (p>0,\ q>0). \tag{3}$$

Доказательство: В интеграле (2) выполним замену переменной $x=\dfrac{t}{t+1}$. Тогда $t=\dfrac{x}{x-1}$, $1-x=\dfrac{1}{t+1}$, $dx=\dfrac{dt}{(t+1)^2}$ и

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt,\ (p>0,\ q>0). \tag{4}$$

С учетом представления бета-функции формулой (4) преобразуем произведение $B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$:

$$B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt\cdot\int_0^{+\infty}x^{p+q-1}e^{-x}dx=\left[x=(t+1)u\right]=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt\cdot\int_0^{+\infty}(t+1)^{p+q-1}u^{p+q-1}e^{-(t+1)u}(t+1)du=$$

$$=\int_0^{+\infty}t^{p-1}dt\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}e^{-(t+1)u}du=$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du . \qquad (5)$$

Положим $\Phi(t,\xi) = \int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du$.

Так как $t^{p-1}\Phi(t,\xi) < t^{p-1}\Phi(t,0)$ при $t > 0$ и несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,0)dt$ сходится, так как равен $B(p,q)\cdot\Gamma(p+q)$, то несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt$ сходится равномерно по параметру ξ на любом отрезке $[0;d]$, $d > 0$. Поэтому

$$\lim_{\xi \to +0} \int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,\xi)dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1}\Phi(t,0)dt,$$

и обосновано последнее равенство в цепочке равенств (5).

Воспользуемся теоремой о перестановке двух несобственных интегралов. Проверим выполнение условий теоремы. Рассмотрим функцию

$$f(t,u) = t^{p-1} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u}, \ t \ge 0, \ u \ge \xi, \ p \ge 1, q \ge 1 .$$

1) На множестве $G = \{(t,u) : t \ge 0, \ u \ge \xi\}$ функция $f(t,u)$ непрерывна.

2) На любом конечном отрезке $t \in [0;a]$ несобственный интеграл $\int_{\xi}^{+\infty} f(t,u)du$ сходится равномерно, так как $|f(t,u)| \le a^{p-1} u^{p+q-1} e^{-u}$ и

$$\int_{\xi}^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du < \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du = \Gamma(p+q).$$

3) На любом конечном отрезке $u \in [\xi; b]$ несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(t,u)dt$ сходится равномерно, так как $|f(t,u)| \le t^{p-1} b^{p+q-1} e^{-\xi t}$ и

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-\xi t} dt = \frac{1}{\xi^p} \Gamma(p).$$

4) Сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} |f(t,u)| du$, так как

$$\int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} |f(t,u)| du = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_\xi^{+\infty} f(t,u) du = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} \Phi(t,\xi) dt.$$

Таким образом, все условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены. Переставляя в (5) интегралы, получим:

$$\lim_{\xi \to +0} \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} dt \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-(t+1)u} du = \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-tu} dt =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \int\limits_0^{+\infty} \frac{(tu)^{p-1} e^{-tu}}{u^p} d(tu) =$$

$$= \lim_{\xi \to +0} \int\limits_\xi^{+\infty} u^{q-1} e^{-u} du \cdot \Gamma(p) = \Gamma(q) \cdot \Gamma(p). \qquad (6)$$

Из (5) и (6) следует равенство (3), которое пока доказано для $p \ge 1,\ q \ge 1$. Теперь согласно доказанному при $p > 0,\ q > 0$

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}\ . \qquad (7)$$

Используя формулы понижения для бета и гамма функций в левой и правой частях равенства (7), получим

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \frac{q}{p+q+1} \cdot \frac{p}{p+q} B(p,q),$$

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}=\frac{pq\Gamma(p)\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}.$$

Откуда и следует равенство (3) ■

Пример 1. Вычислить интегралы

$$I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx,\ \ 0<p<1; \tag{8}$$

$$I_1(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx,\ 0<p<1; \tag{9}$$

$$I_2(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx,\ \ 0<p<1\cdot \tag{10}$$

Решение: В интеграле (8) выполним замену переменной $t=\dfrac{1}{1+x}$.

Тогда $t=\dfrac{x}{x-1}, x=\dfrac{1-t}{t},\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}$ и

$$I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}dt=B(1-p,p)=\frac{\pi}{\sin\pi p}\ .$$

Так как $I_1(p)=I'(p),\ I_2(p)=I''(p)$, то

$$I_1(p)=-\frac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p},\ \ I_2(p)=\frac{\pi^3\left(1+\cos^2\pi p\right)}{\sin^3\pi p}\ ■$$

Таким образом, при $0<p<1$ имеют место равенства:

$$I(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\pi p}$$

$$I_1(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p}$$

$$I_2(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}dx=\frac{\pi^3\left(1+\cos^2\pi p\right)}{\sin^3\pi p}$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}dx$.

Решение: Выполним замену переменной $t=x-1$. Тогда

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{t^2+5t+4}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{(t+1)(t+4)}dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t\ln t}{\sqrt{t}(t+1)(t+4)}dt=\frac{4}{3}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+4)}dt-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+1)}dt.$$

При получении последнего выражения было использовано разложение рациональной дроби в сумму простейших:

$$\frac{t}{(t+1)(t+4)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t+4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t+1}.$$

Далее воспользуемся полученным в примере 1 значениями для интегралов (8), (9):

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+1)}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^{(1/2)-1}\ln t}{t+1}dt=I_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2\cos(\pi/2)}{\sin^2(\pi/2)}=0;$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}(t+4)}dt=[t=4u]=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln 4u}{2\sqrt{u}(4u+4)}d(4u)=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln 4+\ln u}{2\sqrt{u}(u+1)}du=\frac{\ln 4}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{du}{\sqrt{u}(u+1)}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln u}{\sqrt{u}(u+1)}du=$$

$$=\frac{\ln 4}{2}I\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}I_1\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/2)}+0=\pi\ln 2.$$

Тогда

$$I=\frac{4}{3}\cdot\pi\ln 2-\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4\pi\ln 2}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\pi\ln 2}{3}$.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$.

Решение: С помощью дробно-линейной подстановки $t = \frac{2(1-x)}{x+2}$ данный интеграл приводится к виду бета-функции:

$$I = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^1 \sqrt{t}(1-t)^{-1/2}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{\sqrt{3}\pi}{12\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{24}.$$

Ответ: $\frac{\pi\sqrt{6}}{24}$.