ЛЕКЦИЯ 16.
МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА И ЛАГЕРРА

1. Многочлены Чебышева

Многочлены Чебышева определяются равенством:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1;1],\ n = 0,1,2,... \tag{1}$$

Формула Родрига для многочленов Чебышева имеет вид:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)!!} \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-1/2}\right]. \tag{2}$$

Здесь в соответствии с общей формулой

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n \rho(x)} \frac{d^n}{dx^n}\left[\rho(x) q^n(x)\right]$$

$$K_n = \frac{(2n+1)!!}{(-1)^n (2n+1)},\ \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ q(x) = 1-x^2.$$

Укажем ряд основных свойств многочленов Чебышева.

Свойство 1. Для многочленов Чебышева выполняется рекуррентное соотношение:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,\ n = 1,2,... \tag{3}$$

Доказательство: Пусть $t = \arccos x$. Тогда $x = \cos t$,

$$T_{n+1}(x(t)) = \cos[(n+1)t] = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t,$$

$$T_n(x(t)) = \cos nt,$$

$$T_{n-1}(x(t)) = \cos[(n-1)t] = \cos nt \cos t + \sin nt \sin t\ .$$

Откуда следует:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t -$$
$$-2\cos t \cos nt + \cos nt \cos t + \sin nt \sin t = 0.\ \blacksquare$$

Свойство 2. Функция $T_n(x)$ является решением дифференциального уравнения:

$$\left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) + n^2 y(x) = 0 \tag{4}$$

Доказательство: Пусть $y(x) = T_n(x),\ x = \cos t$.

Тогда $t = t(x) = \arccos x$, $t \in [0;\pi]$, $y(x) = \cos nt$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$y'(x) = -n\sin nt \cdot \frac{dt}{dx} = -n\sin nt \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n\sin nt}{\sin t},$$

$$y''(x) = \frac{n^2\cos nt\sin t - n\sin nt\cos t}{\sin^2 t}\frac{dt}{dx} =$$

$$= -\frac{n^2\cos nt\sin t - n\sin nt\cos t}{\sin^3 t}.$$

Подставляя в левую часть равенства (4) полученные выражения для $y(x), y'(x), y''(x)$, получим тождественный ноль, что и доказывает свойство 2

■

Свойство 3. Многочлены Чебышева обладают свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \pi/2,\ m = n \neq 0, \\ \pi,\ \ m = n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство: Выполним замену переменной $t = \arccos x$. Тогда $x = \cos t,\ T_n(x) = \cos nt,\ T_m(x) = \cos mt,\ dx = -\sin t dt$.

При $n \neq m$ получим:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\pi}^{0}\cos nt\cos mt\frac{(-\sin t)}{\sin t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[\cos(n-m)t + \cos(n+m)t\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)t}{n-m} + \frac{\sin(n+m)t}{n+m}\Bigg|_0^{\pi}\right] = 0.$$

Если $n = m \neq 0$, то

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\left[1+\cos 2nt\right]dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2nt}{2n}\Bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Если $n = m = 0$, то

$$\int_{-1}^{1} T_0(x)T_0(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \blacksquare$$

Свойство 4. Функция

$$\psi(x,t)=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2},\ x\in[-1;1],\ t\in(-1;1) \tag{6}$$

является производящей функцией для многочленов Чебышева, т.е. имеет место равенство

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n\ ,x\in[-1;1],\ t\in(-1;1)\ . \tag{7}$$

Доказательство: Пусть $x=\cos\omega$. Преобразуем следующее выражение, используя формулу Эйлера $e^{i\omega}=\cos\omega+i\sin\omega$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-te^{i\omega}}+\frac{1}{1-te^{-i\omega}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-te^{-i\omega}+1-te^{i\omega}}{1-te^{-i\omega}-te^{i\omega}+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-2t\cos\omega}{1-2t\cos\omega+t^2}=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\psi(x,t).$$

При $t\in(-1;1)$

$$\frac{1}{1-te^{i\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^ne^{i\omega n},\ \frac{1}{1-te^{-i\omega}}=\sum_{n=0}^{\infty}t^ne^{-i\omega n}\ .$$

Следовательно,

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}t^ne^{i\omega n}+\sum_{n=0}^{\infty}t^ne^{-i\omega n}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n\left(e^{i\omega n}+e^{-i\omega n}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos\omega n=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\cos(n\arccos x)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n\ \blacksquare$$

Свойство 5. Многочлены Чебышева обладают *фундаментальным свойством*, которое заключается в следующем. Рассмотрим всевозможные многочлены степени n с коэффициентом равным единице при старшей степени x: $p_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ ,x\in[-1;1]\ .$

Положим $M_{p_n}=\max\limits_{x\in[-1;1]}p_n(x)$. Оказывается, что наименьшее значение величина M_{p_n} достигает для $p_n(x)=\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$. Многочлен $T_n(x)/2^{n-1}$ называется *наименее уклоняющимся от нуля* на отрезке $[-1;1]$. $\blacksquare$

5. Многочлены Лагерра

Обобщенными многочленами Лагерра называются многочлены

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right],\ n = 0,1,2,\ldots,\alpha > -1 \qquad (8)$$

Формула (8) представляет собой формулу Родрига, в которой

$$K_n = n!,\ \rho(x) = x^{\alpha} e^{-x},\ q(x) = x.$$

При $\alpha = 0$ функции (8) обозначаются $L_n(x)$, т.е.

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right], n = 0,1,2,.. \qquad (9)$$

Выполним дифференцирование в правой части равенства (8):

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] = \left(e^{-x}\right)^{(n)} x^{n+\alpha} + C_n^1 \left(e^{-x}\right)^{(n-1)} (n+\alpha) x^{n+\alpha-1} +$$

$$+ C_n^2 \left(e^{-x}\right)^{(n-2)} (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha-2} + \ldots +$$

$$+ e^{-x}(n+\alpha)(n+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)x^{\alpha} = (-1)^n e^{-x} x^{\alpha}\left\{x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x^{n-k}\right\},$$

$$a_{n-k} = (-1)^k C_n^k (\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1). \qquad (10)$$

Тогда получим следующее выражение для многочлена Лагерра n-го порядка:

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\left\{x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x^{n-k}\right\}. \qquad (11)$$

Свойство 1. Многочлены Лагерра обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},\ m = n. \end{cases}$$

Доказательство: Из равенства (11) следует, что $\left(L_n^{\alpha}(x)\right)^{(n)} = (-1)^n$.
Пусть $m < n$. Применяя m раз формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] L_m^{\alpha}(x) dx =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] L_m^{\alpha}(x) dx = \frac{1}{n!}\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] L_m^{\alpha}(x) \Big|_0^{+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] \left(L_m^{\alpha}(x)\right)' dx \right\} = \ldots =$$

$$= \frac{(-1)^m}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] \left(L_m^{\alpha}(x)\right)^{(m)} dx =$$

$$= \frac{(-1)^{2m}}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] dx = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}\left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] \Big|_0^{+\infty} = 0.$$

Если $m = n$, то

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(x) dx = \frac{(-1)^{2n}}{n!} \int_0^{+\infty} \left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right] dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}. \blacksquare$$

Свойство 2. Многочлен Лагерра (8) является частным решением дифференциального уравнения второго порядка:

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x) y'(x) + ny(x) = 0. \tag{12}$$

Доказательство: Воспользуемся формулами (10), (11) для многочленов Лагерра. Тогда

$$y(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ x^n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} x^{n-k} \right\},$$

$$y'(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ n x^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} (n-k) x^{n-k-1} \right\},$$

$$y''(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ n(n-1) x^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} (n-k)(n-k-1) x^{n-k-2} \right\}.$$

Подставим полученные выражения для функции $y(x)$ и ее производных в левую часть уравнения (12) и выполним необходимые преобразования:

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x) y'(x) + ny(x) =$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{n(n-1)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{n-k}(n-k)(n-k-1)x^{n-k-1}\right\}+$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\left\{n(\alpha+1)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)(\alpha+1)x^{n-k-1}\right\}-$$

$$-\frac{(-1)^n}{n!}\left\{nx^n+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)x^{n-k}\right\}+\frac{(-1)^n}{n!}\left\{nx^n+\sum_{k=1}^{n}a_{n-k}nx^{n-k}\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\left(n^2+\alpha n+a_{n-1}\right)x^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)x^{n-k-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{n}a_{n-k}kx^{n-k}\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\left(n^2+\alpha n+a_{n-1}\right)x^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\left[a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)+a_{n-k-1}(k+1)\right]x^{n-k-1}\right\}=0.$$

Равенство нулю последнего выражения цепочки преобразований следует из формулы (10) для коэффициентов a_{n-k}. Действительно,

$$a_{n-1}=(-1)C_n^1(\alpha+n)=-n(\alpha+n),$$

$$\frac{a_{n-k}}{a_{n-k-1}}=\frac{(-1)^kC_n^k(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)}{(-1)^{k+1}C_n^{k+1}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+n-k+1)(\alpha+n-k)}=$$

$$=-\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}(\alpha+n-k)}=-\frac{k+1}{(n-k)(\alpha+n-k)}.$$

Откуда и следует, что

$$n^2+\alpha n+a_{n-1}=0,\ a_{n-k}(n-k)(n-k+\alpha)+a_{n-k-1}(k+1)=0.$$

Поэтому многочлен Лагерра (8) является частным решением уравнения (12)

■

Свойство 3. Функция

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}e^{-\frac{xt}{1-t}},\quad |t|<1,\ \alpha>-1, \tag{13}$$

является производящей функцией для многочленов Эрмита, т.е. имеет место равенство

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{\alpha}(x)t^n\ ,\ |t|<1,\ \alpha>-1\ . \qquad (14)$$

Доказательство: Для доказательства данного утверждения воспользуемся интегральной теоремой Коши.

Интегральная теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границе Γ и непрерывна в $\overline{D}=D\cup\Gamma$. Тогда $f(z)$ имеет производные любого порядка в области D и $\forall z_0\in D$

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

Согласно формуле (8) и интегральной теореме Коши

$$n!x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)=\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right]=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_x}\frac{z^{n+\alpha}e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz,$$

где γ_x – малый контур, охватывающий точку x.

Введем новую переменную $t=1-\frac{x}{z}$.

Тогда $z=\frac{x}{1-t}=\frac{xt}{1-t}+x, dz=\frac{x}{(1-t)^2}dt$. Если $z=x$, то $t=0$. Выполняя указанную замену переменной, получим:

$$n!x^{\alpha}e^{-x}L_n^{\alpha}(x)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\gamma_0}\frac{\left(\frac{x}{1-t}\right)^{n+\alpha}e^{-\frac{xt}{1-t}-x}}{\left(\frac{xt}{1-t}\right)^{n+1}}\cdot\frac{x}{(1-t)^2}dt=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}e^{-x}x^{\alpha}\oint_{\gamma_0}\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}\cdot\frac{dt}{t^{n+1}}=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}e^{-x}x^{\alpha}\oint_{\gamma_0}\frac{\Psi(x,t)}{t^{n+1}}dt=e^{-x}x^{\alpha}\frac{\partial^n\Psi(x,0)}{\partial t^n}.$$

Следовательно, $L_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi(x,0)}{\partial t^n}$ и

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi(x,0)}{\partial t^n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n . \blacksquare$$

Свойство 4. Справедливо следующее рекуррентное соотношения для полиномов Лагерра:

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) + (x - \alpha - 2n - 1)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0,\ n = 1,2,... \tag{15}$$

Решение: Нетрудно проверить, что функция (13) удовлетворяет уравнению

$$(1-t)^2 \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)]\Psi(x,t) = 0 . \tag{16}$$

Подставим в (16) разложение (14) для производящей функции:

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n^{\alpha}(x) t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n = 0 .$$

Приравнивая нулю коэффициенты при t^n, получим (15). ■