$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=$$

$= \cancel{\alpha}\, 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1 \;\cancel{\forall\Delta}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Семинар 6 (13.10.16)

Задача: $\lim_{n\to\infty} \cos(\pi\sqrt{4n^2+n})=$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos(\cancel{2\pi n}\,\pi\sqrt{4n^2+n}-2\pi n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\frac{n}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)}\right)=$$

88

$$= \lim_{n\to\infty} \cos \frac{\pi}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задача $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right) =$$

огр

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right) =$$

$$= \lim \sin \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}}_{\to 0} = \sin 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim 2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\cdot\underbrace{\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}}_{\to 0} = 0$$

Задача. $X_1 = \frac{1}{2}$ $\quad x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$, $n \in N$

$$X_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$X_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

Гипотеза: $X_n = \frac{n}{n+1}$

База индукции:

$n=1$. $x_1=\frac{1}{2}$ - верно.

Шаг индукции

Предположим, что $x_k=\frac{k}{k+1}$, тогда:

$$x_{k+1}^{*}=\frac{1}{2-x_k}=\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}}=\frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}}=$$

$$=\frac{k+1}{k+2}$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} x_n \frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

Последовательность x_n называется <u>возрастающей</u> если

$$(\forall n\in\mathbb{N}):x_{n+1}\geq x_n$$

и <u>строго возрастающей</u>, если:

$$(\forall n\in\mathbb{N}):x_{n+1}>x_n$$

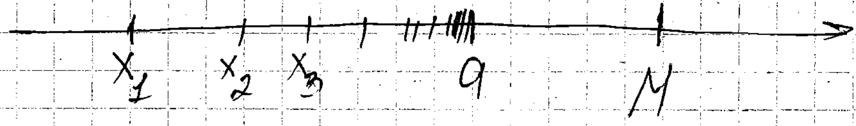
Последовательность x_n называется **ограниченной сверху**

если

$$(\exists M>0):(\forall n\in N),\ x_n \le M.$$

Теорема (Признак Вейерштрасса)

Если последовательность (x_n) возрастает и ограничена сверху, то она сходится (то есть имеет конечный предел)



признак - это достаточное условие

критерий - необходимое и достаточное условие

свойство - необходимое условие

Задача

$x_1 = 1$

$x_{n+1} = \frac{1}{3 - x_n}, \quad n \in N$

Доказать, что послед-ть сходится

$x_2 = \frac{1}{2} = 0,5$

$x_3 = \frac{2}{5} = 0,4$

$x_4 = \frac{1}{3 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{13} = 0,3846$

$x_5 = \frac{13}{34} \approx 0,3824$

Гипотеза $0 \le x_n \le 1$.

1) База индукции, $n = 1$

$\cancel{x_n}$ $0 \le 1 \le 1$ - верно

2) Шаг индукции.

$\cancel{x_k}$ Предположение $0 \le x_k \le 1$, то

$2 \le 3 - x_k \le 3$

$\frac{1}{3} \le \frac{1}{3 - x_k} \le \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} \le x_{k+1} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x_{k+1} \le 1$

Гипотеза посл. (x_n) - строго убывает

$x_{n+1} < x_n$

База индукции $n=1$

$x_2 < x_1$, $\frac{1}{2} < 1$ - истина

Шаг индукции

Предположение ~~$x_n \geq x_{n+1}$~~ $x_k < x_{k-1}$

$x_{k+1} = \frac{1}{3-x_k} < \frac{1}{3-x_{k-1}} = x_k$

$x_{k+1} < x_k$

Согласно признаку Вейерштрасса последовательность (x_n) имеет ~~предел~~ конечный предел a

$a = \frac{1}{3-a}$

$3a - a^2 = 1$; $-a^2 + 3a - 1 = 0$

$a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\lim x_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,3820$

x_1

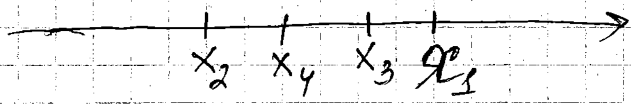
Задача $x_1=4$, $x_{n+1}=\frac{8}{2+x_n}$

Д-ть, что посл-ть имеет предел.

$$x_2=\frac{8}{2+4}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$x_3=\frac{8}{2+\frac{8}{6}}=\frac{48}{20}=\frac{12}{5}$$

$$x_4=\frac{8}{2+\cancel{8}\frac{12}{5}}=\frac{\cancel{80}40}{22}=\frac{20}{11}$$



Гипотеза: $x_{2n}<x_{2n+2}$, т.е.

под послед. (x_{2n}) строго возрастает

База индукции $n=1$.

$x_2<x_4$ — истина

Шаг индукции

Предположим, что $x_{2k-2}<x_{2k}$

$$x_{2k+2}=\frac{8}{2+x_{2k+1}}=\frac{8}{2+\frac{8}{2+x_{2k}}}=\frac{8}{\frac{4+2x_{2k}+8}{2+x_{2k}}}=$$

$$=\frac{16+8x_{2k}}{12+2x_{2k}}=\frac{8+4x_{2k}}{6+x_{2k}}=\frac{(24+4x_{2k})-16}{6+x_{2k}}=$$

$$=4-\frac{16}{6+x_{2k}}>4-\frac{16}{6+x_{2k-2}}=x_{2k}$$

$$x_{n+1}=\frac{8}{2+x_n}<\frac{8}{2}=4$$

Аналогично доказывается, что подпоследовательность (x_{2n-1}) строго убывает.

Из признака Вейерштрасса следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=b$

$$\underset{\downarrow a}{x_{2n}}=\frac{8}{2+\underset{\downarrow b}{x_{2n-1}}} \qquad \underset{\downarrow b}{x_{2n+1}}=\frac{8}{2+\underset{\downarrow a}{x_{2n}}}$$

$$\begin{cases} a=\frac{8}{2+b} \\ b=\frac{8}{2+a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+2a=8 \\ ab+2b=8 \end{cases}$$

(1) − (2)

$2a=2b$

$a=b$

$a^2+2a-8=0$

$a_* = \frac{-2\pm 6}{2}$ $\quad a_1=2$ $\quad \cancel{a_2}$

Ответ: $\lim (x_n) = 2$

Задача: $\lim \frac{5^n}{n!}$

$$x_n = \frac{5^n}{n!} \qquad x_{n+1} = \frac{5\cdot 5^n}{n!(n+1)}$$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{5}{n+1} < 1$ при больших $n \Rightarrow$

~~строго~~ $\Rightarrow$ послед-ть (x_n) строго убывающая.

Согласно признаку Вейерштрасса послед-ть (x_n) имеет конечный предел a.

$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to a} = \underbrace{\frac{5}{n+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x_n}_{\to a}$$

$$a = 0 \cdot a$$

$$a = 0$$

Ответ: $\lim (x_n) = 0$

Задача $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^n}{n^3}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2\cdot \cancel{2^n} \cdot n^3}{(n+1)^3 \cdot \cancel{2^n}} = \frac{2 \cdot n^3}{(n+1)^3} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^3$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2 \Rightarrow$ при достаточно больших n $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \Rightarrow$ последовательность строго возрастает

Предположим, что последовательность (x_n) ограничена сверху, по признаку Вейерштрасса последов.-ть имеет конечный предел a

$$\underset{\downarrow a}{x_{n+1}} = 2\underset{\downarrow 2}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3} \cdot \underset{\downarrow a}{x_n}$$

$a = 2a$

$a = 0$ - невозможно.

Значит, последовательность (x_n) не ограничена сверху

<u>Ответ:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = +\infty$

<u>Задача:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} =$

$$x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$$

$$x_{n+1} = \frac{n!(n+1)}{(2n+1)!!(2n+3)}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\cancel{n!}(n+1)\cdot\cancel{(2n+1)!!}}{\cancel{(2n+1)!!}(2n+3)\cdot\cancel{n!}} = \frac{n+1}{2n+3} < 1$$

Последовательность (x_n) убывающая

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}\cdot x_n$$

$$a \qquad \qquad \qquad \qquad a$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}a$$

$$a = 0$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Задача

$$x_1 = \sqrt{5}$$

$$x_2 = \sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$x_3 = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots+\sqrt{5}}}}_{n \text{ радикалов}}$$

Гипотеза посл-ть (x_n) возраст.

$$x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$$

База индукции — истина.
Шаг индукции.
Предположим, что $x_k > x_{k-1}$
Тогда: $x_{k+1} = \sqrt{5+x_k} > \sqrt{5+x_{k-1}} = x_k$

Гипотеза $x_n < 100$
База индукции ~~истина~~ $x_1 = \sqrt{5} < 100$
Шаг индукции: Предположим, что $x_k < 100$. Тогда

$$x_{k+1} = \sqrt{5+x_k} < \sqrt{5+100} = \sqrt{105} < 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{k+1} < 100.$$

По признаку Вейерштрасса $\exists \lim\limits_{n\to} x_n = a$

$$x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$$

$x_{n+1} \to a$, $x_n \to a$

$$a = \sqrt{5+a} \Rightarrow a^2 = 5 + a$$

99

$$a^2 - a - 5 = 0$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

Задача. [redacted]

С помощью признака Вейерштрасса док-ть, что посл-ть сходится

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)\left(1 - \frac{1}{3^3}\right)\left(1 - \frac{1}{4^3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} < 1 \Rightarrow (x_n) \text{ - у строго}$$

убывает

Согласно признаку Вейерштрасса посл-ть x_n имеет предел.

Задача: $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{8}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$$

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) \ldots \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1.$$

$\ln x_n < e \Rightarrow$

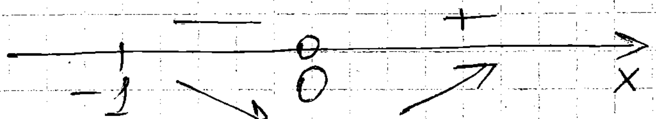
$\Rightarrow x_n < e$

Согласно признаку Вейерштрасса посл-ть (x_n) сходится.

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in (-1, +\infty)}$$

$$f(x) = x - \ln(1+x), \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$



$$(\forall x \in (-1, +\infty)) \; f(x) \geq f(0) = 0 - \ln 1 = 0$$

$$x - \ln(1+x) \geq 0$$

$$\ln(1+x) \leq x$$

Задача $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Согласно признаку Вейерштрасса $\exists \lim x_n = a$

$$\boxed{a = \frac{\pi^2}{6}}$$

Задача $x_n = \frac{|\cos 1|}{2} + \frac{|\cos 2|}{4} + \frac{|\cos 3|}{8} + \ldots + \frac{|\cos n|}{2^n}$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{|\cos(n+1)|}{2\cdot 2^n} \geqslant 0$$

$$x_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1$$

Согласно признаку Вейерштрасса, последовательность (x_n) сходится.

Неравенство Бернулли

$(1+x)^n \geq 1+nx$ $\left(x>-1,\ n\geq 2\right.$

Равенство лишь при $n=0$

Рассмотрим 2 посл-ти

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$x_1=2$

$x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2{,}25$

$x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2{,}37$

$x_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{125}{64}\approx 2{,}44$

Докажем, что послед (x_n) строго возраст.

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$x_{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\geqslant$$

$$>\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=1$$

Имеем $x_{n+1}>x_n$, т.е послед (x_n) строго возрастает.

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$y_{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}\frac{n-1}{n}>\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n-1}{n}=$$

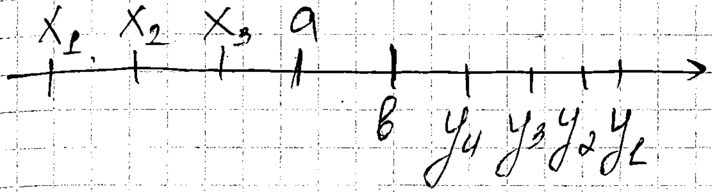
$$=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=1$$

Послед (y_n) строго убывает

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$y_n = x_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow y_n > x_n$$



Согласно признаку Вейерштрасса

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{и} \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ b}}{y_n} = \underset{\substack{\downarrow\\ a}}{x_n}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1+\frac{1}{n}}\Big)$$

$$a = b$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

Euler (Эйлер)

$$\boxed{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e}$$

Утв $\lim\limits_{n\to\infty}(1+y_n)^{z_n}=e^a$, $y_n \to 0$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n \cdot z_n) = a$

Замечание Если $a=+\infty$, то $e^a=+\infty$. Если $a=-\infty$, то $e^a=0$

Задача $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n =$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1-2n}{n^2+n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to}\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)^{z_n (n)}=$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}})=0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2}{n^2+n+1}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=-2$

$$\lim\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

<u>Задача</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2-3}\right)^{n^2}$$

$z_n = n^2$, $y_n = \frac{5}{n^2-3}$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2-3} = 5\cdot\lim\frac{1}{n^2-3} =$

$= 5\cdot 0 = 0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n\cdot z_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^2-3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{1-\frac{3}{n^2}} = 5$

$$\lim\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2} = e^5$$

<u>Семинар 7. (15.10.16)</u>

<u>Второй замечательный предел (ВЗП)</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ \left[1^\infty\right]$$