Следующая наша тема это алгоритмы нахождения тупиковых ДНФ для данной функции. Пожалуйста, прочтите и разберите п. 2.6-2.8 главы 2. Далее некоторые важные комментарии.

Сначала давайте несколько уточним терминологию. В математике (и в книге в том числе) часто используются термины "максимальный" и "минимальный" в нескольких различных смыслах, что иногда может привести к путанице. Самый важный случай, который нам потребуется, это максимальные и минимальные элементы частично упорядоченного множества (ЧУМа). Напомним, что *частично упорядоченным множеством* называется множество, на котором введено симметричное и транзитивное отношение $\preceq$, называемое *отношением частичного порядка.* Наиболее часто встречающимся примеров является некоторое множество X подмножеств фиксированного множества Ω (не обязательно состоящее из всех подмножеств), а отношение это обычное отношения включения. (Базовая ситуация, в которой это встречается в книге, это когда Ω является носителем некоторой булевой функции, а X это все грани булева куба, содержащиеся в этом носителе. Но в жизни встречаются и другие примеры.)

Определение 1. *Элемент $z \in X$ называется максимальным в ЧУМе X, если не существует такого $y \in X$, что $y \neq z$ и $z \preceq y$.*

Аналогично, элемент $z \in X$ называется минимальным в ЧУМе X, если не существует такого $y \in X$, что $y \neq z$ и $y \preceq z$.

Таким образом, элемент называется максимальным не тогда, когда он "больше всех" (этот смысл мы в быту привыкли вкладывать в слово "максимальный"), а когда нет никого больше его. В частности, максимальных, как и минимальных элементов в ЧУМе может быть несколько. Обратите внимание, что в книге понятие "минимальной ДНФ" (опр 66) не соответствует только что данному определению (это, к сожалению, часто бывает с такими "нагруженными" разными смыслами словами) а для минимальных в нашем смысле ДНФ и покрытий в книге используется термин "тупиковые". Зато понятие "максимальный интервал" (опр 71) в точности соответствует нашему.

Задача нахождения тупиковых ДНФ для данной булевой функции распадается на два совершенно разнородных этапа, что, к сожалению, не отмечено в книжке. Первый этап это нахождение *сокращенной ДНФ*. Этого определения, к сожалению, в книге нет!

Определение 2. *Сокращенной ДНФ для данной булевой функции называется дизъюнкция всех конъюнкций, соответствующих максимальным интервалам.*

Сокращенная ДНФ является намного более экономной, чем совершенная, и при этом все тупиковые ДНФ получаются из нее удалением некоторых конъюнкций. (А иногда даже бывает, что она уже является единственной тупикой.) Поэтому второй шаг состоит в том, чтобы из сокращенной ДНФ, или, то равносильно, из покрытия носителя максимальными интервалами, выбрать тупиковые. Эта задача о выборе тупикового покрытия встает в самых разных ситуациях, поэтому ниже мы опишем ее в общем контексте, безотносительно к природе элементов множества, тупиковое покрытие которого мы ищем.

Нахождение минимального ("тупикового") покрытия.

Дано некоторое конечное множество Ω и некоторый конечный набор его конечных подмножеств A_i, $i \in I$. Обозначим $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. В этом случае говорится, что множества A_i образуют покрытие множества $A \subset \Omega$. (В книге обсуждается покрытие носителя булевой функции максимальными интервалами.)

Конечно, множества A_i могут перекрываться, и многие элементы множества A могут быть покрыты несколькими множествами A_i. Более того, часто такое покрытие множества A оказывается избыточным в том смысле, что некоторые множества A_i можно удалить таким образом, что оставшиеся все равно образуют покрытие множества A. Так вот, наша задача состоит в перечислении "самых экономных" покрытий множества A некоторыми из множеств A_i.

Более строго задача формулируется так: требуется перечислить все минимальные (по включению) подмножества $J \subset I$, такие что $A = \bigcup_{i \in J} A_i$. Такие подмножества называются минимальными (тупиковыми) покрытиями множества A.

Первое полезное понятие — это *матрица инциденции покрытия*, заголовками столбцов которой являются имена элементов покрытия I, а заголовками строк — элементы множество A. На пересечении столбца $i \in I$ и строки $a \in A$ стоит 1, если $a \in A_i$, и 0 в противном случае.

Далее вводится понятие *ядра покрытия* — это подмножество $K \subset I$, состоящее из тех $i \in I$, для которых существует такое $a \in A$, что a покрыто **только** множеством A_i, т.е. $a \in A_i$ и $a \notin A_j$ при $j \neq i$. На языке матрицы инциденции это те столбцы, в которых хотя бы одна единичка является единственой единичкой в своей строке. Множества A_i из ядра покрытия обязательно должны присутствовать в любом, в том числе и минимальном, покрытии, так что они автоматически покрывают множество $A_K = \bigcup_{j \in K} A_j$.

Тем самым алгоритм нахождения ядра покрытия позволяет заметно упростить задачу: найдя непустое ядро K, мы тем самым находим ту часть покрытия, которая точно войдет в любое покрытие множества A, поэтому нам остается только позаботиться о тех элементах множества A, которые не покрыты ядровой частью покрытия. Тем самым мы приходим к той же задаче, но уже с меньшим множеством $\bar{A} := A \setminus A_K$ и меньшим покрытием $\bar{A}_i := A_i \setminus A_K$, $i \in I \setminus K$.

К сожалению, такую редукцию можно сделать только один раз: нетрудно показать (докажите!), что покрытие $\bar{A}_i := \bigcup j \in \bar{I}$, где $\bar{I} = I \setminus K$ уже имеет пустое ядро.

А что же делать, когда ядро оказывается пустым, т.е. когда покрывающих множеств очень много? Это достаточно трудная задача, и приходится тем или иным способом организовывать прямой перебор. Но в случае тех покрытий, которые возникают при минимизации ДНФ от четырех и менее переменных этот перебор (после выделения ядра) оказывается еще очень простым, и его, как правило, нетрудно сделать просто вручную. Обсуждение же общего алгоритма для решения этой задачи выходит за рамки нашего курса.