ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.
Основные тезисы

Кирсанов М.Н., МЭИ(ТУ)
Показеев В.В., МГТУ "МАМИ"

5 сентября 2003 г.

Оглавление

Глава 1

МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ГРУППЫ

1.1 Множества

1. Два множества A и B называются равными ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

2. Множество A называется *подмножеством* множества B если любой элемент множества A принадлежит множеству B.

3. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, $A \neq \emptyset$, то A называется *собственным подмножеством* B. В этом случае B содержит хотя бы один элемент, не принадлежащий A.

4. *Объединением* множеств A и B (обозначение $A \cup B$) называется множество элементов x таких, что x принадлежит хотя бы одному из двух множеств A или B

5. *Пересечением* множеств A и B (обозначение $A \cap B$) называется множество, состоящее из элементов x, которые принадлежат и множеству A и множеству B

6. *Разностью* множеств A и B называется множество всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B

7. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

8. *Абсолютным дополнением* множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A, т.е. множество $\bar{A} = U \backslash A$, где U – универсальное множество

9. Свойства операций

   (a) Коммутативность объединения и пересечения:
   $A \bigcup B = B \bigcup A$,
   $A \bigcap B = B \bigcap A$.

   (b) Ассоциативность объединения и пересечения:
   $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$,
   $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$.

   (c) Дистрибутивность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения
   $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$,
   $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

(d) Идемпотентность объединения и пересечения
$A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$.

(e) Свойства универсального и пустого множеств
$A \bigcup U = U$, $A \bigcap U = A$,
$A \bigcup \emptyset = A$, $A \bigcap \emptyset = \emptyset$,
$A \bigcup \overline{A} = U$, $A \bigcap \overline{A} = \emptyset$.

(f) Закон двойного дополнения $\overline{(\overline{A})} = A$.

(g) Законы де Моргана[1]
$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$,
$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

10. Парадокс Рассела[2]. Рассмотрим множество F, содержащее те и только те множества, которые не являются элементами самих себя: $F = \{\, M|\ M-$ множество и $M \notin M\,\}$. Парадокс состоит в том, что после такого способа задания множества F мы не можем однозначно ответить на вопрос: само множество F *как элемент* принадлежит F или нет?

11. Множество всех подмножеств данного множества называют булеаном (B) множества. $A = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, $|A| = n$. Доказать, что $|B(A)| = 2^n$

1.2 Соответствие, отображение

1. *Упорядоченной парой* называют пару элементов (x, y) такую, что равенство двух пар $(x, y) = (a, b)$ возможно тогда и только тогда, когда $x = a$ и $y = b$.

2. *Прямым (декартовым) произведением* двух множеств A и B называется множество $A \times B = \{(x, y)|\ x \in A,\ \ y \in B\,\}$

3. Три свойства прямого произведения.
$$A \times \emptyset = \emptyset,$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

4. *Соответствием* между множествами A и B называют любое подмножество G их прямого произведения.

5. *Областью определения соответствия* (или *первой проекцией*) называется множество $DomG =$пр$_1 G = \{\, x|\ \ (x, y) \in G\,\}$

6. *Областью значений соответствия* (или *второй проекцией*) называется множество $ImG =$пр$_2 G = \{\, y|\ \ (x, y) \in G\,\}$.

7. *Сечением соответствия G по элементу x_0* называется множество $G|_{x_0} = \{y(x_0, y) \in G\}$.

8. *Сечением соответствия G по элементу y_0* называется множество $G|_{y_0} = \{\, y(x, y_0) \in G\,\}$.

[1]Августус Морган (1806–1871) – шотландский математик, первый президент Лондонского математического общества, один из основателей формальной логики.

[2]Рассел Бертран Артур Вильям (1872-1970) – английский математик, философ идеалист, общественный деятель, лауреат Нобелевской премии по литературе (1950).

9. *Соответствием, обратным соответствию* G, называется множество

$$G^{-1} = \{\, (y,x) |\ (x,y) \in G\,\}.$$

10. Пустым называется соответствие, которое не содержит ни одного элемента.

11. Соответствие называется полным, если $G = A \times B$.

12. Матрицы, каждый элемент которых равен нулю или единице, называются булевыми.

13. Дизъюнкция $\vee$ и конъюнкция $\wedge$. $\begin{array}{ll} 1 \vee 1 = 1 & 1 \wedge 1 = 1 \\ 1 \vee 0 = 1 & 1 \wedge 0 = 0 \\ 0 \vee 1 = 1 & 0 \wedge 1 = 0 \\ 0 \vee 0 = 0 & 0 \wedge 0 = 0 \end{array}$

14. Пусть заданы три множества X, Y и Z и два соответствия – $G_1 \subset X \times Y$ и $G_2 \subset Y \times Z$. Композицией соответствий G_1 и G_2 называется подмножество G_3 прямого произведения $X \times Z$: $G_3 = G_2 \circ G_1 = \{\, (x,z) \mid\ (x,y) \in G_1,\ \ (y,z) \in G_2\,\}$.

15. Композиция $G_2 \circ G_1 \neq \emptyset$, если пересечение $Dom\, G_2 \cap Im G_1 \neq \emptyset$.

16. Соответствие $G \subset X \times Y$ называется *отображением*, если область определения соответствия совпадает с множеством X (т.е. $Dom\, G = X$ или пр$_1 G = X$).

17. Отображение называется функциональным (или *однозначным*), если любое сечение $G|_x$ содержит только один элемент.

18. Шесть свойств отображений. Если $f : X \to Y$ и $A_1 \subset A_2 \subset X$, $B_1 \subset B_2 \subset Y$, то
    1. $f(A_1) \subset f(A_2)$,
    2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
    3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$,
    4. $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,
    5. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
    6. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

19. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* или отображением на множество Y, если $Imf = Y$. Другими словами, f сюръективно, если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз, т.е. $\forall y \in Y\ \exists\, x \in X : y = f(x)$.

20. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если из условия $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. различные элементы множества X должны иметь различные образы.

21. Отображение называется *биективным* если оно одновременно сюръективно и инъективно.

22. Пусть заданы два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. *Композицией отображений (сложным отображением, суперпозицией отображений)* называют отображение $\varphi : X \to Z$, определяемое условием $\varphi(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

23. Композиция отображений ассоциативна, т.е. для заданных трех отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : X \to Z$, справедливо равенство $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

24. Отображение g называется обратным к отображению f если одновременно выполняются два условия $g \circ f = e_X$ и $f \circ g = e_Y$.

25. Когда справедливо только одно из двух условий, например, $g \circ f = e_X$, то g называют *левым обратным* отображением. Соответственно, если выполнено только второе равенство $f \circ g = e_Y$, то g называют *правым обратным* отображением.

26. Лемма. Если для композиции двух отображений выполняется равенство $g \circ f = e_X$, то g является сюръекцией, а f - инъекцией.

27. Теорема Отображение $f : X \to Y$ имеет обратное тогда и только тогда, когда f является биективным отображением.

28. Если $f : X \to Y$ биективно, то обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$ также является биекцией, причем $(f^{-1})^{-1} = f$.

29. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ биективные отображения. Тогда: композиция $g \circ f$ биективных отображений биективна. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3 Отношение

1. Бинарное отношение на X — любое подмножество прямого произведения $\rho \subset X \times X$.

2. Единичное отношение e_x на X содержит только пары(x, x).

3. Полное отношение $U = X \times X$.

4. Обратное отношение $\rho^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in \rho\}$.

5. Отношение ρ на X рефлексивно, если для любого $x \in X$ пара $(x, x) \in \rho$.

6. Отношение ρ на X антирефлексивно, если для любого $x \in X$ пара $(x, x) \notin \rho$.

7. Отношение ρ на X симметрично, если для любой пары (x, y) из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(y, x) \in \rho$.

8. Отношение ρ на X антисимметрично, если из условия $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$ следует $x = y$.

9. Отношение ρ на X асимметрично, если для любой пары (x, y) из условия $(x, y) \in \rho$ следует $(y, x) \notin \rho$.

10. Отношение ρ на X транзитивно, если для любых двух пар (x, y)и (y, z) из условия $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho$ следует $(x, z) \in \rho$.

11. Композиция бинарных отношений σ и ρ на X называют отношение

$$\varphi = \rho \circ \sigma = \{(x, z)|(x, y) \in \sigma, (y, z) \in \rho\}$$

12. Теорема. Отношение ρ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho \circ \rho \subset \rho$.

13. Отношение $\tilde{\rho}$ называют замыканием отношения ρ на свойство A , если $\tilde{\rho}$ обладает свойством A, $\rho \subset \tilde{\rho}$ и для любого отношенияσсо свойством A , $\tilde{\rho} \subset \sigma$.

14. Транзитивное замыкание произвольного отношения имеет вид $\rho^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \rho^k$

15. Рефлексивное транзитивное замыкание отношения имеет вид $\rho^+ = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \rho^k$

16. Алгоритм Уоршолла транзитивного замыкания. Рассмотрим булеву матрицу M отношения. Если $m_{ij} = 1, i \neq j$, то i-я строку матрицы заменяем поэлементной дизъюнкцией i-й и j-й строк матрицы. Процедуру повторяем до тех пор, пока процесс не установится - матрица перестанет изменяться.

17. Отношение называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

18. Множество элементов из X, эквивалентных некоторому элементу x_0, называется классом эквивалентности элемента x_0. Обозначения класса эквивалентности $[x_0]$.

19. Множество всех классов эквивалентности - фактор-множество.

20. Мощность фактор-множества - индекс разбиения.

21. Любое отношение эквивалентности порождает разбиение.

22. Любое разбиение порождает отношение эквивалентности.

23. Отношение называют предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно.

24. Отношение называют порядком, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

25. Порядок ρ называется линейным (или полным), если для любых элементов $x\rho y$ или$y\rho x$. В противном случае - частичный порядок.

26. Отношение называют строгим порядком, если оно асимметрично и транзитивно.

27. Элемент $y \in X$ накрывает элемент $x \in X$, если $x \prec y$ и не существует элемента $z \in X$ такого, что $x \prec z \prec y$.

28. Любое упорядоченное множество можно представить диаграммой Хассе.

29. Пусть ρ есть частичный порядок на X. Отношение σна элементах прямого произведения $(x, y)\sigma(a, b)$ называется отношением Парето, если оно выполняется в том и только в том случае, когда $x\rho a$ и $y\rho b$.

30. Алфавит - множество символов с отношением линейного порядка.

31. Лексикографический ρ порядок $a_1 \prec a_2$, где $a_1 = x_{11}x_{12}...x_{1i}..x_{1n}$ и $a_2 = x_{21}x_{22}...x_{2i}..x_{2m}$ на алфавите задается одним из двух условий 1) $a_1 = bx_{1i}c, \quad a_2 = bx_{2i}d$, где b, c, d - некоторые слова, возможно пустые, а символы x_{1i} и x_{2i} связаны отношением линейного порядка $x_{1i}\rho x_{2i}$ или 2) $a_1 = a_2 f$, где f- некоторое непустое слово.

1.4 Алгебраические структуры

1. *Бинарной операцией* на множестве X называется любое фиксированное отображение $\varphi : X \times X \to X$.

2. Бинарная операция $*$ на множестве X называется *ассоциативной,* если $a * (b * c) = (a * b) * c$ для любых $a, b, c \in X$. Операция $*$ называется *коммутативной,* если $a * b = b * a$.

3. Элемент $e \in X$ называется *единичным* (или *нейтральным*) относительно бинарной операции $*$, если $e * x = x * e = x$ для любого элемента $x \in X$.

4. Единичный элемент является единственным.

5. Множество X с заданной на этом множестве ассоциативной операцией (т.е. алгебраическая структура (X,$*$) с ассоциативной операцией) называется *полугруппой*.

6. Полугруппа с единичным элементом называется *полугруппой с единицей* или моноидом.

7. Обратным к элементу x моноида $(X, *, e,)$называется элемент $y \in X$ такой, что $xy = yx = e$.

8. Моноид (X , $*$, e), у которого для каждого элемента $x \in X$ существует обратный элемент $x^{-1} \in X$, называется группой.

9. Четыре аксиомы, которым удовлетворяет группа.

10. *Мультипликативная и аддитивная группа.*

11. Группа с коммутативной бинарной операцией называется *коммутативной* или *абелевой*.

12. Непустое подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой* группы G, если для любых $h_1, h_2 \in H$ элемент $h_1 * h_2 \in H$ и для любого $h \in H$ элемент $h^{-1} \in H$.

13. Подгруппа H, отличная от E и G, называется *собственной подгруппой* группы G.

14. Таблица Кэли.

15. Доказать, что каждый столбец (строка) таблицы Кэли содержит все элементы группы.

16. *Симметрической* группой S_n называется множество всех биективных отображений множества X на себя, снабженное бинарной операцией композиции отображений.

17. Циклическая группа содержит все возможные целые степени одного и того же элемента a.

18. Если циклическая группа содержит только элементы e, a, a^2,…, a^n, то такую циклическую группу называют *конечной* (Card $G = n$). Если же для любого натурального n все степени a^n различны, то G называется *бесконечной* циклической группой.

19. Сравнение по модулю m является отношением эквивалентности.

20. Группы G и H называются *изоморфными* (обозначение $G \cong H$), если существует биективное отображение $f: G \to H$, "сохраняющее" групповую операцию, т.е.$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.

21. Три свойства изоморфизма.

22. **Теорема**Кэли. Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n(без доказательства).

23. **Теорема.** Любая циклическая группа порядка m изоморфна группе $\mathbf{Z}_m$ классов вычетов по модулю m(без доказательства).

24. Пусть K есть непустое множество, на котором заданы две бинарные операции: + (сложение) и (умножение), удовлетворяющие следующим условиям:

    (a) структура (K, +) является абелевой (коммутативной) группой;

    (b) структура $(K, \bullet)$ есть полугруппа;

    (c) операции сложения и умножения связаны законом дистрибутивности:$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ и $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ для любых $a, b, c \in K$.

    Алгебраическая структура $(K, +, \bullet)$, подчиненная этим требованиям, называется кольцом. При этом структура (K, +) называется аддитивной группой кольца, а структура $(K, \bullet)$ называется его мультипликативной полугруппой.

25. Кольцо $(K, +, \bullet)$ называется полем, если выполняются следующие условия:

    (a) структура $(K,\ +\ ,0\ )$ – абелева группа; структура $(K \backslash \{0\}, \bullet, 1)$ – коммутативная группа;

    (b) выполняется закон дистрибутивности $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ для любых $a, b, c \in K$.

26. **Теорема.** Кольцо классов вычетов ($\mathbf{Z}_m, +, \bullet)$ тогда и только тогда является полем, когда m есть простое число.

Глава 2

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

2.1 Определения

Граф G – совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между которыми определено отношение инцидентности. Каждое ребро e из E инцидентно ровно двум вершинам v', v'', которые оно соединяет. При этом вершина v' и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' и v'' называются смежными. Часто пишут v', v'' из G и e из G.

1. Ребро может быть ориентированным и иметь начало и конец (дуга в орграфе).

2. Граф, содержащий ориентированные ребра (дуги), называется орграфом.

3. Граф, не содержащий ориентированные ребра (дуги), называется неографом.

4. Ребра, инцидентные одной паре вершин, называются параллельными или кратными.

5. Граф с кратными ребрами называется мультиграфом.

6. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется петлей.

7. Конечный граф – число вершин и ребер конечно.

8. Пустой граф – множество вершин и ребер пусто.

9. Полный граф – граф без петель и кратных ребер, каждая пара вершин соединена ребром. Обозначение для полного графа с n вершинами - K_n.

10. Граф называется **двудольным**, если существует такое разбиение множества его вершин на две части, что концы каждого ребра принадлежат разным частям (долям).

11. Теорема Кенига. *Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.*

12. Если любые две вершины двудольного графа, входящие в разные доли, смежны, то граф называется **полным двудольным**. Обозначение для полного двудольного графа с n и m вершинами - $K_{n,m}$.

13. Дополнение графа G – граф, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к G, чтобы получить полный граф.

14. Каждому неориентированному графу **канонически соответствует** ориентированный граф с теми же вершинами, в котором каждое ребро заменено ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

15. Локальная степень вершины – число ребер ей инцидентных. В неографе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер (лемма о рукопожатиях). Петля дает вклад, равный 2 в степень вершины.

16. В орграфе две локальных степени вершины v: $deg(v)^+$ и $deg(v)^-$ (число ребер с началом и концом в v)

17. Графы равны, если множества вершин и инцидентных им ребер совпадают.

18. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин и ребер, называются изоморфными.

19. Граф называется регулярным (однородным), если степени всех его вершин равны.

20. Характеристический полином графа - характеристический полином его матрицы смежности.

21. Для регулярного графа степени d число d является корнем характеристического полинома. Если граф связный, то кратность d равна 1. Для любого корня характеристического полинома $d \geq |\lambda|$.

22. Числом вершинной связанности (или просто числом связанности)$\kappa(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или одновершинному графу.

23. Числом реберной связанности $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

24. Граф называется k -связным, если $\kappa(G) \geq k$.

25. Теорема. *Для любого графа G верно неравенство $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, где $\delta(G)$ – минимальная из степеней вершин графа.*

2.2 Способы задания графов

1. Матрица инцидентности A. По вертикали указываются вершины, по горизонтали – ребра. $a_{ij} = 1$ если вершина i инцидентна ребру j, в противном случае $a_{ij} = 0$. Для орграфа $a_{ij} = -1$ если из вершины i исходит ребро j, $a_{ij} = 1$ если в вершину i входит ребро j. Если ребро – петля, то $a_{ij} = 2$.

2. Список ребер. В первом столбце ребра, во втором вершины им инцидентные.

3. Матрица смежности – квадратная симметричная матрица. По горизонтали и вертикали – все вершины. $D_{ij} =$ число ребер, соединяющее вершины i, j.

4. Матрица Кирхгофа[1]. $b_{ij} = -1$, если вершины i и j смежны, $b_{ij} = 0$ если вершины i и j не смежны, $b_{ii} = -deg(i)$. Сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы Киргофа равна 0.

2.3 Маршруты, пути, цепи и циклы

1. Маршрут – последовательность ребер, в которых каждые два соседних ребра имеют общую вершину.

2. Маршрут, в котором начало и конец совпадают – циклический.

[1] Кирхгоф Густав Роберт (1824-1887) – немецкий физик и механик

3. Маршрут в неографе, в котором все ребра разные – цепь.
4. Маршрут в орграфе, в котором все дуги разные – путь.
5. Путь, в котором начало и конец совпадают – контур.
6. Цепь с неповторяющимися вершинами – простая.
7. Циклический маршрут называется циклом, если он цепь и простым циклом, если эта цепь простая.
8. Вершины связанные, если существует маршрут из одной вершины в другую.
9. Связанный граф – если все его вершины связаны.
10. Число ребер маршрута – его длина.
11. Эйлеров цикл – цикл графа, содержащий все его ребра.
12. Эйлеров граф – граф, имеющий Эйлеров цикл.
13. Теорема Эйлера. *Конечный неориентированный граф эйлеров тогда и только тогда, когда он связан и степени его вершин четны.*
14. Теорема. *Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда, когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2.*
15. *Гамильтонов* цикл – простой цикл, проходящий через все вершины.

Планарность

1. Плоский граф – граф с вершинами, расположенными на плоскости и непересекающимися ребрами.
2. Планарный граф изоморфен плоскому.
3. Всякий подграф планарного графа планарен.
4. **Жорданова** кривая – непрерывная линия без самопересечений.
5. Задача о трех домах и трех колодцах. Провести от каждого из трех домов дорожки ко всем трем колодцам так, чтобы дорожки не пересекались. Граф этой задачи не является планарным.
6. Почти все графы не являются планарными.
7. Грань графа — множество всех точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена жордановой кривой.
8. Граница грани — множество вершин и ребер, принадлежащих грани.
9. Всякий плоский граф имеет одну, и притом единственную, неограниченную грань. Эта грань является внешней гранью графа, остальные — внутренние.
10. Теорема Эйлера. *Для всякого связного плоского графа $n - m + f = 2$, где n — число вершин,m — число ребер, f — число граней.*
11. **Подразбиение** ребра — удаление ребра и добавление двух новых, инцидентных вершинам удаленного ребра и соединенных между собой новой вершиной.

12. Два графа называются **гомеоморфными**, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

13. Теорема Понтрягина-Куратовского. *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* K_5 и $K_{3,3}$.

14. Толщиной графа называется минимальное число его планарных подграфов.

15. Треугольник - грань плоского графа, ограниченная 3-циклом (треугольником).

16. Плоская триангуляция - связный плоский граф в котором каждая его грань (в том числе и внешняя) является треугольником.

17. Максимальным плоским графом(планарным) графом называется n - вершинный ($n \geq 3$) граф, который перестает быть плоским (планарным) при добавлении любого ребра.

18. Теорема. *Граф является максимальным плоским графом тогда и только тогда, когда он представляет собой плоскую триангуляцию.*

19. Для максимального планарного графа $m = 3n - 6$.

2.4 Деревья и лес

1. Дерево - связный граф без циклов.

2. Лес (или ациклический граф) - неограф без циклов (может быть и несвязным).

3. Теорема. *Для неографа G с n вершинами без петель следующие условия эквивалентны:*
   (a) *G - дерево;*
   (b) *G - связный граф, содержащий $n-1$ ребро;*
   (c) *G - ациклический граф, содержащий $n-1$ ребро;*
   (d) *любые две несовпадающие вершины графа G соединяет единственная цепь.*
   (e) *G - ациклический граф, такой, что если в него добавить одно ребро, то в нем появится ровно один цикл.*

4. Остов (каркас) связного графа - дерево, содержащее все вершины графа. Определяется неоднозначно.

5. **Цикломатическое** (или циклический ранг) число графа $\nu = m - n + c$, где n — число вершин,m — число ребер, c — число компонент связности графа.

6. Коциклический ранг (или коранг) $\nu^* = n - c$.

7. Теорема. *Число ребер неографа, которые необходимо удалить для получения остова, не зависит от последовательности их удаления и равно цикломатическому числу графа.*

8. Неограф G является лесом тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 0$.

9. Неограф G имеет единственный цикл тогда и только тогда, когда $\nu(G) = 1$.

10. Остов неографа имеет ν^* ребер.

11. Ребра графа, не входящие в остов, называются хордами.

12. Цикл, получающийся при добавлении к остову графа его хорды, называется фундаментальным относительно этой хорды.

2.5 Раскраски

1. Произвольная функция на множестве вершин графа называется раскраской графа.
2. Раскраска называется правильной, если $f(u_1) \neq f(u_2)$ для любых смежных вершин u_1 и u_2.
3. Минимальное число k, при котором граф G является k- раскрашиваемым, называется хроматическим числом графа $\chi(G)$.
4. Теорема. *Для любого графа G верно неравенство $\chi(G) \leq \Delta(G)$, где $\Delta(G)$ – максимальная из степеней вершин графа.*
5. Произвольная функция на множестве ребер графа называется реберной раскраской графа.
6. Реберная раскраска называется правильной, если смежные ребра имеют разные цвета.
7. Минимальное число k, при котором граф G является реберно k- раскрашиваемым, называется хроматическим индексом графа $\chi'(G)$.
8. Теорема Визинга. *Для любого графа G верно неравенство*
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$
9. Теорема Кенига. *Для любого двудольного графа G верно равенство $\Delta(G) = \chi'(G)$.*
10. Для полных графов справедливы формулы
$$\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1, \quad \chi'(K_{2n}) = 2n - 1.$$
11. Теорема (четырех красок). *Для планарного графа G верно неравенство $\chi(G) \leq 4$.*
12. Теорема Кенига. *Для ненулевого графа $\chi = 2$ тогда и только тогда, когда граф не содержит циклов нечетной длины.*
13. Следствие. Для дерева $\chi = 2$.
14. Если наибольшая из степеней графа равна Δ, то граф является $\Delta + 1$ раскрашиваемым.

Глава 3

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

3.1 Отношение

Дано отношение, заданное матрицей

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Исследовать отношение на

1. *симметрию,*
2. *антисимметрию,*
3. *асимметрию,*
4. *рефлексивность,*
5. *антирефлексивность.*

Найти транзитивное замыкание отношения. Построить граф отношения ρ и его транзитивного замыкания.

Решение

Исследуем свойства данного отношения.

1) Данное отношение не является симметричным, так как матрица несимметрична. Например, пара (2,1) принадлежит ρ, а пара (1,2) ему не принадлежит.

2) Отношение антисимметрично, так как нет ни одной пары $m_{ij} = m_{ji} = 1, i \neq j$.

3) Отношение антисимметрично, но не асимметрично, так как на диагонали матрицы имеются элементы равные 1.

4) Все диагональные элементы матрицы рефлексивного отношения равны
1. Данное отношение не является рефлексивным.

5) Отношение не обладает свойством антирефлексивности, так как диагональ матрицы ненулевая.

Найдем транзитивное замыкание ρ.

Данное отношение не является транзитивным, так как, например, пары (1,4) и (4,3) принадлежат ρ, а пара (1,3) ему не принадлежит.

Способ 1.

1. Вычисляем матрицу композиции $\rho^2 = \rho \circ \rho$. Для этого умножаем[1] матрицу саму на себя $M_1 = MM$.

Для $i, j = 1..4$ вычисляем

$$m_{1_{ij}} = (m_{i1} \wedge m_{1j}) \vee (m_{i2} \wedge m_{2j}) \vee (m_{i3} \wedge m_{3j}) \vee (m_{i4} \wedge m_{4j}).$$

Получаем

$$M_1 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

2. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) матриц. Поэлементная дизъюнкция матриц дает

$$M_2 = M \vee M_1 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

3. Сравним M_2 и матрицу M. Если $M_2 = M$, то M_2 — искомая матрица. Если $M_2 \neq M$, то полагаем $M = M_2$, возвращаемся к п. 1 и повторяем всю процедуру для новой матрицы. В данном случае $M_2 \neq M$. Принимаем

$$M = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

1'. Умножаем матрицу саму на себя

$$M_1 = MM = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

2'. Находим логическую сумму (дизъюнкцию) матриц

$$M_2 = M \vee M_1 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

3'. Сравниваем: $M_2 \neq M$. Полагаем $M = M_2$ и повторяем процедуру еще раз.

1".

$$M_1 = MM = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right|.$$

[1]Не путать произведение булевых матриц $A = BC$ с поэлементным логическим умножением $B \wedge C$. Очевидно $a_{ij} = 1$, если хотя бы в одном случае k -й элемент i -й строки первого сомножителя и k -й элемент j-го столбца второго сомножителя одновременно равны 1. В противном случае $a_{ij} = 0$.

2". Находим сумму

$$M_2 = M \vee M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3". Сравниваем: $M_2 = M$. Следовательно, M_2 — матрица транзитивного замыкания заданного отношения.

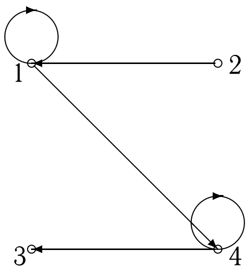

Рис. 1. Граф отношения ρ

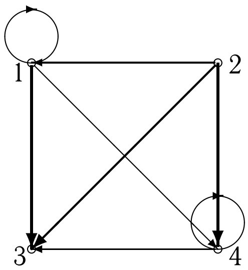

Рис. 2. Граф транзитивного замыкания ρ

Способ 2. Алгоритм Уоршолла[1]

Рассматриваем все внедиагональные элементы матрицы. Если $m_{ij} \neq 0$, то i-ю строку заменяем дизъюнкцией i-й и j-й строк.

1. Элемент $m_{14} = 1$. Первую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией первой и четвертой строки

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Элемент $m_{21} = 1$. Вторую строку заменяем поэлементной дизъюнкцией второй и первой строки

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Элемент $m_{43} = 1$. Дизъюнкция четвертой и третьей строки не меняет вид матрицы. Таким образом полученная матрица является матрицей транзитивного замыкания отношения ρ.

Оба способа дают один и тот же результат.

На рис. 1 и рис. 2 представлены графы отношения ρ и его транзитивного замыкания. Диагональные элементы матрицы соответствуют петлям на графе. Матрица несимметричная, поэтому граф отношения ориентированный.

3.2 Орграф

Дан орграф (рис.3).

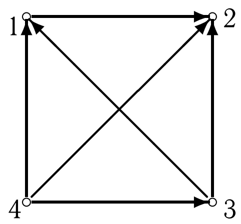

Рис. 3

Найти число маршрутов длины 2 из вершины №3 в №2, число маршрутов в графе длины 3 и маршрутов длины 4.

Решение

Запишем матрицу смежности графа. Элемент матрицы $m_{ij} = 1$, если есть ребро, выходящее из вершины i и входящее в вершину j.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица смежности простого орграфа несимметричная.

Для вычисления числа маршрутов длины 2 найдем $K = M^2 = MM$. Произведение матриц понимается в алгебраическом смысле. Получим

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как $k_{32} = 1$, то число маршрутов из вершины 3 в 2 равно 1. Очевидно, это маршрут 3-1-2 (рис.4).

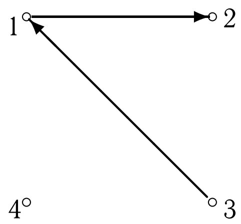

Рис. 4

Для вычисления числа маршрутов длины 3 найдем $K = M^3$. Получим

$$K = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как из всех элементов матрицы только $k_{42} = 1$, то маршрут длины 3 единственный. Очевидно, это маршрут 4-3-1-2.

Легко видеть, что матрица M^4 нулевая, следовательно маршрутов длины 4 в графе нет.

3.3 Неограф

Дан неограф

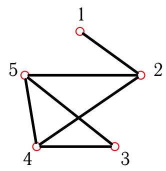

Рис. 5

1. *построить матрицу инцидентности,*
2. *построить матрицу смежности,*
3. *найти степени вершин графов,*
4. *найти цикломатическое число графа,*
5. *найти радиус и диаметр,*
6. *проверить наличие эйлеровой цепи*
7. *вычислить количество циклических маршрутов длины 3.*

Решение

1) Построим матрицу инцидентности. Ребра обозначаем по именам вершин, инцидентных данному ребру.

	1	2	3	4	5
1-2	1	1	0	0	0
2-4	0	1	0	1	0
2-5	0	1	0	0	1
3-4	0	0	1	1	0
3-5	0	0	1	0	1
4-5	0	0	0	1	1

Матрица инцидентности не обязательно квадратная, сумма элементов любой строки равна 2. Для неографа без петель элементы могут быть 0 или 1.

2) Построим матрицу смежности

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Матрица смежности неографа симметричная, $m_{ij} = 1$, если вершина i и вершина j соединены ребром, в противном случае $m_{ij} = 0$.

3) Найдем степени вершин графов. Вершина №1 имеет степень 1 (ей инцидентно одно ребро), вершина №3 – 2, остальные вершины — степень 3.

4) Цикломатическое число связного графа вычисляется по формуле

$$\nu = m - n + 1,$$

где m — число ребер, n — число вершин. В данном случае $\nu = m - n + 1$,

5) Найдем радиус и диаметр графа.

Вычисляя цепи наименьшей длины, найдем расстояния между вершинами. Результаты занесем в таблицу. Для неографа таблица является симметричной матрицей. Для сокращения вычислений находим элементы половины матрицы, заполняя другую половину из условия симметрии

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляем эксцентриситет ε каждой вершины — расстояние до максимально удаленной от нее вершины. Эту величину можно определять как максимальный элемент соответствующего столбцы матрицы расстояний. Получаем

№	ε
1	3
2	2
3	3
4	2
5	2

Радиус графа r– минимальный эксцентриситет вершин.В данном случае $r = 2$. Такой эксцентриситет имеют вершины №2, №4 и №5. Эти вершины образуют центр графа. Диаметр графа d– максимальный эксцентриситет вершин. В данном случае $d = 3$. Такой эксцентриситет имеют вершины №1 и №3 – это периферия графа.

6) Ответим на вопрос, обладает ли граф эйлеровой цепью?

Мультиграф обладает эйлеровой цепью тогда и только тогда[3], когда он связен и число вершин нечетной степени равно 0 или 2 .

В данном случае 4 вершины нечетной степени (1, 2, 4, 5). Граф эйлеровой цепью не обладает, т.е. нет цепи, содержащей все ребра графа по одному разу.

7) Вычислим число циклических маршрутов длины 3. Возведем матрицу смежности в 3-ю степень

$$M^3 = MMM = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы показываю число циклических маршрутов длины 3. Например, маршруты, исходящие из вершины 5 и возвращающиеся в нее же, это маршруты 5-2-4-5, 5-4-2-5, 5-3-4-5, 5-4-3-5. Суммарное число маршрутов длины 3 равно $0 + 2 + 2 + 4 + 4 = 12$. Некоторые маршруты отличаются только начальными точками.

3.4 Минимальный остов графа

Дан взвешенный граф

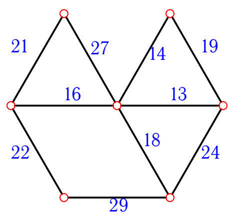

Рис. 6

Найти остов минимального веса (экстремальное дерево). Найти матрицу фундаментальных циклов графа относительно этого остова.

Решение

Построение остова минимального веса

Способ 1. Алгоритм Дж. Краскала [5], с.60.

Строим граф, присоединяя к пустому графу на множестве вершин заданного графа ребро наименьшего веса. К полученному графу последовательно присоединяем остальные ребра, выбирая на каждом шаге ребро наименьшего веса, не образующее цикл с имеющимися ребрами.

В нашем случае начинаем с ребра весом 13 – наименьшего в графе. На рисунках дана последовательность действий. Ребро весом 19 не включается в остов, так как оно образует цикл с ребрами весом 14 и 13.

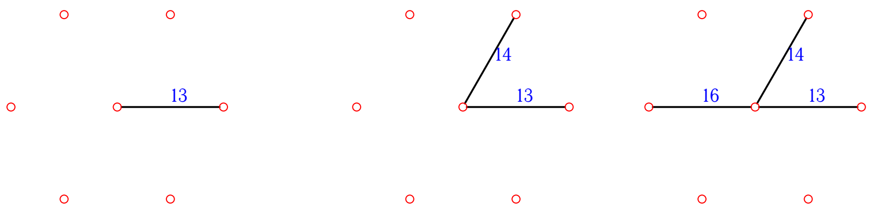

Рис. 7

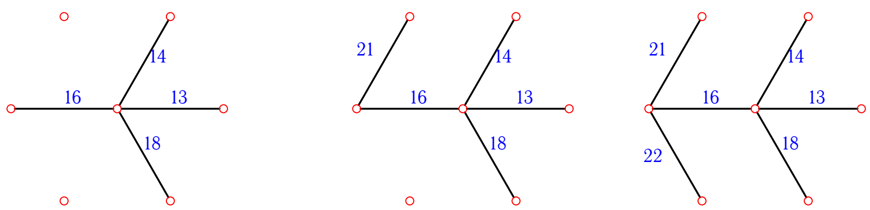

Рис. 8

Способ 2. Алгоритм ближайшего соседа[6], с.145.

Алгоритм Дж. Краскала требует на каждом шаге проверки на цикличности предварительной сортировки ребер по весам, что затруднительно для графов с большим числом ребер. Несколько проще следующий алгоритм.

1. Отмечаем произвольную вершину графа, с какой начнется построение. Строим ребро наименьшего веса, инцидентное этой вершине.

2. Ищем ребро минимального веса инцидентное одной их двух полученных вершин. В множество поиска не входит построенное ребро.

3. Продолжаем далее, разыскивая каждый раз ребро наименьшего веса, инцидентное построенным вершинам, не включая в круг поиска все ребра, их соединяющие.

В нашем примере начнем с вершины A. На рисунках дана последовательность действий.

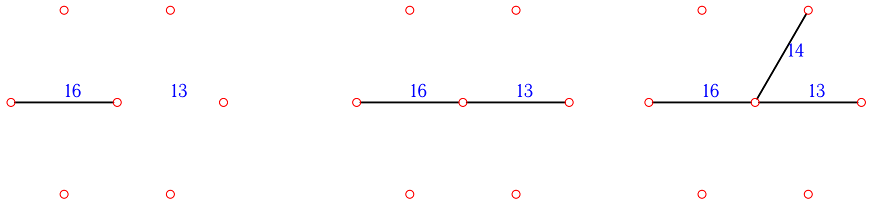

Рис. 9

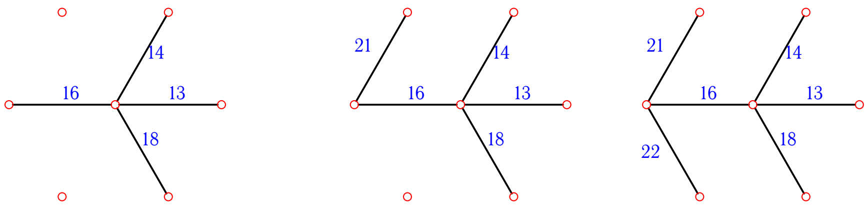

Рис. 10

Матрица фундаментальных циклов

Пронумеруем ребра графа, начиная нумерацию с хорд.

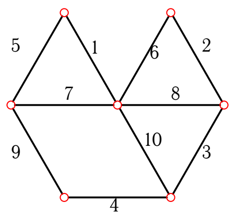

Рис. 11

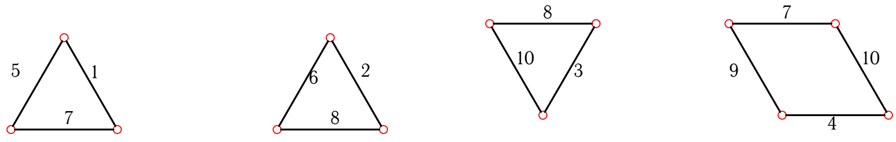

Рис. 12

Четырем хордам соответствую четыре фундаментальные цикла 1-5-7; 2-6-8; 3-8-10; 4-7-9-10. Матрица фундаментальных циклов имеет четыре строки (число циклов) и десять столбцов (число ребер).

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

3.5 Кратчайшие пути на графе

Дан взвешенный орграф

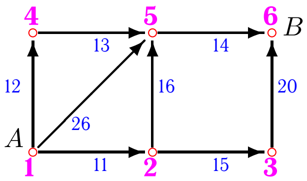

Рис. 13

Найти кратчайший путь из вершины A в B.

Решение

Применим алгоритм Е. Дейкстры [5], с.343; [4], с.128; [6], с.151.

Пошаговый алгоритм определения кратчайшего расстояния из вершины A в B состоит в следующем. С каждой вершиной связывается метка. Метка может быть постоянной или временной. Первоначально вершине A приписывается постоянная метка 0, а всем остальным ∞. На первом шаге вычисляются расстояния от вершины с постоянной меткой A до всех остальных. Если до некоторая вершина не соединена с вершиной с постоянной меткой или дуга направлена в обратную сторону, то расстояние принимается ∞. Найденные расстояния являются временными метками вершин. Минимальная из временных меток берется за постоянную. На следующем шаге временные метки всех вершин (кроме тех, у которых постоянные метки) вычисляются как сумма значения последней полученной постоянной метки и расстояния **от** нее, в том случае, если это значение не больше предыдущего значения временной метки этой вершины. Минимальная из временных меток опять берется за постоянную. Процесс продолжается до тех пор, пока вершина B не получит постоянную метку. Значение этой метки — кратчайшее расстояние от A до B.

Рассмотрим отдельные шаги решения.

1. Вершина A получает постоянную метку 0, остальные — ∞.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞

2. Вычисляем расстояния от вершины 1 с постоянной меткой 0. Вершины 2, 4 и 5 меняют свои временные метки на 11, 12 и 26. Остальные имеют прежние метки ∞. Очевидно, наименьшая метка 11. Она и становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$			∞	∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	12	26	∞

3. Вычисляем расстояния от вершины 2 с постоянной меткой 11. Вершины 3 и 5 имеют расстояния 15 и 16 до вершины 2, метка которой имеет значение 11. Суммируя, получаем значения 26 и 27. Для вершины 5 прежнее значение 26 было меньше нового значения 27. Следовательно значение метки 5 не меняем, оно остается равным 26. Из трех временных меток 12, 26 и 26 наименьшая принадлежит вершине 4. Эта метка становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$		∞		∞	∞
	$\boxed{11}$	∞	$\boxed{12}$	26	∞
		26			∞

4. Вычисляем расстояния от вершины 4 с постоянной меткой 12. Вершина 5 имеет до нее расстояние 13. Суммируя 13+12, получаем значение 25 временной метки вершины 5 вместо прежнего значения 26. Из двух временных меток вершин 3 и 5 наименьшая принадлежит вершине 5. Эта метка становится постоянной.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$		∞			∞
	$\boxed{11}$	∞	$\boxed{12}$		∞
		26			∞
		26		$\boxed{25}$	∞

5. На следующем этапе, вычисляя расстояния от вершины 5 с постоянной меткой 25, приходим к конечной вершине B. Но ее метка 25+14=39 не становится постоянной, так как она не является минимальной. От вершины 5 до вершины 3 расстояние ∞ (они не соединены). Прежнее значение временной метки вершины 3 меньше ∞. Поэтому метка вершины 3 не меняется. Метка вершины 3 со значением 26 меньше 39 становится постоянной и от нее на следующем этапе ищем расстояния.

1	2	3	4	5	6
$\boxed{0}$					∞
	$\boxed{11}$		$\boxed{12}$		∞
					∞
				$\boxed{25}$	∞
		$\boxed{26}$			39

6. От вершины 3 до вершины 6 расстояние 20, так как 26+20>39, то значение метки 6 не меняем. На этом шаге она остается прежней и единственной временной меткой. Временная метка вершины 6 становится постоянной, что означает конец процесса. Минимальное расстояние от A до B равно 39.

Литература

[1] Показеев В.В., Матяш В.И., Черкесова Г.В. Элементы дискретной математики. Курс лекций. – М.: МГТУ "МАМИ", 2003. – 239 с.

[2] Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера. – М.: Логос, 2000. – 240 с.

[3] Берж К. Теория графов и ее применения. –М.: Изд.иностранной литературы, 1962. – 319 с.

[4] Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник. – М.:ИНФРА-М, Новосибирск:Изд-во НГТУ, 2002. –280с.

[5] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов.– М.:Наука, 1990.– 384 с.

[6] Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы.– М.:Лаборатория базовых знаний,2002.– 288 с.

[7] Асанов М.О., Баранский В.А.,Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды алгоритмы.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001–288с.

[8] Оре О. Теория графов.– М.:Наука, 1980.– 336 с.

Предметный указатель