Занятие 9

Разбор результатов контрольной, вопросов по первым 3 заданиям типового расчета. Уравнение поверхности, базис касательного пространства.

1. Записать параметрическое уравнение цилиндра радиуса a, найти базис касательного пространства.

   a) вдоль оси Oz

   b) вдоль оси Ox

2. Найти параметризацию поверхности, которая получается вращением цепной линии $\alpha(u) = (a\,\mathrm{ch}(u/a), 0, u)^T$, $-\infty < u < \infty$, вокруг оси Oz [Катеноид]

   Решение. Вращаем заданную плоскую кривую $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))^T$, $u \in I$, вокруг оси Oz:
$$f(u,v) = R(v)\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\,\mathrm{ch}(u/a) \\ 0 \\ u \end{bmatrix},$$
$$f(u,v) = (a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v, a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v, u)^T, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\pi < v < \pi.$$

3. Найти базис касательного пространства и записать уравнение нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в произвольной точке. Убедиться, что все нормали пересекают ось Oz.
   Решение:
   $f(x,y) = (x, y, x^2+y^2)^T, \quad f'_x = (1,0,2x)^T, \quad f'_y = (0,1,2y)^T.$
   $\vec{n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & j \\ 2x & 2y & k \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)^T$. Уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{n}$, проходящей через точку $x_0, y_0, z_0 = x_0^2+y_0^2$ поверхности $f(x,y)$: $\frac{x-x_0}{-2x_0} = \frac{y-y_0}{-2y_0} = \frac{z-x_0^2-y_0^2}{1}$.
   На оси Oz $x = y = 0$, прямая пересекает ось Oz в точке $z = \frac{1}{2} + x_0^2 + y_0^2$.

4. Найти матрицу 1-й фундаментальной формы, если скалярное произведение в окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама:
   a) Круговой цилиндр $f(u,v) = (a\cos v, a\sin v, u)^T$
   b) Сфера $f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$
   c) Сферические координаты $f(u,v,R) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$

   Решение. a) Находим производные вектор-функции $f(u,v)$ по $u = u_1$ и $v = u_2$, они же вектора стандартного базиса касательного пространства T_pf
   $f'_u = (0,0,1)^T$, $f'_v = (-a\sin v, a\cos v, 0)^T$.
   Элементы матрицы 1-й фундаментальной формы – это скалярные произведения $g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = 1$, $g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u = a^2$, $g_{12} = \langle f'_u, f'_v\rangle = g_{21} = 0$, матрица $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

   b) Находим векторы стандартного базиса касательного пространства
   $f'_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)^T$, $f'_v = (-R\sin v\cos u, R\cos u\cos v, 0)^T$
   и их скалярные произведения,
   $g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = R^2(\sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u) = R^2$,
   $g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = R^2\cos^2 u$,

$g_{12} = g_{21} = \langle f'_u, f'_v \rangle = 0,$
$g = \begin{bmatrix} \langle f'_u, f'_u \rangle & \langle f'_u, f'_v \rangle \\ \langle f'_v, f'_u \rangle & \langle f'_v, f'_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{bmatrix}.$
c) Находим производные
$f'_u = (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u)^T,\ f'_v = (-R \sin v \cos u, R \cos u \cos v, 0)^T,$
$f'_R = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)^T,$
и их скалярные произведения (часть мы уже нашли в предыдущем примере),
$g_{33} = \langle f'_R, f'_R \rangle = 1,$
$g_{13} = g_{31} = \langle f'_u, f'_R \rangle = 0,$
$g_{23} = g_{32} = \langle f'_v, f'_R \rangle = 0,$
$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Домашнее задание

1. Доделать нерешенные задачи контрольной работы.
2. Записать параметрическое уравнение кругового конуса.
3. Написать параметрическое уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^3 + y^3$ в точке $A(1, 2, 9)$. Указать поверхностные координаты в этой точке.

Занятия 10,11

Первая фундаментальная форма. Нахождение длин, углов, объемов.

1. Найти угол между координатными линиями на поверхности $f(u, v) = (u, v, uv)^T$ в точке $p(2, 3)$, если скалярное произведение в окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

   Решение. Находим стандартный базис касательного пространства:
   $f'_u(u, v) = (1, 0, v)^T,\ f'_v(u, v) = (0, 1, u)^T,$
   $f'_u(2, 3) = (1, 0, 3)^T,\ f'_v(2, 3) = (0, 1, 2)^T,$
   $cos\varphi = \frac{\langle f'_u, f'_v \rangle}{\sqrt{\langle f'_u, f'_u \rangle \langle f'_v, f'_v \rangle}} = \frac{6}{\sqrt{50}}.$

2. Найти длину кривой $u = 3v$ от точки $v = -\pi$ до точки $v = \pi$ на цилиндре радиуса 4 $f(u, v) = (4 \cos v, 4 \sin v, u)^T$. $[10\pi]$
   Решение. Находим стандартный базис касательного пространства и матрицу 1-й фундаментальной формы: $f'_u = (0, 0, 1)^T,\ f'_v = (-4 \sin v, 4 \cos v, 0)^T,$
   $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Из уравнения кривой $u = 3v$ имеем $du = 3dv$,

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g_{ij} du^i du^j} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{du^2 + 16 dv^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9 + 16}\, dv = 10\pi.$$

3. Найти периметр криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm a v^2/2$ и $v = 1$ вдоль прямого геликоида $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)^T$. [10a/3]
   Решение.
   Находим вектора стандартного базиса касательного пространства $f'_u = (\cos v, \sin v, 0)^T$, $f'_v = (-u \sin v, u \cos v, a)^T$. Матрица 1-й фундаментальной формы строится как их

матрица Грама, $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}$. Используя эту матрицу, находим последовательно длины трех сторон криволинейного треугольника. На стороне $v = 1$ имеем $dv = 0$,

$$l_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{du^2 + (u^2 + a^2)dv^2} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{du^2} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} du = u \mid_{-a/2}^{a/2} = a.$$

На стороне $u = -av^2/2$ имеем $du = -avdv$,

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{a^2v^2dv^2 + \left(\frac{a^2v^4}{4} + a^2\right) dv^2} = a \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{v^2}{2} + 1\right)^2} dv = \frac{av^3}{6} + av\Big|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

$$P = l_1 + 2l_2 = \frac{14a}{6} + a = \frac{10a}{3}.$$

4. Найти длину дуги между двумя произвольными точками кривой $u = v$ вдоль катеноида $f(u, v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$.

5. Найти длину "обмотки" $u(t) = (t, t)^T$, $t \in (-\pi, \pi)$ вдоль тора $f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)^T$ $[2\pi\sqrt{a^2 + b^2}]$

   Решение.
   Находим вектора стандартного базиса T_pf и матрицу 1-й фундаментальной формы,

$$g = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i\dot{u}^j}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

6. Под каким углом пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$

   a) на прямом геликоиде $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)^T$? $[\cos\varphi = (1 - a^2)/(1 + a^2)]$

   b) на сфере? $[\cos\varphi = 0]$

   c) на торе $f(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)^T$? $[\cos\varphi = -\frac{(a+b)^2-b^2}{(a+b)^2+b^2}]$

   Решение: Запишем параметрические уравнения кривых $u+v = 0$ и $u-v = 0$: $\alpha_1(t) = (t, -t)^T$, $\alpha_2(\theta) = (\theta, \theta)^T$. Они пересекаются в т. $u = v = 0$ при $t = \theta = 0$. Касательные векторы в этой точке получаем, дифференцируя, $\dot{\alpha}_1(0) = (1, -1)^T$, $\dot{\alpha}_2(0) = (1, 1)^T$. Далее стандартным образом находим скалярное произведение и длины этих векторов с помощью соответствующей матрицы Грама (матрицы 1-й фундаментальной формы геликоида, сферы или тора).

   Например, для геликоида матрица 1-й фундаментальной формы (найденная нами ранее) в т. $u = v = 0$ имеет вид $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$,

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 - a^2 \cdot 1 \cdot 1}{\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 1 + a^2(-1)^2}\sqrt{1 \cdot 1 \cdot 1 + a^2 \cdot 1 \cdot 1}} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + a^2)}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}.$$

7. Найти угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)^T$.

8. Найти объем шара $f(u,v,w) = (w\cos u\cos v, w\cos u\sin v, w\sin u)^T; u \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}); v \in (-\pi;\pi); 0 < w < R$
   Решение:
   $f'_u = (-w\sin u\cos v, -w\sin u\sin v, w\cos u)^T$
   $f'_v = (-w\sin v\cos u, w\cos u\cos v, 0)^T$
   $f'_w = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T$
   $g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = (w^2\cos^2 v\sin^2 u + w^2\sin^2 v\sin^2 u + w^2\cos^2 u) = w^2$
   $g_{12} = \langle f'_u, f'_v\rangle = (w^2\cos v\cos u\sin u\sin v - w^2\cos v\cos u\sin u\sin v) = 0$
   $g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = (w^2\cos^2 u\sin^2 v + w^2\cos^2 v\cos^2 u) = w^2\cos^2 u$
   $g_{33} = \langle f'_w, f'_w\rangle = 1,\ g_{13} = g_{23} = 0,$
   $g = \begin{bmatrix} w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   $\sqrt{\det g} = w^2\cos u$
   $V = \iiint\limits_V w^2\cos u du dv dw = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int\limits_{-\pi}^{\pi} dv \int\limits_0^R w^2 dw = \frac{4\pi R^3}{3}$

9. Найти площадь полусферы.
   Решение. Сфера:
   $f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T = R(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T,$
   $f'_u = R(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)^T,\ f'_v = R(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0)^T$
   $$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{bmatrix} \ \Rightarrow\ \sqrt{\det g} = R^2\cos u.$$
   На верхней полусфере $u \in [0,\pi/2]$, $v \in [0, 2\pi]$, поэтому площадь равна:
   $\int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} R^2\cos u\, dv = R^2\int_0^{\pi/2}\cos u\, du \int_0^{2\pi} dv = R^2\left(\sin u|_0^{\pi/2}\right)2\pi = 2\pi R^2.$

10. Найти формулу площади поверхности $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.
   Решение: $f(x,y) = (x, y, z(x,y))^T,$
   $f'_x = (1, 0, z'_x)^T,$
   $f'_y = (0, 1, z'_y)^T,$
   $\langle f'_x, f'_x\rangle = 1 + (z'_x)^2,\ \langle f'_y, f'_y\rangle = 1 + (z'_y)^2,\ \langle f'_x, f'_y\rangle = \langle f'_y, f'_x\rangle = z'_x z'_y$
   $$g = \begin{bmatrix} \langle f'_x, f'_x\rangle & \langle f'_x, f'_y\rangle \\ \langle f'_x, f'_y\rangle & \langle f'_y, f'_y\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (z'_x)^2 & z'_x z'_y \\ z'_x z'_y & 1 + (z'_y)^2 \end{bmatrix}.$$
   $\det g = (1+(z'_x)^2)(1+(z'_y)^2) - (z'_x)^2(z'_y)^2 = 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 \ \Rightarrow\ \sqrt{\det g} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$
   Получаем известную формулу:
   $$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx dy.$$
   Для нахождения длины кривой на поверхности $z = z(x,y)$ используем следующую формулу для ds^2:
   $ds^2 = (1 + (z'_x)^2)dx^2 + 2z'_x z'_y dx dy + (1 + (z'_y)^2)dy^2 = dx^2 + dy^2 + (z'_x)^2 dx^2 + 2z'_x z'_y dx dy + (z'_y)^2 dy^2.$
   Поэтому длина параметризованной кривой на такой поверхности равна
   $$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (z'_x)^2\dot{x}^2 + 2z'_x z'_y \dot{x}\dot{y} + (z'_y)^2\dot{y}^2}\, dt,$$
   где $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $z'_x = z'_x(x(t), y(t))$ и т.д.

11. *Доказать, что любая цилиндрическая поверхность изометрична плоскости.

Занятия 12,13

Вторая фундаментальная форма. Основной оператор гиперповерхности. Кривизны. Локальное строение гиперповерхностей.

1. Найти 2-ю фундаментальную форму сферы $f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$, матрицу основного оператора, главные нормальные кривизны.
   Решение:
   $f'_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)^T$
   $f'_v = (-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0)^T$
   $f''_{uu} = (-R\cos u\cos v, -R\cos u\sin v, -R\sin u)^T$
   $f''_{vv} = (-R\cos u\cos v, -R\cos u\sin v, 0)^T$
   $f''_{uv} = (R\sin u\sin v, -R\sin u\cos v, 0)^T$
   $g_{11} = R^2; g_{12} = 0; g_{22} = R^2\cos^2 u$
   $h_{11} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v & -R\cos u\cos v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v & -R\cos u\sin v \\ R\cos u & 0 & -R\sin u \end{vmatrix} = \frac{1}{R^2\cos u}(R\cos u(R^2\cos^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u\cos^2 v) - R\sin u(-R^2\sin u\cos u\cos^2 v - R^2\cos u\sin u\sin^2 v)) = \frac{1}{R^2\cos u}(R^3\cos^3 u + R^3\sin^2 u\cos u) = \frac{R^3\cos u}{R^2\cos u} = R$
   $h_{22} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v & -R\cos u\cos v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v & -R\cos u\sin v \\ R\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R^2\cos u}(R\cos u(R^2\cos^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u\cos^2 v)) = \frac{R^3\cos^3 u}{R^2\cos u} = R\cos^2 u$
   $h_{12} = 0$
   Матрица второй фундаментальной формы $[h] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{bmatrix}$
   Матрица основного оператора гиперповерхности $[L_p] = [g]^{-1}[h] = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}$
   Главные нормальные кривизны $k_1 = k_2 = 1/R$.

2. Найти 2-ю фундаментальную форму и матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны гиперповерхности:
   a) конус $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)^T$,
   b) геликоид $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)^T$,
   c) $z = \varphi(x,y)$,
   d) псевдосфера $f(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R(\ln(\mathrm{tg}(u/2)) + \cos u))^T$

3. Найти 2-ю фундаментальную форму гиперповерхности $f(u,v,w) = (u,v,w,uvw)^T$ [$\det g = 1 + u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2$, $[h] = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{bmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & u \\ v & u & 0 \end{bmatrix}$]

4. Найти 2-ю фундаментальную форму поверхности вращения в R^3.

5. Найти главные нормальные кривизны и главные направления в вершинах эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
   Решение:

Для решения задачи можно было бы найти матрицу основного оператора гиперповерхности, однако вычисления сильно сократятся, если мы воспользуемся теоремой о том, что в окрестности точки существует такая декартова прямоугольная система координат, что поверхность является графиком функции $z = \varphi(x, y)$, причем $z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + o(x^2 + y^2)$.

В окрестности вершины $z = c$ имеем $z = c\sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} = c(1 - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) + o(x^2 + y^2))$,
$z = c - \frac{c}{2a^2}x^2 - \frac{c}{2b^2}y^2 + o(x^2 + y^2)$,
и в точке $(0, 0, c)$ $k_1 = -\frac{c}{a^2}$, $k_2 = -\frac{c}{b^2}$.

6. Найти главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности $z = xy$ в точках

   a) $A(0, 0, 0)$;

   b) $B(1, 1, 1)$.

7. Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе
   $f(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)^T$
   Решение:
   $f'_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)^T$
   $f'_v = (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0)^T$
   $f''_{uu} = (-b\cos v\cos u, -b\sin v\cos u, -b\sin u)^T$
   $f''_{vv} = (-(a + b\cos u)\cos v, -(a + b\cos u)\sin v, 0)^T$
   $f''_{uv} = (b\sin v\sin u, -b\cos v\sin u, 0)$
   Матрица 1-й фундаментальной формы $[g] = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\cos u)^2 \end{bmatrix}$
   $h_{ij} = \frac{\det[f'_u, f'_v, f''_{u^iu^j}]}{\sqrt{\det g}}$
   $h_{11} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v & -b\cos u\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a + b\cos u)\cos v & -b\sin v\cos u \\ b\cos u & 0 & -b\sin u \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}[b^2(a + b\cos u)] = \frac{b^2(a+b\cos u)}{b(a+b\cos u)} = b$
   $h_{22} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v & -(a + b\cos u)\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a + b\cos u)\cos v & -(a + b\cos u)\sin v \\ b\cos u & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}[b\cos u(a + b\cos u)^2]$
   $h_{12} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v & b\sin v\sin u \\ -b\sin u\sin v & (a + b\cos u)\cos v & -b\cos v\sin u \\ b\cos u & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$
   $[h] = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a + b\cos u) \end{bmatrix}$; $[L_p] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b\cos u)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a + b\cos u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a+b\cos u} \end{bmatrix}$
   $k_1 = \frac{1}{b}; k_2 = \frac{\cos u}{a+b\cos u}$
   Полная кривизна $K = k_1k_2 = \frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$
   Средняя кривизна $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{b} + \frac{\cos u}{a+b\cos u})$
   f'_u и f'_v - главные направления, отвечающие k_1 и k_2
   Тип точек.
   $K = 0 => u = \pm\frac{\pi}{2}$ - параболические
   $K > 0 => u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ - эллиптические
   $K < 0 => u \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (-\pi; -\frac{\pi}{2})$ - гиперболические.

8. Классифицируйте точки на двумерных гиперповерхностях:

a) эллипсоид;

b) однополостный гиперболоид;

c) двуполостный гиперболоид;

d) эллиптический параболоид;

e) конус;

f) гиперболический параболоид;

g) эллиптический цилиндр;

h) гиперболический цилиндр.

9. Существуют ли направления, в которых кривизна кругового цилиндра радиуса 2 равна 0, 1, 1/2, 2?

10. Найти нормальную кривизну гиперповерхности $z = xy$ в т.(0,0,0) в направлении координатных осей.
Решение: $f(u,v) = (u,v,uv)^T$, $[g] = \begin{bmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{bmatrix}$, $[h] = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. По теореме Менье $k = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)}$, $X \in T_f$. Подставляем $X_1 = (1,0)$ и $X_2 = (0,1)$, в обоих случаях числитель дроби обращается в 0, откуда $k = 0$.

11. Найти кривизну нормального сечения цилиндра $y = x^2/2$ (расположенного в R^3) в точке $A(2,2,4)$ в направлении касательной к линии $y = x^2/2$, $z = x^2$.
Решение:
Уравнение поверхности $f(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)^T$, на кривой $v = u^2$, уравнение кривой в поверхностных координатах $\alpha(t) = (t,t^2)$, касательная $\dot{\alpha}(t) = (1,2t)^T$, точке $A(2,2,4)$ отвечает $t = u = 2$, $\dot{\alpha}(t) = (1,4)^T$. Далее находим матрицы 1-й и 2-й фундаментальных форм и используем теорему Менье.