Занятие 6 ①

Решение систем лин. дифф. ур-ний. Алгоритм исключения неизвестных.

(ТР, №1а)

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi_1(x,y,z) & (1) \\ \dot{y} = \varphi_2(x,y,z) & (2) \\ \dot{z} = \varphi_3(x,y,z) & (3) \end{cases}$$

Получим одно д. ур-е относительно переменной z, исключая переменные x и y.

I. Дифф-ем ур-е (3) и подставляем $\dot{x}, \dot{y}$ из (1) и (2):

(4) $\ddot{z} = \varphi(x, y, z, \dot{z})$

II. Из системы (3),(4) выразим x и y:

$$\begin{cases} \varphi_3(x,y,z) = \dot{z} \\ \varphi(x,y,z,\dot{z}) = \ddot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = x(z, \dot{z}, \ddot{z}) \\ y = y(z, \dot{z}, \ddot{z}) \end{matrix} \quad (5)$$

III. Дифференцируем ещё раз ур-е (4). Подставим $\dot{x}, \dot{y}$ из (1), (2), x, y – из (5).

$\dddot{z} = \psi(z, \dot{z}, \ddot{z})$

IV. Решая это ур-е, найдём $z = z(t)$. Подставим в ф-лы (5); получ. $x = x(t)$
$y = y(t)$.

ТР, № 1а). (№ 412) (1а)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z & (1) \\ \dot{y} = x + 2y - z & (2) \\ \dot{z} = x - y + 2z & (3) \end{cases}$$

Исключим x и y.

$(3) \Rightarrow x - y = \dot{z} - 2z \quad (6)$

$$(4)\ \ddot{z} = \dot{x} - \dot{y} + 2\dot{z} \overset{(1),(2)}{=} \underbrace{2x - y + z}\ \underbrace{-x - 2y + z}\ +2\dot{z} = x - 3y + 2z + 2\dot{z}$$

$$\begin{cases} x - 3y = \ddot{z} - 2z - 2\dot{z} & (5) \\ x - y = \dot{z} - 2z. & (6) \end{cases}$$

$$(5) - (6):\ -2y = \ddot{z} - 3\dot{z} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{3}{2}\dot{z}}$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} x = y + \dot{z} - 2z = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{3}{2}\dot{z} + \dot{z} - 2z = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{5}{2}\dot{z} - 2z.$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}\ddot{z} + \frac{5}{2}\dot{z} - 2z}$$

$$(4) \Rightarrow \dddot{z} = \dot{x} - 3\dot{y} + 2\dot{z} + 2\ddot{z} \overset{(1),(2)}{=}$$

$$= 2x - y + z - 3(x + 2y - z) + 2\dot{z} + 2\ddot{z} =$$

$$= 2x - y + z - 3x - 6y + 3z + 2\dot{z} + 2\ddot{z} =$$

$$= -x - 7y + 4z + 2\dot{z} + 2\ddot{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\ddot{z} - \frac{5}{2}\dot{z} + 2z + \frac{7}{2}\ddot{z} - \frac{21}{2}\dot{z} + 4z + 2\dot{z} + 2\ddot{z} =$$

$$= 6\ddot{z} - 11\dot{z} + 6z. \qquad \boxed{\dddot{z} - 6\ddot{z} + 11\dot{z} - 6z = 0}$$

ТР, №1а (продолжение).

$$\dddot{z}-6\ddot{z}+11\dot{z}-6z=0.$$

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

$$\lambda_1=1.$$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6 & \lambda-1 \\ \lambda^3-\lambda & \lambda^2-5\lambda+6 \\ \hline -5\lambda^2+11\lambda & \\ -5\lambda^2+5\lambda & \\ \hline 6\lambda-6 & \\ 6\lambda-6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0.$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0.$$

$$\boxed{z(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}}$$

$$\dot{z}=C_1e^t+2C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$$

$$\ddot{z}=C_1e^t+4C_2e^{2t}+9C_3e^{3t}$$

$$x(t)=\cancel{-\frac{1}{2}C_1e^t}-2C_2e^{2t}-\frac{9}{2}C_3e^{3t}+\cancel{\frac{5}{2}C_1e^t}+5C_2e^{2t}+\frac{15}{2}C_3e^{3t}-$$
$$\cancel{-2C_1e^t}-2C_2e^{2t}-2C_3e^{3t};$$

$$\boxed{x(t)=C_2e^{2t}+C_3e^{3t}}$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}C_1e^t-2C_2e^{2t}\cancel{-\frac{9}{2}C_3e^{3t}}+\frac{3}{2}C_1e^t+3C_2e^{2t}\cancel{+\frac{9}{2}C_3e^{3t}}$$

$$\boxed{y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}}$$

Дома! по задачнику Филиппова
любые из №№786-795 (II порядок)
и № 796-812 (III порядок)
любым из методов:
собств. векторов
матр. экспоненты
операторным методом.

Ответ:

$$x(t)=C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$$
$$y(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}$$
$$z(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}.$$

Замеч. В ТР, №1а один из корней хар. ур-я кратный

На практике при решении системы 2-го или 3-го порядка возникает всего одна пара (некратных) компл.-сопряжённых корней: $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Нужно:

1) Найти собств. вектор $\bar{v}$ (комплексный), соответствующий соб. зн-ю λ;

2) Вычислить
$$\bar{x}^{(1)}(t) = Re\left[e^{\lambda t} \cdot \bar{v}\right] \quad и \quad \bar{x}^{(2)}(t) = Im\left[e^{\lambda t} \bar{v}\right];$$

3) В ответ записать частное решение, соответствующее собств. зн-ю λ:
$$\bar{X}_2(t) = C_1 \bar{x}^{(1)}(t) + C_2 \bar{x}^{(2)}(t)$$ (оно имеет вещественную форму).

Пример (Романко, стр. 78) ТР, № 1б).

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = y - z. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

По ф-ле Саррюса.

$$= -\lambda(\lambda+1)(\lambda+1) + 2 + 2(-1-\lambda) + \lambda = -\lambda(\lambda+1)^2 - 2\lambda + \lambda = -\lambda(\lambda+1)^2 - \lambda$$
$$= -\lambda\left[(\lambda+1)^2 + 1\right] = -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 2).$$

$(\lambda+1)^2 = -1$; $\lambda_1 = 0$.

$\lambda_{2,3} = -1 \pm i$.

$$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдём соб. в-р $\bar{v}_2$, соотв. соб. зн-ю $\lambda_2=-1+i$. 3

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 & 2 \\ 1 & -1+1-i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \underset{(-1+i)}{=} \begin{pmatrix} 1-i & -2 & 2 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ $\mathrm{III}' = (-1+i)\mathrm{II}+\mathrm{I}$

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -1+i & 1+i \end{pmatrix}$$

Из III: $\xi_2 = i\xi_3$;

Из II: $\xi_1 = i\xi_2 - \xi_3 = i(i\xi_3) - \xi_3 = -2\xi_3$;

пусть $\xi_3 = 1$; тогда $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ +i \\ +1 \end{pmatrix}$, или $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$

проверка (в I ур-е): $-2(1-i)+2i+2 = -2+2i-2i+2=0$ (верно).

Частное (комплексное) решение, соотв. корню $\lambda_2 = -1+i$:

$$P(t) = e^{(-1+i)t}\cdot\bar{v}_2 = e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = e^{-t}(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos t + 2i\sin t \\ \sin t - i\cos t \\ -\cos t - i\sin t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Re} P(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}; \quad \operatorname{Im} P(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

$x(t) = e^{-t}(C_2\cdot 2\cos t + 2C_3\sin t)$

$y(t) = C_1 + e^{-t}(C_2\sin t - C_3\cos t)$

$z(t) = C_1 + e^{-t}(-C_2\cos t - C_3\sin t)$, Пример 2 (ТР, №1б). Решить методом Эйлера. 4

(комплексные корни)

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y - 2z \\ \dot{y} = -x - y \\ \dot{z} = 6x - 2y + 2z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - (\lambda+1)\begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - \lambda - 4 - (1+\lambda)\left[(\lambda+5)(\lambda-2) + 12\right] =$$

$$= -(\lambda+2) - (\lambda+1)\left[\lambda^2 + 3\lambda + 2\right] =$$

$$= -(\lambda+2) - (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+1) = -(\lambda+2)\left[(\lambda+1)^2 + 1\right];$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = -1 \pm i$$

$$\lambda_1 = -2: \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $\xi_1 = \xi_2 = 1$, тогда $-3 + 1 - 2\xi_3 = 0 \Rightarrow \xi_3 = -1$.

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -1 + i: \begin{pmatrix} -5+1-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 0 \\ 6 & -2 & 3-i \end{pmatrix}$$

Пусть $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = i$; тогда из I строки:

$$4 - \cancel{i} + \cancel{i} - 2\xi_3 = 0. \Rightarrow \xi_3 = -2. \qquad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Проверка (III строка): $6 - 2i - 2(3-i) = 6 - 2i - 6 + 2i \equiv 0$ (верно).

$$\bar{X}^{II} = e^{\lambda_2 t} \cdot \bar{v}_2 = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}^{II} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \\ -2\cos t - 2i \sin t \end{pmatrix}. \qquad \bar{X}^{I} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} \bar{X}^{II} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}; \quad \operatorname{Im} \bar{X}^{II} = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}.$$

Ответ: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t}\left[C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}\right].$$

ТР, №1а, 16-й вариант.
(случай пропорцион. ур-ний).

$$\begin{cases} \dot x = -3x + 2y + z & (1) \\ \dot y = x - 2y + z & (2) \\ \dot z = 3x - 3y - z & (3) \end{cases}$$

Решение. Исключим x и z.

$$(2) \Rightarrow \ddot y = \dot x - 2\dot y + \dot z \overset{(1),(3)}{=} -\cancel{3x} + 2y + \cancel{z} - 2\dot y + \cancel{3x} - 3y - \cancel{z}$$

$$(4)\ \ddot y = -y - 2\dot y \qquad \boxed{y(t) = e^{-t}(At+B)} \quad (5)$$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda+1)^2 = 0, \ \lambda_{1,2} = -1.$

Получим дифф. ур-е для $x(t)$.

$(1)-(2): \ \dot x - \dot y = -4x + 4y.$

$$\dot x + 4x = \dot y + 4y = -e^{-t}(At+B) + Ae^{-t} + 4e^{-t}(At+B)$$

$$\dot x + 4x = 3Ate^{-t} + (3B+A)e^{-t}$$

$$\dot x + 4x = e^{-t}(3At + (3B+A)).$$ Решим методом вариации пр. пост.

$$x_{oo} = Ce^{-4t}; \quad x_{он} = C(t)e^{-4t}$$

$$\dot C(t)e^{-4t} \cancel{-4C(t)e^{-4t}} \cancel{+4C(t)e^{-4t}} = e^{-t}(3At+3B+A)$$

$$\dot C(t) = e^{3t}(3At+3B+A)$$

$$C(t) = \int e^{3t}(3At+3B+A)\,dt = \frac{1}{3}(3At+3B+A)e^{3t} -$$

$$-\frac{1}{3}\int (3A)\,e^{3t}\,dt = \frac{1}{3}(3At+3B+A)e^{3t} - \frac{A}{3}e^{3t} + C$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3}(3At+3B+A)e^{-t} - \frac{A}{3}e^{-t} + Ce^{-4t}}$$

ТР, №1а, 16 вар. (оконч.)

$$(2) \Rightarrow z(t) = \dot{y} - x + 2y$$

$$z(t) = -e^{-t}(At+B) + Ae^{-t} - \frac{1}{3}(3At+3B+A)e^{-t} + \frac{A}{3}e^{-t} - Ce^{-4t} + 2e^{-t}(At+B)$$

$$z(t) = \cancel{e^{-t}(At+B)} - \cancel{e^{-t}(At+B)} - \cancel{\frac{A}{3}e^{-t}} + \cancel{\frac{A}{3}e^{-t}} + Ae^{-t} - Ce^{-4t}$$

$$\boxed{z(t) = Ae^{-t} - Ce^{-4t}}$$

Ответ:

$$x(t) = e^{-t}(At+B) + Ce^{-4t}$$

$$y(t) = e^{-t}(At+B)$$

$$z(t) = Ae^{-t} - Ce^{-4t}$$

Самостоятельная работа.
Решить (операторным методом) задачу Коши.

			Ответы:
Вар. 1.	$\begin{cases}\dot{x} = x+y+e^{2t} \\ \dot{y} = -2x+4y+e^{2t}\end{cases}$	$x(0)=1$, $y(0)=2$	$x(t)=e^{3t}+te^{2t}$, $y(t)=2e^{3t}+te^{2t}$.
Вар. 2.	$\begin{cases}\dot{x} = -x-2y+2e^{-t} \\ \dot{y} = 3x+4y+e^{-t}\end{cases}$	$x(0)=-1$, $y(0)=-1$	$x(t)=2e^{2t}-e^{t}-2e^{-t}$, $y(t)=e^{t}+e^{-t}-3e^{2t}$
Вар. 3.	$\begin{cases}\dot{x} = 3x-4y+e^{-t} \\ \dot{y} = x-2y+e^{-t}\end{cases}$	$x(0)=-1$, $y(0)=1$	$x(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{8}{3}e^{2t}+te^{-t}$, $y(t)=\frac{5}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{2t}+te^{-t}$
Вар. 4.	$\begin{cases}\dot{x} = 4x-y+e^{t} \\ \dot{y} = x+2y+3e^{t}\end{cases}$	$x(0)=1$, $y(0)=1$	$x(t)=(2-t)e^{3t}-e^{t}$, $y(t)=(3-t)e^{3t}-2e^{t}$
Вар. 5.	$\begin{cases}\dot{x} = x-2y+t \\ \dot{y} = x-y+2\end{cases}$	$x(0)=0$, $y(0)=0$	$x(t)=3\cos t-\sin t+t-3$, $y(t)=2\cos t+\sin t+t-2$
Вар. 6	$\begin{cases}\dot{x} = 4x+5y+4 \\ \dot{y} = -4x-4y+4t\end{cases}$	$x(0)=0$, $y(0)=3$	$x(t)=-4\cos 2t+7\sin 2t+4+5t$, $y(t)=6\cos 2t-4\sin 2t-3-4t$
Вар. 7.	$\begin{cases}\dot{x} = x+y+3t+6 \\ \dot{y} = -10x-y+6t+3\end{cases}$	$x(0)=0$, $y(0)=0$	$x(t)=\frac{5}{3}\sin 3t+\frac{4}{3}\cos 3t+\frac{4}{3}+t$, $y(t)=\frac{7}{3}\sin 3t+\frac{19}{3}\cos 3t-\frac{19}{3}-4t$
Вар. 8	$\begin{cases}\dot{x} = -x-y+e^{2t} \\ \dot{y} = 2x+2y+2e^{2t}\end{cases}$	$x(0)=1$, $y(0)=1$	$x(t)=1+e^{t}-e^{2t}$, $y(t)=-1-2e^{t}+4e^{2t}$
Вар. 9	$\begin{cases}\dot{x} = 2x+\frac{1}{2}y \\ \dot{y} = -18x-4y+18te^{2t}\end{cases}$	$x(0)=\frac{1}{3}$, $y(0)=2$.	$x(t)=(3t+1)e^{-t}+(t-\frac{2}{3})e^{2t}$, $y(t)=-18e^{-t}\cdot t+2e^{2t}$
Вар. 10	$\begin{cases}\dot{x} = 7x-2y+8te^{-t} \\ \dot{y} = 8x-y\end{cases}$	$x(0)=0$, $y(0)=\frac{1}{2}$.	$x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+(t-\frac{1}{2})e^{3t}$, $y(t)=(4t+2)e^{-t}+(2t-\frac{3}{2})e^{3t}$