Раздел 3. Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

Лекция 7 Теорема о спектральном разложении компактного симметричного оператора.

Наша дальнейшая задача – опираясь на доказанную теорему о существовании собственного элемента у симметричного компактного оператора, разобраться в том, как устроено множество его собственных чисел и какова структура его собственных подпространств. В результате проведённого анализа мы сформулируем теорему Гильберта-Шмидта о спектральном представлении (или спектральном разложении) такого оператора.

Итак, мы знаем, что компактный линейный самосопряжённый оператор имеет собственный элемент, отвечающий собственному значению λ_1, $|\lambda_1| = \|A\|$. Нормированный собственный элемент назовём e_1.

Было доказано, что ортогональное дополнение к собственному элементу – подпространство $H_1 = L^{\perp}\{e_1\}$ – является инвариантным подпространством оператора A. Подпространство H_1, очевидно, само является гильбертовым пространством. Сужение оператора A на это подпространство обозначим A_1.

Утверждение: A_1 – компактный самосопряжённый оператор в пространстве H_1.
Докажем компактность A_1. Пусть $\Omega \subset H_1 \subset H$ – произвольное ограниченное множество, тогда множество $A_1(\Omega) = A(\Omega)$ предкомпактно, поскольку оператор A компактен.
Докажем самосопряжённость. Пусть $x, y \in H_1$, тогда
$(A_1x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = (x, A_1y)$.
Таким образом, из компактности и симметричности оператора A следует компактность и симметричность его сужения на инвариантное подпространство. Этим обстоятельством мы будем пользоваться и в дальнейшем.

Утверждение: Норма оператора A_1 не превосходит норму A.
Действительно,

$$\|A_1\| = \sup_{\|x\|=1, x\in H_1} \|A_1x\| = \sup_{\|x\|=1, x\in H_1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1, x\in H} \|Ax\| = \|A\|$$

Если $A_1 = O_1$ (нулевой оператор на H_1), то $H_1 \subset KerA$.

Утверждение: в этом случае $H_1 = KerA$.
Действительно, по теореме об ортогональном разложении произвольный элемент пространства раскладывается в ортогональную сумму $x = \alpha e_1 + h$, где $h \in H_1$. Тогда $Ax = \alpha\lambda_1 e_1$. Этот элемент равен нулю только в случае, когда $\alpha = 0$, т.е. при $x = h \in H_1$.

Замечание. Равенство $A_1 = O_1$ выполняется, в частности, и тогда, когда само подпространство H_1 тривиально, т.е. $H_1 = \{o\}$. Это значит, что исходное пространство H одномерно.

Пусть теперь $A_1 \neq O_1$. У нас есть гильбертово пространство H_1 и действующий в нём ненулевой компактный симметричный оператор A_1. Можем воспользоваться теоремой о собственном элементе уже применительно к этому оператору. В результате получаем, что A_1 имеет в H_1 собственный элемент (нормируем, называем e_2), отвечающий собственному значению λ_2, $|\lambda_2| = \|A_1\| \leq \|A\| = |\lambda_1|$. Эти собственный элемент и собственное значение A_1 – одновременно собственный элемент и собственное значение исходного оператора A.

Далее продолжаем в том же духе. Подпространство
$H_2 = L^{\perp}\{e_1, e_2\} = H_1 \ominus L\{e_2\}$ – инвариантное подпространство оператора A_1 и, тем самым, оператора A. Пусть A_2 – сужение A на это подпространство. H_2 само является гильбертовым пространством, A_2 – компактный симметричный оператор в H_2, $\|A_2\| \leq \|A_1\|$. Либо он нулевой, $A_2 = O_2$, либо нет.

Если $A_2 = O_2$, то $H_2 \subset KerA$, и тогда $H_2 = KerA$.
Действительно, любой элемент $x \in H$ представляется в виде
$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + h$, где $h \in H_2$. Тогда $Ax = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \alpha_2 \lambda_2 e_2$. Поскольку $e_{1,2}$ линейно независимы (в силу ортогональности), этот элемент равен нулю только в случае, когда $\alpha_{1,2} = 0$, т.е. при $x = h \in H_2$.

Если $A_2 \neq O_2$, то снова воспользуемся теоремой, получаем нормированный собственный элемент e_3 с собственным числом λ_3,
$|\lambda_3| = \|A_2\| \leq \|A_1\| = |\lambda_2|$ и т.д.

Пусть построена конечная ортонормированная последовательность
$\{e_1, \ldots, e_m\}$ собственных элементов A, отвечающих ненулевым собственным числам $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, причём $|\lambda_{j+1}| \leq |\lambda_j|$. Ортогональное дополнение к линейной оболочке построенных собственных векторов

$$H_m = L^{\perp}\{e_1, \ldots, e_m\} = H_{m-1} \ominus L\{e_n\} -$$

гильбертово пространство и инвариантное подпространство A. Сужение A на H_m называем A_m, это самосопряжённый компактный оператор, причём $\|A_m\| \leq \|A_{m-1}\|$.

Если $A_m = O_m$ – нулевой оператор, то $H_m = KerA$. Для доказательства снова пишем ортогональное разложение $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_m e_m + h$, где $h \in H_m$. Тогда $Ax = \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m e_m$, а поскольку система $\{e_1, \ldots, e_m\}$ линейно независима (в силу ортогональности), этот элемент равен нулю только в случае, когда $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, т.е. при $x = h \in H_m$.

Если $A_m \neq O_m$, то у A_m найдётся нормированный собственный элемент e_{m+1}, отвечающий собственному числу λ_{m+1},

$$|\lambda_{m+1}| = \|A_m\| \leq \|A_{m-1}\| = |\lambda_m| .$$

Этот процесс либо на каком-то этапе обрывается, если при некотором m $A_m = O_m$ (в частности, если исходное пространство конечномерно, тогда даже при невырожденном операторе A, когда его ядро тривиально, будет выполнено равенство $A_n = O_n$, где n – размерность пространства, поскольку $H_n = H^{\perp} = \{o\}$ – нулевое подпространство), либо мы получаем бесконечную ортонормированную последовательность собственных элементов оператора, отвечающих невозрастающей по модулю последовательности собственных чисел.

Докажем, что если эта последовательность бесконечна, то она стремится к нулю. Воспользуемся компактностью оператора A. Поскольку семейство $\{e_1, e_2, \dots\}$ ограничено (лежит на сфере), последовательность $\{Ae_1, Ae_2, \dots\}$ должна содержать фундаментальную подпоследовательность.

Заметим, что, в силу ортонормированности системы и теоремы Пифагора,

$$\|Ae_i - Ae_j\|^2 = \|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \, .$$

В силу монотонного невозластания последовательности $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots\}$ она имеет неотрицательный (в силу положительности членов последовательности) предел: $|\lambda_j| \to \delta \geq 0$, причём $\forall j : |\lambda_j| \geq \delta$, откуда $\|Ae_i - Ae_j\|^2 \geq 2\delta^2$. Если этот предел строго положителен ($\delta > 0$), то $\{Ae_j\}$ – $\sqrt{2}\delta$-дискретная последовательность, из которой нельзя выделить фунндаментальной подпоследовательности, что противоречит компактности оператора A. Следовательно, $\delta = 0$, и последовательность $\{\lambda_j\}$ бесконечно малая.

Замечание. Отсюда, между прочим, следует, что собственное подпространство компактного самосопряжённого оператора, отвечающее ненулевому собственному числу, конечномерно.

Утверждение. Последнее замечание справедливо и для несамосопряжённых компактных операторов.
Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ – собственное число оператора A, и собственное подпространство $N_\lambda(A)$ бесконечномерно. Тогда в нём найдётся счётная ортонормированная последовательность элементов $\{e_j\}$. Подействуем на элементы этой последовательности оператором A. Из результирующей последовательности $Ae_j = \lambda e_j$ нельзя выделить фундаментальной подпоследовательности, поскольку величины $\|Ae_i - Ae_j\|^2 = 2|\lambda|^2$ отделены от нуля, и, следовательно, оператор A некомпактен.

Замечание. При доказательстве мы воспользовались монотонностью последовательности $\{|\lambda_j|\}$. На самом деле доказательство легко модифицируется таким образом, что такая монотонность становится не нужна. Убедитесь, что если оператор A обладает счётной ортонормированной системой элементов $\{e_j\}$, отвечающих собственным числам $\{\lambda_j\}$, и найдётся такое $\delta > 0$, что для бесконечного множества индексов j выполнится неравенство $|\lambda_j| \geq \delta$, то оператор A некомпактен.

Итак, мы выяснили, что каждый компактный симметричный оператор обладает конечным или счётным набором ортонормированных собственных элементов $\{e_j\}$, отвечающих ненулевым собственным числам и упорядоченных в порядке неубывания модулей этих собственных чисел. Если система бесконечна (счётна), то последовательность собственных чисел стремится к нулю.

Произвольный элемент $x \in H$ допускает представление

$$x = \sum_j (x, e_j) e_j + h\,,$$

где сумма (конечная или бесконечная) представляет собой ортогональную проекцию x на замыкание линейной оболочки системы элементов $\{e_j\}$, а слагаемое h – на ортогональное дополнение к этой системе $L^{\perp}\{e_j\}$.

Если система $\{e_j\}$ конечна, то это ортогональное дополнение, как мы установили, является ядром оператора (конечномерным и, возможно, тривиальным в случае конечномерного пространства H, и бесконечномерным, если H бесконечномерно). Покажем, что в случае бесконечной системы $\{e_j\}$ ортогональное дополнение к ней также представляет собой ядро оператора A.

Заметим, что $\forall m:\ L^{\perp}\{e_j\} \subset H_m = L^{\perp}\{e_j, j \le m\}$. Оценим норму оператора A на элементах этого подпространства:

$$\forall m \in \mathbb{N}: \sup_{x \in \sigma_1(o) \cap L^{\perp}\{e_j\}} \|Ax\| \le \sup_{x \in \sigma_1(o) \cap H_m} \|Ax\| = \|A_m\| = |\lambda_{m+1}|\,.$$

Переходя к пределу в нестрогом неравенстве при $m \to \infty$, получаем:

$$\sup_{x \in \sigma_1(o) \cap L^{\perp}\{e_j\}} \|Ax\| \le 0\,,$$

т.е.

$$\forall x \in L^{\perp}\{e_j\}: \|Ax\| = 0\,.$$

Это означает включение $L^{\perp}\{e_j\} \subset KerA$. Из взаимной ортогональности собственных элементов вытекает обратное включение. Следовательно,
$L^{\perp}\{e_j\} = KerA$.

Утверждение: $L^{\perp}\{e_j\} = \bigcap_m H_m$.
Действительно, из включения $\forall m:\ L^{\perp}\{e_j\} \subset H_m$ следует, что
$L^{\perp}\{e_j\} \subset \bigcap_m H_m$.
Обратное включение:
$h \in \bigcap_m H_m \Leftrightarrow \forall m:\ h \in H_m \Rightarrow \forall m:\ h \perp e_m \Rightarrow h \in L^{\perp}\{e_j\}$.

Утверждение. Система $\{e_j\}$ полна тогда и только тогда, когда ядро оператора A тривиально.

Замечание. В случае сепарабельного пространства ядро содержит полную конечную или счётную ортонормированную систему элементов, которые являются, разумеется, собственными элементами оператора A. Объединяя эту систему с собственными элементами A, отвечающими ненулевым собственным числам, получим полную ортонормированную систему собственных векторов во всём пространстве H. Если пространство несепарабельно, такой системы, разумеется, быть не может.

Таким образом, нами доказана

Теорема Гильберта-Шмидта о спектральном разложении компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве:

- Любой симметричный компактный оператор в гильбертовом пространстве H имеет конечную или счётную систему ортонормированных собственных элементов $\{e_j\}$ с ненулевыми собственными значениями $\{\lambda_j\}$, причём если система счётна, то последовательность $\{\lambda_j\}$ стремится к нулю.

- Произвольный элемент пространства раскладывается в ортогональную сумму
$$x = \sum_j (x, e_j)e_j + h\,,$$
где h принадлежит ядру оператора A.

- При этом действие оператора A на элемент x описывается равенством
$$Ax = \sum_j \lambda_j (x, e_j)e_j\,.$$

Замечание. Последнее равенство и называется спектральным разложением оператора. В случае, если сумма конечна, оно вытекает из линейности оператора:
$$Ax = A\left(\sum_j (x, e_j)e_j + h\right) = \sum_j (x, e_j)Ae_j + Ah = \sum_j \lambda_j (x, e_j)e_j\,.$$
Если сумма бесконечна, мы должны также воспользоваться его непрерывностью:
$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j)e_j + h\right) = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x, e_j)e_j + h\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{j=1}^{n} (x, e_j)e_j + h\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x, e_j)e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j)e_j\,.$$

Замечание. Конечномерный аналог – приведение симметричной матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Замечание. Произвольный симметричный компактный оператор порождает разложение пространства H в ортогональную сумму собственных подпространств:
$$H = \bigoplus_{\lambda} H_\lambda\,,$$
(суммирование по собственным числам оператора), при этом ненулевым λ отвечают конечномерные подпространства. (Разумеется, H_λ – собственные подпространства – не совпадают с H_m из доказательства теоремы.) Этому разложению пространства отвечает разложение единицы, т.е. представление единичного оператора в виде суммы ортопроекторов на указанные

подпространства:
$$E = \bigoplus_{\lambda} P_\lambda\,.$$

Замечание. Из спектрального разложения компактного оператора вытекает его полная непрерывность. (Напомню, что вполне непрерывным называется оператор, с любой точностью аппроксимируемый оператором конечного ранга.) Действительно, если система $\{e_j\}$ конечна, то A – оператор конечного ранга, а если бесконечна, то

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j) e_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j (x, e_j) e_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j) e_j = A_N x + C_N x\,.$$

Утверждение: $\|C_N\| = |\lambda_{N+1}\|$.
Действительно,

$$\|C_N x\|^2 = \left\| \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j (x, e_j) e_j \right\|^2 = \sum_{j=N+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |(x, e_j)|^2 \le$$
$$\le \sum_{j=N+1}^{\infty} |\lambda_{N+1}|^2 |(x, e_j)|^2 = |\lambda_{N+1}|^2 \sum_{j=N+1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \le |\lambda_{N+1}|^2 \|x\|^2\,.$$

С другой стороны, для $x = e_{N+1}$ неравенство превращается в равенство.

Таким образом, $A = A_N + C_N$, оператор A_N имеет конечный ранг N, а норма оператора C_N выбором N может быть сделана меньше любого наперёд заданного положительного числа.

Ранее мы знали, что в любом банаховом пространстве вполне непрерывный оператор компактен. Теперь мы установили, что если пространство гильбертово, то компактные операторы вполне непрерывны (правда, пока что мы это доказали только для симметричных операторов). Далее этот факт будет установлен для произвольного компактного оператора, так что мы увидим, что в гильбертовых пространствах компактность и полная непрерывнось равносильны.