Лекции 6-7.Уравнение плоскости и прямой в пространстве.

Теорема. Плоскость *П*, проходящая через точку $A_о(x_о, y_о, z_о)$, перпендикулярно вектору $\vec{\mathbf{n}}(A, B, C)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x-x_о)+B(y-y_о)+C(z-z_о)=0. \qquad (6)$$

2. Плоскость *П*, проходящая через точку $A_о(x_о, y_о, z_о)$, параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_о & y-y_о & z-z_о \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0\,. \qquad (7)$$

3. Плоскость *П*, проходящая через три точки $A_о(x_о, y_о, z_о)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_о & y-y_о & z-z_о \\ x_1-x_о & y_1-y_о & z_1-z_о \\ x_2-x_о & y_2-y_о & z_2-z_о \end{vmatrix}=0\,. \qquad (8)$$

4. Плоскость *П*, отсекающая на координатных осях ненулевые отрезки a, b, c задается уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (9)$$

Доказательство.

Следствие. Всякая плоскость П может быть задана уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0\,, \qquad (10)$$

Вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ ортогонален плоскости П.

Доказательство.

Определение. Уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0\,,$$

имеет нормальную форму, если $A^2+B^2+C^2=1$. Это эквивалентно тому, что вектор $\vec{\mathbf{n}}=(A, B, C)$ –имеет единичную длину.

Если уравнение не имеет нормальной формы, оно приводится к ней делением на $\gamma=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

Теорема. Пусть плоскость π определяется уравнением (10) *в* нормальной форме. Тогда расстояние от *точки* $M(x_1, y_1, z_1)$ до прямой вычисляется по формуле

$$h=|Ax_1+By_1+Cz_1+D|\,. \qquad (11)$$

Доказательство.

Следствие. Для произвольной плоскости с уравнением (10),

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (12)$$

Пусть две плоскости в пространстве заданы общими уравнениями:

$$\pi_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда мы сразу можем сделать вывод, что $\vec{\mathbf{n}}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{\mathbf{n}}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – это векторы нормали к π_1 и π_2.

Теорема. Угол между плоскостями π_1 и π_2 может быть найден по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2|}{|\vec{\mathbf{n}}_1||\vec{\mathbf{n}}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_1^2}}. \quad (13)$$

Если $\cos\alpha = 1$, то плоскости параллельны.

Доказательство.

Теорема. Расстояние между двумя параллельными плоскостями

$Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ равно

$$\rho = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (14)$$

Доказательство.

Примеры.

Теорема.

а). Прямая l, проходящая через точку $A\ (x_o, y_o, z_o)$, параллельно вектору $\vec{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)$ задается *каноническим* уравнением

$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}, \quad (15)$$

или *параметрическими* уравнениями

$$\begin{cases} x = x_o + a_1t, \\ y = y_o + a_2t, \\ z = z_o + a_3t, \ t \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (16)$$

в векторном виде: $\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_o + t\vec{\mathbf{a}}$, $t \in \mathbf{R}$, где $\vec{\mathbf{r}}_o = \overline{OA}$ – *радиус-вектор* точки A.

б). Прямая, проходящая через две точки $A\ (x_o, y_o, z_o)$ *и* $A_1(x_1, y_1, z_1)$, задается уравнением

$$\frac{x - x_o}{x_1 - x_o} = \frac{y - y_o}{y_1 - y_o} = \frac{z - z_o}{z_1 - z_o}, \quad (17)$$

в). Прямая, проходящая через точку $A\ (x_o, y_o, z_o)$, перпендикулярно двум векторам нормали $\vec{\mathbf{n}}_1=(A_1, B_1, C_1)$ *и* $\vec{\mathbf{n}}_2=(A_2, B_2, C_2)$ задается в декартовой системе координат системой уравнений

$$\begin{cases} A_1(x-x_o)+B_1(y-y_o)+C_1(z-z_o)=0, \\ A_2(x-x_o)+B_2(y-y_o)+C_2(z-z_o)=0. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство.
Примеры.

Если плоскость π задана общим уравнением, а прямая l – каноническим уравнением:

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0\ , \qquad l: \frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}=\frac{z-z_o}{a_3}\ .$$

то можем заметить, что $\vec{\mathbf{n}}=(A, B, C)$ –вектор нормали к плоскости π, $\vec{\mathbf{a}}=(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор прямой l и точка $A_o(x_o, y_o, z_o)\in l$.

Теорема. а). $l\in\pi \iff$

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, & (19) \\ Ax_o+By_o+Cz_o+D=0, & (20) \end{cases}$$

б). $l\,||\,\pi$ *и* $l\notin\pi \iff$

$$\begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0, & (21) \\ Ax_o+By_o+Cz_o+D\neq 0, & (22) \end{cases}$$

в). $l\perp\pi \iff$

$$\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{C}{a_3}\ . \tag{23}$$

г). Угол между l *и* π вычисляется по формуле

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{n}}|\,|\vec{\mathbf{a}}|}=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{24}$$

Доказательство.
Примеры.

Пара скрещивающихся прямых имеют единственный общий перпендикуляр. Его длина называется расстоянием между прямыми.

Если две прямые заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_o:\ \frac{x-x_o}{a_1}=\frac{y-y_o}{a_2}=\frac{z-z_o}{a_3}\ , \qquad l_1:\ \frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}\ . \tag{35}$$

то $\vec{\mathbf{a}}=(a_1, a_2, a_3)\,||\,l_o$, $\vec{\mathbf{b}}=(b_1, b_2, b_3)\,||\,l_1$, $A_o(x_o, y_o, z_o)\in l_o$, $A_1(x_1, y_1, z_1)\in l_1$. Определим матрицу

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x_1-x_o & y_1-y_o & z_1-z_o \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\ ,$$

и пусть $\Delta=\det\mathbf{A}$.

Теорема. а). Угол между l *и* π вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} = \frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,. \qquad (36)$$

б). Прямые l_o *и* l_1 скрещиваются $\Leftrightarrow$ $\Delta\neq 0$.

в). Прямы*е* l_o и l_1 пересекаются $\Leftrightarrow$ $\Delta=0$ и $\vec{\mathbf{a}}$ не коллинеарен $\vec{\mathbf{b}}$.

г). $l_o || l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\mathbf{A}=2$ и $\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}$.

д). $l_o = l_1 \Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\mathbf{A}=1$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Пусть две прямые l_o *и* l_1 в пространстве заданы своими каноническими уравнениями (35). Тогда

а). если $l_o || l_1$, то расстояние между l_o *и* l_1 находится по формуле

$$h = \frac{|\overrightarrow{A_oA_1}\times\vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{a}}|}\ , \qquad (37)$$

б). если l_o *и* l_1 скрещиваются, то расстояние между ними находится по формуле

$$h = \frac{|\overrightarrow{A_oA_1}\cdot\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|}\ .$$

Доказательство.

Примеры.