Лекция 2. Прямая на плоскости.

Определение. Уравнением (неявным) кривой на декартовой плоскости называется уравнение

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (1)$$

если для любой точки M на кривой $M \in \gamma$ её координаты удовлетворяют уравнению (1) и наоборот, всякая пара (x, y) чисел, удовлетворяющих (1), соответствует точке $M(x, y)$ на кривой .

Если уравнение (1) можно записать в виде

$$y=f(x)$$

то говорят, что уравнение в явном виде.

Если уравнение кривой задано в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \qquad (2)$$

где t вещественное число, то говорят что кривая задана в параметрическом виде. Удобно считать параметр t временем, тогда (2) описывает закон перемещения материальной точки по плоскости.

Примеры.

Прямая l на плоскости однозначно определяется или

а) точкой $A_0 \in l$ и ненулевым вектором $\vec{\mathbf{a}} \,||\, l$; тогда можем написать, что

$$l = \{M \,|\, \overrightarrow{A_0M} \,||\, \vec{\mathbf{a}}\}; \quad (3), \quad \text{или}$$

б) точкой $A_0 \in l$ и ненулевым вектором $\vec{\mathbf{n}} \perp l$; тогда

$$l = \{M \,|\, \overrightarrow{A_0M} \perp \vec{\mathbf{n}}\}; \ (4), \ \text{или}$$

в) двумя точками $A_0, A_1 \in l$.

Вектор $\vec{\mathbf{a}} \,||\, l$ называется *направляющим вектором прямой*, а вектор $\vec{\mathbf{n}} \perp l$ называется *вектором нормали к прямой.*

Теорема.

1. Уравнение прямой l, проходящей через точку $A_0(x_0, y_0)$, и имеющей направляющий вектор $\vec{\mathbf{a}}(a_1, a_2)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}, \qquad (3)$$

канонического уравнения прямой, или *параметрического уравнения*:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t, \ t \in \mathbf{R}, \end{cases} \qquad (4)$$

2. Прямая, проходящая через две точки $A_o(x_o, y_o)$ и $A_1(x_1, y_1)$, задается уравнением

$$\frac{x-x_o}{x_1-x_o}=\frac{y-y_o}{y_1-y_o}, \qquad (5)$$

3. Прямая, проходящая через точку $A_o(x_o, y_o)$, и имеющая вектор нормали $\vec{\mathbf{n}}(A, B)$, задается в декартовой системе координат уравнением

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0. \qquad (6)$$

4. Прямая, отсекающая на координатных осях отрезки длины $a\neq 0,\ b\neq 0$, задается уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,, \qquad (7)$$

(*уравнение прямой в отрезках*).

Доказательство.

Следствие. Любая прямая на плоскости может быть задана *общим уравнением прямой*

$$Ax+By+Cz=0, \qquad (8)$$

где *(A,B)* - координаты вектора нормали к прямой.

Примеры.

Уравнение прямой вида

$$y=kx+b \qquad (9)$$

называется уравнением с угловым коэффициентом k.

Теорема. В предыдущих обозначениях чило k равно тангенсу угла наклона прямой , а число b - *ордината точки* пересечения прямой и оси ординат.

Доказательство.

Теорема.

Если прямые на плоскости заданы уравнениями с угловым коэффициентом

$$l_1\colon y=k_1x+q_1, \qquad l_2\colon y=k_2x+q_2,$$

то угол между ними вычисляется по формуле $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{|k_2-k_1|}{|1+k_1k_2|}$.

Примеры.

Определение. Будем говорить, что *общее уравнение прямой*

$$Ax+By+C=0\,, \qquad (10)$$

имеет нормальный вид, если $A^2+B^2=1$.

Если уравнение (10) не имеет нормальный вид, то его можно привести к этому виду, разделив на $\sqrt{A^2+B^2}$:

Теорема . Пусть прямая l определяется уравнением (14) в нормальной форме. Тогда расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой вычисляется по формуле

$$h = |Ax_0 + By_0 + C| . \qquad (11)$$

Доказательство.

Следствие. *Если прямая определяется общим уравнением вида* (10)*, то*

$$h = \frac{|\mathrm{Ax_0} + \mathrm{By_0} + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}} .$$

Следствие. Если пара параллельных прямых заданы уравнениями

l_1: $Ax+By+C_1=0$ *l_2: $Ax+By+C_2=0$* , то расстояние между прямыми равно

$$h = \frac{|C_1 - \mathrm{C}_2|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$$

Доказательство.

Примеры.