Лекция №3

Линейная зависимость и независимость системы вектор-функций. Определитель Вронского.

Вспомним определения линейной зависимости и независимости системы вектор-функций.

Определение. Вектор-функции $\boldsymbol{x}^1(t), \boldsymbol{x}^2(t), \ldots, \boldsymbol{x}^k(t)$ называются линейно зависимыми на J (J – интервал или отрезок) если существуют постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ не все равные нулю, такие что

$$c_1\boldsymbol{x}^1(t) + c_2\boldsymbol{x}^2(t) + \ldots + c_k\boldsymbol{x}^k(t) = 0 \quad \forall t \in J. \qquad (1)$$

Определение. Вектор-функции $\boldsymbol{x}^1(t), \boldsymbol{x}^2(t), \ldots, \boldsymbol{x}^k(t)$ называются линейно независимыми на J если равенство (1) на J возможно только тогда, когда все $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

Определение. Определителем Вронского системы вектор-функций $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ называется определитель, столбцами которого являются эти вектор-функции, то есть функция

$$W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) = \begin{vmatrix} x_1^1(t) & x_1^2(t) & \ldots & x_1^n(t) \\ x_2^1(t) & x_2^2(t) & \ldots & x_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n^1(t) & x_n^2(t) & \ldots & x_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Лемма (1). *Если функции $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ линейно зависимы на (a, b), то $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) \equiv 0$ на (a, b).*

Доказательство. Линейная зависимость вектор-функций равносильна линейной зависимости столбцов определителя Вронского. Следовательно $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) \equiv 0$ на (a,b). $\square$

Обратное утверждение неверно.

Пример.

$$\boldsymbol{x}^1(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^2(t) = \begin{pmatrix} g_2(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – линейно независимы на (a,b).

Лемма (2)**.** *Если $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t_0) \neq 0$, $t_0 \in (a,b)$, то функции $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ – линейно независимы на (a,b).*

Доказательство. От противного. Предположим, что $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ – линейно зависимы, тогда по Лемме (1) $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) \equiv 0$. Получаем противоречие с условием $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t_0) \neq 0$. $\square$

Лемма (3)**.** *Если $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ – решения линейной однородной системы вида* (3) *и $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t_0) = 0$, $t_0 \in (a,b)$, то функции $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ линейно зависимы на (a,b) и $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) \equiv 0$ на (a,b).*

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}^1(t) + c_2\boldsymbol{x}^2(t) + \ldots + c_n\boldsymbol{x}^n(t).$$

Эта функция – решение линейной однородной системы. Подберем константы $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так чтобы

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0,$$
$$\boldsymbol{x}(t_0) = 0.$$

Это можно сделать, так как эти условия эквивалентны тому, что существует нетривиальное решение линейной однородной алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} c_1x_1^1(t_0) + c_2x_1^2(t_0) + \ldots + c_nx_1^n(t_0) = 0, \\ c_1x_2^1(t_0) + c_2x_2^2(t_0) + \ldots + c_nx_2^n(t_0) = 0, \\ \dotfill \\ c_1x_n^1(t_0) + c_2x_n^2(t_0) + \ldots + c_nx_n^n(t_0) = 0 \end{cases}$$

определитель которой равен $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t_0)$ и следовательно равен 0. По теореме существования и единственности решения задачи Коши $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$. Таким образом функции $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ – линейно зависимы и по Лемме (1) $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t) \equiv 0$. □

Замечание (1). *Матрица столбцы которой являются решениями системы* (3) *называется матрицей решений системы* (3)*. Из Лемм (2) и (3) следует, что матрица решений системы* (3) $X(t)$ *является фундаментальной матрицей системы* (3) *тогда и только тогд, когда* $\exists t_0$, $|X(t_0)| \neq 0$ *(*$\forall t$, $|X(t)| \neq 0$*).*

Формула Лиувилля-Остроградского.

Теорема. *Пусть* $\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)$ *– решения системы* (3)*,* $t \in (a,b)$ *и* $W(t) = W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(t)$ *– определитель Вронского этой системы решений. Тогда* $\forall t, t_0 \in (a,b)$

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(\tau)\,d\tau},$$

где $\mathrm{tr\,A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t)} + \ldots + a_{nn}(t)$ *– след* $A(t)$*.*

Доказательство.

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{x}}_n \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ – строки $W(t)$. Матрица $X(t)$, соответствующая определителю $W(t)$, удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{X} = AX$$

так как столбцы $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ матрицы X являются решениями системы (3). Значит для всякой строки матрицы X выполняется соотношение

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i = a_{i1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{in}\boldsymbol{x}_n$$

и следовательно

$$\dot{W}(t) = \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ a_{21}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{2n}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{x}_n \end{vmatrix} = a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=W(t)} + a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=0} + \ldots + a_{1n}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=0} +$$

$$a_{21}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=0} + a_{22}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=W(t)} + \ldots + a_{nn}\underbrace{\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{vmatrix}}_{=W(t)} = \operatorname{tr} A(t)W(t).$$

Таким образом $W(t)$ удовлетворяет уравнению с разделяющимися переменными

$$\dot{W}(t) = \operatorname{tr} A(t)W(t),$$

решая которое получаем, что

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}.$$

$\square$

Замечание. *Если решения* $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ *– линейно независимы, то*

$$\frac{W(t)}{W(t_0)} > 0,$$

иначе существовала бы точка t_1 *такая, что* $W(t_1) = 0$.

Если решения $\boldsymbol{x}^1(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)$ *– линейно зависимы, то*

$$W(t) = W(t_0) = 0, \quad \forall t,\, t_0.$$