Билет №8.03.

№1.

Условная вероятность $P(A)>0$ $\quad P(B|A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}$

Независимость двух событий: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

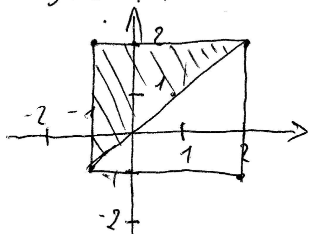
Независимость n событий: $\forall k_i\ P(A_{i}\dots A_{k_i})=P(A_{i})\dots P(A_{k_i}) \Leftrightarrow A_1\dots A_n$ незав. в совокупности.

Формула умножения для n событий: $P(A_1\dots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_2A_1)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1})$

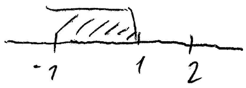
$B_k=A_1\dots A_k=B_{k-1}A_k$, $P(B_k)=P(B_{k-1})P(A_k|B_{k-1})$, $P(B_n)=P(B_{n-1})P(A_{n-1}|B_{n-2})P(A_{n-2}|B_{n-3})\dots P(A_2|A_1)P(A_1)$

Задача.

ξ,η - р.р. $[-1;2]$



$$P(\overset{B}{\eta>\xi}\,|\,\overset{A}{\xi<1})=\frac{P(\overset{B}{\eta>\xi},\overset{A}{\xi<1})}{P(\xi<1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$



$$P(\xi<1)=\frac{M([-1;1])}{M([-1;2])}=\frac{2}{3}$$

$$P(\eta>\xi,\xi<1)=P(\eta>\xi)P(\xi<1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P(\eta>\xi)=\frac{S_{D_2\cap G}}{S_G}=\frac{1}{2}$$

№2.

Непрерывная случайная величина.

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}x f_\xi(x)dx$

$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2 f_\xi(x)dx$

свойства функции:

1) $f_\xi(x)\geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(t)dt=1$
3) $f_\xi(x)=\frac{d}{dx}F_\xi(x)$
4) $P(C_1<\xi<C_2)=\int_{C_1}^{C_2}f_\xi(t)dt$

свойства плотности:

1) $f_\xi(x_1,\dots,x_n)\geq 0$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\dots\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x_1,\dots x_n)dx_n=1$
3) $f_\xi(x_1\dots x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\dots\partial x_n}F_\xi(x_1,\dots,x_n)$ если f_ξ - непрерывн. в $(x_1,\dots x_n)$
4) $P(\xi\in D)=\int\!\!\int_D f_\xi(x_1\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n$

Задача.

$$f_\xi=\begin{cases}C(2-x), & x\in[1,2]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$C\int_1^2(2-x)dx=C\cdot\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=C\left(2-2+\frac{1}{2}\right)=C\frac{1}{2}=1\Rightarrow C=2$$

$$M\xi=2\int_1^2 x\cdot(2-x)dx=2\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=2\cdot\left(4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=2\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

№3.

$M\xi=\lambda=3$

$(M\xi)^2=\lambda^2=9$

$M\xi^2=D\xi+(M\xi)^2=\lambda+\lambda^2=12$

$$M\eta=M\xi^2-6M\xi+5=12-18+5=-1$$

№4.

$\xi \backslash \eta$	1	2
1	C	$2C$
2	$2C$	$4C$

$C=1/9$

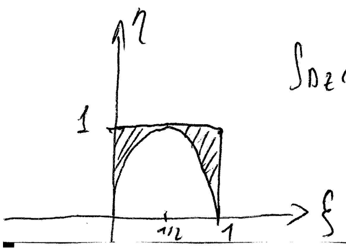
$\xi\cdot\eta$	1	2	4
p	1/9	4/9	4/9

ξ	1	2
p	3/9	6/9

η	1	2
p	3/9	6/9

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\cdot\eta)-M(\xi)\cdot M(\eta)=\frac{25}{9}-\frac{15}{9}\cdot\frac{15}{9}=\frac{225-225}{81}=0$$

№5.



$$S_{D_2\cap G}=1-\int_0^1\sin(\pi x)dx=1+\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1=1-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}$$

$$P(\eta>\sin(\pi x))=\frac{S_{D_2\cap G}}{S_G}=\frac{\pi-2}{\pi}$$