Лекция 1.Повторение школьного курса.
Векторы на плоскости..

Определение. Фиксированным вектором называется отрезок AB если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая концом.
Если A – начало, а B – конец, то фиксированный вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$.

Определение. Длиной фиксированного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Определение. Фиксированные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются, сонаправленными, если $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{A_1B_1}$ и лучи AB и A_1B_1 сонаправлены .

Определение. Два фиксированных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Пишем $\overrightarrow{AB}$ $=\overrightarrow{A_1B_1}$. Очевидно, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow$ они совмещаются параллельным переносом.

Для отношения "=" на множестве фиксированных векторов плоскости верны следующие свойства:

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$,

2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$,

3. $(\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1} \cap \overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_2B_2}$.

Следовательно, отношение "=" является отношением эквивалентности, и множество фиксированных векторов плоскости распадается на классы эквивалентных друг другу фиксированных векторов плоскости, непересекающиеся между собой.

Определение. Вектором $\vec{\mathbf{a}}$ называется класс равных между собой фиксированных векторов плоскости. Длина вектора $\vec{\mathbf{a}}$ обозначается $|\vec{\mathbf{a}}|$.

Если вектор $\vec{\mathbf{a}}$ задается фиксированным вектором $\overrightarrow{AB}$, то пишем $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$, и говорим, что $\overrightarrow{AB}$ есть вектор $\vec{\mathbf{a}}$, отложенный из точки A .

Предложение. Для вектороа $\vec{\mathbf{a}}$ и точки A существует и притом единственная точка B, такая , что $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{AB}$.

Доказательство.

Определение. Вектор, имеющий нулевую длину, называется *нулевым* и обозначается $\vec{\mathbf{o}}$. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным*.

Определение. Векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называются *сонаправленными (противоположно направленными),* если задающие их фиксированные векторы сонаправлены (противоположно направлены). Пишем $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}}$ $\uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$). Два вектора, направления которых совпадают или противоположны, называются коллинеарными. Пишем $\vec{\mathbf{a}} \parallel \vec{\mathbf{b}}$. Считается, что $\vec{\mathbf{o}}$ коллинеарен каждому вектору. Три и более векторов, параллельных одной плоскости называются *компланарными.*

Определение. Определение суммы двух векторов по правилу треугольника.

Теорема. Данное определение операции сложения корректно.

Доказательство.

Теорема.

$\forall\ \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ верно:

1. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$;

2. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$;

3. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{o}} = \vec{\mathbf{a}}$.

4. $\exists!\ \vec{\mathbf{x}}\ :\ \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{o}}$. Такой вектор называется *противоположным* к $\vec{\mathbf{a}}$ и обозначается $-\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство

Определение. Определение суммы двух векторов по правилу параллелограмма.

Определение. *Разностью двух векторов* $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется такой вектор $\vec{\mathbf{d}}$, что $\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}}$. Пишем $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$.

Теорема. Разность векторов существует и определяется однозначно.

Доказательство.

Определение. *Произведением вектора* $\vec{\mathbf{a}}$ *на число* λ называется такой вектор $\vec{\mathbf{b}}$, что

1. $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{\mathbf{a}} \uparrow\downarrow \vec{\mathbf{b}}$, если $\lambda < 0$;

2. $|\vec{\mathbf{b}}| = |\lambda| \cdot |\vec{\mathbf{a}}|$.

Пишем $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Теорема.

1. $\lambda(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \lambda\vec{\mathbf{b}}$;

2. $\lambda(\mu\vec{\mathbf{a}}) = (\lambda\mu)\vec{\mathbf{a}}$;

3. $(\lambda + \mu)\vec{\mathbf{a}} = \lambda\vec{\mathbf{a}} + \mu\vec{\mathbf{a}}$;

4. $1 \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$.

3. ненулевые векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ существует такое число λ, что $\vec{\mathbf{b}} = \lambda\vec{\mathbf{a}}$.

Доказательство.

Определение. Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ – два ненулевых вектора. Отложим их из одной точки O: $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{\mathbf{b}} = \overrightarrow{OB}$. Тогда углом между векторами $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется угол между лучами OA и OB, т.е. $\alpha = \angle AOB$. Пишем

$\alpha = \angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ называется <u>*число*</u>

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}| \cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}). \qquad (1)$$

Число $\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ называется скалярным квадратом вектора $\vec{\mathbf{a}}$.

Теорема. Скалярный квадрат $\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ вектора равен квадрату его длины $|\vec{\mathbf{a}}|^2$.

2. Для того, чтобы ненулевые векторы $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю ($\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$).

Доказательство.

Теорема.

1. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$;

2. $(\lambda\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} = \lambda(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$;

3. $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}$;

4. $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \geq 0$, и $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{o}}$

Доказательство.

Замечание.

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})/(|\vec{\mathbf{a}}|\,|\vec{\mathbf{b}}|) . \qquad (2)$$

Скалярное произведение обозначается также, как: $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}})$.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{a}}$ и $\vec{\mathbf{b}}$ - неколлинеарные векторы на плоскости. Для любого вектора $\vec{\mathbf{c}}$ существуют такие числа x_1, x_2 , что

$$\vec{\mathbf{c}} = x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}, \qquad (3)$$

причём x_1, x_2 определены однозначно.

Доказательство.

Представление вектора $\vec{\mathbf{c}}$ в виде (3) называется разложением по базису, состоящему из векторов $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\}$. Числа x_1, x_2 называются координатами вектора. В этом случае записывают так $\vec{\mathbf{c}} = (x_1, x_2)$.

Определение. Базис $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ называется ортонормированным, если

$|\vec{\mathbf{a}}| = |\vec{\mathbf{b}}| = 1$ и $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$.

Выберем произвольную точку O на плоскости, которую назовём *началом координат*. Прямые l_1, l_2 вместе с выбранными на них фиксированными векторами $\vec{OA} = \vec{\mathbf{a}}$, $\vec{OB} = \vec{\mathbf{b}}$ называются координатными осями.

Координатные оси вместе с ортонормированным базисом $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ и точкой O называются *декартовой системой координат.* Векторы $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\}$ в этом случае принято обозначать $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и называть базисными ортами.

Пусть C - произвольная точка на плоскости. Вектор $\vec{\mathbf{c}} = \overrightarrow{OC}$ называется *радиус-вектором* точки C в данной системе координат. Координаты (x, y) вектора $\vec{\mathbf{c}}$, где $\vec{\mathbf{c}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ называются координатами точки точки C в данной системе координат и записываются в виде $C(x,y)$.

Пусть произвольный вектор $\vec{\mathbf{c}}$ в декартовой СК имеет координаты (x, y), т.е. $\vec{\mathbf{c}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Теорема.

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{i} = |\vec{\mathbf{c}}|\,|\mathbf{i}| \cos\angle(\vec{\mathbf{c}}, \mathbf{i}) = |\vec{\mathbf{c}}| \cos\angle(\mathbf{i}, \vec{\mathbf{c}}) = x,$$

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{j} = |\vec{\mathbf{c}}|\,|\mathbf{j}| \cos\angle(\vec{\mathbf{c}}, \mathbf{j}) = |\vec{\mathbf{c}}| \cos\angle(\mathbf{j}, \vec{\mathbf{c}}) = y.$$

Пусть $\alpha = \angle(\mathbf{i}, \vec{\mathbf{c}})$, $\beta = \angle(\mathbf{j}, \vec{\mathbf{c}})$. Тогда величины $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{\mathbf{c}}$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{c}} = (x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{d}} = (y_1, y_2)$. Тогда

$$\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{d}} = (x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}) + (y_1\vec{\mathbf{a}} + y_2\vec{\mathbf{b}}) = (x_1+y_1)\vec{\mathbf{a}} + (x_2+y_2)\vec{\mathbf{b}}.$$

$$\lambda\vec{\mathbf{c}} = \lambda(x_1\vec{\mathbf{a}} + x_2\vec{\mathbf{b}}) = (\lambda x_1)\vec{\mathbf{a}} + (\lambda x_2)\vec{\mathbf{b}}.$$

Доказательство.

Пусть известны координаты точек $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$, а $\vec{\mathbf{d}} = \overrightarrow{PQ}$.

Теорема. $\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}$, где $\vec{\mathbf{p}} = (x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{q}} = (y_1, y_2)$, Значит, $\vec{\mathbf{d}} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$.

Теорема. В произвольном треугоглнике ABC

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\, AB\, AC \cos A$.

Доказательство.

Теорема.

Расстояние между точками $P(x_1, x_2)$, $Q(y_1, y_2)$ на декартовой плоскости равно $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $\vec{\mathbf{c}} = (x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{d}} = (y_1, y_2)$ декартовы координаты векторов $\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{d}}$. Тогда

$$\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Доказательство.

Следствие. Пусть $\vec{\mathbf{c}} = (x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{d}} = (y_1, y_2)$ декартовы координаты векторов $\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{d}}$.

Тогда

$$\cos\angle(\vec{\mathbf{c}},\vec{\mathbf{d}})=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}}.$$

Доказательство.

Следствие. Пусть $\vec{\mathbf{c}}=(x_1, x_2)$, $\vec{\mathbf{d}}=(y_1, y_2)$ ненулевые векторы. Тогда они ортогональны если и только если $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

Доказательство.

Теорема. Если координаты концов отрезка AB суть $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то координаты точки $C(x, y)$, которая делит этот отрезок в отношении $\lambda_1:\lambda_2$ равны

$$x=\frac{\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2}{\lambda_1+\lambda_2},\quad y=\frac{\lambda_2 y_1+\lambda_1 y_2}{\lambda_1+\lambda_2}.$$

Доказательство.

Примеры (проекция вектора на ось).