Лекция 18.

Пусть функция $f(X)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными вплоть до -го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\varepsilon(X_0)$ точки $X_0(x_{01},\dots,x_{0n})$, точка $X_0+\Delta X\in U_\varepsilon(X_0)$, где $\Delta X=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)$, $\Delta f(X_0)=f(X_0+\Delta X)-f(X_0)$.

Теорема (Тейлора). В вышеприведённых обозначениях

$$\Delta f(X_0)=\frac{df(X_0)}{1!}+\frac{d^2f(X_0)}{2!}+\dots+\frac{d^{k-1}f(X_0)}{(k-1)!}+\frac{d^kf(X_0+\theta\Delta X)}{k!},$$

для некоторого $\theta\in(0,1)$.

Замечание. Здесь $d^kf(X)=(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n)^kf(X)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(t)=f(X_0+t\Delta X)$ для $t\in[0,1]$, тогда, применив формулу Маклорена к $F(t)$ при $\Delta t=1$ имеем $\Delta f(X_0)=F(1)-F(0)=\sum_{l=0}^{k-1}\frac{F^{(l)}(0)}{l!}+\frac{F^{(k)}(\theta)}{k!}$, где $\theta\in(0,1)$. Вычисление производных функции $F(t)$ даёт следующий результат

$$F^{(l)}(t)=d^lf(X_0+t\Delta X)=(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n)^kf(X_0+t\Delta X)$$

(доказывается по индукции), откуда немедленно получаем утверждение теоремы.

Следствие. Для $к=2$ формула Тейлора имеет вид:

$$\Delta f(X_0)=df(X_0)+\frac{d^2f(X_0+\theta\Delta X)}{2!} \qquad (*)$$

Примеры.

Пусть на области (открытое, связное множество) $G\subseteq\boldsymbol{R^n}$ задана функция $f(X)$. Точка $X_0\in G$ называется ***точкой локального экстремума*** функции $f(X)$, если существует окрестность $U(X_0)$ точки X_0, такая, что для любой точки $X\in U(X_0)$, выполняется неравенство $f(X)\ge f(X_0)$ для ***локального минимума*** или $f(X)\le f(X_0)$ для ***локального максимума***.

Теорема. Пусть $X_0 \in G$ точка локального экстремума для $f(X)$. Тогда, если существуют первые частные производные функции в $f(X)$ точке X_0, то все они равны нулю $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$.

Доказательство.

Определение. Точка, в которой выполнены условия $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$, называется ***стационарной точкой*** для функции $f(X)$.

Следствие. Если функция $f(X)$ дифференцируема в точке X_0 и имеет локальный экстремум в X_0, то:

а) $d\, f(X_0) = 0, \quad \overrightarrow{grad\ f(X\_0\ )} = 0;$

б) $\Delta\, f(X_0) = \frac{d^2 f(X_0+\theta\Delta X)}{2!} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X_0+\theta\Delta X)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j$, если $f(X)$ имеет непрерывные вторые частные производные в точке X_0.

Определение. Точка, в которой выполнены условия $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$, называется ***стационарной точкой*** для функции $f(X)$.

Достаточные условия экстремума.

Пусть $f(X)$ имеет непрерывные вторые частные производные в стационарной точке X_0, тогда

$$\Delta\, f(X_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X_0+\theta\Delta X)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_{ij}\right)\Delta x_i \Delta x_j =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\frac{\Delta x_j}{\rho} =$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta X),$$

где $\alpha(\Delta X) \le \varepsilon n^2 \to 0$ при $\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2} \to 0, \varepsilon = \max \varepsilon_{ij}$.

Итак, для стационарной точки X_0, имеем $\Delta\, f(X_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta X)$, где $\{a_{ij}\} = \left\{\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ −матрица *квадратичной формы*, называемой ***гессианом,*** а $\alpha(\Delta X) \to 0$ при $|\Delta X| \to 0$. По знаку этой квадратичной формы можно узнать знак приращения $\Delta\, f(X_0)$. Верна следующая

Теорема.

а) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ строго ***положительно определена***, т.е. её значение строго >0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то точка X_0 - локальный минимум;

б) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ строго ***отрицательно определена***, т.е. её значение строго <0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то точка X_0 - локальный максимум;

в) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ ***положительно полуопределена***, т.е. её значение $\geq$0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, или ***отрицательно полуопределена***, т.е. её значение $\leq$0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то вопрос о локальном экстремуме остаётся открытым и требуется дополнительное исследование;

г) если форма ***неопределена*** по знаку, т.е. принимает как положительные, так и отрицательные значения, то локальный экстремум в точке X_0 отсутствует.

Доказательство.

Вопрос о знаке квадратичной формы решается при помощи известного ***критерия Сильвестера***.

Примеры.

Лекция 19.

Теорема (о неявной функции). Пусть уравнение

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \qquad (*)$$

для которого точка $(X_0, y_0) \in \boldsymbol{R^{n+1}}$ является решением, обладает следующими свойствами:

а) функция $f(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна вместе со ***всеми*** своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности $U(X_0, y_0) \subset \boldsymbol{R^{n+1}}$ точки (X_0, y_0);

б) $\frac{\partial f(X_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Пусть, кроме того, $\mathrm{M} \subset \boldsymbol{R^{n+1}}$ **-** множество точек, удовлетворяющих уравнению (*), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует параллелепипед $\Delta = \{|x_k - x_{0k}| < \delta, k = 1,2, \dots, n; |y - y_0| < b < \varepsilon\}$,такой, что множество $\mathrm{M} \cap \Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией

$y = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, при $|x_k - x_{0k}| < \delta$, $k = 1,2, \dots, n$, причём $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$.

Доказательство.

Примеры.

Следствие. Пусть гиперповерхность $S \subset \boldsymbol{R^n}$ задана уравнением $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, точка $X_0(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in S$ и не все частные производные $\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_k}$ равны нулю одновременно, тогда в точке X_0 существует касательная гиперплоскость к поверхности S, задаваемая уравнением

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_1}(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial F(X_0)}{\partial x_n}(x_n - x_{0n}) = 0 .$$