Теория вероятностей и математическая статистика

Лектор А.А. Лобузов

Семестр 6 **Лекция 5**

Точечные оценки параметров распределения

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x, \boldsymbol{\theta})$

Статистика $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N(X_1, X_2, ..., X_N)$ – несмещенная оценка параметра $\boldsymbol{\theta}$, если $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N = \boldsymbol{\theta}$

Статистика $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N(X_1, X_2, ..., X_N)$ – асимптотически несмещенная оценка параметра $\boldsymbol{\theta}$,

если $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow[N\to\infty]{} \boldsymbol{\theta}$

Статистика $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N(X_1, X_2, ..., X_N)$ – состоятельная оценка параметра $\boldsymbol{\theta}$, если $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow[N\to\infty]{P} \boldsymbol{\theta}$

Статистика $\boldsymbol{\theta}^*_N(X_1, X_2, ..., X_N)$ – оптимальная оценка параметра $\boldsymbol{\theta}$ в классе оценок $\mathscr{E}$,

если $\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}^*_N = \inf\{\mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}\tilde{\boldsymbol{\theta}}_N, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_N \in \mathscr{E}\}$

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x, \boldsymbol{\theta})$

Оценка $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M}\xi = \mu_1$:

$$\bar{\mu}_1(X_1, X_2, \dots, X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j$$

Оценка $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{D}\xi = \mu_2^0$:

$$\bar{\mu}_2^0(X_1, X_2, \dots, X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{\mu}_1)^2$$

Пример

$$\xi \sim \Gamma(1, \lambda)$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{M}_\lambda \widetilde{\Theta}_N(X_1, \dots, X_N) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dy_1 \dots \int_0^{+\infty} \widetilde{\Theta}_N(y_1, \dots, y_N) \lambda^N e^{-\lambda \sum_{j=1}^{N} y_j} dy_N = \lambda$$

Рассмотрим какую-то оценку параметра θ

семейство $\{F_\theta(x)\}$

$\tilde{\theta}_N(X_1, \dots, X_N)$ — оценка

Рассмотрим среднее квадратическое отклонение этой оценки

(отклонение)

$\Delta_N(\tilde{\theta}_N) = M\tilde{\theta}_N - \theta$ — смещение оценки

случайная величина (число)

если несмещённая оценка, то $\Delta_N(\tilde{\theta}_N) = 0$

Среднее квадратическое отклонение оценки от истинного значения

$$M_\theta(\tilde{\theta}_N - \theta)^2 = D_\theta \tilde{\theta}_N + \Delta_N^2(\tilde{\theta}_N)$$

(будет дисперсией, если будет несмещённая оценка)

Можно сравнивать две оценки

$\tilde{\theta}_N$ — оценка не хуже оценки $\hat{\theta}_N$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_\theta(\tilde{\hat{\theta}}_N - \theta)^2 \le M_\theta(\tilde{\theta}_N - \theta)^2$

Пример №1:

$\xi \sim \Gamma(1, \frac{1}{\mu})$

$$f(x, \mu) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{\mu}; \quad M\xi = \frac{1}{\lambda} = \mu$

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)$

$\hat{\mu}(\vec{X}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j, \quad X_j \sim \xi$

$M\hat{\mu}(\vec{X}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} MX_j = \frac{1}{N}(N\mu) = \mu$

для оценки μ можно использовать выборочное среднее

Пример №2:

$M\xi = \mu_1 \qquad \vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)$

$\bar{\mu}_1(X_1, \ldots, X_N) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j, \quad MX_j = M\xi$

$M\bar{\mu}_1 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} MX_j = \frac{1}{N}(N\mu_1) = \mu_1$

$\bar{\mu}_1(X_1, \ldots, X_N)$ - выборочное среднее - несмещённая оценка μ_1

следствие

Теорема Чебышева (ЗБЧ), $X_j \sim \xi$

$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j \xrightarrow[N \to \infty]{P} M\xi = \mu_1$

Оценка математического ожидания

$$M\xi = \mu_1 \qquad \vec{X} = (X_1, \ldots, X_N)$$

$$\bar{\mu}_1(X_1, \ldots, X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \quad ; MX_j = M\xi$$

$$M\bar{\mu}_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} MX_j = \frac{1}{N}(N\mu_1) = \mu_1$$

$\bar{\mu}_1(X_1, \ldots, X_N)$ – несмещенная оценка μ_1

Т-ма Чебышева (ЗБЧ), $X_j \sim \xi$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \xrightarrow[N\to\infty]{P} M\xi = \mu_1$$

$$\bar{\mu}_1(X_1, \ldots, X_N) \xrightarrow[N\to\infty]{P} \mu_1$$

$\bar{\mu}_1$ – состоятельная оценка μ_1

Оценка дисперсии

$$D_B(X_1, \dots, X_N) = $$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \bar{\mu}_1\right)^2$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j$$

$M\xi = \mu_1$ – известно; $D\xi = \sigma^2$

$$D_B = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j - \mu_1\right)^2$$

$$M\,D_B(X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} M\left(X_j - \mu_1\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\left(N \cdot \sigma^2\right) = \sigma^2$$

D_B – несмещенная оценка

$M\xi = \mu_1$ — неизвестно

$$M(N\cdot D_B(X_1,\dots,X_N)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \underbrace{M(X_j-\bar{\mu}_1)^2} =$$

$$= N\left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2 = (N-1)\sigma^2$$

$$MD_B = \left(\frac{N-1}{N}\right)\sigma^2$$

Покажем, что $M(X_j-\bar{\mu}_1)^2 = \frac{N-1}{N}\sigma^2$

$$M(X_j-\bar{\mu}_1)^2 = M[(X_j-\mu_1)-(\bar{\mu}_1-\mu_1)]^2 =$$

$$= \underbrace{M(X_j-\mu_1)^2}_{\text{дисперсия}} - 2M[(X_j-\mu_1)(\bar{\mu}_1-\mu_1)] +$$

$$+ M(\bar{\mu}_1-\mu_1)^2 = \underbrace{\sigma^2}_{\text{дисперсия}} - \frac{2\sigma^2}{N} + \frac{\sigma^2}{N} = \frac{N-1}{N}\sigma^2$$

D_B — смещённая оценка σ^2, но асимптотически несмещённая

$$M\left(\frac{N}{N-1}\cdot D_B\right)=\sigma^2$$

$$\overline{S^2}=\frac{N}{N-1}D_B=$$

$$=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\left(X_j-\overline{m}_1\right)^2 -$$

несмещенная оценка σ^2