Решение тестов семинара 15.

① Определение поля разложения.

Ответ: 4).

② В каком из перечисленных колец нет ни одного нетривиального идемпотента?

1) $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{11}$ 3) $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2-1)$

2) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x+1)$ 4) $\mathbb{Q}[x]/(x^2+6x-7)$

Ответ: 2).

Решение: $\exists$ нетривиальный идемп. $\Leftrightarrow$ Кольцо раскладывается в прямую сумму колец

1) $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{11} \Rightarrow \exists$ нетрив. идемп.

3) $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2-1) = \mathbb{Z}_7[x]/(x-1)(x+1) \underset{\text{КТО}}{\simeq} \mathbb{Z}_7[x]/(x-1) \oplus \mathbb{Z}_7[x]/(x+1) \simeq \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ нетрив. идемп.

4) $\mathbb{Q}[x]/(x^2+6x-7) = \mathbb{Q}[x]/(x+7)(x-1) \simeq \mathbb{Q}[x]/(x+7) \oplus \mathbb{Q}[x]/(x-1) \simeq \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ нетрив идемп.

2) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x+1) = \mathbb{R}[x]/(x+1)^2 \Rightarrow \nexists$ нетрив. идемп.

Доказывается аналогично А(1) задачи 4 Т.Р.

Пусть $[h(x)] \in \mathbb{R}[x]/(x+1)^2 : [h(x)]^2 = [h(x)] \Leftrightarrow [h(x)]([h(x)]-[1]) = [0] \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x)(h(x)-1) = (x+1)^2 q(x)$, но $(h(x), h(x)-1) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} h(x) = (x+1)^2 q_1(x) \Leftrightarrow [h(x)] = [0] & \text{— трив. идемп.} \\ h(x)-1 = (x+1)^2 q_2(x) \Leftrightarrow [h(x)] = [1] & \text{— трив. идем.} \end{array}\right.$$

③ Какое из перечисленных колец имеет нетривиальный нильпотент?

1) $\mathbb{Z}_{30}$ 3) $\mathbb{R}[x]/(x^2+6x+5)$

2) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^5+1)$ 4) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x+5)$

5) $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)$

Ответ: 2)

Решение.

Если кольцо $A = A_1 \oplus A_2$, то

$A \ni a = (a_1, a_2)$ - нильп. $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \in A_1 \text{ - нильп.} \\ a_2 \in A_2 \text{ - нильп.} \end{cases}$

1) $\mathbb{Z}_{30} = \mathbb{Z}_{3\cdot 5\cdot 2} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_5 \oplus \mathbb{F}_2$

$\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_2$ - поля $\Rightarrow$ не имеют нетрив. нильпотентов $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ не имеет нетрив. нильп.

Можно решить иначе $\operatorname{Rad} \mathbb{Z}_{30} = (\bar{30}) = (\bar{0}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{30}$ не имеет нетрив. нильп.

3) $\mathbb{R}[x]/(x^2+6x+5) = \mathbb{R}[x]/(x+1)(x+5) \simeq \mathbb{R}[x]/(x+1) \oplus \mathbb{R}[x]/(x+5) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ -

сумма полей $\Rightarrow$ не имеет нетривиальных нильп.

4) $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x+5) \simeq \mathbb{C}$, т.к. x^2+2x+5 - неприводим над $\mathbb{R}$, $\Rightarrow$
поскольку $D = 4 - 20 = -16 < 0$

$\mathbb{C}$ - поле $\Rightarrow$ не имеет нетривиальных нильпотентов

5) $\mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \mathbb{C}[x]/(x-i)(x+i) \simeq \mathbb{C}[x]/(x-i) \oplus \mathbb{C}[x]/(x+i) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ -

- сумма полей $\Rightarrow$ не имеет нетривиальных нильп.

2) $\mathbb{Z}_5[x]/(x^5+1) = \mathbb{F}_5[x]/(x+1)^5$ имеет нетривиальный нильпотент, например,

$[x+1] \in \mathbb{F}_5[x]/(x+1)^5$

$(x^p + 1 = (x+1)^p$ над $\mathbb{F}_p)$

$[x+1]^5 = [\bar{0}]$