# Занятие 11. Критерий устойчивости по первому приближению.



Рассм. систему нелинейных дифф. ур-ний: $\dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{F}(x,t)$

(1) $$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{f}(t,x),$$

$\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

Александр Михайлович Ляпунов.

$\bar{x} = 0$ — решение.

$A = (a_{ij}) = const$,

$\bar{f}(t,x)$ — непрерывная по $t$ и $x_1, \dots, x_n$ вектор-функция (в обл. $t \geq t_0$, $\|x\| \leq h$),

Пусть $\bar{f}(t,\bar{x})$ уд. условию:

(2) $$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,\bar{x})\|}{\|x\|} = 0. \text{ равномерно по } t \geq t_0.$$

**Опр.** Система $\dfrac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ (3) назыв. (если вып. усл. (2)) **первым приближением** для сист. (1).

Если $f(t,0) = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(t,0) = 0$, то вып. (2).

**Теорема Ляпунова** (об устойчивости по первому приближ.)

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — соб. числа матрицы $A$.

Если $\forall j = 1 \dots n$ $Re\,\lambda_j < 0$, и вып. (2), то решение $\bar{x} = 0$ системы (1) асимпт. уст.

Если $\exists i$: $Re\,\lambda_i > 0$ и вып. (2), то решение $\bar{x} = 0$ системы (1) неустойчиво.

**Замечание.**

Если $\exists i$: $Re\,\lambda_i = 0$, а ост. $\lambda_j$: $Re\,\lambda_j < 0$, то решение $\bar{x} = 0$ м.б. как устойчивым, так и неустойчивым.

В этом сл. из устойчивости первого приближ. **нельзя** делать вывод об уст. сист. (1).

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{cases}$$

Пусть (0,0) – решение системы. Линеаризуем систему в окр-ти т. (0,0).



$$(4)\quad \begin{cases}\dot{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y + \psi_1(x,y)\\[2mm] \dot{y} = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)\cdot x + \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)\cdot y + \psi_2(x,y).\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}_{(0,0)}.$$

<u>Задача 1</u> (ТР, №6) (5,22)

Исслед. на уст. тривиальное решение системы ур-ний

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x - \ln(1+y) + \sin x & = f(x,y)\\ \dot{y} = e^{x} + \sin(x+y) - \cos^2 y\,. & = g(x,y)\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 2+\cos x\Big|_{0,0} = 2+1=3;\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{1+y}\Big|_{(0,0)} = -1.$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} = e^{x} + \cos(x+y)\Big|_{0,0} = 2;\qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \cos(x+y) + 2\cos y\sin y = 1.$$

Первое приближение:

$$\begin{cases}\dot{x} = 3x - y\\ \dot{y} = 2x + y.\end{cases}\qquad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)+2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda-2)^2+1 = 0$$

$\underline{\lambda_{1,2} = 2 \pm i.}$

$\left.\begin{matrix}\operatorname{Re}\lambda_1 > 0\\ \operatorname{Re}\lambda_2 > 0\end{matrix}\right. \Rightarrow$ решение (0,0) неустойчиво.

„фокус"

Задача 2. (№ 5,24).
Исслед. вопрос об устойчивости решения $x=y=z=0$ системы ур-ний

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sin(x-z) & = f(x,y,z) \\ \dot{y} = \sin^2 x - y - \sin z & = g(x,y,z) \\ \dot{z} = \operatorname{tg}(y-z). & = h(x,y,z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f'_x(0)\cdot x + f'_y(0)\cdot y + f'_z(0)\cdot z + \varphi_1(x,y,z) \\ \dot{y} = g'_x(0)\cdot x + g'_y(0)\cdot y + g'_z(0)\cdot z + \varphi_2(x,y,z) \\ \dot{z} = h'_x(0)\cdot x + h'_y(0) y + h'_z(0)\cdot z + \varphi_3(x,y,z) \end{cases}$$

$f'_x = -\cos(x-z)\big|_0 = -1$; $g'_x = 2\sin x\cos x\big|_0 = 0$

$f'_y = 0$ $\qquad g'_y = -1$

$f'_z = \cos(x-z)\big|_0 = 1$. $\qquad g'_z = -\cos z\big|_0 = -1$.

$h'_x = 0$

$h'_y = \dfrac{1}{\cos^2(y-z)}\Big|_0 = 1$; $\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$h'_z = \dfrac{-1}{\cos^2(y-z)}\Big|_0 = -1$.

Первое приближение:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{y} = -y - z \\ \dot{z} = y - z. \end{cases} \qquad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

По первому столбцу:

$$\Delta = -(\lambda+1)\left[(\lambda+1)^2+1\right] = -(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda+2) = 0$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \operatorname{Re}\lambda_1 < 0$

$\lambda_{2,3} = -1 \pm i \qquad \operatorname{Re}\lambda_{2,3} < 0 \Rightarrow$ решение $(0,0,0)$ асимптотич. уст.

---

(5). $\dfrac{d\bar{x}}{dt} = f(\bar{x})$. Опр. Положение равновесия с. (5): $f(\bar{x}) = 0$.

Задача 3 (ТР, №7) ④

№5.23, Самойленко.

Найти все положения равновесия системы д. ур. и исслед. их на уст-ть.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array}\begin{cases} -2x + y + x^3 = 0 \\ -x - 2y + 3x^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x - x^3 \to \text{II}:$$

$-x - 2(2x - x^3) + 3x^5 = 0$

$-x - 4x + 2x^3 + 3x^5 = 0$

$-5x + 2x^3 + 3x^5 = 0$

$x(3x^4 + 2x^2 - 5) = 0$

$x^2 = t,\ t \geq 0$

$3t^2 + 2t - 5 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$

$t_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 8}{6}$

$t_1 = 1;\ \underbrace{t_2 = -\frac{5}{3}}_{\text{не подх.}}$

$x = \pm 1$.

Положения равновесия: A $\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}$ B $\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}$ C $\begin{matrix} x=-1 \\ y=-1 \end{matrix}$

A: $x=0, y=0$. Первое приближение:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases} \qquad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (\lambda+2)^2 + 1$; $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ „фокус"

(асимпт. уст.).

B: $x = 1,\ y = 1$.

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = u + 1 \\ y = v + 1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} \dot{u} = -2u - 2 + v + 1 + (u+1)^3 \\ \dot{v} = -u - 1 - 2v - 2 + 3(u+1)^5 \end{cases}$$

$(u+1)^5 = u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u + 1$

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u + v \cancel{-1} + u^3 + 3u^2 + 3u \cancel{+1} \\ \dot{v} = -u - 2v \cancel{-3} + 3\left[u^5 + 5u^4 + 10u^3 + 10u^2 + 5u \cancel{+1}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = u + v + u^3 + 3u^2 \\ \dot{v} = 14u - 2v + \ldots \end{cases}$$

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2) - 14 = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0.$

$D = 1 + 4 \cdot 16 = 65$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$; $\quad \begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow B(1,1)$ неуст.

„седло"

Исследуем точку покоя $C(-1,-1)$. 5

$u = x+1 \qquad x = u-1$

$v = y+1 \qquad y = v-1$

$$\begin{cases} \dot{u} = -2(u-1) + v - 1 + (u-1)^3 \\ \dot{v} = -u + 1 - 2v + 2 + 3(u-1)^5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \underline{-2u} + \cancel{2}\, v - \cancel{1} + u^3 - 3u^2 + \underline{3u} - \cancel{1} \\ \dot{v} = -u + \cancel{1} - \cancel{2}v + 2 + 3\left[u^5 - 5u^4 + 10u^3 - 10u^2 + 5u - \cancel{1}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = u + v + \quad u^3 - 3u^2 \\ \dot{v} = 14u - 2v + 3(u^5 - 5u^4 + 10u^3 - 10u^2) \end{cases}$$

Первое приближение (или линеаризов. сист.)

$$\begin{cases} \dot{u} = u + v \\ \dot{v} = 14u - 2v \end{cases}$$

Исследуем точку покоя $(0,0)$.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 14 = \\ = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0.$$

$\lambda^2 + \lambda - 16 = 0$

$D = 1 + 4 \cdot 16 = 65$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}.$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ „седло" (неустойчиво)

Ответ: $A(0,0)$ – асимпт. уст. „фокус"

$B(1,1)$ – неуст. „седло"

$C(-1,-1)$ – неуст. „седло"

Дома: ТР, №6,7.

Найти и исслед. особые точки данных систем.

№985.
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x - x^2) \end{cases}$$

№987.
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

№989.
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x^2 - (y-2)^2 \end{cases}$$

## Замечание.

"Грубые" и "негрубые" положения равновесия.

Рассм. автономную систему второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$, где ф-ии $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрер. дифф-мы в нек. обл. $D \subset R^2$.

Опр. Положение равновесия $(x_0, y_0)$ наз. грубым, если матрица системы, линеаризованной в точке $(x_0, y_0)$, имеет соб. зн-я $\lambda_1, \lambda_2$: $\boxed{Re\lambda_1 \neq 0, \quad Re\lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2}$.

Утв. В окр-ти грубого положения равнов. автон. системы поведение фазовых траекторий качественно одинаково с поведением фаз. траекторий линеаризов. системы.

Опр. Положение равновесия $(x_1, y_1)$ наз. негрубым, если для матрицы линеаризов. системы $\boxed{Re\lambda_1 = 0, \text{ или } Re\lambda_2 = 0, \text{ или } \lambda_1 = \lambda_2}$.

Утв. В окр-ти негрубого полож. равнов. фазовые траектории нелинейной автон. системы и её линеаризации могут вести себя принципиально по-разному.

К Задаче №7 ТР.

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положения равновесия.

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5-2x-2y) \\ \dot{y} = e^{xy} - 1. \end{cases}$$

1) Ищем точки покоя.

$$\begin{cases} \ln(5-2x-2y)=0 \\ e^{xy}-1=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 5-2x-2y=1 \\ xy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2-y \\ (2-y)y=0 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} y=0 \\ x=2 \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} y=2 \\ x=0. \end{array}\right.$$ (2 точки покоя).

2). $M_1(0,2)$. Сделаем замену перем.

$$\begin{cases} u=x \\ v=y-2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \dot{u}=\dot{x} \\ \dot{v}=\dot{y} \end{matrix} \quad \begin{cases} \dot{u}=\ln(5-2u-2(v+2)) \\ \dot{v}=e^{u(v+2)}-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1-2u-2v) = f_1(u,v) \\ \dot{v} = e^{u(v+2)}-1 \quad = f_2(u,v) \end{cases}$$

$$\left[ f_i(u,v) = \underbrace{f_i(0,0)}_{0} + \frac{\partial f_i}{\partial u}\cdot u + \frac{\partial f_i}{\partial v}\cdot v + R \right]$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{-2}{1-2u-2v}\Big|_{(0,0)} = -2$$

$$a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{-2}{1-2u-2v}\Big|_{(0,0)} = -2$$

$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial u} = e^{u(v+2)}(v+2)\Big|_{(0,0)} = 2$$

$$a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial v} = e^{u(v+2)}u\Big|_{(0,0)} = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

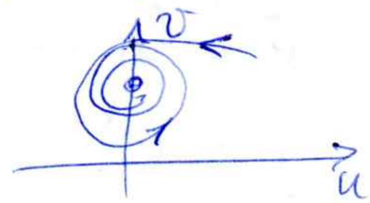
8

$$\begin{cases} \dot{u} = -2u - 2v \\ \dot{v} = 2u \end{cases}$$

$$|A - \lambda E| = (-2-\lambda)(-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = (\lambda+1)^2 + 3 = 0.$$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Rightarrow$ „фокус" (уст.)

В т. $(0,1)$ $\bar{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.




3) $M_2(2,0)$.

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{u} = \ln(5 - 2(u+2) - 2v) \\ \dot{v} = e^{(u+2)v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \ln(1 - 2u - 2v) \\ \dot{v} = e^{(u+2)v} - 1. \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_{11} = -2 & a_{12} = -2 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 2 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad |A - \lambda E| = (-2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad (A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$ — „седло" (неуст.)

$$\lambda = -2: \begin{pmatrix} -2+2 & -2 \\ 0 & 2+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -2u - v = 0 \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$