Занятие **1.** **Матрицы. Операции над матрицами.**

1.1. Операции с матрицами: равенство матриц; умножение матрицы на число; сложение матриц; перемножение матриц. Основные свойства операций сложения и умножения матриц.
1.2. Транспонирование матрицы.
1.3. Квадратные, треугольные, диагональные, симметрические матрицы. Единичная матрица.
1.4. Возведение квадратной матрицы в натуральную степень.

Сначала вспомним определение матрицы. Матрица – прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов, записанная в круглых скобках или двойных прямых чертах.

Пример 1.

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & \sqrt{2}\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & -2\\ -1 & \sqrt{2}\\ 3 & 4\end{Vmatrix}$ - матрица размером 3×2, содержащая 3 строки и 2 столбца.

2) $B=\begin{pmatrix}0 & -4 & 0.5\\ 5 & -0.3 & -3\\ -2 & 0.7 & 3.2\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & -4 & 0.5\\ 5 & -0.3 & -3\\ -2 & 0.7 & 3.2\end{Vmatrix}$ - матрица размером 3×3.

3) $C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}-1\\ 2\end{Vmatrix}$ - матрица размером 2×1. Матрицу с одним столбцом часто называют вектор-столбцом.

4) $D=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & 2 & 2.1 & 7\end{pmatrix}=\begin{Vmatrix}-1 & \sqrt{3} & 2 & 2.1 & 7\end{Vmatrix}$ - матрица размером 1×5. Матрицу с одной строкой также называют вектор-строкой.

Элементы матрицы Q обозначаются q_{ij}, где первый индекс i означает номер строки, j - номер столбца, на пересечении которых стоит соответствующий элемент. Так в примере 1 для матриц $A,\ B$ имеем

$A=(a_{ij})$, где $a_{11}=1,\ a_{12}=-2,\ a_{21}=-1,\ a_{22}=\sqrt{2},\ a_{31}=3,\ a_{32}=4$.

$B=(b_{ij})$, где $b_{11}=0,\ b_{12}=-4,\ b_{13}=0.5,\ b_{21}=5,\ \dots,\ b_{33}=3.2$.

1.1. Операции над матрицами.

1.1.1. **Равенство матриц**. Матрица A равна матрице B, если у обеих матриц одинаковые размеры и $a_{ij}=b_{ij}\quad \forall i,j$, т.е. совпадают соответствующие элементы этих матриц для всех возможных наборов индексов $i,\ j$.

Пример 2.

1) $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A=B$.

2) $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & -3 & -6\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\neq C$, т.к. $a_{13}=-2\neq c_{13}=-1$.

3) $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & -3 & -6\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A\neq D$, т.к. матрицы $A,\ D$ имеют различные размеры.

1.1.2. **Умножение матрицы** A **на число** k происходит по правилу:

$$k \cdot A = B \text{, где } b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad \forall i, j .$$

Пример 3.

1) $A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{5} & 2.5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ k = -2 \Rightarrow k \cdot A = \begin{pmatrix} -2\cdot(-3) & -2\cdot\sqrt{5} & -2\cdot 2.5 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot 0 & -2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{5} & -5 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

2) $-3\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$

1.1.3. **Сложение матриц** A **и** B возможно только для матриц с одинаковыми размерами и производится по правилу: $A + B = C$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Пример 4.

1) $\begin{pmatrix} -1.2 & 2.4 & -4.1 \\ 1.7 & -1.3 & 5.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.8 & -1.4 & 3.6 \\ 0.3 & -0.7 & -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2+2.8 & 2.4-1.4 & -4.1+3.6 \\ 1.7+0.3 & -1.3-0.7 & 5.5-1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 1.0 & -0.5 \\ 2.0 & -2.0 & 4.0 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$

Операции сложения матриц и умножение матриц на число обладают следующими свойствами:

1°. $A + B = B + A$ - свойство коммутативности сложения матриц;

2°. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - свойство ассоциативности сложения матриц;

3°. $k\cdot(A + B) = k\cdot A + k\cdot B$ - первый закон дистрибутивности;

4°. $(k + m)\cdot A = k\cdot A + m\cdot A$ - второй закон дистрибутивности.

1.1.4. **Нахождение разности** $A - B$ **матриц** A, B определяется с помощью рассмотренных выше операций умножения матрицы на число и сложения матриц: $A - B = A + (-1)\cdot B$. Аналогично, $B - A = B + (-1)\cdot A$.

Пример 5.

1) $\begin{pmatrix} -1.2 & 2.4 & -4.1 \\ 1.7 & -1.3 & 5.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2.8 & -1.4 & 3.6 \\ 0.3 & -0.7 & -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2-2.8 & 2.4+1.4 & -4.1-3.6 \\ 1.7-0.3 & -1.3+0.7 & 5.5+1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.0 & 3.8 & -7.7 \\ 1.4 & -0.6 & 6.0 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -8 \\ -2 & -6 & -9 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

1.1.5. **Перемножение матриц.** Матрицу A можно умножить слева на матрицу B (или матрицу B можно умножить справа на матрицу A) и, тем самым, найти произведение $A\cdot B$ только тогда, когда число столбцов левой матрицы A равно числу строк правой матрицы B. Если под матрицами написать их размеры, то

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C}, \tag{1}$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj} \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,k . \tag{2}$$

Формула (1) показывает, какие размеры будет иметь матрица $C = A\cdot B$, а формула (2) определяет правило, по которому находятся элементы матрицы C. Говорят также, что элемент c_{ij} матрицы $C = A\cdot B$ есть результат «скалярного произведения» i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Пример 6. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

1) $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times2}{B}=\underset{2\times2}{C}$.

$c_{11}=$(скалярному произведению 1-й строки матрицы A на 1-й столбец матрицы B)=
$=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=2\cdot0+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot2=0+1-2=-1$,

$c_{12}=$(скалярному произведению 1-й строки матрицы A на 2-й столбец матрицы B)=
$=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=2\cdot1+(-1)\cdot2+(-1)\cdot(-1)=2-2+1=1$,

$c_{21}=$(скалярному произведению 2-й строки матрицы A на 1-й столбец матрицы B)=
$=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=1\cdot0+3\cdot(-1)+(-1)\cdot2=0-3-2=-5$,

$c_{22}=$(скалярному произведению 2-й строки матрицы A на 2-й столбец матрицы B)=
$=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=1\cdot1+3\cdot2+(-1)\cdot(-1)=1+6+1=8$.

Следовательно, $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 8\end{pmatrix}$.

2) $\underset{3\times2}{B}\cdot\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}=\underset{3\times3}{P}$

$p_{11}=$(скалярному произведению 1-й строки матрицы B на 1-й столбец матрицы A)=
$=b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}=0\cdot2+1\cdot1=1$,

$p_{12}=$(скалярному произведению 1-й строки матрицы B на 2-й столбец матрицы A)=
$=b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}=0\cdot(-1)+1\cdot3=3$,

$p_{13}=$(скалярному произведению 1-й строки матрицы B на 3-й столбец матрицы A)=
$=b_{11}a_{13}+b_{12}a_{23}=0\cdot(-1)+1\cdot(-1)=-1$,

$p_{21}=$(скалярному произведению 2-й строки матрицы B на 1-й столбец матрицы A)=
$=b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}=(-1)\cdot2+2\cdot1=0$,

$p_{22}=$(скалярному произведению 2-й строки матрицы B на 2-й столбец матрицы A)=
$=b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}=(-1)\cdot(-1)+2\cdot3=7$,

$p_{23}=$(скалярному произведению 2-й строки матрицы B на 3-й столбец матрицы A)=
$=b_{21}a_{1}+b_{22}a_{21}=(-1)\cdot(-1)+2\cdot(-1)=-1$,

$p_{31}=$(скалярному произведению 3-й строки матрицы B на 1-й столбец матрицы A)=
$=b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21}=2\cdot2+(-1)\cdot1=3$,

$p_{32}=$(скалярному произведению 3-й строки матрицы B на 2-й столбец матрицы A)=
$=b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot3=-5$,

$p_{33}=$(скалярному произведению 3-й строки матрицы B на 3-й столбец матрицы A)=
$=b_{31}a_{13}+b_{32}a_{23}=2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-1)=-1$.

Следовательно, $P=B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 7 & -1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$.

Операции умножения матриц и сложения матриц имеют следующие свойства:

1°. $A\cdot B\neq B\cdot A$ - **свойство коммутативности умножения матриц в общем случае не выполняется** (это видно уже из примера 6);

2°. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ - свойство ассоциативности умножения матриц;

3°. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ - первый закон дистрибутивности;

4°. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$ - второй закон дистрибутивности.

1.2. Транспонирование матрицы. Транспонирование матрицы A обозначается A^T и означает операцию переписывания строк (столбцов) матрицы A в виде соответствующих столбцов (строк).

Пример 7.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0.5 \\ 5 & -0.3 & -3 \\ -2 & 0.7 & 3.2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -4 & -0.3 & 0.7 \\ 0.5 & -3 & 3.2 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Отметим, что $\left(A^T\right)^T = A$.

1.3. Квадратные, треугольные, диагональные, симметричные матрицы. Единичная матрица.

Матрица называется **квадратной**, если число строк и столбцов в ней одинаково. Примеры квадратных матриц:

1) $A = (-2)$ - матрица с размерами 1×1 - квадратная матрица 1-го порядка;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ - матрица с размерами 2×2 - квадратная матрица 2-го порядка;

3) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0.5 \\ 5 & -0.3 & -3 \\ -2 & 0.7 & 3.2 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 3-го порядка.

Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ квадратной матрицы A n-го порядка образуют **главную диагональ** этой матрицы. Квадратная матрица называется треугольной, если под ее главной диагональю (или над ее главной диагональю) все элементы равны нулю. Примеры треугольных матриц:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0.5 \\ 0 & -0.3 & -3 \\ 0 & 0 & 3.2 \end{pmatrix}$ - верхне-треугольные матрицы 2-го и 3-го порядка соответственно;

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ - нижне-треугольные матрицы 3-го и 4-го порядка соответственно.

Квадратная матрица A называется **диагональной,** если все элементы $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Примеры диагональных матриц:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -0.3 & 0\\ 0 & 0 & 3.2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$ - диагональные матрицы

2-го, 3-го и 4–го порядка соответственно.

Для диагональных матриц A, B **выполнен закон коммутативности умножения матриц** $A\cdot B=B\cdot A$.

Квадратная матрица $A=(a_{ij})$ называется **симметрической**, если $a_{ij}=a_{ji}\ \forall i,j$ или другими словами $A^T=A$.

Например,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 5\\ -2 & -6 & 1\\ 5 & 1 & -3\end{pmatrix}$$ – симметрические матрицы.

Единичными матрицами называются диагональные матрицы, у которых все диагональные элементы равны единице. Эти матрицы обычно обозначаются буквой E.

Примеры единичных матриц:

$$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad E_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ - единичные матрицы 2-го, 3-го и 4–го порядка соответственно. Эти матрицы получили такое название в связи с тем, что для любой матрицы X размера $m\times n$ выполнены равенства $X\cdot E_n=X$ и $E_m\cdot X=X$. Если же X - квадратная матрица порядка n, то $X\cdot E_n=E_n\cdot X=X$.

Пример 8. Проверить, что $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix}c_{11}=a_{11}\cdot 1+a_{12}\cdot 0=a_{11} & c_{12}=a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 1=a_{12}\\ c_{21}=a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1=a_{21} & c_{22}=a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 1=a_{22}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix}f_{11}=1\cdot a_{11}+0\cdot a_{12}=a_{11} & f_{12}=0\cdot a_{11}+1\cdot a_{12}=a_{12}\\ f_{21}=0\cdot a_{21}+1\cdot a_{22}=a_{21} & f_{22}=0\cdot a_{21}+1\cdot a_{22}=a_{22}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

1.4. Возведение квадратной матрицы в натуральную степень.

По определению, $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n}$.

Пример 9.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 26 & 27\end{pmatrix}.$$

Домашнее задание.

1. Для заданных матриц $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$

найти $(-A+2B)C$, $D(-A+2B)$, $(DC)^2$.

Занятие 2. **Определители.**

2.1. Понятие перестановки. Инверсия, транспозиция. Четность (нечетность) перестановки.
2.2. Определитель n-го порядка. Правила Саррюса вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
2.3. Основные свойства определителей.

2.1. Перестановки. Инверсия, транспозиция. Четность (нечетность) перестановки.

Возьмем первые n натуральных чисел: $1, 2, \ldots, n$. Любой набор $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ этих чисел, расставленных в некотором порядке, называется ***перестановкой***.

Пример 1. Наборы $(1,\ 2,\ 3,\ 4), (2,\ 4,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 4,\ 2,\ 1)$, $(4,\ 3,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 3,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 3,\ 2)$ представляют собой перестановки первых четырех натуральных чисел.

Число различных перестановок из n ***символов 1, 2, …,*** n ***равно*** $n\,! = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Если в некоторой перестановке поменять местами два символа (не обязательно соседние), то получится новая перестановка, Такое преобразование перестановки называется ***транспозицией***.

Пример 2. Перестановка $(4, 3, 2, 1)$ получается транспозицией чисел 3, 4 из перестановки $(3, 4, 2, 1)$. Эту транспозицию запишем так: $(\underline{3}, \underline{4}, 2, 1) \to (4, 3, 2, 1)$. В свою очередь, запись $(3, \underline{4}, 1, \underline{2}) \to (3, 2, 1, 4)$ означает, что перестановка $(3, 2, 1, 4)$ получена транспозицией чисел 4, 2 из перестановки $(3, 4, 1, 2)$.

В перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ числа i_k, i_m составляют ***инверсию***, если $k < m$, но $i_k > i_m$.

Пример 3. Перестановка $(4, 3, 5, 2, 1)$ содержит 8 инверсий:
$4>3,\ 4>2,\ 4>1$ - три инверсии; $3>2,\ 3>1$ - две инверсии; $5>2,\ 5>1$ - две инверсии; $2>1$ - одна инверсия. Всего – 8 инверсий.

Перестановка называется ***четной (нечетной),*** если она содержит ***четное (нечетное)*** число инверсий. Перестановка $(4, 3, 5, 2, 1)$ из примера 3 содержит 8 инверсий, значит она четная.

Любая транспозиция перестановки меняет ее четность.

Пример 4. Рассмотрим перестановку $(4, 1, 5, 2, 3)$, полученную транспозицией чисел 3, 1 из четной перестановки $(4, 3, 5, 2, 1)$. Перестановка $(4, 1, 5, 2, 3)$ должна быть нечетной. Так оно и есть, поскольку перестановка $(4, 1, 5, 2, 3)$ содержит: $4>3,\ 4>2,\ 4>1$ - три инверсии и $5>2,\ 5>3$ - две инверсии. Всего – 5 инверсий.

Четность (нечетность) перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ можно также определить по количеству транспозиций, переводящих эту перестановку в перестановку $(1, 2, \ldots, n)$. Перестановка будет четной (нечетной), если для этого требуется провести четное (нечетное) число транспозиций.

Пример 5. Перестановку $(4, 1, 5, 2, 3)$ можно перевести в перестановку $(1, 2, 3, 4, 5)$ с нормальным порядком расположения чисел следующими тремя транспозициями:

$(\underline{4}, 1, 5, \underline{2}, 3) \to (2, 1, 5, 4, 3)$; $(\underline{2}, \underline{1}, 5, 4, 3) \to (1, 2, 5, 4, 3)$; $(1, 2, \underline{5}, 4, \underline{3}) \to (1, 2, 3, 4, 5)$.

Следовательно, перестановка $(4, 1, 5, 2, 3)$ - нечетная, что согласуется с выводами примера 4, приведенного выше.

2.2. Определитель n-го порядка.
Правила Саррюса вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.

С каждой квадратной матрицей A связано число, называемое ***определителем (детерминантом)*** матрицы A. Это число обозначается $det\,A$ или $|A|$. Если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица n-го порядка, то по определению ее

определитель (детерминант) равен

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_I (-1)^{P(I)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\ , \qquad (1)$$

где сумма берется по всем перестановкам $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, $P(I)$ - четность перестановки $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$: $P(I) = 0$, если перестановка четная и $P(I) = 1$, если перестановка нечетная. Т.к. имеется $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ различных перестановок, то в сумме (1) присутствуют $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n элементов $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{ni_n}$ матрицы A (взятых по одному из каждой строки и столбца матрицы), умноженное еще на число $(-1)^{P(I)}$.

Выясним, к каким результатам приводит формула (1) для определителей 1,2,3-го порядка.

1) Пусть $A = (a_{11})$ - квадратная матрица 1-го порядка, тогда согласно (1)

$$det\,A = (-1)^{P(I)} a_{11} = a_{11}.$$

В этом случае $I = (i_1 = 1)$ - четная перестановка (в ней 0 инверсий).

2) Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-го порядка. Количество всех перестановок $I = (i_1, i_2)$ из двух чисел 1;2 равно $2! = 2$. Укажем эти перестановки и их четность:

$I = (i_1, i_2) = (1,2)$ - четная (0 инверсий), для этой перестановки $P(I) = 0$;

$I = (i_1, i_2) = (2,1)$ - нечетная (1 инверсия), для этой перестановки $P(I) = 1$.

Следовательно, согласно формуле (1) определитель 2-го порядка равен

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_I (-1)^{P(I)} a_{1i_1}a_{2i_2}=(-1)^0 a_{11}a_{22}+(-1)^1 a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Окончательная формула имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \qquad (2)$$

3) Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ - квадратная матрица 3-го порядка. Количество всех перестановок $I=(i_1,i_2,i_3)$ из трех чисел 1,2,3 равно 3! =6. Укажем все эти перестановки и их четность:

$(i_1,i_2,i_3)=(1,2,3)$ - четная (0 инверсий), для этой перестановки $P(I)=0$;
$(i_1,i_2,i_3)=(2,3,1)$ - четная (2 инверсии: 2>1, 3>1), для этой перестановки $P(I)=0$;
$(i_1,i_2,i_3)=(3,1,2)$ - четная (2 инверсии: 3>1, 3>2), для этой перестановки $P(I)=0$;
$(i_1,i_2,i_3)=(2,1,3)$ - нечетная (1 инверсия: 2>1), для этой перестановки $P(I)=1$;
$(i_1,i_2,i_3)=(1,3,2)$ - нечетная (1 инверсия: 3>2), для этой перестановки $P(I)=1$;
$(i_1,i_2,i_3)=(3,2,1)$ - нечетная (3 инверсии: 3>2,3>1,2>1), для этой перестановки $P(I)=1$.

Таким образом, в силу (1) определитель 3-го порядка равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_I (-1)^{P(I)} a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}=(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^0 a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^0 a_{13}a_{21}a_{32}+$$
$$+(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Окончательная формула для вычисления определителя 3-го порядка имеет такой вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}) \qquad (3)$$

Формулы (2), (3) вычисления определителей 2-го и 3-го порядков называются ***правилами Саррюса***. Их легко запомнить и использовать при вычислении определителей 2-го и 3-го порядков.

Пример 6. Вычислить определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3\end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} -0.5 & -2 \\ 2.4 & 4\end{vmatrix},$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -3\end{vmatrix},\ \Delta_5=\begin{vmatrix} 3\sqrt{2} & 4 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 & 4 \\ -\sqrt{2} & 2 & -1\end{vmatrix},\ \Delta_6=\begin{vmatrix} 1.5 & 4.1 & -2.2 \\ 1.5 & 2.4 & 5.3 \\ -1.5 & 3.2 & -3.1\end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся правилом (2) для определителей 2-го порядка и правилом (3) для определителей 3-го порядка.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-(-2)\cdot 2=3+4=7,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 2 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} - \sqrt{6}\cdot 2 = -3\sqrt{6},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -0.5 & -2 \\ 2.4 & 4 \end{vmatrix} = -0.5\cdot 4 - (-2)\cdot 2.4 = -2.0 + 4.8 = 2.8,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 0\cdot(-3) + 4\cdot 5\cdot(-1) + (-2)\cdot 1\cdot 3 - [(-2)\cdot 0\cdot(-1) + 4\cdot 1\cdot(-3) + 3\cdot 5\cdot 3] =$$

$$= 0 - 20 - 6 - (0 - 12 + 45) = -26 - 33 = -59,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3\sqrt{2} & 4 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 & 4 \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2}\cdot 1\cdot(-1) + 4\cdot 4\cdot(-\sqrt{2}) + (-2)\cdot\sqrt{2}\cdot 2 -$$

$$-[(-2)\cdot 1\cdot(-\sqrt{2}) + 4\cdot\sqrt{2}\cdot(-1) + 3\sqrt{2}\cdot 4\cdot 2] = -3\sqrt{2} - 16\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 24\sqrt{2}) = -45\sqrt{2}.$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1.5 & 4.0 & -2.2 \\ 1.5 & 2.0 & 5.3 \\ -1.5 & 4.0 & -3.1 \end{vmatrix} = 1.5\cdot 2.0\cdot(-3.1) + 4.0\cdot 5.3\cdot(-1.5) + (-2.2)\cdot 1.5\cdot 4.0 -$$

$$-[-2.2\cdot 2.0\cdot(-1.5) + 4.0\cdot 1.5\cdot(-3.1) + 1.5\cdot 5.3\cdot 4.0] =$$

$$= -9.1 - 31.8 - 13.2 - (6.6 - 18.6 + 31.8) = -73.9$$

2.3. Основные свойства определителей.

Определители обладают важными свойствами, которые позволяют проводить простые математические операции с его строками и столбцами. Они позволяют упростить заданный определитель до такого состояния, когда его вычисление становится элементарным. Сформулируем эти свойства, которые **верны для определителей любого порядка.**

1°. **Если в определителе поменять местами любые две строки (или любые два столбца), то определитель изменяет знак.**

Покажем действие свойства $1^\bullet$ на примере определителя 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь над определителем проведены следующие преобразования:
1) в заданном определителе поменяли местами 1-й и 3-й столбцы;
2) во втором определителе поменяли местами 2-ю и 3-ю строчки.

2°. **Определитель не меняет своего значения, если к любой его строке прибавить любую другую строку, умноженную на некоторое число. Аналогичное действие применимо к столбцам определителя, т.е. определитель также не меняет своего значения, если к любому его столбцу прибавить любой другой столбец, умноженный на некоторое число.**

Приведем действие свойства 2° на примере определителя 4-го порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Здесь к определителю последовательно проведены следующие преобразования:
1) ко 2-му столбцу прибавили 1-й столбец, умноженный на (-1);
2) затем в полученном (втором определителе) ко 2-й строке прибавили 4-ю строку, умноженную на число (-2).
В результате этих действий пришли к новому (третьему) определителю, содержащему пять нулевых элементов.
Очевиден следующий факт: чем больше нулевых элементов в определителе, тем проще его вычисление.

$3^\bullet$. **Определитель, содержащий нулевую строку (или нулевой столбец) равен нулю.**

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4°. **Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.** Напомним: квадратная матрица является треугольной, если все ее элементы, стоящие под (или над) главной диагональю равны нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot(-2) = -16, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3\cdot 1\cdot 5\cdot(-2) = 30,$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 4\cdot 0\cdot 3\cdot(-2)\cdot(-5) = 0.$$

5°. **Если какая-то строка (столбец) определителя имеет общий множитель k, то число k можно поставить множителем перед определителем, уменьшив при этом соответствующую строку (столбец) в k раз.**

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

В первом определителе множитель 2 вынесен из второй строки.
Во втором определителе множитель 4 вынесен из третьего столбца.

С помощью свойств $1^\circ - 5^\circ$ вычисление любого определителя можно свести к вычислению определителя треугольной матрицы.

Пример 7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}_2 = -\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}_4 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{vmatrix}_5 =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{vmatrix}_6 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix}_7 = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-14) = 14.$$

Здесь при вычислении заданного определителя были проведены следующие преобразования.

1) В 1-м определителе (с индексом 1 внизу справа) ко 2-му столбцу прибавили 1-й столбец, умноженный на (-1).

2) В полученном 2-м определителе (с индексом 2 внизу справа) поменяли местами 1-й и 2-й столбцы. При этом изменился знак.

3) В полученном 3-м определителе (с индексом 3) поменяли местами 2-ю и 4-ю строки. Опять поменялся знак.

4) В полученном 4-м определителе (с индексом 4) к 3-й строке прибавили 2-ю строку и к 4-й строке прибавили 2-ю строку, умноженную на число (-2).

5) В полученном 5-м определителе (с индексом 5) к 3-й строке прибавили 4-ю строку.

6) В полученном 6-м определителе (с индексом 6) к 4-й строке прибавили 3-ю строку, умноженную на число 4.

7) Полученный определитель (с индексом 7) вычислили, пользуясь свойством 5°.

В заключение отметим следующие факты:

1. Определители матриц A и A^T равны, т.е. $|A| = |A^T|$.

2. Определитель произведения двух квадратных матриц A, B равен произведению их определителей, т.е. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Домашнее задание.

1. Определить четность перестановки $(4, 6, 1, 5, 3, 2)$.

2. Даны квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Вычислить определители матриц A, B, BC, по правилам Саррюса.

2) Вычислить определитель матрицы D с помощью свойств $1^\circ - 5^\circ$ определителей (сведя его к определителю матрицы треугольного вида).

Занятие 3. **Определители (продолжение). Обратная матрица**

3.1. Миноры и алгебраические дополнения.
3.2. Разложение определителя по строке (столбцу).
3.3. Обратная матрица, ее нахождение. Невырожденные и вырожденные матрицы.

3.1. Миноры и алгебраические дополнения.

Часто применяемым, а потому важным приемом вычисления определителей является «**правило разложения определителя по строке или столбцу**». Этот прием позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению не более, чем n определителей $(n-1)$-го порядка. Чтобы правильно пользоваться этим правилом требуется уметь находить следующие величины: **миноры** и **алгебраические дополнения** элементов квадратной матрицы. Напомним их определения.

Минором M_{ij} *элемента* a_{ij} *квадратной матрицы* A *называется определитель, полученный из определителя* $|A|$ *вычеркиванием* i*-й строки и* j*-го столбца, т.е. строки и столбца на пересечении которых стоит элемент* a_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} *квадратной матрицы* A *называется число* $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, *где* M_{ij} *-минор элемента* a_{ij}.

Перейдем к примерам.

Пример 1. Найти миноры M_{21}, M_{32} и алгебраические дополнения A_{13}, A_{23} соответствующих элементов матрицы $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1) Согласно определению минора, минор M_{21} получается из определителя матрицы B_1 вычеркиванием 2-й строки и 1-го столбца. Следовательно, $M_{21} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

2) Минор M_{32} получается из определителя матрицы B_1 вычеркиванием 2-й строки и 1-го столбца. $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

3) $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} \Rightarrow A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)] = 8$.

4) $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} \Rightarrow A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot [2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2)] = -4$.

Пример 2. Найти миноры M_{12}, M_{22} и алгебраические дополнения A_{43}, A_{33} соответствующих элементов матрицы $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2) $A_{43} = (-1)^{4+3} M_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$. $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Вычисление определителей и получение окончательного ответа предоставляем читателю.

3.2. Разложение определителя по строке (столбцу).

Разложение определителя $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ . & . & \dots & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ по i – й **строке** производится по формуле:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} . \qquad (1)$$

Аналогично разлагается определитель по j – му **столбцу**:

$$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} . \qquad (2)$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы B_1 из примера 1 тремя способами: по правилу Саррюса; разложением по 2-й строке; разложением по 3-му столбцу.
Решение.

1) По правилу Саррюса: $\Delta_1 = \det B_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 2 - (-6 - 2 - 2) = 8$.

2) Разложение определителя Δ_1 по 2-й строке согласно формуле (1) имеет вид:

$$\Delta_1 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

Т.к. $a_{21} = -1,\ a_{22} = 3,\ a_{23} = -1$ и

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$,

получаем $\Delta_1 = -1 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) = 8$.

3) Разложение определителя Δ_1 по 3-му столбцу согласно формуле (3) дает:

$$\Delta_1 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

$a_{13}=-2,\ a_{23}=-1,\ a_{33}=-1,\ A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4,\ A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=4.$

Следовательно, $\Delta_1=-2\cdot(-4)+(-1)\cdot(-4)+(-1)\cdot 4=8.$

Во всех трех случаях получен один и тот же результат, что и должно быть.

Пример 4. Вычислить определитель матрицы B_2 из примера 2 двумя способами: разложением по 2-й строке и разложением по 3-му столбцу.

Решение.

1) Разложение определителя $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 4\\ 1 & 3 & -3 & 1\end{vmatrix}$ по 2-й строке имеет вид:

$\Delta_2=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$.

$a_{21}=2,\quad a_{22}=-1,\quad a_{23}=-1,\quad a_{24}=1$,

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 2 & -2 & 4\\ 3 & -3 & 1\end{vmatrix}=-10,\qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}=13,$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=10,\qquad A_{24}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}=1.$$

Следовательно, $\Delta_2=2\cdot(-10)+(-1)\cdot 13+(-1)\cdot 10+1\cdot 1=-20-13-10+1=-42$.

2) Разложение определителя Δ_2 по 3-му столбцу имеет вид:

$\Delta_2=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}+a_{43}A_{43}$.

$a_{13}=2,\quad a_{23}=-1,\quad a_{33}=-2,\quad a_{43}=-3$,

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-22,\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=10,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=18,\qquad A_{43}=(-1)^7\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=-16.$$

Следовательно, $\Delta_2=2\cdot(-22)+(-1)\cdot 10+(-2)\cdot 18+(-3)\cdot(-16)=-44-10-36+48=-42$.

Комбинирование основных свойств определителей с методом разложения определителя по строке (столбцу) является наиболее эффективным средством вычисления определителей 4-го и более высоких порядков.

Пример 5. Вычислить определитель $\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ -1 & -1 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{vmatrix}_{1.}=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 5 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}_{2.}=(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=14.$$

Здесь над определителем Δ_3 проведены следующие действия.

1. Ко 2-му столбцу прибавили 1-й столбец, умноженный на (-1).
2. Полученный определитель (с индексом 2 внизу) разложили по 2-му столбцу.

Пример 6. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}_{1.} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -11 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & -10 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{2.} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -11 & 8 & 0 & -4 \\ -5 & 6 & -4 & -1 \\ 11 & -10 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -11 & 8 & 0 & -4 \\ -5 & 6 & -4 & -1 \\ 11 & -10 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{3} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -4 & 14 \\ 0 & -21 & 1 & -29 \end{vmatrix}_{4.} = -1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & 14 \\ -21 & 1 & -29 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 11 & -4 & 14 \\ -21 & 1 & -29 \end{vmatrix}_{5.} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 147 & -4 & 14 \\ -282 & 1 & -29 \end{vmatrix}_{6.} = (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 147 & -4 \\ -282 & 1 \end{vmatrix} = 147 - 282\cdot 4 = -981.$$

Здесь индексами отмечены следующие действия.

1. К 2-й строке определителя Δ_4 прибавлена 1-я строка,
   к 3-й строке прибавлена 1-я строка, умноженная на -3,
   к 4-й строке прибавлена 1-я строка, умноженная на -2,
   к 5-й строке прибавлена 1-я строка, умноженная на 4.
2. Полученный определитель (с индексом 2 внизу) разложили по 1-му столбцу.
3. В определителе с индексом 3
   к 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на 11,
   к 3-й строке прибавили1-ю, умноженную на 5,
   к 4-й строке прибавили 1-ю, умноженную на -11.
4. Определитель с индексом 4 разложили по 1-му столбцу.
5. В определителе с индексом 5 к 1-му столбцу прибавили 3-й столбец, умноженный на 9.
6. Определитель с индексом 6 разложили по 1-й строке.

3.3. Обратная матрица, ее нахождение. Невырожденные и вырожденные матрицы.

Пусть A - квадратная матрица. **Матрица A^{-1} называется обратной матрицей для матрицы A, если $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, где $E-$ единичная матрица.** Т.к. $\left|A\cdot A^{-1}\right| = |A|\cdot\left|A^{-1}\right| = |E| = 1$, то отсюда выводится, что $|A|\neq 0,\ \left|A^{-1}\right|\neq 0$, т.е. **обратная матрица A^{-1} определяется только для матриц A, определитель которых не равен нулю.** Такие матрицы называются невырожденными (квадратные матрицы, у которых определитель равен нулю называются вырожденными). Для неквадратных матриц A размером $m\times n$, $m\neq n$ обратная матрица не определяется.

Приведем последовательность действий, позволяющих найти A^{-1} по заданной матрице A.

1. Вычисляем $det\,A$. Если $det\,A = 0$, то делается вывод: A^{-1} не существует. Если $det\,A \neq 0$ матрица A^{-1} существует и для ее нахождения переходим к выполнению следующих пунктов.

2. Находим все алгебраические дополнения A_{ij} матрицы A и составляет из них матрицу $B = (A_{ij})$.

3. Находим B^T.

4. Вычисляем A^{-1} по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{det\,A} \cdot B^T$.

Пример 7. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. $det\,A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow$ матрица A не вырождена и матрица A^{-1} существует.

2. Вычислим все алгебраические дополнения матрицы A и составим из них матрицу B.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу B. $\quad B^T = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Находим искомую матрицу A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \cdot B^T = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/8 & -4/8 & 8/8 \\ -2/8 & 0/8 & 4/8 \\ -4/8 & -4/8 & 4/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 1 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Должно быть $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$, где E - единичная матрица.

1-я проверка. $\quad A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 1 \\ -1/4 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, где

$$c_{11} = 2\left(-\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(-\frac{1}{4}\right) + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad c_{12} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + (-2)\cdot 0 + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad c_{13} = 2\cdot 1 + (-2)\frac{1}{2} + (-2)\frac{1}{2} = 0,$$

$$c_{21} = -1\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad c_{22} = -1\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\cdot 0 + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad c_{23} = -1\cdot 1 + 3\cdot\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 0,$$

$$c_{31} = 1\left(-\frac{1}{4}\right) + 1\left(-\frac{1}{4}\right) + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad c_{32} = 1\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\cdot 0 + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad c_{33} = 1\cdot 1 + 1\cdot\frac{1}{2} + (-1)\frac{1}{2} = 1.$$

Следовательно, $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$.

2-я проверка. $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-1/4&-1/2&1\\-1/4&0&1/2\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&-2\\-1&3&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}&p_{13}\\p_{21}&p_{22}&p_{23}\\p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{pmatrix}$, где

$p_{11}=-\frac{1}{4}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+1\cdot 1=1,\quad p_{12}=-\frac{1}{4}(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+1\cdot 1=0,\quad p_{13}=-\frac{1}{4}(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+1\cdot(-1)=0,$

$p_{21}=-\frac{1}{4}\cdot 2+0\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0,\quad p_{22}=-\frac{1}{4}(-2)+0\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=1,\quad p_{23}=-\frac{1}{4}(-2)+0\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=0,$

$p_{31}=-\frac{1}{2}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1=0,\quad p_{32}=-\frac{1}{2}(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=0,\quad p_{33}=-\frac{1}{2}(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)+\frac{1}{2}\cdot(-1)=1.$

Следовательно, $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$.

Ответ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4&-1/2&1\\-1/4&0&1/2\\-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}$.

Пример 8. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$.

Решение. $det\,A=\begin{vmatrix}2&-2\\-2&2\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$ Ответ. A^{-1} не существует.

Пример 9. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&3\end{pmatrix}$.

Решение.

1. $det\,A=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&3\end{vmatrix}=-1\quad\Rightarrow\quad A^{-1}$ существует.

2. Найдем все алгебраические дополнения матрицы A и составим из них матрицу B.

$A_{11}=(-1)^{1+1}det(3)=3,\ A_{12}=(-1)^{1+2}det(-2)=2,\ A_{21}=(-1)^{2+1}det(-2)=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}det(1)=1.$

$B=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$.

3. $B^T=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$.

4. $A^{-1}=\frac{1}{det\,A}B^T=-1\cdot\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$

Проверка.

$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-3&-2\\-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E,\qquad A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-2\\-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$.

Ответ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-2\\-2&-1\end{pmatrix}$.

Домашнее задание.

1. Дана матрица $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти миноры M_{32}, M_{33} и алгебраические дополнения A_{32}, A_{33}

Вычислить определитель матрицы C двумя способами:

а) разложением по 3-й строке; б) разложением по 4-му столбцу.

2. Найти обратные матрицы для матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Занятие 4. **Использование матриц и определителей при решении линейных алгебраических систем.**

4.1. Совместные, несовместные линейные системы. Матричная запись линейной системы. Невырожденные линейные системы.

4.2. Решение невырожденных систем по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы.

4.1. *Совместные, несовместные линейные системы. Матричная запись линейной системы. Невырожденные линейные системы.*

Напомним необходимые определения.

1. **Системой линейных алгебраических уравнений** называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **- неизвестные** величины, a_{ij}, b_i $(i=1,2,\ldots,m; \quad j=1,2,\ldots,n)$ **- заданные** числа**,**

a_{ij} называются **коэффициентами системы,** b_i **- свободными членами.**

2. Решением системы (1) называется набор чисел $x_1=c_1$, $x_2=c_2$, ..., $x_n=c_n$**,** после подстановки которого все уравнения системы (1) становятся числовыми равенствами.

3. Система (1) называется **совместной,** если она **имеет хотя бы одно решение.**

Система (1) называется **несовместной,** если она **не имеет ни одного решения.**

Пример 1.

Система уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 = 1 \end{cases}$ является линейной системой из двух уравнений, содержащей три неизвестные величины x_1, x_2, x_3. Коэффициенты системы:

$a_{11}=2, a_{12}=-3, a_{13}=-1, a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=4$. Свободные члены: $b_1=-1, b_2=1$.

Эта система совместна, т.к. набор чисел $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=0$ после подстановки в уравнения системы превращает эти уравнения в числовые равенства $\begin{cases} 2\cdot 1 - 3\cdot 1 - 0 = -1 \\ 1 + \qquad 4\cdot 0 = 1 \end{cases}$.

Пример 2.

Система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ есть линейная система с двумя неизвестными x_1, x_2. Эта система не имеет решений. Действительно, если предположить, что какой-то набор чисел $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ является ее решением, то получим $c_1 - c_2 = 1$ и $c_1 - c_2 = 3$, что невозможно, т.к. $1 \neq 3$. Следовательно, данная система несовместна.

Линейная система (1) **эквивалентна матричному уравнению**

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

A - матрица размера $m \times n$ из коэффициентов системы, называется **матрицей системы,**
X - матрица размера $1 \times n$, называется **вектор-столбцом неизвестных,**
B - матрица размера $1 \times m$, называется **вектор-столбцом свободных членов.**
Запись системы (1) матричным уравнением (2) называется матричным представлением линейной системы.

Пример 3. Записать заданные две линейные системы в матричном виде.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \quad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \quad 2x_4 = -3 \end{cases}$, 2) $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ 7x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$.

Решение.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \quad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \quad 2x_4 = -3 \end{cases}$ или $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ или $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{cases} -x_1 - x_2 = 1 \\ 7x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ или $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ или $A \cdot X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Особую роль среди систем (1) играют системы, у которых число уравнений (число m) совпадает с числом неизвестных (числом n), т.е. системы вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Такие системы называются линейными квадратными системами или системами n-го порядка. В матричном представлении $A \cdot X = B$ этой системы присутствуют:

матрица системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - квадратная матрица n-го порядка;

вектор-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и вектор-столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Определитель $\Delta = det\,A$ называется **главным определителем** системы (3). Если $\Delta \neq 0$, то система (3) называется **невырожденной системой**, если же $\Delta = 0$, то система (3) называется **вырожденной.**

Например, система уравнений из примера 2 является вырожденной, т.к. эта система – система второго порядка, и ее главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ равен нулю.

4.2. *Решение невырожденных систем по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы.*

Перейдем к рассмотрению двух важных методов решения линейных невырожденных систем. Это - метод Крамера и матричный метод.

Метод Крамера вытекает из следующей **теоремы**. *Если главный определитель системы* (3) *отличен от нуля, то система имеет только одно решение, и это решение можно найти по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{\Delta}$ *- главный определитель системы,* Δ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ *- вспомогательные определители, получающиеся из главного определителя* Δ *заменой в нем* i *-го столбца столбцом* B *свободных членов.* Формулы (4) называются формулами Крамера.

Пример 4. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Решение.
Найдем главный определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 + 16 - (-6 - 4 + 16) = 35 \neq 0.$$

Следовательно, заданная система невырождена и имеет только одно решение. Найдем его по формулам Крамера. Для этого вычислим вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3.

1) Δ_1 получается из определителя Δ заменой его первого столбца столбцом $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 8 - (0 + 2 - 48) = 35.$$

2) Δ_2 получается из определителя Δ заменой его второго столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1+36+0-(6-6+0) = 35.$$

2) Δ_3 получается из определителя Δ заменой его третьего столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-6-24-(9+0-4) = -35.$$

Согласно формулам Крамера (4) получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{35}{35} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{35}{35} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-35}{35} = -1.$$

Проверка: $\begin{cases} -1+2\cdot 1-2\cdot(-1) = 3 \\ 2\cdot 1+1+4\cdot(-1) = -1 \\ 3\cdot 1-4\cdot 1-(-1) = 0 \end{cases}$ подтверждает правильность найденного решения.

Пример 5. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$.

Решение.

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \Rightarrow$ система невырождена и имеет только одно решение.

2) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8.$

3) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6}{5} = 1.2, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{8}{5} = 1.6.$

Ответ. $x_1 = 1.2, \quad x_2 = 1.6$ - решение системы.

Замечание. *Если система линейных уравнений* (3) *вырождена, то метод Крамера не применим. Исследование вырожденных систем проводится другими методами (например, методом Гаусса, изучаемым на занятии 5). Пока же отметим, что вырожденная система либо несовместна, либо имеет более одного решения.*

Например, вырожденная система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$ несовместна (см. пример 2), а вырожденная система $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$ совместна и имеет бесконечно много решений:

$x_1 = 1+\alpha, \quad x_2 = \alpha$, где α - произвольное действительное число.

Матричный метод решения невырожденных линейных систем, который еще называют **методом решения систем с помощью обратной матрицы**, заключается следующем.

1. Представим систему (3) матричным уравнением $A\cdot X = B$.

2. Найдем матрицу A^{-1}. Эта матрица существует, т.к. $det\, A \neq 0$.

3. Умножив слева уравнение $A\cdot X = B$ на матрицу A^{-1}, получим решение в виде

$$X = A^{-1}B. \tag{5}$$

Если система (3) вырождена, то матрица A^{-1} не определена. Поэтому матричный метод решения линейных систем и метод Крамера применимы к одному и тому же классу линейных систем, а именно к множеству линейных невырожденных систем.

Пример 6. Решить матричным методом систему из примера 4.

Решение.

1. Заменим систему матричным уравнением $A\cdot X = B$, в котором

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. $det\, A = 35$. Следовательно, A^{-1} существует. Вычисления (их предоставляем читателю, при затруднениях следует просмотреть занятие 3) показывают, что $A^{-1}=\dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 15 & 10 & 10 \\ 14 & 7 & 0 \\ -11 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Находим решение по формуле (5).

$$X = A^{-1}B=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 15 & 10 & 10 \\ 14 & 7 & 0 \\ -11 & 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix} 35 \\ 35 \\ -35 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом выводим: $x_1 = 1,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = -1$. Этот же ответ получен в примере 4 с помощью правила Крамера.

Матричный метод применим (помимо невырожденных линейных систем) при решении следующих матричных уравнений: $A\cdot X = C$; $X\cdot B = C$; $A\cdot X\cdot B = C$, в которых A, B - заданные невырожденные квадратные матрицы, X - неизвестная матрица, C - заданная матрица.

1) В случае $A\cdot X = C$ решение получаем после умножения уравнения слева на матрицу A^{-1}. Ответом будет $X = A^{-1}C$.

2) В случае $X\cdot B = C$ решение находится после умножения уравнения справа на матрицу B^{-1}. Ответ: $X = C\cdot B^{-1}$.

3) В случае $A\cdot X\cdot B = C$ надо умножить это уравнение слева на матрицу A^{-1} и справа на матрицу B^{-1}. Ответ: $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Пример 7. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Дано уравнение $A\cdot X = C$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

A- невырожденная матрица, ее определитель равен 1. Неизвестную матрицу X находим по формуле $X = A^{-1}C$. Вычисление матрицы A^{-1} опять оставляем читателю. Приведем итоговые результаты.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 17 \\ -4 & -25 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Дано уравнение $X \cdot B = C$, где $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

B - невырожденная матрица, $det\, B = -1$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Вычисление матрицы B^{-1} оставляем читателю.

Неизвестную матрицу X находим по формуле $X = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -10 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 9. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (см. пример 7). $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (см. пример 8).

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 27 \\ 27 & -42 \\ 10 & -16 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Подставим найденную матрицу X в заданное уравнение и убедимся, что полученное произведение трех матриц дает матрицу C

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 & 27 \\ 27 & -42 \\ 10 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = C.$$

Домашнее задание.

1. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ двумя способами

а) с помощью правила Крамера; б) с помощью обратной матрицы.

2. Решить следующие матричные уравнения:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Занятие 5. Метод Гаусса решения линейных алгебраических систем.

Приведение системы к треугольному виду.
Выделение свободных и базисных неизвестных.
Получение общего решения системы или вывода о несовместности системы.

Изучаемый ниже метод Гаусса решения линейных алгебраических систем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ \ . \ . \ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

является универсальным и предоставляет возможность полностью исследовать любую линейную систему. Он показывает, совместна или несовместна заданная система и в случае ее совместности позволяет найти ее общее решение. Напомним, что ***общим решением системы называется множество всех ее решений.***

Основная идея метод Гаусса состоит в том, чтобы решение исходной системы уравнений свести к решению более простой системы. Сформулируем определения и элементарные операции, составляющие основу метода Гаусса.

1°. Две линейные системы уравнений называются **эквивалентными**, если **они имеют одно и то же общее решение.**

2°. Над системой можно проводить следующие **элементарные операции**, переводящие заданную систему в эквивалентную ей систему.

1) В системе можно поменять местами любые два уравнения.

2) В системе, во всех ее уравнениях сразу, можно поменять местами слагаемые с любыми двумя выбранными неизвестными.

3) Любое уравнение системы можно умножить на число, отличное от нуля.

4) К любому уравнению системы можно прибавить любое другое уравнение (этой же системы), умноженное на некоторое число.

Далее, эквивалентные системы будем соединять значком $\sim$.

Пример 1. Дана система уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases}$.

1. Поменяв в заданной системе местами 2-е и 3-е уравнения, получим эквивалентную ей систему, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}.$$

2. Поменяв в заданной системе (во всех уравнениях сразу) местами слагаемые с неизвестными x_2, x_4, получим эквивалентную систему, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 + 3x_4 - x_3 - 3x_2 = -1 \\ x_1 - 5x_4 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_4 \qquad - 2x_2 = -3 \end{cases}.$$

3. Умножив 3-е уравнение заданной системы на число (-0.5), получим эквивалентную систему, т.е.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 0.5x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 1.5 \end{cases}.$$

4. Прибавим к первому уравнению заданной системы второе уравнение, умноженное на (-2), получим новую эквивалентную систему.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} \qquad -3x_2 - 9x_3 + 13x_4 = -3 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases}.$$

В примере 1 к заданной системе применены бессистемные элементарные произведения, не преследующие каких-либо целей. В противоположность им, метод Гаусса – целенаправленная последовательность элементарных преобразований, приводящих в итоге линейную систему (1) к системе треугольного вида:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}, \qquad (2)$$

в которой все первые коэффициенты c_{ii} $(i = 1,\ldots,k)$ отличны от нуля. В этой системе неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_k$, связанные с коэффициентами $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}$, называются **базисными**, а оставшиеся неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ - **свободными**.

В процессе элементарных преобразований системы некоторые уравнения системы могут перейти в равенства 0=0. Появление таких равенств означает, что исходная система содержит «лишние» уравнения, которые являются следствиями других уравнений системы. В этом случае равенства 0=0 отбрасываются. Число уравнений системы при этом уменьшается. Поэтому число k уравнений системы (2) может оказаться меньше числа m уравнений исходной системы (3).

Если в ходе проведения метода Гаусса появляются невыполнимые равенства типа $0 = 1$, $0 = -3$ и т.д., то исследуемая линейная система несовместна.

Еще один совет: элементарные преобразования системы будут выполняться проще, если с помощью этих преобразований добиваться, чтобы коэффициенты $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{k-1\,k-1}$, становились равными 1 или -1.

Общее решение системы (2) находится так: свободным неизвестным присваивают произвольные числовые значения; затем, последовательно двигаясь от последнего уравнения системы (2) вверх к первому уравнению, определяют базисные неизвестные в порядке $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$.

Приведем конкретные примеры применения метода Гаусса к линейным системам

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases}. \qquad (3)$$

Решение. Применим метод Гаусса.

1. Поменяем местами первое и второе уравнения, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 + \qquad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + \qquad 2x_4 = -3 \end{cases}. \qquad (3)_1$$

2. С помощью первого уравнения исключим неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений системы $(3)_1$. Для этого:

а) прибавим во 2-му уравнению 1-е уравнение, умноженное на число (-2);

б) к 3-му уравнению прибавим 1-е уравнение.

В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1 + \quad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -3x_2 - 9x_3 + 13x_4 = -3. \\ -2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases} \qquad (3)_2$$

3. Два последних уравнения системы $(3)_2$ образуют подсистему, независящую от неизвестной x_1. Чтобы упростить последующие преобразования сделаем коэффициент a_{22}, равным -1. Для этого вычтем из 2-го уравнения 3-е уравнение (т.е. прибавим ко 2-му уравнению 3-е уравнение, умноженное на число -1). После этой операции получим систему

$$\begin{cases} x_1 + \quad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_2 - 13x_3 + 16x_4 = -1. \\ -2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases} \qquad (3)_3$$

4. Теперь, в системе $(3)_3$ с помощью 2-го уравнения исключим неизвестную x_2 из 3-го уравнения. Для этого прибавим к 3-му уравнению 2-е уравнение, умноженное на число (-2).

В итоге получим систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 + \quad 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ -x_2 - 13x_3 + 16x_4 = -1. \\ 30x_3 - 35x_4 = 0 \end{cases} \qquad (3)_4$$

В ней x_1, x_2, x_3 - базисные неизвестные, x_4 - свободная неизвестная.

5. Теперь из системы $(3)_4$ найдем общее решение. Положим $x_4 = \alpha$, где α - произвольное действительное число. Из 3-го уравнения находим $30x_3 - 35\alpha = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = \dfrac{7}{6}\alpha$.

Для облегчения последующих вычислений положим $\alpha = 6\alpha_1$, где α_1, как и α, принимает произвольные действительные значения. Тогда $x_4 = 6\alpha_1,\ x_3 = 7\alpha_1$.

Из 2-го уравнения находим $-x_2 - 13\cdot 7\alpha_1 + 16\cdot 6\alpha_1 = -1 \;\Rightarrow\; x_2 = 1 + 5\alpha_1$.

Наконец, из 1-го уравнения находим $x_1 + 4\cdot 7\alpha_1 - 5\cdot 6\alpha_1 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 + 2\alpha_1$.

Таким образом, получен следующий результат: система (3) совместна, и ее общее решение представимо в виде

$$x_1 = 1 + 2\alpha_1, \quad x_2 = 1 + 5\alpha_1, \quad x_3 = 7\alpha_1, \quad x_4 = 6\alpha_1, \quad \text{где } \alpha_1 \in R. \qquad (3)_5$$

Проведем проверку. Для этого подставим найденные выражения $(3)_5$ неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4 во все уравнения исходной системы (3).

$$\begin{cases} 2(1+2\alpha_1) - 3(1+5\alpha_1) - 7\alpha_1 + 3\cdot 6\alpha_1 = -1 \;\Rightarrow\; (4 - 15 - 7 + 18)\alpha_1 + (2-3) = -1 \;\Rightarrow\; -1 = -1 \\ (1+2\alpha_1) + \quad 4\cdot 7\alpha_1 - 5\cdot 6\alpha_1 = 1 \;\Rightarrow\; (2 + 28 - 30)\alpha_1 + \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{5}\right) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 1 \\ -(1+2\alpha_1) - 2(1+5\alpha_1) + \quad 2\cdot 6\alpha_1 = -3 \;\Rightarrow\; (-2 - 10 + 12)\alpha_1 + (-1-2) = -3 \;\Rightarrow\; -3 = -3 \end{cases}.$$

Проверка подтвердила истинность решения $(3)_5$.

Обычно для сокращения записей метод Гаусса проводят на расширенных матрицах системы. Расширенной матрицей системы называют матрицу $(A \| B)$, где A - матрица системы, B - вектор столбец свободных членов. Для системы (1) расширенная матрица запишется так:

$$\left(A \| B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

1). Операция «перестановка уравнений системы» означает перестановку соответствующих строк расширенной матрицы.
2). Операция «перестановка поменять местами слагаемых с двумя выбранными неизвестными» означает перестановку соответствующих столбцов матрицы A.
3). Операция «умножение уравнения на число, отличное от нуля» означает умножение на это число соответствующей строки расширенной матрицы.
4). Операция «прибавление к уравнению системы другого уравнения, умноженного на число» означает аналогичную операцию над строками расширенной матрицы.

Изложение метода Гаусса в примере 2 с применением расширенных матриц запишется в виде.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)_{1.} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)_{2.} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 13 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right)_{3.} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right)_{4.} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 30 & -35 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{система } (3)_4 .$$

Внизу, справа под матрицами указаны выполняемые над системой элементарные операции, выполненные над системой:

1. Переставили местами 1-е и 2-е уравнения.
2. Прибавили ко 2-му уравнению 1-е, умноженное на число (-2).
   Прибавили к 3-му уравнению 1-е.
3. Прибавили ко 2-му уравнению 3-е, умноженное на число (-1).
4. Прибавили к 3-му уравнению 2-е, умноженное на число (-2).

Далее находится общее решение системы (см пункт 5. решения примера 2).

Пример 3. Найти методом Гаусса общее решение системы

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = -1 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases} \qquad (4)$$

Решение проведем с использованием расширенных матриц.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)_{1.} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & -5 & -1 \end{array}\right)_{2.} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)_{3.} \sim$$

1. Переставили местами 1-ю и 3-ю строки.
2. Прибавили ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на число 2.
   Прибавили к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на число (-3).
   Прибавили к 4-й строке 1-ю строку, умноженную на число (-2).
   Прибавили к 5-й строке 1-ю строку, умноженную на число (-1).

3. Прибавили 2-ю строку к 3-й строке.
   Прибавили 2-ю строку к 4-й строке.

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)_{4.} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{5.} .\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 5 & -7 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

4. Прибавили к 5-й строке 4-ю строку, умноженную на число (-1).
5. Отбросили 3-ю и 5-ю нулевые строки (они эквивалентны равенству $0=0$).
   Переставили местами 3-й и 4-й столбцы и над столбцами написали соответствующие неизвестные.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_4-2x_3-3x_5=-2 \\ \quad 5x_2+5x_4-7x_3-5x_5=-5 \\ \qquad 2x_4 - 2x_5=1 \end{cases} \text{ - система треугольного вида.} \qquad (4)_1$$

x_3, x_5 – свободные неизвестные, x_1, x_2, x_4 – базисные неизвестные.

Положим $x_3=5\alpha_1$, $x_5=\alpha_2$, где $\alpha_1,\alpha_2\in R$. Из 3-го, 2-го, 1-го уравнений системы $(4)_1$ последовательно находим неизвестные x_1, x_2, x_4.

$x_4=0.5+\alpha_2$, $x_2=-1.5+7\alpha_1$, $x_1=-0.5-4\alpha_1$.

Ответ. Система (4) совместна, и ее общее решение представимо в виде
$x_1=-0.5-4\alpha_1$, $x_2=-1.5+7\alpha_1$, $x_3=5\alpha_1$, $x_4=0.5+\alpha_2$, $x_5=\alpha_2$, где $\alpha_1,\alpha_2\in R$.

Пример 4. Найти методом Гаусса общее решение системы $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-x_4=-1 \\ -2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=-3 \\ 5x_1-4x_2-3x_3+2x_4=3 \end{cases}$.

Решение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{1.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 2 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{2.}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & -11 & -11 \\ 0 & -14 & -8 & 22 & 23 \end{array}\right) \underset{3.}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3-4x_4=-4 \\ \quad 7x_2+4x_3-11x_4=-11. \\ \qquad 0=1 \end{cases}$$

1. Прибавили 2-ю строку к 1-й строке.
2. Прибавили ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на 2.
   Прибавили к 3-й строке 1-ю строку, умноженную на (-5).
3. Прибавили к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на 2.

Наличие в полученной системе невыполнимого равенства $0=1$ означает **несовместность заданной системы** уравнений.

Домашнее задание.
Решить методом Гаусса следующие системы (или доказать несовместность):

1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$.

Занятие 6. Векторы в R^2, R^3. Скалярное произведение векторов.

6.1. Вектор как направленный отрезок. Проекции вектора, длина вектора, направляющие косинусы.

Напомним основные определения. **Вектором называется направленный отрезок**. Согласно этому определению начальная точка вектора не имеет особой важности, главное – направление вектора и его длина. Фактически, под вектором $\bar{a}$ понимается множество векторов, выпущенных из всех точек плоскости (пространства) и имеющих одно и то же направление и одну и ту же длину. Обозначим R^3 пространство с декартовой системой координат $Oxyz$, (R^2 - плоскость с декартовой системой координат Oxy). Пусть $\bar{a}$ - вектор в пространстве R^3.

Координатами вектора $\bar{a}$ называются его проекции a_x, a_y, a_z на оси Ox, Oy, Oz соответственно. (Координатами вектора $\bar{a}$ на плоскости R^2 являются его проекции a_x, a_y на оси Ox, Oy). Если $\bar{a} = \overline{AB}$ - вектор в пространстве R^3 с началом в точке $A(x_A, y_A, z_A)$ и концом в точке $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \quad a_z = z_B - z_A. \tag{1}$$

Координаты вектора однозначно определяют направление и длину вектора $\bar{a}$, т.е. сам вектор $\bar{a}$. Этот факт фиксирует запись $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Чтобы увидеть направление вектора $\bar{a}$, надо на осях Ox, Oy, Oz отметить точки $M_1(a_x, 0, 0)$, $M_2(0, a_y, 0)$, $M_3(0, 0, a_z)$ и по трем взаимно перпендикулярным отрезкам OM_1, OM_2, OM_3 построить прямоугольный параллелепипед. Диагональ $\overline{OM}$ этого параллелепипеда (рис. 1) с началом в точке $O(0,0,0)$ и концом в точке $M(a_x, a_y, a_z)$ как раз и есть искомый вектор $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. **Длина** $|\bar{a}|$ **вектора** $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ находится по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2}$$

Направление вектора однозначно определяют **направляющие косинусы** $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ **вектора** $\bar{a}$. Углы α, β, γ - углы между вектором $\bar{a}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно.

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \tag{3}$$

Единичными векторами или **ортами** называются векторы, имеющие длину, равную 1.

$\bar{i} = \{1, 0\}$ - единичный вектор (орт) оси Ox на плоскости R^2.

$\bar{j} = \{0, 1\}$ - единичный вектор (орт) оси Oy на плоскости R^2.

$\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ - орты осей Ox, Oy, Oz в пространстве R^3.

Вектор $\overline{AA} = \bar{0}$, начало которого совпадает с концом, называется **нулевым вектором**. Этот вектор имеет нулевую длину и не имеет определенного направления. Все координаты нулевого вектора равны нулю: $\bar{0} = \{0;\ 0\}$ - нулевой вектор на плоскости R^2; $\bar{0} = \{0;\ 0;\ 0\}$ - нулевой вектор в пространстве R^3.

Пример 1. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{PQ}$, определенного точками $P(-1, -2, 3)$, $Q(-3, 2, -4)$.

Решение. $\overline{PQ} = \{X, Y, Z\}$. По формулам (1), (2), (3) последовательно находим:

$X = -3 - (-1) = -2, \quad Y = -2 - 2 = -4, \quad Z = -4 - 3 = -7 \qquad \Rightarrow \overline{PQ} = \{-2, -4, -7\}$,

$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{69}, \qquad \cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{69}}, \quad \cos\beta = \dfrac{-4}{\sqrt{69}}, \quad \cos\gamma = \dfrac{-7}{\sqrt{69}}.$

Если вектор $\overline{a}$ лежит в плоскости R^2 и $\overline{a} = \overline{AB}$ - вектор с началом в точке $A(x_A, y_A)$ и концом в точке $B(x_B, y_B)$, то $\overline{a} = \{a_x, a_y\}$,

$a_x = x_B - x_A, \quad a_y = y_B - y_A, \qquad |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \qquad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\overline{a}|}, \ \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\overline{a}|}.$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ (α, β - углы между вектором $\overline{a}$ и положительными направлениями осей Ox, Oy соответственно). Все эти формулы вытекают из формул (1), (2), (3), если считать, что плоскость R^2 лежит в пространстве R^3. В этом случае точки A, B считаются точками R^3, т.е. $A(x_A, y_A) \to A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B) \to B(x_B, y_B, 0)$, $z_A = 0, \ z_B = 0 \Rightarrow a_z = 0 \Rightarrow \overline{a} = \{a_x, a_y\} \to \overline{a} = \{a_x, a_y, 0\}$. Такой переход означает перевод вектора из плоскости R^2 в пространство R^3.

Пример 2. Найти координаты, длину и направляющие косинусы вектора $\overline{MN} \in R^2$, определенного точками $M(1, -4)$, $N(-3, 5)$.

Решение. $\overline{MN} = \{X, Y\}, \qquad X = -3 - 1 = -4, \quad Y = 5 - (-4) = 9 \quad \Rightarrow \quad \overline{MN} = \{-4, 9\}$,

$\left|\overline{MN}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97}, \qquad \cos\alpha = \dfrac{-4}{\sqrt{97}}, \quad \cos\beta = \dfrac{9}{\sqrt{69}}.$

Отметим еще, что при сравнении двух векторов между ними могут стоять знаки $=, \neq$ и не могут стоять знаки $>, <$.

1) $\overline{a} = \overline{b}$ тогда и только тогда, когда $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют одинаковое направление и $|\overline{a}| = |\overline{b}|$, в противном случае, $\overline{a} \neq \overline{b}$.

2) Запись типа $\overline{a} > \overline{b}$ **не имеет смысла.**

6.2. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Условие коллинеарности двух векторов.

Сложение векторов $\overline{a}, \overline{b}$ производится **по правилу параллелограмма** или **по правилу треугольника**. Результатом сложения векторов является вектор: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$. Эта операция обладает следующими свойствами: 1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ - свойство коммутативности;
2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ - свойство ассоциативности.

Если векторы заданы своими координатами: $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\} \in R^3$, то $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, где $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$. При решении задач обычно пишут так: $\quad \overline{a} + \overline{b} = \{a_x, a_y, a_z\} + \{b_x, b_y, b_z\} = \{a_x + b_x, \ a_y + b_y, \ a_z + b_z\}$.

Умножение числа k на вектор $\overline{a}$ дает вектор $\overline{p}$, т.е. $k\overline{a} = \overline{p}$.
При этом: если $k > 0$, то $\overline{p}$ имеет то же направление, что и $\overline{a}$; если же $k < 0$, то $\overline{p}$ имеет противоположное направление вектору $\overline{a}$. Длина вектора $\overline{p}$, в том и другом случае одна и та же, и вычисляется по формуле $|\overline{p}| = |k| \cdot |\overline{a}|$.

Если вектор $\bar{a}$ задан своими координатами $\{a_x, a_y, a_z\}$, то $k\bar{a} = k\{a_x, a_y, a_z\} = \{ka_x, ka_y, ka_z\}$.
Умножение числа на вектор совместно с операцией сложения векторов обладает свойствами:
1) $k(m\bar{a}) = (km)\bar{a}$; 2) $(k+m)\bar{a} = k\bar{a} + m\bar{a}$; 3) $k(\bar{a}+\bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$, где $k, m \in R$.

Вычитание векторов по определению выполняется по правилу: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-1)\cdot\bar{b}$.

Пример 4.
Найти длину и указать направление вектора $\bar{p} = -\bar{a} - 2\bar{b}$, если $\bar{a} = \{2,-1\}, \bar{b} = \{-1, 3\}$.
Решение. $\bar{p} = -\bar{a} - 2\bar{b} = (-1)\cdot\{2,-1\} + (-2)\cdot\{-1, 3\} = \{-2, 1\} + \{2,-6\} = \{0,-5\}$.
$|\bar{p}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$. $\bar{p} = \{0,-5\} = -5\bar{j}$, где $\bar{j}$ – единичный вектор (орт) оси Oy.
Следовательно, вектор $\bar{p}$ направлен в противоположную сторону направлению оси Oy. К тому же результату приводят направляющие косинусы вектора $\bar{p}$:
$cos\,\alpha = \dfrac{0}{5} = 0,\ cos\,\beta = \dfrac{-5}{5} = -1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2},\ \beta = \pi$ - углы между вектором $\bar{p}$ и осями Ox, Oy.

Пример 5.
Найти длину и направляющие косинусы вектора $\bar{q} = 3\bar{a} - 2\bar{b}$, если $\bar{a} = \{2,1,-1\}, \bar{b} = \{-1,-1,3\}$.
Решение. $\bar{q} = 3\bar{a} - 2\bar{b} = 3\cdot\{2, 1,-1\} + (-2)\cdot\{-1,-1, 3\} = \{6, 3,-3\} + \{2, 2,-6\} = \{8, 5,-9\}$.

$$|\bar{q}| = \sqrt{8^2 + 5^2 + (-9)^2} = \sqrt{170}. \quad cos\,\alpha = \frac{8}{\sqrt{170}}, \quad cos\,\beta = \frac{5}{\sqrt{170}}, \quad cos\,\gamma = \frac{-9}{\sqrt{170}}.$$

Условие коллинеарности (параллельности) двух векторов:
$\bar{a}, \bar{b}$ - *коллинеарны тогда и тогда, когда существует число* k *такое, что* $\bar{b} = k\cdot\bar{a}$.
На языке кванторов условие параллельности векторов запишется так: $\bar{a}\,||\,\bar{b} \Leftrightarrow \exists k \in R:\ \bar{b} = k\cdot\bar{a}$.
Если векторы $\bar{a}, \bar{b} \in R^3$ заданы своими координатами $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то **условие коллинеарности этих векторов означает пропорциональность координат**: $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$ или

на языке кванторов: $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}\,||\,\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\} \Leftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Пример 6. Найти орт вектора $\bar{q} = \{-1,-2, 2\}$.
Решение. Ортом вектора $\bar{q}$ является вектор $\bar{e}$ того же направления, что и $\bar{q}$, и имеющий длину, равную 1. В силу определения операции умножения вектора на число искомым вектором будет $\bar{e} = \dfrac{1}{|\bar{q}|}\bar{q} = \dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2}}\cdot\{-1,-2,\ 2\} = \dfrac{1}{3}\cdot\{-1,-2,\ 2\} = \left\{-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.
Другое решение этой задачи вытекает из условия параллельности векторов $\bar{q}, \bar{e}$. В силу сонаправленности векторов $\bar{q}, \bar{e}$: $\exists k > 0: \bar{q} = k\cdot\bar{e}$. Т.к. $|\bar{q}| = |k\cdot\bar{e}| = k\cdot|\bar{e}| = k\cdot 1 = k$, заключаем, что $\bar{q} = |\bar{q}|\cdot\bar{e}$. Отсюда выводим: $\bar{e} = \dfrac{1}{|\bar{q}|}\bar{q} = \left\{-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

Пример 7. Выяснить, лежат ли три точки $A(-1, 2, 3)$, $B(4,-2, 4)$, $C(-2,-2, 1)$ на одной прямой?

Решение. Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ коллинеарны. $\overline{AB}=\{\,5,-4,\ 1\}$, $\overline{AC}=\{-1,-4,-2\}$. $\dfrac{5}{-1}\neq\dfrac{-4}{-4}\neq\dfrac{1}{-2}\ \Rightarrow\ \overline{AB}$, $\overline{AC}$ неколлинеарны $\Rightarrow$ A, B, C не лежат на одной прямой.

Пример 8. При каких значениях параметров α,β точки $A(\,2,-3,\ \alpha),B(\,\beta,\ 1,\ 4),C(-2,-1,-2)$ лежат на одной прямой?

Решение. Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ коллинеарны. $\overline{AB}=\{\,\beta-2,\ 4,\ 4-\alpha\,\}$, $\overline{AC}=\{-4,\ 2,-2-\alpha\}$. $\overline{AB}\ ||\ \overline{AC}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{\beta-2}{-4}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{4-\alpha}{-2-\alpha}\ \Rightarrow\ \dfrac{\beta-2}{-4}=2,\ \ \dfrac{4-\alpha}{-2-\alpha}=2\ \Rightarrow\ \beta=-6,\ 4-\alpha=-4-2\alpha\ \Rightarrow\ \alpha=-8,\ \beta=-6$.

6.3. Скалярное произведение векторов, его свойства, координатное выражение. Условие ортогональности двух векторов.

Определение. **Скалярным произведением векторов $\bar a,\bar b$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла φ между ними.** Скалярное произведение векторов $\bar a,\bar b$ обозначается $\bar a\cdot\bar b$ или $(\bar a,\bar b)$. Далее используется первое обозначение: $\bar a\cdot\bar b=|\,\bar a\,\|\,\bar b\,|\cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения. $\forall\,\bar a,\bar b,\bar c$ и $\forall\,k\in R$ выполнены равенства:

1°. $\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$; 2°. $(\bar a+\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot\bar c+\bar b\cdot\bar c$; 3°. $(k\bar a)\cdot\bar b=k(\bar a\cdot\bar b)$.

С помощью скалярного произведения можно найти длину вектора:

$\bar a\cdot\bar a=|\bar a||\bar a|\cos 0=|\bar a|^2\ \Rightarrow\ |\bar a|=\sqrt{\bar a\cdot\bar a}$.

Координатное выражение скалярного произведения:

1) если $\bar a=\{a_x,a_y\}$, $\bar b=\{b_x,b_y\}\in R^2$, то $\bar a\cdot\bar b=a_xb_x+a_yb_y$

2) если $\bar a=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\bar b=\{b_x,b_y,b_z\}\in R^3$, $\bar a\cdot\bar b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

Условие ортогональности (перпендикулярности) векторов $\bar a,\bar b$ на языке кванторов имеет вид $\vec a\perp\vec b\Leftrightarrow\vec a\cdot\vec b=0$, что означает: **вектор $\bar a$ перпендикулярен вектору $\bar b$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение этих векторов равно нулю.**

Пример 9. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar a=\{-3,-2\}$, $\bar b=\{-2,\ 4\,\}\in R^2$.

Решение. Согласно координатному выражению $\bar a\cdot\bar b$ в случае $\bar a,\bar b\in R^2$ имеем:

$\bar a\cdot\bar b=a_xb_x+a_yb_y=(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot 4=-2$.

Пример 10. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar a=\{\,3,-1,\ 2\}$, $\bar b=\{-1,-2,\ 4\}\in R^3$.

Решение. Согласно координатному выражению $\bar a\cdot\bar b$ в случае $\bar a,\bar b\in R^3$ имеем:

$\bar a\cdot\bar b=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 4=7$.

Пример 11. Найти угол φ между векторами $\bar a=\{-3,-2\}$, $\bar b=\{-2,\ 4\,\}\in R^2$.

Решение. $\bar a\cdot\bar b=|\,\bar a\,\|\,\bar b\,|\cos\varphi\ \Rightarrow\ \cos\varphi=\dfrac{\bar a\cdot\bar b}{|\bar a||\bar b|}$.

$\bar a\cdot b=(-3)\cdot(-2)+(-2)\cdot 4=-2,\ \ |\bar a|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13},\ \ |\bar b|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt5\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \cos\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt5}=-\dfrac{1}{\sqrt{65}}\ \Rightarrow\ \varphi=\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{65}}\right)$.

Пример 12. Найти угол φ между векторами $\bar{a}=\{-3,-1,\ 2\},\ \bar{b}=\{-1,-5,\ \ 1\}\in R^3$.

Решение. $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\,\bar{a}\,\|\,\bar{b}\,|\cos\varphi\ \Rightarrow\ \cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, $\qquad \bar{a}\cdot\bar{b}=(-3)(-1)+(-1)(-5)+2\cdot 1=10$,

$|\bar{a}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{14},\ |\bar{b}|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}\ \Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{10}{\sqrt{14}\cdot 3\sqrt{3}}=\dfrac{10}{3\sqrt{42}}$

$\Rightarrow\ \varphi=\arccos\left(\dfrac{10}{3\sqrt{42}}\right)$.

Пример 13. Даны векторы $\bar{a}=\{-3,-1,\ 2\},\ \bar{b}=\{-1,-5,\ \ 1\}$. При каких значениях параметра k вектор $\bar{p}=\bar{a}-k\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{q}=\bar{a}+k\bar{b}$?

Решение. Используем условие ортогональности векторов. $\ \bar{p}\perp\bar{q}\Leftrightarrow\bar{p}\cdot\bar{q}=0$,

$\bar{p}\cdot\bar{q}=(\bar{a}-k\bar{b})\cdot(\bar{a}+k\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot(k\bar{b})-(k\bar{b})\cdot\bar{a}-(k\bar{b})\cdot(k\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{a}+k(\bar{a}\cdot\bar{b})-k(\bar{b}\cdot\bar{a})-k^2(\bar{b}\cdot\bar{b})=$

$=\bar{a}\cdot\bar{a}+k(\bar{a}\cdot\bar{b})-k(\bar{a}\cdot\bar{b})-k^2(\bar{b}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|^2-k^2|\bar{b}|^2=0\ \Rightarrow\ k^2=\dfrac{|\bar{a}|^2}{|\bar{b}|^2}=\dfrac{(-3)^2+(-1)^2+2^2}{(-1)^2+(-5)^2+1^2}=\dfrac{14}{27}$

$\Rightarrow\ k=\pm\sqrt{\dfrac{14}{27}}$.

Пример 14. Даны векторы $\bar{a}=\{-3,\ t,\ 2\},\ \bar{b}=\{-1,-5,\ \ 1\}$. При каком значении параметра t векторы $\bar{a},\bar{b}$ перпендикулярны друг другу?

Решение. Используем условие ортогональности векторов. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

$\bar{a}\cdot\bar{b}=(-3)\cdot(-1)+t(-5)+2\cdot 1=5-5t=0\qquad\Rightarrow\ t=1$.

Пример 15. Точки $A(-1,\ 2,\ 3),\ B(\ 4,-2,\ 4),\ C(-2,-2,\ z_C),\ D(x_D,y_D,z_D)$ являются последовательными вершинами прямоугольника $ABCD$. Найти значения координат z_C,x_D,y_D,z_D.

Решение. Значение z_C найдем из условия перпендикулярности векторов $\overline{BA},\ \overline{BC}$.

$\overline{BA}=\{-5,\ 4,-1\},\ \overline{BC}=\{-6,\ 0,z_C-4\}.\quad \overline{BA}\perp\overline{BC}\ \Leftrightarrow\ \overline{BA}\cdot\overline{BC}=0$.

$\overline{BA}\cdot\overline{BC}=(-5)(-6)+4\cdot 0+(-1)(z_C-4)=34-z_C=0\ \Rightarrow\ z_C=34\ \Rightarrow\ C(-2,-2,\ 34)$.

Координаты x_D,y_D,z_D найдем из условия равенства векторов $\overline{AB},\ \overline{DC}$.

$\overline{AB}=\overline{DC}\ \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ совпадают.

Занятие 7. **Векторное и смешанное произведение векторов.**

7.1. Деление отрезка в данном отношении.

Если точки $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2)$ - заданные концевые точки отрезка M_1M_2, разделенного точкой $M(x,y,z)$ в заданном отношении $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$, то координаты точки M

находятся по формулам: $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$. (1)

В случае, когда точка M является серединой отрезка M_1M_2, $\lambda=1$ и координаты точки M найдутся по формулам: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$. (2)

Пример 1. Точки K, L лежат на отрезке M_1M_2 в последовательности M_1, K, L, M_2 и делят этот отрезок на три равные части. Найти координаты точек K, L, если $M_1(-1,\ 0)$, $M_2(3,-2)$.
Решение. Пусть $K(x_K, y_K)$, $L(x_L, y_L)$.

1). Точка K делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\dfrac{M_1K}{KM_2}=0.5$. Согласно формулам (1), в которых следует отбросить последнюю формулу, находим

$$x_K=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-1+0.5\cdot 3}{1.5}=\frac{1}{3},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{0+0.5\cdot(-2)}{1.5}=-\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad K\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

2). Точка L делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda=\dfrac{M_1L}{LM_2}=2$, поэтому формулы (1) дают

$$x_L=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{-1+2\cdot 3}{3}=\frac{5}{3},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{0+2\cdot(-2)}{3}=-\frac{4}{3}\quad\Rightarrow\quad L\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right).$$

Пример 2. Точки $A(-2,-1,\ 4)$, $B(3,\ 3,\ 0)$, $C(2,-2,-3)$ являются вершинами треугольника ABC. Найти длину l_m медианы и длину l_b биссектрисы этого треугольника, проведенных из вершины B.
Решение. Пусть точка $P(x_P, y_P, z_P)$ - основание медианы BP и точка $H(x_H, y_H, z_H)$ - основание биссектрисы BH.
1). Точка P - середина отрезка AC. Следовательно, ее координаты можно найти по формулам (2).

$$x_P=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-2+2}{2}=0,\quad y_P=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2},\quad z_P=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$l_m=\left|\overline{AP}\right|,\quad \overline{AP}=\left\{0-(-2),\ -\frac{3}{2}-(-1),\ \frac{1}{2}-4\right\}=\left\{2,-\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right\},$$

$$\left|\overline{AP}\right|=\sqrt{2^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\quad\Rightarrow\quad l_m=\frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

2). Точка H делит сторону AC в отношении $\lambda=\dfrac{AH}{HB}$, в котором находится отношение длин сторон BA, BC, т.е. $\lambda=\dfrac{BA}{BC}$.

$$BA=\left|\overline{BA}\right|,\quad \overline{BA}=\{-5,-4,\ 4\},\quad \left|\overline{BA}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+4^2}=\sqrt{57}\quad\Rightarrow\quad BA=\sqrt{57}.$$

$$BC=\left|\overline{BC}\right|,\quad \overline{BC}=\{-1,-5,-3\},\quad \left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{35}\quad\Rightarrow\quad BC=\sqrt{35}.$$

Следовательно, $\lambda=\dfrac{BA}{BC}=\sqrt{\dfrac{57}{35}}$. Теперь, зная λ, по формулам (1) находим точку H.

$$x_H=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{-2+2\sqrt{57/35}}{1+\sqrt{57/35}}=\frac{2\sqrt{57}-2\sqrt{35}}{\sqrt{35}+\sqrt{75}},$$

$$y_H=\frac{y_A+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{-1-2\sqrt{57/35}}{1+\sqrt{57/35}}=\frac{-\sqrt{35}-2\sqrt{57}}{\sqrt{35}+\sqrt{57}},$$

$$z_H = \frac{z_A + \lambda z_C}{1+\lambda} = \frac{4 - 3\sqrt{57/35}}{1+\sqrt{57/35}} = \frac{4\sqrt{35} - 3\sqrt{57}}{\sqrt{35}+\sqrt{57}}.$$

$$\Rightarrow \quad H\left(\frac{2\sqrt{57}-2\sqrt{35}}{\sqrt{35}+\sqrt{57}}, \frac{-\sqrt{35}-2\sqrt{57}}{\sqrt{35}+\sqrt{57}}, \frac{4\sqrt{35}-3\sqrt{57}}{\sqrt{35}+\sqrt{57}}\right).$$

7.2. Компланарные, некомпланарные тройки векторов. Ориентация тройки векторов.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n \in R^3$ называется компланарной, если все векторы этой системы параллельны одной плоскости, в противном случае система векторов называется некомпланарной. Система из одного вектора $\bar{a}$ всегда компланарна. Система из двух векторов $\bar{a}, \bar{b}$ всегда компланарна. Система из трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ может быть как компланарной, так и некомпланарной. **Некомланарные тройки векторов имеют ориентацию**: **тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется правой тройкой, если с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ происходит против часовой стрелки**, и тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется левой, если с конца вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ происходит по часовой стрелке. Если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - некомпланарна, то перестановка в ней местами любых двух векторов меняет ориентацию этой тройки. Например, если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - левая, то тройки $\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$ и $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$ будут правыми.

Пример 3.

1. Тройка векторов $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{p} = \{1, -1, 0\}$ - компланарна, т.к. все векторы лежат в плоскости Oxy .
2. Тройка векторов $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ - некомпланарна, т.к. нет ни одной плоскости, которой бы были параллельны все три вектора одновременно.

Пример 4.

1. Тройка векторов $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$ - правая тройка, т.к. с конца вектора $\bar{k}$ кратчайший поворот вектора $\bar{i}$ к вектору $\bar{j}$ происходит против часовой стрелки.
2. Тройка векторов $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$, $\bar{j} = \{0, 1, 0\}$, $\bar{i} = \{1, 0, 0\}$ - левая тройка, т.к. с конца вектора $\bar{i}$ кратчайший поворот вектора $\bar{k}$ к вектору $\bar{j}$ происходит по часовой стрелке.

7.3. Векторное произведение: определение; свойства; координатное выражение.

Определение. **Векторным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который удовлетворяет следующим требованиям:**

1. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **- правая тройка**;

3. $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$**, где** φ **- угол между** $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Требования **1**, **2** однозначно определяют направление вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ по отношению к векторам $\bar{a}, \bar{b}$, а требование **3** определяет длину вектора $\bar{c}$, оно содержит следующий **геометрический смысл векторного произведения**: *длина вектора $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ равна площади параллелограмма, построенного а векторах $\bar{a}, \bar{b}$.*

Свойства векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ таковы: $\forall\ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\forall\, k \in R$ выполнены

1°. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$ - свойство антикоммутативности;

2°. $(k\bar{a})\times\bar{b}=k(\bar{a}\times\bar{b})$;

3°. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$.

Если $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, то координаты вектора $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\{c_x,c_y,c_z\}$ вычисляются по формуле:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Отсюда, $c_x=a_yb_z-a_zb_y$, $c_y=-(a_xb_z-a_zb_x)$, $c_z=a_xb_y-a_yb_x$.

Формула (3) называется координатным выражением векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$.

Замечание. Если требуется найти векторное произведение $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ векторов $\bar{a}=\{a_x,a_y\}$, $\bar{b}=\{b_x,b_y\}\in R^2$, то сначала векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ переносят в пространство R^3:

$\bar{a}=\{a_x,a_y\}$, $\bar{b}=\{b_x,b_y\}$ $\to\bar{a}=\{a_x,a_y,0\}$, $\bar{b}=\{b_x,b_y,0\}$, а затем используют формулу (3), которая в данном случае дает:

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & 0\\ b_x & b_y & 0\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & 0\\ b_y & 0\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & 0\\ b_x & 0\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=0\cdot\bar{i}+0\cdot\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x),$$

$\Rightarrow$ $c_x=0$, $c_y=0$, $c_z=a_xb_y-a_yb_x$.

Пример 5. Найти $\bar{a}\times\bar{b}$, если $\bar{a}=\{3,-1,2\}$, $\bar{b}=\{-1,-2,4\}$.

Решение. $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$. Координаты вектора $\bar{c}$ найдем с помощью формулы (3).

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=0\bar{i}-14\bar{j}-7\bar{k}=\{0,-14,-7\}.$$

Пример 6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}=\{-2,-1,2\}$, $\bar{b}=\{-1,-2,3\}$.

Решение. Сначала найдем векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$.

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}=\{1,1,1\}.$$

Теперь воспользуемся геометрическим смыслом векторного произведения, по которому длина вектора $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ равна искомой площади S параллелограмма на векторах $\bar{a},\bar{b}$, т.е.

$$S=|\bar{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}.$$

Пример 7. Найти площадь треугольника ABC на плоскости Oxy с вершинами в точках $A(-1,1)$, $B(3,-2)$, $C(2,-4)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\bar{p} = \overline{AB} = \{4, -3\}$, $\bar{q} = \overline{AC} = \{3, -5\}$. Найдем их векторное произведение $\bar{r} = \bar{p} \times \bar{q} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11\bar{k} = \{0,\ 0, -11\}$.

Площадь S_Δ треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p}, \bar{q}$. Следовательно, $S_\Delta = \frac{1}{2}|\,\bar{r}\,| = \frac{11}{2} = 5.5$.

Пример 8. Найти координаты орта $\bar{e}$, перпендикулярного одновременно векторам $\bar{a} = \{-2, -1, 1\}$, $\bar{b} = \{-1,\ 2, -3\}$ и такого, чтобы тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{e}$ была правой.

Решение. Сначала с помощью формулы (3) найдем вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} - 7\bar{j} - 5\bar{k} = \{1, -7,\ -5\}.$$

Согласно определению вектор $\bar{c}$ перпендикулярен одновременно векторам $\bar{a}, \bar{b}$ и тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая. Проверим перпендикулярность пар векторов: $\bar{c}, \bar{a}$ и $\bar{c}, \bar{b}$, используя условие ортогональности векторов (см. Занятие 6.)

1) $\bar{c} \perp \bar{a} \;\Leftrightarrow\; \bar{c} \cdot \bar{a} = 0$. $\qquad \bar{c} \cdot \bar{a} = 1 \cdot (-2) + (-7)(-1) + (-5) \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; \bar{c} \perp \bar{a}$.

2) $\bar{c} \perp \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{c} \cdot \bar{b} = 0$. $\qquad \bar{c} \cdot \bar{b} = 1 \cdot (-1) + (-7) \cdot 2 + (-5)(-3) = 0 \;\Rightarrow\; \bar{c} \perp \bar{b}$.

Искомый орт $\bar{e}$ получается нормировкой вектора $\bar{c}$. $\qquad \bar{e} = \frac{1}{|\,\bar{c}\,|}\bar{c}$.

$$|\,\bar{c}\,| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{e} = \frac{1}{5\sqrt{3}}\{1, -7, -5\} = \left\{\frac{1}{5\sqrt{3}}, -\frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{5}{5\sqrt{3}}\right\}.$$

Пример 9. Сформулировать условие коллинеарности векторов с помощью векторного произведения.

Решение.

1). Если $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, то угол φ между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 0 или π. Рассмотрим $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$. Согласно требованию **3** и указанным значениям угла φ из определения векторного произведения выводим: $|\,\bar{c}\,| = |\,\bar{a}\,||\,\bar{b}\,|\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \bar{c} = \bar{0} \;\Rightarrow\; \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

2). Рассмотрим теперь векторное равенство $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. В силу определения векторного произведения (достаточно использовать требование **3**) из этого векторного равенства получаем следующие три возможности: а) $\bar{a} = \bar{0}$; б) $\bar{b} = \bar{0}$; в) $\sin\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Т.к. нулевой вектор параллелен любому вектору, то все три случая а), б), в) приводят к выводу: $\bar{a} \,||\, \bar{b}$.

Таким образом, условие коллинеарности можно записать в виде: $\bar{a} \,||\, \bar{b} \;\Leftrightarrow\; \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Отсюда, как следствие получаем: $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0},\ \forall \bar{a}$.

7.4. Смешанное произведение: определение; свойства; координатное выражение. Условие компланарности тройки векторов.

Смешанное произведение определено на трех векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$. Обозначим его $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Определение. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$ **.** Таким образом, смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ представляет векторное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$, умноженное затем скалярно на вектор $\bar{c}$. *Результатом смешанного произведения векторов будет число*.

Свойства смешанного произведения.

1°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b}$.

2°. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$ **.**

Перестановки векторов: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \to \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \to \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$ называются *циклическими*.

Свойства 1°, 2° означают, что смешанное произведение векторов не меняется после циклической перестановки векторов и изменяет свое значение на противоположное при нециклических перестановках векторов.

Если векторы заданы координатами $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$, то смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ находится по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Эта формула дает координатное выражение смешанного произведения $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ имеет следующий геометрический смысл:

1. Если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая, то смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **;**
2. Если же тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - левая, то $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -V$, где V - объем параллелепипеда на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **.**

Указанный геометрический смысл смешанного произведения векторов приводит к следующей формулировке **условия компланарности системы из трех векторов** $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ **:**

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} - \textit{компланарны} \iff \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 . \qquad (5)$$

Пример 10. Вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, если $\bar{a} = \{3, -1, 2\}$, $\bar{b} = \{-1, -2, 4\}$, $c = \{-2, 4, -1\}$.

Решение. Согласно координатному выражению (4) находим

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 8 - 8 - (8 - 1 + 32) = -19 .$$

Заметим, что полученный результат позволяет также сказать, что

1) тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - левая (т.к. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$) и

2) объем параллелепипеда на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равен 19**.**

Пример 11. Найти объем пирамиды $ABCD$ с вершинами $A(-2, -1, 4)$, $B(3, 3, 0)$, $C(2, -2, -3)$, $D(4, -1, -3)$.

Решение. Рассмотрим векторы $\bar{p} = \overline{AD} = \{5, 4, -4\}$, $\bar{q} = \overline{AC} = \{4, -1, -7\}$, $\bar{r} = \overline{AD} = \{6, 0, -7\}$.

Найдем их смешанное произведение.

$$\bar{p}\bar{q}\bar{r} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -7 \\ 6 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 35 - 168 + 0 - (24 - 112 + 0) = -45 .$$

Следовательно, объем V параллелепипеда на векторах $\bar{p},\bar{q},\bar{r}$ равен 45. Объем V_* пирамиды $ABCD$ составляет одну шестую объема V. Таким образом, $V_* = \dfrac{45}{6} = 7.5$.

Пример 12. Выяснить, лежат ли точки $M_1(-2,-1,4), M_2(3,3,0), M_3(2,-2,-3), M_4(-3,\ 0,3)$ на одной плоскости.
Решение. Четыре произвольно выбранные точки в общем случае не лежат одной плоскости. Для того, чтобы заданные четыре точки оказались на одной плоскости нужно, чтобы тройка векторов $\bar{a} = \overline{M_1M_2} = \{5,\ 4,-4\},\ \bar{b} = \overline{M_1M_3} = \{4,-1,-7\},\ \bar{c} = \overline{M_1M_4} = \{-1,\ 1,-1\}$ была компланарной. Условие компланарности : $\vec{a},\vec{b},\vec{c} - компланарны \ \Leftrightarrow \ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 28 - 16 - (-4 - 16 - 35) = 72 \neq 0 \ \Rightarrow \ \bar{a},\bar{b},\bar{c} \text{ - не компланарны } \Rightarrow$$

заданные точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат на одной плоскости.

Домашнее задание.
1. Найти координаты вектора $\bar{p}$, удовлетворяющего следующим условиям:
а) $\bar{p} \perp \bar{a},\ \ \bar{p} \perp \bar{b}$; б) $|\bar{p}| = 2$; в) $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{p}$ - левая тройка, если $\bar{a} = \{2,\ 1,-2\},\ \bar{b} = \{1,-4,-1\}$.
2. Вычислить площадь треугольника ABC с вершинами $A(1,-1,\ 2),\ B(2,-2,\ 3),\ C(1,-4,-1)$.
3. Найти объем пирамиды $ABCD$ с вершинами $A(1,-1,\ 4),\ B(1,\ 3,\ 2),\ C(2,-1,-1),\ D(3,\ 2,\ 0)$.
4. При каком значении параметра α точки $A(2,\ 1,\ 1),\ B(1,-1,\ \alpha),\ C(-1,-1,\ 3),\ D(3,\ 2,\ 0)$ лежат в одной плоскости?

Занятие 8. **Прямая на плоскости.**

8.1. Понятие об уравнениях линии на плоскости.
8.2. Различные виды задания прямой на плоскости. Основные задачи по нахождению прямой на плоскости.
8.3. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

8.1. Понятие об уравнениях линии на плоскости.

Далее будем использовать следующие три способа задания линии на плоскости.
1. Уравнение $y = f(x)$ каждому допустимому значению независимой переменной x ставит соответствие определенное значение y, в результате на плоскости Oxy получается точка $(x, y = f(x))$. При непрерывном изменении x точки $(x, y = f(x))$ образуют линию на плоскости Oxy. Таким образом, уравнение $y = f(x)$ определяет линию на плоскости Oxy. Такое задание линии называется **явным** заданием.

Например,

1) $y = x^2$ - парабола на плоскости Oxy,

2) $y = \sin x$ - синусоида.

2. Линию на плоскости Oxy определяет также уравнение вида $F(x,y) = 0$. Только здесь по заданному значению x значение (или несколько значений) y определяется после решения уравнения $F(x,y) = 0$. Такое задание линии называется **неявным**.

Например,

1) $x^2+y^2-4=0$ - окружность радиуса 2 с центром в начале координат;

2) $\dfrac{(x-3)^2}{4^2}+\dfrac{(y+1)^2}{5^2}-1=0$ - эллипс с центром в точке $(3,-1)$ и полуосями 4, 5.

3. Линию на плоскости Oxy можно задать в **параметрическом виде**: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, где t - параметр, принимающий вещественные значения. Каждому значению параметра t отвечает точка $(x(t),y(t))$ на плоскости Oxy. При непрерывном изменении t эта точка описывает линию.

Например,

1) $\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}, t\in R$ - параметрически заданная прямая на плоскости Oxy. Эта же прямая имеет явное задание $y=2x$,

2) $\begin{cases} x=cost \\ y=sint \end{cases}, t\in[0;2\pi]$ - параметрически заданная окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Эту же окружность можно задать неявно: $x^2+y^2-1=0$ и явно: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

3) $\begin{cases} x=cost \\ y=sint \end{cases}, t\in[\pi;2\pi]$ - нижняя половина окружности $(y\le 0)$ радиуса 1 с центром в начале координат.

8.2. Различные виды задания прямой на плоскости. Основные задачи по нахождению прямой на плоскости.

1. Из школьной программы известно, что прямая на плоскости Oxy может быть задана уравнением $y=kx+b$. Это явное задание прямой называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом наклона** k. Здесь $k=tg\varphi$, где φ - угол между прямой и положительным направление оси Ox, $b=y(0)$ - отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy. Следует отметить, в таком виде нельзя записать уравнение прямой, перпендикулярной оси Ox.

2. Любую прямую на плоскости Oxy можно задать уравнением $Ax+By+C=0$. Это уравнение называется **общим уравнением прямой на плоскости**, это уравнение представляет неявное задание прямой. Это уравнение получается при решении следующей часто встречающейся задачи.

Задача 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{A,B\}$.

Решение. Обозначим искомую прямую через (α).

$M(x,y)\in(\alpha)\Leftrightarrow \overline{M_0M}\perp\overline{N}\Leftrightarrow \overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0 \Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\Rightarrow Ax+By+C=0$,

где $C=-Ax_0-By_0$. В приведенном решении существенную роль сыграло условие ортогональности векторов.

Важно. Для успешного усвоения темы данного занятия от студента требуется не только понять, но и научиться самостоятельно воспроизводить решение задачи 1 и приведенной ниже задачи 2.

Из решения задачи 1 видно, что из общего уравнения прямой сразу же можно получить информацию о направлении прямой, а именно прямая $Ax+By+C=0$ проходит перпендикулярно вектору $\overline{N}=\{A,B\}$. **Вектор** $\overline{N}$ **называют вектором нормали** (или **нормальным вектором**) к прямой. Чтобы изобразить прямую на плоскости остается найти какую-либо точку на этой прямой. Для этого, задаем какое-нибудь значение x и из уравнения $Ax+By+C=0$ находим y (или наоборот, задаем y и находим x).

Пример 1. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-2,-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{M_0K}$, где $K(-4, 2)$.

Решение. $\overline{M_0K}=\{-2, 3\}=\overline{N}$ - вектор нормали к искомой прямой, которую обозначим через (α). Остается повторить решение **задачи 1** с конкретными данными.

$M(x,y)\in(\alpha)\Leftrightarrow \overline{M_0M}\perp\overline{N}\Leftrightarrow \overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0\Rightarrow -2(x-(-2))+3(y-(-1))=0\Rightarrow -2x+3y-1=0$.

Пример 2. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку $P(6,-2)$ параллельно прямой $3x+4y-3=0$.

Решение. $3x+4y-3=0\Rightarrow \overline{N}=\{3, 4\}$ - вектор нормали к данной прямой. Этот же вектор перпендикулярен искомой прямой, которую обозначим через (α). Далее используем ту же цепочку рассуждений, что и в **задаче 1**:

$M(x,y)\in(\alpha)\Leftrightarrow \overline{PM}\perp\overline{N}\Leftrightarrow \overline{N}\cdot\overline{PM}=0\Rightarrow 3(x-6)+4(y-(-2))=0\Rightarrow 3x+4y-10=0$.

3. Более удобными (по сравнению с уравнением $y=kx+b$ и уравнением $Ax+By+C=0$) являются *каноническое* и *параметрические* уравнения прямой. Эти уравнения получаются из решения следующей задачи.

Задача 2. Найти прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,y_0)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{a,b\}$.

Решение. Обозначим искомую прямую через (α).

$M(x,y)\in(\alpha)\Leftrightarrow \overline{M_0M}\,||\,\bar{l}\Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{M_0M}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$. Полученное уравнение называется **каноническим уравнением прямой на плоскости**. При решении задачи главную роль сыграло условие коллинеарности двух векторов. Это условие использовалось в формулировке: два вектора параллельны тогда и только тогда, когда пропорциональны из координаты.

Если при решении этой же задачи использовать условие коллинеарности двух векторов в виде: $\bar{a}\,||\,\bar{b}\Leftrightarrow \exists t\in R:\quad \bar{a}=t\bar{b}$, то получим,

$M(x,y)\in(\alpha)\Leftrightarrow \overline{M_0M}\,||\,\bar{l}\Leftrightarrow \quad \exists t\in R:\quad \overline{M_0M}=t\cdot\bar{l}\quad\Rightarrow \{x-x_0, y-y_0\}=t\cdot\{a,b\}\Rightarrow$

$\begin{cases} x-x_0=at \\ y-y_0=bt \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$. Такая система равенств называется **параметрическими уравнениями прямой на плоскости**.

Вектор $\bar{l}=\{a,b\}$, параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Каноническое уравнение $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$ и параметрические уравнения $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ прямой имеют то преимущество над уравнением $y=kx+b$ и общим уравнением прямой $Ax+By+C=0$, что из канонического и параметрических уравнений прямой видна точка $M_0(x_0,y_0)$, лежащая на прямой, и направляющий вектор $\bar{l}=\{a,b\}$. Например,

1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{\sqrt{2}}$ - каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(1,-2)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{3, \sqrt{2}\}$,

2) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{0}$ - каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(2,4)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{-1,0\}$,

3) $\begin{cases} x=-4+3t \\ y=2-5t \end{cases}$ - параметрические уравнение прямой, проходящей через точку $(-4,2)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{3,-5\}$,

4) $\begin{cases} x=7 \\ y=1-3t \end{cases}$ - параметрические уравнение прямой, проходящей через точку $(7,1)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{0,-3\}$.

Из канонического или параметрических уравнения прямой на плоскости легко найти общее уравнение прямой и уравнение вида $y=kx+b$. Например,

1) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-2}$ - каноническое уравнение прямой $\Rightarrow$ $-2(x-1)=3(y+2)$, $2x+3y+4=0$ - общее уравнение прямой $\Rightarrow$ $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом наклона.

2) $\begin{cases} x=-4+2t \\ y=2+t \end{cases}$ - - параметрические уравнение прямой $\Rightarrow$ $\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y-2}{1}=t$ - каноническое уравнение прямой $\Rightarrow$ $1(x+4)=2(y-2)$, $x-2y+8=0$ - общее уравнение прямой $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $y=0.5x+4$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом наклона.

Все многочисленные задачи по нахождению уравнения прямой на плоскости могут быть сведены к решению **задачи 1** или **задачи 2**. Покажем это на следующих примерах.

Пример 3. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(-2,-2), M_2(3,-1)$.

Решение. $\bar{l}=\overline{M_1M_2}=\{3-(-2),-1-(-2)\}=\{5,1\}$ - направляющий вектор искомой прямой. Теперь решаемую задачу можно сформулировать в виде рассмотренной выше **задачи 2**: найти общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-2,-2)$ параллельно вектору $\bar{l}=\{5,1\}$. Обозначим искомую прямую через (α), тогда:
$M(x,y)\in(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{M_1M} \,||\, \bar{l}$ $\Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{M_1M}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y+2}{1}$ - каноническое уравнение прямой $\Rightarrow$ $x+2=5(y+2)$ $\Rightarrow$ $x-5y-8=0$ - общее уравнение искомой прямой.

Пример 4. Найти общие уравнения двух прямых, проходящих через точку $K(3,-2)$ параллельно и перпендикулярно прямой (α): $x-5y+7=0$.

Решение. Пусть (β)- прямая, проходящая через точку K параллельно прямой (α), и (γ) - прямая, проходящая через точку K перпендикулярно прямой (α). Из уравнения прямой (α) находим нормальный к этой прямой вектор $\overline{N}=\{1,-5\}$. Этот вектор является вектором нормали к прямой (β) и направляющим вектором для прямой (γ). Поэтому, нахождение прямой (β) повторяет решение **задачи 1**, а нахождение прямой (γ) повторяет решение **задачи 2**.

1) $M(x,y)\in(\beta)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{KM}\perp\overline{N}$ $\Leftrightarrow$ $\overline{N}\cdot\overline{KM}=0$ $\Rightarrow 1(x-3)-5(y+2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ первый ответ: $x-5y-13=0$ - общее уравнение прямой (β).

2) $M(x,y)\in(\gamma)$ $\Leftrightarrow$ $\overline{KM} \,||\, \overline{N}$ $\Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{KM}$, $\overline{N}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-5}$ - каноническое уравнение прямой $(\gamma)\ \Rightarrow\ -5(x-3)=y+2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ второй ответ: $5x+y-13=0$ - общее уравнение прямой (γ).

Пример 5. Пусть точки $P(-1,2), Q(2,1), R(5,-3)$ - вершины треугольника PQR. Найти канонические уравнения следующих четырех прямых: идущих по стороне QR, по высоте, медиане и биссектрисе треугольника из вершины P.

Решение.

1) Обозначим прямую, идущую по стороне QR через (QR). Нахождение канонического уравнения этой прямой проводится аналогично решению задачи из примера 3.

$\bar{l}_{QR}=\overline{QR}=\{5-2,\ -3-1\}=\{3,\ -4\}$ - направляющий вектор искомой прямой (QR).

$M(x,y)\in(QR)\ \Leftrightarrow\ \overline{QM}\ ||\ \bar{l}_{QR}\ \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{QM}$, $\bar{l}_{QR}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}$ - каноническое уравнение прямой (QR).

2) Обозначим прямую, идущую по высоте треугольника PQR из вершины P через (h_P). Направляющий вектор $\bar{l}_{QR}=\{3,-4\}$ прямой (QR) является вектором нормали к прямой (h_P). По вектору $\bar{l}_{QR}$ нетрудно найти направляющий вектор $\bar{l}_h$ прямой (h_P). Действительно, $\bar{l}_{QR}\perp\bar{l}_h\ \Rightarrow$ скалярное произведение этих векторов равно нулю. Пусть $\bar{l}_h=\{a,b\}$, тогда из $\bar{l}_{QR}\cdot\bar{l}_h=0\Rightarrow 3a-4b=0\Rightarrow$ можно взять $a=4,\ b=-3\ \Rightarrow\ \bar{l}_h=\{4,-3\}$.

Найдем уравнение прямой (h_P), проходящей через точку P параллельно вектору $\bar{l}_h$:

$M(x,y)\in(h_P)\ \Leftrightarrow\ \overline{PM}\ ||\ \bar{l}_h\ \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{PM}$, $\bar{l}_h$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-3}$ - каноническое уравнение прямой (h_P).

3) Обозначим прямую, идущую по медиане треугольника PQR из вершины P через (m_P). Найдем еще одну точку на прямой (m_P). В качестве этой точки можно точку $S(x_S, y_S)$ - срединную точку отрезка QR: $x_S=\dfrac{x_Q+x_R}{2}=\dfrac{2+5}{2}=\dfrac{7}{2}$, $y_s=\dfrac{y_s+y_R}{2}=\dfrac{1-3}{2}=-1\Rightarrow S(3.5,\ -1)$.

$\bar{l}_m=\overline{PS}=\{3.5-5,\ -1-(-3)\}=\{-1.5,\ 2\}$ - направляющий вектор прямой (m_P). Дальнейшие рассуждения таковы:

$M(x,y)\in(m_P)\ \Leftrightarrow\ \overline{PM}\ ||\ \bar{l}_m\ \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{PM}$, $\bar{l}_m$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: $\dfrac{x+1}{-1.5}=\dfrac{y-2}{2}$ - каноническое уравнение прямой (m_P).

4) Обозначим прямую, идущую по биссектрисе треугольника PQR из вершины P через (b_P). Найдем направляющий вектор прямой (b_P). Сначала найдем векторы $\overline{PQ}=\{3,-1\}$, $\overline{PR}=\{6,-5\}$, затем их орты $\vec{e}_Q=\dfrac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}\{3,-1\}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{10}},-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right\}$,

$\vec{e}_R=\dfrac{\overline{PR}}{|\overline{PR}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6^2+(-5)^2}}\{6,-5\}=\left\{\dfrac{6}{\sqrt{61}},\dfrac{-5}{\sqrt{61}}\right\}$. Сумма ортов $\vec{e}_Q+\vec{e}_R$ - вектор, направленный по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{e}_Q,\vec{e}_R$. Т.к. эти векторы имеют одинаковую длину $|\vec{e}_Q|=|\vec{e}_R|=1$, то параллелограмм является ромбом, а диагональ ромба является одновременно его биссектрисой. Следовательно, вектор

$\bar{l}_b = \bar{e}_Q + \bar{e}_R = \left\{ \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{6}{\sqrt{61}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{5}{\sqrt{61}} \right\}$ - направляющий вектор прямой (b_P). Вместо вектора $\bar{l}_b$ в качестве направляющего вектора прямой (b_P) лучше взять вектор $\bar{L}_b = \sqrt{610} \cdot \bar{l}_b = \left\{ 3\sqrt{61} + 6\sqrt{10}, -\sqrt{61} - 5\sqrt{10} \right\}$. Найдем уравнение прямой (b_P).

$M(x,y) \in (b_P) \Leftrightarrow \overline{PM} \,||\, \bar{l}_b \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{PM}$, $\bar{l}_b$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ответ: $\frac{x+1}{\left(3\sqrt{61} + 6\sqrt{10}\right)} = \frac{y-2}{\left(-\sqrt{61} - 5\sqrt{10}\right)}$ - каноническое уравнение прямой (b_P).

Пример 6. Стороны треугольника PQR лежат на прямых $(PQ),(PR),(QR)$ заданных общими уравнениями. (PQ): $2x - y - 4 = 0$, (PR): $x + 3y + 5 = 0$, (QR): $x - 3y + 13 = 0$.
Найти длину высоты h_P этого треугольника из вершины P.

Решение. Сначала найдем вершину P, которая служит точкой пересечения прямых (PQ) и (PR). Поскольку эта точка лежит на обеих прямых, ее координаты можно определить из системы $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = -5 \end{cases}$. Решение этой системы найдем по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -14 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2 \Rightarrow P(1,-2).$$

Из уравнения прямой (QR) находим нормальный к ней вектор $\bar{N} = \{1,-3\}$, который будет параллелен прямой (h_P), идущей по высоте h_P, т.е. $\bar{N}$ является направляющим вектором прямой (h_P). Найдем общее уравнение прямой (h_P).

$M(x,y) \in (h_P) \Leftrightarrow \overline{PM} \,||\, \bar{N} \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{PM}$, $\bar{N}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3}$ - каноническое уравнение прямой (h_P) $\Rightarrow -3(x-1) = y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x + y - 1 = 0$ - общее уравнение прямой (h_P).

Теперь найдем точку G пересечения прямых (QR) и (h_P), как решение системы

$\begin{cases} x - 3y + 13 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -13 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$. Эту систему тоже решим по правилу Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10,\ \Delta_x = \begin{vmatrix} -13 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -10,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 40 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow G(-1, 4).$$

Точка G является проекцией точки P на прямую (QR).

$$h_P = \left| \overline{PG} \right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

8.3. Взаимное расположение двух прямых. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Две прямые на плоскости могут пересекаться, быть параллельны, совпадать. Полезную информацию о взаимном расположении двух прямых дают направляющие векторы и векторы нормали этих прямых. Например, угол (острый или тупой) между прямыми равен углу (острому или тупому) между направляющими векторами этих прямых. Этот же угол равен углу между нормалями к этим прямым.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ можно вычислить по формуле: $d = \frac{| Ax_0 + By_0 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример 7.

При каких значениях параметров a, b прямые (p_1): $ax-3y-2=0$, (p_2): $2x+by+4=0$
а) пересекаются в одной точке, б) параллельны, но не совпадают, в) совпадают?
Решение. Из общих уравнений прямых $(p_1),(p_2)$ найдем их нормальные векторы.
(p_1): $ax-3y-2=0 \Rightarrow \overline{N}_1=\{a,-3\}$, (p_2): $2x+by+4=0 \Rightarrow \overline{N}_2=\{2, b\}$.

Если прямые параллельны или совпадают, то $\overline{N}_1 \,||\, \overline{N}_2 \Rightarrow \dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{b} \Rightarrow ab+6=0$.

Следовательно, ответ на вопрос а) такой: прямые $(p_1),(p_2)$ пересекаются в одной точке при $ab+6\neq 0$.
Если прямые совпадают, то помимо пропорциональности координат векторов $\overline{N}_1, \overline{N}_2$, система из дух уравнений $(p_1),(p_2)$ должна быть эквивалентна одному уравнению. $\Rightarrow$
Уравнение (p_1) должно быть пропорционально уравнению (p_2). $\Rightarrow$ $\dfrac{a}{2}=\dfrac{-3}{b}=\dfrac{-2}{4}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $a=-1,\ b=6$ $\Rightarrow$ Ответ на вопрос в): прямые совпадают при $a=-1,\ b=6$.
Ответ на вопрос б) вытекает из полученных двух ответов: прямые параллельны, но не совпадают при a,b таких, что $ab+6=0$ и $(a,b)\neq(-1, 6)$.

Пример 8.

Выяснить взаимное расположение прямых (α): $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-3t \end{cases}$, (β): $\begin{cases} x=3+4t \\ y=4-t \end{cases}$.

Если прямые пересекаются, то найти точку их пересечения и угол между прямыми.
Решение. Из параметрических уравнений прямых $(\alpha),(\beta)$ легко находятся их направляющие векторы $\bar{l}_\alpha, \bar{l}_\beta$.

(α): $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-3t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\bar{l}_\alpha=\{-1,-3\}$. (β): $\begin{cases} x=3+4t \\ y=4-t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\bar{l}_\beta=\{4,-1\}$.

Координаты векторов $\bar{l}_\alpha, \bar{l}_\beta$ не пропорциональны, значит эти векторы не коллинеарны и значит, прямые $(\alpha),(\beta)$ пересекаются в одной точке. Эту точку M_* можно найти такими рассуждениями:

$M_*(x_*,y_*)\in(\alpha) \Rightarrow \exists t=t_1: \begin{cases} x_*=2-t_1 \\ y_*=-1-3t_1 \end{cases}$, $M_*(x_*,y_*)\in(\beta) \Rightarrow \exists t=t_2: \begin{cases} x_*=3+4t_2 \\ y_*=4-t_2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-t_1=3+4t_2 \\ -1-3t_1=4-t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1+4t_2=-1 \\ 3t_1-t_2=-5 \end{cases} \Rightarrow t_1=-\frac{21}{13}, t_2=\frac{2}{13} \Rightarrow \begin{cases} x_*=2-t_1=2+\dfrac{21}{13}=\dfrac{47}{13} \\ y_*=-1-3t_1=-1+\dfrac{63}{13}=\dfrac{50}{13} \end{cases},$$

$M_*\left(\dfrac{47}{13}, \dfrac{50}{13}\right)$. Эту точку можно по-другому. Из параметрических уравнений найдем общие уравнения прямых $(\alpha),(\beta)$. Система из общих уравнений прямых определяет M_*.

(α): $\begin{cases} x=2-t \\ y=-1-3t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+1}{-3}=t \Rightarrow -3(x-2)=-y-1 \Rightarrow 3x-y-7=0$.

(β): $\begin{cases} x=3+4t \\ y=4-t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-4}{-1}=t \Rightarrow -x+3=4(y-4) \Rightarrow x+4y-19=0$.

$$M_*: \begin{cases} 3x_*-y_*-7=0 \\ x_*+4y_*-19=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_*=\dfrac{47}{13} \\ y_*=\dfrac{50}{13} \end{cases} \Rightarrow M_*\left(\frac{47}{13},\frac{50}{13}\right).$$

Чтобы найти угол между прямыми, найдем угол φ между направляющими векторами $\bar{l}_\alpha = \{-1,-3\}$, $\bar{l}_\beta = \{4,-1\}$. $cos\,\varphi = \dfrac{\bar{l}_\alpha \cdot \bar{l}_\beta}{|\bar{l}_\alpha| \cdot |\bar{l}_\beta|} = \dfrac{-1\cdot 4 + (-3)(-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{170}}$,

$\varphi = arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{170}}\right)$. Данное значение φ дает тупой угол между прямыми $(\alpha),(\beta)$.

Острый угол между прямыми $(\alpha),(\beta)$ равен $\psi = \pi - arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{170}}\right)$.

Пример 9. Стороны треугольника PQR лежат на прямых $(PQ),(PR),(QR)$ заданных общими уравнениями. (PQ): $2x - y - 4 = 0$, (PR): $x + 3y + 5 = 0$, (QR): $x - 3y + 13 = 0$.
Найти длину высоты h_P этого треугольника из вершины P.
Решение. Данная задача уже решена примером 6. В отличие от используемых там методов теперь найдем высоту h_P с использованием формулы расстояния точки до прямой.
Начало решения повторяет решение в примере 6: находим точку $P(1,-2)$ пересечения прямых (PQ) и (PR).

Теперь отходим от решения в примере 6 и воспользуемся тем, что h_P равно расстоянию от точки $P(1,-2)$ до прямой (QR): $x - 3y + 13 = 0$. Следовательно, по формуле $d = \dfrac{|\,Ax_0 + By_0 + C\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ получаем $h_P = \dfrac{|1 - 3(-2) + 13|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$.

Домашнее задание.
1. Найти каноническое, параметрические и общее уравнения прямой, проходящей через точки $A(-1,-3)$, $B(2,-1)$.
2. Найти каноническое, параметрические и общее уравнения прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ параллельно прямой $2x - 3y - 1 = 0$.
3. Найти каноническое, параметрические и общее уравнения прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ перпендикулярно прямой $2x - 3y - 1 = 0$.

Занятие 9. **Плоскость и прямая в пространстве.**

9.1. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор.
9.2. Прямая в пространстве: канонические, параметрические уравнения.
9.3. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости двух прямых в пространстве.

9.1. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор.

Общее уравнение плоскости в пространстве R^3 имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где A,B,C,D - числовые коэффициенты, (x,y,z) - координаты произвольной точки плоскости. Это уравнение получается при решении следующей задачи.

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A,B,C\}$.
Решение. Обозначим искомую плоскость через (P). Используем далее такую цепочку выводов:
$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{N} \Leftrightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad Ax+By+Cz+D=0$, где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Отметим полную аналогию между общим уравнением прямой на плоскости R^2 и общим уравнением плоскости в пространстве.

Из решения задачи видно, что из общего уравнения плоскости сразу же можно найти вектор $\overline{N}=\{A,B,C\}$ перпендикулярный плоскости. Этот вектор называется **нормалью** (или **нормальным вектором**) к плоскости. Например, из общего уравнения плоскости $3x-y+z+5=0$ (в этом уравнении $A=3,\ B=-1,\ C=1,\ D=5$) получаем такой нормальный вектор $\overline{N}=\{3,-1,1\}$. Коэффициент D не имеет особой смысловой нагрузки, относительно него можно только сказать, что при $D=0$ плоскость проходит через начало координат $(0,0,0)$, а при $D\neq 0$ не проходит через начало координат. Следует также отметить, что уравнение $Ax+By+D=0$ задает в пространстве R^3 плоскость с нормалью $\overline{N}=\{A,B,0\}$, которая показывает, что данная плоскость проходит параллельно оси Oz. Это же уравнение $Ax+By+D=0$ на плоскости R^2 определяет прямую.

Аналогично, уравнение $z=0$ в пространстве R^3 представляет общее уравнение координатной плоскости Oxy. Нормалью к этой плоскости служит орт $\overline{N}=\{0,0,1\}=\bar{k}$ - единичный вектор положительного направления оси Oz.

При нахождении уравнений плоскостей часто используются условие ортогональности двух векторов (как это делается в задаче 1) и условие компланарности трех векторов.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(-2,\ 1,\ 1),\ B(-3,\ 3,\ 5),\ C(-2,\ 4,\ -1)$.

Решение. Сначала убедимся, что данные три точки не лежат на одной прямой (если эти точки лежат на одной прямой, то существует бесконечно много плоскостей, содержащих данные точки). Найдем векторы $\overline{AB}=\{-1,\ 2,\ 4\},\ \overline{AC}=\{0,\ 3,-6\}$. Их координаты не пропорциональны. Значит, точки $A,\ B,\ C$ не лежат на одной прямой и через них проходит только одна плоскость. Найдем эту плоскость, которую обозначим (P), двумя способами.

1) $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overline{AM},\ \overline{AB},\ \overline{AC}$ - компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение векторов $\overline{AM},\ \overline{AB},\ \overline{AC}$ равно нулю $\Rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -24(x+2)-6(y-1)-3(z-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8(x+2)+2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow 8x+2y+z+13=0$ - общее уравнение плоскости (P).

2) $\overline{N}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix}=\{-24,-6,-3\}$ - вектор нормали к плоскости (P), т.к. по определению векторного произведения $\overline{N}$ перпендикулярен векторам $\overline{AB},\ \overline{AC}$, параллельным (P). Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 1.

$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overline{M_0M}\perp\overline{N}\Leftrightarrow \overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0 \Rightarrow -24(x+2)-6(y-1)-3(z-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x+2y+z+13=0$ - общее уравнение плоскости (P).

Пример 2. Найти уравнение плоскости (P_1), проходящей через точку $A(-1,\ 4,-3)$ параллельно плоскости $(P):\ x-y+2z-1=0$.

Решение. $(P):\ x-y+2z-1=0 \Rightarrow \overline{N}=\{1,-1,\ 2\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Этот же вектор служит вектором нормали к плоскости (P_1). Остается повторить решение задачи 1.

$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow \overline{AM}\perp\overline{N}\Leftrightarrow \overline{N}\cdot\overline{AM}=0 \Rightarrow 1(x+1)-1(y-4)+2(z+3)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x - y + 2z + 11 = 0$ - общее уравнение плоскости (P_1).

Пример 3.Найти двугранный угол, под которым пересекаются плоскости (P_1) и (P_2).
(P_1): $x - y - 2z - 1 = 0$, (P_2): $x - 2y + 3z - 5 = 0$.
Решение. Двугранный угол φ (тупой или острый) между плоскостями равен углу между их нормалями.
(P_1): $x - y - 2z - 1 = 0 \Rightarrow \overline{N}_1 = \{1, -1, -2\}$, (P_2): $x - 2y + 3z - 5 = 0 \Rightarrow \overline{N}_2 = \{1, -2, 3\}$.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|} = \frac{1\cdot 1 + (-1)(-2) + (-2)3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \varphi \text{ - тупой угол,}$$

$\varphi = \arccos\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{21}}\right)$. Острый двугранный угол между (P_1) и (P_2) равен $\psi = \pi - \varphi$.

9.2. Прямая в пространстве R^3: канонические, параметрические уравнения.

1). Прямую в пространстве R^3 можно определить как линию пересечения двух плоскостей. Следовательно, система из двух уравнений плоскостей (P_1), (P_2)

$$\begin{cases} (P_1): \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (P_2): \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

задает прямую в пространстве R^3 при обязательном условии, что нормали $\overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ к этим плоскостям не параллельны. Если $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ параллельны, то плоскости (P_1), (P_2) либо параллельны, либо совпадают. И в том и другом случае система (1) уже не будет давать прямую.

Замечание. Задание прямой системой (1) не совсем удобно, т.к. из него не видно ни направления прямой, ни одной из точек на этой прямой. Эту информацию можно добыть из системы (1) лишь посредством дополнительных вычислений.

Более предпочтительными в плане сделанного замечания являются канонические и параметрические уравнения прямой в R^3.

2). Канонические уравнения прямой в пространстве R^3 имеют вид

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \qquad (2)$$

Здесь a, b, c, x_0, y_0, z_0 - заданные числа, они имеют следующий геометрический смысл:
(x_0, y_0, z_0) **- координаты фиксированной точки M_0 на прямой;**
$\{a, b, c\}$ **- координаты направляющего вектора $\bar{l}$ прямой**.
(x, y, z) - координаты произвольной точки прямой.

Параметрические уравнения прямой в R^3 имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in (-\infty, +\infty) \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (3)$$

Геометрический смысл величин a, b, c, x_0, y_0, z_0 и величин x, y, z тот же, что и выше.

Уравнения (2),(3) получаются при решении пространственного варианта **задачи 2** из занятия 8.

Замечание. У прямой на плоскости есть нормаль, которая также как и направляющий вектор прямой, позволяет установить направление этой прямой. **Для прямой в пространстве вектор нормали не имеет смысла**, т.к. существует бесконечно много перпендикулярных к пространственной прямой векторов с разным направлением, и один заданный перпендикулярный к этой прямой вектор не дает однозначного ответа о ее направлении.

Пример 4. Найти канонические уравнения прямой (α), заданной как пересечение двух плоскостей (P_1): $x-y-2z-1=0$ и (P_2): $x-2y+3z-5=0$.
Решение.
Система уравнений $\begin{cases} x-y-2z-1=0 \\ x-2y+3z-5=0 \end{cases}$ задает прямую (α) в пространстве, т.к. нормальные векторы к плоскостям (P_1) и (P_2), а это векторы $\overline{N}_1=\{1,-1,-2\}$ и $\overline{N}_2=\{1,-2,\ 3\}$ не параллельны. Найдем две фиксированные точки M_1, M_2 на прямой (α).
1. Подставим в систему значение $z=0$, получим

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y\ =1 \\ x-2y=5 \end{cases} \Rightarrow\ x=-3,\ y=-4\ \Rightarrow\ M_1(-3,-4,\ 0).$$

Геометрический смысл точки M_1: это - точка пересечения прямой (α) с плоскостью $z=0$.
2. Подставим в систему значение $z=1$, получим

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y\ =3 \\ x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow\ x=4,\ y=1\ \Rightarrow\ M_2(4,\ 1,\ 1).$$

Точка M_2, это точка пересечения прямой (α) с плоскостью $z=1$.
3. $\bar{l}=\overline{M_1M_2}=\{4-(-3), 1-(-4), 1-0\}=\{7, 5, 1\}$ - направляющий вектор прямой (α).
4. $M(x,y,z)\in(\alpha) \Leftrightarrow \overline{M_1M} \mid\mid \bar{l} \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{M_1M}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z}{1}$. Это и есть каноническое уравнение прямой (α).

5. Замечание. Направляющий вектор прямой (α) можно было найти по векторам $\overline{N}_1=\{1,-1,-2\}$ и $\overline{N}_2=\{1,-2,\ 3\}$. Для этого надо вычислить векторное произведение

$$\overline{L}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}=\{-7,-5,-1\}.$$

Вектор $\overline{L}$ перпендикулярен векторам $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ одновременно. Следовательно, $\overline{L}$ параллелен прямой (α) и служит другим (по сравнению с вектором $\bar{l}$) направляющим вектором этой прямой. Кстати: $\overline{L}=-\bar{l}$, что тоже указывает на параллельность вектора $\overline{L}$ прямой (α). При таком подходе канонические уравнения прямой (α) получаются после выполнения пунктов 1., 4. и 5. изложенного решения. Только ответ уже получится в виде $\dfrac{x+3}{-7}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z}{-1}$.

Пример 5. Найти параметрические уравнения прямой (β), проходящей через точку $A(-2,\ 2,-3)$ перпендикулярно плоскости (P): $4x-y+3z-2=0$.
Решение. $\overline{N}=\{4,-1,\ 3\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Этот вектор параллелен прямой (β) и, значит, является ее направляющим вектором. Следовательно,

$$M(x,y,z)\in(\beta) \Leftrightarrow \overline{AM} \mid\mid \overline{N} \Leftrightarrow \exists t\in R:\ \ \overline{AM}=t\cdot\overline{N} \Rightarrow \begin{cases} x+2=4t \\ y-2=-t \\ z+3=3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2+4t \\ y=2-t \\ z=-3t \end{cases} \text{ - ответ.}$$

Пример 6. Найти канонические и параметрические уравнения прямой (α), проходящей через точку $A(-2,\ 2,-3)$ параллельно прямой (γ): $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Решение. $\bar{l} = \{-2,\ 3,-1\}$ - направляющий вектор прямой (γ). Этот же вектор является направляющим вектором искомой прямой (α). Следовательно,
$M(x,y,z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \overline{AM} \mid\mid \bar{l} \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{AM}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$
$\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{-1}$ - канонические уравнения прямой $(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = -2-2t \\ y = 2+3t \\ z = -1-t \end{cases}$ - параметрические уравнения прямой (α).

9.3. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Наиболее полезную информацию о взаимном расположении двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве можно извлечь из направляющих векторов прямых и нормалей к плоскостям.

Пример 8. Найти расстояние d от точки $A(-2,\ 2,-3)$ до плоскости $x - y - 2z - 1 = 0$.
Решение. $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|1\cdot(-2) - 2 - 2\cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{6}}$.

Пример 9. При каком значении параметра k плоскость (P_1): $x + ky + 3z - 5 = 0$ параллельна плоскости (P_2): $x - y - 2z - 1 = 0$?
Решение. Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы $\overline{N}_1 = \{1,\ k,\ 3\}$ и $\overline{N}_2 = \{1,-1,-2\}$, т.е. должно быть $\dfrac{1}{1} = \dfrac{k}{-1} = \dfrac{3}{-2}$. Это двойное равенство не выполняется ни при каком k, т.к. $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{3}{-2}$. Следовательно, плоскости (P_1) и (P_2) не параллельны при всех значениях параметра k.

Пример 10. При каких значениях параметров k, m прямая (α): $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+3}{k} = \dfrac{z-1}{-1}$ лежит в плоскости (P): $x - 2y + 3z - m = 0$?
Решение.
По каноническим уравнениям прямой (α) запишем ее параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -3+kt. \\ z = 1-t \end{cases}$$

$(\alpha) \in (P) \Leftrightarrow$ все точки прямой (α) удовлетворяют уравнению плоскости $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall t \in R \quad (2-2t) - 2(-3+kt) + 3(1-t) - m = 0 \Rightarrow (-2k-5)t + (11-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2k-5 = 0 \\ 11-m = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ответ: $k = -2.5,\ m = 11$.

Можно эту задачу решить по другому. $\bar{l} = \{-2, k, -1\}$ - направляющий вектор прямой (α) и $M_0(2,-3,\ 1)$ - фиксированная точка этой прямой. $\overline{N} = \{1,-2,\ 3\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Далее строим такую цепочку рассуждений.

$$(\alpha)\in(P)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\bar{l}\perp\bar{N}\ \Rightarrow\ \bar{l}\cdot\bar{N}=0\ \Rightarrow\ -2\cdot1+k\cdot(-2)+(-1)\cdot3=0\ \Rightarrow\ k=-2.5\\ M_0\in(P)\ \Rightarrow\ 2-2\cdot(-3)+3\cdot1-m=0\ \Rightarrow\ m=11\end{cases}.$$

Пример 11. Выяснить взаимное расположение двух прямых

$$(\alpha):\ \frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{-1}\quad \text{и}\quad (\beta):\ \begin{cases}x=-1-t\\ y=2t\\ z=3+3t\end{cases}.$$

Решение. Прямые в пространстве могут скрещиваться, могут пересекаться в одной точке, могут быть параллельны, могут совпадать. Выясним, какой из указанных четырех случаев реализуется в этом примере.

Из уравнения (α) выводим: $\bar{L}_\alpha=\{-2,3,-1\}\,||\,(\alpha)$ и $M_\alpha(2,-3,1)\in(\alpha)$.

Из уравнения (β) выводим: $\bar{L}_\beta=\{-1,2,3\}\,||\,(\beta)$ и $M_\beta(-1,0,3)\in(\beta)$.

$\overline{M_\alpha M_\beta}=\{3,3,2\}$.

Если прямые (α) и (β) пересекаются или параллельны, или совпадают, то тройка векторов $\bar{L}_\alpha$, $\bar{L}_\beta$, $\overline{M_\alpha M_\beta}$ - компланарна. А если прямые (α) и (β) скрещиваются, то тройка векторов $\bar{L}_\alpha$, $\bar{L}_\beta$, $\overline{M_\alpha M_\beta}$ -некомпланарна. Найдем смешанное произведение этих трех векторов.

$$\bar{L}_\alpha\ \bar{L}_\beta\ \overline{M_\alpha M_\beta}=\begin{vmatrix}-2&3&-1\\-1&2&3\\3&3&2\end{vmatrix}=52\neq0\ \Rightarrow\ \text{тройка } \bar{L}_\alpha,\ \bar{L}_\beta,\ \overline{M_\alpha M_\beta}\ \text{-некомпланарна}\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ прямые (α) и (β) скрещиваются.

Приведенные в занятиях 8, 9 примеры наглядно демонстрируют мощь векторных методов и исключительную роль условий: коллинеарности двух векторов; ортогональности двух векторов; компланарности трех векторов при нахождении уравнений прямых и плоскостей.

Домашнее задание.

1. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,-1,\ 2),\ M_2(2,-2,\ 3),\ M_3(1,-4,-1)$.
2. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей $x-y-z-3=0,\ 2x-y+2z+1=0$.
3. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точку $P(-1,-1,\ 3)$ перпендикулярно плоскости $2x+y-z-5=0$, с этой плоскостью.

Занятие **10.** **Кривые второго порядка.**

10.1. Эллипс. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, график.
10.2. Гипербола. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, асимптоты, график.
10.3. Парабола. Каноническое уравнение. Параметр параболы, график.

Кривыми второго порядка на плоскости Oxy называются линии, неявное задание которых имеет вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E, F - заданные вещественные числа, (x, y) - координаты точек кривой. Наиболее важными линиями среди кривых второго порядка являются эллипс, гипербола, парабола.

10.1. Эллипс. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, график.

Определение эллипса. *Эллипсом называется плоская кривая, у которой сумма расстояний от двух фиксированных точек* F_1, F_2 *плоскости до любой точки* M *этой кривой есть постоянная величина, независящая от точки* M (т.е. $F_1M + F_2M = const \ \ \forall M$). *Точки* F_1, F_2 *называются фокусами эллипса.*

Каноническое уравнение эллипса: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Такое уравнение получается, если координатная ось Ox (или ось Oy) проходит через фокусы F_1, F_2, а начало координат – точка O - находится в центре отрезка $F_1 F_2$ (рис.1). Эллипс (2) симметричен относительно осей координат и начала координат (центра эллипса). Постоянные $a > 0$, $b > 0$ называются **полуосями эллипса**.

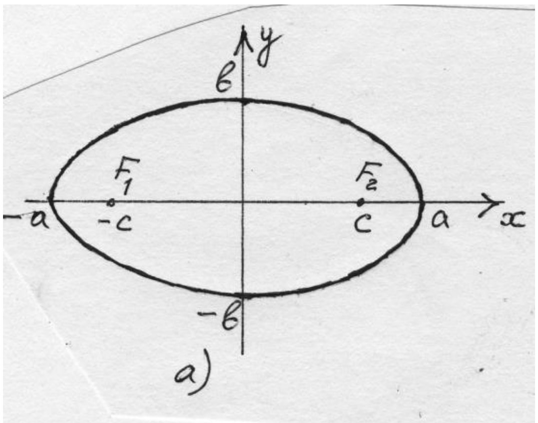
Если эллипс задан уравнением (2), то фокусы эллипса находятся так.

1) Сначала определяем, где лежат фокусы: фокусы лежат на той координатной оси, на которой расположены бóльшие полуоси.

2) Затем вычисляется фокусное расстояние c (расстояние от фокусов до начала координат).

При $a > b$ фокусы лежат на оси Ox ; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$.

При $b > a$ фокусы лежат на оси Oy ; $c = \sqrt{b^2 - a^2}$; $F_1(0, -c), F_2(0, c)$.



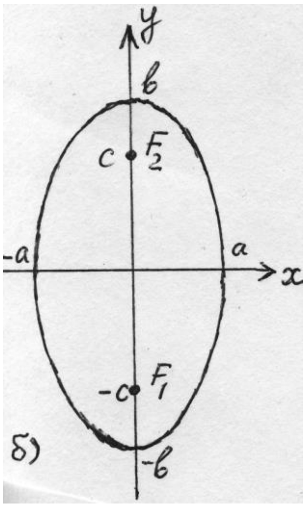


Рис. 1.

Эксцентриситетом эллипса называется величина: $e = \dfrac{c}{a}$ (при $a > b$); $e = \dfrac{c}{b}$ (при $b > a$).

У эллипса всегда $0 < e < 1$. Эксцентриситет служит характеристикой сжатия эллипса.

Если эллипс (2) переместить так, что центр эллипса попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а полуоси останутся параллельны осям Ox , Oy , то уравнение полученного эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

10.2. Гипербола. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, асимптоты, график.

Определение гиперболы. *Гиперболой называется плоская кривая, у которой абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек F_1, F_2 плоскости до любой точки M этой кривой есть постоянная величина, независящая от точки M* (т.е. $|F_1M - F_2M| = const \quad \forall M$). *Точки F_1, F_2 называются фокусами гиперболы.*

Каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (3)

Такое уравнение получается, если координатная ось Ox (или ось Oy) проходит через фокусы F_1, F_2, а начало координат – точка O - находится в центре отрезка $F_1 F_2$. Гиперболы (3) симметричны относительно осей координат и начала координат. Постоянные $a > 0$, $b > 0$ называются **полуосями гиперболы**.

Фокусы гиперболы находятся так.

У гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ фокусы лежат на оси Ox: $F_1(-c,\, 0)$, $F_2(c,\, 0)$ (рис. 2.а).

У гиперболы $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ фокусы лежат на оси Oy: $F_1(0, -c)$, $F_2(0,\, c)$ (рис. 2.б)

Здесь c - фокусное расстояние (расстояние от фокусов до начала координат). Оно вычисляется по формуле: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина:

$e = \dfrac{c}{a}$ (для $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$); $e = \dfrac{c}{b}$ (для $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).

У гиперболы всегда $e > 1$.

Асимптотами гипербол (3) являются две прямые: $y = -\dfrac{b}{a}x$, $y = \dfrac{b}{a}x$. Обе ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам с ростом $|x|$.

Построение графика гиперболы следует проводить так: сначала по полуосям a, b строим вспомогательный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат; затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводим прямые, это – асимптоты гиперболы; наконец изображаем ветви гиперболы, они касаются середин соответствующих сторон вспомогательного прямоугольника и приближаются с ростом $|x|$ к асимптотам (рис. 2).

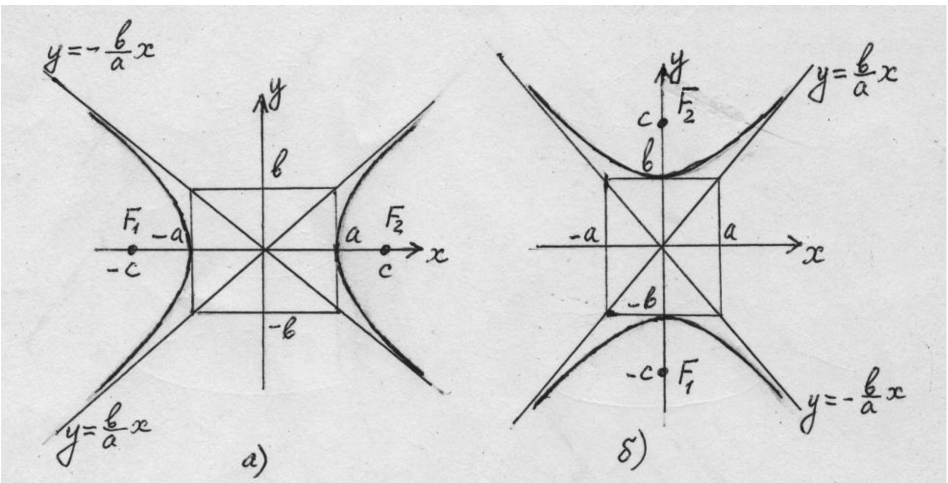


Рис. 2.

Если гиперболы (3) переместить так, что их центр попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а полуоси останутся параллельны осям Ox, Oy, то уравнение полученных гипербол запишутся в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

10.3. Парабола. Каноническое уравнение. Параметр параболы, график.

Определение параболы. *Параболой называется плоская кривая, у которой для любой точки M этой кривой расстояние от M до фиксированной точки F_* плоскости (называемой фокусом параболы) равно расстоянию от M до фиксированной прямой на плоскости* (называемой директрисой параболы).

Каноническое уравнение параболы: $\qquad y^2 = 2px, \qquad$ (4)

где p - постоянная, называемая **параметром** параболы.

Точка $O(0, 0)$ параболы (4) называется вершиной параболы. Ось Ox является осью симметрии. Фокус параболы (4) находится в точке $F_*\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$. Графики параболы (4) со значениями $p>0$ и $p<0$ приведены на рис. 3.а и 3.б соответственно.

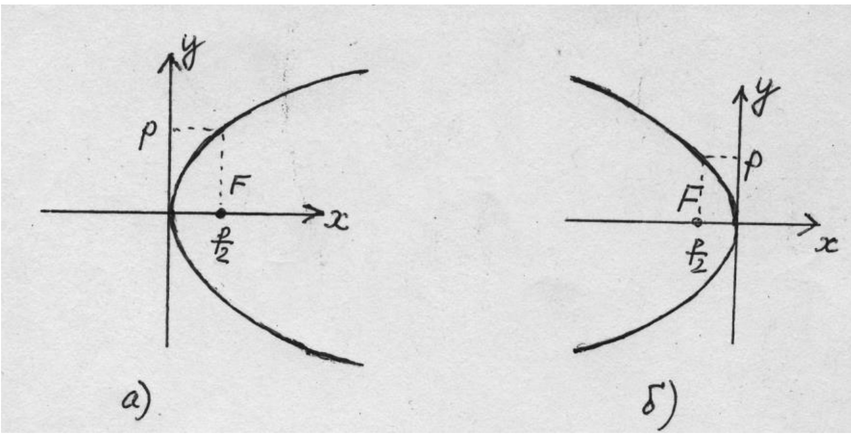


Рис. 3.

Уравнение $x^2 = 2py$ также определяет параболу на плоскости Oxy, у которой по сравнению с параболой (4), оси Ox, Oy поменялись местами.

Если параболу (4) переместить так, что ее вершина попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а ось симметрии останется параллельна оси Ox, то уравнение полученной параболы имеют вид $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$.

Перейдем к примерам.

Пример 1. Кривая второго порядка задана уравнением $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{5}=1$. Дать название этой кривой. Найти ее фокусы и эксцентриситет. Изобразить кривую и ее фокусы на плоскости Oxy.

Решение. Данная кривая является эллипсом с центром в точке $P(x_0=2, y_0=-3)$ и полуосями $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{5}$. В этом легко убедиться, если провести замену $x-2=\tilde{x},\ y+3=\tilde{y}$. Это преобразование означает переход от заданной декартовой системы координат Oxy к новой декартовой системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$, у которой оси $P\tilde{x}, P\tilde{y}$ параллельны осям

Ox, Oy. Это преобразование координат называется сдвигом системы Oxy в точку P. В новой системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$ уравнение кривой преобразуется в каноническое уравнение эллипса $\frac{\tilde{x}^2}{2}+\frac{\tilde{y}^2}{5}=1$, его график приведен на рис. 4.

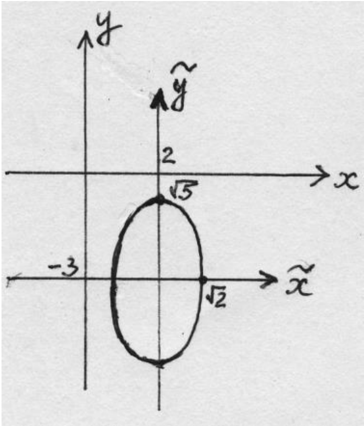


Рис. 4.

Найдем фокусы. $b>a$, поэтому фокусы F_1, F_2 эллипса расположены на оси $P\tilde{y}$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{5-2}=\sqrt{3}$. В системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$: $F_1(\tilde{x}_1=0,\ \tilde{y}_1=-c)$, $F_2(\tilde{x}_2=0,\ \tilde{y}_2=c)$ $\Rightarrow$ $F_1\left(\tilde{x}_1=0, \tilde{y}_1-\sqrt{3}\right)$, $F_2\left(\tilde{x}_2=0,\ \tilde{y}_2=\sqrt{3}\right)$. Т.к. $x=\tilde{x}+2$, $y=\tilde{y}-3$, в старой системе координат Oxy фокусы имеют координаты $F_1\left(x_1=2, y_1=-\sqrt{3}-3\right)$, $F_2\left(x_2=2,\ y_2=\sqrt{3}-3\right)$.

Пример 2. Дать название кривой второго порядка $2x^2+3y^2-4x+12y-6=0$ и привести ее график.

Решение. Выделим полные квадраты по слагаемым, содержащим переменные x и y.

$2x^2-4x=2\left(x^2-2x+1-1\right)=2(x-1)^2-2$, $\quad 3y^2+12y=3\left(y^2+4y+4-4\right)=3(y+2)^2-12$.

Теперь, уравнение кривой можно переписать так:

$$2(x-1)^2-2+3(y+2)^2-12-6=0 \Rightarrow 2(x-1)^2+3(y+2)^2=20 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{10}+\frac{(y+2)^2}{(20/3)}=1.$$

Следовательно, заданная кривая является эллипсом с центром в точке $P(1,-2)$ и полуосями $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{20/3}$. Полученные сведения позволяют нарисовать его график.

Пример 3. Дать название и привести график линии $y=-\sqrt{5-2x^2}$.

Решение. $y=-\sqrt{5-2x^2} \Rightarrow y^2=5-2x^2 \Rightarrow 2x^2+y^2=5 \Rightarrow \frac{x^2}{(5/2)}+\frac{y^2}{5}=1$. Это – каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O(0,0)$ и полуосями $a=\sqrt{5/2}$, $b=\sqrt{5}$.

Поскольку, $y=-\sqrt{5-2x^2}\le 0$, делаем заключение: заданное уравнение определяет на плоскости Oxy нижнюю половину эллипса (рис. 5).

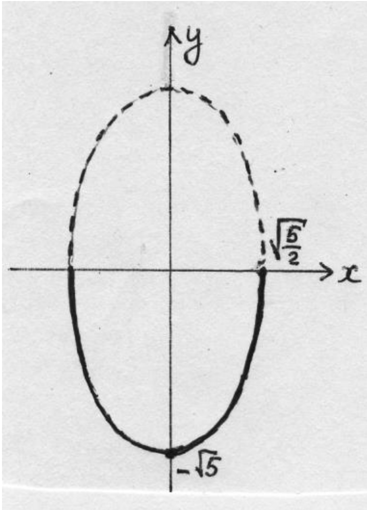


Рис.5.

Пример 4. Дать название кривой второго порядка $-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$. Найти ее фокусы, эксцентриситет. Привести график этой кривой.
Решение.
$-\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ - каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{4}=2$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6+4}=\sqrt{10}$ - фокусное расстояние.
Знак "минус" стоит перед слагаемым с x^2, поэтому фокусы F_1, F_2 гиперболы лежат на оси Oy: $F_1(0,-c)$, $F_2(0,\,c)$ $\Rightarrow F_1\left(0,-\sqrt{10}\right)$, $F_2\left(0,\,\sqrt{10}\right)$. Ветви гиперболы располагаются над и под осью Ox.
$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ - эксцентриситет гиперболы.
Асимптоты гиперболы: $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x \ \Rightarrow\ y=\frac{2}{\sqrt{6}}x,\ y=-\frac{2}{\sqrt{6}}x$.
Построение графика этой гиперболы осуществляется в соответствии с изложенным выше порядком действий: строим вспомогательный прямоугольник, проводим асимптоты гиперболы, рисуем ветви гиперболы (см. рис.2.б).

Пример 5. Выяснить вид кривой, заданной уравнением $x=-2+\sqrt{4y^2-5}$ и построить ее график.
Решение.
$x=-2+\sqrt{4y^2-5} \ \Rightarrow\ x+2=\sqrt{4y^2-5} \ \Rightarrow\ (x+2)^2=4y^2-5 \ \Rightarrow\ (x+2)^2-4y^2=-5 \ \Rightarrow$
$-\frac{(x+2)^2}{5}+\frac{y^2}{(5/4)}=1$ - гипербола с центром в точке $P(-2,\,0)$ и полуосями $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5/4}=\sqrt{5}/2$.
Т.к. $x+2=\sqrt{4y^2-5}\ge 0 \ \Rightarrow\ x\ge -2$, заключаем: заданное уравнение определяет ту часть гиперболы, которая лежит Справа от прямой $x=-2$. Гиперболу лучше нарисовать во вспомогательной системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$, полученной из системы координат Oxy сдвигом $x+2=\tilde{x},\ y=\tilde{y}$, а затем жирной линией выделить нужную часть гиперболы (рис. 6).

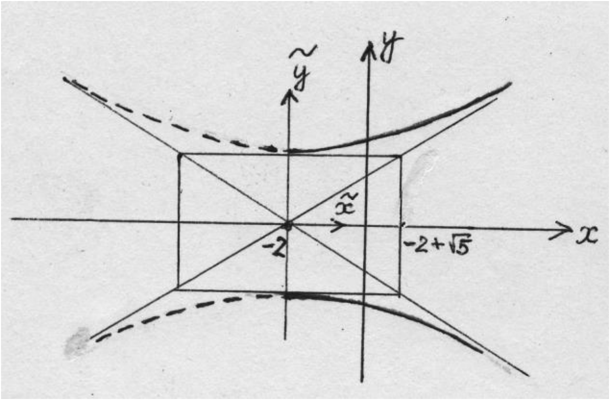


Рис.6.

Пример 6. Выяснить вид кривой $-4x-2y^2-6y+3.5=0$ и нарисовать ее график.
Решение. Выделим полный квадрат по слагаемым с переменной y:
$-2y^2-6y=-2\left(y^2+3y\right)=-2\left(y^2+2y\cdot 1.5+2.25-2.25\right)=-2(y+1.5)^2+4.4$.
Перепишем уравнение кривой. $-4x-2(y+1.5)^2+4.5+3.5=0 \;\Rightarrow\; -4x+8=2(y+1.5)^2 \;\Rightarrow$
$-4(x-2)=2(y+1.5)^2 \;\Rightarrow\; (x-2)=-0.5(y+1.5)^2$. Это – уравнение параболы с вершиной в точке $P(2,-1.5)$. Преобразованием сдвига $x-2=\tilde{x}$, $y+1.5=\tilde{y}$ уравнение параболы приводится к каноническому виду $\tilde{x}=-0.5\tilde{y}^2$, из которого видно, что
$2p=-0.5 \;\Rightarrow\; p=-0.25$ - параметр параболы. Фокус F параболы в системе $P\tilde{x}\tilde{y}$ имеет координаты $F\left(\tilde{x}=\dfrac{p}{2}, \tilde{y}=0\right)$, $\Rightarrow F(\tilde{x}=-0.25,\ \tilde{y}=0)$, а в системе Oxy (согласно преобразованию сдвига) $F(x=-0.25+2,\ y=0-1.5) \Rightarrow F(1.75,\ -1.5)$. График параболы приведен на рис. 7.

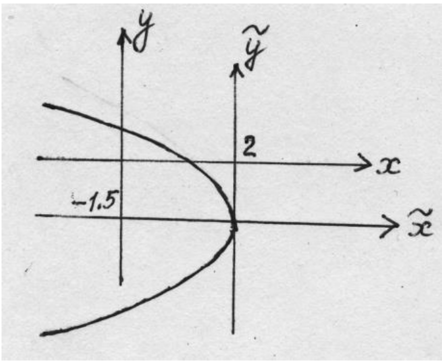


Рис. 7.

Домашнее задание.

1. Нарисовать эллипсы, заданные уравнениями: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$; $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. Найти их полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет и указать на графиках эллипсов места расположения их фокусов.
2. Нарисовать гиперболы, заданные уравнениями: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$; $-\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$. Найти их полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет и указать на графиках гипербол места расположения их фокусов. Написать уравнения асимптот данных гипербол.

3. Нарисовать параболы, заданные уравнениями: $x = 6y^2$; $x = -4y^2$. Найти их параметр, фокусное расстояние и указать на графиках парабол место расположения фокуса.

4. Уравнение $y = -4\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}$ определяет часть кривой 2-го порядка. Найти каноническое уравнение этой кривой, записать ее название, построить ее график и выделить на нем ту часть кривой, которая отвечает исходному уравнению.

Занятие **9**. **Плоскость и прямая в пространстве.**

9.1. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор.
9.2. Прямая в пространстве: канонические, параметрические уравнения.
9.3. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости двух прямых в пространстве.

9.1. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор.

Общее уравнение плоскости в пространстве R^3 имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - числовые коэффициенты, (x, y, z) - координаты произвольной точки плоскости. Это уравнение получается при решении следующей задачи.

Задача 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$.

Решение. Обозначим искомую плоскость через (P). Используем далее такую цепочку выводов:

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overline{M_0M} \perp \overline{N} \Leftrightarrow \overline{N} \cdot \overline{M_0M} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Отметим полную аналогию между общим уравнением прямой на плоскости R^2 и общим уравнением плоскости в пространстве.

Из решения задачи видно, что из общего уравнения плоскости сразу же можно найти вектор $\overline{N} = \{A, B, C\}$ перпендикулярный плоскости. Этот вектор называется **нормалью** (или **нормальным вектором**) к плоскости. Например, из общего уравнения плоскости $3x - y + z + 5 = 0$ (в этом уравнении $A = 3,\ B = -1,\ C = 1,\ D = 5$) получаем такой нормальный вектор $\overline{N} = \{3, -1, 1\}$. Коэффициент D не имеет особой смысловой нагрузки, относительно него можно только сказать, что при $D = 0$ плоскость проходит через начало координат $(0,0,0)$, а при $D \neq 0$ не проходит через начало координат. Следует также отметить, что уравнение $Ax + By + D = 0$ задает в пространстве R^3 плоскость с нормалью $\overline{N} = \{A, B, 0\}$, которая показывает, что данная плоскость проходит параллельно оси Oz. Это же уравнение $Ax + By + D = 0$ на плоскости R^2 определяет прямую.

Аналогично, уравнение $z = 0$ в пространстве R^3 представляет общее уравнение координатной плоскости Oxy. Нормалью к этой плоскости служит орт $\overline{N} = \{0, 0, 1\} = \overline{k}$ - единичный вектор положительного направления оси Oz.

При нахождении уравнений плоскостей часто используются условие ортогональности двух векторов (как это делается в задаче 1) и условие компланарности трех векторов.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(-2,\ 1,\ 1),\ B(-3,\ 3,\ 5),\ C(-2,\ 4,\ -1)$.

Решение. Сначала убедимся, что данные три точки не лежат на одной прямой (если эти точки лежат на одной прямой, то существует бесконечно много плоскостей, содержащих данные точки). Найдем векторы $\overline{AB} = \{-1,\ 2,\ 4\},\ \overline{AC} = \{0,\ 3, -6\}$. Их координаты не пропорциональны. Значит, точки $A,\ B,\ C$ не лежат на одной прямой и через них проходит только одна плоскость. Найдем эту плоскость, которую обозначим (P), двумя способами.

1) $M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\ \overline{AM},\ \overline{AB},\ \overline{AC}$ - компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение векторов $\overline{AM},\ \overline{AB},\ \overline{AC}$ равно нулю $\Rightarrow\ \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & -6\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ -24(x+2)-6(y-1)-3(z-1)=0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 8(x+2)+2(y-1)+z-1=0\ \Rightarrow\ 8x+2y+z+13=0$ - общее уравнение плоскости (P).

2) $\overline{N}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & -6\end{vmatrix}=\{-24,-6,-3\}$ - вектор нормали к плоскости (P), т.к. по определению векторного произведения $\overline{N}$ перпендикулярен векторам $\overline{AB},\ \overline{AC}$, параллельным (P). Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 1.
$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\ \overline{M_0M}\perp\overline{N}\Leftrightarrow\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0\ \Rightarrow -24(x+2)-6(y-1)-3(z-1)=0\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 8x+2y+z+13=0$ - общее уравнение плоскости (P).

Пример 2. Найти уравнение плоскости (P_1), проходящей через точку $A(-1,\ 4,-3)$ параллельно плоскости $(P):\ x-y+2z-1=0$.
Решение. $(P):\ x-y+2z-1=0\ \Rightarrow\overline{N}=\{1,-1,\ 2\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Этот же вектор служит вектором нормали к плоскости (P_1). Остается повторить решение задачи 1.
$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\ \overline{AM}\perp\overline{N}\Leftrightarrow\overline{N}\cdot\overline{AM}=0\ \Rightarrow 1(x+1)-1(y-4)+2(z+3)=0\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ x-y+2z+11=0$ - общее уравнение плоскости (P_1).

Пример 3.Найти двугранный угол, под которым пересекаются плоскости (P_1) и (P_2).
$(P_1):\ x-y-2z-1=0$, $\qquad(P_2):\ x-2y+3z-5=0$.
Решение. Двугранный угол φ (тупой или острый) между плоскостями равен углу между их нормалями.
$(P_1):\ x-y-2z-1=0\ \Rightarrow\ \overline{N}_1=\{1,-1,-2\}$, $\qquad(P_2):\ x-2y+3z-5=0\ \Rightarrow\overline{N}_2=\{1,-2,\ 3\}$.

$$cos\,\varphi=\frac{\overline{N}_1\cdot\overline{N}_2}{|\overline{N}_1||\overline{N}_2|}=\frac{1\cdot1+(-1)(-2)+(-2)3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=-\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2\sqrt{21}}\ \Rightarrow\varphi\text{ - тупой угол,}$$

$\varphi=arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{21}}\right)$. Острый двугранный угол между (P_1) и (P_2) равен $\psi=\pi-\varphi$.

9.2. Прямая в пространстве R^3: канонические, параметрические уравнения.

1). Прямую в пространстве R^3 можно определить как линию пересечения двух плоскостей. Следовательно, система из двух уравнений плоскостей (P_1), (P_2)

$$\begin{cases}(P_1):\ \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ (P_2):\ \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad(1)$$

задает прямую в пространстве R^3 при обязательном условии, что нормали $\overline{N}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$, $\overline{N}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$ к этим плоскостям не параллельны. Если $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ параллельны, то плоскости (P_1), (P_2) либо параллельны, либо совпадают. И в том и другом случае система (1) уже не будет давать прямую.

Замечание. Задание прямой системой (1) не совсем удобно, т.к. из него не видно ни направления прямой, ни одной из точек на этой прямой. Эту информацию можно добыть из системы (1) лишь посредством дополнительных вычислений.

Более предпочтительными в плане сделанного замечания являются канонические и параметрические уравнения прямой в R^3.

2). Канонические уравнения прямой в пространстве R^3 имеют вид

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}. \qquad (2)$$

Здесь a, b, c, x_0, y_0, z_0 - заданные числа, они имеют следующий геометрический смысл:
(x_0, y_0, z_0) **- координаты фиксированной точки M_0 на прямой;**
$\{a, b, c\}$ **- координаты направляющего вектора $\bar{l}$ прямой**.
(x, y, z) - координаты произвольной точки прямой.

Параметрические уравнения прямой в R^3 имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt\ , \quad t\in(-\infty,+\infty) \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad (3)$$

Геометрический смысл величин a, b, c, x_0, y_0, z_0 и величин x, y, z тот же, что и выше.

Уравнения (2),(3) получаются при решении пространственного варианта **задачи 2** из занятия 8.

Замечание. У прямой на плоскости есть нормаль, которая также как и направляющий вектор прямой, позволяет установить направление этой прямой. **Для прямой в пространстве вектор нормали не имеет смысла**, т.к. существует бесконечно много перпендикулярных к пространственной прямой векторов с разным направлением, и один заданный перпендикулярный к этой прямой вектор не дает однозначного ответа о ее направлении.

Пример 4. Найти канонические уравнения прямой (α), заданной как пересечение двух плоскостей (P_1): $x-y-2z-1=0$ и (P_2): $x-2y+3z-5=0$.

Решение.

Система уравнений $\begin{cases} x-y-2z-1=0 \\ x-2y+3z-5=0 \end{cases}$ задает прямую (α) в пространстве, т.к. нормальные векторы к плоскостям (P_1) и (P_2), а это векторы $\overline{N}_1=\{1,-1,-2\}$ и $\overline{N}_2=\{1,-2,\ 3\}$ не параллельны. Найдем две фиксированные точки M_1, M_2 на прямой (α).

1. Подставим в систему значение $z=0$, получим

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y\ =1 \\ x-2y=5 \end{cases} \Rightarrow\ x=-3,\ y=-4 \ \Rightarrow\ M_1(-3,-4,\ 0).$$

Геометрический смысл точки M_1: это - точка пересечения прямой (α) с плоскостью $z=0$.

2. Подставим в систему значение $z=1$, получим

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y\ =3 \\ x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow\ x=4,\ y=1 \ \Rightarrow\ M_2(4,\ 1,\ 1).$$

Точка M_2, это точка пересечения прямой (α) с плоскостью $z=1$.

3. $\bar{l}=\overline{M_1M_2}=\{4-(-3), 1-(-4), 1-0\}=\{7, 5, 1\}$ - направляющий вектор прямой (α).

4. $M(x,y,z)\in(\alpha) \Leftrightarrow \overline{M_1M}\ ||\ \bar{l} \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{M_1M}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ \dfrac{x+3}{7}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z}{1}$. Это и есть каноническое уравнение прямой (α).

5. Замечание. Направляющий вектор прямой (α) можно было найти по векторам $\overline{N}_1=\{1,-1,-2\}$ и $\overline{N}_2=\{1,-2,\ 3\}$. Для этого надо вычислить векторное произведение

$$\overline{L}=\overline{N}_1\times\overline{N}_2=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\bar{i}-5\bar{j}-\bar{k}=\{-7,-5,-1\}.$$

Вектор $\overline{L}$ перпендикулярен векторам $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ одновременно. Следовательно, $\overline{L}$ параллелен прямой (α) и служит другим (по сравнению с вектором $\bar{l}$) направляющим вектором этой прямой. Кстати: $\overline{L} = -\bar{l}$, что тоже указывает на параллельность вектора $\overline{L}$ прямой (α). При таком подходе канонические уравнения прямой (α) получаются после выполнения пунктов 1., 4. и 5. изложенного решения. Только ответ уже получится в виде $\frac{x+3}{-7} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z}{-1}$.

Пример 5. Найти параметрические уравнения прямой (β), проходящей через точку $A(-2,\ 2,-3)$ перпендикулярно плоскости (P): $4x - y + 3z - 2 = 0$.
Решение. $\overline{N} = \{4,-1,\ 3\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Этот вектор параллелен прямой (β) и, значит, является ее направляющим вектором. Следовательно,

$$M(x,y,z) \in (\beta) \Leftrightarrow \overline{AM} \mid\mid \overline{N} \Leftrightarrow \exists t \in R: \quad \overline{AM} = t \cdot \overline{N} \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 4t \\ y-2 = -t \\ z+3 = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2+4t \\ y = 2-t \\ z = -3t \end{cases} \text{ - ответ.}$$

Пример 6. Найти канонические и параметрические уравнения прямой (α), проходящей через точку $A(-2,\ 2,-3)$ параллельно прямой (γ): $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-1}$.
Решение. $\bar{l} = \{-2,\ 3,-1\}$ - направляющий вектор прямой (γ). Этот же вектор является направляющим вектором искомой прямой (α). Следовательно,
$M(x,y,z) \in (\alpha) \Leftrightarrow \overline{AM} \mid\mid \bar{l} \Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{AM}$, $\bar{l}$ пропорциональны $\Rightarrow$

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1} \text{ - канонические уравнения прямой } (\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = -2-2t \\ y = 2+3t \\ z = -1-t \end{cases} \text{ - параметрические}$$

уравнения прямой (α).

9.3. Расстояние от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Наиболее полезную информацию о взаимном расположении двух плоскостей, прямой и плоскости, двух прямых в пространстве можно извлечь из направляющих векторов прямых и нормалей к плоскостям.

Пример 8. Найти расстояние d от точки $A(-2,\ 2,-3)$ до плоскости $x - y - 2z - 1 = 0$.
Решение. $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1\cdot(-2) - 2 - 2\cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{6}}$.

Пример 9. При каком значении параметра k плоскость (P_1): $x + ky + 3z - 5 = 0$ параллельна плоскости (P_2): $x - y - 2z - 1 = 0$?
Решение. Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы $\overline{N}_1 = \{1,\ k,\ 3\}$ и $\overline{N}_2 = \{1,-1,-2\}$, т.е. должно быть $\frac{1}{1} = \frac{k}{-1} = \frac{3}{-2}$. Это

двойное равенство не выполняется ни при каком k, т.к. $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{-2}$. Следовательно, плоскости (P_1) и (P_2) не параллельны при всех значениях параметра k.

Пример 10. При каких значениях параметров k, m прямая (α): $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{k} = \frac{z-1}{-1}$ лежит в плоскости (P): $x - 2y + 3z - m = 0$?

Решение.

По каноническим уравнениям прямой (α) запишем ее параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 + kt \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

$(\alpha) \in (P) \Leftrightarrow$ все точки прямой (α) удовлетворяют уравнению плоскости $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall t \in R \quad (2-2t) - 2(-3+kt) + 3(1-t) - m = 0 \Rightarrow (-2k-5)t + (11-m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2k - 5 = 0 \\ 11 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ответ: $k = -2.5,\ m = 11$.

Можно эту задачу решить по другому. $\bar{l} = \{-2, k, -1\}$ - направляющий вектор прямой (α) и $M_0(2, -3, 1)$ - фиксированная точка этой прямой. $\bar{N} = \{1, -2, 3\}$ - вектор нормали к плоскости (P). Далее строим такую цепочку рассуждений.

$$(\alpha) \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{l} \perp \bar{N} \Rightarrow \bar{l} \cdot \bar{N} = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + k \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow k = -2.5 \\ M_0 \in (P) \Rightarrow 2 - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 - m = 0 \Rightarrow m = 11 \end{cases}.$$

Пример 11. Выяснить взаимное расположение двух прямых

$$(\alpha): \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{и} \quad (\beta): \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}.$$

Решение. Прямые в пространстве могут скрещиваться, могут пересекаться в одной точке, могут быть параллельны, могут совпадать. Выясним, какой из указанных четырех случаев реализуется в этом примере.

Из уравнения (α) выводим: $\bar{L}_\alpha = \{-2, 3, -1\} \,||\, (\alpha)$ и $M_\alpha(2, -3, 1) \in (\alpha)$.

Из уравнения (β) выводим: $\bar{L}_\beta = \{-1, 2, 3\} \,||\, (\beta)$ и $M_\beta(-1, 0, 3) \in (\beta)$.

$\overline{M_\alpha M_\beta} = \{3, 3, 2\}$.

Если прямые (α) и (β) пересекаются или параллельны, или совпадают, то тройка векторов $\bar{L}_\alpha$, $\bar{L}_\beta$, $\overline{M_\alpha M_\beta}$ - компланарна. А если прямые (α) и (β) скрещиваются, то тройка векторов $\bar{L}_\alpha$, $\bar{L}_\beta$, $\overline{M_\alpha M_\beta}$ -некомпланарна. Найдем смешанное произведение этих трех векторов.

$$\bar{L}_\alpha \ \bar{L}_\beta \ \overline{M_\alpha M_\beta} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 52 \neq 0 \Rightarrow \text{тройка } \bar{L}_\alpha, \bar{L}_\beta, \overline{M_\alpha M_\beta} \text{ -некомпланарна} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ прямые (α) и (β) скрещиваются.

Приведенные в занятиях 8, 9 примеры наглядно демонстрируют мощь векторных методов и исключительную роль условий: коллинеарности двух

векторов; ортогональности двух векторов; компланарности трех векторов при нахождении уравнений прямых и плоскостей.

Домашнее задание.

1. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1,-1,\ 2),\ M_2(2,-2,\ 3),\ M_3(1,-4,-1)$.
2. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей $x-y-z-3=0,\ \ 2x-y+2z+1=0$.
3. Найти точку пересечения прямой, проходящей через точку $P(-1,-1,\ 3)$ перпендикулярно плоскости $2x+y-z-5=0$, с этой плоскостью.

Занятие **10.** **Кривые второго порядка.**

10.1. Эллипс. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, график.
10.2. Гипербола. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, асимптоты, график.
10.3. Парабола. Каноническое уравнение. Параметр параболы, график.

Кривыми второго порядка на плоскости Oxy называются линии, неявное задание которых имеет вид:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E, F - заданные вещественные числа, (x, y) - координаты точек кривой. Наиболее важными линиями среди кривых второго порядка являются эллипс, гипербола, парабола.

10.1. Эллипс. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, график.

Определение эллипса. *Эллипсом называется плоская кривая, у которой сумма расстояний от двух фиксированных точек* F_1, F_2 *плоскости до любой точки* M *этой кривой есть постоянная величина, независящая от точки* M (т.е. $F_1M+F_2M=const \ \ \forall M$). *Точки* F_1, F_2 *называются фокусами эллипса.*

Каноническое уравнение эллипса: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Такое уравнение получается, если координатная ось Ox (или ось Oy) проходит через фокусы F_1, F_2, а начало координат – точка O - находится в центре отрезка F_1F_2 (рис.1). Эллипс (2) симметричен относительно осей координат и начала координат (центра эллипса). Постоянные $a>0$, $b>0$ называются **полуосями эллипса**.

Если эллипс задан уравнением (2), то фокусы эллипса находятся так.

1) Сначала определяем, где лежат фокусы: фокусы лежат на той координатной оси, на которой расположены бóльшие полуоси.
2) Затем вычисляется фокусное расстояние c (расстояние от фокусов до начала координат).

При $a>b$ фокусы лежат на оси Ox ; $c=\sqrt{a^2-b^2}$; $F_1(-c,\ 0),\ F_2(c,\ 0)$.

При $b>a$ фокусы лежат на оси Oy ; $c=\sqrt{b^2-a^2}$; $F_1(0,-c),\ F_2(0,\ c)$.

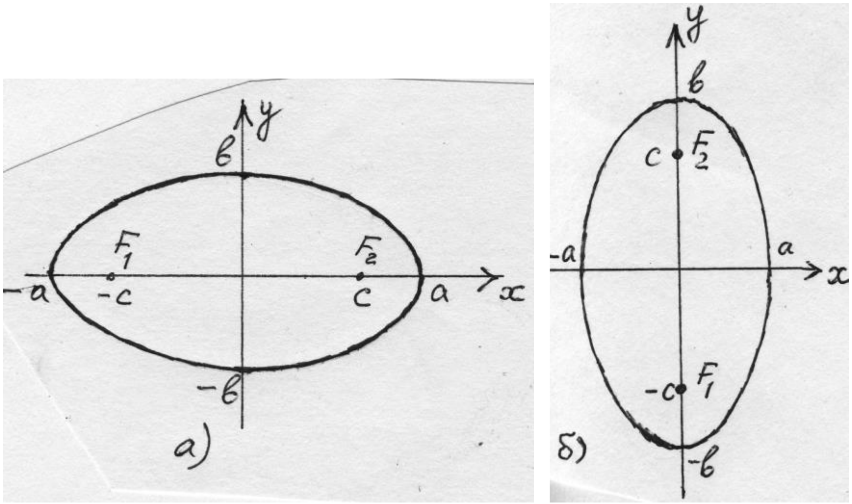


Рис. 1.

Эксцентриситетом эллипса называется величина: $e = \dfrac{c}{a}$ (при $a > b$); $e = \dfrac{c}{b}$ (при $b > a$).
У эллипса всегда $0 < e < 1$. Эксцентриситет служит характеристикой сжатия эллипса.

Если эллипс (2) переместить так, что центр эллипса попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а полуоси останутся параллельны осям Ox, Oy, то уравнение полученного эллипса имеет вид
$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

10.2. Гипербола. Каноническое уравнение. Полуоси, эксцентриситет, асимптоты, график.

Определение гиперболы. *Гиперболой называется плоская кривая, у которой абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек* F_1, F_2 *плоскости до любой точки* M *этой кривой есть постоянная величина, независящая от точки* M (т.е. $\left| F_1M - F_2M \right| = const \quad \forall M$). *Точки* F_1, F_2 *называются фокусами гиперболы.*

Каноническое уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ или $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. (3)

Такое уравнение получается, если координатная ось Ox (или ось Oy) проходит через фокусы F_1, F_2, а начало координат – точка O - находится в центре отрезка $F_1 F_2$.
Гиперболы (3) симметричны относительно осей координат и начала координат.
Постоянные $a > 0$, $b > 0$ называются **полуосями гиперболы**.

Фокусы гиперболы находятся так.

У гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ фокусы лежат на оси Ox: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ (рис. 2.а).

У гиперболы $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ фокусы лежат на оси Oy: $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ (рис. 2.б)

Здесь c - фокусное расстояние (расстояние от фокусов до начала координат). Оно вычисляется по формуле: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина:
$e = \dfrac{c}{a}$ (для $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$); $e = \dfrac{c}{b}$ (для $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).

У гиперболы всегда $e>1$.

Асимптотами гипербол (3) являются две прямые: $y=-\dfrac{b}{a}x$, $y=\dfrac{b}{a}x$. Обе ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам с ростом $|x|$.

Построение графика гиперболы следует проводить так: сначала по полуосям a,b строим вспомогательный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат; затем через противоположные вершины этого прямоугольника проводим прямые, это – асимптоты гиперболы; наконец изображаем ветви гиперболы, они касаются середин соответствующих сторон вспомогательного прямоугольника и приближаются с ростом $|x|$ к асимптотам (рис. 2).

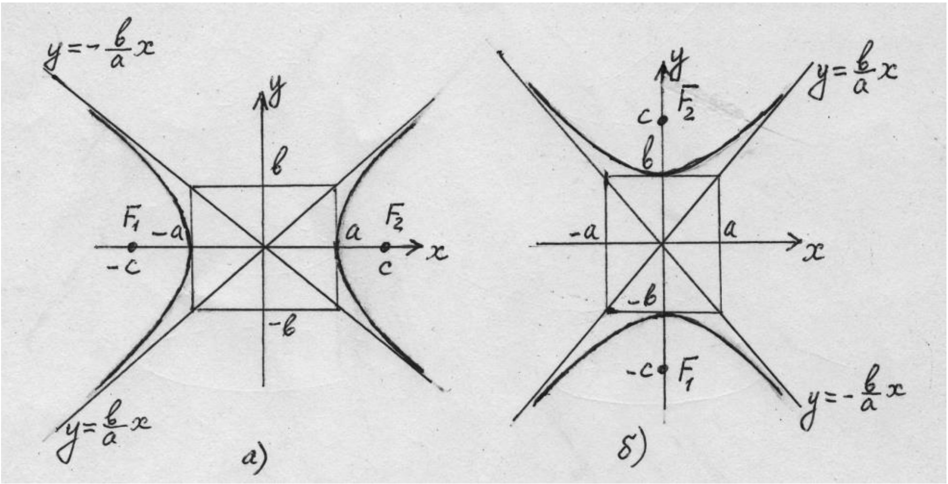


Рис. 2.

Если гиперболы (3) переместить так, что их центр попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а полуоси останутся параллельны осям Ox, Oy, то уравнение полученных гипербол запишутся в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

10.3. Парабола. Каноническое уравнение. Параметр параболы, график.

Определение параболы. *Параболой называется плоская кривая, у которой для любой точки M этой кривой расстояние от M до фиксированной точки F_* плоскости (называемой фокусом параболы) равно расстоянию от M до фиксированной прямой на плоскости* (называемой директрисой параболы).

Каноническое уравнение параболы: $$y^2=2px, \tag{4}$$

где p - постоянная, называемая **параметром** параболы.

Точка $O(0, 0)$ параболы (4) называется вершиной параболы. Ось Ox является осью симметрии. Фокус параболы (4) находится в точке $F_*\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, уравнение директрисы $x=-\dfrac{p}{2}$. Графики параболы (4) со значениями $p>0$ и $p<0$ приведены на рис. 3.а и 3.б соответственно.

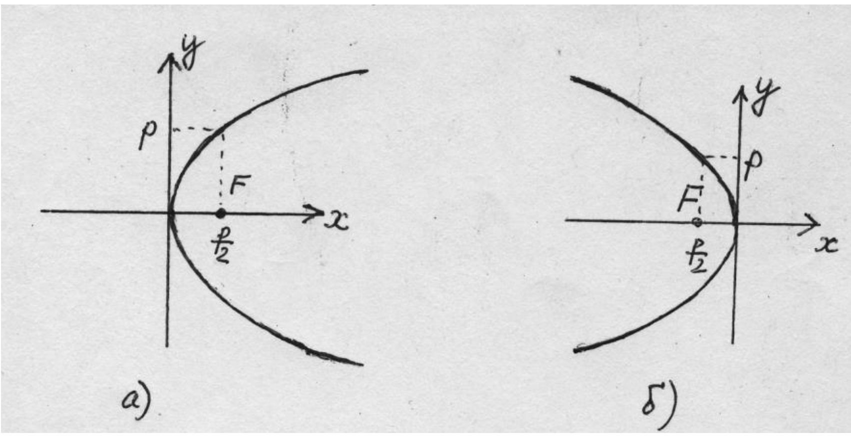


Рис. 3.

Уравнение $x^2 = 2py$ также определяет параболу на плоскости Oxy, у которой по сравнению с параболой (4), оси Ox, Oy поменялись местами.

Если параболу (4) переместить так, что ее вершина попадет в точку $P(x_0, y_0)$, а ось симметрии останется параллельна оси Ox, то уравнение полученной параболы имеют вид $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$.

Перейдем к примерам.

Пример 1. Кривая второго порядка задана уравнением $\dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(y+3)^2}{5} = 1$. Дать название этой кривой. Найти ее фокусы и эксцентриситет. Изобразить кривую и ее фокусы на плоскости Oxy.

Решение. Данная кривая является эллипсом с центром в точке $P(x_0 = 2, y_0 = -3)$ и полуосями $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{5}$. В этом легко убедиться, если провести замену $x - 2 = \tilde{x},\ y + 3 = \tilde{y}$. Это преобразование означает переход от заданной декартовой системы координат Oxy к новой декартовой системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$, у которой оси $P\tilde{x}, P\tilde{y}$ параллельны осям Ox, Oy. Это преобразование координат называется сдвигом системы Oxy в точку P. В новой системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$ уравнение кривой преобразуется в каноническое уравнение эллипса $\dfrac{\tilde{x}^2}{2} + \dfrac{\tilde{y}^2}{5} = 1$, его график приведен на рис. 4.

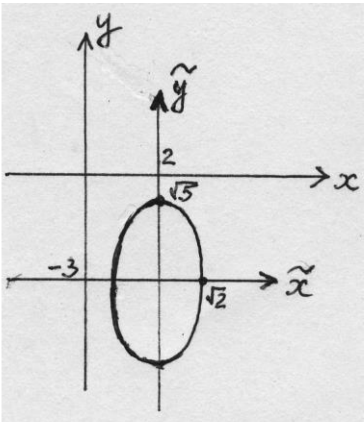


Рис. 4.

Найдем фокусы. $b > a$, поэтому фокусы F_1, F_2 эллипса расположены на оси $P\tilde{y}$.
$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$. В системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$: $F_1(\tilde{x}_1 = 0,\ \tilde{y}_1 = -c)$, $F_2(\tilde{x}_2 = 0,\ \tilde{y}_2 = c)$

$\Rightarrow\ F_1\left(\tilde{x}_1 = 0, \tilde{y}_1 - \sqrt{3}\right),\ F_2\left(\tilde{x}_2 = 0,\ \tilde{y}_2 = \sqrt{3}\right)$. Т.к. $x = \tilde{x} + 2,\ y = \tilde{y} - 3$, в старой системе координат Oxy фокусы имеют координаты $F_1\left(x_1 = 2, y_1 = -\sqrt{3} - 3\right),\ F_2\left(x_2 = 2,\ y_2 = \sqrt{3} - 3\right)$.

Пример 2. Дать название кривой второго порядка $2x^2 + 3y^2 - 4x + 12y - 6 = 0$ и привести ее график.
Решение. Выделим полные квадраты по слагаемым, содержащим переменные x и y.
$2x^2 - 4x = 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) = 2(x-1)^2 - 2$, $\quad 3y^2 + 12y = 3\left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) = 3(y+2)^2 - 12$.
Теперь, уравнение кривой можно переписать так:

$$2(x-1)^2 - 2 + 3(y+2)^2 - 12 - 6 = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 20 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{10} + \frac{(y+2)^2}{(20/3)} = 1.$$

Следовательно, заданная кривая является эллипсом с центром в точке $P(1,-2)$ и полуосями $a = \sqrt{10},\ b = \sqrt{20/3}$. Полученные сведения позволяют нарисовать его график.

Пример 3. Дать название и привести график линии $y = -\sqrt{5 - 2x^2}$.

Решение. $y = -\sqrt{5 - 2x^2} \Rightarrow y^2 = 5 - 2x^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow \dfrac{x^2}{(5/2)} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. Это – каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O(0,0)$ и полуосями $a = \sqrt{5/2},\ b = \sqrt{5}$.
Поскольку, $y = -\sqrt{5 - 2x^2} \le 0$, делаем заключение: заданное уравнение определяет на плоскости Oxy нижнюю половину эллипса (рис. 5).

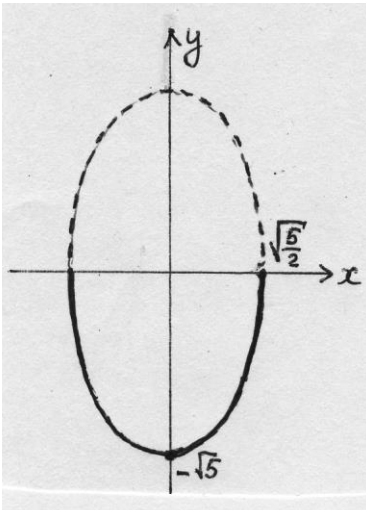


Рис.5.

Пример 4. Дать название кривой второго порядка $-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Найти ее фокусы, эксцентриситет. Привести график этой кривой.
Решение.
$-\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы с полуосями $a = \sqrt{6},\ b = \sqrt{4} = 2$.
$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6 + 4} = \sqrt{10}$ - фокусное расстояние.
Знак "минус" стоит перед слагаемым с x^2, поэтому фокусы F_1, F_2 гиперболы лежат на оси Oy: $F_1(0,-c),\ F_2(0,\ c) \Rightarrow F_1\left(0,-\sqrt{10}\right),\ F_2\left(0,\ \sqrt{10}\right)$. Ветви гиперболы располагаются над и под осью Ox.

$e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ - эксцентриситет гиперболы.

Асимптоты гиперболы: $y=\dfrac{b}{a}x,\ y=-\dfrac{b}{a}x \ \Rightarrow\ y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}x,\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{6}}x$.

Построение графика этой гиперболы осуществляется в соответствии с изложенным выше порядком действий: строим вспомогательный прямоугольник, проводим асимптоты гиперболы, рисуем ветви гиперболы (см. рис.2.б).

Пример 5. Выяснить вид кривой, заданной уравнением $x=-2+\sqrt{4y^2-5}$ и построить ее график.

Решение.

$x=-2+\sqrt{4y^2-5}\ \Rightarrow\ x+2=\sqrt{4y^2-5}\ \Rightarrow\ (x+2)^2=4y^2-5\ \Rightarrow\ (x+2)^2-4y^2=-5\ \Rightarrow$

$-\dfrac{(x+2)^2}{5}+\dfrac{y^2}{(5/4)}=1$ - гипербола с центром в точке $P(-2,\,0)$ и полуосями $a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{5/4}=\sqrt{5}/2$.

Т.к. $x+2=\sqrt{4y^2-5}\ge 0\ \Rightarrow\ x\ge -2$, заключаем: заданное уравнение определяет ту часть гиперболы, которая лежит Справа от прямой $x=-2$. Гиперболу лучше нарисовать во вспомогательной системе координат $P\tilde{x}\tilde{y}$, полученной из системы координат Oxy сдвигом $x+2=\tilde{x},\ y=\tilde{y}$, а затем жирной линией выделить нужную часть гиперболы (рис. 6).

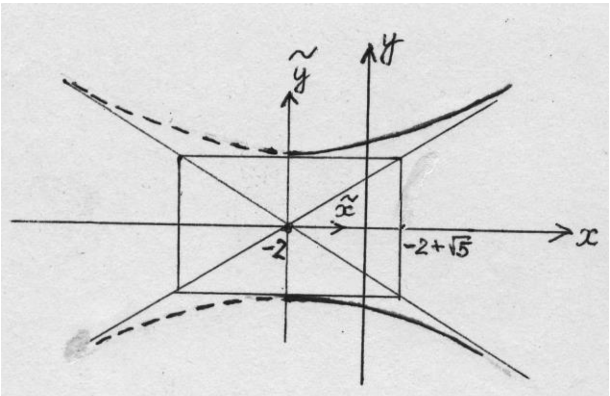


Рис.6.

Пример 6. Выяснить вид кривой $-4x-2y^2-6y+3.5=0$ и нарисовать ее график.

Решение. Выделим полный квадрат по слагаемым с переменной y:

$-2y^2-6y=-2\left(y^2+3y\right)=-2\left(y^2+2y\cdot 1.5+2.25-2.25\right)=-2(y+1.5)^2+4.4$.

Перепишем уравнение кривой. $-4x-2(y+1.5)^2+4.5+3.5=0\ \Rightarrow\ -4x+8=2(y+1.5)^2\ \Rightarrow$ $-4(x-2)=2(y+1.5)^2\ \Rightarrow\ (x-2)=-0.5(y+1.5)^2$. Это – уравнение параболы с вершиной в точке $P(2,\,-1.5)$. Преобразованием сдвига $x-2=\tilde{x},\ y+1.5=\tilde{y}$ уравнение параболы приводится к каноническому виду $\tilde{x}=-0.5\tilde{y}^2$, из которого видно, что $2p=-0.5\ \Rightarrow\ p=-0.25$ - параметр параболы. Фокус F параболы в системе $P\tilde{x}\tilde{y}$ имеет координаты $F\left(\tilde{x}=\dfrac{p}{2},\tilde{y}=0\right),\ \Rightarrow F(\tilde{x}=-0.25,\ \tilde{y}=0)$, а в системе Oxy (согласно преобразованию сдвига) $F(x=-0.25+2,\ y=0-1.5)\Rightarrow\ F(1.75,\,-1.5)$. График параболы приведен на рис. 7.

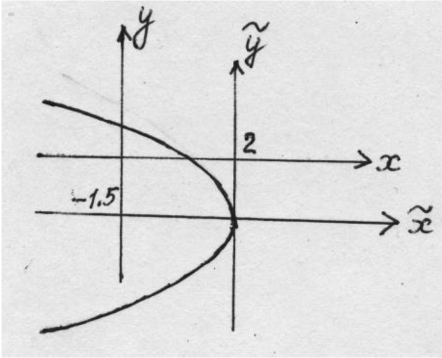


Рис. 7.

Домашнее задание.

1. Нарисовать эллипсы, заданные уравнениями: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; $\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Найти их полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет и указать на графиках эллипсов места расположения их фокусов.

2. Нарисовать гиперболы, заданные уравнениями: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; $-\frac{x^2}{9}+y^2=1$. Найти их полуоси, фокусное расстояние, эксцентриситет и указать на графиках гипербол места расположения их фокусов. Написать уравнения асимптот данных гипербол.

3. Нарисовать параболы, заданные уравнениями: $x=6y^2$; $x=-4y^2$. Найти их параметр, фокусное расстояние и указать на графиках парабол место расположения фокуса.

4. Уравнение $y=-4\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$ определяет часть кривой 2-го порядка. Найти каноническое уравнение этой кривой, записать ее название, построить ее график и выделить на нем ту часть кривой, которая отвечает исходному уравнению.

Занятие **11.** Поверхности второго порядка.

11.1. Канонические уравнения эллипсоида, конуса, гиперболоидов, параболоидов, цилиндров.
11.2. Построение графиков поверхностей второго порядка по их сечениям плоскостями, параллельными координатным плоскостям.
11.3. Построение графиков объемных тел, образованных поверхностями второго порядка и плоскостями.

Поверхностями второго порядка в пространстве $Oxyz$ называются поверхности, неявное задание которых имеет вид:

$$Ax^2+2Bxy+2Cxz+Dy^2+2Eyz+Fz^2+2Gx+2Ky+2Lz+M=0, \tag{0}$$

где $A, B, C, D, E, F, G, K, L, M$ - заданные вещественные числа, (x,y,z) - координаты точек поверхности. Наиболее важными и часто встречающимися поверхностями второго порядка являются: эллипсоид; гиперболоиды (однополостный, двуполостный); конус; параболоиды (эллиптический, гиперболический); цилиндры.

1. **Эллипсоид.** Каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

График эллипсоида приведен на рис. 1.

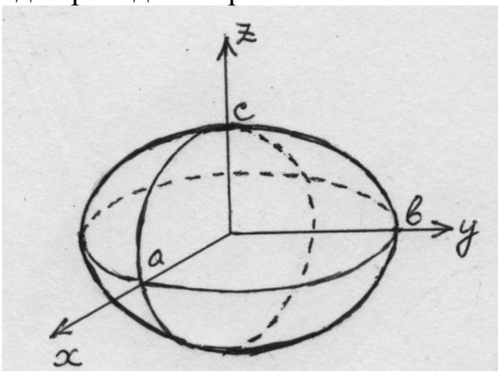


Рис. 1.

Эллипсоид (1) – замкнутая ограниченная поверхность, симметричная относительно начала координат $O(0,0,0)$, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Пересечение эллипсоида (1) плоскостью $Oxy\ (z=0)$ дает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Пересечение эллипсоида (1) плоскостью $Oxz\ (y=0)$ дает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Пересечение эллипсоида (1) плоскостью $Oyz\ (x=0)$ дает эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Точка O называется **центром эллипсоида** (1).

Если эллипсоид (1) "параллельно самому себе" сдвинут так, что центр эллипсоида попадет в точку $P(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение полученного эллипсоида имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

2. **Однополостный гиперболоид.** Его каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (2)$$

График однополостного гиперболоида приведен на рис. 2.

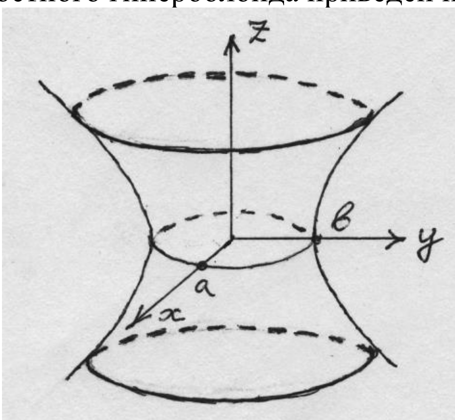


Рис. 2.

Гиперболоид (2) - неограниченная поверхность, симметричная относительно начала координат $O(0,0,0)$, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Пересечение гиперболоида (2) плоскостью $Oxy\,(z=0)$ дает эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Пересечение гиперболоида (2) плоскостью $Oxz\,(y=0)$ дает гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Пересечение гиперболоида (2) плоскостью $Oyz\,(x=0)$ дает гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Точка O называется **центром однополостного гиперболоида** (2).

Если гиперболоид (2) "параллельно самому себе" сдвинут так, что центр гиперболоида попадет в точку $P(x_0,y_0,z_0)$, то уравнение полученного однополостного гиперболоида имеет вид: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

3. **Двуполостный гиперболоид.** Его каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (3)$$

График двуполостного гиперболоида приведен на рис. 3.

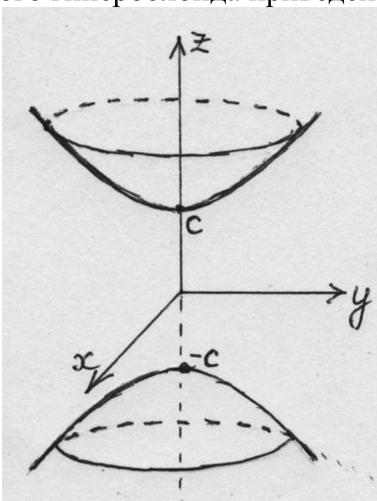


Рис. 3.

Гиперболоид (3) - поверхность, представленная двумя раздельными неограниченными кусками поверхностей. Гиперболоид (3) симметричен относительно начала координат $O(0,0,0)$, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Пересечение гиперболоида (3) плоскостью $Oxy\,(z=0)$ приводит к уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$, которому не удовлетворяет ни одна точка (x,y) на плоскости Oxy, т.е. гиперболоид (3) и плоскость Oxy не пересекаются.

Пересечение гиперболоида (3) плоскостью $Oxz\,(y=0)$ дает гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Пересечение гиперболоида (3) плоскостью $Oyz\,(x=0)$ дает гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Точка O называется **центром двуполостного гиперболоида** (3).

Если гиперболоид (3) "параллельно самому себе" сдвинут так, что центр гиперболоида попадет в точку $P(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение полученного двуполостного гиперболоида имеет вид: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$.

4. **Конус.** Его каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{4}$$

График конуса приведен на рис. 4.

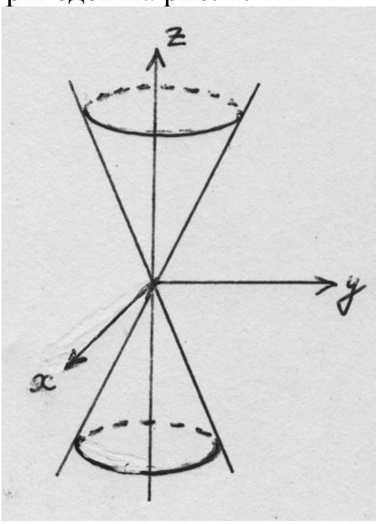


Рис. 4.

Конус (4) представлен двумя неограниченными кусками поверхностей, соединяющихся в начале координат $O(0,0,0)$. Конус (4) симметричен относительно начала координат O, координатных осей Ox, Oy, Oz и координатных плоскостей Oxy, Oxz, Oyz.

Пересечение конуса (4) плоскостью $Oxy\,(z=0)$ проводит к уравнению $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$, решением которого служит одна точка $(x=0, y=0)$, т.е. конус (4) пересекается плоскостью Oxy только в одной точке – начале координат.

Пересечение конуса (4) плоскостью $Oxz\,(y=0)$ приводит к уравнению $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, решением которого являются точки на двух прямых: $z=\dfrac{c}{a}x,\ \ z=-\dfrac{c}{a}x$.

Пересечение конуса (4) плоскостью $Oyz\,(x=0)$ приводит к уравнению $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, решением которого являются точки на двух прямых: $z=\dfrac{c}{b}y,\ \ z=-\dfrac{c}{b}y$.

Точка O называется **вершиной конуса** (4).

Если конус (4) "параллельно самому себе" сдвинут так, что вершина конуса попадет в точку $P(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение полученного конуса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0.$$

5. **Эллиптический параболоид.** Каноническое уравнение:

а) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$; б) $-z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. (5)

Графики эллиптического параболоида для случаев а), б) приведены на рис. 5.

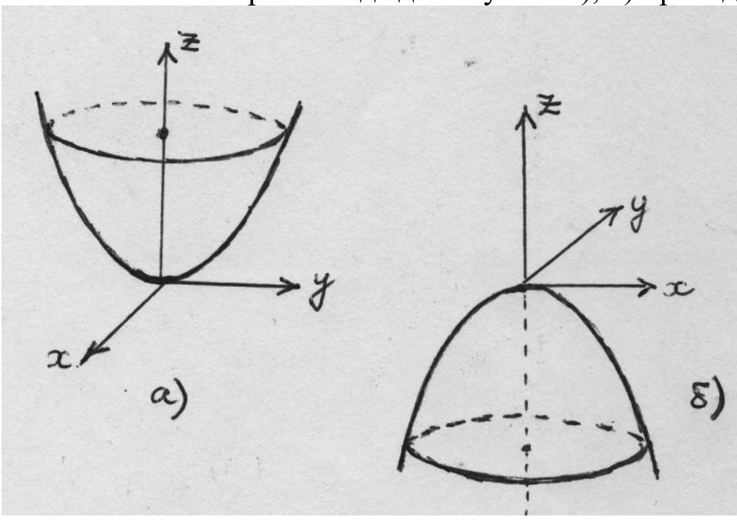


Рис. 5.

Эллиптические параболоиды (5) симметричны только относительно двух координатных плоскостей Oxz, Oyz .

Пересечение параболоида $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oxy\,(z = 0)$ имеет одну точку O .

Пересечение параболоида $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oxz\,(y = 0)$ дает параболу $z = \dfrac{x^2}{a^2}$.

Пересечение параболоида $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oyz\,(x = 0)$ дает параболу $z = \dfrac{y^2}{b^2}$.

Аналогично определяются точки и линии пересечения параболоида $-z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ плоскостями Oxy, Oxz, Oyz .

Точка O является **вершиной параболоидов** (5).

Уравнения параболоидов (5) с вершиной в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ имеет соответственно вид: а) $z - z_0 = \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2}$; б) $-(z - z_0) = \dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2}$.

6. **Гиперболический параболоид.** Каноническое уравнение:

а) $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$; б) $-z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$. (6)

Графики гиперболического параболоида для случаев а), б) приведены на рис. 6.

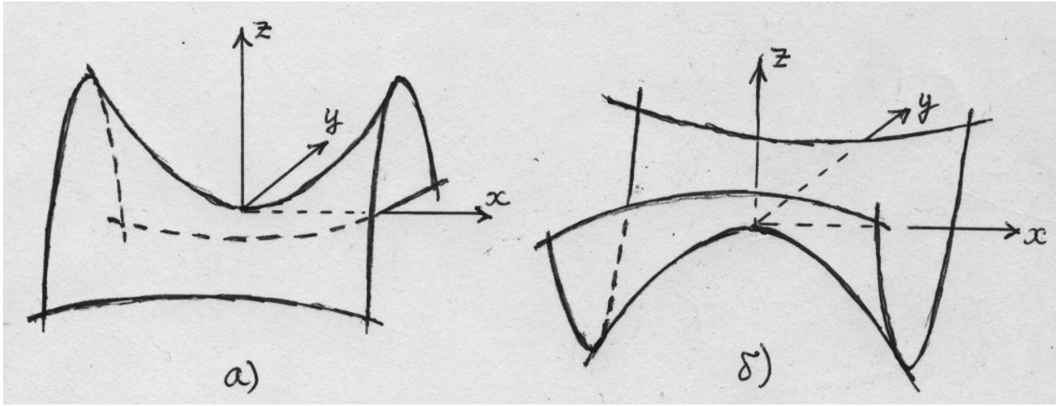


Рис. 6.

Гиперболические параболоиды (6) симметричны только относительно двух координатных плоскостей Oxz, Oyz.

Пересечение параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oxy\,(z=0)$ происходит по двум прямым: $y = \frac{a}{b}x,\ y = -\frac{b}{a}x$.

Пересечение параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oxz\,(y=0)$ дает параболу $z = \frac{x^2}{a^2}$.

Пересечение параболоида $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $Oyz\,(x=0)$ дает параболу $z = -\frac{y^2}{b^2}$.

Аналогично определяются линии пересечения параболоида $-z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ плоскостями Oxy, Oxz, Oyz.

Точка O называется **вершиной параболоидов** (6).

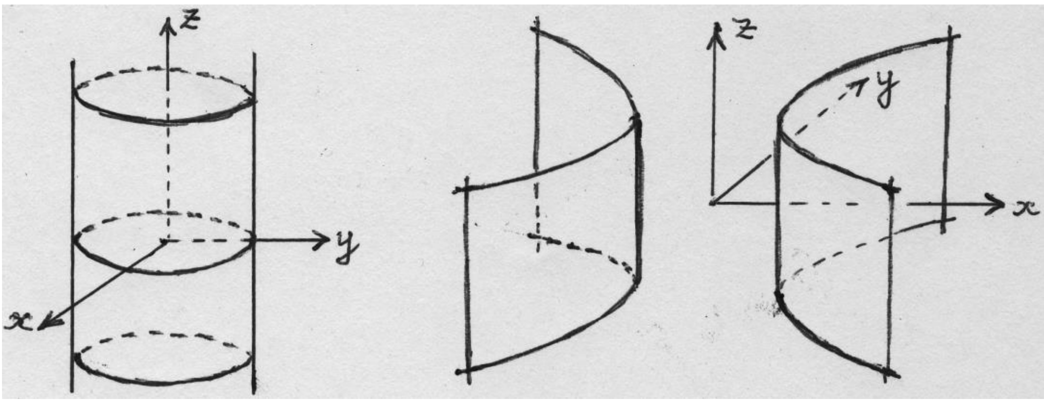
Уравнения параболоидов (6) с вершиной в точке $P(x_0, y_0, z_0)$ имеет соответственно вид: а) $z - z_0 = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$; б) $-(z-z_0) = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$.

7. **Цилиндры.**

7.1. Цилиндры второго порядка, параллельные оси Oz, задаются уравнением (0), в котором отсутствует координата z. Например,

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллиптический цилиндр. Его график представлен на рис. 7.а.

б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр. Его график изображен на рис. 7.б.



а) б)

Рис. 7.

7.2. Цилиндры второго порядка, параллельные оси Oy , задаются уравнением (0), в котором отсутствует координата y .

7.3. Цилиндры второго порядка, параллельные оси Ox , задаются уравнением (0), в котором отсутствует координата x .

Основное внимание при изучении поверхностей второго порядка следует уделить нахождению линий пересечения поверхностей с плоскостями и выработке навыков построения графиков этих поверхностей по их сечениям плоскостями. Приведем примеры на эту тему.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $-x^2-y^2+4z^2=4$. Дать ее название. Найти линии пересечения этой поверхности плоскостями $x=0$ и $z=c,\ c\in R$.

Решение.

1) $-x^2-y^2+4z^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{1}=-1$ - каноническое уравнение **двуполостного гиперболоида**, у которого $a^2=4,\ b^2=4,\ c^2=1 \Rightarrow a=2,\ b=2,\ c=1$.

2) Пересечением гиперболоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{1}=-1$ плоскостью $x=0$ (это – плоскость Oyz) является гипербола $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{1}=-1$.

3) Пересечение гиперболоида $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{1}=-1$ плоскостью $z=c,\ c\in R$ (это – плоскость, проходящая через точку $(0,0,c)$ параллельно плоскости Oxy) приводит к уравнению $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{c^2}{1}=-1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=c^2-1$. Отсюда видно, что плоскость $z=c,\ c\in R$ пересекается с гиперболоидом только при $c^2-1\ge 0 \Rightarrow c\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Линией пересечения служит окружность $x^2+y^2=r^2=4(c^2-1)$ с центром в точке $(0,0,c)$ и радиусом $r=2\sqrt{c^2-1}$. Отметим, что r растет вместе с ростом $|c|$. Таким образом, заданный двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения вокруг оси Oz . В соответствии с найденными сечениями нетрудно построить приходим график заданной поверхности.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $x^2-4y^2-4z^2=0$. Дать ее название. Найти линии пересечения этой поверхности плоскостями $x=c,\ c\in R$ и $z=0$, и с их помощью построить график этой поверхности.
Решение.

1) $x^2-4y^2-4z^2=0 \Rightarrow -\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=0$ - каноническое уравнение конуса с вершиной в начале координат. Ось Ox проходит внутри конуса. $a^2=4,\ b^2=1,\ c^2=1 \Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1$.

2) Пересечением конуса $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=0$ с плоскостью $z=0$ (это – плоскость Oxy) служит пара прямых: $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=0 \Rightarrow y=\frac{x}{2},\ y=-\frac{x}{2}$.

3) Пересечение конуса $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=0$ с плоскостью $x=c,\ c\in R$ (эта плоскость проходит через точку $(c,0,0)$ параллельно плоскости Oyz) дает окружность:
$-\frac{c^2}{4}+\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=0 \Rightarrow y^2+z^2=\frac{c^2}{4}$ с центром в точке $(c,0,0)$ и радиусом $r=\frac{|c|}{2}$.
Следовательно, данный конус – конус вращения вокруг оси Ox.
В соответствии с проведенным исследованием строим график этого конуса (рис. 8).

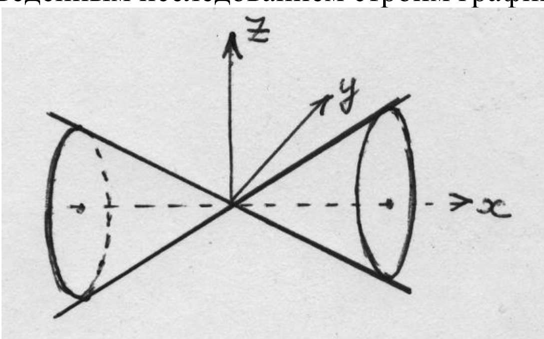


Рис. 8.

Домашнее задание.
1. Записать канонические уравнения эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов, конуса, эллиптического и гиперболического параболоидов и привести их графики.
1. Найти линии пересечения поверхности второго порядка $x^2-4y^2-4z^2=4$ координатными плоскостями. Затем, с помощью найденных сечений построить график этой поверхности. Привести название поверхности.
2. Найти линии пересечения поверхности второго порядка $2x^2+y^2+z^2=8$ координатными плоскостями. Затем, с помощью найденных сечений построить график этой поверхности. Привести название поверхности.
3. Найти линии пересечения поверхности второго порядка $x^2+2y^2-6=0$ плоскостями: $x=0$; $y=0$; $z=c,\ c\in R$. С помощью найденных сечений построить график этой поверхности. Привести название поверхности.

Занятие **13.** **Многочлены.**

13.1. Корни многочлена, их кратность. Деление многочлена на многочлен (алгоритм Евклида). Целая и дробная части отношения двух многочленов.
13.2. Теорема Безу. Основная теорема алгебры многочленов.
13.3. Многочлены с действительными коэффициентами: свойство их комплексных корней; разложение над полем действительных и комплексных чисел.

Корни многочлена, их кратность. Теорема Безу. Основная теорема алгебры многочленов.

Многочленом $n-$го порядка одной переменной x называется функция $f(x)$ вида

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots , a_1, a_0$ - заданные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Порядок многочлена определяется максимальной степенью x^n. Например,

1) $f(x)=-x^3+4x+3$ - многочлен 3-го порядка, т.к. x^3 - максимальная степень в данном многочлене. Этот многочлен имеет следующие коэффициенты: $a_3=-1,\ a_2=0,\ a_1=4,\ a_0=3.$

2) $f(x)=5x^2-2x-4$ - многочлен 2-го порядка. Его коэффициенты: $a_2=5,\ a_1=-2,\ a_0=-4.$

3) $f(x)=3x+2$ - многочлен 1-го порядка. Его коэффициенты: $a_1=3,\ a_0=2.$

4) $f(x)=6$ - многочлен нулевого порядка, $a_0=6$.

Корнями многочлена (1) называются решения уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Например,

1) многочлен $f(x)=3x+2$ имеет один действительный корень $x=-\frac{2}{3}$, т.к. уравнение $3x+2=0$ имеет только одно решение $x=-\frac{2}{3}$,

2) многочлен $f(x)=x^2-x+1$ имеет два комплексных корня $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, являющихся решениями квадратного уравнения $x^2-x+1=0$.

Эти примеры показывают, что многочлен с действительными коэффициентами может иметь как действительные, так и комплексные корни.

Корень многочлена (1) является корнем кратности k, если он встречается k раз среди всех корней уравнения (2). Например,

1) многочлен $f(x)=3x+2$ имеет один корень $x=-\frac{2}{3}$. Это означает, что $x=-\frac{2}{3}$ является однократным корнем (или корнем кратности 1).

2) $x_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ - корни кратности 1 многочлена $f(x)=x^2-x+1$.

3) многочлен $f(x)=x^5+3x^4+3x^3+x^2$ можно переписать следующим образом:
$f(x)=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=0 \Rightarrow f(x)=x^2(x+1)^3=xx(1+x)(1+x)(1+x)$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет пять корней: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=-1,\ x_4=-1,\ x_5=-1$. И значит, $x=0$ - корень кратности 2, и $x=-1$ - корень кратности 3 многочлена $f(x)$.

Пример 1. Найти корни многочлена $f(x)=x^9+2x^7+x^5$ и указать их кратность.

Решение. $x^9+2x^7+x^5=x^5\left(x^4+2x^2+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)^2=x^5(x-i)^2(x+i)^2=0 \Rightarrow$
$x=0$ - корень кратности 2, и $x=-1$ - корень кратности 3 многочлена $f(x)$.
- корень кратности 5, и $x=i,\ x=-i$ - корни кратности 2 многочлена $f(x)$.

Опять отметим, что многочлен с действительными коэффициентами из примера 1 наряду с действительным корнем $x=0$ имеет также комплексные корни $x=i,\ x=-i$.

Нахождение всех корней произвольно заданного многочлена часто бывает проблематичным. Если корни многочленов 1-го и 2-го порядка находятся достаточно просто, то поиск корней многочленов 3-го и 4-го порядка алгебраическими методами хотя и возможен, но уже не так прост: громоздкие аналитические выкладки (см., например, Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике, пункты: 1.8-3, … , 1.8.-6.) препятствуют широкому практическому применению аналитических методов нахождения корней этих многочленов. **Для многочленов 5-го и более высокого порядков нахождение корней алгебраическими методами (т.е. с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень действительных чисел), в общем случае, невозможно**. Поэтому, обычно корни многочленов выше 2-го порядка находят в приближенном виде вычислительными методами (эти методы изучаются в курсе математического анализа и численных методов). Далее рассматриваются примеры, в которых нахождение корней многочлена либо сводится к решению квадратных уравнений, либо не потребуется.

Деление многочлена на многочлен (алгоритм Евклида). Целая и дробная части отношения двух многочленов.

Рассмотрим отношение двух многочленов $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, называемое дробно рациональной функцией: $P_n(x)=p_n x^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$, $Q_m(x)=q_m x^m+q_{m-1}x^{m-1}+\ldots+q_1x+q_0$ - многочлены степени n, m соответственно. **Если $n<m$, то $f(x)$ называется правильной дробно рациональной функцией (или проще, правильной дробью). Если же $n\ge m$, то $f(x)$ называется неправильной дробно рациональной функцией (или неправильной дробью)**. Для неправильной дроби справедлива следующая теорема.

Теорема. Неправильную дробь $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно разложить в сумму многочлена и правильной дроби: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=G_{n-m}(x)+\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, где $G_{n-m}(x)=g_{n-m}x^{n-m}+\ldots+g_1x+g_0$ - многочлен степени $n-m$, и $R_k(x)=r_kx^k+\ldots+r_1x+r_0$ - многочлен степени $k<m$. Такое разложение единственно. **Многочлен $G_{n-m}(x)$ называется целой частью, правильная дробь $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ - дробной частью, многочлен $R_k(x)$ - остатком от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.**

Нахождение целой части и остатка от деления многочлена на многочлен производится по алгоритму Евклида. Приведем применение этого алгоритма на конкретных примерах.

Пример 2. Найти целую часть и остаток от деления многочлена $P_5(x)=6x^5-4x^4+7x^2+3x-8$ на многочлен $Q_3(x)=2x^3+x^2-3x-1$.

Решение. ***1-й шаг*** алгоритма Евклида.

Начало схемы алгоритма.

$$\begin{array}{l|l} 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\ & cx^i \end{array}$$

Подбираем постоянные c, i так, чтобы при умножении cx^i на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ получился старший член $6x^5$ многочлена $P_5(x)$. Очевидно, следует взять $c=2, i=2$. Подставляем $cx^i=2x^2$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$. В результате получим многочлен $S_5(x)=6x^5-2x^4-6x^3-2x^2$. Записываем его слева под многочленом $P_5(x)$. Находим разность $P_5(x)-S_5(x)=P_4(x)=-2x^4+6x^3+9x^2+3x-8$ и записываем этот многочлен слева под чертой под многочленом $S_5(x)$. Степень многочлена $P_4(x)$ больше степени делителя (многочлена $Q_3(x)$), поэтому алгоритм Эвклида имеет продолжение.

2-й шаг. Записываем итоги вычислений 1-го шага. Прибавим слева к слагаемому $2x^2$ новый член ex^j.

Продолжение схемы алгоритма.

$$\begin{array}{l|l} \_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\ \underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2+ex^j \\ -2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 & \end{array}$$

Константы $e,\ j$ подбираем так, чтобы при умножении ex^j на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ получилось $-2x^4$. Очевидно, $e=-1,\ j=1$. Подставляем $ex^j=-x$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$, в результате получим многочлен $S_4(x)=-2x^4-x^3+3x^2+x$. Записываем этот многочлен слева под многочленом $P_4(x)$. Находим разность $P_4(x)-S_4(x)=P_3(x)$, где $P_3(x)=7x^3+6x^2+2x-8$ и записываем этот многочлен слева под чертой под $S_3(x)$. Степень многочлена $P_3(x)$ равна степени делителя (многочлена $Q_3(x)$), поэтому алгоритм Эвклида продолжается.

3-й шаг. Записываем итоги вычислений 2-го шага. Прибавим слева к слагаемым $2x^2-x$ новый член ux^l.

Продолжение схемы алгоритма.

$$\begin{array}{l|l} \_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\ \underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2-x+ux^l \\ \_\ -2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 & \\ \underline{-2x^4-x^3+3x^2+x} & \\ \quad 7x^3+6x^2+2x-8 & \end{array}$$

Константы u,l подбираем так, чтобы при умножении ex^j на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ было равно $7x^3$. Очевидно, $u=3.5,\ j=0$. Подставляем $ux^l=3.5$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$, в результате получим многочлен $S_3(x)=7x^3+3.5x^3-10.5x^2-3.5$. Записываем этот многочлен слева под $P_3(x)$. Находим разность $P_3(x)-S_3(x)=P_2(x)=2.5x^2+12.5x-4.5$ и записываем ее слева под чертой под $S_3(x)$. Степень многочлена $P_2(x)$ меньше степени делителя $Q_3(x)$, поэтому алгоритм Евклида закончился. Ответы таковы: целая часть и остаток от деления многочлена $P_5(x)$ на многочлен $Q_3(x)$ соответственно равны $G_2(x)=2x^2-x+3.5$ и $R_2(x)=2.5x^2+12.5x-4.5$. В окончательном виде схема алгоритма Евклида выглядит так.

$$\begin{array}{l|l} \_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\ \underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2-x+3.5 \\ \_\ -2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 & \\ \underline{-2x^4-x^3+3x^2+x} & \\ \quad \_\ 7x^3+6x^2+2x-8 & \\ \quad \underline{7x^3+3.5x^2-10.5x-3.5} & \\ \qquad 2.5x^2+12.5x-4.5 & \end{array}$$

Если остаток $R_m(x)$ от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_k(x)$ равен нулю, то многочлен $P_n(x)$ **нацело делится** на многочлен $Q_k(x)$. В этом случае многочлен $Q_k(x)$

называется **делителем** многочлена $P_n(x)$, и многочлен $P_n(x)$ можно записать в виде произведения $P_n(x)=G_{n-k}(x)\cdot Q_k(x)$.

Пример 3. Разложить в произведение многочлен $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3$, если известно, что многочлен $Q_2(x)=x^2+2x+1$ нацело делит многочлен $P_5(x)$.

Решение. С помощью алгоритма Евклида найдем целую часть $G_3(x)$ от деления $P_5(x)$ на $Q_2(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
-\; 2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\
\underline{2x^5+4x^4+2x^3\qquad\qquad\quad} & 2x^3+x+3 \\
\qquad\quad -\; x^3+5x^2+7x+3 & \\
\qquad\quad \underline{x^3+2x^2+x\qquad} & \\
\qquad\qquad -\; 3x^2+6x+3 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^2+6x+3} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $G_3(x)=2x^3+x+3$ и многочлен $P_5(x)$ можно разложить в произведение:

$$P_5(x)=G_3(x)\cdot Q_2(x) \quad\Rightarrow\quad 2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3=\left(2x^3+x+3\right)\left(x^2+2x+1\right).$$

2. Особую роль играет деление многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_1(x)=x-c$.

Справедлива следующая **теорема Безу**. Остаток от деления многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ на многочлен $Q_1(x)=x-c$ равен $P_n(c)=P_n(x=c)$.

Следствие теоремы Безу. Если $x=c$ - корень многочлена $P_n(x)$ степени $n>1$, то многочлен $P_n(x)$ нацело делится на многочлен $Q_1(x)=x-c$, т.е. $P_n(x)=G_{n-1}(x)\cdot(x-c)$, где $G_{n-1}(x)$ - многочлен степени $n-1$.

Основная теорема алгебры многочленов: любой многочлен степени n имеет ровно n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность.

Согласно этой теореме любой многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ с комплексными коэффициентами разлагается в следующее произведение

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_s)^{k_s}, \qquad (k_1+k_2+...+k_s=n) \tag{1}$$

где $x_1, x_2, ..., x_s$ - все корни многочлена $P_n(x)$, имеющие кратности $k_1, k_2, ..., k_s$ соответственно. **Такое разложение называется разложением многочлена $P_n(x)$ над множеством комплексных чисел (над полем C)**. При разложении многочлена над полем C автоматически считается, что x может принимать любые комплексные значения.

Линейные многочлены $x-x_1$, $x-x_2$,..., $x-x_s$ являются **неприводимыми многочленами над полем C**. Многочлен называется **неприводимым над заданным множеством чисел**, если его нельзя разложить в произведение двух многочленов со степенями один и выше. Очевидно, что **любой многочлен степени 1 неприводим над полем C**, а **любой многочлен степени 2 и выше приводим над полем C**, т.к. согласно основной теореме его можно разложить в произведение многочленов.

Пример 4. Разложить над полем C многочлен $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3$.

Решение. Согласно примеру 3 заданный многочлен разлагается в произведение $P_5(x)=\left(2x^3+x+3\right)\left(x^2+2x+1\right)$. Первый множитель – многочлен $G_3(x)=2x^3+x+3$ имеет корень $x=-1$, т.к. $G_3(-1)=2(-1)^3-1+3=0$. Следовательно, $G_3(x)$ нацело делится на многочлен $x+1$. По алгоритму Евклида находим результат деления $G_3(x)$ на $x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\ 2x^3+x+3 & x+1 \\
\underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-2x+3 \\
-\ -2x^2+x+3 & \\
\underline{-2x^2-2x} & \\
-\ 3x+3 & \\
\underline{3x+3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Значит, $G_3(x)=2x^3+x+3=(2x^2-2x+3)(x+1)$.

$$2x^2-2x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{5}i}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+3=2\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_3(x)=2(x+1)\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right].$$

Поскольку, $x^2+2x+1=(x+1)^2$, получим такое разложение многочлена $P_5(x)$ над полем C.

$$P_5(x)=2(x+1)^3\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right].$$

Если многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ имеет действительные коэффициенты, то наряду с его разложением над полем C (когда x считается комплексной величиной) возможно также разложение этого многочлена на множестве действительных чисел (над полем R), когда переменная x принимает только действительные значения, и соответственно $P_n(x)$ принимает только действительные значения. При разложении многочлена с действительными коэффициентами над полем R следует помнить, что не все многочлены второго порядка приводимы над полем R. Например, многочлен $2x^2-2x+3$ приводим над полем C, он допускает разложение $2x^2-2x+3=2\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]$ и неприводим над полем R, т.к. каждый из множителей в квадратных скобках принимает комплексные значения при действительных значениях переменной x. Поэтому, разложение многочлена $P_5(x)$ из примера 4 над полем R будет иметь следующий вид: $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3=2(x+1)^3(x^2-x+1.5)$. Здесь каждый из множителей принимает только действительные значения при действительных x. Чтобы получить это разложение, нужно перемножить квадратные скобки в найденном выше разложении многочлена $P_5(x)$ над полем C.

Следует помнить также следующий факт: если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_*=a+bi$, то комплексное сопряжение этого корня $\bar{x}_*=a-bi$ также является корнем этого многочлена. Согласно этому факту и основной теореме алгебры многочленов разложение многочлена с действительными коэффициентами над полем R в общем случае имеет следующий вид

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}...(x-x_t)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}, \qquad (2)$$

где $x_1,\dots,x_t$ - действительные корни кратности $k_1,\dots,k_t$ соответственно, а квадратные многочлены $x^2+p_1x+q_1,\dots,x^2+p_rx+q_r$ имеют комплексно сопряженные корни.

Пример 5. Найти разложения многочлена $P_8(x)=x^8-8x^7+29x^6-60x^5+76x^4-56x^3+20x^2$ на множестве комплексных (над полем C) и на множестве действительных (над полем R) чисел, если известно, что $x_*=1+i$ - корень кратности 2 этого многочлена.

Решение.

1) $P_8(x)=x^2\left(x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20\right)\Rightarrow x=0$ - действительный корень кратности 2 многочлена $P_8(x)$.

2) $P_8(x)$ - многочлен с действительными коэффициентами $\Rightarrow$ вместе с комплексным корнем $x_*=1+i$ кратности 2 этот многочлен имеет корень $\bar{x}_*=1-i$ тоже кратности 2 $\Rightarrow$ в разложении многочлена $P_8(x)$ над полем C (см. формулу (1)) будет присутствовать множитель $[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2=[(x-1-i)(x-1+i)]^2=\left[(x-1)^2-i^2\right]^2=\left(x^2-2x+2\right)^2=$ $=x^4-4x^3+8x^2-8x+4\Rightarrow$ многочлен $P_8(x)$, и значит, многочлен $Q_6(x)=x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20$ нацело делится на многочлен $G_4(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x+4$.

3) Найдем результат деления $Q_6(x)$ на $G_4(x)$ по алгоритму Евклида.

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20 & x^4-4x^3+8x^2-8x+4 \\
\underline{x^6-4x^5+8x^4-8x^3+4x^2} \qquad\qquad & x^2-4x+5 \\
-\; -4x^5+21x^4-52x^3+72x^2-56x+20 & \\
\underline{-4x^5+16x^4-32x^3+32x^2-16x} \qquad & \\
-\; 5x^4-20x^3+40x^2-40x+20 & \\
\underline{5x^4-20x^3+40x^2-40x+20} & \\
0 \qquad\qquad &
\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad P_8(x)=x^2[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2\left(x^2-4x+5\right).$$

4) Теперь найдем корни квадратного трехчлена x^2-4x+5.

$$x^2-4x+5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i\Rightarrow x^2-4x+5=[x-(2+i)]\cdot[x-(2-i)].$$

Следовательно, **разложение заданного многочлена** $P_8(x)$ **над полем** C имеет вид

$$P_8(x)=x^2[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2[x-(2+i)][x-(2-i)].$$

Из этого разложения видно, что $P_8(x)$ имеет корни $x=0,\ x=1+i,\ x=1-i$ кратности 2 и корни $x=2+i,\ x=2-i$ кратности 1.

Чтобы найти разложение многочлена $P_8(x)$ над полем R нужно перемножить скобки с сопряженными комплексными корнями. Т.к. $[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2=\left(x^2-2x+2\right)^2$ и $[x-(2+i)]\cdot[x-(2-i)]=x^2-4x+5$, получаем **следующее разложение многочлена** $P_8(x)$ **над полем** R: $\quad P_8(x)=x^2\left(x^2-2x+2\right)^2\left(x^2-4x+5\right)$.

Домашнее задание.

1. Найти все корни многочлена $p(x)=x(x-1)^3(x+3)^4(x-1-i)^2(x-1+i)^2$ и указать их кратность.
2. Найти целую и дробную части отношения $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)=2x^6-3x^5-x-1,\ q(x)=-x^3+2x$.

3. Найти разложения многочлена $p(x)=x^8-2x^4+1$ на множестве комплексных и на множестве действительных чисел.

Занятие **13.** **Многочлены.**

13.1. Корни многочлена, их кратность. Деление многочлена на многочлен (алгоритм Евклида). Целая и дробная части отношения двух многочленов.
13.2. Теорема Безу. Основная теорема алгебры многочленов.
13.3. Многочлены с действительными коэффициентами: свойство их комплексных корней; разложение над полем действительных и комплексных чисел.

Корни многочлена, их кратность. Теорема Безу. Основная теорема алгебры многочленов.

Многочленом $n-$го порядка одной переменной x называется функция $f(x)$ вида

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ - заданные числа, называемые коэффициентами многочлена.

Порядок многочлена определяется максимальной степенью x^n. Например,

1) $f(x)=-x^3+4x+3$ - многочлен 3-го порядка, т.к. x^3 - максимальная степень в данном многочлене. Этот многочлен имеет следующие коэффициенты: $a_3=-1,\ a_2=0,\ a_1=4,\ a_0=3.$

2) $f(x)=5x^2-2x-4$ - многочлен 2-го порядка. Его коэффициенты: $a_2=5,\ a_1=-2,\ a_0=-4.$

3) $f(x)=3x+2$ - многочлен 1-го порядка. Его коэффициенты: $a_1=3,\ a_0=2.$

4) $f(x)=6$ - многочлен нулевого порядка, $a_0=6$.

Корнями многочлена (1) называются решения уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{2}$$

Например,

1) многочлен $f(x)=3x+2$ имеет один действительный корень $x=-\dfrac{2}{3}$, т.к. уравнение $3x+2=0$ имеет только одно решение $x=-\dfrac{2}{3}$,

2) многочлен $f(x)=x^2-x+1$ имеет два комплексных корня $x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, являющихся решениями квадратного уравнения $x^2-x+1=0$.

Эти примеры показывают, что многочлен с действительными коэффициентами может иметь как действительные, так и комплексные корни.

Корень многочлена (1) является корнем кратности k, если он встречается k раз среди всех корней уравнения (2). Например,

1) многочлен $f(x)=3x+2$ имеет один корень $x=-\dfrac{2}{3}$. Это означает, что $x=-\dfrac{2}{3}$ является однократным корнем (или корнем кратности 1).

2) $x_1=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \ x_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ - корни кратности 1 многочлена $f(x)=x^2-x+1$.

3) многочлен $f(x)=x^5+3x^4+3x^3+x^2$ можно переписать следующим образом:
$f(x)=x^2\left(x^3+3x^2+3x+1\right)=0 \ \Rightarrow\ f(x)=x^2(x+1)^3=xx(1+x)(1+x)(1+x)$. Следовательно, многочлен $f(x)$ имеет пять корней: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=-1,\ x_4=-1,\ x_5=-1$. И значит, $x=0$ - корень кратности 2, и $x=-1$ - корень кратности 3 многочлена $f(x)$.

Пример 1. Найти корни многочлена $f(x)=x^9+2x^7+x^5$ и указать их кратность.

Решение. $x^9+2x^7+x^5=x^5\left(x^4+2x^2+1\right)=x^5\left(x^2+1\right)^2=x^5(x-i)^2(x+i)^2=0 \ \Rightarrow$
$x=0$ - корень кратности 2, и $x=-1$ - корень кратности 3 многочлена $f(x)$.
- корень кратности 5, и $x=i,\ x=-i$ - корни кратности 2 многочлена $f(x)$.

Опять отметим, что многочлен с действительными коэффициентами из примера 1 наряду с действительным корнем $x=0$ имеет также комплексные корни $x=i,\ x=-i$.

Нахождение всех корней произвольно заданного многочлена часто бывает проблематичным. Если корни многочленов 1-го и 2-го порядка находятся достаточно просто, то поиск корней многочленов 3-го и 4-го порядка алгебраическими методами хотя и возможен, но уже не так прост: громоздкие аналитические выкладки (см., например, Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике, пункты: 1.8-3, … , 1.8.-6.) препятствуют широкому практическому применению аналитических методов нахождения корней этих многочленов. **Для многочленов 5-го и более высокого порядков нахождение корней алгебраическими методами (т.е. с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в рациональную степень действительных чисел), в общем случае, невозможно**. Поэтому, обычно корни многочленов выше 2-го порядка находят в приближенном виде вычислительными методами (эти методы изучаются в курсе математического анализа и численных методов). Далее рассматриваются примеры, в которых нахождение корней многочлена либо сводится к решению квадратных уравнений, либо не потребуется.

Деление многочлена на многочлен (алгоритм Евклида). Целая и дробная части отношения двух многочленов.

Рассмотрим отношение двух многочленов $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, называемое дробно рациональной функцией: $P_n(x)=p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+\ldots+p_1x+p_0$, $Q_m(x)=q_mx^m+q_{m-1}x^{m-1}+\ldots+q_1x+q_0$ - многочлены степени n, m соответственно. **Если $n<m$, то $f(x)$ называется правильной дробно рациональной функцией (или проще, правильной дробью). Если же $n\ge m$, то $f(x)$ называется неправильной дробно рациональной функцией (или неправильной дробью)**. Для неправильной дроби справедлива следующая теорема.

Теорема. Неправильную дробь $f(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно разложить в сумму многочлена и правильной дроби: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=G_{n-m}(x)+\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$, где $G_{n-m}(x)=g_{n-m}x^{n-m}+\ldots+g_1x+g_0$ - многочлен степени $n-m$, и $R_k(x)=r_kx^k+\ldots+r_1x+r_0$ - многочлен степени $k<m$. Такое разложение единственно. **Многочлен $G_{n-m}(x)$ называется целой частью, правильная дробь $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ - дробной частью, многочлен $R_k(x)$ - остатком от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.**

Нахождение целой части и остатка от деления многочлена на многочлен производится по алгоритму Евклида. Приведем применение этого алгоритма на конкретных примерах.

Пример 2. Найти целую часть и остаток от деления многочлена $P_5(x)=6x^5-4x^4+7x^2+3x-8$ на многочлен $Q_3(x)=2x^3+x^2-3x-1$.

Решение. ***1-й шаг*** алгоритма Евклида.

Начало схемы алгоритма.

$$\begin{array}{r|l} 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\ & cx^i \end{array}$$

Подбираем постоянные c, i так, чтобы при умножении cx^i на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ получился старший член $6x^5$ многочлена $P_5(x)$. Очевидно, следует взять $c=2, i=2$. Подставляем $cx^i=2x^2$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$. В результате получим многочлен $S_5(x)=6x^5-2x^4-6x^3-2x^2$. Записываем его слева под многочленом $P_5(x)$. Находим разность $P_5(x)-S_5(x)=P_4(x)\ =-2x^4+6x^3+9x^2+3x-8$ и записываем этот многочлен слева под чертой под многочленом $S_5(x)$. Степень многочлена $P_4(x)$ больше степени делителя (многочлена $Q_3(x)$), поэтому алгоритм Эвклида имеет продолжение.

2-й шаг. Записываем итоги вычислений 1-го шага. Прибавим слева к слагаемому $2x^2$ новый член ex^j.

Продолжение схемы алгоритма.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\
\underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2+ex^j \\
-2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 &
\end{array}
$$

Константы $e,\ j$ подбираем так, чтобы при умножении ex^j на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ получилось $-2x^4$. Очевидно, $e=-1,\ j=1$. Подставляем $ex^j=-x$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$, в результате получим многочлен $S_4(x)=-2x^4-x^3+3x^2+x$. Записываем этот многочлен слева под многочленом $P_4(x)$. Находим разность $P_4(x)-S_4(x)=P_3(x)$, где $P_3(x)=7x^3+6x^2+2x-8$ и записываем этот многочлен слева под чертой под $S_3(x)$. Степень многочлена $P_3(x)$ равна степени делителя (многочлена $Q_3(x)$), поэтому алгоритм Эвклида продолжается.

3-й шаг. Записываем итоги вычислений 2-го шага. Прибавим слева к слагаемым $2x^2-x$ новый член ux^l.

Продолжение схемы алгоритма.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\
\underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2-x+ux^l \\
\_\ -2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 & \\
\underline{-2x^4-x^3+3x^2+x} & \\
\quad 7x^3+6x^2+2x-8 &
\end{array}
$$

Константы u,l подбираем так, чтобы при умножении ex^j на старший член $2x^3$ делителя $Q_3(x)$ было равно $7x^3$. Очевидно, $u=3.5,\ j=0$. Подставляем $ux^l=3.5$ и умножаем его на делитель $Q_3(x)$, в результате получим многочлен $S_3(x)=7x^3+3.5x^3-10.5x^2-3.5$. Записываем этот многочлен слева под $P_3(x)$. Находим разность

$P_3(x)-S_3(x)=P_2(x)=2.5x^2+12.5x-4.5$ и записываем ее слева под чертой под $S_3(x)$. Степень многочлена $P_2(x)$ меньше степени делителя $Q_3(x)$, поэтому алгоритм Евклида закончился. Ответы таковы: целая часть и остаток от деления многочлена $P_5(x)$ на многочлен $Q_3(x)$ соответственно равны $G_2(x)=2x^2-x+3.5$ и $R_2(x)=2.5x^2+12.5x-4.5$.

В окончательном виде схема алгоритма Евклида выглядит так.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 6x^5-4x^4+7x^2+3x-8 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\
\underline{6x^5-2x^4-6x^3-2x^2} & 2x^2-x+3.5 \\
\_\ -2x^4+6x^3+9x^2+3x-8 & \\
\underline{-2x^4-x^3+3x^2+x} & \\
\quad \_\ 7x^3+6x^2+2x-8 & \\
\quad \underline{7x^3+3.5x^2-10.5x-3.5} & \\
\qquad 2.5x^2+12.5x-4.5 &
\end{array}
$$

Если остаток $R_m(x)$ от деления многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_k(x)$ равен нулю, то многочлен $P_n(x)$ **нацело делится** на многочлен $Q_k(x)$. В этом случае многочлен $Q_k(x)$

называется **делителем** многочлена $P_n(x)$, и многочлен $P_n(x)$ можно записать в виде произведения $P_n(x)=G_{n-k}(x)\cdot Q_k(x)$.

Пример 3. Разложить в произведение многочлен $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3$, если известно, что многочлен $Q_2(x)=x^2+2x+1$ нацело делит многочлен $P_5(x)$.

Решение. С помощью алгоритма Евклида найдем целую часть $G_3(x)$ от деления $P_5(x)$ на $Q_2(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
{}_{-}\,2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3 & \underline{2x^3+x^2-3x-1} \\
\underline{2x^5+4x^4+2x^3} & 2x^3+x+3 \\
\qquad\qquad {}_{-}\,x^3+5x^2+7x+3 & \\
\qquad\qquad \underline{x^3+2x^2+x} & \\
\qquad\qquad\quad {}_{-}\,3x^2+6x+3 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x^2+6x+3} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Следовательно, $G_3(x)=2x^3+x+3$ и многочлен $P_5(x)$ можно разложить в произведение:

$P_5(x)=G_3(x)\cdot Q_2(x) \quad\Rightarrow\quad 2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3=\left(2x^3+x+3\right)\left(x^2+2x+1\right).$

2. Особую роль играет деление многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_1(x)=x-c$.

Справедлива следующая **теорема Безу**. Остаток от деления многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ на многочлен $Q_1(x)=x-c$ равен $P_n(c)=P_n(x=c)$.

Следствие теоремы Безу. Если $x=c$ - корень многочлена $P_n(x)$ степени $n>1$, то многочлен $P_n(x)$ нацело делится на многочлен $Q_1(x)=x-c$, т.е. $P_n(x)=G_{n-1}(x)\cdot(x-c)$, где $G_{n-1}(x)$ - многочлен степени $n-1$.

Основная теорема алгебры многочленов: любой многочлен степени n имеет ровно n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность.

Согласно этой теореме любой многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ с комплексными коэффициентами разлагается в следующее произведение

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_s)^{k_s}, \quad (k_1+k_2+...+k_s=n) \tag{1}$$

где $x_1,x_2,...,x_s$ - все корни многочлена $P_n(x)$, имеющие кратности $k_1,k_2,...,k_s$ соответственно. **Такое разложение называется разложением многочлена $P_n(x)$ над множеством комплексных чисел (над полем C)**. При разложении многочлена над полем C автоматически считается, что x может принимать любые комплексные значения.

Линейные многочлены $x-x_1$, $x-x_2,...,$ $x-x_s$ являются **неприводимыми многочленами над полем C**. Многочлен называется **неприводимым над заданным множеством чисел**, если его нельзя разложить в произведение двух многочленов со степенями один и выше. Очевидно, что **любой многочлен степени 1 неприводим над полем C**, а **любой многочлен степени 2 и выше приводим над полем C**, т.к. согласно основной теореме его можно разложить в произведение многочленов.

Пример 4. Разложить над полем C многочлен $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3$.

Решение. Согласно примеру 3 заданный многочлен разлагается в произведение $P_5(x)=\left(2x^3+x+3\right)\left(x^2+2x+1\right)$. Первый множитель – многочлен $G_3(x)=2x^3+x+3$ имеет корень $x=-1$, т.к. $G_3(-1)=2(-1)^3-1+3=0$. Следовательно, $G_3(x)$ нацело делится на многочлен $x+1$. По алгоритму Евклида находим результат деления $G_3(x)$ на $x+1$.

$$
\begin{array}{l|l}
\_\ 2x^3+x+3 & \underline{x+1} \\
\underline{2x^3+2x^2} & 2x^2-2x+3 \\
\quad \_\ -2x^2+x+3 & \\
\quad \underline{-2x^2-2x} & \\
\qquad \_\ 3x+3 & \\
\qquad \underline{3x+3} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Значит, $G_3(x)=2x^3+x+3=(2x^2-2x+3)(x+1)$.

$$2x^2-2x+3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-20}}{4}=\frac{2\pm2\sqrt{5}i}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+3=2\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_3(x)=2(x+1)\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right].$$

Поскольку, $x^2+2x+1=(x+1)^2$, получим такое разложение многочлена $P_5(x)$ над полем C.

$$P_5(x)=2(x+1)^3\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right].$$

Если многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ имеет действительные коэффициенты, то наряду с его разложением над полем C (когда x считается комплексной величиной) возможно также разложение этого многочлена на множестве действительных чисел (над полем R), когда переменная x принимает только действительные значения, и соответственно $P_n(x)$ принимает только действительные значения. При разложении многочлена с действительными коэффициентами над полем R следует помнить, что не все многочлены второго порядка приводимы над полем R.

Например, многочлен $2x^2-2x+3$ приводим над полем C, он допускает разложение $2x^2-2x+3=2\left[x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)\right]$ и неприводим над полем R, т.к. каждый из множителей в квадратных скобках принимает комплексные значения при действительных значениях переменной x. Поэтому, разложение многочлена $P_5(x)$ из примера 4 над полем R будет иметь следующий вид: $P_5(x)=2x^5+4x^4+3x^3+5x^2+7x+3=2(x+1)^3(x^2-x+1.5)$. Здесь каждый из множителей принимает только действительные значения при действительных x. Чтобы получить это разложение, нужно перемножить квадратные скобки в найденном выше разложении многочлена $P_5(x)$ над полем C.

Следует помнить также следующий факт: если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $x_*=a+bi$, то комплексное сопряжение этого корня $\bar{x}_*=a-bi$ также является корнем этого многочлена. Согласно этому факту и основной теореме алгебры многочленов разложение многочлена с действительными коэффициентами над полем R в общем случае имеет следующий вид

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}...(x-x_t)^{k_t}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}, \qquad (2)$$

где $x_1,...,x_t$ - действительные корни кратности $k_1,...,k_t$ соответственно, а квадратные многочлены $x^2+p_1x+q_1,...,x^2+p_rx+q_r$ имеют комплексно сопряженные корни.

Пример 5. Найти разложения многочлена
$P_8(x)=x^8-8x^7+29x^6-60x^5+76x^4-56x^3+20x^2$ на множестве комплексных (над полем C) и на множестве действительных (над полем R) чисел, если известно, что $x_*=1+i$ - корень кратности 2 этого многочлена.

Решение.

1) $P_8(x)=x^2\left(x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20\right)\Rightarrow x=0$ - действительный корень кратности 2 многочлена $P_8(x)$.

2) $P_8(x)$ - многочлен с действительными коэффициентами $\Rightarrow$ вместе с комплексным корнем $x_*=1+i$ кратности 2 этот многочлен имеет корень $\bar{x}_*=1-i$ тоже кратности 2 $\Rightarrow$ в разложении многочлена $P_8(x)$ над полем C (см. формулу (1)) будет присутствовать множитель $[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2=[(x-1-i)(x-1+i)]^2=\left[(x-1)^2-i^2\right]^2=\left(x^2-2x+2\right)^2=$
$=x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ $\Rightarrow$ многочлен $P_8(x)$, и значит, многочлен
$Q_6(x)=x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20$ нацело делится на многочлен
$G_4(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x+4$.

3) Найдем результат деления $Q_6(x)$ на $G_4(x)$ по алгоритму Евклида.

$$\begin{array}{l|l}
_\; x^6-8x^5+29x^4-60x^3+76x^2-56x+20 & \underline{x^4-4x^3+8x^2-8x+4} \\
\underline{x^6-4x^5+8x^4-8x^3+4x^2} & x^2-4x+5 \\
\quad_\; -4x^5+21x^4-52x^3+72x^2-56x+20 & \\
\quad\underline{-4x^5+16x^4-32x^3+32x^2-16x} & \\
\qquad\quad_\; 5x^4-20x^3+40x^2-40x+20 & \\
\qquad\quad\underline{5x^4-20x^3+40x^2-40x+20} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad P_8(x)=x^2[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2\left(x^2-4x+5\right).$$

4) Теперь найдем корни квадратного трехчлена x^2-4x+5.

$$x^2-4x+5=0\ \Rightarrow\ x=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i\ \Rightarrow\ x^2-4x+5=[x-(2+i)]\cdot[x-(2-i)].$$

Следовательно, **разложение заданного многочлена** $P_8(x)$ **над полем** C имеет вид

$$P_8(x)=x^2[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2[x-(2+i)][x-(2-i)].$$

Из этого разложения видно, что $P_8(x)$ имеет корни $x=0,\ x=1+i,\ x=1-i$ кратности 2 и корни $x=2+i,\ x=2-i$ кратности 1.

Чтобы найти разложение многочлена $P_8(x)$ над полем R нужно перемножить скобки с сопряженными комплексными корнями. Т.к. $[x-(1+i)]^2[x-(1-i)]^2=\left(x^2-2x+2\right)^2$ и $[x-(2+i)]\cdot[x-(2-i)]=x^2-4x+5$, получаем **следующее разложение многочлена** $P_8(x)$ **над полем** R: $\quad P_8(x)=x^2\left(x^2-2x+2\right)^2\left(x^2-4x+5\right)$.

Домашнее задание.

1. Найти все корни многочлена $p(x)=x(x-1)^3(x+3)^4(x-1-i)^2(x-1+i)^2$ и указать их кратность.
2. Найти целую и дробную части отношения $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, где $p(x)=2x^6-3x^5-x-1,\ q(x)=-x^3+2x$.
3. Найти разложения многочлена $p(x)=x^8-2x^4+1$ на множестве комплексных и на множестве действительных чисел.

Занятие **14.** **Линейные пространства.**

14.1. Определение линейного пространства, примеры линейных пространств. Следствия из аксиом линейного пространства.
14.2. Линейные подпространства, примеры подпространств. Линейные оболочки векторов.
14.3. Линейная зависимость (независимость) системы векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.

1. **Линейным пространством** называется множество L, состоящее из элементов $\overline{a},\overline{b},\ldots$ (эти элементы обычно называют векторами, хотя фактически это могут быть не векторы), на которых определены операция сложения: $\forall\ \overline{a},\overline{b} \in L \quad \Rightarrow \quad \overline{a}+\overline{b} \in L$ и операция умножения элемента на число: $\forall\, \overline{a} \in L,\ \forall\, k \in R \ \Rightarrow k \cdot \overline{a} \in L$. При этом указанные операции для любых элементов $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in L$ и любых чисел $k,m \in R$ удовлетворяют следующим восьми аксиомам.

1°. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$ - коммутативность сложения.

2°. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$ - ассоциативность сложения.

3°. $\exists\, \overline{0} \in L:\ \overline{a}+\overline{0}=\overline{0}+a=\overline{a}$ - существование нулевого элемента.

4°. $\forall\, \overline{a} \in L\ \ \exists\left(-\overline{a}\right) \in L:\ \overline{a}+\left(-\overline{a}\right)=\overline{0}$ - существование обратного элемента.

5°. $1 \cdot \overline{a}=\overline{a}$.

6°. $k\left(m\overline{a}\right)=\left(km\right)\overline{a}$.

7°. $k\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=k\overline{a}+k\overline{b}$.

8°. $\left(k+m\right)\overline{a}=k\overline{a}+m\overline{a}$.

Приведем некоторые **важные следствия** указанных аксиом: $0 \cdot \overline{a}=\overline{0}$; $\left(-\overline{a}\right)=-1 \cdot \overline{a}$ **.**

Рассмотрим теперь примеры множеств, являющихся (не являющихся) линейными пространствами.

1) $L=V^2=\left\{\overline{a}=\left(x,y\right)\right\}$ - множество <u>всех</u> векторов на плоскости Oxy с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число (см. Занятие 6). Все восемь аксиом здесь очевидно выполнены. Поэтому множество V^2 является линейным пространством.

2) $M=\left\{\overline{a}=\left(x,y\right) \mid y>0\right\}$ - множество <u>всех</u> векторов на плоскости Oxy с началом в точке O и концом в верхней полуплоскости с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Это множество векторов не является линейным пространством, т.к. $-1 \cdot \overline{a} \notin M$.

3) $M_{2\times2}=\left\{\overline{a}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}$ - множество <u>всех</u> квадратных матриц второго порядка, в котором действуют принятые для матриц операции сложения и умножения на число. Это множество является линейным пространством. Покажем это.

Пусть $\overline{a}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\overline{b}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\overline{c}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - произвольные матрицы из множества $M_{2\times2}$.

$$\forall\ \overline{a},\overline{b} \in M_{2\times2} \quad \Rightarrow \quad \overline{a}+\overline{b}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times2}.$$

$$\forall\, \overline{a} \in M_{2\times2},\ \forall\, k \in R \ \Rightarrow k \cdot \overline{a}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times2}.$$

Проверим теперь выполнение аксиом $1^\circ-8^\circ$.

1°. $\bar{a}+\bar{b}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} \end{pmatrix}=\bar{b}+\bar{a}$.

2°. $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) \end{pmatrix}=$

$=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$.

3°. $\exists\bar{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_{2\times2}:\ \bar{a}+\bar{0}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\bar{a}$.

4°. $\forall\bar{a}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_{2\times2}\quad \exists(-\bar{a})=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}\in M_{2\times2}:\quad \bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

5°. $1\cdot\bar{a}=1\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\bar{a}$.

6°. $k(m\bar{a})=k\begin{pmatrix} ma_{11} & ma_{12} \\ ma_{21} & ma_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kma_{11} & kma_{12} \\ kma_{21} & kma_{22} \end{pmatrix}=km\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=(km)\bar{a}$.

7°. $k\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=k\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right\}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=k\bar{a}+k\bar{b}$.

8°. $(k+m)\bar{a}=(k+m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}+m\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=k\bar{a}+m\bar{a}$.

Таким образом, все требования определения линейного пространства выполнены, и значит, $M_{2\times2}$ - линейное пространство.

4) Опять рассмотрим множество всех квадратных матриц второго порядка. Но в качестве операции сложения возьмем операцию умножения матриц, т.е. знак + между матрицами означает теперь произведение матриц. Операцию умножение матрицы на число оставим обычной. Обозначим полученное множество с введенными операциями $G_{2\times2}$. Проверим, будет ли это множество линейным пространством.

Пусть $\bar{a}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\bar{b}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ - произвольные матрицы из множества $G_{2\times2}$.

$\forall\ \bar{a},\bar{b}\in G_{2\times2}\quad\Rightarrow\quad \bar{a}+\bar{b}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\in G_{2\times2}$.

$\forall\bar{a}\in G_{2\times2},\ \forall k\in R\ \Rightarrow k\cdot\bar{a}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}\in G_{2\times2}$

Однако аксиома 1° в множестве $G_{2\times2}$ не выполнена (произведение матриц не коммутативно). Следовательно, $\bar{a}+\bar{b}\neq\bar{b}+\bar{a}$ и можно сделать вывод о том, что $G_{2\times2}$ не является линейным пространством. Отметим еще, что в множестве $G_{2\times2}$ не выполнена также аксиома 7°, а все остальные аксиомы выполнены!

5) $P_n=\left\{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ |\ a_n,a_{n-1},...,a_0\in R\right\}$ - множество всех многочленов степени меньше или равно n является линейным пространством. Докажем это.
$\forall\ f_1(x), f_2(x)\in P_n\ \Rightarrow\ f_1(x)+f_2(x)\in P_n,\qquad \forall\ f(x)\in P_n,\ \forall k\in R\ \Rightarrow k\cdot f(x)\in P_n$.

Аксиомы $1^\circ,2^\circ,5^\circ-8^\circ$ выполнены. Элементом $\bar{0}$ в множестве P_n является многочлен тождественно равный нулю, т.е. $f(x)=0$. Обратным элементом для многочлена $f(x)\in P_n$ является тот же многочлен, взятый с обратным знаком, т.е. $-1\cdot f(x)$. Таким образом, аксиомы $3^\circ,4^\circ$ также выполнены. Следовательно, P_n - линейное пространство.

6) Рассмотрим множество <u>всех</u> функций вида $f(x)= f_c \cdot \cos x + f_s \cdot \sin x, \quad f_c, f_s \in R$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. Предоставляем самостоятельно проверить, что данное множество является линейным пространством.

Пример 1. Доказать, что множество всех решений матричного уравнения

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ образует линейное пространство.

Решение. Обозначим множество всех решений заданного уравнения через M. $M \subset M_{2\times 3}$, где $M_{2\times 3}$ - множество матриц с размером 2×3. M не пусто, т.к. матричное уравнение допускает очевидное решение $X = \overline{0}$, где $\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - нулевая матрица размера 2×3.

Пусть X_1, X_2 - два произвольных решения матричного уравнения, т.е.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

и k_1, k_2 - произвольные числа. Покажем, что матрица $X = X_1 + X_2$ будет решением уравнения. Действительно,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (X_1 + X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство выполнено в силу равенств (1). Таким образом, установлено, что $\forall X_1, X_2 \in M \quad X_1 + X_2 \in M$.

Покажем теперь, что $X = k_1 X_1$ служит решением заданного матричного уравнения.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} (k_1 X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство выполнено согласно первому из равенств (1).

$\Rightarrow \ \forall X_1 \in M, \ \forall k_1 \in R \quad k_1 X_1 \in M$.

Из аксиом $1^\circ - 8^\circ$ нужно доказать только выполнимость аксиом $3^\circ, 4^\circ$, поскольку остальные аксиомы выполнены в силу правил матричного исчисления.

3°. $\exists \overline{0} \in M: \quad \forall X \in M \quad X + \overline{0} = X$. Матрица $\overline{0}$ уже приведена выше.

4°. $\forall X \in M \ \exists (-X): \ X + (-X) = \overline{0}$. В качестве матрицы $(-X)$ следует взять матрицу $-1 \cdot X$.

Доказательство завершено. Множество M - линейное пространство.

2. По определению, множество $\tilde{L}$, вложенное в линейное пространство L и само являющееся линейным пространством, называется **линейным подпространством** пространства L. Приведем примеры подпространств.

1) $M_x = \{\overline{a} = (x, 0, 0)\}$ - множество всех векторов, лежащих на оси Ox пространства $Oxyz$.

M_x – подмножество трехмерного пространства $V^3 = \{\overline{a} = (x, y, z)\}$ и M_x - линейное пространство. Следовательно, M_x - линейное подпространство пространства V^3.

Аналогично, множество $M_{xy} = \{ \bar{a} = (x, y, 0)\}$ всех пространственных векторов, лежащих в плоскости Oxy, является линейным пространством, вложенным в линейное пространство V^3. Значит, M_{xy} - линейное подпространство пространства V^3.

2) $P_1 = \{ f(x) = a_1 x + a_0 \}$ - множество всех многочленов не выше 1-й степени,

$P_2 = \{ f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \}$ - множество всех многочленов не выше 2-й степени,

$P_3 = \{ f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \}$ - множество всех многочленов не выше 3-й степени.

P_1, P_2 - линейные подпространства пространства P_3.

3) $K = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\}$ - линейное пространство нижнетреугольных матриц является линейным подпространством пространства $M_{3\times 3} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right\}$ квадратных матриц третьего порядка.

4) $D_{[0,\,1]}$ - множество всех дифференцируемых на отрезке $[0,\,1]$ функций.

$C^1_{[0,\,1]}$ - множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\,1]$ функций.

$C^1_{[0,\,1]}$ - множество всех непрерывных на отрезке $[0,\,1]$ функций.

$D_{[0,\,1]}$, $C^1_{[0,\,1]}$, $C_{[0,\,1]}$ - бесконечномерные линейные пространства. $C^1_{[0,\,1]} \subset D_{[0,\,1]} \subset C_{[0,\,1]}$.

Следовательно, $C^1_{[0,\,1]}$, $D_{[0,\,1]}$ - линейные подпространства пространства $C_{[0,\,1]}$.

При решении некоторых задач бывает удобно использовать **критерий подпространства**: подмножество M линейного пространства L является линейным подпространством $\Leftrightarrow$ когда $\forall\, \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in M$, $\forall k_1, k_2 \in R$ $\quad k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 \in M$.

3. Пусть L - линейное пространство и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ - некоторый набор элементов этого пространства, называемый системой векторов. **Линейной оболочкой системы векторов** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ называется множество Q <u>всех</u> векторов $\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m$, где $k_1, k_2, \ldots, k_m \in R$. Любая линейная оболочка, построенная в линейном пространстве L, является линейным подпространством пространства L, либо совпадает с самим пространством L. Приведем примеры линейных оболочек.

1) $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Множество всех матриц $A = k_1 A_1 + k_2 A_2$, где k_1, k_2 - произвольные числа – линейная оболочка на матрицах A_1, A_2 в линейном пространстве $M_{2\times 2}$ квадратных матриц второго порядка.

2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$. Множество всех функций $f(x) = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$, где k_1, k_2, k_3 - произвольные числа - линейная оболочка на многочленах x, x^2, x^3. Эта линейная оболочка – линейное подпространство в линейном пространстве P_3 многочленов не выше 3-й степени.

3) $\bar{a} = (2, -1) \in V^2$. $\quad Q = \{ k(2, -1) \mid k \in R \}$ - линейная оболочка на векторе $\bar{a}$. Эта линейная оболочка – линейное подпространство пространства V^2.

4. Теперь обратимся к важному понятию "**линейная зависимость (независимость) системы векторов**". Пусть L - линейное пространство и $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$ - система векторов в L.

Вектор $\overline{a} = k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \dots + k_m\overline{a}_m$, $k_1, k_2, \dots, k_m \in R$ называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$. Набор чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ называется **не тривиальным,** если хотя бы одно из этих чисел не равно нулю. Если все числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ равны нулю, то такой набор называется **тривиальным.**

По определению, система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$ линейного пространства L называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальный набор чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$, для которого $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \dots + k_m\overline{a}_m = \overline{0}$. Если же $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \dots + k_m\overline{a}_m = \overline{0}$ только при тривиальном наборе чисел $k_1, k_2, \dots, k_m$ (т.е. $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + \dots + k_m\overline{a}_m \neq \overline{0}$ для любого нетривиального набора $k_1, k_2, \dots, k_m$), то система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$ называется **линейно независимой**.

Пример 2. Проверить на линейную зависимость (независимость) систему векторов $\overline{a}_1 = (-1, 2, -1)$, $\overline{a}_2 = (3, 2, 2)$, $\overline{a}_3 = (2, -1, 1)$ из линейного пространства V^3 (множество всех векторов в пространстве).

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + .k_3\overline{a}_3$ из данных векторов и выясним, при каких числах k_1, k_2, k_3 эта линейная комбинация равна $\overline{0} = (0, 0, 0)$.

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + .k_3\overline{a}_3 = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad k_1(-1, 2, -1) + k_2(3, 2, 2) + k_3(2, -1, 1) = (0, 0, 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-k_1 + 3k_2 + 2k_3,\ 2k_1 + 2k_2 - k_3,\ -k_1 + 2k_2 + k_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 - k_3 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Решаем данную систему по правилу Крамера. Главный определитель системы

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, система имеет только одно решение, и это решение $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$ - тривиальный набор чисел. Согласно определению, заданная система векторов линейно независима.

Пример 3. Проверить на линейную зависимость (независимость) систему векторов $\overline{a}_1 = (-1, 2, -1)$, $\overline{a}_2 = (3, 2, 2)$, $\overline{a}_3 = (2, -1, 1)$, $\overline{a}_4 = (0, -2, -1)$ из линейного пространства V^3.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию $k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + .k_3\overline{a}_3 + k_4\overline{a}_4$ из данных векторов и выясним, при каких числах k_1, k_2, k_3, k_4 эта линейная комбинация равна $\overline{0} = (0, 0, 0)$.

$$k_1\overline{a}_1 + k_2\overline{a}_2 + .k_3\overline{a}_3 + k_4\overline{a}_4 = \overline{0} \Leftrightarrow k_1(-1, 2, -1) + k_2(3, 2, 2) + k_3(2, -1, 1) + k_4(0, -2, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + 3k_2 + 2k_3 \phantom{{}-2k_4} = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 - k_3 - 2k_4 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 + k_3 - k_4 = 0 \end{cases}.$$

Полученная система совместна (у нее есть тривиальное решение $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$). Остается выяснить, имеет ли эта система нетривиальные решения. Решить систему по правилу Крамера, как это сделано в примере 2 теперь уже нельзя, эта система не является квадратной (число уравнений меньше числа неизвестных). Поступим так. Определитель Δ из коэффициентов при неизвестных k_1, k_2, k_3 отличен от нуля (он равен 5, см. пример 2). Присвоим неизвестной k_4 произвольное значение и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} -k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 - k_3 = 2k_4 \\ -k_1 + 2k_2 + k_3 = k_4 \end{cases}.$$

Эта система является квадратной относительно неизвестных k_1, k_2, k_3 с главным определителем $\Delta = 5$. Решаем ее по правилу Крамера. Вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 равны

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2k_4 & 2 & -1 \\ k_4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5k_4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2k_4 & -1 \\ -1 & k_4 & 1 \end{vmatrix} = 5k_4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2k_4 \\ -1 & 2 & k_4 \end{vmatrix} = -10k_4.$$

Следовательно, $k_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-5k_4}{5} = -k_4$, $k_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{5k_4}{5} = k_4$, $k_3 = \dfrac{-10k_4}{5} = -2k_4$.

Отсюда сразу видно, что система имеет нетривиальные решения.

Например, при $k_4 = 1$ получаем, $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = -2$. Таким образом, существует нетривиальный набор $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = -2, k_4 = 1$, при котором $k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + .k_3\bar{a}_3 + k_4\bar{a}_4 = \bar{0}$.

Согласно определению, система $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ линейно зависима.

Пример 4. Проверить на линейную зависимость (независимость) систему матриц $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Рассмотрим линейную комбинацию $k_1A_1 + k_2A_2 + .k_3A_3$ и приравняем ее к нулевому элементу $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$k_1\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -k_1 + 2k_2 - 3k_3 & 2k_2 - 2k_3 \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 & -k_1 - 2k_2 + k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Полученная система совместна (у нее есть тривиальное решение $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$). Теперь нужно выяснить, имеет ли эта система нетривиальные решения? Систему (*) нельзя решить с помощью правила Крамера, т.к. число уравнений больше числа неизвестных. Найдем сначала все решения подсистемы из первых трех уравнений системы (*).

$$\begin{cases} -k_1 + 2k_2 - 3k_3 = 0 \\ 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ 3k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}. \qquad (**)$$

Ее главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, поэтому систему (**) также невозможно решить с помощью правила Крамера. Поступим так. Присвоим неизвестной k_3 произвольное значение и найдем значения неизвестных k_1, k_2 в зависимости от k_3. Для этого перепишем систему (**) в виде

$$\begin{cases} -k_1 + 2k_2 = 3k_3 \\ 2k_2 = 2k_3 \\ 3k_1 + k_2 = -2k_3 \end{cases}. \qquad (***)$$

Из второго, а затем из первого уравнений системы (***) последовательно выводим

$k_2 = k_3$, $k_1 = -k_3$. Подставим эти выражения неизвестных k_1, k_2 в третье уравнение системы (***). Получим тождество $-3k_3 + k_3 = 2k_3$, которое показывает, что все решения системы (***), и соответственно системы (**) можно записать так:

$$k_1 = -k_3,\ k_2 = k_3, \text{ где } k_3 \text{ - произвольное число.} \qquad (****)$$

Возвратимся к системе (*). Подставим в ее последнее уравнение найденные выражения неизвестных k_1, k_2. Получим тождество $-3k_3 + k_3 + 2k_3 = 0$, которое показывает, что все решения системы (*) представимы в виде (****). Отсюда сразу же выводится наличие нетривиальных решений у системы (*). Действительно, положив $k_3 = -1$ из (****) находим $k_1 = 1,\ k_2 = -1$.

Таким образом, при нетривиальном наборе $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = -1$ имеет место равенство $k_1 A_1 + k_2 A_2 + .k_3 A_3 = \overline{0}$ и, следовательно, система матриц A_1, A_2, A_3 линейно зависима.

Справедлив следующий **критерий линейной зависимости системы**: система линейно зависима тогда и только тогда, когда один из ее элементов линейно выражается через другие элементы системы.
Этот критерий позволяет быстрее решить пример 4, если заметить, что $A_3 = A_1 - A_2$.
Действительно, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A_1 - A_2$. Поэтому матрица A_3 представляется линейной комбинацией из матриц A_1, A_2. Согласно критерию линейной зависимости следует сделать вывод о линейной зависимости системы матриц A_1, A_2, A_3. Нетривиальный набор чисел k_1, k_2, k_3 нетрудно найти, если равенство $A_3 = A_1 - A_2$ переписать в виде $A_1 - A_2 - A_3 = \overline{0}$. Отсюда получаем $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = -1$. Точно такой же набор найдем в примере 4.

Пример 5. Проверить на линейную зависимость (независимость) систему функций $f_1(x) = 2 - 3x - x^2$, $f_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$, $f_3(x) = 4x + 3x^2$ из линейного пространства $L = \left\{ a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in R \right\}$.
Решение. Составим линейную комбинацию $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x)$ и приравняем ее нулевому элементу пространства L, который представлен функцией тождественно равной нулю.

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) = 0 \ \Rightarrow\ k_1\left(2 - 3x - x^2\right) + k_2\left(1 + 2x + 2x^2\right) + k_3\left(4x + 3x^2\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2k_1 + k_2) + (-3k_1 + 2k_2 + 4k_3)x + (-k_1 + 2k_2 + 3k_3)x^2 = 0.$$

Полученное равенство должно выполняться для всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Это возможно, только если все коэффициенты при различных степенях x равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} 2k_1 + k_2 = 0 \\ -3k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0 \\ -k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

- главный определитель этой системы. Т.к. он отличен от нуля система имеет только одно решение. Это решение $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0$. Следовательно, заданная система функций линейно независима.

Домашнее задание.

1. Доказать, что множество $M=\{\bar{a}=(x,0,z)\}$ с обычными для векторов операциями сложения векторов и умножения вектора на число образует линейное пространство.

2. Доказать, что множество всех матриц вида $A=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ y & y & 0 \\ 0 & z & z \end{pmatrix}$ с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

3. Проверить линейную зависимость (независимость) системы векторов $\bar{a}_1=(2,-1,1)$, $\bar{a}_2=(1,1,0)$, $\bar{a}_3=(1,2,1)$ из пространства $V^3=\{\bar{a}=(x,y,z)\}$.

4. Проверить линейную зависимость (независимость) системы функций $f_1(x)=x-1$, $f_2(x)=2x+1$, $f_3(x)=3x-4$ из линейного пространства $P_1=\{f(x)=a_1x+a_0\}$.

Занятие 15. **Базис и размерность линейного пространства.**

15.1. Определение базиса как максимальной линейно независимой системы векторов. Определение размерности линейного пространства.
15.2. Примеры конечномерных линейных пространств и их стандартных базисов.
15.3. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в заданном базисе.
15.4. Определение полноты системы векторов в линейном пространстве. Второе определение базиса (как полной линейно независимой системы векторов).

1. Линейно независимая система $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_n$ линейного пространства L называется **максимальной линейно независимой системой**, если $\forall\,\bar{a}\in L$ расширенная система $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_n,\bar{a}$ линейно зависима. **Базисом** линейного пространства L является любая максимальная линейно независимая система (первое определение базиса). Все базисы линейного пространства содержат одинаковое число векторов. Это число называется **размерностью линейного пространства**.

Пример 1. Доказать, что система векторов $\bar{a}_1=(-1,2,-1)$, $\bar{a}_2=(3,2,2)$, $\bar{a}_3=(2,-1,1)$ из линейного пространства V^3 (множество всех векторов в пространстве) является базисом пространства V^3.

Решение. Система $\bar{a}_1=(-1,2,-1)$, $\bar{a}_2=(3,2,2)$, $\bar{a}_3=(2,-1,1)$ линейно независима (см. пример 2 из занятия 14). Докажем, что эта система является максимальной линейно независимой системой. Возьмем произвольный вектор $\bar{a}=(x,y,z)\in L$ и рассмотрим расширенную систему $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}$. Покажем, что эта система линейно зависима. Составим линейную комбинацию из векторов расширенной системы и приравняем ее вектору $\bar{0}=(0,0,0)$.

$k_1\bar{a}_1+k_2\bar{a}_2+k_3\bar{a}_3+k\bar{a}=\bar{0}\ \Rightarrow\ k_1(-1,2,-1)+k_2(3,2,2)+k_3(2,-1,1)+k(x,y,z)=(0,0,0)\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases} -k_1+3k_2+2k_3+kx=0 \\ 2k_1+2k_2-k_3+ky=0 \\ -k_1+2k_2+k_3+kz=0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Получили линейную систему из трех уравнений относительно четырех неизвестных k_1,k_2,k_3,k. Чтобы увидеть, что эта система допускает нетривиальное решение, достаточно придать неизвестной k любое ненулевое значение и найти соответствующие этому k значения неизвестных k_1,k_2,k_3. Для определенности положим $k=1$ и перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} -k_1+3k_2+2k_3=-x \\ 2k_1+2k_2-k_3=-y \\ -k_1+2k_2+k_3=-z \end{cases}.$$

Главный определитель системы $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5$ отличен от нуля, поэтому система имеет единственное решение (оно зависит от значений x,y,z). Окончательные значения k_1,k_2,k_3 не важны. Важно, что система (1) допускает нетривиальное решение $k_1,k_2,k_3,\ k=1$, и, поэтому расширенная система $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3,\bar{a}$ линейно зависима при любом векторе $\bar{a}$. Согласно определениям выше система $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$ - максимальная линейно независимая система в пространстве V^3, т.е. базис пространства V^3. Отсюда в частности следует, размерность пространства V^3 равна 3. Это записывается так: $dim\left(V^3\right)=3$.
Отметим, что основную роль в решении поставленной задачи играет определитель Δ, столбцы которого - координаты векторов $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3$.

Приведем примеры часто встречающихся линейных пространств и укажем их стандартные (наиболее удобные) базисы и размерности этих пространств.

1) Пространство $V^2=\{\bar{a}=(x,y)\}$ - множество всех векторов на плоскости Oxy.
Стандартным базисом этого пространства является система векторов $\bar{i}=(1,0),\ \bar{j}=(0,1)$. Действительно, $\bar{i},\ \bar{j}$ - линейно независимая система (проверить самостоятельно). Если к этой системе присоединить любой вектор $\bar{a}=(x,y)$, то расширенная система $\bar{i},\ \bar{j},\bar{a}$ будет линейно зависимой. Этот факт вытекает из критерия линейной зависимости, т.к. вектор $\bar{a}=(x,y)=x\bar{i}+y\bar{j}$ - линейная комбинация векторов $\bar{i},\ \bar{j}$. Следовательно, $\bar{i},\ \bar{j}$ - максимальная линейно независимая система в V^2, т.е. является базисом пространства V^2.
$dim\left(V^2\right)=2$.

2) Пространство $V^3=\{\bar{a}=(x,y,z)\}$ - множество всех векторов в пространстве $Oxyz$.
Стандартным базисом этого пространства является система векторов
$\bar{i}=(1,0,0),\ \bar{j}=(0,1,0),\ \bar{k}=(0,0,1)$. $\quad dim\left(V^3\right)=3$.

3) Пространство $P_n=\left\{f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\ |\ a_n,a_{n-1},...,a_0\in R\right\}$ - множество всех многочленов степени меньше или равно n. Стандартным базисом этого линейного пространства является набор из $n+1$ функций: $x^n,x^{n-1},...,x,1$.
$x^n,x^{n-1},...,x,1$ - максимальная линейно независимая система функций в пространстве P_n.
Покажем это. Приравняем линейную комбинацию из этих функций к нулю.
$k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+...+k_1x+k_0\cdot 1=0$. Это равенство должно выполняться для всех x, а это возможно только тогда, когда все коэффициенты при различных степенях x равны нулю, т.е. $k_n=0,\ k_{n-1}=0,\ ...,\ k_1=0,\ k_0=0$. Следовательно, $x^n,x^{n-1},...,x,1$ - линейно независимая система. Рассмотрим теперь расширенную систему $x^n,x^{n-1},...,x,1,\ f(x)$, где $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ - произвольная функция из пространства P_n.
$x^n,x^{n-1},...,x,1,\ f(x)$ - линейно зависимая система, поскольку $f(x)$ представляется линейной комбинацией функций $x^n,x^{n-1},...,x,1$. Таким образом доказано, что $x^n,x^{n-1},...,x,1$ - максимальная линейно независимая система функций в пространстве P_n, т.е. является базисом пространства P_n. $\quad dim(P_n)=n+1$.

4) Пространство $M_{m\times n} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right\}$ - множество всех матриц размера $m \times n$.

Стандартным базисом этого пространства является набор матриц

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$dim(M_{m\times n}) = m \cdot n$.

Приведенные выше линейные пространства имеют конечную размерность и поэтому называются конечномерными линейными пространствами. Существуют также и бесконечномерные линейные пространства, базисы которых содержат бесконечно много элементов. Например, множество $C_{[0,1]}$ всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций - бесконечномерное линейное пространство.

3. Пусть L - n-мерное линейное пространство, и $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ - базис пространства L. Справедлива следующая теорема. Любой вектор $\bar{a} \in L$ можно **разложить по базису** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, т.е. представить вектор $\bar{a}$ в виде линейной комбинации

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n. \quad (2)$$

Причем разложение вектора $\bar{a}$ единственно (не существует двух или более различных разложений вектора по базису).

Набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ в разложении (2) называется **координатами вектора** $\bar{a}$ **в базисе** $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Пример 2. Разложить вектор $\bar{a} = (-3,\ 3,\ 4) \in V^3$ по базису $\bar{e}_1 = (1,-1,\ 1), \bar{e}_2 = (-2, 1, 2), \bar{e}_3 = (0, 1, 3)$ и указать координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Решение. Проверим сначала, что $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - базис пространства V^3. Сделаем это так же, как и в примере 1. Составим определитель, столбцы которого – координаты векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7.\quad \Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - линейно независимая система из <u>трех </u>векторов.

Воспользуемся тем, что $dim(V^3) = 3$. Отсюда сразу следует, что любой базис пространства V^3 содержит три вектора. Значит, любая система из трех линейно независимых векторов будет максимальной линейно независимой системой, т.е. базисом V^3. Следовательно, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - базис V^3.

Согласно теореме о разложении вектора по базису $\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$. Отсюда находим:

$$(-3, 3, 4) = x_1(1,-1,\ 1) + x_2(-2, 1, 2) + x_3(0, 1, 3) \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Решим эту полученную систему с помощью правила Крамера. Ее главный определитель полученной системы совпадает с определителем Δ, рассмотренным выше, а вспомогательные определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ соответственно равны

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -7.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Таким образом, искомое разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ запишется в виде $\bar{a} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$. Отсюда находим, $\bar{a} = (-1, 1, 1)$ - координаты вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Пример 3. В линейном пространстве $P_1 = \{a_1 x + a_0\}$ многочленов не выше 1-й степени найти координаты функции $f(x) = 3x + 7$ в базисе $e_1(x) = x - 1,\ e_2(x) = 2x + 3$.

Решение. Сначала проверим, что $e_1(x) = x - 1,\ e_2(x) = 2x + 3$ - базис пространства P_1.

$\dim(P_1) = 2$. Следовательно, достаточно показать линейную независимость $e_1(x),\ e_2(x)$.

$k_1 e_1(x) + k_2 e_2(x) = 0 \ \Rightarrow\ k_1(x - 1) + k_2(2x + 3) = 0 \ \forall x \ \Rightarrow\ (k_1 + 2k_2)x + (-k_1 + 3k_2) = 0 \ \forall x \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \Rightarrow\ k_1 = 0,\ k_2 = 0$ - единственное решение $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $e_1(x),\ e_2(x)$ - линейно независимая система, являющаяся базисом пространства P_1.

Теперь разложим $f(x) = 3x + 7$ по функциям $e_1(x),\ e_2(x)$.

$f(x) = k_1 e_1(x) + k_2 e_2(x) \ \Rightarrow\ 3x + 7 = (k_1 + 2k_2)x + (-k_1 + 3k_2) = 0 \ \forall x$. Два многочлена совпадают, если совпадают коэффициенты при соответствующих степенях x.

$\Rightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 3 \\ -k_1 + 3k_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 2$.

Значит, разложение $f(x) = 3x + 7$ по базису $e_1(x),\ e_2(x)$ имеет вид $f(x) = -e_1(x) + 2e_2(x)$.

Отсюда находим $f(x) = (-1,\ 2)$ - координаты функции $f(x) = 3x + 7$ в базисе $e_1(x) = x - 1,\ e_2(x) = 2x + 3$.

4. Пусть L - линейное пространство, и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m$ - система векторов L. Данная система называется **полной**, если любой вектор $\bar{a} \in L$ можно представить линейной комбинацией векторов этой системы, т.е. $\forall\, \bar{a} \in L \Rightarrow \bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + \ldots + k_m\bar{a}_m$. Отметим, что полная система может быть линейно зависимой.

Второе определение базиса линейного пространства L: **базисом называется полная, линейно независимая система векторов**.

Пример 4. Является ли система векторов $\bar{a}_1 = (-1, 1),\ \bar{a}_2 = (1, 3),\ \bar{a}_3 = (-2, 4),\ \bar{a}_4 = (-1, -2)$ полной в пространстве $V^2 = \{\bar{a} = (x, y)\}$?

Решение. $\dim(V^2) = 2$. Следовательно, любой базис пространства V^2 состоит из двух линейно независимых векторов. Система $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \bar{a}_4$ содержит базис V^2. Например, векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ составляют базис V^2. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что определитель Δ, столбцы которого – координаты векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, отличен от нуля.

Действительно, $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. В силу теоремы о разложении вектора по базису можно записать: $\forall\, \bar{a} \in V^2 \Rightarrow \bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2$. Следовательно, $\forall\, \bar{a} \in V^2$ справедливо следующее разложение по системе векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \bar{a}_4$: $\quad \bar{a} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + 0 \cdot \bar{a}_3 + 0 \cdot \bar{a}_4$. Это значит, что система $\bar{a}_1, \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \bar{a}_4$ является полной в пространстве V^2.

Пример 5. Является ли система функций $f_1(x)=x-1,\ f_2(x)=2x+3,\ f_3(x)=-x-4$ полной в пространстве $P_2=\left\{ f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0 \mid a_2,a_1,a_0\in R\right\}$?
Решение. Данная система функций не является полной, т.к. ни при каких числах k_1,k_2,k_3 линейная комбинация $k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=k_1(x-1)+k_2(2x+3)+k_3(-x-4)$ не позволяет получить функцию $f(x)=x^2\in P_2$. Другими словами, многочлен x^2 неразложим по заданной системе многочленов $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$.

Пример 6. Доказать, что множество всех квадратных матриц X второго порядка, являющихся решениями матричного уравнения $AX+XA=\overline{0}$ с матрицами $A=\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\ \overline{0}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ будет линейным подпространством в пространстве $M_{2\times2}$ и найти какой-нибудь базис этого подпространства.
Решение. Найдем все решения матричного уравнения. Пусть $X=\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}$.

$$AX+XA=\overline{0}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}-u&-v\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-x\\0&-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-u&-v-x\\0&-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{cases}-u=0\\-v-x=0\end{cases}\ \Rightarrow\ v=-x,\ u=0.$$

Следовательно, решениями матричного уравнения являются матрицы $X=\begin{pmatrix}x&y\\0&-x\end{pmatrix}$ с произвольными числами x,y.

Покажем теперь, что множество $M=\left\{X=\begin{pmatrix}x&y\\0&-x\end{pmatrix} \mid x,y\in R\right\}$ всех решений матричного уравнения – линейное подпространство пространства $M_{2\times2}$. Заметим, что $X=xE_1+yE_2$, где $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.
Значит, $M=\{X=xE_1+yE_2 \mid x,y\in R\}$ - линейная оболочка системы матриц E_1,E_2 из линейного пространства $M_{2\times2}$. Т.к. любая линейная оболочка – линейное пространство, и $M\subset M_{2\times2}$, то приходим к требуемому выводу: M - линейное подпространство в $M_{2\times2}$.
Найдем теперь базис M. В качестве базиса можно взять систему E_1,E_2. Эта система полная в M ($\forall X\in M\Rightarrow X=xE_1+yE_2$). Покажем, что система E_1,E_2 линейно независима.

$$k_1E_1+k_2E_2=\overline{0}\ \Rightarrow\ k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}k_1&k_2\\0&-k_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ k_1=0,\ k_2=0.$$

Поскольку линейная комбинация матриц E_1,E_2 дает нулевой элемент только при тривиальном наборе чисел k_1,k_2, делаем вывод: E_1,E_2 - линейно независимая система.
Согласно второму определению базиса (E_1,E_2 - полная, линейно независимая система в M), заключаем: E_1,E_2 - базис M.
В заключении отметим, что $\dim(M_{2\times2})=4$, $\dim(M)=2$.

Пример 7. Доказать, что множество функций
$M=\left\{ f(x)=a+b\cos 2x+(a-2b)\cos^2 x+(c+3b)\sin^2 x \mid a,b,c\in R,\ x\in[0,\ \pi]\right\}$ образует линейное пространство. Найти его базис и размерность.
Решение. Для доказательства линейности пространства M можно воспользоваться определением линейного пространства. Поступим иначе. Заметим, что M - подмножество

линейного пространства $C_{[0,\,\pi]}$, образованного непрерывными на отрезке $[0,\,\pi]$ функциями. Если переписать M в виде $M=\left\{f(x)=a\left(1+\cos^2 x\right)+b\left(\cos 2x-2\cos^2 x+3\sin^2 x\right)+c\sin^2 x\right\}$, то становится видно, что M - линейная оболочка трех функций:
$f_1(x)=1+\cos^2 x,\ \ f_2(x)=\cos 2x-2\cos^2 x+3\sin^2 x,\ \ f_3(x)=\sin^2 x$.
Следовательно, M - линейное пространство (M - линейное подпространство пространства $C_{[0,\,\pi]}$).
Найдем базис и размерность пространства M. Рассмотрим систему $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$.
Эта система полная в пространстве M, т.к. $\forall f(x)\in M\ \Rightarrow\ f(x)=af_1(x)+bf_2(x)+cf_3(x)$.
$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x\ \Rightarrow\ f_2(x)=-\cos^2 x+2\sin^2 x$.
$\cos^2 x=1-\sin^2 x\ \Rightarrow\ f_1(x)=2-\sin^2 x,\ \ f_2(x)=-1+3\sin^2 x,\ \ f_3(x)=\sin^2 x$. Отсюда видно, что все эти три функции – линейные комбинации двух функций: 1 и $\sin^2 x$.
Теперь нетрудно найти, что $f_1(x)=-2f_2(x)+5f_3(x)$.
Действительно, $2-\sin^2 x=-2\left(-1+3\sin^2 x\right)+5\sin^2 x$. Следовательно, в силу критерия линейной зависимости система функций $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ линейно зависима. С учетом найденного выражения функции $f_1(x)$ через $f_2(x),\ f_3(x)$ множество M можно представить в виде $M=\{f(x)=a(-2f_2(x)+5f_3(x))+bf_2(x)+cf_3(x)\}=\{(-2a+b)f_2(x)+(5a+c)f_3(x)\}$.
Обозначим $-2a+b=\alpha,\ 5a+c=\beta$. Т.к. α зависит от b и не зависит от c, а постоянная β зависит от c и не зависит от b, новые постоянные α,β не зависят друг от друга.
Следовательно, $M=\{\alpha f_2(x)+\beta f_3(x)\}$ - линейная оболочка двух функций $f_2(x),\ f_3(x)$. Эти функции образуют полную систему в M. Кроме этого, $f_2(x),\ f_3(x)$ - линейно независимая система. Действительно,
$k_2 f_2(x)+k_3 f_3(x)=0\Rightarrow\ k_2\left(-1+3\sin^2 x\right)+k_3\sin^2 x=0\quad \forall x\in[0,\,\pi]$.
При $x=0\ \Rightarrow\ k_2=0$. При $x=\dfrac{\pi}{2}$, с учетом того, что $k_2=0$ получим $k_3=0$. Т.е. линейная комбинация функций $f_2(x),\ f_3(x)$ обращается в ноль только при тривиальном наборе чисел. В силу полноты и линейной независимости системы $f_2(x),\ f_3(x)$ делаем вывод: эта система функций – базис M. Следовательно, $\dim(M)=2$.

Домашнее задание.
1. Доказать, что $M=\{\bar{a}=(x,0,z)\}$ - линейное подпространство пространства $V^3=\{\bar{a}=(x,y,z)\}$. Найти базис M и $\dim(M)$.
2. Доказать, что $M=\left\{A=\begin{pmatrix} x & 0 & x\\ y & y & 0\\ 0 & z & z\end{pmatrix}\right\}$ - линейное подпространство пространства
$M_{3\times 3}=\left\{A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right\}$. Найти базис M и $\dim(M)$.
3. Найти базис и размерность линейной оболочки $M=\left\{k_1\left(x^2-1\right)+k_2\left(2x^2+3\right)+k_3\left(-3x^2-1\right)\right\}$ многочленов $p_1(x)=x^2-1,\ p_2(x)=2x^2+3,\ p_3(x)=-3x^2-1$ в пространстве $P_2=\left\{p(x)=a_2x^2+a_1x+a_0\right\}$.