Занятие 13.

I. Применение преобразования Лапласа для решения линейных дифф. уравнений порядка n.

(1) $L(d)y = f(t)$; $y(0)=y_0; \ldots; y^{(n-1)}(0) = y_0^{n-1}$

$$L(d) = \frac{d^n}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n -$$

– дифф. оператор;

$f(t)$ – оригинал; $f(t) \fallingdotseq F(p)$ (изображение по Лапласу).

В частности, для II порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(t); \quad y(0)=y_0; \quad y'(0)=y_0'.$$

Теорема о дифф-ии изображения:

Если $y(t) \fallingdotseq \mathcal{Y}(p)$, то

(2). $$\left[\begin{array}{l} y'(t) \fallingdotseq p\mathcal{Y}(p) - y(0); \\ y''(t) \fallingdotseq p^2\mathcal{Y}(p) - p\,y(0) - y'(0). \end{array}\right.$$

Перейдём от ур-я (1) к его изображению:

$$L(p)\,\mathcal{Y}(p) - \Phi(p) = F(p).$$

(3) $\mathcal{Y}(p) = \dfrac{\Phi(p)}{L(p)} + \dfrac{F(p)}{L(p)}$; $\boxed{\mathcal{Y}(p) \fallingdotseq y(t)}$ – решение задачи Коши (1)

Степень многочлена $\Phi(p)$ на 1 ед. меньше, чем степень $L(p) \Rightarrow \dfrac{\Phi(p)}{L(p)}$ – правильная дробь.

$F(p)$ – правильная дробь (изобр-е оригинала) $\Rightarrow \dfrac{F(p)}{L(p)}$ – правильная дробь.

Пример 1. (ТР, №7) Новый ТР КМБ. ТР, №5 (КУБ)

Операторным методом решить задачу Коши.

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 2e^{t} + 2\cdot e^{3t}, & t \geq 0. \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. $y(t) \risingdotseq Y(p)$;

$y' \risingdotseq p\,Y(p) + 1$;

$y'' \risingdotseq p^2\,Y(p) + p - 1$.

$$p^2 \cdot Y + p - 1 - 4\left[pY + 1\right] + 3Y = \frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3}$$

$$Y(p^2 - 4p + 3) + p - 1 - 4 = \frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3}$$

$$Y \cdot (p^2 - 4p + 3) = \frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5.$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)}\left(\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5\right) = \frac{-p^3 + 9p^2 - 19p + 7}{(p-1)^2(p-3)^2}$$

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}$$

$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = 1.$

$$Y(p) = \frac{-2}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p-3)^2}$$

Ответ: $y(t) = -2e^{t} - te^{t} + e^{3t} + te^{3t}$.

$y(t) = e^{t}(-t-2) + e^{3t}(t+1)$.

Операторным методом решить задачу Коши для ЛНДУ с ПК:

(ТР, №7). №5 (КУБ)

Пример 2. $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

1.1.

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$y'(t) \risingdotseq pY(p) - 1$

$y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - p$

$p^2 Y(p) - p + 2pY(p) - 2 + 5Y(p) = \frac{1}{p+1}$

$Y(p)(p^2 + 2p + 5) - p - 2 = \frac{1}{p+1}$

$Y(p)(p^2 + 2p + 5) = \frac{1}{p+1} + p + 2 = \frac{1 + (p+2)(p+1)}{p+1} = \frac{p^2+3p+3}{p+1}.$

$Y(p) = \frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p^2+2p+5)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{\frac{3}{4}p + \frac{7}{4}}{(p+1)^2+4}$

$p^2+3p+3 = A(p^2+2p+5) + (p+1)(Bp+C).$

$p = -1: \quad 1 = 4A; \quad A = \frac{1}{4}$

$p^2: \quad 1 = A + B; \quad B = +\frac{3}{4}$

$p = 0: \quad 3 = 5A + C;$

$C = 3 - 5A$

$C = 3 - \frac{5}{4} = \frac{12}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}.$

$C = \frac{7}{4}.$

$Y(p) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+4}$

$y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}\cdot e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$

Ответ: $y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + e^{-t}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{3}{4}\cos 2t\right).$

К задаче №6 ТР (для обычных групп КУБ). 4

$$\begin{cases} \dot{x} = x+y & x(0)=1 \\ \dot{y} = -x+3y & y(0)=-1 \end{cases}$$

Решить систему д.ур. операторным методом.

Решение. Обозначим $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$

$$\begin{cases} pX(p)-1 = X(p)+Y(p) \\ pY(p)+1 = -X(p)+3Y(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)X - Y = 1 \\ X+(p-3)Y = -1 \end{cases} ; \begin{pmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -1 \\ 1 & p-3 \end{vmatrix} = (p-1)(p-3)+1 = p^2-4p+4$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & p-3 \end{vmatrix} = p-3-1 = p-4$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -p+1-1 = -p.$$

$$X(p) = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{p-4}{p^2-4p+4} = \frac{p-2-2}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} - 2\cdot\frac{1}{(p-2)^2}$$

$$x(t) = e^{2t} - 2te^{2t};$$

$$Y(p) = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-p}{p^2-4p+4} = -\frac{p-2+2}{(p-2)^2} = -\frac{1}{p-2} - \frac{2}{(p-2)^2}$$

$$y(t) = -e^{2t} - 2te^{2t}.$$

Замеч. Для дифф. ур-ний, решаемых операт. методом, нач. условия всегда заданы в момент $t=0$. Решение ищется для промежутка $t\in[0;+\infty)$.

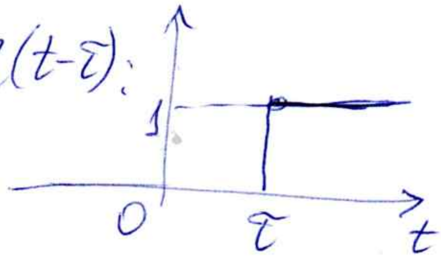
Ответ: $x(t) = e^{2t}(1-2t)$

$y(t) = e^{2t}(-1-2t)$.

Теорема запаздывания оригинала.

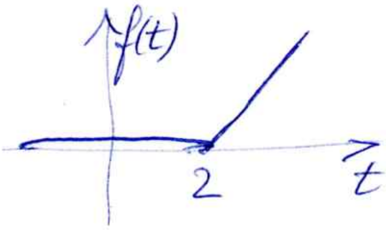
$$\boxed{e^{-p\tau}F(p) \doteqdot \eta(t-\tau)f(t-\tau)}$$

$\eta(t-\tau)$:



№ 14.84. Найти оригинал:

$F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2}$; $\dfrac{1}{p^2}\doteqdot t$; $f(t)=\eta(t-2)(t-2)$.



№14.86.
Найти оригинал:

$$F(p)=\frac{e^{-p}}{p-2}+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{3}{p^2+9}\cdot e^{-4p}.$$

$$f(t)=\eta(t-1)e^{2(t-1)}+\eta(t-1)+\eta(t-4)\sin 3(t-4).$$

№14.85. Найти оригинал:

$F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^3}$; $\dfrac{1}{p^3}\doteqdot\dfrac{1}{2}t^2$; $\dfrac{1}{(p+1)^3}\doteqdot\dfrac{1}{2}e^{-t}\cdot t^2$;

$$f(t)\doteqdot\eta(t-2)\cdot\frac{1}{2}e^{-(t-2)}(t-2)^2.$$

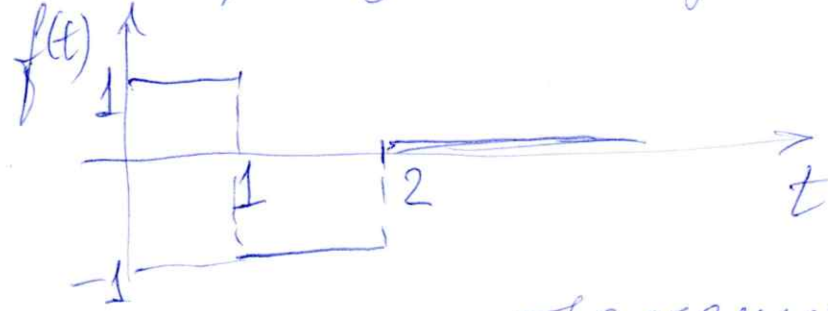
Дома: Найти оригинал (№14.87: $F(p)=\dfrac{2p\,e^{-p}}{p^2-4}$).

Пример 8. (на теорему запаздывания). 6.

Решить задачу Коши:

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = y'(0) = 0. \qquad (№8.3.36)$$

Ф-ия $f(t)$ задана графически:



Используем теорему запаздыв. оригинала: $f(t)\chi(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p)$.

Найдём изображение ф-ии $f(t)$ по теор. запаздывания оригинала.

$$f(t) = \chi(t) - 2\chi(t-1) + \chi(t-2), \text{ где } \chi(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{p} - 2\cdot\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Операторное ур-е:

$$p^2 Y(p) + Y(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}$$

$$Y(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p(p^2+1)} - 2e^{-p}\cdot\frac{1}{p(p^2+1)} + e^{-2p}\cdot\frac{1}{p(p^2+1)}$$

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \chi(t)(1-\cos t)$$

Ответ:

$$y(t) = (1-\cos t)\chi(t) - 2(1-\cos(t-1))\chi(t-1) + (1-\cos(t-2))\chi(t-2).$$

Пример.

Найти оригинал для изображения:

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2};\quad f(t)-?$$

Первый способ.

По т. Бореля о свёртке.

$$F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\fallingdotseq f_1(t)*f_2(t)=$$

$$=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(\tau-t+\tau)-\cos(\cancel{\tau}+t-\cancel{\tau})\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\cos(2\tau-t)d\tau-\frac{1}{2}\int_0^t\cos t\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\sin(2\tau-t)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\frac{1}{2}t\cdot\cos t=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t=$$

$$=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Второй способ.

$$F(p)=\frac{1}{(p^2+1)^2};\quad f(t)-?$$

Решение. $F(p)=\dfrac{1}{(p-i)^2(p+i)^2}$

$$F(p)=\frac{A}{p-i}+\frac{B}{p+i}+\frac{C}{(p-i)^2}+\frac{D}{(p+i)^2}$$

$$A=-\frac{i}{4},\quad B=\frac{i}{4},\quad C=-\frac{1}{4},\quad D=-\frac{1}{4}.$$

$$F(p)=\frac{1}{(p-i)^2(p+i)^2}=\frac{1}{4}\left[\frac{-i}{p-i}+\frac{i}{p+i}-\frac{1}{(p-i)^2}-\frac{1}{(p+i)^2}\right]$$

$$f(t)=\frac{1}{4}\left[-ie^{it}+ie^{-it}-te^{it}-te^{-it}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{(-i)}(e^{+it}-e^{-it})}{2i\cancel{(-i)}}-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

Третий способ.

$$F(p)=\frac{k}{(p^2+k^2)^2};\quad f(t)-?$$

известно, что $\dfrac{k}{p^2+k^2}\risingdotseq\sin kt.$

$$\frac{k}{p^2+k^2}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin kt\,dt$$ дифференцируем по k.

$$\frac{p^2+k^2-2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,t\cdot\cos kt\,dt.$$

(изобр-е синуса)

$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\left(-\frac{1}{k}\sin kt+t\cos kt\right)dt$$

$$f(t)=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cos kt\right).$$