8.08

1. Полная группа событий, её свойства. Формула полной вероятности.

• Полная группа событий.

1) Эти события несовместны ($H_i \cdot H_j = \varnothing$, при $i \neq j$)

2) Вместе составляют Ω

Формула полной вероятности

$P(H_i) > 0$ $\quad P(A) = \sum P(A|H_i)\cdot P(H_i)$ $\quad A = \sum (A H_i)$

H_i	$P(A\|H_i)$
$\frac{2}{10}$	0,002
$\frac{3}{10}$	0,003
$\frac{5}{10}$	0,005

$P(A) = 0{,}002\cdot\frac{2}{10} + 0{,}003\cdot\frac{3}{10} + 0{,}005\cdot\frac{5}{10} = 0{,}0004 + 0{,}0009 + 0{,}0025 = 0{,}0038$

№2 Непрерывные случайные векторы, св-ва их ф-ции распределения и плотности. Формулы выч-я ковариации случ. величин.

Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$ наз непрерывным, если $\exists$ $f_\xi(x_1,\dots x_n)$, что $\forall (x_1,\dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ ф-ия распред ξ

$$F_\xi(x_1\dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_\xi(t_1,\dots,t_n)\,dt_n$$

$f_\xi(x_1\dots x_n)$ - плотность распред

1) $cov(\xi_1,\xi_2) = cov(\xi_2,\xi_1)$

2) $cov(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \eta) = \alpha_1 cov(\xi,\eta) + \alpha_2 cov(\xi,\eta)$

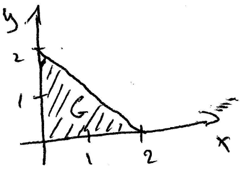
3) ξ_1, ξ_2 - независ $\Rightarrow cov(\xi_1,\xi_2) = 0$

4) $cov(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2}[D(\xi_1+\xi_2) - D\xi_1 - D\xi_2]$

5) $|cov(\xi_1,\xi_2)| \le \sigma_{\xi_1}\cdot\sigma_{\xi_2}$

Задача Совместная плотность распред. ξ и η имеет вид $C(x+y)$ в обл $G = \{(x,y) \mid 0 \le x, 0 \le y, 0 \le x+y \le 2\}$ и равна 0 вне G. Найти C и $cov(\xi,\eta)$

$f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} C(x+y), & \in G \\ 0, & \notin G \end{cases}$



а) Найдём C

$\iint_G f(x+y)\,dx\,dy = 1$

$C\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y)\,dy = \frac{8}{3}C \Rightarrow C = 1$

б) Найдём

$f_\xi = \int_0^{2-y} \frac{3}{8}(x+y)\,dx = \frac{3}{8}\left(2 - \frac{y^2}{2}\right)$

$f_\eta = \int_0^{2-x} \frac{3}{8}(x+y)\,dy = \frac{3}{8}\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)$

в) $M\eta = \int x f_\eta(x)\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 \left(2x - \frac{x^3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$M\xi = \int y f_\xi(y)\,dy = \frac{3}{4}$

$M(\xi,\eta) = \iint_D xy f(x,y)\,dx\,dy = \frac{3}{8}\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x^2y + y^2x)\,dy = \frac{19}{16}$

г) $cov = (\xi,\eta) = M(\xi\cdot\eta) - M\xi\cdot M\eta = \frac{19}{16} - \frac{9}{16} = \frac{5}{8}$

№3 Вероятность попадания стрелка в мишень — $\frac{2}{3}$. ξ — равна числу неудач до первого попадания. Найти $M\eta$, где $\eta = \xi^2 + 2\xi - 1$

$P = \frac{2}{3} \quad q = \frac{1}{3} \qquad M\xi = \frac{q}{p} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$

$M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$M\eta = M\xi^2 + 2M\xi - 1$

$M\eta = \frac{7}{4} + 1 - 1 = \frac{7}{4}$

№4 Одинаково распределённые, независимые случайные величины ξ и η принимают значения 1, 2 с равными величинами. Найти дисперсию случ. величины $|\xi - \eta|$.

$\eta \backslash \xi$	1	2
1	1/4 \ 0	1/4 \ 1
2	1/4 \ 1	1/4 \ 0

$\lvert\xi-\eta\rvert$	0	1
P	1/2	1/2.

$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$M\xi = \frac{1}{2}$

$M\xi^2 = \frac{1}{2}$

$D\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

№5

Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \ln(3)$. Найти знач. ф-ции распред сл.в. $\eta = |\xi - 1|$ в точке 3.

$$f_\xi = \begin{cases} \ln 3\, e^{-\ln 3 \cdot x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = |x-1| : y = \begin{cases} x-1, & \text{при } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{при } x \leq 1 \end{cases}$$

$\psi(y) = y+1, \; \psi(y) = 1-y$

$g(y) = \sum f(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|$

$g(y) = \ln 3 \cdot 3^{-y-1} \cdot 1 + \ln 3 \cdot 3^{y-1} \cdot 1 = \ln 3\,(3^{-y-1} + 3^{y-1})$

$F_y(3) = \int_0^3 \ln 3\,(3^{-y-1} + 3^{y-1})\,dy = \frac{\ln 3}{3}\left(-\frac{3^{-y}}{\ln 3}\Big|_0^3 + \frac{3^y}{\ln 3}\Big|_0^3\right) = \frac{\ln 3}{3}\left(-\frac{1}{3^3 \ln 3} + \frac{3^3}{\ln 3}\right) = \ldots$

$= 9 - \frac{1}{81} = \frac{86}{81}$