МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИРЭА – РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. ШАТИНА

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
РЯДЫ
Конспект лекций

Москва – 2019

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161
Ш 28

Шатина А.В. Методы математического анализа. Ряды [Электронный ресурс]: конспект лекций / Шатина А.В. — М.: МИРЭА – Российский технологический университет, 2019. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

Данное учебное пособие посвящено теории рядов − одному из разделов математического анализа. Содержащийся в пособии материал представлен в виде 16 лекций, которые включают в себя теорию числовых и функциональных рядов. Цель курса лекций: сформировать представления о сходящемся и расходящемся числовом ряде, признаках сходимости числовых рядов, об области сходимости, области абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда, о степенном ряде, ряде Тейлора, ряде Фурье и их приложениях.

Учебное пособие написано на основе курса лекций по дисциплине «Методы математического анализа», предназначенного для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Также оно может быть полезно студентам, обучающимся по другим специальностям и направлениям подготовки с углубленным изучением курса высшей математики.

Конспект лекций издается в авторской редакции.

Автор: Шатина Альбина Викторовна.

Рецензент: Воловиков Алексей Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры Высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА.

Минимальные системные требования:
Наличие операционной системы Windows, поддерживаемой производителем.
Наличие свободного места в оперативной памяти не менее 128 Мб.
Наличие свободного места в памяти хранения (на жестком диске) не менее 30 Мб.
Наличие интерфейса ввода информации.
Дополнительные программные средства: программа для чтения pdf-файлов (Adobe Reader).
Подписано к использованию по решению Редакционно-издательского совета
МИРЭА – Российского технологического университета от ___ __________ 2019 г.
Объем ___ Мб
Тираж 10

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ № 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Числовые последовательности

Определение. Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное или комплексное число a_n. Тогда говорят, что элементы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ образуют числовую последовательность.

Коротко последовательность обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$. Число a_1 называется первым членом последовательности, a_2 – вторым, a_n – n-ым или *общим членом последовательности*.▲

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, пишут: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon. \ ▲ \qquad (1.1)$$

Для последовательности действительных чисел $\{x_n\}\,(a_n = x_n \in \mathbb{R})$ неравенство (1.1) означает, что какую бы малую окрестность точки a на действительной оси мы ни взяли, всегда будет существовать номер последовательности такой, что все члены последовательности с номерами большими N окажутся внутри этой окрестности. Для последовательности комплексных чисел $\{z_n\}\,(a_n = z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C})$ неравенство (1.1) означает, что какое бы малое значение ε мы не взяли, всегда найдется номер N такой, что все члены последовательности с номерами $N + 1$ и больше окажутся внутри круга $U(a, \varepsilon)$ с центром в точке a и радиусом ε (рис. 1.1).

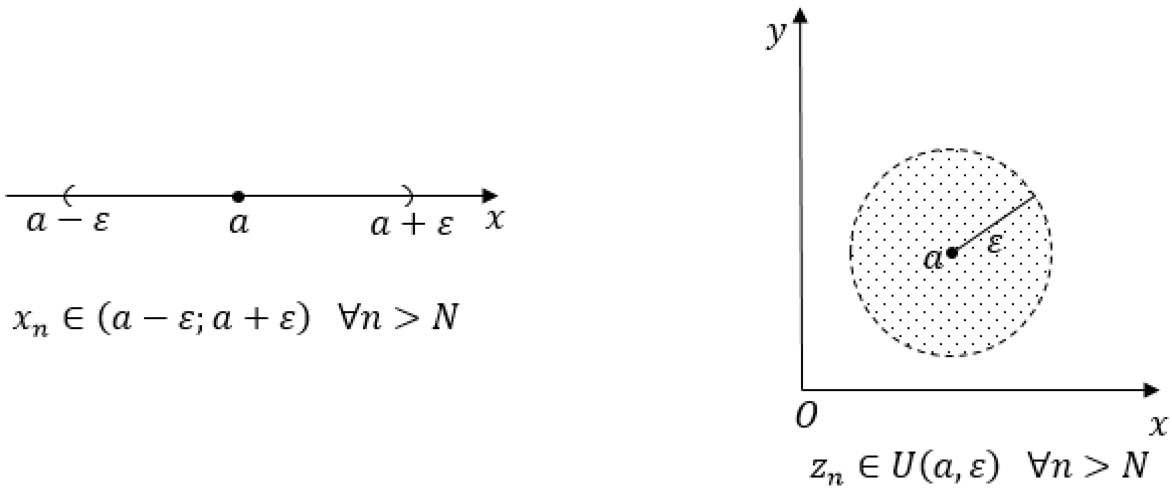

Рис. 1.1

Введем определение бесконечно большой последовательности.

Определение. Говорят, что предел последовательности $\{a_n\}$ равен бесконечности, пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, если $\forall E > 0\ \exists\ N = N(E)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > E$. ▲

Утверждение 1. Пусть дана последовательность комплексных чисел

$$z_n = x_n + iy_n, n = 1,2, \ldots..$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \operatorname{Re} a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \operatorname{Im} a$.

Доказательство: Пусть $a = \alpha + i\beta$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon$. А так как

$$|x_n - \alpha| \le \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon,$$
$$|y_n - \beta| \le \sqrt{(x_n-\alpha)^2 + (y_n-\beta)^2} < \varepsilon,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняются неравенства $|x_n - \alpha| < \varepsilon/2$, $|y_n - \beta| < \varepsilon/2$. В силу неравенства треугольника $|z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. ■

1.2. Определение сходящегося числового ряда

Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.2}$$

называется *числовым рядом* или просто *рядом*. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда. При фиксированном n число a_n называется *n-ым членом ряда* (1.2). В тоже время a_n, рассматриваемое как функция своего номера, называется *общим членом ряда*.

Конечные суммы

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

называются *частичными суммами ряда* (1.2). Сумму

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называют *n-ой частичной суммой ряда* (1.2). Последовательность $\{S_n\}$ называется *последовательностью частичных сумм*.

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд (1.2) называется *сходящимся*, а число S называется его *суммой* и пишут:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ не имеет конечного предела, то говорят, что ряд (1.2) расходится.

Задача 1. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

сходится и найти его сумму.

Решение:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1};$$

$$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow S = 1.$$

Ответ: $S = 1$.

Задача 2. Доказать, что *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{1.3}$$

расходится.

Решение: Возьмем строго возрастающую последовательность натуральных чисел $n_k = 2^k, k = 1,2, \dots$ и рассмотрим подпоследовательность частичных сумм $\{S_{n_k}\}$:

$$S_{n_1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad S_{n_2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

$$S_{n_3} = S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8}, \dots,$$

$$S_{n_k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\frac{1}{2^{k}}\right)>$$

$$>\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\underbrace{\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}\text{ слагаемых}}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k\text{ слагаемых}}=$$

$$=1+\frac{k}{2}>\frac{k}{2}.$$

Тогда $\forall E>0\ \ \exists\, k>2E$ и $\exists\, N=2^k$ такой, что $\forall n>N$

$$S_n>S_N=S_{2^k}>\frac{k}{2}>E.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ и гармонический ряд (1.3) расходится.

Утверждение 2. Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ $(z_n=x_n+iy_n)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty}z_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_n+i\sum_{n=1}^{\infty}y_n.$$

Доказательство: утверждение 2 следует из определения сходящегося ряда и утверждения 1. ■

Определение. Ряд

$$a_{n+1}+\ a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}, \tag{1.4}$$

полученный из ряда (1.2) отбрасыванием первых n членов, называется *n-ым остатком ряда* (1.2). ▲

Теорема 1. Если ряд (1.2) сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток ряда (1.2) сходится, то и сам ряд (1.2) сходится. При этом, если

$$S=\sum_{j=1}^{\infty}a_j,\ S_m=\sum_{j=1}^{m}a_j\,,\quad r_m=\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j\,,$$

то $S=S_m+r_m$.

Доказательство: Пусть ряд (1.2) сходится. Положим $n=m+k$, где m произвольно, но фиксировано. Тогда

$$S_n=S_m+S_k^{(m)}, \tag{1.5}$$

$$S_m=a_1+\cdots+a_m,\ \ S_k^{(m)}=a_{m+1}+\cdots+a_{m+k}.$$

Здесь $S_k^{(m)}$ – k-ая частичная сумма m-ого остатка ряда (1.2). Тогда существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равносильно существованию предела $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(m)}$. Действительно, так как $n = m + k$, то $n \to \infty$ при $k \to \infty$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(m)} = r_m$, то, переходя в (1.5) к пределу при $k \to \infty$, получим равенство
$S = S_m + r_m$. ■

Следствие. Отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

1.3. Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема 2. (Необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство: Если ряд (1.2) сходится, то существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. ■

Замечание. С помощью теоремы 2 в ряде случаев удается установить расходимость ряда, так как согласно этой теореме, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1.2) расходится. Однако, из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, не следует сходимость ряда. Пример тому – гармонический ряд (1.3). Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, однако, ряд расходится.

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \tag{1.6}$$

Решение: Проверим выполнение необходимого признака сходимости ряда. Здесь $a_n = (-1)^n, |a_n| = 1, n = 1,2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Не выполняется необходимый признак сходимости числового ряда, следовательно, ряд (1.6) расходится.

Ответ: расходится.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n, a \neq 0. \tag{1.7}$$

Решение: Рассмотрим случаи:

1) $q = 1$,

2) $|q| < 1$,

3) $|q| \geq 1$.

В первом случае

$$S_n = a + a + \cdots + a = na,$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Следовательно, ряд (1.7) расходится.

Во втором случае

$$S_n = a + aq + aq^2 \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a/(1-q)$. Т.е. во втором случае ряд сходится и его сумма равна $S = a/(1-q)$.

В третьем случае не выполняется необходимый признак сходимости ряда. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}|aq^n| \geq |a| > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

Следовательно, ряд (1.7) расходится.

Ответ: при $|q| < 1$ сходится; при $|q| \geq 1$ расходится.

1.4. Критерий Коши сходимости числового ряда

Теорема 3. (Критерий Коши сходимости числового ряда)

Для сходимости числового ряда (1.2) необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Доказательство: Так как $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n$, то согласно критерию Коши сходимости числовых последовательностей последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел. Это означает, что ряд (1.2) сходится. ■

Следствие (отрицание критерия Коши). Если $\exists\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n > N$ и $\exists p \in \mathbb{N}$, для которых

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| \geq \varepsilon_0,$$

то ряд (1.2) расходится. ■

Задача 5. Используя критерий Коши, доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}. \tag{1.8}$$

Решение:

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \leq$$

$$\le \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \le$$

$$\le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Если $1/n < \varepsilon$, то $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$. Положим $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} = \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Согласно теореме 3 ряд (1.8) сходится.

Задача 6. Доказать расходимость гармонического ряда (1.3), используя отрицание критерия Коши.

Решение: Рассмотрим разность $S_{2n} - S_n$ частичных сумм ряда (1.3):

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Т.е. $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$ такое, что $\forall N\ \exists n = N + 1 > N,\ \ \exists\ p = N + 1$, для которых

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| = \left|S_{n+p} - S_n\right| = |S_{2n} - S_n| \ge \varepsilon_0.$$

Следовательно, ряд (1.3) расходится.

Теорема 4. (Линейные действия над сходящимися рядами)

Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, а α и β – произвольные числа (действительные или комплексные), то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad (1.9)$$

Доказательство: Запишем равенство для частичных сумм:

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (1.10)$$

Так как в правой части равенства (1.10) имеем частичные суммы сходящихся рядов, то существует конечный предел в правой части (1.10) при $n \to$

∞. Следовательно, существует конечный предел и в левой части (1.10). Переходя в (1.10) к пределу при $n \to \infty$, получим равенство (1.9). ■

ЛЕКЦИЯ № 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сравнения

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \ \ n = 1,2,\dots \tag{2.1}$$

***Теорема 1.* (*Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами*)** Ряд (2.1) с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху.

Доказательство: Пусть $S_n = a_1 + \ a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – n*-ая* частичная сумма ряда (2.1). Тогда $S_{n+1} = S_n + \ a_{n+1} \geq S_n \Rightarrow \{S_n\}$ – неубывающая последовательность. Согласно критерию Вейерштрасса для сходимости неубывающей последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху. На основании этого критерия получаем утверждение теоремы 1. ■

***Теорема 2.* (*Признак сравнения*)**

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с неотрицательными членами и пусть

$$0 \leq a_n \leq b_n \dots \forall n \geq n_0.$$

Тогда из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство: Рассмотрим ряды $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, которые получаются из рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ отбрасыванием конечного числа членов (а именно, отбрасыванием первых $(n_0 - 1)$ членов).

Пусть

$$S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+n-1} = \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} a_k,$$

$$T_n = b_{n_0} + b_{n_0+1} + \dots + b_{n_0+n-1} = \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} b_k.$$

S_n, T_n – частичные суммы рядов $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$.

Так как $0 \leq a_n \leq b_n \ldots \forall n \geq n_0,$ то

$$0 \leq S_n \leq T_n \ \forall n \geq 1. \tag{2.2}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ тоже сходится, так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Согласно теореме 1 последовательность $\{T_n\}$ ограничена сверху. Тогда в силу неравенства (2.2) последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху и согласно теореме 1 ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ сходится, следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называют *мажорантой* для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ расходится и $\{S_n\}$ – монотонно возрастающая последовательность, не имеющая конечного предела, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \exists N = N(E)$ такой, что $\forall n > N \ \ S_n > E.$ Тогда $T_n \geq S_n > E \ \ \forall n > N \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится. ■

***Теорема 3.* (*Признак сравнения в предельной форме*)**

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами и пусть существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q.$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q, q > 0.$ Выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $(q - \varepsilon) > 0.$ Тогда для этого ε $\exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - q\right| < \varepsilon.$$

Откуда получаем:

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - q < \varepsilon,$$

$$q - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < q + \varepsilon,$$

$$b_n(q - \varepsilon) < a_n < b_n(q + \varepsilon). \tag{2.3}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то в силу теоремы 2 и (2.3) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(q - \varepsilon)$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(q + \varepsilon)$, тогда в силу теоремы 2 и (2.3) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то на основании теоремы 2 и неравенства (2.3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(q + \varepsilon)$ расходится, следовательно, расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(q-\varepsilon)$ расходится и согласно теореме 2 и неравенству (2.3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. ■

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n}. \tag{2.4}$$

Решение: Так как

$$0 \le \frac{\sin^2 n\alpha}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ сходится (сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2 < 1$), то согласно теореме 2 ряд (2.4) сходится.

Ответ: сходится.

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}. \tag{2.5}$$

Решение: Так как $0 < \ln(n+1) \le n+1,\ n \in \mathbb{N}$ (рис. 2.1), то

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \ge \frac{1}{n+1} > 0.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

расходится, так как расходится гармонический ряд. Согласно теореме 2 ряд (2.5) расходится.

Ответ: расходится.

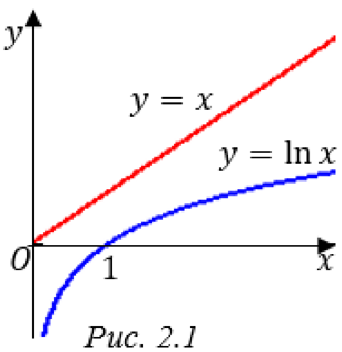

Рис. 2.1

Эффективность использования признаков сравнения для исследования сходимости ряда зависит, конечно, от запаса «рядов сравнения», т.е. рядов, о которых мы уже знаем, сходятся они или расходятся и которые мы тем самым можем использовать для исследования сходимости данного ряда.

Ряды сравнения

$$\mathbf{1})\ 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \qquad (2.6)$$

Ряд (2.6) сходится, если $0 < q < 1$, и расходится, если $q \geq 1$.

$$\mathbf{2})\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \ \text{(ряд Дирихле)} \qquad (2.7)$$

Ряд (2.7) сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

При использовании теоремы 3 полезно вспомнить эквивалентные бесконечно малые функции. При $x \to 0$ имеют место следующие эквивалентности:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x)\,;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};\ (1 + x)^{\alpha} - 1 \sim \alpha x;$$

$$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6}, \qquad \operatorname{tg} x - x \sim \frac{x^3}{3}.$$

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}. \qquad (2.8)$$

Решение: Рассмотрим расходящийся ряд сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$. Это ряд вида (2.7) с $\alpha = 1/2$. Положим

$$a_n = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}, b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = 1,$$

то согласно теореме 3 ряд (2.8) расходится.

Ответ: расходится.

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.9)$$

Решение:

$$1 - \cos\frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{2n^2}, \qquad n \to \infty.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$$

сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (ряд Дирихле с показателем $\alpha = 2$). Согласно теореме 3 ряд (2.9) сходится.

Ответ: сходится.

2.2. Признак Даламбера

Теорема 4. **(*Признак Даламбера*)**

Пусть дан ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \ \ n = 1,2, \dots \tag{2.10}$$

1) Если $a_{n+1}/a_n \le q < 1$ $(n = 1,2, \dots)$, то ряд (2.10) сходится, а если $a_{n+1}/a_n \ge 1$ $(n = 1,2, \dots)$, то ряд (2.10) расходится.

2) Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{2.11}$$

то ряд (2.10) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Доказательство: 1) Представим a_n в виде:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Если $a_{n+1}/a_n \le q < 1$ $(n = 1,2, \dots)$, то $a_n \le a_1 q^{n-1}, q < 1$. Так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

сходится, то согласно теореме 2 ряд (2.10) сходится.

Если $a_{n+1}/a_n \ge 1$, то $a_{n+1} \ge a_1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ge a_1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$. Не выполняется необходимый признак сходимости ряда, следовательно, ряд (2.10) расходится.

2) Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Тогда для этого ε $\exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1.$$

Согласно доказанному в пункте 1 утверждению ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд (2.10) тоже сходится.

Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1,$$

то выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $q - \varepsilon \geq 1$. Для этого $\varepsilon\ \exists N = N(\varepsilon):\ \forall n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - q > -\varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon \geq 1.$$

Согласно доказанному в пункте 1 утверждению ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда ряд (2.10) тоже расходится. ■

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}. \tag{2.12}$$

Решение: Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Согласно теореме 4 ряд (2.12) сходится.

Ответ: сходится.

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,,\quad a_n = \frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}\,. \tag{2.13}$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)(4n+1)}{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)(4n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)}{(4n+2)} = 1.$$

Получили в (2.11) значение $q = 1$. Следовательно, теорема 4 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Представим a_n в виде:

$$a_n = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{(4n-3)}{(4n-6)} \cdot \frac{1}{(4n-2)} > \frac{1}{4n-2} = b_n.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-2} = \frac{1}{4},$$

то согласно признаку сравнения в предельной форме ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, и в силу теоремы 2 расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ответ: расходится.

2.3. Признак Коши

***Теорема 5.* (*Признак Коши*)**

Пусть дан ряд (2.10) с положительными членами.

1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ $(n = 1,2, \ldots)$, то ряд (2.10) сходится, а если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ $(n = 1,2, \ldots)$, то ряд (2.10) расходится.

2) Если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{2.14}$$

то ряд (2.10) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$.

Доказательство: 1) Если $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ $(n = 1,2, \ldots)$, то $a_n \leq q^n$. Так как при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то согласно теореме 2 ряд (2.10) сходится. Если $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ $(n = 1,2, \ldots)$, то $a_n \geq 1, n = 1,2, \ldots \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Не выполняется необходимый признак сходимости ряда, следовательно, ряд (2.10) расходится.

2) Пусть $q < 1$.

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $q + \varepsilon < 1$. Тогда для этого ε $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1.$$

Согласно доказанному в пункте 1 утверждению ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда ряд (2.10) тоже сходится.

Если $q > 1$, то выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $q - \varepsilon > 1$. Для этого ε $\exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1.$$

Согласно доказанному в пункте 1 утверждению ряд $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ расходится. Тогда ряд (2.10) тоже расходится. ■

Замечание. Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \text{ или } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1,$$

то ничего определенного о сходимости ряда (2.10) сказать нельзя. Ряд может как сходиться, так и расходиться. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

удовлетворяют обоим этим условиям, однако, первый из них расходится, а второй – сходится.

Замечание. При использовании радикального признака Коши бывает полезна *формула Стирлинга*:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\qquad 0<\theta<1. \tag{2.15}$$

Задача 7. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \tag{2.16}$$

Решение: $\sqrt[n]{n}>1, n\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n, \alpha_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots+\alpha_n^n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n>\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2\Rightarrow 0<\alpha_n^2<\frac{2}{n-1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\alpha_n^2=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

Для доказательства равенства (2.16) можно также рассмотреть функцию $f(x)=x^{1/x}$ и найти $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, используя правило Лопиталя.

Задача 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n. \tag{2.17}$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^5\left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)=\frac{3}{4}<1.$$

Согласно теореме 5 ряд (2.17) сходится.

Ответ: сходится.

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}. \tag{2.18}$$

Решение:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \cdot \frac{1}{n^n}} = (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{e} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$$

ряд (2.18) сходится.

Ответ: сходится.

ЛЕКЦИЯ № 3. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

3.1. Интегральный признак Коши

Теорема 1. (Интегральный признак Коши)

Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{3.1}$$

и интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \tag{3.2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство: $\forall x \in [k; k+1]$ в силу условия теоремы (рис. 3.1)

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1).$$

По теореме об оценке интеграла

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq f(k+1) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \Leftrightarrow$$

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq S_{n+1} - f(1). \tag{3.3}$$

Из неравенства (3.3) следует, что ограниченность монотонно возрастающей последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (3.1) влечет ограниченность монотонно возрастающей последовательности $\left\{\int_1^{n+1} f(x)dx\right\}$, а следовательно, сходимость интеграла (3.2), и наоборот. Откуда и следует утверждение теоремы.■

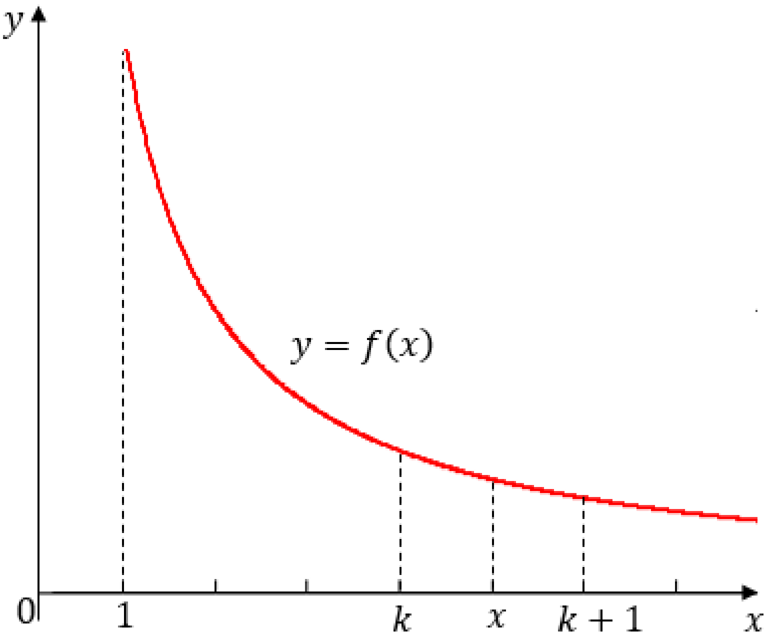

Рис. 3.1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0. \tag{3.4}$$

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, x \in [1; +\infty)$. Эта функция положительна и монотонно убывает на указанном промежутке. Согласно доказанной теореме 1 ряд (3.4) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}. \tag{3.5}$$

Рассмотрим 3 возможных случая значений параметра α.

$$1)\ \alpha = 1, \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x|_{1}^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

интеграл (3.5) и ряд (3.4) расходятся.

$$2)\ 0 < \alpha < 1, \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{1}^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

интеграл (3.5) и ряд (3.4) расходятся.

$$3)\ \alpha > 1, \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = -\left. \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right|_{1}^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow$$

интеграл (3.5) и ряд (3.4) сходятся.

Ответ: сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

3.2. Оценка остатка ряда с помощью интегрального признака Коши

Пусть $f(x)$ – неотрицательная монотонно убывающая функция на промежутке $[1; +\infty)$ и ряд (3.1) сходится. Тогда сходится интеграл (3.2). Оценим n-ый остаток ряда (3.1).

Для $x \in [k-1; k]$

$$f(x) \geq f(k) \Rightarrow$$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq f(k) \ \Rightarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \Rightarrow$$

$$\int_{n}^{\infty} f(x)dx \geq r_n,$$

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) - n$-ый остаток ряда (3.1).

Для $x \in [k; k+1]$:

$$f(x) \leq f(k) \ \Rightarrow$$

$$\int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \Rightarrow$$

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_n.$$

Таким образом, для n-ого остатка ряда (3.1) получаем следующую оценку:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq r_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

3.3. Оценка роста последовательности частичных сумм

Пусть $f(x)$ – неотрицательная монотонно убывающая функция на промежутке $[1; +\infty)$ и ряд (3.1) расходится. Тогда расходится интеграл (3.2).

Для любого $x \in [k; k+1]$:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k),$$

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq f(k),$$

$$-f(k) \le -\int_k^{k+1} f(x)dx \le -f(k+1),$$

$$0 \le f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k) - f(k+1),$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} \left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx \right] \le \sum_{k=1}^{n} [f(k) - f(k+1)],$$

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \le f(1) - f(n+1) \le f(1). \qquad (3.6)$$

Рассмотрим последовательность $\{c_n\}$, где

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx. \qquad (3.7)$$

Покажем, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху. Действительно, из (3.6) следует неравенство

$$c_n \le f(1).$$

Далее:

$$c_{n+1} - c_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+2} f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \int_1^{n+1} f(x)dx =$$

$$= f(n+1) - f(\tilde{x}), \ \ \tilde{x} \in [n+1; n+2] \Rightarrow \ c_{n+1} - c_n \ge 0.$$

Согласно теореме Вейерштрасса существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = C$. Тогда $c_n = C + \varepsilon_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. С учетом равенства (3.7) получим следующее представление n-ой частичной суммы ряда (3.1):

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^{n+1} f(x)dx + C + \varepsilon_n, \qquad (3.8)$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Получим оценку (3.8) для n-ой частичной суммы гармонического ряда:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + C + \varepsilon_n \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots. + \frac{1}{n} = \ln(n+1) + \ C + \varepsilon_n.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$$\ln(n+1) + \ C + \varepsilon_n = \ln n + \ln(n+1) - \ln n + \ C + \varepsilon_n =$$

$$= \ln n + \ C + \tilde{\varepsilon}_n,$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \varepsilon_n, \lim_{n\to\infty} \tilde{\varepsilon}_n = 0.$$

В результате получим следующее равенство:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n. \tag{3.9}$$

Постоянная C в равенстве (3.9) называется *постоянной Эйлера*,

$$C \approx 0{,}577.$$

До сих пор не удается выяснить природу Эйлеровой постоянной в том смысле, что неизвестно даже, является она рациональным числом или нет.

3.4. Признаки Раабе и Гаусса

Сформулируем еще два признака сходимости рядов с положительными членами.

***Теорема 2.* (*Признак Раабе*)**

Если $a_n > 0, n = 1,2,\dots$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$,

то при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q < 1$ – расходится. ■

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{3.10}$$

Решение: Нетрудно убедиться, что с помощью признака Даламбера не удается решить вопрос о сходимости данного ряда. Действительно,

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, a_3 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \dots, a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2n},$$

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2n\cdot(2n+2)}, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Воспользуемся теоремой 2:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Согласно признаку Раабе ряд (3.10) расходится.

Расходимость ряда (3.10) можно установить и другим способом, используя, например, признак сравнения:

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot 2n} > 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot \dots \cdot\frac{(2n-1)}{(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}.$$

Ответ: расходится.

***Теорема 3.* (*Признак Гаусса*)**

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \qquad n = 1,2,\dots \tag{3.11}$$

и пусть

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

где $\lambda, \mu = const$, а $|\theta_n| < L, n \in \mathbb{N}$.

Тогда ряд (3.11) сходится, если $\lambda > 1$ или $\lambda = 1, \mu > 1$,
и расходится, если $\lambda < 1$ или $\lambda = 1, \mu \leq 1$. ■

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p + \cdots, \qquad p > 0. \tag{3.12}$$

Решение: Воспользуемся признаком Гаусса. При $n \geq 2$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^p = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-p} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p-1)}{2!}\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1 + \frac{p/2}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}.$$

Здесь $\lambda = 1, \mu = p/2$. Следовательно, при $p > 2$ ряд (3.12) сходится, а при $p \leq 2$ – расходится.

Ответ: сходится при $p > 2$, расходится при $p \leq 2$.

3.5. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда

***Теорема 4.* (*Признак Лейбница*)**

Пусть дан знакочередующийся ряд:

$$a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad a_n > 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Если

1) последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$ ($n \in \mathbb{N}$),

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд (3.13) сходится и для его суммы справедлива оценка $S \leq a_1$.

Доказательство: Рассмотрим частичные суммы ряда (3.13) четного порядка:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) \geq 0, m = 1,2,\dots$$

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m} \Rightarrow$$

$$0 \le S_{2m} \le S_{2m+2},$$

т.е. последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастает.

С другой стороны,

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \le a_1 \Rightarrow$$

последовательность $\{S_{2m}\}$ ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса существует

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S. \tag{3.14}$$

Далее,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1},$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S. \tag{3.15}$$

Из (3.14), (3.15) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд (3.13) сходится.

Рассмотрим последовательность $\{S_{2m+1}\}$:

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \le S_{2m-1}, m = 1,2, \dots$$

Так как последовательность $\{S_{2m+1}\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$, то $S_{2m+1} \ge S, m = 0,1,2, \dots$ Следовательно, $S \le a_1$. ■

Следствие. Пусть дан знакочередующийся ряд (3.13) и выполнены условия 1), 2) теоремы 4. Тогда для остатка ряда

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

справедлива оценка:

$$|r_n| \le a_{n+1}, n = 1,2, \dots \tag{3.16}$$

Доказательство: Было показано, что последовательность $\{S_{2m}\}$ монотонно возрастает и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Следовательно, $S_{2m} \le S, , m = 1,2, \dots$

А так как последовательность $\{S_{2m+1}\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$, то $S_{2m+1} \ge S, m = 0,1,2, \dots$ (или $S_{2m-1} \ge S, m = 1,2, \dots$). Имеет место двойное неравенство:

$$S_{2m} \le S \le S_{2m-1}, m = 1,2, \dots$$

Далее,

$$S_{2m-1} - S \le S_{2m-1} - S_{2m} = a_{2m},$$

$$S - S_{2m} \le S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} \Rightarrow$$

$$|S - S_n| \le a_{n+1}, n = 1,2, \dots,$$

следовательно, справедлива оценка (3.16). ■

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{3.17}$$

Решение: Ряд (3.17) является знакочередующимся рядом вида (3.13), где

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Для данной последовательности $\{a_n\}$ выполнены условия 1), 2) теоремы 4. Поэтому ряд (3.17) сходится и для его суммы справедлива оценка: $S \le 1$.

Ответ: сходится.

ЛЕКЦИЯ № 4. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

4.1. Преобразование Абеля

Рассмотрим преобразование сумм вида

$$S = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1,2,\dots,n)$.

Положим

$$B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots, B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Тогда

$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_n = B_n - B_{n-1},$$
$$S = a_1B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Раскрывая скобки и группируя по-новому члены, получим равенство

$$S = (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_nB_n.$$

Итак,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\, B_i + a_nB_n. \tag{4.1}$$

Равенство (4.1) называется *преобразованием Абеля* (Н. Абель (1802-1829) – норвежский математик).

Лемма (неравенство Абеля)

Если $a_{i+1} \le a_i$ или $a_{i+1} \ge a_i$ $(i = 1,\dots,n-1)$ и $|b_1 + b_2 + \cdots + b_i| \le B$ $(i = 1,\dots,n)$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right| \le B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{4.2}$$

Здесь a_i – вещественные числа, а b_i могут быть комплексными числами.

Доказательство: Согласно условиям леммы все разности $(a_i - a_{i+1})$ в (4.1) одного знака. Тогда, используя равенство (4.1) и условия леммы, получим:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\, B_i + a_n B_n\right| \le \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}||B_i| + |a_n|\,|B_n| \le$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| B + |a_n|\, B = B\left\{\sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + |a_n|\right\} =$$

$$= B\{|a_1 - a_n| + |a_n|\} \le= B\{|a_1| + 2|a_n|\}. \quad \blacksquare$$

4.2. Признак Дирихле

***Теорема 1.* (*Признак Дирихле*)**

Пусть

1) последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, т.е. $a_{i+1} \le a_i$ или $a_{i+1} \ge a_i$ $(i = 1,2,\dots)$, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) последовательность частичных сумм $\{B_n\}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$ ограничена в совокупности, т.е. $\exists\, B > 0$: $|B_n| \le B, n = 1,2,\dots$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{4.3}$$

сходится.

Доказательство: Из второго условия теоремы 1 следует, что

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| = |B_{n+p} - B_n| \le |B_{n+p}| + |B_n| \le 2B.$$

Из условия 1) следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что

$$\forall n > N(\varepsilon) \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{6B}.$$

Используя неравенство Абеля (4.2), получим:

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\, b_i\right| \le 2B\left(\frac{\varepsilon}{6B} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{6B}\right) = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k$$

сходится, следовательно, ряд (4.3) сходится. ■

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{4.4}$$

Решение: Положим

$$a_n = \frac{1}{n}, b_n = \sin nx.$$

Последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Покажем, что выполнено условие 2) теоремы 1:

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx =$$
$$= \frac{2\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx) =$$
$$= \frac{1}{2\sin(x/2)}\left[\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \cdots +\right.$$
$$\left. + \left(\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\right] = \frac{1}{2\sin(x/2)}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] \Rightarrow$$
$$|B_n| \le \left|\frac{1}{\sin(x/2)}\right|, x \ne 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно признаку Дирихле ряд (4.4) сходится. Если $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то все члены ряда (4.4) равны нулю, следовательно и в этом случае ряд (4.4) сходится.

Замечание. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда следует из признака Дирихле, если положить $b_n = (-1)^n$.

4.3. Признак Абеля

***Теорема 2.* (*Признак Абеля*)**

Пусть

1) последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена;

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N})$ сходится.

Тогда ряд (4.3) сходится.

Доказательство: Из первого условия следует, что $\exists M > 0\colon |a_n| \le M, n = 1,2,\ldots$

Из условия 2) и критерия Коши сходимости числовых рядов следует:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1,2,\ldots$

$$\left|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Поэтому $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1,2,\ldots$ согласно лемме Абеля

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i}\, b_{n+i}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}\left(|a_{n+1}| + 2\left|a_{n+p}\right|\right) \le \frac{\varepsilon}{3M}(M + 2M) = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши сходимости числовых рядов ряд (4.3) сходится. ■

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \cdot \cos(\pi/n)}{\ln \ln n}, \quad \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

Решение: Положим

$$a_n = \cos\frac{\pi}{n}, \quad b_n = \frac{\sin n\alpha}{\ln \ln n}.$$

Последовательность $\{a_n\}, n = 2,3, \ldots$ монотонно возрастает и ограничена:

$$\cos\frac{\pi}{2} < \cos\frac{\pi}{3} < \cdots . < \cos\frac{\pi}{n+1} < \cdots, 0 \leq a_n < 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ b_n$ сходится по признаку Дирихле:

$$b_n = \alpha_n \beta_n, \qquad \alpha_n = \frac{1}{\ln \ln n}, \qquad \beta_n = \sin n\alpha.$$

Последовательность $\{\alpha_n\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ \beta_n$ ограничена в совокупности:

$$|\beta_1 + \cdots + \beta_n| \leq \left|\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\right|.$$

Согласно признаку Абеля ряд (4.5) сходится.

4.4. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (где $a_n -$ действительные или комплексные числа) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Теорема 3. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство: Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, т.е. сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Согласно критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \colon \forall n > N \text{ и } \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\big||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|\big| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. ■

Определение. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то такой ряд называют *условно сходящимся*. ▲

Пример условно сходящегося ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ или $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, то

при $l < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно;

при $l > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится,

при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

4.5. Абсолютная и условная сходимость рядов с общим членом вида (a_n+b_n)

Введем в рассмотрение ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \tag{4.8}$$

Теорема 4. Если ряд (4.6) сходится, то ряды (4.7) и (4.8) одновременно либо сходятся, либо расходятся.

Доказательство: 1) Пусть ряды (4.6) и (4.7) сходятся. Согласно критерию Коши

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1,2,\ldots$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$|(a_{n+1} + b_{n+1}) \ldots + (a_{n+p} + b_{n+p})| \leq$$

$$\leq |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| + |b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд (4.8) сходится.

2) Пусть ряд (4.6) сходится, а (4.7) расходится. Согласно отрицанию критерия Коши из расходимости ряда (4.7) следует:

$\exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall N\ \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N}$, для которых

$$|b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

Для этого $\varepsilon_0 > 0\ \exists N_1$: $\forall n > N_1$ и $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\right|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Тогда $\forall N \geq N_1\ \exists n \geq N$ и $\exists p \in \mathbb{N}$, для которых

$$\left|(a_{n+1}+b_{n+1})\ldots+\left(a_{n+p}+b_{n+p}\right)\right| \geq$$

$$\geq \left|\left|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}\right|-\left|b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}\right|\right|>\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Следовательно, ряд (4.8) расходится.

Аналогично рассматриваются случаи, когда ряды (4.6) и (4.8) сходятся и когда ряд (4.6) сходится, а (4.8) расходится. ■

Задача 3. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\neq \pi k, k\in\mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

сходится условно.

Решение: Ряд (4.9) сходится по признаку Дирихле. Покажем, что этот ряд не сходится абсолютно:

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|=\frac{|\sin nx|}{n}\geq\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\cos 2nx)}{2n}$$

сходится по признаку Дирихле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ расходится. Согласно теореме 4 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}\right)$$

расходится, следовательно, по признаку сравнения расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|.$$

Теорема 5. Если ряд (4.6) сходится абсолютно, то ряды (4.7) и (4.8) одновременно либо сходятся абсолютно, либо сходятся условно, либо расходятся.

Доказательство: Пусть, например, ряд (4.6) сходится абсолютно, а ряд (4.7) сходится условно. Так как ряды (4.6) и (4.7) сходятся, то согласно теореме 3 ряд (4.8) сходится. Покажем, что абсолютной сходимости нет, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n| \tag{4.10}$$

расходится.

Так как ряд (4.7) сходится условно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ расходится. Последовательность частичных сумм $\{\tilde{B}_n\}$, $\tilde{B}_n = |b_1| + \dots + |b_n|$, монотонно возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{B}_n = +\infty$. Согласно отрицанию критерия Коши

$\exists \varepsilon_0 > 0 \colon \forall N\ \exists n \geq N, \exists p \in \mathbb{N}$, для которых

$$|b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

Для этого $\varepsilon_0 > 0\ \exists N_1 \colon \forall n > N_1$ и $\forall p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Тогда $\forall N \geq N_1\ \exists n > N$ и $\exists p \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|a_{n+1} + b_{n+1}| + \dots + |a_{n+p} + b_{n+p}| \geq$$

$$\geq \big||a_{n+1}| - |b_{n+1}|\big| + \dots + \big||a_{n+p}| - |b_{n+p}|\big| \geq$$

$$\geq \big||a_{n+1}| - |b_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| - |b_{n+p}|\big| =$$

$$= \big|(|a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|) - (|b_{n+1}| + \dots + |b_{n+p}|)\big| > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

При получении цепочки неравенств использовалось неравенство треугольника:

$$\big||A| - |B|\big| \leq |A + B| \leq |A| + |B|.$$

Согласно отрицанию критерия Коши ряд (4.10) расходится. Аналогично рассматриваются остальные возможные варианты сходимости рядов. ■

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right). \tag{4.11}$$

Решение: Так как

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2) = u + O(u^2), u \to 0,$$

то

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}\right) = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}} + O\left(\frac{1}{4n^{4/3}}\right) = b_n + a_n,$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt[3]{n^2}}, a_n = O\left(\frac{1}{4n^{4/3}}\right), |a_n| \leq \frac{C}{n^{4/3}}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно. Согласно теореме 5 ряд (4.11) сходится условно.

ЛЕКЦИЯ № 5. ПЕРЕСТАНОВКА ЧЛЕНОВ АБСОЛЮТНО И УСЛОВНО СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

5.1. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{5.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*, \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^*|. \tag{5.4}$$

Здесь ряд (5.2) получен из рядя (5.1) перестановкой его членов, т.е. составлен из тех же членов, что и ряд (5.1), но взятых в другом порядке.

***Теорема 1.* (*о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда*)**

Если ряд (5.1) сходится абсолютно, то ряд (5.2) тоже сходится абсолютно и имеет ту же сумму.

Доказательство: Обозначим частичные суммы рядов (5.1)-(5.4) соответственно

$$S_n, S_n^*, \tilde{S}_n, \tilde{S}_n^*,$$

а суммы этих рядов

$$S, S^*, \tilde{S}, \tilde{S}^*.$$

Пусть ряд (5.1) сходится абсолютно, следовательно, сходится ряд (5.3) и

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| < \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \tilde{S}.$$

Для любой частичной суммы

$$\tilde{S}_m^* = \sum_{k=1}^{m} |a_k^*|$$

$\exists\, n$ такой, что все члены ряда (5.3), входящие в $\tilde{S}_m^*$, имеют номера, не превышающие n. Следовательно,

$$\tilde{S}_m^* \le \tilde{S}_n < \tilde{S} \ (m = 1,2,\dots).$$

Тогда последовательность $\{\tilde{S}_m^*\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса существует конечный предел $\lim\limits_{m\to\infty} \tilde{S}_m^*$, т.е. ряд (5.4) сходится. Тогда ряд (5.2) сходится абсолютно.

Покажем теперь, что, $S^* = S$. Так как ряд (5.3) сходится, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$ такой, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| = \tilde{S} - \tilde{S}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\left|S - S_{n_\varepsilon}\right| = \left|\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем m_ε так, чтобы все члены ряда (5.1), входящие в S_{n_ε}, попали в частичную сумму $S_{m_\varepsilon}^*$ ряда (5.2). Пусть $m \ge m_\varepsilon$. Положим

$$S_m^{**} = S_m^* - S_{n_\varepsilon}.$$

Сумма S_m^{**} содержит члены ряда (5.1) с номерами, бо́льшими n_ε. Тогда

$$|S_m^{**}| \le \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|S - S_m^*| = \left|S - \left(S_m^{**} + S_{n_\varepsilon}\right)\right| \le \left|S - S_{n_\varepsilon}\right| + |S_m^{**}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} S_m^* = S$ и $S^* = S$. ■

5.2. Произведение абсолютно сходящихся рядов

Теорема 2. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся. Составим всевозможные произведения вида $a_k b_m, k = 1,2, \dots, m = 1,2, \dots$, и запишем их все без повторений в виде некоторой последовательности $\{c_n\}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно и

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m. \tag{5.5}$$

Доказательство: Образуем таблицу попарных произведений

$$\begin{array}{l} a_1 b_1 \ \ a_1 b_2 \dots \dots a_1 b_n \dots \dots \\ a_2 b_1 \ \ a_2 b_2 \dots \dots a_2 b_n \dots \dots \\ \dots \dots \qquad\qquad\quad \dots \dots \\ a_m b_1 \ \ a_m b_2 \dots \dots a_m b_n \dots \dots \\ \dots \dots \qquad\qquad\quad \dots \dots \end{array}$$

Составим с помощью этой таблицы ряд по правилу:

$$\begin{array}{ccc|}
1 & 2 & 5 \\
4 & 3 & 6 \\
9 & 8 & 7 \\
\end{array}$$

$$\cdots\cdots$$

Получим ряд

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + \cdots \tag{5.6}$$

Ряд (5.6) можно рассматривать как ряд, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ перестановкой его членов. Обозначим члены ряда (5.6) c_n^*. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n^2} |c_i^*| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{m=1}^{n} |b_m| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| < \infty.$$

Последовательность частичных сумм $\{\tilde{S}_{n^2}^*\}$, где $\tilde{S}_{n^2}^* = \sum_{i=1}^{n^2} |c_i^*|$, монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, ряд (5.6) сходится абсолютно и по теореме 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится абсолютно. Докажем равенство (5.5):

$$\sum_{i=1}^{n^2} c_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{m=1}^{n} b_m,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n^2} c_i^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} b_m,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m.$$

Согласно теореме 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^* = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.$$

Откуда и получаем равенство (5.5). ■

5.3. Условно сходящиеся ряды. Теорема Римана

Пусть дан ряд с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.7}$$

Обозначим через $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+, \dots$ его неотрицательные члены, $a_n^+ \geq 0$, а через $(-a_1^-), (-a_2^-), \dots, (-a_n^-), \dots$– его отрицательные члены, $a_n^- > 0$, взятые в том же порядке, в каком они расположены в (5.7).

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \tag{5.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{5.9}$$

Заметим, что если ряд (5.8) или (5.9) содержит конечное число членов, то, начиная с некоторого номера, ряд (5.7) станет знакопостоянным и его сходимость будет равносильна абсолютной сходимости.

Лемма. Если ряд (5.7) сходится условно, то оба ряда (5.8), (5.9) расходятся.

Доказательство: Пусть ряд (5.7) сходится. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S_n – n-ая частичная сумма ряда (5.7).

Введем обозначения:

$$S_m^+ = \sum_{n=1}^{m} a_n^+, \quad S_k^- = \sum_{n=1}^{k} a_n^- .$$

Тогда $\forall n \ \exists m$ и k такие, что

$$S_n = S_m^+ - S_k^-, \tag{5.10}$$

$$n = m + k, \lim_{n\to\infty} m(n) = +\infty, \lim_{n\to\infty} k(n) = +\infty.$$

Пусть

$$\tilde{S}_n = \sum_{l=1}^{n} |a_l|.$$

Тогда

$$\tilde{S}_n = S_m^+ + S_k^-. \tag{5.11}$$

Так как ряд (5.7) не сходится абсолютно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = +\infty$.

Из (5.10), (5.11) следует:

$$S_m^+ = \frac{1}{2}\left(S_n + \tilde{S}_n\right), S_k^- = \frac{1}{2}\left(\tilde{S}_n - S_n\right).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = +\infty,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} S_m^+ = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} S_k^- = +\infty.$ Следовательно, ряды (5.8), (5.9) расходятся. ■

Теорема 3. (Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда)

Если ряд (5.7) сходится условно, то каково бы ни было число A, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равной A.

Доказательство: Рассмотрим ряды (5.8), (5.9). Согласно лемме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty.$$

Пусть для определенности $A > 0$. Выберем n_1 так, чтобы

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ > A,$$

но при этом

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1-1}^+ \leq A.$$

Т.е.,

$$S_{n_1} > A, S_{n_1} - a_{n_1}^+ \leq A \Leftrightarrow 0 < S_{n_1} - A \leq a_{n_1}^+.$$

Далее выберем из ряда (5.9) n_2 членов так, чтобы

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{n_2}^- < A,$$

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{n_2-1}^- \geq A \Leftrightarrow$$

$$S_{n_1+n_2} < A, S_{n_1+n_2} + a_{n_2}^- \geq A \Leftrightarrow -a_{n_2}^- \leq S_{n_1+n_2} - A < 0.$$

Опять выберем из ряда (5.8) члены до некоторого номера n_3 так, чтобы

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_3}^+ > A,$$

$$a_1^+ + \cdots + a_{n_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{n_2}^- + a_{n_1+1}^+ + \cdots + a_{n_3-1}^+ \leq A \Leftrightarrow$$

$$0 < S_{n_2+n_3} - A \leq a_{n_3}^+.$$

В результате получим ряд, полученный из ряда (5.7) перестановкой его членов, для последовательности частичных сумм которого

$$S_{n_1}, S_{n_1+n_2}, S_{n_2+n_3}, \dots, S_{n_k+n_{k+1}}, \dots$$

в силу построения выполняются неравенства

$$S_{n_1} > A, S_{n_1+n_2} < A, S_{n_2+n_3} > A, \dots,$$

причем

$$\left|S_{n_k+n_{k+1}} - A\right| \leq a_{n_{k+1}}^{\pm}.$$

Так как ряд (5.7) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_{k+1}}^{\pm} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k+n_{k+1}} = A.$$

Если взять теперь любую частичную сумму S_n построенного ряда, то всегда можно найти номер k такой, что

$S_{n_k+n_{k+1}} \leq S_n \leq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$ или $S_{n_k+n_{k+1}} \geq S_n \geq S_{n_{k+1}+n_{k+2}}$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$. ■

Замечание 1. Можно также показать, что, если ряд (5.7) сходится условно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходящимся. В частности, можно сделать так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, или указанный предел не существовал.

Замечание 2. Если ряд (5.7) сходится, то ряд, полученный из ряда (5.7) группировкой его членов, тоже сходится и имеет ту же сумму. Однако, если ряд (5.7) расходится, то второй ряд может сходиться. Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится, а ряд $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ сходится.

Задача 1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,. \tag{5.12}$$

Решение: Ранее в лекции 3 было показано:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\ C+\varepsilon_n. \tag{5.13}$$

Постоянная C в равенстве (5.13) называется *постоянной Эйлера*, $C\approx 0{,}577,$ а ε_n – бесконечно малая последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

Преобразуем частичную сумму порядка $2k$ ряда (5.12):

$$S_{2k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)=$$
$$=\ln 2k+C+\varepsilon_{2k}-\ln k-C-\varepsilon_k=\ln 2+\varepsilon_{2k}-\varepsilon_k.$$

Откуда получаем:

$$\lim_{k\to\infty}S_{2k}=\ln 2.$$

А так как $S_{2k+1}=S_{2k}+\frac{1}{2k+1}$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k+1}=\ln 2\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln 2$.

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=ln\,2. \tag{5.14}$$

Сделаем перестановку членов ряда (5.12) таким образом, чтобы за двумя положительными членами шел один отрицательный. Тогда получим ряд:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{5.15}$$

Задача 2. Найти сумму ряда (5.15).

Решение: Выпишем формулы для общего члена ряда (5.15):

$$a_{3k-2}=\frac{1}{4k-3},a_{3k-2}=\frac{1}{4k-1},a_{3k}=-\frac{1}{2k},k=1,2,\ldots$$

Обозначим через $\tilde{S}_n$ n-ую частичную сумму ряда (5.15). Тогда

$$\tilde{S}_{3k-1} = \tilde{S}_{3k} + \frac{1}{2k}, \tilde{S}_{3k-2} = \tilde{S}_{3k} - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{2k}.$$

Откуда следует, что ряд (5.15) сходится, если последовательность частичных сумм $\{\tilde{S}_{3k}\}$ имеет конечный предел. Для частичной суммы $\tilde{S}_{3k}$ имеем:

$$\tilde{S}_{3k} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{4k}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k}\right) = \ln 4k + C + \varepsilon_{4k} - \frac{1}{2}(\ln 2k + C + \varepsilon_{2k}) -$$

$$- \frac{1}{2}(\ln k + C + \varepsilon_k) = \ln \frac{4k}{\sqrt{2k}\sqrt{k}} + \varepsilon_{4k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{2k} - \frac{1}{2}\varepsilon_k =$$

$$= \ln 2\sqrt{2} + \varepsilon_{4k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{2k} - \frac{1}{2}\varepsilon_k.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{S}_{3k} = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_{3k-1} = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_{3k-2} = \ln 2\sqrt{2} = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Ответ: $\frac{3}{2}\ln 2$.

ЛЕКЦИЯ № 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

6.1. Понятие сходимости, абсолютной сходимости и равномерной сходимости функционального ряда на множестве

Определение. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ определены на множестве D и принимают, вообще говоря, комплексные значения. Тогда выражение

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (6.1)$$

называется *функциональным рядом*. ▲

Для каждой фиксированной точки $x_0 \in D$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \quad (6.2)$$

является числовым рядом (вещественным или комплексным).

Определение. Говорят, что функциональный ряд (6.1) *сходится в точке* $x_0 \in D$, если сходится числовой ряд (6.2). Ряд (6.1) называется *сходящимся на множестве* $D_1 \in D$, если он сходится в каждой точке этого множества. Ряд (6.1) называется *абсолютно сходящимся на множестве* $D_1 \in D$, если на множестве D_1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$.

Совокупность всех значений x, для которых функции $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ определены и ряд (6.1) сходится, называют *областью сходимости ряда* (6.1), а совокупность всех значений x, для которых функции $f_n(x)$ $(n = 1,2,\dots)$ определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ сходится, называют *областью абсолютной сходимости ряда* (6.1). ▲

Для нахождения области сходимости ряда (6.1) в ряде случаев можно воспользоваться признаком Даламбера или признаком Коши.

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = l(x)$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|} = l(x).$$

Тогда в точках, задаваемых неравенством $l(x) < 1$, ряд (6.1) сходится абсолютно, в точках, задаваемых неравенством $l(x) > 1$, ряд (6.1) расходится. В граничных точках, в которых $l(x) = 1$, требуется дополнительное исследование.

Задача 1. Найти область сходимости D_1 функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n\frac{1}{n}. \tag{6.3}$$

Решение: Функции

$$f_n(x) = \left(\frac{|x|}{x}\right)^n\frac{1}{n}$$

определены на множестве $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $x \in (0; +\infty)$, то $f_n(x) = \frac{1}{n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Если $x \in (-\infty; 0)$, то $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно по признаку Лейбница.

Ответ: $D_1 = (-\infty; 0)$,

Задача 2. Найти область сходимости и область абсолютной сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n x}{n}. \tag{6.4}$$

Решение: Функции

$$f_n(x) = \frac{ln^n x}{n}$$

определены на множестве $D = (0; +\infty)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n x}{n}\right|} = \frac{|\ln x|}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = |\ln x|.$$

В точках, задаваемых неравенством $|\ln x| < 1$, ряд (6.4) сходится абсолютно. Решением этого неравенства является интервал: $x \in (e^{-1}; e)$.

Проведем исследование в граничных точках указанного промежутка. Если $x = e$, то получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. При $x = e^{-1}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится условно.

Ответ: $D_1 = [e^{-1}; e)$ – область сходимости;
$D_2 = (e^{-1}; e)$ – область абсолютной сходимости.

Рассмотрим n-ую частичную сумму ряда (6.1):

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Если ряд (6.1) сходится на множестве $D_1 \in D$, то по определению сходящегося на множестве ряда $\forall x \in D_1\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, где $S(x)$ – сумма ряда (6.1) (функция, определенная на множестве D_1).

Для n-ого остатка ряда (6.1) получим:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Если ряд (6.1) сходится на множестве $D_1 \in D$, то $\forall x \in D_1\ \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Дадим определение поточечной и равномерной сходимости функционального ряда на множестве.

Определение. Ряд (6.1) называется *сходящимся на множестве* $D_1 \in D$, если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x \in D_1\ \exists N = N(\varepsilon, x)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon, x)$ выполнено неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$. ▲

Определение. Ряд (6.1) называется *равномерно сходящимся на множестве* $D_1 \in D$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall x \in D_1$ выполнено неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$. ▲

Определение. Говорят, что ряд (6.1) сходится неравномерно на *множестве* $D_1 \in D$, если он сходится в каждой точке этого множества, но при этом
$\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\ N\ \ \exists\ n > N$ и $\exists\ \tilde{x} \in D_1$, для которых $|R_n(\tilde{x})| \geq \varepsilon_0$. ▲

Здесь n и $\tilde{x}$ зависят от N.

Задача 3. Найти область сходимости D_1 данного ряда и исследовать данный ряд на равномерную сходимость на множестве D_1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^{n-1}-x^n)\ . \tag{6.5}$$

Решение:

$$S_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^{n-1}-x^n)=1-x^n.$$

Если $|x|>1$, то не существует конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, следовательно, ряд (6.5) расходится.

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=1$, т.е. ряд (6.5) сходится и его сумма $S(x)=1$.

Если $x=1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=0=\ S(x)$.

Если $x=-1$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ не существует.

Итак, область сходимости D_1 ряда (6.5) имеет вид: $D_1=(-1;1]$. При этом

$$S(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}$$

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=\begin{cases}x^n, & |x|<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

Покажем, что ряд (6.5) сходится неравномерно на множестве D_1. Для любого N возьмем

$$n=N+1>N, \qquad \tilde{x}=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\in D_1.$$

Тогда

$$|R_n(\tilde{x})|=\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n=\frac{1}{2}=\varepsilon_0.$$

Покажем, что ряд (6.5) сходится равномерно на любом отрезке $[-r;r]\subset(-1;1), 0<r<1$. Следует показать, что $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N(\varepsilon)$ и $\forall x\in[-r;r]$ будет выполняться неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$.

Так как $\forall x\in[-r;r]$

$$|R_n(x)|=|x^n|\le r^n,$$

то $\forall\varepsilon>0$ возьмем

$$N(\varepsilon)=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln r}\right]+1.$$

Тогда $\forall n>N(\varepsilon)$ и $\forall x\in[-r;r]$

$$|R_n(x)|=|x^n|\le r^n<r^N\le r^{\ln\varepsilon/\ln r}=r^{\log_r\varepsilon}=\varepsilon.$$

6.2. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда

***Теорема 1.* (*Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда*)** Для равномерной сходимости ряда (6.1) на множестве D_1 необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon), \forall p = 1,2,\ldots$ и $\forall x \in D_1$ выполнялось неравенство

$$\left|f_{n+1}(x) + \ \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \varepsilon. \tag{6.6}$$

Доказательство: Прежде всего заметим, что неравенство (6.6) может быть записано в виде:

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Пусть ряд (6.1) сходится равномерно на множестве $D_1 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall x \in D_1$

$$|R_n(x)| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2.$$

Тогда $\forall n > N(\varepsilon), \forall p = 1,2,\ldots$ и $\forall x \in D_1$

$$\left|f_{n+1}(x) + \ \ldots + f_{n+p}(x)\right| = \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| =$$

$$= \left|S_{n+p}(x) - S(x) + S(x) - S_n(x)\right| \le \left|S_{n+p}(x) - S(x)\right| + |S(x) - S_n(x)| <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Пусть теперь выполнено условие Коши (6.6) ((6.7)). Согласно критерию Коши сходимости числовых последовательностей $\forall x \in D_1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. Из условия Коши (6.7) следует, что $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon), \forall p = 1,2,\ldots$ и $\forall x \in D_1$

$$\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon/2. \tag{6.8}$$

Переходя в (6.8) к пределу при $p \to +\infty$, получим

$$|S(x) - S_n(x)| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд (6.1) сходится равномерно на множестве D_1. ■

Следствие теоремы 1 (отрицание критерия Коши)

Если ряд (6.1) сходится на множестве D_1, но при этом $\exists\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\, N\ \ \exists\, n > N, \exists\, p \in \mathbb{N}$ и $\exists\, \tilde{x} \in D_1$, для которых

$$\left|f_{n+1}(\tilde{x}) + \ \ldots + f_{n+p}(\tilde{x})\right| \ge \varepsilon_0,$$

то ряд (6.1) сходится неравномерно на множестве D_1.

В частности, если $\exists\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\, N\ \ \exists\, n > N$ и $\exists\, x_n \in D_1$, для которых

$$|f_n(x_n)| \ge \varepsilon_0,$$

то ряд (6.1) не сходится равномерно на множестве D_1. ■

Задача 4. Доказать, что данный ряд сходится неравномерно на множестве $E = (0; +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}. \tag{6.9}$$

Решение: $\forall x \in E$

$$0 < \frac{1}{(1+nx)^2} < \frac{1}{n^2x^2},$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2}$$

сходится. Тогда по признаку сравнения ряд (6.9) сходится $\forall x \in E$.

Покажем, что эта сходимость не является равномерной: $\forall\, N \in \mathbb{N}$ возьмем $n = N + 1 > N, x_n = 1/n \in E$. Тогда

$$|f_n(x_n)| = f_n(x_n) = \frac{1}{(1+nx_n)^2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \varepsilon_0.$$

Задача 5. Доказать, что данный ряд сходится неравномерно на множестве $E = (0; 2\pi)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}. \tag{6.10}$$

Решение: Ранее в лекции 4 было показано, что ряд (6.10) сходится $\forall x \in E$ по признаку Дирихле. Покажем, что эта сходимость не является равномерной, т.е. покажем, что $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\, N\ \exists\, n > N, \exists\, p \in \mathbb{N}$ и $\exists\, \tilde{x} \in E$, для которых

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k\tilde{x}}{k} \geq \varepsilon_0.$$

Прежде всего, подберем $\tilde{x} \in (0; 2\pi)$ так, чтобы на достаточно большом промежутке изменения $k: n+1 \leq k \leq n+p$, величина $k\tilde{x}$ была отделена от нуля. Например, если взять

$$\tilde{x} = \frac{\pi}{6(n+1)},$$

то при изменении параметра $k: n+1 \leq k \leq 5(n+1)$, будут выполняться неравенства

$$\frac{\pi}{6} \leq k\tilde{x} \leq \frac{5\pi}{6}, \qquad \sin k\tilde{x} \geq \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\forall\, N$ возьмем $n = N + 1 > N, p = 4n + 5, \tilde{x} = \frac{\pi}{6(n+1)} \in (0; 2\pi)$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin k\tilde{x}}{k}\right| = \sum_{k=n+1}^{5n+5}\frac{\sin k\tilde{x}}{k} \geq \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{5n+5}\frac{1}{k} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{5n+5}\right) > \frac{1}{2}\cdot\frac{4n+4}{5n+5} = \frac{2}{5} = \varepsilon_0.$$

Согласно следствию теоремы 1 ряд (6.10) сходится неравномерно на интервале $(0; 2\pi)$.

6.3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда

Теорема 2. **(*Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда*)** Пусть даны два ряда: функциональный ряд (6.1), где функции $f_n(x)$ определены на множестве D, и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0, n = 1,2, \ldots. \tag{6.11}$$

Если 1) $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in D$ и $\forall n \in \mathbb{N}$,

2) ряд (6.11) сходится,

то функциональный ряд (6.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве D.

Доказательство: Абсолютная сходимость ряда (6.1) на множестве D следует из признака сравнения. Так как ряд (6.11) сходится, то согласно критерию Коши сходимости числовых рядов $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall p = 1,2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

Так как $a_n \geq 0, n = 1,2, \ldots$, то

$$\left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Учитывая условие 1) теоремы 2, получим, что $\forall n > N(\varepsilon), \forall p = 1,2, \ldots$ и $\forall x \in D$

$$\left|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + \left|f_{n+p}(x)\right| \leq$$

$$\leq a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

Согласно теореме 1 ряд (6.1) сходится равномерно на множестве D. ■

Задача 6. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость данного функционального ряда на множестве $E = (-\infty; +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx}{1 + n^5x^2}. \tag{6.12}$$

Решение: Так как $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$, то

$$1+n^5x^2 \geq 2n^{5/2}|x|, \quad |f_n(x)| = \left|\frac{2nx}{1+n^5x^2}\right| \leq \frac{2n|x|}{2n^{5/2}|x|} = \frac{1}{n^{3/2}}, x \neq 0.$$

Если $x = 0$, то

$$|f_n(x)| = 0 < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^{3/2}} \ \forall x \in E \text{ и } \forall n = 1,2, \ldots.$$

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, то ряд (6.12) сходится абсолютно и равномерно на множестве E по признаку Вейерштрасса.

Задача 7. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость данного функционального ряда на множестве $E = [0; +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}. \tag{6.13}$$

Решение: Будем рассматривать члены ряда (6.13) как функции действительной переменной x. Найдем максимальное значение функции $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ на множестве E:

$$f_n'(x) = 2xe^{-nx} - x^2 ne^{-nx} = xe^{-nx}(2 - nx);$$

$$f_n'(x) = 0, x = \frac{2}{n}; \ f_n'(x) > 0, x \in \left(0; \frac{2}{n}\right); \ f_n'(x) < 0, x \in \left(\frac{2}{n}; +\infty\right).$$

На рис. 6.1 изображен график функции $f_n(x)$. В точке $x_n = \frac{2}{n}$ эта функция принимает максимальное значение:

$$f_n(x) \leq f_n(x_n) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-n \cdot \frac{2}{n}} = \frac{4e^{-2}}{n^2} = a_n \quad \forall x \in E.$$

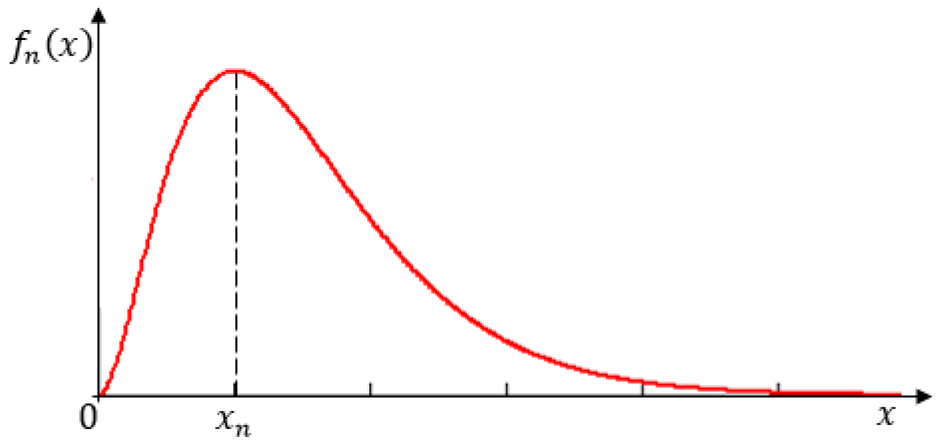

Рис. 6.1

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд (6.13) сходится абсолютно и равномерно на множестве E по признаку Вейерштрасса.

ЛЕКЦИЯ № 7. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

7.1. Непрерывность суммы функционального ряда

Пусть дан функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{7.1}$$

где функции $f_n(x)$ определены на множестве D.

Теорема 1. Если

1) функции $f_n(x)$ непрерывны на множестве D;

2) ряд (7.1) сходится равномерно на множестве D,

то сумма $S(x)$ ряда (7.1) является непрерывной функцией на множестве D.

Доказательство: Возьмем произвольную точку $x_0 \in D$. Согласно первому условию функции $f_n(x)$ непрерывны в точке x_0.

В силу второго условия теоремы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall x \in D$ выполнено неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon/3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon/3.$$

Так как $S_n(x)$ – сумма конечного числа непрерывных на множестве D, а, следовательно, в точке x_0 функций, то функция $S_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Тогда

$$|S(x) - S(x_0)| = |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| \le$$
$$\le |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in D$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполнено неравенство $|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$. Это означает, что функция $S(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D$. В силу произвольности точки x_0 функция $S(x)$ непрерывна на множестве D. ■

Условия теоремы 1 являются достаточными, но не являются необходимыми. В следующем примере условие 2) теоремы 1 не выполняется, но тем не менее, сумма ряда является непрерывной функцией на указанном множестве.

Задача 1. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x[n(n+1)x^2-1]}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)} \tag{7.2}$$

сходится неравномерно на отрезке $[-1;1]$, но его сумма непрерывна на этом отрезке.

Решение: Члены ряда (7.2)

$$f_n(x) = \frac{x[n(n+1)x^2-1]}{(1+n^2x^2)(1+(n+1)^2x^2)}$$

как функции переменной x непрерывны на отрезке $[-1;1]$ и являются дробно-рациональными функциями. Разложим $f_n(x)$ в сумму простейших дробей:

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)} - \frac{(n+1)x}{(1+(n+1)^2x^2)}.$$

Выпишем n-ую частичную сумму ряда (7.2):

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+(2x)^2} + \frac{2x}{1+(2x)^2} - \frac{3x}{1+(3x)^2} + \cdots +$$

$$+\frac{nx}{(1+n^2x^2)} - \frac{(n+1)x}{(1+(n+1)^2x^2)} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{(n+1)x}{(1+(n+1)^2x^2)}.$$

Для любого $x \in [-1;1]$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

То есть $\forall x \in [-1;1]$ ряд (7.2) сходится, и его сумма имеет вид:

$$S(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Функция $S(x)$ непрерывна на всей числовой оси, в том числе, она непрерывна на отрезке $[-1;1]$.

Покажем, что ряд (7.2) сходится на этом отрезке неравномерно. Найдем n-ый остаток ряда (7.2):

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{(n+1)x}{(1+(n+1)^2x^2)}.$$

Для любого $N \in \mathbb{N}$ возьмем

$$n = N+1 > N, \tilde{x} = \frac{1}{n+1} \in [-1;1].$$

Тогда

$$|R_n(\tilde{x})| = \left|\frac{(n+1)\tilde{x}}{(1+(n+1)^2\tilde{x}^2)}\right| = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0.$$

Это и означает неравномерную сходимость ряда (7.2) на отрезке $[-1; 1]$.

7.2. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда

***Теорема 2.* (*Теорема о почленном интегрировании функционального ряда*)**

Пусть

1) функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$;

2) ряд (7.1) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt\,, \quad c \in [a; b], \tag{7.3}$$

сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, и при этом ряд (7.1) можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n(t)dt.$$

Доказательство: Согласно теореме 1 сумма ряда (7.1) $S(x)$ является непрерывной на отрезке $[a; b]$ функцией. Следовательно, $S(x)$ интегрируема на любом отрезке $[c; x] \subset [a; b]$. Покажем, что ряд (7.3) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$ к функции

$$\sigma(x) = \int_c^x S(t)\,dt = \int_c^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt.$$

Пусть

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_c^x f_k(t)dt.$$

Тогда

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| = \left|\int_c^x S(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \int_c^x f_k(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x S(t)\,dt - \int_c^x \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right] dt\right| = \left|\int_c^x S(t)\,dt - \int_c^x S_n(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_c^x [S(t) - S_n(t)]dt\right| \le \left|\int_c^x |S(t) - S_n(t)|dt\right| = \left|\int_c^x |R_n(t)|dt\right|.$$

Так как ряд (7.1) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такое, что $\forall n > N$ и $\forall t \in [a; b]$ выполнено неравенство

$$|R_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Тогда $\forall x \in [a; b]$

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| \leq \left| \int_c^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt \right| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \blacksquare$$

7.3. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда

***Теорема 3.* (*Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда*)** Пусть

1) функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$;

2) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \tag{7.4}$$

сходится равномерно на отрезке $[a; b]$;

3) ряд (7.1) сходится хотя бы в одной точке $c \in [a; b]$.

Тогда

а) ряд (7.1) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$;

б) сумма ряда (7.1) имеет непрерывную производную на отрезке $[a; b]$;

в) ряд (7.1) можно почленно дифференцировать, т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{7.5}$$

Доказательство: Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Из условия 2) и теорем 1,2 следует, что функция $\sigma(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и ряд (7.4) можно почленно интегрировать

$$\int_c^x \sigma(t)\, dt = \int_c^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n'(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(c)], \qquad a \leq x \leq b.$$

Согласно условию 3) теоремы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ сходится, следовательно, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{[f_n(x) - f_n(c)] + f_n(c)\}, \quad a \le x \le b.$$

Тогда

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c) \Leftrightarrow$$

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = S(x) - S(c). \tag{7.6}$$

Функция в левой части равенства (7.6) имеет непрерывную производную по x как интеграл с переменным верхним пределом, следовательно, функция $S(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Дифференцируя равенство (7.6), получим:

$$\sigma(x) = S'(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'.$$

Утверждения б), в) теоремы доказаны. Осталось доказать а). Из (7.6) получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x f_n'(t)\,dt + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c). \tag{7.7}$$

Так как первая сумма в правой части (7.7) представляет собой согласно теореме 2 равномерно сходящийся на отрезке $[a; b]$ функциональный ряд, а вторая сумма – число, равное сумме сходящегося числового ряда, то ряд (7.1) сходится равномерно на отрезке $[a; b]$. ■

Задача 2. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1; 1]. \tag{7.8}$$

Используя полученный результат, найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}. \tag{7.9}$$

Решение: Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad x \in (-1; 1). \tag{7.10}$$

Частичная сумма ряда (7.10) имеет вид:

$$S_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1 - (-x^2)^n}{1 - (-x^2)} = \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1+x^2} = \tilde{S}(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in (-1;1). \tag{7.11}$$

На отрезке $[-q;q], q \in (0;1)$, ряд (7.10) сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Выполнены условия теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. Из (7.11) следует:

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right] dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \qquad x \in (-1;1).$$

Так как

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x,$$

то $\forall x \in (-1;1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x.$$

Таким образом показано, что на интервале $(-1;1)$ сумма ряда (7.8) равна:

$$S(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Заметим, что областью сходимости ряда (7.8) является отрезок $[-1;1]$, а областью сходимости ряда (7.10) – интервал $(-1;1)$.

Покажем, что ряд (7.8) сходится равномерно на отрезке $[-1;1]$. Для n-ого остатка ряда (7.8) справедлива оценка:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \le \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2n+1}\right| \le \frac{1}{2n+1}.$$

Поэтому при выполнении неравенства

$$\frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

получим оценку: $|R_n(x)| < \varepsilon$. Согласно определению равномерно сходящегося на множестве функционального ряда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 : \forall n > N \text{ и } \forall x \in [-1;1]$$

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2N+1} \le \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + 1} = \varepsilon.$$

В силу теоремы 1 сумма $S(x)$ ряда (7.8) непрерывна на отрезке $[-1; 1]$. Следовательно,

$$S(1) = \lim_{x \to 1} S(x) = \lim_{x \to 1} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4};$$

$$S(-1) = \lim_{x \to -1} S(x) = \lim_{x \to -1} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}.$$

Окончательно для суммы ряда (7.8) получаем равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x\,, x \in [-1; 1]. \tag{7.12}$$

Положим в (7.12) $x = 1/\sqrt{3}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3} \cdot 3^n (2n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

ЛЕКЦИЯ № 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

8.1. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{8.1}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{8.2}$$

где c_n $(n = 0,1,2, \dots)$, x_0 – заданные числа, x – вещественная переменная. Числа c_n $(n = 0,1,2, \dots)$ называются *коэффициентами степенного ряда*. ▲

Ряд (8.2) сводится к ряду (8.1) формально заменой $(x - x_0)$ на x. Степенной ряд (8.1) всегда сходится в точке $x = 0$, а ряд (8.2) – в точке x_0, и их сумма в этих точках равна c_0.

***Теорема 1.* (*Теорема Абеля*)**

Если степенной ряд (8.1) сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно во всех точках x таких, что $|x| < |x_1|$.

Если степенной ряд (8.1) расходится в точке x_2, то он расходится во всех точках x таких, что $|x| > |x_2|$ (рис. 8.1).

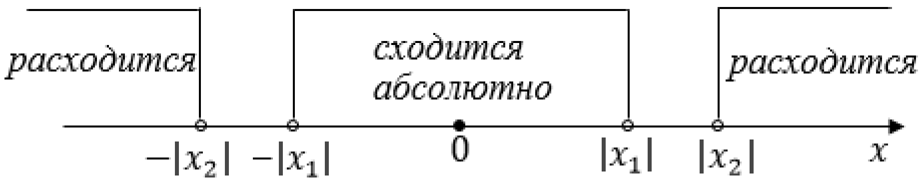

Рис. 8.1

Доказательство: Пусть ряд (8.1) сходится в точке $x_1 \neq 0$, т.е. сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n.$$

В силу необходимого признака сходимости числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n x_1^n = 0$. Следовательно, последовательность $\{c_n x_1^n\}$ ограничена, т.е. $\exists M > 0$: $|c_n x_1^n| \leq M, n = 0,1,2,\ldots$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n x^n|$, где $|x| < |x_1|$, и оценим его общий член. Имеем:

$$|c_n x^n| = \left|c_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n}\right| = |c_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| \leq Mq^n, \ \ q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q $(0 \leq q < 1)$. Тогда по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n x^n|$, при $|x| < |x_1|$. Следовательно, ряд (8.1) сходится абсолютно.

Пусть ряд (8.1) расходится в точке x_2. Тогда по доказанному во всех точках x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_2|$, ряд (8.1) расходится. Так как если $\exists \tilde{x}$: $|\tilde{x}| > |x_2|$ и в точке $\tilde{x}$ ряд (8.1) сходится, то он должен сходиться в точке x_2. ■

Теорема 2. Пусть степенной ряд (8.1) сходится в точке $x \neq 0$. Тогда либо этот ряд сходится абсолютно в каждой точке числовой оси, либо $\exists\, R > 0$ такое, что ряд (8.1) сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.

Доказательство: Рассмотрим множество точек $\bar{x} \neq 0$, в которых ряд (8.1) сходится. Также рассмотрим множество положительных чисел $S = \{|\bar{x}|\}$.

Возможны случаи:

1) Множество S не ограничено сверху. Тогда $\forall x \in (-\infty; +\infty)\ \exists\, |\bar{x}| \in S$ такое, что $|x| < |\bar{x}|$. Согласно теореме 1 ряд (8.1) сходится абсолютно в точке x.

2) Множество S ограничено сверху. Положим $R = \sup_{\bar{x}} S$.

Если $|x| > R$, то ряд (8.1) расходится в точке x.

Если $|x| < R$, то по определению точной верхней грани $\exists\, |\bar{x}| \in S : |x| < |\bar{x}| \le R$. По теореме 1 ряд (8.1) сходится абсолютно в точке x. ■

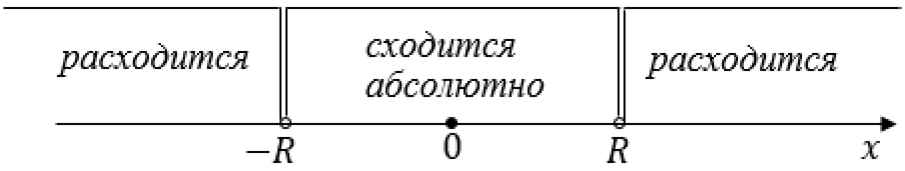

Рис. 8.2

Определение. Пусть $R > 0$ таково, что $\forall x$, удовлетворяющих условию $|x| < R$, ряд (8.1) сходится абсолютно, а $\forall x$, удовлетворяющих условию $|x| > R$, ряд (8.1) расходится. Тогда число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда (8.1), а интервал $(-R; R)$ – *интервалом сходимости* этого ряда (рис. 8.2).

Если ряд (8.1) сходится только при $x = 0$, то полагают $R = 0$.

Если ряд (8.1) сходится $\forall x \in (-\infty; +\infty)$, то полагают $R = \infty$. ▲

Замечание 1. На концах интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Степенной ряд может сходиться в одном конце интервала сходимости и расходиться в другом. Если ряд расходится в одном из концов интервала сходимости, то в другом конце этого интервала сходимость может быть только условной.

Замечание 2. Ряд (8.2) имеет тот же радиус сходимости что и ряд (8.1). Но интервалом сходимости является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ (рис. 8.3).

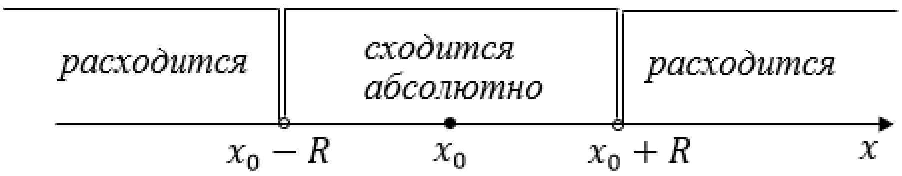

Рис. 8.3

Для радиуса сходимости степенного ряда (8.1) (или (8.2)) справедлива ***формула Коши-Адамара:***

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Радиус сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши. Пусть $c_n \neq 0, n = 1,2,...$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ конечный или бесконечный. Тогда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}. \tag{8.3}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, то $R = \infty$, а если $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \infty$, то $R = 0$.

Действительно, рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \tag{8.4}$$

и применим к нему признак Даламбера (здесь предполагается, что $c_n \neq 0, n = 1,2,...$):

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Если $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$, т.е. $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$, то ряд (8.1) сходится абсолютно.

Если $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$, т.е. $|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$, то ряд (8.1) расходится. Следовательно, для радиуса сходимости ряда (8.1) справедлива формула (8.3).

Пусть теперь $c_n \neq 0, n = 1,2,...$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ конечный или бесконечный. Применим к ряду (8.4) радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Если $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, т.е. $|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, то ряд (8.1) сходится абсолютно.

Если $|x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, т.е. $|x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$, то ряд (8.1) расходится. Тогда для радиуса сходимости получим следующую формулу:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}. \tag{8.5}$$

Задача. Найти интервал сходимости и исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости для каждого из степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 5^n x^{3n}$.

Решение:

$$\text{а) } c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}, n = 1,2, \dots;\ x_0 = -2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$R = 2$ – радиус сходимости, $(x_0 - R; x_0 + R) = (-4; 0)$ – интервал сходимости.

При $x = -4$ получим расходящийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-2)^n}{n \cdot 2^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

При $x = 0$ получим условно сходящийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ответ: $(-4; 0)$ – интервал сходимости; в точке $x = -4$ расходится, в точке $x = 0$ сходится условно.

$$\text{б) } c_n = \frac{(-1)^n}{n^n}, n = 1,2, \dots;\ x_0 = 2;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \infty.$$

Ответ: сходится абсолютно в каждой точке вещественной оси.

$$\text{в) } c_n = n!, n = 0,1,2, \dots;\ x_0 = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty \Rightarrow R = 0.$$

Ряд в) сходится только в точке $x_0 = 0$.

Ответ: сходится только в точке $x_0 = 0$.

$$\text{г) } c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 5, c_4 = c_5 = 0, c_6 = 5^2, \dots \Leftrightarrow$$
$$c_{3k} = 5^k, c_{3k+1} = c_{3k+2} = 0, k = 0,1, \dots$$

Будем рассматривать указанный ряд как функциональный, члены которого имеют вид:

$$f_n(x) = 5^n x^{3n}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{3n+3}}{5^n x^{3n}}\right| = 5|x|^3 = l(x).$$

В точках, задаваемых неравенством $l(x) < 1$, ряд г) сходится абсолютно. Решая неравенство $5|x|^3 < 1$, получим $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$. В точках x, для которых $5|x|^3 > 1$, этот ряд расходится.

Если $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, то $f_n(x) = (-1)^{3n}$ и ряд г) расходится.

Если $x = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$, то $f_n(x) = 1$ и ряд г) также расходится.

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$ – интервал сходимости;

в точках $\pm\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ ряд расходится.

8.2. Равномерная сходимость степенного ряда и непрерывность его суммы

Теорема 3.

а) Степенной ряд (8.1) сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[-a; a]$, содержащемся в интервале сходимости ряда $(-R; R), R > 0$.

б) Если ряд (8.1) расходится в точке $x = R$ $(x = -R)$, то сходимость ряда на промежутке $[0; R)$ $\big((-R; 0]\big)$ не может быть равномерной.

в) Если ряд (8.1) сходится в точке $x = R$ $(x = -R)$, то он сходится равномерно на отрезке $[0; R]$ $([-R; 0])$.

Доказательство: а) Пусть $0 < a < R$. Тогда $\forall x$: $|x| \le a$ и $\forall n = 0,1,2, \ldots$

$$|c_n x^n| \le |c_n a^n|.$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n a^n|$ сходится по определению интервала сходимости, то ряд (8.1) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-a; a]$ по признаку Вейерштрасса.

б) Пусть ряд (8.1) расходится в точке $x = R$, т.е. расходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n. \qquad (8.6)$$

Предположим, что ряд (8.1) сходится равномерно на промежутке $[0; R)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [0; R)$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k x^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8.7)$$

Переходя в неравенстве (8.7) к пределу при $x \to R$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k R^k\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Но тогда согласно критерию Коши ряд (8.6) сходится. Пришли к противоречию.

в) Пусть ряд (8.1) сходится в точке $x = R$. Представим члены ряда (8.1) в виде:

$$c_n x^n = a_n b_n, \qquad a_n = \left(\frac{x}{R}\right)^n, \ b_n = \ c_n R^n.$$

Последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена:

$$|a_n| = \left|\frac{x}{R}\right|^n \leq 1 \quad \forall x \in [0; R], \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{i=1}^{p} b_{n+i}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\forall x \in [0; R]$ согласно лемме Абеля получим оценку:

$$\left|\sum_{i=1}^{p} a_{n+i} b_{n+i}\right| < \frac{\varepsilon}{3}\left(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}(1+2) = \varepsilon.$$

Согласно критерию Коши ряд (8.1) сходится равномерно на отрезке $[0; R]$. ■

Теорема 4. Сумма степенного ряда (8.1) непрерывна в каждой точке его интервала сходимости.

Доказательство: Пусть $(-R; R)$ – интервал сходимости ряда (8.1). Тогда

$$\forall x \in (-R; R) \ \exists a > 0: x \in [-a; a] \subset (-R; R).$$

Так как функции $f_n(x) = c_n x^n$ непрерывны на отрезке $[-a; a]$ и согласно теореме 3 ряд (8.1) сходится равномерно на этом отрезке, то в силу теоремы о непрерывности суммы функционального ряда сумма ряда (8.1) непрерывна на отрезке $[-a; a]$, а, следовательно, непрерывна в точке x. ■

8.3. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Лемма. Радиусы сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{8.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1}, \tag{8.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \tag{8.9}$$

равны.

Доказательство: Пусть R, R_1, R_2 – радиусы сходимости рядов (8.1), (8.8), (8.9) соответственно. Имеет место оценка:

$$\left|\frac{c_n x^{n+1}}{n+1}\right| \leq |x||c_n x^n| \leq x^2 |c_n n x^{n-1}|, n = 1,2, \ldots$$

Если в точке x сходится ряд (8.9), то по признаку сравнения в этой точке сходится ряд (8.1) и (8.8). Следовательно,

$$R_2 \le R \le R_1. \tag{8.10}$$

Пусть ряд (8.8) сходится в точке x_0 и $0 < |x_0| < R_1$. Выберем r так, чтобы $|x_0| < r < R_1$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|c_n n x_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|x_0^2|}\left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right|\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n+1}.$$

Так как при $x = r$ ряд (8.8) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n r^{n+1}}{n+1} = 0 \Rightarrow \exists M > 0\colon \left|\frac{c_n r^{n+1}}{n+1}\right| \le M, n = 1,2,\ldots.$$

Положим $\left|\frac{x_0}{r}\right| = q, 0 < q < 1,$ тогда

$$|c_n n x_0^{n-1}| \le \frac{n(n+1)}{|x_0^2|} M q^{n+1}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{|x_0^2|} M q^{n+1}$$

сходится (например, по признаку Коши), следовательно, при $x = x_0$ сходится ряд (8.9). Так как из сходимости ряда (8.8) следует сходимость ряда (8.9), то $R_2 \ge R_1$. С учетом (8.10) получаем равенства: $R_1 = R_2 = R$. ■

Теорема 5. Пусть $R > 0$ и R – радиус сходимости ряда (8.1), а $S(x)$ – его сумма,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Тогда

1) ряд (8.1) можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости $(-R; R)$, при этом выполняется равенство:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1};$$

2) ряд (8.1) можно почленно интегрировать в интервале сходимости, при этом

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+1};$$

3) степенные ряды, получающиеся из ряда (8.1) почленным интегрированием или дифференцированием, имеют тот же радиус сходимости, что и сам ряд (8.1).

Доказательство: В силу леммы радиусы сходимости рядов (8.1), (8.8), (8.9) равны. Из теоремы 3 следует, что всякий степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$, где $0 < r < R$. Поэтому утверждение теоремы 5 следует из теорем о почленном дифференцировании и интегрировании функциональных рядов. ■

Следствие. Степенной ряд (8.1) можно почленно дифференцировать сколь угодно раз в любой точке x его интервала сходимости $(-R; R)$, причем радиусы сходимости всех получаемых рядов будут равны R. ■

ЛЕКЦИЯ № 9. РЯД ТЕЙЛОРА

9.1. Ряд Тейлора функции *f(x)* в точке x_0

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{9.1}$$

на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, если на этом интервале ряд (9.1) сходится и его сумма равна $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \ x \in (x_0 - R; x_0 + R). \ \blacktriangle$$

Теорема 1. Пусть степенной ряд (9.1) имеет радиус сходимости $R > 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Тогда

$$c_0 = f(x_0), c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 1,2, \dots,$$

т.е. коэффициенты степенного ряда (9.1) определяются по его сумме однозначно.

Доказательство: Так как

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots,$$
$$x \in (x_0 - R; x_0 + R),$$

то $f(x_0) = c_0$.

В силу теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов сумма $f(x)$ ряда (9.1) является бесконечно дифференцируемой функцией в интервале сходимости. Следовательно,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \cdots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots,$$
$$f'(x_0) = c_1,$$
$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)c_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots,$$
$$f''(x_0) = 2c_2,$$
……..
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1)c_n(x - x_0)^{n-k},$$
$$f^{(k)}(x_0) = k!\, c_k \Rightarrow c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 1,2, \ldots \ \blacksquare$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{9.2}$$
называется *рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*, а коэффициенты
$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0,1,2, \ldots,$$
называются *коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0*. ▲

При $x_0 = 0$ ряд (9.2) примет вид:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{9.3}$$
Ряд (9.3) называют также *рядом Маклорена* функции $f(x)$.

Следствие теоремы 1. Если на интервале $(x_0 - R; x_0 + R), R > 0$, функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$. ■

Возникает вопрос: если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$, $R > 0$, и для нее формально построен ряд (9.2), то будет ли он сходиться на этом интервале, и если да, то будет ли его сумма равна функции $f(x)$?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный как показывает следующий пример.

Пример.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Покажем, что функция (9.4) непрерывна на всей числовой оси. Непрерывность $f(x)$ в точках $x \neq 0$ следует из непрерывности функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$. Покажем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0).$$

Покажем, что функция (9.4) имеет производные любого порядка в каждой точке вещественной оси. Для $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \dots, f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ – многочлен степени $3n$ от $1/x$.

Покажем, что функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет производные любого порядка:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$f''(0) = 0, \dots, f^{(n)}(0) = 0.$$

Построим формальный ряд Тейлора функции $f(x)$ в точке $x = 0$ (ряд Маклорена):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0.$$

При этом сама функция $f(x)$ на любом интервале $(-R; R)$, $R > 0$, не равна тождественно нулю.

Заметим, что если функция раскладывается в некоторой окрестности данной точки в степенной ряд, то согласно теореме 1 такой ряд единственен и является ее рядом Тейлора. Однако, один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора для разных функций. Так степенной ряд с нулевыми коэффициентами, $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$, является как рядом Тейлора функции $f_0(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}$, так и рядом Тейлора функции (9.4) в точке $x = 0$.

9.2. Критерий разложимости функции в степенной ряд

Теорема 2. Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд (9.1) на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале функция имела производные всех порядков и чтобы в ее формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tilde{R}_n(x) \quad (9.5)$$

остаточный член $\tilde{R}_n(x)$ стремился к нулю при $n\to\infty$ $\forall x\in(x_0-R;x_0+R)$.

Доказательство: Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{c}_n(x-x_0)^n, \qquad x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Тогда согласно теореме 1

$$\mathrm{c}_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n=0,1,2,\ldots,$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

причем в интервале сходимости функция $f(x)$ имеет производные любого порядка. Положим

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \quad (9.6)$$

Тогда в силу сходимости ряда (9.2) на интервале $(x_0-R;x_0+R)$

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-S_n(x)|=0$$

$$\forall x\in(x_0-R;x_0+R)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\tilde{R}_n(x)=0\ \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{R}_n(x)=0$ $\forall x\in(x_0-R;x_0+R)$. Из (9.5) следует

$$\tilde{R}_n(x)=f(x)-S_n(x),$$

где $S_n(x)$ − $(n+1)$-ая частичная сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0, определяемая равенством (9.6). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-S_n(x)|=0\ \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Это означает, что ряд Тейлора (9.2) сходится на этом интервале, и его сумма равна $f(x)$. ■

9.3. Достаточные условия разложимости функции в степенной ряд

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0-R;x_0+R)$, т.е.

$\exists M>0$: $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M \quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$ и $\forall n=0,1,2,\ldots$

Тогда на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (9.7)$$

Доказательство: Запишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tilde{R}_n(x),$$

$$\tilde{R}_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad 0<\theta<1.$$

Тогда

$$\left|\tilde{R}_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\forall x\in(x_0-R;x_0+R), \forall n=0,1,2,\ldots$$

Числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, где $a_n=\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$, сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{MR^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{MR^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{R}{(n+2)}=0<1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{R}_n(x)=0\ \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$. Согласно теореме 2 на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора и справедливо равенство (9.7). ■

9.4. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд

Получим разложение в степенной ряд некоторых основных элементарных функций. Возьмем $x_0=0$.

1. Разложение в степенной ряд функции $f(x)=e^x$.

Так как $f^{(n)}(x)=e^x\ \ \forall\, n=0,1,2,\ldots$, то

$$0<f^{(n)}(x)<e^a, \forall x\in(-a;a), \forall\, n=0,1,2,\ldots$$

Согласно теореме 3 функция $f(x)=e^x$ разлагается в степенной ряд на любом конечном интервале $(-a;a)$, а значит и на всей действительной оси. А так как

$f^{(n)}(0)=1,\ n=0,1,2,\ldots$, то

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R}. \qquad (9.8)$$

2. Разложение в степенной ряд функций $sh\,x$ и $ch\,x$.

Заменив в формуле x на $(-x)$, получим:

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{9.9}$$

Используя разложения (9.8), (9.9), получим следующие разложения:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x\in\mathbb{R},$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

В правых частях в силу единственности разложения функций в степенные ряды (теорема 1) стоят ряды Тейлора (Маклорена) функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$.

3. Разложение в степенной ряд функции $f(x)=\sin x$.

Так как $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\quad \forall\, n=0,1,2,\ldots$, то

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1, \forall x\in(-\infty;+\infty), \forall\, n=0,1,2,\ldots$$

Выполнены условия теоремы 3, следовательно, функция $f(x)=\sin x$ разлагается в степенной ряд на всей вещественной оси. Найдем коэффициенты степенного ряда:

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\begin{cases}0, n=0,2,4,\ldots,\\(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n=1,3,5,\ldots\end{cases}\Rightarrow$$

$$c_{2n}=0, c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

В результате получаем следующее разложение:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

4. Разложение в степенной ряд функции $f(x)=\cos x$.

Так как $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)\quad \forall\, n=0,1,2,\ldots$, то

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le 1, \forall x\in(-\infty;+\infty), \forall\, n=0,1,2,\ldots$$

Так же, как и для функции $\sin x$, выполнены условия теоремы 3, следовательно, функция $f(x)=\cos x$ разлагается в степенной ряд на всей вещественной оси. Найдем коэффициенты степенного ряда:

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\begin{cases}0, \ n=1,3,5,\ldots,\\(-1)^{\frac{n}{2}}, n=0,2,4,\ldots,\end{cases}\Rightarrow$$

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}, c_{2n+1}=0, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

В результате получаем следующее разложение:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

5. Разложение в степенной ряд функций

$$\frac{1}{1-x}, \qquad \frac{1}{1+x}.$$

Первая из данных функций является суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $x, |x| < 1$, а вторая − суммой бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $(-x), |x| < 1$. Т.е.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1.$$

ЛЕКЦИЯ № 10. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{10.1}$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0, а коэффициенты

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0,1,2, \dots,$$

называются *коэффициентами Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0. ▲

При $x_0 = 0$ ряд (10.1) называют также *рядом Маклорена* функции $f(x)$.

На прошлой лекции были сформулированы и доказаны три теоремы о разложимости функции в степенной ряд. Напомним эти теоремы.

Теорема 1. Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Тогда

$$c_0 = f(x_0), c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 1,2, \dots,$$

т.е. коэффициенты степенного ряда определяются по его сумме однозначно. ■

Теорема 2. (Критерий разложимости функции в степенной ряд)

Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале функция имела производные всех порядков и чтобы в ее формуле Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tilde{R}_n(x)$$

остаточный член $\tilde{R}_n(x)$ стремился к нулю при $n\to\infty$ $\forall x\in(x_0-R;x_0+R)$. ■

Теорема 3. (Достаточные условия разложимости функции в степенной ряд) Пусть функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности на интервале $(x_0-R;x_0+R)$, т.е.

$\exists M>0\colon \left|f^{(n)}(x)\right|\le M\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R)$ и $\forall n=0,1,2,\dots$

Тогда на интервале $(x_0-R;x_0+R)$ функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad ■$$

На прошлой лекции были получены разложения по степеням x функций e^x, $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$. Найдем разложение других элементарных функций.

10.1. Разложение в степенной ряд функции *f*(*x*)=ln(1+*x*)

Данная функция определена на промежутке $(-1;+\infty)$, Ее производная имеет вид

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Имеет место равенство:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n, \qquad |x|<1.$$

В интервале сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать. Поэтому справедливы следующие соотношения:

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^n\right]dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\,t^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Таким образом,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\qquad x\in(-1;1).\tag{10.2}$$

Исследуем сходимость полученного ряда на концах интервала сходимости. При $x=1$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

который сходится условно по признаку Лейбница. При $x=-1$ получим расходящийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}.$$

Согласно теореме 3, доказанной в лекции 8, ряд (10.2) сходится равномерно на отрезке $[0;1]$, а в силу теоремы о непрерывности суммы функционального ряда, сумма $S(x)$ ряда (10.2) непрерывна на этом отрезке. Следовательно,

$$S(1)=\lim_{x\to 1-0}S(x)=\lim_{x\to 1-0}\ln(1+x)=\ln 2.$$

Итак,

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\qquad x\in(-1;1].\tag{10.3}$$

В частности, найдена сумма числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$$

10.2. Разложение в степенной ряд функции *f*(*x*)=arctg *x*

Данная функция определена на всей числовой оси. Ее производная имеет вид:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии, представим эту производную в виде:

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad |x|<1.$$

Применяя теорему о почленном интегрировании степенного ряда в интервале сходимости (теорема 5, лекция 8), получим:

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right]dt=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n\, t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Таким образом, получено разложение функции $\operatorname{arctg} x$ на интервале $(-1;1)$:

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x\in(-1;1). \tag{10.2}$$

В точках $x=-1$, $x=1$, т.е. на концах интервала сходимости, получим сходящиеся знакочередующиеся числовые ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Поэтому ряд (10.2) сходится равномерно на отрезке $[-1;1]$ и его сумма $S(x)$ является непрерывной функцией на этом отрезке:

$$S(-1)=\lim_{x\to-1+0}S(x)=\lim_{x\to-1+0}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{4},$$
$$S(1)=\lim_{x\to1-0}S(x)=\lim_{x\to1-0}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, получено разложение функции $\operatorname{arctg} x$ на отрезке $[-1;1]$:

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x\in[-1;1].$$

Подставляя различные значения x из отрезка $[-1;1]$, можно получать суммы сходящихся числовых рядов. Например, при $x=1$ имеет место равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

10.3. Разложение в степенной ряд функции $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

Функция $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ имеет производные любого порядка в нуле. Для построения ее ряда Тейлора вычислим производные:

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}.$$

Следовательно,

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1),$$

и, значит, ряд Тейлора функции $(1+x)^{\alpha}$ в точке $x_0=0$ имеет вид:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k. \qquad (10.3)$$

Если α – неотрицательное целое число, то ряд (10.3) содержит лишь конечное число членов, отличных от нуля , и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым числом. Найдем радиус сходимости R степенного ряда (10.3) с помощью признака Даламбера. Положим

$$c_k=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, k=1,2,\dots$$

Тогда

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)|k!}{(k+1)!\,|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)|}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{|\alpha-k|}{(k+1)}=1.$$

Значит, радиус сходимости ряда (10.3) равен 1, а интервалом сходимости является интервал $(-1;1)$. В интервале сходимости ряд (10.3) сходится абсолютно, а при $|x|>1$ этот ряд расходится.

Покажем, что при $|x|<1$ ряд (10.3) сходится к $(1+x)^\alpha$. Для этого запишем формулу Тейлора биномиальной функции:

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_n(x).$$

Остаточный член $R_n(x)$ выпишем в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(x_0+\theta(x-x_0)\big)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \qquad 0<\theta<1$$

(здесь θ зависит от x и n).

Для $f(x)=(1+x)^\alpha$ и $x_0=0$ получим:

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \qquad 0<\theta<1.$$

Согласно критерию разложимости функции в степенной ряд надо доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad \forall x\in(-1;1).$$

Представим $R_n(x)$ в виде произведения:

$$R_n(x)=A_n(x)B_n(x)C_n(x),$$

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)\dots\big(\alpha-1-(n-1)\big)}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Так как $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $(\alpha-1)$, то в силу сходимости биномиального ряда на интервале $(-1;1)$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0, \quad x \in (-1;1).$$

Далее, так как

$$1-|x| < 1+\theta x < 1+|x|,$$

то

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1} < |B_n(x)| < |\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}.$$

Значит последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x \in (-1;1)$ ограничена.

Наконец,

$$|C_n(x)| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n < 1.$$

Из установленных свойств $A_n(x), B_n(x), C_n(x)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (-1;1).$$

Поэтому справедливо равенство:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ \ x \in (-1;1). \qquad (10.4)$$

10.4. Разложение в степенной ряд функции *f*(*x*)=arcsin *x*

Заметим, что

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Воспользуемся разложением (10.4), в котором положим $\alpha = -1/2$, а x заменим на $(-x^2)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n n!} x^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \qquad |x| < 1.$$

Используя теорему о почленном интегрировании степенного ряда, получим:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n}\right] =$$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} dt \Rightarrow$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, |x| < 1\,. \qquad (10.5)$$

Исследуем сходимость полученного ряда на концах интервала сходимости. В точке $x = 1$ получим числовой ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}. \qquad (10.6)$$

Воспользуемся асимптотической *формулой Стирлинга* для оценки общего члена ряда (10.6):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Тогда

$$a_n = \frac{(2n-1)!!\,(2n)!!}{[(2n)!!]^2(2n+1)} = \frac{(2n)!}{[2^n n!]^2(2n+1)} \sim$$

$$\sim \sqrt{2\pi \cdot 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n} \cdot \left(\sqrt{2\pi n}\right)^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n(2n+1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ сходится, то согласно признаку сравнения в предельной форме ряд (10.6) сходится.

В точке $x = -1$ получим числовой ряд

$$-1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

который тоже сходится.

Согласно теореме о равномерной сходимости степенного ряда (лекция 8), ряд (10.5) сходится равномерно на отрезке $[-1; 1]$, а в силу теоремы о непрерывности суммы функционального ряда, сумма $S(x)$ ряда (10.5) непрерывна на этом отрезке:

$$S(-1) = \lim_{x \to -1+0} S(x) = \lim_{x \to -1+0} \arcsin x = -\frac{\pi}{2},$$

$$S(1) = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, разложение функции $\arcsin x$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет вид:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad x \in [-1; 1].$$

В частности, при $x = 1$ получим:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

ЛЕКЦИЯ № 11. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

11.1. Разложение в ряд Тейлора различных функций

В предыдущих двух лекциях были получены следующие разложения основных элементарных функций в степенной ряд по степеням x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (11.1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (11.2)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (11.3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad x \in (-1; 1); \qquad (11.4)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1; 1); \quad (11.5)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad x \in (-1; 1]; \qquad (11.6)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in [-1; 1]; \qquad (11.7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1); \qquad (11.8)$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \qquad x \in [-1;1]; \qquad (11.9)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty); \qquad (11.10)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty). \qquad (11.11)$$

Используя разложения (11.1)-(11.11), можно получать разложения в ряд Тейлора других функций. Поясним это на примерах.

Задача 1. Разложить функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \qquad (11.12)$$

а) по степеням x;

б) по степеням $(x+2)$.

Указать области сходимости полученных рядов. Найти $f^{(105)}(0), f^{(105)}(-2)$.

Решение: а) Разложим рациональную дробь в правой части (11.12) в сумму простейших дробей:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Используя разложение (11.4), получим:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2(1 - x/2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad \left|\frac{x}{2}\right| < 1;$$

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1.$$

Следовательно,

$$f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,$$

$$\begin{cases} |x/2| < 1, \\ |x| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Согласно теореме 1 лекции 9 коэффициенты c_n степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ определяются по сумме $f(x)$ однозначно согласно формулам:

$$c_0 = f(x_0), c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 1,2, \dots. \qquad (11.13)$$

Поэтому

$$\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, n=0,1,2,\dots.\Rightarrow f^{(105)}(0)=105!\left(1-\frac{1}{2^{106}}\right).$$

Ответ: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, |x|<1;\ f^{(105)}(0)=105!\left(1-\frac{1}{2^{106}}\right).$

б) Для получения разложения данной функции в ряд по степеням $(x+2)$ также воспользуемся разложением (11.4):

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{(x+2)-4}-\frac{1}{(x+2)-3}=$$

$$=-\frac{1}{4[1-(x+2)/4]}+\frac{1}{3[1-(x+2)/3]}=$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{4^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n,$$

$$\begin{cases}|(x+2)/4|<1,\\|(x+2)/3|<1;\end{cases}\Leftrightarrow |x+2|<3\Leftrightarrow x\in(-5;1).$$

Для нахождения 105-ой производной функции $f(x)$ в точке $x_0=-2$ воспользуемся формулами (11.13):

$$\frac{f^{(n)}(-2)}{n!}=\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right), n=0,1,\dots\Rightarrow\frac{f^{(105)}(-2)}{105!}=\left(\frac{1}{3^{106}}-\frac{1}{4^{106}}\right).$$

Ответ: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n, x\in(-5;1);$

$f^{(105)}(-2)=105!\left(\frac{1}{3^{106}}-\frac{1}{4^{106}}\right).$

Задача 2. Разложить функцию $f(x)=xe^{x+2}$ по степеням $(x-3)$.

Указать область сходимости полученного ряда. Найти $f^{(105)}(3)$.

Решение: Для получения искомого разложения воспользуемся формулой (11.1):

$$f(x)=xe^{x+2}=[(x-3)+3]e^{(x-3)+5}=e^5(x-3)e^{(x-3)}+3e^5e^{(x-3)}=$$

$$=e^5(x-3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}+3e^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}=$$

$$=e^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^{n+1}}{n!}+3e^5\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}=$$

$$=e^5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{(k-1)!}+3e^5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-3)^k}{k!}=$$

$$= 3e^5 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^5}{(k-1)!} + \frac{3e^5}{k!}\right)(x-3)^k =$$

$$= 3e^5 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+3)e^5}{k!}(x-3)^k, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Согласно (11.13)

$$\frac{f^{(k)}(3)}{k!} = \frac{(k+3)e^5}{k!}, k = 0,1,2,\ldots \Rightarrow f^{(105)}(3) = 108e^5.$$

Ответ: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+3)e^5}{k!}(x-3)^k, \ \ x \in (-\infty; +\infty); f^{(105)}(3) = 108e^5$.

Задача 3. Разложить по степеням x функцию

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-2)^2}.$$

Указать область сходимости полученного ряда.

Решение: В интервале сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать (теорема 5, лекция 8). Используя это свойство степенных рядов и разложение (11.4), получим:

$$\frac{1}{(x-2)^2} = -\left(\frac{1}{x-2}\right)' = \left(\frac{1}{2(1-x/2)}\right)' = \left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)' =$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}, \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1;$$

$$f(x) = (3x+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3nx^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3kx^k}{2^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)x^k}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k}{2^{k+1}} + \frac{k+1}{2^{k+2}}\right)x^k =$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7k+1}{2^{k+2}}\right)x^k, \quad |x| < 2.$$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{7k+1}{2^{k+2}}\right)x^k, \ \ |x| < 2$.

11.2. Применение степенных рядов для решения дифференциальных уравнений

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{11.14}$$

удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, причем функция $f(x, y, y')$ имеет в точке (x_0, y_0, y_1) частные производные любого порядка. Тогда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \, , c_n = \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}, n = 0,1,2, \dots.$$

Производные $y^{(n)}(x_0)$ определяются путем последовательного дифференцирования исходного уравнения (11.14) и подстановки в него $x = x_0, y = y(x_0) = y_0, y' = y'(x_0) = y_1$ и ранее найденных значений производных функции $y(x)$ в точке x_0.

Задача 4. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным условиям:

$$y'' = -x^2 y' - 2xy + 1, \tag{11.15}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{11.16}$$

Решение: Из (11.15) и (11.16) следует

$$y''(0) = 1.$$

Дифференцируя уравнение (11.15), получим:

$$y''' = -2xy' - x^2 y'' - 2y - 2xy' = -x^2 y'' - 4xy' - 2y,$$

$$y^{IV} = -x^2 y''' - 6xy'' - 6y',$$

$$y^{V} = -x^2 y^{IV} - 8xy''' - 12y'',$$

……………………………………………………………………………

$$y^{(k+2)} = -x^2 y^{(k+1)} - 2x(k+1) y^{(k)} - k(k+1) y^{(k-1)}, k = 1,2, \dots \tag{11.17}$$

При получении последнего равенства использовалась формула для k-ой производной произведения двух функций:

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)} g + C_k^1 f^{(k-1)} g' + C_k^2 f^{(k-2)} g'' + \dots + C_k^{k-1} f' g^{(k-1)} + f g^{(k)}.$$

В частности,

$$(x^2 y')^{(k)} = y^{(k+1)} x^2 + C_k^1 2x y^{(k)} + C_k^2 2 y^{(k-1)} =$$

$$= x^2 y^{(k+1)} + 2kx y^{(k)} + k(k-1) y^{(k-1)},$$

$$(2xy)^{(k)} = y^{(k)} 2x + C_k^1 2 y^{(k-1)} = 2x y^{(k)} + 2k y^{(k-1)}.$$

Подставляя в (11.17) $x = 0$, получим

$$y^{(k+2)}(0) = -k(k+1) y^{(k-1)}(0), k = 1,2, \dots$$

Откуда

$$y'''(0) = -2y(0) = 0,$$

$$y^{IV}(0) = -6y'(0) = 0,$$

$$y^{V}(0) = -12y''(0) = -12, \dots$$

В точке $x = 0$ отличными от нуля будут производные порядков $(3n + 2), n = 0,1,2, \dots$. Поэтому

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{c}_{3n+2} x^{3n+2},$$

$$\text{c}_{3n+2} = \frac{y^{(3n+2)}(0)}{(3n+2)!}, \qquad n = 0,1,2, \dots,$$

При этом

$$y^{(3n+2)}(0) = (-1)^n 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n)(3n+1) =$$
$$= (-1)^n \frac{(3n+2)!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}.$$

Окончательно решение задачи (11.15)-(11.16) запишется в виде:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}, x \in (-\infty; +\infty). \qquad (11.18)$$

С помощью признака Даламбера нетрудно убедиться, что ряд в (11.18) сходится абсолютно $\forall x \in \mathbb{R}$. Значит определяемая этим рядом функция $y(x)$ является решением задачи для любых значений x.

Ответ: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)}, x \in (-\infty; +\infty)$.

Если исходное дифференциальное уравнение линейно относительно искомой функции и ее производных, причем коэффициент при старшей производной в точке x_0 отличен от нуля, то решение этого дифференциального уравнения можно искать в виде степенного ряда $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{c}_n (x - x_0)^n$ с неопределенными коэффициентами c_n. Разберем этот метод на конкретном примере.

Задача 5. Найти решение задачи Коши:

$$y'' + xy' + y = 1, \qquad (11.19)$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \qquad (11.20)$$

Решение: Будем искать решение задачи (11.19)-(11.20) в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Тогда

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}.$$

Подставим в дифференциальное уравнение (11.19) вместо y, y', y'' соответствующие ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим следующие соотношения:

$$2c_2 + c_0 = 1, (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k + c_k = 0, k = 1,2, \dots.$$

С учетом условий (11.20):

$$c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_{k+2} = -\frac{c_k}{k+2}, k = 1,2, \dots. \qquad (11.21)$$

Из (11.21) следует, что коэффициенты степенного ряда с нечетными индексами равны нулю, а для коэффициентов с четными индексами справедливы равенства:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}, n = 1,2, \dots$$

Тогда функция $y(x)$ примет вид:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n}. \qquad (11.22)$$

Найдем область сходимости степенного ряда в (11.22). Будем рассматривать этот ряд как функциональный с общим членом

$$f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n}.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!\,x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2}{2(n+1)}\right| = 0 \ \forall x \in \mathbb{R},$$

то согласно признаку Даламбера ряд (11.22) сходится абсолютно на всей числовой оси.

Ответ: $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} x^{2n}, x \in (-\infty; +\infty)$.

11.3. Применение степенных рядов для вычисления интегралов

Задача 6. Вычислить с точностью до 10^{-4} интеграл

$$\int_0^{0,6} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$$

Решение: Представим подынтегральную функцию степенным рядом, используя разложение (11.8):

$$\sqrt[3]{1+x^2}=(1+x^2)^{1/3}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\dots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^{2n}=$$

$$=1+\frac{x^2}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^{2n},\qquad |x|<1.$$

Тогда

$$\int_0^{0,6}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=$$

$$=\int_0^{0,6}\left\{1+\frac{x^2}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!}x^{2n}\right\}dx=$$

$$=0,6+\frac{0,6^3}{3\cdot 3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n n!\,(2n+1)}0,6^{2n+1}. \qquad (11.23)$$

Ряд (11.23) является знакочередующимся. Как известно, для остатка R_n знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n>0$, справедлива оценка

$$|R_n|\le a_{n+1}.$$

Применительно к ряду (11.23)

$$|R_n|\le\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot 0,6^{2n+3}}{3^{n+1}(n+1)!\,(2n+3)},n=2,3,\dots$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $|R_n|<10^{-4}$ при $n=4$. Следовательно, с точностью до 10^{-4}

$$\int_0^{0,6}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx=0,6+\frac{0,6^3}{3\cdot 3}-\frac{2\cdot 0,6^5}{3^2\cdot 2!\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 0,6^7}{3^3\cdot 3!\cdot 7}=$$

$$=0,60000+0,02400-0,00173+0,00025\approx 0,6225.$$

ЛЕКЦИЯ № 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

12.1. Тригонометрический ряд и тригонометрическая система функций

Определение. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (12.1)$$

называется *тригонометрическим рядом*, а постоянные a_0,a_n,b_n $(n=1,2,\dots)$ – *коэффициентами тригонометрического ряда*. ▲

Так как члены ряда (12.1) являются периодическими функциями с периодом 2π, то в случае сходимости сумма ряда $S(x)$ будет периодической функцией с периодом 2π: $S(2\pi + x) = S(x)$.

Определение. Система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$, называется *тригонометрической системой функций*. ▲

Определение. Конечная или бесконечная система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, где $\varphi_n(x) \not\equiv 0$ $(n = 1,2,\ldots)$, интегрируемых на отрезке $[a; b]$, называется *ортогональной системой на отрезке* $[a; b]$, если $\forall\, n, m$ таких, что $n \neq m$, выполнено равенство

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0.$$

▲

Теорема 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

ортогональна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Доказательство: Если $n \neq 0$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ таких, что $n \neq m$, справедливы равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos[(n-m)x] + \cos[(n+m)x]\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n-m)x]}{(n-m)} + \frac{\sin[(n+m)x]}{(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos[(n-m)x] - \cos[(n+m)x]\}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[(n-m)x]}{(n-m)} - \frac{\sin[(n+m)x]}{(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\sin[(n-m)x] + \sin[(n+m)x]\}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos[(n-m)x]}{(n-m)} + \frac{\cos[(n+m)x]}{(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0.$$

При $n = m$ получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{1-\cos 2nx\}dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{1+\cos 2nx\}dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] = \pi,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\,dx = -\frac{\cos 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1dx = 2\pi. \qquad \blacksquare$$

12.2. Тригонометрический ряд Фурье

Теорема 2. Пусть равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{12.2}$$

имеет место для всех значений x, причем ряд в правой части равенства (12.2) сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\,, n = 0,1,2,\ldots \tag{12.3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\,, n = 1,2,\ldots \tag{12.4}$$

Доказательство: Так как ряд в правой части (12.2) сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$ и члены ряда являются непрерывными функциями на этом отрезке, то согласно теоремам о непрерывности суммы функционального ряда и почленном интегрировании функционального ряда сумма ряда $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi;\pi]$, при этом ряд в правой части (12.2) можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]dx =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) = a_0\pi.$$

Следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx.$$

Умножим обе части равенства (12.2) на $\cos mx$:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx).$$

(12.5)

Ряд в правой части равенства (12.5) сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$, при этом члены ряда – непрерывные функции. Поэтому этот ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[-\pi;\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right).$$

Используя ортогональность тригонометрической системы функций, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = 0 + a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx = a_m\pi \Rightarrow$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx\,, m = 1,2,\ldots$$

Аналогично, умножая обе части равенства (12.2) на $\sin mx$ и почленно интегрируя на отрезке $[-\pi;\pi]$, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right) =$$

$$= b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx = b_m\pi \Rightarrow$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx\,, m = 1,2,\ldots \ \blacksquare$$

Определение. Тригонометрический ряд (12.1), коэффициенты a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ которого определяются через функцию $f(x)$ формулами (12.3), (12.4), называется *тригонометрическим рядом Фурье функции* $f(x)$, а коэффициенты a_0, a_n, b_n – *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$. ▲

Теорему 2 можно перефразировать следующим образом.

Теорема $\mathbf{2'}$. Всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы. ■

12.3. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда ей можно поставить в соответствие ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Однако, если от функции не требовать ничего, кроме интегрируемости на отрезке $[-\pi; \pi]$, то знак соответствия в последнем соотношении, вообще говоря, нельзя заменить знаком равенства. Приведем достаточный признак сходимости ряда Фурье, т.е. сформулируем условия на заданную функцию, при выполнении которых построенный по ней ряд Фурье сходится, и выясним, как при этом ведет себя сумма этого ряда. Важно подчеркнуть, что хотя приведенный ниже класс кусочно-монотонных функций и является достаточно широким, функции, ряд Фурье для которых сходится, им не исчерпывается.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

на интервалы $(a; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_{n-1}; b)$, на каждом из которых $f(x)$ монотонна. ▲

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π, кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке отрезка $[-\pi; \pi]$, причем для суммы $S(x)$ этого ряда выполняются равенства:

1) $S(x) = f(x)$, если $x \in (-\pi; \pi)$ и x – точка непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+0) + f(x-0)\big)$, если $x \in (-\pi; \pi)$ и x – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)$.

Если дополнительно $f(x)$ непрерывна а всей числовой оси, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. ■

Задача. Разложить функцию $f(x)$, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x < \pi, \end{cases}$$

в ряд Фурье (рис. 12.1).

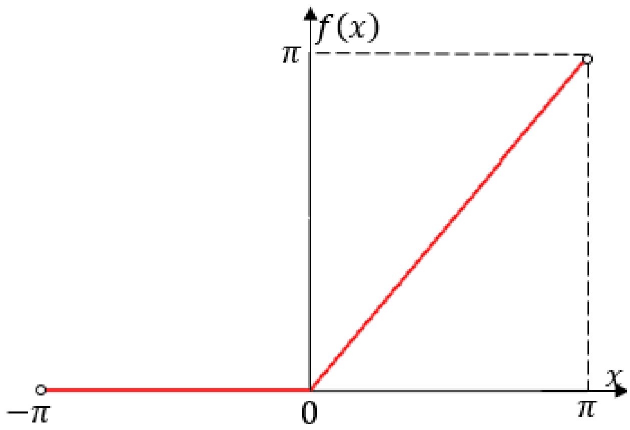

Рис.12.1

Решение: Доопределим функцию $f(x)$ в точках $\pm\pi$ так, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$, и продолжим ее на всю числовую ось периодическим образом с периодом 2π. Тогда для функции $f(x)$ будут выполнены условия теоремы 3. Вычислим коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} xd\sin nx = \frac{1}{\pi n}\left[x\sin nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi n^2}[\cos \pi n - 1] = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, n = 1,2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi} xd\cos nx = -\frac{1}{\pi n}\left[x\cos nx|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\, dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left[\pi\cos \pi n - \left(\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}\right)\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n = 1,2, \ldots$$

Построим ряд Фурье функции $f(x)$ и обозначим $S(x)$ его сумму. Тогда

$$S(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right). \qquad (12.6)$$

Согласно теореме 3

$$S(x) = f(x), x \in (-\pi; \pi),$$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\big) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, функция $S(x)$ является 2π-периодической. На рис.12.2 построен график функции $S(x)$.

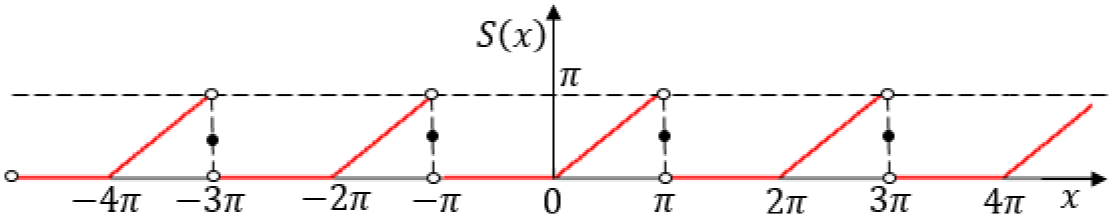

Рис. 12.2

Равенство (12.6) позволяет при различных значениях переменной x получать суммы соответствующих числовых рядов. Например, при $x = 0$ равенство (12.6) примет вид:

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2}.$$

Откуда следует

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

12.4. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и является четной на интервале $(-\pi;\pi)$, т.е. $f(-x) = f(x)$. Тогда $f(x)\cos nx$ – четная функция, а функция $f(x)\sin nx$ является нечетной. В этом случае для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ справедливы равенства:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0, n = 1,2,\ldots$$

Ряд Фурье четной функции имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция на интервале $(-\pi;\pi)$, то

$$a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Ряд Фурье четной функции имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Задача. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$ функцию $f(x)=x^2$.

Решение: Функция $f(x)$ является четной. Следовательно,

$$b_n = 0, n = 1,2,\dots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx \, dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \qquad n = 1,2,\dots$$

Продолжая 2π-периодическим образом функцию $f(x)=x^2$, получим непрерывную на всей числовой оси функцию $S(x)$ (рис. 12.3). Согласно теореме 3 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к $S(x)$:

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

В частности,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \qquad x \in [-\pi;\pi]. \tag{12.7}$$

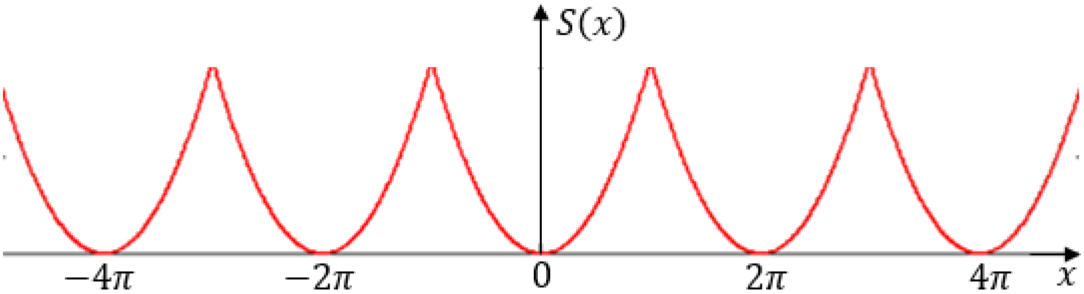

Рис. 12.3

При разных значениях переменной x из равенства (12.7) можно получать значения сумм сходящихся числовых рядов. Полагая в (12.7) $x = 0$, получим:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Если $x = \pi$, то

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{2n}}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Задачу о сумме обратных квадратов, то есть о нахождении суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

предложил решить итальянский математик Пьетро Менголи (1626-1686) в 1644 году. Ее безуспешно пытались решить Готфрид Вильгельм Лейбниц, Иоганн Бернулли и его сын Якоб. Леонард Эйлер предугадал, что сумма этого ряда равна $\pi^2/6$ и доказал этот факт. Доказательство было представлено в 1755 году в работе «Наставления по дифференциальному исчислению».

ЛЕКЦИЯ № 13. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ

13.1. Ряд Фурье для периодической функции

Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом $2l, l > 0$. Выполним замену переменной $x = lt/\pi$ и рассмотрим функцию $F(t) = f(lt/\pi)$. Тогда

$$F(t+2\pi) = f\left(\frac{l(t+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = F(t),$$

т.е. функция $F(t)$ периодична с периодом 2π.

Если функция $F(t)$ интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ей можно поставить в соответствие тригонометрический ряд Фурье:

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{13.1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt\,, n = 0,1,2,\ldots \tag{13.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\,dt\,, n = 1,2,\ldots \tag{13.3}$$

Выполним обратную замену переменной: $t = \pi x/l$. В результате получим:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{13.4}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, n = 0,1,2,\ldots \tag{13.5}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, n = 1,2,\ldots \tag{13.6}$$

Действительно, равенство (13.5) следует из соотношений:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \begin{bmatrix} t = \pi x/l\,, F(t) = f(x) \\ dt = \pi dx/l\,, t = \pm\pi \Rightarrow x = \pm l \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\frac{\pi}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Аналогично получается формула (13.6).

Определение. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l;l]$, то ряд (13.4), коэффициенты a_n и b_n которого определяются формулами (13.5), (13.6), называется *рядом Фурье функции* $f(x)$ ▲

Все теоремы, справедливые для рядов Фурье периодических функций с периодом 2π, остаются в силе и для периодических функций с произвольным периодом $2l$. В частности, сохраняет свою силу и достаточный признак разложимости функции в ряд Фурье.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом $2l$, кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-l;l]$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в каждой точке отрезка $[-l;l]$, причем для суммы $S(x)$ этого ряда выполняются равенства:

1) $S(x) = f(x)$, если $x \in (-l;l)$ и x – точка непрерывности функции $f(x)$;

2) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, если $x \in (-l;l)$ и x – точка разрыва функции $f(x)$;

3) $S(-l) = S(l) = \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)]$.

Если дополнительно $f(x)$ непрерывна а всей числовой оси, то ряд Фурье (13.4) функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. ■

Если $f(x)$ – четная функция на интервале $(-l;l)$, то из (13.5), (13.6) получим:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx\,, n = 0,1,2,\ldots, b_n = 0, n = 1,2,\ldots$$

Для нечетной на интервале $(-l;l)$ функции $f(x)$:

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\ldots, b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx\,, n = 1,2,\ldots$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ имеет период T и интегрируема на любом конечном отрезке действительной оси, то для любого действительного числа a выполняется равенство:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx, \tag{13.7}$$

т.е. интеграл по отрезку, длина которого равна периоду T, имеет одно и то же значение независимо от положения этого отрезка на числовой оси.

Доказательство: В силу периодичности функции $f(x)$

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx = \begin{bmatrix} x = t + T \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int_{0}^{a} f(t+T)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Тогда

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{a}^{T} f(x)dx + \int_{T}^{a+T} f(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{T} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx\,. \ \blacksquare$$

Доказанное свойство (13.7) в частности означает, что коэффициенты Фурье периодической с периодом $2l$ функции можно вычислять по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx\,, n = 1,2,\ldots$$

где a – произвольное действительное число.

13.2. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля

***Теорема 3*. (*Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя*)**

Пусть функции $f(x)$ и $f^2(x)$ интегрируемы на отрезке $[-\pi;\pi]$ и $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$,

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2dx = \min_{T_n(x)}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_n(x)]^2dx, \qquad (13.8)$$

где минимум в правой части равенства (13.8) берется по всем тригонометрическим многочленам $T_n(x)$ степени не выше n. Кроме того, для функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \qquad (13.9)$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Доказательство: Пусть

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx)\right]^2 dx.$$

Учитывая свойство ортогональности тригонометрической системы функций (лекция 12, теорема1) и формулы (12.3), (12.4) для коэффициентов Фурье функции $f(x)$, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{A_0^2}{4}\cdot 2\pi + \sum_{k=1}^{n} \pi(A_k^2 + B_k^2) -$$

$$-2\frac{A_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx - 2\sum_{k=1}^{n} B_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, kx\, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{A_0^2}{4}\cdot 2\pi + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2) - A_0\pi a_0 - 2\pi\sum_{k=1}^{n}(A_k a_k + B_k b_k) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left[\frac{A_0^2}{2} - A_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 - 2A_k a_k + B_k^2 - 2B_k b_k)\right] =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \pi\left[\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2)\right] -$$

$$-\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \qquad (13.10)$$

Так как

$$\frac{(A_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}((A_k - a_k)^2 + (B_k - b_k)^2) \geq 0, \qquad (13.11)$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \quad (13.12)$$

Из (13.10), (13.11) следует, что величина $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx$ принимает наименьшее значение, когда $A_0=a_0, A_k=a_k, B_k=b_k, k=1,2,\dots,n$, т.е. когда

$$T_n(x)=S_n(x).$$

При $T_n(x)=S_n(x)$ неравенство (13.12) превращается в равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]. \quad (13.13)$$

А так как выражение в левой части (13.13) неотрицательно, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\ge\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right], \qquad n=1,2,\dots. \quad (13.14)$$

Из критерия сходимости рядов с неотрицательными членами (лекция 2, теорема 1) и неравенства (13.14) следует сходимость числового ряда

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2). \quad (13.15)$$

Поделив обе части неравенства (13.14) на π и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим неравенство Бесселя (13.9). ■

Из сходимости ряда (13.15) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

Имеет место и более сильное утверждение.

Теорема 4. (Равенство Парсеваля)

Если функции $f(x)$ и $f^2(x)$ интегрируемы на отрезке $[-\pi;\pi]$, то для функции $f(x)$ справедливо *равенство Парсеваля*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

где a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\dots)$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, определяемые формулами (12.3), (12.4). ■

Для функции $f(x)$ интегрируемой со своим квадратом на отрезке $[-l;l]$ справедливо следующее утверждение.

Теорема $\mathbf{4'}$**.** Если функции $f(x)$ и $f^2(x)$ интегрируемы на отрезке $[-l;l]$,то

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, n=1,2,\dots \ ■$$

13.3. Комплексная запись рядов Фурье

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$. Тогда ей можно поставить в соответствие ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (13.16)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \,, n = 0,1,2, \dots \qquad (13.17)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \,, n = 1,2, \dots \qquad (13.18)$$

Согласно формулам Эйлера

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \qquad (13.19)$$

$$\sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{-inx} - e^{inx}\right), \qquad (13.20)$$

где i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Подставив (13.19), (13.20) в (13.16), получим:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}.$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Тогда соотношение (13.16) примет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{inx}. \qquad (13.21)$$

Заметим, что коэффициенты c_n и c_{-n} $(n = 1,2, \dots)$ являются комплексно сопряженными числами: $c_n = \overline{c_{-n}}$ $(n = 1,2, \dots)$. Учитывая равенства (13.17), (13.18) и формулы Эйлера

$$\cos\alpha \pm i \sin\alpha = e^{\pm i\alpha},$$

получим:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \qquad (13.22)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\,, n = 1,2,\dots \qquad (13.23)$$

Формулы (13.22), (13.23) можно объединить в одну формулу, добавив случай $n = 0$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\,, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots. \qquad (13.24)$$

Итак, получена запись ряда Фурье в комплексной форме (13.21) и найдены соответствующие выражения для его коэффициентов (13.24).

ЛЕКЦИЯ № 14. РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ НА ПОЛУПЕРИОДЕ

14.1. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье по косинусам.

Задача 1. На полупериоде $(0;1)$ задана функция $y = f(x)$:

$$f(x) = x + 1, x \in (0;1).$$

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам. Построить графики 2-ой, 3-ей и 10-ой частичных сумм. Написать равенство Парсеваля для полученного ряда. Сумму какого числового ряда можно отыскать с помощью полученного равенства?

Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на интервал $(-1;0)$ четным образом (рис. 13.1), доопределим в точках $0;\pm1$: $f(0) = 1, f(\pm1) = 2$, и продолжим периодическим образом с периодом $T = 2$ на всю числовую ось. Получим непрерывную на всей числовой оси функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 1 лекции 13 (достаточному признаку разложимости функции в ряд Фурье).

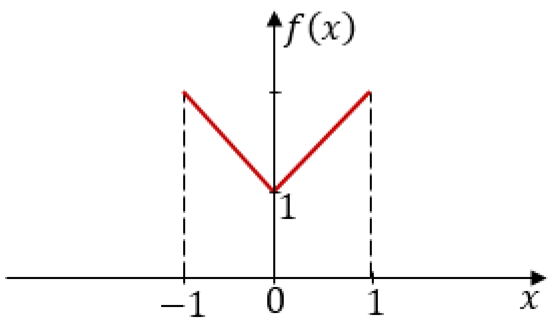

Рис.13.1

В силу четности коэффициенты $b_n = 0$. Вычислим коэффициенты Фурье a_n:

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (x+1)dx = (x+1)^2|_0^1 = 2^2 - 1 = 3,$$

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (x+1)\cos\pi nx\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^1 (x+1)d\sin\pi nx =$$

$$= \frac{2}{\pi n}(x+1)\sin\pi nx|_0^1 - \frac{2}{\pi n}\int_0^1 \sin\pi nx\,dx = \frac{2}{(\pi n)^2}\cos\pi nx\Big|_0^1 = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2},$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}, n = 2k-1, \\ 0, n = 2k. \end{cases}$$

Обозначим через $S(x)$ сумму ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда

$$S(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2}\cos\pi nx = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos[\pi(2k-1)x].$$

В частности

$$x + 1 = \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos[\pi(2k-1)x], x \in (0;1).$$

Согласно теореме 1 лекции 13 ряд

$$\frac{3}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos[\pi(2k-1)x] \qquad (14.1)$$

сходится равномерно на всей числовой оси. Абсолютная и равномерная сходимость ряда (14.1) на всей числовой оси следует также из признака Вейерштрасса.

Для n-ой частичной суммы получим выражение:

$$S_n(x) = \frac{3}{2} + \sum_{m=1}^{n} \frac{2[(-1)^m - 1]}{\pi^2 m^2}\cos\pi mx, n = 2,3,\ldots$$

На рис. 13.2-13.5 построены графики функций $S(x), S_2(x), S_3(x), S_{10}(x)$. Красной линией на промежутке $(-1;1)$ изображен график функции $f(x)$.

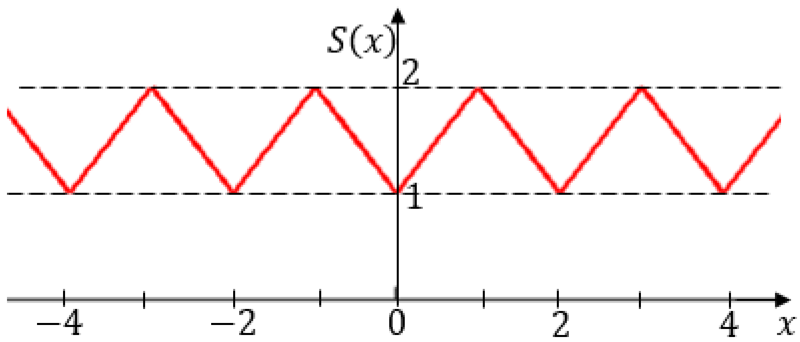

Рис.13.2

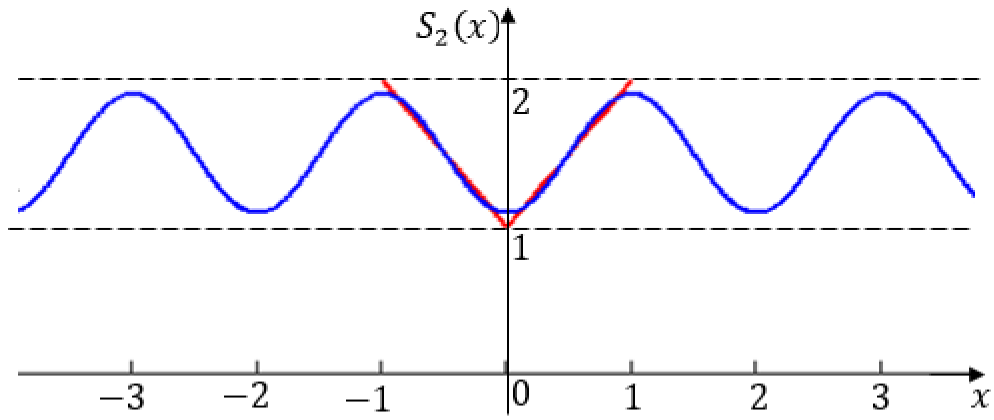

Рис.13.3

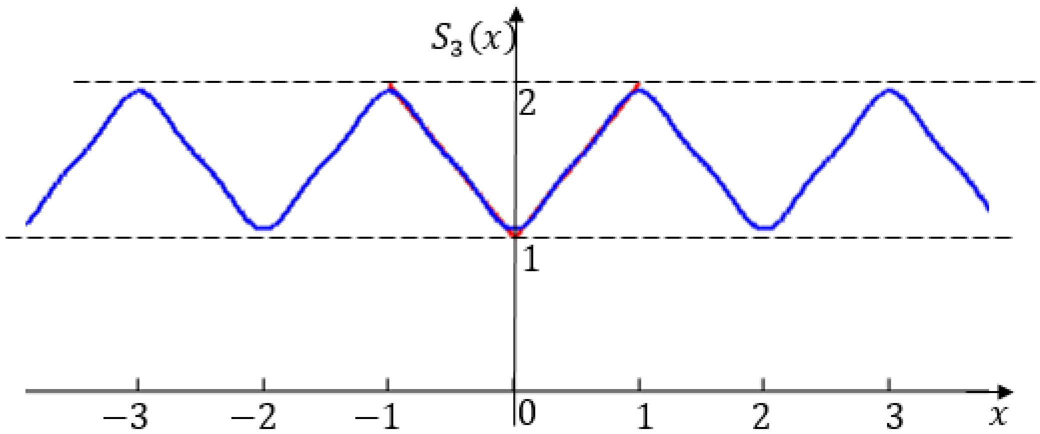

Рис.13.4

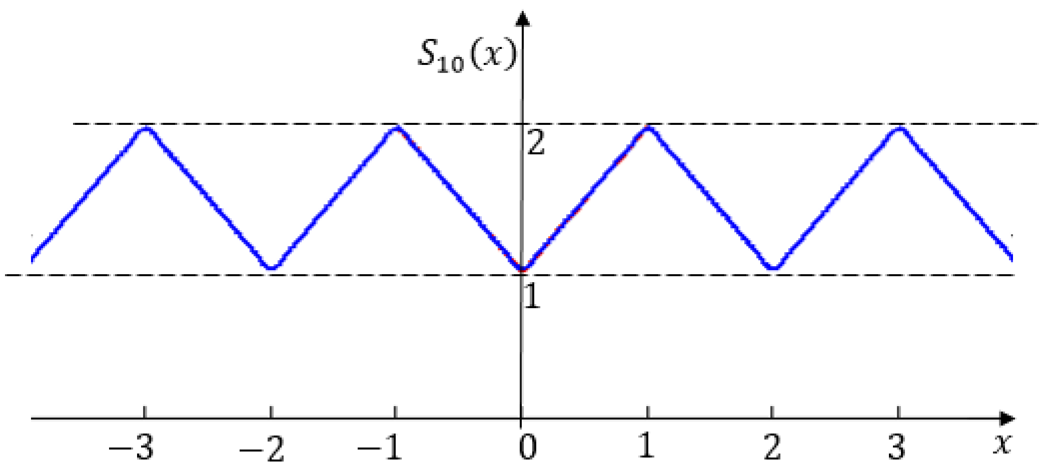

Рис.13.5

Равенство Парсеваля запишется в виде:

$$\frac{2}{1}\int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Так как $a_0 = 3$,

$$2\int_0^1 (x+1)^2 dx = \frac{2(x+1)^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{16-2}{3} = \frac{14}{3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-4}{\pi^2(2k-1)^2}\right)^2 = \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4},$$

то

$$\frac{14}{3} = \frac{9}{2} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

14.2. Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье по синусам.

Задача 2. На полупериоде $(0;1)$ задана функция $y = f(x)$:

$$f(x) = x + 1, x \in (0;1).$$

Разложить функцию $f(x)$в ряд Фурье по синусам. Построить графики 2-ой, 3-ей и 10-ой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.

Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на интервал $(-1;0)$ нечетным образом (рис. 13.6).

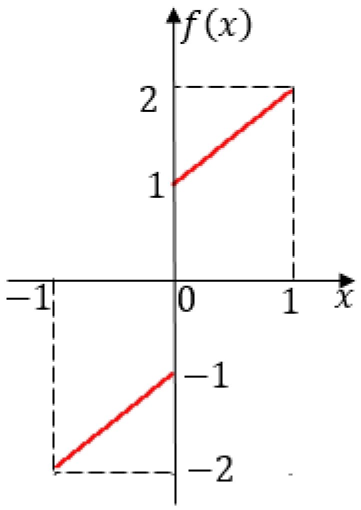

Рис.13.6

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_n = 0, n = 0,1, \ldots.$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (x+1)\sin \pi n x \, dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^1 (x+1) d\cos \pi n x =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[(x+1)\cos\pi n x_0^1| - \int_0^1 \cos\pi n x\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[2\cdot(-1)^n - 1 - \left(\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^1\right)\right] = \frac{2(1+2\cdot(-1)^{n+1})}{\pi n}.$$

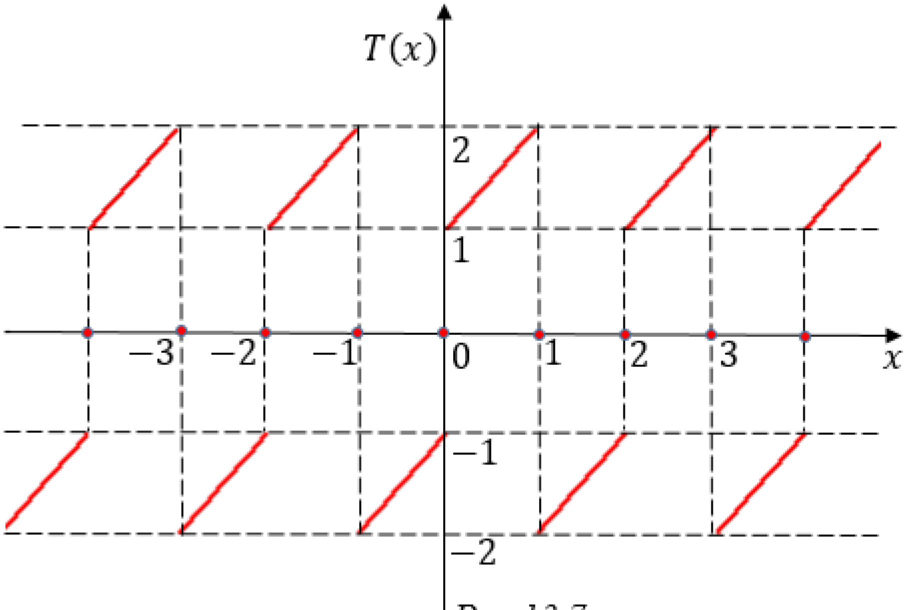

Рис.13.7

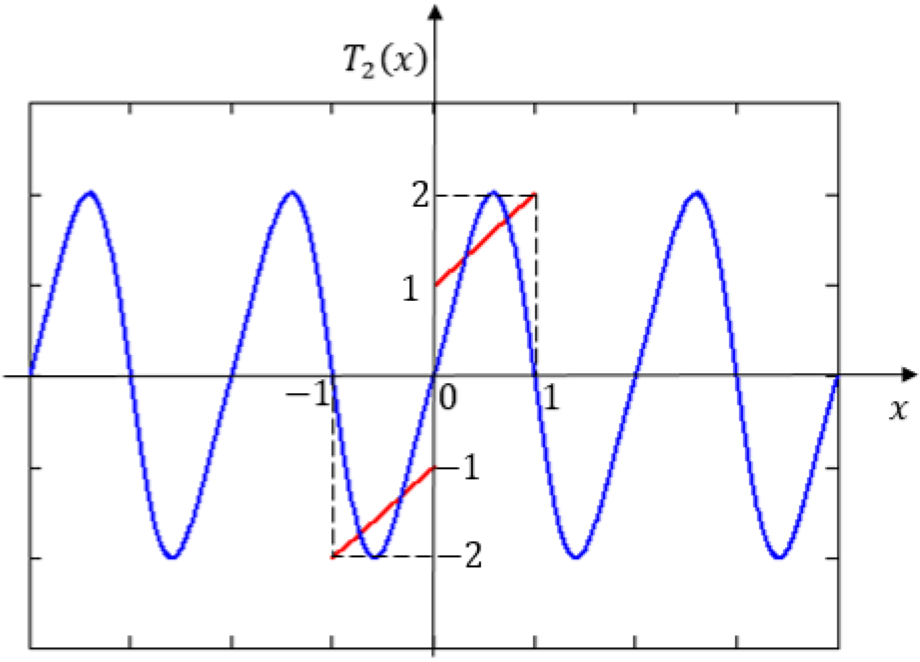

Рис.13.8

Обозначим через $T(x)$ сумму ряда Фурье функции $f(x)$, продолженной на интервал $(-1; 0)$ нечетным образом, а через $T_n(x)$ n-ую частичную сумму этого ряда. Тогда

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1+2\cdot(-1)^{n+1})}{\pi n}\sin\pi nx,$$

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(1+2\cdot(-1)^{k+1})}{\pi k}\sin\pi kx.$$

На рис 13.7-13.10 представлены графики функций $T(x), T_2(x), T_3(x), T_{10}(x)$.

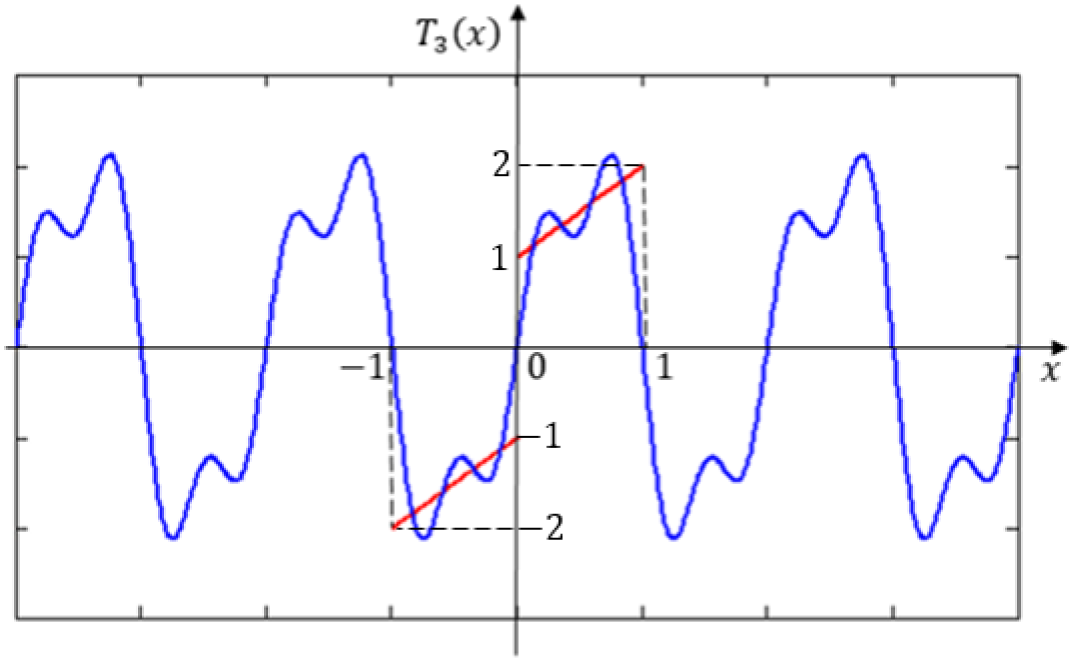

Рис.13.9

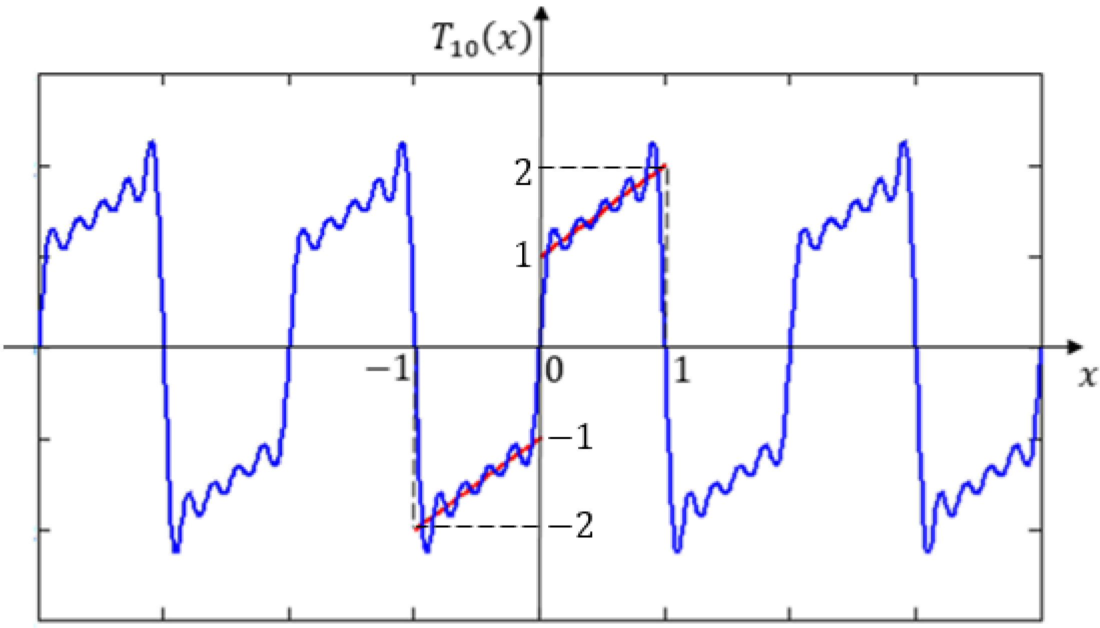

Рис.13.10

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1+2\cdot(-1)^{n+1})}{\pi n} \sin \pi n x \qquad (14.2)$$

сходится на всей числовой оси к функции $T(x)$. Если x является целым числом, то все члены ряда (14.2) равны нулю.

Покажем, что при $x \notin \mathbb{Z}$ ряд (14.2) не сходится абсолютно. Обозначим через $u_n(x)$ члены ряда (14.2). Тогда

$$|u_n(x)| = \left|\frac{2(1+2\cdot(-1)^{n+1})}{\pi n} \sin \pi n x\right| \geq \frac{2}{\pi n} \sin^2 \pi n x = \frac{1}{\pi n} - \frac{\cos 2\pi n x}{\pi n}. \quad (14.3)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1/\pi n)$ расходится, так как члены этого ряда получаются умножением членов гармонического ряда на число π^{-1}, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos 2\pi n x/\pi n)$ сходится по признаку Дирихле (лекция 4). Действительно, последовательность $\{1/\pi n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi k x$$

ограничена в совокупности:

$$\cos 2\pi x + \cos 4\pi x + \cdots + \cos 2\pi n x =$$
$$= \frac{2\sin \pi x}{2\sin \pi x}(\cos 2\pi x + \cos 4\pi x + \cdots + \cos 2\pi n x) =$$
$$= \frac{1}{2\sin \pi x}(-\sin \pi x + \sin 3\pi x - \sin 3\pi x + \sin 5\pi x - \cdots$$
$$+ \sin[(1-2n)\pi x] + \sin[(1+2n)\pi x]) = \frac{\sin[(1+2n)\pi x] - \sin \pi x}{2\sin \pi x} \Rightarrow$$
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi k x\right| \leq \frac{1}{|\sin \pi x|}.$$

Тогда расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n} - \frac{\cos 2\pi n x}{\pi n}\right),$$

а по признаку сравнения в силу неравенства (14.3) расходится и ряд

$$\sum_{k=1}^{n} |u_n(x)|.$$

Покажем, что ряд (14.2) сходится неравномерно на $\mathbb{R}$. Предположим противное, что ряд (14.2) сходится на $\mathbb{R}$ равномерно. Тогда по определению равномерной сходимости для $\varepsilon = 0{,}01 > 0\ \exists\, N\colon \forall n > N$ и $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|T(x) - T_n(x)| < \varepsilon. \qquad (14.4)$$

Так как

$$\lim_{x\to 1-0} T(x) = \lim_{x\to 1-0}(1+x) = 2,$$

$$\lim_{x\to 1-0} T_n(x) = \lim_{x\to 1-0}\sum_{k=1}^{n}\frac{2(1+2\cdot(-1)^{k+1})}{\pi k}\sin \pi kx = 0,$$

то, переходя в неравенстве (14.4) к пределу при $x \to 1-0$, получим

$$|2-0| \le 0{,}01.$$

Пришли к противоречию.

14.3. Разложение функции, заданной на полупериоде (0; *l*) и продолженной нулем на интервал (-*l*; 0), в ряд Фурье

Задача 3. На полупериоде $(0;1)$ задана функция $y = f(x)$:

$$f(x) = x + 1, x \in (0;1).$$

Разложить функцию $f(x)$в ряд Фурье, продолжая ее нулем на интервал $(-1;0)$. Построить графики 2-ой, 3-ей и 10-ой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.

Решение: Продолжим функцию $f(x)$ на интервал $(-1;0)$ нулем (рис. 13.11).

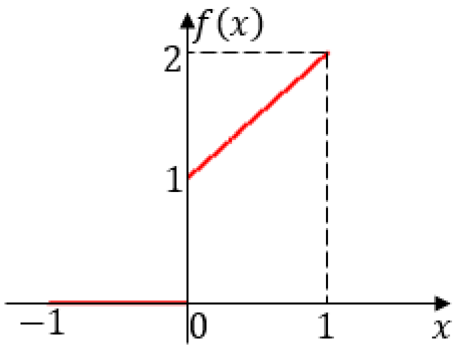

Рис.13.11

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}(x+1)dx = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\cos \pi nx\, dx = \int_{0}^{1}(x+1)\cos \pi nx\, dx = \frac{[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2}, n = 1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin \pi nx\, dx = \int_{0}^{1}(x+1)\sin \pi nx\, dx = \frac{1+2\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ равны соответствующим коэффициентам в задачах 1 и 2, умноженным на $1/2$.

Обозначим через $P(x)$ сумму ряда Фурье функции $f(x)$, продолженной на интервал $(-1;0)$ нулем, а через $P_n(x)$ n-ую частичную сумму этого ряда. Тогда

$$P(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x + \frac{1 + 2 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi n} \sin \pi n x \right\}, (14.5)$$

$$P_n(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{[(-1)^k - 1]}{\pi^2 k^2} \cos \pi k x + \frac{1 + 2 \cdot (-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \pi k x \right\}.$$

На рис 13.12-13.15 представлены графики функций $P(x), P_2(x), P_4(x), P_{10}(x)$.

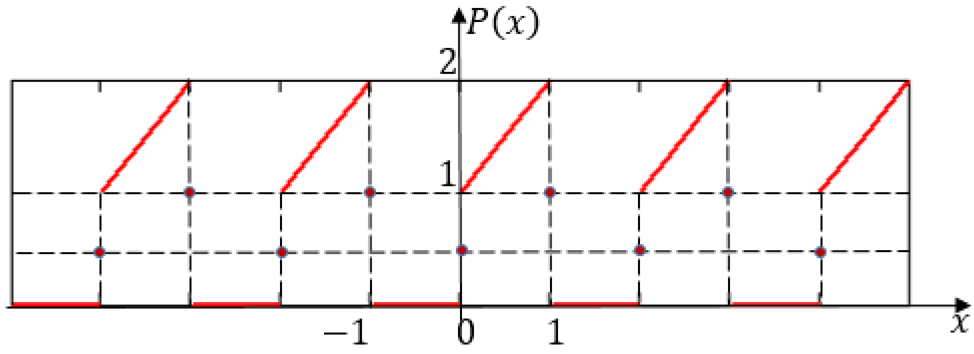

Рис.13.12

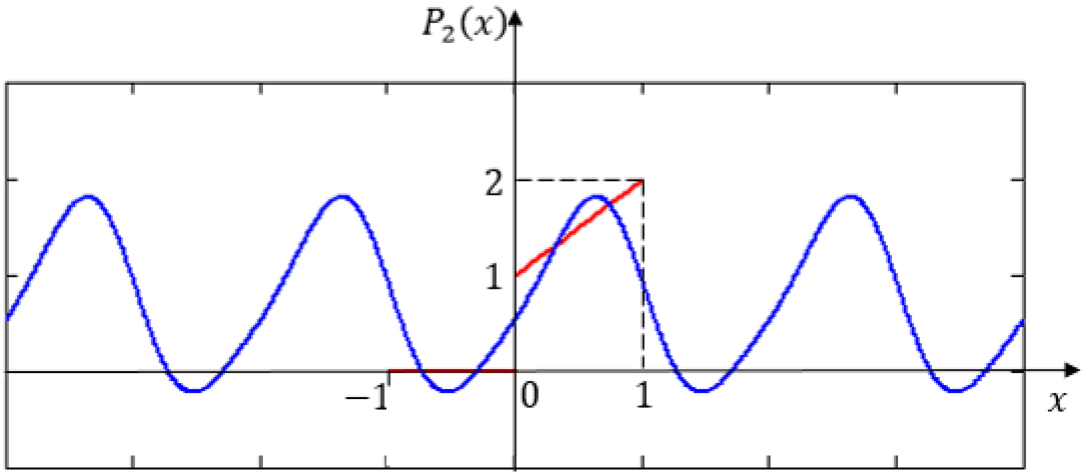

Рис.13.13

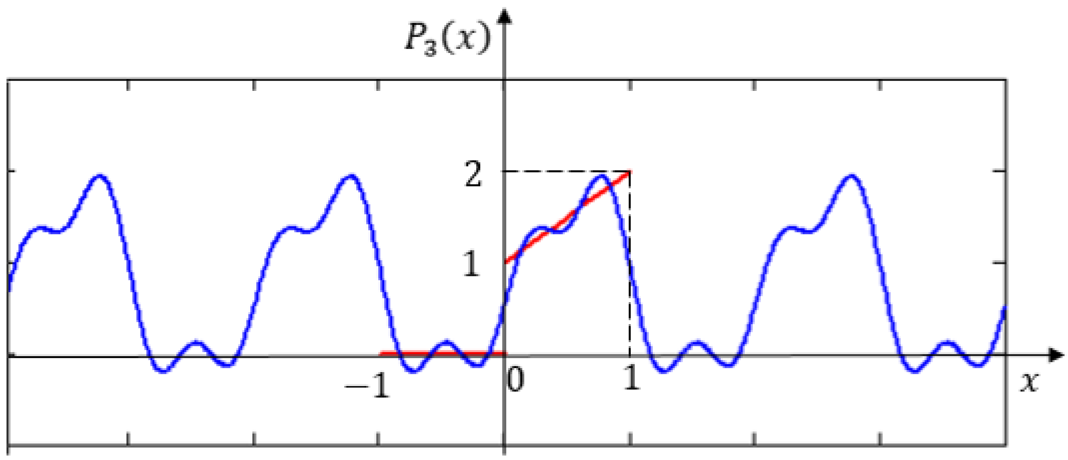

Рис.13.14

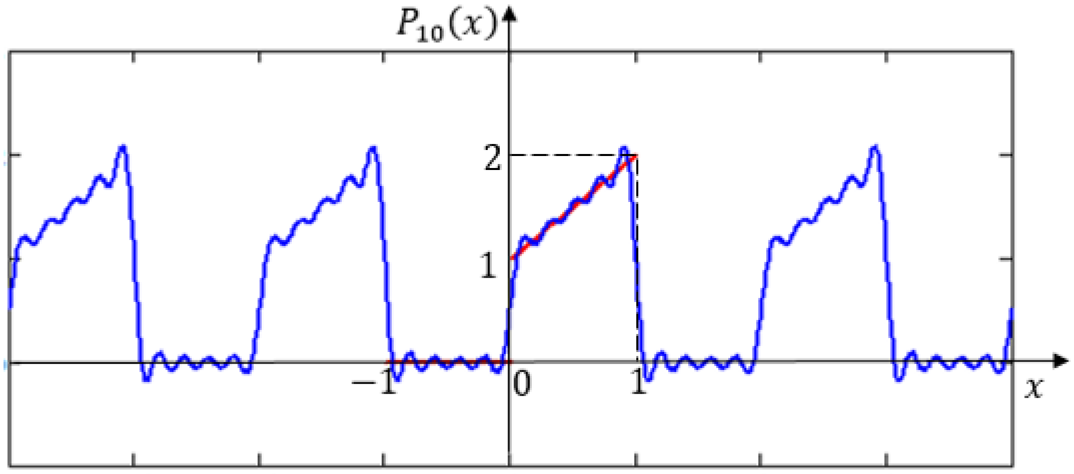

Рис.13.15

Так как ряд (14.1) сходится абсолютно, а ряд (14.2) сходится условно при $x \notin \mathbb{Z}$, то ряд в правой части равенства (14.5) сходится условно (лекция 4, теорема 5). Покажем, что ряд в правой части равенства (14.5) сходится к функции $P(x)$ неравномерно на $\mathbb{R}$. Доказательство проведем от противного. Предположим, что ряд (14.5) сходится на $\mathbb{R}$ равномерно. Тогда по определению равномерной сходимости для $\varepsilon = 0{,}01 > 0 \ \exists\, N\colon \forall n > N$ и $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|P(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \tag{14.6}$$

Так как

$$\lim_{x\to -0} P(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to -0} P_n(x) = \frac{3}{4} + \lim_{x\to -0} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{[(-1)^k - 1]}{\pi^2 k^2} \cos \pi k x + \frac{1 + 2\cdot(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \pi k x \right\} =$$

$$= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{[(-1)^k - 1]}{\pi^2 k^2} = \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{[1 - (-1)^k]}{\pi^2 k^2} \geq \frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k]}{\pi^2 k^2} =$$

$$= \frac{3}{4} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 (2m-1)^2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2},$$

то

$$\lim_{x\to -0} |P(x) - P_n(x)| = \lim_{x\to -0} |-P_n(x)| = \lim_{x\to -0} P_n(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Но согласно неравенству (14.6)

$$\lim_{x\to -0} |P(x) - P_n(x)| \leq 0{,}01.$$

Пришли к противоречию.

ЛЕКЦИЯ № 15. МЕТОД ФУРЬЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод Фурье, или *метод разделения переменных*, является одним из основных методов решения уравнений с частными производными. Рассмотрим этот метод на примере задачи о свободных колебаниях однородной струны длины l.

15.1. Постановки краевых задач для уравнения свободных колебаний однородной струны

Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < l. \tag{15.1}$$

Под термином *струна* здесь подразумевается идеально гибкая, тонкая нить, упругая лишь тогда, когда она натянута, и оказывающая сопротивление растяжению. Предполагается, что струна колеблется в плоскости Oxu, а вектор смещения $\boldsymbol{u}$ в любой момент времени t перпендикулярен оси Ox. Тогда процесс колебаний можно описать функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальные смещения струны. То есть $u(x,t) -$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x,t)$ дает форму струны в момент времени t.

Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать величиной $(u_x)^2$. Тогда, если линейная плотность струны $\rho = const$ и внешние силы отсутствуют, уравнение колебаний однородной струны принимает вид (15.1), где $a^2 = T/\rho\,,\ T -$ натяжение струны.

Начальные условия для уравнения (15.1) задаются в виде:

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{15.2}$$

В качестве граничных условий будем рассматривать условия одного из видов:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad t \ge 0; \tag{15.3a}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \ge 0; \tag{15.3b}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \ge 0; \tag{15.3c}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad t \ge 0. \tag{15.3d}$$

Условия $(15.3a)$ означают, что концы струны закреплены. Условия $(15.3b)$ означают, что концы струны свободны и перемещаются так, что касательные к графику функции $u(x,t)$ в точках $x=0$ и $x=l$ при фиксированном t горизонтальны. Граничные условия $(15.3c)$, $(15.3d)$ соответствуют случаям, когда один конец струны закреплен, а другой свободен.

15.2. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения свободных колебаний однородной струны. Случай закрепленных концов.

Согласно методу Фурье будем искать частные решения уравнения (15.1) в виде:

$$u(x,t)=T(t)X(x), \tag{15.4}$$

которые удовлетворяют одному из видов граничных условий $(15.3a)-(15.3d)$ и не равны тождественно нулю. Подставим (15.4) в (15.1):

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

Поделим обе части последнего равенства на произведение $a^2T(t)X(x)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как левая часть полученного равенства зависит только от независимой переменной t, а правая – от независимой переменной x, то обе эти части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $(-\lambda)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda. \tag{15.5}$$

Из (15.5) следует:

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, \tag{15.6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{15.7}$$

Рассмотрим граничные условия $(15.3a)$:

$$u(0,t)=0 \Rightarrow T(t)X(0)=0,$$
$$u(l,t)=0 \Rightarrow T(t)X(l)=0.$$

Так как $T(t)\not\equiv 0$, то

$$X(0)=0, X(l)=0. \tag{15.8a}$$

Итак, чтобы получить нетривиальные решения (15.4), удовлетворяющие граничным условиям $(15.3a)$, необходимо найти нетривиальные решения уравнения (15.7), удовлетворяющие граничным условиям $(15.8a)$.

Получаем *задачу Штурма-Лиувилля*: найти значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(0)=0, X(l)=0, \end{cases}$$

а также сами эти решения. Такие значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие им функции – *собственными функциями* задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим отдельно три случая, когда $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$.

Если $\lambda < 0$, то положим $\lambda = -p^2, p > 0$. Общее решение уравнения (15.7) имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}.$$

Из условий (15.8a) получим:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow C_1 e^{pl} + C_2 e^{-pl} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

То есть при $\lambda < 0$ нетривиальных решений задачи (15.7)-(15.8a) не существует.

Если $\lambda = 0$, то $X''(x) = 0, X(x) = C_1 x + C_2$. С учетом (15.8$a$):

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \ \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

В случае $\lambda = 0$ также нет нетривиальных решений задачи (15.7)-(15.8a).

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (15.7) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \, cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \, sin \sqrt{\lambda} x.$$

Далее,

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow C_2 \, sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как ищем нетривиальные решения, то $C_2 \neq 0$. А так как $\lambda > 0$, то

$$k = 1,2, \dots.$$

Итак, нашли собственные значения λ_k задачи Штурма-Лиувилля (15.7)-(15.8a) и соответствующие им собственные функции:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k = 1,2, \dots, \tag{15.9}$$

$$X_k(x) = sin \frac{\pi k x}{l}, k = 1,2, \dots. \tag{15.10}$$

Далее для каждого λ_k найдем общее решение уравнения (15.6):

$$T''(t) + \lambda_k a^2 T(t) = 0, \qquad k = 1,2, \dots,$$

$$T_k(t) = A_k \cos\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right) + B_k \sin\left(a\sqrt{\lambda_k} t\right),$$

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{\pi k a t}{l} + B_k \sin \frac{\pi k a t}{l}, \ \ k = 1,2, \dots. \tag{15.11}$$

Функции

$$u_k(x,t) = T_k(t) X_k(x)$$

удовлетворяют уравнению (15.1) и граничным условиям (15.3a) при любых A_k и B_k, $k = 1,2, \ldots$ Построим функцию $u(x,t)$ в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \Leftrightarrow$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{\pi kat}{l} + B_k \sin\frac{\pi kat}{l} \right) \sin\frac{\pi kx}{l}. \qquad (15.12)$$

Если ряд (15.12) сходится равномерно и его можно почленно дважды дифференцировать по x и t, то функция $u(x,t)$ будет также удовлетворять уравнению (15.1) и граничным условиям (15.3a). Найдем значения коэффициентов A_k и B_k такие, чтобы полученная функция $u(x,t)$ удовлетворяла еще и начальным условиям (15.2). Из (15.12) следует:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi ka}{l} \left(-A_k \sin\frac{\pi kat}{l} + B_k \cos\frac{\pi kat}{l} \right) \sin\frac{\pi kx}{l}.$$

С учетом начальных условий (15.2):

$$u(x,0) = \varphi(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi kx}{l} = \varphi(x), \qquad (15.13)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi ka}{l} B_k \sin\frac{\pi kx}{l} = \psi(x). \qquad (15.14)$$

Формулы (15.13), (15.14) представляют собой разложение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0; l)$. Коэффициенты разложения вычисляются по известным (см. лекцию 14) формулам:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi kx}{l} dx, k = 1,2, \ldots \qquad (15.15)$$

$$\frac{\pi ka}{l} B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi kx}{l} dx \Rightarrow$$

$$B_k = \frac{2}{\pi ka} \int_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi kx}{l} dx, k = 1,2, \ldots \qquad (15.16)$$

Итак, решение задачи (15.1), (15.2), (15.3a) дается формулой (15.12) в которой коэффициенты A_k и B_k вычисляются по формулам (15.15), (15.16).

15.3. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

В предыдущем пункте были найдены собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (15.7)-(15.8a), соответствующей случаю, когда концы струны закреплены, т.е. граничному условию (15.3a). Сформулируем соответствующие постановки задач Штурма-Лиувилля, а также найдем собственные значения и собственные функции для граничных условий (15.3b)- (15.3d).

Рассмотрим задачу (15.1), (15.2), (15.3b).

Согласно методу Фурье разделения переменных частные решения уравнения (15.1) ищутся в виде произведения $u(x,t) = T(t)X(x)$. Для функции $X(x)$ получим дифференциальное уравнение (15.7).

Из граничных условий $(15.3b)$ получим:

$$u'_x(0,t) = 0 \Rightarrow T(t)X'(0) = 0,$$
$$u'_x(l,t) = 0 \Rightarrow T(t)X'(l) = 0.$$

Так как $T(t) \not\equiv 0$, то

$$X'(0) = 0, X'(l) = 0. \qquad (15.8b)$$

Итак, *задача Штурма-Лиувилля* состоит в нахождении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0, \end{cases}$$

а также сами эти решения.

Если $\lambda < 0$, то положим $\lambda = -p^2, p > 0$. Общее решение уравнения (15.7) имеет вид:

$$X(x) = C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}.$$

Откуда

$$X'(x) = C_1 p e^{px} - C_2 p e^{-px}.$$

Из условий (15.8b) получим:

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_1 p - C_2 p = 0 \Rightarrow C_1 = C_2$$
$$X'(l) = 0 \Rightarrow C_1 p e^{pl} - C_2 p e^{-pl} \Rightarrow C_1 e^{pl} = C_2 e^{-pl} \Rightarrow$$
$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

То есть при $\lambda < 0$ нетривиальных решений задачи (15.7)-(15.8b) не существует.

Если $\lambda = 0$, то $X''(x) = 0, X'(x) = C_1, X(x) = C_1 x + C_2$. Из (15.8b) следует

$$C_1 = 0 \ \Rightarrow X(x) = C_2.$$

Итак, собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует собственная функция $X_0(x) = 1$.

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения (15.7) имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Тогда

$$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x.$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0, \sqrt{\lambda}l = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\lambda > 0$, то $k = 1,2, \dots$. С учетом $\lambda_0 = 0$ получаем собственные значения и соответствующие им собственные функции в виде:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k = 0,1,2, \dots,$$

$$X_k(x) = cos\frac{\pi k x}{l}, k = 0,1,2, \dots.$$

Рассуждая аналогичным образом, сформулируем задачу Штурма-Лиувилля в случае граничных условий (15.3c):

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2l}\right)^2, k = 0,1,2, \dots,$$

$$X_k(x) = sin\frac{\pi(1+2k)x}{2l}, k = 0,1,2, \dots.$$

В случае граничных условий (15.3d) имеем:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения и собственные функции имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2l}\right)^2, k = 0,1,2, \dots,$$

$$X_k(x) = cos\frac{\pi(1+2k)x}{2l}, k = 0,1,2, \dots.$$

15.4. Пример.

Найти решение уравнения свободных колебаний однородной струны длины $l = 4$ с закрепленными концами, если в начальный момент $t = 0$ струна имеет форму параболы $\varphi(x) = 3x(4-x)$, а начальная скорость отсутствует.

Решение: Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < 4, \tag{15.17}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \qquad u(4,t) = 0, \qquad t \geq 0; \tag{15.18}$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = 3x(4-x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad 0 \le x \le 4. \tag{15.19}$$

Согласно методу Фурье будем искать частные решения уравнения (15.17), удовлетворяющие граничным условиям (15.18), в виде:

$$u(x,t) = T(t)X(x). \tag{15.20}$$

Подставим (15.20) в (15.17):

$$T''(t)X(x) = a^2T(t)X''(x)$$

Поделим обе части последнего равенства на произведение $a^2T(t)X(x)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Так как левая часть полученного равенства зависит только от независимой переменной t, а правая – от независимой переменной x, то обе эти части равны одной и той же постоянной, которую обозначим через $(-\lambda)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{15.21}$$

Из (15.21) следует:

$$T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \tag{15.22}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{15.23}$$

С учетом граничных условий (15.18) получим *задачу Штурма-Лиувилля*: найти значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = 0, X(4) = 0. \end{cases} \tag{15.24}$$

В пункте 15.2 было установлено, что собственные значения и собственные функции задачи (15.24) имеют вид:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{4}\right)^2, k = 1,2, \dots,$$

$$X_k(x) = sin\frac{\pi kx}{4}, k = 1,2, \dots.$$

Для каждого λ_k найдем общее решение дифференциального уравнения (15.22):

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{\pi kat}{4} + B_k \sin\frac{\pi kat}{4}, \; k = 1,2, \dots.$$

Функции

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x)$$

удовлетворяют уравнению (15.17) и граничным условиям (15.18) при любых A_k и B_k, $k = 1,2, \dots$ Построим функцию $u(x,t)$ в виде ряда:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x,t)\Leftrightarrow$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\pi kat}{4}+B_k\sin\frac{\pi kat}{4}\right)\sin\frac{\pi kx}{4}. \qquad (15.25)$$

Найдем значения коэффициентов A_k и B_k такие, чтобы полученная функция $u(x,t)$ удовлетворяла еще и начальным условиям (15.19). Из (15.25) следует:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{4}\left(-A_k\sin\frac{\pi kat}{4}+B_k\cos\frac{\pi kat}{4}\right)\sin\frac{\pi kx}{4}.$$

С учетом начальных условий (15.2):

$$u(x,0)=\varphi(x)\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{\pi kx}{4}=\varphi(x),\varphi(x)=3x(4-x), \qquad (15.26)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi ka}{4}B_k\sin\frac{\pi kx}{4}=0. \qquad (15.27)$$

Формулы (15.26), (15.27) представляют собой разложение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)=0$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0;4)$. Коэффициенты разложения вычисляются по известным (см. лекцию 14) формулам:

$$A_k=\frac{2}{4}\int_0^4\varphi(x)\sin\frac{\pi kx}{4}dx\,, k=1,2,\ldots$$

$$\frac{\pi ka}{4}B_k=\frac{2}{4}\int_0^4\psi(x)\sin\frac{\pi kx}{4}dx\Rightarrow B_k=0.$$

Вычислим коэффициенты A_k:

$$A_k=\frac{1}{2}\int_0^4 3x(4-x)\sin\frac{\pi kx}{4}dx=-\frac{3}{2}\frac{4}{\pi k}\int_0^4(4x-x^2)d\left(\cos\frac{\pi kx}{4}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{4}{\pi k}\left[(4x-x^2)\cos\frac{\pi kx}{4}\Big|_0^4-\int_0^4\cos\frac{\pi kx}{4}(4-2x)dx\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi k}\right)^2\int_0^4(4-2x)d\sin\frac{\pi kx}{4}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{\pi k}\right)^2\left[(4-2x)\sin\frac{\pi kx}{4}\Big|_0^4+2\int_0^4\sin\frac{\pi kx}{4}dx\right]=$$

$$=3\left(\frac{4}{\pi k}\right)^3\left[-\cos\frac{\pi kx}{4}\Big|_0^4\right]=3\left(\frac{4}{\pi k}\right)^3[-\cos\pi k+1]=\frac{192}{\pi^3k^3}[1-\cos\pi k],$$

$$A_k=\begin{cases}0, k=2m,\\ \dfrac{384}{\pi^3k^3}, k=2m-1, m=1,2,\ldots\end{cases}$$

С учетом (15.25) получаем решение задачи (15.17)-(15.19) в виде:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{384}{\pi^3(2m-1)^3}cos\frac{\pi(2m-1)at}{4}sin\frac{\pi(2m-1)x}{4}.$$

ЛЕКЦИЯ № 16. РЯД ФУРЬЕ ПО ОБЩИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ

16.1. Ортогональные системы функций

Обозначим через $L_2[a,b]$ множество действительных функций, определенных и интегрируемых на отрезке $[a,b]$ с квадратом, т.е. таких, для которых существует интеграл

$$\int_a^b f^2(x)\,dx<+\infty.$$

Интеграл здесь понимается в смысле Лебега. В частности, все функции непрерывные на отрезке $[a,b]$, принадлежат пространству $L_2[a,b]$ и значения их интегралов Лебега совпадают со значениями интегралов Римана.

В пространстве $L_2[a,b]$ определено скалярное произведение:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

В $L_2[a,b]$, как и во всяком евклидовом пространстве, выполнены неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника, которые в данном случае имеют вид:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$\sqrt{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2dx}\le\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Норма функции f в $L_2[a,b]$ определяется формулой

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

а расстояние между элементами f и g − формулой

$$\rho(f,g)=\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2dx}.$$

Величину

$$\rho^2(f,g) = \|f-g\|^2 = \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 dx$$

называют *средним квадратичным уклонением* функций f и g друг от друга.

Определение. Система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ортогональной*, если

$$(\varphi_n,\varphi_m) = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ \lambda_n, n = m. \end{cases}$$

Если при этом $\lambda_n = 1$ $(n = 1,2,\dots)$, то указанная система функций называется *ортонормированной*. ▲

Если система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональной, то система функций

$$\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

является ортонормированной.

Пример 1. Тригонометрическая система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

является ортогональной системой функций в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, а система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \qquad (16.1)$$

является ортонормированной в $L_2[-\pi,\pi]$.

Пример 2. Системы функций

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \dots,$$

$$\sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin\frac{\pi n x}{l}, \dots$$

являются ортогональными системами функций в пространстве $L_2[0,l]$.

Пример 3. *Многочлены Лежандра* $P_n(x)$ $(n = 0,1,\dots)$, определяемые равенством

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1,1]$.

Первые пять многочленов Лежандра имеют вид:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Можно показать, что

$$(P_n, P_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

16.2. Сходимость в среднем квадратичном

Определение. Говорят, что последовательность функций $\{f_n(x)\} \in L_2[a,b]$ сходится к элементу $f \in L_2[a,b]$ в среднем квадратичном (или просто в среднем), если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)^2 dx = 0.$$

▲

Теорема 1. Пусть $f(x), f_n(x) \in L_2[a,b]$ $(n = 1,2,\dots)$. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$, то она сходится к функции f в среднем.

Доказательство: Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Это означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)^2 dx < \varepsilon^2(b-a),$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Обратное утверждение неверно. Последовательность $\{f_n(x)\}$ может сходиться в среднем к $f(x)$, но не быть равномерно сходящейся. В качестве примера рассмотрим последовательность функций (рис. 16.1)

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in [0,1]. \tag{16.2}$$

Для любого $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0.$$

Но при этом последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0,1]$ неравномерно. Действительно, $\exists\varepsilon_0 = 1/3 > 0$ такое, что

$$\forall N\ \exists n = N+1 > N, \exists x_0 = \frac{1}{n} \in [0,1]:$$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

Имеет место сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x) \equiv 0$ в среднем:

$$\int_0^1 (f_n(x)-0)^2dx = \int_0^1 \frac{n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot d\frac{1}{(1+n^2x^2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+n^2x^2)}\cdot x\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{(1+n^2x^2)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+n^2)} - \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(nx)|_0^1\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(1+n^2)} + \frac{1}{2n}\operatorname{arctg} n \to 0, n\to\infty.$$

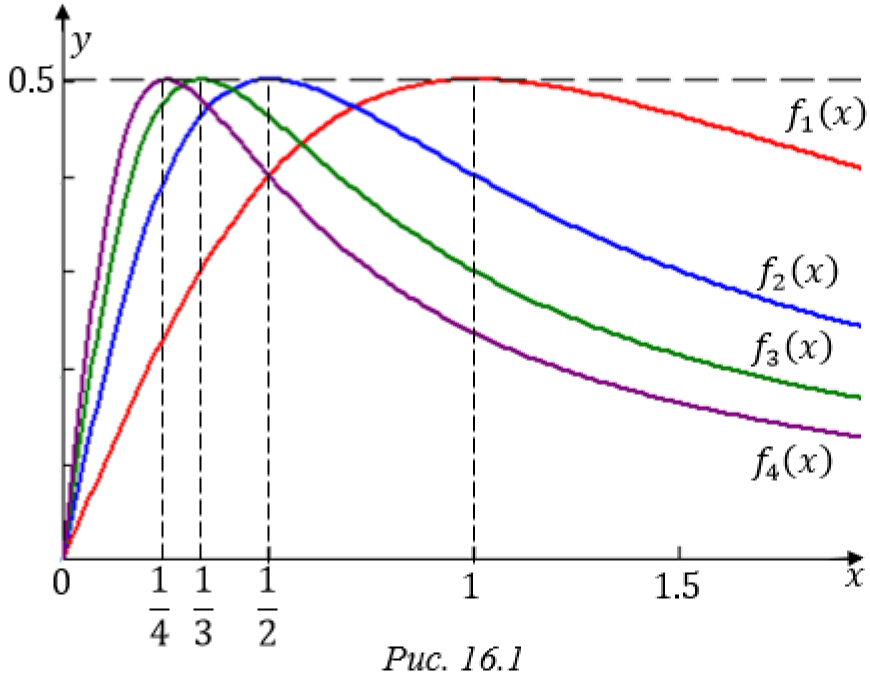

Рис. 16.1

16.3. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля

Определение. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_2[a,b]$ – ортогональная система функций, $f(x) \in L_2[a,b]$. Тогда числа

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

называется рядом Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$. ▲

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_2[a,b]$ – ортонормированная система функций,

$$(\varphi_n,\varphi_m) = \begin{cases} 0, n\neq m, \\ 1, n = m. \end{cases}$$

Тогда числа

$$c_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = (f, \varphi_n)$$

называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Поставим задачу о нахождении линейной комбинации

$$T_n(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x),$$

которая дает наилучшее приближение в $L_2[a,b]$ элемента f, т.е. осуществляет минимум выражения $\|f - T_n\|$. Геометрически это означает, что в n-мерном пространстве $\mathscr{L}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, натянутом на векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_2[a,b]$ ищется элемент, наименее удаленный от заданного элемента $f \in L_2[a,b]$.

Преобразуем среднее квадратичное уклонение функций f и T_n:

$$\|f - T_n\|^2 = \int_a^b \big(f(x) - T_n(x)\big)^2 dx =$$

$$= \int_a^b [f^2(x) - 2f(x)T_n(x) + T_n^2(x)]dx = \int_a^b f^2(x)dx -$$

$$-2\int_a^b \left[f(x)\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(x)\right]dx + \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n \alpha_k\varphi_k(x)\right]^2 dx =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^n \alpha_k(f, \varphi_k) + \sum_{k,m=1}^n \alpha_k\alpha_m(\varphi_k, \varphi_m) =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{k=1}^n \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^n c_k^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)dx + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - c_k)^2 \geq 0,$$

причем равенство нулю достигается при условии $\alpha_k = c_k, k = 1, \dots, n,$ то

$$\|f - T_n\|^2 \geq \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 = \|f - S_n\|^2.$$

Здесь $S_n(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$ – n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ относительно системы функций $\{\varphi_n(x)\}$.

Равенство

$$\|f - S_n\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{16.3}$$

называется *тождеством Бесселя*.

Так как выражение в левой части (16.3) неотрицательно, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx. \tag{16.4}$$

Из неравенства (16.4) следует, что последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ с неотрицательными членами ограничена сверху. Согласно критерию сходимости рядов с неотрицательными членами указанный ряд сходится. Следовательно, в неравенстве (16.4) можно перейти к пределу при $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx. \tag{16.5}$$

Неравенство (16.5) называется *неравенством Бесселя*.

Для некоторых систем функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и для всех функций $f(x) \in L_2[a,b]$ знак неравенства в (16.5) может быть заменен знаком равенства. Получаемое равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x)dx \tag{16.6}$$

называется *равенством Парсеваля*. Равенство (16.6) называют также *условием полноты*.

Тождество Бесселя (16.3) позволяет записать условие (16.6) в равносильной форме:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0.$$

Таким образом, выполнение условия полноты означает, что последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ряда Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ в среднем, т.е. по норме пространства $L_2[a,b]$.

Определение. Ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной* в $L_2[a,b]$, если $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall f(x) \in L_2[a,b]$ $\exists N \in \mathbb{N}$ и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon,$$

т.е. всякую функцию $f(x) \in L_2[a,b]$ можно с любой точностью приблизить в среднем линейной комбинацией вида $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$. ▲

Из приведенных рассуждений получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Если ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ полна в пространстве $L_2[a,b]$, то ряд Фурье всякой функции $f(x) \in L_2[a,b]$ по этой системе сходится к $f(x)$ в среднем, т.е. по норме пространства $L_2[a,b]$. ■

Можно показать, что тригонометрическая система функций (16.1) полна в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$. Поэтому согласно теореме 2 тригонометрический ряд Фурье любой функции $f(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ сходится к этой функции в среднем.

Определение. Ортонормированная система функций $\{\varphi_n(x)\}, \varphi_n(x) \in L_2[a,b]$, называется *замкнутой*, если в пространстве $L_2[a,b]$ не существует отличной от нуля функции, ортогональной ко всем функциям $\varphi_n(x)$. ▲

В пространстве $L_2[a,b]$ понятия полноты и замкнутости ортонормированных систем совпадают.

Список литературы

1. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. СПб.: Лань, 2016. – 800 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3. СПб.: Лань, 2016. – 656 с.

4. Сборник задач по математике для втузов: [в 4 ч.] / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. Ч. 3. — 544 с.

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. Интегралы. Ряды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 504 с.

6. Теляковский С.А. Курс лекций по математическому анализу. III семестр. М.: Изд-во Механико-математического факультета МГУ, 2003. — 160 с.

7. Белецкая Н.В., Джиоева М.И., Кирюшин В.В. и др. Математический анализ, 3 семестр. Контрольные задания. Дисциплина «Математический анализ», 2 курс, дневная. — М.: МИРЭА, 2016. — 1.2 п.л.

8. Вся высшая математика: В 6 т.: Учебник для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, и др. — М.: Едиториал УРСС, 2005. Т. 3.— 238 с.

9. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — М.: Дрофа, 2004. — 711 с.

Перечень программного обеспечения, необходимого для осуществления образовательного процесса по дисциплине:

- Комплект лицензионного программного обеспечения: MS Office. АО «Софт Лайн Трейд» сублицензионный договор от 21.03.2017 №31704814527.
- GNU Octave — свободная система для математических вычислений, использующая совместимый с MATLAB язык высокого уровня.

Сведения об авторе

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры Высшей математики Института кибернетики МИРЭА − Российского технологического университета.