54.1. Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если

а) $M = \mathbb{N}$, $\quad x * y = x^y$; $\qquad$ б) $M = \mathbb{N}$, $\quad x * y = \text{НОД}(x, y)$;

в) $M = \mathbb{N}$, $\quad x * y = 2xy$; $\qquad$ г) $M = \mathbb{Z}$, $\quad x * y = x - y$;

д) $M = \mathbb{Z}$, $\quad x * y = x^2 + y^2$; $\qquad$ е) $\quad M = \mathbb{R}$, $\quad x * y = \sin x \cdot \sin y$;

ж) $M = \mathbb{R}^*$, $\quad x * y = x \cdot y^{x/|x|}$?

54.2. Пусть S — полугруппа матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, с операцией умножения. Найти в этой полугруппе левые и правые нейтральные элементы, элементы, обратимые слева или справа относительно этих нейтральных.

54.3. На множестве M определена операция $\circ$ по правилу $x \circ y = x$. Доказать, что $(M, \circ)$ — полугруппа. Что можно сказать о нейтральных и обратимых элементах этой полугруппы? В каких случаях она является группой?

54.4. На множестве M^2, где M — некоторое множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y) \circ (z, t) = (x, t)$. Является ли M^2 полугруппой относительно этой операции? Существует ли в M^2 нейтральный элемент?

54.5. Сколько элементов содержит полугруппа, состоящая из всех степеней матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Является ли эта полугруппа группой?

54.6. Доказать, что полугруппы $(2^M, \cup)$ и $(2^M, \cap)$ изоморфны.

54.7. Сколько существует неизоморфных между собой полугрупп порядка 2?

Верны ли следующие утверждения?

Множество матриц $n \times n$ с элементами из $\mathbb{N}$ (натуральные числа),

рассматриваемое с операцией умножения, является полугруппой (поскольку умножение ассоциативно).

Множество матриц $n \times n$, элементы которых суть целые неотрицательные числа, является моноидом. Единичным элементом является единичная матрица.

Множество целочисленных матриц $n \times n$ является моноидом.

Множество $\mathrm{Map}(X, X)$ отображений X в себя с операцией взятия композиции отображений является моноидом. Единицей является тождественное отображение $\mathrm{id} = \mathrm{id}_X$.

Подмоноидами в $\mathrm{Map}(X, X)$ являются подмножества инъективных и сюръективных отображений.

Подмножества неинъективных и несюръективных отображений в $\mathrm{Map}(X, X)$ являются полугруппами, но не моноидами (нет единицы).