Оглавление

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО)

IV семестр

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Каков геометрический смысл тождества
$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)?$$

2. Найти область, заданную неравенствами
$$\alpha<\arg(z-z_0)<\beta \qquad (-\pi<\alpha<\beta\leqslant\pi).$$

3. Найти область, заданную неравенством $|z|<\arg z$, если $0\leqslant\arg z<$ $<2\pi$.

4. Найти ошибку в рассуждении, приводящем к парадоксу Бернулли: $(-z)^2=z^2$, поэтому $2\,\mathrm{Ln}(-z)=2\,\mathrm{Ln}\,z$, и следовательно, $\mathrm{Ln}(-z)=\mathrm{Ln}\,z$.

5. Совпадают ли множества значений $a^{2\alpha}$, $(a^{\alpha})^2$, $(a^2)^{\alpha}$? Рассмотреть для $a=\alpha=i$.

6. Для отображения $w=z^2$ найти образы линий $y=c$ и $|z|=R$. Какие из них преобразуются взаимно-однозначно?

7. Для отображения $w=e^z$ найти образ линии $x=y$ и прообраз линии $\rho=\theta$, $0\leqslant\theta<\infty$ (ρ, θ – полярные координаты).

8. Доказать, что функция $f(z)=\bar z$ нигде не дифференцируема.

9. Доказать, что функция $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ дифференцируема только в точке $z=0$, найти $f'(0)$.

10. Доказать, что для функции $f(z)=\sqrt{|xy|}$ в точке $z=0$ выполняются условия Коши-Римана, но производная не существует.

11. Будут ли гармоническими функции $|f(z)|$, $\arg f(z)$, если $f(z)$ – регулярная функция?

12. Доказать, что производные (любого порядка) гармонической функции также являются функциями гармоническими.

13. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w=z^2$, $w=1/z$, $w=e^z$?

14. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z=a$, причем $g(a)=b$ и функция $f(w)$ имеет в точке $w=b$ полюс порядка m. Доказать, что функция $F(z)=f(g(z))$ имеет в точке $z=a$ полюс порядка mn, где n – порядок нуля функции $g(z)-b$ в точке $z=a$.

15. Пусть функция $g(z)$ регулярна в точке $z=a$ и $g(a)=b$, а функция $f(w)$ имеет в точке $w=b$ существенно особую точку. Доказать, что

точка $z = a$ – существенно особая точка функции $F(z) = f(g(z))$.

16. Для каких рациональных функций

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

точка ∞ является устранимой особой точкой? Неустранимой особой точкой? Каков тип этой особой точки?

17. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс второго порядка в точке $z = 0$ и простой полюс на бесконечности.

18. Построить пример функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: 3 полюса первого порядка.

19. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 в точке $z = 0$ и полюс порядка 2 на бесконечности.

20. Найти общий вид функции, имеющей в расширенной плоскости только следующие особенности: полюс порядка 2 на бесконечности.

21. Доказать, что если $f(z)$ непрерывна в окрестности точки $z = a$, то

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

В чем отличие этого утверждения от интегральной формулы Коши?

22. Доказать, что для функции $f(z)$ имеет место равенство $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-a} f(z)$, если $f(z)$ – четная, и $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-a} f(z)$, если $f(z)$ – нечетная. Предполагается, что написанные вычеты имеют смысл.

23. Пусть $f(z) = g(az)$, где $a \not\equiv 0$. Доказать, что

$$\operatorname*{res}_{z=az_0} f(z) = \frac{1}{a} \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

24. Найти $\operatorname{res} f(\varphi(z))$, если $\varphi(z)$ регулярна в точке a и $\varphi'(z) \not\equiv 0$, а $f(z)$ имеет в точке $\varphi(a)$ полюс первого порядка с вычетом, равным A.

25. Доказать, что к интегралу $\int\limits_{\Gamma} e^{-z^2} dz$, взятому по границе Γ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, теорема о вычетах неприменима.

26. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в круге $|z| < 1$?

27. Сколько корней уравнения $z^4 - 5z + 1 = 0$ находится в кольце $1 < |z| < 3$?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Записать комплексное число z в алгебраической, показательной и тригонометрической формах.

N	z	N	z
1	$\dfrac{1}{2}+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+i\ln 2\right)$	2	$\dfrac{7}{6}+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+i\ln 3\right)$
3	$-\dfrac{5\sqrt{3}}{7}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{3}-i\,\dfrac{\ln 3}{2}\right)$	4	$-\dfrac{5\sqrt{3}}{13}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{3}-i\,\dfrac{\ln 3}{2}\right)$
5	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}-\operatorname{ch}\left(\ln 3+i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$	6	$\dfrac{7}{4\sqrt{3}}-\operatorname{sh}\left(\ln 2+i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$
7	$1-\operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 3}{4}+i\,\dfrac{5\pi}{12}\right)$	8	$\dfrac{1}{7}-\operatorname{cth}\left(\dfrac{\ln 3}{4}+i\,\dfrac{5\pi}{12}\right)$
9	$-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\ln 4\right)$	10	$-\sqrt{2}+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+i\ln 2\right)$
11	$1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{8}+i\,\dfrac{\ln 2}{4}\right)$	12	$\dfrac{3}{5}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{8}+i\,\dfrac{\ln 2}{4}\right)$
13	$\dfrac{1}{5\sqrt{2}}+\operatorname{ch}\left(\ln 5-i\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$	14	$\dfrac{3}{\sqrt{2}}+\operatorname{sh}\left(\ln 3-i\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$
15	$-\dfrac{1}{7}+\operatorname{th}\left(\ln 2-i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$	16	$-\dfrac{27}{13}+\operatorname{cth}\left(\ln 2-i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$
17	$1+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-i\ln 2\right)$	18	$\dfrac{7}{4}+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-i\ln 4\right)$
19	$\dfrac{1}{7\sqrt{3}}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{12}+i\,\dfrac{\ln 3}{4}\right)$	20	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{12}+i\,\dfrac{\ln 3}{4}\right)$
21	$-\dfrac{1}{12}-\operatorname{ch}\left(\ln 6+i\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$	22	$-1-\operatorname{sh}\left(\ln 2+i\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$
23	$\dfrac{3}{13}-\operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 8}{4}+i\,\dfrac{\pi}{8}\right)$	24	$\dfrac{3}{5}-\operatorname{cth}\left(\dfrac{\ln 8}{4}+i\,\dfrac{\pi}{8}\right)$
25	$\dfrac{1}{7\sqrt{2}}-\operatorname{ch}\left(\ln 7+i\,\dfrac{\pi}{4}\right)$	26	$\dfrac{9}{\sqrt{2}}-\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+i\ln 9\right)$
27	$-\dfrac{11}{7\sqrt{3}}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$	28	$-\dfrac{\sqrt{3}}{13}-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6}+i\ln 2\right)$

N	z	N	z
29	$\dfrac{9}{7} - \operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 12}{4} - i\,\dfrac{5\pi}{12}\right)$	30	$\dfrac{1}{4} - \operatorname{sh}\left(\dfrac{\ln 12}{2} - i\,\dfrac{5\pi}{6}\right)$
31	$\dfrac{5}{6} - \operatorname{ch}\left(\dfrac{\ln 3}{2} + i\,\dfrac{\pi}{6}\right)$	32	$\dfrac{11}{5} - \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{8} + i\,\dfrac{\ln 8}{4}\right)$

Решение варианта 31. Пусть $z_1 = \dfrac{\ln 3}{2} + i\,\dfrac{\pi}{6}$. Имеем:

$$\operatorname{ch} z_1 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}.$$

Находим числа e^{z_1} и e^{-z_1}:

$$e^{z_1} = e^{\frac{\ln 3}{2} + i\,\frac{\pi}{6}} = e^{\frac{\ln 3}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$e^{-z_1} = e^{-\frac{\ln 3}{2} - i\,\frac{\pi}{6}} = e^{-\frac{\ln 3}{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{ch} z_1 = \frac{\left(\dfrac{3}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{2 + \dfrac{i}{\sqrt{3}}}{2} = 1 + \frac{i}{2\sqrt{3}}.$$

Поэтому $z = \dfrac{5}{6} - \operatorname{ch} z_1 = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{i}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{6}\,(-1 - i\sqrt{3}\,)$.

Мы записали число z в алгебраической форме.

Находим модуль и главное значение аргумента числа z:

$$|z| = \frac{1}{6}\,|-1 - i\sqrt{3}\,| = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3},$$

$$\arg z = \arg\,(-1 - i\sqrt{3}\,) = -\frac{2\pi}{3}.$$

Записываем число z в показательной и тригонометрической формах:

$$z = \frac{1}{3}\,e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Ответ: $z = -\frac{1}{6} - \frac{i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\, e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Решение варианта 32. Пусть $z_1 = \frac{3\pi}{8} + i\,\frac{\ln 8}{4}$. Имеем:

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{\sin z_1}{\cos z_1} = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}} = -i \cdot \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{e^{iz_1} + e^{-iz_1}} = -i \cdot \frac{e^{2iz_1} - 1}{e^{2iz_1} + 1}$$

(мы умножили числитель и знаменатель на e^{iz_1} и учли, что $\frac{1}{i} = -i$).

Находим число e^{2iz_1}:

$$e^{2iz_1} = e^{-\frac{\ln 8}{2} + i\,\frac{3\pi}{4}} = e^{-\frac{\ln 8}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} z_1 = -i \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) + 1} = -i \cdot \frac{-\frac{5}{4} + \frac{i}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{i}{4}} = \frac{1 + 5i}{3 + i}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть на $3 - i$:

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{(1 + 5i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{3 + 15i - i + 5}{9 + 1} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}\,i.$$

Поэтому $z = \frac{11}{5} - \operatorname{tg} z_1 = \frac{7}{5} - \frac{7}{5}\,i = \frac{7}{5}\,(1 - i)$.

Мы записали число z в алгебраической форме.

Находим модуль и главное значение аргумента числа z:

$$|z| = \frac{7}{5}\,|1 - i| = \frac{7}{5} \cdot \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{5},$$

$$\arg z = \arg\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

Записываем число z в показательной и тригонометрической формах:

$$z = \frac{7\sqrt{2}}{5}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Ответ: $z = \frac{7}{5} - \frac{7}{5}\,i = \frac{7\sqrt{2}}{5}\;e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{7\sqrt{2}}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

Задача 2. В нечетных вариантах записать в алгебраической форме все элементы множества E. В четных вариантах решить уравнение и записать в алгебраической форме все его решения.

N	Множество E	N	Уравнение
1	$\operatorname{Arth}\left(\frac{11+2i\sqrt{3}}{7}\right)$	2	$(1-4i\sqrt{3})\operatorname{cth} z = 3+2i\sqrt{3}$
3	$\operatorname{Arsh}\left(\frac{1-3i}{2\sqrt{2}}\right)$	4	$7\operatorname{ch} z + 9\operatorname{sh} z = 1-3i\sqrt{3}$
5	$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{-12-i}{5}\right)$	6	$(4-7i)\operatorname{tg} z = -3-16i$
7	$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{4}\,i\right)$	8	$3\cos z + i\sin z = 3-i$
9	$\operatorname{Arcth}\left(\frac{1+2i\sqrt{3}}{13}\right)$	10	$(5-8i\sqrt{3})\operatorname{th} z = 2-13i\sqrt{3}$
11	$\operatorname{Arch}\left(\frac{3\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}\right)$	12	$11\operatorname{ch} z - 5\operatorname{sh} z = -9+i\sqrt{3}$
13	$\operatorname{Arctg}\left(\frac{4+5i\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}\right)$	14	$(8+11i\sqrt{3})\operatorname{ctg} z = 7\sqrt{3}-28i$
15	$\operatorname{Arccos}\left(\frac{-3-i}{2\sqrt{2}}\right)$	16	$6\cos z - 2i\sin z = 3\sqrt{3}+i$
17	$\operatorname{Arth}\left(\frac{7-6i}{5}\right)$	18	$(1+30i)\operatorname{cth} z = 11-10i$
19	$\operatorname{Arsh}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$	20	$3\operatorname{ch} z - 5\operatorname{sh} z = -2-2i\sqrt{3}$
21	$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}-i}{13}\right)$	22	$(5+16i\sqrt{3})\operatorname{tg} z = 12\sqrt{3}-7i$

N	Множество E	N	Уравнение
23	$\operatorname{Arcsin}\Big(\dfrac{3\sqrt{3}-i}{4\sqrt{2}}\Big)$	24	$2\cos z + 10i\sin z = \sqrt{3}+9i$
25	$\operatorname{Arctg}\Big(\dfrac{3\sqrt{3}-8i}{7}\Big)$	26	$(4+25i\sqrt{3}\,)\operatorname{th} z = 24-5i\sqrt{3}$
27	$\operatorname{Arch}\Big(\dfrac{5}{12}\,i\Big)$	28	$9\operatorname{ch} z - 7\operatorname{sh} z = -6-2i$
29	$\operatorname{Arccos}\Big(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\Big)$	30	$(3+11i)\operatorname{ctg} z = 19+9i$
31	$\operatorname{Arcth}\Big(\dfrac{2-i\sqrt{3}}{7}\Big)$	32	$\cos z + 7i\sin z = 2\sqrt{3}-6i$

Решение варианта 31. Множество $E = \operatorname{Arcth}\Big(\dfrac{2-i\sqrt{3}}{7}\Big)$ состоит из всех комплексных чисел z таких, что

$$\operatorname{cth} z = \frac{2-i\sqrt{3}}{7}. \tag{$*$}$$

Поэтому задача сводится к решению уравнения $(*)$.

Имеем:

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{e^z+e^{-z}}{2}\cdot\frac{2}{e^z-e^{-z}} = \frac{e^z+e^{-z}}{e^z-e^{-z}} = \frac{e^{2z}+1}{e^{2z}-1}$$

(мы умножили числитель и знаменатель на e^z).

Обозначим число e^{2z} буквой t. Мы приходим к уравнению

$$\frac{t+1}{t-1} = \frac{2-i\sqrt{3}}{7}.$$

Решаем это уравнение:

$$7(t+1) = (2-i\sqrt{3}\,)(t-1);$$

$$7t+7 = (2-i\sqrt{3}\,)t-2+i\sqrt{3};$$

$$(5+i\sqrt{3}\,)t = -9+i\sqrt{3};$$

$$t=-\frac{9-i\sqrt{3}}{5+i\sqrt{3}}.$$

Умножим числитель и знаменатель на число, комплексно сопряженное к знаменателю, то есть на $5-i\sqrt{3}$:

$$t=-\frac{(9-i\sqrt{3}\,)(5-i\sqrt{3}\,)}{(5+i\sqrt{3}\,)(5-i\sqrt{3}\,)}=-\frac{45-5i\sqrt{3}-9i\sqrt{3}-3}{25+3}=$$

$$=-\frac{42-14i\sqrt{3}}{28}=-\frac{14(3-i\sqrt{3}\,)}{14\cdot 2}=-\frac{3}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(-\sqrt{3}+i).$$

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$e^{2z}=t=\frac{\sqrt{3}}{2}\,(-\sqrt{3}+i).$$

Находим модуль и главное значение аргумента числа t:

$$|t|=\frac{\sqrt{3}}{2}\,|-\sqrt{3}+i|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3},$$

$$\arg t=\arg\,(-\sqrt{3}+i)=\frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$2z=(\ln t)_k=\ln|t|+i(\arg t+2\pi k)=$$

$$=\ln\sqrt{3}+i\Big(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\Big)=\frac{\ln 3}{2}+i\Big(\frac{5\pi}{6}+2\pi k\Big),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда $z=\dfrac{\ln 3}{4}+i\Big(\dfrac{5\pi}{12}+\pi k\Big)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $E=\Big\{\dfrac{\ln 3}{4}+i\Big(\dfrac{5\pi}{12}+\pi k\Big)\;\Big|\;k\in\mathbb{Z}\Big\}$.

Решение варианта 32. Имеем:

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}+7i\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\sqrt{3}-6i.$$

Обозначим число e^{iz} буквой t. Тогда $e^{-iz}=\dfrac{1}{t}$ и мы приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{7}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=2\sqrt{3}-6i.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$4t^2 - (2\sqrt{3} - 6i)t - 3 = 0. \qquad (*)$$

Находим дискриминант:

$$D = (2\sqrt{3} - 6i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) = 12 - 24i\sqrt{3} - 36 + 48 =$$

$$= 24 - 24i\sqrt{3} = 24(1 - i\sqrt{3}\,).$$

Находим модуль и главное значение аргумента числа D:

$$|D| = 24\,|1 - i\sqrt{3}\,| = 24 \cdot 2 = 48,$$

$$\arg D = \arg\,(1 - i\sqrt{3}\,) = -\frac{\pi}{3}.$$

Записываем число D в показательной форме: $D = 48\,e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.
Находим главное значение корня 2-й степени из числа D:

$$(\sqrt{D}\,)_0 = \sqrt{48}\;e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 6 - 2i\sqrt{3}.$$

Находим корни квадратного уравнения $(*)$:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3} - 6i + (6 - 2i\sqrt{3}\,)}{8} = \frac{6 + 2\sqrt{3} - i(6 + 2\sqrt{3}\,)}{8} =$$

$$= \frac{(6 + 2\sqrt{3}\,)(1 - i)}{8} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\,(1 - i);$$

$$t_2 = \frac{2\sqrt{3} - 6i - (6 - 2i\sqrt{3}\,)}{8} = \frac{-(6 - 2\sqrt{3}\,) - i(6 - 2\sqrt{3}\,)}{8} =$$

$$= \frac{(6 - 2\sqrt{3}\,)(-1 - i)}{8} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\,(-1 - i).$$

Таким образом, мы приходим к двум уравнениям:

$$e^{iz} = t_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}\,(1 - i);$$

$$e^{iz} = t_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}\,(-1 - i).$$

Находим модуль и главное значение аргумента чисел t_1 и t_2:

$$|t_1| = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\,|1-i| = \frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$\arg t_1 = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

$$|t_2| = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\,|-1-i| = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$\arg t_2 = \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$iz = (\ln t_1)_k = \ln|t_1| + i(\arg t_1 + 2\pi k) =$$

$$= \ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\Big(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\Big), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$iz = (\ln t_2)_k = \ln|t_2| + i(\arg t_2 + 2\pi k) =$$

$$= \ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\Big(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\Big), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$; $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$ (мы умножили обе части равенств на $\frac{1}{i} = -i$).

Заметим, что число $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ больше 1, а число $\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ меньше 1. Поэтому $\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} > 0$, $\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0$. Для того чтобы было яснее видно, что решения второй серии имеют положительную мнимую часть, произведем следующее тождественное преобразование:

$$\ln\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\ln\Big(\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\Big)^{-1} = -\ln\frac{2\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= -\ln\frac{2\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3}\,)}{(3-\sqrt{3}\,)(3+\sqrt{3}\,)} = -\ln\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{6} = -\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $z = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k - i\ln\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$; $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k + i\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. Определить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ функция $u(x,y)$ (четные варианты) или $v(x,y)$ (нечетные варианты) является действительной или, соответственно, мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$. Восстановить $f(z)$.

N	$v(x,y)$	N	$u(x,y)$
1	$e^{-y}(x\cos x - y\sin ax)$	2	$\cos ay \cdot \operatorname{ch} x$
3	$e^{x}(y\cos y + x\sin ay)$	4	$e^{-2y}\cos ax$
5	$\sin y \operatorname{ch} ax$	6	$x\sin x \operatorname{ch} ay - y\cos x \operatorname{sh} y$
7	$y/(ax^2+y^2)$	8	$x\sin x \operatorname{ch} y + y\cos x \operatorname{sh} ay$
9	$\cos ax \cdot \operatorname{ch}(2y+1)$	10	$1 - e^{ax}\sin y$
11	$\sin x \cdot \operatorname{ch} ay$	12	$\cos x \cdot \operatorname{ch} ay$
13	$2y/(3x^2-ay^2)$	14	$e^{-y}\sin x + ay$
15	$\cos x \cdot \operatorname{ch}(y-a)$	16	$e^{-y}\cos x + ax$
17	$\sin ay \cdot \operatorname{ch} x$	18	$x/(ax^2-y^2)$
19	$3y/(2x^2-ay^2)$	20	$\sin ax \cdot \operatorname{ch} 3y$
21	$3y/(4x^2-ay^2)$	22	$\cos ax \cdot \operatorname{sh}(ay+2)$
23	$\sin 3y \cdot \operatorname{sh} ax$	24	$y/(2x^2+ay^2)$
25	$\sin 2ax \cdot \operatorname{sh} y$	26	$2x/(x^2+ay^2)$
27	$x^2-(ay-1)^2$	28	$\cos(ax+2)\cdot \operatorname{ch} y$
29	ax^2+4y^2	30	ax^2-y^2-x

Задача 4. Даны функция $f(z)$ и множество E.

1) Изобразить множество E на комплексной плоскости.
2) Найти образ $E' = f(E)$ множества E при отображении $w = f(z)$ (описать множество E' с помощью неравенств), изобразить его на комплексной плоскости.

N	$f(z)$	E
1	$(\sqrt{3}+i)z^2+1+5i$	$1/2 < \lvert z\rvert < 1, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
2	$(2-2i)z^3+2-i$	$1 < \lvert z\rvert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 3\pi/4$

N	$f(z)$	E
3	$e^z + i - 1$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 2, \quad -\pi/6 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/6$
4	$\ln z + 1 - i$	$1 \leqslant \vert z\vert < 2, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < \pi/6$
5	$(-\sqrt{3} - i)z^2 - 1 - 5i$	$1 \leqslant \vert z\vert < 2, \quad -\pi/4 < \arg z \leqslant 0$
6	$2e^z + 3 - 2i$	$\operatorname{Re} z < 0, \quad \pi/3 \leqslant \operatorname{Im} z < 2\pi/3$
7	$e^{2zi+i\pi/4} + 3i$	$-\pi/4 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 0 < \operatorname{Im} z$
8	$\ln(iz) - 1 + 5i$	$2 \leqslant \vert z\vert < 3, \quad 0 \leqslant \arg z < \pi/4$
9	$(-2 + 2i)z^3 - 2 + i$	$2 < \vert z\vert \leqslant 3, \quad -3\pi/4 < \arg z \leqslant -\pi/4$
10	$e^{z+i\pi/3} + 2 - 4i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 3, \quad -\pi/4 < \operatorname{Im} z \leqslant \pi/3$
11	$\ln(2z) - 3 + 2i$	$\vert z\vert < 1, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < \pi/3$
12	$\ln(-z) - 2 + 3i$	$1 \leqslant \vert z\vert < 3, \quad -\pi/2 \leqslant \arg z < -\pi/4$
13	$(\sqrt{3} - i)z^2 - 3i$	$2 < \vert z\vert \leqslant 5, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/3$
14	$e^{iz+i\pi/8} + 1 + 2i$	$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/4, \quad \operatorname{Im} z < 1$
15	$\ln(3z) - 1 - 6i$	$1 \leqslant \vert z\vert, \quad \pi/4 < \arg z \leqslant 2\pi/3$
16	$(-1 - i)z^3 + 6 - i$	$\vert z\vert < 2, \quad \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$
17	$e^{-z+i3\pi/2} - 2 - 3i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant 1, \quad \pi/6 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi/3$
18	$(1 + i)\ln z - 2$	$1 < \vert z\vert \leqslant 3, \quad 0 < \arg z \leqslant \pi/6$
19	$(-\sqrt{3} + i)z^3 - 2i$	$1 \leqslant \vert z\vert \leqslant 3, \quad \pi/2 < \arg z < 2\pi/3$
20	$e^{3iz-i\pi/4} - i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/6, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
21	$(1 - i)\ln(2z) + i$	$2 \leqslant \vert z\vert < 3, \quad \pi/3 < \arg z \leqslant \pi/2$
22	$(1 - i)z^4 - 2 + 3i$	$1 < \vert z\vert, \quad 2\pi/3 \leqslant \arg z \leqslant \pi$
23	$e^{2z+i\pi/2} + 1 + 3i$	$1 \leqslant \operatorname{Re} z < 2, \quad 3\pi/4 \leqslant \operatorname{Im} z < \pi$
24	$i\ln(3z) - 2 - 3i$	$2 \leqslant \vert z\vert, \quad \pi/6 < \arg z \leqslant \pi/4$
25	$(2 - 2i)z^2 + 5 - i$	$\vert z\vert \leqslant 3, \quad \pi/6 \leqslant \arg z < \pi/2$
26	$e^{-2iz+i\pi/4} - 1 - 3i$	$\pi/3 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2, \quad 2 < \operatorname{Im} z$
27	$-i\ln(iz) + 1$	$1 < \vert z\vert \leqslant 2, \quad -\pi/4 \leqslant \arg z < -\pi/6$
28	$(1 + i)z^4 - 3 + 2i$	$\vert z\vert < 1, \quad -\pi/6 \leqslant \arg z < 0$
29	$e^{-iz-i\pi/2} + 5i$	$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \pi/3, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 2$
30	$2\ln(3iz) - 2 + 4i$	$2 \leqslant \vert z\vert < 4, \quad -\pi/3 < \arg z \leqslant -\pi/6$

Задача 5. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Найти все возможные разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (ряд Тейлора) по степеням $z - z_0$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

2) Определить, является ли точка z_0 изолированной особой точкой функции $f(z)$. Если да, то, используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$\dfrac{z-1}{z(z+1)}$	-1	2	$\dfrac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$	-2
3	$\dfrac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$	2	4	$\dfrac{z+1}{z(z-1)}$	$-3-2i$
5	$\dfrac{z+2}{z^2-1}$	1	6	$\dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$	2
7	$\dfrac{3z-1}{z^2-2z-3}$	-1	8	$\dfrac{z}{z^2+4}$	0
9	$\dfrac{2z^2-z+1}{z^3-z}$	1	10	$\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$	0
11	$\dfrac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$	-2	12	$\dfrac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$	-1
13	$\dfrac{2z^2-3z+2}{(z-1)^2z}$	1	14	$\dfrac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$	1
15	$\dfrac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$	2	16	$\dfrac{1}{z^2-7z+12}$	3
17	$\dfrac{z^2+z+1}{z^3+z}$	0	18	$\dfrac{2}{z^2-4z+3}$	-1
19	$\dfrac{2z^2+z+3}{z^2(z+3)}$	-3	20	$\dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$	-1
21	$\dfrac{2z^2+5z+4}{z^2(z+4)}$	0	22	$\dfrac{1}{z^2-5z+6}$	0
23	$\dfrac{3z^2-1}{z^2(z-1)}$	0	24	$\dfrac{2z^2+4z+1}{z(z+1)^2}$	-1
25	$\dfrac{9-2z}{z(3-z)^2}$	3	26	$\dfrac{z+3}{z^2-1}$	$-2-2i$
27	$\dfrac{z^2}{z^2+9}$	0	28	$\dfrac{2z}{z^2+4}$	$-3+2i$
29	$\dfrac{z-1}{z^2+2z}$	$-2-3i$	30	$\dfrac{z-2}{z^2-2z-3}$	$2-2i$

Задача 6. Дана функция $f(z)$ и дано число z_0.

1) Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$.
2) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки z_0 и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.
3) Используя разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана, определить тип особой точки $z = \infty$ и найти вычет функции $f(z)$ в этой точке.

N	$f(z)$	z_0	N	$f(z)$	z_0
1	$z\cos\dfrac{1}{z-2}$	2	2	$\sin\dfrac{z}{z-1}$	1
3	$ze^{z/(z-5)}$	5	4	$\sin\dfrac{2z-1}{z+2}$	-2
5	$\cos\dfrac{3z}{z-i}$	i	6	$\sin\dfrac{5z}{z-2i}$	$2i$
7	$\sin\dfrac{3z-i}{3z+i}$	$-\dfrac{i}{3}$	8	$z\cos\dfrac{3z}{z-1}$	1
9	$z\sin\dfrac{z}{z-1}$	1	10	$(z-3)\cos\dfrac{\pi(z-3)}{z}$	0
11	$z^2\sin\dfrac{\pi(z+1)}{z}$	0	12	$z\cos\dfrac{z}{z+2i}$	$-2i$
13	$\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	14	$\sin\dfrac{z+i}{z-i}$	i
15	$\sin\dfrac{z}{z-3}$	3	16	$ze^{1/(z-2)}$	2
17	$e^{z/(z-3)}$	3	18	$\sin\dfrac{2z}{z-4}$	4
19	$\sin\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$	2	20	$e^{(4z-2z^2)/((z-1)^2)}$	1
21	$ze^{\pi/(z-a)}$	a	22	$ze^{\pi z/(z-\pi)}$	π
23	$z\sin\dfrac{\pi(z+2)}{z}$	0	24	$z\cos\dfrac{\pi(z+3)}{z-1}$	1
25	$z^2\sin\dfrac{z+3}{z}$	0	26	$z\sin\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$	1
27	$z\cos\dfrac{z}{z-3}$	3	28	$z\sin\dfrac{\pi(z-1)}{z-2}$	2
29	$\dfrac{\sin^2 z}{z}$	0	30	$\dfrac{\sin^2(2/z)}{z}$	0

Задача 7. Найти интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ с помощью вычетов. Кривая Γ ориентирована против часовой стрелки.

N	$f(z)$	Γ	N	$f(z)$	Γ
1	$\dfrac{z^2+1}{(2z+3)z^2}$	$\|z+1\|=2$	2	$\dfrac{\sin z}{z^2(z+4)^2}$	$\|z+2\|=3$
3	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+4)(z^2-9)}$	$\|z-3-4i\|=5$	4	$\dfrac{1}{z^4+1}$	$\|z-1\|=1$
5	$\dfrac{z(z+1)^2}{\sin^2(2\pi z)}$	$\|z-1/5\|=1/4$	6	$\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$	$\|z-1-i\|=2$
7	$\dfrac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$\|z-i\|=2$	8	$\dfrac{(z^2+9)^2}{\operatorname{ch} z}$	$\|z+3i\|=3$
9	$\dfrac{\operatorname{tg} z}{z(z-\pi/4)^2}$	$\|z-1-i\|=\sqrt{3}$	10	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+2z+5)^2}$	$\|z-i\|=2$
11	$\dfrac{e^z}{z^4+8z^2-9}$	$\|z-1-2i\|=5/2$	12	$\dfrac{\sin(2z)}{z^2(z^2+4)}$	$\|z-2i\|=3$
13	$\dfrac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$\|z-2-2i\|=3$	14	$\dfrac{z}{(z^2-1)(z-2)^2}$	$\|z-2\|=3/2$
15	$\dfrac{z^3}{z^4-1}$	$\|z+1-i\|=\sqrt{2}$	16	$\dfrac{1-e^{4z}}{z(z^2-16)}$	$\|z+2\|=3$
17	$\dfrac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$\|z+1-i\|=5/4$	18	$\dfrac{\operatorname{sh} z}{z(z^2+2z+5)}$	$\|z+i\|=2$
19	$\dfrac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$\|z-1-i\|=2$	20	$\dfrac{z(\sin z+2)}{\sin z(z-1)^2}$	$\|z-3/2\|=2$
21	$\dfrac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$\|z-2-i\|=2$	22	$\dfrac{e^z}{z^2(z-\pi i)}$	$\|z\|=4$
23	$\dfrac{\sin^3(z+2)}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\|z+1\|=5$	24	$\dfrac{e^z-1}{z^3(z-2)}$	$\|z-2\|=3$
25	$\dfrac{z-\sin z}{z^3\sin(\pi z)}$	$\|z\|=3/2$	26	$\dfrac{\cos(z+2)-1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$\|z-1-i\|=3$
27	$\dfrac{e^z-1}{(z^2-1)^2 z}$	$\|z-2\|=5/2$	28	$\dfrac{\sin(3z)}{z(z^2-4)^2}$	$\|z-1\|=2$
29	$\dfrac{1-\cos(2z)}{z^3(z^2+1)}$	$\|z-i\|=3/2$	30	$\dfrac{e^z-1}{z(z^2+9)^2}$	$\|z-2\|=3$

Задача 8. Найти несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с помощью вычетов.

N	$f(x)$	a	b	N	$f(x)$	a	b
1	$\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$	0	$+\infty$	2	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+45}$	$-\infty$	$+\infty$
3	$\dfrac{e^{ix}}{x^2-2ix-2}$	$-\infty$	$+\infty$	4	$\dfrac{(x+1)\cos 3x}{x^2+4x+104}$	$-\infty$	$+\infty$
5	$\dfrac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}$	$-\infty$	$+\infty$	6	$\dfrac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}$	$-\infty$	$+\infty$
7	$\dfrac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$	$-\infty$	$+\infty$	8	$\dfrac{x^2+2}{x^4-2ix(x^2+1)-1}$	$-\infty$	$+\infty$
9	$\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$	0	$+\infty$	10	$\dfrac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}$	$-\infty$	$+\infty$
11	$\dfrac{1}{x^4-(4ix+5)^2}$	$-\infty$	$+\infty$	12	$\dfrac{x\sin x}{x^2+2x+10}$	$-\infty$	$+\infty$
13	$\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$	0	$+\infty$	14	$\dfrac{x^2+2}{(x^2-2ix-5)(x^2+4)}$	$-\infty$	$+\infty$
15	$\dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}$	$-\infty$	$+\infty$	16	$\dfrac{x^2}{(x^2+4)^3}$	0	$+\infty$
17	$\dfrac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}$	$-\infty$	$+\infty$	18	$\dfrac{x+5}{(x^2-4ix-13)^3}$	$-\infty$	$+\infty$
19	$\dfrac{e^{ix}}{(x^2+4ix-5)^3}$	$-\infty$	$+\infty$	20	$\dfrac{x^2}{x^4-4ix(x^2+4)-16}$	$-\infty$	$+\infty$
21	$\dfrac{x\sin x}{x^2+9}$	0	$+\infty$	22	$\dfrac{\cos x}{x^2+4}$	0	$+\infty$
23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$-\infty$	$+\infty$	24	$\dfrac{x\sin x}{(x^2+1)^2}$	0	$+\infty$
25	$\dfrac{x^2}{x^4-(2ix+3)^2}$	$-\infty$	$+\infty$	26	$\dfrac{(x-1)e^{ix}}{x^2-2x+2}$	$-\infty$	$+\infty$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$-\infty$	$+\infty$	28	$\dfrac{(x-3)e^{ix}}{x^2-6x+409}$	$-\infty$	$+\infty$
29	$\dfrac{\cos x}{(x^2+1)^3}$	0	$+\infty$	30	$\dfrac{(x^3-2)\cos(x/2)}{(x^2+2)(x^2+9)}$	$-\infty$	$+\infty$

Задача 9. Используя теорему Руше, найти число нулей функции $F(z)$ в области D (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность).

N	$F(z)$	D
1	$z^5 - 5z^2 + 2z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
2	$z^6 - 7z^5 + 3z^3 - z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
3	$z^4 - 5z^3 - z^2 - 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
4	$2z^5 - 3z^3 + 2z^2 - 5$	$1/2 < \|z\| < 2$
5	$3z^4 + 2z^3 - z^2 - z + 3$	$1/2 < \|z\| < 2$
6	$2z^3 - 7z^2 + 3z + 1$	$1 < \|z\| < 4$
7	$2z^5 - 8z^4 + z^3 + 2z^2 + z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
8	$z^5 - 4z^3 - 10z^2 + 3$	$1 < \|z\| < 3$
9	$3z^6 - 4z^4 + 5z^2 - 15z - 1$	$1 < \|z\| < 2$
10	$2z^4 + 4z^3 - 17z^2 + 3z - 7$	$1 < \|z\| < 5$
11	$5z^5 + 4z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 17$	$1 < \|z\| < 2$
12	$z^8 - 3z^5 + 2z^2 - 12z - 3$	$1 < \|z\| < 2$
13	$5z^4 + 2z^3 - 13z^2 + 4z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
14	$2z^4 + 3z^3 - z^2 + 11z - 1$	$1/2 < \|z\| < 3$
15	$2z^5 - 5z^4 + 5z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
16	$z^6 - 10z^3 + 2z^2 + 3z - 1$	$2 < \|z\| < 3$
17	$z^7 - 5z^5 + 2z^4 + 1$	$1 < \|z\| < 3$
18	$3z^7 + z^6 - 9z^4 + 2z^2 - 2$	$1 < \|z\| < 2$
19	$10z^4 - z^3 + 4z^2 - z - 3$	$1/2 < \|z\| < 1$
20	$2z^3 - 3z^2 - 7z - 1$	$1 < \|z\| < 3$
21	$z^5 + 2z^4 - z^3 - 3z^2 + 13z - 5$	$1 < \|z\| < 4$
22	$z^5 - 2z^2 + 5z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
23	$z^4 - 6z^3 + z^2 - 10z + 1$	$1 < \|z\| < 2$
24	$z^3 - 17z^2 + 25z - 5$	$1 < \|z\| < 2$
25	$4z^3 + 10z^2 - 3z + 1$	$2 < \|z\| < 3$
26	$3z^3 + 9z^2 - 5z - 1$	$2 < \|z\| < 4$
27	$2z^4 - z^3 + 6z^2 - z - 1$	$1/4 < \|z\| < 1$
28	$z^6 - 5z^3 + z^2 + 1$	$1/2 < \|z\| < 1$
29	$z^3 - 2z - 5$	$1 < \|z\| < 3$
30	$z^8 + 5z^7 - z^4 + 2$	$4 < \|z\| < 6$

Задача 10. В вариантах 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, 28 с помощью вычетов найти оригинал $f(t)$ изображения $F(p)$. Сделать проверку (найти изображение функции $f(t)$, используя таблицу стандартных изображений и свойства преобразования Лапласа, и убедиться, что оно равно $F(p)$).

В вариантах 2, 6, 10, 15, 18, 22, 26, 29 с помощью вычетов найти косинус-преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

В вариантах 3, 7, 11, 14, 19, 23, 27, 30 с помощью вычетов найти синус-преобразование Фурье $F_s(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

N	$F(p)$	N	$f(x)$	N	$f(x)$	N	$F(p)$
1	$\dfrac{p}{p^3+1}$	2	$\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$	3	$\dfrac{x^3}{1+x^6}$	4	$\dfrac{p}{p^2-2p+5}$
5	$\dfrac{p}{(p^2+4)^2}$	6	$\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	7	$\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$	8	$\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$
9	$\dfrac{1}{(p^3-8)^2}$	10	$\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$	11	$\dfrac{x}{(1+x^2)(9+x^2)}$	12	$\dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}$
13	$\dfrac{p}{p^4-1}$	14	$\dfrac{x^3}{(1+x^2)^3}$	15	$\dfrac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}$	16	$\dfrac{p-1}{(p^2+1)(p+1)}$
17	$\dfrac{p}{p^4+1}$	18	$\dfrac{1}{1+x^4}$	19	$\dfrac{x}{1+x^4}$	20	$\dfrac{p-3}{(p^2+2p+5)}$
21	$\dfrac{1}{(p+1)^3}$	22	$\dfrac{x^2}{1+x^4}$	23	$\dfrac{x^3}{1+x^4}$	24	$\dfrac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$
25	$\dfrac{p^2}{p^6-1}$	26	$\dfrac{x^2}{1+x^6}$	27	$\dfrac{x}{1+x^6}$		
28	$\dfrac{1}{p(p-1)^3}$	29	$\dfrac{1}{1+x^2}$	30	$\dfrac{x}{1+x^2}$		

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Комплексные числа и действия над ними. Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Корни n-й степени из комплексного числа.

2. Определение регулярной (аналитической) функции комплексного переменного. Условия Коши — Римана.

3. Линейная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Отображение, которое она осуществляет.

4. Степенная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

5. Показательная функция комплексного переменного. Ее регулярность (аналитичность). Период. Область однолистности. Отображение, которое она осуществляет.

6. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного. Их регулярность (аналитичность). Периоды.

7. Логарифм комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое он осуществляет.

8. Общая степенная функция комплексного переменного. Регулярность (аналитичность). Многозначность отображения, которое она осуществляет.

9. Гармонические функции. Их связь с регулярными функциями комплексного переменного.

10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной регулярной (аналитической) функции. Понятие конформного отображения.

11. Определение интеграла от функции комплексного переменного, его связь с криволинейными интегралами. Основные свойства.

12. Интеграл от регулярной (аналитической) функции, его независимость от пути интегрирования. Формула Ньютона — Лейбница.

13. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей.

14. Интегральная формула Коши для регулярной (аналитической) функции.

15. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций. Интегральная формула Коши для производных регулярной (аналитической) функции.

16. Разложение регулярной (аналитической) функции в ряд Тейлора. Область сходимости. Формулы для коэффициентов.

17. Разложение функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана. Формулы для коэффициентов.

18. Изолированные особые точки регулярной (аналитической) функции и их классификация. Примеры.

19. Устранимая особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

20. Полюс n-го порядка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

21. Существенно особая точка. Ряд Лорана и поведение функции в окрестности этой точки.

22. Нули аналитической функции. Порядок нуля. Связь между нулем и полюсом.

23. Вычет аналитической функции в точке. Его связь с рядом Лорана. Основная теорема о вычетах.

24. Формулы для вычисления вычетов в простом и кратном полюсе.

25. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка. Ряд Лорана в окрестности бесконечности. Классификация особенностей в бесконечности.

26. Вычет в бесконечно удаленной точке. Его связь с рядом Лорана. Вторая теорема о вычетах.

27. Приложение теории вычетов к вычислению интегралов по вещественной прямой от рациональных функций.

28. Лемма Жордана. Вычисление несобственных интегралов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x)\, dx.$$

29. Логарифмический вычет. Связь числа нулей и полюсов функции внутри замкнутого контура с интегралом по этому контуру.

30. Принцип аргумента. Теорема Руше.

31. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность по параметру.

32. Интегралы, зависящие от параметра. Интегрирование и дифференцирование по параметру.

33. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Определение равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости.

34. Равномерная непрерывность несобственного интеграла по параметру. Примеры.

35. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

36. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Примеры.

37. Гамма-функция и ее свойства: формула понижения, связь с факториалом, формула дополнения.

38. Аналитическое продолжение гамма-функции в комплексной плоскости. Ее значения на отрицательной полуоси. Свойства $\Gamma(z)$.

39. Бета-функция. Ее связь с гамма-функцией. Применение к вычислению интегралов. Пример.

40. Определение преобразования Лапласа. Его аналитичность.

41. Определение преобразования Лапласа. Его обращения с помощью вычетов.

42. Степенные ряды. Теорема Абеля.

43. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости.

44. Свойства степенных рядов. Сформулировать условия непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости степенного ряда в заданной области.

45. Преобразование Фурье и его свойства.

46. Тригонометрические ряды Фурье: вещественная и комплексная

формы записи, ряды Фурье для четных и нечетных функций, разложение функций на полупериоде в ряды по синусам и по косинусам.

47. Тригонометрические ряды Фурье: признаки сходимости и равномерной сходимости, теорема единственности.

48. Свойства коэффициентов ряда Фурье.