$$x^3-x^2-100=0$$

$$\underline{x=5}$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-x^2-100 & x-5 \\
\hline
-\ x^3-5x^2 & x^2+4x+20 \\
\hline
4x^2-100 & \\
-\ 4x^2-20x & \\
\hline
-100+20x & \\
-100+20x & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$x^2+4x+20=0$

$D=16-80<0$

нет корней

Проверка.

$$2\cdot 2+25=\sqrt{29\cdot 29}$$

$29=29$ верно

Семинар 5. (30/09/19)

Тема 3. Векторное произведение гам. векторов.

* Вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются коллинеарными, если сущ-ет прямая l такая, что $(\vec{a}_1 \parallel l) \wedge (\vec{a}_2 \parallel l) \wedge \ldots \wedge (\vec{a}_n \parallel l)$

* Вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются компланарными, если

существует плоскость Q такая, что

$(\vec{a_1} \parallel Q) \wedge (\vec{a_2} \parallel Q) \wedge \ldots \wedge (\vec{a_n} \parallel Q)$

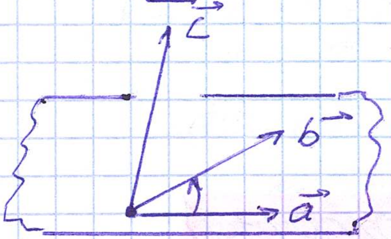
коллинеарные line - прямая

компланарные plane - плоскость

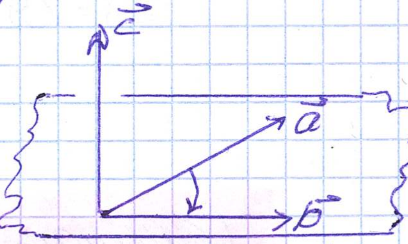
$\vec{a} \parallel \vec{b}$

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некомпланарные вектора

Опр-е. Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ назыв-ся правой, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки.



тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - правая



тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - левая

Опр-е. Пусть вектора $\vec{a} \times \vec{b}$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ такой, что

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$

26

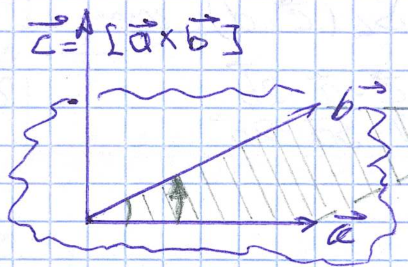
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$

3) Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - правая

Обознач-е. $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ то, по определению, $[\vec{a} \times \vec{b}] = 0$.

Скалярное произ-е	Векторное произ-е.
$(\vec{a}, \vec{b})$	$[\vec{a} \times \vec{b}]$
Число $\in \mathbb{R}$	Вектор $\in V_3$
$(\vec{a}, \vec{b}) = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos\alpha$	$\lvert[\vec{a} \times \vec{b}]\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\alpha$



$\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \sin\alpha$

Свойства векторного произведения:

1) $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ антикоммутативность

2) $[(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = [\vec{a} \times \vec{c}] + [\vec{b} \times \vec{c}]$
$[(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ } линейность по первому аргументу

27

3) $([\vec{a}\times\vec{b}]=\vec{0}) \Leftrightarrow (\vec{a} \parallel \vec{b})$

4) $S_{\square}(\vec{a},\vec{b}) = |[\vec{a}\times\vec{b}]|$

$S_{\triangle}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}\cdot|[\vec{a}\times\vec{b}]|$

<u>Задача.</u>

$|\vec{a}|=7 \quad |\vec{b}|=8$

$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$

Найти:

1) $S_{\triangle}(\vec{a},\vec{b})$

2) $S_{\triangle}(\vec{c},\vec{d})$, где

$\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$

$\vec{d}=3\vec{a}+2\vec{b}$

<u>Решение.</u>

1) $S_{\triangle}(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}|[\vec{a}\times\vec{b}]| = \frac{1}{2}\cdot$

$\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle = \frac{56}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{28\sqrt{2}}{2}$

$= 14\sqrt{2}$

2) $S_{\triangle}(\vec{c},\vec{d}) = \frac{1}{2}\cdot|[\vec{c}\times\vec{d}]| =$

$\frac{1}{2}\cdot|[\vec{a}-2\vec{b}\times 3\vec{a}+2\vec{b}]| =$

$= \frac{1}{2}([\vec{a}\times 3\vec{a}]+[\vec{a}\times 2\vec{b}]-[2\vec{b}\times 3\vec{a}]$

$-[2\vec{b}\times 2\vec{b}]) =$

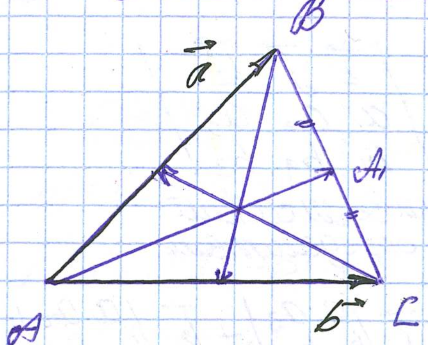
$= \frac{1}{2}(3[\vec{a}\times\vec{a}]+2[\vec{a}\times\vec{b}]-6[\vec{b}\times\vec{a}]$

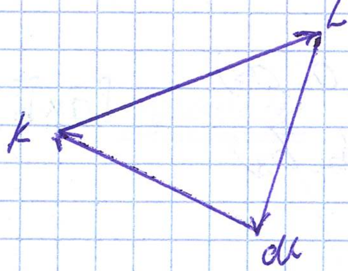
$-4[\vec{b}\times\vec{b}]) =$

$= \frac{1}{2}(3[\vec{a}\times\vec{a}]+8[\vec{a}\times\vec{b}]-4[\vec{b}\times\vec{b}])$

28 $= \frac{1}{2}(0+8\cdot 56\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-0) = \frac{8\cdot 56\cdot\sqrt{2}}{4} = 112\sqrt{2}$

Задача.





$$\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} - ?$$

Решение.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|[\vec a \times \vec b]\right|$$

$$\vec{BC} = \vec b - \vec a$$

$$\vec{KL} = \vec{AB} + \frac{\vec{BC}}{2} = \vec a + \frac{\vec b}{2} - \frac{\vec a}{2} = \frac{1}{2}(\vec a + \vec b)$$

$$\vec{KM} = -\vec{MK} = -\frac{\vec a}{2} + \vec b = \vec b - \frac{\vec a}{2}$$

$$S_{\triangle KLM} = \frac{1}{2} \cdot \left|[\vec{KL} \times \vec{KM}]\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\vec b \times \vec b - \frac{1}{2}\vec a\right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| \frac{1}{2}[\vec a \times \vec b] - \frac{1}{4}[\vec a \times \vec a] + \frac{1}{2}[\vec b \times \vec b] - \frac{1}{4}[\vec b \times \vec a]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left| \frac{3}{4}[\vec a \times \vec b]\right| = \frac{3}{8}\left|[\vec a \times \vec b]\right|$$

$$\frac{S_{\triangle \cancel{ABC}\,KLM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 1} = \frac{3}{4}$$

Векторное произв. в Правой Дек. сис. коорд.

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

символический определитель

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Задача.

$\vec{a} = (5, -3, 4)$

$\vec{b} = (7, -2, 6)$

Найти:

1) $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$

2) Проверить, что $\vec{c} \perp \vec{a}$

3) Проверить, что $\vec{c} \perp \vec{b}$

4) $S_{\square}(\vec{a}, \vec{b})$

5) $S_{\Delta}(\vec{a}, \vec{b})$

221

$\times \begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array}$

Решение.

1) $[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \; \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -10 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 11 \cdot \vec{k}$

$\vec{c} = (-10, -2, 11)$

2) $(\vec{c}, \vec{a}) = -50 + 6 + 44 = 0 \Rightarrow$

$\vec{c} \perp \vec{a}$

3) $(\vec{c}, \vec{b}) = -70 + 4 + 66 = 0 \Rightarrow$

$\vec{c} \perp \vec{b}$

4) $S_{\square}(\vec{a}, \vec{b}) = |[\vec{a} \times \vec{b}]| = |\vec{c}| =$

$= \sqrt{100 + 4 + 121} = \sqrt{225} = 15$

5) $S_\Delta (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} | [\vec{a} \times \vec{b}] | = \frac{15}{2}$

Задача.

$A = (2, -3, 1)$

$B = (7, -1, -3)$

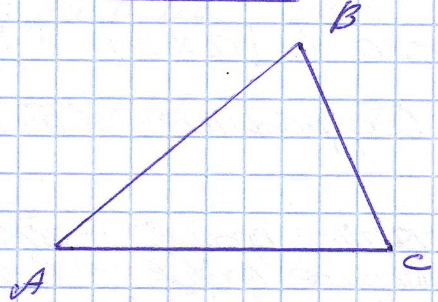
$C = (1, 1, 4)$

Найти:

1) $S_{\Delta ABC}$

3) Высоту AH

Решение.



1) $\vec{AB} = (5, 2, -4)$

$\vec{AC} = (-1, 4, 3)$

$$[\vec{AB} \times \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot 22 - \vec{j} \cdot 19 + \vec{k} \cdot 18$$

$\vec{c} = [\vec{AB} \times \vec{AC}] = (22, -1$ [illegible] $)$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot | [\vec{AB} \times \vec{AC}] | =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{22^2 + 11^2 + 22^2} = \frac{33}{2}$$

~~2) Пусть $H = (x, y, z)$~~

~~$\vec{AH} = (x-2, y+3, z-1)$~~

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AH}| \cdot |\vec{BC}|$$

$\vec{BC} = (-6, 2, 7)$

$|\vec{BC}| = \sqrt{36 + 4 + 49} = \sqrt{89}$

$\cancel{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2} \cdot \sqrt{89} =}$

$= \frac{1}{2} \sqrt{}$

$$|\vec{AH}| = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{2} \cdot |\vec{BC}|} = \frac{33}{\sqrt{89}}$$