ЛЕКЦИЯ 7. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

I. *Основной закон динамики (II закон Ньютона).*

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{7.1}$$

-произведение массы материальной точки на ускорение равно действующей на точку силе.

Запишем II закон Ньютона (7.1) в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

и внесем массу под знак дифференциала, получим

$$\frac{d\,\overrightarrow{mv}}{dt} = \vec{F}\,.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Количеством движения, или импульсом материальной точки называется вектор* $\vec{p} = m\vec{v}$ *.*

Получаем еще одну формулировку II закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{7.2}$$

- *скорость изменения импульса равна действующей на материальную точку силе.*

Если проекция силы на какое-то направление с единичным вектором $\vec{e}$ равно нулю, т.е $\left(\vec{F},\vec{e}\right) = 0$, то из (7.2) получаем, что производная по времени от импульса по этому направлению равна нулю:

$$\frac{d\left(\vec{p},\vec{e}\right)}{dt} = \left(\vec{F},\vec{e}\right) = 0\,,$$

то есть $\left(\vec{p},\vec{e}\right) = Const$ - закон сохранения импульса (по направлению $\vec{e}$). В частности, если $\vec{e}$ - направляющий орт координатной оси, например, Ox , то компонента импульса p_x есть величина постоянная.

Второй закон Ньютона – это уравнения движения материальной точки. Они представляют собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка. В координатной форме уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y\,. \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned}$$

Если силы, действующие на материальную точку, известны, можно найти ее закон движения, проинтегрировав эти уравнения. При этом нужно задать 6 начальных условий – координаты и скорость точки в начальный момент времени.

II. *Теорема об изменении кинетического момента.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Кинетическим моментом, или моментом количества движения* $\vec{K}$ *относительно точки (полюса) O называется векторное произведение радиус-вектора материальной точки на импульс*:

$$\vec{K} = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right].$$

Здесь $\vec{r}$ - вектор с началом в точке *O*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки *O* называется вектор $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$.

ТЕОРЕМА. *Скорость изменения момента количества движения материальной точки равна моменту действующей на точку силы*:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M} . \tag{7.3}$$

Замечание. Кинетический момент и момент силы вычисляются относительно одного и того же полюса *O*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим производную по времени от кинетического момента:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\left[\vec{r}, m\vec{v}\right]}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\overrightarrow{mv}}{dt}\right] = \left[\vec{v}, m\vec{v}\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Так как $\left[\vec{v}, m\vec{v}\right] = 0$, а $\left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}$ - по определению, момент силы $\vec{F}$, получаем закон изменения кинетического момента (7.3).

Если момент силы $\vec{F}$ относительно некоторого центра *O* равен нулю, то кинетический момент материальной точки сохраняется – *закон сохранения кинетического момента*.

ПРИМЕР. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Центральным называется силовое поле, в котором сила направлена в одну точку – центр силового поля:

$$\vec{F} = F \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Так как момент центральной силы относительно центра *O* силового поля равен нулю, получаем, что кинетический момент в центральном поле сохраняется.

III. *Теорема об изменении кинетической энергии.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кинетической энергией материальной точки называется величина $T = \frac{1}{2} m v^2$.

Вычислим производную по времени от кинетической энергии:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v},\vec{v})=m\left(\frac{d\vec{v}}{dt},\vec{v}\right)=\left(\frac{d\,m\vec{v}}{dt},\vec{v}\right)=\left(\vec{F},\frac{d\vec{r}}{dt}\right). \qquad (7.4)$$

Умножив (7.4) на dt , получим

$$dT=\left(\vec{F},d\vec{r}\right). \qquad (7.5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элементарной работой dA силы $\vec{F}=\left(F_x,F_y,F_z\right)$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение

$$dA=\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=F_xdx+F_ydy+F_zdz\ .$$

Таким образом, из (7.5) следует

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. *Дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе силы, приложенной к точке, на элементарном перемещении* $d\vec{r}$:

$$dT=dA. \qquad (7.6)$$

Пусть материальная точка движется по некоторой траектории $\gamma(t)$ из точки *A* в момент времени $t=0$ до точки *B* в момент времени *t*. Проинтегрировав равенство (7.6) вдоль траектории точки, получим *интегральную форму закона изменения кинетической энергии*

$$\Delta T=T(t)-T(0)=\int_\gamma dA=\int_\gamma\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\int_\gamma\left(F_xdx+F_ydy+F_zdz\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина $A=\int_\gamma dA=\int_\gamma\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$ называется полной работой силы $\vec{F}$ вдоль траектории γ .

Таким образом, *приращение кинетической энергии материальной точки за конечное время t равно работе силы вдоль траектории точки за это время*.

Вообще говоря, работа силы на пути из точки *A* в точку *B* зависит от пути интегрирования.

Пусть теперь $\vec{F}(x,y,z)$ - стационарное потенциальное силовое поле, т.е. $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,U$, где $U(x,y,z)$ – потенциальная энергия поля. Тогда элементарная работа представляет собой полный дифференциал:

$$dA=F_xdx+F_ydy+F_zdz=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=-dU\ . \qquad (7.7)$$

Полная работа в этом случае равна

$$A=-\int_\gamma dU=-U(B)+U(A)\,,$$

то есть зависит только от начального и конечного положения материальной точки, но не от траектории. В частности, *работа на замкнутом пути потенциальной силы равна нулю*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скалярная величина $E = T + U$ называется *полной механической энергией* материальной точки.

Из (7.6) и (7.7) получаем, что $dT + dU = 0$, т.е.

$$E = T + U = Const = h. \tag{7.8}$$

Мы доказали теорему:

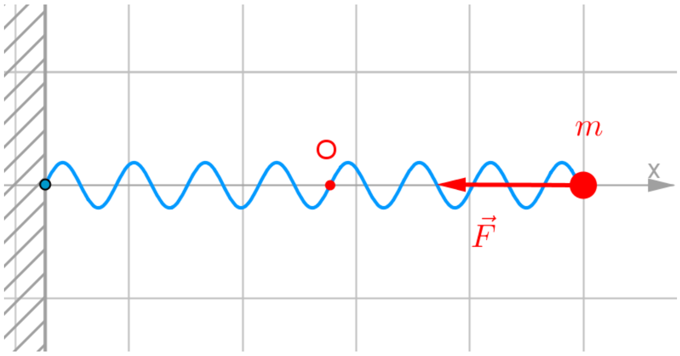
ТЕОРЕМА (ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ). *В стационарном потенциальном поле полная механическая энергия сохраняется.*

Равенство (7.8) называется интегралом *энергии* (так как это – первый интеграл уравнений движения).

ПРИМЕРЫ.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальной точки (груза) массы *m*, прикрепленной на конце пружины жесткости *k*. Система имеет одну степень свободы, так как материальная точка может перемещаться только по прямой. Точка *O* соответствует положению груза, при котором пружина не деформирована. Выберем ее за начало отсчета. Тогда положение груза определяется координатой *x*, соответствующей деформации пружины – растяжению или сжатию. На груз действует сила упругости $F = -kx$. Уравнение движения (второй закон Ньютона)



$$m\ddot{x} = -kx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- *уравнение гармонического осциллятора*. Общее решение этого уравнения

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - частота колебаний, а константы *A* и *B* определяются из начальных условий.

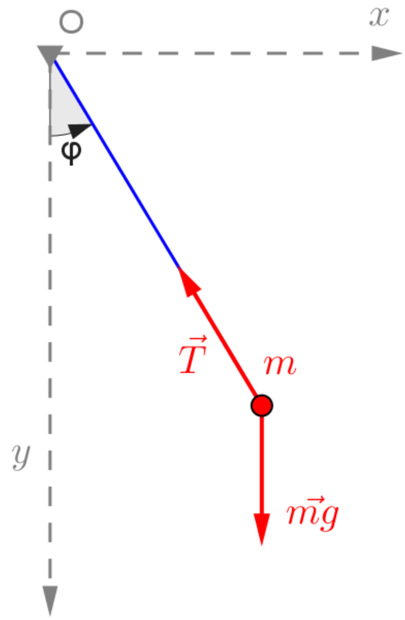
Гармонический осциллятор – консервативная система, т.е. в ней выполняется закон сохранения энергии.

Потенциальная энергия силы упругости равна $U=\frac{kx^2}{2}$. Кинетическая энергия груза равна $T=\frac{m\dot{x}^2}{2}$. Закон сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=h=Const.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из материальной точки массы *m*, подвешенной на нерастяжимой нити длины *l* в поле силы тяжести. Будем считать, что задача плоская – движение груза происходит только в плоскости Oxy. Такая механическая система называется математическим маятником.



На груз действует сила тяжести $\vec{F}=\overrightarrow{mg}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в векторной форме запишется как

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\overrightarrow{mg}+\vec{T}.$$

Спроектируем на оси координат:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-T\sin\varphi \\ m\ddot{y}=mg-T\cos\varphi \end{cases}. \qquad (7.9)$$

Положение материальной точки определяется одним параметром – углом φ отклонения маятника от вертикали. Декартовы координаты точки выражаются через φ как

$$x=l\sin\varphi,\quad y=l\cos\varphi.$$

Продифференцировав по времени, получим выражения для компонент скорости

$$\dot{x}=l\dot{\varphi}\cos\varphi,\quad \dot{y}=-l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Продифференцируем еще раз и найдем выражения для компонент ускорения

$$\begin{aligned} \ddot{x}&=l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) \\ \ddot{y}&=l\left(-\ddot{\varphi}\sin\varphi-\dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) \end{aligned}.$$

Подставим это в систему (7.9), получим

$$\begin{cases} ml\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right) = -T\sin\varphi \\ ml\left(-\ddot{\varphi}\sin\varphi - \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) = mg - T\cos\varphi \end{cases} \tag{7.10}$$

Силу натяжения *T* мы не знаем. Поэтому, чтобы получить уравнения движения материальной точки, исключим ее. Для этого умножим первое уравнение системы (7.10) на $\cos\varphi$, второе – на $\sin\varphi$ и вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{7.11}$$

- *уравнение математического маятника*.

Чтобы выразить силу реакции *T*, умножим первое уравнение системы (7.10) на $-\sin\varphi$, второе – на $-\cos\varphi$ и сложим, получим

$$T = mg\cos\varphi + ml\dot{\varphi}^2.$$

Математический маятник – консервативная система, т.е. в ней выполняется закон сохранения полной механической энергии. Действительно, сила тяжести $\vec{F} = \overrightarrow{mg} = (0; mg)$ потенциальна. Потенциальная энергия равна $U = -mgy$. Работа силы натяжения $\vec{T}$ равна нулю, так как материальная точка движется по окружности, следовательно, $\vec{T} \perp d\vec{r}$ и $dA = \left(\vec{T}, d\vec{r}\right) = 0$. Поэтому

$$T + U = \frac{mv^2}{2} - mgy = h = Const.$$

Скорость материальной точки равна $v = l\dot{\varphi}$. Поэтому интеграл энергии имеет вид

$$\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = h. \tag{7.12}$$

Заметим, что (7.12) можно получить и непосредственно из уравнения (7.11). Действительно, умножим уравнение (7.11) на $\dot{\varphi}$ и проинтегрируем. Получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{l}\cos\varphi = Const,$$

что совпадает с (7.12) с точностью до множителя.

Вообще, то, что в физике называют законами сохранения, на языке математики называется первыми интегралами уравнений движения , т.е. функциями, постоянными на решениях уравнения.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.

Второй закон Ньютона и, соответственно, основные теоремы динамики как следствия из него формулируются для инерциальных систем отсчета.

Пусть теперь, кроме абсолютной, инерциальной системы отсчета, есть относительная система отсчета, которая движется произвольным образом относительно абсолютной, то есть, вообще говоря, не инерциальна, и материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета. Выведем уравнения ее движения в неинерциальной (относительной) системе отсчета.

В абсолютной, инерциальной системе отсчета, выполняется второй закон Ньютона и уравнения движения имеют вид

$$m\vec{a}_{abs} = \vec{F} \,. \tag{7.13}$$

Согласно формуле сложения ускорений,

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{otn} + \vec{a}_{per} + \vec{a}_{kor} = \vec{a}_{otn} + \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,'] + \left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,']\right] + 2[\vec{\omega}, \vec{v}_{otn}] \,.$$

Подставим выражение для абсолютной скорости в (7.13) и запишем в виде

$$m\vec{a}_{otn} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,'] - m\left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,']\right] - 2m[\vec{\omega}, \vec{v}_{otn}] \,.$$

Если мы хотим, чтобы второй закон Ньютона выполнялся и в неинерциальных системах отсчета, мы должны допустить, что в *неинерциальной системе отсчета на материальную точку действуют дополнительные силы*, которые называются *силами инерции*. Тогда второй закон Ньютона в неинерциальной системе запишется как

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{F}_{vr} + \vec{F}_c + \vec{F}_{kor} \,,$$

где $\vec{a} = \vec{a}_{otn}$ - ускорение точки в неинерциальной системе отсчета;

$\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$ - сила инерции поступательного движения;

$\vec{F}_{vr} = -m[\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,]$ - сила инерции вращения;

$\vec{F}_c = -m\left[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,]\right]$ - центробежная сила;

$\vec{F}_{kor} = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}\,]$ - сила Кориолиса;

$\vec{v} = \vec{v}_{otn}$ - скорость точки в неинерциальной системе отсчета;

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки в неинерциальной системе отсчета.