Оглавление

Теоретические вопросы

Типовой расчет №1 охватывает следующие темы:

1. Определители (см. [2; гл.1, §§1-6], [3; гл. 3, §§1, 4.1], [4; гл. I, §§2, 3, гл. VI, §§1, 2])

1.1. *Свойства определителей.* Понятие определителя n-го порядка. Правило Саррюса для $n = 2, 3$. Основные свойства определителей.

1.2. *Разложение определителя по строке и столбцу.* Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке и столбцу и следствие из него. Треугольный и диагональный определители. Определитель Вандермонда. Решение систем по правилу Крамера.

2. Комплексные числа и многочлены (см. [1; §§5.3-5.5]; [2; гл. II §2]; [3; гл.1 §5])

2.1. *Понятие комплексного числа (к.ч.)* Определение комплексных чисел и действия с ними. Алгебраическая запись к.ч., его геометрическое изображение. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма к.ч. Умножение, деление к.ч. в тригонометрической форме.

2.2. *Комплексные числа в показательной форме.* Формулы Эйлера, показательная форма к.ч. Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня из к.ч. в показательной форме. Сопряжение к.ч. и его свойства. Формула Муавра.

2.3. *Разложение многочленов на множители.* Сложение и умножение многочленов. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Кратность корня. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с вещественными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение многочлена на линейные множители.

3. Алгебра матриц (см. [2; гл. 1 §§7, 8]; [3; гл. 3 §2]; [4; гл. V §3])

3.1. *Умножение матриц.* Сложение матриц и умножение их на числа. Умножение матриц и его свойства (роль единичной матрицы, дистрибутивность, транспонирование произведения, ассоциативность). Свойства умножения квадратных матриц. Теорема об определителе квадратных матриц.

3.2. *Обратная матрица.* Определение обратной матрицы и ее свойства (единственность, обратная матрица для произведения). Критерий существования и вычисление обратной матрицы. Решение с ее помощью матричных уравнений и систем линейных уравнений.

4. Линейные пространства (см. [2; гл.II §§3, 4], [3; гл. 4 §1], [4; гл.V §2])

4.1. *Понятие линейного пространства.* Аксиомы линейного пространства и следствия из них. Примеры линейных пространств: V^3, R^n, P_n, M_{mn}, $C[\alpha, \beta]$. Линейное подпространство, линейная оболочка системы векторов.

4.2. *Линейная зависимость и независимость системы векторов.* Свойства линейной зависимости и независимости. Критерий линейной зависимости. Геометрический смысл линейной зависимости двух и трех геометрических векторов.

4.3. *Ранг системы векторов.* Определение ранга и базы для системы векторов. Линейная оболочка системы и ее базы, их совпадение. Сохранение ранга системы при добавлении к ней вектора из линейной оболочки. Критерий базы.

4.4. *Сохранение ранга системы векторов при элементарных преобразованиях.* Взаимосвязь рангов двух систем, когда векторы одной системы линейно выражаются через векторы другой. Элементарные преобразования системы векторов и сохранение ранга системы при их выполнении.

4.5. *Базис и размерность линейного пространства.* Определение базиса и размерности. Критерий базисности системы векторов (линейная независимость и полнота). Примеры линейных пространств и базисы в них (V^3, R^n, P_n, M_{mn}). Пример бесконечномерного линейного пространства.

4.6. *Координаты векторов в базисе.* Однозначность разложения вектора по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатах.

4.7. *Линейное подпространство и линейная оболочка системы векторов* (как подпространство). Базис и размерность линейной оболочки и подпространства. Дополнение базиса подпространства до базиса линейного пространства.

Типовой расчет №2 охватывает следующие темы:

5. Теория систем линейных уравнений (см. [2; гл.1 §§9-11], [3; гл. 3 §§3,4], [4; гл.VII §§1-3])

5.1. *Ранг матрицы.* Понятие ранга матрицы. Сохранение его при транспонировании. Теорема о базисном миноре. Критерий равенства определителя нулю. Совпадение ранга матрицы с рангом системы строк (столбцов) матрицы.

5.2. *Приведение матрицы к ступенчатому и простейшему виду.* Сохранение ранга матрицы при элементарных преобразованиях. Матрица ступенчатого вида и ее ранг. Приведение матрицы к ступенчатому виду (прямой ход метода Гаусса). Приведение ступенчатой матрицы к простейшему виду (обратный ход метода Гаусса).

5.3. *Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.* Матрица системы и ее расширенная матрица. Элементарные преобразования системы и ее расширенной матрицы по методу Гаусса. Критерий совместности системы (теорема Кронекера-Капелли) и единственности решения.

5.4. *Построение общего решения однородной системы.* Критерий существования ненулевых решений однородной системы линейных уравнений (выделить случай квадратной системы). Линейное пространство решений однородной системы, его размерность и базис (фундаментальная система решений). Структура общего решения.

6. Линейные операторы (см. [2; гл. III, §§1-4, 6-9], [3; гл. IV, §2], [4; гл. IX, §§5,6])

6.1. *Линейные операторы и их матрицы.* Понятие линейного оператора, его свойства и примеры. Матрица линейного оператора в данном базисе. Векторно-матричная запись действия линейного оператора.

6.2. *Действия с операторами и их матрицами.* Умножение линейных операторов на число, сложение и умножение операторов. Соответствующие действия с матрицами операторов. Обратный оператор и обратная матрица.

6.3. *Замена базиса.* Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

6.4. *Матрицы линейного оператора в разных базисах.* Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Подобие матриц и его свойства. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора при замене базиса.

6.5. *Собственные значения и собственные векторы.* Понятия собственного значения и собственного вектора линейного оператора, их общие свойства. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям. Оператор простого типа, диагонализуемость его матрицы. Достаточное условие оператора простого типа. Пример оператора непростого типа.

6.6. *Нахождение собственных значений и собственных векторов.* Характеристический многочлен, нахождение собственных значений и собственных векторов с помощью характеристического уравнения. Инвариантность собственных значений, следа и определителя матрицы линейного оператора.

7. Билинейные и квадратичные формы (см. [2; гл. VI, §§1-5], [3; гл. IV, §3], [4; гл. IX, §§2-4])

7.1. *Билинейная форма и ее матрица.* Понятие билинейной формы. Матрица формы. Координатная и векторно-матричная запись формы. Преобразование матрицы формы при замене базиса. Квадратичная форма, порожденная симметричной билинейной формой, ее координатная и векторно-матричная запись.

7.2. *Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду.* Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Приведение формы к каноническому виду методом Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы формы, ранг формы.

7.3. *Знакоопределенная квадратичная форма*, ее индексы и ранг. Критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы.

8. Евклидовы пространства (см. [2; гл. IV, §§1-3, гл. V, §§2-4], [3; гл. IV, §§1, 2], [4; гл. X, §§1-4])

8.1. *Евклидово пространство.* Евклидово скалярное произведение. Примеры евклидовых пространств. Неравенство Коши-Буняковского. Длины векторов и углы между ними. Свойства длины вектора.

8.2. *Матрица Грама.* Матрица Грама скалярного произведения, его координатная и векторно-матричная записи. Критерий матрицы Грама. Преобразование матрицы Грама при замене базиса.

8.3. *Ортонормированный базис.* Линейная независимость ортогональной системы векторов. Ортогональный и ортонормированный базисы. Запись матрицы Грама, скалярного произведения, длины вектора в ортогональном и ортонормированном базисах. Метод ортогонализации базиса.

8.4. *Сопряженные и самосопряженные операторы.* Их матрицы.

8.5. *Ортогональное преобразование.* Его матрица, свойства. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Указания по выполнению и сдаче типового расчета

1. Типовой расчет состоит из трех разделов: “Теоретические упражнения”; “Практические задания”; “Контрольные вопросы”.

2. В начале раздела “*Теоретические упражнения*” приведена таблица распределения упражнений по вариантам. Указанные в ней упражнения выполняются студентом письменно; кроме того, студент должен быть готов к выполнению остальных упражнений при сдаче типового расчета.

3. Все **практические задания** выполняются студентом **письменно** в соответствии с определенным вариантом.

4. При сдаче типового расчета студенту предлагаются некоторые *контрольные вопросы* из приведенного списка.

5. При сдаче типового расчета обязательным является знание *основных определений и формулировок теорем* по перечисленным выше темам.

6. По результатам сдачи типового расчета студенту выставляется оценка.

7. Знаком “*” помечены дополнительные теоретические упражнения, практические задания и контрольные вопросы. Они рассчитаны на студентов, претендующих на отличную оценку, и не являются обязательными для остальных студентов.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №1

Теоретические упражнения

Упражнения 1, 4, 5, 6 - для всех вариантов; остальные задачи распределяются преподавателем.

1. Вывести формулу Саррюса для вычисления определителя третьего порядка, исходя из общего определения.

2. Вывести формулы Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными, опираясь на теорему о разложении определителя по строкам и столбцам.

3. Доказать следующие следствия из аксиом линейного пространства L:

а) единственность противоположного элемента;

б) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для любого $\alpha \in R$;

в) $(-\alpha)\vec{x} = -\alpha\vec{x}$; $\alpha(-\vec{x}) = -\alpha\vec{x}$ для любых $\alpha \in R,\ \vec{x} \in L$;

г) $(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$; $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}$ для любых $\alpha \in R$; $\vec{x},\ \vec{y} \in L$.

4. Доказать, что линейно зависима всякая система векторов, которая содержит: а) нулевой вектор; б) два равных вектора; в) два пропорциональных вектора; г) линейно зависимую подсистему. Какое из этих утверждений самое общее? Показать, что всякая подсистема линейно независимой системы тоже линейно независима.

5. Найти размерность и указать какой-нибудь базис линейного пространства M_{mn} всех прямоугольных матриц размером $m \times n$.

6. Доказать, что множество M образует линейное подпространство в пространстве всех прямоугольных матриц данного размера:

№ вар.	М - множество всех матриц указанного вида
1-4, 14,17, 27-30	а) решения матричного уравнения $AX = 0$ с данной матрицей A; б) матрицы, перестановочные с данной матрицей A n-го порядка (т.е. $AX = XA$)
5-7, 15,16, 24-26	а) матрицы, антиперестановочные с данной матрицей A n-го порядка (т.е. $AX = -XA$); б) симметричные матрицы n-го порядка (т.е. $X^T = X$)

8, 9, 22,23	а) кососимметричные матрицы n-го порядка (т. е. $X^T = -X$); б) верхнетреугольные матрицы n-го порядка с нулевым следом
10,11, 20,21	а) матрицы n-го порядка с нулевыми суммами элементов вдоль главной и вдоль побочной диагонали; б) матрицы $m \times n$ с одинаковыми суммами элементов вдоль любой строки и вдоль любого столбца
12,13, 18,19	а) матрицы $m \times n$ с нулевыми суммами элементов вдоль любой строки и вдоль любого столбца; б) матрицы $m \times n$ с одинаковыми суммами элементов вдоль любой строки

7. Доказать дистрибутивность умножения прямоугольных матриц: $A(B + C) = AB + AC$.

8. Доказать свойства транспонирования прямоугольных матриц: а) $(A^T)^T = A$; б) $(AB)^T = B^T A^T$;
в) $A = B \cdot B^T$ – симметричная матрица;
г) пусть A, B – симметричные матрицы, тогда
$A \cdot B$ симметрична $\Leftrightarrow AB = BA$;
д*) любую квадратную матрицу A можно единственным образом представить в виде $A = B + C$, где B симметрична, C кососимметрична.

9. Доказать свойства обратной матрицы: а) единственность; б) $(A^{-1})^{-1} = A$; в) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

10*. Пусть $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, – $(n \times n)$ матрица. След матрицы $\operatorname{tr} A$ – это сумма диагональных элементов: $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
а) Доказать, что след произведения не зависит от порядка сомножителей: $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.
б) Доказать, что не существует матриц A и B таких, что $AB - BA = E$, где E – единичная $(n \times n)$-матрица.

11*. Опираясь на теорему о дополнении базиса подпространства до базиса всего пространства, доказать, что для любого подпространства M линейного пространства L существует дополнительное подпространство N, такое, что: а) $M \cap N = \{\vec{0}\}$; б) $\dim M + \dim N = \dim L$; в) любой вектор $\vec{x}$, $\vec{x} \in L$, однозначно представим в виде $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, где $\vec{m} \in M$, $\vec{n} \in N$.

Практические задания

Задача 1. Поверхность второго порядка σ задана своим уравнением в прямоугольной декартовой системе координат.

1) Определить тип поверхности σ.
2) Изобразить поверхность σ.
3) Нарисовать сечения поверхности σ координатными плоскостями. Найти фокусы и асимптоты полученных кривых.
4) Определить, по одну или по разные стороны от поверхности σ лежат точки M_1 и M_2.
5) Определить, сколько точек пересечения с поверхностью σ имеет прямая, проходящая через точки M_1 и M_2.

№	Уравнение поверхности σ	M_1	M_2
$1, 22$	$(x-1)^2+(y+1)^2+2z^2=4$	$1, -1, 1$	$3, 1, 1$
$2, 23$	$2\,(z+1)=2x^2+y^2$	$0, 0, 1$	$-1, -2, -2$
$3, 24$	$(x-1)^2/2+y^2-z^2/4=0$	$1, 2, 0$	$-1, 3, 0$
$4, 25$	$9(x-1)^2+4y^2-36z^2=36$	$1, 0, 0$	$3, 1, 1$
$5, 26$	$x^2+(y+1)^2+2z^2=4$	$0, 0, \sqrt{2}$	$0, 1, \sqrt{2}$
$6, 27$	$2\,(1-z)=2x^2+y^2$	$0, -\sqrt{2}, 4$	$0, 0, 2$
$7, 28$	$2x^2+4\,(y-1)^2-z^2=0$	$0, 1, 0$	$-1, 3, 4$
$8, 29$	$9x^2+4\,(y-1)^2-36z^2=36$	$0, 1, 0$	$3, 1, 4$
$9, 30$	$(x-1)^2+(y+1)^2+2z^2=4$	$1, -1, 0$	$3, -3, 2$
$10, 16$	$36z=4x^2+9\,(y+3)^2$	$1, 2, 3$	$0, -3, 2$
$11, 17$	$2(2-z)=x^2+2y^2$	$0, 0, 2$	$1, 2, 3$
$12, 18$	$2x^2+4y^2=(z-1)^2$	$0, 0, 1$	$3, -2, 1$
$13, 19$	$x^2/4-y^2/9-(z-1)^2=1$	$1, 1, 0$	$2, 1, -1$
$14, 20$	$1-z=x^2/4+y^2/9$	$2, 1, 0$	$2, 1, 8$
$15, 21$	$x^2/4+y^2/9=z^2$	$2, 1, 3$	$2, -1, 4$

Задача 2. Дано комплексное число z.

1) Записать число z в показательной, тригонометрической и алгебраической форме, изобразить его на комплексной плоскости.
2) Записать в показательной, тригонометрической и алгебраической форме число $u=z^n$, где $n=(-1)^N(N+3)$ при $N\leqslant 15$, $n=(-1)^N(N-12)$ при $N\geqslant 16$, N — номер варианта.

3) Записать в показательной и тригонометрической форме каждое значение w_k $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$ корня степени $m = 3$ (нечетные варианты) или $m = 4$ (четные варианты) из числа z.
4) Изобразить число z и числа w_k на одной комплексной плоскости.

N	z	N	z	N	z
1	$\dfrac{1+3i\sqrt{3}}{3-5i\sqrt{3}}$	2	$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3-3i\sqrt{3}}$	3	$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{3-3i}$
4	$\dfrac{-2+10i}{3-2i}$	5	$\dfrac{-5+5i}{3-i\sqrt{3}}$	6	$\dfrac{-5+5i}{2-2i\sqrt{3}}$
7	$\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{50}}{\sqrt{15}+i\sqrt{20}}$	8	$\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{18}}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})+i(\sqrt{15}+\sqrt{5})}$	9	$\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{6}}{\sqrt{30}+i\sqrt{10}}$
10	$\dfrac{-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$	11	$\dfrac{-\sqrt{3}-3i}{1+i}$	12	$\dfrac{-3-3i}{1+i\sqrt{3}}$
13	$\dfrac{\sqrt{11}+i\sqrt{33}}{\sqrt{21}+i\sqrt{7}}$	14	$\dfrac{\sqrt{11}+i\sqrt{11}}{(\sqrt{21}-\sqrt{7})+i(\sqrt{21}+\sqrt{7})}$	15	$\dfrac{\sqrt{11}+i\sqrt{33}}{\sqrt{7}+i\sqrt{7}}$
16	$\dfrac{-7\sqrt{3}-7i}{\sqrt{3}-i}$	17	$\dfrac{-7-i\sqrt{3}}{6-i\sqrt{3}}$	18	$\dfrac{-7-7i\sqrt{3}}{1-i}$
19	$\dfrac{3+i}{6-3i}$	20	$\dfrac{4+4i}{3-3i\sqrt{3}}$	21	$\dfrac{4+4i}{3-i\sqrt{3}}$
22	$\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{18}}{\sqrt{5}-i\sqrt{20}}$	23	$\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{(\sqrt{15}-\sqrt{5})-i(\sqrt{15}+\sqrt{5})}$	24	$\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{15}-i\sqrt{5}}$
25	$\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$	26	$\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$	27	$\dfrac{1+i}{1-i\sqrt{3}}$
28	$\dfrac{-\sqrt{39}+i\sqrt{13}}{\sqrt{7}-i\sqrt{21}}$	29	$\dfrac{-\sqrt{39}+i\sqrt{13}}{(\sqrt{21}-\sqrt{7})-i(\sqrt{21}+\sqrt{7})}$	30	$\dfrac{-\sqrt{39}+i\sqrt{13}}{\sqrt{7}-i\sqrt{7}}$

Задача 3. Дан многочлен $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$.

1) Найти все корни многочлена $p(z)$. Записать каждый корень в алгебраической форме, указать его алгебраическую кратность.
2) Разложить многочлен $p(z)$ на неприводимые множители: а) в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел; б) в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел.

№	a	b	c	d	e	№	a	b	c	d	e
1	3	-1	-7	-5	-2	2	1	3	1	0	4
3	1	2	-10	-11	-12	4	2	11	13	-3	9
5	5	-8	3	-2	2	6	1	1	10	9	9
7	4	20	41	40	16	8	4	4	5	2	1
9	5	-2	22	-8	8	10	3	-5	6	-3	1
11	1	0	2	0	4	12	1	0	$4\sqrt{3}$	0	12
13	9	0	-6	0	4	14	1	0	$3\sqrt{3}$	0	-12
15	4	0	-2	0	1	16	1	-3	-8	-9	-5
17	1	1	-3	-4	-4	18	1	1	-2	-4	-8
19	1	2	-7	-18	-18	20	1	-3	-5	-21	-20
21	3	-1	5	3	2	22	1	2	7	6	5
23	1	3	8	8	8	24	1	1	10	9	9
25	1	-2	8	3	18	26	1	0	1	0	1
27	1	0	3	0	9	28	1	0	-1	0	1
29	1	0	-9	0	81	30	1	0	4	0	16

Указания.

1) В вариантах 1–5, 16–20 найти целые корни многочлена.
2) В вариантах 6–10, 21–25 известен корень z_1:

№	6	7	8	9	10
z_1	$3i$	$\dfrac{-5-i\sqrt{7}}{4}$	$\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}$	$-2i$	$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$
№	21	22	23	24	25
z_1	$\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$	$\dfrac{-1+i\sqrt{19}}{2}$	$-1+i\sqrt{3}$	$\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3+3i\sqrt{3}}{2}$

Задача 4. Пусть P_n — линейное пространство многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами. Множество $M \subset P_n$ состоит из всех тех многочленов $p(t)$, которые удовлетворяют указанным условиям.

1) Доказать, что множество M – подпространство в P_n.
2) Найти размерность и какой-либо базис подпространства M.
3) Дополнить базис подпространства M до базиса P_n.

Замечание. Знак $p(t) \vdots q(t)$ означает, что многочлен $p(t)$ делится на многочлен $q(t)$ без остатка.

№	n	Условия на $p(t) \in M$	№	n	Условия на $p(t) \in M$
1	3	$p(-1) = p(1)$	2	3	$p'(-1) = p'(1)$
3	3	$p(-2) = 0$	4	4	$p(-2) = p(3) = 0$
5	4	$p(2-i) = 0$	6	3	$p'(1) = 0$
7	3	$p(0) + p'(-1) = 0$	8	4	$p(i-1) = 0$
9	4	$p(t) \vdots (t-3)^2$	10	3	$p''(1) = 0$
11	4	$p(t) \vdots (t^2+t+1)$	12	3	$p(1) = p(2) = 0$
13	3	$2p(0) + p(1) = 0$	14	3	$p(-1) + p(0) + p(1) = 0$
15	3	$p(0) + p'(2) = 0$	16	3	$p(2) = p(-2)$
17	4	$p(1) = p''(0) = 0$	18	3	$p(2) = 0$
19	4	$p(2) = p'(0) = 0$	20	4	$p(1+i) = 0$
21	3	$p'(-1) = 0$	22	3	$p'(0) + p(1) = 0$
23	4	$p(2+i) = 0$	24	4	$p(-1) = p'(-1) = 0$
25	3	$p''(1) + p'(0) = 0$	26	4	$p(t) \vdots (t^2+4t+5)$
27	3	$p(-1) + p''(0) = 0$	28	3	$p(-1) = 2p(0)$
29	3	$p(-1) + p'(0) + p(1) = 0$	30	4	$p''(0) = p(-1) = 0$

Задача 5. Доказать, что множество M образует подпространство в пространстве $M_{m \times n}$ всех матриц данного размера. Найти размерность и построить базис M. Проверить, что матрица B принадлежит M и разложить ее по базису в M.

№	M – множество матриц указанного вида	B
1	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2	Решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
3	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

№	M – множество матриц указанного вида	B
4	Матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$
5	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-1&-3\\-1&1&0\end{pmatrix}$
6	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-2&3\\0&-2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$
7	Симметричные матрицы 3-го порядка	$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$
8	Кососимметричные матрицы 3-го порядка	$\begin{pmatrix}0&3&-1\\-3&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
9	Верхнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом	$\begin{pmatrix}1&4&0\\0&-2&2\\0&0&1\end{pmatrix}$
10	Матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов вдоль главной и побочной диагоналей	$\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&0&2\\0&4&-3\end{pmatrix}$
11	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов вдоль любой строки и вдоль любого столбца одинаковы	$\begin{pmatrix}2&-3&3\\-1&1&2\\1&4&-3\end{pmatrix}$
12	Матрицы 3-го порядка, у которых суммы элементов вдоль любой строки и вдоль любого столбца равны нулю	$\begin{pmatrix}3&0&-3\\-2&4&-2\\-1&-4&5\end{pmatrix}$
13	Матрицы (2×3), у которых суммы элементов в обеих строках одинаковы	$\begin{pmatrix}4&7&-8\\-3&3&3\end{pmatrix}$
14	Матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$
15	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&3\\-1&-3&-2\end{pmatrix}$

№	M – множество матриц указанного вида	B
16	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
17	Решения матричного уравнения $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
18	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
19	Матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
20	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
21	Матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
22	Симметричные матрицы 3-го порядка с нулевыми суммами элементов из первого и третьего столбцов	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
23	Кососимметричные матрицы 3-го порядка с нулевой суммой элементов из первой строки	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
24	Нижнетреугольные матрицы 3-го порядка с нулевым следом и нулевой суммой элементов по побочной диагонали	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
25	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов в строках, а суммы элементов в столбцах знакочередуются	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
26	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых одинаковы суммы элементов в столбцах, а суммы элементов в строках знакочередуются	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

№	M – множество матриц указанного вида	B
27	Симметричные матрицы 3-го порядка, у которых сумма элементов любого столбца равна 0	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
28	Матрицы 3×2, у которых суммы элементов в обоих столбцах равны 0	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
29	Симметричные матрицы, перестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
30	Симметричные матрицы, антиперестановочные с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 6*. Доказать, что множество M функций $x\,(t)$, заданных на области D, образует линейное пространство. Найти его размерность и базис.

№вар.	Множество M ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - любые вещественные числа)	D
1, 18	$M = \{\alpha + \beta \mathrm{ch} t + \gamma \mathrm{sh} t + \delta e^t\}$	$(-\infty; +\infty)$
2, 19	$M = \{\alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{3t}\}$	$(-\infty; +\infty)$
3, 20	$M = \{\alpha + \beta \cos t + \gamma \sin t + \delta \cos^2(t/2)\}$	$(-\pi; \pi)$
4, 21	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta \mathrm{sh} t + \gamma e^t + \delta\}$	$(-\infty; +\infty)$
5, 22	$M = \{\alpha e^t + \beta t e^t + (\beta - \alpha) t^2 e^t + \gamma t^3 e^t\}$	$(-\infty; +\infty)$
6, 23	$M = \{\alpha / t + \beta + \gamma t + \delta (2t^2 - 1)/2\}$	$(0; 1)$
7, 24	$M = \{\alpha \cos t + \beta \sin t + \gamma \sin 2t\}$	$(-\pi/2, \pi/2)$
8, 25	$M = \{\alpha + \beta \mathrm{tg} t + \gamma \mathrm{ctg} t\}$	$(0, \pi/2)$
9, 26	$M = \{\alpha e^{-t} + \beta \mathrm{ch} t + \gamma \mathrm{sh} t + \delta\}$	$(-\infty; +\infty)$
10, 27	$M = \{\alpha e^{-t} + (\beta - \alpha) t e^{-t} + \gamma t^2 e^{-t} + \alpha t^3 e^{-t}\}$	$(-\infty; +\infty)$
11, 28	$M = \{\alpha \cos 2t + \beta \sin 2t + \gamma \sin^2 t + \delta\}$	$(-\pi/2, \pi/2)$
12, 29	$M = \{\alpha \ln t + \beta + \gamma t + \delta \ln 3t\}$	$(0; +\infty)$
13, 30	$M = \{\alpha + \beta \mathrm{tg}^2 t + \gamma \sec^2 t + \delta \mathrm{ctg}^2 t\}$	$(0; \pi/2)$
14, 16	$M = \{\alpha \ln t + \beta + \gamma \ln(2/t)\}$	$(0; +\infty)$
15, 17	$M = \{\alpha e^{2t} + \beta t e^{2t} + \gamma t^2 e^{2t} + \delta t^3 e^{2t}\}$	$(-\infty; +\infty)$

Задача 7. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Лучи OA, OB и OC являются ребрами трехгранного угла T.

1) Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы.
2) Разложить вектор $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (возникающую при этом систему уравнений решить с помощью обратной матрицы).
3) Определить, лежит ли точка D внутри T, вне T, на одной из границ T (на какой?).
4) Определить, при каких значениях действительного параметра λ вектор $\vec{d}+\lambda\vec{a}$, отложенный от точки O, лежит внутри трехгранного угла T.

№	1, 19	2, 20	3, 21	4, 22	5, 23	6, 24	7, 25	8, 26
a	1 1 2	1 3 2	2 4 1	1 2 -1	1 -2 5	1 2 1	3 2 1	2 1 3
b	2 -1 2	-2 1 -1	1 3 -5	1 -1 3	3 1 -2	-1 2 2	1 -1 -2	-1 -2 1
c	-1 3 1	5 -2 3	1 2 1	2 2 1	2 -1 3	3 1 -1	-2 3 5	3 5 -2
d	3 4 7	10 -7 5	-1 -1 -4	2 -5 11	6 3 -5	7 3 -2	7 4 1	18 23 1

№	9, 27	10, 28	11, 29	12, 30	13, 16	14, 17	15, 18
a	2 -1 1	-2 1 5	2 1 1	4 3 2	1 4 2	-1 1 2	5 1 -2
b	-1 3 1	1 3 -2	2 2 -1	3 -5 1	-5 3 1	3 1 -1	-2 3 1
c	2 1 2	-1 2 3	1 -1 3	2 1 1	1 2 1	1 2 2	3 2 -1
d	1 18 11	-1 14 5	4 2 1	4 -1 2	-3 20 9	15 4 -6	7 15 -2

Контрольные вопросы

1. Определители

1.1. Как вычисляются определители 2-го, 3-го порядков? Каковы их основные свойства?

1.2. Что называется перестановкой? Что такое инверсия в перестановке? Какие перестановки называются четными (нечетными)? Каково общее число перестановок натуральных чисел от 1 до n? Каково количество четных (нечетных) перестановок?

1.3. Что называется определителем n-го порядка? Каковы его свойства?

1.4. Входят ли в определитель 5-го порядка следующие произведения: а) $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$; б) $a_{32}a_{13}a_{25}a_{51}a_{44}$; в) $a_{23}a_{12}a_{41}a_{15}a_{34}$?
Если да, то с какими знаками?

1.5. Чем отличается минор данного элемента от его алгебраического дополнения? Сравните M_{12} и A_{12}; M_{33} и A_{33}.

1.6. Фиксирована строка определителя. Что произойдет с минорами ее элементов, если: а) умножить элементы этой строки на число; б) умножить элементы другой строки на число; в) заменить элементы этой строки нулями; г) заменить элементы другой строки нулями; д) заменить элементы этой строки на любые другие числа? Объясните результат. Ответьте на аналогичные вопросы об алгебраических дополнениях.

1.7. Что такое треугольная матрица, диагональная матрица? Чему равен определитель треугольной, диагональной матрицы? Объясните результат.

1.8. Сформулируйте теорему о разложении определителя по строке. Чему равна сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца)?

1.9. Сформулируйте правила Крамера. Всегда ли они применимы?

2. Комплексные числа и многочлены

2.1. Что такое модуль, аргумент, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа? Как записать в тригонометрической и показательной формах числа: $1,\ -1,\ i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i,\ -1+i\sqrt{3}$?

2.2. Как производится умножение и деление комплексных чисел в алгебраической и тригонометрической формах?

2.3. Что такое операция сопряжения? Каковы ее свойства?

2.4. Приведите формулу Муавра.

2.5. Сколько значений принимает корень n-й степени из комплексного числа? Как они вычисляются? Как эти значения располагаются на комплексной плоскости и почему?

2.6. Как изобразить на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условиям: а) $\operatorname{Re} z \geqslant 0$; б) $|\operatorname{Im} z| \leqslant 2$; в) $|z| \leqslant 1$; г) $0,5 < |z+i| \leqslant 1$; д) $0 < \arg z \leqslant \pi/4$; е) $|z-i| = |z+2|$?

2.7. Как формулируется теорема Безу, основная теорема алгебры многочленов? Сколько корней у многочлена степени n?

2.8. Многочлен $P(z)$ со старшим коэффициентом $P_0 = 2$ имеет корни $z_1 = 1$ кратности 3 и $z_{2,3} = 1 \pm i$ кратности 2. Выпишите этот многочлен. Объясните результат.

2.9. Многочлен с вещественными коэффициентами имеет корень $z = 2+i$. На какой квадратный трехчлен он делится? Объясните результат.

3. Алгебра матриц

3.1. Сформулируйте правило умножения матриц. Объясните, как изменится произведение AB, если переставить i-ю и j-ю строки матрицы A; i-й и j-й столбцы матрицы B? Чему равна i-я строка AB; j-й столбец AB?

3.2. Покажите, что если $AB = BA$, то A и B — квадратные матрицы одного порядка. Верно ли обратное?

3.3. Верны ли формулы $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ для квадратных матриц?

3.4. Что такое обратная матрица? Каков критерий ее существования, как она вычисляется? Выделите случай матриц 2-го порядка.

3.5. Чему равно произведение двух диагональных матриц? Как найти обратную матрицу для диагональной матрицы?

3.6. Как решить матричное уравнение вида $AXB = C$, где X – неизвестная матрица; A, B – невырожденные квадратные матрицы? Как получить отсюда решение уравнения $AX = C$; уравнения $XB = C$?

3.7*. Верна ли формула $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$?

3.8. Пусть $E_{ij} \in M_{nn}$ – матрица, у которой на (i, j) месте стоит 1, а на остальных местах – нули. Доказать, что

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} 0, \text{ если } j \neq k \\ E_{il}, \text{ если } j = k \end{cases}.$$

3.9*. Привести пример ненулевой матрицы X, удовлетворяющей условию $X^2 = 0$; условию $X^2 = X$. Существуют ли такие примеры с $\det X \neq 0$?

3.10*. Матрица X удовлетворяет условию: а) $X^2 = E$, б) $X^3 = E$, где E – единичная матрица. Чему может равняться $\det X$? Привести пример таких недиагональных матриц.

4. Линейные пространства

4.1. Что называется линейным пространством? Приведите примеры линейных пространств.

4.2. Являются ли линейными пространствами:

а) множество геометрических радиус-векторов, оканчивающихся на данной плоскости;

б) множество всех сходящихся последовательностей; последовательностей, сходящихся к числу a; расходящихся последовательностей;

в) множество всех функций, дифференцируемых на интервале (a, b);

г) множество многочленов 3-й степени; степени не выше 3;

д*) множество всех положительных функций с операциями "сложения": $f(t) \cdot g(t)$ и "умножения на число": $f(t)^\alpha$. Объясните результаты.

4.3. Что такое линейное подпространство? Являются ли линейными подпространствами соответствующих линейных пространств множества: а) векторов из R^n, у которых сумма координат равна a; координаты с четными номерами совпадают; координаты - целые числа; б) радиус-векторов плоскости, оканчивающихся в I четверти; в I или III четвертях; в) всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и равных нулю на концах отрезка; г) всех симметричных матриц n-го порядка?

4.4. Что называется линейной оболочкой системы векторов? Является ли она подпространством? Почему?

4.5. Дайте определение линейной зависимости системы векторов. Каков критерий линейной зависимости системы, состоящей из одного вектора; из двух векторов? Объясните свой ответ. Сформулируйте общий критерий линейной зависимости системы векторов.

4.6. Верно ли утверждение: если любые два вектора системы из $n > 2$ векторов линейно независимы, то и вся система линейно независима. Почему?

4.7. Верно ли утверждение: если система содержит вектор, который не выражается линейно через остальные векторы системы, то она линейно независима. Ответ обоснуйте.

4.8. Каков геометрический смысл линейной зависимости системы 2-х векторов; 3-х векторов? Существуют ли линейно независимые системы из 4-х и более геометрических векторов; а линейно зависимые?

4.9. Что такое ранг системы векторов, что такое максимальная линейно независимая подсистема? Как связаны ранги двух систем векторов, одна из которых линейно выражается через другую? Что происходит с рангом системы векторов при выполнении элементарных преобразований?

4.10. Что называется базисом n-мерного линейного пространства? Приведите примеры. Как определяются координаты вектора в данном базисе? Как выражаются линейные операции над векторами в координатах?

4.11. Что такое полная система векторов в линейном пространстве? Сформулируйте теорему об эквивалентном описании базиса как линейно независимой полной системы векторов.

4.12. Что является базисом линейной оболочки системы векторов и какова ее размерность?

4.13. Привести пример одномерного и двухмерного подпространств в пространстве: а) R^3 ; б) M_{23} ; в) P_3.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ №2

Теоретические упражнения

1. Доказать утверждения о связи решений однородной и неоднородной систем линейных уравнений:
а) разность двух решений неоднородной системы является решением однородной системы;
б) сумма решений неоднородной и однородной систем является решением неоднородной системы;

в) общее решение неоднородной системы имеет вид $X = X_0 + X_{\text{ч}}$, где $X_{\text{ч}}$ – частное решение неоднородной системы, X_0 – общее решение однородной системы;
г*) каков геометрический смысл последнего утверждения для системы уравнений с тремя неизвестными?

2. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, причем единственный, многочлен $y = f(x)$ степени не больше 2, для которого $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена меньше 2, равна 1, равна 0?

3. Пусть A – прямоугольная матрица. Докажите, что $r(A) = 1 \Leftrightarrow A = B \cdot C$, где B – вектор-столбец, C – вектор-строка ($r(A)$ – ранг матрицы A; матрицы B, C ненулевые).

4. Пусть A – прямоугольная матрица. Докажите, что всякое элементарное преобразование строк матрицы A можно представить в виде умножения матрицы A слева на некоторую матрицу X, а всякое элементарное преобразование столбцов матрицы A – в виде умножения матрицы A справа на некоторую матрицу Y.

5. Действие оператора $\hat{A}$ в n-мерном пространстве задается формулой преобразования координат векторов в некотором базисе:

$$\bar{y} = \hat{A}\bar{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\hat{A}$ – линейный оператор и найти его матрицу в этом базисе.

6. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор. Доказать, что если $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ – линейно зависимая система, то система $\{\hat{A}\bar{x}_1, ..., \hat{A}\bar{x}_n\}$ тоже линейно зависима. Верно ли обратное?

7. Доказать, что матрицы оператора в двух разных базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица оператора в одном базисе перестановочна с матрицей перехода от этого базиса ко второму.

8. Является ли оператор дифференцирования невырожденным в линейном пространстве L: а) $L = P_n$; б) $L = L[\cos t, \sin t]$?

9*. В пространстве всех многочленов заданы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_1 + a_2 t + \ldots + a_n t^{n-1};$$
$$\hat{B}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_n t^{n+1}.$$

Доказать линейность операторов и проверить, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$, $\hat{B}\hat{A} \neq \hat{I}$.

10. Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ – собственные векторы оператора $\hat{A}$, отвечающие различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$ не является собственным вектором этого оператора.

11. Матрица A удовлетворяет условию $A^2 = I$. Докажите, что всякая подобная ей матрица обладает тем же свойством. Что можно сказать о собственных числах матрицы A? Приведите пример такой недиагональной матрицы.

12. Ненулевая матрица A удовлетворяет условию $A^2 = 0$. Показать, что любая подобная ей матрица удовлетворяет этому условию. Диагонализуема ли матрица A? Каковы ее собственные значения? Привести пример такой матрицы.

13. Функция $B(\bar{x}, \bar{y})$ задается через координаты векторов в некотором базисе n-мерного пространства по формуле:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, ..., x_n) \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{n1} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $B(\bar{x}, \bar{y})$ – билинейная форма; найти ее матрицу в этом базисе.

14. Доказать, что симметричная билинейная форма $B(\bar{x}, \bar{y})$ однозначно восстанавливается по порожденной ею квадратичной форме $\varphi(\bar{x})$ по формуле: $B(\bar{x}, \bar{y}) = [\varphi(\bar{x} + \bar{y}) - \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})]/2$.

15. Доказать, что если ненулевые векторы евклидова пространства $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

16. Доказать, что в евклидовом пространстве справедливо неравенство треугольника: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$. Когда оно превращается в равенство?

17*. Доказать, что если $\hat{A}$ – линейный оператор в n-мерном пространстве, имеющий n различных собственных значений, и $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то $\hat{B}$ обладает базисом из собственных векторов.

18*. Пусть линейный оператор $\hat{A}$ удовлетворяет условию $\hat{A}^2 - \hat{A} + \hat{I} = \hat{0}$. Доказать, что $\hat{A}$ обратим, и выразить $\hat{A}^{-1}$ через $\hat{A}$.

19*. Пусть C – невырожденная матрица. Доказать, что квадратичная форма, заданная в некотором базисе матрицей $B = C^T C$ (см. упр.10), положительно определена.

20*. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – линейные операторы в конечномерном пространстве L такие, что $\hat{A}\hat{B} = \hat{I}$. Доказать, что $\hat{A}$ обратим, и найти $\hat{A}^{-1}$. (Указание: вопрос сводится к аналогичному вопросу для квадратных матриц.) Верно ли аналогичное утверждение в бесконечномерном пространстве?

Практические задания

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

№ вар.	Система уравнений
1, 20	$x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0$ $3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0$ $4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0$ $3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0$
2, 21	$2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0$ $3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0$ $4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0$ $5x_1-10x_2+9x_3+5x_4=0$
3, 22	$3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0$ $6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0$ $9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0$ $3x_1+2x_2+4x_3+8x_4+8x_5=0$
4, 23	$6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0$ $9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0$ $6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0$ $3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0$
5, 24	$x_1-x_3+x_5=0$ $x_2-x_4+x_6=0$ $x_1-x_2+x_5-x_6=0$ $x_1-x_4+x_5=0$
6, 25	$5x_1+6x_2-2x_3+x_4+4x_5=0$ $2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0$ $7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0$ $5x_1+9x_2-3x_3+x_4+6x_5=0$
7, 26	$3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0$ $5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0$ $4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0$ $7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0$
8, 27	$3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0$ $2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0$ $x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0$ $5x_1-x_2-11x_3-3x_4+3x_5=0$
9, 28	$7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0$ $x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0$ $2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0$ $5x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0$

№ вар.	Система уравнений
10, 29	$x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0$ $5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$ $3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0$ $6x_1 + 18x_3 - x_4 + x_5 = 0$
11, 30	$6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0$ $-4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0$ $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0$
12, 16	$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ $4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0$ $3x_1 + 9x_2 - x_3 - 3x_4 = 0$
13, 17	$x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$ $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0$ $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0$
14, 18	$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0$ $3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$ $2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0$
15, 19	$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$ $x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0$ $3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0$

Задача 2. Найти общее решение в зависимости от значения параметра λ. При каких значениях λ система допускает решение с помощью обратной матрицы?

№ вар.	Система уравнений
1	$x_1 + x_2 + (\lambda - 1)x_3 = 1$ $x_1 + (\lambda - 1)x_2 + x_3 = \lambda$ $(\lambda - 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2$

№ вар.	Система уравнений
2	$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3$ $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5$ $x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11$ $4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2$
3	$2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4$ $4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4$ $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7$
4	$\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1$ $x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1$
5	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ $4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$ $6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9$ $\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11$
6	$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$ $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ $6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7$ $8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 = 9$
7	$(1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = \lambda$ $x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = \lambda^2$
8	$(\lambda + 1)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 3\lambda$ $x_1 + (\lambda + 1)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2$ $x_1 + x_2 + (\lambda + 1)x_3 = \lambda^4 + 3\lambda^3$
9	$\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda$ $x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2$
10	$(1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 1$
11	$3x_1 + (\lambda + 8)x_2 + (5\lambda + 8)x_3 = \lambda + 13$ $x_1 + (\lambda + 4)x_2 + (2\lambda + 3)x_3 = \lambda + 6$ $2x_1 + (\lambda + 6)x_2 + (4\lambda + 6)x_3 = \lambda + 10$

№ вар.	Система уравнений
12	$\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda$ $\lambda x_1 + \lambda x_2 + (\lambda-1)x_3 = \lambda$ $(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (2\lambda+3)x_3 = 1$
13	$3x_1 + (\lambda-8)x_2 + (5\lambda-8)x_3 = \lambda+8$ $x_1 + (\lambda-4)x_2 + (2\lambda-3)x_3 = \lambda+2$ $2x_1 + (\lambda-6)x_2 + (4\lambda-6)x_3 = \lambda+6$
14	$2x_1 + 9x_2 - x_3 + 3x_4 = 4$ $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ $3x_1 + 15x_2 - x_3 + 4x_4 = 6$ $x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 5$
15	$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $4x_1 + (\lambda+7)x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5$ $2x_1 + (\lambda+4)x_2 + 5x_3 + x_4 = 4$ $4x_1 + (\lambda+4)x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2$
16	$2\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 1$ $(\lambda-6)x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -3$
17	$x_1 + \lambda x_2 + x_3 - \lambda x_4 = 1$ $2x_1 - x_2 + \lambda x_4 = 0$ $x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$ $3x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 1$
18	$x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2$ $x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1$ $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1$
19	$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$ $3x_1 + (2\lambda+3)x_2 + (\lambda-7)x_3 + (3\lambda+3)x_4 = 2\lambda+3$ $x_1 + (\lambda+1)x_2 - 2x_3 + (\lambda+1)x_4 = \lambda$ $2x_1 + (\lambda+2)x_2 + (\lambda-5)x_3 + (2\lambda+3)x_4 = \lambda+4$

№ вар.	Система уравнений
20	$x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$ $(\lambda+2)x_1 + 2x_3 + (\lambda+4)x_4 = \lambda$ $x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+2)x_3 + 2x_4 = 2$ $2x_1 + (\lambda+1)x_2 + (\lambda+4)x_3 + 4x_4 = 3$
21	$6x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 5$ $9x_1 + (2\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda+6$ $3x_1 + (\lambda-1)x_2 + (\lambda-1)x_3 = 4$
22	$2x_1 + (\lambda+6)x_2 + (\lambda+2)x_3 = \lambda+4$ $x_1 + (\lambda+3)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda+2$ $3x_1 + (2\lambda+8)x_2 + (\lambda+3)x_3 = \lambda+9$
23	$(\lambda-1)x_1 + x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 1$ $x_1 + x_2 + (\lambda-1)x_3 = 1$
24	$(\lambda+2)x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$ $2x_1 + (\lambda+2)x_2 + 2x_3 = 2$ $2x_1 + 2x_2 + (\lambda+2)x_3 = 2$
25	$5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$ $4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1$ $8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9$ $7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda$
26	$(2\lambda+1)x_1 - \lambda x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda-1$ $(\lambda-2)x_1 + (\lambda-1)x_2 + (\lambda-2)x_3 = \lambda$ $(2\lambda-1)x_1 + (\lambda-1)x_2 + (2\lambda-1)x_3 = \lambda$
27	$\lambda x_1 + (2\lambda-1)x_2 + (\lambda+2)x_3 = 1$ $(\lambda-1)x_2 + (\lambda-3)x_3 = 1+\lambda$ $\lambda x_1 + (3\lambda-2)x_2 + (3\lambda+1)x_3 = 2-\lambda$
28	$3\lambda x_1 + (2\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 = \lambda$ $(2\lambda-1)x_1 + (2\lambda-1)x_2 + (\lambda-2)x_3 = \lambda+1$ $(4\lambda-1)x_1 + 3\lambda x_2 + 2\lambda x_3 = 1$

№ вар.	Система уравнений
29	$(2\lambda+1)x_1-\lambda x_2-(\lambda+1)x_3=2\lambda$ $3\lambda x_1-(2\lambda-1)x_2-(3\lambda-1)x_3=\lambda+1$ $(\lambda+2)x_1-x_2-2\lambda x_3=2$
30	$\lambda x_1+x_2+2x_3=\lambda$ $(\lambda+3)x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda$ $3(\lambda+1)x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+3)x_3=3$

Задача 3. Линейный оператор $\hat{A}:\ V^3\to V^3$ определяется действием отображения α на концы радиус-векторов точек трехмерного пространства.

1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в подходящем базисе пространства V^3, а затем в каноническом базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$.
2) Определить, в какую точку переходят точки с координатами (1,0,0) и (-1,2,1) под действием отображения α.

№ вар.	Отображение α
1, 21	отражение относительно плоскости $x+y+z=0$
2, 22	поворот на 180° вокруг оси $x=y=z$
3, 23	проектирование на ось $x=y/2=z$
4, 24	проектирование на плоскость $x+y+z=0$
5, 25	отражение относительно плоскости $x+y-z=0$
6, 26	поворот на 180° вокруг оси $x=y=-z$
7, 27	проектирование на ось $2x=2y=-z$
8, 28	проектирование на плоскость $x-y+z=0$
9, 29	отражение относительно плоскости $x-y+z=0$
10, 30	поворот на 180° вокруг оси $-x=y=z$
11, 16	проектирование на ось $x=2y=2z$
12, 17	проектирование на плоскость $-x+y+z=0$
13, 18	отражение относительно плоскости $-x+y+z=0$
14, 19	поворот на 180° вокруг оси $x=-y=z$
15, 20	проектирование на плоскость $x+y-z=0$

Задача 4. Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ из задачи 3 в каноническом базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\hat{A}$.

Задача 5.

1) Доказать, что оператор $\hat{A}$ является линейным оператором в пространстве P_n многочленов степени не выше n.
2) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе P_n.
3) Существует ли обратный оператор $\hat{A}^{-1}$? Если да, найти его матрицу.
4) Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $\hat{A}$.

№	n	$(\hat{A}p)(t)$	№	n	
$1, 22$	2	$\frac{d}{dt}[(t+1)p(t)]$	$9, 30$	2	$(t+1)p(t+1) - tp(t)$
$2, 23$	2	$\frac{d}{dt}[tp(t+1)]$	$10, 16$	2	$\frac{d}{dt}[(t-2)p(t)]$
$3, 24$	3	$(t+1)\frac{dp(t)}{dt}$	$11, 17$	3	$\frac{d}{dt}\left[t\frac{dp(t)}{dt}\right]$
$4, 25$	3	$t\frac{dp(t+1)}{dt}$	$12, 18$	2	$\frac{d}{dt}[tp(t-2)]$
$5, 26$	3	$p(t) - p(t+2)$	$13, 19$	3	$t\frac{dp(t)}{dt} - p(t+1)$
$6, 27$	3	$3tp(t) - t^2\frac{dp(t)}{dt}$	$14, 20$	2	$(t-2)p(t-2) - tp(t)$
$7, 28$	2	$\frac{d}{dt}[tp(t)] + \frac{d^2p(t)}{dt^2}$	$15, 21$	2	$(2t+1)p(t) + t(1-t)\frac{dp(t)}{dt}$
$8, 29$	3	$6tp(t) - t^3 \cdot \frac{d^2p(t)}{dt^2}$			

Задача 6. Оператор $\hat{A}$ действует на матрицы, образующие линейное подпространство M в пространстве матриц второго порядка.

1) Доказать, что $\hat{A}$ — линейный оператор в M.
2) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в каком-нибудь базисе M.
3) Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $\hat{A}$.
4) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$ (напомним, что в этой задаче векторами являются матрицы).
5) Доказать, что оператор $\hat{A}$ является оператором простого типа. Выписать матрицу оператора $\hat{A}$ в собственном базисе.

№	$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right\}$	$\hat{A}$	B
1, 16	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2, 17	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
3, 18	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4, 19	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5, 20	$x + y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1} X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6, 21	$x - y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1} X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7, 22	$x + y - u - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
8, 23	$x - 2y - u - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
9, 24	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10, 25	$y = u$	$\hat{A}(X) = B^T X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
11, 26	$x + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
12, 27	$x + y + u + v = 0$	$\hat{A}(X) = BX - XB$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
13, 28	$x + y + 2u + v = 0$	$\hat{A}(X) = B^{-1} X B$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
14, 29	$x + y + 2u - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
15, 30	$x + y - v = 0$	$\hat{A}(X) = BX + XB$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 7. В пространстве V^3 геометрических векторов с обычным скалярным произведением векторы базиса $S = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ заданы координатами в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

1) Найти матрицу Грама G_S скалярного произведения в этом базисе. Выписать формулу для длины вектора через его координаты в базисе S.
2) Ортогонализовать базис S. Сделать проверку ортонормированности построенного базиса P двумя способами:

   а) выписав координаты векторов из P в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;
   б) убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S к базису P (по формуле $G_P = C^T \cdot G_S \cdot C$) приводит к единичной матрице.

№	$1,23$	$2,24$	$3,25$	$4,26$	$5,27$
$\vec{f}_1$	$1\ -1\ 1$	$1\ 0\ 1$	$1\ -1\ 0$	$1\ 0\ 2$	$0\ -1\ 2$
$\vec{f}_2$	$2\ 1\ 0$	$1\ 1\ -1$	$1\ -1\ 1$	$1\ 1\ -1$	$1\ 1\ -1$
$\vec{f}_3$	$0\ -1\ 1$	$2\ 0\ 1$	$1\ 0\ 2$	$1\ 1\ 0$	$1\ 0\ -1$
№	$6,28$	$7,29$	$8,30$	$9,16$	$10,17$
$\vec{f}_1$	$1\ 1\ 0$	$2\ 0\ 1$	$-1\ 1\ 1$	$2\ 0\ 1$	$-1\ 1\ 0$
$\vec{f}_2$	$2\ 0\ 1$	$-1\ 1\ -1$	$1\ 0\ -2$	$-1\ 1\ 1$	$-2\ 0\ 1$
$\vec{f}_3$	$1\ 1\ 2$	$1\ 0\ 1$	$0\ 1\ 1$	$-1\ 0\ 1$	$1\ -1\ 1$
№	$11,18$	$12,19$	$13,20$	$14,21$	$15,22$
$\vec{f}_1$	$1\ 0\ -2$	$2\ -1\ 0$	$1\ 0\ 2$	$-1\ 1\ 0$	$1\ 1\ -1$
$\vec{f}_2$	$1\ 1\ 1$	$1\ 1\ 1$	$1\ 1\ 1$	$-1\ 1\ 1$	$1\ 0\ -1$
$\vec{f}_3$	$1\ 1\ 0$	$-1\ 0\ -1$	$1\ 1\ 0$	$1\ 0\ 2$	$2\ 1\ 0$

Задача 8. Дана квадратичная форма $Q(\vec{x})$.

1) Привести $Q(\vec{x})$ к каноническому виду методом Лагранжа. Записать соответствующее преобразование переменных.
2) Привести $Q(\vec{x})$ к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования, выписать матрицу перехода.
3) Убедиться в справедливости закона инерции квадратичных форм на примере преобразований, полученных в пунктах 1 и 2.
4) Поверхность второго порядка σ задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением $Q(\vec{x}) = \alpha$. Определить тип поверхности σ и написать ее каноническое уравнение.

№	Квадратичная форма $Q(\vec{x})$	α
1	$4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$	24
2	$-2x_2x_3$	9
3	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$	0
4	$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$	50
5	$-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$	24
6	$2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$	16
7	$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$	0
8	$3x_1^2 + x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3$	8
9	$-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$	12
10	$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$	32
11	$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$	0
12	$3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$	36
13	$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$	24
14	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$	9
15	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$	0
16	$-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$	12
17	$-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$	40
18	$-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$	24
19	$2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$	0
20	$-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$	28
21	$10x_1^2 + 14x_2^2 + 7x_3^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$	36
22	$\frac{3}{2}x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$	18
23	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$	0
24	$2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$	20
25	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$	9
26	$x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$	0
27	$5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$	60
28	$2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$	12
29	$5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$	24
30	$-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$	12

Примеры решения задач

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 - 9x_3 + 17x_4 = 0 \\ -3x_1 + 9x_3 - 12x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & -4 & 7 & 0 \\ 5 & -3 & -9 & 17 & 0 \\ -3 & 0 & 9 & -12 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -5 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -9 & 17 & 0 \\ -3 & 0 & 9 & -12 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

или $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; x_1 и x_2 – базисные переменные; x_3 и x_4 – свободные переменные. Полагая $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, где c_1 и c_2 – произвольные постоянные, из уравнений получим $x_1 = 3c_1 - 4c_2$, $x_2 = 2c_1 - c_2$.

Общее решение

$$X(c_1; c_2) = \begin{pmatrix} 3c_1 - 4c_2 \\ 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пара векторов $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$ образует фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений.

Задача 3. Задан линейный оператор $\hat{A} : V^3 \to V^3$ – оператор отражения относительно плоскости $x - y - z = 0$.

1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в подходящем базисе пространства V^3, а затем в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

2) Определить, в какие точки переходят точки с координатами $(1, 0, 0)$ и $(-1, 2, 1)$ под действием оператора $\hat{A}$.

Решение.

1) Найдем матрицу оператора $\hat{A}$ в подходящем базисе $\mathcal{B}$ пространства V^3, а затем в базисе $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Базис в трехмерном пространстве геометрических векторов V^3 – это система их любых трёх линейно независимых (некомпланарных) векторов. Подходящий базис выберем из геометрических соображений. В качестве первого вектора возьмем вектор нормали к плоскости:
$\vec{e}_1 = \vec{n} = (1, -1, -1)$.
В качестве остальных двух векторов возьмем векторы, перпендикулярные $\vec{e}_1$:
$\vec{e}_2 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$, т.к. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$;
$\vec{e}_3 = (1, 0, 1), \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, т.к. $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$.
Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некомпланарные, т.к. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ – базис в V^3.

Найдем матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$:
$A\vec{e}_1 = -\vec{e}_1$ (т.к. вектор $\vec{e}_1$ перпендикулярен плоскости и при зеркальном отражении он переходит в противоположный вектор);
$A\vec{e}_2 = \vec{e}_2$ (т.к. вектор $\vec{e}_2$ параллелен плоскости и при зеркальном отражении он переходит сам в себя);
$A\vec{e}_3 = \vec{e}_3$ (аналогично вектору $\vec{e}_2$).
В результате получим матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{l} \hat{A}\vec{e}_1 = -1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \hat{A}\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3 \\ \hat{A}\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3 \end{array} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу A' оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}P$, где P – матрица перехода от $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}'$. Выпишем для этого разложение векторов базиса $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ по базису $\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

$$\begin{array}{l} \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} - 1 \cdot \vec{k} \\ \vec{e}_2 = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \\ \vec{e}_3 = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k} \end{array}$$

Записывая коэффициенты разложения в столбцы, получим матрицу перехода от базиса $\mathcal{B}'$ к базису $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'P^{-1}$:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$ – это обратная к P^{-1} матрица

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного оператора

$$A^{'} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2) Определим, в какие точки переходят точки с координатами $(1,0,0)$ и $(-1,2,1)$ под действием оператора $\hat{A}$.

По сути, нужно найти образы векторов $\vec{a} = (1,0,0)$ и $\vec{b} = (-1,2,1)$:

$$\hat{A}\vec{a} = \tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}\vec{b} = \tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Задача 4. Пусть A – матрица оператора $\hat{A}$ из задачи 3 в каноническом базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A. Объясните, как полученный результат связан с геометрическим действием оператора $\hat{A}$.

Решение. Найдем собственные значения матрицы A оператора $\hat{A}$ из предыдущей задачи, решив соответствующее характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2 = 0,$$

соответственно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1$. Собственные векторы ищем, решая уравнение $(A - \lambda_i E)X = 0$. При $\lambda_1 = -1$ имеем

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_3 = C$, получим $x_1 = -C$, $x_2 = C$, $X_1 = C(-1,1,1)^T$. Это вектор, перпендикулярный плоскости, отражение относительно которой задает оператор $\hat{A}$, и он с точностью до знака совпадает с вектором $\vec{e}_1$ из предыдущей задачи. Собственное значение $\lambda_1 = -1$ показывает, что этот вектор при отражении меняет знак.

При $\lambda_{2,3} = 1$ имеем

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем $X_{2,3} = (C_1 + C_2, C_2, C_1)^T = C_1(1,1,0)^T + C_2(1,0,1)^T$. Собственные вектора $X_2 = (1,1,0)^T$ и $X_3 = (1,0,1)^T$ лежат в плоскости, относительно которой происходит отражение, и при отражении не изменяются (т.к. отвечают $\lambda = 1$). Эти два вектора должны лежать в той же плоскости, что и векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ из предыдущей задачи (в нашем случае получились векторы, совпадающие с $\vec{e}_2, \vec{e}_3$).

Задача 5.

Задан оператор $\hat{A} : P_2 \to P_2$; $\hat{A}p(t) = (t-1)\frac{dp(t)}{dt}$.

1) Доказать, что оператор $\hat{A}$ является линейным оператором в пространстве P_n многочленов степени не выше n.

2) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе P_n.

3) Существует ли обратный оператор $\hat{A}^{-1}$? Если да, найти его матрицу.

4) Найти образ, ядро, ранг и дефект оператора $\hat{A}$.

Решение.

1) $\forall p(t), g(t) \in P_2$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ имеем:
$\hat{A}(\alpha p(t) + \beta g(t)) = (t-1)(\alpha p(t) + \beta g(t))' = \alpha(t-1)p(t)' + \beta(t-1)g(t)' = \alpha\hat{A}p(t) + \beta\hat{A}g(t)$.

2) Для нахождения матрицы оператора подействуем им на вектора канонического базиса $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$ пространства P_2 многочленов степени не выше 2:
$\hat{A}1 = (t-1)1' = 0$,
$\hat{A}t = (t-1)t' = -1 + t$,
$\hat{A}t^2 = (t-1)(t^2)' = (t-1)2t = -2t + 2t^2$,
и запишем в столбцы коэффициенты разложения получившихся векто-

ров по каноническому базису в столбцы матрицы A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Т.к. $\det A = 0$, то обратной матрицы A^{-1} и обратного оператора $\hat{A}^{-1}$ не существует.

4) Найдем сначала ранг и дефект оператора $\hat{A}$:
$\operatorname{rang}\hat{A} = \operatorname{rang} A = 2$,
$\operatorname{def}\hat{A} = \dim P_2 - \operatorname{rang}\hat{A} = 3 - 2 = 1$.

Ядро оператора $\operatorname{Ker}\hat{A}$ определяется как множество векторов $\vec{x}$ пространства, обращающихся в 0 под действием оператора $\hat{A}$, $\hat{A}\vec{x} = 0$. В матричной форме последнее уравнение имеет вид $AX = 0$, где X – столбец координат. Это однородная система линейных уравнений. Запишем и преобразуем матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получим $x_1 = C$, $x_2 = x_3 = 0$, $X = \begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Выпишем теперь соответствующие многочлены: $p(t) = C \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 = C$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\hat{A} = \{p(t) = C;\ C \in \mathbb{R}\}$.

Найдем образ оператора $\operatorname{Im}\hat{A}$.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 - 2x_3 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = x_2$, $\beta = x_3$. Отсюда получаем $y(t) = \hat{A}\vec{x} = \alpha(-1+t) + \beta(-t+t^2)$, $\operatorname{Im}\hat{A} = \{p(t) = \alpha(t^2 - t) + \beta(t-1);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Векторы $f_1 = t^2 - t$, $f_2 = t - 1$ образуют базис образа.

Задача 7.

В пространстве V^3 геометрических векторов с обычным скалярным произведением заданы векторы базиса $S = \{\vec{f_1} = i - j - k,\ \vec{f_2} = -i - j + k,\ \vec{f_3} = 2i + k\}$.
1) Найти матрицу Грама G_S скалярного произведения в этом базисе. Выписать формулу для длины вектора через его координаты в базисе S.

2) Ортогонализовать базис S. Сделать проверку ортонормированности построенного базиса P двумя способами:
а) выписав координаты векторов из P в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$;
б) убедившись, что преобразование матрицы Грама при переходе от базиса S к базису P (по формуле $G_P = C^T \cdot G_S \cdot C$) приводит к единичной матрице.

Решение.

1) Матрица Грама G_S системы векторов определяется как матрица из скалярных произведений этих векторов. Для базиса $S = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$

$$g_{ij} = (\vec{f}_i, \vec{f}_j).$$

Т.к. векторы заданы координатами в ортонормированном базисе, скалярное произведение в этом случае вычисляется по "школьной" формуле как сумма произведений координат,

$$\begin{aligned}
&(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = |\vec{f}_1|^2 = 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 3;\\
&(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1;\\
&(\vec{f}_1, \vec{f}_3) = (\vec{f}_3, \vec{f}_1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 1;\\
&(\vec{f}_2, \vec{f}_2) = (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3;\\
&(\vec{f}_2, \vec{f}_3) = (\vec{f}_3, \vec{f}_2) = (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -1;\\
&(\vec{f}_3, \vec{f}_3) = 2^2 + 0^2 + 1^2 = 5.
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$G_S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Можно найти G_S и другим способом. Если мы запишем матрицу $C_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}}$ перехода от базиса $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ к базису S (её столбцы – координаты векторов "нового" базиса S в "старом" базисе $\mathcal{B}$), то

$$G_S = C^T_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} G_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} = C^T_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} E C_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} = C^T_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}} C_{\mathcal{B}\to\mathcal{S}}.$$

Впрочем, вычисления фактически не будут отличаться от сделанных выше.

Далее выписываем формулу для квадрата длины вектора в базисе S:

$$|x|^2 = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 5x_3^2.$$

2) Теперь мы должны ортогонализовать базис S (т.е. перейти к ортонормированному базису). Задача ортогонализации возникает, в частности, в том случае, когда надо построить ортонормированный базис, связанный с конкретным оператором.

Сначала построим ортогональный базис $R = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ (для получения ортонормированного базиса надо будет еще поделить получившиеся векторы на их длины).

Первый вектор берем без изменений,

$$\vec{g}_1 = \vec{f}_1.$$

Второй вектор $\vec{g}_2$ мы будем искать в линейной оболочке векторов $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ по формуле

$$\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \lambda \vec{g}_1,$$

подбирая λ таким образом, чтобы $\vec{g}_2$ оказался перпендикулярен $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$. Фактически мы тем самым проектируем вектор $\vec{f}_2$ на направление, перпендикулярное вектору $\vec{g}_1$ и лежащее в плоскости векторов $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$. Поскольку перпендикулярность равносильна обращению скалярного произведения в ноль,

$$(\vec{g}_2, \vec{g}_1) = (\vec{f}_2 - \lambda \vec{g}_1, \vec{g}_1) = (\vec{f}_2, \vec{g}_1) - \lambda(\vec{g}_1, \vec{g}_1) = 0, \quad \lambda = \frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}.$$

Окончательно получим

$$\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \frac{(\vec{f}_2, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}\vec{g}_1 = \vec{f}_2 - \frac{(\vec{f}_2, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)}\vec{f}_1,$$

т.е. из вектора $\vec{f}_2$ мы вычитаем его проекцию на направление вектора $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$.

В нашем случае $\lambda = \frac{(\vec{f}_2, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = -\frac{1}{3}$,

$$\vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1 = \frac{1}{3}(3(-i - j + k) + (i - j - k)) = \frac{1}{3}(-2i - 4j + 2k).$$

Нетрудно проверить, что получившийся вектор действительно перпендикулярен $\vec{f}_1$ – скалярное произведение $(\vec{g}_2, \vec{f}_1) = \frac{1}{3}(-2 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)) = 0$.

Ищем $\vec{g}_3$ в виде

$$\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \mu \vec{g}_1 - \eta \vec{g}_2.$$

Как и выше λ, коэффициенты μ и η определяются из условия ортогональности $(\vec{g}_3, \vec{g}_1) = (\vec{g}_3, \vec{g}_2) = 0$,

$$\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \frac{(\vec{f}_3, \vec{g}_1)}{(\vec{g}_1, \vec{g}_1)}\vec{g}_1 - \frac{(\vec{f}_3, \vec{g}_2)}{(\vec{g}_2, \vec{g}_2)}\vec{g}_2,$$

Используя матрицу Грама G_S, находим скалярные произведения

$$(\vec{f}_3, \vec{g}_2) = (\vec{f}_3, \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1) = -1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3},$$
$$(\vec{g}_2, \vec{g}_2) = (\vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1, \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1) = 3 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{8}{3}$$

и вектор

$\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \frac{1}{3}\vec{g}_1 + \frac{1}{4}\vec{g}_2 = \frac{1}{12}(12\vec{f}_3 - 4\vec{g}_1 + 3\vec{g}_2) = \frac{1}{12}(12\vec{f}_3 - 4\vec{f}_1 + \vec{f}_1 + 3\vec{f}_2) =$
$\frac{1}{4}(-\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + 4\vec{f}_3) = \frac{1}{4}(-(i - j - k) + (-i - j + k) + 4(2i + k)) = \frac{1}{2}(3i + 3k).$

Мы получили ортогональный базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Остается поделить векторы этого базиса на их длины: $|\vec{g}_1| = |\vec{f}_1| = \sqrt{3}$; $|\vec{g}_2| = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$, $|\vec{g}_3| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (это значение можно получить как с помощью матрицы Грама G_S, так и с помощью разложения по первоначальному ортонормированному базису $\mathcal{B}$).

Искомый ортонормированный базис – это $P = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$,

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{g}_1}{|\vec{g}_1|} = \frac{\vec{f}_1}{\sqrt{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{j}{\sqrt{3}} - \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{g}_2}{|\vec{g}_2|} = \frac{\vec{f}_1}{2\sqrt{6}} + \frac{3\vec{f}_2}{2\sqrt{6}} = -\frac{i}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{k}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{g}_3}{|\vec{g}_3|} = -\frac{\vec{f}_1}{6\sqrt{2}} + \frac{\vec{f}_2}{6\sqrt{2}} + \frac{4\vec{f}_3}{6\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{k}{\sqrt{2}}$$

Далее надо совершить двойную проверку. Во-первых, используя выписанные разложения по базису $\mathcal{B}$, надо убедиться, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$, что докажет ортонормированность полученного базиса. Во-вторых, составив матрицу $C_{S \to P}$ перехода от базиса S к базису P,

$$C_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{6\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

нужно найти матрицу Грама в базисе P по формуле $G_P = C_{S \to P}^T G_S C_{S \to P}$. Матрица G_P должна оказаться единичной.

Контрольные вопросы

5. Теория систем линейных уравнений

5.1. Что такое ранг матрицы? Как он связан с рангом системы ее строк (столбцов)? Чему равен ранг матрицы, все элементы которой одинаковы?

5.2. Каков критерий равенства определителя нулю?

5.3. Что происходит с рангом матрицы: а) при ее транспонировании (и почему?); б) при элементарных преобразованиях?

5.4. Как выглядит блочно-треугольная матрица, чему равен ее ранг?

5.5. Что такое матрица системы; расширенная матрица? Что означают слова: записать систему в матричной форме? Почему она эквивалентна исходной системе уравнений?

5.6. Что означает совместность системы? Какие системы называются эквивалентными? Каков критерий совместности системы? Когда решение системы единственно?

5.7. Всегда ли совместна однородная система? Каков критерий существования ненулевых решений у однородной системы? Выделите случай квадратной системы.

5.8. Образует ли множество решений однородной системы линейное пространство? А множество решений неоднородной системы? Объясните результат. Какова связь решений однородной и неоднородной систем?

5.9. Какова размерность пространства решений однородной системы? Что называется фундаментальной системой решений (ФСР)? Почему понятие ФСР существует только для однородной системы?

5.10. Что называется общим решением однородной системы и какова его структура? Пусть дана ФСР некоторой однородной системы:

$$X_1 = (1,1,2)^T, \quad X_1 = (2,3,1)^T$$

Выпишите все ее решения. Укажите другую ФСР этой системы.

5.11. Все решения однородной системы линейных уравнений могут быть записаны в виде: $x_1 = s + t$, $x_2 = s - 2t$, $x_3 = 3$, $x_4 = t$, $x_5 = s + 2t$, где s, $t \in R$. Укажите ее ФСР. Сколько уравнений могло быть в системе?

5.12. Все решения неоднородной системы линейных уравнений могут быть записаны в виде $x = 1 + s$, $y = 2s - 1$, $z = s$. Опишите все решения соответствующей однородной системы и приведите пример ее ФСР.

5.13. Какие способы решения систем линейных уравнений Вы знаете? Всегда ли они применимы?

6. Линейные операторы

6.1. Что такое линейный оператор? Привести примеры линейных операторов в пространствах V^3, R^n, P_n . Какой вектор сохраняется при действии любого линейного оператора?

6.2. Какие из следующих отображений, действующих на геометрические векторы $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V^3$, являются линейными операторами (векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ фиксированы):

а)$\hat{A}\bar{x} = \bar{a},\ \bar{a} \neq \bar{0}$; б)$\hat{A}\bar{x} = \bar{x} + \bar{a}$; в)$\hat{A}\bar{x} = \alpha\bar{x}$;

г)$\hat{A}\bar{x} = (\bar{x}, \bar{a})\bar{x}$; д)$\hat{A}\bar{x} = [\bar{x}, \bar{a}]$; е)$\hat{A}\bar{x} = \left[[\bar{x}, \bar{a}], \bar{b}\right]$;

ж) $\hat{A}\bar{x} = (\bar{x}, \bar{a})\bar{a}, |\bar{a}| = 1$ (каков геометрический смысл?);

з)$\hat{A}\bar{x} = (\bar{x}, \bar{x})\bar{a}$;

и)$\hat{A}\bar{x} = (x_1^2, x_3, 0)$;

к)$\hat{A}\bar{x} = (2x_1 - x_3, x_2 + x_3, x_1)$;

л)$\hat{A}\bar{x} = (\sin x_1, \cos x_2, 0)$;

м) $\hat{A}$ – поворот вокруг оси OZ на угол α;

н) $\hat{A}\bar{x} = \bar{x} - (\bar{x}, \bar{a})\bar{a}, |\bar{a}| = 1$ (каков геометрический смысл?).

6.3. Какие из следующих отображений являются линейными операторами в пространстве L:

а) $L = R^4:\quad \hat{A}\bar{x} = (x_1 + x_4, x_1 - x_2, 0, x_4 - x_3)$; $\hat{A}\bar{x} = (x + 1, x_2 - x_3, x_1, 0)$;

б) $L = L[\cos t, \sin t]:\ (\hat{A}x)(t) = x'(t)$; $\quad(\hat{A}x)(t) = x'(t) - x(0)$;

в) $L = P_3:\quad (\hat{A}p)(t) = p(t + h) - p(t),\ h \in R$;

г) $L = P_n:\quad (\hat{A}p)(t) = p'(t),\ (\hat{A}p)(t) = tp(t),$

$(\hat{A}p)(t) = p(t) - tp'(t) + t^2 p''(t)$;

д) $L = P$ – пространство всех многочленов (объяснить, почему это линейное пространство): $(\hat{A}p)(t) = tp(t)$; $\hat{A}\left(p_0 + p_1 t + ... + p_n t^n\right) = p_0 t + \frac{p_1 t^2}{2} + ... + \frac{p_n t^{n+1}}{n+1}$ – интегрирование.

6.4. Что такое матрица линейного оператора в данном базисе? Как она изменится, если поменять местами два базисных вектора?
Пусть линейный оператор $\hat{A} : R^3 \to R^3$ переводит векторы $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ соответственно в векторы $\vec{f}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{f}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{f}_3 = (6, 6, 6)$. Какова его матрица в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$?

6.5. Известна матрица оператора в некотором базисе. По какой формуле преобразуются координаты векторов под действием этого оператора?

6.6. Что такое сумма, произведение линейных операторов? Что происходит с матрицами линейных операторов при сложении, умножении операторов?

6.7. Как образуется матрица перехода от данного базиса к новой системе векторов? Каков критерий базисности новой системы? Как преобразуются координаты векторов и матрица линейного оператора при переходе к другому базису? Что происходит при этом с определителем матрицы?

6.8. Какие матрицы называются подобными? Какие свойства подобия матриц Вы знаете? Как связаны между собой определители подобных матриц? Ответ на последний вопрос обоснуйте.

6.9. Какой оператор называется невырожденным? Что такое обратный оператор? Каков критерий его существования? Как найти матрицу обратного оператора? Известно, что линейный оператор $\hat{A}$ переводит вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ в нуль-вектор. Существует ли $\hat{A}^{-1}$? Ответ обосновать.

6.10. Что такое собственный вектор линейного оператора? Каков геометрический смысл собственного вектора в пространстве V^3? Пусть $\bar{x}$– собственный вектор. Укажите еще какой-нибудь собственный вектор, отвечающий тому же собственному значению. Ответ обосновать. Могут ли быть линейно зависимыми собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям?

6.11. Верны ли утверждения: а) если λ – собственное значение оператора $\hat{A}$, то λ^k – собственное значение для оператора $\hat{A}^k$;
б) если $\vec{x}$ – собственный вектор операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с собственными значениями λ_1 и λ_2 соответственно, то $\bar{x}$ – собственный вектор для $\hat{A}+\hat{B}$; для $\hat{A}-\hat{B}$? Если да, то с каким собственным значением?

6.12*. Исходя из геометрического смысла оператора $\hat{A} : V^3 \to V^3$, указать его собственные значения и собственные векторы. Обладает ли он базисом из собственных векторов? Если да, то как выглядит матрица оператора в этом базисе? Является ли оператор невырожденным? а) $\hat{A}$ – оператор проектирования векторов на плоскость P; б) $\hat{A}$ – оператор проектирования векторов на прямую L; в) $\hat{A}$ – оператор симметрии векторов относительно плоскости P; г) $\hat{A}$ – оператор симметрии векторов относительно прямой L; д) $\hat{A}\bar{x} = [\bar{x}, \bar{a}]$, $\bar{a} \neq 0$ – фиксированный вектор.

6.13. Что такое характеристический многочлен линейного оператора? Зачем он нужен? Как он зависит от выбора базиса? Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения оператора в V^3: а) каков его характеристический многочлен; б*) чему равен определитель матрицы оператора?

6.14. Как находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора в n-мерном пространстве?

6.15. Что такое оператор простого типа? Как выглядит матрица оператора в базисе из собственных векторов? Каково достаточное условие оператора простого типа? Является ли оно необходимым?* Что означает диагонализуемость матрицы?

6.16. Матрица оператора в некотором базисе – треугольная. Каковы собственные значения этого оператора?

6.17*. Показать, что оператор, заданный матрицей E_{ij} (см. вопрос 3.8 из типового расчета №1), переводит базисный вектор $\vec{e}_j$ в $\vec{e}_i$, а остальные базисные векторы – в нуль. Пользуясь этим, вычислить $E_{ij} \cdot E_{kl}$.

6.18*. Интерпретируя матрицу A как матрицу линейного оператора, вычислить A^n, где: а) A – треугольная матрица n-го порядка с нулевыми элементами на главной диагонали;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n = -1,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$.

6.19*. Справедливо ли рассуждение: "Пусть $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{C}$, где $\hat{A}$ – ненулевой оператор; сократив на $\hat{A}$, получим $\hat{B} = \hat{C}$"?

6.20*. Привести пример линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, для которых $\hat{A}\hat{B} = \hat{0},\ \hat{B}\hat{A} \neq \hat{0}$ (указание: см. 6.17*).

7. Билинейные и квадратичные формы

7.1. Что такое билинейная форма? Как образуется матрица билинейной формы в данном базисе? Как записать билинейную форму в данном базисе? Как записать билинейную форму в координатной и в векторно-матричной записи? Пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица формы в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$; $\bar{x} = (-1, 1),\ \bar{y} = (1, -1)$. Чему равны $B(\bar{e}_1, \bar{e}_2), B(\bar{e}_2, \bar{e}_1), B(\bar{x}, \bar{y})$?

7.2. При каком условии на коэффициенты билинейная форма

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

симметрична, кососимметрична?

7.3. Как меняется матрица билинейной формы при изменении базиса? Что происходит при этом со значениями формы?

7.4. Что такое квадратичная форма? Как образуется матрица квадратичной формы в данном базисе? Как записать квадратичную форму по ее матрице (указать 2 вида записи)? Выпишите матрицу квадратичной формы. Приведите векторно-матричную запись формы $K(\vec{x}) = 2x_1^2 - 3x_1x_3 + x_2^2$. Приведите два вида записи квадратичной формы с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.5. Каков канонический вид квадратичной формы? Однозначно ли он определен? Как выглядит матрица формы в каноническом базисе? Какие характеристики формы не зависят от выбора канонического базиса?

7.6. Что называется положительным, отрицательным индексами инерции, рангом квадратичной формы? Что означает положительная (отрицательная) определенность формы? Каковы положительный, отрицательный индексы и ранг положительно (отрицательно) определенной формы?

7.7. Каков критерий положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы?

7.8. Поверхность 2-го порядка в V^3 задается уравнением $K(\bar{x}) = 1$, где $Q(\bar{x})$ – квадратичная форма. Укажите тип поверхности в зависимости от ранга и индексов инерции квадратичной формы.

8. Евклидовы пространства

8.1. Какие аксиомы определяют скалярное произведение в евклидовом пространстве? Что они означают на языке билинейных форм? Приведите примеры скалярных произведений.

8.2. Что такое матрица Грама? Каковы ее свойства? Как записать с ее помощью скалярное произведение векторов?
Может ли матрица Грама в некотором базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ иметь вид:
а) $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$?

При положительном ответе найти $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$, $(\bar{e}_2, \bar{e}_2)$, $(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = (1, 1)$, $\bar{y} = (1, -1)$.

8.3. Что такое длина (норма) вектора в евклидовом пространстве? Каковы ее свойства? Что такое неравенство Коши–Буняковского? Когда оно превращается в равенство? Как выглядит неравенство треугольника, и почему оно так называется?

8.4. Как вычисляется угол между векторами? Почему это определение угла корректно? Какие векторы называются ортогональными? Скалярное произведение в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задается матрицей Грама $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Будут ли ортогональны векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$? Каковы длины векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$?

8.5. Что такое ортогональный, ортонормированный базисы в евклидовом пространстве? Как выглядит матрица Грама в ортогональном базисе, в ортонормированном? Как ищется скалярное произведение в ортонормированном базисе? Почему? Как выражаются через скалярное произведение координаты вектора в ортонормированном базисе?

9. Линейные операторы в евклидовом пространстве

9.1. Какой оператор $\hat{A}^+$ называется сопряженным к линейному оператору $\hat{A}$ в евклидовом пространстве? Будет ли он единственным? Как найти его матрицу, зная матрицу оператора $\hat{A}$ в ортонормированном базисе?

9.2. Как найти оператор, сопряженный к произведению операторов $\hat{A}\hat{B}$; к их сумме $\hat{A} + \hat{B}$? Чему равен сопряженный оператор к обратному оператору $\hat{A}^{-1}$?

9.3. Какой оператор называется самосопряженным? Каково характеристическое свойство матрицы самосопряженного оператора в ортонормированном базисе? Сохраняется ли самосопряженность при сложении операторов; при умножении их на числа; при умножении операторов?

9.4. Какова специфика корней характеристического уравнения для самосопряженного оператора? Каковы свойства его собственных векторов?

9.5. Какой оператор называется ортогональным? Что происходит с ортонормированным базисом при действии ортогонального оператора?

9.6. Известно, что линейный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Каков этот оператор?

9.7. Будет ли ортогональный оператор иметь обратный? Если да, то как его найти?

9.8. Известно, что оператор $\hat{A}$ обратим, и $\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{+}$. Каков этот оператор?

9.9. Каковы свойства матрицы ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

9.10*. Как показать, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису матрица самосопряженного оператора преобразуется так же, как матрица соответствующей квадратичной формы? Для чего здесь нужна самосопряженность оператора?