ТР №5

1. Доказать, что множество M образует подпространство в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех матриц данного размера.

В 31

$$M = \left\{ X \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ X \,\middle|\, AX = \bar{0},\ \text{где } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 2}$$

1а) Докажем, что M – лин. подпространство $\mathbb{R}^{3\times 2}$

Проверим замкнутость M относительно линейных операций.

1) $X, Y \in M$, т.е. $X, Y \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ и $\begin{cases} AX = \bar{0} \\ AY = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow X+Y \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ и $A(X+Y) = AX + AY = \bar{0} + \bar{0} = 0 \Rightarrow X+Y \in M$, т.е.

M замкнуто относительно сложения;

2) $X \in M$, т.е. $X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ и $AX = \bar{0}$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda X \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ и $A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \lambda X \in M$, т.е.

M замкнуто относительно умножения на число.

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ M – лин. подпространство $\mathbb{R}^{3\times 2} \Rightarrow$ M – линейное пространство

1б) Найдем общий вид элементов $X \in M$

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a-f & b-g \\ c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a-f=0 \\ b-g=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} f=a \\ g=b \\ c=0 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$$

$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$

Можно сначала сделать пункт 1б), а потом 1а)

Тогда 1а) 1) $X, Y \in M$, т.е. $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow X+Y = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & 0 \\ a_1+a_2 & b_1+b_2 \end{pmatrix} \in M$, т.е.

M замкнуто относительно сложения;

2) $X \in M$, т.е. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & 0 \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \in M$, т.е.

M замкнуто относительно умножения на число

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ M – линейное подпространство $\mathbb{R}^{3\times 2} \Rightarrow$ M – лин. пр-во.

ТР №4.

В 31. $M = \{p(t) \in P_4 \mid p(2) = p(3) = 0\} \subset P_4$

1. Доказать, что множество $M$ — линейное подпространство $P_4$.

1б) Найдем общий вид элементов $p(t) \in M$

$p(t)$: $\deg p(t) \leq 4$, $p(2) = p(3) = 0$.

$p(t) \vdots (t-2)(t-3) = t^2 - 5t + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t) = (t^2 - 5t + 6)\, q(t)$, $\deg p(t) \leq 4 \Rightarrow \deg q(t) \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow p(t) = (t^2 - 5t + 6)(at^2 + bt + c) \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \{p(t) = (t^2 - 5t + 6)(at^2 + bt + c)\}$

1а) Докажем, что $M$ — линейное подпространство $P_4$.

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(t) = (t^2 - 5t + 6)(a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \\ p_2(t) = (t^2 - 5t + 6)(a_2 t^2 + b_2 t + c_2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1(t) + p_2(t) = (t^2 - 5t + 6)\big((a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)\big) \in M$,

т.е. $M$ замкнуто относительно сложения

2) $p(t) \in M$, т.е. $p(t) = (t^2 - 5t + 6)(at^2 + bt + c)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda p(t) = (t^2 - 5t + 6)(\lambda a t^2 + \lambda b t + \lambda c) \in M$, т.е.

$M$ замкнуто относительно умножения на число

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow M$ — линейное подпространство $P_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ — линейное пространство

1а) Можно сделать по-другому.

1) $p_1(t), p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} \deg p_1(t) \leq 4, \; p_1(2) = p_1(3) = 0 \\ \deg p_2(t) \leq 4, \; p_2(2) = p_2(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \deg(p_1(t) + p_2(t)) \leq 4$,

$p_1(2) + p_2(2) = 0 + 0 = 0$, $p_1(2) + p_2(3) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p_1(t) + p_2(t) \in M$,
т.е. $M$ замкнуто относительно сложения

2) $p(t) \in M$, т.е. $\deg p(t) \leq 4$, $p(2) = p(3) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \deg(\lambda p(t)) \leq 4$,

$(\lambda p)(2) = \lambda p(2) = 0$, $(\lambda p)(3) = \lambda p(3) = 0 \Rightarrow \lambda p(t) \in M$, т.е. $M$ замкн. отн. умн. на число

Т.Р N7

Даны векторы $\bar a = \overline{OA} = (3,-2,1) = 3\bar i - 2\bar j + 1\bar k = (\bar i,\bar j,\bar k)\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

$\bar b = \overline{OB} = (6,3,2) = 6\bar i + 3\bar j + 2\bar k = (\bar i,\bar j,\bar k)\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$

$\bar c = \overline{OC} = (2,1,1) = 2\bar i + \bar j + \bar k = (\bar i,\bar j,\bar k)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$d = \overline{OD} = (1,-2,1) = \bar i - 2\bar j + \bar k = (\bar i,\bar j,\bar k)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = e\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

где $e = \langle \bar i, \bar j, \bar k\rangle$

Лучи OA, OB, OC являются ребрами трехгранного угла Т.

1) Доказать, что векторы $\bar a, \bar b, \bar c$ линейно независимы.

Векторы $\bar a, \bar b, \bar c \in V^3$ линейно независимы $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\bar a, \bar b, \bar c$ – некомпланарны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ смешанное произведение $\bar a\bar b\bar c \neq 0$

$$\bar a\bar b\bar c = \begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 6 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}-2A_1 + A_2\\ -A_1 + A_3\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 7 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix} \overset{A^3\downarrow}{=} \begin{vmatrix}0 & 7\\ -1 & 3\end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar a, \bar b, c$ – некомпланарны $\Rightarrow \bar a, \bar b, \bar c$ – линейно-независимы

2) Разложить вектор $\bar d$ по векторам $\bar a, \bar b, \bar c$ (возникающую при этом систему уравнений решить с помощью обратной матрицы.)

$\bar a, \bar b, \bar c$ – некомпланарны $\Rightarrow \bar d$ можно представить в виде линейной комбинации $\bar a, \bar b, \bar c$.

$$\bar d = x\bar a + y\bar b + z\bar c$$

$$e\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = xe\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + ye\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} + ze\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = e\left(x\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$x\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3x + 6y + 2z\\ -2x + 3y + z\\ x + 2y + z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+6y+2z=1 \\ -2x+3y+z=-2 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$ СЛАУ.

Матрица системы $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Столбец неизвестных $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Столбец свободных членов $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Матричная запись СЛАУ $AX=B$.

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \text{ и } \exists!\, X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\hat{A}=\frac{1}{\det A}(A_{ij})^T=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 21 \end{pmatrix}^T=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \\ -7 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -7 \\ -7 & 0 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5/7 \\ -6/7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{5}{7}+6\left(-\frac{6}{7}\right)+2\cdot 2=\frac{15-36}{7}+4=\frac{-21}{7}+4=-3+4=1 \\ -2\cdot\frac{5}{7}+3\left(-\frac{6}{7}\right)+2=\frac{-10-18}{7}+2=\frac{-28}{7}+2=-4+2=-2 \\ \frac{5}{7}+2\left(-\frac{6}{7}\right)+2=\frac{5-12}{7}+2=\frac{-7}{7}+2=-1+2=1 \end{cases}$$ верно.

$$\bar{d}=\frac{5}{7}\bar{a}-\frac{6}{7}\bar{b}+2\bar{c}$$

3) Определить, лежит ли точка D внутри T, вне T, на одной из граней T.

$$\bar{d}=x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}$$

D лежит внутри T $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$

D лежит вне T $\Leftrightarrow$ хотя бы одно из чисел $x, y, z$ меньше нуля.

D лежит на грани T $\Leftrightarrow$ хотя бы одно из чисел $x, y, z$ равно нулю, а два други числа больше 0.

$$\bar{d} = \frac{5}{7}\bar{a} - \frac{6}{7}\bar{b} + 2\bar{c}$$

$\begin{cases} x = \frac{5}{7} > 0 \\ y = -\frac{6}{7} < 0 \\ z = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ D лежит вне трехгранного угла T.

4) Определить, при каких значениях действительного параметра $\lambda$ вектор $\bar{d} + \lambda\bar{a}$, отложенный от точки O, лежит внутри трехгранного угла T.

$$\bar{d} + \lambda\bar{a} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} + \lambda\bar{a} = (x+\lambda)\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$$

лежит внутри T $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\lambda>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$

Т. к. $y = -\frac{6}{7} < 0$, то $\bar{d} + \lambda\bar{a}$ лежит вне трехгранного угла T при $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

# Домашнее задание

1) 3.6 – 3.10

2) Т.Р. „Теоретические упражнения" стр. 6 – 7 N6

3) ТР „Контрольные вопросы" стр. 17 – 18 N 4.1 – 4.8

4) ТР. Задача N 5 пункты 1а, 1б. (1а – подпространство, 1б – общий вид элементов)

5) Т.Р Задача N 4 пункты 1а, 1б.

6) Т. Р. Задача N6. Доказать, что $L[f_1, f_2, ..., f_k]$ – линейное пространство. Выяснить, является ли система функций $f_1, f_2, ..., f_k$ линейно независимой.

⚠ 7) Т.Р. N 7

# Проверка ДЗ „Многочлены"

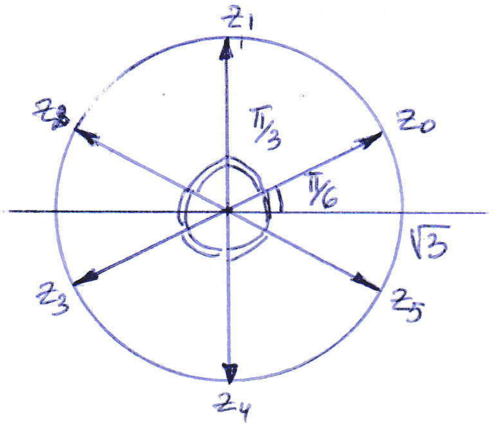
6) Разложить $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

а) $p(z) = z^6+27$

найдем корни $p(z)$

$$z^6 = -27 = 3^3 e^{i(\pi)}$$

$$z_k = \sqrt[6]{3^3}\, e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)} = \sqrt{3}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)},\ k=\overline{0,5}$$




$$z_0 = \sqrt{3} e^{i\pi/6} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{3} e^{i\pi/2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{3}$$

$$z_2 = \sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{3} e^{i\frac{7}{6}\pi} = \sqrt{3} e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_4 = \sqrt{3} e^{i\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i\sqrt{3}$$

$$z_5 = \sqrt{3} e^{i\left(\frac{11}{6}\pi\right)} = \sqrt{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_5 = \bar{z}_0,\quad z_4 = \bar{z}_1,\quad z_3 = \bar{z}_2$$

$p(z) = \left(z - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z + i\sqrt{3}\right)\left(z - \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — разложение на неприводимые множители над $\mathbb{C}$.

$p(z) = \left(z^2 - 3z + 3\right)\left(z^2+3\right)\left(z^2 + 3z + 3\right)$ — разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$.

б) $p(z) = z^4 - 10z^2 + 1 = \left(z^4 + 2z^2 + 1\right) - 2z^2 - 10z^2 = \left(z^2+1\right)^2 - 12z^2 =$

$= \left(z^2+1-2\sqrt{3}z\right)\left(z^2+1+2\sqrt{3}z\right) = \left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 1\right)\left(z^2 + 2\sqrt{3}z + 1\right)$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 1 = 0$
$D = 12 - 4 = 8 > 0$
$z = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

$z^2 + 2\sqrt{3}z + 1 = 0$
$D = 12 - 4 = 8 > 0$
$z = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$

$p(z) = \left(z - \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(z - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ — разложение на неприводимые множители и над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.

д) $p(z) = z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$, если известен корень $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ кратности 2.

$p(z) \in \mathbb{R}[z] \Rightarrow \bar{z} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ - корень $p(z)$ кратности 2

$\Rightarrow p(z) \vdots (z^2 + z + 1)^2$

1 - корень $p(z) \Rightarrow p(z) \vdots (z-1)$

$p(z) = (z-1)(z^2+z+1)^2$ - разложение на неприводимые множители над $\mathbb{R}$.

$p(z) = (z-1)\left(z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(z + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ - разложение на неприводимые множители над $\mathbb{C}$.

7) Найти многочлен со старшим коэффициентом 1 наименьшей степени, если известно, что он имеет корни: $-1-i$ кратности 1, $i$ кратности 2

а) над $\mathbb{C}$,
б) над $\mathbb{R}$.

а) $f(z) = (z+1+i)(z-i)^2$

б) $p(z) = (z+1+i)(z+1-i)(z-i)^2(z+i)^2 =$
$= (z^2+2z+2)(z^2+1)^2$