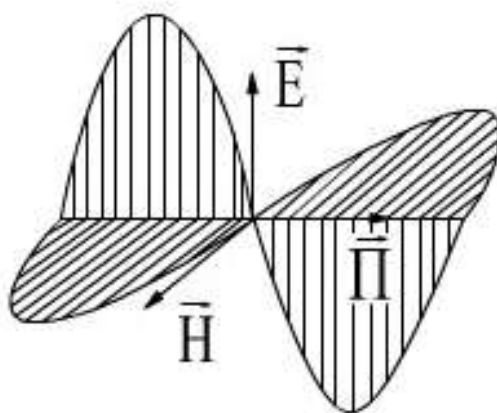


А.Н. КОВАЛЕНКО А.Н. ЩЕРБИЦКИЙ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Часть 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ



Москва 1999

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Н. КОВАЛЕНКО А.Н. ЩЕРБИЦКИЙ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Часть I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебное пособие

МОСКВА 1999

ББК 22.313
 К56
 УДК 537.86

Рецензенты: д.т.н., проф. Г.А.Ерохин
 к.т.н., доц. А.А.Фалуни

К 56 А.Н.Коваленко. Электродинамика и распространение радиоволн. Часть 1. Учеб.пособие/ Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики (технический университет).- М..2011,-77с.

ISBN 5-7339-0187-х

Излагаются три раздела теоретического курса дисциплины «Электродинамика и распространение радиоволн»1. Основные понятия и уравнения электродинамики. 2. Возбуждение электромагнитных волн в свободном пространстве. 3. Основные принципы теории электромагнитного поля.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по специальности "Радиотехника"

Табл. нет. Ил. 35. Библиогр.- 1 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технического университета).

1604050000 20
 К 1 К8(03)-99

Без объявл.

ББК 22.313

ISBN 5-7339-0187-х

© А.Н. Коваленко,
 А.Н. Щербицкий
 1999

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой первую часть теоретического курса дисциплины "Электродинамика и распространение радиоволн" для специальности "Радиотехника" (200700). Оно включает в себя шесть разделов рабочей программы курса.

Материал учебного пособия излагается с опорой на базовое учебное пособие (В.В.Никольский, Т.И.Никольская. "Электродинамика и распространение радиоволн", Москва, "Наука", 1989 .), основным автором которого был заведующий кафедрой АФУ МИРЭА д.т.н., профессор В.В.Никольский.

В учебном пособии опущены разделы, посвященные статическим, стационарным и квазистационарным полям, знакомые студентам из курсов физики и теории цепей.

Последовательность изложения материала несколько изменена по сравнению с учебными пособиями других авторов, а некоторые темы представлены в оригинальном изложении.

Учебное пособие обобщает опыт чтения лекций по дисциплине "Электродинамика и распространение радиоволн" в течение ряда лет (1993/98 гг.) для студентов МИРЭА всех форм обучения по специальности "Радиотехника".

ВВЕДЕНИЕ

Предметом нашего курса является изучение электромагнитных явлений, главным образом быстропеременных (высокочастотных), волновых, которые происходят в специальных устройствах (линии передачи, резонаторы, антенны и др.), а также в природных условиях (различные радиолинии связи и передачи информации).

Электромагнитное поле представляет собой особый вид материальной среды, носителя электромагнитной энергии, способной перемещаться в пространстве с конечной скоростью, не превышающей скорость света в вакууме, и взаимодействовать с другими средами как заряженными, так и нейтральными.

Классическая теория цепей, предполагающая постоянство мгновенных значений электромагнитного поля (тока, напряжения) во всех точках цепи, не пригодна для высокочастотных цепей, и здесь используются другие принципы и методы анализа, расчета и построения элементов цепи.

Теоретической базой, используемой при изучении электромагнитных явлений, является система уравнений Максвелла и ряд основополагающих принципов теории электромагнитного поля, знакомство с которыми будет происходить по мере освоения данного курса.

Часть 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Характеристики электромагнитного поля. Электрические заряды и токи

Электромагнитное поле можно описать четырьмя векторными функциями, зависящими от пространственных координат, или от радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из начала координат в произвольную точку пространства, и времени t . Эти функции являются основными характеристиками электромагнитного поля и называются:

- 1) напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$,
- 2) индукция электрического поля $\vec{D}(\vec{r}, t)$,
- 3) напряженность магнитного поля $\vec{H}(\vec{r}, t)$,
- 4) индукция магнитного поля $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды и токи.

Понятия характеристик электромагнитного поля, зарядов и токов раскрываются при изучении общего курса физики.

Распределение электрических зарядов в пространстве характеризуется объемной плотностью заряда ρ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \quad (1.1)$$

где ΔQ - величина заряда в объеме ΔV .

Полный заряд Q в области V определяется выражением:

$$Q = \int_V \rho \, dv, \quad (1.2)$$

Распределение электрических токов в пространстве характеризуется объемной плотностью тока \vec{j} :

$$\vec{j} = \vec{i}^0 \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s}, \quad (1.3)$$

где \vec{i}^0 - единичный вектор, указывающий направление движения электрических зарядов, ΔI - величина тока, проходящего через площадку Δs , перпендикулярную вектору \vec{i}^0 .

Полный ток I , проходящий через произвольную поверхность S в проводящем теле, определяется выражением:

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s} = \int_S \vec{j} \vec{v}^0 ds = \int_S j_v ds, \quad (1.4)$$

где $d\vec{s} = \vec{v}^0 ds$, \vec{v}^0 - единичный вектор нормали в каждой точке поверхности S , скалярное произведение векторов $\vec{j} \vec{v}^0 = j_v$ представляет собой нормальную составляющую плотности тока.

В международной системе единиц СИ характеристики электромагнитного поля, заряды и токи имеют следующие размерности:

$[\vec{E}] = \text{В/м}$ (Вольт на метр); $[\vec{D}] = \text{Кл/м}^2$ (Кулон на квадратный метр);

$[\vec{H}] = \text{А/м}$ (Ампер на метр); $[\vec{B}] = \text{Т}$ (Тесла)

$[Q] = \text{Кл}$ (Кулон); $[\rho] = \text{Кл/м}^3$ (Кулон на кубический метр);

$[I] = \text{А}$ (Ампер); $[\vec{j}] = \text{А/м}^2$ (Ампер на квадратный метр).

В электромагнитном поле на заряд действует сила, определяемая векторами напряженности электрического поля \vec{E} и индукции магнитного поля \vec{B} . В вакууме эти векторы связаны с векторами индукции электрического поля \vec{D} и напряженности магнитного поля \vec{H} соотношениями:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ - электрическая постоянная, имеющая размерность Ф/м (Фарада на метр);

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ - магнитная постоянная, имеющая размерность Гн/м (Генри на метр).

Через эти две важнейшие электродинамические константы выражается третья - скорость света в вакууме C :

$$C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

1.2. Уравнения Максвелла

Характеристики электромагнитного поля, плотность тока и плотность заряда связаны между собой системой уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, & 3. \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ 2. \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & 4. \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Входящие в систему дифференциальные операторы div (дивергенция) и rot (ротор) являются пространственными (объемными) производными, которые определяются следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{a} d\vec{s}}{\Delta V}, \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{-\oint_{\Delta S} [\vec{a} d\vec{s}]}{\Delta V}, \quad (1.7)$$

где $\oint_{\Delta S} \vec{a} d\vec{s}$ - скалярный, а $\oint_{\Delta S} [\vec{a} d\vec{s}]$ - векторный потоки вектора \vec{a} через поверхность ΔS , ограничивающую область ΔV . В декартовых координатах (x, y, z) дивергенция и ротор вычисляются по следующим формулам:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}(\vec{x}^\circ a_x + \vec{y}^\circ a_y + \vec{z}^\circ a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (1.8a)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \quad (1.8b)$$

где $\vec{x}^\circ, \vec{y}^\circ, \vec{z}^\circ$ - единичные векторы, параллельные осям x, y, z .

Заметим, что при решении электродинамических задач используют ту или иную систему координат, а уравнения Максвелла расписывают в координатной форме. Так, например, первое век-

торное уравнение Максвелла в декартовой системе координат представляется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \\ = \vec{x}^\circ \left(\frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x \right) + \vec{y}^\circ \left(\frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y \right) + \vec{z}^\circ \left(\frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z \right), \end{aligned}$$

которое эквивалентно системе трех скалярных уравнений :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z. \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла можно представить и в интегральной форме. Для этого обе части 1-го и 2-го уравнений (1.6) умножим на $d\vec{S}$ и проинтегрируем по произвольной поверхности S , ограниченной контуром L . Применим к интегралам в левых частях теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{a} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{a} d\vec{s}, \quad (1.9a)$$

где $d\vec{l} = \vec{\tau}^\circ dl$; $d\vec{s} = \vec{v}^\circ ds$; $\vec{\tau}^\circ$ - единичный вектор, касательный к контуру L , \vec{v}° - единичный вектор нормали к поверхности S . При интегрировании обход контура L происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора \vec{v}° .

В результате получим 1-ое и 2-ое уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$1. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I^{CM} + I; \quad 2. \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} d\vec{s}, \quad (1.9)$$

$$\text{где} \quad I = \int_S \vec{j} d\vec{s}, \quad I^{CM} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s}$$

По определению величина I^{CM} называется током смещения, а величина $\vec{j}^{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - объемной плотностью тока смещения.

Интегрируя обе части 3-го и 4-го уравнений Максвелла по произвольной области V , ограниченной поверхностью S , и применяя к интегралам в левой части теорему Остроградского-

Гаусса
$$\int_V \text{div} \vec{a} dv = \oint_S \vec{a} d\vec{s}, \quad (1.10a)$$

получим 3-е и 4-е уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$3. \oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q, \quad 4. \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0, \quad (1.10)$$

где $Q = \int_V \rho dv$.

1.3. Основные законы электромагнетизма, выражаемые уравнениями Максвелла

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона Ампера и выражает закон полного тока, из которого следует, что переменное во времени магнитное поле может создаваться как токами проводимости, так и токами смещения. Отсюда следует, что переменное электрическое поле ($\frac{d\vec{D}}{dt} \neq 0$) создает переменное магнитное поле. Этот вывод принадлежит Максвеллу.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции Фарадея, который следует из (1.9), если в качестве контура L взять проводящий контур $L_{пр}$. Из второго уравнения Максвелла также следует, что переменное магнитное ($\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0$) поле создает переменное электрическое поле.

Третье уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса на переменное электрическое поле.

Четвертое уравнение Максвелла отражает тот факт, что в природе нет магнитных зарядов, и силовые линии магнитного поля непрерывны.

Силовыми линиями векторного поля называются линии, которые в каждой точке пространства касаются характеризующего их вектора. При этом густота силовых линий определяет величину поля.

1.4 Уравнение непрерывности и закон сохранения заряда

Возьмем дивергенцию от обеих частей первого уравнения (1.6). Учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$, получаем:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0. \quad (1.11)$$

Это уравнение называется уравнением непрерывности. Оно отражает тот факт, что силовые линии вектора $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right)$, представляющего сумму плотностей токов смещения и проводимости, непрерывны.

Перепишем уравнение (1.11) в виде $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = 0$. Используя третье уравнение Максвелла из (1.6), получаем:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Это уравнение выражает закон сохранения заряда в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение (1.12) по произвольной области V и принимая во внимание, что $\int_V \operatorname{div} \vec{j} dv = \oint_S \vec{j} d\vec{s} = I$, получим соотношение

$$\frac{dQ}{dt} = -I, \quad (1.13)$$

которое выражает закон сохранения заряда в интегральной форме:

величина заряда в области V может измениться только за счет его вытекания из этой области, или за счет его притока извне. При отсутствии движения зарядов ($I = 0$) величина заряда в области V остается постоянной.

1.5. Материальные уравнения и классификация сред

Система уравнений Максвелла (1.6) в математическом смысле не является полной. Первое и второе уравнения этой системы включают пять неизвестных функций. Неполнота системы (1.6) объясняется ее универсальностью: уравнения Максвелла описывают электромагнитные процессы в любых средах, в то время как параметры, характеризующие среду, в них отсутствуют.

В зависимости от вида среды существует функциональная связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} , \vec{j} и \vec{E} , описываемая материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}).$$

В общем случае для произвольной среды материальные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\vec{D} = (\varepsilon_a) \vec{E}, \quad \vec{B} = (\mu_a) \vec{H}, \quad \vec{j} = (\sigma) \vec{E}, \quad (1.14)$$

где (ε_a) , (μ_a) , (σ) - квадратные матрицы третьего порядка (тензоры). Элементы этих матриц представляют собой параметры, характеризующие произвольную среду. Материальное уравнение $\vec{D} = (\varepsilon_a) \vec{E}$ - в координатной форме записывается в виде:

$$D_x = \varepsilon_{axx} E_x + \varepsilon_{axy} E_y + \varepsilon_{axz} E_z,$$

$$D_y = \varepsilon_{ayx} E_x + \varepsilon_{ayy} E_y + \varepsilon_{ayz} E_z,$$

$$D_z = \varepsilon_{azx} E_x + \varepsilon_{azy} E_y + \varepsilon_{azz} E_z,$$

где тензор диэлектрической проницаемости (ε_a) имеет вид:

$$(\varepsilon_a) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{axx} & \varepsilon_{axy} & \varepsilon_{axz} \\ \varepsilon_{ayx} & \varepsilon_{ayy} & \varepsilon_{ayz} \\ \varepsilon_{azx} & \varepsilon_{azy} & \varepsilon_{azz} \end{pmatrix}.$$

Аналогично записываются и два другие материальные уравнения $\vec{B} = (\mu_a)\vec{H}$, $\vec{j} = (\sigma)\vec{E}$ и тензоры (μ_a) и (σ) .

Таким образом, произвольная среда может быть описана 27 параметрами.

Если все параметры среды не зависят от векторов поля, то такая среда называется линейной. Если хотя бы один из параметров зависит от векторов поля, то среда называется нелинейной.

Если все параметры среды не зависят от координат, то такая среда называется однородной. Если хотя бы один из параметров зависит от координат, то среда называется неоднородной.

Среда, свойства которой не зависят от направления в пространстве, называется изотропной средой. В изотропной среде вектор \vec{D} параллелен вектору \vec{E} , вектор \vec{B} параллелен вектору \vec{H} , а вектор \vec{j} параллелен вектору \vec{E} .

Для анизотропной среды нарушается условие параллельности векторов \vec{D} и \vec{E} , или \vec{B} и \vec{H} , или \vec{j} и \vec{E} .

Для изотропной линейной среды материальные уравнения записываются в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.14a)$$

где $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$ - скалярные величины, не зависящие от векторов поля.

Таким образом, изотропная линейная среда характеризуется только тремя параметрами:

ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, имеющая размерность Ф/м (Фарада на метр); μ_a - абсолютная магнитная проницаемость среды, имеющая размерность Гн/м (Генри на метр);

σ - удельная проводимость среды, имеющая размерность $1/(\text{Ом} \cdot \text{м}) = \text{См/м}$ (Сименс на метр).

Часто среды характеризуют относительными проницаемостями, сопоставляя их абсолютные проницаемости с проницаемостями вакуума:

$\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

$\mu = \mu_a / \mu_0$ - относительная магнитная проницаемость среды.

В зависимости от величины σ среды делят на проводники, диэлектрики и среды, занимающие промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

Среда, у которой $\sigma = 0$, называется идеальным диэлектриком, а среда, у которой $\sigma = \infty$, называется идеальным проводником.

В идеальном проводнике могут существовать только токи проводимости с плотностью $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. При этом напряженность электрического поля в идеальном проводнике равна нулю. Поэтому в идеальном проводнике отсутствуют токи смещения:

$$\vec{j}^{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

В идеальном диэлектрике, наоборот, могут существовать лишь токи смещения, а токи проводимости отсутствуют.

В реальных средах могут существовать как токи проводимости, так и токи смещения. Если в среде преобладают токи проводимости, то ее относят к проводнику, а если преобладают токи смещения, то к диэлектрику.

Рассмотрим электромагнитное поле в линейной изотропной среде, вектор напряженности электрического поля которого в каждой точке среды изменяется по закону гармонических колебаний:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_m(\vec{r}) \cdot \cos[\omega \cdot t + \varphi(\vec{r})], \quad (1.15)$$

где $\omega = 2\pi f$ - круговая частота колебаний.

Определим плотности тока проводимости \vec{j} и тока смещения \vec{j}^{CM} :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\vec{j}^{CM} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_a \omega \vec{E}_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Рассмотрим отношение амплитуд этих токов, которое называют тангенсом угла диэлектрических потерь $\tan \delta$:

$$\frac{j_m}{j_m^{CM}} = \frac{\sigma}{\omega \cdot \varepsilon_a} = \operatorname{tg} \delta. \quad (1.16)$$

При $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ среду относят к диэлектрику, а при $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ – к проводнику.

Для металлических проводников, у которых $\sigma \sim 10^7$ [См/м], во всем диапазоне радиочастот $\operatorname{tg} \delta \gg 1$. Поэтому все металлы являются хорошими проводниками.

Электропроводность материалов, использующихся в радиотехнике в качестве диэлектриков, имеет порядок $(10^{-16} \div 10^{-8})$ [См/м]. Для этих сред $\operatorname{tg} \delta \ll 1$.

Среды, у которых на низких частотах $\operatorname{tg} \delta \gg 1$, а на высоких $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ (например, почва земли), относят к средам, занимающим промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.

1.6. Полная система уравнений электродинамики

Уравнения Максвелла (1.6) и материальные уравнения (1.14) образуют полную систему уравнений электродинамики. В этой системе под векторной функцией \vec{j} понимается плотность тока проводимости, возникающего в проводящей среде под действием электрического поля. Однако при решении электродинамических задач обычно выделяют некоторую область пространства V' , в каждой точке которой плотность тока можно считать не зависящей от поля и являющейся заданной функцией координат и времени. При этом электрический ток в области V' рассматривают как первопричину возникновения поля. Этот ток называют сторонним током, создающим или возбуждающим электромагнитное поле.

Распределение стороннего тока в области характеризуется объемной плотностью стороннего тока \vec{j}^{CT} . При этом плотность

тока проводимости \vec{j} во всей рассматриваемой области представляется в виде:

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{j}^{CT} & \text{в области } V' \\ \sigma \vec{E} & \text{вне области } V' \end{cases}$$

или
$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \vec{j}^{CT}. \quad (1.17)$$

С введением сторонних токов полную систему уравнений электродинамики для линейной изотропной среды можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1.) \quad \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} + \vec{j}^{CT} \\ 2.) \quad \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ 3.) \quad \operatorname{div} \varepsilon_a \vec{E} &= \rho, \\ 4.) \quad \operatorname{div} \mu_a \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.7. Граничные условия электродинамики

Уравнения электродинамики (1.18) являются дифференциальными уравнениями в частных производных, которые имеют бесконечное множество решений.

Любая физически реализуемая электродинамическая задача имеет единственное решение, которое получается из решения системы (1.18) при наложении некоторых дополнительных условий. Эти условия называются граничными условиями электродинамики.

Если параметры среды ε, μ, σ являются непрерывными функциями координат во всем бесконечном пространстве, то для единственности решения уравнений электродинамики необходимо наложить только граничное условие на бесконечности.

Если же параметры среды терпят разрыв на некоторых поверхностях, например, на границе раздела двух разнородных сред, то уравнения электродинамики нужно рассматривать в каждой среде, параметры которой непрерывны, а на границе раздела

задавать граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границах раздела сред.

Таким образом, граничные условия электродинамики это некоторые математические соотношения связи для векторов поля на границе раздела двух сред.

Представим векторы поля на границе раздела сред в виде разложения на нормальную $\vec{v}^\circ a_v$ и тангенциальную \vec{a}_τ составляющие:

$\vec{a} = \vec{v}^\circ a_v + \vec{a}_\tau$, где \vec{a} - любой из векторов, характеризующих поле;

\vec{v}° - единичный вектор нормали к касательной плоскости P в произвольной точке O граничной поверхности S , направленный из области II в область I (рис. 1.1).

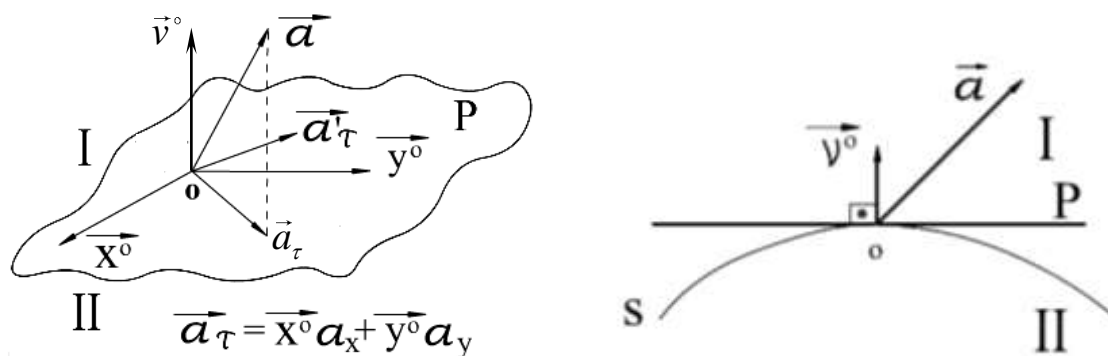


Рис. 1.1 Представление вектора поля на границе раздела сред

Скалярное произведение вектора \vec{a} на единичную нормаль \vec{v}° определяет нормальную составляющую вектора \vec{a} : $\vec{v}^\circ \vec{a} = a_v$.

Векторное произведение вектора \vec{a} на единичную нормаль \vec{v}° определяет тангенциальную составляющую вектора \vec{a} :

$$[\vec{v}^\circ \vec{a}] = [\vec{v}^\circ \vec{a}_\tau] = \vec{a}_\tau', \text{ где } a_\tau' = a_\tau, \vec{a}_\tau' \perp \vec{a}_\tau.$$

Векторную функцию \vec{a} на границе раздела сред при подходе к границе со стороны области I обозначим через \vec{a}_1 , а при подходе со стороны области II через \vec{a}_2 .

Используя уравнения Максвелла в интегральной форме (1.9) и (1.10), можно получить следующие соотношения связи для векторов поля в произвольной точке O граничной поверхности S :

Из третьего уравнения Максвелла (1.10) –

$$1. \quad \vec{v}^\circ \vec{D}_1 - \vec{v}^\circ \vec{D}_2 = \xi, \quad (1.19)$$

где $\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$ - поверхностная плотность электрического заряда в точке О;

ΔS - площадка, содержащая точку О;

ΔQ - величина заряда на площадке ΔS .

Из четвертого уравнения Максвелла (1.10) -

$$2. \quad \vec{v}^\circ \vec{B}_1 - \vec{v}^\circ \vec{B}_2 = 0, \quad (1.20)$$

Из второго уравнения Максвелла (1.9) -

$$3. \quad [\vec{v}^\circ \vec{E}_1] - [\vec{v}^\circ \vec{E}_2] = 0 \quad (1.21)$$

Из первого уравнения Максвелла (1.9) -

$$4. \quad [\vec{v}^\circ \vec{H}_1] - [\vec{v}^\circ \vec{H}_2] = \vec{\eta}, \quad (1.22)$$

где $\vec{\eta} = \vec{i}^\circ \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}$ - поверхностная плотность электрического тока;

\vec{i}° - единичный вектор, указывающий направление движения электрических зарядов в точке О;

Δl - отрезок, перпендикулярный вектору \vec{i}° ;

ΔI - величина тока, пересекающего отрезок Δl .

Формулировка граничных условий

1. Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе раздела сред терпит разрыв, равный поверхностной плотности электрического заряда.

При отсутствии поверхностных зарядов нормальная составляющая вектора электрической индукции непрерывна: $D_{1\nu} = D_{2\nu}$.

2. Нормальная составляющая вектора магнитной индукции на границе раздела сред всегда непрерывна: $B_{1\nu} = B_{2\nu}$. Этот факт связан с тем, что в природе не существует свободных магнитных зарядов.

3. Тангенциальная составляющая напряженности электрического поля на границе раздела сред всегда непрерывна: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

4. Тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе раздела сред терпит разрыв, величина которого определяется поверхностной плотностью электрического тока (рис. 1.2).

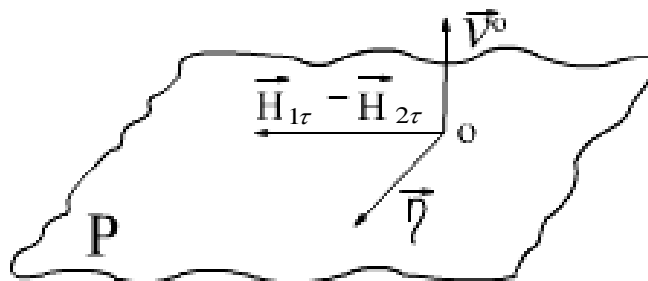


Рис. 1.2. Связь \vec{H}_τ и \vec{j} на границе раздела сред

При отсутствии поверхностных токов тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе раздела сред непрерывна: $\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau}$. Заметим, что поверхностные токи могут быть только на поверхности идеального проводника.

Граничные условия на поверхности идеального проводника.

Из уравнений Максвелла следует, что все характеристики изменяющегося с течением времени электромагнитного поля в идеальном проводнике равны нулю.

Действительно, из третьего уравнения (1.14 а) $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ следует, что при $\sigma = \infty$ напряженность электрического поля в проводнике $\vec{E} = 0$.

Из второго уравнения системы (1.6) следует, что $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$.

Отсюда для переменного во времени поля находим, что и $\vec{B} = 0$.

Далее, из первого и второго уравнений (1.14а) следует, что $\vec{D} = 0$ и $\vec{H} = 0$.

Полагая в общих граничных условиях характеристики поля в области II равными нулю, получим граничные условия на поверхности идеального проводника:

$$1. D_v = \xi; 2. B_v = 0; 3. \vec{E}_\tau = 0; 4. [\vec{v} \circ \vec{H}] = \vec{\eta}. \quad (1.23)$$

Таким образом, на поверхности идеального проводника тангенциальные составляющие напряженности и индукции электрического поля и нормальные составляющие индукции и напряженности магнитного поля равны нулю.

При исследовании электромагнитных полей вблизи металлических тел, удельная проводимость которых $\sigma \sim 10^7$ [См/м], с высокой степенью точности можно считать металлическое тело идеальным проводником, а на его поверхности использовать граничные условия (1.23).

1.8. Теорема Пойнтинга

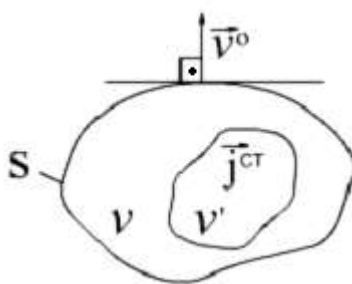


Рис.1.3. Сторонние источники в произвольной области

Рассмотрим произвольную область V , ограниченную поверхностью S , в которой могут находиться источники поля, характеризующиеся объемной плотностью тока \vec{j}^{CT} (рис.1.3).

Из уравнений электродинамики (1.18) может быть получена основная теорема теории электромагнитного поля - теорема Пойнтинга, выражающая закон сохранения энергии:

$$\frac{dW}{dt} = -P, \quad (1.24)$$

где $W = \int_V \left(\frac{\epsilon_a \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \vec{H}^2}{2} \right) dv$ - энергия электромагнитного поля, запасенная в области V ;

P - полная мощность, которую можно представить в виде:

$$P = P^{CT} + P_{\Pi} + P_{\Sigma}, \quad (1.24a)$$

где $P^{CT} = \int_V \vec{j}^{CT} \vec{E} dv < 0$ - мгновенная мощность, вырабатываемая источниками;

$P_{\Pi} = \int_V \sigma \vec{E}^2 dv > 0$ - мгновенная мощность, расходуемая на нагрев среды в области V ;

$P_{\Sigma} = \oint_S [\vec{E} \vec{H}] \vec{ds}$ - мгновенная мощность, проходящая через поверхность S ;

$\vec{\Pi} = [\vec{E} \vec{H}]$ - вектор Пойнтинга, представляющий плотность потока мощности.

Если полная мощность $P = 0$, то энергия электромагнитного поля в области V остается постоянной.

Из (1.24) и (1.24a) следует, что величина электромагнитной энергии в области V может измениться в силу ряда причин:

1) за счет действия источников она возрастает:

$$P^{CT} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dt} > 0;$$

2) за счет нагрева среды она уменьшается:

$$P_{\Pi} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{dW}{dt} < 0;$$

3) за счет излучения из области V , когда $P_{\Sigma} > 0$, она уменьшается:

$$\frac{dW}{dt} < 0;$$

4) за счет притока энергии извне, когда $P_{\Sigma} < 0$ возрастает:

$$\frac{dW}{dt} > 0.$$

Доказательство теоремы Пойнтинга

Умножая обе части первого уравнения системы (1.18) скалярно на вектор \vec{E} , а обе части второго - на вектор \vec{H} , вычитая затем почленно первое из второго и используя тождество векторного анализа

$$\operatorname{div}[\vec{a}\vec{b}] = \vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b}, \quad (1.25)$$

получим следующее соотношение:

$$\operatorname{div}[\vec{E}\vec{H}] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a \vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_a \vec{H}^2}{2} \right) - \sigma \vec{E}^2 - \vec{j}^{CT} \vec{E}. \quad (1.26)$$

Интегрируя обе части выражения (1.26) по произвольному объему V и применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а), получим уравнение энергетического баланса (1.24).

1.9. Уравнения электродинамики и теорема Пойнтинга для монохроматического электромагнитного поля

Монохроматическим электромагнитным полем называется электромагнитное поле, все характеристики которого изменяются с течением времени по закону гармонических колебаний, т.е. колеблются с круговой частотой ω .

В этом случае выражения для векторов \vec{E} и \vec{H} можно представить в виде:

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t} \right), \quad \vec{H} = \operatorname{Re} \left(\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t} \right)$$

где $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ - комплексные амплитуды векторов \vec{E} и \vec{H} , удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 1). \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i\omega \dot{\varepsilon}_a \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{CT} \\ 2). \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega \dot{\varepsilon}_a \mu_a \dot{\vec{H}}_m, \end{aligned} \quad (1.28)$$

в которую входит комплексная электрическая проницаемость среды

$$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - i \operatorname{tg} \delta).$$

Уравнения (1.28) называются уравнениями электродинамики для комплексных амплитуд поля, или уравнениями электродинамики в комплексной форме.

Используя тождество векторного анализа $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} \equiv 0$ и закон сохранения заряда (1.12), из уравнений (1.28) легко получить третье и четвертое уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$3). \operatorname{div} \vec{D}_m = \dot{\rho}_m.$$

$$4). \operatorname{div} \vec{B}_m = 0. \quad (1.28a)$$

В дальнейшем будем рассматривать только монохроматические поля, имея в виду, что любой электромагнитный сигнал может быть представлен в виде ряда или интеграла Фурье по гармоническим составляющим.

Для монохроматического электромагнитного поля важными представляются средние значения энергетических характеристик. Среднее значение периодической функции (скалярной или векторной) определяется по формуле:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (1.29)$$

где T - период колебания.

Используя эту формулу, выражения для энергетических характеристик, рассмотренных в разделе [1.6], а также введенные выше понятия комплексных амплитуд, можно получить следующие выражения для средних значений энергии электромагнитного поля \bar{W} , мощности тепловых потерь \bar{P}_Π , мощности источников \bar{P}^{CT} мощности излучения \bar{P}_Σ и вектора Пойнтинга $\bar{\vec{P}}$:

$$\bar{W}^\varnothing = \frac{1}{4} \int_V \varepsilon_a \vec{E}_m \vec{E}_m^* dv; \quad \bar{W}^M = \frac{1}{4} \int_V \mu_a \vec{H}_m \vec{H}_m^* dv,$$

$$\bar{W} = \bar{W}^\varnothing + \bar{W}^M,$$

$$\bar{P}_\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \vec{E}_m \vec{E}_m^* dv,$$

$$\overline{P}^{CT} = \operatorname{Re} \dot{P}^{CT}; \quad \dot{P}^{CT} = \frac{1}{2} \int_V \dot{j}_m^{CT*} \dot{E}_m dv,$$

$$\overline{P}_\Sigma = \operatorname{Re} \dot{P}_\Sigma; \quad \dot{P}_\Sigma = \oint_S \dot{\vec{P}} d\vec{S}; \quad \overline{\dot{P}} = \operatorname{Re} \dot{\vec{P}},$$

$$\dot{\vec{P}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] - \text{комплексный вектор Пойнтинга.}$$

Средние значения энергетических характеристик связаны между собой следующим соотношением

$$i2\omega(\overline{W}^M - \overline{W}^\mathcal{O}) = -\overline{P}_\Pi - \dot{P}_\Sigma - \dot{P}^{CT}, \quad (1.30)$$

которое представляет собой математическую формулировку теоремы Пойнтинга для комплексных амплитуд поля или теорему Пойнтинга в комплексной форме.

Доказательство теоремы Пойнтинга

Перепишем первое уравнение системы (1.28) для комплексно сопряженных значений входящих в него величин:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^* = -i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m^* + \sigma \dot{\vec{E}}_m^* + \dot{j}_m^{CT*}.$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_m$, а обе части второго уравнения (1.28) – скалярно на вектор $\dot{\vec{H}}_m^*$, затем, вычитая почленно первое из второго и используя тождество (1.25), получим следующее соотношение:

$$\operatorname{div} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] = i\omega \left(\varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* - \mu_a \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right) - \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* - \dot{j}_m^{CT*} \dot{\vec{E}}_m.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по произвольному объему V , применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а) и используя выражения для средних значений энергетических характеристик, получим соотношение, совпадающее с (1.30).

Из соотношения (1.30) можно получить уравнение энергетического баланса для средних мощностей, приравняв в нём действительные части

$$-\overline{P^{CT}} = \overline{P_{\Pi}} + \overline{P_{\Sigma}}. \quad (1.31)$$

Физический смысл этого уравнения состоит в том, что мощность, вырабатываемая источником, в общем случае расходуется на нагрев среды в области V и на излучение из этой области. Полагая удельную проводимость среды равной нулю ($\sigma = 0$), можно определить мощность источников через мощность излучения: если

$$\overline{P_{\Pi}} = 0, \quad \text{то} \quad -\overline{P^{CT}} = \overline{P_{\Sigma}}$$

1.10. Теорема единственности для внутренних и внешних задач электродинамики

Внутренняя задача

Внутренняя задача электродинамики формулируется следующим образом.

В произвольной области V , представляющей линейную изотропную среду, заданы источники электромагнитного поля, определяемые через объемную плотность сторонних токов \vec{j}_m^{CT} .

На поверхности S , ограничивающей область V , заданы граничные условия одного из трех типов:

- 1) на всей поверхности задана тангенциальная составляющая напряженности электрического поля;
- 2) на всей поверхности задана тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля;
- 3) на части поверхности S_1 задана тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, а на остальной части поверхности S_2 ($S_1 + S_2 = S$) – тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля.

Требуется найти напряженности электрического и магнитного полей в произвольной точке области V , удовлетворяющие уравнениям (1.28) и заданным граничным условиям на поверхности S .

Внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение, если удельная проводимость среды в области V отлична от нуля ($\sigma \neq 0$).

Доказательство

Допустим, что существуют два решения поставленной задачи:

$$\dot{\vec{E}}_{m1}, \dot{\vec{H}}_{m1} \quad \text{и} \quad \dot{\vec{E}}_{m2}, \dot{\vec{H}}_{m2}$$

Составим разность этих решений $\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{\vec{E}}_{m2}$; $\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2}$ и запишем уравнение энергетического баланса в области V для средних мощностей разностного поля, полагая в (1.31) $\overline{P_\Sigma} = \overline{P_S} = 0$ и $\overline{P^{CT}} = 0$:

$$\overline{P_\Pi} = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* dv = 0. \quad (1.32)$$

При $\sigma \neq 0$ подынтегральная функция в (1.32) положительна. Отсюда следует, что $\dot{\vec{E}}_m \equiv 0$, а из второго уравнения (1.28) следует, что и $\dot{\vec{H}}_m = 0$.

Внешняя задача

Для внешней задачи электродинамики источники заданы вне области V , и требуется найти напряженности электрического и магнитного полей вне этой области, удовлетворяющие системе (1.28) и граничным условиям одного из трех рассмотренных выше типов на поверхности S этой области (рис.1.4).

Внешняя задача электродинамики имеет единственное решение в классе полей, убывающих на бесконечности быстрее чем $\frac{1}{r}$.

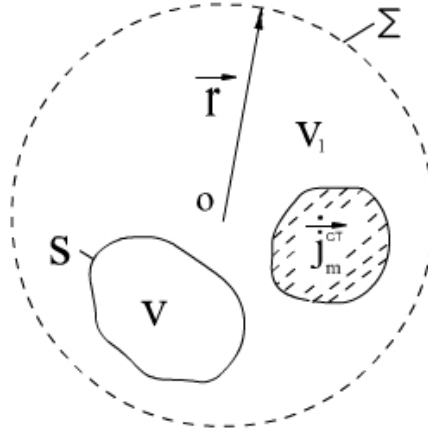


Рис.1.4. Внешняя область.

Доказательство

Составляя, как и прежде разностное решение, покажем, что оно равно нулю:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_{m1} - \dot{\vec{E}}_{m2} = 0, \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2} = 0.$$

С этой целью запишем уравнение энергетического баланса (1.31) для средних мощностей разностного поля в области V_1 , ограниченной поверхностью S и сферической поверхностью Σ , радиус которой стремится к бесконечности. Учитывая, что для разностного поля $\overline{P^{CT}} = 0$, $\overline{P_S} = 0$, получаем:

$$\oint_{\Sigma} \vec{P} d\vec{S} + \frac{1}{2} \int_{V_1} \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* dv = 0. \quad (1.33)$$

Если $\sigma \neq 0$, то величина вектора Пойнтинга убывает быстрее чем $\frac{1}{r^2}$. Поэтому $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{Re} \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} [\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^*] d\vec{s} = 0$, и из (1.33) следует, что $\dot{\vec{E}}_m = 0$, а из второго уравнения (1.28) следует, что $\dot{\vec{H}}_m = 0$.

Таким образом, для полей, убывающих на бесконечности быстрее чем $\frac{1}{r}$, а это всегда имеет место вследствие потерь в среде, внешняя задача имеет единственное решение.

Заметим, что внешняя задача электродинамики имеет единственное решение и в среде без потерь ($\sigma = 0$). Это решение можно

получить, переходя к пределу в решении, полученном при $\sigma \neq 0$, полагая в нем $\sigma = 0$.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Постановка задачи

Под электромагнитными волнами понимают электромагнитное поле, переносящее электромагнитную энергию от источника в окружающее пространство.

Свободное пространство это линейная, изотропная, однородная среда с параметрами ε , μ и σ .

Задача возбуждения ставится следующим образом.

В некоторой конечной области пространства V' заданы источники, характеризуемые объемной плотностью сторонних токов \dot{j}_m^{CT} . Требуется найти напряженности электрического \dot{E}_m , и магнитного \dot{H}_m полей в произвольной точке пространства, созданные данными сторонними токами и удовлетворяющие неоднородной системе уравнений Максвелла (1.28).

Задача возбуждения электромагнитных волн в свободном пространстве является внешней задачей электродинамики и имеет единственное решение в классе полей, удовлетворяющих условию излучения на бесконечности:

$$0 \leq \oint_{\Sigma_\infty} \vec{P} \, d\vec{S} < \infty, \quad (2.1)$$

где Σ_∞ - поверхность сферы радиуса r при $r \rightarrow \infty$.

Физический смысл соотношения (2.1) состоит в том, что при отсутствии потерь ($\sigma = 0$) амплитуды векторов поля убывают на бесконечности как $\frac{1}{r}$, а поток вектора Пойнтинга через поверхность сферы радиуса r при $r \rightarrow \infty$ имеет конечную положительную величину. При наличии сколь угодно малых потерь

($\sigma \neq 0$) амплитуды векторов поля убывают на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а поток вектора Пойнтинга $\oint_{\Sigma_\infty} \vec{P} \, d\vec{s} = 0$.

2.2. Волновые уравнения электродинамики Векторный потенциал

Из системы уравнений (1.28) можно получить так называемые волновые уравнения электродинамики относительно векторов поля \vec{E}_m и \vec{H}_m .

Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения (1.28):

$$\text{rot rot } \vec{H}_m = i\omega \vec{\epsilon}_a \vec{E}_m + \text{rot } \vec{j}_m^{CT} \quad (2.2)$$

Левую часть полученного уравнения преобразуем, используя тождество векторного анализа

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}, \quad (2.3)$$

где Δ - оператор Лапласа, а в правую часть подставим $\text{rot } \vec{E}_m$ из второго уравнения (1.28). В результате получим неоднородное волновое уравнение относительно \vec{H}_m :

$$\Delta \vec{H}_m + k^2 \vec{H}_m = -\text{rot } \vec{j}_m^{CT}, \quad (2.4)$$

где $k = \omega \sqrt{\vec{\epsilon}_a \mu_a}$ и учтено, что в соответствии с (1.28a)

$$\text{div } \vec{H}_m = 0 \quad (2.5)$$

С учетом тождества векторного анализа

$$\text{div rot } \vec{a} \equiv 0 \quad (2.6)$$

из соотношения (2.5) следует, что напряженность магнитного поля можно представить в виде:

$$\vec{H}_m = \text{rot } \vec{A}_m, \quad (2.7)$$

где векторная функция \vec{A}_m , называемая векторным потенциалом, удовлетворяет волновому уравнению:

$$\Delta \vec{A}_m + k^2 \vec{A}_m = -\vec{j}_m^{CT}. \quad (2.8)$$

Используя (2.7), (2.8) и тождество (2.3), из первого уравнения системы (1.28) получим следующее выражение для вектора \vec{E}_m :

$$\vec{E}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon_a} \left(\text{grad div} \vec{A}_m + k^2 \vec{A}_m \right). \quad (2.9)$$

Таким образом, решив уравнение для векторного потенциала (2.8), можно по формулам (2.7) и (2.9) найти напряженности электрического и магнитного полей.

2.3. Векторный потенциал элемента электрического тока

Элементом электрического тока называется точечный источник, характеризуемый моментом:

$$\vec{P}_m^{CT} = \vec{I}_m^{CT} \vec{l} = \int_{V'} \vec{j}_m^{CT} dv' \quad (2.10)$$

где l - длина элемента, а \vec{I}_m^{CT} - комплексная амплитуда стороннего тока.

Рассмотрим задачу о нахождении векторного потенциала элемента электрического тока, расположенного в начале системы координат и направленного вдоль оси z (рис.2.1).

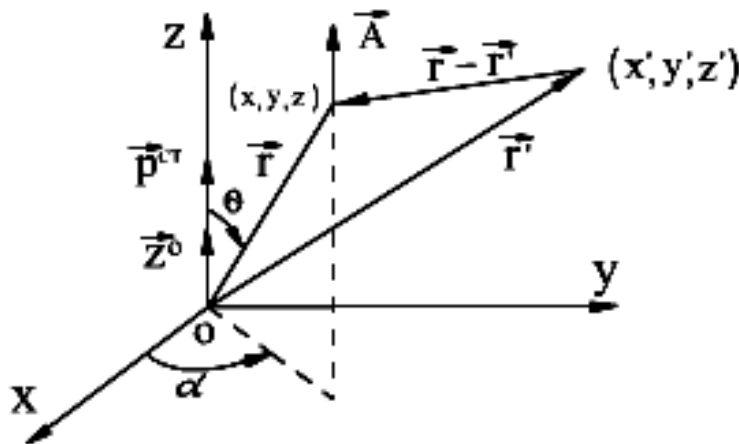


Рис.2.1.Элемент с током в совмещенных координатных системах (x, y, z) и (r, θ, α)

Во всех точках пространства, за исключением начала координат, векторный потенциал удовлетворяет однородному волновому уравнению (уравнению (2.8) при $\dot{j}_m^{CT} = 0$):

$$\Delta \vec{\dot{A}}_m + k^2 \vec{\dot{A}}_m = 0. \quad (2.11)$$

Из (2.8) следует, что векторный потенциал элемента тока параллелен элементу, и его можно представить в виде:

$$\vec{\dot{A}}_m = \vec{z}^0 \dot{A}_m \quad (2.12)$$

При этом функция \dot{A}_m удовлетворяет скалярному волновому уравнению

$$\Delta \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = 0 \quad (2.13)$$

В силу центральной симметрии величина \dot{A}_m зависит только от величины радиуса- вектора \vec{r} и не зависит от его направления в пространстве, определяемого угловыми координатами θ и α . При этом величина $\Delta \dot{A}_m$ с учетом тождества векторного анализа

$$\Delta \dot{A}_m = \text{div grad } \dot{A}_m \quad (2.14)$$

в сферической системе координат представляется выражением

$$\Delta \dot{A}_m = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \dot{A}_m}{dr} \right),$$

и уравнение (2.13) приводится к виду:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \dot{A}_m}{dr} \right) + k^2 \dot{A}_m = 0. \quad (2.15)$$

Решаем уравнение (2.15) с помощью подстановки

$$\dot{A}_m = \frac{\dot{F}_m}{r}, \quad (2.16)$$

которая приводит к следующему уравнению для функции \dot{F}_m :

$$\frac{d^2 \dot{F}_m}{dr^2} + k^2 \dot{F}_m = 0 . \quad (2.17)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\dot{F}_m = \dot{C}_1 e^{-jkr} + \dot{C}_2 e^{jkr} . \quad (2.18)$$

Так как функция $e^{jkr} = e^{j(k' - ik'')r} = e^{k''r} e^{jk'r}$ ($k' > 0, k'' > 0$) стремится к бесконечности при $r \rightarrow \infty$, то постоянная $C_2 = 0$. Постоянную C_1 найдем, используя неоднородное волновое уравнение (2.8), правая часть которого удовлетворяет условию:

$$\int_{V \rightarrow 0} \dot{j}_m^{CT} dv' = \vec{z}^0 \dot{I}_m^{CT} l , \quad (2.19)$$

где V - область в окрестности точки O (рис.2.1.).

Подставляя в уравнение (2.8) векторный потенциал в виде $\dot{A}_m = \vec{z}^0 \dot{C}_1 \frac{e^{-ikr}}{r}$, интегрируя слева и справа по объему шара радиуса r и устремляя затем r к нулю, получаем:

$$\int_{V \rightarrow 0} \text{div grad} \left(\dot{C}_1 \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dv' + k^2 \int_{V \rightarrow 0} \dot{C}_1 \frac{e^{-ikr}}{r} dv' = -\dot{I}_m^{CT} l . \quad (2.20)$$

Второй интеграл в левой части этого уравнения равен нулю. Первый интеграл преобразуем, используя теорему Остроградского-Гаусса (1.10а):

$$\begin{aligned} \int_{V \rightarrow 0} \text{div grad} \left(\dot{C}_1 \frac{e^{-ikr}}{r} \right) dv' &= \dot{C}_1 \oint_{S_r \rightarrow 0} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{r}^\circ ds = \dot{C}_1 \oint_{S_r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \vec{r}^\circ \vec{r}^\circ ds = \\ &= \dot{C}_1 \left(-\frac{1}{r^2} \right) 4\pi r^2 \Big|_{r \rightarrow 0} = -\dot{C}_1 4\pi \end{aligned} \quad (2.21)$$

и получаем $-\dot{C}_1 4\pi = -\dot{I}_m^{CT} l$, откуда

$$\dot{C}_1 = \frac{\dot{I}_m^{CT} l}{4\pi} .$$

Окончательное выражение для векторного потенциала элемента электрического тока имеет вид:

$$\vec{A}_m = \vec{z}_0 \frac{\dot{I}_m^{CT} l}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.22)$$

Если элемент тока расположен в произвольной точке пространства, определяемой радиусом- вектором $\vec{r}'(x', y', z')$ (рис.2.1.), то выражение для векторного потенциала можно представить в виде:

$$\vec{A}_m = \frac{\dot{I}_m^{CT} \vec{l}}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (2.23)$$

где $|\vec{r}-\vec{r}'|$ - расстояние между элементом тока и точкой пространства, в которой определяется \vec{A}_m .

2.4. Векторный потенциал линейного, поверхностного и объемного токов

Линейным током называется ток, распределенный вдоль некоторого проводящего контура L . Разбивая этот контур на бесконечное множество элементов тока, определяя векторный потенциал каждого такого элемента и суммируя потенциалы от всех элементов, что сводится к вычислению интеграла по контуру L , получим следующее выражение для векторного потенциала линейного тока:

$$\vec{A}_m = \int_L \dot{I}_m^{CT}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{l}'. \quad (2.24)$$

Подынтегральное выражение в (2.24) представляет векторный потенциал элемента электрического тока с моментом $\dot{I}_m^{CT}(\vec{r}')d\vec{l}'$, расположенного в точке \vec{r}' , а сам интеграл - полный векторный потенциал тока, распределенного на контуре L .

Поверхностным током называется ток, распределенный на некоторой поверхности S с поверхностно плотностью $\dot{\vec{\eta}}_m^{CT}$ (рис.2.2.).

Рассматриваем плоский элемент поверхности $ds' = dl' \cdot dh'$ как элемент электрического тока с моментом

$$\dot{I}_m^{CT} \vec{dl}' = \dot{\eta}_m^{CT} dh' \vec{dl}' = \dot{\eta}_m^{CT} ds' \quad ,$$

векторный потенциал которого \vec{A}_m определяется выражением (2.23):

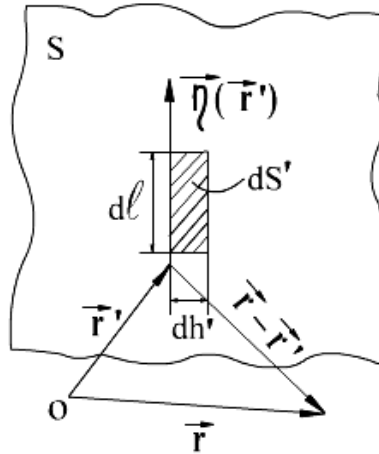


Рис.2.2.Элемент поверхностного тока

$$d \vec{A}_m = \dot{\eta}_m^{CT}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' \quad (2.23a)$$

Полный векторный потенциал поверхностного тока определяется интегрированием выражения (2.23a) по поверхности S :

$$\vec{A}_m = \int_S \dot{\eta}_m^{CT}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} ds' \quad (2.25)$$

Объемным током называется ток, распределенный в некотором объеме V с объемной плотностью \vec{j}_m^{CT} (рис.2.3.).Выделяем элементарный цилиндрический объем $dv' = ds' \cdot dl'$ и рассматриваем его как элемент электрического тока, векторный потенциал которого определяется выражением (2.23), в котором нужно положить:

$$\dot{I}_m^{CT} \vec{l} = \dot{j}_m^{CT} ds' \vec{dl}' = \vec{j}_m^{CT} dv' \quad .$$

При этом

$$d\vec{A}_m = \vec{j}_m^{CT}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv', \quad (2.236)$$

и полный векторный потенциал определяется интегрированием выражения (2.236) по объему проводника v :

$$\vec{A}_m = \int_v \vec{j}_m^{CT}(\vec{r}') \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv'. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) дает решение неоднородного волнового уравнения (2.8).

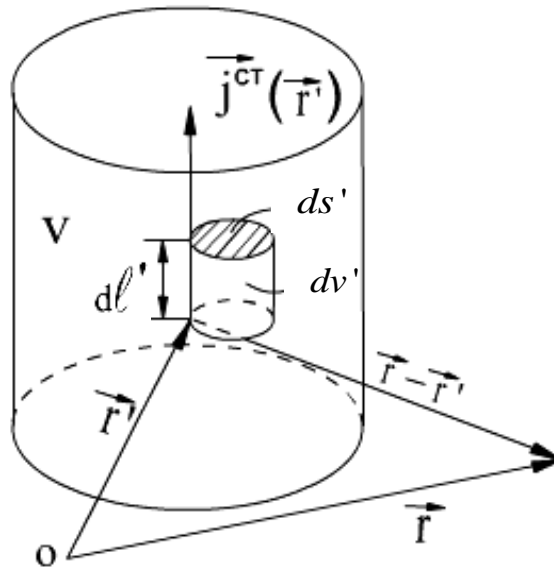


Рис.2.3.Элемент объемного тока

2.5. Электромагнитное поле поверхностного тока, равномерно распределенного на бесконечной плоскости. Плоские однородные волны (ПОВ)

Введем декартову систему координат x, y, z , (рис.2.4.), и пусть в плоскости $z=0$ задан сторонний ток, поверхностная плотность которого постоянна, и представляется в виде.

$$\vec{\dot{\eta}}_m^{CT} = -\vec{x}^0 \dot{\eta}_m^{CT}. \quad (2.27)$$

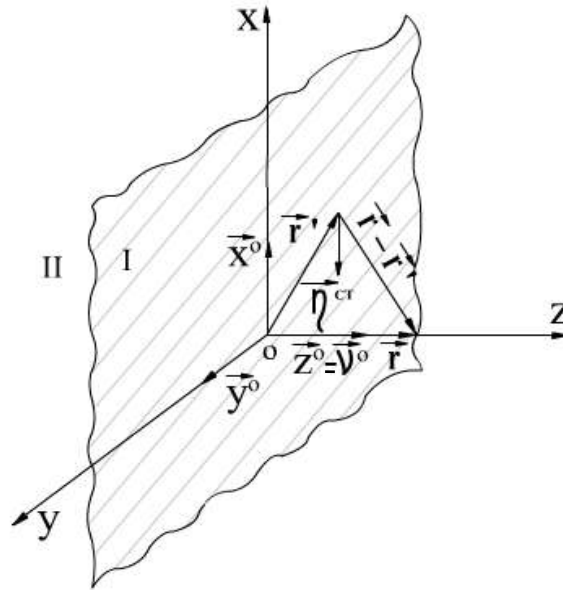


Рис.2.4. Поверхностный ток на бесконечной плоскости

Требуется определить поля \vec{E}_m и \vec{H}_m в произвольной точке пространства по обе стороны плоскости $z=0$ с током $\dot{\vec{\eta}}^{ct}$.

Сначала определим векторный потенциал \vec{A}_m , который, в силу плоскостной симметрии задачи, зависит только от координаты z и в соответствии с уравнением (2.8) и представлением тока (2.27) имеет лишь x -овую составляющую: $\vec{A}_m = \vec{x}^o \dot{A}_m(z)$.

В произвольной точке вне плоскости $z=0$ ($|z|>0$) функция $\dot{A}_m(z)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению, которое в декартовой системе координат при отсутствии зависимости от x и y имеет вид:

$$\frac{d^2 \dot{A}_m}{dz^2} + k^2 \dot{A}_m = 0, \quad |z| > 0 \quad (2.28)$$

Общее решение уравнения (2.28) можно представить формулой:

$$\dot{A}_m = \dot{C}_1 e^{-ikz} + \dot{C}_2 e^{ikz}$$

Функция $e^{-ikz} = e^{-k''z} e^{-k'z}$ ($k'' > 0$) стремится к бесконечности при $z \rightarrow -\infty$, а функция $e^{ikz} = e^{k''z} e^{k'z}$ стремится к бесконечности при $z \rightarrow \infty$. поэтому выражения для векторного потенциала представляем в виде:

$$\vec{A}_m = \vec{x}^0 \begin{cases} \dot{C}_1 e^{-ikz}, & z > 0 \\ \dot{C}_2 e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}, \quad (2.29)$$

Используя (2.9) и учитывая, что $\text{div} \vec{A}_m = 0$, получим следующее выражение для напряженности электрического поля:

$$\vec{E}_m = -i \dot{W} k \vec{A}_m = -\vec{x}^0 i \dot{W} k \begin{cases} \dot{C}_1 e^{-ikz}, & z > 0 \\ \dot{C}_2 e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}, \quad (2.30)$$

где $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$, $\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dot{C}$, что следует из условия непрерывности

тангенциальной составляющей напряженности электрического поля при $z=0$.

Используя (2.7), получим следующее выражение для напряженности магнитного поля:

$$\vec{H}_m = \text{rot} \vec{A}_m = \begin{vmatrix} \vec{x}^0 & \vec{y}^0 & \vec{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{A}_{mx} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{y}^0 \frac{\partial \dot{A}_{mx}}{\partial z},$$

$$\vec{H}_m = \begin{cases} \vec{y}^0 (-ik) \dot{C} e^{-ikz}, & z > 0 \\ \vec{y}^0 (ik) \dot{C} e^{ikz}, & z < 0 \end{cases}. \quad (2.31)$$

Используя граничное условие (1.22) для напряженности магнитного поля, получим:

$$\begin{aligned} \left[\vec{z}^\circ \left(\dot{\vec{H}}_m|_{z=+0} - \dot{\vec{H}}_m|_{z=-0} \right) \right] &= \left[\vec{z}^\circ \left(-i\dot{k}\dot{C}\vec{y}^\circ - \left(i\dot{k}\dot{C}\vec{y}^\circ \right) \right) \right] = -i2\dot{k}\dot{C}[\vec{z}^\circ\vec{y}^\circ] = \\ &= \vec{x}^\circ i2\dot{k}\dot{C} = \dot{\vec{\eta}}_m^{CT} = -\vec{x}^\circ \dot{\eta}_m^{CT} \end{aligned}$$

Отсюда $i2\dot{k}\dot{C} = -\dot{\eta}_m^{CT}$, $\dot{C} = -\frac{\dot{\eta}_m^{CT}}{i2\dot{k}}$ и выражения для напряженности полей \vec{E}_m и $\dot{\vec{H}}_m$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m &= \begin{cases} \vec{y}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{CT}}{2} e^{-i\dot{k}z}, z > 0 \\ -\vec{y}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{CT}}{2} e^{i\dot{k}z}, z < 0 \end{cases} \\ \dot{\vec{E}}_m &= \vec{x}^\circ \frac{\dot{\eta}_m^{CT}}{2} \dot{W} e^{-i\dot{k}|z|} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Электромагнитное поле, определяемое выражениями (2.32), удовлетворяет при $|z|>0$ однородной системе уравнений электродинамики (системе (1.28) при $\dot{j}_m^{CT}=0$) и граничным условиям (1.21), (1.22) на плоскости $z=0$.

Таким образом, выражения (2.32), в силу теоремы единственности, являются решением поставленной задачи.

Электромагнитное поле, напряженность которого определяется этими выражениями, представляет собой плоскую однородную электромагнитную волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z при $z > 0$ и в отрицательном – при $z < 0$. При этом комплексные амплитуды $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ связаны между собой соотношениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{\pi}^0 \right]; \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{\pi}^0, \dot{\vec{E}}_m \right], \quad (2.33)$$

где $\vec{\pi}^0$ - единичный вектор, указывающий направление распространения волны

$$\vec{\pi}^0 = \begin{cases} \vec{z}_0 & \text{при } z > 0 \\ -\vec{z}_0 & \text{при } z < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, поверхностный электрический ток, равномерно распределенный на бесконечной плоскости $z=0$, возбуждает плоские однородные волны, распространяющиеся в обе стороны от этой плоскости.

Постоянные $\dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \mu_a}$ и $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ являются важными

электродинамическими параметрами. Постоянная \dot{k} называется волновым числом, а постоянная \dot{W} - волновым сопротивлением среды.

Используя формулу (1.28а), представим выражения для \dot{k} и \dot{W} в виде:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_a \mu_a} = k \sqrt{1 - i \cdot \operatorname{tg} \delta} = k' - ik'', (k' > 0, k'' > 0) \\ \dot{W} &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}} = \frac{W}{\sqrt{1 - i \cdot \operatorname{tg} \delta}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ и $W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ - волновое число и волновое сопротивление при $\sigma = 0$.

2.6. Основные характеристики ПОВ

Рассмотрим ПОВ, распространяющуюся в положительном направлении оси z . Ось x совместим с направлением вектора \vec{E} . Выражения для комплексных амплитуд полей представим в виде:

$$\vec{E}_m = \vec{x}^\circ \dot{A} e^{-ikz}; \quad \vec{H}_m = \vec{y}^\circ \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ikz} \quad (2.35)$$

где $\dot{A} = |\dot{A}|e^{i\varphi_A}$ - комплексная константа.

Запишем выражения для мгновенных значений векторов поля:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \text{Re}(\dot{\vec{E}}_m e^{i\omega t}) = \vec{x}^\circ |\dot{A}| e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_A), \\ \vec{H} &= \text{Re}(\dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t}) = \vec{y}^\circ \frac{|\dot{A}|}{|\dot{W}|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_A - \varphi_W). \quad (2.36)\end{aligned}$$

Дадим некоторые важные определения:

1. Амплитудой волны называется максимальное значение

напряжённости электрического поля $E_m = |\dot{A}| e^{-k''z}$ или

максимальное значение напряжённости магнитного поля

$$H_m = \frac{1}{|\dot{W}|} \cdot E_m. \text{ Коэффициент } k'' \text{ называется } \underline{\text{коэффициентом}}$$

затухания.

Если амплитуда волны не зависит от поперечных координат (x,y), то такая волна называется однородной.

2. Фазой волны называется аргумент косинусоидальной функции в выражениях (2.36) для напряжённости электрического поля или магнитного поля: $\Phi^E = \omega t - k'z + \varphi_A$, $\Phi^H = \Phi^E - \varphi_W$. Коэффициент

$k' = \text{Re } \dot{k}$ называется коэффициентом фазы.

3. Фронтом волны называется поверхность, в каждой точке которой фаза волны одна и та же. В рассматриваемом нами случае такой поверхностью является плоскость $z = \text{const}$, поэтому и волна называется плоской.

4. Фазовой скоростью волны называется скорость перемещения фронта волны:

$$v_\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (2.37)$$

где Δz - перемещение фронта волны за время Δt .

Приравнявая фазы $\Phi(t, z) = \Phi(t + \Delta t, z + \Delta z)$ и используя выражение (2.37), получим следующую формулу для расчёта фазовой скорости:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'}. \quad (2.38)$$

5. Длиной волны называется расстояние, на котором фаза волны изменяется на величину 2π :

$$\Phi(t, z) - \Phi(t, z + \lambda) = 2\pi \quad (2.39)$$

Отсюда, используя выражение для фазы, получаем следующую формулу для расчёта λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} \quad (2.40)$$

Характеристики ПОВ, распространяющейся в идеальном диэлектрике.

Для идеального диэлектрика: $\sigma = 0$,

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} = 0, \quad k' = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad k'' = 0, \quad \dot{W} = W = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}.$$

Амплитуда волны $E_m = \text{const}$ (не зависит от z), $H_m = \frac{E_m}{W}$.

Фаза волны: $\Phi^E = \Phi^H = \omega t - kz + \varphi_A, (\varphi_W = 0)$.

Фазовая скорость: $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$,

где $C = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ м/с}$ - скорость света в вакууме.

Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{C}{f \sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \text{где } \lambda_0 = \frac{C}{f}, \text{ а частота}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Характеристики ПОВ, распространяющейся в неидеальном диэлектрике ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$).

$$\dot{k} = k\sqrt{1-itg\delta} \approx k(1-i\frac{tg\delta}{2}); k' = k, k'' = k\frac{tg\delta}{2}$$

$$\dot{W} = \frac{W}{\sqrt{1-itg\delta}} \approx W, \phi_w = 0.$$

Амплитуда волны: $E_m = E_0 e^{-k''z} = E_0 e^{-k\frac{tg\delta}{2}z}. \quad (2.41)$

Остальные характеристики рассчитываются по тем же формулам, что и для идеального диэлектрика.

Характеристики ПОВ, распространяющиеся в проводнике ($tg\delta \gg 1$).

$$\dot{k} = k\sqrt{1-itg\delta} \approx k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}(1-i); k' = k'' = k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}};$$

$$\dot{W} = \frac{W}{\sqrt{1-itg\delta}} \approx \frac{W}{\sqrt{tg\delta}} e^{i\frac{\pi}{4}}, \phi_w = \frac{\pi}{4}$$

Амплитуда волны: $E_m = E_0 e^{-k''z} = E_0 e^{-k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}z}. \quad (2.42)$

Фаза волны: $\Phi^E = \omega t - k'z + \varphi_A, \Phi^H = \Phi^E - \frac{\pi}{4}.$

Фазовая скорость: $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}}$

Длина волны: $\lambda = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{k\sqrt{\frac{tg\delta}{2}}}$

Очевидно, что фазовая скорость и длина волны в проводнике гораздо меньше, чем в диэлектрике (в $\sqrt{tg\delta/2}$ раз).

Сравним затухание волны в диэлектрике и в проводнике на расстоянии $z = \lambda = \frac{2\pi}{k'}.$

В диэлектрике ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$) волна с амплитудой E_0 , пройдя расстояние $z = \lambda$, имеет амплитуду:

$E_m^D = E_0 e^{-k(\operatorname{tg} \delta / 2)(\frac{2\pi}{k})} = E_0 e^{-\pi \cdot \operatorname{tg} \delta} \approx E_0 (1 - \pi \cdot \operatorname{tg} \delta) \approx E_0$ (здесь использовано разложение в степенной ряд функции e^{-x} при малых x). Таким образом, амплитуда волны практически не меняется.

В проводнике ($\operatorname{tg} \delta \gg 1$) волна с амплитудой E_0 , пройдя расстояние $z = \lambda$, имеет амплитуду

$$E_m^{np} = E_0 e^{-k''(2\pi/k')} = E_0 e^{-2\pi} \approx 0.001867 E_0.$$

Т.о., амплитуда волны уменьшается более чем в 500 раз.

2.7. ПОВ с линейной, круговой и эллиптической поляризацией векторов поля.

Введём понятие плоскости поляризации.

Плоскостью поляризации называется плоскость, которая проходит через направление распространения волны и вектор напряжённости электрического поля \vec{E} .

В общем случае выражения для комплексных амплитуд векторов поля ПОВ является частным решением однородной системы уравнений электродинамики, зависящим только от одной координаты z , и представляется в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{E}}_m &= (\vec{x}^0 \dot{A}_1 + \vec{y}^0 \dot{A}_2) e^{-ikz}, & \dot{A}_1 &= |\dot{A}_1| e^{i\varphi_1} \\ \dot{H}_m &= \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{z}^0 \dot{\vec{E}}_m \right] = \frac{e^{-ikz}}{\dot{W}} (\vec{y}^0 \dot{A}_1 - \vec{x}^0 \dot{A}_2), & \dot{A}_2 &= |\dot{A}_2| e^{i\varphi_2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Электромагнитное поле, соответствующее этим представлениям, можно рассматривать как сумму двух ПОВ, причём плоскость поляризации одной совпадает с плоскостью xoz , а второй – с плоскостью yoz .

Запишем выражение для мгновенного значения вектора электрического поля \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{x}^0 |\dot{A}_1| e^{-k'z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_1) + \vec{y}^0 |\dot{A}_2| e^{-k'z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_2). \quad (2.44)$$

Обозначим через α угол между плоскостью поляризации Р и плоскостью xoz (рис. 2.5.) Рассмотрим выражение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_y}{E_x} = \frac{|\dot{A}_2| \cos(\omega t - k'z + \varphi_2)}{|\dot{A}_1| \cos(\omega t - k'z + \varphi_1)} \quad (2.45)$$

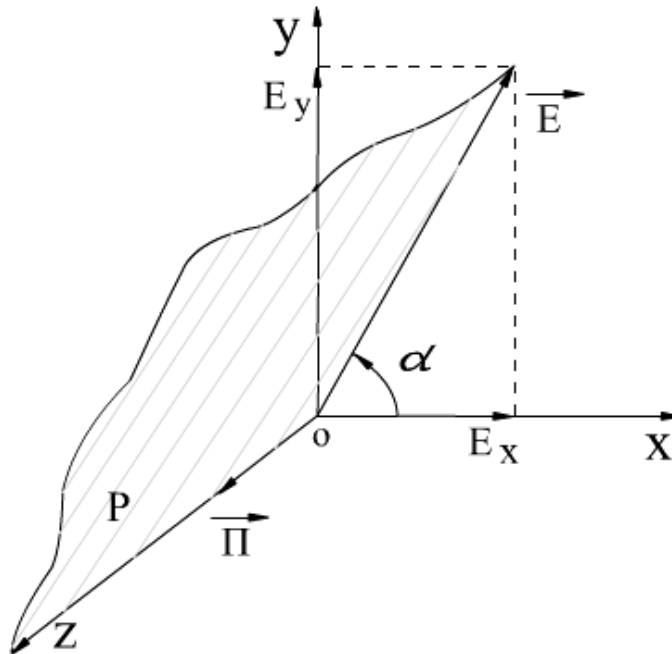


Рис.2.5. Плоскость поляризации Р в декартовых координатах.

Если фазы двух волн совпадают ($\varphi_1 = \varphi_2$), то угол α не меняется с течением времени, и плоскость поляризации сохраняет своё положение в пространстве. Такая волна называется волной с линейной поляризацией векторов поля.

Волна, у которой плоскость поляризации с течением времени вращается вокруг оси z (совпадающей с направлением вектора Пойнтинга), а конец вектора \vec{E} описывает окружность в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, называется волной с круговой поляризацией вектора поля. При этом, если вращение плоскости поляризации происходит по

часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны, то такая волна называется волной с правой круговой поляризацией, а если против часовой стрелки – с левой круговой поляризацией векторов поля.

Волна с правой круговой поляризацией определяется

выражениями (2.43), (2.44) при $|\dot{A}_1| = |\dot{A}_2| = A$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$. При этом

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = e^{-k''z} \sqrt{A^2 \cos(\omega t - k'z + \varphi_1) + A^2 \cos(\omega t - k'z + \varphi_2 - \frac{\pi}{2})} = Ae^{-k''z}; \quad (2.46)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\omega t - k'z + \varphi_1)$$

Отсюда видно, что угол α с течением времени увеличивается, и плоскость поляризации вращается с круговой частотой ω .

Волна с левой круговой поляризацией определяется

выражениями (2.43), (2.44) при $|\dot{A}_1| = |\dot{A}_2| = A$, $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. При этом

$$|E| = Ae^{-k''z}, \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(\omega t - k'z + \varphi_1). \quad (2.47)$$

Таким образом, волна с круговой поляризацией векторов поля есть результат сложения двух волн, поляризованных в двух ортогональных плоскостях (xoz и yoz) с равными амплитудами фазы которых отличаются на $\frac{\pi}{2}$.

В общем случае, при сложении волн с различными амплитудами и произвольным сдвигом фаз получаем волну с эллиптической поляризацией векторов поля. Конец вектора \vec{E} такой волны описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

Волны с эллиптической поляризацией векторов поля определяются выражениями (2.43), (2.44) при произвольных соотношениях между амплитудами $|\dot{A}_1|$ и $|\dot{A}_2|$ и фазами φ_1 и φ_2 .

2.8. Электромагнитное поле элементарного электрического излучателя. Основные характеристики.

Векторный потенциал

Элементарный электрический излучатель – это короткий отрезок тонкого провода, по которому течёт электрический ток с постоянной амплитудой и фазой. При этом длина провода l много меньше расстояния r до точки, в которой определятся поле

(рис.2.6.), и много меньше длины волны $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$, где k' - коэффициент фазы, а радиус провода a много меньше его длины l . Комплексная амплитуда стороннего тока \dot{I}_m^{cm} в каждой точке излучателя является постоянной величиной. Таким образом, условия элементарности можно записать в виде:

$$\text{а) } l \ll r; \text{ б) } l \ll \lambda; \text{ в) } a \ll l; \text{ г) } \dot{I}_m^{cm} = \text{const.} \quad (2.48)$$

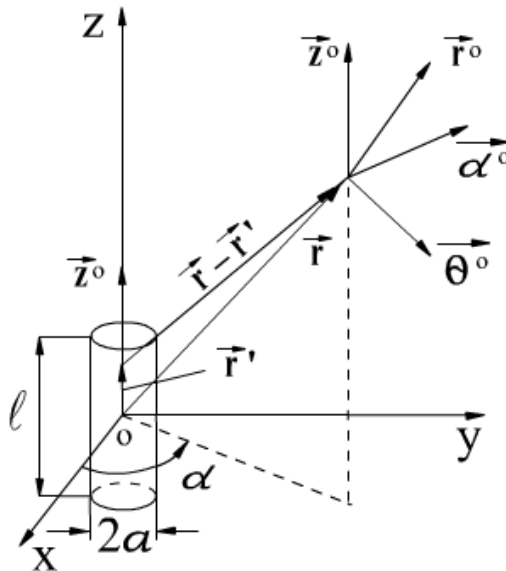


Рис. 2.6. Элементарный электрический излучатель.

Рассматривая элементарный излучатель как прямолинейный отрезок линейного тока и используя выражение (2.24), представим векторный потенциал в виде:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm}}{4\pi} \int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dz', \quad (2.49)$$

где \vec{r}' - радиус-вектор, проведённый из начала координат в произвольную точку излучателя z' на оси z : $\vec{r}' = \vec{z}^\circ z'$, $(-\frac{l}{2} \leq z' \leq \frac{l}{2})$.

Из условий элементарности (2.48а,б) следует, что подынтегральная функция практически не меняется на интервале интегрирования, и её можно вынести за знак интеграла, положив в ней $z' = 0$. В результате получим следующее выражение для векторного

потенциала:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.50)$$

Как видно, оно совпадает с выражением для векторного потенциала элемента электрического тока (2.22).

Напряжённость поля

Напряжённость электрического поля находим, используя формулу (2.7) $\dot{\vec{H}}_m = \text{rot} \dot{\vec{A}}_m$ и представление $\text{rot} \dot{\vec{A}}_m$ в сферической системе координат (r, θ, α) :

$$\dot{\vec{H}}_m = \begin{vmatrix} \vec{r}^\circ & \vec{\theta}^\circ & \vec{\alpha}^\circ \\ r^2 \sin \theta & r \sin \theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \dot{A}_{mr} & r \dot{A}_{m\theta} & r \sin \theta \cdot \dot{A}_{m\alpha} \end{vmatrix}, \quad (2.51)$$

где $\vec{r}^\circ, \vec{\theta}^\circ, \vec{\alpha}^\circ$ - орты сферической системы координат (рис. 2.6).

Векторный потенциал представляем в виде разложения по этим ортам:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{r}^\circ \dot{A}_{mr} + \vec{\theta}^\circ \dot{A}_{m\theta} + \vec{\alpha}^\circ \dot{A}_{m\alpha}, \quad (2.52)$$

где $\dot{A}_{mr} = \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \theta$; $\dot{A}_{m\theta} = -\frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} \sin \theta$; $\dot{A}_{m\alpha} = 0$.

Раскрывая определитель (2.51) по элементам первой строки, получим следующее выражение для комплексной амплитуды напряжённости магнитного поля:

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\alpha}^\circ \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} l}{4\pi} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\dot{k} r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (2.53)$$

Используя первое уравнение электродинамики для комплексных амплитуд (1.28), можно получить следующее выражение для комплексной амплитуды напряжённости электрического поля:

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{1}{i\omega\dot{\epsilon}_a} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k} l}{4\pi} \frac{\dot{k}}{i\omega\dot{\epsilon}_a} \left[\begin{aligned} &\vec{r}^\circ \cos \theta \frac{2}{\dot{k} r} \left(i + \frac{1}{\dot{k} r} \right) + \\ &+ \vec{\theta}^\circ \sin \theta \left(-1 + \frac{i}{\dot{k} r} + \frac{1}{\dot{k}^2 r^2} \right) \end{aligned} \right] \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.54)$$

В зависимости от величины параметра $k'r$ ($k' = \text{Re } \dot{k}$) всё пространство делят на три области:

1) область пространства, для которой $k'r \gg 1$ ($r \gg \lambda$), называется дальней зоной (Д.З.);

2) область пространства, для которой $k'r \ll 1$ ($r \ll \lambda$), называется ближней зоной (Б.З.);

3) оставшая часть пространства называется промежуточной зоной (П.З.).

Наиболее сложную структуру поле имеет в промежуточной зоне. Для расчёта поля в этой области используются формулы (2.53), (2.54).

Для расчёта поля в Б.З. и Д.З. можно получить более простые формулы. Наибольший практический интерес представляет поле в дальней зоне.

2.9. Электромагнитное поле в дальней зоне Сферическая волна

При расчёте поля в Д.З. в общих выражениях (2.53), (2.54) можно оставить лишь те члены, которые при $r \rightarrow \infty$ убывают как e^{-ikr}/r . В результате получим следующие выражения для комплексных амплитуд поля:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{H}}_m &= \vec{\alpha}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{E}}_m &= \vec{\theta}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \dot{W} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r},\end{aligned}\quad (2.55)$$

где $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}}$ - волновое сопротивление среды.

Электромагнитное поле, напряжённость которого определяется выражениями (2.55), представляет собой сферическую электромагнитную волну, распространяющуюся в радиальных направлениях от излучателя, расположенного в начале координат. При этом векторы $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$ у сферической волны связаны между собой такими же соотношениями, как и для плоской однородной волны:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m \vec{r}^\circ \right] \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{E}}_m \right] \quad (2.56)$$

где \vec{r}° - единичный вектор, указывающий направление распространения волны.

Запишем выражения для мгновенных значений векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{\theta}^\circ |\dot{C}| \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r} \cos(\omega t - k'r + \phi_c), \\ \vec{H} &= \vec{\alpha}^\circ \frac{|\dot{C}|}{|\dot{W}|} \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r} \cos(\omega t - k'r + \phi_c - \phi_w),\end{aligned}\quad (2.57)$$

где $\dot{C} = i \frac{\dot{I}_m^{cm} \dot{k}l}{4\pi} \dot{W}$.

Основные характеристики сферической волны

- 1) Амплитуда волны - максимальное значение напряжённости электрического и магнитного полей (E_m или H_m):

$$E_m = |\dot{C}| \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r}, H_m = \frac{|\dot{C}|}{|\dot{W}|} \sin \theta \frac{e^{-k'r}}{r}. \quad (2.58)$$

- 2) Фаза волны – аргумент косинусоидальной функции:

$$\Phi^E = \omega t - k'r + \varphi_c; \Phi^H = \Phi^E - \varphi_w. \quad (2.59)$$

- 3) Фронт волны – сферическая поверхность $r = \text{const}$.

- 4) Фазовая скорость рассчитывается по формуле (2.38):

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'}. \quad (2.60)$$

- 5) Длина волны – рассчитывается по формуле (2.40):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k'}. \quad (2.61)$$

Из выражений (2.58) видно, что амплитуда волны зависит от расстояния r и от угла θ . При отсутствии поглощения, т.е. при $\sigma = 0$, амплитуда волны изменяется обратно пропорционально расстоянию r . Если амплитуда волны зависит от поперечных координат θ или α , то волна называется неоднородной.

Если амплитуда волны не зависит от азимутального угла α , то такая волна называется азимутально однородной.

2.10. Диаграмма направленности

Диаграмма направленности – это характеристика излучателя, показывающая зависимость амплитуды поля в дальней зоне от направления или угловых координат θ и α .

Диаграмма направленности в меридиональной плоскости (МП)

Меридиональная плоскость – это плоскость, проходящая через ось z . Уравнение этой плоскости в сферических координатах записывается в виде:

$$\alpha = \alpha_0, \alpha = \alpha_0 + 180^\circ, \text{ где } 0 \leq \alpha_0 \leq 360^\circ \quad (2.62)$$

Диаграмма направленности в меридиональной плоскости представляет кривую, описываемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\theta, \alpha)}{E_{m \max}} \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \alpha = \alpha_0 + 180^\circ \end{cases} = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ, \quad (2.63)$$

где r – длина радиус-вектора, проведённого в меридиональной плоскости из начала координат под углом θ к оси z ;

$E_m(\theta) = \sqrt{\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^*}$ – амплитуда напряжённости электрического поля в дальней зоне;

$E_{m \max}$ – максимальное значение амплитуды.

Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя в меридиональной плоскости представляет собой две окружности, касающиеся оси z в начале координат (рис. 2.7).

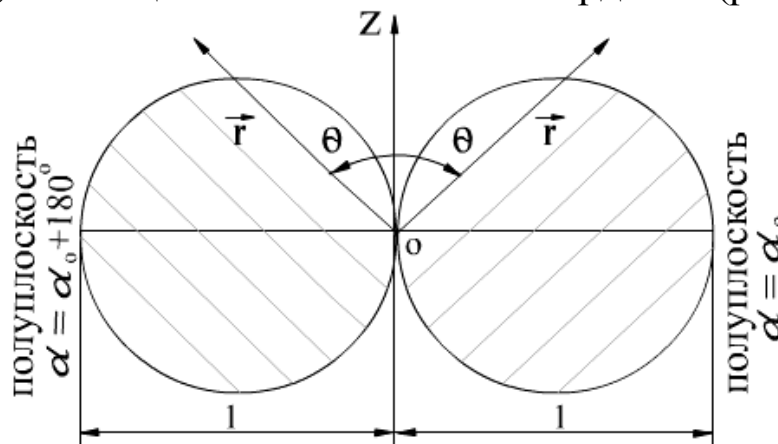


Рис.2.7. Диаграмма направленности в МП

Диаграмма направленности в экваториальной плоскости (ЭП)

Экваториальная плоскость – это плоскость, проходящая через начало координат перпендикулярно оси z . Уравнение этой плоскости в сферических координатах записывается в виде: $\theta = 90^\circ$.

Диаграмма направленности элементарного электрического излучателя в экваториальной плоскости представляет собой кривую, задаваемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\theta, \alpha)}{E_{m\max}} \Big|_{\theta=90^\circ} = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 360^\circ, \quad (2.64)$$

где r – длина радиуса-вектора, проведённого в экваториальной плоскости из начала координат под углом α к оси x .

Так как амплитуда волны не зависит от угла α , то диаграмма направленности представляет собой окружность с центром в начале координат (рис. 2.8.).

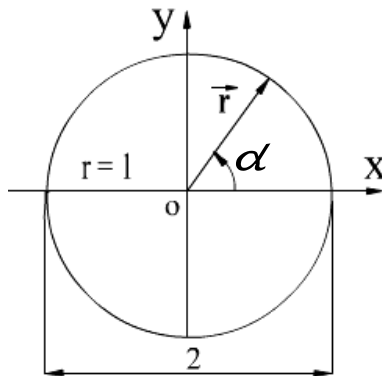


Рис.2.8. Диаграмма направленности в ЭП.

Пространственная диаграмма направленности

Пространственная диаграмма направленности представляет собой поверхность (рис. 2.9.), описываемую уравнением:

$$r = \frac{E_m(\alpha, \theta)}{E_{m\max}} = \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 180^\circ, \quad 0 \leq \alpha \leq 360^\circ, \quad (2.65)$$

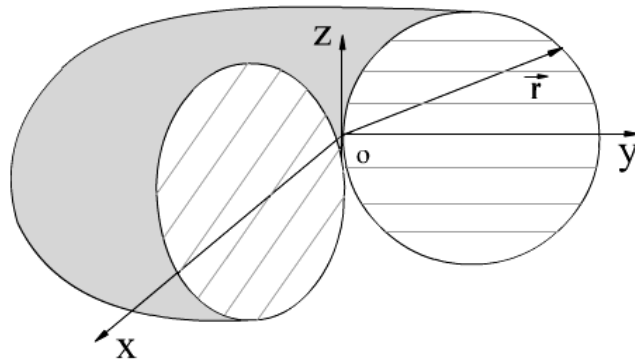


Рис.2.9. Пространственная диаграмма направленности.

Диаграмма направленности строится следующим образом. В заданном направлении, определяемом углами θ и α , проводится радиус-вектор \vec{r} - и на нём откладывается отрезок, длина которого пропорциональна амплитуде поля в этом направлении.

При изменении углов θ и α в пределах $0 \leq \theta \leq 180^\circ, 0 \leq \alpha \leq 360^\circ$ конец радиус-вектора \vec{r} описывает поверхность, задаваемую уравнением (2.65).

Пространственная диаграмма направленности элементарного электрического излучателя представляет собой поверхность тора, образованную вращением окружности, касающейся в начале координат оси z , вокруг этой оси.

2.11. Мощность и сопротивление излучения

Излучаемую мощность можно найти, используя уравнение энергетического баланса (1.31), полагая $P_{II} = 0$ (удельная проводимость среды $\sigma = 0$):

$$\bar{P}_\Sigma = \oint_S \vec{P} d\vec{s} = -\bar{P}^{CT} > 0, \quad (2.66)$$

где среднее значение вектора Пойтинга

$$\vec{P} = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{H}}_m^* \right] \right), \quad (2.67)$$

S – замкнутая поверхность, ограничивающая область, в которой расположен излучатель. При этом величина \bar{P}_Σ не зависит от формы и размеров поверхности S .

В качестве поверхности S удобно выбрать сферу с центром в начале координат, радиус которой стремится к бесконечности. В этом случае выражение (2.66) для излучаемой мощности приводится к виду:

$$\bar{P}_{\Sigma} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \bar{\vec{P}} \Big|_{r \rightarrow \infty} \vec{r}^0 r^2 \sin \theta d\theta d\alpha. \quad (2.68)$$

При вычислении $\bar{\vec{P}}$ по формуле (2.67) используем выражения (2.55) для поля в дальней зоне:

$$\bar{\vec{P}} = \vec{r}^0 \frac{|\dot{I}_m^{CT}|^2 (kl)^2}{32\pi^2} W \sin^2 \theta \frac{1}{r^2}. \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68) и интегрируя, получим следующее выражение для \bar{P}_{Σ} :

$$\bar{P}_{\Sigma} = \frac{W}{12\pi} (kl)^2 |\dot{I}_m^{CT}|^2, \quad (2.70)$$

или

$$\bar{P}_{\Sigma} = \frac{1}{2} R_{\Sigma} |\dot{I}_m^{CT}|^2, \quad (2.71)$$

где коэффициент

$$R_{\Sigma} = \frac{W}{6\pi} (kl)^2 \quad (2.72)$$

называется сопротивлением излучения элементарного электрического излучателя. По величине R_{Σ} можно судить об эффективности излучения. Чем больше R_{Σ} , тем больше излучаемая мощность при заданной амплитуде тока $|\dot{I}_m^{CT}|$. Эффективность излучения повышается с ростом частоты и увеличением длины излучателя.

3. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Принцип суперпозиции

Электромагнитное поле, возбуждаемое несколькими источниками, можно представить в виде суммы полей, возбуждаемых каждым источником в отдельности.

Если объёмную плотность стороннего тока \dot{j}_m^{cm} можно представить в виде суммы

$$\dot{j}_m^{cm} = \dot{j}_{m1}^{cm} + \dot{j}_{m2}^{cm}, \quad (3.1)$$

то напряженность электромагнитного поля, возбуждаемого током с плотностью \dot{j}_{m1}^{cm} , можно представить в виде суммы:

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}, \dot{H}_m = \dot{H}_{m1} + \dot{H}_{m2}, \quad (3.2)$$

где $\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m1}$ - напряженность поля, возбуждаемого током с плотностью \dot{j}_{m1}^{cm} , а $\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m2}$ - напряженность поля, возбуждаемого током с плотностью \dot{j}_{m2}^{cm} .

Принцип суперпозиции следует из линейности системы уравнений электродинамики (1.28). Эти уравнения для полей $\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m1}$ и $\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m2}$ становятся тождественными равенствами:

$$1) \operatorname{rot} \dot{H}_{m1} = i\omega \varepsilon_a \dot{E}_{m1} + \dot{j}_{m1}^{cm}; \quad 2) \operatorname{rot} \dot{E}_{m1} = -i\omega \mu_a \dot{H}_{m1}; \quad (3.3)$$

$$1) \operatorname{rot} \dot{H}_{m2} = i\omega \varepsilon_a \dot{E}_{m2} + \dot{j}_{m2}^{cm}; \quad 2) \operatorname{rot} \dot{E}_{m2} = -i\omega \mu_a \dot{H}_{m2}; \quad (3.4)$$

Складывая почленно (3.3) и (3.4), получим следующие тождественные равенства:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \varepsilon_a \dot{E}_m + \dot{j}_m^{cm}; \quad \operatorname{rot} \dot{E}_m = -i\omega \mu_a \dot{H}_m; \quad (3.5)$$

откуда следует, что векторные функции $\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}, \dot{H}_m = \dot{H}_{m1} + \dot{H}_{m2}$, являются решениями системы уравнений электродинамики.

Замечание. Принцип суперпозиции не распространяется на энергетические характеристики, являющиеся квадратичными характеристиками поля.

3.2 Электромагнитное поле элементарного рамочного излучателя

Воспользуемся принципом суперпозиции для нахождения электромагнитного поля рамочного излучателя, представляющего собой замкнутый проводящий контур, по которому течёт электрический ток с постоянной амплитудой и фазой. Размеры контура малы по сравнению с длиной волны λ и расстоянием r до точки наблюдения (рис. 3.1.).

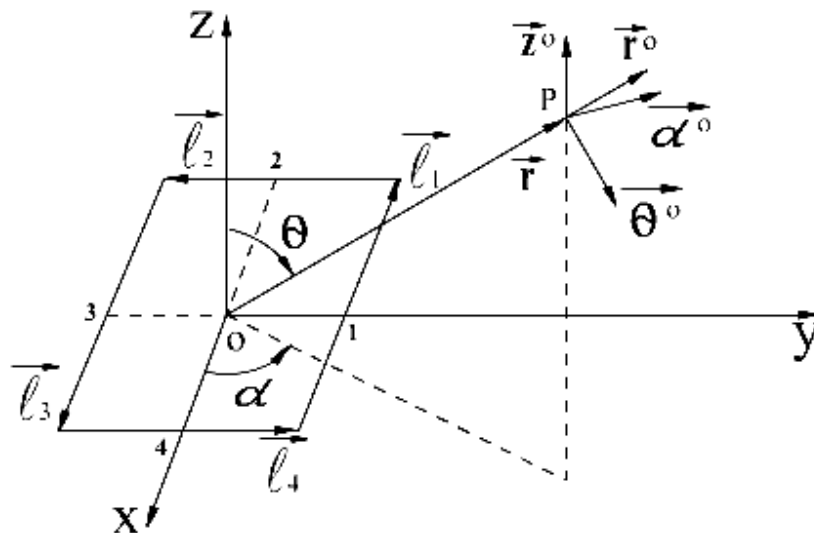


Рис.3.1.Элементарный рамочный излучатель

Для прямоугольного контура тока условия элементарности записываются в виде:

$$\text{а) } \dot{I}_m^{CT} = \text{const} ; \text{ б) } l_i \ll r ; \text{ в) } l_i \ll \lambda \quad (i=1,2,3,4). \quad (3.6)$$

Используя принцип суперпозиции, представим поле элементарного рамочного излучателя в виде суммы полей четырёх элементарных электрических излучателей, расположенных в точках 1,2,3,4 (рис.3.1.)

Используя формулу (2.23) для векторного потенциала элемента электрического тока, представим выражение для векторного потенциала элементарного рамочного излучателя в виде:

$$\dot{\vec{A}}_m = \frac{\dot{I}_m^{CT}}{4\pi} \sum_{i=1}^4 \vec{l}_i \frac{e^{-i\vec{k}R_i}}{R_i}, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{l}_1 &= -\vec{x}^\circ l_1; \vec{l}_2 = -\vec{y}^\circ l_2; \vec{l}_3 = \vec{x}^\circ l_3; \vec{l}_4 = \vec{y}^\circ l_4; \\ l_1 &= l_3 = l_x; l_2 = l_4 = l_y; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \quad (3.9)$$

x_i, y_i, z_i - координаты точек 1,2,3,4;

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= -\frac{l_x}{2}, & x_3 &= 0, & x_4 &= \frac{l_x}{2}, \\ y_1 &= \frac{l_y}{2}, & y_2 &= 0, & y_3 &= -\frac{l_y}{2}, & y_4 &= 0, \\ z_1 &= 0, & z_2 &= 0, & z_3 &= 0, & z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Используя условие элементарности (3.6б) и представляя выражение (3.9) для R_i ($i=1,2,3,4$) в виде разложения в степенной ряд получаем:

$$\begin{aligned} R_1 &= r - \frac{1}{2} \frac{y}{r} l_y; & R_2 &= r + \frac{1}{2} \frac{x}{r} l_x; \\ R_3 &= r + \frac{1}{2} \frac{y}{r} l_y; & R_4 &= r - \frac{1}{2} \frac{x}{r} l_x; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя (3.8), (3.10) в (3.7), разлагая функцию $e^{-i\vec{k}R}$ в степенной ряд, используя при этом условие элементарности (3.6в), получим следующее выражение для векторного потенциала:

$$\dot{\vec{A}}_m = \frac{\dot{I}_m^{CT} \vec{k} l_x l_y}{4\pi} \left(-\vec{x}^\circ \frac{y}{r} + \vec{y}^\circ \frac{x}{r} \right) \left(i + \frac{1}{\vec{k}r} \right) \frac{e^{-i\vec{k}r}}{r}. \quad (3.11)$$

Используя соотношения связи декартовых и сферических координат $x = r \sin \theta \cos \alpha$, $y = r \sin \theta \sin \alpha$ и учитывая при этом, что $\vec{\alpha}^\circ = \vec{y}^\circ \cos \alpha - \vec{x}^\circ \sin \alpha$, приведём выражение (3.11) к виду:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{\alpha}^\circ \frac{\dot{I}_m^{CT} \vec{k} S}{4\pi} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\vec{k}r} \right) \frac{e^{-i\vec{k}r}}{r}, \quad (3.12)$$

Где $S = l_x l_y$ - площадь, ограниченная контуром рамки.

Так как векторная функция $\dot{\vec{A}}_m$, определяемая выражением (3.12), имеет только одну α -вую составляющую, не зависящую от угла α , то $\text{div } \dot{\vec{A}}_m = 0$. Учитывая это обстоятельство, из формулы (2.9) получим следующее выражение для поля $\dot{\vec{E}}_m$:

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{\dot{k}^2}{i\omega\dot{\epsilon}_a} \dot{\vec{A}}_m = -i\vec{\alpha}^0 \frac{\dot{I}_m^{CT} \dot{k}^2 S}{4\pi} \dot{W} \sin \theta \left(i + \frac{1}{\dot{k}r} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (3.13)$$

Сравнивая это выражение с выражением (2.53), видим, что напряжённость электрического поля элементарного рамочного излучателя с точностью до постоянного множителя совпадает с напряжённостью магнитного поля элементарного электрического излучателя, момент которого перпендикулярен плоскости рамки.

При этом равенство полей получим, когда $\dot{\vec{P}}_m^{CT\mathcal{E}} = -\dot{\vec{P}}_m^{CTP}$, где $\dot{\vec{P}}_m^{CT\mathcal{E}} = \dot{I}_m^{CT\mathcal{E}} \vec{l}$ - момент элементарного электрического излучателя, а $\dot{\vec{P}}_m^{CTP} = i\dot{k}\dot{W}\dot{I}_m^{CTP} \vec{S}$ - момент элементарного рамочного излучателя, причём $\vec{l} \parallel \vec{S}$.

Напряжённость магнитного поля элементарного рамочного излучателя находим из второго уравнения электродинамики (1.28):

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{\text{rot} \dot{\vec{E}}_m}{-i\omega\mu_a} = \frac{\dot{\epsilon}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} \bigg|_{\dot{\vec{P}}_m^{CT\mathcal{E}} = -\dot{\vec{P}}_m^{CTP}}, \quad (3.14)$$

где $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}$ - напряжённость электрического поля элементарного электрического излучателя.

Запишем выражения для полей в дальней зоне элементарного рамочного излучателя:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &= \vec{\alpha}^0 \frac{\dot{I}_m^{CT} \dot{k}^2 S}{4\pi} \dot{W} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r} \\ \dot{\vec{H}}_m &= -\vec{\theta}^0 \frac{\dot{I}_m^{CT} \dot{k}^2 S}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из этих выражений видно, что поле в дальней зоне представляет сферическую волну, распространяющуюся в радиальных направлениях из начала координат. При этом векторы поля связаны между собой соотношениями:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m \vec{r}^\circ \right], \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{E}}_m \right]. \quad (3.16)$$

3.3. Принцип излучения на бесконечности

Пусть в ограниченной области пространства V' (рис.3.2.) заданы источники электромагнитного поля, характеризующиеся объёмной плотностью сторонних токов $\dot{\vec{j}}_m^{CT}$. Тогда на больших расстояниях от источника ($r \rightarrow \infty$) электромагнитное поле имеет характер сферической волны, расходящейся в радиальных направлениях от источника. При этом напряжённости электрического и магнитного полей связаны между собой соотношениями:

$$a) \dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m \vec{r}^\circ \right]; \quad б) \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{E}}_m \right]. \quad (3.17)$$

где $\dot{W} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\epsilon}_a}}$ - волновое сопротивление среды,

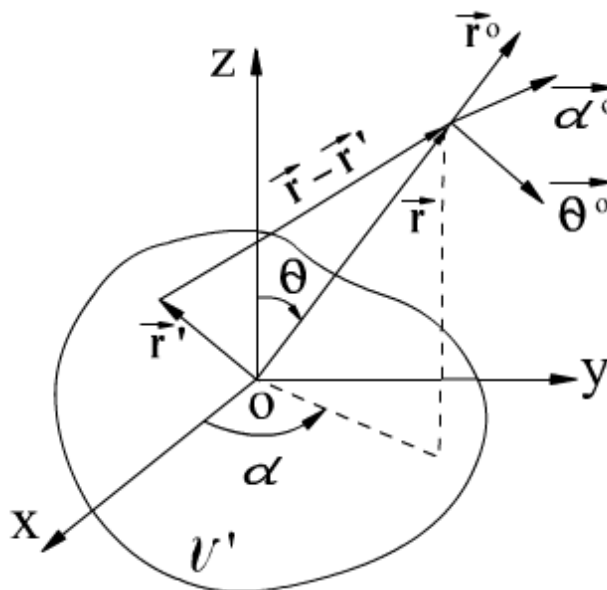


Рис.3.2. Источник излучения

Для доказательства этого соотношения используем представления полей (2.7), (2.9), где векторный потенциал $\dot{\vec{A}}_m$ определяется выражением (2.26). Устремляя $r \rightarrow \infty$, выражение для векторного потенциала можно привести к виду:

$$\dot{\vec{A}}_m = \left[\vec{r}^\circ \dot{F}_r(\theta, \alpha) + \vec{\theta}^\circ \dot{F}_\theta(\theta, \alpha) + \vec{\alpha}^\circ \dot{F}_\alpha(\theta, \alpha) \right] \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.17a)$$

Используя формулы (2.7), (2.9), в которых операторы rot, div, grad представляются в сферической системе координат, устремляя $r \rightarrow \infty$, получим следующие выражения для полей $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$:

$$\dot{\vec{E}}_m = -ik\dot{W}\dot{\vec{A}}_{m\perp}; \quad \dot{\vec{H}}_m = -ik \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{A}}_{m\perp} \right], \quad (3.17b)$$

где $\dot{\vec{A}}_{m\perp} = \vec{\theta}^\circ \dot{A}_{m\theta} + \vec{\alpha}^\circ \dot{A}_{m\alpha}$ - поперечная (относительно радиуса-вектора \vec{r}) составляющая векторного потенциала.

Формулы (3.17b) позволяют наиболее просто определить поле в дальней зоне через векторный потенциал. Кроме того, из них непосредственно следуют соотношения (3.17), выражающие принцип излучения на бесконечности, смысл которого можно выразить следующим образом: если полученные в результате решения уравнений электродинамики задачи поля в дальней зоне удовлетворяют условию (3.17), значит получено решение электродинамической задачи в классе полей, убывающих на бесконечности как $\frac{1}{r}$, что соответствует случаю отсутствия поглощения ($\sigma = 0$).

Замечание. Наряду с решением (2.22) для векторного потенциала элемента электрического тока и (2.50) для элементарного электрического излучателя существует другое решение:

$$\dot{\vec{A}}_m = \vec{z}^\circ \frac{\dot{I}_m^{CT}}{4\pi} \frac{e^{+ikr}}{r}, \quad (3.18)$$

которое при отсутствии потерь ($\sigma = 0$) тоже убывает на бесконечности как $\frac{1}{r}$, однако при этом не удовлетворяется условие

излучения на бесконечности (3.17). Если же $\sigma \neq 0$, то решение (3.18) при $r \rightarrow \infty$ возрастает по закону $\frac{e^{k''r}}{r}$ и, следовательно, не имеет физического смысла.

3.4. Принцип взаимности

Принцип взаимности устанавливает связь между полями двух систем источников, работающих на одной частоте в линейной изотропной среде с параметрами $\varepsilon_a, \mu_a, \sigma$.

Пусть первая система источников, характеризуемая объёмной плотностью тока $\dot{\mathbf{j}}_{m1}^{CT}$, расположена в области V_1 , а вторая, характеризуемая объёмной плотностью тока $\dot{\mathbf{j}}_{m2}^{CT}$, расположена в области V_2 , и пусть области V_1 и V_2 не пересекаются (рис. 3.3.).

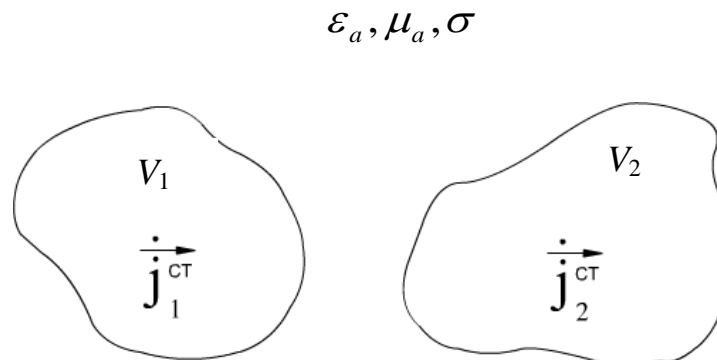


Рис. 3.3. Две системы источников в линейной изотропной среде

Электромагнитные поля токов с плотностями $\dot{\mathbf{j}}_{m1}^{CT}$ и $\dot{\mathbf{j}}_{m2}^{CT}$ характеризуются напряжённостями $\dot{\mathbf{E}}_{m1}, \dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \dot{\mathbf{H}}_{m2}$, соответственно.

Эти поля и токи связаны между собой соотношением

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{j}}_{m1}^{CT} \mathbf{E}_{m2} dv = \int_{V_2} \dot{\mathbf{j}}_{m2}^{CT} \mathbf{E}_{m1} dv, \quad (3.19)$$

представляющим собой математическую формулировку принципа взаимности.

Из принципа взаимности следует, что условия передачи электромагнитной энергии в прямом и обратном направлении совершенно одинаковы.

Соотношение (3.19) в случае двух элементарных электрических излучателей с моментами $\dot{\vec{P}}_{m1}^{CT} = \dot{I}_{m1}^{CT} \vec{l}_1$ и $\dot{\vec{P}}_{m2}^{CT} = \dot{I}_{m2}^{CT} \vec{l}_2$ принимает вид $\dot{\vec{P}}_{m1}^{CT} \dot{\vec{E}}_{m2} = \dot{\vec{P}}_{m2}^{CT} \dot{\vec{E}}_{m1}$. Причём, если $\dot{\vec{P}}_{m1}^{CT} = \dot{\vec{P}}_{m2}^{CT}$, то

$$\dot{\vec{E}}_{m1} = \dot{\vec{E}}_{m2} \quad (3.20)$$

В частности, из (3.20) следует, что если измерить поле \vec{E}_{12} в произвольной точке 2 линейной изотропной среды, возбуждаемое излучателем, находящимся в другой произвольной точке 1, а затем перенести излучатель параллельно в точку 2 и измерить поле \vec{E}_{21} в точке 1, то окажется, что $\vec{E}_{12} = \vec{E}_{21}$.

Принцип взаимности широко используется при решении дифракционных задач.

На основе принципа взаимности, из которого следует, что диаграмма направленности антенны в режиме передачи и приёма одинакова, построена современная теория приёмных антенн.

Доказательство принципа взаимности

Запишем уравнения электродинамики для двух систем источников:

$$\begin{cases} a) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m1} = i\omega \dot{\vec{E}}_{m1} + \dot{\vec{j}}_{m1}^{CT} \\ б) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m1} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m1} \end{cases} \quad \begin{cases} в) \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_{m2} = i\omega \dot{\vec{E}}_{m2} + \dot{\vec{j}}_{m2}^{CT} \\ г) \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_{m2} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_{m2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Рассмотрим попарно уравнения а), г) и б), в).

Умножим обе части уравнения а) скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_{m2}$, обе части уравнения г) – на вектор $\dot{\vec{H}}_{m1}$ и вычитаем а) из г). Используя при этом тождество (1.25), получим:

$$\operatorname{div}\left[\dot{\vec{E}}_{m2}\dot{\vec{H}}_{m1}\right]=-i\omega\mu_a\dot{\vec{H}}_{m2}\dot{\vec{H}}_{m1}-i\omega\dot{\vec{E}}_a\dot{\vec{E}}_{m1}\dot{\vec{E}}_{m2}-\dot{\vec{j}}_{m1}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m2}. \quad (3.22)$$

Аналогично, умножим обе части уравнения в) скалярно на вектор $\dot{\vec{E}}_{m1}$, обе части уравнения б) – на вектор $\dot{\vec{H}}_{m2}$ и вычтем в) из б). В результате получим:

$$\operatorname{div}\left[\dot{\vec{E}}_{m1}\dot{\vec{H}}_{m2}\right]=-i\omega\mu_a\dot{\vec{H}}_{m1}\dot{\vec{H}}_{m2}-i\omega\dot{\vec{E}}_a\dot{\vec{E}}_{m2}\dot{\vec{E}}_{m1}-\dot{\vec{j}}_{m2}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m1}. \quad (3.23)$$

Вычитая почленно (3.22) из (3.23), получим:

$$\operatorname{div}\left\{\left[\dot{\vec{E}}_{m1}\dot{\vec{H}}_{m2}\right]-\left[\dot{\vec{E}}_{m2}\dot{\vec{H}}_{m1}\right]\right\}=\dot{\vec{j}}_{m1}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m2}-\dot{\vec{j}}_{m2}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m1}. \quad (3.24)$$

Соотношение (3.24) устанавливает связь двух сторонних токов с возбуждаемыми ими полями и представляет математическую формулировку леммы Лоренца в дифференциальной форме.

Интегрируя обе части соотношения (3.24) по произвольной области V и применяя к интегралу в левой части теорему Остроградского-Гаусса (1.10а), получим математическую формулировку леммы Лоренца в интегральной форме:

$$\oint_S\left\{\left[\dot{\vec{E}}_{m1}\dot{\vec{H}}_{m2}\right]-\left[\dot{\vec{E}}_{m2}\dot{\vec{H}}_{m1}\right]\right\}\vec{ds}=\int_V\left[\left(\dot{\vec{j}}_{m1}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m2}\right)-\left(\dot{\vec{j}}_{m2}^{CT}\dot{\vec{E}}_{m1}\right)\right]dV. \quad (3.25)$$

Лемма Лоренца широко используется в теории возбуждения волноводов и в теории интегральных уравнений антенн и СВЧ устройств.

Если распространить интегрирование в (3.25) на всё бесконечное пространство, то поверхностный интеграл в левой части обратится в ноль в силу принципа излучения на бесконечности (3.17). Если при этом области V_1 и V_2 не пересекаются (рис.3.3.), то из (3.25) непосредственно следует (3.19), выражающее принцип взаимности.

3.5. Принцип двойственности

Принцип двойственности позволяет найти электромагнитное поле, возбуждаемое сторонними магнитными токами, если известно электромагнитное поле, возбуждаемое сторонними электрическими токами. Сторонние магнитные токи формально вводятся во второе уравнение электродинамики (формально, т.к. в

природе нет магнитных зарядов, а следовательно, и магнитных токов). При этом система (1.28) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m &= i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{CT} \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m - \dot{\vec{j}}_m^{M.CT} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Распределение сторонних магнитных токов в пространстве характеризуется объёмной плотностью $\dot{\vec{j}}_m^{M.CT}$.

Формальное введение магнитных токов упрощает решение некоторых задач электродинамики.

Так с помощью принципа двойственности можно получить выражения для характеристик электромагнитного поля элементарного рамочного и элементарного щелевого излучателей, которые являются физическими реализациями элементарного магнитного излучателя.

Используя принцип суперпозиции, представим решение системы (3.26) в виде суммы:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} + \dot{\vec{E}}_m^M; \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} + \dot{\vec{H}}_m^M, \quad (3.27)$$

где $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}, \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}}$ - характеристики электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними электрическими токами, удовлетворяющие системе уравнений электродинамики (3.26) при $\dot{\vec{j}}_m^{M.CT} = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} &= i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} + \dot{\vec{j}}_m^{CT}, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}}; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$\dot{\vec{E}}_m^M, \dot{\vec{H}}_m^M$ - характеристики электромагнитного поля, возбуждаемого сторонними магнитными токами, удовлетворяющие системе уравнений электродинамики (3.26) при $\dot{\vec{j}}_m^{CT} = 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^M &= i\omega \dot{\vec{\epsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^M, \\ \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^M &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^M - \dot{\vec{j}}_m^{M.CT}; \end{aligned} \quad (3.29)$$

Если известно решение системы (3.28), то решение системы (3.29) может быть получено из решения системы (3.28) с помощью принципа двойственности, математическая формулировка которого выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m^M &= -H_m^\vartheta \Big|_{\dot{j}_m^{CT} \rightarrow \dot{j}_m^{M.CT}}, \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \frac{\dot{\varepsilon}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\vartheta \Big|_{\dot{j}_m^{CT} \rightarrow \dot{j}_m^{M.CT}};\end{aligned}\quad (3.30)$$

Подставляя выражения (3.30) в систему (3.29) и учитывая, что правые части выражений (3.30) являются решениями системы (3.28), убеждаемся, что в результате каждое из уравнений системы (3.29) обращается в тождественное равенство, что доказывает правильность соотношений (3.30), выражающих принцип двойственности.

3.6. Электромагнитное поле элементарного магнитного излучателя.

Элементарный магнитный излучатель – это элемент линейного магнитного тока, характеризуемый моментом:

$$\dot{\vec{P}}_m^{M.CT} = \int_{V \rightarrow 0} \dot{\vec{j}}_m^{M.CT} dv' = \dot{I}_m^{M.CT} \cdot l^M \cdot \vec{l}^0 = const, \quad (3.31)$$

где \vec{l}^0 - единичный вектор, указывающий направление плотности стороннего магнитного тока $\dot{\vec{j}}_m^{M.CT}$;

l^M - длина элемента магнитного тока.

Рассмотрим элементарный магнитный излучатель, расположенный в начале сферической системы координат и направленный вдоль полярной оси z (рис. 3.4.). Согласно принципу двойственности, характеристики поля элементарного магнитного излучателя можно определить, используя соотношения (3.30), где $\dot{\vec{H}}_m^\vartheta$ и $\dot{\vec{E}}_m^\vartheta$ - характеристики поля элементарного электрического излучателя с моментом

$$\dot{\vec{P}}_m^{CT} = \int_{V \rightarrow 0} \dot{\vec{j}}_m^{CT} dv' = \dot{I}_m^{CT} \vec{l}. \quad (3.32)$$

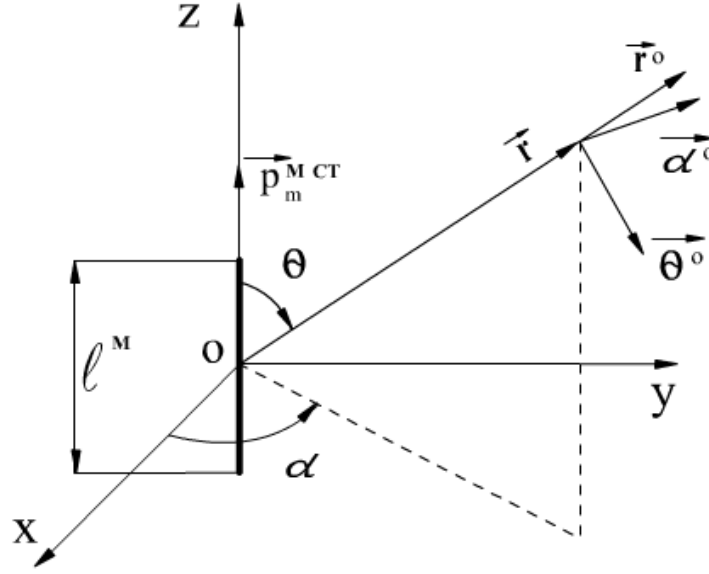


Рис. 3.4. Элементарный магнитный излучатель.

Подставляя в соотношения (3.30) выражения (2.53) и (2.54) и делая в них замену $\dot{\vec{P}}_m^{CT} = \dot{I}_m^{CT} \vec{l}$ на $\dot{\vec{P}}_m^{M.CT} = \dot{I}_m^{M.CT} \vec{l}^M$, получим выражения для полей $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$ элементарного магнитного излучателя. Для дальней зоны эти выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^M &= -\alpha^\circ i \frac{\dot{I}_m^{M.CT} \vec{k} \cdot \vec{l}^M}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \vec{\theta}^\circ i \frac{\dot{I}_m^{M.CT} \vec{k} \cdot \vec{l}^M}{4\pi} \cdot \frac{1}{\dot{W}} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для поля элементарного рамочного излучателя (3.15), видим, что они совпадают при

$$\dot{I}_m^{M.CT} \cdot \vec{l}^M = i\vec{k} \cdot \dot{W} \cdot \dot{I}_m^{CT} \cdot S, \quad (3.34)$$

где \dot{I}_m^{CT} - ток в рамке, S - площадь, ограниченная контуром рамки.

Таким образом, элементарный рамочный излучатель является физической реализацией элементарного магнитного излучателя, причём их моменты связаны соотношением:

$$\dot{\vec{P}}_m^{CT.P} = i\vec{k} \cdot \dot{W} \cdot \dot{I}_m^{CT} \cdot \vec{S} = \dot{\vec{P}}_m^{M.CT} = \dot{I}_m^{M.CT} \cdot \vec{l}^M. \quad (3.35)$$

3.7. Электромагнитное поле элементарного щелевого излучателя.

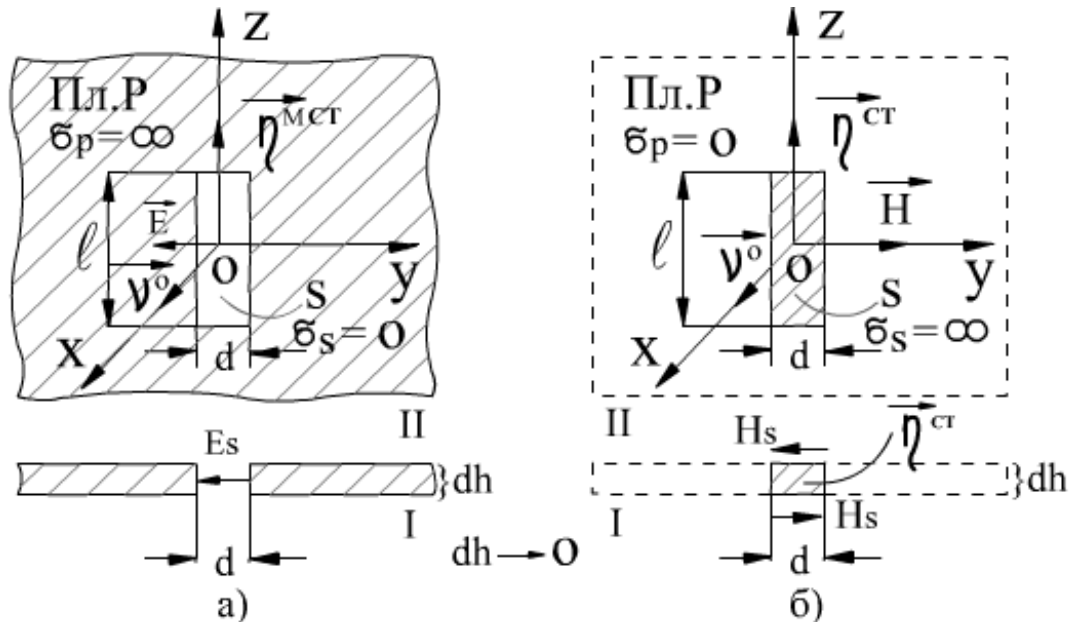


Рис. 3.5. Элементарные щелевой и электрический излучатели.

Элементарный щелевой излучатель представляет собой узкую короткую щель, прорезанную в бесконечной идеально проводящей плоскости (рис.3.5.а). К краям щели приложено напряжение стороннего источника, создающее в щели поперечное электрическое поле.

Электродинамическая задача о поле элементарного щелевого излучателя ставится следующим образом: требуется найти характеристики электромагнитного поля $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$ в полупространстве I перед проводящей плоскостью ($x>0$) при заданных граничных условиях на плоскости $x=0$.

В области $x>0$ электромагнитное поле удовлетворяет однородной системе уравнений электродинамики (системе (3.26) при $\dot{j}_m^{CT} = 0$ и $\dot{j}_m^{M,CT} = 0$):

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m^M &= i\omega \dot{\vec{E}}_m^M, \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m^M &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^M, \end{aligned} \quad (3.36)$$

и граничным условиям при $x=0$:

$$a) \vec{E}_\tau|_P = 0; \quad б) \vec{E}_\tau|_S = -\vec{y}^\circ E_S. \quad (3.37)$$

Поставленная задача является двойственным аналогом задачи о поле элементарного электрического излучателя в виде бесконечно тонкого полоскового проводника S с током (рис.3.5.б).

Поля $\dot{\vec{E}}_m^\ominus$, $\dot{\vec{H}}_m^\ominus$ в этом случае являются решением однородной системы уравнений электродинамики

$$\begin{aligned} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m^\ominus &= i\omega \dot{\vec{E}}_m^\ominus; \\ \text{rot} \dot{\vec{E}}_m^\ominus &= -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^\ominus, \end{aligned} \quad (3.38)$$

и удовлетворяют граничным условиям при $x=0$:

$$a) \vec{H}_\tau|_P = 0, \quad б) \vec{H}_\tau|_S = \vec{y}^\circ H_S. \quad (3.39)$$

Выражения для полей элементарного электрического излучателя в дальней зоне определяются выражениями (2.55):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{H}}_m^\ominus &= \vec{\alpha}^0 i \frac{\dot{I}_m^{CT} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{\vec{E}}_m^\ominus &= \vec{\theta}^0 i \frac{\dot{I}_m^{CT} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \dot{W} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Используя граничное условие (1.22), выразим ток \dot{I}_m^{CT} через плотность тока $\dot{\vec{\eta}}_m^{CT}$:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\eta}}_m^{CT} &= \left[\vec{y}^\circ (\dot{\vec{H}}_{m1} - \dot{\vec{H}}_{m2}) \right] = \left[\vec{x}^\circ (\vec{y}^\circ \dot{H}_{mS} - (-\vec{y}^\circ \dot{H}_{mS})) \right] = \vec{z}^\circ 2\dot{H}_{mS} \\ \dot{I}_m^{CT} &= \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{\eta}_m^{CT} dy' = 2 \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{H}_{mS} dy'. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Решение задачи (3.36), (3.37) получим из решения задачи (3.38), (3.39) по формулам:

$$\dot{\vec{E}}_m^M = -\dot{\vec{H}}_m^\ominus \Big|_{\dot{H}_{mS} \rightarrow \dot{E}_{mS}}; \quad \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{\dot{\vec{E}}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\ominus \Big|_{\dot{H}_{mS} \rightarrow \dot{E}_{mS}}. \quad (3.42)$$

Запишем выражение для полей элементарного щелевого излучателя в дальней зоне, используя выражения (3.40), (3.41), (3.42):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m^M &= -\vec{\alpha}^\circ i \frac{2\dot{I}_m^{M.CT} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \\ \dot{\vec{H}}_m^M &= \theta^\circ i \frac{2\dot{I}_m^{M.CT} \vec{k} \cdot \vec{l}}{4\pi} \cdot \frac{1}{\dot{W}} \cdot \sin \theta \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}\end{aligned}\quad (3.43)$$

где

$$I_m^{M.CT} = \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy'. \quad (3.44)$$

Сравнивая выражения (3.43) с выражениями для поля элементарного магнитного излучателя (3.33), видим, что они совпадают при

$$\dot{I}_m^{M.CT} \cdot l^M = 2l \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy'. \quad (3.45)$$

Таким образом, элементарный щелевой излучатель является физической реализацией элементарного магнитного излучателя с моментом:

$$\dot{P}_m^{M.CT} = 2l \int_{y'=-d/2}^{d/2} \dot{E}_{mS} dy' = 2\dot{U}_{mS} l, \quad (3.46)$$

где \dot{U}_{mS} - напряжение в щели.

3.5. Принцип эквивалентности

Принцип эквивалентности позволяет определить электромагнитное поле вне поверхности S , охватывающей область сторонних источников, через эквивалентные поверхностные токи, распределённые на этой поверхности.

Пусть сторонние токи распределены в области V' с объёмной плотностью $\dot{\vec{J}}_m^{CT}$, а поверхность S , охватывающая область V' , делит всё пространство на области I и II (рис. 3.6.), причём область I – произвольная, а область II представляет линейную, изотропную, однородную среду, характеризуемую параметрами $\varepsilon = const$, $\mu = const$, $\sigma = const$; \vec{v}° - единичный вектор нормали в каждой точке поверхности S .

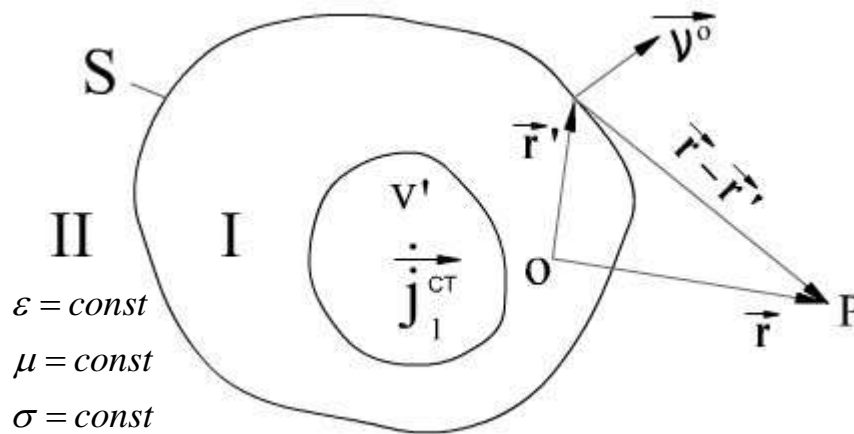


Рис.3.6. К трактовке принципа эквивалентности.

На поверхности S заданы поверхностные плотности эквивалентных электрических $\dot{\eta}_m^{\text{ЭКВ.Э}}$ и магнитных $\dot{\eta}_m^{\text{ЭКВ.М}}$ токов, выражающиеся через тангенциальные составляющие напряжённости магнитного и электрического поля:

$$\dot{\eta}_m^{\text{ЭКВ.Э}} = \left[\vec{v}^0 \cdot \dot{\vec{H}}_m \right]_S, \quad (3.47)$$

$$\dot{\eta}_m^{\text{ЭКВ.М}} = - \left[\vec{v}^0 \cdot \dot{\vec{E}}_m \right]_S. \quad (3.48)$$

Требуется определить поля $\dot{\vec{E}}_m(\vec{r})$ и $\dot{\vec{H}}_m(\vec{r})$ в произвольной точке P области II на расстоянии r от начала координат.

Искомые поля удовлетворяют однородной системе уравнений электродинамики (системе (3.25) при $\dot{j}_m^{\text{CT}} = 0, \dot{j}_m^{\text{M.CT}} = 0$):

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \dot{\vec{E}}_m; \quad \text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m \quad (3.49)$$

и граничным условиям (3.47), (3.48).

Представим решение системы (3.49) в виде суммы:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m^{\text{Э}} + \dot{\vec{E}}_m^{\text{М}}; \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m^{\text{Э}} + \dot{\vec{H}}_m^{\text{М}}, \quad (3.50)$$

где поля $\dot{\vec{E}}_m^{\text{Э}}, \dot{\vec{H}}_m^{\text{Э}}$ и $\dot{\vec{E}}_m^{\text{М}}, \dot{\vec{H}}_m^{\text{М}}$ удовлетворяют однородной системе уравнений электродинамики и определяются независимо из решения «электрической» и «магнитной» задач.

Для «электрической» задачи нужно найти решение однородной системы электродинамики:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} = i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}}; \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}}, \quad (3.51)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$a) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S = 0, \quad б) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S = \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{EKB.}\mathcal{E}}(\vec{r}'). \quad (3.52)$$

Для «магнитной» задачи нужно найти решение однородной системы электродинамики:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{M}} = i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{M}}; \quad \operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{M}} = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{M}}, \quad (3.53)$$

удовлетворяющее следующим граничным условиям:

$$a) \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{M}} \right] \Big|_S = 0, \quad б) - \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{M}} \right] \Big|_S = \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{EKB.}\mathcal{M}}. \quad (3.54)$$

Решение «электрической» задачи.

Так как тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля на поверхности S равна нулю (3.52.а), то при решении этой задачи поверхность S можно рассматривать как поверхность идеального проводника, по которой течёт поверхностный ток с плотностью $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{EKB.}\mathcal{E}}(\vec{r}')$ (3.52.б).

Используя формулу (2.25), запишем выражение для векторного потенциала $\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}}$ этого тока:

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} = \oint_S \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{EKB.}\mathcal{E}}(\vec{r}') \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} ds', \quad (3.55)$$

где $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{EKB.}\mathcal{E}} = \left[\vec{\nu}^{\circ} \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} \right] \Big|_S$.

Напряжённость магнитного и электрического поля выражается через векторный потенциал по формулам (2.7), (2.9):

$$a) \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}} = \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}}; \quad б) \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}} = \frac{1}{i\omega \dot{\vec{\varepsilon}}_a} \left(\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} + k^2 \dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}} \right). \quad (3.56)$$

Решение «магнитной» задачи.

Эта задача является двойственным аналогом предыдущей, и её решение можно представить через векторный потенциал (3.55) в виде (3.56), произведя замены:

$$\dot{\vec{E}}_m^M = -\dot{\vec{H}}_m^\mathcal{E}; \quad \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{\dot{\vec{\varepsilon}}_a}{\mu_a} \dot{\vec{E}}_m^\mathcal{E}; \quad \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}} \rightarrow \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}. \quad (3.57)$$

В результате получим следующие выражения для векторного потенциала $\dot{\vec{A}}_m^M$ и напряженности поля $\dot{\vec{E}}_m^M$ и $\dot{\vec{H}}_m^M$:

$$\dot{\vec{A}}_m^M = \oint_S \dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}(\vec{r}') \cdot \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} ds', \quad (3.58)$$

где $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M} = -\left[\vec{v}^\circ \dot{\vec{E}}_m\right]_S$;

$$a) \dot{\vec{E}}_m^M = \text{rot} \dot{\vec{A}}_m^M; \quad б) \dot{\vec{H}}_m^M = \frac{1}{i\omega\mu_a} \left(\text{grad div} \dot{\vec{A}}_m^M + k^2 \dot{\vec{A}}_m^M \right). \quad (3.59)$$

3.9. Электромагнитное поле элемента Гюйгенса.

Выражения (3.55), (3.58) можно представить в виде $\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E} = \oint_S d\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E}$ и

$$\dot{\vec{A}}_m^M = \oint_S d\dot{\vec{A}}_m^M, \quad \text{где } d\dot{\vec{A}}_m^\mathcal{E} \text{ и } d\dot{\vec{A}}_m^M - \text{векторные потенциалы}$$

элементарного поверхностного источника, представляющего собой элемент поверхности, на которой заданы тангенциальные составляющие напряжённости электрического и магнитного полей, через которые выражаются поверхностные плотности эквивалентного электрического $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.\mathcal{E}}$ и магнитного $\dot{\vec{\eta}}_m^{\mathcal{E}KB.M}$ тока.

Если элемент поверхности ds представляет собой элементарный участок фронта сферической (локально плоской) волны, то в этом случае элементарный поверхностный источник называют элементом Гюйгенса. Векторы напряжённости электрического и магнитного полей на элементе Гюйгенса связаны между собой соотношениями (3.16):

(3.61), (3.62) получим выражения для электрического $\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}\Gamma}$ и магнитного $\dot{\vec{A}}_m^{M\Gamma}$ векторных потенциалов элемента Гюйгенса:

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} = -\vec{x}^\circ \frac{\dot{E}_\circ}{\dot{W}} \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.63)$$

$$\dot{\vec{A}}_m^{\mathcal{E}M} = -\vec{y}^\circ \dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (3.64)$$

Представим поле элемента Гюйгенса в виде суммы:

$$a) \dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} + \dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} \quad б) \dot{\vec{H}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{H}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} + \dot{\vec{H}}_m^{M\Gamma}. \quad (3.65)$$

Далее, ограничиваясь определением полей в дальней зоне, в соответствии с принципом излучения на бесконечности, используя (3.17б), представим $\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma}$ в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} = -ik\dot{W}\dot{\vec{A}}_{m\perp}^{\mathcal{E}\Gamma}. \quad (3.66)$$

Используя (3.59.а), представим $\dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma}$ в виде:

$$\dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} = ik \left[\vec{r}^\circ \dot{\vec{A}}_{m\perp}^{M\Gamma} \right]. \quad (3.67)$$

Представляя единичные векторы $\vec{x}^\circ, \vec{y}^\circ$, входящие в выражения (3.63), (3.64), в виде разложения по ортам сферической системы координат:

$$\begin{aligned} a) \vec{x}^\circ &= (\vec{r}^\circ \sin \theta + \vec{\theta}^\circ \cos \theta) \cos \alpha - \vec{\alpha}^\circ \sin \alpha, \\ б) \vec{y}^\circ &= (\vec{r}^\circ \sin \theta + \vec{\theta}^\circ \cos \theta) \sin \alpha + \vec{\alpha}^\circ \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.68)$$

преобразуем выражения (3.66), (3.67) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m^{\mathcal{E}\Gamma} &= ik\dot{W} \frac{E_\circ}{\dot{W}} \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot (\vec{\theta}^\circ \cos \theta \cos \alpha - \vec{\alpha}^\circ \sin \alpha) \\ \dot{\vec{E}}_m^{M\Gamma} &= -ik\dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \left[\vec{r}^\circ (\vec{\theta}^\circ \cos \theta \sin \alpha + \vec{\alpha}^\circ \cos \alpha) \right] = \\ &= -ik\dot{E}_\circ \cdot \frac{ds}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot (\vec{\alpha}^\circ \cos \theta \sin \alpha - \vec{\theta}^\circ \cos \alpha). \end{aligned}$$

Используя (3.65), получим следующее выражение для напряжённости электрического поля элемента Гюйгенса в дальней зоне:

$$\dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} = \dot{\vec{E}}_m^{\text{ЭГ}} + \dot{\vec{E}}_m^{\text{МГ}} = i \frac{\dot{\vec{E}}_0 \dot{k} \cdot d\vec{s}}{4\pi} (1 + \cos \theta) \cdot (\vec{\theta}^0 \cos \alpha - \vec{\alpha}^0 \sin \alpha) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (3.69)$$

Выражение для напряжённости магнитного поля элемента Гюйгенса в дальней зоне получим, используя формулу (3.17):

$$\dot{\vec{H}}_m^{\Gamma} = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{r}^0 \cdot \dot{\vec{E}}_m^{\Gamma} \right] = i \frac{\dot{\vec{E}}_0 \dot{k} \cdot d\vec{s}}{4\pi \dot{W}} (1 + \cos \theta) \cdot (\vec{\theta}^0 \sin \alpha + \vec{\alpha}^0 \cos \alpha) \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (3.70)$$

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в меридиональной плоскости представляет собой кривую,

описываемую уравнением $r = \frac{E_m(\theta)}{E_{m\max}} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$. Эта

кривая называется кардиоидой (рис.3.8.). Излучение максимально в направлении распространения волны ($\theta = 0$), элементарный участок фронта которой представляет собой рассматриваемый элемент Гюйгенса. В обратном направлении ($\theta = 180^\circ$) излучение отсутствует.

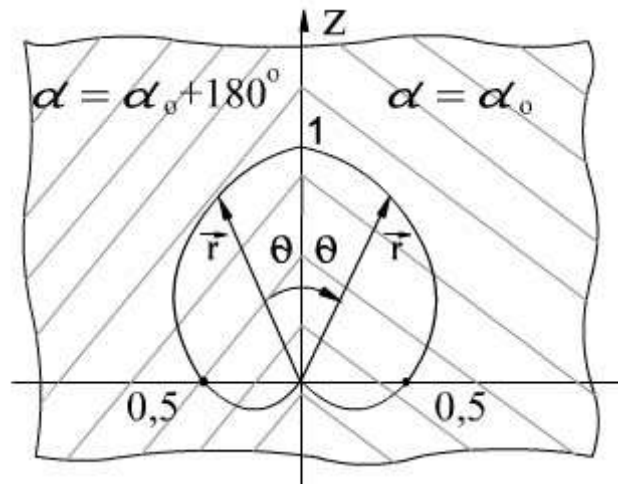


Рис.3.8. Диаграмма направленности элемента Гюйгенса.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Введение.....	4
1. Основные понятия и уравнения электродинамики.....	5
1.1. Характеристики электромагнитного поля. Электрические заряды и токи.....	5
1.2. Уравнения Максвелла.....	7
1.3. Основные законы электромагнетизма, выражаемые уравнениями Максвелла.....	9
1.4. Уравнение непрерывности и закон сохранения заряда.....	10
1.5. Материальные уравнения и классификация сред.....	11
1.6. Полная система уравнений электродинамики.....	14
1.7. Граничные условия электродинамики.....	15
1.8. Теорема Пойнтинга.....	19
1.9. Уравнения электродинамики и теорема Пойнтинга для монохроматического электромагнитного поля.....	21
1.10. Теорема единственности для внутренних и внешних задач электродинамики.....	24
2. Возбуждение электромагнитных волн в свободном пространстве.....	27
2.1. Постановка задачи.....	27
2.2. Волновые уравнения электродинамики. Векторный потенциал.....	28
2.3. Векторный потенциал элемента электрического тока.....	29
2.4. Векторный потенциал линейного, поверхностного и объемного токов.....	32
2.5. Электромагнитное поле поверхностного тока, равномерно распределенного на бесконечной плоскости. Плоские однородные волны (ПОВ).....	34
2.6. Основные характеристики ПОВ.....	39
2.7. ПОВ с линейной, круговой и эллиптической поляризацией векторов поля.....	42

2.8. Электромагнитное поле элементарного электрического излучателя. Основные характеристики.....	45
2.9. Электромагнитное поле в дальней зоне. Сферическая волна...	47
2.10. Диаграмма направленности.....	49
2.11. Мощность и сопротивление излучения.....	52
3. Основные принципы, используемые в теории электромагнитного поля.....	54
3.1. Принцип суперпозиции.....	54
3.2. Электромагнитное поле элементарного рамочного излучателя.....	55
3.3. Принцип излучения на бесконечности.....	58
3.4. Принцип взаимности.....	60
3.5. Принцип двойственности.....	63
3.6. Электромагнитное поле элементарного магнитного излучателя.....	64
3.7. Электромагнитное поле элементарного щелевого излучателя.....	66
3.8. Принцип эквивалентности.....	68
3.9. Электромагнитное поле элемента Гюйгенса.....	71

Александр Николаевич Коваленко
Александр Николаевич Щербицкий

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Часть 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Учебное пособие

Редактор А.Н. Щербицкий
Литературный редактор Н.К. Костыгина

Изд. лицензия №020456 от 04.003.97
Подписано к печати 21.04.99 Формат 60х 84 1/6.
Бумага офисная. Печать офесная Усл. Печ. Л. 4,18
Усл. Кр. – отт.16.72. Уч. – изд. Л.4,5. Тираж 500 экз.
С 579.

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)
117454 Москва, прос-т Вернадского, 78