Семинар 11.

Китайская теорема об остатках для КГИ.

① 4.482, 4.483, 4.484, 4.485, 4.486, 4.487

Решение систем сравнений.

② Найти $f(x) \in \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{cases} f(x) \equiv x \pmod{(x-1)^2} \\ f(x) \equiv -3 \pmod{x^2} \end{cases}$$

Решение:

$((x-1)^2, x^2) = 1 \Rightarrow \exists\, p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]: (x-1)^2 p(x) + x^2 q(x) = 1$

$(x^2-2x+1)p(x) + x^2 q(x) = 1 \quad (*)$

$$A = \begin{pmatrix} x^2-2x+1 & x^2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-A^2+A^1} \begin{pmatrix} -2x+1 & x^2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2A^2} \begin{pmatrix} -2x+1 & 2x^2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{xA^1+A^2} \begin{pmatrix} -2x+1 & x \\ 1 & x \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} \xrightarrow{2A^2+A^1} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1+2x & x \\ 3-2x & 2-x \end{pmatrix}$$

Частное решение $(*)$: $\begin{cases} p(x) = 1+2x \\ q(x) = 3-2x \end{cases}$

$l_1(x) = x^2 q(x) = x^2(3-2x) = -2x^3+3x^2$

$l_2(x) = (x-1)^2 p(x) = (x-1)^2(1+2x)$, $\quad l_2(x) + l_1(x) = 1 \Rightarrow l_2(x) = 1 - l_1(x) = 2x^3-3x^2+1$

$f(x) = x\, l_1(x) + (-3)\, l_2(x) + g(x)\, x^2 (x-1)^2$, где $g(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = x(-2x^3+3x^2) + (-3)(2x^3-3x^2+1) + g(x)\, x^2(x^2-2x+1) =$

$= -2x^4+3x^3-6x^3+9x^2-3+g(x)(x^4-2x^3+x^2) =$

$= -2x^4-3x^3+9x^2-3 + g(x)(x^2-2x^3+x^2$

$$\begin{array}{r|l} -2x^4-3x^3+9x^2-3 & x^2-2x^3+x^2 \\ \cline{2-2} -\;\; -2x^4+4x^3-2x^2 & -2 \\ \hline -7x^3+11x^2-3 & \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = -7x^3+11x^2-3+h(x)\, x^2(x-1)^2$, где $h(x) \in \mathbb{R}[x]$

⚠ ③ 4.489 а), б), 4.490

Системы сравнений надо научиться хорошо решать и в $\mathbb{Z}$ и в кольцах многочленов.