Преобразование Лапласа.

Занятие 11. Операторное исчисление.

Это преобразование введено для решения операторным методом дифф. ур-ний вида:

$$L(d)\,x(t) = f(t),$$ $x(t)$ – искомая ф-ия;

где $L(d)$ – лин. дифф. оператор порядка n с пост. коэфф.

$f(t)$ – квазимногочлен (и не только);

например, $x'' + 4x' + 5x = t^2 \sin 3t$.

Опр. **Оригиналом** наз. комплексная ф-ия $f(t)$ веществ. переменного $t \in \mathbb{R}$, уд. условиям:

1) $f(t)$ непрер. на $[0;+\infty)$, за искл., быть может, кон. числа т. разрыва на $\forall$ конечном инт.

2) $f(t)=0$ при $t<0$;

3) $\exists M>0;\ S_0 \geq 0:\ \forall t\ \ |f(t)| \leq M e^{S_0 t}$

(S_0 – показатель роста ф-ии $f(t)$).

Опр. **Изображением по Лапласу** наз. ф-ия компл. переменного $p = s + i\sigma$:

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.}$$

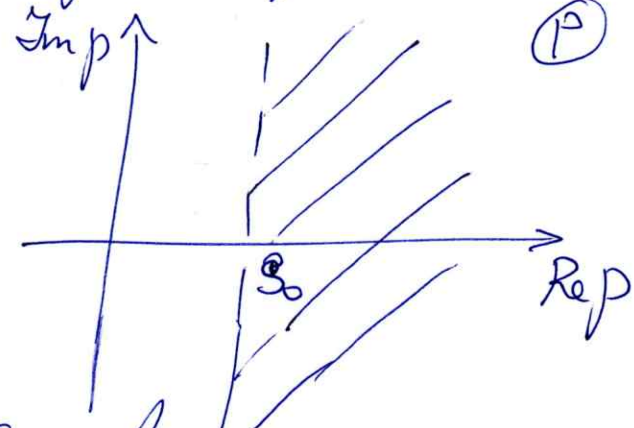
$f(t) \risingdotseq F(p)$; $F(p) = Lf(t)$.

$F(p) \fallingdotseq f(t)$.

Переход от оригинала к изобр-ю наз. преобр-ем Лапласа; нахождение $F(p)$ по $f(t)$ и $f(t)$ по $F(p)$ наз. операционным исчисл.

Теор. 1. (существование изобр-я).

Ф-ия $F(p) = L f(t)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 - показатель роста ф-ии $f(t)$.



Теор2 (единств-ть изобр-я).

$$f_1(t) = f_2(t) \Rightarrow F_1(p) = F_2(p).$$

Свойства преобр-я Лапласа.

1°. Линейность:

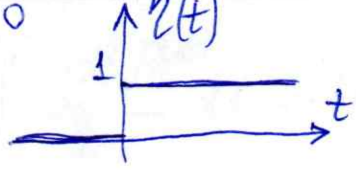
$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p).$$

1. Пользуясь определением, найти изображение ф-ии $f(t) = e^{2t}$. $\eta(t) = \mathbb{1}(t) = 1.$

а) $$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^{2t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(2-p)t} dt = \left. \frac{e^{(2-p)t}}{2-p} \right|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2-p}(0 - 1) = \frac{1}{p-2}.$$ $(\operatorname{Re} p > 2).$

б) $$f(t) = \mathbb{1}; \quad F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \Big|_{t=0}^{t \to +\infty} = \frac{1}{p}.$$

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



2° Теорема подобия:

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha>0.$$

2. Пользуясь таблицей, найти изобр. ф-ций:

$$f_1(t) = \sin 3t.$$

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \sin 3t \risingdotseq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1} = \frac{3}{p^2+9}.$$

$$f_2(t)=\cos 2t;\quad F(p)=\frac{p}{p^2+4}.$$

$$f_3(t) = 5\,\mathrm{sh}\,3t;\quad F(p)=5\cdot\frac{3}{p^2-9}.$$

$$f_4(t)=\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

$$F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)=$$

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

3° Теорема смещения изобр-я:

$$e^{-\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p+\alpha).$$

Найти изображение:

Пример 1. $f(t)=e^{-t}\cos 2t;\quad F(p)=\dfrac{p+1}{(p+1)^2+4} = \dfrac{p+1}{p^2+2p+5}$

найти оригинал

$f(t)=te^{-t}$; $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2}$, т.к. $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$.

4° Теорема дифф-я изображения:

$$F'(p)\risingdotseq(-t)\cdot f(t);\quad F''(p)\risingdotseq t^2\cdot f(t), \ldots$$

Найти изображение

Пример 2. $f_1(t)=t^2e^t \Rightarrow F(p)=\dfrac{d^2}{dp^2}\left(\dfrac{1}{p-1}\right)=\dfrac{d}{dp}\left(-\dfrac{1}{(p-1)^2}\right)=$

$$F(p)=2\cdot\frac{1}{(p-1)^3}.$$

$$\varphi(t)=t\sin 3t \Rightarrow F(p)=-\frac{d}{dp}\left(\frac{3}{p^2+9}\right)=-3\cdot\left(-\frac{2p}{(p^2+9)^2}\right)$$

$$F(p)=\frac{6p}{(p^2+9)^2}.$$

См. пример 3 след. стр.

8° Если $f(t)$ — периодич. периода T, то

$$\boxed{F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f_1(t)\,dt}.$$ (ТР, №6) см. стр 5.

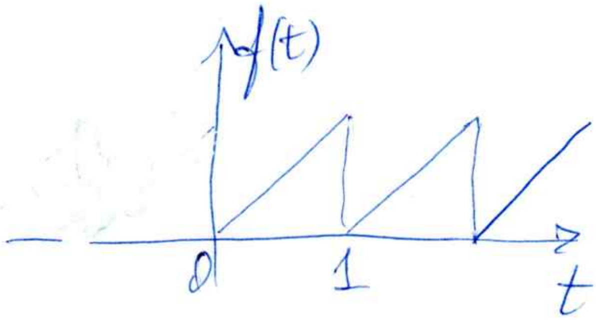
где $f_1(t)$, $t\in[0,T]$.

Пример 4. $f(t)=t,\ 0\le t<1$; $F(p)$ - ? $T=1$

найти изображение периодического оригинала.

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-p}}\cdot\int_0^1 \underbrace{t e^{-pt}\,dt}_{dv}=\frac{1}{1-e^{-p}}\left[-t\cdot\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_{t=0}^{t=1}+\int_0^1\frac{e^{-pt}}{p}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{1-e^{-p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\Bigg|_{t=0}^{t=1}\right]=$$



$$=\frac{1}{1-e^{-p}}\left[-\frac{e^{-p}}{p}-\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p^2}\right].$$

Пример 3. С пом. теорем дифф-я изобр-я найти изобр-е ф-ции:

$\varphi(t)=t\cdot e^{3t}\cdot\cos 2t$; обозначим $G(p)\risingdotseq\varphi(t)$.

Решение. $F'(p)\risingdotseq(-t)f(t)$. $\Rightarrow -F'(p)\risingdotseq t f(t)$.

У нас $f(t)=e^{3t}\cos 2t$; тогда $F(p)=\dfrac{p-3}{(p-3)^2+4}$.

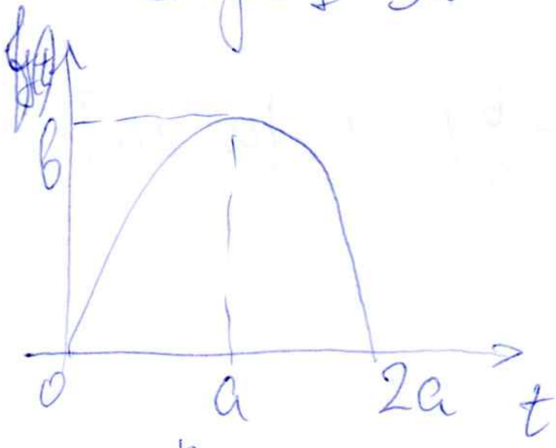
$$F'(p)=\frac{(p-3)^2+4-2(p-3)^2}{((p-3)^2+4)^2}=\frac{-(p^2-6p+5)}{(p^2-6p+13)^2}.$$

Ответ:

$$G(p)=\frac{p^2-6p+5}{(p^2-6p+13)^2}.$$

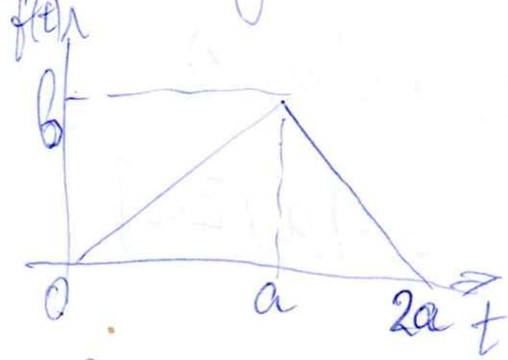
ТР. Задача №6. Аналитическое задание оригиналов.

Вар. 1–5.



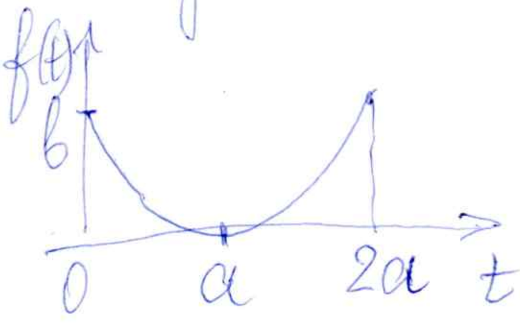
$$f(t)=b-(t-a)^2$$

Вар. 6–10.



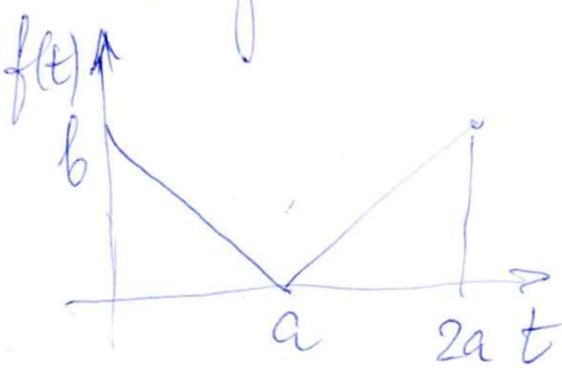
$$f(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}t, & t\in[0;a]\\ -\frac{b}{a}(t-2a), & t\in[a;2a]\end{cases}$$

Вар. 11–15.



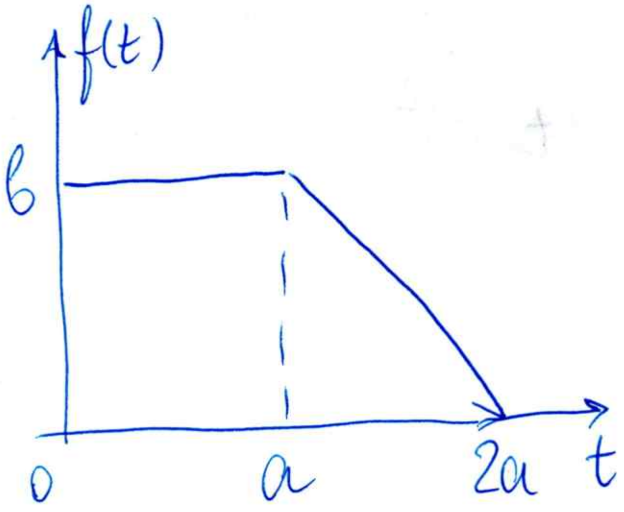
$$f(t)=\frac{b}{a^2}(t-a)^2$$

Вар. 16–20



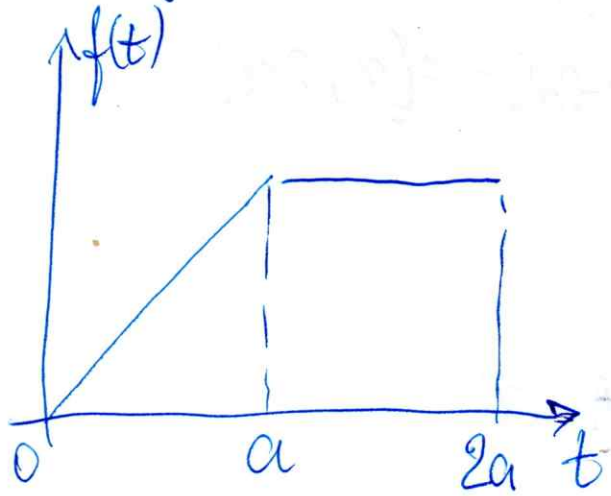
$$f(t)=\begin{cases}\frac{b}{a}(a-t), & t\in[0;a)\\ \frac{b}{a}(t-a), & t\in[a;2a]\end{cases}$$

Вар. 21–25.



$$f(t)=\begin{cases} b, & t\in[0;a) \\ 2b-\frac{b}{a}t, & t\in[a;2a] \end{cases}$$

Вар. 26–30.



$$f(t)=\begin{cases} \frac{b}{a}t, & t\in[0;a) \\ b, & t\in[a;2a] \end{cases}$$

6

Восстановить оригинал, раскладывая изображение на простые дроби.

а). $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+2p+5}=\dfrac{p+4}{(p+1)^2+4}=\dfrac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{(p+1)^2+2^2}$

$f(t)=e^{-t}\cos 2t+\dfrac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.$

б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}=\dfrac{1+p^2-p^2}{p^2(p^2+1)}=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p^2+1}$

$f(t)=t-\sin t.$

в) $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4}.$

$A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)\cdot p(p-1)=1.$

$p=0:\ -4A=1\ \Rightarrow\ A=-\dfrac{1}{4}$

$p=1:\ 5B=1\ \Rightarrow\ B=1/5$

при p^3: $A+B+C=0\ \Rightarrow\ -\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+C=0\ \Rightarrow\ C=\dfrac{1}{20}.$

при p^2: $-A-C+D=0;\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}+D=0;\ D=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{20}.$

$F(p)=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{p-1}{p^2+4}$

$f(t)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}e^{t}+\dfrac{1}{20}\cos 2t-\dfrac{1}{40}\sin 2t.$

Самост. работа: 1. Найти изобр-е для оригинала
2. Найти оригинал для изобр-я.

Дома: ТР, №1–5б, №6.

Ефимов, Поспелов, том 3, №14.9; 14.17–14.34; 14.52, 14.74–14.80

Свойства преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

1.Теорема подобия: $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$

2.Теорема смещения изображения:

$$e^{-at} f(t) \risingdotseq F(p + a)$$

3.Теорема запаздывания оригинала:

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$$

4.Теорема дифференцирования изображения:

$$F`(p) \risingdotseq (-t) f(t), \qquad F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$$

5.Теорема дифференцирования оригинала:

$$y`(t) \risingdotseq pY(p) - y(0), \quad y``(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py(0) - y`(0)$$

6.Теорема интегрирования оригинала:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$$

7.Изображение периодической функции:

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T t^{-pt} f(t)dt$$

8.Линейность: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$

$f(t)$	$g(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$
1	$1/p$
e^{-at}	$1/(p+a)$
$\sin \omega t$	$\omega/(p^2+\omega^2)$
$\cos \omega t$	$p/(p^2+\omega^2)$
t^n	$n!/p^{n+1}$

$\operatorname{sh}\omega t$	$\omega / p^2-\omega^2$
$\operatorname{ch}\omega t$	$p / p^2-\omega^2$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$f^{(n)}(t)$	$p^n g(p)$
$(-t)^n f(t)$	$g^{(n)}(p)$

$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2!}{p^3}$
t^3	$\frac{3!}{p^4}$

Вариант №1

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=3e^{-t}+e^{t}\cos 3t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+4)}$$

Вариант №2

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=te^{3t}-\sin 3t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p-1)^2}$$

Вариант №3

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=e^{2t}\cos 3t+te^{t}$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+4)}$$

Вариант №4

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=e^{t}\cos^2 t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{p}{p^4-2p^2+1}$$

Вариант №5

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=4\,\mathrm{sh}\,2t-t^2$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{6}{p^2(p^2+9)}$$

Вариант №6

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=\sin^2 t\cdot e^{3t}$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{2}{p^3-4p^2}$$

Вариант №7

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=t\,\mathrm{ch}\,2t+e^{-t}\cos 3t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{2}{(p+1)(p+4)}$$

Вариант №8

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=te^{3t}\cos 2t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{1}{p^2(p^2+16)}$$

Вариант №9

1.Найти изображение по Лапласу следующей функции:

$$f(t)=e^{4t}\cos^2 t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{1}{p^2-3p+1}$$

Вариант №10

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=e^{t}\,\mathrm{sh}\,2t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{p}{(p-3)(p^2+2p+5)}$$

Вариант №11

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=te^{t-1}+4e^{5t}\cos t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{5}{p(p^2+4p+13)}$$

Вариант №12

1.Найти изображение для оригинала:

$$f(t)=te^{-t}\sin 2t$$

2.Найти оригинал изображения:

$$F(p)=\frac{p}{(p-10)(p^2+6p+1)}$$

Ответы к самост. работе по операц. исчислению.

	№1. Найти изображение для оригинала.	№2. Найти оригинал для изображения.
Вар.1	$F(p)=\frac{3}{p+1}+\frac{p-1}{(p-1)^2+9}$	$f(t)=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t$
Вар.2	$F(p)=\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{3}{p^2+9}$	$f(t)=1-e^t+te^t$
Вар.3	$F(p)=\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{1}{(p-1)^2}$	$f(t)=\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{2}{5}\sin 2t$?
Вар.4	$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(p-1)^2}{(p-1)^2+4}$	$f(t)=\frac{1}{4}te^t-\frac{1}{4}te^{-t}$
Вар.5	$F(p)=\frac{8}{p^2-4}-\frac{2}{p^3}$	$f(t)=\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}\sin 3t$
Вар.6	$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p-3}{(p-3)^2+4}$	$f(t)=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}e^{4t}$
Вар.7	$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+3)^2}$	$f(t)=\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-4t}$ $F(p)=\frac{4p}{(p^2-4)^2}+\frac{p+1}{p^2+2p+10}$
Вар.8	$F(p)=-\frac{9-(p-3)^2}{[(p-3)^2+9]^2}$	$f(t)=\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\sin 4t$ $F(p)=\frac{p^2-6p+5}{(p^2-6p+13)^2}$
Вар.9	$F(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p-4}{(p-4)^2+4}$	$f(t)=\frac{2}{\sqrt5}e^{\frac{3}{2}t}\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt5}{2}t\right)$
Вар.10	$F(p)=\frac{2}{(p-1)^2-4}$	$f(t)=\frac{3}{20}e^{3t}-\frac{3}{20}e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 2t$
Вар.11	$F(p)=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}+4\cdot\frac{p-5}{(p-5)^2+1}$	$f(t)=\frac{5}{13}t-\frac{5}{13}e^{-2t}\cos 3t-\frac{20}{39}e^{-2t}\sin 3t$
Вар.12	$F(p)=\frac{4(p+1)}{((p+1)^2+4)^2}$	$f(t)=\frac{10}{161}e^{10t}+\frac{1}{161}\left[-10e^{-3t}\operatorname{ch}\sqrt8 t+\frac{31}{\sqrt8}e^{-3t}\operatorname{sh}\sqrt8 t\right]$