Занятие 10.



## Устойчивость решений системы дифф. ур-ний. Точки покоя. Исследование на устойчивость решений линейных однородных систем.

Дана система дифф. ур-ний

(1) $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t,\bar{x})$;

пусть $\bar{x}=\bar{\varphi}(t)$ – некоторое её решение, определённое $\forall\ t \geq t_0$.

Опр. Решение $\varphi(t)$ системы (1) наз. устойчивым по Ляпунову, если

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$:

для всякого решения $\bar{x}(t)$, начальное зн-е которого уд. нер-ву $\|\bar{x}(t_0)-\bar{\varphi}(t_0)\|<\delta$,

$\forall t \geq t_0$ вып. нер-во $\|\bar{x}(t)-\bar{\varphi}(t)\|<\varepsilon$.

Опр. Решение $\bar{\varphi}(t)$ системы (1) наз. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и

$\exists\ \delta_0>0$ : $\forall$ решения $x(t)$ : $\|\bar{x}(t_0)-\bar{\varphi}(t_0)\|<\delta_0$

справедливо предельное равенство

$$\lim_{t\to+\infty}\|\bar{x}(t)-\bar{\varphi}(t)\|=0.$$

Опр. Решение $\varphi(t)$ наз. неустойчивым, если

$\exists\ \varepsilon_0>0 : \forall\ \delta>0$ (сколь угодно малого) $\exists\ \bar{x}(t)$ – решение, $\|\bar{x}(t_0)-\bar{\varphi}(t_0)\|<\delta$, так что для нек-рого $t_1>t_0$

$\|\bar{x}(t_1)-\bar{\varphi}(t_1)\|\geq\varepsilon_0$.

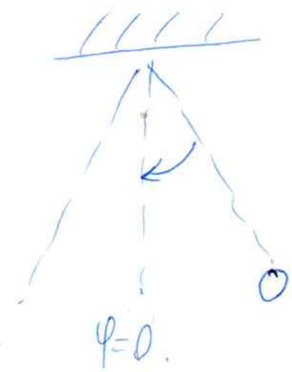
Пример 1. Линеаризов. ур-е
Математич. маятника:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0; \quad \varphi(0) = \varphi_0.$$

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

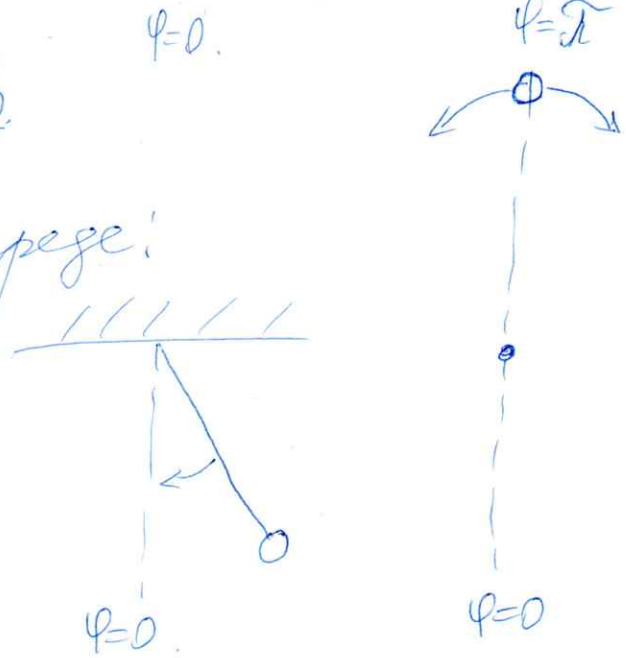
$$\varphi(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Положение $\varphi = 0$ устойчиво.




Маятник в вязкой среде:

$$\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad k > 0$$




Положение $\varphi = 0$ асимптотически устойчиво.

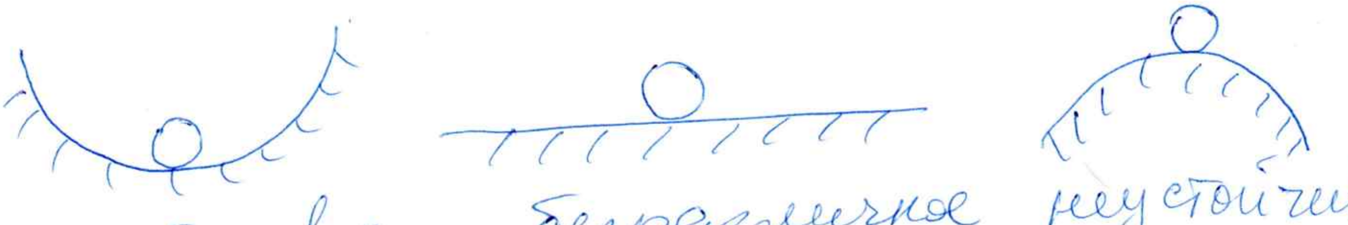
Положение $\varphi = \pi$ неустойчиво.
(для нелинейного ур-я дв-я маятника).

$$\lambda^2 + k\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} - \omega^2; \quad \lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}}$$

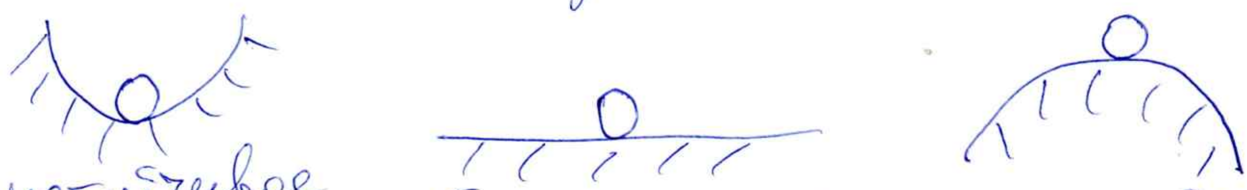
$\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0.$

Положения равновесия называем в быту:



устойчивое безразличное неустойчивое

Положения равновесия:



устойчивое безразличное неустойчивое.

**Пример 2.**

Исслед. на устойчивость решения ур-я: в зав-ти от параметра $\alpha$:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot \frac{x}{t}, \quad x(1)=0.$$

Решение.

$$\frac{dx}{x} = \alpha \frac{dt}{t}$$

$$\ln|x| = \alpha \ln|t| + \ln C$$

$$\underline{x(t) = C \cdot t^{\alpha}}.$$

обозначим $x_0 = x(t_0)$; тогда

$$\underline{x(t) = t^{\alpha} \cdot x_0}.$$

$t=1$: $x(1) = x_0 = 0$

Исследуемое решение

$$x_0(t) \equiv 0.$$

Рассм. разность $x(t) - x_0(t) = t^{\alpha} \cdot x_0$.

Если $\alpha = 0$, то $|x(t) - x_0(t)| = |x_0|$ (устойчиво)

если $\alpha < 0$, то $|x(t) - x_0(t)| = \frac{|x_0|}{t^{\beta}} \to 0$ при $t \to \infty$ (асимпт. устойчиво)

$\beta = -\alpha$

если $\alpha > 0$, то $|x(t) - x_0(t)| = t^{\alpha} \cdot |x_0| \to \infty$ при $t \to \infty$ (неустойчиво)

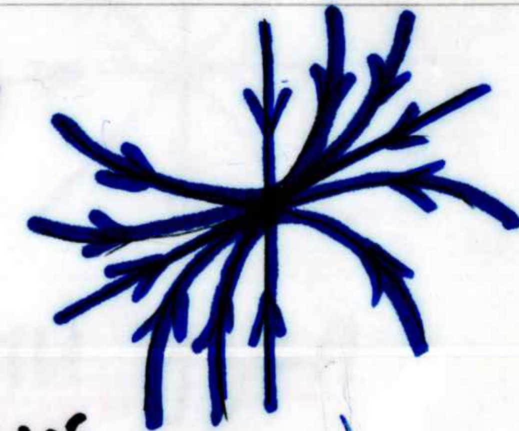
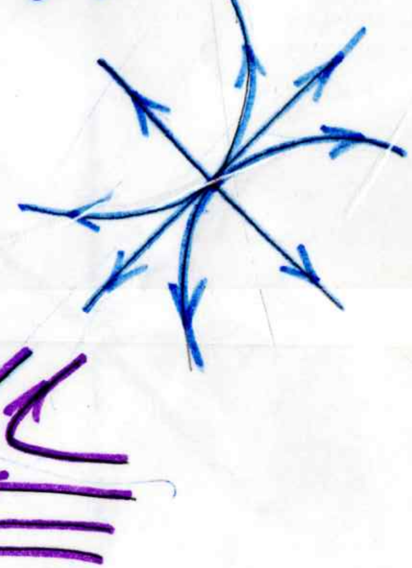
**Ответ:** решение $x \equiv 0$ уст. при $\alpha \le 0$, причём асимпт. уст. при $\alpha < 0$; неуст. при $\alpha < 0$.

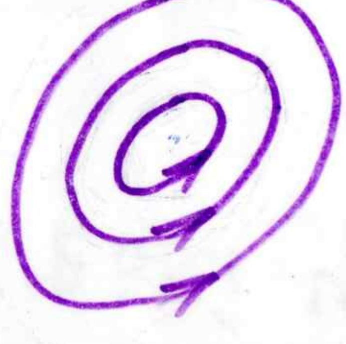
Опр. Автономная система: $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Положение равновесия $x^0$: $\frac{dx}{dt} = 0$, т.е. $f(x^0) = 0$.

или точка покоя.

# Типы Точек Покоя

| Корни $\lambda_1, \lambda_2$ | | Характер точки | |
|---|---|---|---|
| Действительные $\lambda_1 \neq \lambda_2$ | $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ | Устойчивый узел |  |
| | $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ | Неустойчивый узел |  |
| | $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ | Седло |  |

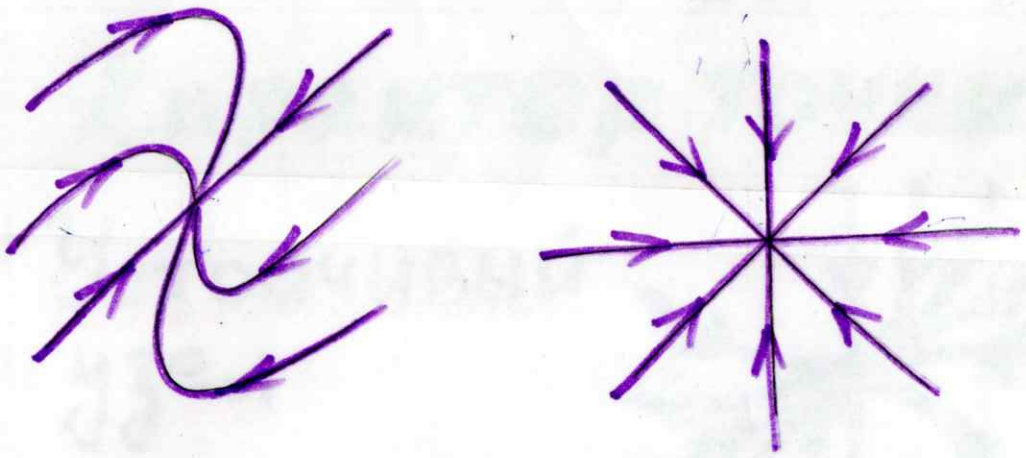
| | | | |
|---|---|---|---|
| КОМПЛЕКСНЫЕ $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ | $\alpha < 0$ | Устойчивый фокус |  |
| | $\alpha > 0$ | Неустойчивый фокус |  |
| | $\alpha = 0$<br>$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ | Центр |  |

Действительные, кратности 2:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

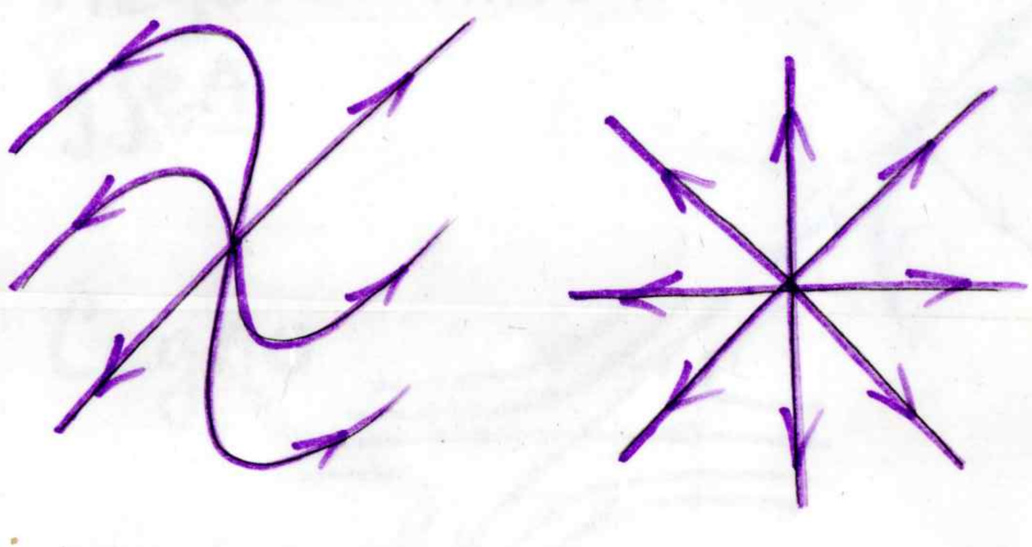
$\lambda < 0$

Устойчивый узел



$\lambda > 0$

Неустойчивый узел



## Иссл-е устойчивости решений лин. однородных систем дифф. ур-ний.

(2) $\frac{dX}{dt} = AX$, $A = (a_{ij}) = \mathrm{const}$.

Условия устойчивости решений системы определяются собств. числами матрицы A. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Теорема. 1) Решения системы (1) явл. устойчивыми

$\Leftrightarrow \forall \lambda_j \ \ \mathrm{Re}\,\lambda_j \le 0$, $j = 1, 2, \dots, n$;

причём числам $\lambda_j$ : $\mathrm{Re}\,\lambda_j = 0$ соответствуют простые элем. делители хар. многочлена. $\lambda^2+\omega^2$

(одномерные клетки Жордана в жордановой форме матрицы A).

2) Решения сист. (1) явл. асимпт. уст.,

$\Leftrightarrow \forall \lambda_j \ \ \mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$.

3) решения сист. (1) явл. неустойчивыми, если $\exists \lambda_i$ : $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$ или чисто мнимому числу $\lambda_i$ : $\mathrm{Re}\,\lambda_i = 0$ соответствует непростой (кратный) элем. делитель $(\lambda^2+\omega^2)^2$ (неодномерная клетка Жордана).

Далее все примеры – к ТР №4. исслед на уст-ть лин. системы №1,2,3.

Пример 1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ КМБ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(ТР, №5). КУБ

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 = 0$

$(\lambda-2)^2 = -1$

$\lambda - 2 = \pm i$ $\quad \mathrm{Re}\,\lambda_1, \lambda_2 = 2 > 0 \Rightarrow$ решения неуст.

$\lambda = 2 \pm i$. „фокус"

См. примеры №7, 7а, 8.

Пример 2. (ТР, №4)

Исследовать на устойчивость решение (0,0,0) системы ур-ний

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 2z \\ \dot{z} = 5x - 4y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -\lambda & -2 \\ 5 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda + 8 = 0.$$

Корень $\lambda = 1$ подходит: $1^3 - 9 + 8 = 0$.

$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 8) = 0$.

$\lambda = 1 > 0 \overset{\text{теорема}}{\Longrightarrow}$ решение (0,0,0) неустойчиво.

Замечание.

Если один из корней хар. ур-я равен нулю ($\lambda = 0$), то система $\dot{x} = Ax$ наз. сложной (см. далее пример 4).

Если $\lambda_j \neq 0$, то система наз. простой.

Пример 3. Исслед. уст-ть решения (0,0,0) данной системы д. ур.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - z \\ \dot{y} = -2x - 7y + 4z \\ \dot{z} = -5x - 10y + 4z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & -7 & 4 \\ -5 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -1 \\ -2 & -7-\lambda & 4 \\ -5 & -10 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-7-\lambda)(4-\lambda) - 80 - 20 + 5(7+\lambda) + 8(4-\lambda) + 40(2-\lambda) = \ldots = -(\lambda+1)(\lambda^2+9).$$

$\lambda_{1,2} = \pm 3i$, $\lambda_3 = -1$ Решение устойчиво.

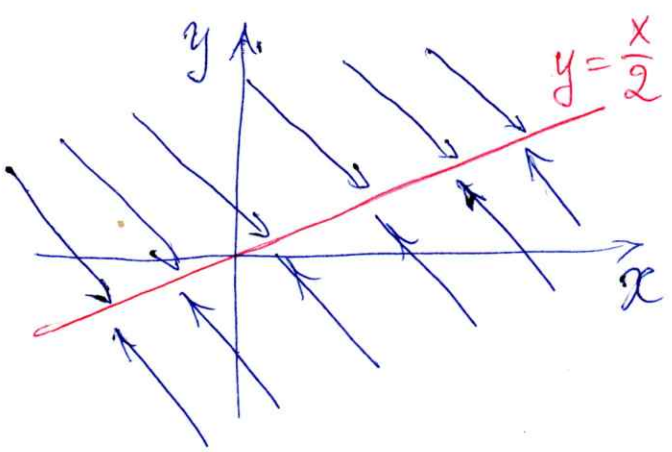
Определить тип точки покоя системы второго порядка. Изобразить траектории в окрестности точки покоя. (ТР, №5).

**Пример 4.** (уравнения пропорциональны).

$$\begin{cases} \mathring{x} = -2x+4y \\ \mathring{y} = x-2y \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda+2)^2-4=0$ $\quad \boxed{\lambda_1=0}$ $\quad$ Решения устойчивы.

$\lambda+2=\pm 2$ $\quad \lambda_2=-4.$




Траектории решений системы — это мн-во точек прямой $y=\frac{x}{2}$, а также лучи-половинки прямых $y=-\frac{x}{2}+C$.

Умножим второе ур. на 2 и сложим с первым:

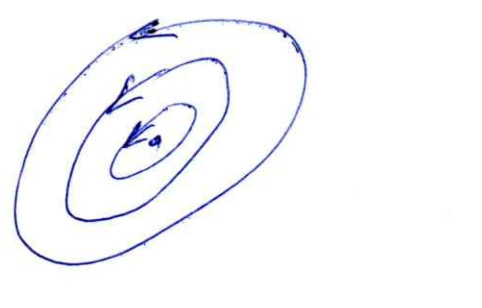
$\mathring{x}+2\mathring{y}=0$; $\frac{d}{dt}(x+2y)=0 \Rightarrow x+2y=C$, $y=-\frac{x}{2}+C$.

**Пример 5.**

$$\begin{cases} \mathring{x} = x-4y \\ \mathring{y} = x-y \end{cases} \quad |A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)+4 = \lambda^2+3=0$$

$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{3} \Rightarrow (0,0)$ - устойчиво.

„центр"



Напр-е дв-я по траекториям — против час. стрелки.

Пример 6.

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x+6y \\ \dot{y} = -3x+5y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-5)+18=0$$

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1)=0.$$

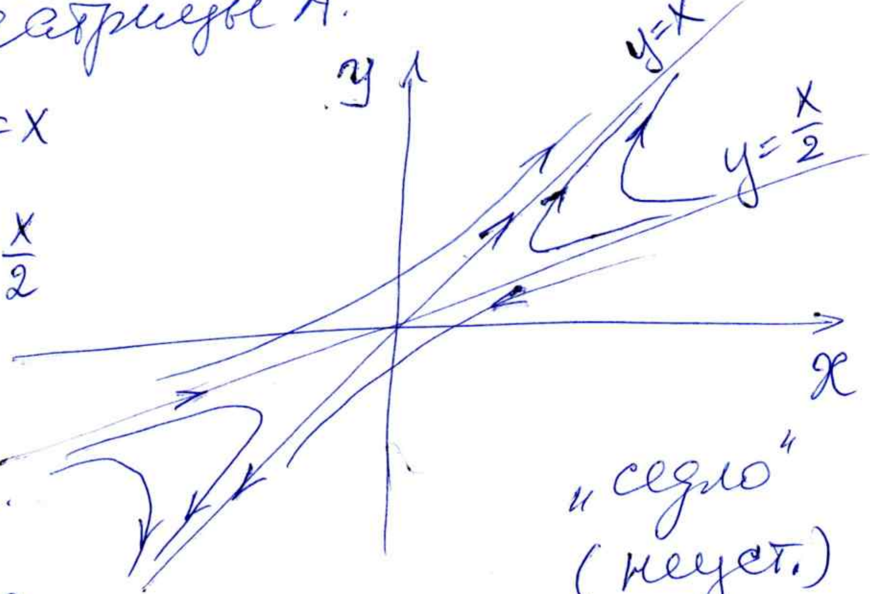
$\lambda_1 = 2 > 0 \Rightarrow$ неуст.

$\lambda_2 = -1.$ „седло"!

Найдём „усы" седла, или асимптоты гипербол. Это собс. в-ры матрицы A.

$\lambda=2: \ \overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ y=x$

$\lambda=-1: \ \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ y=\frac{x}{2}$




„седло" (неуст.)

Определим направление дв-я по траекториям.

$y=x$ – неустойчивая траектория, т.к. $\dot{x} = -4x+6x=2x$

$x(t)=C\cdot e^{2t}$; стрелки – от центра.

Второй способ найти прямолин. траект. Подставим в систему $y=kx$;

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x+6kx = (-4+6k)x \\ k\dot{x} = -3x+5kx = (-3+5k)x \end{cases}$$

Разделим второе ур. на первое:

$$k = \frac{(-3+5k)}{-4+6k} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = 1 \\ k_2 = 1/2. \end{matrix}$$

## Пример 7.

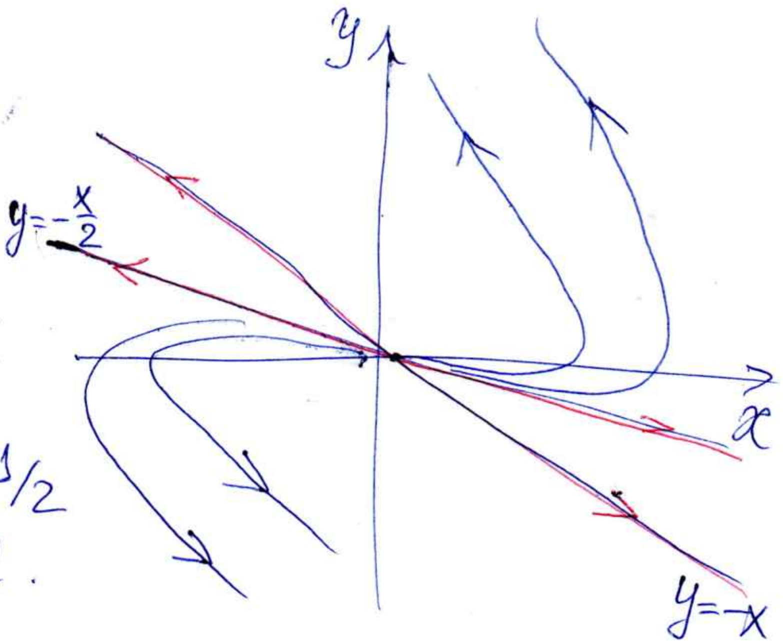
$$\begin{cases}\dot{x} = -x-4y\\ \dot{y} = 2x+5y\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -4\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5)+8 = \lambda^2-4\lambda+3 = (\lambda-1)(\lambda-3).$$

$\lambda_1 = 1 > 0$

$\lambda_2 = 3 > 0$ $\Rightarrow$ неуст. „узел".

Найдём прямолин. траектории $y = kx$.




$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(kx)}{dx} = \frac{2x+5kx}{-x-4kx}$$

$$k = \frac{2+5k}{-1-4k} \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1/2\\ k_2 = -1.\end{matrix}$$

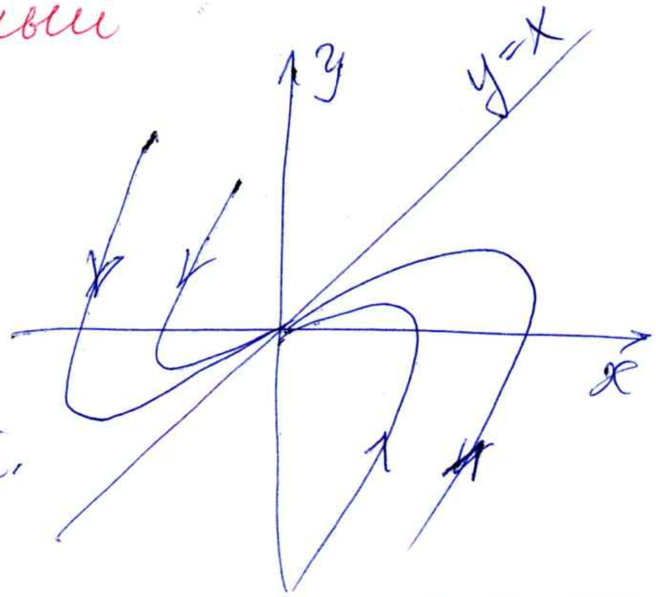
## Пример 8.

$$\begin{cases}\dot{x} = -x-y\\ \dot{y} = x-3y\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$$

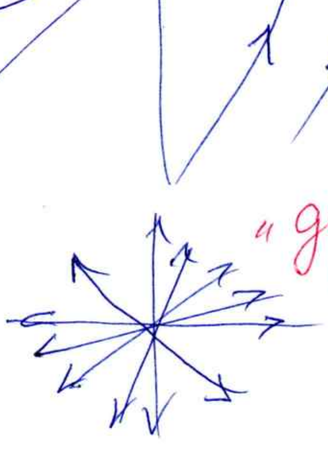
$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ „вырожденный узел" (асимптотич. устойчиво).

Матрица $A = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ имеет один собств. в-р $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ и один присоединённый. Траектории касаются собств. в-ра.




## Пример 9.

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и есть базис из соб. в-ров.



„дикритический узел"

Дома.

ТР, №4: Исслед. на устойчивость тривиальное решение системы $\dot{x} = Ax$ в задания ~~х~~ №2 и 3. (системы второго порядка).

ТР, №5: Опред. тип особой точки системы $\dot{x} = Ax$ из зад. 3.

Замеч. Собств. зн-я матрицы A уже найдены при реш. зад. №1, 2, 3.

Дома. Исслед. особую точку системы. Изобразить интегр. кривые.

№971.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

№972.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

№973.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$$

№974.
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

№975.
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

№976.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

№977.
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4y - 6x \end{cases}$$

№978
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$$