Тема 1. Погрешность. Численное решение систем уравнений

1. Какая связь между абсолютной и относительной погрешностями?
Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности числа к модулю точного числа.

$\delta = \frac{\Delta a}{|A|}$, Δa — абсолютная погрешность, $|A|$— модуль точного числа

2. Чему равна погрешность суммы a+b?
Равна сумме предельных и абсолютных погрешностей этих чисел

$\Delta \mathrm{a} + \Delta \mathrm{b}$

3. Число записано в верных знаках. Чему равна абсолютная погрешность?
В широком и узком смысле. Пример: число = 10. Тогда в узком погрешность равна 0.5,а в широком 1.
Еще примеры число = 0.22.В узком 0.005, в широком 0.01

4. Чему равна погрешность произведения a*b?
Предельная относительная погрешность произведения приближенно равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей.

$\delta_a + \delta_b$

5. Какие ограничения накладываются на коэффициенты в схеме Горнера?
Все коэффициенты не отрицательные ($b_i \geq 0$), причем первый строго больше нуля $b_0 > 0$.

6. Какие существуют методы решения алгебраических уравнений?
разложением на множители
Метод замены переменной

Метод оценки области значений
Метод симметризации
Метод введения двух переменных
Метод введения параметра
Метод корней квадратного уравнения.
Метод геометрической прогрессии
Метод выделения полного квадрата
Умножение уравнения на функцию
Использование суперпозиции функции

7. Комбинированный метод решения алгебраических уравнений включает в себя методы…

Метод хорд и метод касательных

8. Какие существуют точные методы решения СЛАУ?

Метод Гаусса, метод Гаусса — Жордана, метод Крамера, матричный метод (Метод обратной матрицы) и метод прогонки (для трёхдиагональных матриц), метод Холецкого

9. Какие существуют приближенные методы решения СЛАУ?

Метод простой итерации или метод Якоби, Метод Гаусса – Зейделя

10. Какое достаточное условие сходимости метода итерации решения СЛАУ с матрицей α?

По лекции:

Процесс итерации системы сходится к единственному решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α меньше 1 ($\|\alpha\| < 1$)

Канонические нормы:

- m-норма $\|\alpha\|_m = \max_i \sum_j |\alpha_{ij}|$
- i-норма $\|\alpha\|_i = \max_j \sum_i |\alpha_{ij}|$
- k-норма $\|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2}$ (Евклидова)

11. При каком условии заканчивается процесс итераций?

Процесс итераций продолжается до тех пор, пока для заданного $\varepsilon > 0$ не будет выполняться неравенство $|y_{n-1} - y_n| < \varepsilon$.

(т. е. как только достигается желаемая точность)

12. Как выглядит матрица Якоби?

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial u_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

13. Общая формула погрешности имеет вид

$u = f(x_1, \dots, x_n)$, $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$.Тогда

$$|\Delta u| = |f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)|$$

Представим это выражение линейной частью приращения, т. е. дифференциалом. Если пренебречь квадратами и произведениями приращений в виду их малости, то получим

$$|\Delta u| \approx |df(x_1, \dots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| |\Delta x_i|$$

14. Какое равенство точнее?

То, у которого погрешность меньше

15. В каком случае на отрезке [a, b] есть корень?

Если непрерывная на отрезке [a; b] функция f(x) принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная f'(x) сохраняет знак внутри указанного отрезка, то внутри отрезка существует единственный корень уравнения f(x) = 0.

16. Чему равна погрешность возведения в степень a^b?

Равна произведению показ. Степени на предельную относ. погрешность основания

$u = a^b,\ \delta u = b\delta a$

17. Чему равна погрешность частного a/b?

Равна сумме предельных относ. погрешностей этих чисел

$u = \frac{a}{b},\ \delta u = \delta a + \delta b$

18. Чему равна погрешность разности a - b?

Равна сумме предельных абс. погрешностей этих чисел

$u = a - b,\ \Delta u = \Delta a + \Delta b$

19. Число a=0,002 записано в верных знаках. Чему равна абсолютная погрешность Δa?

Δa=0.001

20. Формула подсчета неизвестных xi по методу Крамера имеет вид:

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

21. Для чего используется метод Гаусса?

Для уточнения корней, нахождения корней, привести матрицу к ступенчатому виду.

22. К какому виду должна быть приведена СЛУ для решения методом итерации?

X = BX+C

23. Как находится первоначальное приближение для решения систем нелинейных уравнений?

За нулевое приближение обычно принимают грубое значение корня, полученное, например, геометрически (графически).

24. Чему равна относительная погрешность числа a = 1, если его абсолютная погрешность Δa = 0,1?

0.1

25. Чему равна абсолютная погрешность числа a = 1, если его относительная погрешность δa = 0,1?

δa = $\frac{\Delta a}{|a|}$

$\Delta a = 0.1$

26. Чему равна погрешность Δ(a+b), если a = 3, b = 4, Δa = 0,3, Δb = 0,4?

U = a+b

$\Delta u = \Delta a + \Delta b = 0.3 + 0.4 = 0.7$

27. Чему равна погрешность δ(a*b), если a = 3, b = 4, Δa = 0,3, Δb = 0,4?

U = a*b

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

$\delta u = \delta a + \delta b = 0.1 + 0.1 = 0.2$

28. Какое достаточное условие сходимости метода Зейделя решения СЛАУ с матрицей α?

Достаточное условие сх-ти метода итерации справедливо и для метода Зейделя

Процесс итерации для приведенной линейной системы сходится к единственному решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы α < 1 т.е.

$X^{(\alpha)} = \beta + \alpha X^{k-1}$

29. В чем отличие метода Зейделя от метода итерации?
(По лекции:) Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итераций, при которой при вычислении k+1 приближения элемента x_i используется k+1 приближения элементов $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

- обычно м. з. сходится быстрее

- бывают случаи, когда м. з. сходится, а м. и. нет и наоборот

Разница лишь в том, что в методе Зейделя расчет вектора приближений на текущей итерации происходит с использованием данных, полученных ни только на предыдущей, но и на нынешней итерации.

30. В чем неудобство метода Ньютона решения систем нелинейных уравнений?
Неудобство этого метода состоит в необходимости вычисления в каждой точке первой и второй производных. Значит, он применим лишь тогда, когда функция f(x) имеет достаточно простую аналитическую форму, чтобы производные могли быть вычислены в явном виде вручную.

31. Какой из методов решения СЛУ требует меньше времени вычислений?

32. Какой из методов решения СЛУ дает наибольшую точность вычислений?

33. К какому виду должна быть приведена система нелинейных уравнений для решения методом итерации?
X = f(x)

Тема 2. Численное дифференцирование и интегрирование функций

1. Интерполирование – это…

Интерполяция — это метод нахождения неизвестных промежуточных значений некоторой функции по имеющемуся дискретному набору ее известных значений.

2. Конечная разность задается по формуле …

$\Delta^n = \Delta(\Delta^{n-1}y), n = 1,2,3, \ldots$

Конечной разностью 1-го порядка называют разность между двумя соседними значениями f в узлах интерполяции, то есть

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k),\ k = \overline{0, n-1}.$$

Конечной разностью 2-го порядка называют разность между двумя соседними конечными разностями 1-го порядка, то есть

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k),\ k = \overline{0, n-2}.$$

Конечной разностью порядка m (для $m \le n$) называют разность между двумя соседними конечными разностями порядка $m-1$, то есть

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k,\ k = \overline{0, n-m}.$$

3. Чему равна первая конечная разность полинома P(x) = x – 3, Δx = 1?

$\Delta y = \ \Delta f(x + \Delta x) - f(x) =$

$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x) = (x - 3 + 1) - (x - 3) = 1$

4. Чему равна вторая конечная разность полинома P(x) = x – 3, Δx = 1?

$$\Delta^2 P\ (x) = P(x + 2\Delta x) - \ 2P(x + \Delta x) + P(x)$$
$$= (x - 3 + 2) - 2(x - 3 + 1) + (x - 3) = 0$$

5. Какие бывают таблицы разностей?

Горизонтальные и диагональные таблицы (разделенные)

6. Формула обобщенной степени имеет вид …

$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h) \ldots (x-(n-1)h),$

n – порядок степени, h – некоторый шаг

7. Найти вторую обобщенную степень числа x=3 при h = 1.

$x^{[2]} = x(x-h) = 3 * (3-1) = 6$

8. Для каких узлов применяется интерполяционная формула Ньютона?

Равноотстоящих улов.

Узлов, расположенных в окрестностях начала или конца таблицы.

9. Для каких узлов применяется интерполяционная формула Лагранжа?

Для произвольно заданных узлов (не равноотстоящих)

10. Первая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования…

Используются точки «впереди» x, поэтому первую интерполяционную формулу Ньютона называют формулой для интерполирования «вперед».

11. Вторая интерполяционная формула Ньютона применяется для интерполирования…

Вторая интерполяционная формула Ньютона. Когда x ближе к концу отрезка интерполяции, формула интегрирования «вперед» может не позволить построить полином нужной степени n – может не хватить узлов для расчета конечных разностей вплоть до n -го порядка (впереди слишком мало узлов).

12. Какие существуют интерполяционные формулы?

Ньютона, Гаусса, Стирлинга, Бесселя, Лагранжа

13. Какие формулы применяются для интерполирования в середине таблицы?

Формулы Стирлинга и Бесселя

14. Каким образом получается интерполяционная формула Стирлинга?

Берется среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса

15. На каких формулах основаны формулы численного дифференцирования?

Ньютона, Лагранжа

16. Для производных какой степени можно проводить численное дифференцирование?

От 0 до N, где N = количество узлов, в которых известно значения функции

17. Численное интегрирование производится по формулам …

- Метод прямоугольников
- Метод трапеций
- Метод парабол (метод Симпсона)
- Метод Гаусса
- Метод Чебышёва

18. Как выглядит формула трапеций для численного интегрирования?

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right)$$

19. К чему приводит плохой выбор узлов интерполирования?

Плохой выбор узлов интерполирования может, в общем случае, привести к большим ошибкам.

Например, если узлы будут сконцентрированы вблизи одного конца отрезка, то $R_n(x)$ (остаточный член) при $l = b - a > 1$ будет достаточно велик в точках, близких к другому концу отрезка

20. К чему ведет интерполирование вне пределов заданной таблицы?
Результат будет непредсказуем, погрешность станет невероятно большой(пусть будет так, мы ХЗ)

21. Как влияет шаг разбиения отрезка при численном интегрировании на точность решения?
Погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности. Однако увеличивать число точек не всегда возможно. Если функция задана в табличном виде, приходится ограничиваться заданным множеством точек. Повышение точности может быть в этом случае достигнуто за счет повышения степени используемых интерполяционных многочленов.

22. Как влияет шаг разбиения отрезка при численном интегрировании на скорость вычислений?
Чем меньше шаг, тем больше вычисления

23. Найти вторую обобщенную степень числа x=3 при h = 2.

$$x^{[2]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h\ )$$

$$x^{[2]} = x(x-h) = 3(3-2) = 3$$

24. Найти вторую обобщенную степень числа x=3 при h = 0.

$$x^{[2]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h\ )$$

$$x^{[2]} = x(x-h) = 3(3-0) = 9$$

25. Найти значение интеграла для подынтегральной функции f(x) = 2x на отрезке [1,2] с шагом разбиения h=1 по формуле трапеций.

$$\int_a^b f(x)dx = \ h\left(\frac{f_0+f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) + E_n(f)$$

$$E_n(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)h^2$$

$$\int_1^2 2x\,dx = \ 1 * \left(\frac{2+4}{2} + 0\right) + 0 = \ \ 3$$

26. Найти значение интеграла для подынтегральной функции f(x) = x на отрезке [1,2] с шагом разбиения h=1 по формуле трапеций.

$$\int_a^b f(x)dx = \ \ h\left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum\nolimits_{i=1}^{n-1} f_i\right) + E_n(f)$$

$$E_n(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,(b-a)h^2$$

$$\int_1^2 x\,dx = \ 1 * \left(\frac{1+2}{2} + 0\right) + 0 = \ \ 1.5$$

27. Обратная задача интерполирования – это …

Экстраполяция — по значению функции определить соответствующее значение аргумента.

28. Какие интерполяционные формулы используются для не равноотстоящих узлов?

Ньютона, с помощью многочлена Лагранжа

29. Чему равна вторая конечная разность полинома P(x) = 3x – 3, Δx = 1?

$$\begin{aligned}\Delta^2 P\,(x) &= P(x + 2\Delta x) - \ 2P(x + \Delta x) + P(x) \\ &= (3x - 3 + 2) - 2(3x - 3 + 1) + (3x - 3) = 0\end{aligned}$$

30. Чему равна первая конечная разность полинома P(x) = 3x – 3, Δx = 1?

$$\Delta y = \ \Delta f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x) = (3x - 3 + 1) - (3x - 3) = 1$$