Лекция №5.
Дифференциальные уравнения высших порядков.
Дифференциальные уравнения n-го порядка, постановка задачи Коши для них.

Постановка задачи Коши. Пусть дано уравнение

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \cdots , y^{(n-1)}(t)) \tag{1}$$

и начальные условия

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y'_0, \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение (1) и начальные условия (2) – задача Коши для уравнения n-го порядка.

Теорема (Существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка)

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ функция f непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по $(y,\, y', \ldots, y^{(n-1)})$, точка $(t_0, y_0, y_0' \ldots, y_0^{(n-1)}) \in D$. Тогда $\exists\, d > 0$ такое, что на отрезке $[t_0 - d,\, t_0 + d]$ существует единственное решение задачи Коши (1), (2).

Доказательство.

Введем новые неизвестные функции по формулам

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

Для нахождения новых неизвестных функций получим систему нормального вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(t,\, x_1,\, \ldots\, ,\, x_n), \end{cases} \tag{3}$$

Случаи, когда уравнение допускает понижение порядка.

1. В уравнение не входит неизвестная функция y

2. В уравнение не входит независимая переменная x

3. Уравнение однородно относительно неизвестной функции y и ее производных

4. Уравнение однородно относительно x и y в обобщенном смысле

5. Уравнение с полными производными

1. В уравнение не входит неизвестная функция y

То есть уравнение имеет вид $F(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$.

Сделав замену $y^{(k)}(x) = z(x)$, получим уравнение порядка $n - k$.

$y^{(k+1)}(x)$ заменяется при этом на $z'(x)$,

$y^{(k+2)}(x)$ на $z''(x)$,

. . . .

$y^{(n)}(x)$ на $z^{(n-k)}(x)$.

Пример

Решим уравнение

$$x^2y'' = y'^2$$

$$\text{Замена: } y' = z \qquad y'' = z'$$

$$x^2z' = z^2$$

$$z \equiv 0 \text{ – решение, далее считаем, что } z \neq 0$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2} \qquad -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{C_1} \quad C_1 \neq 0$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{C_1} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$$

$$z = \frac{C_1x}{x + C_1} \quad \forall C_1 \qquad z = x$$

$$y' = \frac{C_1x}{x + C_1} \qquad y' = x$$

$$y' = C_1\frac{x + C_1 - C_1}{x + C_1} \qquad \underline{y = \frac{x^2}{2} + C}$$

$$y' = C_1\left(1 - \frac{C_1}{x + C_1}\right) \qquad \underline{y = C_1x - C_1^2\ln|x + C_1| + C_2}$$

2. В уравнение не входит независимая переменная x

То есть уравнение имеет вид $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

Сделаем замену $y'(x) = p(y)$, тогда
$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (p(y))'_x = p'_y y'_x = p'_y p = p' p$.

Пример

Решим уравнение

$$2yy'' = y'^2 + 1$$

$$\text{Замена: } y'(x) = p(y) \qquad y'' = p'p$$

$$2yp'p = p^2 + 1 \qquad \int \frac{2p\,dp}{p^2+1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} = \ln|y| + \ln|C_1| \quad C_1 \neq 0$$

$$\ln(p^2+1) = \ln|C_1 y| \qquad p^2 + 1 = C_1 y \qquad p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

$$y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1} \qquad \pm\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx$$

$$\pm\frac{1}{C_1}\int (C_1 y - 1)^{-1/2}\, d(C_1 y - 1) = x + C_2$$

$$\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2 \qquad 4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2)^2$$

3. Уравнение однородно относительно неизвестной функции y и ее производных

То есть уравнение не меняется при замене $y \to ky$, $y' \to ky', \dots, y^{(n)} \to ky^{(n)}$

Порядок уравнения понижается заменой $y' = yz(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример

Решим уравнение
$$yy' + xyy'' - xy'^2 = 0$$

$$(ky)(ky') + x(ky)(ky'') - x(ky')^2 = 0$$

$$k^2yy' + xk^2yy'' - xk^2y'^2 = 0 \qquad yy' + xyy'' - xy'^2 = 0$$

$$\text{Замена: } y' = yz \qquad y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$$

$$y^2z + xy^2z^2 + xy^2z' - xy^2z^2 = 0 \qquad y^2z + xy^2z' = 0$$

$y \equiv 0$ – решение, далее считаем, что $y \neq 0$

$$z + xz' = 0$$

$z \equiv 0 \Leftrightarrow y = \mathrm{const}$ – решение, далее считаем, что $z \neq 0$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x} \qquad \ln|z| = -\ln|x| + \ln|C_1|$$

$$z = \frac{C_1}{x} \qquad \frac{y'}{y} = \frac{C_1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = C_1 \int \frac{dx}{x} \qquad \ln|y| = C_1 \ln|x| + \ln|C_2|$$

$$y = C_2|x|^{C_1}$$

4. Уравнение однородно относительно x и y в обобщенном смысле

То есть уравнение не меняется при замене $y \to k^m y$, $x \to kx$. При этом $y' \to k^{m-1}y' \ldots, y^{(n)} \to k^{m-n}y^{(n)}$.

Порядок уравнения понижается заменой $x = e^t$ $(x > 0)$, $y = ze^{mt}$.
В результате этой замены получим уравнение, не содержащее t. Порядок такого уравнения легко понижается рассмотренным выше способом.

Пример

Решим уравнение
$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$

$$(kx)(k^{m-2}y'') - (kx)(k^m y)(k^{m-1}y') = k^{2m}y^2 - 2k^{m-1}y'$$
$$k^{m-1}xy'' - k^{2m}xyy' = k^{2m}y^2 - 2k^{m-1}y'$$
$$m - 1 = 2m \qquad m = -1$$
$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$
$$\text{Замена: } x = e^t \quad y = z(t)e^{-t} \quad 1 = e^t t'_x \quad t'_x = e^{-t}$$
$$y'_x = (ze^{-t})'_t t'_x = (z'e^{-t} - ze^{-t})e^{-t} = (z' - z)e^{-2t}$$
$$y''_{xx} = [(z' - z)e^{-2t}]'_t t'_x = [(z'' - z')e^{-2t} - 2(z' - z)e^{-2t}]e^{-t} =$$
$$= (z'' - 3z' + 2z)e^{-3t}$$
$$e^t(z'' - 3z' + 2z)e^{-3t} - e^t ze^{-t}(z' - z)e^{-2t} = z^2e^{-2t} - 2(z' - z)e^{-2t}$$
$$(z'' - 3z' + 2z) - z(z' - z) = z^2 - 2z' + 2z$$
$$(z'' - 3z' + 2z) - zz' + z^2 = z^2 - 2z' + 2z$$
$$z'' - z' - zz' = 0$$

Пример

Решим уравнение

$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$

$$\text{Замена: } x = e^t \quad y = z(t)e^{-t}$$

$$z'' - z' - zz' = 0$$

$$\text{Уравнение не содержит } t \text{ замена } z' = p(z) \quad z'' = p'p$$

$$p'p - p - zp = 0$$

$$p \equiv 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{const} \Leftrightarrow y = \frac{C}{x} \text{ – решение, далее считаем, что } p \neq 0$$

$$p' - 1 - z = 0 \qquad p' = 1 + z \qquad p = \frac{z^2}{2} + z + \frac{C_1}{2}$$

$$z' = \frac{z^2 + 2z + C_1}{2} \qquad \int \frac{dz}{z^2 + 2z + C_1} = \int \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{d(z+1)}{(z+1)^2 + C_1 - 1} = \frac{t}{2} + C_2$$

Пример

Решим уравнение
$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$

$$\text{Замена: } x = e^t \quad y = z(t)e^{-t}$$

$$\int \frac{d(z+1)}{(z+1)^2 + C_1 - 1} = \frac{t}{2} + C_2$$

$$C_1 = 1 \qquad \frac{-1}{z+1} = \frac{t}{2} + C_2 \qquad \frac{-1}{yx+1} = \frac{\ln x}{2} + C_2$$

$$C_1 > 1 \quad \frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{z+1}{\sqrt{C_1 - 1}} = \frac{t}{2} + C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{yx+1}{\sqrt{C_1 - 1}} = \frac{\ln x}{2} + C_2$$

$$C_1 < 1 \quad \frac{1}{2\sqrt{1 - C_1}} \ln \frac{z - \sqrt{1 - C_1}}{z + \sqrt{1 - C_1}} = \frac{t}{2} + C_2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1 - C_1}} \ln \frac{yx - \sqrt{1 - C_1}}{yx + \sqrt{1 - C_1}} = \frac{\ln x}{2} + C_2$$

5. Уравнение с полными производными

Порядок уравнения может быть легко понижен, если удастся преобразовать уравнение так, чтобы обе его части были полными производными некоторых функций.

Пример

Решим уравнение

$$yy'' = y'^2$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} \qquad \ln|y'| = \ln|y| + \ln|C_1|$$

$$y' = C_1 y \qquad \int \frac{dy}{y} = \int C_1\,dx$$

$$\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \qquad y = C_2 e^{C_1 x}$$