Семинар 6 (07.10.19)

Тема 4. Смешанное произведение геометр. векторов

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

– число $([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c})$

Обозначение. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Скалярное произв. – число $\vec{a}, \vec{b} \longmapsto (\vec{a}, \vec{b}) \in \mathbb{R}$
Векторное произв. – вектор $\vec{a}, \vec{b} \longmapsto [\vec{a} \times \vec{b}] \in V_3$
Смешанное произв. – число $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \longmapsto (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in \mathbb{R}$

Вектр. произв-е – бинарная операция в мн-ве V_3
Скаляр. произв-е – числовая ф-ия 2х векторных аргументов
Смеш. произ-е –

$$\underbrace{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}_{\text{обозн-е}} = \underbrace{([\vec{a} \times \vec{b}], \vec{c})}_{\text{опред-е}}$$

Свойства смешанного произ-я:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$

$= -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$

Не меняется при циклич. перестановке

2) $(a+b, c, d) = (a, c, d) + (b, c, d)$

$(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

лин-сть по перв. аргументу

32

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$ вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны (в 1 плос-ти)

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Leftrightarrow$ Тройка $a\,b\,c$ – правая

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0 \Leftrightarrow$ Тройка $a\,b\,c$ – левая

4) $V^{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}_{\text{параллелепипеда}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

5) $V^{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}_{\text{пирамида}} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Выражение смешанного пр-я через координаты векторов (в правой ПДСК)

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$([a \times b], \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Задача.

$\vec{a} = (3, -1, 2)$

$\vec{b} = (-1, -2, 4)$

$\vec{c} = (-2, 4, -1)$

1) Определить, является ли $a\,b\,c$ – правой или левой

2) Найти $V_{\square}$ 3) $V_{\triangle}$

Решение.

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{(3)-2(2)}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -9 \end{vmatrix} =$

$= -8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -8 \cdot (12 + 2) - 9 \cdot (-6 - 1) =$

$= -8 \cdot 14 + 9 \cdot 7 = -112 + 63 = -49 < 0 \Rightarrow$

$\begin{array}{r} -112 \\ 63 \\ \hline 49 \end{array}$

33

тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая

2) $V_{\square} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 49$

3) $V_{\diamond} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{49}{6}$

Задача.

$A = (5, -4, 8)$

$B = (-2, 3, 1)$

$C = (-4, 1, -2)$

$D = (-6, 3, 7)$

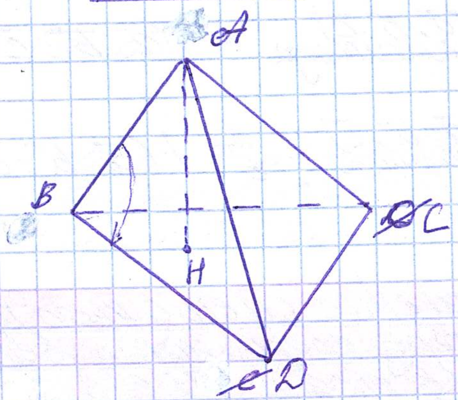
Найти:

1) V_{ABCD}

2) S_{BCD}

3) H_{AH}

Решение.



1) $\vec{BD} = (-4, 0, 6)$

$\vec{BC} = (-2, -2, -3)$

$\vec{BA} = (7, -7, 7)$

$(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}) = \begin{vmatrix} 7 & -7 & 7 \\ -2 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$

$-36-8=-44$

$= 7 \cdot (-12 - 12 - 12 - 8) = -308$

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD})| = \frac{308}{6}$

2) $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{BC} \times \vec{BD}]| =$

$[\vec{BC} \times \vec{BD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -3 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (-12) - \vec{j} \cdot (-12 - 12) + \vec{k} (-8)$

$= -12\vec{i} + 24\vec{j} - 8\vec{k} \Rightarrow [\vec{BC} \times \vec{BD}] = (-12, 24, -8)$

$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{144+64+576} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{28}{2} = 14$

$$\begin{array}{r} \times\, 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ +\,64 \\ \hline 640 \\ +\,144 \\ \hline 784 \end{array}$$

3) $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AH \cdot S_{BCD}$

$\Downarrow$

$AH = \frac{V_{ABCD} \cdot 6}{S_{BCD}} = \frac{308}{2 \cdot 14} = \frac{22}{2} = 11$

Задача.

$|\vec{a}| = 2$
$|\vec{b}| = 3$
$|\vec{c}| = 5$
$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$
$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ$
$\angle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$

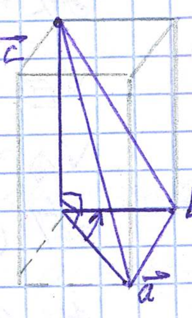
Найти:

1) $V_{\square}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
2) $V_{\square}(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$

$\vec{a}_1 = \vec{a} + 3\vec{b}$
$\vec{b}_1 = \vec{b} + \vec{c}$
$\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{c}$

Решение.

1) $V_{\square}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$



$= H \cdot S_{осн.} =$

$|c| \cdot (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\angle) =$

$= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 15\sqrt{3}$

2) $V_{\square}(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1) = |(a_1, b_1, c_1)|$

$(a_1, b_1, c_1) = (a+3b, b+c, a+2c)$

$= ((a,b) + (a,c) + (3b,b) + (3b,c))(a+2c) =$

$= (\bar{a},\bar{b},\bar{a}) + (\bar{a},\bar{c},\bar{a}) + (3\bar{b},\bar{b},\bar{a}) + (3\bar{b},\bar{c},\bar{a})$

$+ (\bar{a},\bar{b},2\bar{c}) + (\bar{a},\bar{c},2\bar{c}) + (3\bar{b},\bar{b},2\bar{c}) + (3\bar{b},\bar{c},2\bar{c})$

$= 3(\bar{b},\bar{c},\bar{a}) + 2(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 5 \cdot (\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

$V_{\square}(a_1, b_1, c_1) = 5 \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| =$

$= 5 \cdot 15\sqrt{3} = 75\sqrt{3}$

Задача.

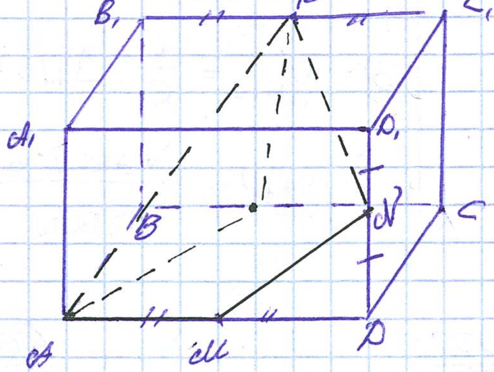
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед

M - сер. AD
N - сер. DD_1
P - сер. B_1C_1

Найти:

$\frac{V_{AMNP}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$ - ?

Решение.



$AD = a \quad AB = b \quad AA_1 = c$

$V_{\square} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$

$V_{\triangle} = \frac{1}{6}|(\vec{AM}, \vec{AN}, \vec{AP})| =$

$= \frac{1}{6}|(\frac{a}{2},\ a + \frac{c}{2},\ \frac{a}{2} + b + c)| =$

$= \frac{1}{6}|((\frac{a}{2}, a) + (\frac{a}{2}, \frac{c}{2}))(\frac{a}{2} + b + c)| =$

$= (\frac{a}{2}, \overset{a}{\vee} b) + (\frac{a}{2} \overset{a}{\vee} c) + (\frac{a}{2}, \frac{c}{2}, b)$

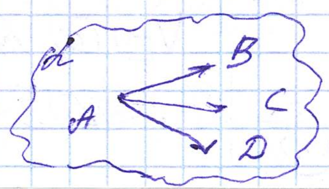
$= \frac{1}{2}(a, a, b) + \frac{1}{2} \ldots = \frac{1}{4}|(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})| \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{24} \cdot |(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})|$

Задача

$A = (2, -1, -2)$
$B = (1, 2, 1)$
$C = (2, 3, 0)$
$D = (5, 0, -6)$

Решение.



Док-ть, что A,B,C,D лежат в 1 плоскости.

$\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 3)$
$\overrightarrow{AC} = (0, 4, 2)$
$\overrightarrow{AD} = (3, 1, -4)$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4(\overset{-5}{4-9}) +$$

$$+ 2 \cdot (-1-9) = 20 - 20 = 0$$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0 \Rightarrow AB, AC, AD$ - компланарные $\Rightarrow$ A, B, C, D лежат в 1 пл.

Задача.

Пусть $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ - произвольные вектора. Док-ть, что вектора $\vec{a_1} = a+b+c$ $\vec{b_1} = a-2b+2c$ $\vec{c_1} = 4a+b+5c$ компланарные.

Решение.

$$(a_1, b_1, c_1) = \cancel{(a-2b+2c,} = (a+b+c, a-2b+2c, 4a+b+5c) =$$

$$= ((a,-2b)+(a,2c)+(b,a)+(b,2c)+(c,a)+(c,-2b))(4a+b+5c) = (b,2c,4a) - (c,2b,4a) + (a,2c,b) +$$

$$+ (c,a,b) + (a,-2b,5c) + (b,a,5c) =$$

$$= \underline{8(b,c,a)} - \underline{8(c,b,a)} + 2\underline{(a,c,b)} + \underline{(c,a,b)}$$

$$- \underline{10(a,b,c)} + 5\underline{(b,a,c)} = -(a,b,c) - (c,b,a)$$

37

$$= -(a,b,c) + (a,b,c) = 0 \Rightarrow \vec{a_1}, \vec{b_1}, \vec{c_1} \text{ - компланарные}$$

ч.т.д.