

Вопросы к зачету по дисциплине «Комплексный анализ»

2020-2021 уч. год.

Группы КМБО-19

- 1) Непрерывность и равномерная непрерывность функций одной и двух переменных. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
- 2) Непрерывность собственного интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру.
- 3) Непрерывность интеграла $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ по параметру.
- 4) Дифференцирование интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру. Правило Лейбница.
- 5) Дифференцирование интеграла $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ по параметру.
- 6) Интегрирование собственного интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру.
- 7) Сходимость и равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся несобственных интегралов.
- 8) Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов.
- 9) Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Отрицание критерия Коши.
- 10) Непрерывность несобственного интеграла по параметру.
- 11) Интегрирование несобственного интеграла по параметру.
- 12) Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
- 13) Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Интеграл Эйлера-Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
- 14) Интегралы Фруллани $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, a > 0, b > 0$.
- 15) Интеграл Лапласа $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx$.
- 16) Теорема о перестановке двух несобственных интегралов.
- 17) Интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx, \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.
- 18) Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье.
- 19) Признак Дини сходимости интеграла Фурье.
- 20) Преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье. Косинус-преобразование Фурье. Синус-преобразование Фурье.
- 21) Определение гамма-функции как несобственного интеграла. Область сходимости соответствующего интеграла. Свойства гамма-функции: частные значения, формула понижения, формула дополнения. Производная от гамма-функции и область сходимости соответствующего ей несобственного интеграла.
- 22) Бета-функция. Определение и основные свойства. Связь между гамма и бета функциями.
- 23) Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме Лежандра. Полные эллиптические интегралы. Задачи, приводящие к эллиптическим интегралам (задача о математическом маятнике, задача о вычислении длины дуги эллипса).

- 24) Представление полных эллиптических интегралов в виде степенных рядов. Преобразование Ландена.
- 25) Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя 1-го рода.
- 26) Линейная зависимость функций J_n, J_{-n} при $n \in \mathbb{N}$. Определение функций Бесселя 2-го рода.
- 27) Свойства функций Бесселя 1-го рода: частные значения, рекуррентные соотношения.
- 28) Ортогональные многочлены. Определение. Линейная независимость многочленов. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Общие свойства ортогональных многочленов. Формула Родрига. Рекуррентное соотношение между последовательными ортогональными многочленами. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют ортогональные многочлены.
- 29) Многочлены Лежандра. Многочлены Лежандра как собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. Свойства многочленов Лежандра: частные значения, ортогональность, единственность. Производящая функция многочленов Лежандра. Рекуррентные соотношения.
- 30) Многочлены Эрмита. Определение, основные свойства. Производящая функция многочленов Эрмита. Рекуррентные соотношения.
- 31) Многочлены Чебышева. Определение, основные свойства. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.
- 32) Многочлены Лагерра. Определение, основные свойства. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Шатина А.В. Интегралы, зависящие от параметра, спецфункции [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / А.В. Шатина. – М.: МИРЭА, 2016. – Электронное издание, номер гос. регистрации 0321700894 от 04.05.2017.
- 2) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. СПб.: Лань, 2016.
- 3) Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. – 368 с.
- 4) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
- 5) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 504 с.
- 6) Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 472 с.
- 7) Брычков Ю.А. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. Справочник. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 512 с.
- 8) Асланян А.Г., Приходько А.В., Татаринцев А.В. Математический анализ. Интегралы, зависящие от параметра. Спецфункции. М.: МИРЭА, 2002. — 87 с.
- 9) Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Ч. 2. Ряды, несобственные интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье. — М.: Дрофа, 2004. — 711 с.
- 10) Андре-Анго Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 779 с.
- 11) Кручкович Г.И., Мордасова Г.М., Сулейманова Х.Р. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. М.: Высшая школа, 1970. — 512 с.
- 12) Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — Долгопрудный: Интеллект, 2007. — 343 с.

Методические материалы для подготовки к зачету.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 1. Несобственные интегралы.

- 1) Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций.
- 2) Признаки сходимости несобственных интегралов.
- 3) Критерий Коши.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 2. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

- 1) Непрерывность и равномерная непрерывность функций одной и двух переменных. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
- 2) Непрерывность собственного интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру.
- 3) Непрерывность интеграла $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ по параметру.
- 4) Дифференцирование интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру. Правило Лейбница.
- 5) Дифференцирование интеграла $I(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$ по параметру.
- 6) Интегрирование собственного интеграла $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

- 1) Сходимость и равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся несобственных интегралов.
- 2) Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов.
- 3) Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Отрицание критерия Коши.
- 4) Непрерывность несобственного интеграла по параметру.
- 5) Интегрирование несобственного интеграла по параметру.
- 6) Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.
- 7) Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Интеграл Эйлера-Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
- 8) Интегралы Фруллани $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$, $a > 0$, $b > 0$.
- 9) Интеграл Лапласа $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2\alpha x) dx$.
- 10) Теорема о перестановке двух несобственных интегралов.
- 11) Интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 4. Интеграл Фурье. Интегральное преобразование Фурье.

- 1) Интеграл Фурье как предельный случай ряда Фурье.
- 2) Признак Дини сходимости интеграла Фурье.
- 3) Преобразование Фурье. Свойства преобразования Фурье. Косинус-преобразование Фурье. Синус-преобразование Фурье.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 5. Эйлеровы интегралы.

- 1) Определение гамма-функции как несобственного интеграла. Область сходимости соответствующего интеграла. Свойства гамма-функции: частные значения, формула понижения, формула дополнения. Производная от гамма-функции и область сходимости соответствующего ей несобственного интеграла.
- 2) Бета-функция. Определение и основные свойства. Связь между гамма и бета функциями.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 6. Эллиптические интегралы.

- 1) Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода в форме Лежандра. Полные эллиптические интегралы. Задачи, приводящие к эллиптическим интегралам (задача о математическом маятнике, задача о вычислении длины дуги эллипса).
- 2) Представление полных эллиптических интегралов в виде степенных рядов. Преобразование Ландена.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 7. Функции Бесселя.

- 1) Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя 1-го рода.
- 2) Линейная зависимость функций J_n , J_{-n} при $n \in \mathbb{N}$. Определение функций Бесселя 2-го рода.
- 3) Свойства функций Бесселя 1-го рода: частные значения, рекуррентные соотношения.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 8. Ортогональные многочлены.

- 1) Ортогональные многочлены. Определение. Линейная независимость многочленов. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта. Общие свойства ортогональных многочленов. Формула Родрига. Рекуррентное соотношение между последовательными ортогональными многочленами. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют ортогональные многочлены.
- 2) Многочлены Лежандра. Многочлены Лежандра как собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. Свойства многочленов Лежандра: частные значения, ортогональность, единственность. Производящая функция многочленов Лежандра. Рекуррентные соотношения.
- 3) Многочлены Эрмита. Определение, основные свойства. Производящая функция многочленов Эрмита. Рекуррентные соотношения.
- 4) Многочлены Чебышева. Определение, основные свойства. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.
- 5) Многочлены Лагерра. Определение, основные свойства. Производящая функция. Рекуррентные соотношения.

Вопросы для устного/письменного опроса по разделу 9. Промежуточная аттестация.

Содержание зачетного билета:

1 – 6 вопросы –практические задачи из разделов 1-8 типовых вопросов и заданий для текущего контроля ФОС;

7 вопрос – теоретический вопрос из списка вопросов к зачету.

Пример типового зачетного билета:

1) Найти $F''(y)$, если $F(y) = \int_0^y (x+y)f(x)dx$, где $f(x)$ является дифференцируемой функцией на R .

2) Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}$, $0 < a < 1$.

3) Доказать, что несобственный интеграл $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 y} dx$

а) сходится равномерно по параметру y на множестве $E_1 = [1; +\infty)$;

б) сходится неравномерно по параметру y на множестве $E_2 = (0; +\infty)$.

4) Используя интеграл Дирихле и дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha x - \sin \alpha x}{x^3} dx, \alpha > 0.$$

5) Выразить через гамма-функцию интеграл $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-\alpha x} dx$, $p > 0$, $\alpha > 0$.

6) Используя интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$ и свойства преобразования Фурье,

найти преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$.

7) Свойства многочленов Лежандра.

Практические задания

Практические задания выдаются студентам с целью применения полученных знаний на практике. Практические задания могут быть представлены в виде решения задач, проблемных заданий, подготовки доклада и презентации, тренингов и иных видах, направленных на получение практических знаний.

Заданий для практических занятий.

Образцы вариантов контрольных работ и типового расчета

Контрольная работа №1

1) Исследовать на непрерывность функцию $F(y) = \int_{-1}^1 [2y + \operatorname{sgn}(x-y)] dx$.

2) Вычислить производную функции $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx$.

3) Вычислить интеграл $I(\alpha) = \int_0^{\pi} \ln \frac{4 + \alpha \cos x}{4 - \alpha \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$, $|\alpha| < 4$.

4) Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 2}$

а) сходится равномерно на промежутке $\alpha \in [2; +\infty)$;

б) сходится неравномерно на промежутке $\alpha \in (1; +\infty)$.

5) Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2} dx, \alpha > 0$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x dx, \alpha > 0, \beta > 0$.

Контрольная работа №2

1) Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}.$$

Используя полученное представление, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x/2) \sin \pi x}{1-x^2} dx$.

2) Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x \notin [0; \pi] \end{cases}$$

В следующих задачах вычислить интегралы с помощью гамма и бета функции:

3) $\int_0^1 (\ln(1/x))^{1/3} \sqrt{x} dx$, 4) $\int_0^{\pi/2} \cos^{4/3} x \cdot \sin^{2/3} x dx$, 5) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx$, 6) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{dx}{(x+2)^2}$.

Пример варианта типового расчета

Задача №1. Найти все значения параметра α , при которых сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x}}.$$

Задача №2. Доказать, что несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{\alpha dx}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)}$ сходится неравномерно

на множестве $E = (0; +\infty)$.

Задача №3. Используя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Задача №4. Используя гамма и бета функции, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x \cdot \cos^6 x}{(\sin^2 x + 4 \cos^2 x)^6} dx.$$

Задача № 5. Используя функции Бесселя первого рода, найти решение задачи Коши:

$$x^2 y'' + 6xy' + 3x^2 y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Задача №6. Выразить данный интеграл через полные эллиптические интегралы:

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{8-x^2}} dx$$

Задача №7. Вычислить интеграл, используя свойства многочленов Лежандра:

$$\int_0^1 [(x+1)P_7(x)]^2 dx.$$