КМБО -19 2-й семестр

1-я лекция. Отображение множеств.

Сначала короткий обзор результатов последней лекции 1-го семестра, посвященной системам линейных алгебраических уравнений.

Система записывается в виде $AX = B$.

Однородная система ($B = 0$); неоднородная система ($B \neq 0$). Совместная система (есть хотя бы одно решение), несовместная система (нет ни одного решения). Деление совместных систем на определенные (ровно одно решение)и неопределенные (больше одного решения; в дпальнейшем окажется, что неопределенная система имеет бесконечно много решений). Любая однородная система совместна (так как имеет нулевое решение).

Теорема 1 (Кронекера-Капелли) (критерий совместности). Система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B)$

Теорема 2 (критерий определенности системы). Система $AX = B$ определенна тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}(A|B) = \operatorname{rg}(A) = n$, где n – число неизвестных.

Теорема 3 (критерий неопределенности системы). Система неопределенная тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) < n$

Теорема 4. Множество L_0 решений ОСЛАУ является линейным подпространством в $\mathbf{R}^n$.

Фундаментальной системой решений(ФСР) ОСЛАУ называется любой базис пр-ва ее решений.

Построение нормальной ФСР (= естественного базиса).

Теорема 5. $\dim L_0 + \operatorname{rg} A = n$

Следствие. Любая линейно независимая система частных решений ОСЛАУ, состоящая из $n - \operatorname{rg} A$ решений, является базисом пространства решений (то есть является ФСР).

Теорема 6. Множество решений ОСЛАУ состоит из единственного решения (естественно, нулевого) тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = n$

Следствие. Квадратная ОСЛАУ (то есть когда число уравнений равно числу неизвестных) имеет только нулевое решение (то есть является определенной) тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Теорема 7. ОСЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A < n$.

Следствие. Квадратная ОСЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det A = 0$.

Следствие. Если в ОСЛАУ число уравнений $< n$, то система имеет ненулевое решение.

Структура общего решения неоднородной СЛАУ.

Теорема. Общее решение неоднородной СЛАУ есть сумма общего решения соответствующей ОСЛАУ и частного решения неоднородной СЛАУ: $X_{\text{он}} = X_{\text{о о}} + X_{\text{чн}}$

Переходим к основной части этой лекции.

Отображение множеств

$f : X \to Y$; $\forall x \in X\ \exists\ !\ y \in Y :\ f(x) = y$; y – называется *образом* x; x называется *прообразом* y (прообразов может быть много).

Примеры

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = e^x$
2. $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to R;\ f(A) = \det(A)$
3. $f : P \setminus \{0\} \to \mathbb{Z};\ f(p(x)) = \deg(p(x))$

3'. $f : P \setminus \{0\} \to \mathbb{R};\ f(p(x)) = \deg(p(x))$; эти два отображения считаются разными.

4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}; f(n) = \frac{n-1}{n+1}$

f-**инъективное отображение (инъекция)**, если из $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

f – **сюръективное отображение (сюръекция)**, если $\forall\ y \in Y\ \exists\ x \in X :\ f(x) = y$

f– **биективное отображение (биекция)**, если f инъенкция и сюръекция.

Композиция (суперпозиция) отображений $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Равные отображения

Свойства композиции отображений

1) (антисвойство) нет коммутативности - с примером
2) Ассоциативность

3) $e_X : X \to X; e_X(x) = x \;\forall\, x \in X;\; f : X \to Y \Rightarrow f \circ e_X = f$
4) (аналогично с другой стороны)
Обратное отображение – если $f \circ g = e_Y;\; g \circ f = e_X$
Обратное отображение обозначается f^{-1}.
Теорема. (критерий существования обратного отображения) – iff f – биекция.

Линейное отображение линейных пространств.
Определение.
Примеры. 1. Дифференцирование в пространстве многочленов
$L(V; W)$ – множество всех линейных отображений из V в W.
Утверждение. Линейное отображение $\bar{0}$ переводит в $\bar{0}$
Ядро линейного отображения $\operatorname{Ker} f$
Следствие $\bar{0} \in \operatorname{Ker} f$
Ядро называется **тривиальным**, если оно состоит только из нулевого элемента.
Теорема. Ядро является линейным подпространством.
Образ линейного отображения
Теорема. Образ является линейным подпространством.
Теорема. f сюръективно iff $\operatorname{Im} f = W$
f инъективно iff $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
Следствие f биективно iff ...
Новая терминология. Для линейных отображений линейных пространств вместо инъекция говорят мономорфизм, вместо сюръекция говорят эпиморфизм, вместо биекция говорят изоморфизм (изоморфное отображение).
Утверждение. Если $f : V \to W$ – изоморфизм, то сохраняется линейная независимость, базис переходит в базис, размерности V и W совпадают.
Пример изоморфизма - сопоставление вектору столбца его координат в некотором базисе.

Линейные операторы.

Если $\mathcal{A} : V \to V$ (то есть если $V = W$), то линейное отображение называется *линейным оператором.*
Примеры. V^2; гомотетия, поворот, проекция на прямую, отражение относительно прямой; дифференцирование в P_n; лин оп в $\mathbb{R}^n$; в $\mathbb{R}^{n\times n}$ – умножение на матрицу.

Матрица линейного оператора.

L; базис Б$=[e_1\ e_2\ ...\ e_n]$;
$\mathcal{A}(e_i) = \sum a_{ji} e_j = \text{Б}A^i$;
$\mathcal{A}\text{Б} = [\mathcal{A}e_1 ... \mathcal{A}e_n] = [\text{Б}A^1 ... \text{Б}A^n] = \text{Б}A$
$x = \sum x_i e_i = \text{Б}X$;
$y = \text{Б}Y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\sum x_i e_1) = \sum x_i \mathcal{A}(e_i) = \sum\limits_i x_i \sum\limits_j a_{ji} e_j = \sum_j (\sum_i a_{ji} x_i) e_j$
$\Rightarrow Y = AX$

Сделаем это элегантнее, по-винберговски.
$y = \text{Б}Y = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\text{Б}X) =$ (в силу линейности оператора) $= \mathcal{A}(\text{Б})X = (\text{Б}A)X = \text{Б}(AX) \Rightarrow Y = AX$

Утверждение (простое, но важное) Если $\text{Б}A = \text{Б}B$, где A и B – матрицы $n \times n$, то $A = B$.
Замечание. Похожее утверждение было в первом семестре - о единственности разложения по базису: если $\text{Б}X = \text{Б}Y$, то $X = Y$ (X и Y столбцы). Кстати, это замечание наводит на мысль, что матрицы в этом утверждении не обязаны быть квадратными – они должны быть одинакового размера $n \times k$.
Примеры матриц операторов.
1) Гомотетия в V^3.
2) Поворот в V^2
3) Дифференцирование в P_n.
4) Оператор умножения на матрицу в $\mathbb{R}^n$ (эта матрица и будет матрицей оператора в естественном базисе).
5) Оператор умножения на матрицу в $\mathbb{R}^{n\times n}$ (на примере $n = 2$).

2-я лекция.

Как меняется матрица оператора при замене базиса.

Пусть C_{12} – матрица перехода от базиса $Б_1$ к базису $Б_2$, то есть

$$Б_2 = Б_1 C_{12}$$

Для упрощения записи матрицу перехода будем обозначать просто C, без индексов.
Преобразуем:
$\mathcal{A}Б_2 = Б_2 A_2 = Б_1 C A_2$;
$\mathcal{A}Б_2 = \mathcal{A}(Б_1 C) = \mathcal{A}(Б_1)C = (Б_1 A_1)C = Б_1(A_1 C)$
$\Rightarrow CA_2 = A_1 C$; $A_2 = C^{-1}A_1 C$ Еще раз запишем в отдельной строке:

$$A_2 = C^{-1}A_1 C$$

А если снова приделать итндексы к C и вспомнить, что $C_{12}^{-1} = C_{21}$, то получится

$$A_2 = C_{21}A_1 C_{12}$$

Подобные матрицы.
Матрицы A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называются подобными ($A \sim B$), если существует матрица C такая, что $A = C^{-1}BC$ (естественно, такая матрица C обязана быть квадратной и невырожденной). Мотивировка такого определения очевидна.

Свойства подобных матриц (эти свойства говорят о том, что подобие является отношением эквивалентности, что приводит в свою очередь к тому, что множество всех матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов (подобных матриц)).

1) $A \sim A$ (рефлексивность)
2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (симметричность)
3) $A \sim B \sim D \Rightarrow A \sim D$ (транзитивность)
Доказательство очевидно, причем к нему можно подойти с двух точек зрения.

Алгебра линейных операторов.
Пусть V – линейное пространство размерности n с зафиксированным базисом Б. Рассмотрим множество $L(V,V) = L(V)$ всех линейных операторов на V и сопоставим каждому оператору его матрицу в этом базисе. В результате возникает функция

$$\Phi_Б : L(V) \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

Вместо $\Phi_Б$ будем чаще писать Φ.
Наша задача: доказать, что это биекция (то есть инъекция и сюръекция), а также что это линейное отображение (перед этим надо в множестве линейных операторов ввести линейные операции и доказать, что получается линейное пространство). В результате это отображение можно назвать мономорфизмом, эпиморфизмом и значит и изоморфизмом. Но все по порядку.
1) φ – инъекция. Если у двух операторов оказалась одинаковая мотрица, значит, эти операторы переводят базисные векторы в одинаковые векторы, а тогда эти операторы совпадают на всех векторах.
2) φ – сюръекция. Взяли произвольную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Зададим функцию $\mathcal{A}$ на векторе $x = БX \in V$ формулой $\mathcal{A}(x) = БAX$. Докажем линейность $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}(x+y) = БA(X+Y) = Б(AX+AY) = БAX + БAY = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$
$\mathcal{A}(\lambda x) = БA(\lambda X) = \lambda(БAX) = \lambda\mathcal{A}(x)$.
Ясно, что A – матрица этого оператора. Из 1) и 2) следует, что φ – биекция.

Введем на $L(V)$ линейные операции.
1) $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(x) + \mathcal{A}_2(x)$ 2) $(\lambda\mathcal{A})(x) = \lambda\mathcal{A}(x)$

А заодно введем и умножение: 3) $(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2)(x) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x))$.

Теорема. $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$; $\lambda\mathcal{A}$; $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \in L(V)$ (при условии, конечно, что $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A} \in L(V)$.
Доказательство элементарно.

Теорема φ сохраняет все три операции. То есть это не только линейное отображение, но и отображением алгебр.

Из всего этого следует, что $L(V)$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ изоморфны, причем не только как линейные пространства, но и как алгебры. Это помогает иногда перемножать матрицы, возводить в степень. Скажем, матрица, у которой первый столбец есть $(0;1)^T$, а второй столбец $(-1;0)^T$ – это матрица поворота плоскости на 90 градусов. Поэтому эта матрица в четвертой степени равна единичной.

Обратный оператор.
$\mathcal{A} \in L(V)$; $\mathcal{A}^{-1}$ – это такой оператор, что $\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\cdot\mathcal{A} = \mathcal{E}$ – тождественный оператор ("ленивый"оператор), оставляющий все векторы на месте; естественно, матрица такого оператора единичная.

Теорема. Если обратный оператор существует, то он линеен.
Доказательство. $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x + \mu y) = \mathcal{A}^{-1}(\lambda(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(x) + \mu(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})(y)) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}((\lambda\mathcal{A}^{-1}(x) + \mu\mathcal{A}^{-1}(y)) = \lambda\mathcal{A}^{-1}(x) + \mu\mathcal{A}^{-1}(y)$

Следствие Матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ обратна матрице оператора $\mathcal{A}$.
Это почти очевидно - поскольку при перемножении операторов матрицы перемножаются, а матрица тожественного оператора единичная, матрица обратного оператора, умноженнвя на матрицу самого оператора, дает единичную матрицу и в том, и в другом порядке

Теорема. Критерий существования $\mathcal{A}^{-1}$. Обратный оператор существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.
Почти очевидный факт.

Образ и ядро линейного оператора.
Уже известно, что образ – это линейное подпространство, причем $\mathcal{A}$ – эпиморфизм титтк $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V$.

Теорема. Образ оператора совпадает с линейной оболочкой образов элементов базиса.
Почти очевидный факт.

Следствие. Размерность образа совпадает с рангом матрицы в любом базисе.
Это оправдывает название размерности образа оператора рангом оператора.

Уже известно, что ядро – линейное подпространство, и что $\mathcal{A}$ мономорфизм титтк ядро $= \{0\}$.

Теорема. Ядро состоит из векторов, столбцы координат которых образуют множество решений однородной системы $AX = 0$.
Почти очевидный факт.

Следствие. Дефект $\operatorname{def}\mathcal{A}$ оператора, то есть размерность ядра оператора, и ранг $\operatorname{rg}\mathcal{A}$ оператора (то есть ранг матрицы оператора) в сумме дают размерность пространства.

Теорема. Критерий существования обратного оператора в конечномерном пространстве. Если $\dim V < \infty$, то обратный оператор к оператору $\mathcal{A} : V \to V$ имеет обратный тогда и только тогда, когда выполнено любое из выписанных ниже условий:
– $\mathcal{A}$ является изоморфизмом;
– $\mathcal{A}$ является эпиморфизмом;
– $\mathcal{A}$ является мономорфизмом;
– Образ $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством V;
– Ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ тривиально;
– Ранг $\operatorname{rg}\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ равен размерности $\dim V$ пространства V;
– Дефект $\operatorname{def}\mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$ равен нулю.

3-я лекция

Собственные векторы.

Вектор x называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A} : V \to V$ (с собственным значением λ), если
1) $x \neq \bar{0}$
2) $\mathcal{A}(x) = \lambda x$.

Примеры. Гомотетия – все ненулевые векторы собственные; проектирование – собственные значения 0 и 1; отражение – собственные значения 1 и -1, поворот – если он не кратен π, собственных векторов нет.

Теорема. Если x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, то все коллинеарные ему векторы (кроме нулевого), то есть векторы вида μx; $\mu \neq 0$, тоже являются собственными с тем же собственным значением.

Доказательство очевидно.
Определение. Подпростанство $M \subseteq V$ называется *инвариантным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(M) \subseteq M$.
Примеры. Оператор проектирования, оператор дифференцирования в P_n.

Теорема. Вектор x является собственным вектором оператора $\mathcal{A} \Leftrightarrow$ линейная оболочка $L[x]$ этого элемента является одномерным инвариантным подпространством.
Таким образом, собственные векторы определяют направления прямых, которые под действием оператора переходят в себя.

Алгебраический способ нахождения собственных векторов.

При поиске собственных векторов будем сначала подбирать подходящие собственные значения. Пусть x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, то есть x ненулевой и $\mathcal{A}(x) = \lambda x$, то есть $X \neq 0$ и $AX = \lambda x$; то есть $X \neq 0$ и $(A - \lambda E)X = 0$. Вывод: шанс найти собственный вектор с конкретным $\lambda \in \mathbb{R}$ существует только если $\det(A - \lambda E) = 0$. Более того, это не просто шанс, а стопроцентная уверенность. Вывод: для поиска собственных значений нужно решить уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Точнее, нужно найти все действительные корни этого уравнения. Чтобы лучше его запомнить, дадим ему звучное имя – *характеристическое уравнение.* А многочлен, стоящий в левой части уравнения, назовем характеритическим многочленом матрицы оператора в данном базисе.
Он строится по матрице, может показаться, что он зависит от матрицы (то есть от базиса, в котором эта матрица получена), но это не так.

Теорема. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.

$\det(A_2 - \lambda E) = \det(C^{-1}A_1C - \lambda E) = \det(C^{-1}A_1C - C^{-1}\lambda EC) = \det(C^{-1}(A_1 - \lambda E)C) = \det(C^{-1})\det(A_1 - \lambda E)\det(C) = \det(A_1 - \lambda E)$

Вывод: характеристический многочлен матрицы оператора может называться характеристическим многочленом самого оператора.

Теорема. Степень характеристического уравнения равна размерности пространства, старший коэффициент $= (-1)^n$; следующий $= (-1)^{n-1}\operatorname{Tr} A$ ($\operatorname{Tr} A$ – след матрицы, то есть сумма ее диагональных элементов); следующий – $(-1)^{n-2}(\sum$ всех миноров второго порядка, определяемых парами диагональных элементов); следующий – $(-1)^{n-3}(\sum$ всех миноров третьего порядка, определяемых тройками диагональных элементов); $\ldots$; предпоследний – это минус сумма всех миноров $n-1$-го порядков, получающихся вычеркиванием строчки и столбца, проходящих через диагональный элемент; последний равен определителю матрицы A.

Следствие. След и определитель матрицы оператора не зависят от выбора базиса. Поэтому можно говорить про след оператора и определитель оператора.

Подытоживая: Число λ является собственным значением оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда λ – действительный корень характеристического уравнения.

Оператор простого типа.

Определение. Собственный базис линейного оператора – это базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Примеры. Гомотетия – здесь любой базис является собственным. Поворот на угол, не кратный π – не имеет такого базиса; проектирования, отражения имеют такие базисы. Оператор дифференцирования в P_n не имеет такого базиса.

Теорема. Базис собственный $\Leftrightarrow$ матрица оператора диагональная (на диагонали – собственные значения).

Определение. Оператор простого типа – если у него есть базис, состоящий из собственных векторов.

Теорема. Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема. Достаточное условие простоты оператора (то есть условие того, что оператор простого типа, иными словами, достаточное условие существования собственного базиса).
Если все корни характеристического уравнения различные и действительные, то это оператор простого типа.

Это условие не является необходимым. Пример – тождественный оператор, у него все корни характеристического уравнения равны 1, но он простого типа – любой базис является собственным.

Знание собственного базиса очень полезно. Например, если нужно возвести матрицу в большую степень, есть смысл найти сначала матрицу в собственом базисе (рассматривая эту матрицу как матрицу оператора), и тогда

$$A^n = (CA'C^{-1})^n = C(A')^n C^{-1}$$

Критерий простоты оператора (критерий того, что оператор является оператором простого типа).

Сначала предварительные утверждения.
Лемма 1. Пусть $\mathcal{A} \in L(V;V)$, и U – инвариантное подпространство этого оператора. Если взять базис пространства U и дополнить его до базиса всего пространства, то матрица оператора будет иметь блочно-треугольный вид.

Лемма 2. Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен во всем пространстве.

Определение. **Собственное подпространство** оператора $\mathcal{A}$, отвечающее собственному значению λ – это

$$V_\lambda(\mathcal{A}) = \{x \in V : \ \mathcal{A}(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$$

Таким образом, $V_\lambda(\mathcal{A})$ – это множество собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ, плюс нулевой вектор.
Итак, если λ – корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, то $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$.

4-я лекция

Утверждение. V_λ является линейным подпространством в V.

Утверждение очевидно, поскольку ядро является линейным подпространством.

Утверждение. V_λ является инвариантным подпространством в V.

Утверждение. Матрица ограничения линейного оператора на собственное подпространство V_{λ_0} скалярна с λ_0 на диагонали. Характеристический многочлен этого ограничения поэтому равен $(\lambda_0 - \lambda)^k$.

Лемма. $\dim V_{\lambda_0} = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{E}) = \operatorname{def}(\mathcal{A} - \lambda_0\mathcal{E})$ меньше либо равен кратности λ_0 как корня характеристического уравнения.

Следствие. Если $\lambda_1,\ \ldots, \lambda_m$– действительные корни характеристического уравнения, то сумма размерностей соответствующих собственных подпространств не больше суммы кратностей этих корней, что в свою очередь не больше размерности всего пространства.

Обещанный критерий. Оператор является оператором простого типа тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения действительные, и размерности собственных подпространств равны кратностям соответствующих корней.

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{A}$ – оператор простого типа. Это означает, что у него есть собственный базис Б (то есть базис, состоящий из собственных векторов), матрица в нем диагональна, и поэтому характеристический многочлен равен

$$f_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ldots (\lambda_m - \lambda)^{k_m},$$

где $k_i = \dim V_{\lambda_i}$

2) Пусть все корни характеристического уравнения действительные и $k_i = \dim V_{\lambda_i} = r_i$ – кратность корня λ_i в $f_A(\lambda)$. Поскольку сумма кратностей корней многочлена совпадает со степенью многочлена, а степень характеристического многочлена совпадает с размерностью пространства, утверждение представляется очевидным.

Следствие. Если среди корней характеристического уравнения есть комплексные, он не является оператором простого типа.

Следствие. Если для какого-то корня характеристического уравнения размерность собственного подпространства, отвечающего этому корню, меньше кратности этого корня, то $\mathcal{A}$ не является оператором простого типа (то есть матрица оператора не диагоназируется).

Примеры.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, характеристическое уравнение не имеет действительных коней, это не оператор простого типа.

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; кратный корень, размерность собственного подпространства меньше кратности, это не оператор простого вида.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ тоже не является оператором простого вида.

4)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – оператор простого типа.

5-я лекция

Билинейные и квадратичные формы

Определение. Билинейная форма – это функция из $V \times V \to \mathbb{R}$, линейная по каждому аргументу.

Примеры.

1. Скалярное произведение в V^2 или в V^3 – вспомните свойства скалярного произведения, и Вам станет всё понятно.

2. Определенный интеграл в пространстве непрерывных функций на отрезке (а можно ту же билинейную форму рассмотреть для какого-нибудь линейного подпространства этого пространства, например, для пространства P всех многочленов, или для пространства P_n многочленов степени не выше n.

3. Сумма произведений координат в $\mathbb{R}^n$; кстати, обратите внимание на то, что если в V^3 задать ортонормированный базис, то скалярное произведение также будет задаваться как сумма произведений координат. Естественно, это не случайно. Но об этом позже.

4. След произведения матриц (а лучше след произведения транспонированной к A матрицы на матрицу B в пространстве квадратных матриц n-го порядка). Задача: расписать результат через элементы матриц A и B и сравнить со скалярным произведением в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для задания билинейной формы достаточно знать ее значения на каком-либо базисе. Запишем эти значения в виде матрицы (*матрицы билинейной формы*):

$$B = (b_{ij}) = (\mathcal{B}(e_i, e_j))$$

Теорема. Значения билинейной формы вычисляются по формуле

$$\mathcal{B}(x; y) = \sum b_{ij} x_i y_j = X^T BY.$$

Билинейная форма симметрична (то есть $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x)$) $\Leftrightarrow$ матрица симметрична.

Билинейная форма кососимметрична (то есть $\mathcal{B}(x, y) = -\mathcal{B}(y, x)$) $\Leftrightarrow$ матрица кососимметрична.

Теорема. Любая билинейная форма может быть представлена (причем единственным образом) в виде суммы симметричной и кососимметричной.
Задача – доказать это утверждение.

По билинейной форме можно построить соответствующую ей **квадратичную форму**

$$Q(x) = B(x; x).$$

Разные билинейные формы задают одну и ту же квадратичную форму, если у них суммы симметричных элементов совпадают. Но среди них есть одна симметричная; будем всегда считать, что квадратичная форма порождается симметричной билинейной формой.

Теорема. Симметричную билинейную форму можно восстановить по квадратичной форме (знание симметричной билинейной формы на диагонали позволяет восстановить всю билинейную форму).

Доказательство. $Q(x+y) = \mathcal{B}(x+y, x+y) = \mathcal{B}(x, x)+\mathcal{B}(x, y)+\mathcal{B}(y, x)+\mathcal{B}(y, y) = Q(x)+2\mathcal{B}(x, y)+Q(y) \Rightarrow$

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$$

6-я лекция

Теорема. При замене базиса матрица билинейной формы меняется по формуле

$$B_2 = C^T B_1 C.$$

Доказательство. $\mathcal{B}(x,y) = X_2^T B_2 Y_2 = X_1^T B_1 Y^1 = (CX_2)^T B_1 (CY_2) = X_2^T (C^T B_1 C) Y_2$; тем самым $X_2^T B_2 Y_2 = X_2^T (C^T B_1 C) Y_2$. Поскольку это равенство справедливо для всех столбцов X_2 и Y_2, делаем вывод, что $B_2 = C^T B_1 C$. Кстати, подумайте, почему это так.

Кстати, поскольку ранг матрицы не меняется при умножении на обратимую матрицу, можно говорить про **ранг** билинейной формы.

Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид. Канонический вид - если матрица этой формы диагональна. Иными словами – если форма вычисляется по формуле

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{nn}x_n^2.$$

Нормальный вид - если матрица диагональна и на диагонали стоят только единицы, минус единицы и нули.

Теорема. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду (а при желании и к нормальному виду). Доказательство можно провести по индукции, но на самом деле это утверждение почти очевидно, если знать

Метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов)
Приведем три примера, иллюстрирующих этот метод.
1. Пусть в базисе $Б_1 = [e_1, e_2]$ квадратичная форма задается формулой

$$Q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 11x_2^2$$

Тем самым матрица этой формы в базисе $Б_1$ имеет вид $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$, $Q(x) = X^T B_1 X$. Преобразуем:

$Q(x) = (x_1^2 - 2\cdot x_1 \cdot (3x_2) + (3x_2)^2) + 2x_2^2 = (x_1 - 3x_2)^2 + 2x_2^2 = y_1^2 + 2y_2^2$, где $\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$

Выразим иксы через игреки: из второго условия $x_2 = y_2$; подставляем в первое условие: $y_1 = x_1 - 3y_2$; $x_1 = y_1 + 3y_2$. Рассмотрим матрицу $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и новый базис $Б_2 = Б_1 C$. Иными словами, $Б_2 = [f_1 = e_1;\ f_2 = 3e_1 + e_2]$. Таким образом, C является матрицей перехода от $Б_1$ к $Б_2$, $X = CY$, откуда следует, что Y является столбцом координат вектора x в базисе $Б_2$, а квадратичная форма в новом базисе имеет вид

$$Q(x) = y_1^2 + 2y_2^2 = Y^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = Y^T B_2 Y.$$

На всякий случай делаем проверку по формуле $B_2 = C^T B_1 C$.

2. $Б_1 = [e_1, e_2, e_3]$; $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Будем использовать формулу $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$Q(x) = (x_1^2 + 2x_1(2x_2) + 2x_1x_3 + (2x_2)^2 + x_3^2 + 2(2x_2)x_3) - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2^2 + 2x_2(\frac{1}{3}x_3) + (\frac{x_3}{3})^2 + \frac{x_3^2}{3} + 2x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2 + \frac{x_3}{3})^2 + \frac{7}{3}x_3^2$.
Дальнейшие действия аналогичны тем, которые мы совершали в первой задаче.

3. $Б = [e_1, e_23, e_3]$; $Q(x) = x_1x_2$. Эта задача отличается от предыдущих тем, что нет ни одного квадрата. Создаем их с помощью замены $x_1 = yu_1 + y_2$; $x_2 = y_1 - y_2$

Домашнее задание. Фиолетовый задачник, номера 3.203, 204, 206. ТР №8а) свой и соседние номера.

7-я лекция

Положительный i_+ и отрицательный i_- индексы инерции квадратичной формы – это число положительных и отрицательных слагаемых в каноническом (или нормальном) виде. При этом очевидно, что $i_+ + i_- = \mathrm{rg}\,(B)$.

Теорема (законом инерции квадратичной формы. Числа i_+ и i_- являются инвариантами (то есть каким бы способом мы ни приводили квадратичную форму к каноническому виду, количество положительных и отрицательных слагаемых не изменится).

Доказательство.

Лемма. $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \bigcap L_2)$

под суммой линейных подпространств понимается множество всевозможных сумм вида $x + y$; $x \in L_1$; $y \in L_2$. Пересечение – обычное теоретико-множественное. Берем в пересечении, которое, естественно, является линейным подпространством, базис $[e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k]$. Поскольку пересечение является подпространством как в L_1, так и в L_2, можно дополнить базис пересечения до базиса L_1 и до базиса L_2:

$$[e_1,\ \ldots,\ e_k,\ f_1,\ \ldots,\ f_m]; \quad [e_1,\ \ldots,\ e_k,\ g_1,\ \ldots,\ g_n]$$

Докажем, что ешки, эфки и жэшки образуют базис в $L_1 + L_2$ (на самом деле это утверждение предлагается доказать самостоятельно; в случае необходимости можно поискать доказательство у Винберга или Головиной).

Переходим к доказательству теоремы. Пусть

$$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+m}^2 = y_1^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_{p+q}^2$$

в двух разных базисах. Нужно доказать, что $k = p$; $m = q$. От противного. Пусть $k > p$. Рассмотрим первые k векторов первого базиса и последние $n - p$ векторов второго базиса (заметьте, не q, а $n - p$). Тогда в сумме их больше чем n, поэтому они линейно зависимы, то есть существует их нетривиальная комбинация, равная нулевому вектору. Оставляя векторы 1-го базиса слева и перенося векторы второго направо, получаем комбинацию ешек= комбинация эфэк, причем хотя бы одна из них нетривиальна, а тогда она равна ненулевому вектору (а следовательно и другая равна этому ненулевому вектору) Этот вектор, разложенный по ешкам, даст при применении квадратичной формы положительное число, а разложенный по эфкам - отрицательное. Полученное противоречие доказывает теорему.

Знакоопределенные (знакопостоянные) квадратичные формы

Квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной, если $Q(x) > 0$ (соответственно $Q(x) < 0$) при всех $x \neq 0$. Очевидны критерии положительной (отрицательной) определенности на языке i_+ и i_-: $i_+ = \dim V$ (соответственно $i_- = \dim V$). Для упрощения записи будем писать $Q > 0$ ($Q < 0$) в случае положительно (отрицательно) определенной формы.

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

$Q > 0 \Leftrightarrow$ все угловые миноры матрицы квадратичной формы положительны.

Лемма 1. Знак определителя матрицы квадратичной формы не зависит от выбора базиса (ведь при замене базиса $B_2 = C^T B_1 C$; $\det B_2 = \det C^T \cdot \det B_1 \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det B_1$).

Лемма 2 Если $Q > 0$, то $\det(B) > 0$ (переходим к каноническому базису, получаем диагональную матрицу с положительными числами на диагонали).

Лемма 3 Если $Q > 0$, то ее ограничение $Q|_L$ на любое подпространство также положительно определено.

Доказательство критерия Сильвестра. Пусть $Q > 0$. Тогда угловые миноры матрицы квадратичной формы – это матрицы ограничения $Q|_{L_k}$ на линейные оболочки первых k векторов, а поскольку эти ограничения также положительно определены, определители их матриц больше 0.

Пусть все угловые миноры положительны. В этом случае предлагается воспользоваться методом математической индукции.

Внимание! Предлагается сделать доклад по критерию Сильвестра. Желающие пишите на мою почту.

Задача. Доказать, что $Q < 0 \Leftrightarrow$ знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса у Δ_1

8-я лекция

Евклидово пространство.

Билинейную форму будем называть положительно определенной, если соответствующая квадратичная форма положительно определена.

Евклидово пространство – это линейное пространство, в котором зафиксирована билинейная симметричная положительно определенная форма, которая называется (евклидовым) скалярным произведением. Если форма не является положительно определенной, всё равно можно говорить про скалярное произведение, но тогда оно не евклидово. Скалярное произведение принято обозначать $(x; y)$.

Примеры.

1. V^2 или V^3 с обычным скалярным произведением

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi_{a,b}.$$

Билинейность, симметричность и положительная определённость очевидны.

2. $\mathbb{R}^n$; будем считать, что элементы являются столбцами.

$$(X, Y) = X^T Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

.

3. $C[a; b]$ (то есть пространство всех непрерывных функций на отрезке $[a; b]$). Вместо этого пространства можно рассмотреть пространство P всех многочленов, или пространство P_n многочленов степени не выше n. Скалярное произведение можно задать формулой

$$(f(t), g(t)) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

И здесь свойства скалярного произведения очевидны.

Матрица Грама

Это матрица скалярного произведения как билинейной формы в некотором базисе.

Утверждение. Квадратная матрица может служить матрицей евклидова скалярного произведения тогда и только тогда, когда она симметрична и все угловые миноры положительны.

Утверждение очевидно, но продумайте сами его доказательство.

Скалярное произведение с помощью матрицы Грама вычисляется так же, как и значение любой билинейной формы с помощью матрицы билинейной формы; матрица скалярного произведения меняется по той же формуле, что и матрица любой билинейной формы. Иными словами, если матрицу Грама обозначить буквой G, то

$$(x, y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j;$$

$$G_2 = C^T G_1 C$$

Простейшие свойства евклидова скалярного произведения

1) $(x; \bar{0}) = (\bar{0}; y) = 0$ (это верно для любой билинейной формы);
2) Если $(x; y) = (z; y)$ для любого y, то $x = z$ (следует из положительной определённости).

Доказательство второго свойства. Условие $(x; y) = (z; y)$ можно переписать в виде $(x - z; y) = 0$. Поскольку это равенство справедливо для любого y, можно подставить $y = x - z$. Получаем $(x - z; x - z) = 0$. Из положительной определённости можно сделать нужный вывод: $x - z = 0$, то есть $x = z$.

Неравенство Коши-Буняковского (-Шварца)

$$(x;y)^2 \leq (x;x)(y;y),$$

причем неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Доказательство. 1) Пусть векторы коллинеарны, скажем, $x = \lambda y \Rightarrow (x;y)^2 = (\lambda y;y)^2 = \lambda^2(y;y)^2$; $(x;x)(y;y) = (\lambda y;\lambda y)(y;y) = \lambda^2(y;y)^2$
Пусть векторы неколлинеарны, а тогда и линейно независимы.В этом случае они образуют базис в своей линейной оболочке. Ограничение скалярного произведения на неё тоже является положительно определенной формой, поэтому по критерию Сильвестра угловые миноры положительны; минор 2-го порядка, он же по совместительству определитель матрицы формы, положителен. Но он равен $(x;x)(y;y) - (x;y)^2$. Доказательство завершено.

Замечание. Это – всего лищь одно из возможных доказательств неравества Коши-Буняковского. Предлагаю тему для доклада – Различные доказательства этого неравенства.

Запишем, как это неравенство выглядит в различных пространствах.
Например, в $\mathbb{R}^n$ получаем

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

В $C[a;b]$ получаем

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

Примеры использования неравенства Коши-Буняковского в элементарой математике мы рассмотрим на семинарских занятиях.

Норма вектора

Так называется функция, которую мы будем обозначать $||x||$, заданная на элементах линейного пространства, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) $||x|| \geq 0$, причем $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (так называемое неравенство треугольника)

В евклидовом пространстве принято норму вектора определять формулой (вместо слова норма используют также слово **длина**)

$$||x|| = \sqrt{(x;x)}$$

Используя определение длины вектора, неравенство Коши-Буняковского можно записать в виде

$$|(x;y)) \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Для полного счастья нужно проверить выполнение аксиом нормы вектора. Первые два свойства очевидны, третье – нер-во треугольника – сейчас докажем:

$$||x+y||^2 = (x+y;x+y) = (x;x) + 2(x;y) + (y;y) \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x + ||y||)^2$$

То есть неравенство треугольника является элементарным следствием неравества Коши-Буняковского.

Угол между векторами в евклидовом пространстве – это

$$\arccos \frac{(x;y)}{||x|| \cdot ||y||}$$

(если один из векторов нулевой, то угол не определен (но если очень хочется – считайте, что он равен тому значению, которое Вам в данный момент милее). Возможность определить угол по этой формуле следует из неравенства Коши-Буняковского.

9-я лекция

Теорема Пифагора

Сначала дадим определение **ортогональности** векторов в евклидовом пространстве – это когда их скалярное произведение равно нулю (то есть для ненулевых векторов это означает, что угол между ними равен 90 градусов). Если хотя бы один из векторов нулевой, тоже будем считать (если для нас это будет важно), что векторы ортогональны).

Теорема Пифагора. Если векторы ортогональны, то

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

и

$$||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Доказательство почти очевидно: например, $||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y) = ||x||^2+||y||^2$

Обратная теорема Пифагора. Если $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, то векторы x и y ортогональны.

Доказательство очевидно.

Замечание. Если евклидово пространство рассматривается над полем комплексных чисел, то обратная теорема Пифагора перестает быть верной. Но нас это пока не волнует.

Ортогональная система векторов в евклидовом пространстве

Определение. Система векторов называется ортогональной, если векторы этой системы попарно ортогональны.

Теорема Ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.

Доказательство. Пусть $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = \bar{0}$, умножим это равенство скалярно на e_1. Поскольку $e_1 \neq \bar{0}$, скалярное произведение $(e_1, e_1) = ||e_1||^2 \neq 0$. Поскольку e_1 ортогонален остальным векторам системы, скалярные произведения $(e_1, e_2) = (e_1, e_3) = \ldots = (e_1, e_n) = 0$. Отсюда $c_1 = 0$. Умножая последовательно наше равенство на $e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n$, доказываем, что $c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0$. Этим доказано, что только тривиальная комбинация наших векторов равна нулевому вектору, что и означает линейную независимость системы. Конечно во время доказательства мы использовали билинейность скалярного произведения.

Теорема Ортогональная система ненулевых векторов в количестве, равном размерности пространства, образует базис этого пространства.

Доказательство очевидно.

Теорема Матрица Грама в ортогональном базисе диагональна.

Доказательство очевидно – ведь на (i,j)-м месте матрицы Грама стоит скалярное произведение векторов e_i и e_j..

Определение Вектор в евклидовом пространстве будем называть **нормированным**, если его длина равна 1. **Ортонормированной** системой функций называется система попарно ортогональных векторов единичной длины.

В первом семестре мы уже использовали **символ Кронекера**

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \text{если}\ \ i = j \\ 0,\ \text{если}\ \ i \neq j \end{array} \right.$$

Сейчас с его помощью можно задать ортонормированность системы в виде условия

$$(e_i; e_j) = \delta_{ij}$$

Под **ортонормированным базисом** естественно понимать ортонормированную систему, образующую базис.

Теорема Базис является ортонормированным тогда и только тогда, когда его матрица Грама единичная.

Доказательство очевидно.

Теорема. В ортонормированном базисе (и только в нем) скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = X^T Y,$$

а длина вектора вычисляется по формуле

$$||x|| = \sqrt{(x, x)} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = X^T X$$

Естественно, для вычисления угла между векторами получается формула

$$\varphi_{x,y} = \arccos \frac{(x, y)}{||x|| \cdot ||y||} = \arccos \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}$$

Теорема. В ортонормированном базисе координаты вектора $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ могут быть найдены по формуле

$$x_i = (x, e_i)$$

Таким образом,

$$x = (x, e_1) e_1 + (x, e_2) e_2 + \ldots + (x, e_n) e_e$$

Для доказательства теоремы достаточно равенство $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ скалярно умножить на вектор e_i.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Хотя процесс называется процессом ортогоназизации базиса, по сути мы не только ортогонализируем базис, но и ортонормируем его, то есть заменяем произвольный базис на ортонормированный.

На семинаре будет подробно разбираться соответствующая задача, здесь же мы только опишем суть процесса.

На первом этапе будет построен ортогональный базис, на втором, поделив векторы на их длины, переходим к ортонормированному базису.

Первый вектор исходного базиса менять нет смысла: $f_1 = e_1$. Второй вектор нового базиса будем искать в виде проекции второго вектора старого базиса на направление, лежащее в линейной оболочке первых двух векторов базиса и ортогональное первому вектору базиса: $f_2 = e_2 + \lambda e_1$; коэффициент λ подбираем из условия $(f_2, e_1) = 0$.

Дальше процесс идет по тому же сценарию, описывать который здесь подробно скучно. На семинаре разберемся!

10-я лекция Ортогональные матрицы

Квадратная матрица называется **ортогональной**, если она удовлетворяет условию

$$A^T A = E$$

Утверждение 1. Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному ортогональна.

Доказательство. Напомним, что матрица Грама $E = C^T EC$ в ортонормированном базисе единична. Вспомнив также, как меняется матрица билинейной формы при замене базиса, и что скалярное произведение является билинейной формой, получаем

$$E = G_2 = C^T G_1 C = C^T EC = C^T C,$$

то есть матрица C ортогональна.

Утверждение 2. Если матрица перехода от ортонормированного базиса к новому базису ортогональна, то новый базис тоже ортонормированный.

Доказательство. $G_2 = C^T G_1 C = C^T EC = C^T C = E$

Свойства ортогональных матриц

1. Ортогональная матрица невырождена, то есть у нее определитель не равен нулю, то есть у нее есть обратная матрица, и эта обратная матрица равна A^T. Конечно, верно и обратное утверждение: если $A^{-1} = A^T$, то A – ортогональная матрица.

Это утверждение очевидно. Кстати, при его доказательстве мы используем то, что ортогональная матрица по определению квадратна (попробуйте сами привести пример НЕквадратной матрицы, удовлетворяющей условию $A^T A = E$). Поэтому можно написать

$$1 = \det E = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A),$$

то есть определитель матрицы A отличен от нуля.

2. Если A – ортогональная матрица, то транспонированная к ней матрица A^T также ортогональна.

Это очевидно – ведь транспонированная к ортогональной матрице обратно к ней, поэтому

$$(A^T)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = E$$

3. Столбцы ортогональной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^n$ относительно скалярного произведения $(x; y) = X^T Y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

Доказательство. Напомню, что i-я строчка матрицы A^T является i-м столбцом матрицы A, уложенным горизонтально:

$$(A^T)_i = (A^i)^T$$

На прошлой лекции мы вспомнили символ Кронекера δ_{ij}, с помощью которого удобно записывать ортонормированность системы. Кроме того, символ Кронекера помогает записать общий вид элемента $e_{ij} = (E)_{ij}$ единичной матрицы. Имеем:

$$\delta_{ij} = (E)_{ij} = (A^T A)_{ij} = (A^T)_i A^j = (A^i)^T A^j,$$

а это и есть скалярное произведение i-го и j-го столбцов матрицы A.

Если такая выкладка в общем виде кажется сложной, можете посмотреть на подробные выкладки, проведенные в частном случае матрицы второго порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};\ A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix};\ A^T A = E;\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 & = & 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} & = & 0 \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & = & 0 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 & = & 1 \end{cases}$$

Первое уравнение говорит о том, что квадрат длины (а тогда и сама длина) первого столбца как элемента $\mathbb{R}^2$ равна 1, четвертое уравнение говорит то же самое про второй столбец, второе и дублирующее его третье уравнение говорят о том, что столбцы матрицы ортогональны.

4. Строки ортогональной матрицы тоже образуют ортонормированный базис

Это так, поскольку строки матрицы A – это столбцы матрицы A^T, а она тоже ортогональна. А если не лень – проведите выкладку, аналогичную только что проведенной, перемножив A и A^T. Вы получите систему (лишнее уравнение писать не будем)

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 & = & 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & = & 0 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 & = & 1 \end{cases}$$

5. Матрица, обратная к ортогональной, тоже ортогональна.

Это следует из того, что матрица A^{-1}, обратная к ортогональной матрице A, совпадает с A^T.

6.Если матрица A ортогональна, то $\det A = \pm 1$

В самом деле, $1 = \det E = \det(A^T A) = \det(A^T) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

5. Найдем все ортогональные матрицы второго порядка. Поскольку $a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$, существует α такое, что $a_{11} = \cos\alpha$, $a_{21} = \sin\alpha$. Поскольку $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$, существует β такое, что $a_{12} = \cos\beta$, $a_{22} = \sin\beta$. Поскольку столбцы ортогональны, их скалярное произведение равно нулю: $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = 0$, откуда $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k}$ (я написал $\beta - \alpha$, а не $\alpha - \beta$, поскольку так проще выражать β через α.

Рассмотрим два случая.

Пусть $k = 2n \Rightarrow \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathrm{n} \Rightarrow \cos\beta = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$; $\sin\beta = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Напрягая остатки памяти, вспоминаем, что так выглядит матрица поворота на угол α против часовой стрелки в пространстве V^2 векторов на плоскости в ортонормированном базисе. Итак, запомним это: матрица поворота в ортонормированном базисе ортогональна.

Кроме того, обращаем внимание на то, что в этом случае определитель матрицы равен единице.

Второй случай. Пусть $k = 2n - 1 \Rightarrow \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\beta = \sin\alpha$; $\sin\beta = -\cos\alpha \Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Получившаяся матрица очень похожа на предыдущую, но это только на взгляд дилетанта. Во-первых, ее определитель равен минус 1, а не 1, как в первом случае. Во-вторых, её след равен нулю, а не $2\cos 2\alpha$, как в первом случае. Считая, что это матрица оператора, выписываем характеристическое уравнение $\lambda^2 - \mathrm{Tr}\,A \cdot \lambda + \det A = 0$; $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$. Поиск собственных векторов приводит к выводу, что это матрица оператора отражения относительно прямой, полученной из оси OX поворотом на угол $\alpha/2$. Соответствующее исследование предлагается провести самостоятельно.

11 лекция Ортогональные операторы в евклидовом пространстве

Так называются операторы, удовлетворяющий равенству

$$(\mathcal{A}(x);\mathcal{A}(y)) = (x;y)$$

для всех векторов x и y.

Очевидное **Утверждение.** Линейный оператор в евклидовом пространстве является ортогональным тогда и только тогда, когда он сохраняет длины векторов и углы между ними.

В самом деле, если оператор ортогональный, то

$$|\mathcal{A}(x)|^2 = (\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(x)) = (x,x) = ||x||^2;$$
$$\cos\varphi_{\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)} = \frac{(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y))}{||\mathcal{A}(x)||\cdot||\mathcal{A}(y)||} = \frac{(x,y)}{||x||\cdot||y||} = \cos\varphi_{x,y}$$

Обратно, если линейный оператор сохраняет длины и углы, то он сохраняет скалярное произведение:

$$(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)) = ||\mathcal{A}(x)||\cdot||\mathcal{A}(y)||\cdot\cos\varphi_{\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)} = ||x||\cdot||y||\cdot\varphi_{x,y} = (x,y)$$

Утверждение. Если линейный оператор сохраняет длины векторов, то этот оператор ортогональный. (То есть если линейный оператор сохраняет длины векторов, то он сохраняет и углы между ними.)

Доказательство. Перед тем, как разбираться с доказательством, советую вернуться к концу 5-й лекции, где мы говорили о восстановлении симметричной билинейной формы по квадратичной форме. Посмотрели? А теперь сравните ту выкладку с нынешней.

$$||\mathcal{A}(x+y)||^2 = (\mathcal{A}(x+y);\mathcal{A}(x+y)) = (\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y),\mathcal{A}(x)+\mathcal{A}(y)) =$$

$$= (\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(x)) + 2(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)) + (\mathcal{A}(y),\mathcal{A}(y)) =$$

$$= ||\mathcal{A}(x)||^2 + 2(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)) + ||\mathcal{A}(y)||^2 = ||x||^2 + 2(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)) + ||y||^2$$

С другой стороны,

$$||\mathcal{A}(x+y)||^2 = ||x+y||^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y)^2 = ||x||^2+2(x,y)+||y||^2$$

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что $(\mathcal{A}(x),\mathcal{A}(y)) = (x,y)$, что и требовалось.

Примеры ортогональных операторов в пространствах V^2 и V^3.

1) Тождественный оператор. Объяснения излишни.

2) Оператор поворота вокруг начала координат в V^2; вокруг прямой в V^3. На мой взгляд, и тут всё очевидно.
3) Оператор отражения относительно прямой в V^2; относительно плоскости в V^3. Сознайтесь, неужели это кому-то не совсем очевидно?))

Свойства ортогональных операторов.

1. Ортогональный оператор невырожден. Если мы раньше забыли дать определение невырожденного оператора, сделаем это сейчас. Так называется оператор с тривиальным ядром (то есть с ядром, состоящим только из нулевого вектора). Еще мы использовали термин мономорфизм. Кстати, похоже, мы забыли в свое время отметить, что термин евклидово пространство используется только в случае, когда пространство конечномерно. Отмечаем это сейчас: евклидово пространство конечномерно. А тогда, как мы уже точно писали раньше, из мономорфности следует и эпиморфность, то есть изоморфность. А у такого оператора есть обратный. Поэтому это свойство можно сформулировать так:
Ортогональный оператор обратим.

Доказательство очевидно: раз длины векторов под воздействии ортогонального оператора не меняются, никакой ненулевой вектор не может перейти в нулевой.

2. Ортогональный оператор переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный.

Надеюсь, ни у кого это свойство затруднений не вызвало. Переходим к обратному утверждению.

3. Если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то это - ортогональный оператор (а тогда он и любой другой ортонормированный базис переведет в ортонормированный базис).

Доказательство. Пусть Б $= [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ и $\mathcal{A}(\text{Б}) = [\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \ldots, \mathcal{A}(e_n)]$ – ортонормированные базисы, и x – произвольный вектор. Нам достаточно доказать, что $||x|| = ||\mathcal{A}(x)||$ - ведь мы уже доказали, что если оператор сохраняет длины векторов, то он сохраняет скалярные произведения, то есть является ортогональным оператором.

Разложим вектор x по базису Б:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = \text{Б}X$$

и подействуем на x оператором $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = x_1\mathcal{A}(e_1) + x_2\mathcal{A}(e_2) + \ldots + x_n\mathcal{A}(e_n) = \mathcal{A}(\text{Б})X.$$

Мы видим, что у векторов x и $\mathcal{A}(x)$ одинаковые столбцы координат, у одного – в первом базисе, у второго – во втором базисе. А раз базисы ортонормированные, длины этих векторов ищутся по одной формуле - корень из суммы квадратов координат. Значит, у этих векторов одинаковые длины.

Замечание. Проанализировав доказательство третьего свойства, можно обобщить его так: если матрицы Грама скалярного произведения в базисах Б и $\mathcal{A}(\text{Б})$ совпадают, то оператор $\mathcal{A}$ ортогональный – ведь длины векторов вычисляются с помощью матрицы Грама.

4. Оператор, обратный к ортогональному оператору, ортогонален.

Почти очевидное утверждение: если $\mathcal{A}(x) = y$, то $\mathcal{A}^{-1}(y) = x$ и $||y|| = ||\mathcal{A}(x)|| = ||x|| = ||\mathcal{A}^{-1}(y)||$, .

5. Матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе ортогональна.

Это следует из того, что матрица ортогонального оператора может рассматриваться как матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису (см. предыдущую лекцию).

6. Произведение ортогональных операторов также является ортогональным оператором.

Думаю, что это свойство не требует доказательства – ведь мы сначала действуем на вектор одним оператором, который не меняет длины, а затем на получившийся вектор действуем вторым оператором, который также не меняет длины.

7. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то $\lambda\mathcal{A}$ является ортогональным оператором тогда и только тогда, когда $\lambda = \pm 1$.

Опять очевидное свойство – ведь $||(\lambda\mathcal{A})(x)|| = ||\lambda \cdot \mathcal{A}(x)|| = |\lambda| \cdot ||\mathcal{A}(x)|| = |\lambda| \cdot ||x||$, а $|\lambda| \cdot ||x|| = ||x|| \Leftrightarrow |\lambda| = 1$, то есть $\lambda = \pm 1$.

8. Собственными значениями ортогонального оператора могут быть только ± 1.

Если x – собственный вектор (значит $x \neq \bar{0}$), то $\mathcal{A}(x) = \lambda x$ и $||\mathcal{A}(x)|| = ||x||$, то $||x|| = ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, поэтому $|\lambda| = 1$.

9. Определитель матрицы ортогонального оператора равен 1 или -1.

В ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора является ортогональной (см. свойство 5), а определитель ортогональной матрицы может быть равен только 1 или -1 (см. свойства ортогональной матрицы). Поскольку матрица оператора не зависит от базиса, свойство 9 доказано.

Описание всех ортогональных операторов.

Определение. Ортогональным дополнением к подпространству V евклидова пространства E называется множество $V^\perp = \{x \in E : (x; y) = 0$ для любого вектора $y \in V\}$. Иными словами, ортогональное дополнение к V состоит из векторов, перпендикулярных всем векторам из V.

Лемма. $V^\perp$ является линейным подпространством в E.

Утверждение очевидно – ведь если $(x, y) = 0$ и $(z, y) = 0$, то $(\lambda x + \mu z, y) = \lambda(x, y) + \mu(z, y) = 0$.

Утверждение. Если V – инвариантное подпространство ортогонального оператора $\mathcal{A}$, то $V^\perp$ также является инвариантным подпространством этого оператора.

Доказательство. Давайте вспомним: подпространство называется инвариантным подпространством оператора, если векторы этого подпространства не выходят за пределы подпространства под воздействием оператора (то есть $\mathcal{A}(V) \subseteq V$). Заметим также, что если оператор ортогонален (то есть сохраняет длины), то его ограничение на инвариантное подпространство также будет ортогональным оператором (то есть будет сохранять длины). Берем базис $Б_1$ в V. Чтобы упростить ссылки, потребуем, чтобы этот базис был ортонормированным, хотя для доказательства утверждения это абсолютно непринципиально). Поскольку ограничение оператора $\mathcal{A}$ на V является ортогональным оператором, $\mathcal{A}(Б_1)$ будет также (ортонормированным) базисом в V. Пусть $x \in V^\perp$, нам нужно доказать, что $\mathcal{A}(x) \in V^\perp$, а для этого достаточно доказать, что $\mathcal{A}(x)$ перпендикулярен всем векторам какого-нибудь базиса V. По условию x перпендикулярен всем векторам базиса $Б_1$. Докажем, что $\mathcal{A}(x)$ перпендикулярен всем векторам базиса $\mathcal{A}(Б)$. Это просто: если $(x; e_i) = 0$, то в силу ортогональности оператора (ортогональный оператор сохраняет углы, поэтому перпендикулярные векторы он переводит в перпендикулярные) $(\mathcal{A}(x); \mathcal{A}(e_i) = 0$.

Чтобы выяснить, к какому виду можно привести матрицу ортогонального оператора, потребуется важная лемма. Если бы мы работали над полем $\mathbb{C}$, это лемма нам не потребовалась бы.

Лемма. Если $\lambda = \alpha + i\beta$; $\beta \neq 0$ – комплексный корень характеристического уравнения линейного оператора $\mathcal{A}$, то существуют векторы u и v такие, что выполнены два равенства $\mathcal{A}(u) = \alpha u - \beta v$ и $\mathcal{A}(v) = \alpha v + \beta u$.

Доказательство леммы мне хотелось бы пока "замылить". Желающий сделать мини-доклад на эту тему может его сделать. Заявки принимаются))

Следствие. Любой линейный оператор имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

В самом деле, если характеристическое уравнение имеет хотя бы один действительный корень, оператор имеет собственный вектор, а тогда он имеет одномерное инвариантное подпространство, а именно – линейную оболочку этого вектора. Если действительного корня нет, найдется комплексный корень $\lambda = \alpha + i\beta$, а по лемме найдутся векторы u и v, чьи образы под воздействием оператора линейно выражаются через u и v, что и означает инвариантность линейной оболочки u и v.

Заканчиваем описание ортогональных операторов. Если у ортогонального оператора есть одномерное инвариантное подпространство, то оно порождается вектором длины 1, который, естественно, является собственным с собственным значением 1 или -1.

Если у ортогонального оператора есть двумерное инвариантное подпространство, выберем в нем произвольный ортонормированный базис. По доказанному для ортогональных матриц, мы получаем или матрицу поворота на угол φ, или матрицу с собственными значениями 1 и минус 1, это будет матрица отражения относительно оси.

Поскольку для ортогонального оператора ортогональное дополнение к инвариантному подпространству тоже является инвариантнвым подпространством, мы полностью описали все ортогональные операторы.

12 лекция

Линейные отображения

В самом начале семестра мы говорили о линейных отображениях, частным случаем которых являются линейные операторы. Для задания матрицы такого отображения $\mathcal{A}: V \to W$ мы должны знать два базиса – $Б_V = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ в V, $Б_W = [f_1, f_2, \dots, f_k]$ в W. Действуя оператором на векторы первого базиса, получаем какие-то векторы во втором пространстве, поэтому их следует раскладывать уже не по первому базису, а по второму:

$$\mathcal{A}(e_i) = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \ldots + a_{ki}f_k.$$

Записывая полученные коэффициенты по столбцам, получаем матрицу оператора $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, причем, как легко проверить (сделайте это сами), если $\mathcal{A}(x) = y$, то связь координат исходного вектора x и полученного вектора y задается формулой

$$Y = AX,$$

которая внешне ничем не отличается от формулы для случая линейных операторов.

Возникает естественный вопрос, как меняется матрица линейного отображения при замене базиса.

Поскольку могут быть изменены два базиса, естественно ожидать присутствие в выводимой формуле обеих матриц перехода. Кроме того, эта формула должна сводиться к любимой нами формуле для случая линейных операторов, в которую, кстати, матрица перехода входит дважды. Естественно предположить, что при переходе к линейным отображениям на ее место и нужно по разу вставить наши матрицы перехода. Какую куда? Если нужно просто угадать ответ, то это не проблема – поскольку $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, то есть у нее k строк и n столбцов, слева ее нужно умножать на матрицу k-го порядка, а справа – n-го порядка. Поэтому, если $C_V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица перехода от базиса $Б_V$ к базису $Б'_V$ в пространстве V, а $C_W \in \mathbb{R}^{k \times k}$ – матрица перехода от базиса $Б_W$ к базису $Б'_W$ в пространстве W, то матрица A' оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе выражается через матрицу A в старом базисе с помощью формулы

$$A' = C_W^{-1} A C_V.$$

Вывод этой формулы, на мой взгляд, ничем существенным не отличается от вывода формулы в случае линейного оператора:

$$Б'_V = Б_V C_V; \quad Б'_W = Б_W C_W;$$

$$\mathcal{A}Б'_V = Б'_W A_2 = (Б_W C_W) A_2 = Б_W (C_W A_2);$$

$$\mathcal{A}Б'_V = \mathcal{A}(Б_V C_V) = \mathcal{A}(Б_V) C_V = (Б_W A) C_V = Б_W (A C_V)$$

$$\Rightarrow C_W A' = A C_V; \; A' = C_W^{-1} A C_V.$$

Линейные формы

Линейное отображение называется *линейной формой*, или *линейной функцией*, или *линейным функционалом*, если оно действует на произвольном линейном пространстве V, но значения принимает в $W = \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A}: V \to \mathbb{R}.$$

Если в V задан базис $Б = [e_1, e_2, \dots, e_n]$, и найдены значения билинейной формы на векторах базиса: $\mathcal{A}(e_i) = a_i \in \mathbb{R}$ (при крайней степени занудства (в положительном смысле), можете считать, что в $\mathbb{R}$ также задан базис (состоящий из одного элемента – единицы), и a_i – это коэффициент разложения вектора $\mathcal{A}(e_i)$ по базису:

$$\mathcal{A}(e_i) = a_i \cdot 1.$$

Действуя оператором на произвольный вектор $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = \text{Б}X$, получаем в силу линейности

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\mathcal{A}(e_1) + \ldots + x_n\mathcal{A}(e_n) = x_1a_1 + \ldots + x_na_n = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = AX.$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ – матрица-строка $(a_1\ a_2\ \ldots a_n)$ (вторые индексы не потребовались), она и является матрицей нашей линейной формы (функции, функционала – как хотите). Между прочим, раньше такое линейное отображение обычно называлось линейной функцией или функционалом, а выражение форма приберегалось для выражения $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ этого функционала в координатах в фиксированном базисе, но сейчас времена стали более свободными, и слово форма используется в двух смыслах. Как, впрочем, и название билинейная форма – раньше оно использовалось только для выражения $\sum a_{ij}x_iy_j$ билинейной *функции* в фиксированном базисе, а сейчас и саму билинейную функцию чаще всего также называют билинейной формой.

Если в V меняется базис (надеюсь, в $\mathbb{R}$ никому в голову не придет поменять базис, состоящий из 1, на какой-то другой), то матрица линейной формы изменится по формуле

$$A_2 = A_1C$$

Отдельного вывода эта формула не требует, поскольку мы выводили аналогичную формулу для произвольного линейного отображения, частным случаем которой является эта.

И еще одно важное соображение. Выражение $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = AX$ напоминает нам формулу для вычисления скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе. Поэтому можно считать, что (в случае, когда линейное пространство V является евклидовым пространством, то есть пространством с заданным на нем скалярным произведением) каждая линейная форма в фиксированном **ортонормированном** базисе может быть задана как скалярное произведение на фиксированный вектор:

$$\mathcal{A}(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{x}),$$

где $\bar{a} = a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$.

Естественно, существует и обратное соответствие: каждый вектор задает линейный функционал.

Замечание. Напоминаем, что все пространство у нас конечномерные. Что будет в бесконечномерном случае, Вы, возможно, узнаете, когда будете изучать функциональный анализ.

Замечание. Пока поле, над которым рассматривается линейное пространство, является полем действительных чисел, $(\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{x})$, поэтому порядок x и a здесь значения не имеет. Но как только мы переходим к полю комплексных чисел, ситуация кардинально меняется, и нужно пользоваться формулой $\mathcal{A}(x) = (x, a)$. Дело в том, что одна из аксиом скалярного произведения в случае поля $\mathbb{C}$ звучит так: $(a, \lambda b) = \bar{\lambda}(a, b)$ (хотя $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$). И дело здесь не в каком-то странном произволе математиков, а в суровой необходимости – в старой формулировке при переходе к $\mathbb{C}$ теряется положительная определенность.

Возвращаемся к полю $\mathbb{R}$. Пусть V – евклидово пространство (напомним, что конечномерность мы включаем в определение евклидова пространства). Введем обозначение V^* для пространства линейных форм на E (то, что V^* является линейным пространством, очевидно,– ведь линейные операции над линейными формами снова приводят к линейным формам, и поэтому множество линейных форм является линейным подпространством пространства всех функций из V в $\mathbb{R}$).

Теорема. Функция $\Phi : V \to V^*$, сопоставляющая каждому вектору $a \in V$ линейную форму

$$\varphi_a : V \to \mathbb{R}; \quad \varphi_a(x) = (x, a),$$

задает изоморфизм (он носит гордое название канонического) между V и V^*.

Доказательство. То, что Φ является биекцией, мы уже поняли выше (еще раз напоминаю конечномерность V). Остается проверить сохранение операций. Но это элементарно:

$$\Phi(\lambda a + \mu b)(x) = (x, \lambda a + \mu b) = \lambda(x, a) + \mu(x, b) = \lambda\varphi_a(x) + \mu\varphi_b(x) = (\lambda\varphi_a + \mu\varphi_b)(x) = (\lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b))(x).$$

Пространство V^* называется пространством, сопряженным пространству V.

Соответствие между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве

Используя линейный оператор $\mathcal{A}$, заданный на евклидовом пространстве E, мы можем построить билинейную форму

$$f(x;y) = (x;\mathcal{A}(y))$$

На мой взгляд, билинейность формы абсолютно очевидна.

Теорема. Если Б – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E, то матрицы линейного оператора $\mathcal{A}(x)$ и билинейной формы $f(x,y) = (x,\mathcal{A}(y))$ совпадают.

Доказательство. Пусть A – матрица оператора, то есть $\mathcal{A}(x) = \text{Б}AX$, Далее,

$$f(x,y) = (x,\mathcal{A}(y)) = (x,\text{Б}AY) = X^T G(AY)$$

а раз базис ортонормированный, матрица Грама G является единичной. Поэтому $f(x,y) = X^T AY$ (хвала ассоциативности!). Кроме того, мы знаем, что билинейная форма в базисе вычисляется по подобной формуле с X^T слева, Y справа, и матрицей билинейной формы посередке. Значит, матрица A, стоящая посередке в произведении $X^T AY$, совпадает с матрицей билинейной формы.

Думаю, что все согласятся с моим доказательством. Если же у кого-нибудь возникнут сомнения в корректности вывода, могу предложить вспомогательную лемму, доводящую до абсолютной ясности решение.

Лемма. Пусть матрицы A и B являются квадратными одного порядка, причем для любых столбцов X и Y подходящего размера выполнено равенство

$$X^T AY = X^T BY.$$

Тогда матрицы A и B совпадают.

Доказательство. Требуется доказать, что для всех i и j выполняется $a_{ij} = b_{ij}$. Для этого рассмотрим столбцы X и Y со всеми нулями кроме места под номером i для столбца X, и всеми нулями кроме места под номером j для столбца Y. В этом случае произведение $X^T AY$ станет равным a_{ij}, а произведение $X^T BY$ станет равным b_{ij}. Доказательство завершено.

Замечание. Фактически мы сейчас доказали такое очевидное утверждение: если значения двух билинейных форм совпадают для всех векторов пространства, то матрицы этих билинейных форм совпадают.

Продолжу смешить потенциальных читателей очевидностями.Например, такой: если взять любую матрицу $A \in R^{n\times n}$, то зафиксировов в n-мерном евклидовом пространстве произвольный ортонормированный базис, мы может рассмотривать ее как матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего по формуле $\mathcal{A}(x) = \text{Б}AX$, а можем рассматривать как матрицу билинейной формы $f(x,y) = X^T AY$, причем, естественно, будет выполнено $f(x,y) = (x,\mathcal{A}(y))$. Или можно так: начать с линейного оператора, перейти к его матрице, а от матрицы перейти к билинейной форме. И наоборот, начав с билинейной формы, взяв ее матрицу, можем перейти к оператору с такой же матрицей.

Вопрос, который может возникнуть у пытливого читателя: почему билинейную форму по линейному оператору мы задаем по формуле $f(x,y) = (x,\mathcal{A}(y))$, а не по формуле $f(x,y) = (\mathcal{A}(x),y)$? Ведь эта формула также задает билинейную форму? Но давайте посмотрим, как такая форма задается в базисе (ортонормированном, естественно, чтобы матрица Грама не путалась под ногами). Имеем:

$$f(x,y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y,$$

то есть матрицей такой билинейной формы будет не матрица A, а транспонированная к ней матрица! Если бы матрица A была симметричной, то ничего бы не изменилось. А в общем случае результат получается другой. Другое дело, если мы интересуемся не билинейной, а соответствующей ей квадратичной. Поскольку при вычислении коэффициентов в квадратичной форме происходит суммирование коэффициентов a_{ij} и a_{ji}, можно пользоваться любой формулой.

13 лекция

Сопряжённый оператор

Начнем с "импровизации". Вспомним предыдущую лекцию, то место, где линейный оператор $\mathcal{A}$ чудесными образом превратился в билинейную форму

$$f(x,y) = (x, \mathcal{A}(y)).$$

При этом в ортонормированном базисе матрицы линейного оператора и билинейной формы совпадают, так как в этом случае

$$(x, \mathcal{A}(y)) = X^T AY.$$

Если же базис произвольный (с матрицей Грама G), то

$$f(x,y) = (x, \mathcal{A}(y)) = X^T GAY.$$

поэтому у билинейной формы матрица будет равна GA.

Будет ли эта билинейная форма симметричной? Естественно, если матрица A симметрична. Забавный момент: симметричность матрицы билинейной формы остается при замене базиса на любой другой, так как симметричность этой матрицы равносильна симметричности самой формы. Так что же получается? Раз наша форма построена по линейному оператору и симметрична, а тогда матрица формы симметрична в любом базисе, то матрица линейного оператора, раз уж она в каком-то базисе была симметричной, то она и в любом другом базисе тоже будет симметричной?

Прежде чем читать дальше, попробуйте разобраться в этом вопросе сами.

Ну а разгадка проста: матрицы оператора и порожденной им билинейной формы гарантированно совпадают только в ортонормированном базисе. А в неортонормированном они совпадут, если $A = GA$. Если матрица A невырожденная, то есть у нее есть обратная (то есть оператор обратим), то это возможно только если $G = E$, то есть базис ортонормированный. Если A вырождена, такой вывод сделать нельзя, и соответствующий пример придумать не сложно. Попробуйте придумать его сами. Другой подход: пусть первоначальный базис был ортонормированный; тогда матрицы оператора и формы совпадут. Перейдем к другому базису, который с первоначальным базисом связан матрицей перехода C. Тогда матрица оператора изменится по формуле $C^{-1}AC$, а матрица формы по формуле $C^T AC$. Эти матрицы совпадут, если

$$C^{-1}AC = C^T AC,$$

что гарантированно выполнено, если

$$C^{-1} = C^T.$$

А это, как Вы должны помнить, означает, что матрица C ортогональная, а это в свою очередь равносильно (поскольку первоначальный базис ортонормированный) ортонормированности нового базиса. Если Вы немного забыли этот материал, подойду немного с другой стороны: матрица Грама в новом базисе получается из старой матрицы Грама (которая единичная в силу ортонормированности базиса) по формуле $C^T EC$, что и дает благополучно единичную матрицу.

Поимпровизируем ещё немного. Задание билинейной формы в виде $f(x,y) = (x, \mathcal{A}(y))$ наводит на мысль о дискриманации то ли x, то ли y. Почему именно к y мы применяем оператор? Давайте разбираться. Ключевой момент при этом заключается в том, что нам хотелось бы иметь совпадение матриц оператора и формы. Но сначала хочется немного пошалить. В силу симметричности скалярного произведения мы може написать

$$(x, \mathcal{A}(y)) = (\mathcal{A}(y), x),$$

а расписывая левую и правую часть равенства в координатах в ортонормированном базисе, получаем

$$X^T AY = (AY)^T X = Y^T A^T X.$$

Первое впечатление шокирующее. Разве эти выражения совпадают?!

Сначала пытаетесь разобраться сами, а если не получится, читайте у меня.

Первый способ – расписать подробно левую и правую части, чтобы убедиться, что они на самом деле равны. А можно применить такой симпатичный трюк. Замечаем, что левая и правая части являются числами. Давайте будем считать, что они являются матрицами первого порядка. Естественно, транспонирование такой матрицы её не меняет, поэтому можно написать

$$Y^T A^T X = (Y^T A^T X)^T = X^T (A^T)^T (Y^T)^T = X^T AY.$$

Совпадение левой и правой частей доказано! Вам понравился такой способ?

А что произойдет, если мы рассмотрим функцию

$$f(x, y) = (\mathcal{A}(x), y)?$$

Снова считая, что базис ортонормированный, получим

$$f(x, y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y.$$

Ясно, что эта функция снова задает билинейную форму, но теперь её матрица A^T!

А раз есть билинейная форма с матрицей A^T (в ортонормированном базисе!), значит, есть и линейный оператор с этой матрицей! Иногда, а именно когда матрица A симметрична, то есть $A^T = A$, мы приходим к тому же оператору, с которого начали. Но если матрица A несимметрична, получается совершенно новый оператор. В результате мы научились сопоставлять каждому оператору другой оператор. Процедура пока не слишком простая: берем оператор, берем ортонормированный базис, берем матрицу оператора в этом базисе, транспонируем ее и берем оператор с получившейся матрицей. Конечно, давать определение оператора через привязку к определенному базису так же глупо, как поступают в некоторых школах, определяя скалярное произведение как сумму произведений координат, а не через длины и угол (извините, это у меня старческое бормотание). Поэтому официальное определение такого оператора таково.

Определение. Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ такой, что для всех векторов x, y евклидова пространства V выполнено равенство

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}^*(y)),$$

называется оператором, сопряженным к линейному оператору $\mathcal{A}$.

Если A^* – матрица оператора $\mathcal{A}^*$ (для простоты – пока в ортонормированном базисе), то это равенство можно переписать в виде

$$X^T A^T Y = X^T A^* Y,$$

а поскольку это равенство справедливо для всех столбцов X и Y, отсюда следует, что $A^* = A^T$. (Если кто-то забыл, почему можно в таком равенстве сокращать слева-справа иксы и игреки, можете рассуждать так: беря в качестве X столбец E_i из всех нулей с единственной единицей на i-м месте, а в качестве Y – столбец E_j с единицей на j-м месте, сводим произведение к элементу средней матрицы, стоящему на месте i, j.

Итак, в ортонормированном базисе

$$A^* = A^T.$$

Если же базис произвольный, то

$$(\mathcal{A}(x), y) = (AX)^T GY = X^T A^T GY;$$

$$(x, A^*(y)) = X^T GA^* Y,$$

поэтому

$$GA^* = A^T G; \quad A^* = G^{-1} A^T G.$$

Посмотрим, к чему приводит сопряжение в случае ортогоналоного оператора.

Теорема. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}.$$

Доказательство. В самом деле, у ортогонального оператора в ортонормированном базисе матрица ортогональна, поэтому обратная к ней равна транспонированной к ней.

Свойства сопряжения

0. Сопряженный к тождественному оператору совпадает с ним.

Очевидное свойство – ведь $E^T = E$.

1. Повторное сопряжение возвращает нас к первоначальному оператору:

$$(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}.$$

Очевидное свойство – ведь $(A^T)^T = A$.

2. Оператор, сопряженный к сумме операторов, совпадает с суммой операторов, сопряженных к слагаемым:

$$(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)^* = \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_2^*.$$

Очевидное свойство – ведь $(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T$.

3. Оператор, сопряженный к произведению операторов, равен произведению операторов, сопряженных к сомножителям, но в обратном порядке.

Очевидное свойство – ведь $(A_1 A_2)^T = A_2^T A_1^T$.

4. Числовой множитель можно выносить из под знака сопряжения:

$$(\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \cdot \mathcal{A}^*.$$

Очевидное свойство – ведь $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$.

5. Операции сопряжения и перехода к обратному коммутируют:

$$(\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})^*.$$

Доказательство. $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$; $(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})^* = \mathcal{E}^* = \mathcal{E}$; $(\mathcal{A}^{-1})^*\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, поэтому $(\mathcal{A}^{-1})^*$ является обратным к $\mathcal{A}^*$, что и требовалось.

6. Ортогональное дополнение $V_1^\perp$ к инвариантному подпространству V_1 оператора $\mathcal{A}$ является инвариантным подпространством для сопряженнного оператора.

Почти очевидное утверждение. Напомним, что ортогональное дополнение $V_1^\perp$ к подпространству $V_1 2$ евклидова пространства V состоит из всех векторов, ортогональных всем векторам подпространства V_1. Пусть $x \in V_1$; $y \in V_1^\perp$; $(\mathcal{A}^*(y); x) = (y; \mathcal{A}(x)) = 0$ (то есть для произвольного y из ортогонального дополнения к V_1, его образ под воздействием оператора $\mathcal{A}^*$ ортогонален всем векторам x из V_1, то есть лежит в $V_1^\perp$.

7. Характеристические многочлены $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ совпадают.

Это происходит из-за того, что определитель не меняется при транспонировании.

Как следствие отсюда получается, что собственные значения оператора и его сопряженного совпадают вместе с кратностью.

14 лекция

Самосопряжённые операторы

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в евклидовом пространстве, называется **самосопряженным**, если

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A},$$

то есть когда он сопряжён сам себе.

Поскольку оператор и его сопряженный оператор связаны равенством

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}^*(y))$$

(чисто визуально это выгдядит так: если хочешь перенести оператор с одного множителя на другой множитель в скалярном произведении, переноси, только пририсуй звездочку. Так вот, если оператор самосопряжен, спокойно можешь его переносить, даже звездочку можешь не ставить.

Итак, если оператор самосопряжен, то для любых $x,\ y \in V$ выполнено.

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y))$$

И наоборот, если для любых векторов $x,\ y \in V$ выполнено

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y)),$$

то оператор самосопряжен.

Теорема. В ортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора симметрична.

Доказательство. Поскольку в ортонормированном базисе матрица сопряженного оператора получается из матрицы исходного оператора транспонированием, а в случае самосопряженного оператора выполнено $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, получаем, что $A = A^T$, что и означает симметричность матрицы A.

Теорема. Если в каком-то ортонормированном базисе матрица оператора симметрична, оператор самосопряжен (а тогда и в любом другом ортонормированном базисе матрица также будет симметричной).

Доказательство. Поскольку $A^T = A$ и базис ортонормированный, матрицы оператора $\mathcal{A}$ и сопряженного к нему оператора $\mathcal{A}^*$ совпадают, откуда $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, что и означает самосопряженность.

Могут возникнуть вопросы:

– 1) может ли в неортонормированном базисе матрица самоспряженного оператора быть симметричной?

– 2) Может ли в неортонормированном базисе матрица самосопряженного оператора быть несимметричной (вдруг у такого оператора матрица в любом базисе обязана быть симметричной)?

– 3) А может ли в неортонормированном базисе матрица несамосопряженного оператора быть симметричной?

– 4) А можно и такой вопрос задать: почему мы всё время говорим про ортонормированный базис, а что будет в ортогональном? Так ли уж важно, чтобы векторы имели единичную длину? Может быть важно только, чтобы длины были одинаковые? Или даже это не важно?

Подумайте сами, а если не придумаете, читайте у меня.

1) На первый вопрос ответ положительный: например, у тождественного оператора в любом базисе матрица единичная, следовательно, симметричная.

2) Конечно, может. Например, если взять оператор проектирования на ось OX в пространстве V^2 (он вектор i оставит неподвижным, а вектор j переведет в нулевой вектор), но базис $[i, j]$ заменить , скажем, на $[i, i+j]$, то первая строка матрицы оператора будет состоять из двух единиц, а вторая - из двух нулей, и поэтому матрица не будет симметричной.

3) Конечно, может. Например, если оператор оставляет $e_1 = i$ на месте, а $e_2 = i + j$ переводит в нулевой (это оператор проектирования на ось OX параллельно биссектрисе первого и третьего координатных

углов), то в базисе $[e_1, e_2]$ матрица у него симметрична (в левом верхнем углу стоит единица, а остальные элементы равны нулю), однако в базисе $[i, j]$ матрица имеет такой вид: первый столбец $(1\ 0)^T$, второй – $(-1\ 0)^T$.

4) Предположим сначала, что длины векторов базиса одинаковые. Разделив их на их длины, получим ортонормированный базис, в котором матрица A_1 самосопряженного оператора симметрична. Матрица же перехода от полученного ортонормированного базиса к исходному скалярна, то есть получается умножением единичной матрицы на число μ (общую длину векторов). А тогда матрица оператора в исходном базисе $A_2 = (\mu E)^{-1} A_1 (\mu E) = \frac{1}{\mu} \cdot \mu A_1 = A_1$. Итак, мы доказали, что требование равенства длин векторов именно единицы излишне.

А вот если длины векторов различны, гарантировать симметричность матрицы самосопряженного оператора невозможно. Разберитесь в этом самостоятельно.

Отдельно отметим, что тождественный оператор и нулевой оператор самосопряжены – ведь у них матрицы в ортонормированном базисе симметричны (впрочем, как и в любом другом базисе).

Свойства самосопряженных операторов.

1. Сумма самосопряженных операторов самосопряжена.

Это можно доказывать исходя из определения, но я предпочитаю сослаться на то, что матрица суммы операторов равна сумме матриц слагаемых, а сумма симметричных матриц симметрична (а если хотите доказывать из определения, вспомните, что оператор, сопряженный к сумме операторов, равен сумме операторов, сопряженных к слагаемым)

2. Произведение самосопряженного оператора на число - самосопряженный оператор.

Разобравшись в доказательстве первого свойства, Вы без труда докажете и это, причем снова можете рассуждать как минимум двумя способами.

3. Произведение самосопряженных операторов самосопряжено тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

Еще одно очевидное свойство. Кстати, в экзаменационных билетах к первому семестру была такая задача: произведение симметричных матриц симметрично тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

4. Для любого оператора произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ самосопряжено.

В самом деле,

$$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$$

5. Обратный к невырожденному самосопряженному оператору самосопряжен.

Поскольку операции сопряжения и перехода к обратному коммутируют, можно написать

$$(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1} = \mathcal{A}^{-1}$$

6. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора является инвариантным подпространством.

Очевидное следствие шестого свойства для сопряженных операторов.

7. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе симметрична.

Такую теорему мы уже доказывали. Но ведь повторение – мать учения))

8. Если матрица оператора в ортонормированном базисе симметрична, то оператор самосопряжен.

См. "доказательство" седьмого свойства.

9. Собственные векторы самосопряженного оператора с различными собственными значениями попарно ортогональны.

Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, $\mathcal{A}(x) = \lambda x$, $\mathcal{A}(y) = \mu y$; $\lambda \neq \mu$; $x \neq \bar{0}$; $y \neq \bar{0}$. Имеем:

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}(y));\ (\lambda x, y) = (x, \mu y);\ \lambda(x, y) = \mu(x, y);\ (\lambda - \mu)(x, y) = 0.$$

Но $\lambda \neq \mu \Rightarrow (x, y) = 0$, что и требовалось доказать.

10. Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора действительны.

Когда-то я уже упоминал о том, что у любого линейного оператора есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Может быть когда-нибудь мы докажем это утверждение, а пока будем пользоваться им без доказательства. Итак, рассматриваем такое инвариантное подпространство V_1. По шестому свойству ортогональное дополнение $V_2 = V_1^{\perp}$ к нему также инвариантно, причем его размерность меньше размерности всего пространства на 1 или 2. Если выбрать ортонормированные базисы в выбранном подпространстве и в его ортогональном дополнении, то вместе они образуют ортонормированный базис во всем пространстве, причем матрица A оператора в этом базисе будет блочной. Один блок расположен в левом верхнем углу, и он дает матрицу A_1 ограничения оператора на V_1, второй блок расположен в правом нижнем углу, и он дает матрицу A_2 ограничения оператора на V_2. Поскольку матрица A симметрична, матрицы A_1 и A_2 также симметричны, поэтому ограничения оператора на эти подпространства также самосопряжены. Продолжаем этот процесс, находя в V_2 одномерное или двумерное инвариантное подпространство, и т. д. В результате мы найдем такой базис во всем просранстве, в котором матрица оператора является блочной с одномерными и двумерными клетками. А это приводит к тому, что характеристический многочлен распадается на линейные и квадратичные скобки. С линейными всё понятно – они дают действительные корни. Рассмотрим одну из квадратичных скобок. Наша задача – доказать, что она дает действительные корни,иными словами нужно доказать, что дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен. Это совсем просто, только не забывайте, что матрица симметрична. Будем считать, что элементы рассматриваемой матрицы второго порядка – это $a_{11},\ a_{12} = a_{21},\ a_{22}$. В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda + \det A = 0;$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0;$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$$

11. Следствие. У самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. Иными словами, существует ортонормированный базис, в котором матрица самосопряженного оператора диагональна.

Рассматриваем одну из двумерных клеток, полученных в предыдущей теореме. Дискриминант характеристического многочлена ограничения оператора на эту клетку, как доказано, неотрицателен. Если он положителен, мы получаем два различных действительных корня и поэтому два линейно независимых собственных вектора. Если же дискриминант равен нулю, мы получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Как известно, один собственный вектор x мы по любому получим. Рассмотрим подпространство $\{cx\}$, натянутое на этот вектор. Раз вектор собственный, подпространство является инвариантным, а тогда по свойству 6 ортогональное подпространство также является инвариантным подпространством. Но оно одномерно, поэтому, взяв в нем любой ненулевой вектор, получаем и второй собственный вектор. Первый вектор и вновь построенный имеют одинаковое собственное значение, поэтому все ненулевые векторы из рассматриваемой клетки являются собственными с одним и тем же собственным значением. Существование ортонормированного базиса следует теперь из пункта 9 и возможности ортогонализации базиса в случае клетки с нулевым дискриминантом.

15 лекция

У нас остались две лекции, и самое время начать подготовку к экзамену. Он будет проходить в формате тестов. Но окончательное решение об отметке я буду принимать на основании общения по вотсапу в режиме "глаза в глаза".

Выделим несколько тем, которые могут войти в этот тест.

1. Базисы, матрицы перехода, ранги, системы линейных уравнений, критерии совместности, определенности, неопределенности.

Сначала про обозначения. Мы привыкли обозначать базис русской буквой Б. Думаю, Вам будет не слишком сложно распознать его также в обозначениях

$$\text{Б} = [e_1\ e_2\ \dots e_n] = (e_1\ e_2\ \dots\ e_n) =< e_1\ \dots\ e_n >= (e) =< e > .$$

Повторите определения базиса, размерности, линейного пространства, а заодно линейной зависимости и независимости, полноты. Напоминаю, что матрица перехода строится из коэффициентов разложения нового базиса через старый базис, причем коэффициенты разложения пишутся ПО СТОЛБЦАМ.

Кстати, когда нам даны два базиса - "старый" и "новый", то здесь возможны такие варианты. Старый базис может обозначаться с помощью индекса 1, а новый с помощью индекса 2, тогда элементы разных базисов скорее всего будут обозначены разными буквами. Например, $\text{Б}_1 = [e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n]$, $\text{Б}_2 = [f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n]$. Вторая возможность такая: старый базис $\text{Б} = [e_1,\ \dots,\ e_n]$, новый базис $\text{Б}' = [e'_1,\ \dots,\ e'_n]$.

Вам может быть предложено несколько формул, из которых нужно выбрать одну или несколько верных. Если Вы выберите только одну формулу, а верных среди них две, Вам дадут половтну положенных баллов за эту задачу.

Например, ответы могут быть такими: $\text{Б} = \text{Б}'C$, $\text{Б} = \text{Б}'C^{-1}$, $\text{Б} = C\text{Б}'$, $\text{Б} = C^{-1}\text{Б}'$, $\text{Б} = \text{Б}'^{-1}C$, $\text{Б}' = \text{Б}C$, $C = \text{ББ}'$, $C = \text{ББ}'^T$ и так далее. В данном случае верны вторая и шестая формулы.Если Вы отметите только вторую или только шестую формулы, Вам условно дадут не два балла, а один балл. В то же время, если Вы наряду с верным ответом выделите и неверный ответ, Вам за задачу не дадут ни одного балла.

Конечно, возможные ответы могут быть записаны и в виде $(e'_1\ \dots e'_n) = (e_1\ \dots e_n)$, а также в виде

$$e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n; \ldots;\ e'_n = c_{1n}e_1 + \ldots + c_{nn}e_n.$$

Другой возможный вопрос может быть связан с использованием матрицы перехода для поиска координат вектора в новом базисе при условии, что известны координаты в старом базисе. Кстати, мой совет – не просто учить нужные формулы, а научиться их выводить. А если и не выводить, то проверять их с точки зрения здравого смысла. Например, если у вектора x в базисе $(e) = (e_1\ e_2\ \dots\ e_n)$ столбец координат равен $X = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)^T$, а в базисе $(e') = (e'_1\ e_2\ \dots\ e'_n)$ этот же вектор имеет столбец координат $X'(x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_n)^T$, то есть $x = x_1e_1 + \ldots x_ne_n = (e_1 \ldots e_n)(x_1 \ldots x_n) = \text{Б}X$; $x = \text{Б}'X'$, то вот возможный набор формул (часть из них верна, часть неверна):

$X = CX'$; $X = X'C$; $X = C^{-1}X'$; $X = X'C^{-1}$; $X' = CX$; $X' = XC$; $X' = C^{-1}X$; $X' = XC^{-1}$; $X = CX^{-1}$; $C = XX'$; $C = X^TX'$ и прочее, прочее. Можно ещё привлечь транспонирование матрицы C.

А ещё могут предложить выбрать правильную формулу в случае координатной формы записи, например

$$x_1 = c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \ldots + c_{1n}x'_n; \ldots;\ x_n = c_{n1}x'_1 + \ldots c_{nn}x'_n$$

Кому-то, я думаю, попадётся вопрос про ранг матрицы. В первую очередь, конечно, выбирайте ответ "наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы". Если кто-нибудь из Вас выберет ответ "наибольший ненулевой минор", то знайте: в гневе я страшен)).Кстати, если среди ответов есть и такой: "сколько среди столбцов линейно независимых" или "размерность линейной оболочки строчек", смело ставьте галочки, хоть это и не является определение ранга матрицы.

Да совсем забыл: если Вы повторите различные определения базиса линейного пространства, хуже точно не будет.

Про системы линейных уравнений говорить вообще не хочется: если Вы прошли через сдачу типового расчета, то эти вопросы не вызовут у Вас никаких затруднений. Главное – не забывайте, как связаны ранг матрицы, размерность пространства решений однородной системы и число неизвестных. А если Вас изысканно спрашивают "сколько буковок "с " будет в ответе", то смело связывайте это количество буковок "с" с размерностью пространства решений. И ещё: размерность пространства решений бывает только у однородной системы. Если же у Вас неоднородная система, то во-первых Вы должны быть уверены в совместности системы (Кронеккер с Капеллой, ау!), а количество буковок "с" в ответе совпадет с размерностью пространства решений, только пространства решений не самой системы, а соответствующей однородной системы. Итак, убеждаетесь, что ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, после чего забываете про столбец свободных членов и применяете формулу $\operatorname{rg} A + \dim L_0 = n$.

Последнее в первом пункте, чуть не забыл про это: если Вас спрашивают про неопределённую систему, то в первую очередь выбирайте ответ "больше одного решения", однако если там есть и ответ"бесконечно много решений", ставьте галочку и здесь: мы же помним, что система линейных уравнений не может иметь ровно два решения (или ровно три решения и т.д.): если есть два решения, то прямая, проходящая через эти решения, целиком входит в множество решений.

2. Фундаментальная система решений однородной системы.

Здесь все вопросы "ниже плинтуса". Главное – не забывайте, что множество решений однородной системы и фундаментальная система решений – не одно и то же (одно является базисом линейного пространства, а другое – линейным пространством с тем самым базисом).

Да, и не забывайте, что у неоднородной системы никакого ФСР быть не может, ФСР можно искать только у соответствующей однородной системы.

Если речь пойдет о системе, у которой столбец свободных членов содержит РОВНО ОДНО ненулевоке число, то знайте, что речь идёт про неоднородную систему, хотя в определении неоднородной системы говорится о том, что среди свободных членов должно быть ХОТЯ БЫ ОДНО ненулевое число. Это просто частный случай неоднородной системы.

Напоследок: однородная система всегда совместна, поскольку она всегда имеет нулевое решение.

3. Функция. Отображение. Оператор. Линейный оператор.

Трудный пункт. Не по сути трудный, а из-за того, что разные люди порой вкладывают разный смысл в один и тот же термин. Например, если открыть в википедии термир ФУНКЦИЯ, то увидим, что там не делается различия в терминах функция, отображение, оператор, преобразование (обратите внимание, слово линейный отсутствует). Все эти термины означают одно – есть два множества X и Y (возможно совпадающих), причем по какому-то правилу каждому элементу из X сопоставлен какой-то элемент из Y, причем только один.

Теперь что Вас ждёт на экзамене. Слово функция мы будем использовать в случае, когда она задана формулой, то есть аналитически. Например, функция $y = x^2$ задает отображение из множества $\mathbb{R}$ в множество $\mathbb{R}$ (можно считать, что эта функция задает отображение из $\mathbb{R}$ в $[0, +\infty)$, но математики формально считают, что это как-бы другая функция, то есть по их мнению функция – это не только закон, по которому мы сопоставляем каждому x значение этой функции на этом x, но и множества X и Y, на котором эта функция задана и из которого функция принимает значения). Вы можете на экзамене встретить термин ОДНОЗНАЧНАЯ функция. Не обращайте на термин "однозначная" никакого внимания. Формально этот термин означает, что каждому x из X сопоставлен единственный y из Y. Но, по крайней мере в википедии, однозначность вкладывается в сам термин функция, отображение и так далее. Правда, бывают многозначные функции, но когда они появляются, математики Вам об этом скажут заранее. Итак, термин "однозначная" Вы пропускаете мимо ушей.

А вот на термин ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ отображение множества X НА множество Y Вы должны реагировать правильно. Это уже означает, что не только каждый x переходит в единственный y (однозначное отображение), но и в каждый y какой-то x обязан перейти (помните термин сюръекция?), причем разные x переходят в разные y (инъекция). Иными словами, элементы множеств X и Y разбились на пары (x, y) "по интересам". Вы можете сказать, что привыкли использовать термин биекция – ну и используйте его, он дублирует термин взаимно однозначное отображение НА.

Теперь ВНИМАНИЕ! Мы на экзамене будем использовать термин ОПЕРАТОР (пока речи нет о том, что это линейный оператор – линейный оператор возникнет чуть позже), если отображение задано на множестве X, принимает значение также на X, причем X является линейным пространством. То есть если Вас спрашивают, является ли конкретное отображение оператором, то Вы должны проверить, является ли множество, на котором задано отображение, линейным пространством, а также проверить, что отображение не выводит за пределы X (в типовом расчете в задачах 5 и 6 Вам приходилось это делать, только там Вы проверяли ещё линейность, а здесь этого делать не нужно).

Далее Вам может встретиться термин ОБРАТИМОЕ отображение. Естественно, этот термин равносилен взаимной однозначности.

А если Вас спрашивают про линейный оператор, то мне нечего добавить к тому, что мы уже много раз обсуждали. Не забудьте только к требованию линейности добавить термин однозначности (так что когда я советовал Вам не обращать внимания на этот термин, то был не совсем прав: галочку напротив однозначности в этом вопросе конечно поставить надо).

4. Линейный оператор.

Этот раздел целиком посвящен проверке линейности оператора. Так что напрягите свои мозги и не забудьте наряду с проверкой линейности проверить и то, что мы не выходим за пределы линейного пространства, на котором этот оператор задан. Да, проверять, что оператор действует на линейном пространстве, не обязательно.

5. Матрица линейного оператора.

Здесь Вам не придется проверять, что оператор действует на линейном пространстве, Вам не придется проверять, что оператор линеен, Вам не придется придумывать базис – базис Вам будет предоставлен, причем Вы не обязаны проверять, что это базис. Задача у Вас одна – найти матрицу оператора в заданном базисе. Советую не менять предложенный Вам базис на другой. Скажем, если базис в пространстве P_n задан в порядке $(t^n \ t^{n-1} \ \dots \ t \ 1)$, не заменяйте его на $(1 \ t \ \dots \ t^n)$ – Вас не поймут.

6. Матрица перехода.

Здесь Вам придется искать матрицу перехода от одного данного базиса к другому, который тоже Вам дан. Задачи построены таким образом, что коэффициенты разложения векторов одного базиса по векторам второго очевидны.

7. Ранг матрицы.

Ни в чем себе не отказывайте при поиске ранга – ведь Вам всего лишь нужно найти число. Какие именно столбцы (или строки) линейно независимы в этой задаче никого не интересует. Не обязательно доводить упрощение до отдельных единичек по одной в строке и столбцу.Достаточно построить ступеньки и пересчитать их количество.

16 лекция

8. Ранг и дефект линейного оператора.

Искать ранг и дефект линейного оператора Вы научились, решая шестую задачу типового расчета. Правда, у кого-то эта задача оказалась слишком простой – я имею в виду, если определитель матрицы оператора отличен от нуля, у оператора есть обратный оператор, а тогда ядро оператора очевидно должно состоять только из нуля (а это означает, что дефект оператора равен нулю), а образ должен совпадать со всем пространством (это приводит к тому, что ранг оператора совпадает с размерностью пространства).

Итак, сначала Вам придется самостоятельно выбрать базис. Поскольку экзаменаторов интересует только ответ, не тратьте время на проверку базисности, если Вы в ней уверены. Далее ищете матрицу оператора в этом базисе (линейность оператора и то, что он не выводит за пределы пространства, не надо), можете сначала найти определитель полученной матрицы. Если он отличен от нуля, см. абзац выше. Если он равен нулю, ищете методом Гаусса ядро оператора, выбираете там базис, пересчитываете, сколько же в нем векторов, и полученное число объявляете дефектом. Это если Вам нужно найти дефект. А если речь идет о ранге, Вы ищете базис образа, работая со столбцами матрицы оператора.Впрочем, поскольку никто не интересуется простотой и красотой базиса образа, не стремитесь навадить марафет, а просто узнайте, сколько среди столбцов матрицы линейно независимых.

Ну а если у Вас есть голова на плечах и чуть-чуть здравого смысла, Вы поймете, что единственное, что Вам нужно сделать в этой задаче – найти ранг матрицы оператора. Ранг матрицы оператора совпадает с рангом самого оператора, дефект же ищется благодаря формуле $\operatorname{rg} A + \operatorname{def} A = \dim V$.

9 и 10. Собственные числа (они же значения) линейного оператора.

Базис берете по своему усмотрению, характеристическое уравнение не мне Вас учить как выписывать.
Напоминаю, что в двумерном случае характеристическое уравнение может быть записано в виде $\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda + \det A = 0$, в трехмерном – $\lambda^3 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda^2 + (M_{11} + M_{22} + V_{33}) \cdot \lambda - \det A = 0$.

Не забывайте в случае кратных корней искать ответ с кратными корнями)).

11. Собственный базис. Оператор простого типа.

Как Вы конечно помните, мы называем линейный оператор $\mathcal{A}$ оператором простого типа, если существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Мы знаем, что для любого действительного корня характеристического уравнения обязательно найдется собственный вектор с таким собственным значением, но для того, чтобы быть уверенным, что базис из собственных векторов существует, мы должны быть уверены, что ВСЕ корни характеристического уравнения действительны, причем их алгебраическая кратность совпадает с геометрической кратностью. Если же нам просто даны собственные значения с учетом их кратности, причем сумма кратностей совпадает с размерностью пространства, то гарантировать наличие собственного базиса мы можем только в случае, когда все собственные значения имеют кратность 1, и их число совпадает с размерностью пространства. Например, если сказано, что размерность пространства равно трем, а собственные значения равны $\lambda_1 = \pi$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ и $\lambda_3 = 2020$, то оператор является оператором простого типа, а если $\lambda_{1,2} = \pi$, $\lambda_3 = 2020$, то гарантировать мы это не можем, хотя никаких противопоказаний к этому нет.
Итак, если Вам нужно гарантировать, что оператор является оператором простого типа, смело выбирайте опцию *все собственные числа действительны и различны* или, что ближе к нашей терминологии, *все корни характеристического уравнения действительны и различны.*
Если же собственные значения кратные, смотрите, чтобы размерность соответствующего инвариантного подпространства совпадала с кратностью этого значения.

12. Билинейная форма, соответствующая ей квадратичная форма, построение матрицы квадратичной формы по билинейной форме. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса.

В типовом расчете Вам была дана сразу билинейнвя форма, построить её матрицу не вызывало затруднений. Главное было не забыть на местах (i, j) и $(j.i)$ при $i \neq j$ ставить половины коэффициента при произведении $x_i x_j$.

При этом можно вспомнить, что хотя обычно считается, что квадратичная форма порождена симметричной билинейной формой, но в принципе это не обязательно. Например, квадратичная форма $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$ порождена как симметричной билинейной формой $\mathcal{B}_1(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2$, так и бесконечным числом несимметричных билинейных форм, например, $\mathcal{B}_2(x,y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\mathcal{B}_3(x,y) = 2x_1y_1 - 6x_1y_2 + 3x_2y_2$ и так далее. Главное помнить, что для построения квадратичной формы нужно в билинейную форму вместо y подставить x. Во всех трех выписанных случаях получается один и тот же итог. Например, для второй билинейной формы мы получим $2x_1x_1 - 4x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_2x_2 = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_3^2$. Получив таким образом из билинейной формы, не обязательно симметричной, квадратичную форму, пишете матрицу квадратичной формы обычным образом.

А если Вам попадется задача найти матрицу билинейной формы в новом базисе, если эта билинейная форма задана в старом базисе (или в координатной форме, или матрицей), то тут у Вас уже точно не возникнет никаких проблем, поскольку формулу $B_2 = C^T B_1 C$ Вы вряд ли забудете в ближайшее время.

13. Положительная (отрицательная) определенность квадратичной формы.

Комментировать этот пункт совершенно излишне. Критерий Сильвестра Вы должны знать еще по первому семестру.

14. Евклидово пространство.

Работать с матрицей Грама Вы должны были научиться, решая седьмую задачу типового расчета. Так что найти длину вектора по известным его координатам и матрице Грама, или скалярное произведение двух векторов по их координатам и матрице Грама Вы несомненно сумеете.

15. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат.

Прошедшим испытание типовым расчетом эта задача не должна вызвать никаких затруднений, тем более, что теоретическое обоснование здесь Вам не потребуется. Вам всего лишь придется выбрать правильный ответ из нескольких предложенных. А если от Вас просто потребуется узнать, ортогональна ли та или иная матрица, сосчитать $A^T A$ каждый из Вас должен суметь, как и сравнить полученный результат с единичной матрицей.

17 лекция

Время лекций прошло, но нам есть еще о чем поговорить.
Приведу решение задач первого теста (по крайней мере тех, которые мне не скучно будет решать.

Итак, **Первый тест.**

№ 1 Пусть Б $= (e_1\ e_2\ e_3)$ и Б$' = (e_1'\ e_2'\ e_3)$ – два базиса трехмерного линейного пространства, C – матрица перехода от первого базиса ко второму. Выберите верные утверждения.

1) Б $=$ Б$'C$; 2) Б $=$ Б$'C^{-1}$; 3) Б $= C^{-1}$Б$'$; 4) Б$' =$ БC.

Сначала бракуем заведомо ложный ответ – это ответ 3. Эти матрицы в таком порядке в принципе перемножить нельзя – размеры не позволяют (первая имеет размеры 3×3, вторая – 1×3). Далее, вспоминаем, что матрицу перехода придумали, чтобы записать информацию о том, как новый базис выражается через старый. Такая формула единственная – 4), пишем ее в ответ. Но может быть есть и еще одна верная формула? Понимаем, что если выразить старый базис через новый, то потребуется не C, а обратная к ней формула. Поэтому из формул 1) и 2) выбираем 2).

Ответ: 2 и 4.

Заметьте, что мы даже не вдумывались в саму формулу. Вот почему я не люблю тесты))

№ 2 Ранг матрицы 4×5 равен... Выберите правильный ответ из $1,\ 2\,3,\ 4$

Неужели Вы всерьез думали, что я буду тратить свое время на такое бессмысленное занятие, как поиск ранга матрицы размером больше, чем 2×2? Надеюсь только, что никто не вздумал решать задачу с помощью поиска ненулевых миноров. Гаусс и только Гаусс! Как только привели матрицу к ступенчатому виду, пересчитывайте количество ступенек и переходите к следующей задаче.

№ 3 Дана линейная алгебраическая система. Выберите верные утверждения, связанные с этой системой.
1. Система будет однородной, если хотя бы один из ее свободных членов равен нулю.
2. Система будет однородной, если $n = m$ Система всегда имеет ненулевые решения.
3. Система будет однородной, если у нее есть тривиальное решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$.
4. Система будет однородной, если множество всех ее решений – линейное пространство.

1. Сначала полезно вспомнить определение однородной системы – это когда столбец свободных членов нулевой. Поэтому первое утверждение бракуем сразу.

2. Во втором утверждении вообще написана фигня. Такие утверждения бракуйте также. Кроме того, даже если попытаться вложить хоть какой-нибудь смысл во второе утверждение, то сразу понимаем, что однородная система не обязана быть квадратной. Кроме того, если расшифровать это утверждение таким образом, что если система однородна и квадратна, то она обязана иметь ненулевые решения, то это также не так, поскольку если определитель матрицы системы имеет ненулевой определитель, то решение будет единственным и поэтому нулевым (ведь однородная система всегда имеет нулевое решение). И в обратную сторону утверждение не проходит – ненулевые решения бывают как у однородных систем, так и неоднородных.

3. По поводу третьего утверждения стоит поразмышлять, и если мы к третьей задаче ещё не успели совсем устать, то сообразим, что если система имеет тривиальное решение, то конечно столбец свободных членов равен нулю – ведь $A0 = 0$. Кстати, если бы утверждение было построено в обратную сторону (если система однородна, то она имеет тривиальное решение),оно также было бы справедливо. Но вообще внимательно вдумывайтесь в утверждение, чтобы не перепутать “необходимые и достаточные условия”. Итак, 3) пишем в ответ.

4. Если множество решений является линейным пространством, то в частности нулевой элемент этого пространства, как его элемент , является одним из решений системы, а тогда по третьему пункту система однородна.

Ответ: 3 и 4.

№ 4 Дана линейная алгебраическая система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 + 2x_6 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases}.$$

Сколько постоянных содержит общее решение системы? Выберите верный ответ из $\{1\ 2\ 3\ 4\}$.

Обратите внимание, что от Вас не требуется решить эту систему. А также на то, что среди предложенных вариантов ответа отсутствует ноль. Вы на это можете возразить, что поскольку число неизвестных (5) больше числа уравнений (3), поэтому решения должны быть (число базисныхъ переменных, то есть число ступенек после применения метода Гаусса не больше числа уравнений, то есть не больше трех, поэтому свободных переменных, которые и поставляют нам постоянные в общем решении, не меньше 6-3=3 штук. Но не забывайте, что система в принципе может быть несовместной (по теореме Кронеккера-Капелли это бывает, когда ранг расширенной матрицы больлше ранга самой матрицы), а тогда, поскольку решений нет, нет и постоянных в ответе. Если бы среди олтветов присутствовал бы ноль, Вам бы пришлось почти до конца доводить метод Гаусса. А в предложенной ситуации Вам просто нужно найти ранг основной матрицы. Вычитая из n (то есть из 6) полученный ранг, Вы и получите требуемый ответ. Кстати, минор третьего порядка, расположенный в первых трех столбцах, отличен от нуля, поэтому ранг равен трем, и поэтому в ответе будут присутствовать 6-3=3 постоянные. Еще раз: не тратьте время на доведение решения до ответа. Кстати, раз ранг равен числу уравнений, то ранг расширенной матрицы не может быть больше ранга самой матрицы, поэтому совместность нам обеспечена.

Ответ: 3

№ 5 Функция $y = x^4$ осуществляет... Выберите верные ответы.
1. Взаимнооднозначное отображение множества $-\infty < x \leq 0$ на множество $y \geq 0$.
2. Взаимнооднозначное отображение множества $-\infty < x < +\infty$ на множество $y \geq 0$.
3. Взаимнооднозначное отображение множества $-2 \leq x \leq 2$ на множество $0 \leq y \leq 16$.
4. Взаимнооднозначное отображение множества $0 \leq x \leq 3$ на множество $0 \leq y \leq 81$.

Совсем простая задача для тех, кто знает, что такое взаимно однозначное отображение одного множества НА другое множество – разные элементы первого множества должны отображаться в разные элементы второго, и в каждый элемент второго должен перейти элемент первого (естественно, единственный). Ситуация упрощается, когда функция, задающая отображение, монотонна. Монотонность мы имеем в первом и четвертом случае. В общем, мне надоело толочь воду в ступе.

Ответ: 1 и 4

№ 6 Занятная ситуация. Шестой вопрос отсутствует. Можете смело требовать в такой ситуации дополнительный балл, только не вздумайте отвечать на этот (отсутствующий) вопрос.

Кстати, там предполагался такой вопрос.

Каким является отображение $\mathcal{A} : L$, где $L = \{f(x) = a + be^x + ce^{-x}\}$, $\mathcal{A}(f(x)) = e^x(f''(x) - f'(x))$? Выберите верный ответ:

1. линейный оператор; 2. оператор; 3. не является оператором

Когда встречается запись вида $\mathcal{A} : L$ без $\to$ ..., это означает, что авторы задания не хотят показывать Вам, куда оператор переводит элементы пространства L. Напомню, что отображение мы называем оператором (про линейность пока речь не идет), если $\mathcal{A} : L \to L$. В нашем случае первое впечатление такое, что мы выходим за пределы L, поскольку при умножении на e^x может получиться функция e^{2x}, которая не входит в L. Но это обманчивое впечатление. В самом деле, $\mathcal{A}(f(x)) = \mathcal{A}(a + be^x + ce^{-x}) = e^x((a + be^x + ce^{-x})'' - (a + be^x + ce^{-x})') = e^x((be^x + ce^{-x})) - (be^x - ce^{-x})) = 2c \in L$. Значит, это оператор. Причем очевидно линейный. А вот что писать в ответ – я не знаю. То ли только 1, то ли 1 и 2. Обычно если правильных вариантов ответа несколько (по секрету – больше двух не должно быть), то должно быть написано: выберите верные ответы. Если правильный вариант один – выберите верный ответ. Что делать в этой задаче, когда верных ответов два, а нужно написать верный ОТВЕТ, не знаю. Хотя догадываюсь, что предпочтительней первый вариант ответа.

Ответ: 1 (или 1 и 2?)

№ 7 Какое из приведенных ниже отображений из P_2 (ха, не сказано куда!) является линейным оператором? Выберите верный ответ.
1. $\mathcal{A}(p(t)) = t^2p'(t) + t^2$;
2. $\mathcal{A}(p(t)) = p(t) + 3t^2 + 2t + 4$;
3. $\mathcal{A}(p(t)) = 2tp'(t) + t^2p''(t)$

Первый не является линейным оператором по двум причинам: степень многочлена может превысить значение 2, то есть мы выходим за пределы P_2, а кроме того отображение не является линейным хотя бы по той причине, что нулевой многочлен перейдет в t^2, а не в ноль.

Во втором случае мы из P_2 не выходим, но линейности также нет, и по той же причине.

В третьем случае мы имеем стандартную задачу из типового расчета.

Ответ: 3

№ 8 Найти ранг линейного оператора $\mathcal{A} : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, $\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Выберите верный ответ из $\{1\ 2\ 3\ 4\}$.

Опять лень делать вычисления. Но задача будто списана из типового расчета, поэтому не должна вызвать затруднений. Там, правда, оператор задан на подпространстве пространства матриц, а здесь - на всем пространстве. Ищете матрицу оператора в каноническом базисе, после чего ищете её ранг. Не хотите искать ранг матрицы - ищите размерность ядра и вычитайте её из размерности всего пространства, то есть из четырех, хотя зачем действовать так странно?. При поиске ранга не забывайте, что Вас никто не просит в этой задаче искать образ оператора, а всего лишь ранг матрицы, то есть элементарные преобразования можно совершать как над столбцами, так и над строками.

Ответ: 2

№ 9 Найдите дефект линейного оператора $\mathcal{A} : L \to L$, где $L = \{ae^x + be^{-x} + ce^{2x} + de^{-2x}$, $\mathcal{A}(f(x)) = f''(x) - 4f(x)$. Выберите верный ответ из $\{1\ 2\ 3\ 4\}$.

Конечно, неплохо бы найти размерность и базис этого пространства, но времени даётся мало, поэтому скорее всего лучше понадеяться на свою интуицию и посчитать известным, что Б $= [e^x\ e^{-x}\ e^{2x}\ e^{-2x}]$ является базисом (но я не могу гарантировать, что на экзамене Вам не подложат свинью, предложив в качестве линейного пространства линейную оболочку, скажем, функций $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ и 1. Вас не спрашивают, линеен ли этот оператор, не выводит ли он из этого пространства. Составляете матрицу оператора, а затем по своему усмотрению - или ищете ядро, чтобы найти его размерность, или ищете ранг матрицы, чтобы найти дефект как разность между размерностью пространства, в данном случае 4, и рангом матрицы (он же ранг оператора, он же размерность образа).

Ответ: 2

№ 10 Укажите положительно определенную квадратичную форму из приведенных ниже.
1. $k(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$; 2.$k(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$; 3.$k(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$.

Во всех вариантах ответа коэффициенты при квадратах положительны, поэтому отбраковать заведомо лишние сразу не удается. Далее можете или переходить к матрице квадратичной формы (не забывайте по побочной диагонали писать по половинке коэффициента при x_1x_2) и применять критерий Сильвестра, или выделять полный квадрат – и то, и то требует минимума времени. А можете устно прикидывать знак выражения $b^2 - 4ac$ (узнаете его?). Если получили плюс, положительной определенности нет, если получили минус, пишите соответствующий номер в ответ.

Кстати, внимательно следите за формулировкой вопроса. Если требуется указать положительно определенную формУ, значит, найдя одну, можно не искать другие – скорее всего их там нет, а если и есть, Вы с легкостью отсудите балл.

Ответ: 2

№ 11 Найдите индексы инерции квадратичной формы, соответствующей билинейной форме $f(x,y) = 2x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$. Выберите верный ответ.

Переходим к квадратичной форме $q(x) = k(x,x) = 2x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1x_2 + 3x_2^2$. Переходим к каноническому виду, выделяя полный квадрат: $q(x) = 3(x_2^2 + 2x_2(\frac{1}{6}x_1) + \frac{1}{36}x_1^2) - \frac{1}{12}x_1^2 = 3(x_2 + \frac{1}{6}x_1)^2 - \frac{1}{12}x_1^2$.

Видим один положительный коэффициент, один отрицательный и ни одного нулевого. Поэтому $i_+ = 1,\ i_- = 1;\ i_0 = 0$. Про i_0 мы раньше никогда не говорили, но Вы сами, конечно, сообразили, что это такое. Если самоизоляция плохо сказалась на... ладно, не будем уточнять, напишу, что i_0 Вы всегда сможете найти, вычитая из размерности пространства положительный и отрицательный индексы инерции. Кстати, в условии эта размерность не указана, поэтому вполне возможно эта размерность равна не 2, а 3 или больше, просто коэффициенты у соответствующих слагаемых равны нулю. Но поскольку нам предлагаются варианты ответа, надо именно из них выбирать подходящий.

Ответ: 1

№ 12

Матрица Грама G и координаты векторов x и y в базисе Б $= [e_1\ e_2\ e_3]$ трехмерного евклидова пространства равны

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};\ x = (1,-1,-1),\ y = (0,-2,1).$$

Найдите скалярное произведение (x,y). Выберите верный ответ.

Чтобы не ошибиться в формуле, заметим, что нам векторы заданы строчками координат. Мы же привыкли выписывать столбцы X и Y координат, а потом при необходимости укладывать с помощью транспонирования. Производить здесь вычисления нет необходимости, напомню только формулу $(x,y) = X^TGY$.

Ответ: 2

№ 13 Какую кривую 2-го порядка на плоскости Ox_1x_2 определяет уравнение $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 = 3$? Выберите верный ответ из приведенных:

1. эллипс; 2. вырожденный эллипс; 3. гипербола; 4. пара прямых

Мы на наших занятиях кривые второго порядка не изучали, но как и на первом экзамене, не против вопросов на эту тему. При эллипс и гиперболу все и так знают, а вот про вырожденные случаи поговорить стоит. Вырожденный эллипс, или иначе точка (эллипс с нулевыми полуосями) в канонической системе координат имеет уравнение $x^2 + y^2 = 0$ (в принципе у слагаемых в левой части могут быть любые положительные коэффициенты). Вырожденная гипербола, а по сути – пара пересекающихся прямых, в канонической системе координат имеет уравнение $x^2 - y^2 = 0$ (возможны положительные коэффициенты). Кстати, если мы имеем пару параллельных прямых (возможно, совпавших), то говорят про вырожденную параболу. Всю классификацию, как мы слышали, можно провести с помощью вычисления трех так называемых инвариантов – один след и два определителя. Но я думаю, что мы справимся "домашними" средствами.

Выделяя полный квадрат, получаем $2(x_1^2 + 2x_1(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_2^2) + \frac{7}{4}x_2^2 = 3$; $2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{7}{4}x_2^2 = 3$ Не утруждая себя заменой и приведением к идеальному уравнению, уже видим, что это уравнение эллипса. Если не было бы трех справа, мы получили бы вырожденный эллипс.

Ответ: 1

№ 14. Найдите собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Выберите правильный ответ.

Обратив внимание на нули в нижней строчке, понимаем, что характеристический многочлен распадается в произведение $(\lambda - 2)$ и определителя $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$. Он нам дает $\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda - 4)(\lambda - 6)$. Поэтому собственные значения равны $2,\ 4,\ 6$.

Ответ: 1

№ 15. Какой является квадратичная форма, соответствующая билинейной форме $f = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$? Выберите верный ответ из предложенных:

1. Знакоопределенной; 2. знакопостоянной; знакопеременной

Терминология здесь такая: Положительно (отрицательно) определенные формы - если $q(x) > 0$ (соответственно $q(x) < 0$) при $x \neq 0$. Положительно и отрицательно определенные формы вместе дают класс знакоопределенных форм. Знакопеременная форма – если она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Менее популярным термином является термин знакопостоянная форма (чаще его используют в комбинации со словом функция) – если она или знакоположительная (то есть $q(x) \geq 0$) или знакоотрицательна (то есть $q(x) \leq 0$).

$q(x) = f(x, x) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2$. Критерий Сильвестра или выделение полных квадратов говорит о том, что эта форма положительно определена, значит, является знакоопределенной. Но знакоопределенная является и знакопостоянной! Так что можно написать и 1-й, и 2-й варианты ответа. Но требуется выбрать ответ, а не ответы, поэтому берем более точный ответ.

Ответ: 1

18 лекция

Тест 2

1. Опять про переход от базиса к базису. Ответы 3 и 4.

2. Про системы. Ответы 2 и 4.

3. Определение ранга матрицы. Ответ 3.

4. Вычисление ранга матрицы. Не собираюсь проверять ответ, но официально он 3.

5. Про теорему Кронеккера-Капелли, которая дает КРИТЕРИЙ совместности системы. Первый ответ дает утверждение в одну сторону, поэтому не годится. Правильный ответ 3.

6. Ответ 3. Система совместна, поскольку ранги совпадают, а число произвольных постоянных совпадает с числом свободных переменных, то есть с размерностью соответствующей однородной системы, которая равна число неизвестных минус ранг матрицы.

7. Про взаимную однозначность. Ответы 2 и 3.

8. Про оператор, но требования линейности нет. Поэтому проверяем только, не выходим ли мы за пределы пространства. Ответы 1 и 4.

9. Про линейные операторы. трудная задача, поскольку непривычные обозначения. Более того, пространство обозначается как $M_{2\times 1}$, что по всем канонам означает матрицы с двумя строками и одним столбцом, а здесь дальше рисуется строчка. Мы привыкли, что X является обозначением СТОЛБЦА координат, а здесь X – это строчка. Проверяйте не только то, что мы не выходим за пределы пространства, но и линейность. Кстати, не во всех случаях операцию вообще можно произвести. В первом случае результатом является число, а не строка, поэтому это не оператор. Во втором случае (который позиционируется как правильный) мы вообще не можем произвести операцию. Третий случай правильный. А в четвертом нельзя произвести операцию. Ответ 3 (а официально 2 и 3).

10. Поиск ранга оператора. Ищете базис, выписываете матрицу оператора, после чего или ищете ее ранг, или дефект (во втором случае из размерности просранства вычитаете найденный дефект). Ответ (который я не проверял) 3.

11. Нужно от билинейной формы перейти к квадратичной, подставив вместо игреков иксы. Часть слагаемых уничтожится. получим коэффициенты 3, 1, 0 в первой строке, 1, -3, 0 во второй и 0 ,0, 0 в третей. Получаем три плюса, один минус и 5 нулей. Ответ 2. Задача не вполне корректна, поскольку не сказано, какая размерность прлостранства, на котором задана форма. Но из набора вариантов ответов следует, что размерность равна 3.

12. Выбор возможных матриц Грама сводится к визуальной проверке симметричности (бракуется первая матрица) и проверке положительной определенности (скорее всего по критерию Сильвестра). Проверять неохота. Ответ 3 и 4.

13. Придется немного поработать и выделить полные квадраты в квадратичной форме для нахождения индексов Ответ 1.

14. Требуется указать верную формулу для длины вектора. Таковую найти невозможно по причине ее отсутствия. Официально значится как вторая. Думаю, что в такой ситуации на экзамене лучше вообще воздержаться от выбора ответа.

15. Нахождение косинуса угла по формуле “скалярное произведение поделить на произведение длин”. Проверять неохота.Ответ 1. При чем тут еще кривая второго порядка, никто не знает, но в принципе это пара параллельных прямых $x_1 - x_2 = \pm 2$.

Напоследок на всякий случай разберу один частный случай квадратичной формы, которую к каноническому виду приводят особым образом. Я имею в виду тот случай, когда отсутствуют все квадраты. Например, квадратичная форма $q(x) = x_1x_3$ в трехмерном пространстве. Для получения этих квадратов делают замену $x_1 = y_1 + y_3$; $x_2 = y_2$; $x_3 = y_1 - y_3$ (иными словами, переходят к новому базису с помощью матрицы перехода, составленной из коэффициентов этих разложений:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем сразу канонический вид

$$q(x) = y_1^2 - y_3^2.$$