Раздел 6. Дифференцирование нелинейных отображений

Лекция 13 Нелинейные отображения ЛНП.

Отображение $F : X \to Y$, где X и Y – ЛНП.
Непрерывность отображения (по Коши) в точке $x^* \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in S_\delta(x^*) : F(x) \in S_\varepsilon(F(x^*)) \,.$$

Частный случай: нелинейный функционал $\Phi : X \to \mathbb{R}$.
Различные виды дифференцируемости. Первая идея: воспользоваться наработками, которые есть для абстрактных функций.

Рассмотрим гладкую абстрактную функцию $x(t)$ со значениями в X, $x(0) = x^*$. Образ – кривая в X, выходящая из точки x^*.

Рассмотрим теперь абстрактную функцию $y(t) = F(x(t))$ со значениями в Y. Образ этой функции – это кривая в Y, образ первой кривой при отображении F.

Одностороння производная $\dot{y}(+0)$ – производная F в точке x^* вдоль кривой (если существует). Определяется не только кривой, но и параметризацией, при переходе к другой параметризации приобретает дополнительный числовой множитель.

Вдоль одних кривых производная может существовать, а вдоль других – нет.

Линейность: если есть два отображения, и каждое из них дифференцируемо в точке x^* вдоль заданной кривой, то их линейная комбинация также дифференцируема в точке x^* вдоль этой кривой, и производная линейной комбинации равна линейной комбинации производных.

Частный случай: вместо кривой прямая. $h \in X$ – вектор (разумеется, в роли вектора может быть, например, функция – элемент X). Абстрактная функция: $x(t) = x^* + th$, тогда $y(t) = F(x^* + th)$. Одностороння производная $\dot{y}(+0)$ – производная отображения F в точке x^* вдоль вектора h:

$$\frac{\partial F(x^*)}{\partial h} = \lim_{t \to +0} \frac{F(x^* + th) - F(x^*)}{t} \,.$$

Вдоль одних векторов производная может существовать, а вдоль других – нет.

Вариация отображения по направлению.

Если вектор h^0, вдоль которого ведчтся дифференцирование, единичной длины, то производную вдоль такого вектора называют производной вдоль направления h^0 или вариацией по направлению h^0:

$$\operatorname{Var} F(x^*, h^0) = \lim_{t \to +0} \frac{F(x^* + th^0) - F(x^*)}{t} \,.$$

Связь производной вдоль вектора и вариации по его направлению: если $h^0 = h/\|h\|$, то $h = \|h\| \cdot h^0$, и

$$\frac{\partial F(x^*)}{\partial h} = \lim_{t\to+0} \frac{F(x^*+th)-F(x^*)}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{F(x^*+t\|h\|\cdot h^0)-F(x^*)}{t\|h\|}\|h\| =$$

$$= \|h\| \lim_{\hat{t}\to+0} \frac{F(x^*+\hat{t}h^0)-F(x^*)}{\hat{t}} = \|h\| \operatorname{Var} F(x^*, h^0)$$

(при вычислениях выполнена замена $\hat{t} = t\|h\|$).

Пример: $\Phi(x) = \|x\|$, $x^* = O$,

$$\operatorname{Var}\Phi(O, h^0) = \lim_{t\to+0} \frac{\Phi(O+th^0)-\Phi(O)}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{\|th^0\|}{t} = 1\,.$$

Пример: $X = E^2$, $\Phi(x) = \rho\phi(\varphi)$, где (ρ, φ) – полярные координаты, ϕ – некоторая функция. В начале координат направление определяется углом φ,

$$\operatorname{Var}\Phi(O, \varphi) = \phi(\varphi)$$

(доказать!)

Замечание: график такого функционала (т.е. функции двух переменных) – коническая поверхность в $\mathbb{R}^3$, образующие которой – наклонные (не вертикальные) лучи, выходящие из начала координат.

Дифференциал и производная Гато.

Если для любого $h \in X$ существует производная

$$\left.\frac{d}{dt}F(x^*+th)\right|_{t=0},$$

то она называется дифференциалом Гато (или слабым дифференциалом) отображения F в точке x^*, а само отображение F дифференцируемо по Гато в этой точке.

Дифференцируемость по Гато влеччт дифференцируемость вдоль произвольного вектора, поскольку из существования обычной производной следует и существование односторонней:

$$\frac{\partial F(x^*)}{\partial h} = \left.\frac{d}{dt}F(x^*+th)\right|_{t=0},$$

т.е. производная вдоль вектора – это значение дифференциала Гато на этом векторе. В частности, дифференцируемое по Гато отображение имеет вариации по всем направлениям:

$$\operatorname{Var} F(x^*, h^0) = \left.\frac{d}{dt}F(x^*+th^0)\right|_{t=0}.$$

Дополнительно: производные вдоль противоположных векторов и вариации вдоль противоположных направлений отличаются знаком:

$$\frac{\partial F(x^*)}{\partial(-h)} = \lim_{t\to+0} \frac{F(x^* - th) - F(x^*)}{t} =$$

$$= -\lim_{\hat{t}\to-0} \frac{F(x^* + \hat{t}h) - F(x^*)}{\hat{t}} = -\left.\frac{d}{dt}F(x^* + th)\right|_{t=0} = -\frac{\partial F(x^*)}{\partial h}$$

(сделана замена $\hat{t} = -t$). Соответственно,

$$\operatorname{Var} F(x^*, -h^0) = \lim_{t\to+0} \frac{F(x^* - th^0) - F(x^*)}{t} =$$

$$= -\lim_{\hat{t}\to-0} \frac{F(x^* + \hat{t}h^0) - F(x^*)}{\hat{t}} = -\left.\frac{d}{dt}F(x^* + th^0)\right|_{t=0} = -\operatorname{Var} F(x^*, h^0)\,.$$

Обратно, если у отображения есть в заданной точке вариации во всех направлениях, и при этом вариации в противоположных направлениях отличаются знаком, то отображение дифференцируемо по Гато в этой точке.

Пример: функционал $\Phi(x) = \|x\|$ в точке $x^* = O$ не дифференцируем по Гато.

Пример: $X = E^2$, функционал $\Phi(x) = \rho\phi(\varphi)$ дифференцируем по Гато в начале координат, если $\forall\varphi : \phi(\varphi + \pi) = -\phi(\varphi)$ (доказать!)

Замечание: график такого функционала (т.е. функции двух переменных) – коническая поверхность в $\mathbb{R}^3$, образующие которой – наклонные прямые, проходящие через начало координат.

Если дифференциал Гато линеен относительно h, т.е.

$$\left.\frac{d}{dt}F(x^* + th)\right|_{t=0} = A(x^*)h\,,$$

то линейный ограниченный оператор $A(x^*)$ называется производной Гато отображения F в точке x^*.

Пример: $X = E^2$, функционал $\Phi(x) = \rho\phi(\varphi)$ имеет производную Гато в начале координат, если $\phi(\varphi + \pi) = a\cos\varphi + b\sin\varphi$ где a и b – некоторые постоянные (доказать!)

Замечание: график такого функционала (т.е. функции двух переменных) – наклонная плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через начало координат.

Важное обстоятельство: наличие дифференциала или даже производной Гато в заданной точке не гарантирует даже непрерывности.

Пример. Функция, равная единице на выколотой окружности (без одной точки) и равная нулю во всех остальных точках плоскости (включая выколотую, которую возьмчм за x^*). В точке x^* отображение дифференцируемо по Гато, вариации во всех направлениях равны нулю, производная – нулевой оператор (проверить!), при этом в этой точке отображение не является непрерывным: любая окрестность x^* содержит другие точки окружности, в которых значения функции равно единице (а в x^* – нулю).

Замечание. Из дифференцируемости по Гато также не следует существование производной вдоль произвольной кривой. В частности, для рассмотренной выше функции не существует производной вдоль окружности в выколотой точке.

Дифференциал и производная Фреше.

Отображение F называется сильно дифференцируемым (дифференцируемым по Фреше) в точке $x^* \in X$, если существует линейный ограниченный оператор $A(x^*)$, такой, что:

$$F(x^* + h) - F(x^*) = A(x^*)h + \omega(x^*, h)\,,$$

где $\omega(x^*, h) = o(\|h\|)$, т.е.

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(x^*, h)\|}{\|h\|} = 0\,.$$

(Замечание. Очевидно, $\omega(x^*, O_X) = O_Y$.)

То есть стандартное определение: из приращения выделяется главная линейная часть (главная, если оператор $A(x^*)$ ненулевой). Дополнительное требование – ограниченность.

Элемент $A(x^*)h$ – диференциал Фреше (сильный дифференциал), оператор $A(x^*)$ – производная Фреше отображения F в точке x^*.

Обозначения: $A(x^*) = F'(x^*)$, $A(x^*)h = F'(x^*)h = dF(x^*, h)$.

Утверждение: отображение, дифференцируемое по Фреше в точке x^*, непрерывно в этой точке (как сумма непрерывных отображений – доказать).

Утверждение: отображение, дифференцируемое по Фреше в точке x^*, дифференцируемо по Гато в этой точке, при этом дифференциал и производная Гато совпадают с дифференциалом и производной Фреше соответственно.

Доказательство: если отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^*, то

$$\frac{d}{dt}F(x^* + th)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F(x^*) + A(x^*)th + \omega(x^*, th))\Big|_{t=0} =$$

$$= A(x^*)h + \frac{d\omega(x^*, th)}{dt}\Big|_{t=0}\,,$$

$$\left\|\frac{d\omega(x^*, th)}{dt}\right\|_{t=0} = \left\|\lim_{t\to 0}\frac{\omega(x^*, th)}{t}\right\| = \|h\| \lim_{t\to 0}\frac{\|\omega(x^*, th)\|}{|t|\cdot\|h\|} =$$

$$= \|h\| \lim_{\|\hat{h}\|\to 0}\frac{\left\|\omega(x^*, \hat{h})\right\|}{\|\hat{h}\|} = 0\,,$$

$$\frac{d}{dt}F(x^* + th)\Big|_{t=0} = A(x^*)h$$

(сделана замена $\hat{h} = th$).

Существование производной вдоль кривой.
Пусть $x(t)$ – гладкая абстрактная функция, $x(0) = x^*$, $y(t) = F(x(t))$.

$$\dot{y}(+0) = \left.\frac{dF(x(t))}{dt}\right|_{t=+0} = \lim_{t\to+0} \frac{F(x(t)) - F(x^*)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}(F'(x^*)(x(t) - x^*) + \omega(x^*, x(t) - x^*)) =$$
$$= F'(x^*) \lim_{t\to+0} \frac{x(t) - x^*}{t} + \lim_{t\to+0} \frac{\omega(x^*, x(t) - x^*)}{\|x(t) - x^*\|} \cdot \frac{\|x(t) - x^*\|}{t} =$$
$$= F'(x^*)\dot{x}(+0) + \lim_{t\to+0} \frac{\omega(x^*, x(t) - x^*)}{\|x(t) - x^*\|} \cdot \|\dot{x}(+0)\| = F'(x^*)\dot{x}(+0)\,,$$

поскольку $\|x(t) - x^*\| \to 0$ при $t \to +0$.

Почему дифференцируемость по Фреше – более сильное свойство? Есть равномерность по направлениям. В дифференциале Гато для каждого направления может быть своя окрестность нуля, для которой отношение приращений становится близко к пределу. Для дифференцируемости по Фреше нужно, чтобы для всех направлений нашлась одна и та же окрестность (для нормированных h^0).