Теория вероятностей и математическая статистика Часть 1

Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

Направление подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профили подготовки

«Математическое моделирование и вычислительная математика»
«Системное программирование и компьютерные технологии»

Формируемые компетенции:

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований;
- знание принципов решения вероятностных задач с использованием стандартных программных средств;
- владение навыками построения стохастических моделей для исследования случайных явлений.

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия теории вероятностей

Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие – результат (исход) некоторого испытания (эксперимента, наблюдения), который может осуществиться или не осуществиться.

Элементарное событие (элементарный исход) нельзя разделить на события, которые могут осуществиться.

Пространство элементарных событий Ω – множество всех элементарных событий (исходов).

Каждое элементарное событие (исход) ω – элемент Ω, $\omega \in \Omega$.

Каждое событие A – подмножество Ω, $A \subseteq \Omega$. Событие A произошло, когда осуществился некоторый элементарный исход ω, который входит в A, $\omega \in A$.

Ω также называют достоверным событием.

Невозможное событие $\varnothing$ не содержит в себе ни одного элементарного события.

Операции над событиями

Противоположное событие

$$\overline{A}=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\notin A\right\}$$

Произведение событий

$$AB=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\in A \;\text{и}\; \omega\in B\right\}$$

Сумма событий

$$A+B=\left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, \omega\in A \;\text{или}\; \omega\in B\right\}$$

Разность событий

$$A-B=A\cdot\overline{B}$$

Симметрическая разность событий

$$A\Delta B=\left(A\setminus B\right)+\left(B\setminus A\right)=A+B-AB$$

Сравнение терминов теории вероятностей и теории множеств

Теория множеств	*Теория вероятностей*
1. Ω – множество	1. Ω – достоверное событие
2. $\omega \in \Omega$ – элементы	2. $\omega \in \Omega$ – элементарные исходы
3. $A \subseteq \Omega$ – подмножество	3. $A \subseteq \Omega$ – событие
4. $\overline{A}$ – дополнение	4. $\overline{A}$ – противоположное событие
5. $A \cap B$ – пересечение	5. AB – произведение событий
6. $A \cup B$ – объединение	6. $A+B$ – сумма событий
7. $\varnothing$ – пустое множество	7. $\varnothing$ – невозможное событие
8. $A \cap B = \varnothing \;\Rightarrow\; A$ *и* B – непересекающиеся множества	8. $AB = \varnothing \;\Rightarrow\; A$ *и* B – несовместные события

Свойства операций над событиями

Ассоциативность

$(A+B)+C=A+(B+C)$ – **ассоциативность сложения**

$(AB)C=A(BC)$ – **ассоциативность умножения**

Коммутативность

$A+B=B+A$ – **коммутативность сложения**

$AB=BA$ – **коммутативность умножения**

Закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}}=A$

Дистрибутивность

а) умножения по отношению к сложению

$A(B+C)=AB+AC$

б) сложения по отношению к умножению

$A+BC=(A+B)(A+C)$

Законы де Моргана $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

Вероятностное пространство

Множество событий $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

3) $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Отображение $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \boldsymbol{R}$ **называется вероятностью, если**

1) для любого $A \in \mathcal{A}$ $\quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ **и** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

2) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $\quad A_i A_j = \varnothing$ $(i \ne j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ **называется вероятностным пространством.**

Основные свойства вероятности

1. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$
2. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$
3. $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\leq P(B)$
4. $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$
5. $\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-$

$-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC)$

Примеры вероятностных пространств

1. $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,\ldots,6\}$ **– множество всех элементарных событий при бросании двух игральных костей;**

$\mathcal{A}=M(\Omega)$ **– множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=(i,j)\Rightarrow \mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{36}$; $\mathrm{P}(A)=\frac{|A|}{36}$, $|A|$ **– число элементов в** A**.**

2. $\Omega=\{1,2,\ldots\}$; $\mathcal{A}=M(\Omega)$ **– множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=i\Rightarrow$ $\mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{2^i}$; $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{\omega\in A}^{\infty}\mathrm{P}(\{\omega\})$.

3. $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ **– квадрат;**

$\mathcal{A}=\mathscr{B}(\Omega)$ **– множество борелевских подмножеств** Ω**;**

$A\in\mathcal{A}\Rightarrow \mathrm{P}(A)=S_A$ **– площадь** A**.**