Лекция №8.
Устойчивость. Асимптотическая устойчивость.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,x_1,\ldots,x_n), \qquad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

имеет при $t \in [t_0, +\infty)$ решения $x_i = \varphi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_i(t_0) = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Определение

Решение $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ дифференциальной задачи (1), (2) называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x = x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ этой же задачи, удовлетворяющего неравенству

$$\|x(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon), \tag{3}$$

для $\forall t > t_0$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Это означает, что близкие в начальный момент времени t_0 траектории $x(t)$ и $\varphi(t)$ остаются близкими $\forall t > t_0$.

Определение

Если $\exists \varepsilon > 0$ т.ч. $\forall \delta > 0 \, \exists t > t_0$ т.ч. из неравенства (3) не следует (4), то решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым в смысле Ляпунова.

Определение

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \varphi(t)\| = 0, \tag{5}$$

то оно называется асимптотически устойчивым.

Приведение исследования устойчивости любого решения к исследованию устойчивости нулевого решения.

Замена $x = y + \varphi(t)$ делает равносильным исследование устойчивости решения $x = \varphi(t)$ и исследование устойчивости нулевого решения $y = 0$.

Замечание

Из теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей следует, что если $f(t,x)$ -непрерывна по (t,x) и удовлетворяет условию Липшица по x, то факт устойчивости или неустойчивости не зависит от выбора начального момента t_0.

Условие устойчивости линейной системы.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{6}$$

$A(t)$ – непрерывно зависящая от t матрица. Будем исследовать устойчивость нулевого решения $x(t) \equiv 0$.
Было, что любое решение $x(t) = X(t)x^0$, где $X(t)$ – фундаментальная матрица системы такая, что $X(0) = E$.

Теорема

Для системы (6)
– нулевое решение устойчиво $\Leftrightarrow$ *каждое решение ограничено при* $0 \leqslant t < \infty$ *и*
– нулевое решение асимптототически устойчиво $\Leftrightarrow$ *каждое решение стремится к нулю при* $t \to \infty$.

Доказательство.

Предположим, что каждое решение ограничено $\Rightarrow$ $\|X(t)\| \leqslant m$. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{m}$, тогда для любого решения $x(t)$ с начальными условиями $|x(0)| < \delta$ получим $|x(t)| \leqslant \|X(t)\|\,|x(0)| \leqslant m\delta = \varepsilon$.
В обратную сторону: Пусть нулевое решение устойчиво т.е. из оценки $|x(0)| < \delta$ следует $|x(t)| < \varepsilon$. Система линейная однородная и следовательно если $|x(0)| \leqslant 2$, то $|x(t)| < \frac{2\varepsilon}{\delta} = k$. Рассмотрим решения входящие в фундаментальную матрицу. Начальные условия для каждого i – го столбца $|x^i(0)| = 1$ и

$$\Rightarrow \quad |x^i(t)| < k, \quad 0 \leqslant t < \infty, \quad \Rightarrow \quad \|X(t)\| \leqslant kn.$$

Пусть теперь каждое решение стремится к нулю при $t \to \infty$.
Следовательно $|x(t)| < 1$ при $t > t_1$, а от t_0 до t_1 $|x(t)| < m$
$\Rightarrow \quad |x(t)| < \max\{1{,}m\}$ на $(t_0{,}\infty)$. Тогда по доказанному нулевое решение устойчиво и следовательно асимптотически устойчиво.
В обратную сторону: Пусть нулевое решение асимптотически устойчиво. Следовательно все решения с $|x(0)| < \delta$ стремятся к нулю. Пусть $x(t)$ – любое решение. Возьмем константу $k = \frac{\delta}{2|x(0)|}$, $kx(t)$ – тоже решение.
$|kx(0)| < \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow \quad kx(t) \to 0, \Rightarrow \quad x(t) \to 0.$ □

Следствие

Нулевое решение линейной однородной системы неустойчиво тогда и только тогда, когда система имеет неограниченное при $t \to \infty$ решение.

Следствие

Если нулевое решение устойчиво, то и любое решение устойчиво.

Рассмотрим неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad A(t), f(t) \text{ – непрерывны.}$$

Так как разность 2-х решений неоднородной системы это решение однородной системы то, решение неоднородной системы устойчиво $\Leftrightarrow$ устойчиво нулевое решение однородной системы.

Устойчивость нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^{n}. \tag{7}$$

Теорема

Нулевое решение системы (7)
1) асимптотически устойчиво $\Leftrightarrow$ *все* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$,
2) устойчиво $\Leftrightarrow$ *все* $\operatorname{Re}\lambda_j \leqslant 0$ *и для тех* λ_j *у которых* $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ *все жардановы клетки размера 1.*
3) не устойчиво $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \textit{или } \exists \operatorname{Re}\lambda_j > 0, \\ \textit{или } \exists \lambda_j \textit{ у которой } \operatorname{Re}\lambda_j = 0 \textit{ и жорданова клетка размера 1.} \end{cases}$$

Замечание

Как узнать размер жордановых клеток не находя жорданову форму матрицы? $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, *все жордановы клетки размера 1* $\Leftrightarrow$
$\operatorname{rang}(A - \lambda_j E) = n - k_j$, *где* k_j *– кратность корня* λ_j.

Условие отрицательности всех действительных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad a_0 > 0, \tag{8}$$

с вещественными коэффициентами.
Необходимыми условиями отрицательности всех действительных частей корней уравнения (8) являются неравенства $a_i > 0$, $i = \overline{0,n}$.
Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

[на диагонали $a_1,\ldots,a_n$ направо уменьшаем индексы, а налево увеличиваем индексы, остальные нули] называется матрицей Гурвица.
Критерий: Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots$$