Семинары по дискретной математике

Содержание

1 Автоморфизмы графа. Планарные графы. Поток на графе

1.1 Автоморфизм графа

Определение 1. ***Граф*** *- это множество точек V и множество ориентированных рёбер $\overrightarrow{E}$, на которых заданы отображения $S : \overrightarrow{E} \to V$ и $t : \overrightarrow{E} \to V$ такие, что $t(e) = v \Rightarrow \phi(t(e)) = \phi(v)$.*

Пояснение. *Вот, что такое отображения выше:*

- $S : \overrightarrow{E} \to V$ *- функция, возвращающая начало ребра*
- $t : \overrightarrow{E} \to V$ *- функция, возвращающая конец ребра*
- *Последние условие на отображения говорит нам о сохранении структуры графа*

Определение 2. ***Изоморфизм графов*** *- это биективное отображение графа G на граф H с сохранением структуры.*

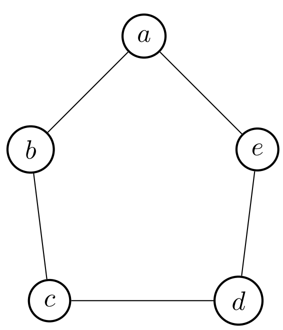
Пояснение. *Пусть G, H - графы, тогда биективные отображения*

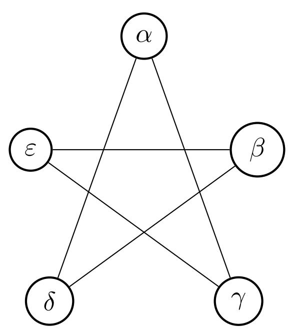
$$\phi : V_G \to V_H$$

$$\psi : \overrightarrow{E}_G \to \overrightarrow{E}_H$$

задающие биекции, с сохранением структуры, задают изоморфизм.

Пример: даны графы G, H соответственно



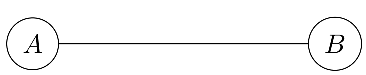


$\phi : V_G \to V_H$ - биективное отображение, тогда:

$$\phi(a) = \alpha,$$
$$\phi(b) = \gamma,$$
$$\phi(c) = \varepsilon,$$
$$\phi(d) = \beta,$$
$$\phi(e) = \delta$$

Определение 3. ***Автоморфизм*** *- изоморфизм графа с собой.*

Пример:

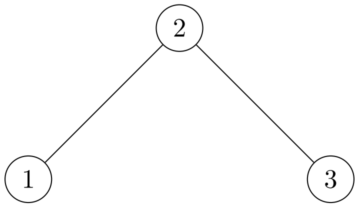


Это очень простой граф

Определим два отображения, задающих автоморфизм:

1. $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$
   т.е. $\phi = Id$ (Id - тождественное отображение)
2. $\psi(a) = b$, $\psi(b) = a$
   ψ **- автоморфизм**, но не тождественное отображение

Теперь займёмся подсчётом **автоморфизмов**(симметрий, но не в школьном понимании) в более сложных графах:

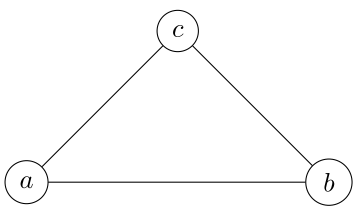
1. 

Решение. *Вершина №2 может отображаться только в себя, т.к. у неё единственной в множестве вершин этого графа 2 валентности. Вершины №1 и №3 могут отображаться как в себя, так и в друг друга, поэтому имеем два автоморфизма: тождественный и задающийся подстановкой* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

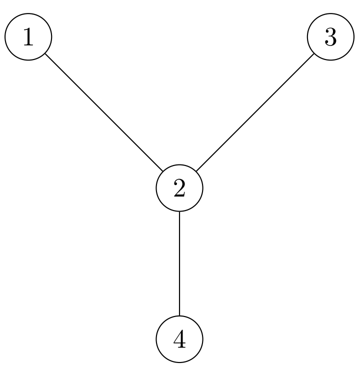
Получим, что группа автоморфизмов графа имеет мощность 2, и состоит соответственно из тождественного отображения и указанной выше подстановки:

$$AutG = \{Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Пояснение. *Можно подумать и по-другому. Автоморфизм отображает не только вершины, но и рёбра, поэтому давайте размыслим в категориях рёбер: скольками способами можно переставить рёбра в заданном графе так, чтобы не изменить его структуру, т.е. так, чтобы у каждого ребра сохранилось количество инцидентных ему рёбер и его направление? Имеем, что рёбра могут быть отражены зеркально относительно вершины №2 или же остаться на месте, т.е. имеем всего 2 варианта. Это и есть ответ.*

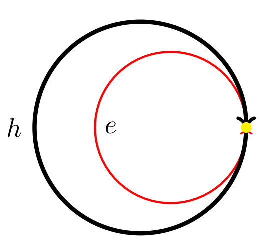
2. 

Решение. *Каждая из вершин имеет по две валентности, следовательно, без нарушения структуры она может отобразиться в себя и в любую соседнюю вершину. Имеем* $3!$ *возможностей и* $|AutG| = 6$.

3. 

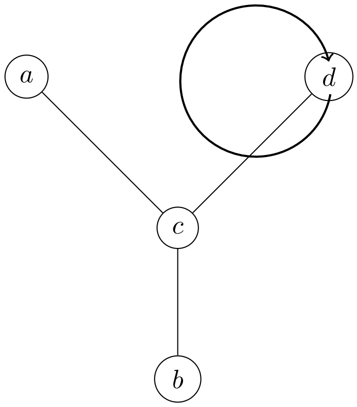
Решение. *Вершина №2 единственная с тремя валентностями, поэтому отображаться с сохранением структуры она может только в себя. Остальные вершины могут без ограничений отображаться друг в друга, поэтому имеем ситуацию как с треугольником выше.*

Замечание 1. *Петля на самом деле имеет два автоморфизма:*

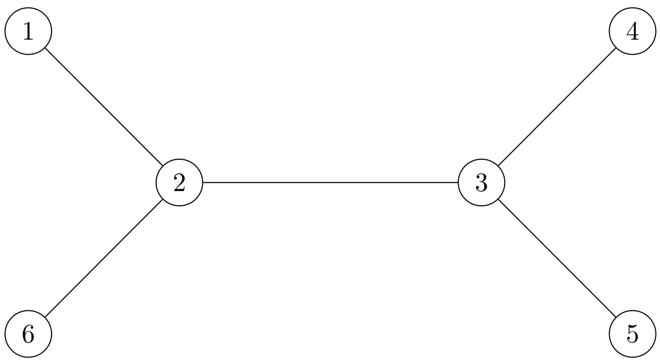


(a) Id

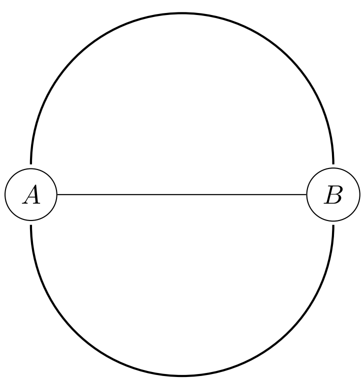
(b) $\psi(e) = h, \psi(h) = e$

4. 

Решение. *Петлю можно повернуть двумя способами, вершина с может отобразиться только в себя - см. предыдущий пункт - остаётся перестановка вершин a и b - их можно расставить двумя способами: не перемещая или отобразив друг в друга. Итого* $2 * 2 = 4$.

5. 

Решение. *Вершины №1 и №6 можно расставить двумя способами. Аналогично с вершинами №4 и №5.*
Теперь про вершины №2 и №3: здесь важно, чтобы отображение вершины №2 было инцидентно ребрам, на которые отобразились вершины №1 и №6. Аналогичное условие накладывается на вершину №3. Поэтому для них есть только 2 возможности: либо они отображаются в себя, либо мы отражаем граф относительно центра ребра, соединяющего вершины №2 и №3. ***Итого:*** $2 * 2 * 2 = 8$ *отображений.*

6. 

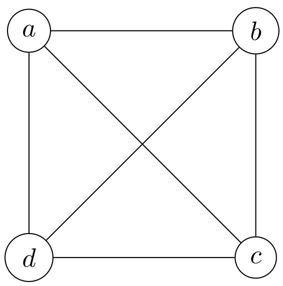
Решение. *Все три ребра здесь идентичны, поэтому берём сразу* $3!$ *способа их расставить. Но их можно ещё и перевернуть, поэтому количество возможных комбинаций удваивается.* ***Итого:*** $3! * 2 = 12$ *вариантов.*

1.2 Планарные графы

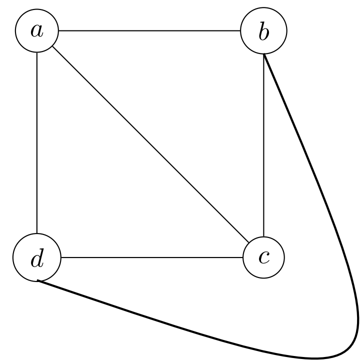
Определение 4. ***Планарным*** *называется граф, который можно вложить в плоскость без самопересечений.*

Пояснение. *Самопересечения - это ситуации, когда на графе есть ситуации с пересечением рёбер, которые в принципе то пересекаться не должны, т.е. на этом пересечении нет вершины.*

Пример:



Вытащим ребро bd наружу.



Теперь граф без самопересечений вкладывается в плоскость. Следовательно, он *планарен.*

Этот граф вложен в плоскость с самопересечениями.
Попробуем это исправить.

1.2.1 Эйлерова характеристика поверхности

Теперь представим, что в двумерном мире на двух разных топологических объектах - торе и и сфере - живут человечки. Им очень хочется узнать, на одинаковых ли с точки зрения топологии объектах они живут. Как это сделать, не выходя в космос?

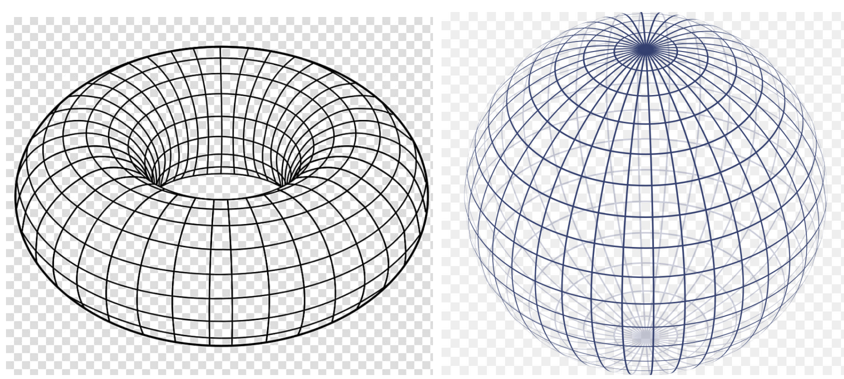


Рис. 1: Тор и сфера

Решение. *Этот вопрос разрешил знаменитый Эйлер. Оказывается, человечкам на каждой планете необходимо нарисовать некоторую мозаику, разбивающую поверхность их родной топологической фигуры на грани. Такое разбиение представлено на рисунке 2. Теперь мы хотим посчитать количество граней, рёбер и вершин на этих поверхностях.*

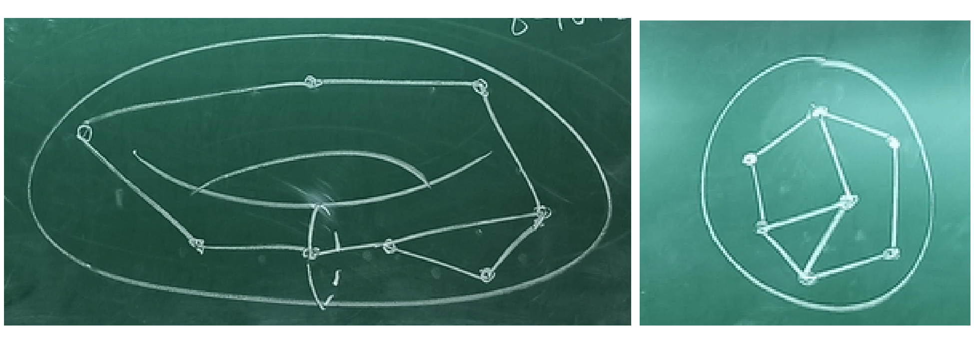


Рис. 2: Разбиение тора и сферы на грани

На сфере получается $3+1=4$ *граней (3 образованы замкнутой ломаной, которую мы начертили, и ещё одна - это внешняя грань, можно сравнить с «мировым океаном» на карте), 7 вершин и 9 рёбер.* ***Итого:*** $\text{В}=7, \text{Р}=9, \Gamma=4$.

Для тора имеем $\text{В}=8, \text{Р}=10, \Gamma=2$.

Пояснение. *Расчертив тор, как показано на рисунке 3, мы видим, что по-прежнему на нём всего одна грань, которая присутствует по умолчанию. Почему грань осталась одна, несмотря на окружность вокруг дырки и «ремень» (обозначен красным цветом)? Очень просто! Посмотрим на рисунок 4.*

И вот, что на Рис. 4 происходит: пусть есть некоторая точка x, *находящаяся внутри зон, отделённых на рисунке 3, красной и синей чертами. И из неё мы хотим попасть в некоторую точку, находящуюся как бы в другой зоне (она отмечена просто точкой на Рис. 4). И, как видно из того же Рис. 4, это возможно сделать. Линией от* x *до соответствующей точки обозначена траектория, по которой для этого надо двигаться.*

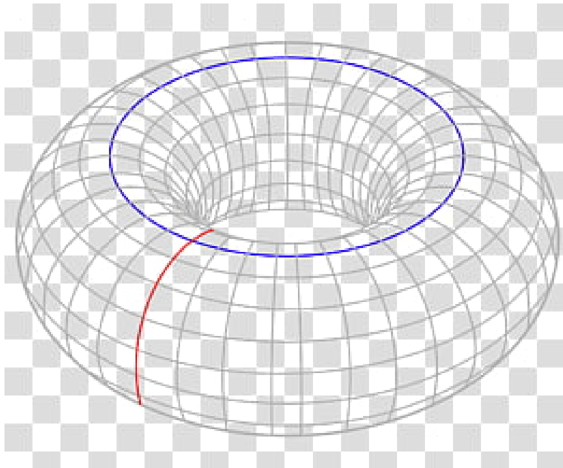


Рис. 3: Попытка получить на торе более одной грани по умолчанию

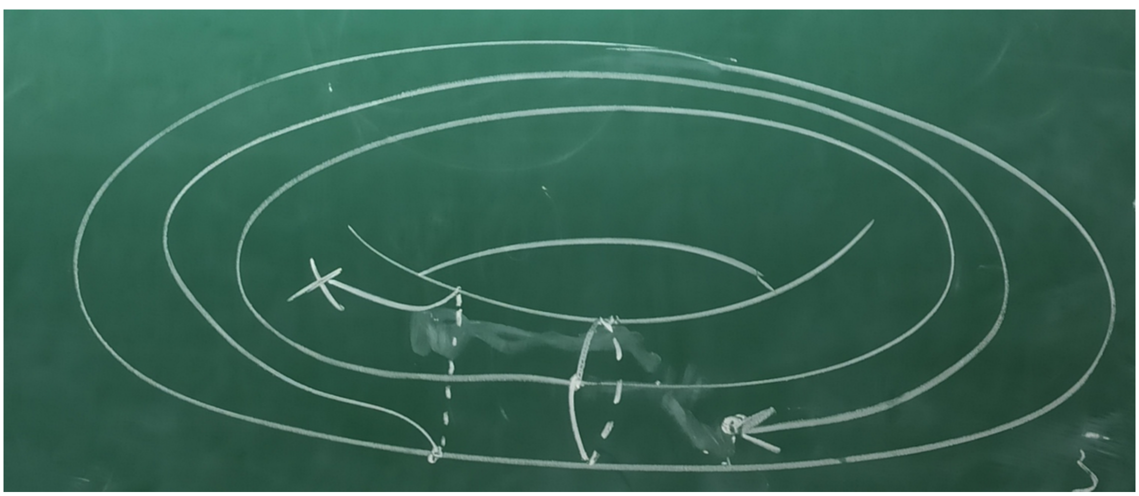


Рис. 4: Иллюстрация, почему в Рис. 3 одна грань

Именно поэтому и нужно ввести ещё одну ломаную линию, чтобы получить полноценную замкнутую грань.

Теперь посчитаем Эйлерову характеристику данных объектов. Утверждается, что, если объекты топологически эквивалентны, т.е. совпадают с точностью до конечного числа гомеоморфных преобразований, то их Эйлерова характеристика совпадёт.
Эйлерова характеристика вычисляется следующим образом:

$$\text{В} - \text{Р} + \Gamma \tag{1}$$

Считаем:

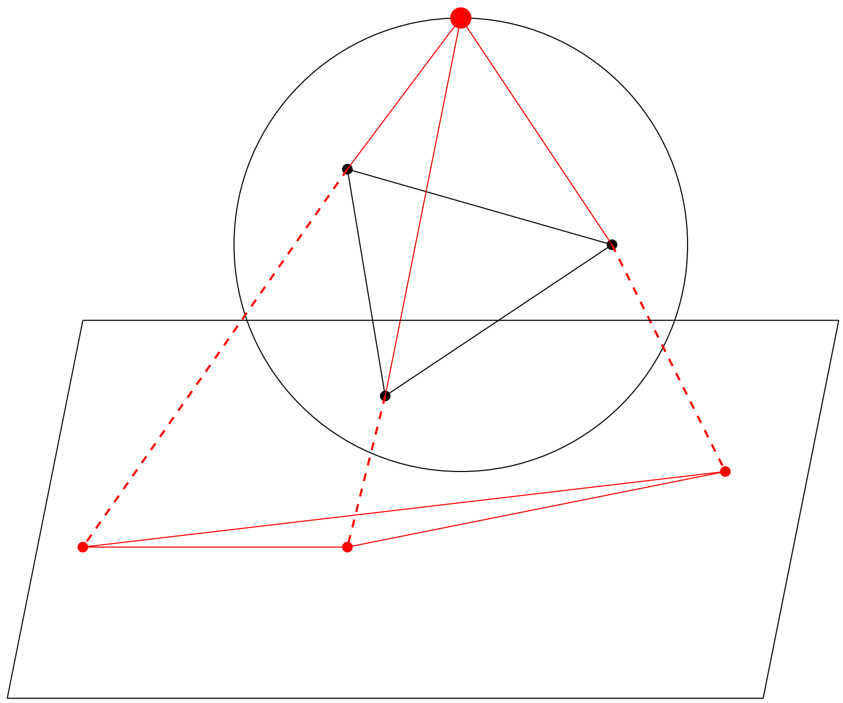
$$\textit{Сфера: } \text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2;$$

$$\textit{Тор: } \text{В} - \text{Р} + \Gamma = 0;$$

Следовательно, сфера и тор - это топологически разные объекты.

Замечание 2. *Эйлерова характеристика тора с двумя дырками* -2.

Теперь про ещё один интересный факт, который нам пригодится дальше:

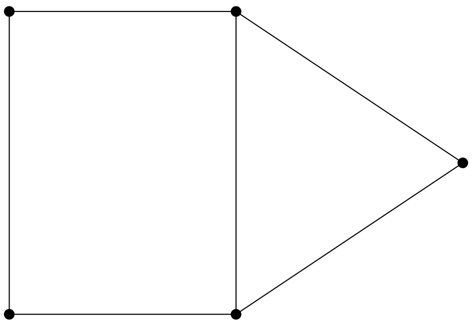


Проецирование фигуры со сферы на плоскость

Как нетрудно убедиться, сфера эквивалентна плоскости, за исключением единственной точки, через которую ведётся проектирование (на рисунке выше - большая красная точка на сфере), которую можно без проблем отбросить. Также из рисунка видно, что граф без самопересечений проектируется со сферы на плоскость.

Из всего вышеизложенного делается вывод, что **планарный граф имеет ту же эйлерову характеристику, что и сфера**!

Пример:



1. В данном графе посчитаем количество рёбер и вершин. Рёбра предлагается считать следующим образом: проходить по каждой грани и считать в ней все рёбра (получим удвоенное их количество).
2. Получаем, что $2 * \text{Р} = 12; \Gamma = 3$.

Теперь проведём следующие рассуждения: самая маленькая грань такого графа имеет 3 ребра, следовательно, будет выполнено неравенство:

$$3 * \Gamma \leq 2 * \text{Р} \tag{2}$$

Теперь совместим выражение 1 для сферы и неравенство 2 и получим:

$$\text{Р} \leq 3\text{В} - 6 \tag{3}$$

Выражение 3 является **необходимым условием планарности**.

Замечание 3. *Как мы увидим далее, иногда это условие нужно переформулировать, чтобы добиться успеха.*

Задача 1. *Докажем непланарность графа V_5 (полного графа на 5 вершинах).*

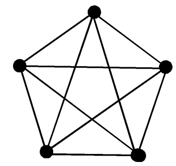


Рис. 5: V_5

Решение. *Естественно, проще всего сначала проверить выполнение необходимого условия планарности.* В $= 5$, Р $= \dfrac{\text{В} * 4}{2} = 10$ *- из каждой вершины исходит 4 ребра, но так мы посчитаем каждое ребро дважды, поэтому делим на* 2.

Теперь подставляем получившиеся цифры в неравенство 3 и получаем:

$$10 \leq 15 - 6$$

Неравенство не выполняется, следовательно, граф V_5 не планарен.

Замечание 4. *Если проверить выполнение условия 3 на графе «три соседа, три колодца» - граф $V_{3,3}$ - полный двудольный граф на трёх вершинах - то окажется, что оно выполняется. Это не говорит о его планарности, поскольку мы проверим лишь необходимое условие. Но! Возможно переформулировать необходимое условие следующим образом:*

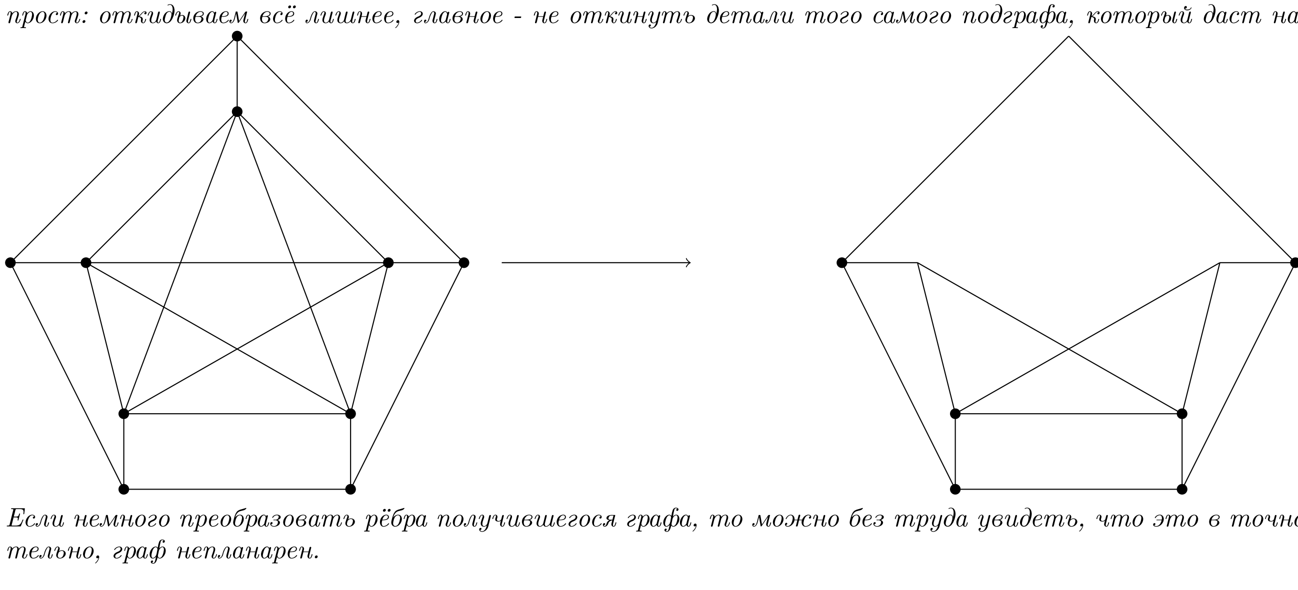
1. *По т. Кёнига граф двудольный $\Leftrightarrow$ все циклы в графе имеют чётную длину. Доказательство необходимости этой теоремы очевидно, достаточности - из рассмотрения алгоритма поиска в ширину можно прийти к противоречию.*
2. *Следствием является то, что в двудольном графе цикл «распускается» как минимум в четырёхугольник, следовательно, неравенство 2 переформулируется в следующее:*

$$4\text{Г} \leq 2\text{Р} \tag{4}$$

Задача 2. *Доказать непланарность графа Петерсена.*

Замечание 5. *Граф Петерсена в науке о графах примечателен тем, что, если есть подозрение, что некоторое условие может выполняться для всех без исключения графов, то его проверяют на нём. И, как правило, оно не выполняется. Если же оно выполняется, то это значит, что ты идёшь в верном направлении или ошибся при проверке на этом графе.*

Решение. *Рассмотрим граф в поисках в нём подграфа, гомеоморфного одному из непланарных: V_5 или $V_{3,3}$. Алгоритм прост: откидываем всё лишнее, главное - не откинуть детали того самого подграфа, который даст нам непланарность.*



Если немного преобразовать рёбра получившегося графа, то можно без труда увидеть, что это в точности $V_{3,3}$, следовательно, граф непланарен.

Замечание 6. *В завершение добавим кое-что про тор. Развёртка тора на плоскость представлена на Рис.'1.2.1. Её можно получить, сначала «разрезав» тор по красной линии на Рис. 3, а затем «разрезав» уже получившийся «шланг». Стрелки на рисунке указывают направление, в котором надо склеивать получившуюся развёртку, чтобы снова получить тор.*

Рис. 1.2.1: Развёртка тора на плоскости

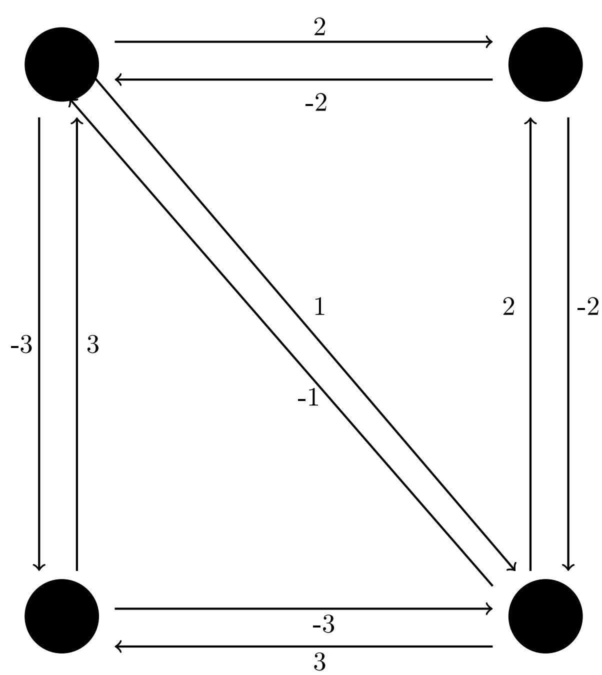
1.3 Поток на графе

Определение 5. ***Поток*** *- это отображение $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$ такое, что выполняются следующие правила:*

1. $f(\overrightarrow{e}) = -f(\overleftarrow{e})$
2. $\forall v \in V \Rightarrow \sum\limits_{e, S(e)=v} f(e) = \sum\limits_{e, t(e)=v} f(e) = 0$

Пояснение. *Первое условие можно сформулировать так: поток ребра равен потоку, взятому с этого же ребра в противоположном направлении (именно это и означает противоположно направленный значок стрелки). Иными словами, мы договариваемся, что у каждого ребра графа, на котором мы задаём поток, будут два направления: положительное и отрицательное. Поток на них будет одинаков по модулю, но иметь противоположные знаки. Приме потока на графе см. ниже.*
Второе условие, по сути, формулирует «закон сохранения потока»: сколько потока в вершину вошло, столько и должно выйти. В разделе физики, посвящённом электроцепям, сформулировано правило Киргофа: «сколько тока втекло, столько и вытекло» - здесь имеем ту же ситуацию.

Пример:



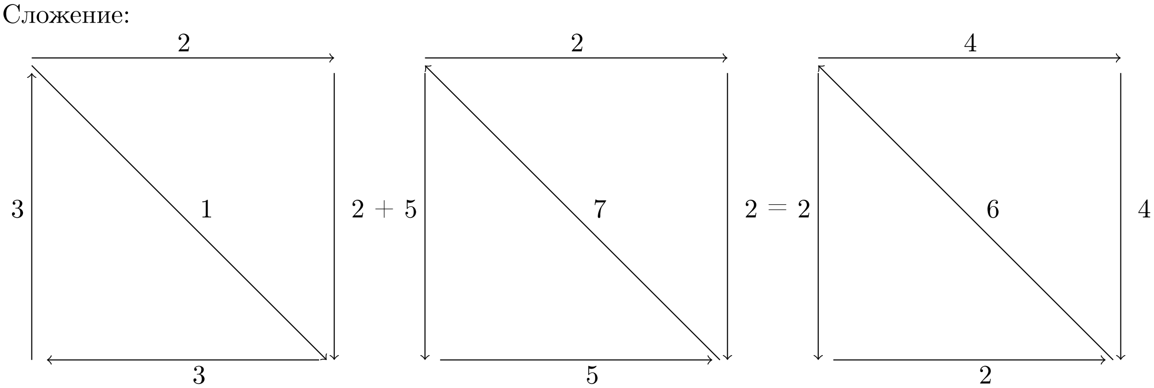
Потоки мы расставляли следующим образом: сначала мы указали значение потока для двух не смежных рёбер. И исходя и проставленных отметок, согласуясь с правилом Киргофа, мы уже проставили значения потоков для остальных рёбер, т.е. главным было правило: сколько потока в вершину втекло, столько и должно выйти. Например: если изначально мы поставим значения потока на верхнем и на нижнем рёбрах 2 и 3 соответственно, то тогда нужно, чтобы, во-первых, в верхнее ребро входило потока больше, чем 2, т.к. он ещё должен остаться на диагональное ребро, во-вторых, в сумме в начало нижнего ребра должен прийти поток 3, но из правого бокового ребра может теперь прийти лишь 2, следовательно, из диагонального ребра должна прийти единица. Аналогичными рассуждениями получаем, что на левом боковом ребре из нижней вершины должен выходить поток 3.
В этих рассуждениях мы не вспоминали про отрицательные потоки, хотя они должны быть из определения (см. первое условие, наложенное на отображение потока). И вот почему: они мгновенно получаются из первого условия, наложенного на отображение потока (см. определение), просто дорисовыванием к рёбрам графа противонаправленных рёбер с противоположными значениями потока.

Замечание 7. *Далее мы не будем рисовать на потоках рёбра с отрицательным значением потока, т.к. они легко получаются, при необходимости, из определения.*

1.3.1 Множество потоков на графе как линейное пространство

Теперь проверим, не составляют ли потоки линейное пространство, для этого определим коммутативное ассоциативное дистрибутивное сложение потоков и рассмотрим возможность их умножения на число:

1. Сложение:



2. Операция умножения на число определяется очевидно: просто умножим все значения потока на это число, аналогично тому, как мы делали это с обычными векторами. Доп. иллюстраций не требуется.

Теперь мы можем с полной уверенностью сказать, что множество потоков на графе образует линейное пространство!

Найдём размерность линейного пространства:

1. Всего имеется 10 рёбер графа.

2. $dimV = 10 - 5 - 3 = 10 - 5 - 4 + 1 = \text{Р} - \text{В} + 1$

   Пояснение. *Сначала из 10 рёбер мы вычитаем половину, произведя «отбрасывание» отрицательных рёбер - их можно в данной задаче не рассматривать. Затем мы переходим уже к уравнению из первого семестра линейной алгебры, а именно:*

   $$dimL_0 = n - rankA$$

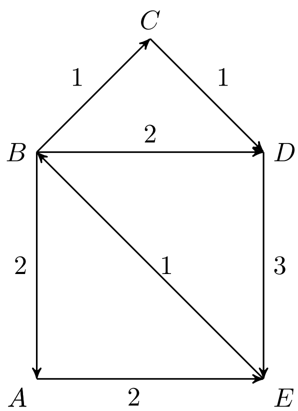
   где L_0 - пространство решений ОСЛАУ A, n - количество переменных в ней, $rankA$ - ранг матрицы данной системы. Теперь поговорим, откуда здесь берётся эта ОСЛАУ. На самом деле, всё очень просто: необходимо по правилу Киргофа расписать каждый поток на графе как сумму других. Из этого будем иметь систему из 5 линейных уравнений. В данном случае сразу 2 из них окажутся линейной комбинацией оставшихся трёх, и мы получим, что ранг данной системы равен 3. Отсюда и получим выражение после первого знака равенства.

Теперь, когда доказано, что множество потоков - это векторное пространство, размерность которого нам известна, нужно озаботиться поиском базиса этого пространста. Иначе зачем было всё это?

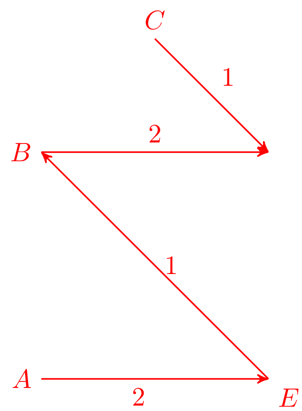
Как ищется базис:

1. Найдём остовное дерево графа (это такое поддерево, которое содержит все вершины графа).
2. Все рёбра, не вошедшие в остовное дерево, назовём *базисными рёбрами*.
3. Теперь из каждого базисного ребра необходимо пройти некоторый цикл, чтобы вернуться в конец этого ребра. Необходимо, чтобы этот цикл проходил *только по рёбрам остовного дерева*, т.е. должно быть только одно посещённое базисное ребро - то, с которого начался и на котором закончится цикл.
4. Полученные конструкции и составят базис потоков на графе.

Подробнее на примере:



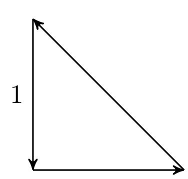
Теперь в этом графе выберем остовное дерево



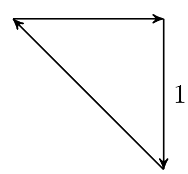
Вот и остовное дерево. Получается, что базисными являются рёбра $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Далее мы будем строить описанные выше циклы с базисными рёбрами. Особенность этой процедуры в том, что мы задаём значение потока на данном ребре совершенно произвольно, как и его направление. Это лишь скажется на знаке и величине действительного коэффициента перед данным базисным вектором в разложении данного потока по базису. Это будет показано ниже.

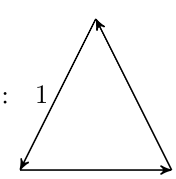
Базисный вектор, построенный на BA:



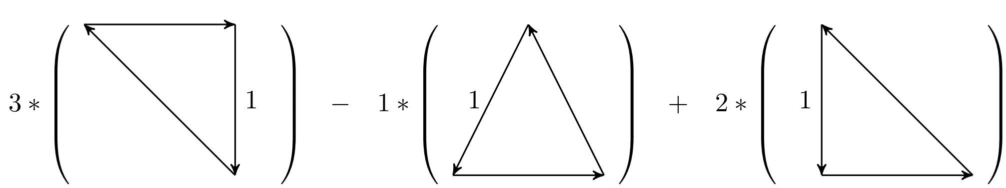
На DE:



На CB:

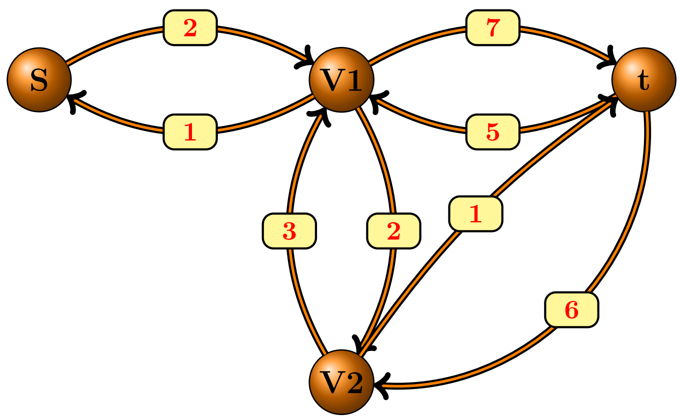


Теперь разложим данный поток по базису и получим:



2 Поток в транспортной сети

Определение 6. ***Транспортная сеть*** *- граф с двумя выделенными вершинами и функцией* $c : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.



Пример транспортной сети

Определение 7. ***Поток в транспортной сети*** *- это такое отображение* $f : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}$, *что:*

1. $f(\overrightarrow{e}) = -f(\overleftarrow{e})$
2. $\forall v \in V \setminus \{S \cup t\}$ *выполняется условие Киргофа*
3. $\forall \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E} \Rightarrow f(\overrightarrow{e}) \leq c(\overrightarrow{e})$

Замечание 8. c *means «constrain»,* f *means «flow».*

Определение 8. ***Мощность потока*** f *-* $w(f)$ *- сумма потоков по всем рёбрам, входящим в* t *или же сумма по всем рёбрам, исходящим из* S.

Замечание 9. *Максимальный поток - это «картинка», т.е. ориентированный граф с заданной функцией потока, а цифра (скаляр) - это мощность потока.*

Определение 9. ***Разрез в транспортной сети*** *- такое множество рёбер, удаление которых разбивает исходный граф на два связных подграфа, каждому из которых принадлежит либо* S, *либо* t.

Теорема 1 (**Форда-Фалкерсона**)**.** *Мощность максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.*

2.1 Алгоритм Форда-Фалкерсона

Создадим матрицу потока, где каждому ребру соответствует значение потока на нём. Изначально это будет нулевая матрица. Также задана матрица транспортной сети.

1. Произвольным образом ищем путь из S в t в транспортной сети.
2. Вдоль получившегося пути задаём максимальный поток (его величина - минимальная пропускная способность ребра на пути).
3. Фиксируем изменение потока в матрице потока: модифицируем матрицу потока, увеличив поток через рёбра найденного пути на число, соответствующее величине максимального потока на данном пути. На рёбрах, соответствующих противоположным направлениям рёбер, задействованных в пути, уменьшаем поток на то же число.
4. Модифицируем матрицу транспортной сети: для каждого ребра на пути уменьшаем его пропускную способность на величину, равную найденному потоку, и увеличиваем величину пропускной способности ребра, противонаправленного данному (т.е. если в найденном пути пришлось пройти из A в B, то пропускная способность ребра AB уменьшится, а ребра BA увеличится на ту же величину).
5. Повторяем описанную выше процедуру, пока возможно отыскать путь из S в t в матрице транспортной сети.

Замечание 10. *Необходимость такой, на первый взгляд, неестественной модификации матрицы транспортной сети объясняется просто. Представим, что мы отправляем груз из пункта A в B. Тогда пропускная способность дороги AB естественным образом уменьшится. А формально увеличив пропускную способность дороги BA, мы, по сути, даём возможность «откатить» некоторое количество отправленного груза. Иными словами, пусть из A в B отправлено n грузовиков. Тогда пропускная способность AB уменьшится на n. Пропускную способность BA увеличим на n, тем самым сказав себе следующее: «Теперь из B в A мы можем вывезти столько грузовиков, сколько пропускает дорога BA, да ещё к этому можем вывезти отправленные только что грузовики, попросту остановив их на старте в пункте A». Такой образ рассуждений удобен, когда мы корректируем поток таким образом, что задействуем обратное направление прохода от одной вершины к другой.*

Максимально просто и наглядно объясняет этот алгоритм преподаватель Малого Мехмата в данном видео: `https://www.youtube.com/watch?v=jejpJw0cqms&feature=emb_logo`.