Раздел 2. Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве

Лекция 4 Теорема о метрической проекции.

Для того, чтобы получить теорему о разложении гильбертова пространства в сумму ортогональных пространств (без предположения о сепарабельности одного из них), докажем теорему о метрической проекции элемента гильбертова пространства на замкнутое выпуклое множество. Эта теорема, впрочем, интересна и важна и сама по себе.

Замечание. Напомним, что выпуклым называется такое множество в линейном пространстве, которое вместе с любой парой своих точек содержит соединяющий их отрезок:

$$\forall z', z'' \in Q \, \forall \lambda \in [0,1] : \lambda z' + (1-\lambda) z'' \in Q \,.$$

В частности, нам понадобится случай $\lambda = 1/2$:

$$z', z'' \in Q \Rightarrow \frac{z' + z''}{2} \in Q \,.$$

Ещё одна модификация, которая будет использована:

$$\forall z, u \in Q \, \forall \lambda \in [0,1] : z + \lambda h \in Q \,,$$

где $h = u - z$.

Теорема о метрической проекции.

Пусть $Q \subset H$ – замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве H и $w \in H$ – некоторый фиксированный элемент. Тогда существует единственный элемент $z \in Q$ такой, что

$$\|w - z\| = \rho(w, Q) = \inf_{u \in Q} \|w - u\| = \min_{u \in Q} \|w - u\| \,.$$

Напомню, что элемент z называется метрической проекцией элемента w на множество Q.

Доказательство.

Обозначим $d = \rho(w, Q)$

Выполним предварительное построение. Пусть $z', z'' \in Q$, выпишем тождество параллелограмма для векторов $w - z'$ и $w - z''$:

$$\|2w - (z' + z'')\|^2 + \|z'' - z'\|^2 = 2(\|w - z'\|^2 + \|w - z''\|^2) \,,$$

или, после деления на 4,

$$\left\| w - \frac{z' + z''}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{z'' - z'}{2} \right\|^2 = \frac{\|w - z'\|^2 + \|w - z''\|^2}{2} \,.$$

Докажем сначала единственность метрической проекции. Пусть $\|w - z'\| = \|w - z''\| = d$, тогда

$$\left\|w - \frac{z' + z''}{2}\right\|^2 = \frac{\|w - z'\|^2 + \|w - z''\|^2}{2} - \left\|\frac{z'' - z'}{2}\right\|^2 = \\ = d^2 - \left\|\frac{z'' - z'}{2}\right\|^2 \le d^2 \,.$$

С другой стороны, в силу выпуклости Q, $(z' + z'')/2 \in Q$, и поэтому

$$\left\|w - \frac{z' + z''}{2}\right\|^2 \ge d^2 \,.$$

Отсюда $\|(z'' - z')/2\|^2 = 0$, и $z' = z''$. Единственность доказана.

Докажем теперь существование. Пусть z_m – минимизирующая последовательность, т.е. $\|w - z_m\| \to d$. Докажем, что последовательность z_m фундаментальная.

В силу сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, , \forall m, k > N : \begin{cases} d^2 \le \|w - z_m\|^2 \le d^2 + \varepsilon^2 \\ d^2 \le \|w - z_k\|^2 \le d^2 + \varepsilon^2 \end{cases}$$

С другой стороны, в силу выпуклости Q, $(z_m + z_k)/2 \in Q$, и поэтому

$$\left\|w - \frac{z_m + z_k}{2}\right\|^2 \ge d^2 \,.$$

Тогда из тождества параллелограмма вытекает, что

$$\left\|\frac{z_k - z_m}{2}\right\|^2 = \frac{\|w - z_m\|^2 + \|w - z_k\|^2}{2} - \left\|w - \frac{z_m + z_k}{2}\right\|^2 \le \\ (d^2 + \varepsilon^2) - d^2 = \varepsilon^2 \,,$$

откуда и вытекает фундаментальность последовательности z_m.

В силу полноты пространства H эта последовательность сходится, $z_m \to z$, а в силу замкнутости Q предельная точка принадлежит этому множеству: $z \in Q$. Из непрерывности нормы следует, что $\|w - z\| = d$. Теорема доказана.

Замечание. Условия теоремы можно ослабить, потребовав вместо гильбертовости объемлющего пространства полноты Q как метрического пространства (откуда вытекает, в частности, и замкнутость). В частности, это будет выполнено, если Q – конечномерное подпространство или замкнутое подмножество конечномерного подпространства (независимо от полноты объемлющего).

Замечание. Если $w \in Q$, то $z = w$ и $d = 0$: метрической проекцией элемента, принадлежащего множеству, на это множество является он сам, расстояние от него до множества равно нулю. Обратно, если расстояние от элемента до множества равно нулю, то либо этот элемент принадлежит множеству, либо является предельной точкой этого множества. Поскольку по условию множество является замкнутым, оно содержит все свои предельные точки. Поэтому для точек, не принадлежащих Q, расстояние строго положительно.

Замечание. Как мы помним из доказательства теоремы Рисса о почти перпендикуляре, в банаховом пространстве мы не могли утверждать, что на замкнутом подпространстве (которое, разумеется, является замкнутым выпуклым множеством) найдётся элемент, ближайший к элементу вне этого подпространства (т.е. его метрическая проекция). Поэтому, собственно, там и шла речь о "почти перпендикуляре"(за исключением случая, когда подпространство конечномерно). В гильбертовом пространстве, как мы видим, ситуация оказывается существенно проще.

Замечание. Ещё одно сравнение ситуации в гильбертовых и банаховых пространствах. В банаховом пространстве даже при наличии метрической проекции на замкнутое выпуклое множество (например, на подпространство) мы не можем гарантировать её единственности. Простейший пример: пространство $\mathbb{R}^2_{\max}$, в качестве выпуклого замкнутого множества Q берём ось абсцисс, элементы которой имеют вид $z = (x, 0)$, а в качестве элемента вне Q возьмём $w = (0, 1)$. Тогда

$$\|w - z\| = \max\{|x|, 1\}.$$

Видно, что наименьшее значение такого расстояния, равное единице, достигается при всех значениях $x \in [-1, 1]$, т.е. все отрезка $[-1, 1]$ на оси абсцисс являются метрическими проекциями элемента w.

Условия, определяющие проекцию

Получим необходимое и достаточное условие того, что элемент $z \in Q$ является метрической проекцией w на выпуклое подмножество Q.

Пусть $u \in Q$ – произвольный элемент. В силу выпуклости Q все элементы вида $z + \lambda y$, где $y = u - z$, $\lambda \in [0, 1]$ содержатся в Q. Поскольку z – метрическая проекция w на Q, расстояние от w до $z + \lambda y$ при $\lambda \in (0, 1]$ больше, чем расстояние до z:

$$\|w - (z + \lambda y)\| > \|w - z\|, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Это же верно и для квадратов расстояний:

$$\|w - (z + \lambda y)\|^2 > \|w - z\|^2, \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\|w-(z+\lambda y)\|^2 = (w-z-\lambda y, w-z-\lambda y) = (w-z, w-z) - 2\lambda(w-z, y) + \lambda^2(y, y).$$

Это выражение как функция от λ возрастает при $\lambda = +0$, поэтому правая одностороняя производная от него по переменной λ неотрицательна. Поэтому

$$-2(w - z, y) \geq 0,$$

или, вспоминая, что $y = u - z$, получаем:

$$\forall u \in Q : (w - z, u - z) \leq 0\,.$$

Покажем, что возможен только один элемент, обладающий таким свойством.

Пусть

$$\begin{cases} \exists z \in Q \,\forall u \in Q : (w - z, u - z) \leq 0 \\ \exists z' \in Q \,\forall u \in Q : (w - z', u - z') \leq 0 \end{cases}$$

В первом неравенстве положим $u = z'$, во втором $u = z$:

$$\begin{cases} (w - z, z' - z) \leq 0 \\ (w - z', z - z') = (z' - w, z' - z) \leq 0 \end{cases}$$

Сложим эти неравенства. Тогда, в силу линейности скалярного произведения, получаем:

$$(w - z, z' - z) + (z' - w, z' - z) = ((w - z) + (z' - w), z' - z) =$$
$$= (z' - z, z' - z) = \|z' - z\|^2 \leq 0\,, ,$$

откуда $z' = z$. Таким образом, доказана единственность элемента Q, обладающего данным свойством.

Поскольку, как было доказано выше, метрическая проекция этим свойством обладает, а никакой другой элемент не обладает, то указанное свойство является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы элемент z был метрической проекцией w на Q.

Замечание. Геометрический смысл полученного условия: угол между направлениями из z в сторону w и в сторону любого элемента Q – прямой или тупой. В этом случае, двигаясь из точки z в сторону u, мы будем удаляться от w.

Замечание. При доказательстве нигде не использовалась замкнутость Q. Это значит, что если существует метрическая проекция z элемента w на какое-нибудь выпуклое множество (не обязательно замкнутое), то z является единственной точкой этого множества, обладающим указанным свойством.

Замечание (продолжение предыдущего). Пусть множество Q выпукло, но не замкнуто, и мы не знаем, существует ли метрическая проекция элемента w на это множество. Пусть, однако, для некоторого элемента $z \in Q$ выполнено рассматриваемое условие

$$\forall u \in Q : (w - z, u - z) \leq 0\,.$$

Можно ли в этом случае утверждать, что z является метрической проекцией

w на Q? Ответ положительный. Действительно,

$$\begin{gathered}\|w-u\|^2 = \|(w-z)-(u-z)\|^2 = \\ = ((w-z)-(u-z),(w-z)-(u-z)) = \\ = (w-z,w-z) - 2(w-z,u-z) + (u-z,u-z) = \\ = \|w-z\|^2 - 2(w-z,u-z)\|u-z\|^2 \geq \|w-z\|^2\,,\end{gathered}$$

поскольку второе и третье слагаемое неотрицательны. В случае $u \neq z$ неравенство становится строгим, поскольку $\|u-z\|^2 > 0$. Таким образом, мы доказали, что выполнение рассматриваемого условия гарантирует, что точка z является метрической проекцией w на выпуклое множество Q, даже в том случае, если Q незамкнуто и о существовании такой проекции заранее неизвестно.