Оглавление

Дифференциальная геометрия. Практические задания

Задача 1.

а) Найти репер Френе и кривизну кривой $\alpha(t)$.

б) Найти угол между кривой $\alpha(t)$ и кривой, заданной уравнением $F(x,y)=0$, в т. M_0.

в) Для обеих кривых написать уравнения соприкасающихся окружностей в т. M_0, сделать чертеж.

N	$\alpha(t)$	$F(x,y)$	M_0
1	$(t^2+2, t+1)^T$	x^2+2y^2-6	$(2,1)$
2	$(t, t^2-2t+3)^T$	$2x^2+y^2-6$	$(1,2)$
3	$(t^2-1, t)^T$	$4x^2+4x+y^2$	$(-1,0)$
4	$(t, -t^2-1)^T$	x^2+2y^2+2y	$(0,-1)$
5	$(t^2-t+2, t+1)^T$	x^2+2y^2-6	$(2,1)$
6	$(-t^2-1, t)^T$	x^2+x+y^2	$(-1,0)$
7	$(t, t^2-1)^T$	x^2+y^2+y	$(0,-1)$
8	$(-t^2-1, 2t)^T$	$4x^2+4x+y^2$	$(-1,0)$
9	$(t+1, t^2+2)^T$	y^2+2x^2-6	$(1,2)$
10	$(t^2-2t+3, t)^T$	$2y^2+x^2-6$	$(2,1)$
11	$(t, t^2-1)^T$	$4y^2+4y+x^2$	$(0,-1)$
12	$(-t^2-1, t)^T$	y^2+2x^2+2x	$(-1,0)$
13	$(t^2+2, t+1)^T$	x^2-2y^2-2	$(2,1)$
14	$(t, t^2-2t+3)^T$	$2x^2-y^2+2$	$(1,2)$
15	$(t^2-1, t)^T$	$4x^2+4x-y^2$	$(-1,0)$
16	$(t, -t^2-1)^T$	x^2-2y^2-2y	$(0,-1)$
17	$(t^2-t+2, t+1)^T$	x^2-2y^2-2	$(2,1)$
18	$(-t^2-1, t)^T$	x^2+x-y^2	$(-1,0)$
19	$(t, t^2-1)^T$	x^2-y^2-y	$(0,-1)$
20	$(-t^2-1, 2t)^T$	$4x^2+4x-y^2$	$(-1,0)$
21	$(t+1, t^2+2)^T$	y^2-2x^2-2	$(1,2)$
22	$(t^2-2t+3, t)^T$	$2y^2-x^2+2$	$(2,1)$
23	$(t, t^2-1)^T$	$4y^2+4y-x^2$	$(0,-1)$
24	$(-t^2-1, t)^T$	y^2-2x^2-2x	$(-1,0)$
25	$(t, 2t^2-1)^T$	x^2-2x+y^2	$(1,1)$
26	$(t, 2t^2-1)^T$	x^2+y^2-2y	$(1,1)$

Задача 2. Определить тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках, построить образ кривой.

1	$\alpha(t) = (t^2, -t^3 - t^2)^T$	2	$\alpha(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)^T$
3	$\alpha(t) = (-t^2 + 1, t^3 - t^2)^T$	4	$x^5 - (y - x^2)^2 = 0$
5	$y^2 = x^2 - x^4$	6	$\alpha(t) = (\operatorname{sh} t - t, \operatorname{ch} t - 1)^T$
7	$\alpha(t) = (t^2, -t^4 + t^5)^T$	8	$x^2 = y^2 - 4y^4$
9	$\alpha(t) = (t^2, -2t^4 + t^5)^T$	10	$\alpha(t) = (t^2/(1 + t^2), t^3/(1 + t^2))^T$
11	$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)^T$	12	$y^2(2 - x) = x^2(2 + x)$
13	$\alpha(t) = (-t^4 + t^5, t^2)^T$	14	$\alpha(t) = (2t^3/(1+t^2), 2t^2/(1+t^2))^T$
15	$\alpha(t) = (-t^3 - t^2, t^2)^T$	16	$\alpha(t) = (t^3 - t^2, -t^2 + 1)^T$
17	$y^5 - (x - y^2)^2 = 0$	18	$\alpha(t) = (t^3 - 2t^2, t^2)^T$
19	$x^2 = y^2 - y^4$	20	$\alpha(t) = (-2t^4 + t^5, t^2)^T$
21	$\alpha(t) = (t^2, t^3 - 2t^2)^T$	22	$y^2(3 - x) = x^2(3 + x)$
23	$\alpha(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)^T$	24	$\alpha(t) = (t^2, t^3 + t^2 - t^4)^T$
25	$\alpha(t) = (\operatorname{ch} t, t - \operatorname{sh} t)^T$	26	$x^2(2 - y) = y^2(2 + y)$

Задача 3.

В *вариантах 1-6, 13-18* найти кривизну и кручение кривой в точке, написать уравнение соприкасающейся плоскости в этой точке.

В вариантах 7-12, 19-26 доказать, что кривая целиком лежит в некоторой гиперплоскости. Найти последний вектор репера Френе, написать уравнение этой гиперплоскости.

N	$\alpha(t)$	N	$\alpha(t)$
1	$(t, 1 - t, t^2/2)^T, \quad t = 2$	2	$(2\operatorname{ch} t, 2\operatorname{sh} t, 2t)^T, \quad t = 0$
3	$(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)^T, \quad t = 0$	4	$(\operatorname{ch} t, -\operatorname{sh} t, -t)^T, \quad t = 1$
5	$(t, t^2/2, t^3/6)^T, \quad t = 0$	6	$(1 - t, t + t^2/2, t^2/2)^T, \quad t = 1$
7	$(2t, t^2, t^3 - t, t - 11)^T$	8	$(t^2 + t + 1, t, t^3, t^2 - t - 2)^T$
9	$(t^4 + t^2 + 1, t^2, t^4, t^3 + 2)^T$	10	$(t^3 + 7, t - 5, t^4 + t, t^4 - t)^T$
11	$(t^5, t^2 + t^5, t^2 + 1, t^3)^T$	12	$(t^3, t - 4, t^3 + t^2 + t, t^2 + 1)^T$
13	$(e^t, e^t \cos t, e^t \sin t)^T, \quad t = 0$	14	$(1 + t, -t + t^2/2, t^2/2)^T, \quad t = -1$

N	$\alpha(t)$	N	$\alpha(t)$
15	$(1-t, t, t^2/2)^T, \quad t=2$	16	$(2t, 2\operatorname{ch} t, 2\operatorname{sh} t)^T, \quad t=0$
17	$(-t, \operatorname{ch} t, -\operatorname{sh} t)^T, \quad t=1$	18	$(t^2/2, -t^3/6, -t)^T, \quad t=0$
19	$(2t, 2t^2-t, t^3-t, t-11)^T$	20	$(t^5, t^2+1, t^3, 5t^2+t^5)^T$
21	$(t^3/3+t^2+1, t^2+1, t^3/3, t+3)^T$	22	$(t-3, t^4+t, t^3+5, t^4-t)^T$
23	$(t, t^2+t+2, t^3, t^2-t-2)^T$	24	$(t^4, t^2+2t+2, t-4, t^2-t+1)^T$
25	$(t, t^2+t, t^3+t^2, t^4)^T$	26	$(t^2+t, 2t^2, t^3-t, t^4-t)^T$

Задача 4.

Варианты 1-12. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками P_0, P_1, P_2 и R_0, R_1, R_2. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. P_2 и R_0 так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Сделать чертеж. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0?

N	P_0	P_1	P_2	R_0	R_1	R_2
1	$(0,-4)$	$(-3,-1)$	$(-2,1)$	$(1,2)$	$(3,1)$	$(3,-2)$
2	$(-4,2)$	$(-2,3)$	$(-1,1)$	$(1,1)$	$(3,3)$	$(6,2)$
3	$(-5,0)$	$(-8,-4)$	$(-5,-3)$	$(1,1)$	$(3,3)$	$(1,4)$
4	$(-2,1)$	$(-3,4)$	$(0,-4)$	$(3,-2)$	$(3,1)$	$(-2,3)$
5	$(1,-2)$	$(4,-3)$	$(-4,1)$	$(-2,3)$	$(1,3)$	$(3,-2)$
6	$(-3,-3)$	$(-1,-6)$	$(2,-4)$	$(2,-1)$	$(-1,0)$	$(-4,0)$
7	$(2,-2)$	$(5,-3)$	$(-3,1)$	$(-1,3)$	$(2,3)$	$(4,-2)$
8	$(0,1)$	$(-2,3)$	$(-4,1)$	$(-4,-4)$	$(-2,-7)$	$(1,-5)$
9	$(-3,-3)$	$(-1,-6)$	$(2,-4)$	$(1,2)$	$(-1,4)$	$(-3,2)$
10	$(0,-2)$	$(3,-3)$	$(4,0)$	$(3,3)$	$(-1,3)$	$(-2,1)$
11	$(1,2)$	$(-1,4)$	$(-3,2)$	$(-3,-3)$	$(-1,-6)$	$(2,-4)$
12	$(3,3)$	$(-1,3)$	$(-2,1)$	$(0,-2)$	$(3,-3)$	$(4,0)$

Варианты 13-26. Кривая Безье задана своими опорными точками P_0, P_1, P_2. Разбить эту кривую на две кривые Безье второго порядка точкой, отвечающей значению параметра $t = 1/2$. Сделать чертеж.

N	P_0	P_1	P_2	N	P_0	P_1	P_2
13	$(0,1)$	$(2,3)$	$(-2,5)$	14	$(-2,8)$	$(4,6)$	$(0,2)$
15	$(0,0)$	$(4,6)$	$(-2,8)$	16	$(1,0)$	$(3,2)$	$(5,-2)$
17	$(-3,-3)$	$(1,5)$	$(3,7)$	18	$(-2,0)$	$(2,6)$	$(4,-2)$
19	$(-4,5)$	$(-2,1)$	$(4,-3)$	20	$(-3,3)$	$(1,5)$	$(3,-7)$
21	$(-3,5)$	$(-1,-1)$	$(3,3)$	22	$(4,-4)$	$(2,6)$	$(-2,0)$
23	$(-2,5)$	$(4,-1)$	$(6,3)$	24	$(3,-1)$	$(-1,5)$	$(5,7)$
25	$(1,-3)$	$(5,1)$	$(7,-5)$	26	$(6,5)$	$(4,-1)$	$(-2,3)$

Задача 5.

1,26. Найти длину кривой $u = 3v$, $0 < v < 2$, и угол между кривыми $u = 3v$ и $u = v$ вдоль катеноида $f(u,v) = (a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v, a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v, u)^T$.

2,25. Найти длину кривой $u = \pi/4$, $-\pi < v < \pi$, и угол между кривыми $u = v$ и $u = -v$ на эллипсоиде $f(u,v) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)^T$.

3,24. Найти длину кривой $u = 2v$, $0 < u < 1$, вдоль эллиптического параболоида $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)^T$.

4,23. Найти угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(2,0)$ и $(2,1)$ зонтика Уитни $f(u,v) = (u, uv, v^2)^T$. Найти длину кривой $u = 3$, $0 < v < 2$.

5,22. Найти длину кривой $u = -2v$, $0 < v < 1$, и угол между кривыми $u = -2v$ и $u = v$ вдоль катеноида $f(u,v) = (a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v, a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v, u)^T$.

6,21. Найти длину кривой $u = \pi/3$, $-\pi < v < \pi$, и угол между кривыми $u = v$ и $u = -v$ на эллипсоиде $f(u,v) = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)^T$.

7,20. Найти угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(2,0)$ и $(2,1)$ обезьянего седла $f(u,v) = (u, v, u^3 - 3uv^2)^T$. Найти длину кривой $u = 1$, $0 < v < 1$.

8,19. Найти длину кривой $2u = v$, $0 < u < 1$, вдоль эллиптического параболоида $f(u,v) = (2u\cos v, 2u\sin v, u^2)^T$.

9,18. Найти длину кривой $u = 2v$, $0 < u < 1$, вдоль конуса $f(u,v) = (au\cos v, au\sin v, u)^T$, и угол между кривыми $u - 2 = \pm v$.

10,17. Найти длину кривой $u = av$, $0 < u < 1$, вдоль гиперболического параболоида $f(u,v) = (u, v, uv)^T$, и угол между векторами стандартного базиса касательного пространства в т. $(1,1)$.

11,16. Найти длину кривой $2u = v$, $0 < u < 1$, вдоль конуса $f(u,v) = (au\cos v, au\sin v, u)^T$, и угол между кривыми $u - 1 = \pm v$.

12,15. Найти длину кривых $v = const$, $\frac{\pi}{6} < u < \frac{\pi}{2}$, вдоль псевдосферы $f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\ln\operatorname{tg}(u/2) + \cos u))^T$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 2\pi$, и угол между кривыми $u \pm v = \pi/4$.

13,14. Найти длину кривой $v = au$, $0 < u < 1$, вдоль гиперболического параболоида $f(u,v) = (u, v, uv)^T$, и угол между векторами стандартного базиса в т. $(1, -1)$.

Задача 6.

1,14. Найти площадь "внутренней" (т.е. заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$) части поверхности тора
$f(u,v) = (\,(a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u\,)^T$, $0<u<2\pi$, $0<v<2\pi$.

2,15. Найти площадь полосы $-1 < u < 1$ на поверхности катеноида
$f(u,v) = (a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v, a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v, u)^T$, $-\infty < u < +\infty$, $0 < v < 2\pi$.

3,16. Найти площадь "внешней" (т.е. находящейся вне цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$) части поверхности тора
$f(u,v) = (\,(a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u\,)^T$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$.

4,17. Найти объем области
$f(u,v,w) = (w\cos u\cos v, w\cos u\sin v, w\sin u)^T$, $\pi/4 < u < \pi/2$, $-\pi < v < \pi$, $0 < w < R$.

5,18. Найти объем части тора
$f(u,v,w) = (\,(a + w\cos u)\cos v, (a + w\cos u)\sin v, w\sin u\,)^T$, $0 < u < 2\pi$, $0<v<2\pi$, $0 < w < b$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

6,19. Найти объем части тора
$f(u,v,w) = (\,(a + w\cos u)\cos v, (a + w\cos u)\sin v, w\sin u\,)^T$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$, $0 < w < b$, находящейся вне цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

7,20. Найти площадь полосы шириной 30 градусов вдоль экватора сферы
$f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$, $-\pi/2<u<\pi/2$, $-\pi<v<\pi$.

8,21. Найти объем тора
$f(u,v,w) = (\,(a + w\cos u)\cos v, (a + w\cos u)\sin v, w\sin u)^T$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$, $0 < w < b$.

9,22. Найти площадь области шириной 30 градусов вокруг полюса сферы
$f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$, $-\pi/2<u<\pi/2$, $-\pi<v<\pi$.

10,23. Найти площадь области $0<u<1$ на эллиптическом параболоиде
$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)^T$, $0 < u < \infty$, $-\pi < v < \pi$.

11,24. Найти площадь области, ограниченной кривой $u^2+v^2=1$, на гиперболическом параболоиде $f(u,v)=(u,v,uv)^T$.

12,25. Найти площадь поверхности конуса, ограниченной вершиной конуса и кривой $u=1$,
$f(u,v)=(au\cos v, au\sin v, u)^T$, $-\infty<u<\infty$, $-\pi<v<\pi$.

13,26. Найти площадь псевдосферы
$f(u,v)=(a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\ln\operatorname{tg}(u/2)+\cos u))^T$, $0<u<\frac{\pi}{2}$, $0<v<2\pi$.

Задача 7.

1. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллипсоиде
$f(u,v)=(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, c\sin u)^T$.

2. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом параболоиде $f(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u^2)^T$.

3. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом цилиндре $f(u,v)=(a\cos v, b\sin v, u)^T$.

4. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на торе
$f(u,v)=(\,(a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u\,)^T$, $a>b$.

5. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на параболическом цилиндре $f(u,v)=(v, av^2, u)^T$.

6. Найти полную и среднюю кривизны, определить тип точек на гиперболическом параболоиде $f(u,v)=(u\operatorname{ch}v, u\operatorname{sh}v, u^2)^T$, а также главные направления в точках, лежащих на кривой $v=0$.

7. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке катеноида
$f(u,v)=(a\operatorname{ch}(u/a)\cos v, a\operatorname{ch}(u/a)\sin v, u)^T$. Определить тип точек.

8. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке геликоида $f(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)^T$. Определить тип точек.

9. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке гиперболического параболоида $f(u,v)=(u,v,uv)^T$. Определить тип точек.

10. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболическом цилиндре $f(u,v)=(a\operatorname{ch}v, b\operatorname{sh}v, u)^T$.

11. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболоиде $f(u,v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u)^T$.

12. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на гиперболоиде $f(u,v) = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u)^T$.

13. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершинах гиперболоида $x^2/a^2 + y^2/4a^2 - z^2/c^2 = -1$.

14. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления в вершине параболоида $x^2 + y^2/4 - z + 2 = 0$. Существуют ли направления, в которых нормальная кривизна равна 0? 1/2?

15. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершине параболоида $x^2/4a^2 - y^2/a^2 + z = 0$.

16. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления, определить тип точек на конусе $f(u,v) = (u \cos v, u \sin v, u)^T$.

17. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны, главные и асимптотические направления в т. $u = v = 0$ катеноида $f(u,v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$.

18. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершинах гиперболоида $x^2/4a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = -1$.

19. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления в вершине параболоида $x^2/4 + y^2 + z - 2 = 0$. Существуют ли в вершине направления, в которых нормальная кривизна равна 0? 1/2?

20. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления в вершине параболоида $x^2/a^2 - y^2/4a^2 + z = 0$.

21. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные и асимптотические направления, определить тип точек на конусе $f(u,v) = (3u \cos v, 3u \sin v, u)^T$.

22. Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны, главные и асимптотические направления в т. $u = 0$, $v = \pi/2$ катеноида $f(u,v) = (a \operatorname{ch}(u/a) \cos v, a \operatorname{ch}(u/a) \sin v, u)^T$.

23. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллипсоиде $f(u,v) = (2 \cos u \cos v, 2 \cos u \sin v, \sin u)^T$. Существуют ли точки, где кривизна в каком-либо направлении равна 0? 1/2? 2? 5?

24. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом параболоиде $f(u, v) = (u \cos v, 3u \sin v, u^2)^T$. Существуют ли точки, где кривизна в каком-либо направлении равна 0? 1/3? -1/3? 3? -3?

25. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллиптическом цилиндре $f(u, v) = (2 \cos v, \sin v, u)^T$. Существуют ли точки, где кривизна в каком-либо направлении равна 0? 1/2? -1/2? 2? -2?

26. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек на эллипсоиде $f(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, 2 \sin u)^T$. Существуют ли на нём точки, где кривизна в каком-либо направлении равна 0? 1/2? 2? 5?

Примеры решения задач

Задача 1.

Теоретические сведения.

Базис Френе плоской кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))^T$ содержит два единичных вектора – касательный $\vec{\tau} = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|} = (\frac{\dot{x}}{|\dot{\alpha}|}, \frac{\dot{y}}{|\dot{\alpha}|})^T$ и нормальный $\vec{\nu} = (-\frac{\dot{y}}{|\dot{\alpha}|}, \frac{\dot{x}}{|\dot{\alpha}|})^T$, $|\dot{\alpha}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Репер Френе плоской кривой – это тройка $(\alpha(t); \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$, состоящая из точки на кривой и единичных касательного и нормального векторов в этой точке.

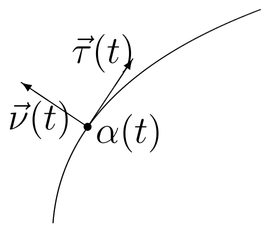

Рис. 1: Репер Френе

Кривизна k кривой $\alpha(t)$ находится по формуле

$$k = \frac{\det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}. \tag{1}$$

Радиус окружности, соприкасающейся с кривой в т. $\alpha(t_0)$

$$R = |\alpha(t_0) - P(t_0)| = \frac{1}{|k(t_0)|}.$$

Точка $P(t_0)$ – центр соприкасающейся окружности,

$$\begin{aligned} P(t_0) &= \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\vec{\nu}(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{|\dot{\alpha}|^3}{\det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}\left(-\frac{\dot{y}}{|\dot{\alpha}|}, \frac{\dot{x}}{|\dot{\alpha}|}\right)^T \\ &= \alpha(t_0) + \frac{|\dot{\alpha}|^2}{\det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}(-\dot{y}, \dot{x})^T \end{aligned}$$

называется центром кривизны кривой $\alpha(t)$ в момент t_0.

Угол между кривыми $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ в точке их пересечения $\alpha(t_0) = \beta(\theta_0)$ можно найти как угол между их касательными векторами $\dot{\alpha}(t_0)$ и $\dot{\beta}(\theta_0)$.

Если кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$, то, выбрав нормаль $\vec{\nu}$ сонаправленной градиенту F, получим для базиса Френе

$$\vec{\nu} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{(F'_x, F'_y)^T}{|\operatorname{grad} F|}, \quad \vec{\tau} = \frac{(F'_y, -F'_x)^T}{|\operatorname{grad} F|}.$$

Кривизна находится по формуле

$$k = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} |\operatorname{grad} F|^{-3} = \frac{2F''_{xy}F'_xF'_y - F''_{xx}F'^2_y - F''_{yy}F'^2_x}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}}, \tag{2}$$

центром соприкасающейся в т. $M_0(x_0, y_0)$ окружности является точка

$$P = (x_0, y_0)^T + (F_x'^2 + F_y'^2) \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}^{-1} (F'_x, F'_y)^T. \qquad (3)$$

1.1. Даны две кривые, одна задана параметрически, $\alpha(t) = (t-1, t^2)^T$, другая задана уравнением $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$.
а) Найти репер Френе и кривизну кривой $\alpha(t)$.
б) Найти угол между кривой $\alpha(t)$ и кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$, в т. $M_0(0, 1)$.
в) Для обеих кривых написать уравнения соприкасающихся окружностей в т. M_0,
сделать чертеж.

Решение.
а) $\dot\alpha(t) = (1, 2t)^T$, $\vec\tau = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(1, 2t)^T$, $\vec\nu = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t, 1)^T$.
Репер Френе для плоской кривой – это тройка $(\alpha(t); \vec\tau(t), \vec\nu(t))$. Вектор нормали $\vec\nu$ получается из $\vec\tau$ поворотом против часовой стрелки на $90°$. Чтобы построить $\vec\nu$ по $\vec\tau$, нужно поменять местами координаты вектора $\vec\tau$ и затем изменить знак у первой координаты.

Находим $\ddot\alpha(t) = (0, 2)^T$ и кривизну по формуле (1),

$$k = \frac{\det[\dot\alpha\ddot\alpha]}{|\dot\alpha|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}.$$

б) *Первый способ.* Уравнение второй кривой, заданной неявной функцией $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, перепишем в виде $x^2/4 + y^2 = 1$. Это уравнение эллипса с полуосями 2 и 1, в параметрическом виде $\beta(\theta) = (2\cos\theta, \sin\theta)^T$, $0 < \theta < 2\pi$, касательный вектор дается производной $\dot\beta(\theta) = (-2\sin\theta, \cos\theta)^T$. Угол находится как угол между касательными векторами $\dot\alpha(1) = (1, 2)^T$ и $\dot\beta(\pi/2) = (-2, 0)^T$ в т. $\alpha(1) = \beta(\pi/2) = M_0$, $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt5}$ (для соответствующего острого угла имеем $\frac{1}{\sqrt5}$).

Второй способ (без использования параметризации кривой). Угол между кривыми в точке M_0, т.е. угол между касательными к кривым в этой точке, равен углу между нормалями к кривым в этой точке. Нормалью к неявно заданной кривой является градиент $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y)^T = (x/2, 2y)^T$, $\operatorname{grad} F(M_0) = (0, 2)^T$. Удобно вместо последнего вектора взять коллинеарный ему вектор единичной длины $\vec n = (0, 1)^T$.

Для кривой $\alpha(t)$ имеем $M_0 = \alpha(1)$. Далее, $\dot\alpha(1) = (1, 2)^T$ и $\vec N = (-2, 1)^T$ – нормаль к кривой $\alpha(t)$ в точке M_0, $|\vec N| = \sqrt5$. Находим косинус угла между кривыми в точке M_0:

$$\cos\varphi = \frac{\langle\vec{n},\vec{N}\rangle}{\sqrt{\langle\vec{n},\vec{n}\rangle\cdot\langle\vec{N},\vec{N}\rangle}} = \frac{\langle\vec{n},\vec{N}\rangle}{|\vec{n}|\cdot|\vec{N}|} = \frac{0\cdot(-2)+1\cdot 1}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

в) Радиус соприкасающейся окружности к кривой α в точке $\alpha(t)$ равен $1/|k(t)|$, а ее центр – это точка $\alpha(t)+\dfrac{1}{k(t)}\vec{\nu}(t)$. Для точки M_0 центр соприкасающейся окружности – это точка $\alpha(1)+\dfrac{1}{k(1)}\vec{\nu}(1)$, ее радиус равен $1/|k(1)|$. Находим: $\vec{\nu}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)^T$, $k(1) = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$, $1/k(1) = 5\sqrt{5}/2$. Поэтому $\alpha(1)+\dfrac{1}{k(1)}\vec{\nu}(1) = (0,1)^T + \frac{5}{2}(-2,1)^T = (-5,7/2)^T$ и

$$(x+5)^2+(y-7/2)^2 = 125/4$$

– уравнение искомой окружности.

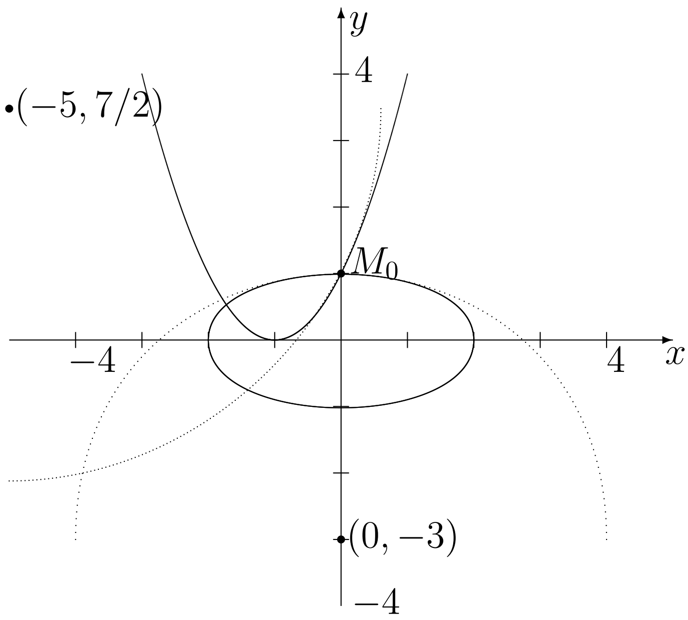

Рис. 2: К задаче 1.1

Ту же самую задачу для второй кривой можно решить несколькими способами.

Первый способ – параметризовать кривую. Поскольку вторая кривая – это эллипс, ее можно параметризовать следующим образом: $\beta(t) = (2\cos t, \sin t)^T$, точка M_0 получается при $t=\pi/2$. Если же в качестве параметра в окрестности точки M_0 взять x, то, поскольку $y=\sqrt{1-x^2/4}$, получаем еще одну параметризацию $\gamma(x) = (x, \sqrt{1-x^2/4})^T$, точка M_0 отвечает $x=0$. Имея параметризацию, можно дальше действовать так же, как в задаче для кривой α.

Второй способ. Найдем уравнение соприкасающейся окружности, используя формулу (3) для вычисления координат центра кривизны неявно заданной кривой. Имеем

$$F'_x = x/2,\ F'_y = 2y,\ F''_{xx} = 1/2,\ F''_{yy} = 2,\ F''_{xy} = 0,$$

откуда получаем: $F'_x(M_0)=0$, $F'_y(M_0)=2$ и $F'^2_x(M_0)+F'^2_y(M_0)=4$. Так как $F'_x(M_0)=0$, то координата центра соприкасающейся окружности $P_x = x_0 = 0$. Определитель в точке M_0 равен

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

поэтому $P_y = 1 + 2 \cdot \dfrac{4}{-2} = -3$. Итак, точка $P(0, -3)$ – центр кривизны. Радиус соприкасающейся окружности равен расстоянию $|PM_0|$ между точками P и M_0, т.е. равен 4. Зная центр и радиус окружности, пишем ее уравнение: $x^2 + (y+3)^2 = 16$.

Третий способ. В нашей задаче можно воспользоваться теоремой о том, что в окрестности точки существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой точка M_0 служит началом координат и кривая является графиком функции $y_1 = \varphi(x_1)$, причем $y_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + o(x_1^2)$, где k – кривизна.

В окрестности точки M_0 введем систему координат $x_1 = x$, $y_1 = y - 1$,

$$y = \sqrt{1 - x^2/4} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + o(x^2), \quad \text{т.е.} \quad y_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2}{4} + o(x_1^2).$$

Следовательно, $k = -\frac{1}{4}$, и, значит, радиус соприкасающейся окружности равен 4. Поскольку кривая ориентирована в окрестности точки M_0 по возрастанию $x_1 = x$, единичная нормаль равна $(0,1)^T$, поэтому центр соприкасающейся окружности имеет координаты
$(0,1)^T - 4(0,1)^T = -3(0,1)^T = (0,-3)^T$, а ее уравнение – вид $x^2 + (y + 3)^2 = 16$.

Задача 2.

Теоретические сведения.

Особая точка плоской *параметрически заданной* кривой определяется как точка, в которой $\dot{\alpha}(t) = 0$. Тип точки кривой $\alpha(t)$ задается парой чисел (p, q), где p - порядок первой отличной от нуля производной $\alpha^{(p)} \neq 0$, а q – порядок производной, следующей за p-й, не коллинеарной $\alpha^{(p)}$.

Если $p = 1$, то точка является регулярной. Если $p > 1$, то при четных p и q имеем точку возврата 2-го рода (“клюв”, ветви по одну сторону от касательной), при четном p и нечетном q – точку возврата 1-го рода (ветви по разные стороны от касательной). Направляющий вектор касательной – вектор первой по счету (т.е. p-й) производной, отличной от нуля.

Особая точка плоской кривой, *заданной неявной функцией* $F(x,y) = 0$ – это точка на кривой, для которой $\operatorname{grad} F = (F'_x, F'_y) = 0$. В такой точке поведение функции определяется ее вторым дифференциалом d^2F. Второй дифференциал $d^2F(x,y) = F''_{xx}(x - x_0)^2 + 2F''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) +$

$F''_{yy}(y-y_0)^2$ (если не все вторые частные производные равны нулю) представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$. Будем искать в т. (x_0, y_0) направления, по которым d^2F обращается в 0.

Если $\Delta > 0$ (квадратичная форма положительно или отрицательно определена), то $d^2F(x_0, y_0)$ обращается в ноль только в точке (x_0, y_0) – изолированной особой точке.

Если $\Delta < 0$, то форма не является знакоопределенной и в некотором базисе она может быть приведена к каноническому виду, $d^2F = a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 - b^2(\tilde{y} - \tilde{y}_0)^2 = 0$. Это уравнения пары пересекающихся прямых (касательных) в точке самопересечения кривой (узле).

Если $\Delta = 0$, и хотя бы одна из производных отлична от нуля, то канонический вид $a^2(\tilde{x} - \tilde{x}_0)^2 = 0$ (каксательные двух ветвей совпадают), т. (x_0, y_0) – точка возврата (1 или 2 рода) или точка самоприкосновения (касательная $\tilde{x} = \tilde{x}_0$), или узел.

2.1. Определить тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках, построить образ кривой

$$\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T.$$

Решение.
Производная $\dot{\alpha}(t) = (4t^3, 2t - 5t^4)^T$ вектор-функции $\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T$ обращается в ноль при $t = 0$, а значит $\alpha(0) = (0, 0)^T$ – особая точка. Находим первые две отличные от нуля производные в этой точке:

$$\ddot{\alpha}(t) = (12t^2, 2 - 20t^3)^T, \quad \ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T,$$
$$\dddot{\alpha}(t) = (24t, -60t^2)^T, \quad \dddot{\alpha}(0) = (0, 0)^T,$$
$$\alpha^{(4)}(t) = (24, -120t)^T, \quad \alpha^{(4)}(0) = (24, 0)^T.$$

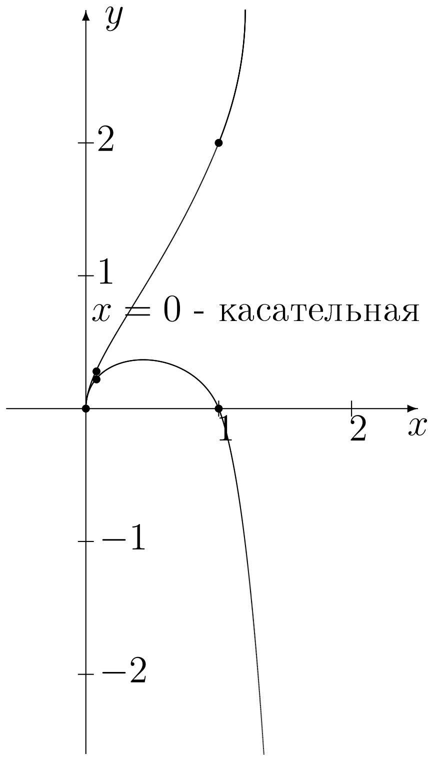

Рис. 3: К задаче 2.1

Это производные 2-го и 4-го порядков, поэтому тип точки $(p, q) = (2, 4)$, p и q четные, а значит $(0, 0)^T$ – точка возврата 2-го рода и ветви кривой лежат по одну сторону от касательной. Касательный вектор в особой точке задается первой отличной от нуля производной, это $\ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T$, уравнение касательной $x = 0$. Составляем таблицу значений x, y в зависимости от параметра t:

t	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x	16	1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	1	16
y	36	2	$\frac{9}{32}$	0	$\frac{7}{32}$	0	-28

2.2. Определить тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках, построить образ кривой

$$y^2 = 2x^2 + x^3.$$

Решение.
Кривая – прообраз нуля функции $F(x,y) = 2x^2 + x^3 - y^2$. Найдем точки, в которых нарушаются условия теоремы о неявной функции, т.е. $dF = 0$ или $F_x^{'} = F_y^{'} = 0$: $F_x^{'} = 4x + 3x^2 = 0$, $F_y^{'} = -2y = 0$. Имеем 2 точки, $A(0,0)$ и $B(-\frac{4}{3}, 0)$. Проверим, лежат ли эти точки на кривой: $F(0,0) = 0$, $F(-\frac{4}{3}, 0) = \frac{32}{27} \neq 0$. Таким образом, A лежит на кривой и является особой точкой, B не лежит на кривой.

Находим вторые производные в точке $A(0,0)$: $F_{xx}^{''} = 4 + 6x = 4$, $F_{yy}^{''} = -2$, $F_{xy}^{''} = 0$. Т.о., второй дифференциал представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8$. Будем искать в т.$A$ направления, в которых d^2F обращается в ноль. Форма является знакопеременной, условие $d^2F = 4(x-0)^2 - 2(y-0)^2 = 2(\sqrt{2}x + y)(\sqrt{2}x - y) = 0$ удовлетворяется при $\sqrt{2}x \pm y = 0$ – это уравнения 2-х касательных, A – точка самопересечения (узел).

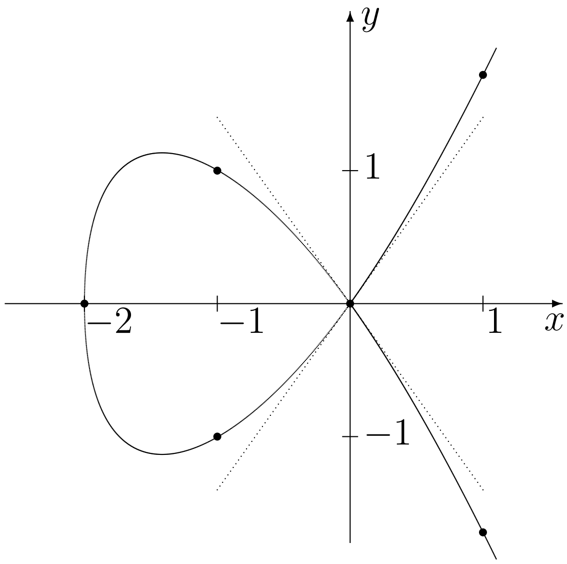

Рис. 4: К задаче 2.2

Для построения образов кривых полезно найти точки пересечения с осью Ox, подставив $y = 0$ в $F(x,y) = 0$: $2x^2 + x^3 = 0$, $x^2(2+x) = 0$, точки $x = 0$; $x = -2$ и заметить, что $F(x,-y) = F(x,y)$, а значит, кривая симметрична относительно оси Ox. Для рассматриваемой кривой также легко найти еще несколько точек: при $x = -1$ $y = \pm 1$, при $x = 1$ $y = \pm\sqrt{3}$.

Задача 3.

Теоретические сведения.
Построение базиса Френе в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\alpha}}{|\dot{\alpha}|}, \ \vec{\beta} = \frac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}, \ \vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}.$$

Кривизна и кручение кривой $\alpha(t)$ в $\mathbb{R}^3$ даются формулами

$$k = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}, \qquad \varkappa = \frac{\langle \dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2},$$

где $\langle \dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle = \det[\dot\alpha\ \ddot\alpha\ \dddot\alpha]$ – смешанное произведение векторов.

Три условия являются равнозначными: кручение $\varkappa = 0$ для всех t, кривая является плоской, вектор бинормали β не зависит от t. При этом вектор бинормали перпендикулярен плоскости, в которой лежит кривая.

3.1. Найти кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$.

Решение.

$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$,
$\dot\alpha(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)^T$,
$\ddot\alpha(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)^T$.

Вычисляем $|\dot\alpha \times \ddot\alpha| = \begin{vmatrix} i & -a\sin t & -a\cos t \\ j & a\cos t & -a\sin t \\ k & b & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\, i - ab\cos t\, j + a^2\, k$,

$|\dot\alpha\,(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|\dot\alpha \times \ddot\alpha| = a\sqrt{a^2+b^2}$.

Кривизна $k = \dfrac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.

Чтобы найти кручение, надо посчитать третью производную

$\dddot\alpha(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)^T$, $\quad \langle \dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t \\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = ba^2$.

Кручение $\varkappa = \dfrac{\langle \dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2} = \dfrac{ba^2}{a^2\,(a^2+b^2)} = \dfrac{b}{(a^2+b^2)}$.

3.2. Показать, что кривая $x = 1+3t+2t^2, y = 2-2t+5t^2, z = 1-t^2$ плоская; найти вектор бинормали и плоскость, в которой она лежит.

Решение:

$\alpha(t) = (1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, 1-t^2)$,
$\dot\alpha(t) = (3+4t, -2+10t, -2t)$,
$\ddot\alpha(t) = (4, 10, -2)$.

$$\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) = \begin{vmatrix} 3+4t & 4 & i \\ -2t+10 & 10 & j \\ -2t & -2 & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & i \\ -2 & 5 & j \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 2(2i+3j+19k).$$

Так как этот вектор (сонаправленный с бинормалью β) не зависит от t, кривая является плоской, бинормаль $\beta = \frac{2i+3j+19k}{\sqrt{374}}$.

Выберем любую точку на кривой; $t = 0$ отвечает точка $M(1, 2, 1)$.

Кривая лежит в плоскости $2(x-1) + 3(y-2) + 19(z-1) = 0$.

Задача 4.

Теоретические сведения.

Квадратичная кривая Безье

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0+2t(1-t)\mathbf{P}_1+t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0,1],$$

задается 3 опорными точками $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ и представляет собой отрезок параболы. Производные

$$\mathbf{B}'(0) = 2(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0), \qquad \mathbf{B}'(1) = 2(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1),$$

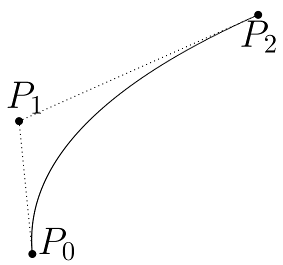

Рис. 5: Квадратичная кривая Безье

представляющие собой направляющие вектора касательных в конечных точках кривой $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_2$ – это вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Следовательно, точка $\mathbf{P}_1$ – это точка пересечения касательных к кривой в точках $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_2$.

4.1. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$, $R_2(5,1)$. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$ так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0? Сделать чертеж.

Решение.

Пусть Q – точка пересечения прямых, проходящих через $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$ соответственно. Тогда квадратичная кривая Безье с опорными точками P_2, Q, R_0 и является искомой частью сплайна (кривая Безье подходит к первой и последней опорным точкам касаясь соответственно первого и последнего звеньев).

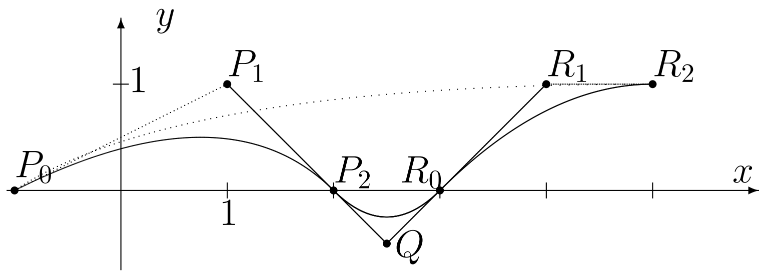

Рис. 6: К задаче 4.1

Найдем пересечение прямых. Первая прямая имеет направляющий вектор $\overrightarrow{P_1P_2} = (1,-1)^T$, и проходит через P_2. Поэтому ее уравнение: $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1}$, или $y = 2-x$. Вторая прямая проходит через точку R_0 и ее направляющий вектор равен $\overrightarrow{R_0R_1} = (1,1)^T$, поэтому ее уравнение имеет вид: $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1}$, или $y = x-3$. Находим координаты точки Q, решая систему из двух уравнений прямых. Имеем $2-x = x-3$, поэтому $x = 2.5$ и $y = -0.5$. Искомая кривая Безье задается точками $P_2(2,0)$, $Q(2.5,-0.5)$, $R_0(3,0)$.

В двух других случаях будут получаться точки возврата и построенный сплайн не будет гладким. Чтобы сплайн получался гладким, в ломаной, построенной по точкам P_1, P_2, Q, R_0, R_1, не должно быть наложения звеньев, т.е. звенья должны пересекаться только в концевых точках. По другому можно сказать, что на прямой, проходящей через точки P_1, P_2, Q, точки P_1 и Q должны располагаться по разные стороны от точки P_2. Аналогично, на прямой, проходящей через точки Q, R_0, R_1, точки Q и R_1 должны располагаться по разные стороны от точки R_0.

4.2. Кривая Безье задана своими опорными точками $P_0(0,-1)$, $P_1(2,3)$, $P_2(4,-1)$. Разбить эту кривую на две кривые Безье второго порядка точкой, отвечающей значению параметра $t = 1/2$. Сделать чертеж.

Решение.

Найдем точку $R = B(\frac{1}{2})$, подставляя $t = 1/2$ в уравнение исходной квадратичной кривой Безье $B(t) = (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$:

$$R = B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 = (2,1).$$

Осталось найти средние опорные точки R_1 и R_2 новых кривых P_0, R_1, R и R, R_2, P_2 как точки пересечения касательных в их конечных опорных точках. Находим сначала касательную к исходной кривой Безье P в точке $R(2,1)$. Касательный вектор $B'(t) = -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2 = P_2 - P_0 = (4,0)$, уравнение касательной $y = 1$. Касательные векторы в точках P_0 и P_2 – это соответственно $P_0P_1 = (2,4)$ и $P_1P_2 = (2,-4)$, уравнения касательных $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{4}$, $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4}$, или $x = 2y + 2$, $y = -2x + 7$. Находим их точки пересечения R_1 и R_2 с касательной $y = 1$ к исходной кривой в т. R: $R_1(1,1)$, $R_2(3,1)$.

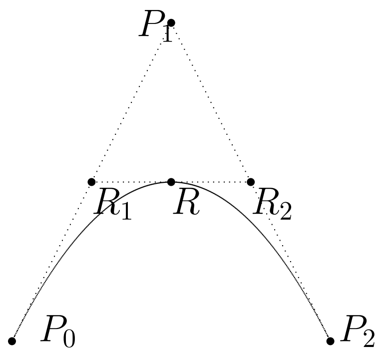

Рис. 7: К задаче 4.2

Задача 5.

Теоретические сведения.

Матрица первой фундаментальной формы поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ находится как матрица из скалярных произведений векторов стандартного базиса касательного пространства: $g_{ik} = \langle f'_{u^i}, f'_{u^k} \rangle$. Длина кривой вдоль поверхности с матрицей первой фундаментальной формы $[g_{ik}]$:

$$l[\alpha]|_a^b = \int\limits_a^b |\dot{\alpha}(t)|dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i(t)\dot{u}^j(t)}dt = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}du^idu^j}.$$

Последнее выражение удобно, когда явная параметризация неизвестна, но известно соотношение между дифференциалами du^i (т.е. когда кривая задана изначально уравнением в поверхностных координатах).

Рассмотрим пару кривых вдоль поверхности f:

$$\alpha_1(t) = f(u_1(t)),\ \ \alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta)).$$

Пусть они пересекаются в точке $p = u_1(t_0) = u_2(\theta_0) \in U$; это означает, что они пересекаются на поверхности в точке $f(p) = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(\theta_0)$, $\dot{\alpha}_1(t_0) = f'_{u^i}(p)\dot{u}_1^i(t_0)$, $\dot{\alpha}_2(\theta_0) = f'_{u^i}(p)\dot{u}_2^i(\theta_0)$,

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot{\alpha}_1(t_0), \dot{\alpha}_2(\theta_0)\rangle}{|\dot{\alpha}_1(t_0)||\dot{\alpha}_2(\theta_0)|} = \frac{g_{ij}\dot{u}_1^i(t_0)\dot{u}_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij}\dot{u}_1^i(t_0)\dot{u}_1^j(t_0)}\sqrt{g_{ij}\dot{u}_2^i(\theta_0)\dot{u}_2^j(\theta_0)}}$$

5.1. Найти длину кривой $u = v$, $0 < v < 2\pi$, вдоль прямого геликоида $f(u, v) = (u\cos v, u\sin v, av)^T$. Под каким углом пересекаются кривые $u = v$ и $u = 0$?

Решение.

Находим вектора стандартного базиса касательного пространства

$$f_u' = (\cos v, \sin v, 0)^T, \quad f_v' = (-u\sin v, u\cos v, a)^T.$$

Матрица 1-й фундаментальной формы строится как их матрица Грама,

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{bmatrix}, \quad ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2)dv^2.$$

На кривой $u = v = t$, $du = dt$, $dv = dt$, поэтому её длина

$$l = \int ds = \int \sqrt{du^2 + (a^2 + u^2)dv^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + a^2 + t^2}\, dt.$$

Проинтегрируем по частям, и из полученного соотношения выразим l.

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + a^2 + t^2}\, dt = t\sqrt{1 + a^2 + t^2}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} t\, d\left(\sqrt{1 + a^2 + t^2}\right) = \\
&= \sqrt{1 + a^2 + 4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1 + a^2 + t^2}} = \\
&= \sqrt{1 + a^2 + 4\pi^2} - \int_0^{2\pi} \frac{(1 + a^2 + t^2)\, dt}{\sqrt{1 + a^2 + t^2}} + \int_0^{2\pi} \frac{(1 + a^2)dt}{\sqrt{1 + a^2 + t^2}} = \\
&= \sqrt{1 + a^2 + 4\pi^2} - l + (1 + a^2)\ln(t + \sqrt{1 + a^2 + t^2})\Big|_0^{2\pi} = \\
&= -l + \sqrt{1 + a^2 + 4\pi^2} + (1 + a^2)\ln\left(\frac{2\pi + \sqrt{1 + a^2 + 4\pi^2}}{\sqrt{1 + a^2}}\right),
\end{aligned}$$

откуда находим:

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{1+a^2+4\pi^2} + \frac{1}{2}(1+a^2)\ln\left(\frac{2\pi+\sqrt{1+a^2+4\pi^2}}{\sqrt{1+a^2}}\right).$$

Отметим, что рассмотренный выше интеграл можно также вычислить, приведя к виду $\int\sqrt{1+x^2}dx$, после чего использовать подстановку $x = \operatorname{sh}\theta$ или $x = \operatorname{tg}\theta$.

Для нахождения угла между кривыми $u = v$ и $u = 0$ параметризуем их: $\alpha_1(t) = (t,t)^T$, $\alpha_2(\theta) = (0,\theta)^T$. Кривые пересекаются в точке $u = v = 0$ при $t = \theta = 0$. Касательные векторы в этой точке получаем, дифференцируя, $\dot\alpha_1(0) = (1,1)^T$, $\alpha_2'(0) = (0,1)^T$. Далее стандартным образом находим скалярное произведение и длины этих векторов с помощью матрицы Грама, т.е. матрицы 1-й фундаментальной формы геликоида. При $u = v = 0$ матрица равна $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & a^2\end{bmatrix}$, поэтому скалярное произведение векторов $(\xi_1,\eta_1)^T$ и $(\xi_2,\eta_2)^T$ равно $\xi_1\xi_2 + a^2\eta_1\eta_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\langle\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_1(0)\rangle = 1\cdot 1 + a^2\cdot 1\cdot 1 = 1+a^2,\\
&\langle\alpha_2'(0),\alpha_2'(0)\rangle = 0\cdot 0 + a^2\cdot 1\cdot 1 = a^2,\\
&\langle\dot\alpha_1(0),\alpha_2'(0)\rangle = 1\cdot 0 + a^2\cdot 1\cdot 1 = a^2,
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\alpha_1(0),\alpha_2'(0)\rangle}{\sqrt{\langle\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_1(0)\rangle\cdot\langle\alpha_2'(0),\alpha_2'(0)\rangle}} = \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^2)a^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Задача 6.

Теоретические сведения.

Объем n-мерной поверхности находится по формуле:

$$V[f] = \int\limits_U \sqrt{\det g(p)}\,du^1\ldots du^n.$$

6.1. Найти площадь полусферы

$$\begin{aligned}
f(u,v) &= (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T\\
&= R(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T.
\end{aligned}$$

Решение.

Находим вектора стандартного базиса касательного пространства:
$f'_u = R(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)^T$,
$f'_v = R(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)^T$.
Находим элементы матрицы первой фундаментальной формы:
$g_{11} = \langle f'_u, f'_u \rangle = R^2(\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u) = R^2$,
$g_{22} = \langle f'_v, f'_v \rangle = R^2(\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v) = R^2 \cos^2 u$,
$g_{12} = g_{21} = \langle f'_u, f'_v \rangle =< f'_v, f'_u >= 0$,

$$g = \begin{bmatrix} \langle f'_u, f'_u \rangle & \langle f'_u, f'_v \rangle \\ \langle f'_v, f'_u \rangle & \langle f'_v, f'_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{bmatrix} \Rightarrow \sqrt{\det g} = R^2 \cos u.$$

На верхней полусфере $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, 2\pi]$, поэтому площадь равна:

$$\int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} R^2 \cos u \, dv = R^2 \int_0^{\pi/2} \cos u \, du \int_0^{2\pi} dv = R^2 \left(\sin u|_0^{\pi/2}\right) 2\pi = 2\pi R^2.$$

6.2. Найти объем шара
$f(u, v, w) = (w \cos u \cos v, w \cos u \sin v, w \sin u)^T$;
$u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$; $v \in (-\pi; \pi)$; $0 < w < R$.
Решение.
$f'_u = (-w \sin u \cos v, -w \sin u \sin v, w \cos u)^T$,
$f'_v = (-w \sin v \cos u, w \cos u \cos v, 0)^T$,
$f'_w = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)^T$.
Находим элементы матрицы первой фундаментальной формы:
$g_{11} = \langle f'_u, f'_u \rangle = w^2 \cos^2 v \sin^2 u + w^2 \sin^2 v \sin^2 u + w^2 \cos^2 u = w^2$,
$g_{12} = \langle f'_u, f'_v \rangle = w^2 \cos v \cos u \sin u \sin v - w^2 \cos v \cos u \sin u \sin v = 0$,
$g_{22} = \langle f'_v, f'_v \rangle = w^2 \cos^2 u \sin^2 v + w^2 \cos^2 v \cos^2 u) = w^2 \cos^2 u$,
$g_{33} = \langle f'_w, f'_w \rangle = \cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u = 1$,
$g_{13} = g_{23} = 0$,

$$g = \begin{bmatrix} w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 \cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\det g} = w^2 \cos u.$$

$$V = \iiint\limits_V w^2 \cos u du dv dw = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \int\limits_{-\pi}^{\pi} dv \int\limits_0^R w^2 dw = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Задача 7.

Теоретические сведения.

Элементы матрицы второй фундаментальной формы гиперповерхности $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ находятся по формуле

$$h_{ij} = \langle \vec{N}, f''_{u^i u^j} \rangle = \frac{\langle f'_{u^i} \times \cdots \times f'_{u^n}, f''_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{\det g}} = \frac{\det[f'_{u^1} \ \ldots \ f'_{u^n} \ f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}},$$

где $f'_{u^i}\times\dots\times f'_{u^n}$ – обобщенное векторное произведение. В частном случае $f: U\subseteq R^2\to R^3$:

$$h_{ij}=\frac{\det[f'_{u^1}\ f'_{u^2}\ f''_{u^iu^j}]}{\sqrt{\det g}},$$

где в числителе стоит смешанное произведение

$$\langle f'_{u^1}, f'_{u^2}, f''_{u^iu^j}\rangle=\det[f'_{u^1}\ f'_{u^2}\ f''_{u^iu^j}].$$

В стандартном базисе $f'_{u^1},\dots,f'_{u^n}$ касательного пространства T_pf матрица основного оператора гиперповерхности L_p имеет вид:

$$[L_p]=[g_{ij}]^{-1}[h_{ij}].$$

$K(p)=\det[L_p]$ – полная (Гауссова) кривизна гиперповерхности f в точке p,
$H(p)=\dfrac{1}{n}\operatorname{Tr}[L_p]$ – средняя кривизна гиперповерхности f в точке p.
Собственные значения $k_1\dots k_n$ оператора L_p называются главными нормальными кривизнами.
Собственные вектора $X_1\dots X_n$ оператора L_p называются главными направлениями.

На двумерных поверхностях $\mathbb{R}^3$ в зависимости от значений полной (Гауссовой) кривизны $K=k_1k_2$ и средней кривизны $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ различается 4 типа точек.

1) *Эллиптическая* точка.
$K>0$ (k_1 и k_2 одного знака) – поверхность вблизи точки $f(p)$ представляет собой эллиптический параболоид (с точностью до $o(x^2+y^2)$). Поверхность загибается по главным направлениям в одну и ту же сторону (относительно касательной плоскости): точки, близкие к точке $f(p)$, лежат по одну сторону от касательной плоскости.

2) *Гиперболическая* точка.
$K<0$ (k_1 и k_2 разных знака) – гиперболический параболоид (седло). Поверхность загибается по главным направлениям в разные стороны; точки, близкие к точке $f(p)$, могут лежать по разные стороны от касательной плоскости.

3) *Параболическая* точка.
$K=0$, $H\neq 0$ – параболический цилиндр (поверхность искривлена только в одном направлении); всегда есть сколь угодно близкие к $f(p)$ точки, лежащие на касательной плоскостии.

4) $K=0$, $H=0$ – *точка уплощения.*

Главные нормальные кривизны k_1 и k_2 задают экстремальные значения кривизны в точке, в промежуточных направлениях кривизна принимает промежуточные значения между k_1 и k_2.

7.1. Найти главные кривизны, полную и среднюю кривизны, а также главные направления, определить тип точек конуса
$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, au)^T$.

Решение.
Находим частные производные первого и второго порядков от f:
$f'_u = (\cos v, \sin v, a)^T$.
$f'_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)^T$,
$f''_{uu} = (0,0,0)^T$,
$f''_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)^T$,
$f''_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)^T$.
Находим матрицу первой фундаментальной формы:
$g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = 1 + a^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f'_u, f'_v\rangle = 0$, $g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = u^2$,

$$g = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{\det g} = u\sqrt{1+a^2}, \qquad g^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2} \end{bmatrix}.$$

Далее находим элементы матрицы второй фундаментальной формы (определители получаем разложением по третьей строке):

$$\sqrt{\det g}\ h_{11} = \det[f'_u f'_v f''_{uu}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uu}\rangle = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$h_{11} = 0.$

$$\sqrt{\det g}\ h_{12} = \det[f'_u f'_v f''_{uv}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uv}\rangle = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v & u\cos v \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$h_{12} = h_{21} = 0.$

$$\sqrt{\det g}\ h_{22} = \det[f'_u f'_v f''_{uv}] = \langle\, f'_u, f'_v, f''_{uv}\rangle = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & -u\cos v \\ \sin v & u\cos v & -u\sin v \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = au^2,$$

$h_{22} = \dfrac{au}{\sqrt{1+a^2}}.$

Здесь $\langle\cdot\,,\cdot\,,\cdot\rangle$ – смешанное произведение трех векторов в $\mathbb{R}^3$.

Итак, матрица второй фундаментальной формы имеет вид:

$$\mathrm{II} = [h_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{au}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix}.$$

Далее, находим матрицу основного оператора поверхности:

$$L = g^{-1}\cdot\mathrm{II} = [g_{ij}]^{-1}[h_{ij}] = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{au}{\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a}{u\sqrt{1+a^2}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{a}{u\sqrt{1+a^2}}, \quad K = k_1k_2 = 0, \quad H = \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{a}{2u\sqrt{1+a^2}}.$$

Базисные векторы f'_u, f'_v – собственные векторы оператора L. Они определяют главные направления. Конус является поверхностью вращения, меридианы – это исходящие из вершины конуса прямые. Эти прямые и ортогональные им касательные к параллелям дают главные направления. Отметим также, что исходящие из вершины прямые, лежащие на конусе, являются линиями кривизны и одновременно асимптотическими линиями.

Поскольку $K = 0$, а $H \neq 0$, точки на конусе параболические.

7.2. Найти главные нормальные кривизны и главные направления в вершине $z = c$ эллипсоида $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Существуют ли в этой вершине направления, в которых кривизна равна 0? -$c/5$? $c/5$? -$c/2$?
Решение.
Для решения задачи можно было бы найти матрицу основного оператора гиперповерхности, однако вычисления сильно сократятся, если мы воспользуемся теоремой о том, что в окрестности точки такой поверхности существует такая декартова прямоугольная система координат, что поверхность является графиком функции $z = \varphi(x, y)$, причем $z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + o(x^2 + y^2)$, где k_1 и k_2 – кривизны.
В окрестности вершины $z = c$ имеем $z = c\sqrt{1 - (\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2})} = c(1 - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2}) + o(x^2 + y^2))$,
$z = c - \frac{c}{2\cdot 3^2}x^2 - \frac{c}{2\cdot 2^2}y^2 + o(x^2 + y^2)$, и в точке $(0, 0, c)$ $k_1 = -\frac{c}{3^2}$, $k_2 = -\frac{c}{2^2}$.
(Чтобы привести уравнение к форме, указанной выше, надо сдвинуть начало отсчета в т. $z = c$.)

Главные направления в рассматриваемой вершине совпадают с направлениями первых двух координатных осей. В промежуточных направлениях кривизна принимает промежуточные значения между $k_1 = -\frac{c}{3^2}$ и $k_2 = -\frac{c}{2^2}$, а значит, существуют направления, в которых кривизна принимает значение $-\frac{c}{5}$, другие значения из приведенного списка кривизна принимать не может.

Вопросы к экзамену

1. Аффинное пространство. Обобщенное векторное произведение.
2. Векторные функции скалярного аргумента. Кривая. Регулярность, длина кривой.
3. Эквивалентность кривых, кривые единичной скорости. Натурально параметризованные кривые.
4. Касание плоских кривых. Соприкасающаяся окружность.
5. Репер Френе плоской кривой, уравнения Френе, нахождение кривизны. Натуральные уравнения кривой.
6. Особые точки плоских кривых, заданных параметрически.
7. Особые точки плоских кривых, заданных уравнением $F(x, y) = 0$.
8. Кривые Безье, их свойства.
9. Кривые общего вида. Репер и уравнения Френе. Основная теорема локальной теории кривых. Теорема о последней кривизне.
10. Построение репера Френе, нахождение кривизны и кручения кривой в 3-х мерном пространстве.
11. Дифференциал гладкого отображения. Определение поверхности. Касательное пространство.
12. Первая фундаментальная форма поверхности. Внутренняя геометрия поверхностей: нахождение длин, углов, объемов.
13. Криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$.
14. Замена поверхностных координат. Изометричность поверхностей.
15. Основной оператор гиперповерхности. Вторая фундаментальная форма поверхности.
16. Внешняя геометрия гиперповерхности. Кривизны и главные направления, линии кривизны.
17. Локальное строение гиперповерхности, типы точек.
18. Нормальная кривизна гиперповерхности. Теорема Менье, формула Эйлера для нахождения кривизны, асимптотические направления.
19. Поверхности Безье.