01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 3

Условные вероятности

Условные вероятности

Рассмотрим бросание игральной кости

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$$A = \{1,3,6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$B = \{2,4,6\} \qquad P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{|A \cdot B|}{|B|} =$$

$$= \frac{\frac{|A \cdot B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Условные вероятности

Условная вероятность события A **при условии, что событие** B **произошло** ($(P(B)>0)$, **обозначается как** $P(A|B)$ **или** $P_B(A)$ **и определяется как** $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Свойства условной вероятности:

1. Аддитивность:

если $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$, **то** $\mathrm{P}(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i|B)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i|B)$.

2. Формула умножения для двух событий:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

при условии $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$.

Свойства условной вероятности

2. Формула умножения для *n* событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Доказательство формулы умножения для *n* событий:

$$B_k=A_1\ldots A_k\Rightarrow B_1=A_1;B_k=A_k\cdot B_{k-1};A_1A_2\ldots A_n=B_n$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n\cdot B_{n-1})=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(B_{n-1})=$$

$$=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(A_{n-1}|B_{n-2})\cdot P(B_{n-2})=\ldots$$

$$=P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\ldots A_{n-2})\ldots P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Если $P(A|B) = P(A)$, **то говорят, что событие A не зависит от события B.**

Свойства независимости:

1. Следующие свойства эквивалентны при условии $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$:

а) A **и** B **– независимы;**

б) $P(A|B) = P(A)$ **(событие A не зависит от B);**

в) $P(B|A) = P(B)$ **(событие B не зависит от A).**

Свойства независимости

2. Если $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$ **и** $A \cdot B = \varnothing$ **(т.е.** A **и** B **несовместны), то** A **и** B **зависимы.**

3. Следующие утверждения эквивалентны:

а) A **и** B **независимы;**

б) A **и** $\overline{B}$ **независимы;**

в) $\overline{A}$ **и** B **независимы;**

г) $\overline{A}$ **и** $\overline{B}$ **независимы.**

4. Если A **и** B **независимы, то** $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$ **.**

5. Для любого события A**:** A **и** $\varnothing$ **независимы**

и A **и** Ω **независимы.**

Независимость событий

События $\{A_1,\ldots,A_n\}$ **называются попарно независимыми, если для всех** $i \neq j$ **верно** $P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j)$.

События $\{A_1,\ldots,A_n\}$ **называются независимыми в совокупности, если для всех различных** $i_1,i_2,\ldots,i_k$ **верно** $P(A_{i_1}\ldots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_k})$.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное неверно.

Формулы сложения для независимых событий

Формула сложения для 2-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$$

Формула сложения для 3-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$