Лекция 15.

Пусть $f: \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ числовая функция переменной $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую будем записывать как $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение предела(по Гейне)**.** Будем говорить, что функция $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет предел равный числу $A \in \boldsymbol{R^n}$ при значении переменной $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремящемуся к $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, если $f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(X_0)$ точки X_0 и для любой последовательности $\{X_k\}$ точек из окрестности $\dot{U}(X_0)$, сходящейся к X_0, последовательность $\{f(X_k)\}$ сходится к числу A. Или

$$A = \lim_{\mathrm{X} \to \mathrm{X}_0} f(X) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Гейне}} \forall \{X_k\}, X_k \in \dot{U}(X_0), \lim_{k \to \infty} X_k = X_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(X_k) = A .$$

Определение предела (по Коши). Пусть функция $f(X)$ определена в некоторой окрестности конечной точки X_0 за исключением, может быть, самой точки X_0. **Число** A **называется пределом функции** $f(X)$ в точке X_0

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, зависящее от ε, что для всех X, для которых выполняется неравенство $\left| X - X_0 \right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(X) - A \right| < \varepsilon$. Или кратко:

$$A = \lim_{X \to X_0} f(X) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Коши}} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall X, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon .$$

Теорема. Определения предела по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство.

Рассмотрим некоторую функцию $f(X)$ определенную в некоторой окрестности $\dot{U}(X_0)$ конечной точки X_0 за исключением, может быть, самой точки X_0. Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ единичный вектор, $\left|\vec{\theta}\right| = 1$, тогда точки вида $X_0 + t\vec{\theta} = (x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$, где $t > 0$, образуют луч, выходящий из точки X_0 в направлении вектора $\vec{\theta}$. Пределом функции $f(X)$ по направлению $\vec{\theta}$ называется предел функции $F(t) = f(x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$, если он существует

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{t \to 0} f(X_0 + t\vec{\theta}).$$

Пример. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$,

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует, т.к. пределы по направлениям различны.

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ не существует, хотя существуют равные пределы по направлениям.

Определение. Будем писать $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = \infty$ если $f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(X_0)$ и $\forall R > 0 \exists \delta_R$>0: $\forall X \in \dot{U}(X_0), 0 < |X - X_0| < \delta_R \Rightarrow |\, f(X)| > R$.

Определение. Будем писать $\lim\limits_{X\to \infty} f(X) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0$: $\forall X, |X| > R_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon$.

Теорема. Пусть $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, $B = \lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ конечные пределы. Тогда

а) $\lim\limits_{X\to X_0} \big(\alpha f(X) + \beta g(X)\big) = \alpha A + \beta B$, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$**;**

б) $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) g(X) = AB$;

в) $\lim\limits_{X\to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, где A —конечное число, то $\exists\ \dot{U}(X_0), M > 0$: $\forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| < M$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, где $A \neq 0$, то $\exists\ \dot{U}(X_0)$: $\forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| > \frac{|A|}{2}$. Если при этом $A > 0$, то $f(X) > \frac{A}{2}$, если $A < 0$, то $f(X) < \frac{A}{2}$.

Доказательство.

Непрерывные функции.

Функция $f(X)$ называется непрерывной в точке $X_0 \in G \subset \boldsymbol{R^n}$, если она определена в некоторой окрестности $U(X_0)$ и $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in G}} f(X) = f(X_0)$.

Если определить приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, , \Delta x_n)$, как $\Delta f(X) = f(X + \Delta X) - f(X)$, то данное определение эквивалентно равенству $\lim\limits_{\substack{\Delta X \to \vec{0} \\ X + \Delta X \in G}} \Delta f(X_0) = 0$.

На языке "$\varepsilon - \delta$": $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon \forall X \in G, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$ $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$.

Для непрерывных функций свойство $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(\lim\limits_{X \to X_0} X)$ показывает, что знаки предела и функции перестановочны или - «можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции».

Теорема. Пусть $f(X)$ и $g(X)$ непрерывные в точке функции X_0 функции. Тогда $\alpha f(X) + \beta g(X)$, $f(X)\, g(X)$, $(f(X))/(g(X))$ при $g(X_0) \neq 0$ - непрерывны.

Доказательство.

Теорема. Пусть $g(X)$ непрерывна в точке X_0, $g(X_0) = a$, функция $f(t)$ непрерывна в точке a, тогда сложная функция $\Phi(X) = f(g(X))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Примеры непрерывных функций.

Теорема. а) Если $f(X)$ непрерывна в точке A, то она ограничена в некоторой окрестности $U(A)$;

б) Если $f(X)$ непрерывна в точке A и $f(A) \neq 0$, то существует окрестность $U(A)$ точки A, в которой $f(X) > \frac{f(A)}{2} > 0$, если $f(A) > 0$ и $f(X) < \frac{f(A)}{2} < 0$, если $f(A) < 0$, для любого $X \in U(A)$.

Доказательство.

Определение. Функция называется непрерывной на множестве G, если она непрерывна в каждой точке множества G.

Теорема. Если функция непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то она ограничена.

Доказательство.

Теорема (Вейерштрасс). Если функция $f(X)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то существует точка $C \in G$, такая, что $f(C) = \min\limits_{X \in G} f(X)$ и, существует точка $D \in G$, такая, что $f(D) = = \max\limits_{X \in G} f(X)$.

Доказательство.

Определение. Непрерывной кривой в $\boldsymbol{R^n}$ называется образ отображения

$$\Gamma : [a, b] \to \boldsymbol{R^n}, \ \Gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

задаваемого непрерывными на отрезке $[a, b]$ функциями $\{\varphi_i(t)\}$.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в множестве G.

Теорема. Если функция $f(X)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом, связном множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, $a = \min\limits_{X \in G} f(X)$, $b = \max\limits_{X \in G} f(X)$, то для любого значения $c \in [a, b]$ существует $C \in G$, такая, что $f(\mathrm{C}) = \mathrm{c}$.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Функция $f(X)$ называется равномерно непрерывной на множестве $M \subset \boldsymbol{R^n}$ **,** если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall X', X'' \in M, \left| X' - X'' \right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(X') - f(X'') \right| < \varepsilon$.

Теорема (Кантор). Пусть $M \subset \boldsymbol{R^n}$ компактное множество, $f(X)$ непрерывная на M функция, тогда $f(X)$ равномерно нерерывна на M.

Доказательство.

Следствие. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нём.

Примеры.