Линейная алгебра и геометрия

Лектор: Адамович Ольга Маратовна

9 декабря 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Понятие поля

Понятие числа постепенно менялось в истории. По мере того как возникали новые потребности математики, множество чисел расширялось. (Так, например, невозможность деления в множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ привела к построению множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$). Получилась следующая цепочка вложений:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и действительных чисел $\mathbf{R}$ являются полями.

Определение.
Полем F называется множество, состоящее из двух или более элементов, на котором определены две бинарные операции:

1. сложения: $\forall a, b \in F : a + b \in F$,
2. умножения: $\forall a, b \in F : ab \in F$, удовлетворяющие следующих аксиомам:

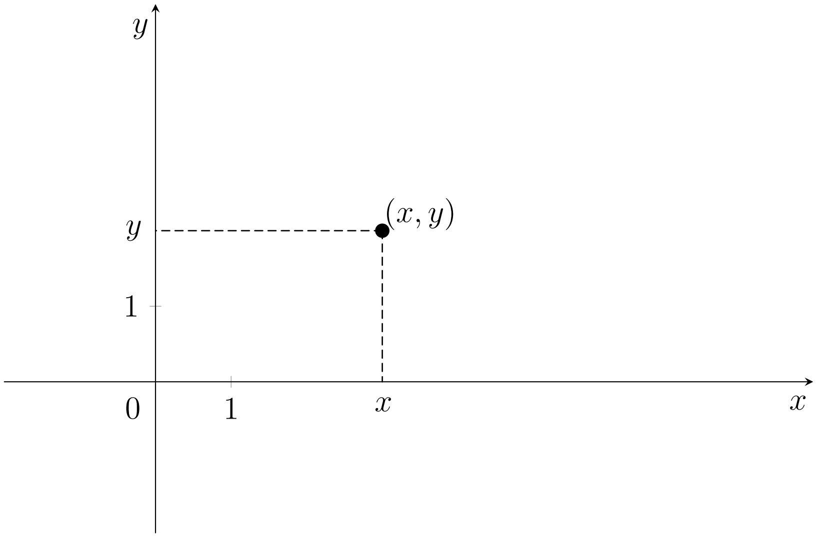
1) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in F$ (коммутативность сложения);
2) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in F$ (ассоциативность сложения);
3) $\exists \overline{0} \in F : a + \overline{0} = \overline{0} + a = a \quad \forall a \in F$ (существование нейтрального относительно сложения элемента);
4) $\forall a \in F \ \exists (-a) : a + (-a) = (-a) + a = \overline{0}$ (существование противоположного элемента);
5) $ab = ba \quad \forall a, b \in F$ (коммутативность умножения);
6) $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in F$ (ассоциативность умножения);
7) $\exists \overline{1} \in F : a \cdot \overline{1} = \overline{1} \cdot a = a \quad \forall a \in F$ (существование нейтрального элемента относительно умножения);
8) $\forall a \in F \setminus \{\overline{0}\} \ \exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (существование обратного элемента);
9) $\left\{ \begin{array}{l} a(b + c) = ab + ac \\ (b + c)a = ba + ca \end{array} \right. \quad \forall a, b, c \in F$ (дистрибутивность).

1.2 Поле комплексных чисел

Поле действительных чисел $\mathbf{R}$ обладает тем недостатком, что не все алгебраические уравнения имеют корень в этом поле. Для устранения этого недостатка расширим $\mathbf{R}$ до множества комплексных чисел $\mathbf{C}$ с операциями сложения и умножения так, чтобы

1. $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, при этом операции на $\mathbf{R}$ были прежними;
2. $\mathbf{C}$ являлось полем;
3. уравнение $z^2 + \overline{1} = \overline{0}$ имело корень в $\mathbf{C}$ (как выяснится, тогда и любое алгебраическое уравнение с коэффициентами из $\mathbf{C}$ будет иметь корень в $\mathbf{C}$).

Множеству $\mathbf{R}$ взаимно однозначно соответствуют точки на прямой, для расширения $\mathbf{R}$ рассмотрим пары точек на плоскости $\mathbf{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$. Пары вида $(x, 0)$ отождествим с $x \in \mathbf{R}$, тогда $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.



Определим на $\mathbf{C}$ операции

1) сложения:
   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{C}$
   $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbf{C}$;

2) умножения:
   $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbf{C}$
   $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \in \mathbf{C}$.

1. Проверим, что на $\mathbf{R}$ операции прежние.

   1) Пусть $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, тогда
      $x_1 + x_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = x_1 + x_2 \in \mathbf{R}$.
   2) Пусть $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, тогда
      $x_1x_2 = (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2 - 0 \cdot 0, 0x_1 + 0x_2) = (x_1x_2, 0) = x_1x_2 \in \mathbf{R}$.

2. Проверим, что $\mathbf{C}$ является полем:

   Аксиомы 1), 2) выполнены, т. к. они выполняются в $\mathbf{R}$, а сложение определено поэлементно.

3) $\overline{0} = (0,0) \in \mathbf{C}$;

4) $\forall (x,y) \in \mathbf{C}\ \exists (-x,-y) \in \mathbf{C}$;

5) $(x_1,y_1)(x_2,y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (x_2x_1 - y_2y_1, y_1x_2 + y_2x_1) = (x_2,y_2)(x_1,y_1)$;

6) $(x_1,y_1)\Big((x_2,y_2)(x_3,y_3)\Big) = (x_1,y_1)(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) =$
$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2x_3 - y_1y_2x_3, x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)$;

$$\Big((x_1,y_1)(x_2,y_2)\Big)(x_3,y_3) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)(x_3,y_3) =$$
$$= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2x_3, x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3);$$

7) $\overline{1} = (1,0) : (x,y)(1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x,y)$;

8) $\forall (x,y) \neq (0,0)\ \exists (x,y)^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$, т. к.

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, -\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2}\right) = (1,0) = \overline{1};$$

9) $(x_1,y_1)\Big((x_2,y_2) + (x_3,y_3)\Big) = (x_1,y_1)\Big(x_2 + x_3, y_2 + y_3\Big) =$
$$= \Big(x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3) + y_1(x_2+x_3)\Big) =$$
$$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_2 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) = (x_1,y_1)(x_2y_2) + (x_1,y_1)(x_3,y_3).$$

3. Рассмотрим уравнение $z^2 + \overline{1} = \overline{0}$, то есть уравнение

$$(x,y)^2 + (1,0) = (0,0).$$

$(0,1)$ является корнем данного уравнения:

$(0,1)(0,1) + (1,0) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + (1,0) = (-1,0) + (1,0) = (0,0)$.

Пара $(0,1)$ обозначается i и называется ***мнимой единицей***.

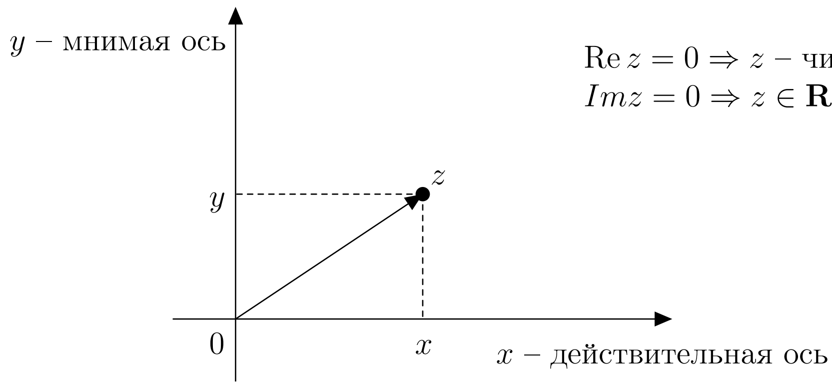
$$i^2 = (-1,0) = -\overline{1} = -1.$$

1.3 Алгебраическая форма комплексного числа

Пусть $z \in \mathbf{C} \Rightarrow z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$,
$z = x + iy$ – ***алгебраическая форма*** комплексного числа.

$x = \operatorname{Re} z$ – ***действительная часть*** комплексного числа z, $\operatorname{Re} z \in \mathbf{R}$,
$y = \operatorname{Im} z$ – ***мнимая часть*** комплексного числа z, $\operatorname{Im} z \in \mathbf{R}$.

Геометрически комплексному числу $z = x + iy \in \mathbf{C}$ соответствует точка на плоскости с декартовыми координатами (x,y) или ее радиус-вектор.



$\operatorname{Re} z = 0 \Rightarrow z$ – чисто мнимое число,
$Imz = 0 \Rightarrow z \in \mathbf{R}$.

1.3.1 Равенство комплексных чисел

Определение.
Два комплексных числа z_1 и z_2 называются ***равными***, если равны их действительные и мнимые части соответственно.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

1.3.2 Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$.

Тогда сумма $z_1 + z_2$ определяется следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

произведение

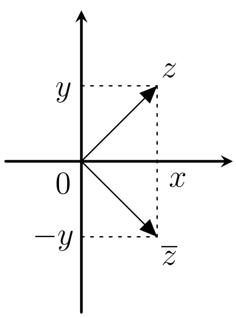
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + x_1iy_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Геометрически сложению комплексных чисел соответствует сложение их векторов на комплексной плоскости. Геометрический смысл умножения выяснится чуть позже.

Пример.
$(3 + i)(2 - 7i) = 6 + 2i - 21i - 7i^2 = 6 + 7 + i(2 - 21) = 13 - 19i.$

1.3.3 Комплексное сопряжение

Для любого комплексного числа $z = x + iy$ можно рассмотреть ***комплексно сопряженное*** с ним число $\overline{z} = x - iy$. Геометрически векторы z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси.



Свойства операции сопряжения

1. $\overline{z} = z \Leftrightarrow Imz = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$;
2. $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbf{C}$;
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$;

   Проверим:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2),$$
$$\overline{z_1}\ \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - iy_1x_2 - x_1iy_2 + i^2y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2);$$

5. $\overline{z} + z = 2\mathrm{Re}\, z \in \mathbf{R} \quad \forall z \in \mathbf{C}$;

6. $z\overline{z} = x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}\, z)^2 + (Imz)^2 \in \mathbf{R} \quad \forall z \in \mathbf{C}$,

   $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

$\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}\ \exists z^{-1} \in \mathbf{C}$. Если $z = x + iy$, то $z^{-1} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, что можно записать в виде

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

С помощью комплексного сопряжения мы можем компактно записать и ***операцию деления***:

$$z_2 \neq 0,\ \frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}.$$

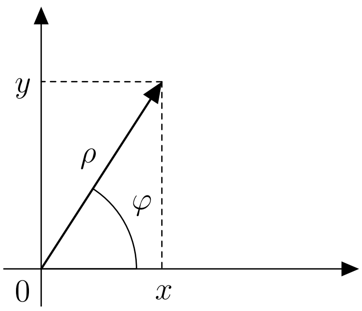
Пример.

$$\frac{3+2i}{1-i} = \frac{(3+2i)(1+i)}{1^2 - i^2} = \frac{3+2i+3i+2i^2}{1^2+1^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,i.$$

1.4 Модуль и аргумент комплексного числа

На плоскости вместо декартовых координат (x, y) можно использовать полярные (ρ, φ).

Определение.
Модулем $\rho = |z|$ комплексного числа $z = x + iy$ называется длина радиус-вектора, изображающего это число.

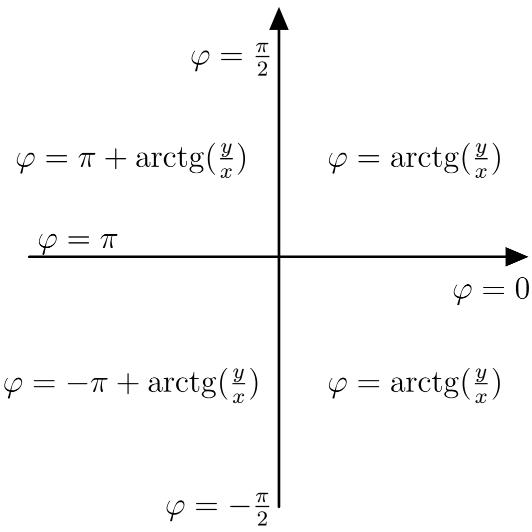


$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\rho \in [0, +\infty),$$
$$\rho = |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Определение.
Аргументом $\arg z$ комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ называется угол, образуемый вектором z с положительным направлением оси абсцисс. Аргумент числа 0 не определен.

$$\arg z = \varphi + 2\pi k,\ \ k \in \mathbf{Z},$$
$$\varphi : \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Если рассматривать $\varphi \in (-\pi, \pi]$, то φ вычисляется в соответствии со следующей схемой.



1.4.1 Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть $z = x + iy \neq 0$ – комплексное число в алгебраической форме, тогда

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ – } \textbf{\textit{тригонометрическая форма}}\ z.$$

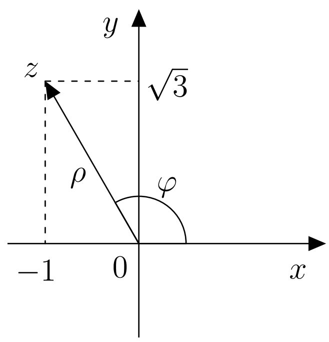
1.4.2 Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Положим $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (***формула Эйлера***), тогда

$$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi} \text{ – } \textbf{\textit{показательная форма}}\ z.$$

Скоро мы убедимся, что $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции.

Пример. Представим число $z = -1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах:



$\rho = \sqrt{1+3} = 2,$

$\varphi = \pi + \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \mathrm{arctg}\,\sqrt{3} = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3},$

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Еще несколько элементарных примеров:

$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1e^{i0};$ $\qquad i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 1e^{i\frac{\pi}{2}};$

$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = 1e^{i\pi};$ $\qquad -i = 1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = 1e^{i(-\frac{\pi}{2})}.$

1.4.3 Равенство комплексных чисел в показательной и тригонометрической формах

Пусть $z_1, z_2 \neq 0,\ z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$

Тогда $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2, \\ \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$ $\qquad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 = 0.$

1.5 Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах

1.5.1 Умножение в тригонометрической и показательной формах

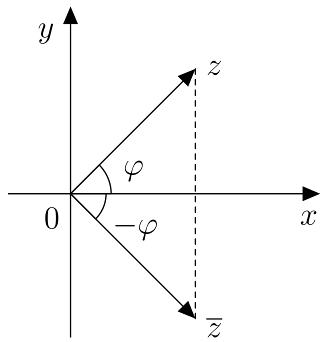
Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ &= \rho_1\rho_2\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\Big) = \\ &= \rho_1\rho_2\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big) = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Геометрически вектор $z_1 z_2$ получается из вектора z_1 поворотом на угол φ_2 и растяжением в ρ_2 раз.

1.5.2 Комплексно сопряженное число в тригонометрической и показательной формах



$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$,
$\overline{z} = x - iy = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \rho e^{-i\varphi}$.

1.5.3 Деление в показательной и тригонометрической формах

$z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$.
$z \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\Big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\Big) = \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}.$$

Пусть $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \neq 0$.

Тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\Big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big).$$

1.5.4 Возведение комплексных чисел в степень в тригонометрической и показательной формах. Формула Муавра

Пусть $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда

$$z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n\Big((\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)\Big),\ n \in \mathbf{Z}$$ – ***формула Муавра***.

Для $n \in \mathbf{N}$:
$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n\ \text{раз}} = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n\Big((\cos(\varphi n) + i\sin(\varphi n)\Big);$

для $n = 0$:

$z^0 = 1 = \rho^0 e^{i0\varphi} = \rho^0 \Big((\cos(\varphi 0) + i \sin(\varphi 0) \Big);$

для $n = -m,\ m \in \mathbf{N}$:

$$z^n = z^{-m} = (z^m)^{-1} = (\rho^m e^{im\varphi})^{-1} = \frac{1}{\rho^m} e^{-im\varphi} = \rho^{-m} e^{i(-m)\varphi} = \rho^n e^{in\varphi} =$$
$$= \rho^n \Big((\cos(\varphi n) + i \sin(\varphi n) \Big).$$

Пример. $z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$z^{100} = (-1 + i\sqrt{3})^{100} = 2^{100} e^{i\frac{200\pi}{3}} = 2^{100} e^{i\left(66\frac{2}{3}\right)\pi} = 2^{100} e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2^{100}(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}) =$$
$$= 2^{100}\left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{99} + 2^{99} i\sqrt{3}.$$

1.5.5 Извлечение корня из комплексного числа

Определение.

$n \in \mathbf{N},\ w$ – корень n-ой степени из z, если $w^n = z$.

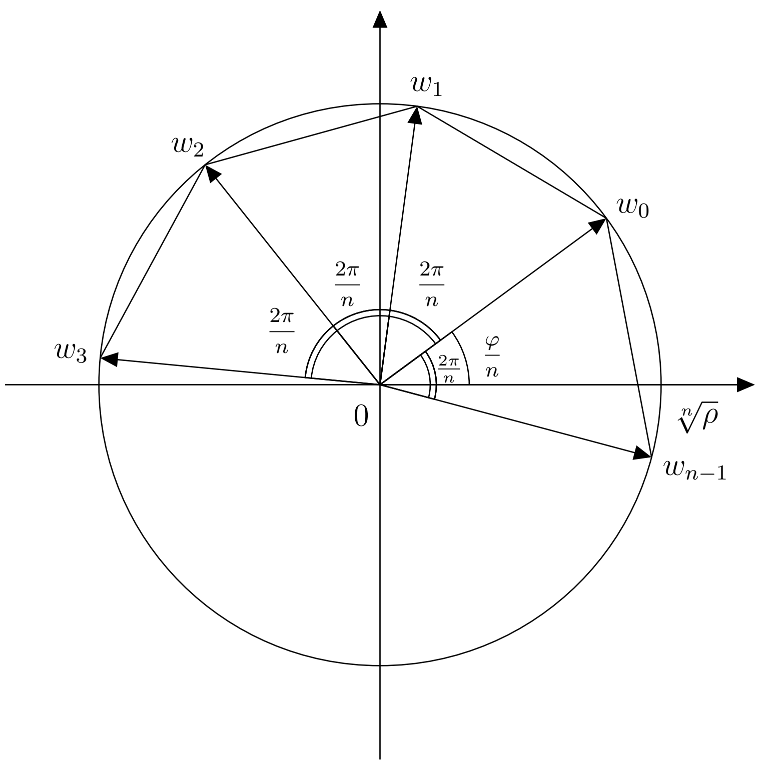
Пусть $z = \rho e^{i\varphi}, \rho \neq 0,$
$w = r e^{i\psi},$

тогда $w^n = z \Leftrightarrow r^n e^{in\psi} = \rho e^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho, \\ n\psi = \varphi + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho}, \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

(здесь $r = \sqrt[n]{\rho}$ – арифметический корень).

$$w = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \right), \ k \in \mathbf{Z}.$$

Поскольку имеется n различных остатков от деления $k \in \mathbf{Z}$ на $n : 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1$, существует n различных значений $w : w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}},\ k = \overline{0, n-1}$.



$k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}$,

$k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n})}$,

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$k = n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{\rho} e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi(n-1)}{n})}$.

Все концы векторов $w_k,\ k = \overline{0, n-1}$, лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$, угол между радиус-векторами соседних корней равен $\dfrac{2\pi}{n}$. Если соединить концы радиус-векторов корней, получится правильный n-угольник.

Пример.

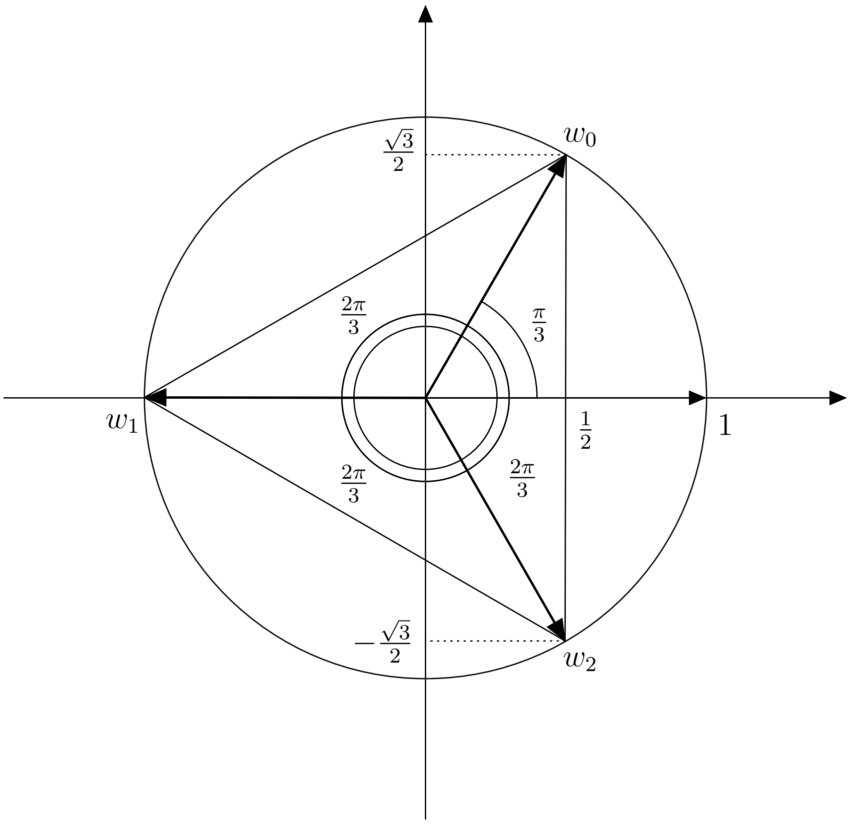
$w^3 = -1 = 1e^{i\pi}$.

$w = \sqrt[3]{1} e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}} = \sqrt[3]{1}(\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3})),\ k = \overline{0,2}$.

$k = 0 \Rightarrow w_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$k = 1 \Rightarrow w_1 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0\cdot i = -1$,

$k = 2 \Rightarrow w_2 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Глава 2

Многочлены

2.1 Многочлен над произвольным полем. Степень многочлена

Определение.
Пусть F – произвольное поле. Выражение $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$ называется многочленом от переменной x над полем F с коэффициентами $a_i \in F,\ i = \overline{0, n}$.

Множество всех многочленов над полем F обозначается $F[x]$.

Определение.
Степенью многочлена $\deg f(x)$ называется наибольшая из степеней переменной x, которая входит в его запись с ненулевым коэффициентом. Этот коэффициент называется ***старшим***. Многочлены часто записываются в порядке убывания степеней x:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \text{ Если } a_0 \neq 0, \text{ то } \deg f(x) = n.$$

Степень многочлена 0, все коэффициенты которого нулевые, не определена, но удобно считать, что $\deg 0 = -\infty$.

Определение.
Многочлены считаются равными, если их коэффициенты при всех степенях x совпадают.

2.2 Операции в $F[x]$

В $F[x]$ определены операции сложения многочленов, умножения многочлена на $c \in F$, умножения многочленов между собой.

$$\text{Если } \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i \in F[x],\ \deg f(x) = n, \\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m = \sum\limits_{j=0}^{m} b_jx^j \in F[x],\ \deg g(x) = m, \end{cases} \quad n \geq m, \text{ то}$$

1. $f(x) + g(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i\right) + \left(\sum\limits_{j=0}^{n} b_jx^j\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \in F[x]$
(здесь $b_i = 0$ при $i = \overline{m+1, n}$);

2. $c \in F,\ cf(x) = c\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} (ca_i)x^i \in F[x]$;

3. $f(x)g(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum\limits_{k=0}^{n+m}\left(\sum\limits_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k \in F[x]$.

Относительно этих операций $F[x]$ является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей.

Утверждение 1.

1. $\deg(f(x)+g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$;
2. $c \in F,\ \deg(cf(x)) = \begin{cases} \deg f(x), \text{ если } c \neq 0, \\ -\infty, \text{ если } c = 0; \end{cases}$
3. $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Доказательство очевидным образом следует из определения операций.

Утверждение 2.
Обратимыми элементами в $F[x]$ являются многочлены нулевой степени, и только они.

$$\exists f^{-1}(x) \in F[x] \Leftrightarrow f(x) \in F[x] :\ \deg f(x) = 0.$$

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).
Пусть $\exists f^{-1}(x)$, тогда

$$f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1 \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } f^{-1}(x) \neq 0 \Rightarrow \deg f(x) \geq 0,\ \deg f^{-1}(x) \geq 0, \tag{$*$}$$

$$\deg(f(x)f^{-1}(x)) = \deg 1 \Rightarrow \deg f(x) + \deg f^{-1}(x) = 0, \tag{$**$}$$

$$(*), (**) \Rightarrow \deg f(x) = 0.$$

Достаточность($\Leftarrow$).
Пусть $\deg f(x) = 0$, значит, $f(x) = a_0$, где $a_0 \neq 0$, $a_0 \in F \Rightarrow \exists f^{-1}(x) = a_0^{-1} \in F \subset F[x]$.

2.3 Неприводимые многочлены в $F[x]$

Определение.
Многочлен $f(x)$ положительной степени называется ***неприводимым***, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени.

Утверждение 1.
Многочлен первой степени является неприводимым над любым полем F.

$$f(x) \in F[x],\ \deg f(x) = 1 \Rightarrow f(x) \text{ – неприводимый.}$$

Доказательство.
Пусть $f(x) \in F[x],\ \deg f(x) = 1$ и пусть $f(x) = g(x)q(x)$, где $g(x), q(x) \in F[x]$ – многочлены положительной степени.

Тогда $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg q(x)$, т. е. $1 = \deg g(x) + \deg q(x)$,

но $\deg g(x) + \deg q(x) \geq 2$, получаем противоречие, значит, $f(x)$ – неприводимый многочлен.

2.4 Функции, задаваемые многочленами

Многочлен $f(x) \in F[x]$ можно рассматривать как функцию $f : F \to F$, подставляя $c \in F$ в $f(x) \in F[x]$.

Теорема 1.
Если F – бесконечное поле ($|F| = \infty$), то многочлен $f(x) \in F[x]$ положительной степени меньшей n ($0 < \deg f(x) < n$) однозначно восстанавливается по его значениям в n различных точках.

Доказательство.
Пусть $f(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1}$,
$|F| = \infty \Rightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_n \in F : c_i \neq c_j$ при $i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}$.

$$\begin{cases} a_{n-1} + a_{n-2}c_1 + \dots + a_1c_1^{n-2} + a_0c_1^{n-1} = f(c_1), \\ a_{n-1} + a_{n-2}c_2 + \dots + a_1c_2^{n-2} + a_0c_2^{n-1} = f(c_2), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n-1} + a_{n-2}c_n + \dots + a_1c_n^{n-2} + a_0c_n^{n-1} = f(c_n) \end{cases} \text{ – СЛАУ, ее определитель}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \dots & c_1^{n-2} & c_1^{n-1} \\ 1 & c_2 & c_2^2 & \dots & c_2^{n-2} & c_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_n & c_n^2 & \dots & c_n^{n-2} & c_n^{n-1} \end{vmatrix} = \mathrm{V}[c_1, c_2, \dots, c_n] \text{ – определитель Вандермонда.}$$

$\Delta \neq 0$, т. к. все точки разные $c_i \neq c_j,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, n} \Rightarrow \exists$ единственное

решение СЛАУ $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)^{\mathrm{T}} \Rightarrow$ многочлен однозначно восстанавливается

$$f(x) = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1} \in F[x],\ \deg f(x) \leq n - 1.$$

Следствие.
Если поле F бесконечно, то разные многочлены над F определяют разные функции.

Доказательство.
Пусть одна и та же функция $\varphi(x)$ задается двумя разными многочленами:

$$\varphi(x) = a_0x^n + \dots + a_n,\ a_0 \neq 0,$$
$$\varphi(x) = b_0x^m + \dots + b_m,\ b_0 \neq 0.$$

Тогда разность этих многочленов задает функцию, тождественно равную нулю.

Тогда из теоремы 1 следует, что разность равна нулевому многочлену, т. е. все ее коэффициенты нулевые, значит, $n = m,\ a_i = b_i,\ i = \overline{1, n}$ и $\varphi(x)$ однозначно представляется в виде многочлена.

2.5 Деление многочлена на многочлен с остатком

Теорема 1.
Для любых многочленов $f(x) \in F[x],\ g(x) \in F[x] \setminus \{0\}\ \exists\, q(x),\ r(x) \in F[x]$:

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \left[\begin{array}{l} r(x) = 0, \\ \deg r(x) < \deg g(x). \end{array} \right.$$

Причем $q(x)$ и $r(x)$ определены однозначно. (Многочлен $f(x)$ называется делимым, $g(x)$ – делителем, $q(x)$ – частным, $r(x)$ – остатком).

Заметим, что считая $\deg 0 = -\infty$, условие $\left[\begin{array}{l} r(x)=0, \\ \deg r(x) < \deg g(x) \end{array}\right.$ можно заменить на $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Доказательство.
Существование.

1. Если $\deg g(x) > \deg f(x) \Rightarrow \begin{cases} q(x)=0, \\ r(x)=f(x); \end{cases}$

2. Если $\deg g(x) \le \deg f(x)$, то $q(x)$ и $r(x)$ находим, применяя алгоритм "деления уголком".

   Пусть $\begin{array}{l} f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,\ a_0\neq 0,\ \deg f(x)=n, \\ g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m,\ b_0\neq 0,\ \deg g(x)=m, \end{array}$ $m \le n$.

   Положим
   $$f_1(x)=f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)=f(x)-c_0x^{n-m}g(x), \tag{1}$$

   $deg f_1(x)=n_1<\deg f(x)=n$.

   Если $\deg f_1(x) < \deg g(x) \Rightarrow r(x)=f_1(x)$;

   Если $\deg f_1(x) \ge \deg g(x) \Rightarrow$ поступаем с $f_1(x)$ так же, как с $f(x)$:

   $$f_2(x)=f_1(x)-c_1x^{n_1-m}g(x). \tag{2}$$

   Так будем продолжать до тех пор, пока не получим

   $$f_k=f_{k-1}-c_{k-1}x^{n_{k-1}-m}g(x) \text{ такой, что } \deg f_k(x) < \deg g(x). \tag{k}$$

   Складывая равенства (1), (2), ..., (k), получим

   $$\cancel{f_1(x)}+\cancel{f_2(x)}+\dots+\cancel{f_{k-1}(x)}+f_k(x)=$$
   $$=f(x)+\cancel{f_1(x)}+\dots+\cancel{f_{k-1}(x)}-(c_0x^{n-m}+c_1x^{n_1-m}+\dots+c_{k-1}x^{n_{k-1}-m})g(x);$$

   $$f(x)=(c_0x^{n-m}+c_1x^{n_1-m}+\dots+c_{k-1}x^{n_{k-1}-m})g(x)+f_k(x).$$

   Положим $q(x)=c_0x^{n-m}+c_1x^{n_1-m}+\dots+c_{k-1}x^{n_{k-1}-m},\ r(x)=f_k(x)$.

   $$q(x),\ r(x)\in F[x]: f(x)=g(x)q(x)+r(x),\ \deg r(x)<\deg g(x).$$

Единственность.

Пусть $f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)=g(x)q_2(x)+r_2(x)$.

Тогда

$$r_1(x)-r_2(x)=g(x)(q_2(x)-q_1(x)),$$

$$\deg(r_1(x)-r_2(x))=\deg g(x)+\deg(q_2(x)-q_1(x)). \tag{$*$}$$

$$\deg(r_1(x)-r_2(x))\le\max\{\deg r_1(x),\deg r_2(x)\}<\deg g(x). \tag{$**$}$$

Если $q_2(x)\neq q_1(x)$, то $\deg(q_2(x)-q_1(x))\ge 0$ и $(*)\Rightarrow \deg(r_1(x)-r_2(x))\ge\deg g(x)$, что противоречит $(**)$, значит, $q_1(x)=q_2(x)\Rightarrow r_1(x)=r_2(x)$.

2.6 Теорема Безу и корни многочлена

Теорема 1 (Теорема Безу)**.**
Остаток от деления $f(x) \in F[x]$ на $(x-c)$, где $c \in F$, равен $f(c)$.

Доказательство.
$\exists q(x), r(x) \in F[x] : f(x) = (x-c)q(x) + r(x),\ \deg r(x) < \deg(x-c) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \deg r(x) \leq 0 \Rightarrow r(x) = r \in F.$

$$\begin{gathered} f(x) = (x-c)q(x) + r \Rightarrow \\ \Rightarrow f(c) = (c-c)q(c) + r \Rightarrow \\ \Rightarrow f(c) = r \Rightarrow f(x) = (x-c)q(x) + f(c). \end{gathered}$$

Определение.
Элемент поля $c \in F$ называется ***корнем*** $f(x) \in F[x]$, если $f(c) = 0$.

Следствие (из теоремы Безу)**.**
$c \in F$ является корнем $f(x) \Leftrightarrow f(x)$ делится $(x-c)$ без остатка.

Обозначение деления многочлена без остатка (нацело) $f(x) \,⋮\, (x-c)$ или $(x-c) \mid f(x)$.

Определение.
$c \in F$ называется корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ ***кратности*** k, если $f(x) \,⋮\, (x-c)^k$ и не делится на $(x-c)^{k+1}$, т. е.

$$f(x) = (x-c)^k q(x),\ q(c) \neq 0.$$

Пример. $f(x) = (x-3)^2(x+5)^3x$.
3 – корень кратности 2,
-5 – корень кратности 3,
0 – корень кратности 1 (простой корень).

2.7 Схема Горнера

Деление многочлена на $(x-c)$ удобно производить по схеме Горнера.

Пусть $f(x) = (x-c)q(x) + f(c)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \\ q(x) &= b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}, \end{aligned} \quad \text{тогда}$$

$$\begin{aligned} &a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (x-c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + f(c) = \\ &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - cb_0x^{n-1} - cb_1x^{n-2} - \dots - cb_{n-2}x - cb_{n-1} + f(c). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \\ a_1 = b_1 - cb_0, \\ a_2 = b_2 - cb_1, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_n = f(c) - cb_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_k = a_k + cb_{k-1}, \\ f(c) = a_n + cb_{n-1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, n-1},$$

что можно записать в виде таблицы

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + cb_0$	$b_2 = a_2 + cb_1$	$\dots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2}$	$f(c) = a_n + cb_{n-1}$

С помощью схемы Горнера удобно делить многочлен на $(x-c)$, находить значения многочлена в точке $c \in F$, проверять, является ли $c \in F$ корнем многочлена.

Пример. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x + 1$.

	3	0	−5	1	1
1	3	3	−2	−1	0
2	3	6	7	15	31

$f(1) = 0 \Rightarrow\ 1$ – корень,
$f(x) = (x-1)(3x^3 + 3x^2 - 2x - 1)$.
$f(2) = 31 \Rightarrow\ 2$ – не корень,
$f(x) = (x-2)(3x^3 + 6x^2 + 7x + 15) + 31$.

2.8 Многочлены над полем комплексных чисел

Теорема 1 (Основная теорема алгебры)**.**
Любой многочлен с комплексными коэффициентами положительной степени имеет хотя бы один комплексный корень.

$$\forall f(x) \in \mathbf{C}[x] : \deg f(x) > 0\ \exists\, c \in \mathbf{C} : f(c) = 0.$$

Без доказательства, поскольку оно требует глубоких знаний математического анализа.

Определение.
Поле F называется ***алгебраически замкнутым***, если любой многочлен положительной степени над этим полем имеет хотя бы один корень $c \in F$.

Таким образом, основная теорема алгебры утверждает, что поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто.

Примеры.

1. $f(x) = x^2 + 2x + 2 \in \mathbf{R}[x] \subset \mathbf{C}[x]$.

$$\begin{gathered} x^2 + 2x + 2 = 0, \\ (x+1)^2 + 1 = 0, \\ x + 1 = \pm i, \\ x = -1 \pm i \in \mathbf{C}, \\ x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i). \end{gathered}$$

2. $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbf{R}[x] \subset \mathbf{C}[x],\ a \neq 0$.
   $D = b^2 - 4ac < 0$,

$$a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{|D|}}{2|a|}(\pm i) = \pm i\frac{\sqrt{|D|}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Теорема 2 (о разложении многочлена положительной степени над $\mathbf{C}$ на линейные множители)**.**
Любой многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x] : \deg f(x) = n > 0$, раскладывается на линейные множители над $\mathbf{C}$:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n),$$
где $c_i \in \mathbf{C}$ – корни $f(x)$, $i = \overline{1, n}$, $a_0 \in \mathbf{C}$ – старший коэффициент.

Доказательство.
Из теоремы 1 следует, что $\exists\, c_1 \in \mathbf{C} : f(c_1) = 0$, а из следствия теоремы Безу
$f(x) = (x - c_1) f_1(x)$, где $\deg f_1(x) = n - 1$.

Если $\deg f_1(x) = 0$, то разложение на линейные множители закончено.

Если $\deg f_1(x) > 0$, то $\exists\, c_2 \in \mathbf{C} : f_1(x) = (x - c_2) f_2(x) \Rightarrow f(x) = (x - c_1)(x - c_2) f_2(x)$,
где $\deg f_2(x) = n - 2$.

Продолжая таким же образом, мы получим
$f(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n) f_n(x)$, где $\deg f_n(x) = 0$, т. е. $f_n(x) = f_n \neq 0$.
Сравним коэффициенты при x^n в правой и левой частях : $f_n = a_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n).$$

Следствие 1.
Пусть $f(x) \in \mathbf{C}[x] : \deg f(x) = n > 0,\ c_i \in \mathbf{C}$ – корень $f(x)$ кратности $k_i,\ i = \overline{1, m}$,
$c_1, c_2, \dots, c_m$ – все различные между собой корни $f(x)$.

Тогда

$$f(x) = a_0 (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_m)^{k_m},$$
$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Следствие 2.
Если $f(x) \in \mathbf{C}[x] : \deg f(x) = n > 0$, то $f(x)$ имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень посчитать столько раз, какова его кратность.

Пример. $f(x) = x^3 (x - 1)^2 (x + 3)$, $\deg f(x) = 6$.
0 – корень кратности 3,
1 – корень кратности 2,
-3 – корень кратности 1 (простой корень).

Теорема 3 (Теорема Виета)**.**
Пусть $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbf{C}[x],\ a_0 \neq 0 \Rightarrow \deg f(x) = n > 0$.
$c_1, c_2, \dots, c_n$ – корни $f(x)$, $c_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1, n}$.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_n = -\dfrac{a_1}{a_0}, \\ c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_{n-1} c_n = \dfrac{a_2}{a_0}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum\limits_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_k} = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_0}, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_1 c_2 \dots c_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}. \end{cases}$$

Доказательство.
$f(x) = a_0 (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$.
Сравним коэффициенты левой и правой частей при степенях x :

$$\begin{array}{c|l}
x^{n-1} & a_1 = a_0(-c_1 - c_2 - \dots - c_n) = (-1)a_0(c_1 + c_2 + \dots + c_n), \\
x^{n-2} & a_2 = a_0(c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n), \\
\dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x^k & a_k = a_0(-c_1)(-c_2)\dots(-c_k) + \dots = (-1)^k\, a_0 \sum\limits_{i_1<i_2<\dots<i_k} c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k}, \\
\dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
x^0 & a_n = a_0(-c_1)(-c_2)\dots(-c_n) = a_0(-1)^n c_1c_2\dots c_n.
\end{array}$$

Пример.

Пусть $w_0, \dots, w_{n-1} \in \mathbf{C}$ – различные корни n-ой степени из 1, тогда

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k = 0, \\ \prod\limits_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^{n+1}. \end{cases}$$

При $k = \overline{0, n-1}$, w_k – различные корни многочлена $x^n - 1 \in \mathbf{C}[x]$, в котором,

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_i = 0, \; i = \overline{1, n-1}, \\ a_n = -1, \end{cases} \quad \text{тогда из теоремы Виета} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k = -\dfrac{a_1}{a_0} = 0, \\ \prod\limits_{k=0}^{n-1} w_k = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{1}. \end{cases}$$

Утверждение 1.

Неприводимыми многочленами над $\mathbf{C}$ являются многочлены первой степени, и только они.

Доказательство.

Многочлены первой степени неприводимы над любым полем. $\forall f(x) \in \mathbf{C}[x] : \deg f(x) > 1$, приводим, т. к. он раскладывается над $\mathbf{C}$ на линейные множители.

Следствие.

Разложение многочлена из следствия 1 является разложением на неприводимые множители над $\mathbf{C}$.

Пример.

$x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$ – разложение на неприводимые множители над $\mathbf{C}$.

2.9 Многочлены над полем действительных чисел

Лемма 1.

Для $\forall c \in \mathbf{C}$ $(x - c)(x - \overline{c}) \in \mathbf{R}[x]$.

Доказательство.

Если $c \in \mathbf{C}$, $c = a + ib$, $a = \operatorname{Re} c$, $b = \operatorname{Im} c$, $a, b \in \mathbf{R}$, тогда $\overline{c} = a - ib$.

$(x - c)(x - \overline{c}) = x^2 - x(c + \overline{c}) + c\overline{c} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \in \mathbf{R}[x]$, т. к. $-2a$, $(a^2 + b^2) \in \mathbf{R}$.

Теорема 1.

Если многочлен с действительными коэффициентами положительной степени имеет корень $c \in \mathbf{C}$, $c = a + ib$ с нетривиальной мнимой частью $(b \neq 0)$, то этот многочлен имеет и сопряженный корень $\overline{c}$, причем кратности c, $\overline{c}$ одинаковы.

Доказательство.
Докажем, что

$$\forall f(x) \in \mathbf{R}[x] : \deg f(x) > 0 \ \exists c \in \mathbf{C} : c = a + ib, \ b \neq 0 : f(c) = 0 \Rightarrow f(\overline{c}) = 0.$$

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \ a_i \in \mathbf{R}, \ i = \overline{0,n}$.

$f(c) = 0 \Leftrightarrow a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$

$\overline{f(c)} = \overline{0} = 0,$

$$\overline{f(c)} = \overline{a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + c_n} = \overline{a_0c^n} + \overline{a_1c^{n-1}} + \cdots + \overline{a_n} = \\ = \overline{a_0}\,\overline{c^n} + \overline{a_1}\,\overline{c^{n-1}} + \cdots + \overline{a_n} = a_0\overline{c}^n + a_1\overline{c}^{n-1} + \cdots + a_n = f(\overline{c}).$$

$\overline{f(c)} = 0 \Rightarrow f(\overline{c}) = 0 \Rightarrow \overline{c}$ – корень $f(x)$.

Докажем, что кратности c и $\overline{c}$ совпадают.

Пусть k – кратность c, а l – кратность $\overline{c}$. Предположим, что $k > l$, тогда

$f(x) = (x-c)^k(x-\overline{c})^l f_1(x) = \Big((x-c)(x-\overline{c})\Big)^l (x-c)^{k-l} f_1(x), \ f_1(c) \neq 0, \ f_1(\overline{c}) \neq 0.$

$$\begin{cases} f(x) \in \mathbf{R}[x], \\ \Big((x-c)(x-\overline{c})\Big)^l \in \mathbf{R}[x] \end{cases} \Rightarrow h(x) = (x-c)^{k-l} f_1(x) \in \mathbf{R}[x].$$

$h(c) = 0, \ h(\overline{c}) \neq 0$, что противоречит доказанному выше, $\Rightarrow k \leq l$. (1)

Аналогично придем к противоречию, предполагая, что $l > k, \Rightarrow l \leq k$. (2)

Из (1) и (2) $\Rightarrow k = l$.

Теорема 2.
Любой многочлен положительной степени над полем действительных чисел можно разложить над этим полем на линейные множители и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.

Доказательство.
Пусть $f(x) \in \mathbf{R}[x] \subset \mathbf{C}[x], \ \deg f(x) = n > 0$, тогда

$f(x) = a_0(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\dots(x-c_m)^{k_m}$, где c_i – различные корни $f(x), \ c_i \in \mathbf{C}$, $i = \overline{1,m}, \ k_i$ – кратность c_i.

Если корень $c \in \mathbf{R}$, то ему соответствует множитель вида $(x-c)^k \in \mathbf{R}[x]$;

Если корень $c \in \mathbf{C}, \ c = a + ib, \ b \neq 0$ кратности k, то существует корень $\overline{c}$ той же кратности и этой паре корней соответствует множитель $(x-c)^k(x-\overline{c})^k = = \Big((x-c)(x-\overline{c})\Big)^k \in \mathbf{R}[x]$ – k-ая степень квадратного трехчлена с дискриминантом $D = 4a^2 - 4(a^2+b^2) = -4b^2 < 0$.

Утверждение 1.
Неприводимыми многочленами над $\mathbf{R}$ являются все многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом, и только они.

Доказательство.
Многочлены первой степени неприводимы.

Многочлены второй степени с $D < 0$ неприводимы, т. к. иначе они раскладывались бы в произведение многочленов первой степени, а значит, имели бы корни в $\mathbf{R}$.

Остальные многочлены положительной степени раскладываются над $\mathbf{R}$ на множители первой или второй степени.

Пример.

Разложим многочлен $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9 \in \mathbf{R}[x] \subset \mathbf{C}[x]$ на неприводимые множители над $\mathbf{R}$ и над $\mathbf{C}$.

$f(x) = x^4 + 2x^2 + 9 = ((x^2)^2 + 3^2 + 6x^2) - 6x^2 + 2x^2 = (x^2+3)^2 - 4x^2 = (x^2+3)^2 - (2x^2)^2 = (x^2 + 3 - 2x)(x^2 + 3 + 2x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 3)$ – разложение $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbf{R}$, поскольку оба квадратных трехчлена имеют отрицательный дискриминант $D = -8$.

Найдем комплексные корни каждого из трехчленов.

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm i\sqrt{2},\ x_{3,4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}.$$

Тогда $f(x) = (x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})(x + 1 - i\sqrt{2})(x + 1 + i\sqrt{2})$ – разложение $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbf{C}$.

Утверждение 2.
Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, который имеет целочисленный корень.

Тогда этот корень является делителем его свободного члена.

$$f(x) = a_0x^n + \dots + a_n,\ a_i \in \mathbf{Z},\ i = \overline{0, n},$$
$$c \in \mathbf{Z} : f(c) = 0 \Rightarrow a_n \,\vdots\, c.$$

Доказательство.
$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n = 0 \Rightarrow a_n = -c(a_0c^{n-1} + \dots + a_{n-1}) \Rightarrow a_n \,\vdots\, c.$

Пример.

Разложим многочлен $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$ на неприводимые множители над $\mathbf{R}$ и над $\mathbf{C}$.

Из утверждения 2 следует, что если $c \in \mathbf{Z}$ – корень $f(x)$, то c – делитель свободного члена (-6). Делители $(-6) : \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$. Проверим, являются ли они корнями $f(x)$, с помощью схемы Горнера.

	1	-1	-4	-6
-1	1	-2	-2	-4
1	1	0	-4	-10
-2	1	-3	2	-10
2	1	1	-2	-10
3	1	2	2	0

Из последней строки таблицы следует, что 3 – корень $f(x)$, значит, $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2x + 2)$. Найдем корни квадратного трехчлена.

$$D = -4 < 0,\ x_{1,2} = -1 \pm i.$$

Тогда $f(x) = (x - 3)(x^2 + 2x + 2)$ – разложение $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbf{R}$, $f(x) = (x - 3)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$ – разложение $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbf{C}$.

Глава 3

Линейные пространства

3.1 Аксиомы линейного пространства

Определение.
Пусть V некоторое непустое множество. V называется ***линейным пространством*** над полем F, если в нем определены две ***линейные операции***:

$$\begin{array}{l} \text{сложения} : \forall a, b \in V \Rightarrow a + b \in V \\ \qquad \text{и} \\ \text{умножения на } \alpha \in F : \forall a \in V,\ \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha a \in V \end{array} \text{, удовлетворяющие аксиомам:}$$

1. $a + b = b + a \quad \forall a, b \in V$;
2. $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in V$;
3. $\exists \overline{0} \in V : a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$;
4. $\forall a \in V\ \exists (-a) \in V : a + (-a) = (-a) + a = \overline{0}$;
5. $1a = a \quad \forall a \in V,\ 1 \in F$;
6. $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a) \quad \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall a \in V$;
7. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall a, b \in V,\ \forall \alpha \in F$;
8. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall \alpha, \beta \in F,\ \forall a \in V$.

Линейное пространство называется также ***векторным пространством***, а его элементы называются ***векторами***.

В основном мы будем изучать линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, будем называть их просто линейными пространствами.

Примеры линейных пространств.

1. $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел;
2. $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n \times 1}$ – множество столбцов действительных чисел;
3. $\mathbf{R}^{m \times n}$ – множество матриц размера $m \times n$ с действительным коэффициентами;
4. $\mathbf{R}[x]$ – множество всех многочленов с действительными коэффициентами;
5. $C(D)$ – множество непрерывных функций, определенных на D со значениями в $\mathbf{R}$ и поточечными операциями;

6. V^1, V^2, V^3 – множества геометрических векторов на прямой, на плоскости, в пространстве.

Следствия аксиом линейного пространства

Пусть V – линейное пространство.

1. Нейтральный элемент $\overline{0} \in V$ единственен.

   Доказательство.
   Пусть $\overline{0}_1$, $\overline{0}_2$ – два нейтральных элемента, тогда

$$\overline{0}_1 = \overline{0}_1 + \overline{0}_2 = \overline{0}_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{0}_1 = \overline{0}_2.$$

2. $\forall a \in V$ противоположный элемент $(-a)$ единственен.

   Доказательство.
   Пусть $(-a_1)$, $(-a_2)$ – два противоположных элемента к элементу $a \in V$, тогда

$$\begin{cases} (-a_1) + a + (-a_2) = ((-a_1) + a) + (-a_2) = \overline{0} + (-a_2) = (-a_2), \\ (-a_1) + a + (-a_2) = (-a_1) + (a + (-a_2)) = -a_1 + \overline{0} = (-a_1) \end{cases} \Rightarrow (-a_1) = (-a_2).$$

3. $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ $\alpha\overline{0} = \overline{0}$.

   Доказательство.

$$\alpha\overline{0} = \alpha(\overline{0} + \overline{0}) = \alpha\overline{0} + \alpha\overline{0}; \qquad (*)$$

   $\exists(-\alpha\overline{0}) \in V$, прибавим $(-\alpha\overline{0})$ к обеим частям $(*)$:

$$(-\alpha\overline{0}) + \alpha\overline{0} = ((\alpha\overline{0}) + \alpha\overline{0}) + \alpha\overline{0},$$
$$\overline{0} = \alpha\overline{0},$$
$$\alpha = \overline{0}.$$

4. $\forall a \in V$ $0 \cdot a = \overline{0}$ $(0 \in \mathbf{R})$.

   Доказательство.

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a, \qquad (*)$$

   $\exists(-0a) \in V$, прибавим $(-0a)$ к обеим частям $(*)$:

$$(-0a) + 0a = ((-0a) + (0a)) + 0a,$$
$$\overline{0} = \overline{0} + 0a,$$
$$\overline{0} = 0a.$$

5. $\forall a \in V$ $(-a) = (-1)a$ $((-1) \in \mathbf{R})$.

   Доказательство.
   $a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = \overline{0}$.

6. $\forall a, b \in V$ уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b + (-1)a$.

Доказательство.

1) Существование решения.
Подстановка $b + (-1)a$ в уравнение дает тождество:
$a + (b + (-1)a) = (a + (-1)a) + b = \overline{0} + b = b$;

2) Единственность решения.
Пусть x – решение, тогда $a + x = b$ обращается в тождество.
Прибавим к этому тождеству с обеих сторон$(-1)a$:

$$((-1)a + a) + x = (-1)a + b,$$
$$\overline{0} + x = b + (-1)a,$$
$$x = b + (-1)a.$$

7. $\alpha a = \overline{0} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0, \\ a = \overline{0}, \end{array}\right.$

Доказательство.
Если $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1}\overline{0}$,

$$(\alpha^{-1}\alpha)a = \overline{0},$$
$$1a = \overline{0} \Rightarrow a = \overline{0}.$$

3.2 Линейное подпространство линейного пространства

Определение.
Непустое подмножество U линейного пространства V называется его ***линейным подпространством***, если U является линейным пространством относительно операций в V, ограниченных на U.

Теорема 1 (Критерий того, что непустое подмножество линейного пространства является линейным подпространством)**.**
Непустое подмножество U линейного пространства V является его линейным подпространством тогда и только тогда, когда U замкнуто относительно линейных операций в V, т. е.

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U, \\ 2.\ u \in U,\ \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha u \in U. \end{array}\right.$$

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).
Если U – линейное подпространство, то U – линейное пространство, следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} 1.\ u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U, \\ 2.\ u \in U,\ \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha u \in U. \end{array}\right.$$

Достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть U замкнуто относительно линейных операций в V, ограниченных на U. Следовательно, на U определены линейные операции.

Проверим выполнение 8 аксиом. Все аксиомы, которые являются тождествами (1, 2, 5, 6, 7, 8), выполняются в V, следовательно, выполняются в $U \subset V$.

Докажем выполнение 3-ей аксиомы:
U – непусто $\Rightarrow \exists a \in U; 0a = \overline{0}$, но $0a \in U \Rightarrow \overline{0} \in U$.

Докажем выполнение 4-ой аксиомы:
$\forall u \in U\ (-u) = (-1)u \in U$.

Примеры.

1. $\mathbf{R}^+ = \{\alpha \in \mathbf{R} : \alpha \geq 0\} \subset \mathbf{R}$.
   1. $u_1, u_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow u_1 + u_2 \in \mathbf{R}^+,$ т. е. $\mathbf{R}^+$ замкнуто относительно сложения;
   2. но $\mathbf{R}^+$ не замкнуто относительно умножения на число $\alpha \in \mathbf{R} : (-1) \in \mathbf{R},\ 2 \in \mathbf{R}^+,$ $(-1) \cdot 2 = -2 \notin \mathbf{R}^+$.

   Значит, $\mathbf{R}^+$ не является линейным подпространством $\mathbf{R}$;

2. $U = \{A : \det A = 0\} \subset \mathbf{R}^{2\times 2}$.
   1. U не является замкнутым относительно сложения:
      $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$, но $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin U$;
   2. U замкнуто относительно умножения на число.

   Из-за невыполнения пункта 1 U не является линейным подпространством в $\mathbf{R}^{2\times 2}$;

3. Пусть $U \subset \mathbf{R}[x]$,
   $U = \{p(x) : \deg p(x) = n \neq -\infty\}$.
   1. U не замкнуто относительно сложения:
      $p_1(x) = x^n,\ p_2(x) = -x^n \quad p_1(x) + p_2(x) = 0 \notin U \Rightarrow$

   $\Rightarrow U$ не является линейным подпространством в $\mathbf{R}[x]$;

4. $P_n = \{p(x) : \deg p(x) \leq n\} \subset R[x]$.
   1. $p_1(x) \in P_n,\ p_2(x) \in P_n \Rightarrow p_1(x) + p_2(x) \in \mathbf{R}[x]$,
      причем $\deg(p_1(x) + p_2(x)) \leq \max\{\deg p_1(x), \deg p_2(x)\} \leq n \Rightarrow p_1(x) + p_2(x) \in P_n$;
   2. $p(x) \in P_n,\ \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha p(x) \in \mathbf{R}[x] : \deg \alpha p(x) = \begin{cases} \deg p(x),\ \alpha \neq 0, \\ -\infty,\ \alpha = 0, \end{cases}$
      $\deg p(x) \leq n \Rightarrow \deg \alpha p(x) \leq n \Rightarrow \alpha p(x) \in P_n$.

   Значит, P_n – линейное подпространство $\mathbf{R}[x]$.

3.2.1 Линейная оболочка векторов линейного пространства

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

Линейной оболочкой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (натянутой на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$) называется множество всех линейных комбинаций векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

$$L[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1, k}\}.$$

Замечание.
$v \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k] \Leftrightarrow v$ линейно выражается через $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Утверждение 1.
Пусть V – линейное пространство, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.

Тогда линейная оболочка $L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ – линейное подпространство V.

Доказательство.

1. $u_1, u_2 \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$, т. е. $u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k,\ u_2 = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \Rightarrow$
   $\Rightarrow u_1 + u_2 = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + (\alpha_2 + \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)v_k \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$;
2. $u \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$, т. е. $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k,\ \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \beta u = \beta(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) = \beta\alpha_1 v_1 + \beta\alpha_2 v_2 + \cdots + \beta\alpha_k v_k \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Пример. Множество U функций вида $\alpha \cos x + \beta \sin x,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ является линейным пространством.

$U = \{\alpha \cos x + \beta \sin x\} = L[\cos x, \sin x] \subset C(-\infty, \infty)$. U – линейная оболочка функций $\cos x,\ \sin x \in C(-\infty, \infty) \Rightarrow U$ – линейное подпространство в $C(-\infty, \infty) \Rightarrow U$ – линейное пространство.

3.3 Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов в линейном пространстве

Определение.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ – система векторов линейного пространства V.

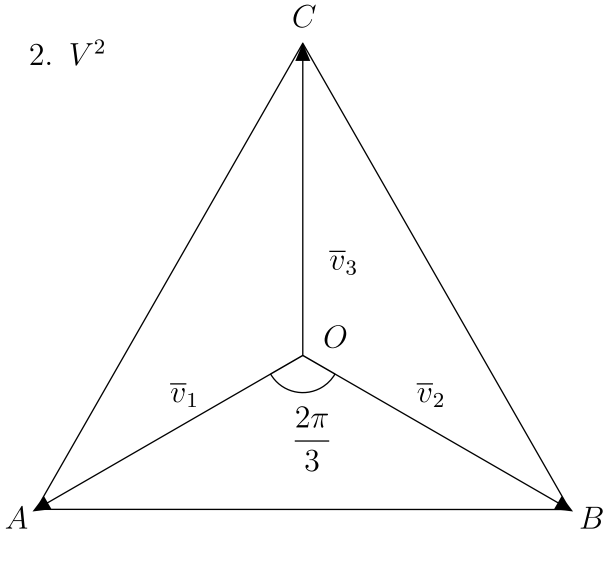
Линейная комбинация $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называется ***тривиальной***, если все ее коэффициенты равны нулю.

Определение.
Система векторов линейного пространства $v_1, \ldots, v_k \in V$ называется ***линейно зависимой***, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная $\overline{0} \in V$, т. е.

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R} : \begin{cases} \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0}. \end{cases}$$

Примеры.

1. $A_1,\ A_2,\ A_3 \in \mathbf{R}^{2\times 2}$,
   $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$
   Нетривиальная линейная комбинация
   $2A_1 + A_2 + A_3 = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1,\ A_2,\ A_3$ – линейно зависимая система векторов в $\mathbf{R}^{2\times 2}$;
2. V^2



Пусть $\triangle ABC$ – правильный, O – его центр, $\overline{v}_1 = \overline{OA},\ \overline{v}_2 = \overline{OB},\ \overline{v}_3 = \overline{OC}$.

Пусть $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 = \overline{v}$. Эта сумма не должна меняться при повороте картинки на $\frac{2\pi}{3}$ относительно $O \Rightarrow \overline{v} = \overline{0}$. Нетривиальная линейная комбинация $\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 = \overline{0} \Rightarrow \overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}$ – линейно зависимая система в V^2.

Определение.
Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейного пространства V называется ***линейно независимой***, если только тривиальная линейная комбинация векторов этой системы равна нулевому вектору пространства, т. е. $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ линейно независимая система, если из $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0}$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Примеры.

1. $B_1,\ B_2,\ B_3 \in \mathbf{R}^{2\times 2}$,
$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Пусть $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = \overline{0} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{0} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_2 & 2\alpha_1 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow B_1,\ B_2,\ B_3 \text{ – линейно независимая система в } \mathbf{R}^{2\times 2};$$
2. $1,\ \sin x,\ \cos x \in \mathrm{C}(-\infty, \infty)$.
Пусть $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0$. Продифференцируем это тождество дважды. Получим ОСЛАУ
$$\begin{cases} \alpha_1 1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0, \\ \alpha_2 \cos x - \alpha_3 \sin x = 0, \\ -\alpha_2 \sin x - \alpha_3 \cos x = 0. \end{cases}$$
Существует тривиальное решение ОСЛАУ, но поскольку определитель системы
$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0$, система имеет единственное решение, т. е. она имеет только тривиальное решение $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_i = 0,\ i = \overline{1, 3}$.
Значит, система $1,\ \sin x,\ \cos x$ – линейно независимая система в $\mathrm{C}(-\infty, \infty)$.

Утверждение 1.
Система векторов линейного пространства V, состоящая из одного вектора, линейно зависима только и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).
$\exists \alpha \neq 0 : \alpha v = \overline{0} \Rightarrow \exists \alpha^{-1} \in \mathbf{R} : \alpha^{-1}\alpha v = \alpha^{-1}\overline{0} \Rightarrow v = \overline{0}$.
Достаточность ($\Leftarrow$).
$v = \overline{0} \Rightarrow$ нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $1v = 1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

Следствие.
Система векторов, состоящая из одного вектора, линейно независима тогда и только тогда, когда этот вектор ненулевой.

Теорема 1 (Критерий линейной зависимости системы, состоящей из двух и более векторов)**.**
Система векторов линейного пространства, состоящая из двух и более векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из её векторов линейно выражается через остальные ее векторы.

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно зависимая система, тогда существует нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю.

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R} : \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0}. \end{cases}$

Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_k v_k \Rightarrow v_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_k}{\alpha_1} v_k \Rightarrow v_1 \in L[v_2, \ldots, v_k]$.

Достаточность ($\Leftarrow$).

Пусть $v_1 \in L[v_2, \ldots, v_k]$, т. е.

$v_1 = \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k \Rightarrow v_1 - \beta_2 v_2 - \cdots - \beta_k v_k = \overline{0}$ – нетривиальная линейная комбинация $v_1, v_2, \ldots, v_k$, т. к. коэффициент при v_1 равен $1 \Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ – линейно зависимая система.

Пример. $1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x \in \mathrm{C}(-\infty, \infty)$ – линейно зависимая система, т. к.

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \Rightarrow 1 \in L[\sin^2 x,\ \cos^2 x].$$

Следствие 1 (Критерий линейной независимости системы векторов)**.**
Система векторов линейного пространства, состоящая из двух и более векторов, линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из ее векторов не выражается линейно через остальные.

Следствие 2.
Система векторов линейного пространства, состоящая из двух векторов, линейно зависима тогда и только тогда, когда v_1, v_2 – пропорциональны.

Следствие 3.

1. Два геометрических вектора линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они коллинеарны;

2. Три геометрических вектора линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они компланарны.

3.3.1 Леммы о линейной зависимости

Лемма 1.
Если система векторов линейного пространства содержит линейно зависимую подсистему, то и вся система линейно зависима.

Доказательство.
Пусть $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m$ – система векторов и пусть$v_1, \ldots, v_k$ – ее линейно

зависимая подсистема $\Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R} : \begin{cases} \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + 0 v_{k+1} + \cdots + 0 v_m = \overline{0}$ – нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Значит, $v_1, \ldots, v_m$ – линейно зависимая система.

Следствие.
Любая подсистема линейно независимой системы линейно независима.

Лемма 2.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно независимая система V, $v \in V$.

Тогда $v_1, v_2, \ldots, v_k, v$ – линейно зависимая система $\Leftrightarrow v \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).

Пусть $v_1, \ldots, v_k, v$ – линейно зависимая система $\Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 + \alpha^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha v = \overline{0}. \end{cases}$$

$\alpha \neq 0$, иначе $\begin{cases} \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0} \end{cases} \Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ – линейно зависимая система, что противоречит условию.

Тогда $\alpha v = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_k v_k$,

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha} v_k \Rightarrow v \in L[v_1, \ldots, v_k].$$

Достаточность ($\Leftarrow$).

См. теорему 1.

Следствие.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно независимая система V, $v \in V$.

Тогда $v_1, v_2, \ldots, v_k, v$ – линейно независимая система $\Leftrightarrow v \notin L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Лемма 3.
Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ и $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – две системы векторов линейного пространства V, причем $m > k$. Тогда если $\forall u_i \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k] \quad i = \overline{1, m}$, то $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – линейно зависимая система.

Доказательство.
Пусть

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{21} v_2 + \cdots + \alpha_{k1} v_k, \\ u_2 = \alpha_{12} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \cdots + \alpha_{k2} v_k, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_m = \alpha_{1m} v_1 + \alpha_{2m} v_2 + \cdots + \alpha_{km} v_k. \end{cases}$$

Рассмотрим линейную комбинацию $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$\begin{aligned} \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_m u_m = (\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1m}\beta_m) v_1 + \\ + (\alpha_{21}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{2m}\beta_m) v_2 + \ldots \\ + (\alpha_{k1}\beta_1 + \alpha_{k2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{km}\beta_m) v_k. \end{aligned}$$

Докажем, что найдутся числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, не все равные нулю одновременно, и такие, что все коэффициенты линейной комбинации векторов $v_1, \ldots, v_k$ будут нулевыми, тогда и $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_m u_m$ будет равна $\overline{0}$.

Рассмотрим

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \cdots + \alpha_{1m}\beta_m = 0, \\ \alpha_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{2m}\beta_m = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \alpha_{k1}\beta_1 + \alpha_{k2}\beta_2 + \cdots + \alpha_{km}\beta_m = 0 \end{cases}$$

– ОСЛАУ, в которой k уравнений и m неизвестных: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

$m > k \Rightarrow$ есть свободные неизвестные, придадим им ненулевые значения, тогда получим

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)^{\mathrm{T}} \text{ – нетривиальное решение ОСЛАУ } \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} \beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_m^2 \neq 0, \\ \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_m u_m = \overline{0} \end{cases} \Rightarrow u_1, u_2 \ldots, u_m$ – линейно зависимая система.

3.4 Размерность линейного пространства

Определение.
Линейное пространство V называется ***бесконечномерным*** ($\dim V = \infty$), если $\forall n \in \mathbf{N}$ в пространстве V найдется линейно независимая система, состоящая из n векторов.

Примеры.

1. $\mathbf{R}[x]: \ \forall n \in \mathbf{N} \quad x^0, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ – линейно независимая система, т. к.

   $\alpha_0 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x^0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$.

   Значит, пространство $\mathbf{R}[x]$ является бесконечномерным, т. е. $\dim \mathbf{R}[x] = \infty$.

2. $\mathbf{R}[x] \subset \mathrm{C}(-\infty, \infty) \Rightarrow \dim \mathrm{C}(-\infty, \infty) = \infty$.

Определение.
Линейное пространство V называется ***конечномерным размерности*** n ($\dim V = n$), если в нем существует линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система, содержащая большее количество векторов, является линейно зависимой.

Таким образом, $\dim V$ – максимальное число векторов, которое может содержать линейно независимая система векторов пространства V.

Замечание.
Пространство V является конечномерным пространством размерности n, если

1) существует линейно независимая система, содержащая n векторов;

2) любая система, содержащая $n+1$, вектор линейно зависима (тогда по лемме 1 и любая система, содержащая большее количество векторов, будет линейно зависимой).

Примеры.

1. $\dim V^1 = 1$, т. к.

   1) в V^1 $\exists$ линейно независимая система, состоящая из одного ненулевого вектора;

   2) $\forall$ система, состоящая из двух векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V^1$, линейно зависима, поскольку если $\overline{v}_1 = \overline{0}$, то $\overline{v}_1$ – линейно зависимая подсистема, а если $\overline{v}_1 \neq \overline{0}$, то $\overline{v}_2$ пропорционален $\overline{v}_1$, т. е. $\overline{v}_2 \in L[\overline{v}_1]$.

2. $\dim V^2 = 2$, т. к.

   1) в V^2 $\exists$ линейно независимая система, состоящая из двух неколлинеарных векторов;

   2) $\forall$ система, состоящая из трех векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3 \in V^2$, линейно зависима, поскольку если $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ коллинеарны, то они образуют линейно зависимую подсистему, а если $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ неколлинеарны, то $\overline{v}_3 \in L[\overline{v}_1, \overline{v}_2]$.

3. $\dim V^3 = 3$, т. к.

   1) в V^3 $\exists$ линейно независимая система, состоящая из трех некомпланарных векторов;

   2) $\forall$ система, состоящая из четырех векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4 \in V^3$, линейно зависима, поскольку если $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ компланарны, то они образуют линейно зависимую подсистему, а если $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ некомпланарны, то $\overline{v}_4 \in L[\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3]$.

3.5 Базис линейного пространства

Определение.
Базисом конечномерного линейного пространства V называется максимальная линейно независимая система его векторов, т. е.

$$e_1, e_2, \ldots, e_n - \text{базис } V \Leftrightarrow \begin{cases} 0)\ e_1, e_2, \ldots, e_n \in V, \\ 1)\ e_1, e_2, \ldots, e_n - \text{линейно независимая система}, \\ 2)\ n = \dim V. \end{cases}$$

Пример.
Любая система, состоящая из трех некомпланарных векторов, является базисом V^3.

Обозначение.
$e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – базис V.

Определение.
Система векторов линейного пространства $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ называется ***полной системой*** в этом пространстве, если любой вектор пространства линейно выражается через эту систему векторов, т. е.

$$v_1, v_2, \ldots, v_k - \text{полная система } V \Leftrightarrow \forall v \in V \;\; v \in L[v_1, v_2, \ldots, v_k] \Leftrightarrow V = L[v_1, v_2, \ldots, v_k].$$

Теорема 1 (Критерий того, что система векторов пространства является его базисом)**.**
Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ является базисом V тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} 1)\ e_1, e_2, \ldots, e_n - \text{линейно независимая система}, \\ 2')\ e_1, e_2, \ldots, e_n - \text{полная система в } V. \end{cases}$$

Доказательство.
Нужно доказать, что $\begin{cases} 1) \\ 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \\ 2') \end{cases}$.

Докажем в правую сторону ($\Rightarrow$).
Пусть выполнены $1), 2)$, покажем, что выполняется $2')$.
Поскольку $\dim V = n$, $\forall v \in V$, система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n, v$, содержащая $n+1$ вектор, линейно зависима. Следовательно, на основании леммы 2 $v \in L[e_1, \ldots, e_n]$.

Докажем в левую сторону ($\Leftarrow$).
Пусть выполнены $1), 2')$, покажем, что выполняется $2)$.
$\dim V = n$, поскольку существует линейно независимая система $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$, содержащая n векторов, а любая система, состоящая из $m > n$ векторов, линейно зависима в силу леммы 3, т. к. любой вектор этой системы линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Таким образом, базис линейного пространства – это полная линейно независимая система его векторов. (Это утверждение называют также вторым определением базиса).
Заметим, что количество векторов в любом базисе равно размерности пространства.

3.5.1 Примеры естественных базисов линейных пространств

В первых трех примерах заранее известна размерность пространства, поэтому ищем базис пространства как максимально линейно независимую систему его векторов.

1. $V^1, \bar{i} \in V^1 : |\bar{i}| = 1$.
   $\langle \bar{i} \rangle$ – базис V^1, т. к.

0) $\overline{i} \in V^1$;

1) система $\overline{i}$ линейно независима, т. к. $\overline{i} \neq \overline{0}$;

2) $\dim V = 1$.

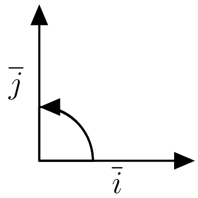
2. V^2, $\overline{i}, \overline{j} \in V^2 : \overline{i} \perp \overline{j}$, $|\overline{i}| = |\overline{j}| = 1$, $\langle i, j \rangle$ – правая двойка.

$\langle \overline{i}, \overline{j} \rangle$ – базис V^2, т. к.

0) $\overline{i}, \overline{j} \in V^2$;

1) $\overline{i}, \overline{j}$ линейно независимы, т. к. неколлинеарны;

2) $\dim V^2 = 2$.



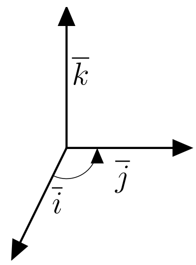
3. V^3, $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \in V^3$: $\overline{i} \perp \overline{j}$, $\overline{i} \perp \overline{k}$, $\overline{j} \perp \overline{k}$, $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$, $\langle \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \rangle$ – правая тройка.

$\langle \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \rangle$ – базис V^3, т. к.

0) $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \in V^3$;

1) $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ линейно независимы, т. к. некомпланарны;

2) $\dim V^3 = 3$.



Во всех остальных остальных примерах заранее не известна размерность пространства, поэтому ищем базис пространства как полную линейно независимую систему его векторов, а потом определяем размерность пространства.

4. $\mathbf{R}$.

$$\begin{cases} 0)\ 1 \in \mathbf{R}; \\ 1)\ \text{система } 1 \text{ линейно независима, т. к. } 1 \neq 0; \\ 2')\ \forall r \in \mathbf{R}\ r = r \cdot 1, \text{ т. е. } r \in L[1]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2') \end{cases} \Rightarrow \langle 1 \rangle \text{ – базис } \mathbf{R} \Rightarrow \dim \mathbf{R} = 1.$$

5. $$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ x_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1, n} \right\}, \qquad E^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ – } i\text{-ая строка.}$$

0) $$E^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ E^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ E^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

1) Пусть $\alpha_1 E^1 + \alpha_2 E^2 + \dots + \alpha_n E^n = \overline{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_i = 0 \;\; i = \overline{1,n} \Rightarrow E^1, \dots, E^n \text{ – линейно независимая система.}$$

(Линейную независимость системы $E^1, E^2, \dots, E^n$ можно доказать, пользуясь критерием: ни один из векторов системы не может быть линейно выражен через остальные ее векторы, поскольку в каждом из столбцов имеется позиция, в которой стоит 1, тогда как во всех других столбцах в этой позиции 0).

2′) $E^1, E^2, \dots, E^n$ – полная система в $\mathbf{R}^n$, т. к.

$$\forall X \in \mathbf{R}^{m\times n} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 E^1 + x_2 E^2 + \dots + x_n E^n.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2') \end{array}\right. \Rightarrow \langle E^1, E^2, \dots, E^n \rangle \text{ – базис } \mathbf{R}^n \Rightarrow \dim \mathbf{R}^n = n.$$

6. $\mathbf{R}^{m\times n}$, E_{ij} – матрица, в которой на месте ij стоит 1, а в остальных местах 0.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

0) $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn} \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

1) $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}$ – линейно независимая система. Это доказывается так же, как в предыдущем примере.

Пусть $\alpha_{11}E_{11} + \alpha_{12}E_{12} + \dots + \alpha_{mn}E_{mn} = \overline{0} \Rightarrow (a_{ij}) = \overline{0} \Rightarrow a_{ij} = 0,\; i = \overline{1,m},\; j = \overline{1,n}$.

2′) $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}$ – полная система в $\mathbf{R}^{m\times n}$, т. к.

$$\forall X \in \mathbf{R}^{m\times n} \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = x_{11}E_{11} + x_{12}E_{12} + \dots + x_{mn}E_{mn}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2') \end{array}\right. \Rightarrow \langle E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn} \rangle \text{ – базис } \mathbf{R}^{m\times n} \Rightarrow \dim \mathbf{R}^{m\times n} = mn;$$

7. $P_n = \{p(x) \in \mathbf{R}[x] : \deg p(x) \le n\}$.

0) $x^n, x^{n-1}, \dots, x, x^0 \in P_n$.

1) Пусть $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n x^0 = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^n, x^{n-1}, \dots, x^0$ – линейно независимая система.

2′) $\forall p(x) \in P_n \; p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
$\Rightarrow p(x)$ линейно выражается через $x^n, x^{n-1}, \dots, x^0 \Rightarrow$ это полная система в P_n.

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2') \end{array}\right. \Rightarrow \langle x^n, x^{n-1}, \ldots, x^0\rangle \text{ – базис } P_n,\ \dim P_n = n+1.$$

3.5.2 Дополнение линейно независимой системы до базиса пространства

Теорема 2 (О возможности дополнения линейно независимой системы конечномерного пространства до его базиса)**.**
Пусть $\dim V = n,\ v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ – линейно независимая система векторов.
Тогда существуют такие $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$, что $\langle v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$ – базис V.

Доказательство.
Если $k = n$, то $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k\rangle$ – базис V.
Если $k < n$, то $v_1, v_2, \ldots, v_k$ не является базисом $V \Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k$ не является полной системой в $V \Rightarrow \exists v \in V : v \notin L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.
Положим $v_{k+1} = v$. Из леммы 2 $\Rightarrow v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ – линейно независимая система.
Если $k+1 = n$, то $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}\rangle$ – базис V.
Если $k+1 < n$, то $\exists v \in V : v \notin L[v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}]$.
Продолжая аналогично, дойдем до v_n и получим $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\rangle$ – базис V.

Следствие.
Любой ненулевой вектор линейного пространства можно включить в некоторый базис этого пространства.

3.5.3 Координаты вектора линейного пространства в его базисе

Теорема 3 (О том, что любой вектор однозначно выражается через базисные векторы)**.**
Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ конечномерного пространства V является его базисом тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$\left\{\begin{array}{l} 1)\ \forall v \in V\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} : v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n, \\ 2)\ x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ определены однозначно.} \end{array}\right.$$

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).
Пусть $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ – базис $V \Rightarrow e_1, e_2, \ldots, e_n$ – полная система в $V \Rightarrow$

1) $\exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} : v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$;

2) Пусть $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n$,
$(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 \cdots + (x_n - y_n)e_n = \overline{0}$.
$$e_1, e_2 \ldots, e_n \text{ – линейно независимая система} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - y_1 = 0, \\ x_2 - y_2 = 0, \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2, \\ \vdots \\ x_n = y_n. \end{array}\right.$$

Достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть выполняются условия 1) и 2). Условие 1) означает полноту системы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Докажем линейную независимость этой системы.
Пусть $\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \cdots + \alpha_ne_n = \overline{0} = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n$.
Из 2) $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \Rightarrow e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимая система $\Rightarrow$
$\Rightarrow \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle$ – базис V, т. к. это полная линейно независимая система.

Определение.
Коэффициенты линейной комбинации, выражающей вектор v через базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$, называются ***координатами*** вектора v в базисе $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$.

Если распространить правила умножения матриц на строку, состоящую из векторов, и столбец, состоящий из чисел, можно записать

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \big(e_1, e_2, \ldots, e_n\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = eX, \text{ где}$$

$e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – базис V, X – столбец координат вектора v в базисе e.

Примеры.

1. V^3, $\langle \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \rangle = e$.

   $$\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k} = \big(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\big) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

2. P_2, $\langle x^2, x, 1 \rangle = e$.

   $$2x^2 + 1 = \big(x^2, x, 1\big) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.
Линейным операциям над векторам в пространстве V размерности n соответствуют те же операции над столбцами их координат в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Пусть e – базис V, $v_1 = eX^1$, $v_2 = eX^2 \in V$, тогда

$$v_1 + v_2 = e(X^1 + X^2),$$
$$\alpha v_1 = e(\alpha X^1).$$

Доказательство.
$v_1 + v_2 = eX^1 + eX^2 = e(X^1 + X^2)$;
$\alpha v_1 = \alpha(eX^1) = e(\alpha X^1)$.

Определение.
Пусть V, W – линейные пространства. Отображение $\Phi : V \to W$ называется ***изоморфизмом*** линейных пространств, если

1) Φ – биективное отображение;

2) Φ сохраняет линейные операции :

$$\Phi(v_1 + v_2) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$
$$\Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v) \quad \forall v \in V, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}.$$

Если $\exists \Phi : V \to W$ изоморфизм, то пространства V и W называются изоморфными ($V \simeq W$).

Теорема 5.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, тогда

$$V \simeq \mathbf{R}^n.$$

Доказательство.
Пусть e – базис V, $\forall v = eX$, столбец X определен однозначно (см. теорему 3). Следовательно, можно определить отображение

$$\Phi_e : v \longmapsto X,$$
$$\Phi_e : V \longmapsto \mathbf{R}^n.$$

1) Φ_e – очевидно, биективное отображение.

2) $\Phi_e(v_1 + v_2) = X^1 + X^2 = \Phi(v_1) + \Phi(v_2)$, $\Phi_e(\alpha v) = \alpha X = \alpha \Phi_e(v)$. (см. теорему 4).

Утверждение 1.
Система векторов n-мерного линейного пространства V линейно зависима $\Leftrightarrow$ система столбцов их координат в некотором базисе пространства V линейно зависима в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство.
Пусть $\dim V = n,\ e$ – базис V, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V,\ v_i = eX^i,\ i = \overline{1,k}$.

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно зависимая система в $V \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R} : \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_k X^k = \overline{0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X^1, X^2, \ldots, X^k \text{ – линейно зависимая система в } \mathbf{R}^n.$$

Следствие.
Система векторов n-мерного линейного пространства V линейно независима $\Leftrightarrow$ система столбцов их координат в некотором базисе пространства V линейно независима в $\mathbf{R}^n$.

3.6 Ранг системы векторов

Определение.
Рангом системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейного пространства V называется максимально возможное число векторов в ее линейно независимой подсистеме.

$$\operatorname{rk}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = r$$
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \text{1) Существует линейно независимая подсистема, которая содержит } r \text{ векторов;} \\ \text{2) Любая подсистема, содержащая большее число векторов, линейно зависима.} \end{cases}$$

Пример. $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, e^t \in \mathrm{C}(-\infty, \infty)$.

$e^t = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \Rightarrow \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, e^t$ – линейно зависимая система.

Докажем, что $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t$ – линейно независимая подсистема. Пусть $\alpha_1 \operatorname{sh} t + \alpha_2 \operatorname{ch} t = 0$. Положим $t = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \operatorname{sh} t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Следовательно, $\operatorname{rk}\{\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, e^t\} = 2$.

Замечание.
$v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно независимая система векторов линейного пространства $V \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \operatorname{rk}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = k.$$

Теорема 1.
Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ является базисом $L[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

Доказательство.
Пусть $v_1, v_2, \dots, v_r$ – максимальная линейно независимая подсистема системы $v_1, v_2, \dots, v_k \Rightarrow \operatorname{rk}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = r$.

Тогда:

0) $v_1, v_2, \dots, v_r \in L[v_1, v_2, \dots, v_k]$;

1) $v_1, v_2, \dots, v_r$ – линейно независимая система;

2) $\forall i = \overline{r+1, k},\ v_1, v_2, \dots, v_r, v_i$ – линейно зависимая система $\overset{\text{Л2}}{\Longrightarrow}$

$$\overset{\text{Л2}}{\Longrightarrow} v_i \in L[v_1, v_2, \dots, v_r],\ i = \overline{r+1, k} \Rightarrow L[v_1, v_2, \dots, v_k] \subset L[v_1, v_2, \dots, v_r] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L[v_1, v_2, \dots, v_k] = L[v_1, v_2, \dots, v_r] \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_r \text{ – полная система в } L[v_1, v_2, \dots, v_k].$$

$$\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow \langle v_1, v_2, \dots, v_r\rangle \text{ – базис } L[v_1, v_2, \dots, v_k].$$

Следствие.
$\dim L[v_1, v_2, \dots, v_k] = \operatorname{rk}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Теорема 2.
Если $v_1, v_2, \dots, v_k$ и $u_1, u_2 \dots, u_m$ – две системы векторов из линейного пространства V и $u_i \in L[v_1, v_2, \dots, v_k] \quad \forall i = \overline{1, m}$, тогда

$$\operatorname{rk}\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \le \operatorname{rk}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Доказательство.
$L[u_1, u_2, \dots, u_m] \subset L[v_1, v_2, \dots, v_k] \Rightarrow \dim L[u_1, u_2, \dots, u_m] \le \dim L[v_1, v_2, \dots, v_k]$

$$\Updownarrow$$
$$\operatorname{rk}\{u_1, u_2, \dots, u_m\} \le \operatorname{rk}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}.$$

Определение.
Две системы векторов линейного пространства называются ***эквивалентными***, если любой из векторов второй системы линейно выражается через векторы первой системы и наоборот.

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \sim \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} u_i \in L[v_1, v_2, \dots, v_k] & \forall i = \overline{1, m}, \\ v_j \in L[u_1, u_2, \dots, u_m] & \forall j = \overline{1, k} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$L[u_1, u_2, \dots, u_m] = L[v_1, v_2, \dots, v_k].$$

Следствие.
Если $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \sim \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, то $\operatorname{rk}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \operatorname{rk}\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

3.7 Ранг матрицы

Определение.
Минором k-ого порядка матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ называется определитель, образованный элементами A, стоящими на пересечении любых ее k строк и k столбцов.

Определение.
Рангом ненулевой матрицы называется наибольший из порядков её ненулевых миноров.
Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

$$A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ \operatorname{rk} A = k > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 1) \text{ Существует минор матрицы } A\ k\text{-ого порядка, который не равен нулю;} \\ 2) \text{ Любой минор матрицы } A \text{ порядка } l > k \text{ равен нулю.} \end{cases}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1) $\operatorname{rk} A = 2$, поскольку минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$,
2) а любой минор большего порядка (в данном случаего только третьего) равен 0, т. к. $A_3 = A_1 + A_2$.

Замечание.
Если $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, то $\operatorname{rk} A \leq \min\{m, n\}$.

Теорема 1 (О ранге ступенчатой матрицы)**.**
Ранг матрицы ступенчатого вида равен числу ее ненулевых строк (ступеней).

Доказательство.

Если $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & \dots & a_{2j_2} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{rj_r} & a_{rn} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r} \neq 0$,

то ранг матрицы $\operatorname{rk} A = r$, т. к.

1) существует минор порядка r, отличный от нулевого, а именно, Δ – минор, который стоит на пересечении r ненулевых строк и столбцов с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{2j_2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{r_{j_r}} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{r} a_{ij_i} \neq 0\,;$$

2) любой минор большего порядка содержит нулевую строку, следовательно, равен 0.

Теорема 2.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.
Тогда
$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T.$$

Доказательство.
При транспонировании миноров матрицы их численные значения сохраняются $\Rightarrow$ порядки ненулевых миноров остаются прежними $\Rightarrow$ максимальный из этих порядков остается прежним.

Следствие.
Все свойства строк матрицы, связанные с ее рангом, которые будут доказаны ниже, верны и для столбцов матрицы.

Определение.
Базисным минором матрицы A называется любой ее ненулевой минор максимально возможного порядка (ненулевой минор, порядок которого равен $\operatorname{rk} A$).

Теорема 3 (О базисном миноре)**.**

1. Строки матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему строк в $\mathbf{R}^{1\times n}$;
2. Любая строка, не входящая в базисный минор, линейно выражается через строки, входящие в базисный минор.

Доказательство.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rk} A = r$.

Пусть $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$ – базисный минор $\Rightarrow D \neq 0$.

1. Строки $A_1, A_2 \dots, A_r$ линейно независимы, т. к. иначе одна из них являлась бы линейно комбинацией остальных, и, следовательно, $D = 0$ – противоречие;
2. Рассмотрим для $\forall i = \overline{r+1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$, определитель Δ_{ij} порядка $r+1$:

$$\Delta_{ij} = \left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1r} & & a_{1j} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & & a_{rj} \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{ir} & & a_{ij} \end{array}\right|.$$

$\forall i = \overline{r+1, m}$, $\forall j = \overline{1, n}$ $\Delta_{ij} = 0$, т. к. если $\begin{array}{l} j = \overline{1, r} \ \Rightarrow \text{ в } \Delta_{ij} \text{ два одинаковых столбца,} \\ j = \overline{r+1, n} \ \Rightarrow \Delta_{ij} \text{ – минор } A \text{ порядка } r+1. \end{array}$

Разложим Δ_{ij} по последнему столбцу, заметив, что алгебраические дополнения к его элементам не зависят от j, но зависят от i. Обозначим D_{i_k} алгебраическое дополнение к элементу a_{kj}, $k = \overline{1, r}$, алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} будет базисный минор D при любом $j = \overline{1, n}$.

$$\Delta_{ij} = a_{1j}D_{i_1} + a_{2j}D_{i_2} + \dots + a_{rj}D_{i_r} + a_{ij}D = 0.$$

Т. к. $D \neq 0 \Rightarrow a_{ij} = -\dfrac{D_{i_1}}{D}a_{1j} - \dfrac{D_{i_2}}{D}a_{2j} - \dots - \dfrac{D_{i_r}}{D}a_{rj}$ $\forall j = \overline{1, n}$, $\forall i = \overline{1+r, m} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_i = -\frac{D_{i_1}}{D}A_1 - \frac{D_{i_2}}{D}A_2 \dots - \frac{D_{i_r}}{D}A_r,\ i = \overline{r+1, m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_i \in L[A_1, A_2, \dots, A_r],\ i = \overline{r+1, m}.$$

Следствие 1.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

Ранг матрицы равен рангу системы её строк, т. е.

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{A_1, A_2 \dots, A_m\}.$$

Доказательство.
Пусть $\operatorname{rk} A = r \Rightarrow \exists r$ линейно независимых строк, входящих в базисный минор. Пусть это строки $A_1, A_2 \ldots, A_r \Rightarrow \operatorname{rk}\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} = r$.

$\forall A_i$ линейно выражается через $A_1, A_2, \ldots, A_r, \quad i = \overline{1, m}$.

$$\begin{cases} L[A_1, A_2, \ldots, A_m] \subset L[A_1, A_2, \ldots, A_r], \\ L[A_1, A_2, \ldots, A_r] \subset L[A_1, A_2, \ldots, A_m] \end{cases} \Rightarrow L[A_1, A_2, \ldots, A_m] = L[A_1, A_2, \ldots, A_r] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk}\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} = \operatorname{rk}\{A_1, A_2, \ldots, A_r\} = r.$$

Следствие 2.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

$\det A = 0 \Leftrightarrow$ строки A линейно зависимы (образуют линейно зависимую систему в $\mathbf{R}^{1\times n}$).

Доказательство.
$\det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rk} A < n \Leftrightarrow \operatorname{rk}\{A_1, A_2 \ldots, A_n\} < n \Leftrightarrow \{A_1, A_2 \ldots, A_n\}$ – линейно зависимая система.

Следствие 3.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ строки A линейно независимы (образуют линейно независимую систему в $\mathbf{R}^{1\times n}$).

Теорема 4.
Если матрица $A' \in \mathbf{R}^{m\times n}$ получена из матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ с помощью элементарных преобразований строк, то системы строк этих матриц эквивалентны в $\mathbf{R}^{1\times n}$.

$$A \xrightarrow{\text{эл. преобр.}} A' \Rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \sim \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_m\}.$$

Доказательство.
$A \xrightarrow{\text{эл. преобр.}} A' \Rightarrow A'_i \in L[A_1, A_2, \ldots, A_m]$.

$A' \xrightarrow[\text{эл. преобр.}]{\text{обратные}} A \Rightarrow A_i \in L[A'_1, A'_2, \ldots, A'_m]$.

Следствие.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, A' получается из A с помощью элементарных преобразований.

Тогда
$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'.$$

Доказательство.
$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \sim \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_m\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{rk}\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} = \operatorname{rk}\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_m\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} = \operatorname{rk}\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_m\} = \operatorname{rk} A'.$$

Чтобы найти ранг матрицы, ее с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду, а ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Пример.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_1 \leftrightarrow A_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3A_1+A_4]{-2A_1+A_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3A_2+A_4]{4A_2+A_3}$$

$$\xrightarrow[3A_2+A_4]{4A_2+A_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-A_3+A_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3.$$

Пример. Найдем размерность и базис линейной оболочки $M = L[f_1, f_2, f_3, f_4] \subset P_4$, где $f_1(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1,\ f_2(t) = t^4 - t^2 - t,\ f_3(t) = t^4 + t^3 + 2t^2,\ f_4(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1$, и дополним базис M до базиса P_4.

Естественный базис P_4 $e = \langle t^4, t^3, t^2, t, 1\rangle,\ \dim P_4 = 5$.

Найдем столбцы координат многочленов f_1, f_2, f_3, f_4 в базисе e.

$$f_1(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1 = e\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\ f_2(t) = e\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\ f_3(t) = e\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ f_4(t) = e\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Составим матрицу, записав координаты этих векторов в строчки, и найдем ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[-A_1+A_3]{-A_1+A_2} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{A_2+A_4}$$

$$\xrightarrow{A_2+A_4} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ – максимальная линейно независимая подсистема f_1, f_2, f_3, f_4, т. е. $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ – базис $L[f_1, f_2, f_3, f_4],\ \dim M = \operatorname{rk}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \operatorname{rk} A = 3$.

$\dim P_4 = 5 \Rightarrow$ чтобы дополнить базис M до базиса P_4, необходимо и достаточно добавить к $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ два вектора g_4, g_5 таких, чтобы система f_1, f_2, f_3, g_4, g_5 была линейно независимой.

Возьмем, например,

$$g_4(t) = e\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = t,\ g_5(t) = e\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 1.$$

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A' = 5 \Rightarrow f_1, f_2, f_3, g_4, g_5 \text{ – линейно независимая система.}$$

Тогда $\langle f_1, f_2, f_3, g_4, g_5\rangle$ – базис P_4 т. к.

0) $f_1, f_2, f_3, g_4, g_5 \in P_4$;

1) f_1, f_2, f_3, g_4, g_5 линейно независимы ($\operatorname{rk} A' = 5$);

2) $\dim P_4 = 5$.

Теорема 5 (О ранге произведения матриц)**.**
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times k},\ B \in \mathbf{R}^{k\times n}$, тогда

$$1)\ \operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} A,$$
$$2)\ \operatorname{rk}(AB) \le \operatorname{rk} B.$$

Доказательство.
Вспомним, что все утверждения о ранге матрицы, доказанные для строк, верны и для столбцов.

$$(AB)^j = \begin{pmatrix} A_1B^j \\ A_2B^j \\ \vdots \\ A_mB^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{1j} + \dots + a_{1k}b_{kj} \\ a_{21}b_{1j} + \dots + a_{2k}b_{kj} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1j} + \dots + a_{mk}b_{kj} \end{pmatrix} = b_{1j}A^1 + b_{2j}A^2 + \dots + b_{kj}A^k \in L[A^1, A^2 \dots, A^k] \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

1) $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}\{(AB)^1, (AB)^2, \dots, (AB)^n\} \leq \operatorname{rk}\{A^1, A^2, \dots, A^k\} = \operatorname{rk} A;$

2) $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}((AB)^T) = \operatorname{rk}(B^T A^T) \leq \operatorname{rk} B^T = \operatorname{rk} B.$

Следствие 1.
Если $A \in \mathbf{R}^{m\times m} : \det A \neq 0,\ B \in \mathbf{R}^{m\times n}$, то $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$.

Доказательство.

$$\begin{cases} \operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} B, \\ \operatorname{rk} B = \operatorname{rk}((A^{-1}A)B) = \operatorname{rk}(A^{-1}(AB)) \leq \operatorname{rk}(AB) \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rk} B = \operatorname{rk} AB.$$

Следствие 2.
Если $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ B \in \mathbf{R}^{n\times n} : \det B \neq 0$, то $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A$.

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

3.8 Переход от базиса к базису в линейном пространстве

3.8.1 Матрица перехода от базиса к базису

Рассмотрим конечномерное линейное пространство V, $\dim V = n$.

Пусть $e = \langle e_1, e_2, \dots, e_n\rangle$ – базис V (“старый”),
$f = \langle f_1, f_2, \dots, f_n\rangle$ – базис V (“новый”).

Разложим векторы “нового” базиса f по “старому” базису e:

$$f_j = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \dots + t_{nj}e_n = e\begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \vdots \\ t_{nj} \end{pmatrix} = eT^j,\ j = \overline{1, n}.$$

$T_{e\to f} = (T^1, T^2, \dots, T^n)$ – ***матрица перехода от базиса*** e ***к базису*** f**.**

$$(f_1, f_2, \dots, f_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n)\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow f = eT_{e\to f}.$$

Пример. V^2

$$e = \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle, \quad f = \langle \overline{f_1}, \overline{f_2} \rangle; \quad \begin{cases} \overline{f_1} = 2\bar{i} + \bar{j} = e \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \overline{f_2} = -\bar{i} + \bar{j} = e \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{cases} \quad (\overline{f_1}, \overline{f_2}) = (\bar{i}, \bar{j}) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow f = eT_{e\to f}.$$

Матрица перехода $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.8.2 Свойства матрицы перехода

Утверждение 1.
Пусть e, f – базисы V, $\dim V = n$.
Тогда

$$T_{e\to f} \in \mathbf{R}^{n\times n} \text{ и } \det T_{e\to f} \neq 0.$$

Доказательство.
Столбцы матрицы $T_{e\to f}$ – это столбцы координат в базисе e линейно независимой системы $f_1, f_2, \ldots, f_n \Rightarrow \operatorname{rk} T_{e\to f} = \operatorname{rk}\{T^1, T^2, \ldots, T^n\} = n \Rightarrow \det T_{e\to f} \neq 0$.

Утверждение 2.
Пусть e, f – базисы линейного пространства V.
Тогда

$$T^{-1}_{e\to f} = T_{f\to e}.$$

Доказательство.
$f = eT_{e\to f}$, $\det T_{e\to f} \neq 0 \Rightarrow \exists T^{-1}_{e\to f}$,
$fT^{-1}_{e\to f} = eT_{e\to f}T^{-1}_{e\to f}$,
$fT^{-1}_{e\to f} = e \Rightarrow T^{-1}_{e\to f} = T_{f\to e}$.

Утверждение 3.
Пусть e, f, g – базисы линейного пространства V.
Тогда

$$T_{e\to g} = T_{e\to f}T_{f\to g}.$$

Доказательство.
$g = eT_{e\to g} = fT_{f\to g} = (eT_{e\to f})T_{f\to g} = e(T_{e\to f}T_{f\to g}) \Rightarrow T_{e\to g} = T_{e\to f}T_{f\to g}$.

Пример. V^2

Пусть

$$e = \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle, \quad f = \langle \overline{f_1}, \overline{f_2} \rangle, \quad g = \langle \overline{g_1}, \overline{g_2} \rangle, \quad \begin{cases} \overline{f_1} = \bar{i} + 2\bar{j}, \\ \overline{f_2} = -\bar{i} + \bar{j}, \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{g_1} = 2\bar{i} - \bar{j}, \\ \overline{g_2} = \bar{i} + \bar{j}. \end{cases}$$

Найдем $T_{f\to g}$.

$$\overline{f_1} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f_2} = e\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{g_1} = e\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{g_2} = e\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_{e\to g} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_{f\to g} = T_{f\to e}T_{e\to g} = T^{-1}_{e\to f}T_{e\to g} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$g = f\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\overline{f_1} - \frac{5}{3}\overline{f_2}, \ \frac{2}{3}\overline{f_1} - \frac{1}{3}\overline{f_2}\right) = (\overline{g_1}, \overline{g_2}).$$

Утверждение 4.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, e – базис V, $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $\det T \neq 0$.
Тогда $f = eT$ – базис V, T – матрица перехода от e к f.

Доказательство.
Рассмотрим $f = eT$.
$f = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$:

0) $f_1, f_2, \ldots, f_n \in V$;

1) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – линейно независимая система, т. к. столбцы координат ее векторов в базисе e – это столбцы матрицы $T = (T^1, T^2, \ldots, T^n)$, а $\det T \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk}\{T^1, \ldots, T^n\} = n$;

2) $n = \dim V$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0),\\ 1),\\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ – базис } V,\ f = eT \Rightarrow T = T_{e\to f}.$$

Утверждение 5.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n$, e – базис V.
$T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ является матрицей перехода от базиса e к некоторому базису $f = eT$ тогда и только тогда, когда $\det T \neq 0$.

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$):
см. утверждение 1.
Достаточность($\Leftarrow$):
см. утверждение 4.

Утверждение 6.
Пусть e, f – базисы линейного пространства V, $\dim V = n$.

$$\forall v \in V\ \ v = eX_e = fX_f \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} X_e = T_{e\to f}X_f,\\ X_f = T^{-1}_{e\to f}X_e. \end{array}\right.$$

Доказательство.
$v = eX_e$
$v = fX_f = (eT_{e\to f})X_f = e(T_{e\to f}X_f) \Rightarrow X_e = T_{e\to f}X_f \Rightarrow X_f = T_{f\to e}X_e = T^{-1}_{e\to f}X_e$.

Пример. V^2, $e = \langle \bar{i}, \bar{j}\rangle$, $\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\left\{\begin{array}{l} \overline{f_1} = \bar{i} + 2\bar{j},\\ \overline{f_2} = -\bar{i} + \bar{j}. \end{array}\right.$

Докажем, что $\langle \overline{f_1}, \overline{f_2}\rangle = f$ – базис V^2, и найдем координаты $\bar{v}$ в этом базисе.

$$\begin{array}{l} \overline{f_1} = e\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\\ \overline{f_2} = e\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \end{array} \quad \text{рассмотрим } T = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ \det T = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f = \langle \overline{f_1}, \overline{f_2}\rangle = eT$ – базис V^2, $T = T_{e\to f}$.

$$T^{-1}_{e\to f} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix};$$

$$\overline{v} = 3\overline{i} - 2\overline{j} = (\overline{i}, \overline{j}) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = eX_e,\ X_e = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$v = fX_f,\ X_f = T_{e\to f}^{-1} X_e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix};$$

$$v = fX_f = (\overline{f_1}, \overline{f_2}) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\,\overline{f_1} - \frac{8}{3}\,\overline{f_2}.$$