Типовой расчет по алгебре и геометрии (4 семестр).

Задача 1.

1) Перечислите все собственные идеалы кольца $\mathbb{Z}_n$.

2) Укажите среди них максимальные идеалы и найдите факторкольца по ним.

3) Найдите нильрадикал $Rad\mathbb{Z}_n$ и факторкольцо $\mathbb{Z}_n/Rad\mathbb{Z}_n$.

4) Найдите в $\mathbb{Z}_n$ пару идемпотентов и соответствующее им разложение $\mathbb{Z}_n$ во внутреннюю прямую сумму подколец.

5) Выпишите явные формулы прямого и обратного изоморфизма $\mathbb{Z}_n$ и внешней прямой суммы соотвествующих колец.

Вариант 1	$n = 250$.	Вариант 13	$n = 45$.
Вариант 2	$n = 99$.	Вариант 14	$n = 68$.
Вариант 3	$n = 242$.	Вариант 15	$n = 104$.
Вариант 4	$n = 147$.	Вариант 16	$n = 63$.
Вариант 5	$n = 88$.	Вариант 17	$n = 80$.
Вариант 6	$n = 117$.	Вариант 18	$n = 363$.
Вариант 7	$n = 56$.	Вариант 19	$n = 50$.
Вариант 8	$n = 63$.	Вариант 20	$n = 245$.
Вариант 9	$n = 135$.	Вариант 21	$n = 153$.
Вариант 10	$n = 76$.	Вариант 22	$n = 54$.
Вариант 11	$n = 275$.	Вариант 23	$n = 175$.
Вариант 12	$n = 75$.	Вариант 24	$n = 98$.

Задача 2.

1) Докажите, что множество R матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ является коммутативным подкольцом кольца матриц $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{F}_p)$.

2) Сколько в нем элементов?

3) Является ли кольцо R полем?

Если R не является полем, выполните пункты задания A.

Если R является полем, выполните пункты задания B.

A4) Изоморфно ли кольцо R кольцу $\mathbb{Z}_n$ при некотором n?

A5) Опишите группу $R^\star$ обратимых элементов кольца R.

A6) Найдите все идеалы R.

A7) Найдите нильрадикал R.

A8) Представьте R в виде внутренней прямой суммы его подколец и изоморфной внешней прямой суммы колец или докажите, что это невозможно.

B4) Найдите характеристику R и его простое подполе F.

B5) Найдите базис и степень расширения поля R над полем F.

B6) Укажите какой-нибудь примитивный элемент расширения поля R над F, найдите его порядок в мультипликативной группе поля R.

B7) Найдите минимальный многочлен указанного примитивного элемента.

B8) Укажите изоморфное полю R факторкольцо кольца многочленов $\mathbb{F}_p[x]$ по некоторому идеалу.

Вариант 1 $\quad p = 5 \quad \begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta = \alpha - \gamma \end{cases}$

Вариант 2 $\quad p = 3 \quad \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \delta = \beta \end{cases}$

Вариант 3 $\quad p = 7 \quad \begin{cases} \gamma + 3\beta = 0 \\ \delta = \alpha + 2\beta \end{cases}$

Вариант 4 $\quad p = 5 \quad \begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ \delta - \alpha = 3\beta \end{cases}$

Вариант 5 $\quad p = 7 \quad \begin{cases} \gamma = 2\beta \\ \delta = \alpha + \beta \end{cases}$

Вариант 6 $\quad p = 5 \quad \begin{cases} \beta = \gamma \\ \alpha = \beta + \delta \end{cases}$

Вариант 7 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \gamma-\beta &= 0 \\ \alpha+\beta &= \delta \end{cases}$

Вариант 8 $\quad p=7 \quad \begin{cases} \gamma &= 4\beta \\ \delta+5\beta &= \alpha \end{cases}$

Вариант 9 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \gamma &= 2\beta \\ \delta &= \alpha+\beta \end{cases}$

Вариант 10 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \gamma-\beta &= 0 \\ \delta+\beta &= \alpha \end{cases}$

Вариант 11 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \gamma+2\beta &= 0 \\ \alpha-\delta &= -\beta \end{cases}$

Вариант 12 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \gamma+\beta &= 0 \\ -\alpha+\beta+\delta &= 0 \end{cases}$

Вариант 13 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \beta-\gamma &= 0 \\ \delta-\alpha &= \beta \end{cases}$

Вариант 14 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \gamma-3\beta &= 0 \\ \alpha+4\delta &= 4\beta \end{cases}$

Вариант 15 $\quad p=7 \quad \begin{cases} \gamma &= -2\beta \\ \delta-\alpha &= -3\beta \end{cases}$

Вариант 16 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \beta-\gamma &= 0 \\ \alpha-\delta &= \beta \end{cases}$

Вариант 17 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \beta-\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= \delta \end{cases}$

Вариант 18 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \gamma &= 2\beta \\ \delta-\alpha &= -2\beta \end{cases}$

Вариант 19 $\quad p=7 \quad \begin{cases} \gamma+3\beta &= 0 \\ \delta &= \alpha+2\beta \end{cases}$

Вариант 20 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \gamma+2\beta &= 0 \\ \alpha-\delta &= -\beta \end{cases}$

Вариант 21 $\quad p=5 \quad \begin{cases} 2\beta-\gamma &= 0 \\ 4(\alpha-\delta) &= 3\beta \end{cases}$

Вариант 22 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \gamma &= \beta \\ \delta-\alpha &= \beta \end{cases}$

Вариант 23 $\quad p=5 \quad \begin{cases} \beta+2\gamma &= 0 \\ 3(\delta-\alpha) &= \beta \end{cases}$

Вариант 24 $\quad p=3 \quad \begin{cases} \gamma-\beta &= 0 \\ \alpha &= \beta+\delta \end{cases}$

Задача 3.

Пусть A — наименьшее целостное подкольцо поля $\mathbb{R}$, содержащее число $\alpha = \sqrt[s]{d}$ (α – корень $f(x) = x^s - d$). $K = Quot\, A$ — его поле отношений.

1) Найдите общий вид элементов кольца A. Покажите, что $A = \mathbb{Z}[\alpha]$, где α – корень $f(x)$.

2) Докажите, что $\mathbb{Z}[\alpha] \simeq \mathbb{Z}[x]/(f(x))$.

3) Найдите общий вид элементов $\mathbb{Q}[\alpha]$, где α – корень $f(x)$. Докажите, что $\mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[x]/(f(x))$.

4) Докажите, что $\mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ является полем.

5) Докажите, что $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

6) Найдите простое подполе поля K.

7) Найдите степень расширения поля K над его простым подполем.

8) Найдите все подполя поля K.

9) Найдите минимальный многочлен $\gamma = 1 + \alpha \in K$ над простым подполем поля K.

10) Найдите явную формулу для обратного элемента в $K^\star$.

Вариант 1	$s = 2$	$d = 6$	Вариант 13	$s = 2$	$d = 13$
Вариант 2	$s = 3$	$d = 4$	Вариант 14	$s = 3$	$d = 19$
Вариант 3	$s = 2$	$d = 15$	Вариант 15	$s = 2$	$d = 7$
Вариант 4	$s = 3$	$d = 5$	Вариант 16	$s = 3$	$d = 21$
Вариант 5	$s = 2$	$d = 10$	Вариант 17	$s = 3$	$d = 17$
Вариант 6	$s = 2$	$d = 5$	Вариант 18	$s = 3$	$d = 12$
Вариант 7	$s = 2$	$d = 8$	Вариант 19	$s = 2$	$d = 22$
Вариант 8	$s = 3$	$d = 6$	Вариант 20	$s = 3$	$d = 7$
Вариант 9	$s = 2$	$d = 3$	Вариант 21	$s = 3$	$d = 10$
Вариант 10	$s = 3$	$d = 15$	Вариант 22	$s = 3$	$d = 13$
Вариант 11	$s = 2$	$d = 35$	Вариант 23	$s = 3$	$d = 11$
Вариант 12	$s = 3$	$d = 9$	Вариант 24	$s = 2$	$d = 19$

Задача 4.

Пусть $R = A/(p)$, где A — кольцо из задачи 3.

1) Найдите общий вид элементов кольца R. Покажите, что $R = \mathbb{F}_p[\beta]$, где β – корень $g(x) = x^s - [d]_p \in \mathbb{F}_p[x]$.

2) Найдите $|R|$.

3) Докажите, что $R \simeq \mathbb{F}_p[x]/(g(x))$.

4) Выясните, является ли R полем.

Если R не является полем, выполните пункты задания A.

Если R является полем, выполните пункты задания B.

A5) Найдите нильрадикал $Rad\,R$.

A6) Представьте R в виде внутренней прямой суммы его подколец и изоморфной внешней прямой суммы колец или докажите, что это невозможно.

A7) Найдите порядок группы $R^\star$ обратимых элементов кольца.

B5) Найдите в поле R его простое подполе и степень расширения R над простым подполем. Найдите минимальный многочлен элемента β.

B6) Какой известной группе изоморфна мультипликативная группа поля $R^\star$? Найдите порядок элемента β в $R^\star$.

B7) Разложите многочлен $g(x)$ на линейные множители над R. Докажите, что R является полем разложения многочлена $g(x)$.

Вариант 1	$p = 5$.	Вариант 13	$p = 7$.
Вариант 2	$p = 7$.	Вариант 14	$p = 2$.
Вариант 3	$p = 3$.	Вариант 15	$p = 11$.
Вариант 4	$p = 7$.	Вариант 16	$p = 3$.
Вариант 5	$p = 7$.	Вариант 17	$p = 2$.
Вариант 6	$p = 3$.	Вариант 18	$p = 2$.
Вариант 7	$p = 7$.	Вариант 19	$p = 3$.
Вариант 8	$p = 3$.	Вариант 20	$p = 2$.
Вариант 9	$p = 5$.	Вариант 21	$p = 5$.
Вариант 10	$p = 2$.	Вариант 22	$p = 2$.
Вариант 11	$p = 5$.	Вариант 23	$p = 11$.
Вариант 12	$p = 7$.	Вариант 24	$p = 3$.

Задача 5.

Даны многочлены $f(x)$, $g(x) \in \mathbb{F}_3[x]$.

1) Разложите $f(x)$ на неприводимые множители над $\mathbb{F}_3$. Найдите поле разложения K многочлена $f(x)$.

2) Найдите $dim_{\mathbb{F}_3} K$ и $|K|$.

3) Решите в поле K уравнение $g(x) = 0$.

4) Докажите, что K является полем разложения многочлена $g(x)$.

5) Найдите какой-нибудь неприводимый многочлен $h(x) \in \mathbb{F}_3[x]$, не имеющий корней в K.

Вариант1	$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$	$g(x) = x^3 + x - 1$
Вариант2	$f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$	$g(x) = x^3 + x^2 + 1$
Вариант3	$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$	$g(x) = x^3 - x^2 - x$
Вариант4	$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$	$g(x) = x^4 + x^2 - x$
Вариант5	$f(x) = x^4 - 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x$
Вариант6	$f(x) = x^3 + x$	$g(x) = x^4 - x^2 + x - 1$
Вариант7	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$
Вариант8	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$
Вариант9	$f(x) = x^3 - x^2 - 1$	$g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
Вариант10	$f(x) = x^3 + x + 1$	$g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
Вариант11	$f(x) = x^3 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
Вариант12	$f(x) = x^4 - x^3 - x$	$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 1$
Вариант13	$f(x) = x^4 + x^3 + x$	$g(x) = x^4 - 1$
Вариант14	$f(x) = x^4 - x^2 - x - 1$	$g(x) = x^3 + x$
Вариант15	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$
Вариант16	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x$

Вариант17	$f(x) = x^3 + x - 1$	$g(x) = x^3 - x^2 - 1$
Вариант18	$f(x) = x^3 + x^2 + 1$	$g(x) = x^3 + x + 1$
Вариант19	$f(x) = x^3 - x^2 - x$	$g(x) = x^3 + x^2 - x$
Вариант20	$f(x) = x^4 + x^2 - x$	$g(x) = x^4 - x^3 - x$
Вариант21	$f(x) = x^4 + x^3 + x$	$g(x) = x^4 + x^3 + x$
Вариант22	$f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$	$g(x) = x^4 - x^2 - x - 1$
Вариант23	$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 1$	$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$
Вариант24	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$