Раздел 3. Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

Лекция 6 Сопряжённые и самосопряжённые операторы.

Оператор, сопряжённый к линейному оператору

Вспомним сначала понятие сопряжённого оператора в ЛНП.

Пусть $A \in L_O(X, Y)$ – линейный ограниченный оператор, X и Y – ЛНП, так что если $x \in X$, то $Ax \in Y$.

Пусть также $f \in Y^*$ – линейный ограниченный функционал в пространстве Y.

Рассматривается выражение $f(Ax)$ или, в других обозначениях, $< Ax, f >$. Было доказано, что относительно x это выражение задаёт линейный ограниченный функционал, который обозначим буквой g: $f(Ax) = g(x)$, или $< Ax, f >=< x, g >$. Функционал g действует уже в пространстве X, т.е. $g \in X^*$.

Если зафиксировать оператор A и рассмотреть зависимость функционала g от функционала f, то, как было показано, зависимость эта является линейной, то есть отображение, сопоставляющее функционалу f функционал g, есть линейный оператор. Этот оператор обозначается A^* и называется оператором, сопряжённым к оператору A: $g = A^* f$. Очевидно, этот оператор действует из пространства Y^*, которому принадлежит функционал f, в пространство X^*, которому принадлежит g. Было показано, что этот оператор ограниченнный, и его норма совпадает с нормой оператора A.

С учётом данных определений, справедлива формула $f(Ax) = (A^* f)(x)$ или, в других обозначениях, $< Ax, f >=< x, A^* f >$.

Рассмотрим теперь случай, когда $X = H_1$ и $Y = H_2$ – гильбертовы пространства, и посмотрим, как модифицируется понятие сопряжённого оператора с учётом теоремы Рисса-Фреше.

Пусть $A \in L_O(H_1, H_2)$ – линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, а $f \in H_2^*$ – линейный функционал в пространстве H_2. Согласно теореме Рисса-Фреше, этот функционал представляется в виде скалярного произведения в пространстве H_2, т.е. $f(\cdot) = (\cdot, y)_2$, где $y \in H_2$ – некоторый элемент, определяемый функционалом $f \in H_2^*$, а индексом "2"после скобок мы для краткости обозначили тот факт, что скалярное произведение вычисляется в пространстве H_2. В частности, если мы вычисляем значение функционала f на элементе Ax, то $f(Ax) = (Ax, y)_2$. Здесь, напомню, $x \in H_1$, $Ax \in H_2$, $y \in H_2$. Выражение $(Ax, y)_2$ носит название билинейной формы оператора A.

Утверждение: если билинейные формы двух операторов $A_{1,2}$ совпадают (при любых $x \in H_1$, $y \in H_2$), то совпадают и сами операторы.
Действительно, поскольку равенство $(A_1 x, y)_2 = (A_2 x, y)_2$ выполнено при

всех $y \in H_2$, то, как было показано, $A_1 x = A_2 x$, а поскольку и элемент $x \in H_1$ также произволен, то $A_1 = A_2$ (по определению равенства операторов).

Утверждение:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 = \|y\|_2 = 1} (Ax, y)_2$$

Это утверждение у нас уже было, напомню доказательство:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \sup_{\|y\|_2 = 1} (Ax, y)\,.$$

Как всегда, мы можем вместо равенств писать строгие или нестрогие неравенства ($\|x\|_1 \leq 1$ или $\|x\|_1 < 1$ и аналогично $\|y\|_2 \leq 1$ или $\|y\|_2 < 1$).

Выражение

$$(Ax, y)_2 = g(x)$$

при фиксированном элементе $y \in H_2$ – линейный ограниченный функционал относительно $x \in H_1$.
Докажем линейность:

$$\begin{gathered} g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y)_2 = (\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2, y)_2 = \\ = \alpha_1 (A x_1, y)_2 + \alpha_2 (A x_2, y)_2 = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2) \end{gathered}$$

(воспользовались сначала линейностью оператора A, а затем линейностью скалярного произведения).
Докажем ограниченность:

$$|g(x)| = |(Ax, y)_2| \leq \|Ax\|_2 \cdot \|y\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \cdot \|y\|_2$$

(воспользовались сначала неравенством КБШ, а затем определением нормы оператора).

Таким образом, $g \in H_1^*$ – линейный ограниченный функционал в пространстве H_1, определяемый оператором A и элементом $y \in H_2$. Следовательно, согласно теореме Рисса-Фреше, он представляется в виде скалярного произведения в пространстве H_1

$$(Ax, y)_2 = (x, z)_1\,,$$

где $z \in H_1$ – некоторый элемент, также определяемый оператором A и элементом y.

Рассмотрим зависимость z от y при фиксированном A.
Утверждение: z линейно зависит от y.
Действительно, если $(Ax, y_1)_2 = (x, z_1)_1$ и $(Ax, y_2)_2 = (x, z_2)_1$, то

$$\begin{gathered} (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)_2 = \alpha_1 (Ax, y_1)_2 + \alpha_2 (Ax, y_2)_2 = \\ = \alpha_1 (x, z_1)_1 + \alpha_2 (x, z_2)_1 = (x, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)_1\,, \end{gathered}$$

т.е. линейной комбинации элементов $y_{1,2} \in H_2$ отвечает линейная комбинация соответствующих им элементов $z_{1,2} \in H_1$ с теми же коэффициентами.

Это означает, что существует линейное отображение (оператор) из H_2 в H_1, сопоставляющий элементу y элемент z. Этот оператор определяется оператором A, обозначается A^* и называется оператором, сопряжённым к A:

$$z = A^* y\,.$$

Таким образом,

$$\forall x \in H_1\, \forall y \in H_2 :\ (Ax, y)_2 = (x, A^* y)_1$$

Замечание. В ЛНП сопряжённый оператор действовал из Y^* в X^*, и выполнялось равенство $g = A^* f$. В гильбертовых пространствах за счёт теоремы Рисса-Фреше происходит отождествление (с точностью до изоморфизма) самих пространств $H_{1,2}$ и сопряжённых к ним $H^*_{1,2}$. Поэтому теперь удобно считать, что сопряжённый оператор связывает уже не функционалы $f \in H_2^*$ и $g \in H_1^*$, а представляющие их элементы $y \in H_2$ и $z \in H_1$.

Утверждение: $A^* \in L_O(H_2, H_1)$ – линейный ограниченный оператор из H_2 в H_1, и его норма равна норме оператора A.
Действительно,

$$\|A^*\| = \sup_{\|x\|_1 = \|y\|_2 = 1} (x, A^* y) = \sup_{\|x\|_1 = \|y\|_2 = 1} (Ax, y) = \|A\|\,.$$

Замечание. Операция сопряжения $*$ – изометрическое отображение из пространства $L_O(H_1, H_2)$ в пространство $L_O(H_2, H_1)$. Супероператор (оператор в пространстве операторов).

Утверждение: это отображение линейно.
Действительно, оператор $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^*$ определяется равенством

$$\forall x \in H_1\, \forall y \in H_2 :\ ((\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x, y)_2 = (x, (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* y)_1\,.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &((\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)x, y)_2 = \alpha_1 (A_1 x, y)_2 + \alpha_2 (A_2 x, y)_2 = \\ &= \alpha_1 (x, A_1^* y)_1 + \alpha_2 (x, A_2^* y)_1 = (x, (\alpha_1 A_1^* + \alpha_2 A_2^*) y)_1\,, \end{aligned}$$

откуда и следует равенство

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \alpha_1 A_1^* + \alpha_2 A_2^*\,.$$

Замечание. В комплексных пространствах линейность превращается в полулинейность: числовые множители в правую часть входят с комплексным сопряжением.

Утверждение: это отображение непрерывно.
Докажем, что если $A_n \to A$ (по норме), то $A_n^* \to A^*$.
Действительно, $\|A_n^* - A^*\| = \|(A - A_n)^*\| = \|A_n - A\| \to 0$.

Утверждение: это отображение инволютивно, т.е. $A^{**} = A$ (в классе ограниченных операторов).
Действительно, $(A^*y, x)_1 = (y, (A^*)^*x)_2$, а с другой стороны – $(A^*y, x)_1 = (x, A^*y)_1 = (Ax, y)_2 = (y, Ax)_2$. Билинейные формы операторов A^{**} и A совпали, поэтому равны и сами операторы.

Утверждение: $(AB)^* = B^*A^*$ (здесь $B : H_1 \to H_2$, $A : H_2 \to H_3$, и тогда $A^* : H_3 \to H_2$, $B^* : H_2 \to H_1$).
Действительно, $((AB)x, y)_3 = (x, (AB)^*y)_1$ $(\forall x \in H_1\,,\ y \in H_3)$. С другой стороны,

$$((AB)x, y)_3 = (A(Bx), y)_3 = (Bx, A^*y)_2 = (x, B^*A^*y)_1$$

Утверждение: если A – оператор конечного ранга, то A^* – оператор конечного ранга. Если

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i)_2 v_i\,,$$

то

$$A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y, v_i)_2 u_i$$

(здесь $u_i \in H_1$, $v_i \in H_2$).
Действительно,

$$(Ax, y)_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x, u_i)_1 v_i, y \right)_2 = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i)_1 (v_i, y)_2 =$$
$$= \left(x, \sum_{i=1}^{n} u_i (v_i, y)_2 \right)_1 = \left(x, \sum_{i=1}^{n} (y, v_i)_2 u_i \right)_1 = (x, A^*y)_1\,,$$

откуда и вытекает доказываемое равенство (при доказательстве дважды воспользовались линейностью скалярного произведения: сначала в пространстве H_2, а потом в H_1).

Утверждение: если A – вполне непрерывный оператор, то A^* – вполне непрерывный оператор.
Действительно, если A вполне непрерывен, то он является пределом последовательности операторов конечного ранга. Тогда сопряжённый к нему является пределом последовательности операторов, сопряжённых к операторам конечного ранга, которые сами также имеют конечный ранг.

Утверждение: если оператор A компактен, то A^* также компактен. Это утверждение будет доказано позже. Оно будет следовать из того важного факта, что в гильбертовых пространствах компактные операторы вполне непрерывны.

Утверждение: $E^* = E$. Действительно, $(Ex, y) = (x, Ey) = (x, y)$.
Замечание. Здесь $H_1 = H_2 = H$. Подробнее этот случай будет рассмотрен чуть позже.

Утверждение: если оператор A непрерывно обратим, то и оператор A^* также непрерывно обратим, и $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
Докажем, что $A^*(A^{-1})^* = E_1$, $(A^{-1})^*A^* = E_2$, где $E_{1,2}$ – единичные операторы в пространствах $H_{1,2}$. Действительно, $A^{-1}A = E_1$, $AA^{-1} = E_2$. Но тогда $(A^{-1}A)^* = A^*(A^{-1})^* = E_1^* = E_1$ и $(AA^{-1})^* = (A^{-1})^*A^* = E_2^* = E_2$, что и означает, что оператор $(A^{-1})^*$ – обратный к A^*, а поскольку оператор A^{-1} по условию непрерывен, то непрерывным является и оператор $(A^{-1})^*$. Утверждение доказано.

Замечание. Если оператор A – неограниченый оператор с плотной областью определения, то для него также можно рассмотреть сопряжённый оператор A^*. Его область определения – те $y \in H_2$, для которых функционал

$$g_{A,y}(x) = (Ax, y)_2$$

ограничен несмотря на неограниченность A.

Пусть теперь $H_1 = H_2 = H$, линейный ограниченный оператор A и сопряжённый к нему A^* действуют из H в H. Оператор называется самосопряжённым, если $A^* = A$ и антисамосопряжённым, если $A^* = -A$. Оператор, одновременно самосопряжённый и антисамосопряжённый – это нулевой оператор (поскольку $A = A^* = -A$).

Выше было доказано, что единичный оператор самосопряжён.
Следствие: операторы вида λE самосопряжены (поскольку $(\lambda E)^* = \lambda E^* = \lambda E$).
Замечание: в комплексных пространствах это верно лишь для вещественных λ.

Следствие. Резольвентные множества и спектры операторов A и A^* попарно совпадают.
Действительно, пусть $H_1 = H_2 = H$, $A : H \to H$, и пусть значение λ принадлежит $\rho(A)$ – резольвентному множеству оператора A, т.е. оператор $A - \lambda E$ имеет ограниченный обратный. Тогда и оператор $(A - \lambda E)^* = A^* - \lambda E$ также имеет ограниченный обратный. Это, в свою очередь, означает, что $\lambda \in \rho(A^*)$.
Аналогично, если $\lambda \in \rho(A^*)$, то оператор $A^* - \lambda E$ имеет ограниченный обратный, тогда и оператор $(A^* - \lambda E)^* = A - \lambda E$ имеет ограниченный обратный, то есть $\lambda \in \rho(A)$.
Отсюда вытекает, что резольвентные множества $\rho(A^*)$ и $\rho(A)$ совпадают, а потому совпадают и спектры $\sigma(A^*) = \sigma(A)$ – дополнения к $\rho(A^*) = \rho(A)$.

Замечание. Если рассматривать комплексные гильбертовы пространства, то там и резольвентное множество, и спектр – множества в $\mathbb{C}$. Там соотношение несколько иное: резольвентное множество и спектр A^* получаются из резольвентного множества и спектра A комплексным сопряжением.

Утверждение. Оператор $A + A^*$ самосопряжён.
Действительно, $(A + A^*)^* = A^* + A^{**} = A^* + A$.

Утверждение. Оператор $A - A^*$ антисамосопряжён.

Действительно, $(A - A^*)^* = A^* - A^{**} = A^* - A$.

Утверждение. Произвольный линейный ограниченный оператор в пространстве H представляется в виде суммы самосопряжённого и антисамосопряжённого.
Действительно,

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}\,.$$

Утверждение. AA^*, A^*A – самосопряжённые операторы.
Действительно, $(AA^*)^* = A^{**}A^* = AA^*$.
Аналогично $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$.

Замечание. Это утверждение справедливо и для оператора A, действующего из H_1 в H_2. В этом случае A^*A – самосопряжённый оператор в пространстве H_1, а AA^* – в H_2.

Утверждение: $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.
Докажем сначала второе из приведённых равенств.
Заметим, что

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) = \sup_{\|x\|=1} (x, A^*Ax) \le$$
$$\le \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (x, A^*Ay) = \|A^*A\|\,.$$

С другой стороны, из свойства нормы произведения операторов и равенства $\|A^*\| = \|A\|$ вытекает, что

$$\|A^*A\| \le \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2\,.$$

Из полученных оценок вытекает, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$.
Теперь мы можем в это равенство вместо A подставить A^* и получить: $\|A^{**}A^*\| = \|A^*\|^2$. С учётом равенств $A^{**} = A$ и $\|A^*\| = \|A\|$ отсюда следует, что $\|AA^*\| = \|A\|^2$. Утверждение доказано.

Оператор $A : H \to H$ называется симметричным, если

$$\forall x, y \in H : \ (Ax, y) = (x, Ay)\,.$$

Утверждение: симметричность и самосопряждённость – синонимы (для ограниченных операторов).

Зачем два термина? Они имеют разное значение для неограниченных операторов. Для таких операторов область определения отлична от всего H. Для симметричного оператора требуется равенство на области определения:

$$\forall x, y \in D(A) : \ (Ax, y) = (x, Ay)\,.$$

Такой оператор может не быть самосопряжённым, поскольку у сопряжённого оператора область определения может оказаться шире (пишут: $A \subset A^*$, т.е.

A^* – расширение оператора A). В то же время самосопряжённый оператор всегда симметричен.

В основном мы будем заниматься ограниченными операторами и не будем различать симметричность и самосопряжённость.

Утверждение: если ограниченный самосопряжённый оператор непрерывно обратим, то обратный также самосопряжён.
Действительно, $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.

Примеры.

- Пространство E^n. Произвольный оператор в этом пространстве задаётся матрицей:
$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \,.$$
Тогда
$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \right) = (x, A^* y)$$
Сопряжённый оператор задаётся транспонированной матрицей (суммирование по первому индексу). Если матрица симметрична, то и оператор симметричный (самосопряжённый).
Замечание. В комплексном пространстве сопряжённый оператор задаётся этмитово сопряжённой матрицей, а самосопряжённому оператору соответствуют эрмитовы матрицы.

- Пространство l_2. Рассмотрим оператор A, действующий по правилу $(Ax)_k = u_k x_k$, где $u \in l_\infty$, $|u_k| \le M$. В этом случае $Ax \in l_2$, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2 x_k^2$ сходится по признаку сравнения ($u_k^2 x_k^2 \le M^2 x_k^2$), и $\|Ax\| \le M\|x\|$. Оператор A ограничен, $\|A\| \le M$.
Тогда
$$(Ax, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k x_k) y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (u_k y_k) = (x, Ay) \,.$$
Оператор A симметричный (самосопряжённый).

- Очень похожий пример. Пространство $L_2[a,b]$, $(Ax)(t) = u(t)x(t)$, где $u(t) \in C[a,b]$, $|u(t)| \le M$. В этом случае $Ax \in L_2[a,b]$, $\|Ax\| \le M\|x\|$. Оператор A ограничен, $\|A\| \le M$.
Тогда
$$(Ax, y) = \int_a^b (u(t)x(t))y(t)\,dt = \int_a^b x(t)(u(t)y(t))\,dt = (x, Ay) \,.$$
Оператор A симметричный (самосопряжённый).

Собственные числа, собственные элементы и собственные подпространства симметричного оператора.

Пусть A – линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Как и раньше, собственные числа (значения) и собственные элементы (векторы, функции) оператора определяются равенством

$$Ax = \lambda x\,,\ x \neq o\,.$$

Утверждение: собственные элементы $\{x_1, \ldots, x_m\}$ оператора A, отвечающие попарно несовпадающим собственным числам $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, образуют линейно независимую систему.
Доказательство. Пусть некоторая линейная комбинация собственных элементов равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = o\,.$$

Нам нужно доказать, что все коэффициенты α_i равны нулю.
Для доказательства $m-1$ раз применим к этому равенству оператор A. После первого раза получим

$$A\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i x_i = o\,,$$

после второго

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \alpha_i x_i = o$$

и т.д.: после каждого нового применения оператора i-е слагаемое в очередной раз умножается на λ_i. В результате мы получаем систему однородных линейных векторных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \alpha_i x_i = o\,, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1\,,$$

или – в матричном виде –

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \ldots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \alpha_2 x_2 \\ \ldots \\ \alpha_m x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ o \\ \ldots \\ o \end{pmatrix}\,.$$

Матрица этой системы – матрица Вандермонда, – как известно, невырождена при попарно несовпадающих значениях λ_i (вспомните доказательство!). Умножив левую и правую части системы слева на обратную к ней матрицу, получим, что $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = \cdots = \alpha_m x_m = o$, откуда
$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. При доказательстве гильбертовость пространства никак не использовалось, утверждение справедливо для произвольного линейного оператора в произвольном линейном пространстве.

Утверждение: $|\lambda| \leq \|A\|$.
Действительно, для собственного элемента имеем: $\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, при этом $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, т.е. $|\lambda| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Сокращая на $\|x\| > 0$, получаем требуемое неравенство.

Замечание. Это утверждение справедливо для произвольного линейного ограниченного оператора в произвольном ЛНП.

Следствие: если у оператора есть бесконечная неограниченная последовательность собственных чисел, то сам оператор неограничен.

Утверждение. Если λ – собственное число A, то оно принадлежит спектру оператора A.
Действительно, если $Ax = \lambda x$, то $(A - \lambda E)x = o$, оператор $A - \lambda E$ имеет нетривиальное ядро и, следовательно, необратим. (Это у нас было.)

Замечание. Если λ – собственное число A, то оно принадлежит не только спектру A, но и спектру A^* (поскольку спектры A и A^* совпадают). Отсюда, тем не менее, не следует, что λ – собственное число A^*.

Пример. Рассмотрим оператор левого сдвига T в пространстве l_2:
$x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, $Tx = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.
Элемент $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$ является собственным элементом оператора T, отвечающим собственному числу $\lambda = 0$: $Te_1 = o$.
Напомню, что сопряжённым к T является оператор правого сдвига $\hat{T}$, $\hat{T}x = (0, x_1, x_2, \dots)$. Действительно,

$$(Tx, y) = x_2 y_1 + x_3 y_2 + \dots = x_1 \cdot 0 + x_2 y_1 + x_3 y_2 + \dots = (x, \hat{T}y)\,.$$

Оператор $\hat{T}$ изометричен, $\|\hat{T}x\| = \|x\|$ для произвольного $x \in l_2$, поэтому $\lambda = 0$ не может быть его собственным числом.
В то же время нуль принадлежит спектру оператора $\hat{T}$: этот оператор не сюрьективен, а поэтому необратим.
Замечание. Напомню, что у $\hat{T}$ есть левый обратный оператор, а именно T: $T\hat{T} = E$, в то же время правого обратного у него нет.
Произведение $\hat{T}T$ не является единичным оператором: $\hat{T}Tx = (0, x_2, x_3, \dots)$ (этот оператор – ортопроектор на подпространство, состоящее из последовательность с равным нулю первым элементом).
Задача. Покажите, что $\sigma(T) = [-1, 1]$, причём все точки интервала $(-1, 1)$ являются собственными числами этого оператора, а значения ± 1 – не являются.
Задача. Покажите, что если у изометрического оператора есть собственные числа, то они по модулю равны единице.
Задача. Покажите, что у оператора $\hat{T}$ нет собственных чисел.

Утверждение: собственные элементы, отвечающие одному и тому же собственному числу линейного непрерывного оператора, после добавления нулевого элемента образуют замкнутое подпространство.
Докажем линейность. Если $Ax_{1,2} = \lambda x_{1,2}$, то

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 =$$
$$= \alpha_1 \lambda x_1 + \alpha_2 \lambda x_2 = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\,,$$

т.е. линейная комбинация собственных элементов – собственный элемент.
Докажем замкнутость. Пусть $Ax_n = \lambda x_n$, и $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$. Тогда
$Ax_* = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = \lambda x_*$,
т.е. предел последовательности собственных элементов – собственный элемент.
Замечание. Можно было вместо непосредственной проверки линейности и замкнутости просто заметить, что множество собственных элементов, отвечающих заданному λ, с добавлением нуля – это ядро оператора $A - \lambda E$. Ранее было доказано, что ядро любого линейного ограниченного оператора является замкнутым подпространством.
Замечание. Такое подпространство $N_\lambda(A) = Ker(A - \lambda E)$ называется собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному числу λ.
Замечание. Доказанное утверждение относится к произвольному линейному ограниченному оператору в произвольном ЛНП.

Пусть теперь пространство гильбертово, и $A = A^*$.

Утверждение: ортогональное дополнение к собственному элементу самосопряжённого оператора – его инвариантное подпространство.
Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$ и $y \perp x$. Убедимся, что в этом случае $Ay \perp x$. Действительно, $(Ay, x) = (y, Ax) = (y, \lambda x) = \lambda(y, x) = 0$.

Утверждение: ортогональное дополнение к собственному подпространству самосопряжённого оператора – его инвариантное подпространство.
Действительно, если элемент y ортогонален произвольному элементу $x \in N_\lambda(A)$, то по доказанному и Ay также ему ортогонален.

Утверждение: Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – собственные элементы самосопряжённого оператора, тогда ортогональное дополнение к их линейной оболочке – его инвариантное подпространство.
Действительно, если элемент y ортогонален каждому из собственных элементов e_k, то по доказанному и Ay также ему ортогонален, а тогда он ортогонален и любой линейной комбинации этих элементов.

Утверждение: собственные подпространства, отвечающие различным собственным числам самосопряжённого оператора, взаимно ортогональны.
Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$. Тогда $(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. С другой стороны, $(Ax, y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y)$. Из равенства $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$ вытекает, что $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, т.е. либо $\lambda = \mu$, либо $x \perp y$.

Существование собственного элемента у всякого симметричного компактного оператора в гильбертовом пространстве.

Пусть оператор $A = A^* \neq O$ компактен.

Теорема. У любого симметричного (самосопряжённого) компактного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H и отличного от нулевого оператора O, существует ненулевое собственное значение, по модулю равное норме оператора, и соответствующий ему собственный элемент.

Прежде, чем приступить к доказательству этой теоремы, докажем две вспомогательные леммы.

Лемма. Пусть $\{f_m\}$ – последовательность нормированных элементов пространства H, $\|f_m\| = 1$, $\{g_m\}$ – сходящаяся последовательность, $g_m \to g$, и

$$(g_m, f_m) \to c \geq \|g\| .$$

Тогда $c = \|g\|$, и

$$(g, f_m) \to \|g\| .$$

Доказательство. Прежде всего, представим последовательность скалярных произведений в виде суммы

$$(g_m, f_m) = (g, f_m) + ((g_m - g), f_m)$$

и заметим, что, согласно неравенству Коши-Буняковского-Шварца,

$$|((g_m - g), f_m)| \leq \|g_m - g\| \cdot \|f_m\| = \|g_m - g\| \to 0 .$$

Отсюда вытекает, что

$$(g, f_m) \to c \geq \|g\| .$$

Далее, снова воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского-Шварца, заключаем, что

$$(g, f_m) \leq \|g\| \cdot \|f_m\| = \|g\| ,$$

откуда

$$c = \lim_{m\to\infty} (g, f_m) \leq \|g\| ,$$

а поскольку по условию $c \geq \|g\|$, заключаем, что $c = \|g\|$. Лемма доказана.

Лемма. Пусть $\{f_m\}$ – последовательность нормированных элементов пространства H, $\|f_m\| = 1$, и для некоторого ненулевого элемента $g \in H$

$$(g, f_m) \to \|g\| .$$

Тогда

$$f_m \to g^0 ,$$

где $g^0 = g/\|g\|$ – нормированный элемент g.

Доказательство. Представим f_m в виде ортогональной суммы

$$f_m = \alpha_m g^0 + h_m \,,$$

где

$$\alpha_m = (f_m, g^0) \,, \quad h_m \perp g^0 \,.$$

Тогда

$$(g, f_m) = \|g\|(g^0, \alpha_m g^0 + h_m) = \alpha_m \|g\| \to \|g\| \,,$$

то есть

$$\alpha_m \to 1 \,.$$

Но

$$\alpha_m^2 + \|h_m\|^2 = \|f_m\|^2 = 1 \,,$$

откуда вытекает, что

$$\|h_m\|^2 \to 0 \,,$$

и

$$f_m \to g^0 \,.$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. На первом этапе докажем существование у оператора A^2 собственного элемента, отвечающего собственному числу $\|A\|^2$.

Пусть A – симметричный компактный ненулевой оператор. Нам будет удобно его норму записать как точную верхнюю грань $\|Ax\|$ на единичной сфере:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \,.$$

Рассмотрим максимизирующую последовательность $\{x_m\}$ нормированных элементов пространства H, $\|x_m\| = 1$, для которой

$$\|Ax_m\| \to \|A\| \,.$$

Поскольку оператор компактный, а последовательность ограниченная, то её образ Ax_m содержит фундаментальную подпоследовательность, которая в силу полноты пространства сходится к некоторому элементу z, норма которого совпадает с $\|A\|$.

Пусть $\{f_m\}$ – та подпоследовательность $\{x_m\}$, для которой есть сходимость:

$$Af_m = z_m \to z \,, \quad \|z\| = \|A\| \,.$$

Мы хотим показать, что сама последовательность f_m также сходится.

Действительно,

$$\|Af_m\|^2 = \|z_m\|^2 \to \|z\|^2 = \|A\|^2 \,.$$

С другой стороны,

$$\|Af_m\|^2 = (Af_m, Af_m) = (z_m, Af_m) = (Az_m, f_m) \to \|A\|^2 .$$

Последовательность z_m сходится к z, оператор A непрерывен, поэтому $Az_m \to Az$, причём $\|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\| = \|A\|^2$. Отсюда, согласно первой из доказанных лемм, следует, что $\|Az\| = \|A\|^2$, и что

$$(Az, f_m) \to \|A\|^2 ,$$

а согласно второй – что

$$f_m \to (Az)^0 = \frac{Az}{\|A\|^2} .$$

Мы, тем самым, доказали, что сходится не только последовательность $z_m = Af_m$, но и последовательность f_m. Но тогда

$$z = \lim_{m\to\infty} z_m = \lim_{m\to\infty} Af_m = A\left(\lim_{m\to\infty} f_m\right) = A\left(\frac{Az}{\|A\|^2}\right) = \frac{A^2 z}{\|A\|^2} ,$$

что и означает, что z – собственный элемент оператора A^2, отвечающий собственному значению $\|A\|^2$.

Теперь переходим ко второму этапу: докажем существование собственного элемента у оператора A. Для этого перепишем равенство

$$A^2 z = \|A\|^2 z$$

в виде

$$A^2 z - \|A\|^2 z = o ,$$

или

$$(A + \|A\|E)(A - \|A\|E)z = o .$$

Здесь возникает альтернатива. Либо

$$(A - \|A\|E)z = o ,$$

и тогда

$$Az = \|A\|z ,$$

т.е. $z \neq o$ – собственный элемент оператора A, отвечающий собственному числу $\|A\|$.

Если же

$$w = (A - \|A\|E)z \neq o ,$$

то

$$(A + \|A\|E)w = o ,$$

и тогда

$$Aw = -\|A\|w ,$$

т.е. $w \neq o$ – собственный элемент оператора A, отвечающий собственному числу $-\|A\|$.
Теорема доказана.

Замечание. В условии теоремы предполагается, что оператор ненулевой. Разумеется, для нулевого оператора она также справедлива (если, конечно, не требовать, чтобы собственное число было ненулевым): его норма равна нулю, всё пространство – ядро этого оператора, то есть собственное подпространство, отвечающее нулевому собственному числу. Соответственно, произвольный элемент – собственный элемент, и собственное число совпадает с нормой.