Лекция №9.
Линейные неоднородные уравнения.

Будем рассматривать на отрезке $[a,b]$ линейное неоднородное уравнение

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \quad f(x) \not\equiv 0, \qquad (1)$$

$a_i(x)$, $f(x)$ – непрерывные на $[a,b]$ функции.

В случае линейных уравнений локальный характер теоремы существования решения становиться глобальным, так, что верна следующая теорема

Теорема

Если $f(x)$ и $a_i(x)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, тогда на отрезке $[a,b]$ существует решение уравнения (1).

Теорема (о структуре решения линейного неоднородного уравнения)

Пусть y_1 и y_2 – решения уравнения (1), тогда $y_2 = y_1 + y_{одн}$, где $y_{одн}$ – решение соответствующего однородного уравнения.

Доказательство.

Действительно, цепочка равенств

$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0$$

показывает, что $y_1 - y_2$ – решение однородного уравнения. $\square$

Из доказанной теоремы следует следующая формула

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}},$$

общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Метод Лагранжа вариации постоянных для нахождения решения неоднородного уравнения.

Метод вариации постоянных позволяет найти решение линейного неоднородного уравнения, если известно общее решение линейного однородного уравнения.

Итак рассмотрим уравнение (1). Сначала найдем фундаментальную систему решений

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$$

соответствующего однородного уравнения

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0. \tag{2}$$

Таким образом общее решение однородного уравнения запишется в виде

$$y_{\text{оо}} = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

здесь c_i – константы.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_{\text{он}} = c_1(x)\varphi_1(x) + \ldots + c_n(x)\varphi_n(x), \tag{3}$$

здесь уже $c_i(x)$ – функции.

Для нахождения функций $c_i(x)$ подставим выражение (3) в уравнение (1). Для этого посчитаем производные функции $y_{\text{он}}$ до порядка n

$$\begin{aligned}
y_{\text{он}} &= c_1(x)\varphi_1 + \ldots + c_n(x)\varphi_n \\
y'_{\text{он}} &= c_1(x)\varphi'_1 + \ldots + c_n(x)\varphi'_n + \underbrace{c'_1(x)\varphi_1 + \ldots + c'_n(x)\varphi_n}_{0} \\
y''_{\text{он}} &= c_1(x)\varphi''_1 + \ldots + c_n(x)\varphi''_n + \underbrace{c'_1(x)\varphi'_1 + \ldots + c'_n(x)\varphi'_n}_{0} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^{(n)}_{\text{он}} &= c_1\varphi_1^{(n)} + \ldots + c_n\varphi_n^{(n)} + c'_1\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + c'_n\varphi_n^{(n-1)}
\end{aligned}$$

Таким образом получим систему для нахождения неизвестных функций $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$.

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1(x) + \ldots + c_n'\varphi_n(x) = 0, \\ c_1'\varphi_1'(x) + \ldots + c_n'\varphi_n'(x) = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Её определитель $W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x) \neq 0$ т.к. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы.

Значит система однозначно разрешима относительно неизвестных $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$.

Для нахождения $y_{\text{он}}$ остаётся проинтегрировать $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ и подставить результат в равенство (3).

Пример

Решим уравнение

$$y''' - y' = e^{2x} \tag{4}$$

Проверим, что функции

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \quad \varphi_2(x) = e^x, \quad \varphi_3(x) = e^{-x}$$

образуют ФСР для однородного уравнения

$$y''' - y' = 0 \tag{5}$$

Для этого нужно проверить, что все они являются линейно независимыми решениями уравнения (5).

$$\varphi_1(x): \quad (1)''' - (1)' = 0 - 0 = 0,$$

$$\varphi_2(x): \quad (e^x)''' - (e^x)' = e^x - e^x = 0,$$

$$\varphi_3(x): \quad (e^{-x})''' - (e^{-x})' = -e^{-x} - (-e^{-x}) = 0.$$

Пример

Решим уравнение
$$y''' - y' = e^{2x}$$

Для проверки линейной независимости составим определитель Вронского для системы функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$

$$W_{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-x} \\ 0 & e^x & -e^{-x} \\ 0 & e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\begin{cases} c_1' + c_2' e^x + c_3' e^{-x} = 0, \\ c_2' e^x - c_3' e^{-x} = 0, \\ c_2' e^x + c_3' e^{-x} = e^{2x}. \end{cases}$$

Сложим второе и третье уравнение: $2c_2' e^x = e^{2x} \quad c_2' = \frac{1}{2} e^x$

Вычтем из третьего второе уравнение: $2c_3' e^{-x} = e^{2x} \quad c_3' = \frac{1}{2} e^{3x}$

Подставим в первое уравнение и выразим c_1': $c_1' = -e^{2x}$

Пример

Решим уравнение

$$y''' - y' = e^{2x}$$

$$c_1' = -e^{2x}, \qquad c_2' = \frac{1}{2}e^{x}, \qquad c_3' = \frac{1}{2}e^{3x}$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1, \qquad c_2(x) = \frac{1}{2}e^{x} + C_2, \qquad c_3(x) = \frac{1}{6}e^{3x} + C_3$$

$$y(x) = (-\frac{1}{2}e^{2x} + C_1) + (\frac{1}{2}e^{x} + C_2)e^{x} + (\frac{1}{6}e^{3x} + C_3)e^{-x}$$

$$y(x) = \underbrace{C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x}}_{y_{\text{оо}}} + \underbrace{\frac{1}{6}e^{2x}}_{y_{\text{чн}}}$$

Пример

Пусть функции

$$y_1(x) = x + 2, \quad y_2(x) = x^2 - 1, \quad y_3(x) = x^2 + x$$

являются частными решениями линейного неоднородного уравнения. Найти общее решение этого уравнения.

$$\varphi_1(x) = y_3 - y_2 = x + 1, \quad \varphi_2(x) = y_3 - y_1 = x^2 - 2$$

$$W_{\varphi_1,\varphi_2} = \begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$= 2x^2 + 2x - x^2 + 2 = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$$

$$y_{\text{он}} = c_1(x+1) + c_2(x^2-2) + x + 2$$

Пример

Составить линейное неоднородное уравнение для которого функции

$$y_1(x) = x + 2, \quad y_2(x) = x^2 - 1, \quad y_3(x) = x^2 + x$$

будут являться частными решениями.

$$\varphi_1(x) = y_3 - y_2 = x + 1, \quad \varphi_2(x) = y_3 - y_1 = x^2 - 2$$

$$W_{\varphi_1,\varphi_2} = \begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$= 2x^2 + 2x - x^2 + 2 = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} x+1 & x^2-2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} y =$$

$$= (x^2 + 2x + 2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$$

$$(x^2 + 2x + 2)(x+2)'' - 2(x+1)(x+2)' + 2(x+2) = 2$$

$$(x^2 + 2x + 2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 2$$

Перейдем к изучению линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. Будем рассматривать уравнения вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x). \tag{6}$$

При любой непрерывной функции $f(x)$ решение можно найти методом вариации постоянных. Есть широкий класс функций для которых можно обойтись без метода вариации постоянных.

Определение

Функция вида

$$f(x) = e^{\gamma x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m) = e^{\gamma x} Q_m(x) \tag{7}$$

называется квазимногочленом степени m с показателем γ.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{6}$$

$$f(x) = e^{\gamma x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m) = e^{\gamma x} Q_m(x) \tag{7}$$

Теорема

Пусть правая часть уравнения (6)имеет вид (7), тогда у уравнения (6) имеется частное решение вида

$$y_{чн}(x) = x^s e^{\gamma x} R_m(x), \tag{8}$$

где

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma \text{ – не корень} \\ & \text{характеристического многочлена,} \\ \text{кратности } \gamma, & \text{если } \gamma \text{ – корень,} \end{cases}$$

$R_m(x)$ *– многочлен с неизвестными коэффициентами, которые находятся после подстановки функции* $y_{чн}(x)$ *в уравнение (6).*

Замечание

Если в уравнении (6) коэффициенты вещественны и правая часть

$$f(x) = e^{\alpha x}(G_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x),$$

где $G_{m_1}(x)$ $Q_{m_2}(x)$ *– вещественные многочлены степеней* m_1 *и* m_2 *соответственно, то у уравнения (6) существует вещественное частное решение вида*

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x),$$

где

$$s = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma = \alpha + i\beta \text{ – не корень} \\ & \text{характеристического многочлена,} \\ \text{кратности } \gamma, & \text{если } \gamma \text{ – корень,} \end{cases}$$

$R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *– многочлены степени* $m = \max\{m_1, m_2\}$ *с неизвестными коэффициентами, которые находятся после подстановки функции* $y_{\text{чн}}(x)$ *в уравнение (6).*

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda = 1, k = 2$$

$$y = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = y_{\text{оо}} + y_1, \quad y_{\text{оо}} = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$e^{\gamma x} Q_m(x) = xe^x \Rightarrow \gamma = 1, Q_m(x) = x, m = 1$$

$$y_1 = x^s e^{\gamma x} R_m(x) = x^2 e^x (ax + b) = e^x (ax^3 + bx^2)$$

$$y_1' = e^x (ax^3 + bx^2 + 3ax^2 + 2bx) = e^x (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx)$$

$$y_1'' = e^x (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx + 3ax^2 + (6a + 2b)x + 2b) =$$

$$= e^x (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b)$$

$$e^x (ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b) - 2e^x (ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx) +$$

$$+ e^x (ax^3 + bx^2) = xe^x$$

Пример

Решим уравнение
$$y'' - 2y' + y = xe^x$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + y_1, \quad y_1 = e^x(ax^3 + bx^2)$$

$$(ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b)x + 2b) - 2(ax^3 + (3a + b)x^2 + 2bx) +$$

$$+(ax^3 + bx^2) = x$$

$$\begin{cases} 6a + b - 6a - 2b + b = 0 \\ 6a + 4b - 4b = 1 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{6}, \quad b = 0$$

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}\cos x + 5e^{-x}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0, \quad \lambda_1 = 2 + i, \quad \lambda_2 = 2 - i$$

$$y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x + y_1 + y_2$$

y_1 – частное решение неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}\cos x$

y_2 – частное решение неоднородного уравнения $y'' - 4y' + 5y = 5e^{-x}$

$$f_1(x) = e^{\alpha x}(G_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x) = xe^{2x}\cos x$$

$$\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 2 + i,$$

$$G_{m_1}(x) = x,\ Q_{m_2}(x) = 0,\ m_1 = 1,\ m_2 = 0,\ m = 1,\ s = 1$$

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x)$$

$$y_1 = xe^{2x}((ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x)$$

$$f_2(x) = e^{\gamma x}Q_m(x) = 5e^{-x} \quad \gamma = -1,\ s = 0,\ Q_m(x) = 5,\ m = 0$$

$$y_2 = x^s e^{\gamma x}R_m(x) = Ae^{-x}$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}\cos x + 5e^{-x}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{2x}(ax^2 + bx)\cos x + e^{2x}(cx^2 + dx)\sin x \\
y_1' &= e^{2x}\cos x(2ax^2 + 2(a+b)x + b) - e^{2x}\sin x(ax^2 + bx) + \\
&+ e^{2x}\sin x(2cx^2 + 2(c+d)x + d) + e^{2x}\cos x(cx^2 + dx) = \\
&= e^{2x}\cos x((2a+c)x^2 + (2a+2b+d)x + b) + \\
&+ e^{2x}\sin x((2c-a)x^2 + (2c+2d-b)x + d) \\
y_1'' &= 2e^{2x}\cos x((2a+c)x^2 + (2a+2b+d)x + b) - \\
&- e^{2x}\sin x((2a+c)x^2 + (2a+2b+d)x + b) + \\
&+ e^{2x}\cos x((4a+2c)x + 2a + 2b + d) + \\
&+ 2e^{2x}\sin x((2c-a)x^2 + (2c+2d-b)x + d) + \\
&+ e^{2x}\cos x((2c-a)x^2 + (2c+2d-b)x + d) + \\
&+ e^{2x}\sin x((4c-2a)x + 2c + 2d - b) = \\
&= e^{2x}\cos x((3a+4c)x^2 + (8a+3b+4d+4c)x + 4b + 2a + 2d) + \\
&+ e^{2x}\sin x((3c-4a)x^2 + (-4a-4b+3d+8c)x - 2b + 4d + 2c)
\end{aligned}$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}\cos x + 5e^{-x}$$

$$y_1 = e^{2x}(ax^2 + bx)\cos x + e^{2x}(cx^2 + dx)\sin x$$

$$y_1' = e^{2x}\cos x((2a + c)x^2 + (2a + 2b + d)x + b) +$$

$$+ e^{2x}\sin x((2c - a)x^2 + (2c + 2d - b)x + d)$$

$$y_1'' = e^{2x}\cos x((3a + 4c)x^2 + (8a + 3b + 4d + 4c)x + 4b + 2a + 2d) +$$

$$+ e^{2x}\sin x((3c - 4a)x^2 + (-4a - 4b + 3d + 8c)x - 2b + 4d + 2c)$$

$$e^{2x}\cos x((3a + 4c - 8a - 4c + 5a)x^2 +$$

$$+ (8a + 3b + 4d + 4c - 8a - 8b - 4d + 5b)x + 4b + 2a + 2d - 4b) +$$

$$+ e^{2x}\sin x((3c - 4a - 8c + 4a + 5c)x^2 +$$

$$+ (-4a - 4b + 3d + 8c - 8d + 4b - 8c + 5d)x - 2b + 4d + 2c - 4d) = xe^{2x}\cos x$$

$$e^{2x}\cos x(4cx + 2a + 2d) + e^{2x}\sin x(-4ax - 2b + 2c) = xe^{2x}\cos x$$

$$b = c, \quad a = 0, \quad d = 0, \quad c = 1/4$$

$$y_1 = \frac{1}{4}xe^{2x}\cos x + \frac{1}{4}x^2e^{2x}\sin x$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}\cos x + 5e^{-x}$$

$$y_2 = Ae^{-x}$$

$$y_2' = -Ae^{-x}, \quad y_2'' = Ae^{-x}$$

$$Ae^{-x} + 4Ae^{-x} + 5Ae^{-x} = 5e^{-x}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$y = c_1e^{2x}\cos x + c_2e^{2x}\sin x + \frac{1}{4}xe^{2x}\cos x + \frac{1}{4}x^2e^{2x}\sin x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Пример

Решим уравнение

$$y'' + y = x \sin x$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda = \pm i$$

$$f_1(x) = e^{\alpha x}(G_{m_1}(x) \cos \beta x + Q_{m_2}(x) \sin \beta x) = x \sin x$$

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = i,$$

$$G_{m_1}(x) = 0,\ Q_{m_2}(x) = x,\ m_1 = 0,\ m_2 = 1,\ m = 1,\ s = 1$$

$$y_{\text{чн}} = x^s e^{\alpha x}(R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$$

$$y_{\text{чн}} = x((ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x)$$

$$y_{\text{чн}} = (ax^2 + bx) \cos x + (cx^2 + dx) \sin x$$

$$y_{\text{чн}} = ax^2 \cos x + dx \sin x$$