Теория вероятностей и математическая статистика
Лектор А.А. Лобузов

Семестр 6 **Лекция 7**

Проверка статистических гипотез

Рассмотрим статистическую модель $(\mathscr{X}, \mathscr{B}(\mathscr{X}), \mathscr{P})$

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения $\mathscr{L}$.

По $\mathbf{X}$ необходимо сделать заключение о справедливости предположения (гипотезы) $\mathbf{H}_0 = \{\mathscr{L} \in \mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}\}$.

Если гипотеза $\mathbf{H}_0$ неверна, то принимается конкурирующая гипотеза $\mathbf{H}_1 = \{\mathscr{L} \in \mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}\}$

При этом $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_1 = \varnothing$. Иногда $\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1 = \mathscr{P}$.

Пример простых гипотез.

Основная гипотеза: $\mathbf{H}_0 = \{\xi \sim F(x, \theta_0)\}$,

конкурирующая гипотеза $\mathbf{H}_1 = \{\xi \sim F(x, \theta_1)\}$.

Критическое множество $S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) \in \mathscr{X}\}$,

если $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N) \in S$, то гипотеза $\mathbf{H}_0$ отвергается.

Ошибка первого рода: приняли $\mathbf{H}_1$,

при условии, что $\mathbf{H}_0$ верна.

Ошибка второго рода: приняли $\mathbf{H}_0$,

при условии, что $\mathbf{H}_1$ верна.

Числовой критерий: $C(x_1, x_2, ..., x_N)$

Классификация:

1) правосторонний критерий

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) : C(x_1, x_2, ..., x_N) > z_{кр}\}$$

2) левосторонний критерий

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) : C(x_1, x_2, ..., x_N) < z_{кр}\}$$

3) двусторонний критерий

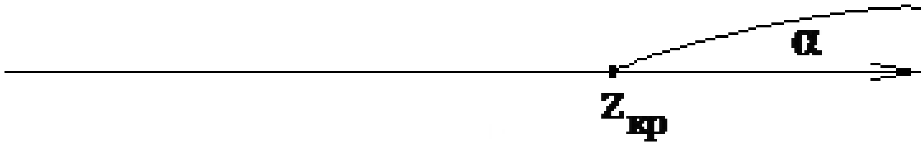
$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) : C(x_1, x_2, ..., x_N) < z_{кр,1}\} \cup$$
$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) : C(x_1, x_2, ..., x_N) > z_{кр,2}\}$$

Пример 1.

Числовой критерий: $C(x_1, x_2, ..., x_N)$

Правосторонний критерий

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N) : C(x_1, x_2, ..., x_N) > z_{кр}\}$$

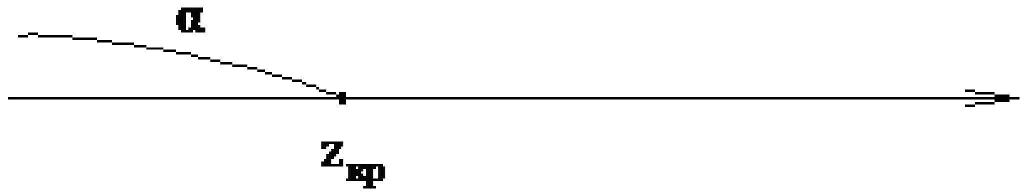


Пример 2.

Числовой критерий: $C(\ x_1,\ x_2,...,x_N\ )$

Левосторонний критерий

$$S=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_N):\ C(x_1,x_2,...,x_N)<z_{кр}\}$$

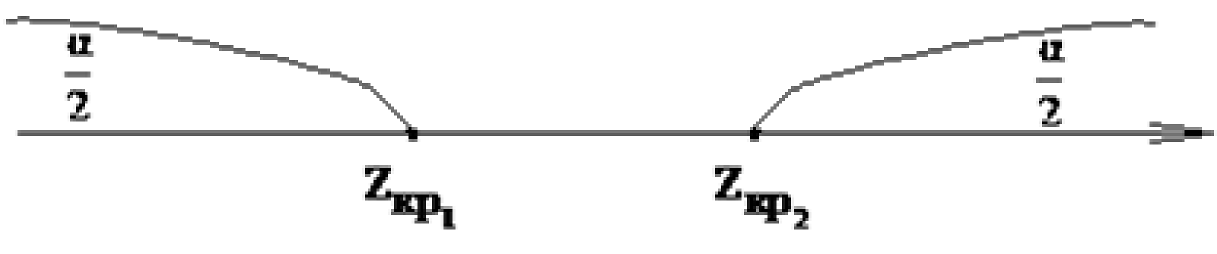


Пример 3.

Числовой критерий: $C(\ x_1,\ x_2,...,x_N\ )$

Двусторонний критерий

$$S=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_N):\ C(x_1,x_2,...,x_N)<z_{кр,1}\}\bigcup$$
$$\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_N):\ C(x_1,x_2,...,x_N)>z_{кр,2}\}$$



Рассмотрим простую параметрическую гипотезу $\mathrm{H}_0 = \{\xi \sim F(x, \theta_0)\}$ и конкурирующую гипотезу $\mathrm{H}_1 = \{\xi \sim F(x, \theta_1)\}$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$,

рассмотрим такую область $S_\alpha \subset \mathscr{X}$, что

$$\mathrm{P}_0(S_\alpha) = \mathrm{P}((x_1, x_2, \ldots, x_N) \in S_\alpha \mid \mathrm{H}_0 \text{ верна}) = \alpha.$$

Число α называется уровнем значимости,

область S_α – критической областью уровня α.

Вероятность ошибки первого рода совпадает с α.

Вероятность ошибки второго рода

$$\beta = \mathrm{P}_1(\overline{S}_\alpha) = \mathrm{P}((x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \overline{S}_\alpha \mid \mathrm{H}_1 \text{ верна}).$$

Возьмем гипотезы $\mathrm{H}_\rho = \{\xi \sim F(x, \rho)\}$.

Мощность критерия – функция

$$W(S_\alpha, \rho) = \mathrm{P}((x_1, x_2, \ldots, x_N) \in S_\alpha \mid \mathrm{H}_\rho \text{ верна}).$$

Если конкурирующая гипотеза простая $\mathrm{H}_1 = \{\xi \sim F(x, \theta_1)\} (\theta = \theta_1)$, то

$$W(S_\alpha, 1) = 1 - \beta.$$

Пусть S_α^* – такая область, что

$$W(S_\alpha^*, \rho) = \max_{S_\alpha}\{\ W(S_\alpha, \rho)\}.$$

Тогда критерий, соответствующий S_α^*,

называется наиболее мощным.

Теорема Пирсона

Пусть ξ – д.с.в.

ξ	x_1	$\ldots$	x_m
P	p_1	$\ldots$	p_m

$\{X_j\}_{j=1}^{N}$ – н.о.р.с.в. $X_j \sim \xi$

Пусть $n_k = \left|\{X_j = x_k\}\right|$ – число X_j, равных x_k

Теорема Пирсона утверждает, что

$$\chi_B^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - N \cdot p_k)^2}{N \cdot p_k} \sim \chi^2(m-1)$$

Обобщение: пусть ξ – д.с.в. $\sim F(x_1, \theta_1, \ldots, \theta_r)$

ξ	x_1	$\ldots$	x_m
P	$P_1(\theta_1, \ldots, \theta_r)$	$\ldots$	$P_m(\theta_1, \ldots, \theta_r)$

$\tilde{\theta}_i(X_1, \ldots, X_N)$ – оценка для θ_i, $i = 1, \ldots, r$

Пусть $n_k = \left| \left\{ X_j = x_k \right\} \right|$ – число X_j, равных x_k

По теореме Пирсона: $\chi_B^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{\left(n_k - N \cdot p_k\left(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r\right)\right)^2}{N \cdot p_k\left(\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r\right)} \sim \chi^2(\underbrace{m - r - 1}_{l})$

Критерий «хи-квадрат»

Рассмотрим гипотезу о нормальном распределении с.в. ξ : $H_0 = \left\{ \xi \sim N\left(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2\right) \right\}$

Для данной выборки $\{x_1, \ldots, x_N\}$
строится группированная выборка:

$x_{(1)} = \min x_j$, $x_{(N)} = \max x_j$, $m = 1 + [\log_2 N]$,

$h = (x_{(N)} - x_{(1)}) / m$, $a_0 = x_{(1)}$, $a_k = a_{k-1} + h$, $k = 1, \ldots, m$

n_1 – число значений x_j , попавших в интервал $[a_0, a_1]$,

n_k – число значений x_j , попавших в интервал $(a_{k-1}, a_k]$,

$k = 2, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} n_k = N$

Находим относительные частоты

w_k – относительная частота попадания в k – ый интервал,

$$w_k = \frac{n_k}{N}, \ \sum_{k=1}^{m} w_k = 1$$

Находим оценки параметров распределения

Оценка математического ожидания $\tilde{a} = \sum_{i=1}^{m} x_i^* \cdot w_i$, где $x_i^* = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$.

Оценка дисперсии $\tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i^*)^2 \cdot w_i - (\tilde{a})^2 - \frac{h^2}{12}$, $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2}$.

Вычисление выборочного значения критерия $\chi_B^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - Np_i^*)^2}{Np_i^*}$, где $p_1^* = \Phi(\frac{a_1 - \tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$,

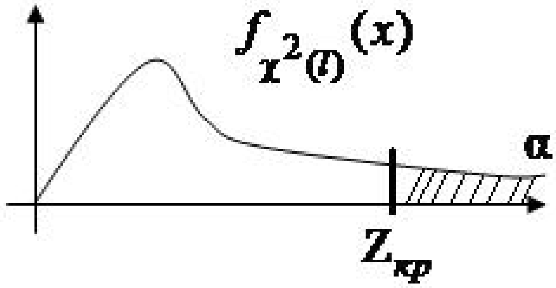
$$p_i^* = \Phi(\frac{a_i - \tilde{a}}{\tilde{\sigma}}) - \Phi(\frac{a_{i-1} - \tilde{a}}{\tilde{\sigma}}), \ i = 2, \ldots, (m-1), \ p_m^* = 1 - \Phi(\frac{a_{m-1} - \tilde{a}}{\tilde{\sigma}}),$$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t) dt$ – функция Лапласа, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

k	a_k	$\frac{a_k-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_k-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_k-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	p_k^*
0	a_0	$\frac{a_0-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_0-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_0-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	–
1	a_1	$\frac{a_1-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_1-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_1-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	p_1^*
2	a_2	$\frac{a_2-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_2-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_2-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	p_2^*
…	…	…	…	…	…
$m-1$	a_{m-1}	$\frac{a_{m-1}-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_{m-1}-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_{m-1}-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	p_{m-1}^*
m	a_m	$\frac{a_m-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}$	$\frac{1}{\tilde{\sigma}}\varphi(\frac{a_m-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	$\Phi(\frac{a_m-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}})$	p_m^*

Найденное значение критерия χ_B^2 сравнивается с критическим значением $\chi^2_{кр,\alpha}(l)$, где α – уровнь значимости, $\alpha = 0{,}05$, $l = m-3$ – число степеней свободы.

l	4	5	6	7	8
$\chi^2_{кр,\alpha}(l)$	9.5	11,1	12,6	14,1	15,5



Если $\chi_B^2 \le \chi_{кр,\alpha}^2(l)$, то гипотеза о соответствии выборки нормальному распределению $N(\tilde{a},\tilde{\sigma}^2)$ не противоречит экспериментальным данным (может быть принята) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Если $\chi_B^2 > \chi_{кр,\alpha}^2(l)$, то гипотеза о соответствии выборки нормальному распределению $N(\tilde{a},\tilde{\sigma}^2)$ противоречит экспериментальным данным (не может быть принята) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.