Занятие 1

Вектор-функции. Обобщенное векторное произведение. Аффинное пространство.

1. Задачи на правило суммирования Эйнштейна.

2. Доказать, что значения вектор-функций $\forall t \in \mathbb{R}$ образуют базис в $\mathbb{R}^3$
$\vec{x}_1(t) = (\cos t, \sin t, e^{2t})^T$, $\vec{x}_2(t) = (-\sin t, \cos t, 2e^{2t})^T$, $\vec{x}_3(t) = (-\cos t, -\sin t, 4e^{2t})^T$.

3. При каких α вектора $\vec{b}_1 = (1,2,3)^T, \vec{b}_2 = (3,1,-2)^T, \vec{b}_3 = (2,-2,\alpha)^T$ образуют базис положительной ориентации?

   Решение: $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$; $\quad \det T = \alpha - 18 - 8 - 6 - 4 - 6\alpha = -36 - 5\alpha > 0, \quad \alpha < -\dfrac{36}{5}$

4. Являются ли базисы $\vec{a}_1 = (1,0,1)^T, \vec{a}_2 = (1,0,-1)^T, \vec{a}_3 = (1,1,1)^T$ и $\vec{b}_1 = (-2,0,1)^T, \vec{b}_2 = (2,0,1)^T, \vec{b}_3 = (2,-2,2)^T$ одинаково ориентированными?

5. Найти объем параллелотопа, построенного на векторах $\vec{a}_1 = (1,-2,3,2)^T$, $\vec{a}_2 = (-1,2,3,2)^T$, $\vec{a}_3 = (1,2,-3,2)^T, \vec{a}_4 = (1,2,3,-2)^T$.

6. Найти обобщенное векторное произведение

   a) $(3,-4)^T$

   b) $(3,2,-1)^T, (-2,5,-1)^T$

   c) $(0,0,1,1)^T, (1,0,0,1)^T, (0,1,1,0)^T$

   Решение: $\quad a) \begin{vmatrix} 3 & e_1 \\ -4 & e_2 \end{vmatrix} = 3e_2 + 4e_1, \qquad b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & e_1 \\ 2 & 5 & e_2 \\ -1 & -3 & e_3 \end{vmatrix} = -e_1 + 11e_2 + 19e_3,$

   $$c) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & e_2 \\ 1 & 0 & 1 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 & e_4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \\ 1 & 0 & e_4 \end{vmatrix} - e_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-e_2 + e_3 - e_4) - e_1 = -e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

7. Найти координаты точки q в репере $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $p\,(0,1)$, $\vec{a}_1 = (2,1)^T, \vec{a}_2 = (0,3)^T$, если в стандартном репере ее координаты $(3,4)$.

Домашнее задание

1. Найти координаты точки q в репере $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$, где $p(2,3)$, $\vec{a}_1 = (1,1)^T, \vec{a}_2 = (0,2)^T$, если в стандартном репере ее координаты $(0,-3)$.

2. Найти угол между векторами $\vec{a} = (1,-2,3,3)^T$, $\vec{b} = (2,1,-1,5)^T$, если матрица Грама
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Найти обобщенное векторное произведение a) $(1,-5)^T$, b) $(1,1,0,0)^T, (0,1,1,0)^T, (0,0,0,1)^T$.

Занятие 2

Кривая. Длина дуги. Натуральная параметризация.

1. Написать уравнение касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $t_0 = 1$

   a) $\alpha(t) = (t^2, t^3)^T$

   b) $\alpha(t) = (t^2, t^3, 2t)^T$

   c) $\alpha(t) = (t^2, t^3, 2t, t^4)^T$

2. Колесо радиуса r катится по дороге. Найти траекторию точки, находящейся на расстоянии d от его центра.

   Решение. Движение координат центра колеса: $y = r$, $x = vt$. Вращение точки вокруг неподвижного центра: $x = d\cos(\omega t + \varphi)$, $y = d\sin(\omega t + \varphi)$. Чтобы при $t = 0$ обод колеса был в точке $(0, 0)$, положим $\varphi = -\pi/2$. Далее используем соотношение между линейной и угловой скоростью $v = \omega r$ (т.к. катится колесо радусом r) и положим $\omega = 1$.

   [трохоида $x = rt - d\sin t$, $y = r - d\cos t$, при $d = r$ эта кривая называется циклоидой] При $d < r$ кривая называется укороченной циклоидой, при $d < r$ – удлиненной.

3. Найти длину одной арки циклоиды. [8r]

   Решение. Циклоида задается вектор-функцией $\alpha(t) = (rt - r\sin(t), r - r\cos(t))^T$, ее производная (вектор скорости) $\dot{\alpha}(t) = (r - r\cos(t), r\sin(t))^T$. Длина дуги – это интеграл от модуля скорости,

$$l\left[\alpha(t)\right]|_a^b = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)|\, dt, \quad l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t}dt$$
$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}dt = 2r\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\frac{dt}{2} = -4r\cos\frac{t}{2}|_0^{2\pi} = 8r.$$

4. Найти выражение для длины дуги кривой, заданной

   a) В декартовых координатах, $y = y(x)$.

   b) В полярных координатах, $\rho = \rho(\varphi)$
   Решение.
   a) Линия задается как график функции $y = y(x)$. Параметрическое уравнение $\alpha(x) = (x, y(x))$, $\alpha'(x) = (1, y'(x))$, $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$.
   b) В полярных координатах кривая задается как график функции $\rho = \rho(\phi)$.
   $\alpha(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $\alpha'(\varphi) = (-\rho\sin\varphi + \rho'\cos\varphi, \rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)$,
   $L = \int_a^b \sqrt{(-\rho\sin(\varphi) + \rho'\cos(\varphi))^2 + (\rho\cos(\varphi) + \rho'\sin(\varphi))^2}d\varphi = \int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho'^2)}d\varphi$.

5. Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ [8a].

6. Найти натуральную параметризацию окружности радиуса R с центром в т. (0,0). $[\alpha(s) = (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R})^T]$

7. Найти кривую единичной скорости, положительно-эквивалентную цепной линии $y = a\operatorname{ch}(\frac{x}{a})$ $\left[\beta(s) = \left(a\ln\left(\frac{s}{a} + \sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}\right), a\sqrt{1+\frac{s^2}{a^2}}\right)\right]$

   Решение. Параметрическое уравнение $\alpha(x) = \left(x, a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}\right)^T$.

$\alpha'(x) = \left(1, a \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{1}{a}\right)^T = \left(1, \operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\right)^T$, $|\alpha'(x)| = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}} = \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

Длина дуги от точки $x=0$ до т. x_1 $\quad s = \int_0^{x_1} \operatorname{ch}\dfrac{x}{a}dx = a\operatorname{sh}\dfrac{x}{a}\Big|_0^{x_1} = a\operatorname{sh}\dfrac{x_1}{a}$.

Теперь, чтобы получить уравнение кривой единичной скорости, надо в уравнении $\beta(s) = \left(x(s), a\operatorname{ch}\dfrac{x(s)}{a}\right)^T$ явно выразить величины, стоящие в правой части, через длину дуги s. Имеем $a\operatorname{ch}\dfrac{x(s)}{a} = a\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}} = a\sqrt{1+\left(\dfrac{s}{a}\right)^2}$. Далее,
$s = a\operatorname{sh}\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{2}(e^{x/a}-e^{-x/a}) = \dfrac{a}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$, откуда $\dfrac{2s}{a} = t-\dfrac{1}{t}$, $t^2 - 2\dfrac{st}{a} - 1 = 0$. Решаем квадратное уравнение, $e^{x/a} = t = \dfrac{\dfrac{2s}{a}\pm\sqrt{\left(\dfrac{2s}{a}\right)^2+4}}{2}$, $x = a\ln\left[\dfrac{s}{a}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{a}\right)^2+1}\right]$.

Окончательно получим $\beta(s) = \left(a\ln\left[\dfrac{s}{a}+\sqrt{\left(\dfrac{s}{a}\right)^2+1}\right],\ a\sqrt{1+\left(\dfrac{s}{a}\right)^2}\right)$.

Домашнее задание

1. Найти наиболее удаленные от начала координат касательные к астроиде $\alpha(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t)^T$.
2. Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.
3. Найти длину одного витка винтовой линии $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$.
4. Найти натуральную параметризацию винтовой линии $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$.

Занятия 3,4

Касательные. Порядок касания плоских кривых. Кривизна. Соприкасающаяся окружность. Натуральное уравнение кривой.

1. Под каким углом пересекаются линии $y = \cos x$ и $y = \sin x$? [$\cos\phi = 1/3$]
2. Написать уравнения касательной и нормали к линиям:

   a) $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)^T$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{3}$

   b) $y = \operatorname{tg} x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$

   c) $x^3 + y^3 = 3xy$ в точке $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
3. Найти порядок касания линий $y = \sin(x)$ и $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + x$ в начале координат.
   Решение. $F(x,y) = y - (x^4 + \frac{1}{6}x^2 + x)$, $\alpha(t) = (t, \sin t)^T$. Далее дифференцируем $f(t) = F(x(t), y(t))$; при $x = t = 0$ первые три призводные равны нулю, четвертая не равна. [$k = 3$]
4. Кривая задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Найти кривизну k, указать точки, где кривизна минимальна и максимальна, выписать k_{min} и k_{max}.
   [$k = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$]
5. Найти выражения для вычисления кривизны при задании кривой:

a) в декартовых координатах, т.е. уравнением $y = y(x)$ $[k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}]$.

b) в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ $[k = \frac{-\ddot{\rho}\rho+2\dot{\rho}^2+\rho^2}{(\dot{\rho}^2+\rho^2)^{3/2}}]$.

Решение.
Используем формулу для нахождения кривизны k плоской кривой, $k = \dfrac{\det[\dot{\alpha}\ \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3}$.

a) Параметрическое уравнение $\alpha(x) = (x, y(x))^T$, $\dot{\alpha} = (1, y')^T$, $\ddot{\alpha} = (0, y'')^T$, кривизна $k = \dfrac{|\dot{\alpha}\ddot{\alpha}|}{((1^2 + (y')^2)^{3/2}} = \dfrac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$.

b) Параметрическое уравнение $\alpha(t) = (\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin(\varphi))^T$,

$\alpha'(t) = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi, \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^T$,

$\alpha''(t) = (\rho''\cos\varphi - \rho'\sin\varphi - \rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi,\ \rho''\sin\varphi + \rho'\cos\varphi + \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^T$.

$$\det[\alpha,'\alpha''] = \begin{vmatrix} \rho'\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi) & \rho''\cos\varphi - 2\rho'\sin\varphi - \rho\cos\varphi \\ \rho'\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi) & \rho''\sin\varphi + 2\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho''\rho + 2\rho'^2 + \rho^2$$

$$|\alpha'| = \sqrt{(\rho'\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi))^2 + (\rho'\sin(\varphi) + \rho\cos(\varphi))^2)} = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}$$

$$k = \frac{-\rho''\rho + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

6. Найти кривизну линии $y = \sin x$. Что происходит с центром соприкасающейся окружности при изменении знака кривизны? $[k = \frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}]$

7. Показать, что в каждой точке лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ кривизна пропорциональна радиус-вектору этой точки $[k = 3\rho/a^2]$.

8. Найти радиус кривизны кривой $y = \ln x$ в точке $(1, 0)$, построить соприкасающуюся окружность.

   Решение. Кривизна кривой, заданной уравнением $y = y(x)$: $k(x) = \dfrac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$.
   Находим производные $y' = 1/x$, $y'' = -x^{-2}$. Кривизна
   $k(x) = \dfrac{-x^{-2}}{\left(\sqrt{1 + 1/x^2}\right)^3}$, $k(1) = \dfrac{-1}{\left(1\sqrt{1+1}\right)^3} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, радиус кривизны $R(1) = \frac{1}{|k|} = 2\sqrt{2}$.

   Центр соприкасающейся окружности $p = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}\nu(t_0) = (1,\ 0) - \frac{4}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}) = (3,\ -2)$. Уравнение окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.

9. Записать параметрические уравнения клотоиды (спирали Корню), описываемой натуральным уравнением $k = as$, проходящей через точку (x_0, y_0), причем в этой точке угол наклона касательной $\theta_0 = 0$. Схематически построить образ кривой, учитывая, что

   $\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^{s} k(s)ds = \int_0^s k(s)ds = as^2/2$. Далее, $x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^{s}\cos\theta(s)ds = \int_0^s \cos\frac{as^2}{2}ds$, $y(s) = y(s_0) + \int_{s_0}^{s}\sin\theta(s)ds = \int_0^s \sin\frac{as^2}{2}ds$. Последние два интеграла (интегралы Френеля) не выражаются через элементарные функции. С ростом длины дуги растет кривизна, и спираль Корню закручивается все сильнее вокруг точек, которые можно найти, используя приведенные в условии интегралы.

Домашнее задание

1. Найти уравнение окружности, имеющей с параболой $y = x^2$ в начале координат касание наибольшего порядка и порядок этого касания. $[x^2 + (y - 1/2)^2 = (1/2)^2]$

2. Найти многочлен $y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, имеющий с линией $y = \varphi(x)$ в точке $A(0, \varphi(0))$ касание n-го порядка. $[a_k = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)$, получаем дифференцированием $F(x, y) = \varphi(x) - y = \varphi(x) - (a_0 + a_1x + \dots a_nx^n).$]

3. Найти кривизну кривых:

   a) $\alpha(t) = (t^2, t^3)^T$

   b) $\rho(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$

4. Найти максимальную и минимальную (с учетом знака) кривизну кривой $\alpha(t) = (t, t^3)^T$.

5. Найти радиус кривизны кривой $y^2 = ax$ в точке (0,0), построить соприкасающуюся окружность.

6. Записать натуральное уравнение окружности радиуса 5.

Занятие 5

Особые точки плоских кривых

1. Аккуратно постройте образы следующих кривых на листе клетчатой бумаги. Указать тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках.

   a) $\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T$ [т. возвр. 2-го рода]

   b) $\alpha(t) = (t^2, t^3 - t)^T$ [узел]

   c) $\alpha(t) = (t^3 + 2, t^2 - 1)^T$ [т. возвр. 1-го рода]

   d) $y^2 = ax^2 + x^3 <=> F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$ [узел $(a > 0)$, изол. ос.точка $(a = 0)$, возвр. 1-го рода $(a < 0)$]

   e) $y^2 = x^4 - x^6 <=> F(x, y) = x^4 - x^6 - y^2$ [т. самокасания]

   Решение a). Производная $\dot{\alpha}(t) = (4t^3, 2t - 5t^4)^T$ вектор-функции $\alpha(t) = (t^4, t^2 - t^5)^T$ обращается в ноль при $t = 0$, а значит $\alpha(0) = (0, 0)^T$ – особая точка. Находим первые две отличные от нуля производные в этой точке:
   $\ddot{\alpha}(t) = (12t^2, 2 - 20t^3)^T$, $\ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T$,
   $\dddot{\alpha}(t) = (24t, -60t^2)^T$,
   $\alpha^{(4)}(t) = (24, -120t)^T$, $\alpha^{(4)}(0) = (24, 0)^T$.
   Это производные 2-го и 4-го порядка, поэтому тип точки $(p, q) = (2, 4)$, p и q четные, а значит $(0, 0)^T$ – точка возврата 2-го рода, ветви кривой лежат по одну сторону от касательной. Касательный вектор в этой точке задается первой отличной от нуля производной, это $\ddot{\alpha}(0) = (0, 2)^T$, уравнение касательной $x = 0$.

   Решение d). Найдем точки, в которых нарушаются условия теоремы о неявной функции, т.е. $dF = 0$ или $F'_x = F'_y = 0$: $F'_x = 2ax + 3x^2 = 0$, $F'_y = -2y = 0$. Имеем 2 точки, $A(0, 0)$ и $B(-\frac{2}{3}a, 0)$. Проверим, лежат ли эти точки на кривой: $F(0, 0) = 0$, $F(-\frac{2}{3}a, 0) = \frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3 \neq 0$ при $a \neq 0$. Таким образом, A лежит на кривой и является особой точкой, B не лежит на кривой.

Находим вторые производные в точке $A(0,0)$: $F''_{xx} = 2a + 6x = 2a$, $F''_{yy} = -2$, $F''_{xy} = 0$. Т.о., второй дифференциал представляет собой квадратичную форму с определителем $\Delta = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a$. Будем искать в т.$A$ направления, в которых d^2F обращается в ноль.

При $a < 0 => \Delta > 0$, форма отрицательно определена и в малой окрестности т.A в ноль не обращается, A – изолированная особая точка. При $a > 0 => \Delta < 0$, форма является знакопеременной, условие $d^2F = 2a(x-0)^2 - 2(y-0)^2 = 2(\sqrt{a}x + y)(\sqrt{a}x - y) = 0$ удовлетворяется при $(\sqrt{a}x \pm y) = 0$ – это уравнения 2-х касательных, A – точка самопересечения (узел). При $a = 0 => \Delta = 0$, условие $d^2F = -2(y-0)^2 = 0$ задает одну касательную $y = 0$, A – точка возврата (в данном случае; возможна также точка самокасания).

Для построения образов кривых полезно найти точки пересечения с осью Ox, подставив $y = 0$ в $F(x,y) = 0$: $ax^2 + x^3 = 0$, $x^2(a+x) = 0$, точки $x = 0$; $x = -a$ и заметить, что $F(x,-y) = F(x,y)$, а значит, кривая симметрична относительно оси Ox.

Домашнее задание

Аккуратно постройте образы следующих кривых на листе клетчатой бумаги. Указать тип особых точек, написать уравнения касательных в этих точках.

1. $\alpha(t) = (4t^2, 3t^2 + 3t)^T$
2. $\alpha(t) = (t^2, t^4 + t^5)^T$
3. $y^2 = -x^2 + x^4$
4. $y^2(a - x) = x^3$ (циссоида)

Занятие 6

Кривые Безье.

1. Выписать общее уравнение кривой Безье 2-го порядка. Доказать, что для кривых Безье второго порядка касательные в точках P_0 и P_2 пересекаются в точке P_1.

2. Выписать общее уравнение кривой Безье 3-го порядка. Какие опорные точки задают уравнения касательных в точках P_0 и P_3? Выписать направляющие векторы этих касательных.

3. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$, $R_1(4,1)$, $R_2(5,1)$. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. $P_2(2,0)$ и $R_0(3,0)$ так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0?

4. Кривая Безье задана своими опорными точками $P_0(0,-1)$, $P_1(2,3)$, $P_2(4,-1)$. Разбить эту кривую на две кривые Безье второго порядка точкой, отвечающей значению параметра $t = 1/2$.

   Решение.

Найдем точку $R = B(\frac{1}{2})$, подставляя $t = 1/2$ в уравнение исходной квадратичной кривой Безье $B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$:

$$R = B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 = (2,1).$$

Осталось найти средние опорные точки R_1 и R_2 новых кривых P_0, R_1, R и R, R_2, P_2 как точки пересечения касательных в их конечных опорных точках. Находим сначала касательную к исходной кривой Безье P в точке $R(2,1)$. Касательный вектор $B'(t) = -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2 = P_2 - P_0 = (4,0)$, уравнение касательной $y = 1$. Касательные векторы в точках P_0 и P_2 – это соответственно $P_0P_1 = (4,2)$ и $P_1P_2 = (2,-4)$, уравнения касательных $\frac{x}{4} = \frac{y+1}{2}$, $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4}$, или $x = 2y+2$, $y = -2x+7$. Находим их точки пересечения R_1 и R_2 с касательной $y = 1$ в т. R: $R_1(4,1)$, $R_2(3,1)$.

5. Кривая Безье 3-го порядка задана своими опорными точками $P_0(-1,0)$, $P_1(-a,1)$, $P_2(a,1)$, $P_3(1,0)$. При каком значении параметра a кривая имеет особую точку? Указать тип особой точки, построить образ кривой. Схематически построить образ кривой при меньшем и большем значениях параметра.

   Решение. Дифференцируем $\alpha(t) = (-1,0)(1-t)^3 + (-a,1)3t(1-t)^2 + (a,1)3t^2(1-t) + (1,0)t^3$ и приравниваем к нулю. Сначала рассмотрим уравнение для y-компонент; a в него не входит, получаем $t = 1/2$. При $t = 1/2$ уравнение для x-компонент дает $a = -1$, особая точка $\alpha(1/2) = (0, 3/4)$. Тип точки $(p,q) = (2,3)$, это точка возврата 1-го рода. При $a < -1$ кривая имеет точку самопересечения.

Домашнее задание

1. Две квадратичные кривые Безье заданы своими опорными точками $P_0(-4,0)$, $P_1(-3,2)$, $P_2(-1,0)$ и $R_0(4,0)$, $R_1(3,2)$, $R_2(1,0)$. Найти опорные точки квадратичной кривой Безье, соединяющей т. P_2 и R_2 так, чтобы на получившейся составной кривой (сплайне) не было изломов. Можно ли аналогичным образом соединить точки P_0 и R_2? P_0 и R_0?

2. Может ли кубическая кривая Безье иметь точку возврата 2-го рода?

Занятие 7

Кривые в R^3 и R^n

1. Найти векторы τ, ν, β кривой $x = t, y = t^2, z = t^3$ в точке $M(2,4,8)$. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости к кривой в этой точке.
   Решение: $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$, $\dot\alpha(t) = (1, 2t, 3t^2)$, $\ddot\alpha(t) = (0, 2, 6t)$. Точке M отвечает значение параметра $t = 2$.
   $\tau = \frac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|}$; $\tau(2) = \frac{(1,4,12)}{\sqrt{1+16+144}} = \frac{(1,4,12)}{\sqrt{161}}$
   $$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 4 & 2 & j \\ 12 & 12 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 2 & 2 & j \\ 0 & 12 & k \end{vmatrix} = 24i - 12j + 2k$$
   $\beta = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|} = \frac{(12,-6,1)}{\sqrt{181}}$, $\nu = \beta \times \tau$.
   Касательная $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-8}{12}$,
   нормальная плоскость $x + 45y + 12z - 114 = 0$,
   соприкасающаяся плоскость $12x - 6y + 2z - 8 = 0$.

2. Показать, что кривая $x = 1 + 3t + 2t^2, y = 2 - 2t + 5t^2, z = 1 - t^2$ плоская; найти плоскость в которой она лежит.
   Решение:
   $\alpha(t) = (1+3t+2t^2, 2-2t+5t^2, z = 1-t^2)$, $\dot\alpha(t) = (3+4t, -2+10t, -2t)$, $\ddot\alpha(t) = (4, 10, -2)$.
   $$\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) = \begin{vmatrix} 3+4t & 4 & i \\ -2t+10 & 10 & j \\ -2t & -2 & k \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & i \\ -2 & 5 & j \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = 2(2i + 3j + 19k).$$
   Так как этот вектор (сонаправленный с бинормалью β) не зависит от t, кривая является плоской.
   Выберем любую точку на кривой; $t = 0$ отвечает точка $M(1, 2, 1)$.
   Кривая лежит в плоскости $2(x-1) + 3(y-2) + 19(z-1) = 0$.

3. Какому условию должны удовлетворять функции $f(t)$ такие, чтобы кривая $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, f(t))^T$ былв плоской? Найти все функции $f(t)$, удовлетворяющие этому условию. $[f' = -f'''$, $f(t) = b\cos t + c\sin t + d]$

4. Найти кривизну и кручение винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$. $[k = a/(a^2+b^2)$, $\varkappa = b/(a^2+b^2)]$

   Решение
   $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$, $\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)^T$, $\alpha''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)^T$.
   Далее находим $\begin{vmatrix} i & -a\sin t & -a\cos t \\ j & a\cos t & -a\sin t \\ k & b & 0 \end{vmatrix} = ab\sin t\, i - ab\cos t\, j + a^2\, k$, $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$,
   $|\alpha' \times \alpha''| = a\sqrt{a^2+b^2}$. Кривизна $k = \dfrac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.
   Чтобы найти кручение, надо посчитать третью производную $\alpha^{(3)}(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0)^T$,
   $$\begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t \\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = ba^2$$
   Кручение $\varkappa = \dfrac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = \dfrac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \dfrac{b}{(a^2+b^2)}$

Еще задачи

1. Найти последний вектор базиса Френе. $\alpha(t) = (t^3, t^2, 2t^2+t, t^3+t^2-1)^T$
   $[E_4 = \frac{e_1+e_2-e_4}{\sqrt3}$; кривая лежит в гиперплоскости $\perp E_4]$

2. Найти базисные векторы репера Френе винтовой линии $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)^T$. Проверить, что ν пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а β образует с осью постоянный угол.

Домашнее задание

1. Найти уравнение касательной и соприкасающейся плоскости к кривой $x^2 = 4y, x^3 = 24z$ в точке (6,9,9).

2. Найти кривизну и кручение кривой $x = a\,\mathrm{ch}\,t, y = a\,\mathrm{sh}\,t, z = at$.
   [Кривизна $k = \frac{|\dot\alpha\times\ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3} = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$, кручение $\varkappa = \frac{(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)}{|\dot\alpha\times\ddot\alpha|^2} = \frac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$]

3. Доказать, что кривая лежит в гиперплоскости, написать уравнение этой гиперплоскости

a) $\alpha(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t})^T$

b) $\alpha(t) = (2t^2 + t + 1, 3t^2 - 2t + 75, t^2 - 2t + 4)$ $[P : 4(x-1) - 5(y-75) + 7(z-4) = 0]$

Занятие 8

Контрольная работа.

Занятие 9

Разбор результатов контрольной, вопросов по первым 3 заданиям типового расчета. Уравнение поверхности, базис касательного пространства.

1. Записать параметрическое уравнение цилиндра радиуса a, найти базис касательного пространства.

   a) вдоль оси Oz

   b) вдоль оси Ox

2. Найти параметризацию поверхности, которая получается вращением цепной линии $\alpha(u) = (a\,\mathrm{ch}(u/a), 0, u)^T$, $-\infty < u < \infty$, вокруг оси Oz [Катеноид]

   Решение. Вращаем заданную плоскую кривую $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))^T$, $u \in I$, вокруг оси Oz:
$$f(u,v) = R(v)\alpha(u) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\,\mathrm{ch}(u/a) \\ 0 \\ u \end{bmatrix},$$
$$f(u,v) = (a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v, a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v, u)^T, \quad -\infty < u < \infty, \quad -\pi < v < \pi.$$

3. Найти базис касательного пространства и записать уравнение нормали к поверхности $z = x^2 + y^2$ в произвольной точке. Убедиться, что все нормали пересекают ось Oz.
   Решение:
   $f(x,y) = (x, y, x^2+y^2)^T, \quad f'_x = (1, 0, 2x)^T, \quad f'_y = (0, 1, 2y)^T.$
   $\vec{n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & j \\ 2x & 2y & k \end{vmatrix} = (-2x, -2y, 1)^T$. Уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{n}$, проходящей через точку $x_0, y_0, z_0 = x_0^2 + y_0^2$ поверхности $f(x,y)$: $\frac{x-x_0}{-2x_0} = \frac{y-y_0}{-2y_0} = \frac{z-x_0^2-y_0^2}{1}$.
   На оси Oz $x = y = 0$, прямая пересекает ось Oz в точке $z = \frac{1}{2} + x_0^2 + y_0^2$.

4. Найти матрицу 1-й фундаментальной формы, если скалярное произведение в окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама:
   a) Круговой цилиндр $f(u,v) = (a\cos v, a\sin v, u)^T$
   b) Сфера $f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$
   c) Сферические координаты $f(u,v,R) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T$

   Решение. a) Находим производные вектор-функции $f(u,v)$ по $u = u_1$ и $v = u_2$, они же вектора стандартного базиса касательного пространства T_pf
   $f'_u = (0,0,1)^T$, $f'_v = (-a\sin v, a\cos v, 0)^T$.
   Элементы матрицы 1-й фундаментальной формы – это скалярные произведения $g_{11} = \langle f'_u, f'_u \rangle = 1$, $g_{22} = \langle f'_v, f'_v \rangle = a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u = a^2$, $g_{12} = \langle f'_u, f'_v \rangle = g_{21} = 0$, матрица $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$.

b) Находим векторы стандартного базиса касательного пространства
$f'_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)^T$, $f'_v = (-R\sin v\cos u, R\cos u\cos v, 0)^T$
и их скалярные произведения,
$g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = R^2(\sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u) = R^2$,
$g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = R^2\cos^2 u$,
$g_{12} = g_{21} = \langle f'_u, f'_v\rangle = 0$,
$g = \begin{bmatrix} \langle f'_u, f'_u\rangle & \langle f'_u, f'_v\rangle \\ \langle f'_v, f'_u\rangle & \langle f'_v, f'_v\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{bmatrix}$.

c) Находим производные
$f'_u = (-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)^T$, $f'_v = (-R\sin v\cos u, R\cos u\cos v, 0)^T$,
$f'_R = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T$,
и их скалярные произведения (часть мы уже нашли в предыдущем примере),
$g_{33} = \langle f'_R, f'_R\rangle = 1$,
$g_{13} = g_{31} = \langle f'_u, f'_R\rangle = 0$,
$g_{23} = g_{32} = \langle f'_v, f'_R\rangle = 0$,
$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Домашнее задание

1. Доделать нерешенные задачи контрольной работы.

2. Записать параметрическое уравнение кругового конуса.

3. Написать параметрическое уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^3 + y^3$ в точке $A(1,2,9)$. Указать поверхностные координаты в этой точке.

Занятия 10,11

Первая фундаментальная форма. Нахождение длин, углов, объемов.

1. Найти угол между координатными линиями на поверхности $f(u,v) = (u, v, uv)^T$ в точке $p(2,3)$, если скалярное произведение в окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

   Решение. Находим стандартный базис касательного пространства:
   $f'_u(u,v) = (1,0,v)^T$, $f'_v(u,v) = (0,1,u)^T$,
   $f'_u(2,3) = (1,0,3)^T$, $f'_v(2,3) = (0,1,2)^T$,
   $cos\varphi = \frac{\langle f'_u, f'_v\rangle}{\sqrt{\langle f'_u, f'_u\rangle\langle f'_v, f'_v\rangle}} = \frac{6}{\sqrt{50}}$.

2. Найти длину кривой $u = 3v$ от точки $v = -\pi$ до точки $v = \pi$ на цилиндре радиуса 4 $f(u,v) = (4\cos v, 4\sin v, u)^T$. [$10\pi$]
   Решение. Находим стандартный базис касательного пространства и матрицу 1-й фундаментальной формы: $f'_u = (0,0,1)^T$, $f'_v = (-4\sin v, 4\cos v, 0)^T$,
   $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Из уравнения кривой $u = 3v$ имеем $du = 3dv$,

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g_{ij}du^i du^j} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{du^2 + 16dv^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{9+16}dv = 10\pi.$$

3. Найти периметр криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm av^2/2$ и $v = 1$ вдоль прямого геликоида $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)^T$. [10a/3]

Решение.
Находим вектора стандартного базиса касательного пространства $f_u^{'} = (\cos v, \sin v, 0)^T$, $f_v^{'} = (-u\sin v, u\cos v, a)^T$. Матрица 1-й фундаментальной формы строится как их матрица Грама, $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{bmatrix}$. Используя эту матрицу, находим последовательно длины трех сторон криволинейного треугольника. На стороне $v = 1$ имеем $dv = 0$,

$$l_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{du^2 + (u^2+a^2)dv^2} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{du^2} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} du = u \mid_{-a/2}^{a/2} = a.$$

На стороне $u = -av^2/2$ имеем $du = -avdv$,

$$l_2 = \int_0^1 \sqrt{a^2v^2dv^2 + \left(\frac{a^2v^4}{4} + a^2\right)dv^2} = a\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{v^2}{2}+1\right)^2} dv = \left.\frac{av^3}{6} + av\right|_0^1 = \frac{7a}{6}.$$

$$P = l_1 + 2l_2 = \frac{14a}{6} + a = \frac{10a}{3}.$$

4. Найти длину дуги между двумя произвольными точками кривой $u = v$ вдоль катеноида $f(u,v) = (a\operatorname{ch}(u/a)\cos v, a\operatorname{ch}(u/a)\sin v, u)^T$.

5. Найти длину "обмотки" $\alpha(t) = (t,t)^T$, $t \in (-\pi, \pi)$ вдоль тора $f(u,v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)^T$ $[2\pi\sqrt{a^2+b^2}]$

   Решение.
   Находим вектора стандартного базиса T_pf и матрицу 1-й фундаментальной формы,

$$g = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot{u}^i\dot{u}^j}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2+b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

6. Под каким углом пересекаются линии $u + v = 0$ и $u - v = 0$

   a) на прямом геликоиде $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)^T$? $[\cos\varphi = (1-a^2)/(1+a^2)]$

   b) на сфере? $[\cos\varphi = 0]$

   c) на торе $f(u,v) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)^T$? $[\cos\varphi = -\frac{(a+b)^2-b^2}{(a+b)^2+b^2}]$

   Решение: Запишем параметрические уравнения кривых $u+v = 0$ и $u-v = 0$: $\alpha_1(t) = (t,-t)^T$, $\alpha_2(\theta) = (\theta,\theta)^T$. Они пересекаются в т. $u = v = 0$ при $t = \theta = 0$. Касательные векторы в этой точке получаем, дифференцируя, $\dot{\alpha}_1(0) = (1,-1)^T$, $\dot{\alpha}_2(0) = (1,1)^T$. Далее стандартным образом находим скалярное произведение и длины этих векторов с помощью соответствующей матрицы Грама (матрицы 1-й фундаментальной формы геликоида, сферы или тора).

   Например, для геликоида матрица 1-й фундаментальной формы (найденная нами ранее) в т. $u = v = 0$ имеет вид $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}$,

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot1\cdot1 + 0 - a^2\cdot1\cdot1}{\sqrt{1\cdot1\cdot1 + a^2(-1)^2}\sqrt{1\cdot1\cdot1 + a^2\cdot1\cdot1}} = \frac{1-a^2}{\sqrt{(1+a^2)(1+a^2)}} = \frac{1-a^2}{1+a^2}.$$

7. Найти угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)^T$.

8. Найти площадь полусферы.
Решение.
Сфера: $f(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)^T = R(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T$,
$f'_u = R(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)^T$, $f'_v = R(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0)^T$

$$g = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \sqrt{\det g} = R^2\cos u.$$

На верхней полусфере $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, 2\pi]$, поэтому площадь равна:

$$\int_0^{\pi/2} du \int_0^{2\pi} R^2\cos u\, dv = R^2\int_0^{\pi/2}\cos u\, du\int_0^{2\pi} dv = R^2\left(\sin u|_0^{\pi/2}\right)2\pi = 2\pi R^2.$$

9. Найти объем шара $f(u,v,w) = (w\cos u\cos v, w\cos u\sin v, w\sin u)^T; u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}); v \in (-\pi;\pi); 0 < w < R$
Решение:
$f'_u = (-w\sin u\cos v, -w\sin u\sin v, w\cos u)^T$
$f'_v = (-w\sin v\cos u, w\cos u\cos v, 0)^T$
$f'_w = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u)^T$
$g_{11} = \langle f'_u, f'_u\rangle = (w^2\cos^2 v\sin^2 u + w^2\sin^2 v\sin^2 u + w^2\cos^2 u) = w^2$
$g_{12} = \langle f'_u, f'_v\rangle = (w^2\cos v\cos u\sin u\sin v - w^2\cos v\cos u\sin u\sin v) = 0$
$g_{22} = \langle f'_v, f'_v\rangle = (w^2\cos^2 u\sin^2 v + w^2\cos^2 v\cos^2 u) = w^2\cos^2 u$
$g_{33} = \langle f'_w, f'_w\rangle = 1,\ g_{13} = g_{23} = 0,$
$g = \begin{bmatrix} w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\sqrt{\det g} = w^2\cos u$
$V = \iiint\limits_V w^2\cos u\,du\,dv\,dw = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du\int\limits_{-\pi}^{\pi} dv\int\limits_0^R w^2 dw = \frac{4\pi R^3}{3}$

10. Найти формулу площади поверхности $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$.
Решение: $f(x,y) = (x, y, z(x,y))^T$,
$f'_x = (1, 0, z'_x)^T$,
$f'_y = (0, 1, z'_y)^T$,
$\langle f'_x, f'_x\rangle = 1 + (z'_x)^2$, $\langle f'_y, f'_y\rangle = 1 + (z'_y)^2$, $\langle f'_x, f'_y\rangle = \langle f'_y, f'_x\rangle = z'_x z'_y$

$$g = \begin{bmatrix} \langle f'_x, f'_x\rangle & \langle f'_x, f'_y\rangle \\ \langle f'_x, f'_y\rangle & \langle f'_y, f'_y\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (z'_x)^2 & z'_x z'_y \\ z'_x z'_y & 1 + (z'_y)^2 \end{bmatrix}.$$

$\det g = (1+(z'_x)^2)(1+(z'_y)^2) - (z'_x)^2(z'_y)^2 = 1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\det g} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$
Получаем известную формулу:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy.$$

Для нахождения длины кривой на поверхности $z = z(x,y)$ используем следующую формулу для ds^2:

$ds^2 = (1 + (z'_x)^2)dx^2 + 2z'_x z'_y dxdy + (1 + (z'_y)^2)dy^2 = dx^2 + dy^2 + (z'_x)^2dx^2 + 2z'_x z'_y dxdy + (z'_y)^2dy^2.$
Поэтому длина параметризованной кривой на такой поверхности равна

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (z'_x)^2\dot{x}^2 + 2z'_x z'_y\dot{x}\dot{y} + (z'_y)^2\dot{y}^2}\,dt,$$

где $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $z'_x = z'_x(x(t), y(t))$ и т.д.

11. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность изометрична плоскости.
Решение.
Цилиндрическая поверхность – это поверхность, образуемая движением прямой (образующей), перемещающейся параллельно самой себе и пересекающей данную линию (направляющую). Направим ось Oz параллельно образующей. Направляющую расположим в плоскости, перпендикулярной образующей, с параметрическим уравнением $\alpha(v) = (x(v), y(v))^T$. Уравнение цилиндрической поверхности в этом случае имеет вид $f(u,v) = (x(v), y(v), u)^T$. Найдем касательные векторы и матрицу 1-й фундаментальной формы:
$$f'_u = (0,0,1)^T, \quad f'_v = (x'(v), y'(v), 0)^T, \quad g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |\dot{\alpha}(v)|^2 \end{bmatrix},$$
где $|\dot{\alpha}(v)|^2 = (x'(v))^2 + (x'(v))^2$ – квадрат скорости кривой. Если на кривой нет особых точек, то мы, заменив параметр на длину дуги, можем перейти к кривой единичной скорости, имеющей тот же образ, что и исходная. Матрица g после такого преобразования превратится в единичную, совпадающую с матрицей 1-й фундаментальной формы плоскости. Это означает, что цилиндрическая поверхность изометрична плоскости.

Занятия 12,13

Вторая фундаментальная форма. Основной оператор гиперповерхности. Кривизны. Локальное строение гиперповерхностей.

Матрица второй фундаментальной формы поверхности находится по формуле
$$h_{ij} = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle.$$

1. Найти 2-ю фундаментальную форму сферы $f(u,v) = (R\cos u \cos v, R\cos u \sin v, R\sin u)^T$, матрицу основного оператора, главные нормальные кривизны.
Решение:
$f'_u = (-R\sin u \cos v, -R\sin u \sin v, R\cos u)^T$
$f'_v = (-R\cos u \sin v, R\cos u \cos v, 0)^T$
$f''_{uu} = (-R\cos u \cos v, -R\cos u \sin v, -R\sin u)^T$
$f''_{vv} = (-R\cos u \cos v, -R\cos u \sin v, 0)^T$
$f''_{uv} = (R\sin u \sin v, -R\sin u \cos v, 0)^T$
$g_{11} = R^2; g_{12} = 0; g_{22} = R^2\cos^2 u$
$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u \sin v & -R\cos u\cos v \\ -R\sin u \sin v & R\cos u\cos v & -R\cos u \sin v \\ R\cos u & 0 & -R\sin u \end{vmatrix} = \frac{1}{R^2\cos u}(R\cos u(R^2\cos^2 u\sin^2 v +$
$R^2\cos^2 u\cos^2 v) - R\sin u(-R^2\sin u\cos u\cos^2 v - R^2\cos u \sin u \sin^2 v)) = \frac{1}{R^2\cos u}(R^3\cos^3 u +$
$R^3\sin^2 u\cos u) = \frac{R^3\cos u}{R^2\cos u} = R$
$h_{22} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u \sin v & -R\cos u\cos v \\ -R\sin u \sin v & R\cos u\cos v & -R\cos u \sin v \\ R\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R^2\cos u}(R\cos u(R^2\cos^2 u\sin^2 v +$
$R^2\cos^2 u\cos^2 v)) = \frac{R^3\cos^3 u}{R^2\cos u} = R\cos^2 u$
$h_{12} = 0$
Матрица второй фундаментальной формы $[h] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{bmatrix}$
Матрица основного оператора гиперповерхности $[L_p] = [g]^{-1}[h] = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}$
Главные нормальные кривизны $k_1 = k_2 = 1/R$.

2. Найти 2-ю фундаментальную форму и матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны гиперповерхности:

   a) конус $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u)^T$,

   b) геликоид $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)^T$,

   c) $z = \varphi(x,y)$,

   d) псевдосфера $f(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R(\ln(\mathrm{tg}(u/2)) + \cos u))^T$

3. Найти 2-ю фундаментальную форму гиперповерхности $f(u,v,w) = (u,v,w,uvw)^T$ $[\det g = 1 + u^2v^2 + v^2w^2 + u^2w^2,\ [h] = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{bmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & u \\ v & u & 0 \end{bmatrix}]$

4. Найти 2-ю фундаментальную форму поверхности вращения в R^3.

5. Найти главные нормальные кривизны и главные направления в вершинах эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
   Решение:
   Для решения задачи можно было бы найти матрицу основного оператора гиперповерхности, однако вычисления сильно сократятся, если мы воспользуемся теоремой о том, что в окрестности точки гиперповерхности существует такая декартова прямоугольная система координат, что поверхность является графиком функции $z = \varphi(x,y)$, причем $z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2) + o(x^2 + y^2)$, где k_1 и k_2 – кривизны.
   В окрестности вершины $z = c$ имеем $z = c\sqrt{1 - (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})} = c(1 - \frac{1}{2}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) + o(x^2+y^2))$,
   $z = c - \frac{c}{2a^2}x^2 - \frac{c}{2b^2}y^2 + o(x^2 + y^2)$,
   и в точке $(0,0,c)$ $k_1 = -\frac{c}{a^2}$, $k_2 = -\frac{c}{b^2}$.

6. Найти главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности $z = xy$ в точках

   a) $A(0,0,0)$;

   b) $B(1,1,1)$.

7. Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе
   $f(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)^T$
   Решение:
   $f'_u = (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)^T$
   $f'_v = (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0)^T$
   $f''_{uu} = (-b\cos v\cos u, -b\sin v\cos u, -b\sin u)^T$
   $f''_{vv} = (-(a + b\cos u)\cos v, -(a + b\cos u)\sin v, 0)^T$
   $f''_{uv} = (b\sin v\sin u, -b\cos v\sin u, 0)$
   Матрица 1-й фундаментальной формы $[g] = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\cos u)^2 \end{bmatrix}$
   $h_{ij} = \frac{\det[f'_u, f'_v, f''_{u^iu^j}]}{\sqrt{\det g}}$
   $h_{11} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v & -b\cos u\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a + b\cos u)\cos v & -b\sin v\cos u \\ b\cos u & 0 & -b\sin u \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}[b^2(a + b\cos u)] =$
   $\frac{b^2(a+b\cos u)}{b(a+b\cos u)} = b$
   $h_{22} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a + b\cos u)\sin v & -(a + b\cos u)\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a + b\cos u)\cos v & -(a + b\cos u)\sin v \\ b\cos u & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}[b\cos u(a +$

$b\cos u)^2]$

$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} -b\sin u\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & b\sin v\sin u \\ -b\sin u\sin v & (a+b\cos u)\cos v & -b\cos v\sin u \\ b\cos u & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

$[h] = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a+b\cos u) \end{bmatrix}$; $[L_p] = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a+b\cos u)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & \cos u(a+b\cos u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a+b\cos u} \end{bmatrix}$

$k_1 = \frac{1}{b}; k_2 = \frac{\cos u}{a+b\cos u}$

Полная кривизна $K = k_1 k_2 = \frac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$

Средняя кривизна $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{b} + \frac{\cos u}{a+b\cos u})$

f'_u и f'_v - главные направления, отвечающие k_1 и k_2

Тип точек.

$K = 0 => u = \pm\frac{\pi}{2}$ - параболические

$K > 0 => u \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ - эллиптические

$K < 0 => u \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (-\pi; -\frac{\pi}{2})$ - гиперболические.

8. Классифицируйте точки на двумерных гиперповерхностях:

   a) эллипсоид;
   b) однополостный гиперболоид;
   c) двуполостный гиперболоид;
   d) эллиптический параболоид;
   e) конус;
   f) гиперболический параболоид;
   g) эллиптический цилиндр;
   h) гиперболический цилиндр.

9. Существуют ли направления, в которых кривизна кругового цилиндра радиуса 2 равна 0, 1, 1/2, 2?

10. Найти нормальную кривизну гиперповерхности $z = xy$ в т.(0,0,0) в направлении координатных осей.

    Решение: $f(u,v) = (u,v,uv)^T$, $[g] = \begin{bmatrix} 1+v^2 & uv \\ uv & 1+u^2 \end{bmatrix}$, $[h] = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. По теореме Менье $k = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)}$, $X \in T_f$. Подставляем $X_1 = (1,0)$ и $X_2 = (0,1)$, в обоих случаях числитель дроби обращается в 0, откуда $k = 0$.

11. Найти кривизну нормального сечения цилиндра $y = x^2/2$ (расположенного в R^3) в точке $A(2,2,4)$ в направлении касательной к линии $y = x^2/2$, $z = x^2$.

    Решение:

    Уравнение поверхности $f(u,v) = (u, \frac{u^2}{2}, v)^T$, на кривой $v = u^2$, уравнение кривой в поверхностных координатах $\alpha(t) = (t,t^2)$, касательная $\dot\alpha(t) = (1,2t)^T$, точке $A(2,2,4)$ отвечает $t = u = 2$, $\dot\alpha(t) = (1,4)^T$. Далее находим матрицы 1-й и 2-й фундаментальных форм и используем теорему Менье. $f'_u = (1,u,0)$, $f'_v = (0,0,1)$, $f''_{uu} = (0,1,0)$, $f''_{vv} = f''_{uv} = (0,0,0)$,

    $g = \begin{bmatrix} u^2+1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $h_{11} = \frac{1}{\sqrt{(\det g)}} \begin{vmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{(\det g)}}$, $h = \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

    Находим значения 1-й и 2-й фундаментальных форм при $X = \dot\alpha(t) = (1,4)^T$ и $u = 2$ и подставляем в формулу для кривизны:

    $I_p(X,X) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 21$, $II_p(X,X) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, $k = \frac{II_p(X,X)}{I_p(X,X)} = \frac{-1}{21\sqrt{5}}$.