Семинар 20 (15.17.16)

Задача. Доказать неравенство

$$\operatorname{arctg} x \le x - \frac{x^3}{6}, \quad x \in [0, 1].$$

Решение

Рассмотрим ф-ю

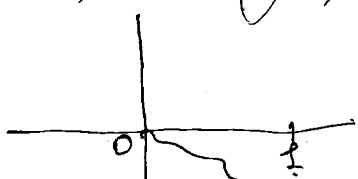
$$f(x) = \operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} =$$

$$\frac{2 - \cancel{2}2x^2 + x^2(1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{x^4 - \cancel{2}x^2}{2(1+x^2)} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-1)}{2(x^2+1)} \le 0$$

$$f(0) = \operatorname{arctg}(0) - 0 + \frac{0^3}{6} = 0$$



$$\Longrightarrow (\forall x \in [0, 1]) : f(x) \le 0$$

$(\forall x \in [0,1]):\ \operatorname{arctg} x \le x - \frac{x^3}{6}$

<u>Задача</u> Доказать, что

$\forall x \in (-1, +\infty)$

$\ln(1+x) \le x$.

Рассмотрим ф-ю:

$f(x) = \ln(1+x) - x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-x-1}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$

$\underset{-1}{\circ} \overset{+}{\nearrow} \underset{0}{\bullet} \overset{-}{\searrow} \rightarrow$ знак $f'(x)$

~~$f'(x) = -\frac{x}{1+x} < 0$ при $x \in (0, +\infty)$~~

~~$f(0) = \ln 1 - 0 = 0 \Rightarrow (\forall x \in (0, +\infty))$:~~

~~$f(x) \le 0$~~

~~$(\forall x \in (0, +\infty))$:~~

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x} \begin{cases} < 0 \text{ при } x \in (0; +\infty) \\ > 0 \text{ при } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

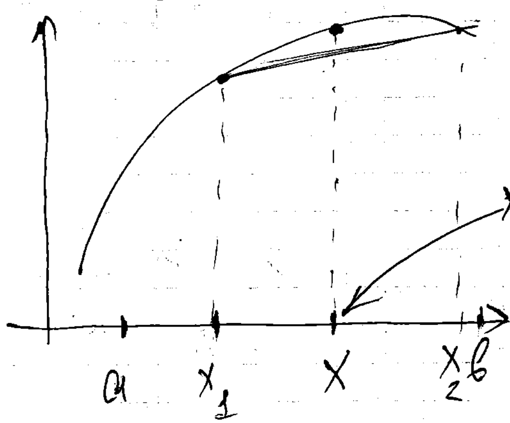
$(\forall x \in (-1, +\infty))$: $f(x) \le f(0) = 0$

$\ln(1+x) \le x$

Выпуклость и вогнутость функций

Функция $f(x)$ называется **выпуклой** на промежутке (a, b), если

$(\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2)$: график функции $y = f(x)$ на интервале лежит выше хорды, соединяющей точки графика с абсциссами x_1 и x_2.



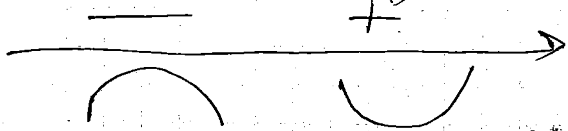
$\alpha \in (0, 1)$

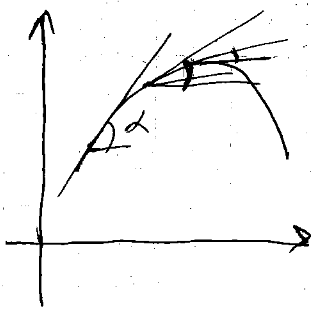
$x_1 + \alpha(x_2 - x_1)$

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2)(\forall \alpha \in (0, 1)):$$

$$f(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) > f(x_1) + \alpha(f(x_2) - f(x_1))$$

Утв Если $(\forall x \in (a,b)): f''(x) < 0$ то функция $f(x)$ выпукла на промежутке (a,b)



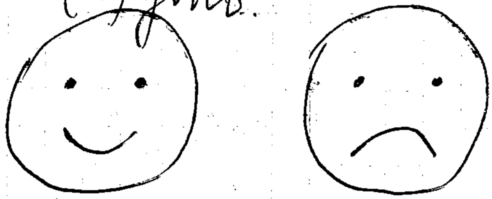


$f''(x) < 0$

$(f'(x))' < 0.$

$f'(x)$ убыв.

Как запомнить?

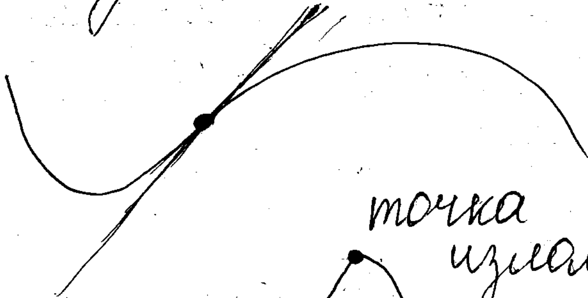


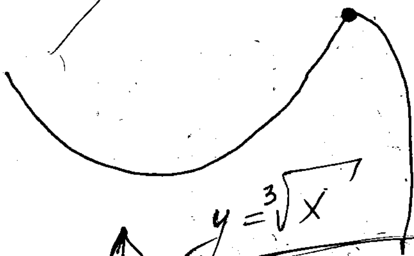
$f''(x) > 0$ $\quad$ $f''(x) < 0.$

Опр Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется **точкой перегиба**, если

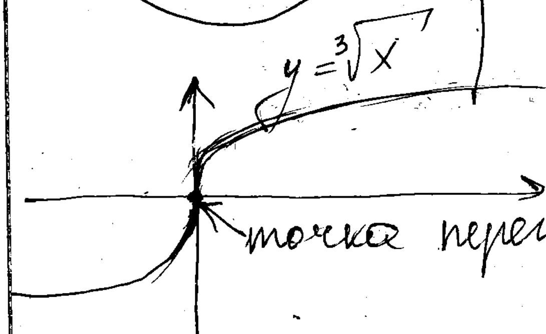
1) Функция $f(x)$ непрерывна в т. x_0;
2) График функции $f(x)$ имеет касательную (возможно вертикальную) в т. x_0
3) при переходе через т. x_0 функция $f(x)$ меняет

выпуклость на вогнутость.

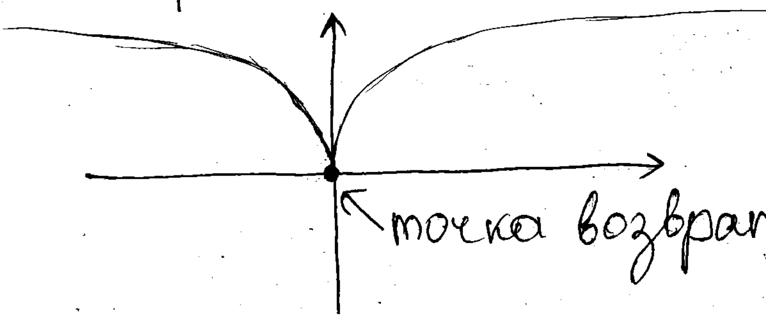




точка излома (нет касат.)



точка перегиба



точка возврата.

Задача $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

$$f'(x) = e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = e^{\operatorname{arctg} x}\left(1+x^2\right)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^2} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^2}\left(1-2x\right)$$

$+ \qquad \frac{1}{2} \qquad -$ знак $f''(x)$

$x = \frac{1}{2}$ - точка перегиба

Задача

$$f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(4x^3 - 12x\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(12x^2 - 12\right) =$$

$$= \left(4x^3 - 12x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(4x^2 - 4\right)$$

$$f''(x) = -\frac{2}{3}\left(4x^3 - 12x\right)^{-\frac{5}{3}}\left(12x^2 - 12\right)\left(4x^2-4\right) + \frac{8x}{\sqrt[3]{\left(4x^3 - 12x\right)^2}}$$

$$=(4x^3-12x)^{-\frac{5}{3}}\left(-\frac{2}{3}(12x^2-12)(4x^2-4)+8x(4x^3-12x)\right)$$

$$=\frac{-2(12x^2-12)(4x^2-4)+24x(4x^3-12x)}{3\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=$$

$$=\frac{96\left(-(x^2-1)^2+x(x^3-3x)\right)}{3\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=$$

$$=32\frac{-x^4+2x^2-1+x^4-3x^2}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}=32\frac{-x^2-1}{\sqrt[3]{(4x^3-12x)^5}}$$

$+ \quad - \quad + \quad -$ — знак $f''(x)$

$\cup \; -\sqrt{3} \; \cap \; 0 \; \cup \; \sqrt{3} \; \cap$

$x=0$ — точка перегиба

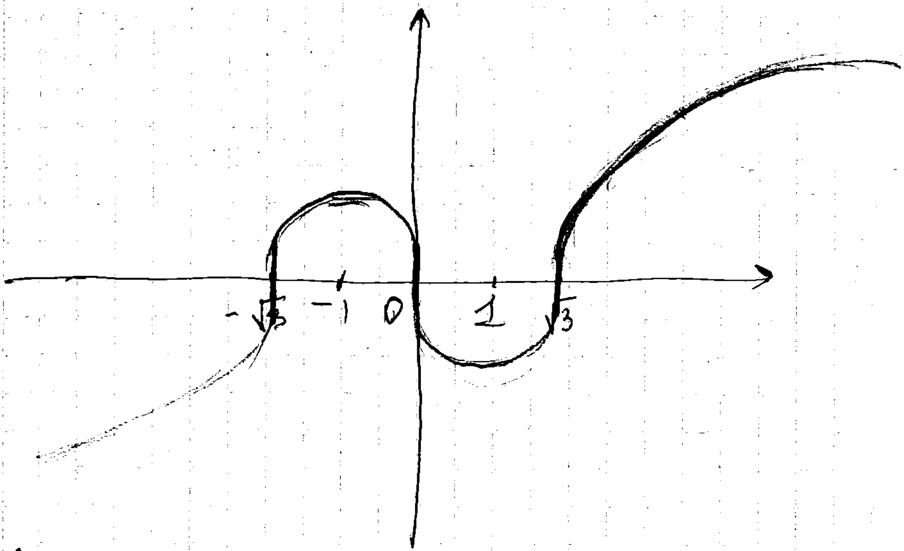
$x=\sqrt{3}$ — точка перегиба

$x=-\sqrt{3}$ — точка перегиба

[redacted] $f'(x)=(4x^3-12x)^{-\frac{2}{3}}(4x^2-4)$

$+ \quad + \quad - \quad - \quad + \quad +$ знак $f'(x)$

$\nearrow \; -\sqrt{3} \; \nearrow \; -1 \; \searrow \; 0 \; \searrow \; 1 \; \nearrow \; \sqrt{3} \; \nearrow$



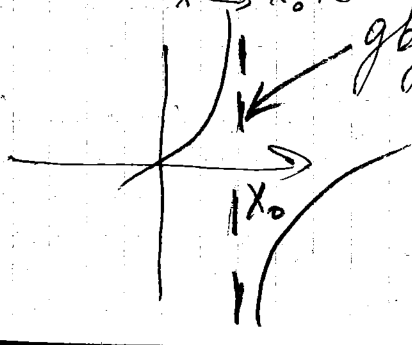
Асимптоты

Асимптота — это прямая, к которой график ф-ии приближается на бесконечности.

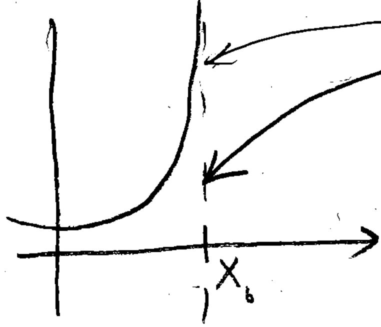
Прямая $x = x_0$ является <u>вертик</u> асимптотой графика ф-ии $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

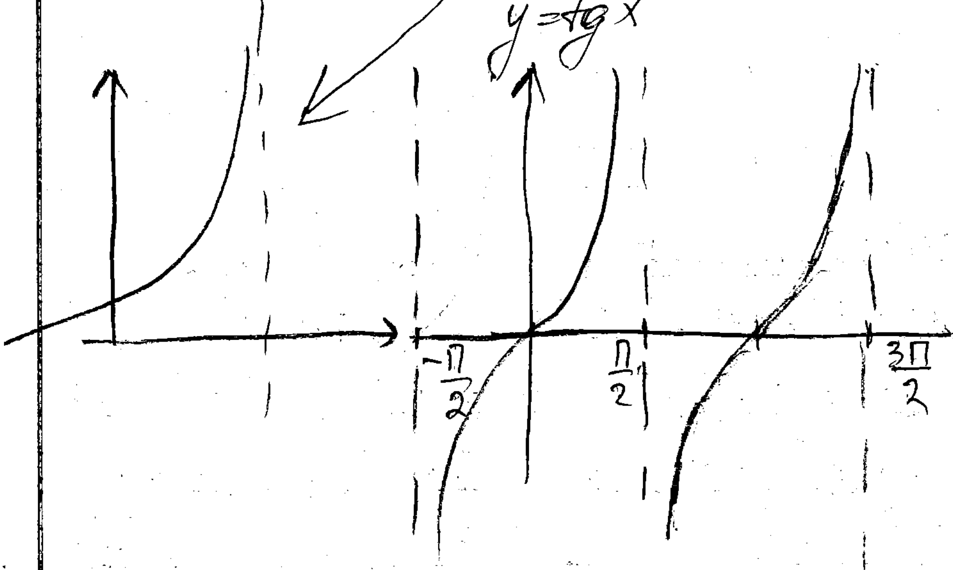
(или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$)

двусторонняя верт. асимптота



односторонняя
верт. асимптота
при $x \to x_0 - 0$



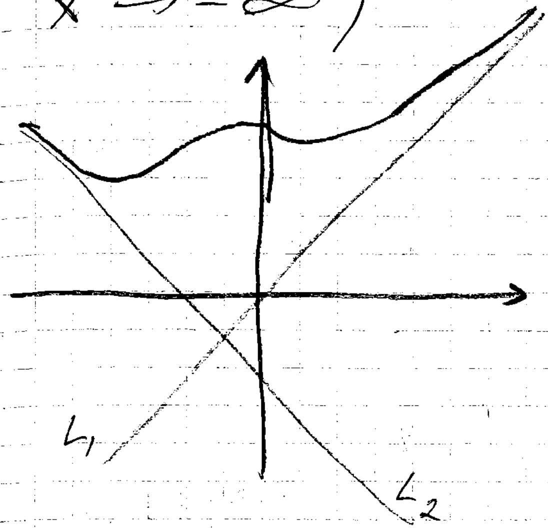


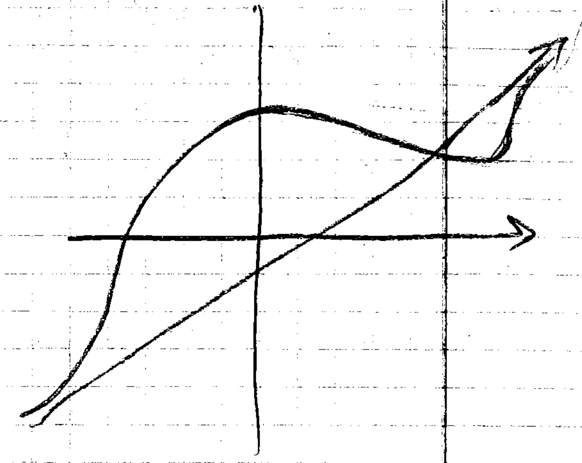
Прямая $y = kx + b$ явл-ся <u>наклонной асимптотой</u> графика ф-ии $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty,\ x \to -\infty)$, если

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim (f(x) - kx) = b.$$

(аналогично в случае $x \to +\infty$

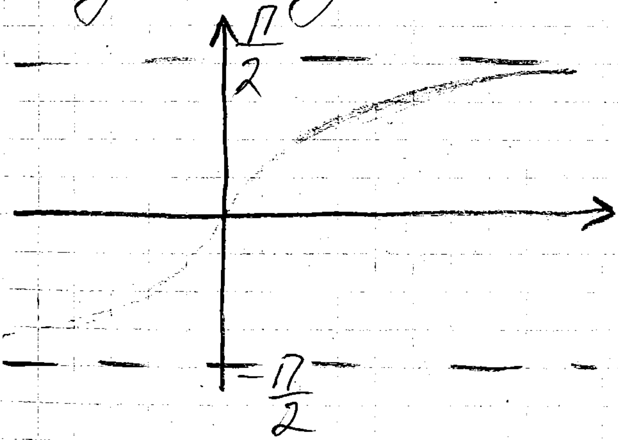
$x \to -\infty$)





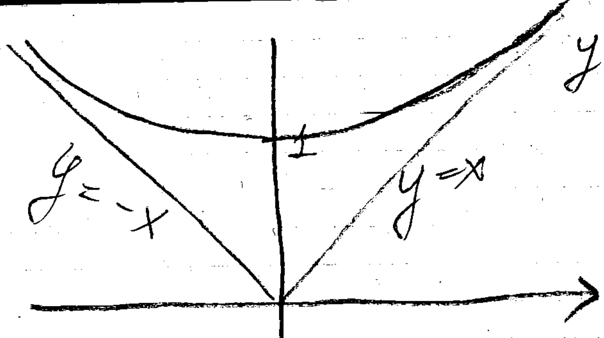
Если $k=0$, то наклонную асимптоту называют также, <u>горизонтальной</u> асимптотой

$y = \operatorname{arctg} x$

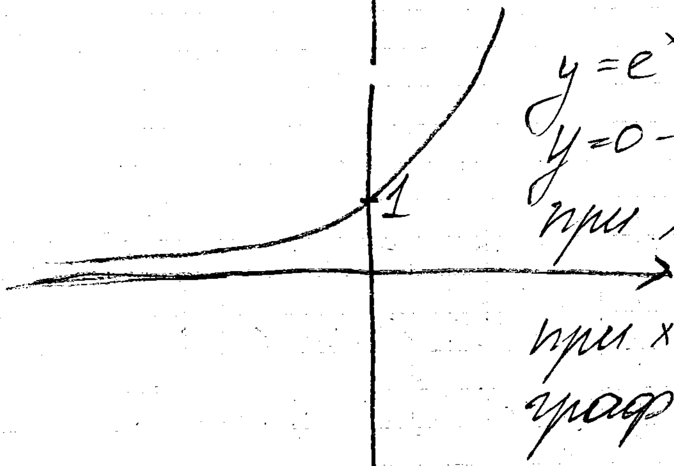


$y=\frac{\pi}{2}$ – гориз. асим. при $x \to +\infty$

$y=-\frac{\pi}{2}$, гориз. асим. при $x \to -\infty$



$y=\sqrt{x^2+1}$



$y=e^x$

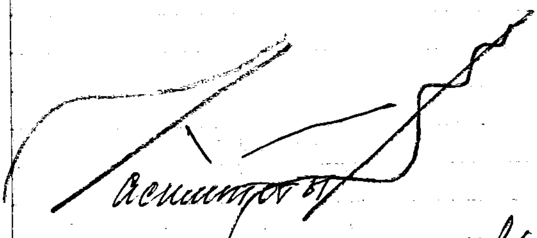
$y=0$ — гориз. ас.

при $x\to-\infty$.

при $x\to+\infty$

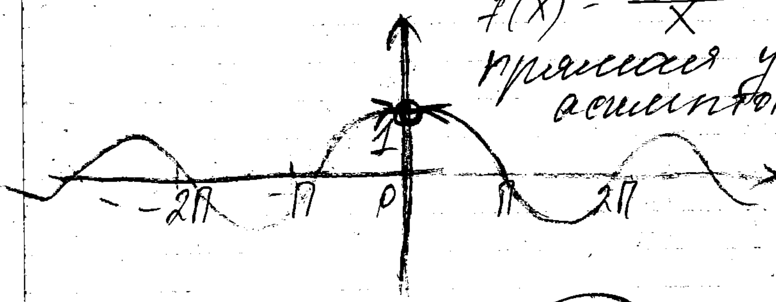
график не имеет

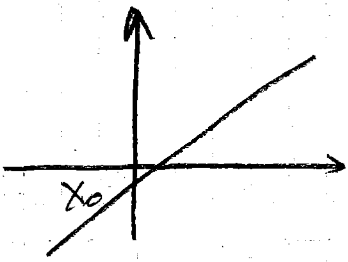
асимптоты



$f(x)=\frac{\sin x}{x}$

прямая $y=0$ — гор. асимптота при $x\to\pm\infty$





$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ - должен получиться кон. предел

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$ - должен пол-ся конечный предел

$y = kx+b$ - наклон асим. при $x\to+\infty$

Задача $f(x)=\sqrt[3]{4x^3-12x}$

Функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, верт. ас. нет.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^3-12x}}{x} =$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\sqrt[3]{4-12/x^2}}{\cancel{x}} = \sqrt[3]{4}$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) =$$

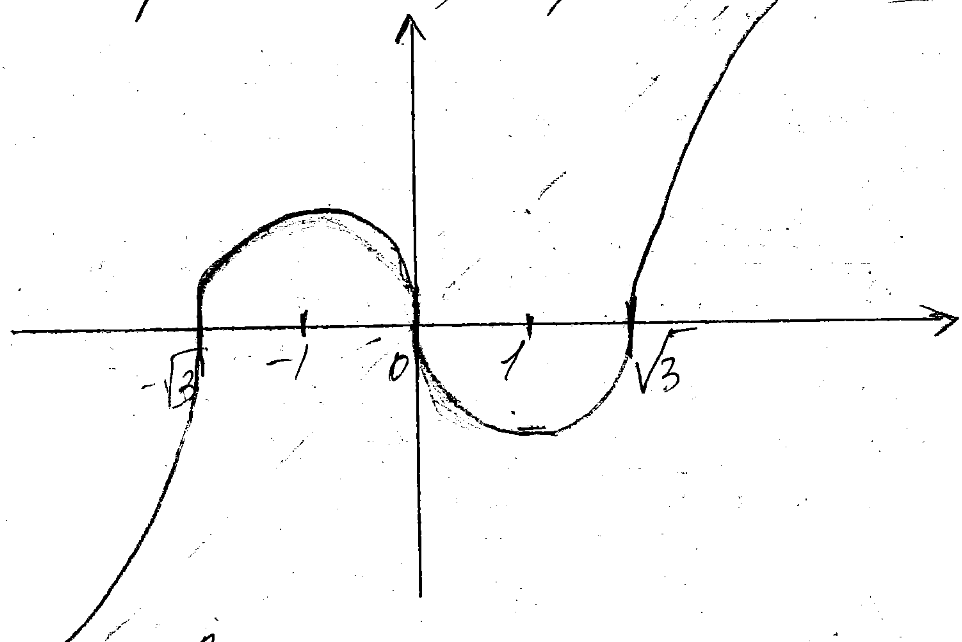
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{4x^3-12x} - \sqrt[3]{4}\,x\right) =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{4x^3}\left(\sqrt[3]{1-\frac{12x}{4x^3}}-1\right)\right) =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^2}}-1\right) = \left[\left(1+\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)\right.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{4}}{x^2} = 0$$

прямая $y = kx + b = \sqrt[3]{4} \cdot x$ - является наклонной асимптотой графика ф-ии $f(x)$ при $x \to \infty$



Задача

$f(x) = x \cdot \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

$e + \frac{1}{x} > 0$

$\frac{ex+1}{x} > 0$

$+ \quad - \quad +$

$-\frac{1}{e} \qquad 0$

350

$$D(f)=\left(-\infty;-\frac{1}{e}\right)\cup(0;+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{e}-0} f(x) = \cancel{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$=\lim_{x\to-\frac{1}{e}-0} x\cdot\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{1}{e}\cdot(-\infty)\right]=+\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ прямая $x=-\frac{1}{e}$ — явл-ся верт. ас. при $x\to-\frac{1}{e}-0$

$$\lim_{x\to0+0} x\cdot \cancel{\lim}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0+0}\frac{-\frac{1}{e+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to0+0}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=0$$

прямая $x=0$ - не явл-ся верт. асимптоты

Ищем накл. асимптоты

$$K=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right)=[\infty\cdot0]=$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}} \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e+\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

прямая $y = x + \frac{1}{e}$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to \infty$

Построение графиков ф-ций.

Задача № 12 из ТР (в-т 16)

Построить гр-к ф-ции

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6}$$

Решение

1) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x + 6}{(x+3)(x-2)}$ *

Множество определения

$$D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$$

2) Функция $f(x)$ не яв-ся четной, не является нечетной, не является периодической

3) Функция $f(x)$ непрерывна при $x \in D(f)$

4) $\lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3+0} \frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{(x+3)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to -3+0} \underbrace{\frac{1}{(x+3)}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{(x-2)}}_{\to \frac{54}{5} > 0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3-0} \ldots = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{(x+3)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2+0} \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{x+3}}_{\to \frac{16}{5} > 0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \ldots = -\infty$

$x = -3$ и $x = 2$ — точки разрыва 2-го рода

Прямые $x = -3$, $x = 2$, вертикальные асимптоты (двусторение)

5) Ищем наклонные асимптоты

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-x+6}{x(x^2+x-6)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}(2-1/x-1/x^2+6/x^3)}{\cancel{x^3}(1+1/x-6/x^2)}=2$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-x+6}{x^2+x-6}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-x+6-2x^3-2x^2+12x}{x^2+x-6}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+11x+6}{x^2+x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}(-3+11/x+6/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x-6/x^2)}=$$

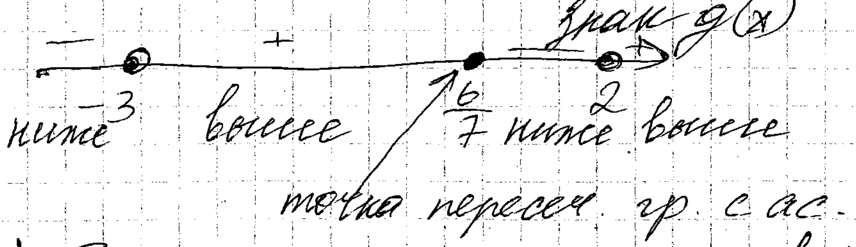
$$=-3$$

Прямая $y=kx+b=2x-3$ - наклонная асимптота ~~на~~ при $x\to\pm\infty$

Рассмотрим разность

$$g(x)=f(x)-(kx+b)=\frac{2x^3-x^2-x+6}{x^2+x-6}-(2x-3)=$$

$$=\ldots=\frac{14(x-\frac{6}{7})}{(x+3)(x-2)}$$ (2) (354)



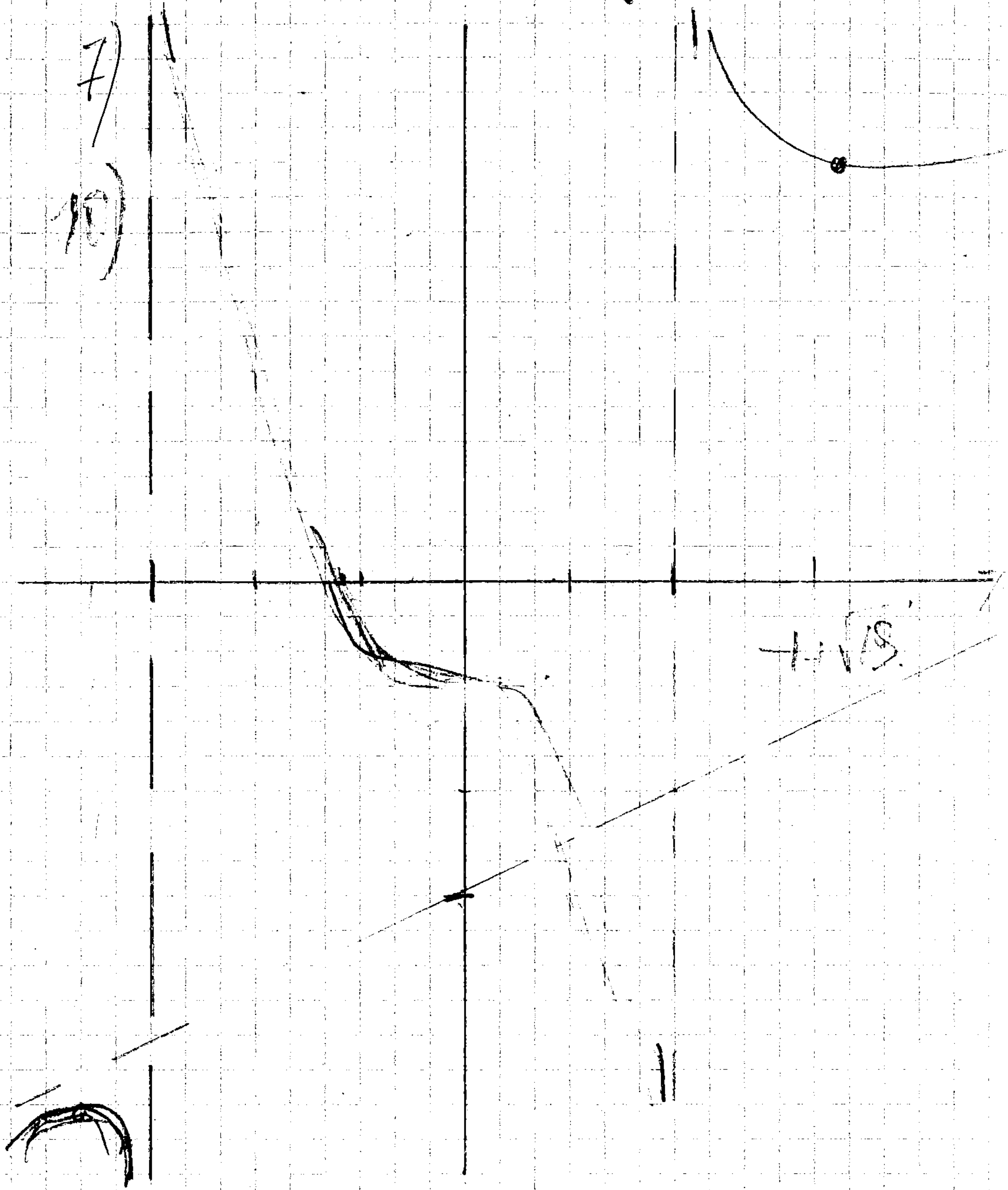
б) График функции $y = f(x)$ пересекает ось Ox в точке $(x_0, 0)$, где $x_0 \approx \ldots$

$$[2x^3 - x^2 - x + 6 = 0]$$

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6}$$

$y = f(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0, -1)$

3 355



4 356

8) $f'(x) = \left(\frac{2x^3-x^2-x+6}{x^2+x-6}\right)' = \ldots =$

$$= \frac{2x^2(x^2+2x-18)}{(x+3)^2(x-2)^2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} + & & - & & - & & - & & - & & + \\ & -1-\sqrt{19} & & -3 & & 0 & & 2 & & -1+\sqrt{19} & \\ \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

$x = -1-\sqrt{19}$ – т. макс

$y = f(-1-\sqrt{19}) \approx -18{,}73$.

$x = -1+\sqrt{19}$ – точка мин.

$f(-1+\sqrt{19}) \approx 7{,}77$.

$x=0$ – стац. точка.

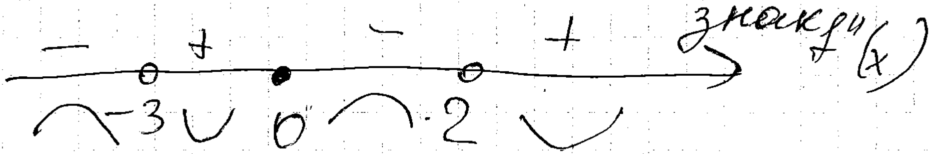
не явл-ся т. экстр.

5 357

9) $f''(x) = 2\left(\dfrac{x^4+2x^3-18x^2}{(x^2+x-6)^2}\right)' =$

$$= 2\,\frac{(4x^3+6x^2-36x)(x^2+x-6)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(x^2+x-6)}(2x+1)(x^4+2x^3-18x^2)}{(x^2+x-6)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \ldots = \frac{4x(7x^2-18x+108)}{(x+3)^3(x-2)^3}$$



$x=0$ – точка перегиба.

$f(0) = \cancel{0}\,-1$. $f'(0)=0$

Семинар 21 (16.12.16)

Задача № 13 из ТР (в-т 13)

Построить график ф-ции

$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-3)^4}$

Решение

1) Множество определения

$D(f) = \mathbb{R}$.

2) $f(-x) = \sqrt[5]{((-x)^2-3)^4} =$

$= \sqrt[5]{(x^2-3)^4} = f(x) \Rightarrow$ функция $f(x)$ является четной.

Функция $f(x)$ не явл-ся периодической

3) Функция $f(x)$ непрерывна при $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-3)^4}$ - суперпозиция непрерывных функций

4) Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет

1 359

5) Ищем накл. асимптоту при $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[5]{(x^2-3)^4}}{x} =$$

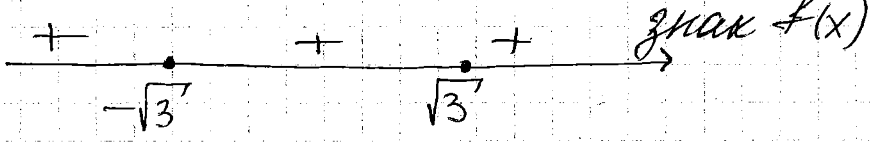
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{8}{5}} \sqrt[5]{\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^4}}{x} = \lim x^{\frac{3}{5}} \sqrt[5]{\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^4} =$$

$= +\infty \Rightarrow$ график ф-ии $f(x)$ не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$.

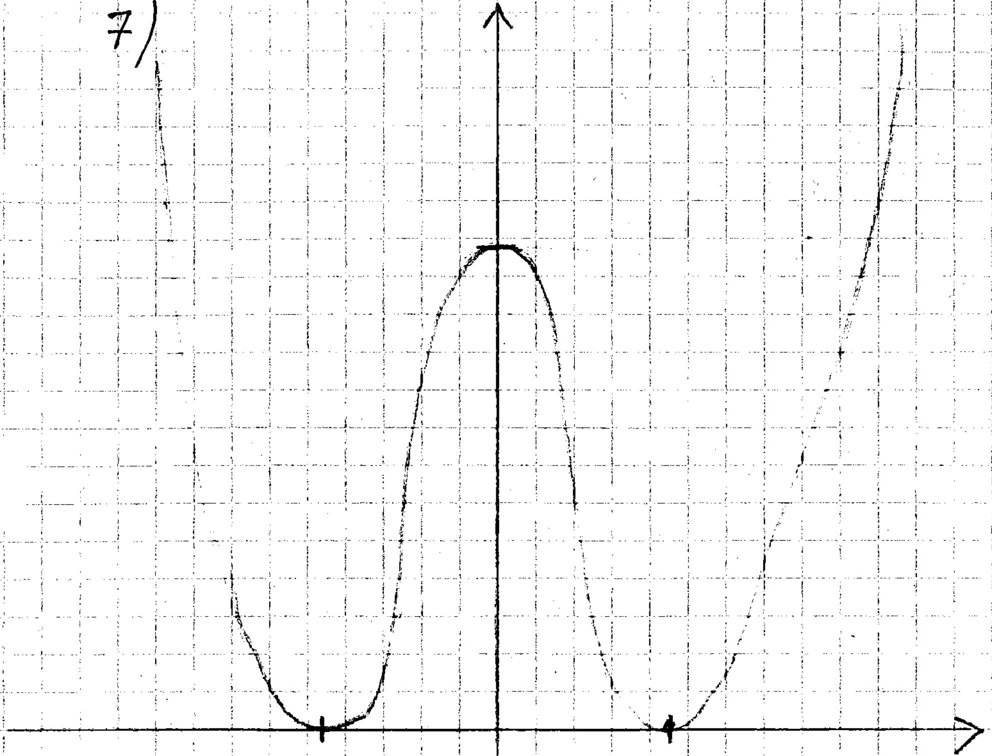
Аналогично при $x \to -\infty$.

6) График функции $f(x)$ пересекает ось Ox в точках $(-\sqrt{3}, 0)$ и $(\sqrt{3}, 0)$.

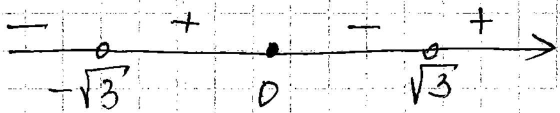
График функции $f(x)$ пересекает ось Oy в точке $(0, \sqrt[5]{81}$



7)



8) $f'(x) = \ldots = \dfrac{8x}{5\sqrt[5]{x^2-3}}$



$x = -\sqrt{3}$ - точка минимума

$x = 0$ - точка максимума

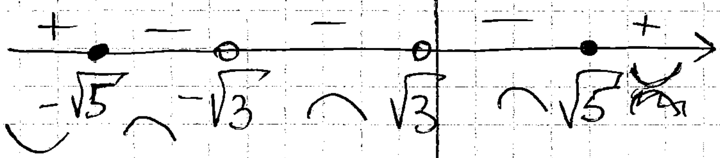
$x = \sqrt{3}$ - точка минимума

3 361

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f'(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}+0} \frac{8x}{5\sqrt[5]{x^2-3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f'(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}-0} \frac{8x}{5\sqrt[5]{x^2-3}} = +\infty$$

9) $f''(x) = \ldots = \frac{24}{25}\,\frac{x^2-5}{\sqrt[5]{(x^2-3)^6}}$

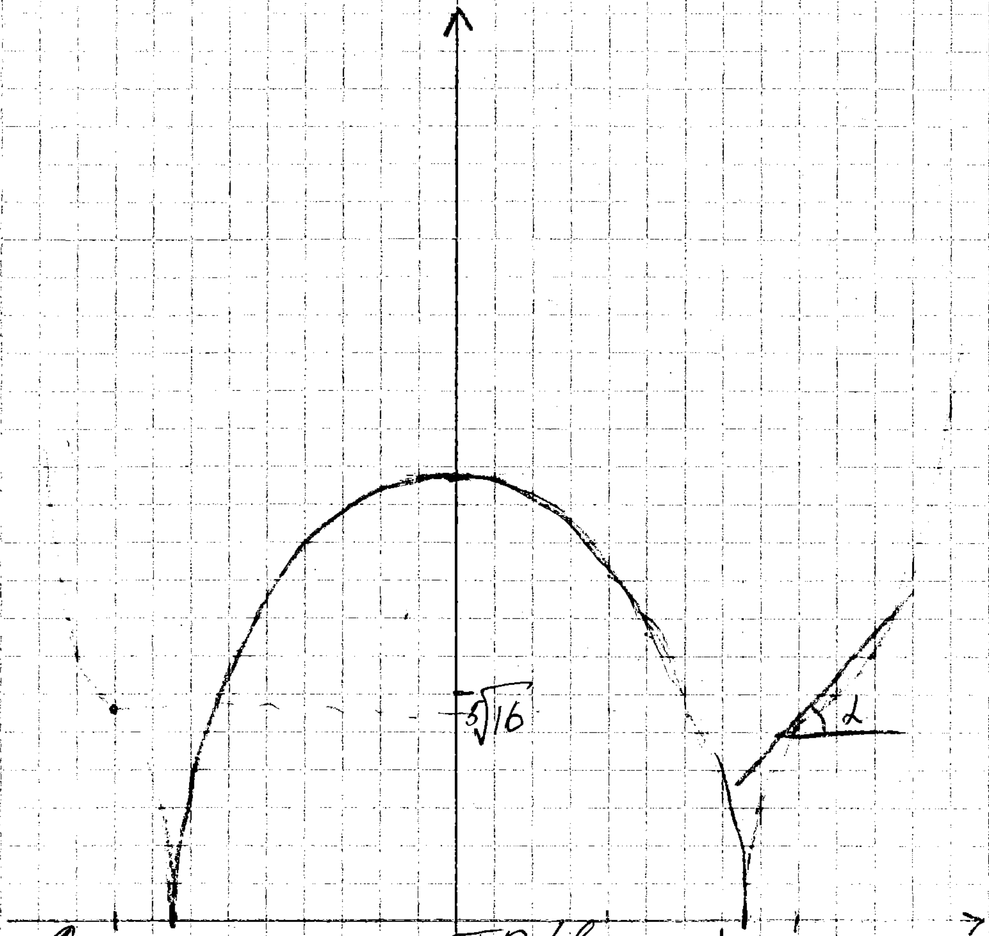


$x = -\sqrt{5}$ – точка перегиба

$f(-\sqrt{5}) = \sqrt[5]{16} = 1,741$

$\cancel{k(\sqrt{5})}$ $f'(\sqrt{5}) = -\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt[5]{2}} \approx -15,572$

$\alpha = \operatorname{arctg} 15$



Задача 14 из ТР (в-т 5)

Построить график функции

$f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ Решение

1) $D(f) = (0,1) \cup (1,+\infty)$

2) Функция $f(x)$ не является четной, не является нечетной, не явл-ся

5 363

5

периодической.

3) Функция $f(x)$ непрерывна при $x \in D(f)$

4) $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim \frac{x}{\ln x} = -\infty$

$x = 1$ - точка разрыва второго рода

Прямая $x = 1$ - вертикальная асимптота

5) Ищем наклонные асимптоты

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{1}{\ln x} = 0$

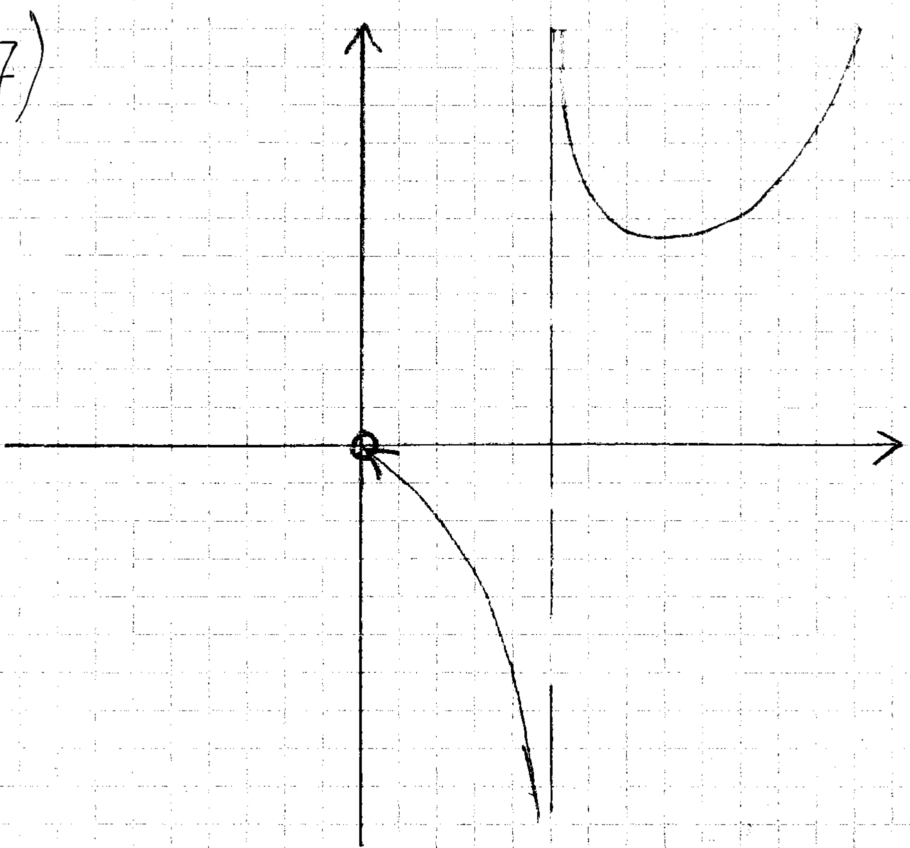
$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) =$

$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x)'}{\ln(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$

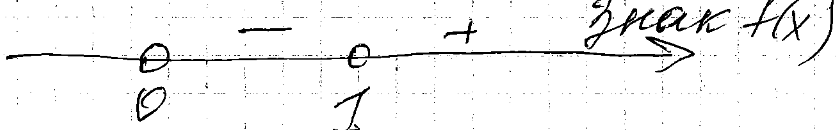
$\Rightarrow$ график не имеет наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ 6 364

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

7)



6) График функции $f(x)$ не пересекает ось Ox и не пересекает ось Oy.



7

8) $f'(x) = \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \ldots = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$

$\underset{0}{\circ} \quad - \quad \underset{1}{\circ} \quad - \quad \underset{e}{\bullet} \quad + \quad$ Знак $f'(x)$

$x = e$ − точка минимума

$f(e) = e$

~~9~~) $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{2\ln x \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{2\ln x} = 0$

$\Rightarrow$ график входит в т. $(0,0)$ горизонтально

9) $f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\right)' = \ldots = \frac{2 - \ln x}{x \ln^2 x}$

$\underset{0}{\circ} \quad - \quad \underset{1}{\circ} \quad + \quad \underset{e^2}{\bullet} \quad -$ Знак $f''(x)$

$0 \cap 1 \cup e^2 \cap$

$x = e^2$ − точка перегиба

$f(e^2) = \frac{e^2}{2}$

$f'(e^2) = \frac{1}{4}$

8   8   366

9 367

Задача

$f(x)=(x-5)e^{\frac{1}{x}}$

1) $\cancel{D(f)=(x-5)}$

$D(f)=(-\infty;0)\cup(0,+\infty)$

2) —

3) Непрерывна на $D(f)$

4) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-5)e^{\frac{1}{x}}=$

$=[-5\cdot(+\infty)]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim(x-5)e^{\frac{1}{x}}=[-5\cdot 0]$

$x=0$ – точка разрыва 2-го рода.

Прямая $x=0$ – вертикальная асимптота при $x\to 0+0$

5) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-5)e^{\frac{1}{x}}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-5/x)e^{\frac{1}{x}}}{1}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$

10 10 368

$$= \lim_{x\to\infty}\left((x-5)e^{\frac{1}{x}} - (x-5) \mp 5\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(x-5)\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) - \lim_{x\to\infty} 5 =$$

$$= \left[e^{\frac{1}{x}} - 1 \sim \frac{1}{x} \right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{x} - 5 = \lim_{x\to\infty}\frac{1-5/x}{1} - 5 =$$

$$= -4.$$

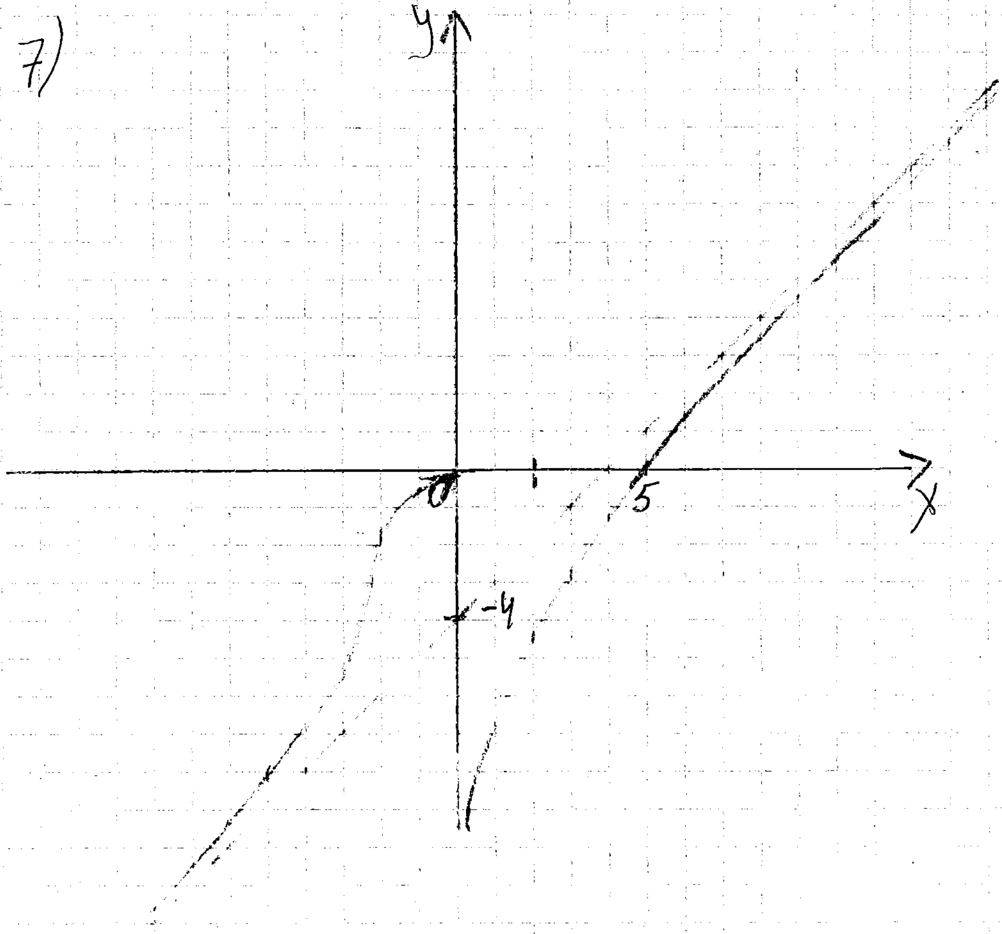
Прямая $y = kx + b = 1x - 4$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$

в) График ф-ии $f(x)$ пересекает ось Ох в точке (5,0).
График ф-ии $f(x)$ не пересекает ось Оу.

11 369

4

7)



12

12 370