КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

ПРОХОРОВ М. Н.

Лекция 1.

Основные понятия:

ПЕРЕМЕННАЯ (величина) – величина, которая при изучении некоторого явления может принимать больше одного значения (в отличии от КОНСТАНТ).

МНОЖЕСТВО – совокупность каких либо объектов произвольной природы.

Все множства, которые мы будем изучать, будут точно определены.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, …Y, Z.

Элементы множества будем обозначать маленькими буквами a, b, c, …y, z.

Символика и операции над множествами: a∈A, A<B, X∪ Y, **C∩M,** $\emptyset < \mathrm{A}$ и т.д.

Кванторы: $\forall, \exists, \nexists, \exists!, \text{и т. д.}$

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ) ЧИСЛА.

Натуральные числа **N**={1,2,3,…}. Целые числа **Z**={…,-2,-1,0,1,2,3,…}.

Рациональные числа **Q**={p/q, где p и q – целые числа, q > 0}.

Теорема. Всякое рациональное число можно представить в виде периодической десятичной дроби.

Доказательство.

Примеры. а) 1/2 = 0,5(0); б) 1/3 = 0,(3); в) 2/7 = 0,(285714).

2-е определение рациональных чисел. Назовём рациональным числом всякую периодическую десятичную дробь.

Теорема. 1-е и 2-е определение рациональных чисел эквивалентны.

Доказательство.

После выбора начала отсчёта и единичного отрезка рациональные числа можно изображать на числовой оси точками. Однако не всякая точка на такой оси соответствует некоторому рациональному числу. Известна

Теорема. Длина диагонали квадрата со стороной равной 1 не равна никакому рациональному числу.

Доказательство 1(алгебраическое).

Доказательство 2(геометрическое).

Тем не менее мы можем любой точке на числовой оси сопоставить некоторую бесконечную десятичную дробь, причём разным точкам будут соответствовать различные дроби. Это является мотивацией для следующего

Определение. Назовём вещественным числом всякую бесконечную десятичную дробь.

Это определение позволяет отождествить точки на прямой с вещественными числами, причём рациональные точки соответствуют периодическим дробям.

Определение. Назовём иррациональным числом всякую непериодическую десятичную дробь.

Пример. Дробь 0,1010010001000010000010………. непериодична.

Арифметические действия с вещественными числами сводятся к таковым для отрезков и подробно рассматривались в курсе математики для средней школы. На практике такие действия выполняются приближённо.

Стабилизирующиеся последовательности.

Пусть $\{x_n\} = \{ x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ последовательность вещественных чисел.

Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей (невозрастающей), если $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$ для любого n.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу) числом M, если $x_n \leq M$ $(x_n \geq M)$ для любого n. Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ неотрицательных десятичных дробей

$a_1 = a_{10},a_{11}a_{12}a_{13}\ldots\ldots$

$a_2 = a_{20},a_{21}a_{22}a_{23}\ldots\ldots$ (*)

$a_3 = a_{30},a_{31}a_{32}a_{33}\ldots\ldots$

……………………………

Будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ стабилизируется к числу

$b = b_0,b_1b_2b_3\ldots\ldots$, если $\forall k \in \boldsymbol{N}\ \exists\ m_k \in \boldsymbol{N}\colon \forall n > m_k \Rightarrow a_{nk} = b_k$.

Теорема. Если неубывающая последовательность десятичных дробей (*) ограничена сверху числом *M,* то она стабилизируется к некоторому вещественному числу *b.*

Доказательство.

Основные свойства действительных чисел.

1. Свойства порядка.
2. Свойства арифметических действий.
3. Архимедово свойство $\forall c \in \boldsymbol{R}_+ \exists n \in \boldsymbol{N}\colon n > c$.
4. Неравенства $|x+y| \le |x|+|y|$, $|x-y| \ge ||x|-|y||$.
5. Любая неубывающая ограниченная последовательность $\{a_n\}$ имеет предел. (Это свойство доказывается чуть позже и, фактически, следует из предыдущей теоремы).

Определение отрезка, интервала, окрестности точки.

Счётность множества рациональных чисел. Несчётность множества вещественных чисел.

Два множества *A* и *B* называются эквивалентными (равномощными) , если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Записывают это $A \sim B$.

Множество A называется счётным, если A равномощно множеству натуральных чисел, $A \sim \boldsymbol{N}$.

Теорема. Множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел счётно.

Доказательство.

Теорема. Множество $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел несчётно.

Доказательство.

Лекция 2.

Опрделение последовательности, способы задания оследовательности.

В известном рассуждении парадокса Зенона «доказывается» невозможность для Ахиллеса догнать черепаху, движущуюся значительно медленнее него.

Если предположить, что скорость Ахиллеса равна 1, скорость черепахи q, а расстояние между ними равно 1, то легко получить хорошо известную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, вычислив расстояние, которое должен пройти Ахиллес, чтобы догнать черепаху.

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

Если обозначить $a_n=1+q+q^2+\ldots+q^n$, то мы получим последовательность $\{a_n\}$, имеющую «пределом» число $\frac{1}{1-q}$.(Обсуждение)

Определение. Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при n стремящимся к бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n, зависящее от ε, такое, что для любого натурального числа m, большего числа n, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Это же определение в кванторах:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}: \forall m \in \boldsymbol{N}, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - A| < \varepsilon.$$

Записывается это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

Замечание 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A.$

Замечание 2. При вычислении предела последовательности возникают 2 проблемы- вычисление **значения** А предела и доказательство того, что число А **является** пределом данной последовательности.

Примеры. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; *б)* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$; в) всякое действительное число является пределом последовательности его *последовательных приближений с точностью до n-го знака после запятой*.

Следовательно всякое вещественное число есть предел последовательности рациональных чисел. Поэтому говорят, что множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел всюду плотно в множестве $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел.

Пусть $U\varepsilon(A) = \{x \in \boldsymbol{R}\colon |x - A| < \varepsilon\}$ – ε-окрестность точки *A*. Тогда определение предела выглядит так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \iff \forall_{U_\varepsilon(A)}\ \exists_{n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}}\colon \forall_{m>n_\varepsilon} \Rightarrow a_m \in U_\varepsilon(A)$.

Определение. Назовём окрестностью $U(A)$ точки A произвольное подмножество вещественных чисел, содержащее множество $U\varepsilon(A)$ для некоторого ε>0.

Очевидно, что если $U(A)$ – произвольная окрестность точки A, то определение предела эквивалентно следующему:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \iff \forall_{U(A)}\ \exists_{n_{U(A)} \in \boldsymbol{N}}\colon \forall_{m>n_{U(A)}} \Rightarrow a_m \in U(A). \qquad (**)$$

Последнее определение также эквивалентно следующему: число A есть предел последовательности $\{a_n\}$, если вне любой окрестности точки A содержится конечное число членов последовательности.

Пример. Последовательность $a_n = (-1)^n$ *не имеет предела.*

Теорема. Если существует предел последовательности, то он единстве**нный.**

Доказательство.

Будем говорить, что последовательность **сходится,** если она имеет предел.

Теорема. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство.

Теорема. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к отличному от нуля пределу *A,* то существует такое $N \in \boldsymbol{N}$, что $|a_n| > \frac{A}{2}$, при $n>N$.

Доказательство.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, причём $a_n > b_n$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$, то $\mathrm{A} \geq B$.

Доказательство.

Следствие. Если $a_n \in (c, d)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in [c, d]$.

Теорема (о двух милиционерах). Если переменные $a_n \leq b_n$ сходятся к одному пределу и $a_n \leq c_n \leq b_n$, то и c_n сходится к тому же пределу.

Доказательство.

Задача. Доказать, что если Δ_n , то $\lim\limits_{n\to\infty} |\, a_n| = |\mathrm{A}|$.

Теорема. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, где A , B ∈ $\boldsymbol{R}$**,** тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\mathrm{A} + \beta B$, где α,β∈ $\boldsymbol{R}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\, b_n = AB$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, если *B≠0.*

Доказательство.

Примеры.

Определение бесконечно малых и бесконечно больших величин.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall R > 0\ \exists n_R \in \boldsymbol{N}$: $\forall m \in \boldsymbol{N}, m > n_R \Rightarrow \left|x_m\right| > R$. В этом случае пишем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Если последнее неравенство $x_m > R$, то пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Если последнее неравенство $x_m < -R$,то пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Задача. Если $\{x_n\}$ бесконечно большая и $x_n \neq 0$, то $\{\frac{1}{x_n}\}$ – бесконечно малая.

Примеры.

Определение. Последовательность называется монотонной, если она или неубывает, или невозрастает, или строго убывает, или строго возрастает.

Теорема. Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

Доказательство.

Теорема. Последовательность $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ строго возрастает и ограничена.

Доказательство.

Определение. Числом «e» называется предел $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Примеры.

Лекция 3.

Теорема (принцип вложенных отрезков). Пусть $\Delta_n = [\, a_n , b_n \,]$ – последовательность вложенных отрезков, $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0.$

Тогда существует и единственная точка $c \in \boldsymbol{R}$, принадлежащая всем отрезкам

Δ_n, $n = 1,2,3, \dots$.

Доказательство.

Задача. Будет ли верна теорема, если отрезки заменить интервалами. Какое свойство отрезка здесь используется?

Определение. Пусть X – ограниченное сверху (снизу) множество. Точной верхней (нижней) гранью множества X называется такое вещественное число T, что :

а) любой элемент $x \in X$ не больше (не меньше) чем T;

б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in \boldsymbol{X}$: $T - \varepsilon < x_\varepsilon \le T$ ($T \le x_\varepsilon < T + \varepsilon$).

Будем обозначать это $T = \sup X$ ($T = \inf X$).

Примеры.

Теорема. Всякое ограниченное сверху (снизу) множество вещественных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство.

Задача. Пусть Х и У ограниченные сверху множества вещественных чисел. Доказать, что sup (Х+У)=sup Х + sup У.

Если задана последовательность $\{ x_n \}_{n=1,2,3,\dots}$ и бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$, то можно определить новую последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,3....}$, которая называется подпоследовательностью последовательности $\{ x_n\}$.

Теорема (Больцано – Вейерштрасс). Из всякой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному числу.

Доказательство.

Задача. Доказать, что из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному числу или к бесконечности.

Пусть $\{x_{n_k}\}$ некоторая сходящаяся подпоследовательность

последовательности $\{ x_n\}$. Число $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ называется **предельной точкой последовательности**.

Примеры.

Задача. Пусть $\{a_n\}$ произвольная последовательность. Построить последовательность $\{ x_n\}$, множество предельных точек которой совпадает с множеством значений последовательности $\{a_n\}$.

Определение. Пусть множество $A\subset \boldsymbol{R}$ суть множество всех предельных

точек последовательности $\{ x_n\}$. Верхним (нижним) пределом последовательности $\{ x_n\}$ называется число $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ = *sup A* или +∞ ,если *sup A* не существует($\underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ = *inf* A или -∞ , если *inf A* не существует).

Задача. Доказать, что верхний (нижний) предел является предельной точкой последовательности.

Теорема. Существует предел последовательности $\{ x_n\}$ ⇔ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$ $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство.

Определение. Последовательность $\{ x_n\}$ называется **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}: \forall k, m \in \boldsymbol{N}, k > n_\varepsilon\ , m > n_\varepsilon \Rightarrow \left| x_m - x_k \right| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). Последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной если и только если существует предел $a \in \boldsymbol{R}$ последовательности $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Доказательство.

Замечание. Доказанные нами свойства вещественных чисел:

а) существования предела у фундаментальной последовательности;

б) существование точной верхней грани у ограниченного множества;

в) принцип вложенных отрезков;

г) существование предела у монотонной ограниченной последовательности,

на самом деле эквивалентны. Поскольку мы уже доказали цепочку г)⇒в)⇒б)⇒а) то для доказательства такой эквивалентности достаточно решить следующую задачу:

Задача. Доказать, что из а) следует г).

Числовое множество, обладающее кроме всех стандартных свойств чисел свойствами а)-г) называется **полным.** Множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ *не является полным, а множество* $\boldsymbol{R}$ **полное.** Само построение вещественных чисел можно определить как **«пополнение»** множества рациональных чисел всеми «пределами» фундаментальных последовательностей.

Оказывается, такое пополнение множества $\boldsymbol{Q}$ не единственно. Если для фиксированного простого числа $p \in \boldsymbol{N}$ определить «*p*-адический» модуль произвольного рационального числа $\frac{q}{r} \in \boldsymbol{N}$ формулой $|\frac{q}{r}|_p = p^{-k}$, где число k определяется из единственного представления числа $\frac{q}{r}$ в виде $\frac{q}{r} = p^k\frac{s}{t}$, где s и t целые числа, взаимно простые с числом *p,* то в результате пополнения рациональных чисел с так определённым «*p – адическим»* расстоянием получаются *p-адические числа* $\boldsymbol{Q_p}$*,* отличные от вещественных чисел и все различные для различных простых ***p.***

Лекция 4.

Повторение школьного курса. Определение числовой функции, область определения и множество значений числовой функции, арифметические операции над числовыми функциями. Задание функций формулами. Суперпозиция функций и определение сложной функции. График числовой функции. Возрастающие и убывающие функции. Чётные и нечётные функции. Неявное задание функции. Однозначные и многозначные функции. Параметрическое задание функций. Функции нескольких вещественных переменных. Примеры.

Определение предела (по Коши). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности конечной точки x_0 за исключением, может быть, самой точки **. Число *a* называется пределом функции** $f(x)$ в точке x_0**,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, зависящее от ε **,** что для всех *x***,** для которых **,** выполняется неравенство $\left|x \quad - x_0\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|f(x) - a\right| < \varepsilon$. Или кратко:

$$a = \lim_{x\to x_0} f(x) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Коши}} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \colon \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\ .$$

Предел функции обозначается так: $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Или $f(x) \to a$ при $x \to x_0$ **.**

Односторонние пределы в точке. Левый предел:

$$a = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \colon \forall x, 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\ .$$

Правый предел:

$$a = \lim_{x\to x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 \colon \forall x, 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\ .$$

Левый и правый пределы обозначают $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$, $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$.

Теорема. $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \exists\ f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \colon f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Доказательство.

Конечные пределы в бесконечно удалённых точках определяются так:

$A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_\varepsilon>0: \forall x, |x|>R_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

$A=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_\varepsilon>0: \forall\ x>R_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

$A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists R_\varepsilon>0: \forall x, x<-R_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

Обозначения, соответственно $f(\infty)=A, f(+\infty)=A, f(-\infty)=A$.

Определим проколотую δ −окрестность конечной точки ($\delta>0$), как

$\dot{U}(a,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, 0<|x-a|<\delta\}$, $\dot{U}(a+0,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, 0<x-a<\delta\}$, $\dot{U}(a-0,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, 0<a-x<\delta\}$, а окрестность бесконечности (которая всегда является проколотой), как

$\dot{U}(\infty,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, \frac{1}{\delta}<|x|\}$, $\dot{U}(+\infty,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, \frac{1}{\delta}<x\}$,$\dot{U}(-\infty,\delta)=\{x\epsilon\boldsymbol{R}, x<-\frac{1}{\delta}\}$. Тогда определение предела функции по Коши выглядит так:

$A=\lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0: \forall x\in\dot{U}(a,\delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x)\in U(A,\varepsilon).$

Задача. Написать определение следующих пределов $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Примеры.

Определение предела функции по Гейне. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Тогда

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Гейне}} \forall\{x_n\}, x_n\in\dot{U}(a), \lim_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

Теорема. Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство.

Теорема. Если $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, где A −конечное число, то $\exists\ \dot{U}(a), M>0: \forall x\in\dot{U}(a) \Rightarrow |f(x)|<M$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, где $A \neq 0$, то $\exists\, \dot{U}(a)$: $\forall x \in \dot{U}(a) \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$. Если при этом $A > 0$, то $f(x) > \frac{A}{2}$, если $A < 0$, то $f(x) < \frac{A}{2}$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ и $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности $\dot{U}(a)$, то $A \leq B$.

Доказательство.

Теорема (о двух милиционерах). Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, причём $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности $\dot{U}(a)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} h(x) = A$.

Доказательство.

Теорема (критерий Коши существования предела).

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}(a, \delta_\varepsilon) \colon \forall\, x', x'' \in \dot{U}(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon$$

при условии, что $f(x)$ опеделена в некоторой окрестности точки *a.*

Доказательство.

Теорема. Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ конечные пределы. Тогда

а) $\lim\limits_{x \to a} \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) = \alpha A + \beta B$, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$**;**

б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = AB$;

в) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

Доказательство.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Теорема. Пусть функции $f(x), g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки A, тогда если а) $|f(x)| > M > 0$, а $\dot{U}(a)$, причём $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ в $\dot{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

б) $|f(x)|< M$ в $\dot{U}(a)$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Докаательство.

Следствие. а) если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$ в $\dot{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \infty$;

б) если $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Примеры.

Лекция 5, 6.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если определить приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx как $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, то данное определение эквивалентно равенству $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

На языке "$\varepsilon - \delta$": $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$: $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Примеры. Функции *y = C, x, sin x, ln x* – непрерывны.

Для непрерывных функций свойство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$ показывает,

что знаки предела и функции перестановочны или «можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции».

Теорема. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные в точке функции x_0 функции. Тогда $\alpha f(x)$ + $\beta g(x)$, $f(x)\ g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $g(x_0) \neq 0$ - непрерывны.

Доказательство.

Теорема. Пусть $g(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x_0) = a$, функция $f(t)$ непрерывна в точке a, тогда сложная функция $\Phi(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. а)Если $f(x)$ непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности $U(a)$;

б) Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$ точки a, в которой $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$, если $f(a) > 0$ и $f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$, если $f(a) < 0$, для любого $x \in U(a)$.

Доказательство.

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна в точке a слева (справа), если $f(a-0)=f(a)$. $\quad (f(a+0)=f(a))$.

Следовательно, функция непрерывна в точке, если и только если она непрерывна в ней и слева и справа: $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$.

Определение. Если функция $f(x)$ имеет конечный и правый и левый пределы в точке a и эти пределы не совпадают, то точка a называется точкой разрыва 1-го рода. В этих случаях функция может быть не определена в точке a, однако терминология сохраняется.

Если у функции не существует правого или не существует левого предела в точке a или не существует и правого и левого предела или же хотя бы один из них бесконечен, то говорят, что a -точка разрыва 2-го рода.

Примеры и рисунки.

Задача. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на отрезке не более, чем счётно.

Функции, непрерывные на отрезке.

Определение. Функция называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Теорема. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена.

Доказательство.

Теорема (Вейерштрасс). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка с $\in [a,b]$, такая, что $f(c)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и, существует точка $d\in[a,b]$, такая, что $f(d)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке$[a,b]$, $A=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $B=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то для любого значения С $\in [A,B]$ существует $c\in[a,b]$, такое, что $f(c)=C$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке$[a,b]$, строго возрастает на нём и $f(a)=A,\ f(b)=B$. Тогда $E_f=[A,B]$ и существует функция $f^{-1}(y)$ обратная для $f(x)$, непрерывная и строго возрастающая на $[A,B]$. (E_f- множество значений $f(x)$.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве $M\subset \boldsymbol{R}$ если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon>0$: $\forall x', x'' \in M, \left|x'-x''\right|<\delta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$.

Задача. Функция $y=\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на полуинтервале (0,1].

Теорема (Кантор). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на нём.

Доказательство.

Определение и свойства элементарных функций $\boldsymbol{x^n}, \boldsymbol{a^x}, \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{sin\ x}, \boldsymbol{cos\ x}, \boldsymbol{tg\ x}, \boldsymbol{arcsin\ x}, \boldsymbol{arccos\ x}, \boldsymbol{arctg\ x}.$

Замечательные пределы.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Доказательство.

Следствие. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

Доказательство.

Следствия. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

Примеры.

Эквивалентность функций. Порядок переменной.

Определение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a, и $g(x) \neq 0$ в $\dot{U}(a)$. Будем говорить, что $f(x)$ есть «о-малое» от $g(x)$ при $x \to a$ и записывать как $f(x) = o(g(x))$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (*)$$

(Здесь a – конечное число или $+\infty$ или $-\infty$ или ∞).

Примеры. а) $x^2 = o(x)$, $1 - \cos x = o(x)$ при $x \to 0$, $x = o(x^3)$ при $x \to \infty$.

б) равенство $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to$ a определяет бесконечно малую функцию $\alpha(x)$, поскольку $\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{1} = 0$.

Замечание. Равенство (*) можно записать в виде $f(x) = \alpha(x) g(x)$, *где* $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = o(1)$ - бесконечно малая при $x \to$ a.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ из (*) являются бесконечно малыми, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка чем $g(x)$,а если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции, то говорят, что $f(x)$ – бесконечно большая более низкого порядка, чем $g(x)$ или, что $g(x)$ бесконечно большая более высокого порядка, чем $f(x)$.

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются «эквивалентными» при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad \text{, записываем как } \alpha(x) \sim \beta(x) \qquad (**).$$

Теорема. Отношение (**) есть отношение эквивалентности, то есть симметрично, рефлективно и транзитивно.

Доказательство.

Теорема. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$ если и только если $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ при $x \to a$.

Доказательство.

Теорема. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$ то выполняются равенства:

а) $\lim_{x\to a} \gamma(x)\alpha(x) = \lim_{x\to a} \gamma(x)\beta(x)$ и б) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$, понимаемые так, что если пределы справа для некоторой функции $\gamma(x)$ существуют, то существуют и пределы слева и они равны.

Примеры. а) $\sin x\sim\tan x\sim x$; б) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

Определение. Будем говорить, что $\alpha(x)$ имеет на множестве Y порядок $\beta(x)$, и записывать это, как $\alpha(x)=O(\beta(x))$ на Y, если $|\alpha(x)|\leq \mathrm{C}|\beta(x)|$,

для всех $x\in Y$, где C– не зависящая от x константа.

Пример. Функция $f(x)$ ограничена на $Y \Leftrightarrow f(x)=\mathrm{O}(1)$ на Y.

Лекция 7.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Производной от функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента функции: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. (*)

Также применяются обозначения $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$.

Значение производной может быть как конечным, так и равным $\pm\infty$ или ∞.

Не для всякой функции в данной точке $x \in \boldsymbol{R}$ существует производная.

Определение. Правой производной в точке x называется предел:

$f'(x+0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Соответственно левой производной – предел

$f'(x-0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a,b]$, если она имеет производную во всех внутренних точках отрезка, правую производную в точке a и левую производную в точке b.

Замечание. Существование производной в точке x эквивалентно существованию односторонних производных и равенству $f'(x+0) = f'(x-0)$. Будем также говорить в этом случае, что функция дифференцируема в точке x.

Пример. $f(x) = |x|, x_0 = 0$.

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в x.

Доказательство.

Физический смысл производной: мгновенная скорость, линейная плотность, сила тока.

Геометрический смысл производной функции $f(x)$в точке x – тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x, f(x))$.

Рисунок.

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Примеры.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, тогда

а) $(Af(x) + Bg(x))' = Af'(x) + Bg'(x)$;

б) $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$;

в) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство.

Производные элементарных функций.

Теорема.

а) $(x^n)' = nx^{n-1},\ n = 0,1,2,3,\dots$;

б) $(\sin x)' = \cos x$;

в) $(\cos x)' = -\sin x$;

г) $(tg\ x)' = \frac{1}{cos^2 x},\ (ctg\ x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$;

д) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

Доказательство.

Производные сложной и обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y = \varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке y, то сложная функция $F(x) = f(\varphi(x)\,)$ имеет производную в точке x и $F'(x) = f'(y)\ \varphi'(x)$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Пусть функция $y = \varphi(x)$ имеет производную, отличную от нуля в точке x, непрерывна и строго возрастает в некоторой окрестности $U(x)$ точки x. Тогда обратная к $\varphi(x)$ функция $x = \varphi^{-1}(y) = g(y)$ также имеет производную, которая в соответствующей точке y определяется равенством

$$g'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство.

Теорема (производные элементарных функций).

а) $(a^x)' = a^x \ln a$;

б) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(arcctg\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$;

г) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

д) $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)})$. (логарифмическое дифференцирование);

е) $sh'x = ch\, x$; $ch'x = sh\, x$; $th'x = \frac{1}{ch^2 x}$; $cth'x = \frac{-1}{sh^2 x}$;

ж) $Arsh'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, где $Arsh\, x$ - функция, обратная к функции $sh\, x$.

Доказательство.

Теорема. Если функция $f(x)$ – чётная (нечётная) на $[a, b]$, то $f'(x)$ - нечётная (чётная).

Лекция 8.

Определение. Функция x называется дифференцируемой в точке x_0**,** если существует окрестность $U(x_0)$, такая, что $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$, где A не зависит от Δx, а зависит только от x_0.

Теорема. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x если и только если существует конечная производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x и в этом случае $A = f'(x)$.

Доказательство.

Замечание. Принято называть нахождение производной функции – дифференцированием функции.

Определение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x , тогда главная линейная часть $f'\big(f(x)\big)\Delta x$ приращения $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ функции называется дифференциалом функции и обозначается $df(x) = f'(x)\Delta x$ **.**

Замечание. Дифференциал независимой переменной x не зависит от x, а только от Δx, $dx = x$, для функции $f(x)$ отличной от $f(x)$, дифференциал зависит и от x и от Δx.

Замечание. $dx = \Delta x$ **,** поэтому дифференциал записывают так $df(x) = f'(x)dx$**.**

Замечание. В силу предыдущего замечания для производной функции $y' = f'(x)$ используются следующие обозначения $y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала.

Теорема. а) $d(u \pm v) = du + dv$;

б) $d(uv) = u'dv + v'du$;

в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Доказательство.

Приближённое вычисление значения функции:

$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$.

Примеры.

Производные высшего порядка.

Если производная функции $f'(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки x, то может существовать производная этой функции $(f'(x))'$, которая называется второй производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x) = f^{(2)}(x) = \left(f'(x)\right)'$. По индукции можно определить n-тую производную.

Определение. Производной n-того порядка функции $f(x)$ называется производная (n-1)-ой производной функции $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Примеры.

Дифференциалы высшего порядка.

Аналогично определению n-той производной функции определяется n-тый дифференциал или дифференциал n-того порядка функции $d^n f(x)$.

Определение. $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$.

А) Предположим, что x независимая переменная, т.е. не является сама функцией некоторой другой переменной. Тогда, если рассмотреть $dx = \Delta x$

,как функцию от x, то она от x не зависит и, значит, $d(dx) = d(\Delta x) = 0$.

Следовательно

$$d^2 f(x) = d\big(df(x)\big) = d(f'(x)dx) = df'(x)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx.$$

Аналогично, $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx$.

Б) Пусть теперь x зависимая переменная, т.е. является сама функцией некоторой другой переменной $x = x(t)$. Тогда формула для первого дифференциала функции $y = f(x(t))$ имеет вид

$$dy = y'_x dx = y'_x x'_t dt = y'_t dt$$

И не претерпевает изменений. Это свойство называется инвариантностью 1-го дифференциала. Однако уже для 2-го дифференциала имеем:

$$d^2 y = y''_x dx^2 + y'_x d^2 x, \text{ где второе слагаемое ненулевое, } d^2 x \neq 0.$$

Примеры.

Теорема. Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически: $\left.\begin{matrix} y = y(t) \\ x = x(t) \end{matrix}\right\} t \in [a, b]$

где функция $x(t)$ обратима. Тогда $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Доказательство.

Пример. $y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$.

Лекция 9.

Определение. Точка $a \in \boldsymbol{R}$ называется точкой локального максимума (минимума) для функции $f(x)$,если существует такая окрестность $U(a)$ точки a **,** что $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) для всех $x \in U(a)$. Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума функции.

Примеры.

Теорема (Ферма). Если функция $f(x)$ имеет локальный экстремум и производную в точке a, то $f'(a) = 0$.

Доказательство.

Теорема (Ролля). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Замечание. Теорема верна и для интервала (a, b) если только $f(a+0) = f(b-0)$.

Теорема (Коши). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ во всех точках интервала (a, b)**,** тогда существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство.

Теорема (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то существует точка $c \in (a, b)$, такая, что $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Доказательство.

Следствие (формула конечных приращений). В предыдущих обозначениях $f(b) - f(a) = (b-a)f'(a + \theta(b-a))$ для некоторого $\theta \in (0,1)$ или

$$f(x + \Delta x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x \textbf{ .}$$

Примеры.

Теорема. Если функция $f'(x) \geq 0$ непрерывная на отрезке $[a, b]$, во всех точках интервала (a, b) имеет $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$), то функция $f(x)$ неубывает (строго возрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Если $f'(x) \equiv 0$ на (a, b), то $f(x)$ постоянна на (a, b).

Доказательство.

Определение. Функция $f(x)$ называется возратающей в точке a **,** если существует проколотая окрестность $U(a)$ точки a **,** в которой $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$**.**

Теорема. Если $f'(a) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке a.

Доказательство.

Следствие. Если функция $f(x)$ неубывает на интервале (a, b), то $f'(x) \geq 0$ во всех точках (a, b).

Правило Лопиталя. Раскрытие неопределённостей.

Будем говорить, что при $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty)$ отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $(\frac{\infty}{\infty})$.

Теорема $(\frac{0}{0})$**.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности $\dot{U}(a)$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и эти пределы равны

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство.

Примеры.

Теорема ($\frac{\infty}{\infty}$). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$ точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в окрестности $\dot{U}(a)$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и эти пределы равны

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Замечание. В двух предыдущих теоремах, если $a = \infty$, то заменой $x = \frac{1}{t}$ вычисление сводится к случаю $a = 0$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Примеры.

Замечание. а) непределённость $0 \cdot \infty$ сводится к случаю или $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$f \cdot g = \frac{f}{(\frac{1}{g})} = \frac{g}{(\frac{1}{f})}$;

б) неопределённость вида 1^{∞} , 0^{∞} , ∞^{0} сводится к неопрделённости $0 \cdot \infty$:

$f^{g} = e^{g \ln f}$.

в) непределённость $\infty - \infty$ сводится к случаю $\frac{0}{0}$:

$$f - g = \frac{1}{(\frac{1}{f})} - \frac{1}{(\frac{1}{g})} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} .$$

Примеры.

Лекция 10.

Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ многочлен степени n с вещественными коэффициентами $a_i \in \boldsymbol{R}$. Если x_0 произвольное число, то можно переразложить многочлен $P_n(x)$ по степеням $(x - x_0)^k$ раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые в выражении

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \big((x - x_0) + x_0\big)^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k.$$

Теорема. Коэффициенты b_k вычисляются по формулам $b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Доказательство.

Замечание. Под «нулевой» производной функции $F(x)$ будем понимать саму функцию: $F^{(0)}(x) = F(x)$.

Определение. Формула $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется формулой Тейлора для многочлена $P_n(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

Пример. Применим данную формулу к многочлену $P_n(x) = (x + a)^n$ и получим известную формулу

$(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k$ бинома Ньютона.

Пусть теперь $f(x)$ поизвольная функция, имеющая производные в некоторой окрестности $U(x_0)$.

Определение. Многочлен $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ называется многочленом Тейлора степени n функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

Легко проверить, что значения многочлена $Q_n(x)$ и всех его первых n производных совпадают в точке x_0:

$$Q_n(x_0) = f(x_0), Q_n'(x_0) = f'(x_0), \dots , Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Положим

$$f(x) = Q_n(x) + r_n(x). \qquad (*)$$

Формула (*) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$. Слагаемое $r_n(x)$ называется -тым *остаточным членом* формулы Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, тогда для любого $x \in U_\varepsilon(x_0)$ существует точка $c \in (x_0, x)$ такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(k+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad . \qquad (**)$$

Доказательство.

Формула (**) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если $x_0 = 0$, то формула (**) называется формулой Маклорена.

Замечание. Мы можем считать функцию $f^{(n+1)}(x)$ ограниченной на некотором отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ константой M, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| < M$. Следовательно , $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ и можно записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \qquad (**)$$

В таком виде эта формула называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ преставлена в некоторой окрестности $U(a)$ в виде

$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \cdots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$, $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$.

Тогда $b_k = c_k$, для всех $k = 0,1,2, \dots , n$.

Доказательство.

Пример.

Выражение $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ называется рядом. Суммы $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ называются частичными суммами ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся. Для сходящегося ряда, допуская вольность речи, и сумму ряда и сам ряд будем обозначать S и писать $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка в окресности $U(x_0)$, тогда можно составить ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = S$. Множество значений x, для которых ряд S сходится будем называть *областью сходимости* ряда S. Сам ряд в этом случае называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ а в случае $x_0 = 0$ - *рядом Маклорена* функции.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ производные любого порядка и остаточный член её формулы Тейлора стремится к нулю

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0,$ для всех $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, то $f(x)$ раскладывается на этом отрезке в сходящийся к ней ряд Тейлора.

Доказательство.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ производные любого порядка, ограниченные все одним и тем же числом $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M, \forall x \in [a, b], k = 0,1,2, \dots,$ то ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$.

Доказательство.

Лекция 11.

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций.

Теорема.

1) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, сходится для любого $x \in \boldsymbol{R}$;
2) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, сходится для любого $x \in \boldsymbol{R}$;
3) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, сходится для любого $x \in \boldsymbol{R}$;
4) $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+-1} \frac{x^k}{k}$, сходится для любого $x \in (-1, 1]$.
5) $(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} x^k$, сходится для любого $x \in (-1, 1)$.

Доказательство.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x(1+\frac{x}{3}+o(x))}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2 + o(x^2)}{x^2} =$
$= \frac{-5}{6}$.

Определение. Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если существует окрестность $U(x_0)$, в которой для приращения Δy функции в точке x_0 выполняется неравенство

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0 \ (\geq 0), \ \forall x \in \ U(x_0).$$

Определение. Точка x_0 называется стационарной для $f(x)$если функция дифференцируема в точке и $f'(x_0) = 0$.

Теорема. Пусть x_0 стационарная точка для функции $f(x)$ и существует вторая непрерывная частная производная $f''(x)$ в некоторой окрестности $U(x_0)$. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 локальный минимум для $f(x)$, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 локальный максимум для $f(x)$.

Доказательство.

Пример.

Теорема. Пусть $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ и $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда

а) если $(n+1)$ - чётное и $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то x_0 - локальный максимум;

б) если $(n+1)$ - чётное и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то x_0 - локальный минимум;

в) если $(n+1)$ - нечётное , то x_0 не является точкой локального экстремума для функции $f(x)$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) \geq 0)$ на $[x_0 - \varepsilon, x_0)$, $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ на $(x_0, x_0 + \varepsilon]$,тогда x_0 точка локального минимума (максимума).

Доказательство.

Примеры.

Пример. Экстремальные значения функции на отрезке.

Выпуклость кривой.

Определение. Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) в точке x_0 , если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in U(x_0)$, график функции $f(x)$ лежит ниже (выше) касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.

Определение. Точка x_0 называется точкой перегиба для функции $f(x)$, если существует окрестность $U_\varepsilon(x_0)$, такая, что графики $f(x)$ на промежутках $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ лежат по разные стороны от касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.

Теорема. Пусть $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную производную 2-го порядка и $f''(x_0) > 0$ (< 0). Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ выпуклая вниз (вверх).

Доказательство.

Следствие. Если x_0 точка перегиба для функции $f(x)$ и $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Примеры.

Теорема. Пусть $f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ и $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда

а) если n чётное число, то x_0 точка перегиба для функции $f(x)$;

б) если n нечётное число и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то функция выпуклая вниз, а при $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ функция выпуклая вверх.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Функция называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a, b]$, если для любых $c, d \in [a, b]$, отрезок, соединяющий точки с абсциссами c и d на графике функции, лежит ниже (выше) графика $f(x)$ на отрезке $[c, d]$.

Задача. Доказать , что функция выпукла вверх (вниз) на отрезке если, и только если она выпуклая вверх (вниз) в каждой точке отрезка.

Асимптоты.

Определение. а) Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой для функции $f(x)$, если хотя бы один из пределов $f(a+0), f(a-0)$ равен ∞;

б) прямая $y(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой для функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \big(f(x) - y(x)\big) = 0$.

Примеры.

Теорема. Существует наклонная асимптотоа для функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если и только если существуют конечные пределы $k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx)$. В этом случае прямая $y(x) = kx + b$ является асимптотой.

Доказательство.

Примеры.

Лекция 12.

Примеры задач на максимум и минимум.

Схема построения графика функции на примерах задач типового расчёта.

Лекция 13.

Назовём точками евклидова пространства $\boldsymbol{R^n}$ множество строк вида $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где все $x_i \in \boldsymbol{R}, \forall i \in \boldsymbol{N}$. Каждая такая строка соответствует точке пространства. В случае $n = 2$ и 3 это определение совпадает с определением евклидовой плоскости и 3-х мерного пространства с декартовой системой координат. Определим векторы в $\boldsymbol{R^n}$ как направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, где $A, B \in \boldsymbol{R^n}$ точки. Назовём координатами вектора $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$ разность координат точек $A(x_1, \dots, x_n)$ и $B(y_1, \dots, y_n)$. Назовём векторы равными, если равны их координаты. Векторы также будем считать принадлежащими $\boldsymbol{R^n}$ **и** различать их с точками. Между векторами естественным образом определяются операции сложения и вычитания и умножения на число по аналогии со случаями $n = 2$ и 3.

Определение. Назовём скалярным произведением векторов $\vec{a} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\vec{b} = (y_1, \dots, y_n)$ число $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Назовём модулем вектора (или его длиной) число $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Легко проверить, что для так определённого скалярного произведения все известные свойства скалярного произведения выполняются:

а) $|\vec{a}| \geq 0$, и, если $|\vec{a}| = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;   в) $(\gamma \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\gamma \vec{b}) = \gamma (\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Теорема (неравенство Коши-Буняковского). Для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R^n}$ выполняется неравенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Доказательство.

Теорема (неравенство треугольника). Для любых $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{R^n}$ выполняется неравенство

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Доказательство.

Определение. Определим расстояние между точками $X(x_1, \dots, x_n)$ и $Y(y_1, \dots, y_n)$ в пространстве $\boldsymbol{R^n}$,как модуль (или *длину*) вектора $\overrightarrow{XY}$:

$$\rho(X,Y) = |X - Y| = \left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

(Здесь приведены обозначения, которые мы дальше будем использовать).

Определение. *Открытым (замкнутым) шаром* $U_r(X)$ **в** $\boldsymbol{R^n}$ радиуса r называется множество точек $X(x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R^n}$**,** чьи координаты удовлетворяют неравенству:

$$|X - X_0|^2 = (x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{on})^2 < r^2 \, (\leq r^2).$$

Точка $X_0(x_{01}, \dots, x_{01})$ называется центром шара $U_r(X_0)$.

Определение. *Открытым параллелепипедом* **в** $\boldsymbol{R^n}$ называется множество точек $X(x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R^n}$**,** чьи координаты удовлетворяют неравенствам:

$|x_1 - a_1| < \varepsilon_1, \dots, |x_n - a_n| < \varepsilon_n$. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$, то параллелепипед называется $n -$ мерным кубом со стороной 2ε.

Замкнутый параллелепипед определяется аналогично замкнутому шару.

Определение. Назовём $n -$ мерной $\varepsilon -$ окрестностью точки $X \in \boldsymbol{R^n}$ открытый шар $U_\varepsilon(X)$ с центром в точке $X \in \boldsymbol{R^n}$**.**

Определение. Назовём окрестностью $U(X)$ точки $X \in \boldsymbol{R^n}$ любое множество в $\boldsymbol{R^n}$, содержащее открытый шар $U_\varepsilon(X) \subset U(X)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{X_k\}_{k=1,2,\dots}$ точек в $\boldsymbol{R^n}$ сходится к точке $X_0 \in \boldsymbol{R^n}$ и писать $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X_0$, если

$$\forall_{U(X_0)} \, \exists_{n_{U(X_0)} \in \boldsymbol{N}} \colon \forall_{m > n_{U(X_0)}} \Rightarrow X_m \in U(X_0).$$

Это определение также эквивалентно следующему:

точка X_0 есть предел последовательности $\{X_n\}$, если вне любой окрестности точки X_0 содержится лишь конечное число членов последовательности.

Теорема. Если существует предел последовательности, то он единстве**нный.**

Доказательство.

Будем говорить, что последовательность **сходится,** если она имеет конечный предел.

Примеры.

Определение. Последовательность $\{X_k\}$ называется ограниченной, если $\exists M \in \boldsymbol{R}$: $\forall k \in \boldsymbol{N} \Rightarrow |X_k| < M$.

Теорема. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство.

Теорема (Больцано – Вейерштрасс). Из всякой ограниченной последовательности $\{X_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{X_{k_l}\}$, сходящуюся к некоторому конечному числу.

Доказательство.

Определение. Пусть $\{X_{k_l}\}$ некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{ X_k\}$. Точка $A = \lim\limits_{l \to \infty} X_{k_l}$ называется **предельной точкой последовательности** $\{ X_k\}$.

Задача. Пусть $\{A_m\}$ произвольная последовательность точек в $\boldsymbol{R^n}$. Построить последовательность $\{ X_k\}$ точек в $\boldsymbol{R^n}$, множество предельных точек которой совпадает с множеством значений последовательности $\{A_m\}$.

Определение. Последовательность $\{ X_k\}$ называется **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon \in \boldsymbol{N}: \forall l, m \in \boldsymbol{N}, l > n_\varepsilon \,, m > n_\varepsilon \Rightarrow \left| X_m - X_l \right| < \varepsilon.$$

Теорема (критерий Коши). Последовательность $\{ X_k\}$ является фундаментальной если и только если существует предел $A \in \boldsymbol{R^n}$ последовательности, $A = \lim\limits_{k \to \infty} X_k$.

Доказательство.

Лекция 14.

Множествами в этой лекции будем называть подмножества пространства $\boldsymbol{R^n}$.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется открытым, если для любой точки $X \in G$ существует окрестность $U(X)$ точки X, целиком лежащая в $G, U(X) \subset G$.

Примеры. Пространство $\boldsymbol{R^n}$**,** открытый шар $U_\varepsilon(X)$, открытый параллелепипед – являются открытыми множествами.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathrm{C}G$ в $\boldsymbol{R^n}$ **,** $\mathrm{C}G = \boldsymbol{R^n} \backslash G$ **–** открытое множество.

Примеры. Пространство $\boldsymbol{R^n}$ **,** замкнутый шар $U_\varepsilon(X)$, замкнутый параллелепипед, отрезок и окружность на плоскости, пустое множество $\emptyset$ – являются замкнутыми множествами.

Замечание. Множества $\boldsymbol{R^n}$ и $\emptyset$ - являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Определение. Точка X называется внутренней точкой множества G, если существует ε - окрестность $U_\varepsilon(X)$ точки X, целиком лежащая в G, $U_\varepsilon(X) \subset G$.

Множество внутренних точек множества G обозначается G^0 и, очевидно, является открытым множеством.

Замечание. Открытое множество можно определить, как множество, для которого G= G^0.

Определение. Точка X называется граничной точкой множества G, если любая окрестность $U(X)$ точки X содержит как точки множества G, так и точки дополнения множества G в $\boldsymbol{R^n}$**,** то есть $G \cap U(X) \neq \emptyset, \mathrm{C}G \cap U(X) \neq \emptyset$.

Множество **всех** граничных точек множества G называется границей G и обозначается ΓG. Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству G.

Теорема. ΓG - замкнутое множество.

Доказательство.

Замечание. Если $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то $\boldsymbol{R^n} = G^0 \cup \Gamma G \cup \mathrm{C}G^0$, причём множества $G^0, \Gamma G$ и $\mathrm{C}G^0$ попарно не пересекаются.

Определение. Замыканием множества G называется наименьшее замкнутое множество, обозначаемое $\bar{G}$, содержащее множество G.

Теорема. $\bar{G} = G \cup \Gamma G$.

Доказательство.

Следствие. Множество замкнуто, если оно содержит все свои граничные точки.

Теорема. Множество G замкнуто если и только если для любой сходящейся к точке X_0 последовательности $\{X_k\}$ точек, целиком содержащейся в G, точка X_0 также принадлежит G.

Доказательство.

Замечание. Последняя теорема даёт нам альтернативное определение замкнутого множества:

Определение. Множество G называется замкнутым, если для любой сходящейся к точке X_0 последовательности $\{X_k\}$ точек, целиком содержащейся в G, точка X_0 также принадлежит G.

Примеры.

Задача. Доказать, что:

а) объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество;

б) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;

в) пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

г) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

Определение. Открытым покрытием множества G называется совокупность открытых множеств $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha\in I}$, (здесь W_α- открытое множество, I- множество индексов), такая, что $G \subset \bigcup_{\alpha\in I} W_\alpha$. Покрытие Φ называется конечным, если множество I - конечно.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется ограниченным, если $\exists M > 0: \forall X \in G \Rightarrow |X| < M$.

Теорема. Пусть $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества $G \subset \boldsymbol{R^n}$**,** тогда существует конечное подмножество I_0 множества I, $I_0 \subset I$, такое, что $\Phi_0 = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I_0}$ также является открытым покрытием множества G . (Или, что то же самое, из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества можно выбрать конечное подпокрытие).

Лемма. . Пусть $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества $G \subset \boldsymbol{R^n}$**,** тогда существует число $\varepsilon_\Phi > 0$, зависящее от покрытия Φ, такое, что для любой точки $X \in G$ существует элемент покрытия W_{α_X} , зависящий от X, такой, что $U_{\varepsilon_\Phi}(X) \subset W_{\alpha_X}$.(т.е. для любой точки X открытая ε_Φ-окрестность точки X содержится в некотором элементе W_{α_X}покрытия Φ).

Доказательство леммы.

Доказательство теоремы.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

В силу последнего определения доказанную теорему можно сформулировать так:

Теорема. Всякое ограниченное замкнутое множество в $\boldsymbol{R^n}$ компактно.

Примеры.

Лекция 15.

Пусть $f: \boldsymbol{R^n} \to \boldsymbol{R}$ числовая функция переменной $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которую будем записывать как $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Определение предела(по Гейне)**.** Будем говорить, что функция $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет предел равный числу $A \in \boldsymbol{R^n}$ при значении переменной $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ стремящемуся к $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, если $f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(X_0)$ точки X_0 и для любой последовательности $\{X_k\}$ точек из окрестности $\dot{U}(X_0)$, сходящейся к X_0, последовательность $\{f(X_k)\}$ сходится к числу A. Или

$$A = \lim_{\mathrm{X} \to \mathrm{X}_0} f(X) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Гейне}} \forall \{X_k\}, X_k \in \dot{U}(X_0), \lim_{k \to \infty} X_k = X_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(X_k) = A .$$

Определение предела (по Коши). Пусть функция $f(X)$ определена в некоторой окрестности конечной точки X_0 за исключением, может быть, самой точки X_0. **Число** A **называется пределом функции** $f(X)$ в точке X_0

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, зависящее от ε, что для всех X, для которых выполняется неравенство $\left| X - X_0 \right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| f(X) - A \right| < \varepsilon$. Или кратко:

$$A = \lim_{X \to X_0} f(X) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{по Коши}} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon \forall X, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon .$$

Теорема. Определения предела по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство.

Рассмотрим некоторую функцию $f(X)$ определенную в некоторой окрестности $\dot{U}(X_0)$ конечной точки X_0 за исключением, может быть, самой точки X_0. Пусть $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ единичный вектор, $\left|\vec{\theta}\right| = 1$, тогда точки вида $X_0 + t\vec{\theta} = (x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$, где $t > 0$, образуют луч, выходящий из точки X_0 в направлении вектора $\vec{\theta}$. Пределом функции $f(X)$ по направлению $\vec{\theta}$ называется предел функции $F(t) = f(x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$, если он существует

$$\lim_{t \to 0} F(t) = \lim_{t \to 0} f(X_0 + t\vec{\theta}).$$

Пример. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0,$

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не существует, т.к. пределы по направлениям различны.

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ не существует, хотя существуют равные пределы по направлениям.

Определение. Будем писать $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = \infty$ если $f(X)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(X_0)$ и $\forall R > 0 \exists \delta_R$>0: $\forall X \in \dot{U}(X_0), 0 < |X - X_0| < \delta_R \Rightarrow |\, f(X)| > R.$

Определение. Будем писать $\lim\limits_{X\to \infty} f(X) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0\colon \forall X, |X| > R_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon.$

Теорема. Пусть $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, $B = \lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ конечные пределы. Тогда

а) $\lim\limits_{X\to X_0} \big(\alpha f(X) + \beta g(X)\big) = \alpha A + \beta B$, где $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$**;**

б) $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) g(X) = AB$;

в) $\lim\limits_{X\to X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{A}{B}$, если $B \neq 0$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, где A —конечное число, то $\exists\ \dot{U}(X_0), M > 0\colon \forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| < M$.

Доказательство.

Теорема. Если $A = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$, где $A \neq 0$, то $\exists\ \dot{U}(X_0)\colon \forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| > \frac{|A|}{2}$. Если при этом $A > 0$, то $f(X) > \frac{A}{2}$, если $A < 0$, то $f(X) < \frac{A}{2}$.

Доказательство.

Непрерывные функции.

Функция $f(X)$ называется непрерывной в точке $X_0 \in G \subset \boldsymbol{R^n}$, если она определена в некоторой окрестности $U(X_0)$ и $\lim\limits_{\substack{X \to X_0 \\ X \in G}} f(X) = f(X_0)$.

Если определить приращение функции, соответствующее приращению аргумента $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, , \Delta x_n)$, как $\Delta f(X) = f(X + \Delta X) - f(X)$, то данное определение эквивалентно равенству $\lim\limits_{\substack{\Delta X \to \vec{0} \\ X + \Delta X \in G}} \Delta f(X_0) = 0$.

На языке "$\varepsilon - \delta$": $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon \forall X \in G, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$.

Для непрерывных функций свойство $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = f(\lim\limits_{X \to X_0} X)$ показывает, что знаки предела и функции перестановочны или - «можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции».

Теорема. Пусть $f(X)$ и $g(X)$ непрерывные в точке функции X_0 функции. Тогда $\alpha f(X) + \beta g(X)$, $f(X)\, g(X)$, $(f(X))/(g(X))$ при $g(X_0) \neq 0$ - непрерывны.

Доказательство.

Теорема. Пусть $g(X)$ непрерывна в точке X_0, $g(X_0) = a$, функция $f(t)$ непрерывна в точке a, тогда сложная функция $\Phi(X) = f(g(X))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Примеры непрерывных функций.

Теорема. а) Если $f(X)$ непрерывна в точке A, то она ограничена в некоторой окрестности $U(A)$;

б) Если $f(X)$ непрерывна в точке A и $f(A) \neq 0$, то существует окрестность $U(A)$ точки A, в которой $f(X) > \frac{f(A)}{2} > 0$, если $f(A) > 0$ и $f(X) < \frac{f(A)}{2} < 0$, если $f(A) < 0$, для любого $X \in U(A)$.

Доказательство.

Определение. Функция называется непрерывной на множестве G, если она непрерывна в каждой точке множества G.

Теорема. Если функция непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то она ограничена.

Доказательство.

Теорема (Вейерштрасс). Если функция $f(X)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, то существует точка $C \in G$, такая, что $f(C) = \min_{X \in G} f(X)$ и, существует точка $D \in G$, такая, что $f(D) = = \max_{X \in G} f(X)$.

Доказательство.

Определение. Непрерывной кривой в $\boldsymbol{R^n}$ называется образ отображения

$$\Gamma: [a, b] \to \boldsymbol{R^n}, \ \Gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),$$

задаваемого непрерывными на отрезке $[a, b]$ функциями $\{\varphi_i(t)\}$.

Определение. Множество $G \subset \boldsymbol{R^n}$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в множестве G.

Теорема. Если функция $f(X)$ непрерывна на ограниченном, замкнутом, связном множестве $G \subset \boldsymbol{R^n}$, $a = \min_{X \in G} f(X)$, $b = \max_{X \in G} f(X)$, то для любого значения $c \in [a, b]$ существует $C \in G$, такая, что $f(\mathrm{C}) = \mathrm{c}$.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Функция $f(X)$ называется равномерно непрерывной на множестве $M \subset \boldsymbol{R^n}$ **,** если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \colon \forall X', X'' \in M, \left|X' - X''\right| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|f(X') - f(X'')\right| < \varepsilon$.

Теорема (Кантор). Пусть $M \subset \boldsymbol{R^n}$ компактное множество, $f(X)$ непрерывная на M функция, тогда $f(X)$ равномерно нерерывна на M.

Доказательство.

Следствие. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нём.

Примеры.

Лекция 16.

Обозначим $\Delta X_i = (0,\ldots,0,\Delta x_i, 0, \ldots, 0)$ и назовём приращением функции $f(X)$ по -той переменной величину $\Delta_i f(X) = f(X + \Delta X_i) - f(X)$.

Определение. Частной производной по переменной x_i в точке X называется предел $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(X)}{\Delta x_i}$, если он существует.

Частную производную функции можно рассматривать, как производную функции одной переменной x_i, когда все остальные переменные фиксированы.

Рисунок.

Примеры.

Частные производные $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$ можно рассматривать, как функции на тех подмножествах в $\boldsymbol{R^n}$, где они определены. И можно, в свою очередь, рассмотреть частные производные этих функций $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$, которые назовём вторыми частными производными функции $f(X)$.

Пример. Для $n = 2$ имеются две частные производные 2-го порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ по переменным x и y и две «смешанные» производные второго порядка $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ и $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

Определение. Смешанной частной производной n -того порядка назовём частную производную от производной $(n-1)$–го порядка.

Пример. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Пример.

Возникает вопрос, будут ли равны частные производные**,** взятые по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но в разном порядке, как в примере выше? Ответ даётся следующей теоремой:

Теорема (о смешанных производных).

Пусть функция $f(X) = f(x, y)$ определена вместе со своими производными $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в некоторой окрестности точки X_0 и пусть функции $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке X_0. Тогда

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial y \partial x}. \quad (*)$$

Доказательство.

Замечание. Если вторые частные производные разрывны в точке, то равенство неверно. Пример – для функции $f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ при } (x, y) = (0,0); \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{при } (x, y) \neq (0,0). \end{cases}$

в точке $X_0 = 0$ равенство (*) неверно, т.к. вторые производные разрывны.

Замечание. Эта теорема легко распространяется на любые смешанные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Например $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$.

Определение. Пусть $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ единичный вектор $|\vec{\delta}| = 1$, **производной функции $\boldsymbol{f(X)}$ по направлению $\vec{\boldsymbol{\delta}}$** в точке $X \in \boldsymbol{R^n}$ называется правая производная по t функции $F(t) = f(x_1 + t\delta_1, \dots, x_n + t\delta_1)$ в точке $t = 0$ и обозначается $\frac{\partial f(X)}{\partial \vec{\delta}} = F'_+(0)$.

Замечание. Частные производные 1-го порядка функции совпадают с производными функции по направлению соответствующих базисных ортов.

Теорема. Если функция $f(X)$ имеет в точке X_0 все непрерывные частные производные первого порядка, то приращение функции в точке X_0 соответствующее приращению аргумента $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ можно записать в виде $\Delta f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Delta x_n + o(\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$.

Доказательство.

Определение. Функция называется дифференцируемой в точке X_0, если приращение функции в точке X_0 соответствующее приращению аргумента

$\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ можно записать в виде $\Delta f(X_0) = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_n \Delta x_n + o(\Delta\rho)$, где $\Delta\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_n^2}$, $A_i \in \boldsymbol{R^n}$ для всех i.

Теорема. Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные первого порядка и достаточно, чтобы эти производные были непрерывны в точке.

Доказательство.

Примеры.

Определение. Главная линейная часть приращения дифференцируемой функции $f(X)$ называется дифференциалом функции и обозначается, как $df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\Delta x_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)dx_n$.

Замечание. Последнее равенство верно в силу $\Delta x_i = dx_i$.

Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением $z = f(x, y)$ в $\boldsymbol{R^3}$**.** Кривые на поверхности, заданные уравнениями $x = x_0$ и $y = y_0$ обе проходят через точку $X_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и, если существуют частные производные $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X_0)}{\partial y}$,

то касательные к этим кривым в точке X_0 задаются уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0) \end{cases}$$ и

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) \end{cases}$$

Касательная плоскость к поверхности, если таковая существует, должна содержать обе эти прямые, откуда немедленно получаем уравнение касательной плоскости:

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0), \text{ где } z_0 = f(X_0). \qquad (**)$$

Если функции $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$ непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то расстояние между точкой поверхности $P\big(x, y, f(x, y)\big)$ и точкой касательной плоскости $Q(x, y, Z)$, с теми же координатами (x, y) равно:

$PQ = f(x,y) - \frac{\partial f(X_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}(y - y_0) = o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, и мы видим, что это расстояние есть

$o(\rho) = PQ \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0.$

Рисунок.

Примеры.

Лекция 17.

Теорема.

Пусть функция $f(X)$ дифференцируема в точке $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R^n}$, а функции $x_i=\varphi_i(t)$ дифференцируемы в точке t, тогда производная функции $F(t)=f(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ равна

$$F'(t)=\frac{\partial f(X(t))}{\partial x_1}\varphi_1'(t)+\dots+\frac{\partial f(X(t))}{\partial x_n}\varphi_n'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Доказательство.

Теорема. Если в предыдущих обозначениях $x_i=\varphi_i(t_1,\dots,t_m)$ функции от m переменных , то

$$\frac{\partial f(\varphi_1(t_1,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_m))}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt_j}.$$

Доказательство.

Примеры.

Теорема. Если $f(X)$ дифференцируема в точке $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R^n}$ **,** то для неё имеет смысл производная по направлению любого единичного вектора $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n)$, $|\vec{\theta}|=1$ и

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{\theta}}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\theta_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\theta_n.$$

Доказательство.

Замечание. Если функция имеет производную по любому направлению, то она может быть не дифференцируемой. **Пример.**

Замечание. Если $\vec{\theta}=(\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n)$ где $\{\alpha_i\}$ – углы между вектором $\vec{\theta}$ и осями OX_i, то предыдущая формула имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{\theta}}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\alpha_n. \qquad (*)$$

Определение. Градиентом функции $f(X)$ в точке $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{R^n}$ называется вектор $\overrightarrow{grad\, f(X)}=(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(X)}{\partial x_n})$.

Примеры.

Следствие. Производная по направлению вектора $\vec{\theta}$ от функции $f(X)$ равна скалярному произведению вектора $\overrightarrow{grad\, f(X)}$ на вектор $\vec{\theta}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} = \left(\overrightarrow{grad\, f(X)}, \vec{\theta}\right) = grad_{\vec{\theta}}\, f(X).$$

Следствие. $\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}} \leq |\overrightarrow{grad\, f(X)}\,|$

Свойства вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{grad\, f(X)}}$:

1) Его длина равна максимальному значению производной $\frac{\partial f}{\partial \vec{\theta}}$ по направлению функции $f(X)$;
2) Если он ненулевой, то направлен в сторону максимального возрастания функции $f(X)$;
3) Он перпендикулярен гиперповерхности уровня $f(X) = c$ (*будет доказано позднее*).

Примеры.

Дифференциалы.

Рассмотрим функцию $U = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ независимых переменных $\{x_i\}$. Дифференциал функции $f(X)$ равен

$$dU = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k$$

И зависит, вообще говоря, от $\{x_i\}$ и от $\{dx_i\}$.

Теорема. Пусть $U(X)$ и $W(X)$ функции, имеющие непрерывные частные производные 1-го порядка в точке X, тогда:

1) $d(\alpha U + \beta W) = \alpha dU + \beta dW$;
2) $d(UW) = UdW + WdU$;
3) $d\left(\frac{U}{W}\right) = \frac{WdU - UdW}{W^2}$, если только $W(X) \neq 0$.

Доказательство.

Определение. Дифференциалом -го порядка функции $U(X)$ называется $d^n U(X) = d\left(d^{n-1} U(X)\right)$.

Примеры. а) $d^2U = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_l}dx_k dx_l$. При вычислении полагаем $d(dx_i) = 0$.

б) $$\boldsymbol{d^k U(X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^k U(X)}$$

доказывается по индукции.

Теорема. Дифференциал k-го порядка функции $U(X)$, где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ независимые переменные, равен

$$d^k U(X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^k U(X).$$

Доказательство.

Если теперь $W(u_1, \dots, u_m)$ функция зависимых переменных, и

$u_j = u_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$dW = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}du_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j})dx_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j$,

и мы видим, что формула для 1-го дифференциала осталась прежней. Это свойство ***инвариантности 1-го дифференциала.***

Но уже для второго дифференциала имеем:

$d^2W = d(dW) = d\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}du_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j \partial u_i}du_j du_i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}d^2u_i$,

и видим, что в отличие от случая независимых переменных, появилось второе ненулевое слагаемое.

Примеры.

Лекция 18.

Пусть функция $f(X)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными вплоть до -го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\varepsilon(X_0)$ точки $X_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$, точка $X_0 + \Delta X \in U_\varepsilon(X_0)$, где $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, $\Delta f(X_0) = f(X_0 + \Delta X) - f(X_0)$.

Теорема (Тейлора). В вышеприведённых обозначениях

$$\Delta f(X_0) = \frac{df(X_0)}{1!} + \frac{d^2 f(X_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^{k-1} f(X_0)}{(k-1)!} + \frac{d^k f(X_0 + \theta \Delta X)}{k!} ,$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$.

Замечание. Здесь $d^k f(X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n)^k f(X)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(t) = f(X_0 + t\Delta X)$ для $t \in [0,1]$, тогда, применив формулу Маклорена к $F(t)$ при $\Delta t = 1$ имеем $\Delta f(X_0) = F(1) - F(0) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{F^{(l)}(0)}{l!} + \frac{F^{(k)}(\theta)}{k!}$, где $\theta \in (0,1)$. Вычисление производных функции $F(t)$ даёт следующий результат

$$F^{(l)}(t) = d^l f(X_0 + t\Delta X) = (\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n)^k f(X_0 + t\Delta X)$$

(доказывается по индукции), откуда немедленно получаем утверждение теоремы.

Следствие. Для $\text{к} = 2$ формула Тейлора имеет вид:

$$\Delta f(X_0) = df(X_0) + \frac{d^2 f(X_0 + \theta \Delta X)}{2!} \qquad (*)$$

Примеры.

Пусть на области (открытое, связное множество) $G \subseteq \boldsymbol{R^n}$ задана функция $f(X)$. Точка $X_0 \in G$ называется ***точкой локального экстремума*** функции $f(X)$, если существует окрестность $U(X_0)$ точки X_0, такая, что для любой точки $X \in U(X_0)$, выполняется неравенство $f(X) \geq f(X_0)$ для ***локального минимума*** или $f(X) \leq f(X_0)$ для ***локального максимума***.

Теорема. Пусть $X_0 \in G$ точка локального экстремума для $f(X)$. Тогда, если существуют первые частные производные функции в $f(X)$ точке X_0, то все они равны нулю $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$.

Доказательство.

Определение. Точка, в которой выполнены условия $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$, называется ***стационарной точкой*** для функции $f(X)$.

Следствие. Если функция $f(X)$ дифференцируема в точке X_0 и имеет локальный экстремум в X_0, то:

а) $d\, f(X_0) = 0, \quad \overrightarrow{grad\, f(X\_0\,)} = 0;$

б) $\Delta\, f(X_0) = \frac{d^2 f(X_0 + \theta \Delta X)}{2!} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X_0 + \theta \Delta X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$, если $f(X)$ имеет непрерывные вторые частные производные в точке X_0.

Определение. Точка, в которой выполнены условия $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_i} = 0, i = 0,1, \dots, n$, называется ***стационарной точкой*** для функции $f(X)$.

Достаточные условия экстремума.

Пусть $f(X)$ имеет непрерывные вторые частные производные в стационарной точке X_0, тогда

$$\Delta\, f(X_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X_0 + \theta \Delta X)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} + \varepsilon_{ij}\right) \Delta x_i \Delta x_j =$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} \frac{\Delta x_i}{\rho} \frac{\Delta x_j}{\rho} =$$
$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2} \alpha(\Delta X),$$

где $\alpha(\Delta X) \le \varepsilon n^2 \to 0$ при $\rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2} \to 0$, $\varepsilon = \max \varepsilon_{ij}$.

Итак, для стационарной точки X_0, имеем $\Delta\, f(X_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + \frac{\rho^2}{2} \alpha(\Delta X)$, где $\{a_{ij}\} = \left\{\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ –матрица *квадратичной формы*, называемой ***гессианом,*** а $\alpha(\Delta X) \to 0$ при $|\Delta X| \to 0$. По знаку этой квадратичной формы можно узнать знак приращения $\Delta\, f(X_0)$. Верна следующая

Теорема.

а) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ строго ***положительно определена***, т.е. её значение строго >0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то точка X_0 - локальный минимум;

б) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ строго ***отрицательно определена***, т.е. её значение строго <0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то точка X_0 - локальный максимум;

в) Если квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\Delta x_i \Delta x_j$ ***положительно полуопределена***, т.е. её значение ≥0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, или ***отрицательно полуопределена***, т.е. её значение ≤0 для всех $\Delta X \neq \vec{0}$, то вопрос о локальном экстремуме остаётся открытым и требуется дополнительное исследование;

г) если форма ***неопределена*** по знаку, т.е. принимает как положительные, так и отрицательные значения, то локальный экстремум в точке X_0 отсутствует.

Доказательство.

Вопрос о знаке квадратичной формы решается при помощи известного ***критерия Сильвестера***.

Примеры.

Лекция 19.

Теорема (о неявной функции). Пусть уравне**ние**

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = 0, \qquad (*)$$

для которого точка $(X_0, y_0) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n+1}}$ является решением, обладает следующими свойствами:

а) функция $f(x_1, \dots, x_n, y)$ непрерывна вместе со ***всеми*** своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности $U(X_0, y_0) \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n+1}}$ точки (X_0, y_0);

б) $\frac{\partial f(X_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Пусть, кроме того, $\mathrm{M} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n+1}}$ **-** множество точек, удовлетворяющих уравнению (*), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует параллелепипед $\Delta = \{|x_k - x_{0k}| < \delta, k = 1,2, \dots, n; |y - y_0| < b < \varepsilon\}$,такой, что множество $\mathrm{M} \cap \Delta$ описывается непрерывно дифференцируемой функцией

$$y = \varphi(x_1, \dots, x_n), \text{ при } |x_k - x_{0k}| < \delta, k = 1,2, \dots, n, \text{ причём } \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Доказательство.

Примеры.

Следствие. Пусть гиперповерхность $S \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}$ задана уравнением $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, точка $X_0(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in S$ и не все частные производные $\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_k}$ равны нулю одновременно, тогда в точке X_0 существует касательная гиперплоскость к поверхности S, задаваемая уравнением

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial x_1}(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial F(X_0)}{\partial x_n}(x_n - x_{0n}) = 0 .$$

Доказательство.

Примеры.

Список литературы.

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 432 с.
2. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1. СПб.: Лань, 2016. – 608 с.
3. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. СПб.: Лань, 2016. – 800 с.
4. 4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: [в 4 ч.] / Под ред. А. В. Ефимова; А. С. Поспелова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Ч. 1. — 288 с.
7. Сборник задач по математике для втузов; под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. Ч. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 432 с.