

Программа курса «Алгебра и геометрия (1 семестр)».
(лектор О.М.Адамович)

Матрицы, определители, СЛАУ.

Матрицы. Линейные операции на множестве матриц. Их свойства. Понятие линейного пространства. Операция умножения матриц. Её свойства. Алгебра квадратных матриц. Операция транспонирования матриц. Её свойства. Элементарные преобразования строк (столбцов) матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Перестановки n элементов. Их количество. Инверсии. Четные и нечетные перестановки. Транспозиция. Изменение четности перестановки при транспозиции любых двух ее элементов. Количество четных и нечетных перестановок n элементов.

Определитель квадратной матрицы n -го порядка. Вывод формулы вычисления определителя второго порядка из общего определения. Вывод формулы вычисления определителя третьего порядка из общего определения. Вывод формулы вычисления определителя верхней треугольной матрицы.

Лемма о знаке члена определителя. Неизменяемость определителя при транспонировании матрицы и следствие этого. Свойства определителя. Влияние на определитель матрицы элементарных преобразований ее строк. Возможность приведения матрицы к треугольному виду с сохранением ее определителя.

Определитель блочной треугольной матрицы. Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя. Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Теорема о «фальшивом разложении» определителя по строке (столбцу). Определитель Вандермонда. Критерий равенства его нулю. Определитель произведения квадратных матриц.

Определение обратной матрицы. Единственность обратной матрицы. Критерий обратимости квадратной матрицы. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы. Теоремы о существовании и единственности решения простейших матричных уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение СЛАУ. Матричная запись СЛАУ. Теорема о существовании и единственности решения СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей. Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы. Метод Крамера решения СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей.

Эквивалентные СЛАУ. Элементарные преобразования уравнений СЛАУ. Эквивалентность получаемой при этом СЛАУ первоначальной СЛАУ. Метод Гаусса решения СЛАУ. Расширенная матрица системы. Возможные варианты ее ступенчатого вида. Главные (базисные) и свободные неизвестные. Общее решение СЛАУ.

Метод элементарных преобразований нахождения обратной матрицы.

Комплексные числа и многочлены.

Определение комплексных чисел (как пар действительных) и операций сложения и умножения для них. Поле комплексных чисел. Мнимая единица.

Алгебраическая форма комплексного числа. Действительная и мнимая часть комплексного числа. Равенство комплексных чисел в алгебраической форме. Изображение комплексного числа на комплексной плоскости. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме. Операция комплексного сопряжения. Её свойства. Деление комплексных чисел в алгебраической форме.

Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Равенство чисел в тригонометрической форме. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа. Равенство комплексных чисел в показательной форме. Умножение, деление, возведение в целую степень (формула Муавра) комплексных чисел в тригонометрической показательной и показательной форме. Извлечение корня из комплексного числа.

Алгебра многочленов над данным полем. Степень многочлена. Степень суммы и произведения многочленов. Обратимые элементы алгебры многочленов. Теорема об однозначности представления функции в виде многочлена над бесконечным полем. Деление многочлена на многочлен с остатком.

Теорема Безу. Корень многочлена. Следствие теоремы Безу. Схема Горнера. Кратность корня многочлена. Теорема о целочисленных корнях многочлена с целыми коэффициентами.

Основная теорема алгебры многочленов (без доказательства). Теорема о разложении многочлена положительной степени над полем комплексных чисел на линейные множители, следствия из неё. Теорема Виета. Понятие неприводимого многочлена. Теорема о том, что неприводимыми многочленами над полем комплексных чисел являются многочлены первой степени и только они. Теорема о комплексных корнях с нетривиальной мнимой частью многочлена с действительными коэффициентами. Теорема о разложении многочлена с действительными коэффициентами на неприводимые множители над полем действительных чисел.

Линейные пространства.

Определение линейного пространства над полем действительных чисел. Примеры линейных пространств. Следствия из аксиом линейного пространства. Критерий того, что подмножество линейного пространства является его линейным подпространством. Линейная оболочка системы векторов.

Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов линейного пространства. Критерии линейной зависимости и линейной независимости. Критерии линейной зависимости систем, состоящих из одного вектора и из двух векторов. Геометрические критерии линейной зависимости систем из одного, двух, трех геометрических векторов. Три леммы о линейной зависимости.

Размерность линейного пространства. Определение бесконечномерного линейного пространства. Примеры. Определение конечномерного линейного пространства. Примеры.

Определение базиса линейного пространства. Связь между понятиями размерности и базиса. Определение полной системы векторов линейного пространства. Критерий того, что система векторов является базисом линейного пространства. Примеры естественных (канонических) базисов в линейных пространствах. Теорема о возможности дополнения любой линейно независимой системы векторов конечномерного линейного пространства до его базиса.

Теорема о том, что любой вектор конечномерного линейного пространства однозначно линейно выражается через базисные векторы. Координаты вектора в данном базисе. Линейные операции над векторами в координатах. Понятие изоморфизма линейных пространств. Изоморфность n -мерного линейного пространства пространству столбцов.

Ранг системы векторов. Теорема о базисе линейной оболочки. Следствие о размерности линейной оболочки. Теорема о рангах двух систем векторов, если векторы одной системы линейно выражаются через векторы другой системы. Эквивалентные системы векторов. Ранги эквивалентных систем.

Ранг матрицы. Неизменяемость ранга матрицы при ее транспонировании и следствие этого. Определение базисного минора. Теорема о базисном миноре. Следствия теоремы о базисном миноре: равенство ранга матрицы рангу системы ее строк; критерий равенства определителя нулю. Неизменяемость ранга матрицы при элементарных преобразованиях ее строк. Ранг ступенчатой матрицы. Теорема о ранге произведения матриц. Следствия о ранге произведения матрицы на невырожденную матрицу.

Переход от базиса к базису в линейном пространстве. Матрица перехода. Ее свойства. Связь между столбцами координат одного и того же вектора в разных базисах.