Математический анализ

Признак Коши

$\exists \lim\limits_{x->a} f(x) = A <=> \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta_\varepsilon>0} : \forall_{x',x^v} \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Доказательство:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta\varepsilon>0} : \forall x \in u_\delta(a) => |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} => \forall x', x'' \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$<=$ Рассмотрим $\{x_n\} : x_{u_{n->\infty}} - > a$

Тогда $\exists_{N_0} : \forall_{n,m>N_0,n,m\in\mathbb{N}} => x_n, x_m \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, но это означает, что $\{f(x_n)\}-$ последовательность Коши $=> \exists \lim\limits_{n->\infty} f(x_n) = A$

Рассмотрим $\{y_n\}, y_{n_{n->\infty}} - > a$, тогда $\exists \lim\limits_{n->\infty} f(y_n) = B$

Рассмотрим $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 ...\} - > a => A = B$

Опр. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой(большой) при $x- > a$, если $\exists \lim\limits_{x->a} f(x) = 0 (\exists \lim\limits_{x\in a} f(x) = \infty)$

Примеры: $x, sinx, tgx, e^x - 1, x^3, ...$ - бесконечно малые при $x \in 0$

$\dfrac{1}{x_n}, n > 0, e^{-\frac{1}{x^2}}$ - бесконечно большие при $x \in 0$

Теорема:

а) Пусть $f(x)$ - б.м.ф. при $x \in a$ и $f(x) \neq 0$ в u(a). Тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.б.ф.

б) Пусть $f(x)$ - б.б.ф. при $x \in a$ и $f(x) \neq 0$ в u(a). Тогда $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.м.ф.

Доказательство а): $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta_\varepsilon>0} : \forall x \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |f(x) - 0| < \varepsilon <=> |f(x)| < \varepsilon <=> \dfrac{1}{|f(x)|} > \dfrac{1}{\varepsilon}$

Положим $R > 0$ - любое и пусть $\forall x \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |\dfrac{1}{f(x)}| > R$

Опр. Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x \in x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция называется непрерывной на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если она непрервна в каждой точке M.

Рассмотрим ΔX - приращение аргумента, $x_0 + \Delta X$, тогда $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta X) - f(x_0)$ - функции.

Если $\exists \lim\limits_{x \in x_0} f(x) = f(x_0)$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

Пример:

1) f(x)=c $\quad \Delta f(x_0) = 0$ - непрерывна ГРАФИККК

2) f(x)=x $\quad \Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

3) f(x)=[x] ГРАФИКККККККККК

$\lim\limits_{x \in -0} [x] = -1 \neq \lim\limits_{x \in +0} = [0] = 0$

Опр. Правым (левым) пределом f(x) в точке a называется $\lim\limits_{x \in a+0} f(x) (\lim\limits_{x \in +0} f(x))$ число A такое, что $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta_\varepsilon > 0}$: $\forall x : a < x < a + \delta_\varepsilon (a - \delta_\varepsilon < x < a) => |f(x) - A < \varepsilon|$

Тут два графика ЕЩЁ

Теорема. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A <=> \exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x+0} = A$

Где-то здесь еще один график

Опр. Точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода для $f(x)$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = B$, где $A, B \in \mathbb{R}$

Точкой разрыва 2-го рода называется точка разрыва x_0 функции f(x), которая не является точкой разрыва 1-го рода

Примеры:

а) f(x) $= \dfrac{x^{-}3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \qquad x_0 = 1$

$Д_\delta = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{1-2}{1-3} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

График

б) f(x) $= e^{-\frac{1}{x}}$

График-2

$\lim\limits_{x \to -0} f(x) = +\infty =>$ разрыв второго рода

Примеры непрерывных функций:

1) f(x) $= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ - непрерывная $\forall x \in \mathbb{R}$

2) f(x) $= \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_m x^m + ... + b_0}$ - рациональная функция - непрерывна в точках, в которых знаменатель $\neq 0$

3) f(x) = sin x $\quad |\Delta sin\ x| = |sin(x + \Delta X) - sin\ x| = |2 sin \dfrac{\Delta x}{2} * cos(x + \dfrac{\Delta x}{2})| \leq 2 |sin \dfrac{\Delta x}{2}| \underset{sinx \leq x \forall X}{<} 2 \cdot \dfrac{\Delta x}{2} = \Delta x \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0 =$

$= cosx = sin(\dfrac{\pi}{2} + x)$ - непрерывная

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \cdot \log_a (1 + \dfrac{\Delta x}{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \dfrac{\Delta x}{x})^{\dfrac{1}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a (1 + \dfrac{\Delta x}{x})^{\dfrac{x}{\Delta x} \cdot \dfrac{1}{x}} =$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \log_a e^{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x\ lna}$

$\Delta \log_a(x) = \Delta \log_a(x + \Delta x) - \log_a X \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

5) $e^x; \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = e^x - 1 = y = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{ln(y+1)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y} ln(1+y)} =$

$$\substack{y\to 0 \\ x = ln(y+1)}$$

Я манал дальше все записывать...