Занятие №14.

Применение преобр-я Лапласа. Метод Дюамеля.

ТР, №5а. (группы КМБ) ТР, №3а. (обычные группы)

(1) $L(d)y(t)=f(t)$, $y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(n-1)}(0)=0$.

Решаем вспомогательную задачу:

(2) $L(d)z(t)=\mathbb{1}$, $z(0)=z'(0)=\ldots=z^{(n-1)}(0)=0$

Утв. Если $z(t)$ – решение задачи (2), то решение задачи (1) дается ф-лой:

(3) $$\boxed{\begin{aligned} &y(t)=z'(t)*f(t)\\ \text{т.е. } &y(t)=\int_0^t z'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}}$$

или:

$$\boxed{y(t)=\int_0^t z(t-\tau)f'(\tau)\,d\tau+z(t)f(0).}$$

Обоснование метода Дюамеля.
(д-во формулы (3)).

(1) $L(d)y(t)=f(t)$

$y(t) \risingdotseq Y(p)$

$f(t) \risingdotseq F(p)$

$f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0)$.

$L(p)\,Y(p)=F(p)$.

$Y(p)=\dfrac{1}{L(p)}\cdot F(p)$.

(2) $L(d)z(t)=\mathbb{1}$

$z(t) \risingdotseq Z(p)$

$L(p)\,Z(p)=\dfrac{1}{p}$

$pZ(p)=\dfrac{1}{L(p)}$

По т. о дифф. оригинала

$\dfrac{1}{L(p)} \fallingdotseq z'(t)\quad(-0)$.

$$Y(p)=\underbrace{\frac{1}{L(p)}}_{\fallingdotseq\, z'(t)}\cdot\underbrace{F(p)}_{\fallingdotseq\, f(t)}$$

По теор. Бореля об изображении свёртки

$$\boxed{y(t)=z'(t)*f(t)}$$

Или:

$Z(p)=\dfrac{1}{pL(p)} \fallingdotseq z(t)$.

$$Y(p)=\underbrace{\frac{1}{pL(p)}}_{\fallingdotseq\, z(t)}\cdot\underbrace{pF(p)}_{\fallingdotseq\, f'(t)+f(0)}$$

?

$$\boxed{y(t)=z(t)*f'(t)+z(t)\cdot f(0)}$$

Пример 1. (задача № 5а ТР). (3а). 2а

$y'' + y = t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

I способ: метод Дюамеля.

Рассм. вспомогат. задачу:

$z'' + z = 1, \quad z(0) = z'(0) = 0.$

$z(t) \risingdotseq Z(p),$

$p^2 Z(p) + Z(p) = \frac{1}{p}$

$(p^2+1) Z(p) = \frac{1}{p}$

$pZ(p) = \frac{1}{p^2+1}$; по теореме дифф-я оригинала сразу находим оригинал для $z'(t)$.

$z'(t) \risingdotseq \sin t.$

По ф-ле Дюамеля: $y(t)=z'(t)*f(t)$, $f(t)=t$; ③

$$y(t)=\int_0^t z'(\tau)f(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t \sin\tau\cdot(t-\tau)d\tau=t\int_0^t \sin\tau\,d\tau-\int_0^t \tau\sin\tau\,d\tau=$$

$$=t(-\cos\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-\left[-\tau\cos\tau\Big|_0^t+\int_0^t\cos\tau\,d\tau\right]=$$

$$=\cancel{-t\cos t}+t+\cancel{t\cos t}-0-\sin\tau\Big|_0^t=\boxed{t-\sin t.}$$

Проверка: $y(0)=0$; $y'(t)=1-\cos t$; $y'(0)=0$ (верно).

ТР, №5б. (№3б).

II способ (метод подбора част. решения).

$y''+y=t$, $y(0)=y'(0)=0$. $\qquad y_{ч.н.}=At+B$

$\lambda^2+1=0$. $\qquad y_ч'=A$, $y_ч''=0$.

$\lambda_{1,2}=\pm i$. $\qquad At+B=t\Rightarrow B=0, A=1$.

$y_{\substack{общ.\\одн.}}=C_1\cos t+C_2\sin t$. $\qquad y_ч=t$.

$$y_{о.н.}=C_1\cos t+C_2\sin t+t$$

$y(0)=C_1=0$

$y'(t)=-C_1\sin t+C_2\cos t+1$;

$y'(0)=+C_2+1=0\Rightarrow C_2=-1$.

Ответ: $\boxed{y(t)=t-\sin t}$

№ 14.124 (Ефимов, Поспелов, т. 3) (4)

Решить методом Дюамеля.

$$y' - y = \frac{1}{e^t+3}, \quad y(0)=0,$$

Вспомогат. задача:

$$z' - z = 1, \quad z(0)=0,$$

$$pZ(p) - Z(p) = \frac{1}{p}$$

$$(p-1)Z(p) = \frac{1}{p}$$

$$pZ(p) = \frac{1}{p-1}$$

$$z'(t) = e^t$$

$$y(t) = z'(t) * f(t) = \int_0^t \frac{e^{t-\tau}}{e^\tau+3}d\tau = e^t\int_0^t \frac{d\tau}{e^\tau(e^\tau+3)} \left| \begin{array}{l} e^\tau = u \\ \tau = \ln u \\ d\tau = \frac{1}{u}du \end{array} \right| \begin{array}{l} \tau=0 \\ u=1 \\ \tau=t \\ u=e^t \end{array}$$

$$= e^t \int_1^{e^t} \frac{du}{u^2(u+3)}; \quad \frac{1}{u^2(u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(u+3)+B(u+3)+Cu^2}{u^2(u+3)}.$$

$u=0$: $1=3B \Rightarrow B=\frac{1}{3}$

$u=-3$: $1=9C \Rightarrow C=\frac{1}{9}$

u^2: $0=A+C \Rightarrow A=-\frac{1}{9}$

$$y(t) = e^t\int_1^{e^t}\left(-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{u} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{u+3}\right)du$$

$$y(t) = e^t\left(-\frac{1}{9}\ln u - \frac{1}{3u} + \frac{1}{9}\ln(u+3)\right)\Bigg|_1^{e^t}$$

$$y(t) = e^t\left[-\frac{1}{9}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{9}\ln(e^t+3) + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\ln 4\right]$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{9}te^t - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{9}e^t\ln\frac{e^t+3}{4}.}$$

Проверка: $y(0)=0$ (верно).

Дома: № 14.125, № 14.47, 14.48.

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

Занятие № 14. Метод Дюамеля.

Пример (№14.83).

Найти оригинал для изображения: 5

$$F(p)=\frac{p}{p^4+4}.$$

Решение.

$$p^4+4=p^4+4+4p^2-4p^2=(p^4+4p^2+4)-4p^2=$$

$$=(p^2+2)^2-(2p)^2=(p^2-2p+2)(p^2+2p+2)$$

$$\frac{p}{p^4+4}=\frac{Ap+B}{p^2-2p+2}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+2}=\frac{1}{4}\left[\frac{B(p^2+2p+2)+(p^2-2p+2)D}{(p^2-2p+2)(p^2+2p+2)}\right]=$$

$A=0,\ C=0;\quad B=\frac{1}{4},\ D=-\frac{1}{4}.$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2-2p+2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^2+2p+2}$$

$$(B+D)p^2+2p(B-D)+2(B+D)=p;\quad \begin{cases}B+D=0\\ B-D=\frac{1}{2}\end{cases}\quad B=\frac{1}{4},\ D=-\frac{1}{4}.$$

$$F(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}$$

$$f(t)=\frac{1}{4}e^{t}\sin t-\frac{1}{4}e^{-t}\sin t=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}\sin t\cdot \operatorname{sh} t.$$

II способ. $F(p)=\frac{p}{p^2-2p+2}\cdot\frac{1}{p^2+2p+2}=\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}+\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)\cdot\frac{1}{(p+1)^2+1}\risingdotseq f_1*f_2.$

Дома: ТР, №3(а,б). ТР: №5(а,б).(КМБ)

обычные группы

Ефимов, Поспелов, т. 3

№14.105, 14.106 (методом Дюамеля).

№14.87; 14.79 } найти оригинал для изобр-я.

№14.81

№14.101, 14.103. найти оригинал (более сложный).

Исследование механических и электрических колебаний в случае периодической внешней силы. (в отсутствие трения).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = A\sin\omega t, \quad x(0)=0,\ x'_t(0)=0.$$

Перейдём к изображениям:

$$x(t) \risingdotseq \mathcal{X}(p), \quad x'_t \risingdotseq p\mathcal{X}(p), \quad x''_{tt} \risingdotseq p^2\mathcal{X}(p).$$

Уравнение в изображениях:

$$p^2\mathcal{X}(p) + k^2\mathcal{X}(p) = A\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$(p^2+k^2)\mathcal{X}(p) = A\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{X}(p) = \frac{A\omega}{(p^2+k^2)(p^2+\omega^2)}$$

Разложим дробь на простейшие:

$$\mathcal{X}(p) = \frac{Np+B}{p^2+k^2} + \frac{Cp+D}{p^2+\omega^2}; \quad B = \frac{A\omega}{\omega^2-k^2}, \ D = -\frac{A\omega}{\omega^2-k^2}$$

$$\mathcal{X}(p) = N\cdot\frac{p}{p^2+k^2} + \frac{B}{k}\cdot\frac{k}{p^2+k^2} + C\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2} + \frac{D}{\omega}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

Вернёмся к оригиналу:

$$x(t) = N\cdot\cos kt + \frac{B}{k}\cdot\sin kt + C\cdot\cos\omega t + \frac{D}{\omega}\sin\omega t.$$

$N=0,\ C=0.$

$$x(t) = \frac{A}{(k^2-\omega^2)k}\Big[-\omega\sin kt + k\sin\omega t\Big]$$

собственные колебания частоты k; вынужденные колебания частоты ω.

При $k \sim \omega$ $x(t)\to\infty$.

Рассмотрим случай $\omega \gg k$, см. рисунок.

Решение уравнения колебаний в случае резонанса.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=A\sin kt, \quad x(0)=x'(0)=0.$$

$x(t) \risingdotseq X(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p)$.

$$p^2\cdot X(p)+k^2X(p)=A\cdot\frac{k}{p^2+k^2}$$

$X(p)=\dfrac{A\cdot k}{(p^2+k^2)^2}$. Найдём оригинал. см. пример, третий способ.

Известно, что

$$\frac{k}{p^2+k^2}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin kt\,dt. \quad \text{- продифф. по } k;$$

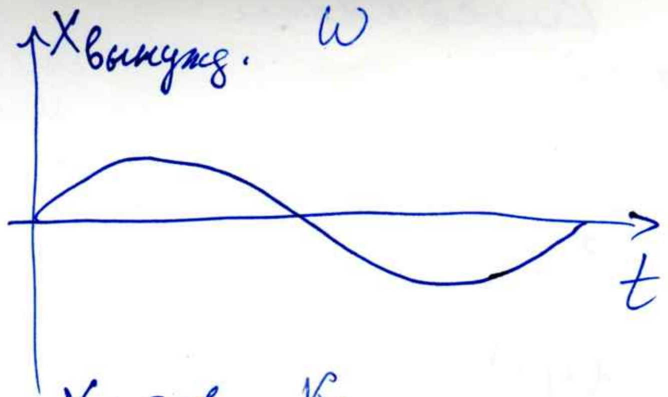
$$\frac{1}{p^2+k^2}-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot t\cdot\cos kt\,dt$$

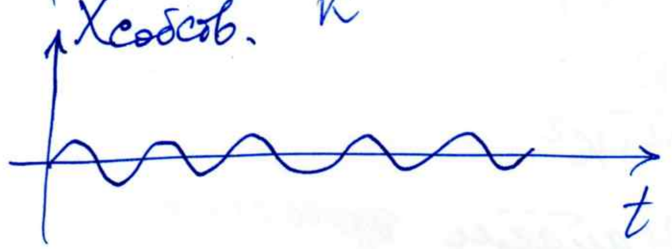
$$-\frac{2k^2}{(p^2+k^2)^2}=-\frac{1}{k}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\sin kt\,dt+\int_0^{+\infty}e^{-pt}\cdot t\cos kt\,dt$$

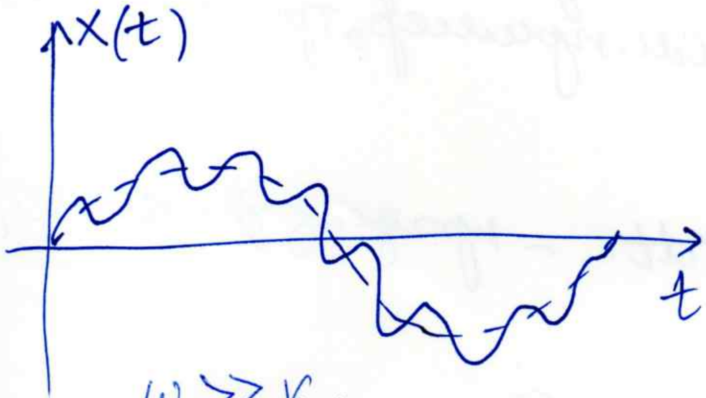
$$\frac{Ak}{(p^2+k^2)^2}\risingdotseq\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cdot\cos kt\right).$$

$$x(t)=\frac{A}{2k}\left(\frac{1}{k}\sin kt-t\cdot\cos kt\right).$$

Для слагаемого $-\frac{A}{2k}\cdot t\cdot\cos kt$ амплитуда неограниченно возрастает при росте t $\Rightarrow$ „резонанс". При совпадении частоты собств. колебаний с частотой внеш. силы.







$\omega \gg k$.

Н.С. Пискунов.
Дифференциальное и интегральное исчисления. Учебник для ВТУЗов. Т.2
М., Наука, 1985 (13-е изд.).

Контрольная работа по операционному исчислению,

Вариант № 1

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=t\cos^2 t$; б) $f(t)=t(1-e^{3t})\operatorname{ch} t$.

2.Найти изображение периодической функции с периодом T=1, если

$$f(t)=\begin{cases} 1-t, & t\in[0;1]; \\ 0, & t<0 \text{ и } t\geq 1. \end{cases}$$

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^3+4p^2+5p}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p-1)(p-4)}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''+x'-2x=e^t$, $x(0)=1$, $x'(0)=0$.

Вариант № 4

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=\operatorname{ch} t\cdot\sin^2 3t$; б) $f(t)=te^{-2t}\cos 5t$.

2.Найти изображение свёртки функций :

$f(t)=\cos t$; $g(t)=\cos 3t$.

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{2p-3}{(p-2)^3}$; б) $F(p)=\dfrac{1+pe^{-2p}}{p^2-4p+13}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''+x'-2x=1$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$

Вариант № 2

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=t^2\sin 2t$; б) $f(t)=\operatorname{ch} t(\cos 3t-\cos t)$

2.Найти изображение свёртки функций :

$f(t)=t^2$, $g(t)=\sin t$.

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{p}{p^4-2p^2+4}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{-p}+e^{-2p}}{p^2+6p+10}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''+4x'-5x=0$, $x(0)=3$, $x'(0)=-3$

Вариант № 5

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=te^{3t}\cos 4t$; б) $f(t)=\begin{cases} 1-t, & t\in[0;1] \\ 0, & t\notin[0;1] \end{cases}$

2.Найти изображение свёртки функций :

$f(t)=e^{-3t}$; $g(t)=\cos 4t$.

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^3+3p^2-4p}$; б) $F(p)=\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+8p+12}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''-4x'+4x=4t$, $x(0)=4$, $x'(0)=7$

Вариант № 3

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=\sin t\cdot \operatorname{ch} 4t$; б) $f(t)=te^{-3t}\cos 2t$

2.Найти изображение свёртки функций :

$f(t)=e^{2t}$; $g(t)=\cos 2t$

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$; б) $F(p)=\dfrac{pe^{-p}}{p^2+8p+20}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''+4x=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

Вариант № 6

1.Найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t)=t\cdot \operatorname{ch}^2 2t$; б) $f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[1;2]; \\ 0, & t\notin[1;2]. \end{cases}$

2.Найти изображение периодической функции с периодом Т=3, если

$f(t)=t$, $t\in[0;3]$.

3.Найти оригиналы по следующим изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p-2)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p^2+6p+13}$

4.Решить дифференциальное уравнение операторным методом:

$x''-6x'+9x=0$; $x(0)=0$, $x'(0)=2$.