Лекция №8

Непрерывная зависимость решений системы от начальных условий и правых частей.

Лемма (Грануолла-Беллмана). *Пусть* $u(t) \geqslant 0$, *при* $t \geqslant t_0$, $u(t) \in C[t_0, +\infty)$, *и* $\exists A, B \geqslant 0$ *такие, что*

$$u(t) \leqslant A + B \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau \quad \forall t \geqslant t_0, \tag{1}$$

тогда:

$$u(t) \leqslant Ae^{B(t-t_0)}, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Доказательство. Предположим, что $A > 0$. Рассмотрим функцию

$$\ln(A + B \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau),$$

ее производная по t в силу (1) удовлетворяет оценке

$$\frac{d}{dt} \ln(A + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau) = \frac{Bu(t)}{A + B \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau} \leqslant B.$$

Проинтегрируем последнее неравенство

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} [\ln(A + B \int_{t_0}^{s} u d\tau)] ds \leqslant \int_{t_0}^{t} B ds,$$

или

$$\ln(A + B \int_{t_0}^{t} u d\tau) - \ln A \leqslant B(t - t_0),$$

$$\ln(A + B \int_{t_0}^{t} u d\tau) \leqslant \ln A + B(t - t_0),$$

$$A + B\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \leqslant Ae^{B(t-t_0)}.$$

В силу (1) будем иметь

$$u(t) \leqslant A + B\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \leqslant Ae^{B(t-t_0)}.$$

В случае если $A = 0$

$$u(t) \leqslant B\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

и для $\forall\tilde{A} > 0$ будем иметь

$$u(t) \leqslant \tilde{A} + B\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau.$$

Из доказанного выше следует, что

$$u(t) \leqslant \tilde{A}e^{B(t-t_0)}. \tag{2}$$

Так как $\tilde{A}$ – любое получим

$$u(t) \leqslant 0.$$

$\square$

Теорема (о продолжении решения в замкнутой ограниченной области)**.** *Пусть в замкнутой ограниченной области $D \in \mathbb{R}^{n+1}$ вектор-функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Тогда любое решение системы*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \tag{3}$$

проходящее внутри области D, можно продолжить в обе стороны до выхода на границу ∂D области D, то есть продолжить на такой отрезок $[a, b]$, что точки $(a, \boldsymbol{x}(a))$ и $(b, \boldsymbol{x}(b))$ лежат на ∂D.

Доказательство. Доказательство этой теоремы не входит в программу курса. Идею доказательства мы обсуждали в прошлом семестре. □

Следствие. *Пусть D – такая замкнутая неограниченная область пространства t, $\boldsymbol{x}$, что при любых c и d часть D_{cd} области D, где $c \leqslant t \leqslant d$, ограничена. Пусть $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ в D удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Тогда решение уравнения* (3)*, проходящее через произвольную точку $(t_1, \boldsymbol{x}^1)$ внутри D, продолжается в каждую сторону или до выхода на границу области D, или до сколь угодно больших $|t|$.*

Доказательство. Возьмем такие c и d_i $(i = 1, 2, \ldots)$, что

$$c < t_1 < d_1 < d_2 < \ldots \to \infty.$$

Для любого i, по теореме о продолжении решения в замкнутой ограниченной области, решение можно продолжить в обе стороны до точек $(a, \boldsymbol{x}(a))$ и $(b_i, \boldsymbol{x}(b_i))$, лежащих на границе области D_{cd_i}. Если $b_i < d_i$ при некотором i, то точка $(b_i, \boldsymbol{x}(b_i))$ лежит на границе области D. Если же для каждого i имеем $b_i = d_i$, то решение продолжается вправо до сколь угодно больших t. Аналогично продолжаем решение влево. □

Теорема (о непрерывной зависимости решений от начальных условий и правых частей)**.** *Пусть $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, точка $(t_0, x_0) \in G$, $\boldsymbol{x}(t)$ – решение задачи*

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \end{cases} \tag{4}$$

при $t \in (a,b)$. *Рассмотрим отрезок* $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что любая другая задача*

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0, \end{cases} \tag{5}$$

в которой $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})$ *удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши*

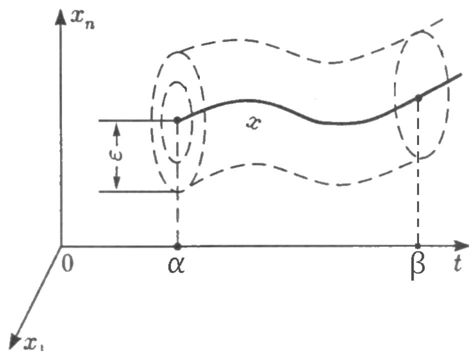
$$|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}^0| < \delta, \quad \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\| = \sup_{(t,\boldsymbol{x}) \in G} |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})| < \delta,$$

имеет решение $\boldsymbol{y}(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, *и*

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sup_{t \in [\alpha,\beta]} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим ε-трубку интегральной кривой $\boldsymbol{x}(t)$:

$$Q_\varepsilon = \{(t,x) : t \in [\alpha,\beta], |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon\}.$$



При достаточно малом ε $Q_\varepsilon \subset G$. Тогда

$$\exists L : |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})| \leqslant L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \quad \forall (t,\boldsymbol{x}),(t,\boldsymbol{y}) \in Q_\varepsilon.$$

Выберем δ так, чтобы

$$\delta(1+\beta-\alpha)e^{L(\beta-\alpha)} < \varepsilon.$$

По теореме существование и единственности решения задачи Коши, задача (5) $\boldsymbol{y}(t)$, а по теореме о продолжении решения в замкнутой ограниченной области, это решение может быть продолжено до выхода на границу трубки Q_ε. Предположим, что выход произошел на той части границы, где

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(t)| = \varepsilon.$$

Это означает, что $\exists t_1 \in (\alpha, \beta)$ (не ограничивая общности можно считать, что $t_1 > t_0$) такая, что

$$|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{y}(t_1)| = \varepsilon, \quad |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \varepsilon \text{ для } \forall t : t_0 \leqslant t < t_1.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\dot{x}(\tau) - \dot{y}(\tau)]\, d\tau = \\ = \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}^0 + \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) - \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau))]\, d\tau\end{aligned}$$

Таким образом для $\forall t \in [t_0, t_1]$ будем иметь

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| \leqslant |\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}^0| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) - \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau))| \, d\tau \right| \leqslant \delta +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau)) + \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau)) - \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau))| \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta + \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau))| \, d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau)) - \boldsymbol{g}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau))| \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\delta + \left| \int\limits_{t_0}^{t} L \, |\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{y}(\tau)| \, d\tau \right| + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \delta \, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta(1 + \beta - \alpha) + L \int\limits_{t_0}^{t} |\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{y}(\tau)| \, d\tau.$$

Таким образом к функции

$$u(t) = |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)|$$

можно применить Лемму Грануолла-Беллмана с константами $A = \delta(1 + \beta - \alpha)$ и $B = L$. Таким образом для $\forall t \in [t_0, t_1]$ будем иметь

$$u(t) = |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| \leqslant \delta(1 + \beta - \alpha) e^{L|t - t_0|} \leqslant$$

$$\leqslant \delta(1 + \beta - \alpha) e^{L(\beta - \alpha)} \leqslant \varepsilon.$$

Это противоречит тому, что

$$|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{y}(t_1)| = \varepsilon.$$

Значит $\boldsymbol{y}(t)$ определено $\forall t \in [\alpha, \beta]$ и

$$|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

$\square$