$$f(x)=\sqrt[3]{3(1+t)+5}=\sqrt[3]{8+3t}=$$

$$=2\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}t}=2\left(1+\frac{3}{8}t\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}t+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{3}{8}t\right)^2+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{3}{8}t\right)^3+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{4!}\left(\frac{3}{8}t\right)^4$$

$$\left.+o\left(\left(\frac{3}{8}t^4\right)\right)\right]=2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{32}t^2+\frac{5}{768}t^3-$$

$$-\frac{5}{3072}t^4+o(t^4)=2+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{32}(x-1)^2$$

$$+\frac{5}{768}(x-1)^3-\frac{5}{3072}(x-1)^4+o((x-1)^4)$$

Семинар 18 (01.12.16)

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда имеет место формула

$$f(x) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right] + \left\{o\left((x-x_0)^n\right)\right\}, \quad x \to x_0 \qquad (1)$$

(1) - формула Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано.

$[\dots]$ - многочлен Тейлора n-го порядка для функции в окр. т. x_0

$\{\dots\}$ - некоторая функция $\varphi(x)$; функция $\varphi(x)$ является бесконечно малой по сравнению с функцией $(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$, то есть

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Пример

$$f(x)=\sqrt{1+x}, \quad x_0=0.$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

(можно строго доказать с помощью ММИ)

$$f(0)=1.$$

$$f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$f'''(0)=\frac{3}{8}$$

$$f^{IV}(0)=-\frac{15}{16}$$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n}$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cancel{(x-0)}+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{15}{384}x^4+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{2^n\cdot n!}x^n+o(x^n),\ x\to 0$$

Таким образом можно любую функцию разложить по формуле Тейлора. В частности, имеют место следующие формулы

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+o(x^{2n+1})$

3) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + o(x^n)$

---

6) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

7) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

8) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

9) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

10) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

11) $\arccos x + \arcsin x = \frac{\Pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$

$$\arccos = \frac{\Pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \dots$$

12) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\Pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\Pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots$$

Как разложить $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена?

Способ 1. $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$$

$$f''(x) = -2(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot 3\cos^2 x}{\cos^6 x} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

И т.д.

$f(0) = 0 \qquad f'''(0) = 2$

$f'(0) = 1 \qquad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 +$

$f''(0) = 0 \qquad + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^{\cancel{5}\,4})$

<u>Способ 2.</u> ~~$tg\,x \cdot \cos x = \sin x$~~

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$tg\,x \cdot (\cos x) = \sin x. \qquad (*)$

$tg\,x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o(x^6)$

$tg\,x \sim x \qquad c_1 = 1$

$\left(x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + o(x^6)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$

$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

$x + \left(c_3 - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{1}{24}\right)x^5 + o(x^6) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$

$$\begin{cases} c_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ c_5 - \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \end{cases} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow c_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$$c_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{20-5+1}{120} =$$

$$= \frac{16}{120} = \frac{2}{15}.$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

(Метод неопред. коэф.)

<u>Как разложить по формуле Маклорена $\arcsin x$?</u>

<u>Способ 1</u> Находить производные

<u>Способ 2</u>

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+(-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-x^2)^2 +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-x^2)^3 + \ldots + (-x^2)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\ldots\boxed{-\frac{2n-1}{2}}}{n!} +$$

$$+ o\left((-x^2)^n\right)$$

$$(\arcsin x)' = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{15}{48}x^6 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (**)$$

$$\arcsin x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots + c_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$\arcsin x \sim x$

$c_1 = 1$

$$c_3 = \frac{(\arcsin x)'''|_{x=0}}{3!} = \frac{1}{3}\frac{((\arcsin x)')''|_{x=0}}{2!} = (\text{из } (**)) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$c_5 = \frac{(\arcsin)^{(5)}|_{x=0}}{5!} = \frac{1}{5}\frac{((\arcsin x)')^{(4)}}{4!} = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{40} \quad \text{и т.д.}$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^8)$$

Как получить разложение по формуле Маклорена $\operatorname{arctg} x$?

Способ 1. Непосредств. как пр.

Способ 2

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} =$$

$$= 1 + (-1)x^2 + \frac{(-1)(-2)}{2!}(x^2)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(x^2)^3 +$$

$$+ \ldots + \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots[-1-(n-1)]}{n!}(x^2)^n + o((x^2)^n) =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$$
$$+ o(x^{2n+2})$$

Нахождение предела функции с помощью формулы Тейлора.

Задача №11 из ТР (В-т 22)

Найти предел ф-ии двумя способами:

1) Используя разложение по формуле Тейлора
2) с их помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)-1-2x}{x^2}}_{f(x)}$$

Решение

Способ 1

$$\sqrt{1-x^2} = \left(1+(-x^2)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 1+\frac{1}{2}(-x^2)+o(|-x^2|) = 1-\frac{x^2}{2}+o(|x^2|)$$

$$\ln(1+2x) = 2x-\frac{(2x)^2}{2}+o(|2x|^2) =$$
$$= 2x-2x^2+o(|x^2|),\ x\to 0$$

[redacted]

$$f(x)=\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+2x-2x^2+o(x^2)-1-2x}{x^2}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{5}{2}+o(1),\ x\to 0.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{5}{2}+o(1)\right)=-\frac{5}{2}.$$

$$\frac{o(x^2)}{x^2}\qquad f(x)\cdot o(g(x))=o(f(x)\cdot g(x))$$

$$\frac{1}{x^2}\,o(x^2)=o(1).$$

$o(1)$ - бесконечно малая функция

Способ 2 (правило Лопиталя)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)-1-2x}{x^2}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x^2}+\ln(1+2x)-1-2x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2(1-x^2)^{1/2}}\cdot(-2x)+\frac{1}{1+2x}\cdot 2-2}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\frac{2-2-4x}{1+2x}}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{2}{1+2x}\right)=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$$

Задача №11 из ТР (в-т 14)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2}$$

Решение

Способ 1 (Используя разложение по формуле Тейлора)

$$\ln(1-2x) = \ln(1+(-2x)) =$$

$$= (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} + o(x^3) =$$

$$= -2x - 2x^2 - \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2} =$$

$$= \frac{x^3}{\cancel{-2x} \cancel{-2x^2} - \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) + \cancel{2x} + \cancel{2x^2}} =$$

$$= \frac{x^3}{-\frac{8}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{-\frac{8}{3}+o(1)}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim \frac{1}{-\frac{8}{3}+o(1)} = -\frac{3}{8}$$

320

Способ 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\ln(1-2x)+2x+2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(\ln(1-2x)+2x+2x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\frac{1}{1-2x}\cdot(-2)+2+4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2(1-2x)}{-2+2-4x+4x-8x^2}= \quad \to 1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x^2}}{-8\cancel{x^2}}=-\frac{3}{8}$$

Задача

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}+\ln(1-x)-1}{\arcsin x-\sin x}$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^4) \qquad \arcsin x-\sin x=\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^4 x)=$$

~~$\ln(1-x)=\ln(1+(-x))=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$~~

$$=1+x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2+$$

$$+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\cancel{\frac{x^5}{4}}\,o(x^4)\right)^3+o(x^3)=$$

$$=1+x-\cancel{\frac{x^3}{6}}+o(x^4)+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)+$$

$$+\cancel{\frac{1}{6}x^3}+o(x^3)=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\ln(1-x)=\ln|1+(-x)|=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$f(x)=\frac{\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{\frac{1}{2}x^2}+o(x^3)-\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\cancel{1}}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)}$$

$$=\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^4)}=\frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{3}+o(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{3}+o(x)}=-\frac{1}{3}\cdot 3=-1$$

<u>Задача</u> $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}3x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}=[1^\infty]=$

$$=\lim_{x\to 0}\Bigg(1+\underbrace{\frac{\cos x}{\operatorname{ch}3x}-1}_{g(x)}\Bigg)^{\overbrace{\operatorname{ctg}^2 x}^{h(x)}}=e^{-5}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch}3x}-1\right)=0$

2) $\lim g(x)\cdot h(x)=$ 322

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{ch\,3x}-1\right)ctg^2 x =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - ch\,3x)}{ch\,3x}\cdot\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left[\sin x \sim x\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - ch\,3x}{x^2\, ch\,3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - ch\,3x}{x^2} =$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$ch\,3x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-1-\frac{9x^2}{2}+o(x^3)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-5x^2+o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-5+o(x)}{1} = -5$$

<u>Задача</u> $\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty] =$

$$= \lim_{x\to 0}\Big(1+\underbrace{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1}_{g(x)}\Big)^{\overset{\frac{1}{x}}{h(x)}} = e^{-1/2}$$

$$\lim g(x) = \lim\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}-1\right) = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}-1\right)\cdot\frac{1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{ex}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}}-e}{ex}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{ex}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x}}-e}{ex}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}-e}{ex}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{2}+o(x)+o(x)-1}{x}=$

$=-\frac{1}{2}.$

<u>Задача</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{ch}x-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x+\sqrt[3]{1-3x}-2\cos x+1}=$

$=\left[\frac{0}{0}\right]$

$x+\operatorname{ch}x-e^{\arcsin x}=x+\cancel{1}+\frac{x^2}{2!}+o(x^3)-\cancel{1}-$
$-\arcsin x-\frac{\arcsin^2 x}{2}-\frac{\arcsin^3 x}{6}-o(x^3)=$

$=\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+o(x^3)-\cancel{x}-\frac{x^3}{6}-o(x^4)-$
$-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^3-$
$-o(x^3)=\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^3)-\cancel{\frac{x^2}{2}}+o(x^3)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{6}$

$$-o(x^3)\cancel{-o(x^3)}=-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\operatorname{tg}x+\sqrt[3]{1-3x}-2\cos x+1=\cancel{x}+\frac{x^3}{3}+o(x^4)+$$
$$+1+\cancel{\frac{1}{3}\cdot(-3x)}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-3x)^2}{2}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\cdot(-3x)^3}{6}+$$
$$+o((3x)^3)-2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+1=$$
$$=\frac{x^3}{3}+\cancel{o(x^4)}+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\frac{5}{3}x^3-\cancel{2}+\cancel{x^2}+\cancel{1}+o(x^3)=$$
$$=-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+o(1)}{-\frac{4}{3}+o(1)}=\frac{1}{4}$$

<u>Задача</u> $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x}\right)}-2\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1+\cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{x}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2}}{2}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)+1-\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^2}{2}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)-2\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(2x-2-\frac{1}{4x^2}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}+o(1)\right)=-\frac{1}{4}$$

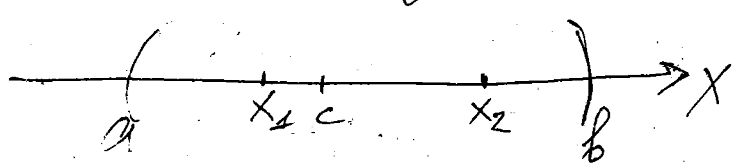
Тема 13 Исследование функций и построение их графиков

Возрастание и убывание функции. Точки экстремума.

Функция $f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке X, если

$$(\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2)$$

Утв Если $(\forall x \in (a,b)) : f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке (a,b)



Функция $f(x)$ удовл. всем условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2] \Rightarrow$

$$(\exists c \in [x_1, x_2]) : f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0.$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

<u>Задача</u>

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{\sin(x-1)}} = \left[\begin{matrix}x=1+t\\ t=x-1\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{t\to0}\left(1+\underbrace{\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{2}{2t+t^2} - 1}_{g(t)}\right)^{\frac{1}{\sin t}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

1) $$\lim_{t\to0} g(t) = \lim_{t\to0}\left(\frac{t^2+2t-2\ln(1+t)}{\ln(1+t)(2t+t^2)} - 1\right) =$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{t^2+2t-2\ln(1+t)}{2t^2} - 1\right) =$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{t^2+\cancel{2t}-\cancel{2t}+t^2+o(t^2)}{2t^2} - 1\right) = \cancel{1-1}$$

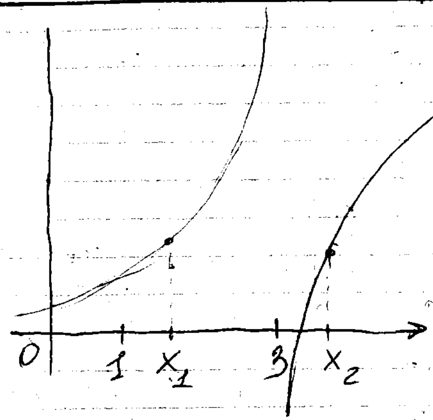
$$= \lim_{t\to0}\left(1+o(1)-1\right) = 0$$

2) $$\lim_{t\to0} g(t)h(t) = \lim_{t\to0}\left(\frac{1}{\ln(1+t)} - \frac{2}{2t+t^2} - 1\right)\frac{1}{\sin t} =$$

$$= \lim_{t\to0}\left(\frac{\cancel{t^2}+\cancel{2t}-\cancel{2t}+\cancel{t^2}-\frac{2t^3}{3}+o(t^3)-2t^2}{2t^3}\right) =$$

$\| = \lim\limits_{t\to 0} t^{4}\left(-\frac{1}{3} + o(1)\right) = -\frac{1}{3}$

Семинар 19 (09.12.16)



Функция возрастает на промежутке $(-\infty, 3)$ и на промежутке $(3, +\infty)$, (нельзя писать возрастает на $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

$x_2 > x_1$

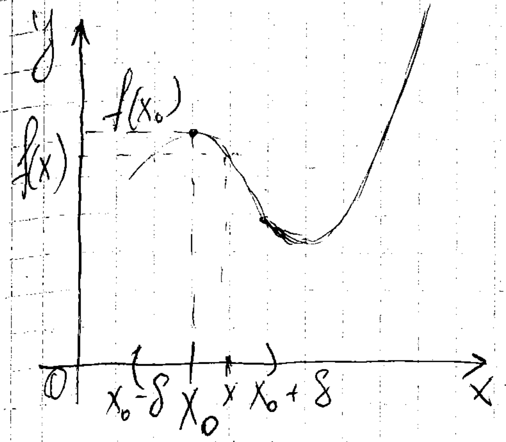
$f(x_2) < f(x_1)$

Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой максимума функции, если:

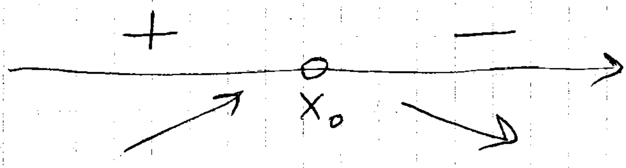
1) функция определена в

1 некоторой окрестности x_0

2) $(\exists\, \delta>0)(\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)): f(x)<f(x_0)$



Утв. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $(\forall x \in (x_0-\delta, x_0)): f'(x)>0$, $(\forall x \in (x, x_0+\delta)): f'(x)<0$. то x_0 - точка максимума функции $f(x)$



Задача Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума

329

Функции $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

Решение

$D(f)=(0;1)\cup(1;+\infty)$

$f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

знак $f'(x)$

$0 \overset{-}{\searrow} 1 \overset{-}{\searrow} e \overset{+}{\nearrow} x$

Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(0;1)$ и на промежутке $(1;e)$

Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(e;+\infty)$

$x=e$ – точка минимума.

Задача $f(x)=x^3-9x^2+24x-18$

Найти точки экстремума, найти промежутки возрастания и убывания функции.

Решение

$D(f)=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x^2-6x+8)=$

3 $=3(x-2)(x-4)$

$+ \quad 2 \quad - \quad 4 \quad +$ знак $f'(x)$

$\nearrow \; 2 \; \searrow \; 4 \; \nearrow$

Функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 2)$ и $(4; +\infty)$

Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(2, 4)$

$x = 2$ – т. максимума

$x = 4$ – т. минимума

Задача

$f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$

Промежутки возрастания, убывания, точки экстремума.

$D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-x} + (-x^3) \cdot e^{-x} = x^2 e^{-x}(3 - x)$

$+ \quad 0 \quad + \quad 3 \quad -$ знак $f'(x)$

$\nearrow \; 0 \; \nearrow \; 3 \; \searrow$

[redacted]

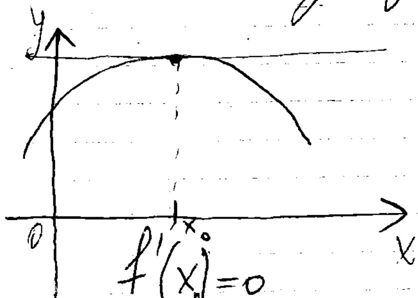
$f(x)$ возрастает на $(-\infty, 3)$

$f(x)$ убывает на $(3; +\infty)$

$x = 3$ – т. максимума.

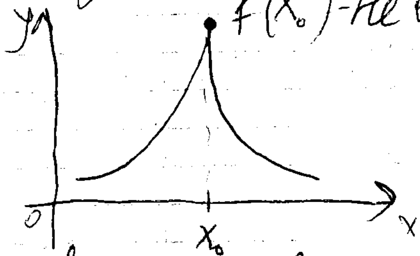
Теорема Ферма

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то [redacted] производная $f'(x_0)$ либо равна [redacted] нулю, либо не существует.

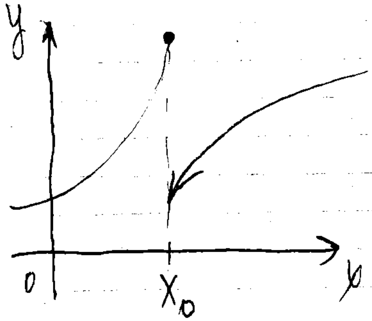


$f'(x_0) = 0$

$f'(x_0)$ - не сущ



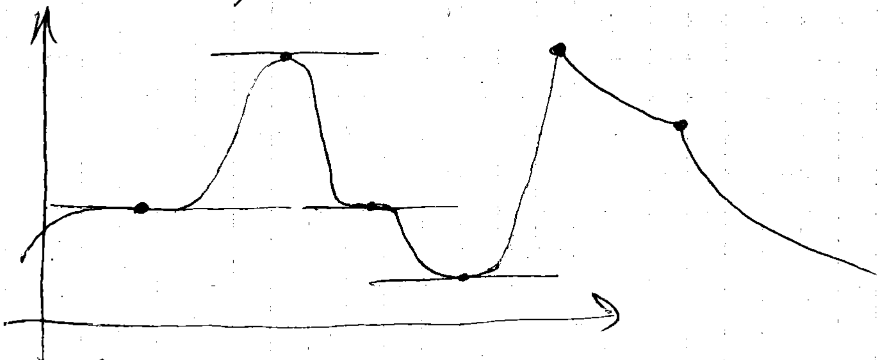
$f(x)$ непр. в т. x_0



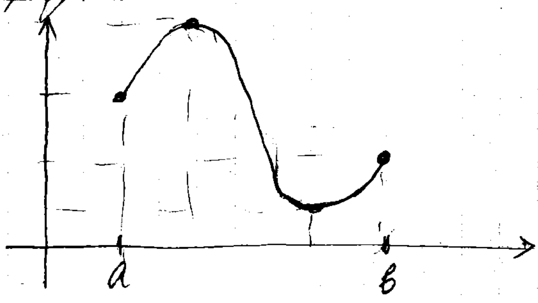
5

Точки в которых производная равна 0 или не существует называются <u>критическими точками</u> (по первой производной)

Точки в которых производная равна нулю, называются <u>стационарными</u> точками



<u>Нахождение наибольших и наименьших значений функции</u>



333

6

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и пусть $x_1, x_2, \dots x_k$ — точки максимума функции $f(x)$ $(a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b)$ Тогда

$$\underbrace{\max_{x \in [a,b]} f(x)}_{} = \max\{f(a), f(x_1) \dots f(x_k), f(b)\}$$

↑ наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

<u>Задача</u> $f(x) = x - 2\ln x$

Найти наиб. и наименьшее значения функции на отр-ке $[1, e]$.

<u>Решение</u>

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

$$\begin{array}{ccccc} & - & & + & \\ 1 & \searrow & 2 & \nearrow & e \end{array}$$

7

$f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$

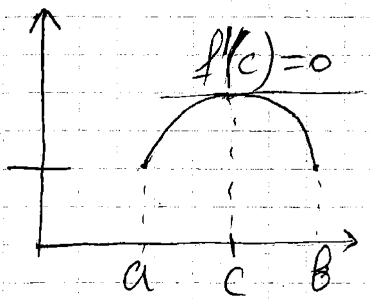
$f(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}613$

$f(e) = e - 1 \approx 0{,}718$.

$$\max_{x\in[1,e]} f(x) = \max\{f(1), f(e)\} = 1.$$

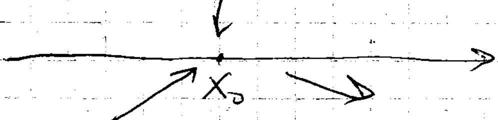
$$\min_{x\in[1,e]} f(x) = \min\{f(1), f(2), f(e)\} = 2 - 2\ln 2.$$

Замечание 1. Из теоремы Ферма можно вывести теорему Ролля.

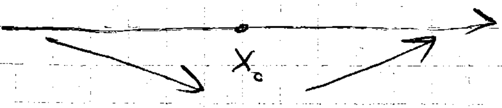


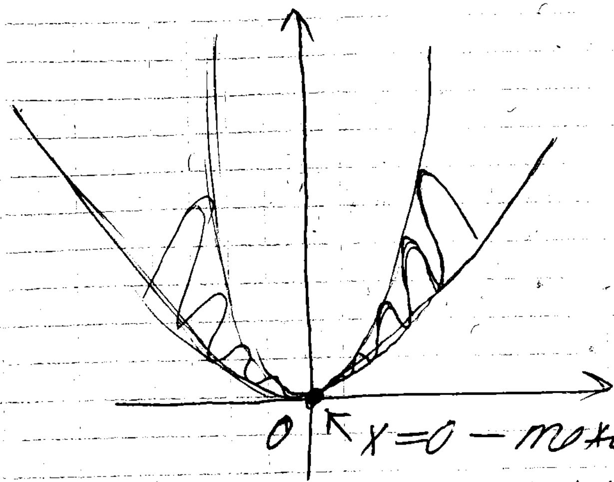
Замечание 2

типичный случай точки максимума



типичный случай точки минимума (но возможны и другие ситуации — см. след. рисунок)

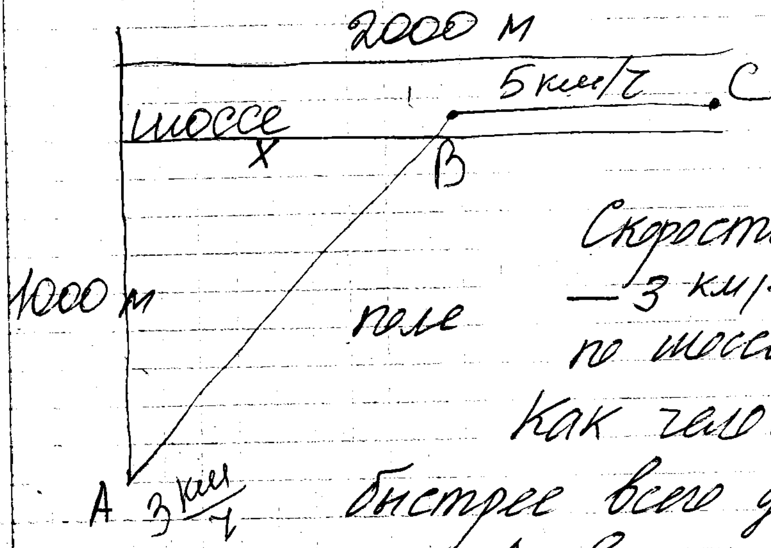




$x=0$ — тоже точка минимума

Приложение производной

Задача



Скорость по полю — 3 км/ч, по шоссе — 5 км/ч

Как человеку быстрее всего добраться из точки A в точку C?

9

$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3} + \frac{2-x}{5}$

$t'(x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x * -\frac{1}{5} =$

$= \frac{x}{3\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5}$

$\frac{x}{3\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{5} = 0$

$\frac{x}{3\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{5}$

$5x = 3\sqrt{x^2+1}$

$\frac{5x}{3} = \sqrt{x^2+1}$

$\frac{25x^2}{9} = x^2+1$

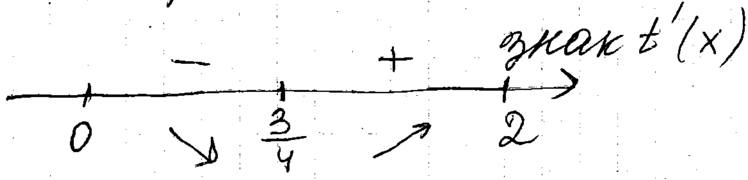
$16x^2 = 9$

$x = \frac{3}{4}$ км $= 750$ м

$t(0) = \frac{11}{15}$ ч $= 44$ мин.

$t(\frac{3}{4}) = \frac{2}{3}$ ч $= 40$ мин

$t(2) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ч $\approx 44,7$ мин.



$x = \frac{3}{4}$, точка минимума

$x = 750$ м.

$t(\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{\frac{25}{16}}}{3} + \frac{2-\frac{3}{4}}{5} = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} =$

$t = \frac{2}{3}$ ч $= 40$ мин

337