Содержание

1 Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1 Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. *Уравнения вида $y' = f(x)g(y)$ - уравнения с разделяющимися переменными.*

Решаем:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\
\frac{dy}{g(y)} &= f(x)dx \\
\int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx \\
\ln(g(y)) &= \int f(x)dx
\end{aligned}$$

1.2 Однородные уравнения

Определение. *Уравнения вида $y' = f(\frac{y}{x})$ или $y' = \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, где функции $M(x,y), N(x,y)$ вида:*

$$\begin{aligned}
M(x,u) \mapsto M(kx,ky) = k^p M(x,y) \\
N(x,u) \mapsto N(kx,ky) = k^p N(x,y)
\end{aligned}$$

называются однородными.

Говоря проще, это ДУ, где при замене $y \mapsto ky, x \mapsto kx$ уравнения не изменятся.
Решаем:

1. Первый вариант:
   Сведём $y' = f(\frac{y}{x})$ к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого введём замену:

$$\begin{aligned}
y &= xz(x), \\
y' &= z'x + z
\end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение $y' = f(\frac{y}{x})$ можно будет представить в виде

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$$

Дальше решаем как уравнение с разделяющимися переменными 1.1.

2. Второй вариант:

Рассматривая уравнения вида $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, получим три случая:

(a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a_1x + b_1y = z(x),\ a_2x + b_2y = \lambda z(x)$. Отсюда перейдём к рассмотрению уравнения с разделяющимися переменными, решаем как 1.1:

$$\frac{dz}{dx} = b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right) + a_1$$

Рассмотрим пример 2a:

$$y' = \frac{x - y - 1}{x - y - 2}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\textit{Замена: } z = x - y - 2$$

$$z' = 1 - y' \quad y' = 1 - z'$$

$$1 - z' = \frac{z + 1}{z} \quad 1 - z' = 1 + \frac{1}{z}$$

$$z' = -\frac{1}{z} \quad zz' = -1$$

$$\int zz'\,dx = \int -1\,dx \quad \int z\,dz = -\int dx$$

$$\frac{z^2}{2} = -x + \frac{C}{2}$$

$$z^2 = -2x + C$$

$$(x - y - 2)^2 + 2x = C$$

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1 = c_2 = 0$:

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right) = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1^2 + c_2^2 \neq 0$:

Рассмотрим систему уравнений, имеющую единственное решение:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1u + b_1v = 0 \\ a_2u + b_2v = 0 \end{cases}$$

Т.к. $y'_x = v'_u$, то $v'_u = f\left(\dfrac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$ - свели к случаю 2b.

1.3 Неоднородные уравнения

Определение. *Неоднородными называются уравнения вида* $y' + p(x)y = b(x)$.

Решать их удобнее всего методом Бернулли.

1.3.1 Метод Бернулли

Ищем решение вида $y = uv$, где u, v - новые неизвестные функции. Подставим их в исходное уравнение:

$$(uv)' + p(x)uv = b(x)$$

Перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = b(x)$$

Теперь подберём v так, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Тогда

$$v = ce^{-\int p(x)dx}$$

Для определённости положим $c = 1$ и выразим теперь u:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = b(x)$$
$$u' = e^{\int p(x)dx}b(x)$$
$$u = \int e^{\int p(x)dx}b(x)dx$$

Окончательный ответ получим, подставив найденные значения u, v:

$$y = uv$$

1.4 Уравнения Бернулли

Определение. *Уравнением Бернулли называется уравнение вида*

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

Решаем:

1. Разделим исходное уравнение на y^{α}:

$$y^{-\alpha}y' = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

2. Введём замену:

$$z(x) = y^{1-\alpha}$$
$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

3. Исходное уравнение запишется:

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$$

   Оно, в свою очередь, решается методом Бернулли 1.3.1.

1.5 Уравнения в полных дифференциалах

Определение. *Уравнение вида*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

где $M'_y = N'_x$, называется уравнением в полных дифференциалах.

Решаем:

1. Если $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, можем записать систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$$

2. Вычислим $\int M(x,y)dx + \varphi(y)$ - полагая, что $y = const$

3. Затем $\left(\int M(x,y)dx\right)'_y + \varphi'_y(y) = N(x,y)$ - отсюда получим $\varphi(y)$

4. Окончательный ответ получим, подставив в следующее выражение найденную $\varphi(y)$: $F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$

2 Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

2.1.1 В уравнение не входит y(x)

Имеем ДУ вида:
$$F(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$$
Замена:
$$y^{(k)} = z(x)$$

2.1.2 В уравнение не входит переменная x

Имеем ДУ вида:
$$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$
Замена:
$$y' = p(y)$$
$$y'' = (y')' = p'p$$

2.1.3 Уравнение однородно относительно y(x) и её производных

Имеем ДУ, где замены $y \mapsto ky, y' \mapsto ky', \cdots, y^{(n)} \mapsto ky^{(n)}$ не меняют уравнения.

Замена:
$$y' = yz(x)$$

2.1.4 Уравнение однородно относительно x и y(x) в обобщённом смысле

Имеем ДУ, где замены $y \mapsto k^m y, y' \mapsto k^{m-1}y', \cdots, y^{(n)} \mapsto k^{m-n}y^{(n)}, x \mapsto kx$ не меняют уравнения.

Замена:
$$x = e^t$$
$$y = ze^{mt}$$

Рассмотрим следующее уравнение:

Пример

Решим уравнение

$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$

$$(kx)(k^{m-2}y'') - (kx)(k^m y)(k^{m-1}y') = k^{2m}y^2 - 2k^{m-1}y'$$

$$k^{m-1}xy'' - k^{2m}xyy' = k^{2m}y^2 - 2k^{m-1}y'$$

$$m - 1 = 2m \qquad m = -1$$

$$xy'' - xyy' = y^2 - 2y'$$

$$\text{Замена: } x = e^t \quad y = z(t)e^{-t} \quad 1 = e^t t'_x \quad t'_x = e^{-t}$$

$$y'_x = (ze^{-t})'_t t'_x = (z'e^{-t} - ze^{-t})e^{-t} = (z' - z)e^{-2t}$$

$$y''_{xx} = [(z' - z)e^{-2t}]'_t t'_x = [(z'' - z')e^{-2t} - 2(z' - z)e^{-2t}]e^{-t} =$$

$$= (z'' - 3z' + 2z)e^{-3t}$$

$$e^t(z'' - 3z' + 2z)e^{-3t} - e^t ze^{-t}(z' - z)e^{-2t} = z^2e^{-2t} - 2(z' - z)e^{-2t}$$

$$(z'' - 3z' + 2z) - z(z' - z) = z^2 - 2z' + 2z$$

$$(z'' - 3z' + 2z) - zz' + z^2 = z^2 - 2z' + 2z$$

$$z'' - z' - zz' = 0$$

2.1.5 Уравнения с интегрируемой комбинацией

Имеем произвольное ДУ, в котором имеется одна из следующих интегрируемых комбинаций:

$$2yy' = (y^2)'$$

$$y''y + (y')^2 = (y'y)^2$$

$$\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)'$$

$$\frac{(y')^2 - y''y}{(y')^2} = \left(\frac{y}{y'}\right)'$$

$$y''(y-1) - (y')^2 = y'(y-1)^2$$

2.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения

2.2.1 ЛОДУ общего вида

Определение. *Уравнение вида*

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

где L - дифференциальный оператор, называются линейными однородными уравнениями.

Решаем:

Если это произвольное ЛОДУ n-го порядка, пытаемся понизить его порядок описанными выше способами.

В случае уравнения второго порядка при известном частном решении (которое иногда можно подобрать и самостоятельно) можно воспользоваться формулой Лиувилля для понижения порядка ДУ.

2.2.2 Понижение порядка у ЛОДУ II порядка с формулой Лиувилля

Необходимо найти общее решение однородного уравнения (1), назовём его $y_{\text{оо}}$. При этом известно частное решение $y_{\text{ч}}$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\left(\frac{y_{\text{оо}}}{y_{\text{ч}}}\right)' = \frac{W}{y_{\text{ч}}^2}$$

где W - определитель Вронского ФСР данного уравнения в некоторой точке.

Теперь воспользуемся формулой Лиувилля и перепишем предыдущее равенство:

$$\left(\frac{y_{\text{оо}}}{y_{\text{ч}}}\right)' = \frac{W}{y_{\text{ч}}^2} = \frac{c * \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{y_{\text{ч}}^2}$$

Отсюда $y_{\text{оо}} = y_{\text{ч}} * \displaystyle\int \frac{c * \exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{y_{\text{ч}}^2}dx$

2.2.3 ЛОДУ с постоянными коэффициентами

$$Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0, a_i = const\, \forall i = \overline{0, \cdots, n}$$

Решаем:

Составим характеристическое уравнение:

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Решив данное уравнение, по его корням с помощью таблицы ниже найдём решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

Корень характеристического уравнения	Соответсвующие решения ЛОДУ
$\lambda_0 = a \in \mathbb{R}$ λ_0 - корень кратности 1	$y_ч = ce^{\lambda_0 t}$
$\lambda = a \in \mathbb{R}$ λ - корень кратности k	$y_ч = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1})$
Корни кратности 1 $\begin{cases} \lambda_0 = \alpha + i\beta \\ \overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta \end{cases}$	$y_ч = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$
Корни кратности k $\begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta \\ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \end{cases}$	$y_ч = e^{\alpha t}\cos(\beta t)(A_0 + A_1 t + \cdots +$ $+ A_{k-1}t^{k-1}) + e^{\alpha t}\sin(\beta t)(B_0 + B_1 t +$ $+ \cdots + B_{k-1}t^{k-1})$

2.3 Линейные неоднородные ДУ

2.3.1 Общего вида

Определение. *Уравнение вида*

$$Ly = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{2}$$

где $f(x) \not\equiv 0$, называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением.

Решаем:

2.3.2 Метод вариации произвольных постоянных

1. $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$
2. $y_{оо}$ найдём из решения ЛОДУ, соответвующего $Ly = 0$. Отсюда же получим некоторую ФСР для данного ЛОДУ: $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$

3. Будем искать $y_{\text{он}} = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$
   Из системы
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + \dots + c_n'(x)y_n(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \dots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$
   получим набор $\{c_1'(x), c_2'(x), \cdots, c_n'(x)\}$ - из него функции $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ могут быть получены интегрированием.

4. Наконец подставим в $y_{\text{он}} = c_1(x)y_1(x)+\dots+c_n(x)y_n(x)$ полученные действием равнее функции $c_i(x)$ и окончательно получим ответ.

Замечание. *Частное решение можно подобрать, ориентируясь на правую часть исходного уравнения: $y_{\text{чн}}(x)$ чаще всего удобно искать в виду многочлена/экспоненты/-экспоненты, умноженной на многочлен.*

2.3.3 ЛНДУ с постоянными коэффициентами

Определение.

$$Ly = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x), a_i = const\ \forall i = \overline{0, \cdots, n}$$

Решаем:

1. $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$
2. $y_{\text{оо}}$ найдём из решения ЛОДУ с помощью характеристического многочлена 2.2.3
3. $y_{\text{чн}}$ - если правая часть представима в виде
$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_r(x)\cos(\beta x) + Q_s(x)\sin(\beta x)\right) \tag{3}$$
   (где $P_r(x), Q_s(x)$ - многочлены порядков r, s соответственно) или суммы таких выражений (выражение (3) называется квазимногочленом), то найти его частное решение можно по приведённой ниже таблице.

   Замечание. *Если в правой части есть выражение вида*
$$(P_r(x)\cos(\beta x) + Q_s(x)\sin(\beta x))$$
   то наличие множителя e^{0x} всё равно ***необходимо учитывать*** *и лучше сразу его дописать, т.к. таким образом будет удобнее сверяться с таблицей.*

   Пояснение. *P_r - многочлен со старшей степенью r. Если есть многочлены $P_r(x)$, $Q_s(x)$, то $m = \max\{r, s\}$ - это максимальная степень среди степеней r и s.*

Правая часть выражения	Соответсвующее частное решение
$e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)$ α - корень характеристического многослена кратности k. e^{0x} тоже считается!	$e^{\alpha x} x^k (A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $a_i \neq A_i$
$e^{\alpha x}\left(P_r(x)\cos(\beta x) + Q_s(x)\sin(\beta x)\right)$ Корни хар. многочлена кратности k: $\begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta \\ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \end{cases}$	$e^{\alpha x} x^k \left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right)$ $m = \max\{r, s\}$
$e^{\alpha x}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)$ α не является корнем характеристического многослена.	$e^{\alpha x}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_m x^m)$ $a_i \neq A_i$
$e^{\alpha x}\left(P_r(x)\cos(\beta x) + Q_s(x)\sin(\beta x)\right)$ Не кратные корни хар. многочлена: $\begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta \\ \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \end{cases}$	$e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right)$ $m = \max\{r, s\}$

Чтобы найти числовые коэффициенты в частных решениях, подставим найденное по табличке $y_{\text{чн}}$ в исходное выражение $Ly = f(x)$ и сопоставим левые и правые части получившегося равентсва.

4. Если правая часть не квазимногочлен или не сумма квазимногочленов, то частное решение ЛНДУ находим методом вариации произвольной постоянной - см. 2.3.2.

Замечание. *Если функция в правой части ЛНДУ представима в виде суммы квазимногочленов, т.е. $Ly = f(x)$ и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где f_1, f_2 - квазимногочлены, то $y_{\text{чн}} = y_1 + y_2$, где y_1, y_2 - частные решения $Ly = f_1(x), Ly = f_2(x)$ соответственно.*

3 Преобразование Лапласа

Определение. *Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется преобразование вида:*

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \tag{4}$$

В таком случае $f(t)$ называется оригиналом, $F(p)$ - изображением функции. Связь между ними записывается следующим образом:

$$f(t) \risingdotseq F(p)$$

3.1 Теоремы

Теорема 1 (О дифференциировании оригинала). *$f(t) \risingdotseq F(p)$ и функции*

$$f^{(k)}(t), k = \overline{1, 2, \cdots, n}$$

- являются оригиналами. Тогда:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - n^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

Теорема 2 (О дифференциировании изображения). *$f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда:*

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$$

Теорема 3 (Смещения). *$f(t) \risingdotseq F(p), p_0 \in \mathbb{C}$, тогда:*

$$e^{p_0 t} f(t) \risingdotseq F(p - p_0)$$

Теорема 4 (Подобия).

$$f(t) \risingdotseq F(p), Re\, p > \alpha, \Rightarrow\Rightarrow \forall \beta > 0 \text{ выполнено:}$$

$$f(\beta t) \risingdotseq F(\frac{p}{\beta})$$

Теорема 5 (Запаздывания). *$f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\tau > 0$, тогда:*

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p)$$

Теорема 6 (Опережения). *$f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\tau > 0$, тогда:*

$$f(t + \tau) \risingdotseq e^{p\tau} \left(F(p) - \int\limits_0^{\tau} e^{-pt} f(t) dt \right)$$

3.2 Таблица оригиналов часто встречающихся функций

Оригинал	Изображение
$c = const$	$\dfrac{c}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos(t)$	$\dfrac{p}{p^2+1}$
$\sin(t)$	$\dfrac{1}{p^2+1}$
$\cos(\beta t)$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
$\sin(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\cos(\beta t)$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$

3.3 Изображение периодической функции

Пусть задана функция-оригинал $f(t)$ с периодом T, тогда:

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

3.4 Восстановление оригинала по изображению

1. Сравним $F(p)$ с табличными изображениями 3.2. Если попалась табличная функция - получили ответ.

2. Если $F(p)$ - дробь, то раскладываем её в сумму простейших и подбираем оригинал к каждой из них. Тогда сумма оригиналов данных простейших дробей будет оригиналом $F(p)$.

3. $F(p) = G(p)K(p)$ - т.е. $F(p)$ представима как произведение двух изображений, оригиналы которых нам известны. Тогда $F(p) \risingdotseq g(t) * k(t)$, где $g(t) \fallingdotseq G(p)$, $k(t) \fallingdotseq K(p)$, '$*$' - операция свёртки оригиналов.

   Определение. *Свёрткой функций $f_1(t), f_2(t)$ называется интеграл:*

   $$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int\limits_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau$$

4. $pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1'(t) * f_2(t) + f_1(0) f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t) + f_2(0) f_1(t)$

5. $pF(p)G(p) \risingdotseq f(t)\varphi(0) + \int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau) d\tau$

4 Решение задачи Коши

4.1 С нулевыми начальными условиями

Задача Коши формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} Ly = f(t) \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Проще всего её решать методом Дюамеля. Для этого решим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} Lz = 1 \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

За $y(t), z(t)$ обозначим решения основной и вспомогательной задач соответственно. Тогда

$$y(t) = \int\limits_0^t z'(\tau) f(t-\tau) d\tau \tag{7}$$

Рассмотрим на примере:

Решим задачу Коши:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

С помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши:

$$z'' + az' + bz = 1, z(0) = 0, z'(0) = 0$$

1. Сначала решим вспомогательную задачу:

$$z'' - 5z' + 6z = 1, z(0) = 0, z'(0) = 0$$

- По теореме о дифференциировании оригинала:

$$z' \risingdotseq pZ(p) - 0$$
$$z'' \risingdotseq p^2 Z(p) - 0 - 0$$

  где $Z(p)$ - изображение функции $z(x)$.

- $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$

Запишем вспомогательную задачу в преобразованном виде:

$$p^2Z(p) - 5pZ(p) + 6Z(p) = \frac{1}{p}$$
$$Z(p)(p^2 - 5p + 6) = \frac{1}{p}$$
$$Z(p) = \frac{1}{p(p-3)(p-2)}$$

Разложим $\dfrac{1}{p(p-3)(p-2)}$ на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p-2}$$

Найдём A, B, C:

$$A(p-3)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-3) = 1$$

$$p = 0: \;\; 6A = 1, A = \frac{1}{6}$$
$$p = 2: \;\; -2C = 1, C = -\frac{1}{2}$$
$$p = 3: \;\; 3B = 1, B = \frac{1}{3}$$

Отсюда:

$$\frac{1}{p(p-3)(p-2)} = \frac{1}{6} * \frac{1}{p} - \frac{1}{2} * \frac{1}{p-2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{p-3} \fallingdotseq \frac{1}{6} - \frac{1}{2} * e^{2x} + \frac{1}{3} * e^{3x} = z(x)$$

2. Т.к. $z(x)$ - решение вспомогательной задачи, то решение исходной задаётся формулой: $y(x) = \int\limits_0^x z'(\tau)f(x-\tau)d\tau$, где $f(x) = e^{-x}$.

$$y(x) = \int\limits_0^x z'(\tau)f(x-\tau)d\tau = \int\limits_0^x (-e^{2\tau} + e^{3\tau})e^{-(x-\tau)}d\tau = e^{-x}\int\limits_0^x (-e^{3\tau} + e^{4\tau})d\tau =$$
$$= e^{-x} * \left[-\frac{1}{3}e^{3\tau}\Big|_0^x + \frac{1}{4}e^{4\tau}\Big|_0^x \right] = e^{-x}\left[-\frac{1}{3}(e^{3x} - 1) + \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) \right] =$$
$$= -\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^{-x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4} - \frac{e^{-x}}{4} = -\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4} + \frac{e^{-x}}{12}$$

Ответ: $y = -\dfrac{e^{2x}}{3} + \dfrac{e^{3x}}{4} + \dfrac{e^{-x}}{12}$

4.2 С ненулевыми начальными условиями

Проще всего будет решать операторным методом. Рассмотрим на примере:

Операторным методом найти решение задачи Коши:

$$y'' + 2 * 2y' + (4 - 9)y = xe^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = -1$$

1. Преобразуем исходное выражение:

$$\begin{aligned}
&y \risingdotseq Y(p)\\
&y' \risingdotseq pY(p) - 1\\
&y'' \risingdotseq p^2Y(p) - p + 1\\
&xe^{-2x} \risingdotseq \frac{1}{(p+2)^2}
\end{aligned}$$

2. Запишем в преобразованном виде:

$$\begin{aligned}
&p^2Y - p + 1 + 4\,(pY - 1) - 5Y = \frac{1}{(p+2)^2}\\
&Y(p^2 + 4p - 5) - p + 1 - 4 = \frac{1}{(p+2)^2}\\
&Y(p^2 + 4p - 5) = \frac{1}{(p+2)^2} + p + 3 = \frac{1 + (p+2)^2(p+3)}{(p+2)^2}\\
&Y = \frac{1 + (p^2 + 4p + 4)(p+3)}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} = \frac{p^3 + p^2(3+4) + p(12+4) + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} =\\
&= \frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)}
\end{aligned}$$

3. Представим $\dfrac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)}$ как сумму простейших дробей:

$$\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+5} + \frac{D}{(p+2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&A(p+2)(p-1)(p+5) + B(p+2)^2(p+5) + C(p+2)^2(p-1) + D(p-1)(p+5) =\\
&= p^3 + 7p^2 + 16p + 13
\end{aligned}$$

$$p = 1: \quad 54B = 37, \qquad B = \frac{37}{54}$$

$$p = -5: \quad -54C = -17, \quad C = \frac{17}{54}$$

$$p = -2: \quad -9D = 1, \qquad D = -\frac{1}{9}$$

$$p = 0: \quad -10A + \frac{20 * 37}{54} - \frac{4 * 17}{54} + \frac{1 * 5}{9} = 13$$

$$-10A + 13 = 13, A = 0$$

4. $F(p) = \frac{37}{54}\frac{1}{p-1} + \frac{17}{54}\frac{1}{p+5} - \frac{1}{9(p+2)^2}$

- $\frac{1}{p-1} \risingdotseq e^x$
- $\frac{1}{p+5} \risingdotseq e^{-5x}$
- $\frac{1}{(p+2)^2} \risingdotseq e^{-2x}x$

Ответ: $y(x) = \frac{37}{54}e^x + \frac{17}{54}e^{-5x} - \frac{1}{9}e^{-2x}x$

5 Исследование нулей ДУ второго порядка

Определение. *Нулём функции $y(x)$ называется x_0 такое, что $y(x_0) = 0$.*

Постановка задачи: необходимо оценить кол-во нулей ДУ второго порядка вида:

$$y'' + r(x)y = 0$$

(Любое уравнение второго порядка сведётся к такому виду заменой $y = \exp(-\int a_1(x)/2dx)$, где $a_1(x)$ - коэффициент перед y').

Теорема 7 (Сравнения Штурма)**.** *Пусть $y(x), z(x)$ - любые отличные от тождественного нуля решения уравнений*

$$y'' + r(x)y = 0$$
$$y'' + R(x)y = 0$$

соответственно. Причём $r(x) \leq R(x)$ на $[\alpha, \beta]$, $y(x), z(x)$ определены на $[\alpha, \beta]$ и $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ - два последовательных нуля $y(x)$, тогда существует $x_0 \in [\alpha, \beta]$ - ноль решения $z(x)$.

Пояснение. *Говоря короче: между нулями уравнения с меньшим коэффициентом зажат нуль большего.*

Следствие 1. *Нули любых двух не тождественно равных нулю линейно независимых решений ДУ второго порядка строго чередуются.*