Занятие 12.

Применение функции Ляпунова для иссл-я устойчивости т. покоя.

Ляпунов Александр Михайлович

Теор 1. Пусть для системы

$$\frac{d\bar{X}}{dt}=\bar{f}(x)$$ существует функция

$V(x_1,\dots,x_n)$, знакоопределённая в нек-рой окрестности точки покоя $(0,\dots,0)$, $V(0,\dots,0)=0$.

Если $\frac{dV}{dt}$ (в силу системы) имеет знак, противоп. с V, то т. покоя <u>асимпт. устойчива</u> ($V>0$, а $\frac{dV}{dt}<0$).

Если $V>0$, а $\frac{dV}{dt}\le 0$, то т. покоя <u>устойчива</u>.

(или $V<0$, а $\frac{dV}{dt}\ge 0$),

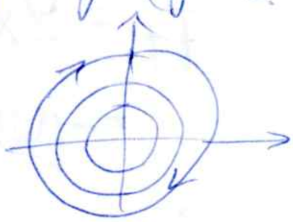
См. стр. 2а.

Функцию Ляпунова ищут в виде: $V=ax^2+by^2$; $V=ax^4+by^4$; $V=ax^2+by^4$.

<u>Пример 1</u> $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x.\end{cases}$ $\ddot{y}=-\dot{x}=-y$ $\quad \lambda_{1,2}=\pm i$

$\ddot{y}+y=0$ $\quad$ „центр" (уст.)

$\lambda^2+1=0$



Рассм. ф-ию $V(x,y)=x^2+y^2>0$;

$$\frac{dV}{dt}=2x\cdot\dot{x}+2y\cdot\dot{y}=2x\cdot y+2y(-x)=0$$

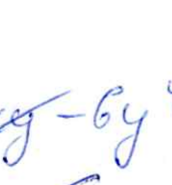
Т. (0,0) устойчива, но асимпт. уст-ти нет.

<u>Пример 2.</u> $\begin{cases}\dot{x}=y-x^3\\ \dot{y}=-x-3y^3\end{cases}$ Линеаризов. система — как в пр. 1 => „центр".

Рассм. $V(x,y)=x^2+y^2>0$.

$$\frac{dV}{dt}=2x(y-x^3)+2y(-x-3y^3)=\cancel{2xy}-2x^4-\cancel{2xy}-6y^4$$

$$\frac{dV}{dt}=-2x^4-6y^4<0 \Rightarrow \text{асимпт. уст.}$$



„Центр" превратился в „фокус".

Пример 3. $\begin{cases} \dot{x} = -5y - 2x^3 \\ \dot{y} = 5x - 3y^3 \end{cases}$

$V(x,y) = x^2 + y^2 > 0.$

$$\frac{dV}{dt} = 2x \cdot (-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) =$$

$$= \cancel{-10xy} - 4x^4 + \cancel{10xy} - 6y^4;$$

$\frac{dV}{dt} = -4x^4 - 6y^4 < 0 \Rightarrow$ т. $(0,0)$ асимпт. устойчива.

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\dots,x_n) \end{cases}$$

$f_i(0,\dots,0)=0$.

$(0,\dots,0)$ — точка покоя.

Теоремы Ляпунова.

Теор. 1 (об устойчивости).

Пусть сущ-вует дифф-мая ф-ия $V(x_1\dots x_n)$, уд. в окр. т. $(0\dots0)$ след. условиям:

а) $V(x_1,\dots,x_n)\geq 0$, причём $V=0$ лишь при $x_1=\dots=x_n=0$.

б) $$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot f_i(x_1\dots x_n)\leq 0,$$

тогда т. покоя системы (1) устойчива.

Теор. 2 (об асимптотич. устойчивости).

Пусть сущ-вует дифф-мая ф-ия $V(x_1\dots x_n)$, уд. в окр. т. $(0\dots0)$ след. условиям:

а) $V(x_1\dots x_n)\geq 0$, причём $V=0$ лишь при $x_1\dots x_n=0$;

б) $$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1\dots x_n)\leq 0,$$

причём $\frac{dV}{dt}=0$ лишь при $x_1=\dots=x_n=0$.

Тогда т. покоя $(0\dots0)$ асимптотич. устойчива.

Теор. 3 (о неустойчивости).

Пусть сущ-вует дифф-мая ф-ия $V(x_1\dots x_n)$, уд. в окр. т. $(0\dots0)$ след. условиям:

1) $V(0\dots0)=0$ и сколь угодно близко от начала к-т имеются точки, в которых $V(x_1\dots x_n)>0$;

2) $$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1\dots x_n)\geq 0,$$

причём $\frac{dV}{dt}=0$ лишь при $x_1=\dots=x_n=0$. Тогда т. покоя с(1) неустойчива.

Пример 4.

Исследовать устойчивость положения равновесия (0,0) автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -xy - y^3 \end{cases}$$

Решение.

Линеаризация системы: $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Матрица A не позволяет воспользоваться теоремой Ляпунова об уст-ти по I приближению.

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 0.$

а) все λ_j : $Re\,\lambda_j < 0$ — неверно.

б) $\exists \lambda_i$: $Re\,\lambda_i > 0$ — тоже неверно.

Применим второй метод Ляпунова.

$V(x,y) = x^2 + y^2 > 0.$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot (-x+y^2) + \frac{\partial V}{\partial y}(-xy - y^3) =$$

$$= 2x(-x+y^2) + 2y(-xy-y^3) =$$

$$= -2x^2 + \cancel{2xy^2} - \cancel{2xy^2} - 2y^4 = -2(x^2+y^4) \le 0,$$

причём $\dot{V}(x,y) = 0$ лишь при $x=0, y=0$.

$\Rightarrow$ т. (0,0) явл. асимптотически устойчивым положением равновесия.

Задача 16. a — ? Положение (0,0) уст. по Ляпунову

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & a \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - a = 0$$

$(\lambda+1)^2 = a.$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a}.$

1) $a > 0$; $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a}$; $a < 1 \Rightarrow$ уст.

2) $a = 0$: $\lambda_{1,2} = -1$. — ас. уст. ($Re\,\lambda_{1,2} < 0$).

3) $a < 0$: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{|a|}$ — ас. уст.

Ответ: $\boxed{a < 1}$.

№606. Исслед. устойчивость нулевого решения построив ф-цию Ляпунова.

4

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$$

$V(x,y) = x^2 + y^2 > 0.$

$$\frac{dV}{dt} = 2x(y - x + xy) + 2y(x - y - x^2 - y^3) =$$

$$= \underline{2xy} - 2x^2 + \cancel{2x^2y} + \underline{2xy} - 2y^2 - \cancel{2x^2y} - 2y^4 =$$

$$= -2(x^2 - 2xy + y^2) - 2y^4 =$$

$$= -2[(x-y)^2 + y^4] \le 0$$ => нул. реш. устойчиво.

№607.
$$\begin{cases} \dot{x} = 2y^3 - x^5 \\ \dot{y} = -x - y^3 + y^5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \ |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0.$$

$V = x^2 + y^4 > 0$; 1) $V(x,y) > 0$ при $x^2 + y^2 \ne 0$; $V(0,0) = 0$;

2) $$\frac{dV}{dt} = 2x(2y^3 - x^5) + 4y^3(-x - y^3 + y^5) =$$

$$= \cancel{4xy^3} - 2x^6 - \cancel{4xy^3} - 4y^6 + 4y^8 = -2(x^6 + 2y^6 - 2y^8)$$

$\frac{dV}{dt} \le 0$ в нек-рой малой окр-ти т. $(0,0)$

=> по II т. Ляпунова реш. $(0,0)$ устойчиво.

В простейших случаях ф-цию Ляпунова следует искать в виде: $V = ax^2 + by^2$; $V = ax^4 + by^4$; $V = ax^2 + by^4$.

Теор. 4 (о неустойчивости Четаева). 5

Пусть для системы дифф. ур-ний

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\dots,x_n),\ i=1,2,\dots,n$$

сущ-вует функция $V(x_1,\dots,x_n)$, такая, что:

$V(0,\dots,0)=0$

$V(x_1\dots x_n)$ дифф-ма в окр-ти т. $(0,\dots 0)$;

$\boxed{\frac{dV}{dt}>0}$ в нек-рой окрестности Ω т. $\bar{0}$,

и сколь угодно близко от начала к-т имеются точки, в которых

$\boxed{V(\bar{x})>0}$,

то точка покоя $(0,\dots,0)$ неустойчива.

Пример 5. (№ 899) Исслед. на уст-ть точку $(0,0)$.

$$\begin{cases}\dot{x}=x+2xy^2\\ \dot{y}=-2y+4x^2y\end{cases}$$

Замеч. В первом прибл.

$$\begin{cases}\dot{x}=x & \lambda_1=1\\ \dot{y}=-2y & \lambda_2=-2\end{cases}$$

„седло" неуст.

$V(x,y)=x^2-\frac{1}{2}y^2$

$V(x,0)=x^2>0$

$$\frac{dV}{dt}=2x(x+2xy^2)-\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot(-2y+4x^2y)=$$

$$=2x^2+\cancel{4x^2y^2}+2y^2-\cancel{4x^2y^2}=2x^2+2y^2>0.$$

Ответ: т. $(0,0)$ неустойчива.

Пример 6. Исслед. т. (0,0) на уст-ть. (6).

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases} \qquad V(x,y) = x^2 + y^2 > 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x(x^3+y) + 2y(-x+y^3) =$$

$$= 2x^4 + \cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 2y^4 = 2x^4 + 2y^4 > 0.$$

$V > 0$, $\frac{dV}{dt} > 0 \Rightarrow$ по т. Ляпунова о неустойчив. точка (0,0) — неустойчива.

Замечание.

Для линеаризов. системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad \ddot{x} = \dot{y} = -x \qquad \ddot{x} + x = 0. \qquad \begin{aligned} x(t) &= A\cos t + B\sin t \\ y(t) &= -A\sin t + B\cos t \end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = \pm i$ Полож. равновесия „центр" явл. устойчивым.

„Центр" превратился в „фокус".

Дома: Филиппов, № 924–930, 932, 933.

№593 (Антидемидович). (7)

Исследовать на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y - 3z \\ \dot{z} = x - 5y - 3z \end{cases}$$

Решение.

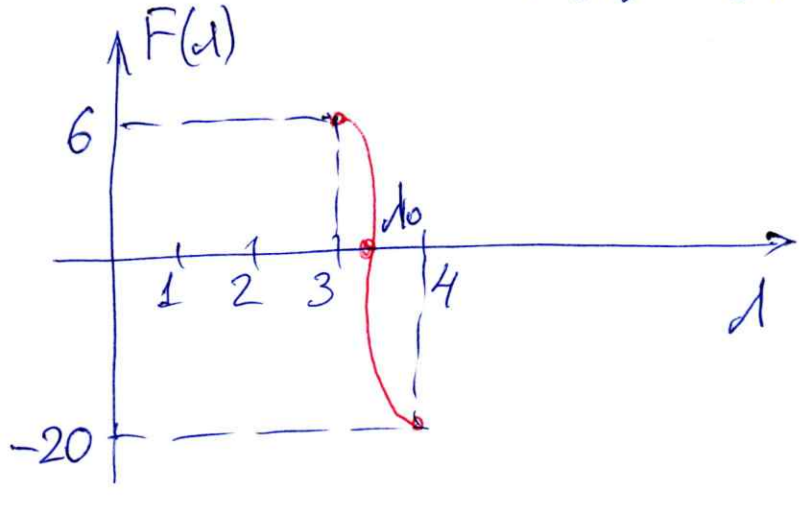
$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 18\lambda - 12.$$

Обозначим $F(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 18\lambda - 12.$

Не удаётся найти корни ур-я $F(\lambda) = 0.$

Рассмотрим $F(3) = -27 - 9 + 54 - 12 = 54 - 48 = 6 > 0.$

$F(4) = -64 - 16 + 72 - 12 = -64 - 16 + 60 = -20 < 0.$



$F(3) > 0,\ F(4) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ между 3 и 4 есть $\lambda_0 :\ F(\lambda_0) = 0,$

$\lambda_0 > 3 > 0$

$\Downarrow$

по I теореме Ляпунова нулевое решение неустойчиво.

Грубые и негрубые положения равновесия.

(1) $\dot{x} = f(x)$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – автономная система.
$\bar{x} = (0, \ldots, 0)$ – положение равновесия.

Построим линеаризацию системы (1):

(2) $\dot{x} = A \cdot x$, $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, \ldots, 0)$, $a_{ij} = const$.
$\det(A - \lambda E) = 0$.

<u>Грубое</u> положение равновесия:
$\forall \lambda \quad Re\,\lambda < 0$ или $\exists \lambda_j: Re\,\lambda_j > 0$.

В этом случае,
если $\bar{x} = 0$ для с. (2) уст., то и для с. (1) – уст.
если $\bar{x} = 0$ для с. (2) неуст., то и для с. (1) – неуст.
(<u>первый метод Ляпунова</u> работает).

<u>Негрубое</u> положение равновесия.
$\forall \lambda \quad Re\,\lambda \le 0$, причём $\exists \lambda_j: Re\,\lambda = 0$.
В этом случае первый метод Ляпунова <u>не работает</u>, т.к. на тип устойчивости положения равновесия с. (1) существенно влияют <u>нелинейные</u> члены разложения ф-ии $f(x)$ по ф-ле Тейлора в окр. т. (0...0).

Например, для с. (2) – центр (уст.), а для с. (1) – фокус (неуст.).

В этом случае используем <u>второй метод Ляпунова</u> (построение функции Ляпунова).