МИРЭА – Российский технологический университет
(РТУ МИРЭА)

Институт кибернетики
Кафедра высшей математики

Типовой расчет

по алгебре и геометрии

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7
	+	+	+	+	+	+

Учебная группа: КМБО-00-20

Студент: Анонимус

Преподаватель: Адамович О.М.

Москва 2020

Содержание

Задача 2.

Условие:

Дано комплексное число $z = \frac{-5+5i}{3-i\sqrt{3}}$.

1. Записать число z в показательной, тригонометрической и алгебраической форме, изобразить его на комплексной плоскости.

2. Записать в показательной, тригонометрической и алгебраической форме $u = z^{-8}$

3. Записать в показательной и тригонометрической форме каждое значение w_k $(k = 0, 1, ..., m-1)$ корня степени $m = 3$ из числа z.

4. Изобразить число z и числа w_k на одной комплексной плоскости.

Решение:

1.

а) Алгебраическая форма: $z = \frac{-5+5i}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(-5+5i)(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})} = \frac{-15-5i\sqrt{3}+15i-5\sqrt{3}}{9+3} = \frac{-5(3+\sqrt{3})+i(15-5\sqrt{3})}{12} = -\frac{(15+5\sqrt{3})}{12} + i\frac{(15-5\sqrt{3})}{12}$

п) Показательная форма: $z = \rho e^{i\varphi}, tg\varphi = -\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = -\frac{(3-\sqrt{3})*(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})*(3-\sqrt{3})} = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{9-3} = -\frac{12-6\sqrt{3}}{6} = -2+\sqrt{3}$ (неудобно)

$z = \frac{-5+5i}{3-i\sqrt{3}} = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{z_1}{z_2}$, где $z_1 = -1+i;\ z_2 = \sqrt{3} - i$

$z_1 = -1 + i$ *(2-ая четверть)* $= \rho_1 e^{i\varphi_1} =$

$\{\rho_1 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 = \sqrt{2})}\} = \sqrt{2}e^{i(\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{-1})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$

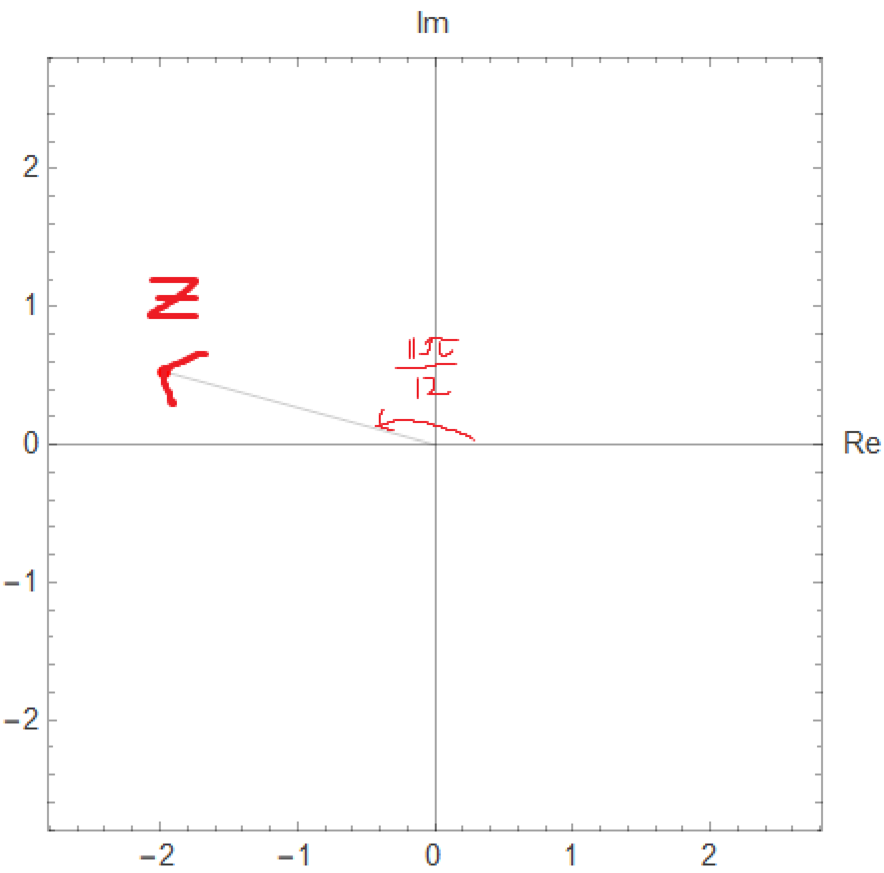
$z_2 = \sqrt{3} - i$ *(4-ая четверть)* $= \rho_2 e^{i\varphi_2} =$

$\{\rho_2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2\} = 2e^{i(\operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}})} = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ *(я не знаю, почему символы корней выглядят по-разному ¯_(ツ)_/¯)*

$z = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} = \frac{5\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6})}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} \cdot e^{i(\frac{11\pi}{12})}$

т) Тригонометрическая форма: $z = \frac{5\sqrt{6}}{6}(\cos(\frac{11\pi}{12}) + i\sin(\frac{11\pi}{12}))$

и) Изображение на комплексной плоскости:



2. $u = z^{-8}$

п) Показательная форма: $u = (\frac{5\sqrt{6}}{6}e^{i\frac{11\pi}{12}})^{-8} = \frac{6^8}{(5\sqrt{6})^8}e^{-8i\frac{11\pi}{12}} = \frac{6^4}{5^8}e^{i\frac{-22\pi}{3}}$

т) Тригонометрическая форма: $u = \frac{6^4}{5^8}(\cos\frac{-22\pi}{3} + i\sin\frac{-22\pi}{3})$

а) Алгебраическая форма: $u = \frac{6^4}{5^8}(\cos\frac{-22\pi}{3} + i\sin\frac{-22\pi}{3}) = \frac{6^4}{5^8}(\cos(-6\pi + \frac{-4\pi}{3}) + i\sin(-6\pi + \frac{-4\pi}{3})) = \frac{6^4}{5^8}(\cos(\frac{-4\pi}{3}) + i\sin(\frac{-4\pi}{3})) = \frac{6^4}{5^8}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3)}}{2}) = -\frac{6^4}{5^8\cdot 2} + i\frac{\sqrt{3}\cdot 6^4}{2\cdot 5^8}$

3. $w_k = \sqrt[m]{\rho}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{m}} = \sqrt[m]{\rho}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{m} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{m}), k = \overline{0, m-1}$

$w_k = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}e^{i\frac{\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}(\cos\frac{\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{3}), k = \overline{0, 2}$

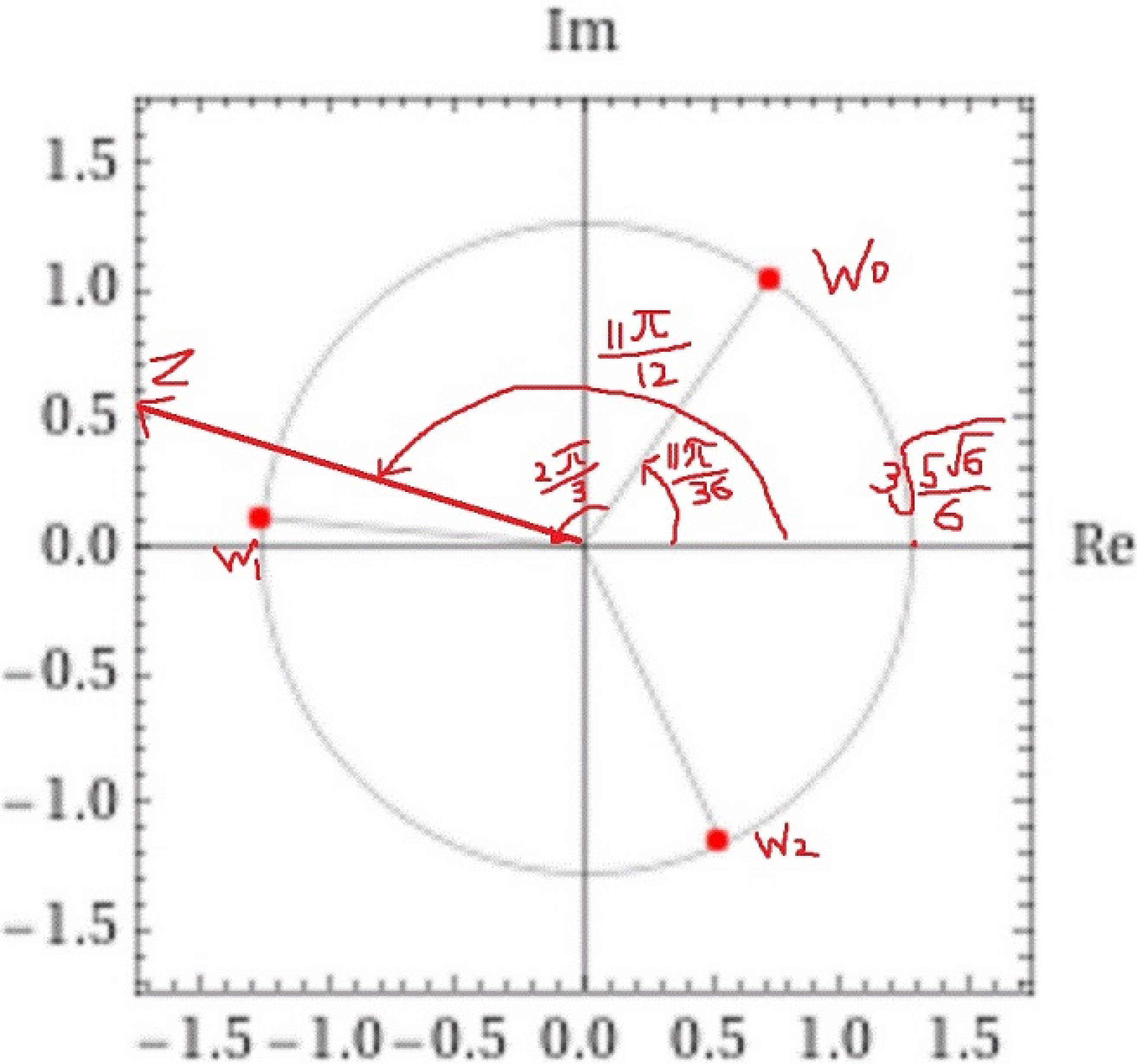
Подставим k в формулу и получим:

Для k=0: $w_0 = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}e^{i\frac{11\pi}{36}} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36})$

Для k=1: $w_1 = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}e^{i\frac{35\pi}{36}} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36})$

Для k=2: $w_2 = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}e^{i\frac{59\pi}{36}} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}e^{i(-\frac{13\pi}{36})} = \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{6}}{6}}(\cos(-\frac{13\pi}{36}) + i\sin(-\frac{13\pi}{36}))$

4. Изображение на комплексной плоскости:



Задача 3.

Условие:

Дан многочлен $p(z) = 5z^4 - 8z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

1. Найти все целые (указание для варианта 5) корни многочлена $p(z)$. Записать каждый корень в алгебраической форме, указать его алгебраическую кратность.

2. Разложить многочлен $p(z)$ на неприводимые множители: а) в множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел; б) в множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Решение:

$$p(z) = 5z^4 - 8z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

$p(z) \in \mathbb{Z}[z]$ - многочлен с целыми коэффициентами. Найдём его целочисленные корни.
Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целочисленный корень, то этот корень является делителем свободного члена многочлена.
Свободный член $p(z) = 2$. Его делите: $\pm 1, \pm 2$
Проверим, является ли какой-нибудь из них корнем $p(z)$ с помощью схемы Горнера:

	5	-8	3	-2	2
1	5	-3	0	-2	**0**
-1	5	-13	16	-18	20
2	5	2	7	12	26
-2	5	-18	39	-80	162

$\Rightarrow$ 1 является корнем $p(z) \Rightarrow p(z) = (z-1)(5z^3 - 3z^2 - 2) = (z-1) \cdot q(z)$ (из следствия теоремы Безу).

$q(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Найдём целочисленный корни $q(z)$.
Свободный член $q(z) = -2$. Его делите: $\pm 1, \pm 2$
Проверим, является ли какой-нибудь из них корнем $q(z)$ с помощью схемы Горнера.

Числа $-1, \pm 2$ проверять не надо т.к. они не являются корнями $p(z)$, а если z_0 - корень $q(z)$, то z_0 - корень и $p(z)$.

	5	-3	0	-2
1	5	2	2	**0**

$\Rightarrow$ 1 является корнем $q(z)$.

$$q(z) = (z-1) \cdot (5z^2 + 2z + 2)$$
$$p(z) = (z-1)^2 \cdot (5z^2 + 2z + 2)$$

Рассмотрим квадратный трёхчлен $5z^2 + 2z + 2$ и найдём его корни:

$$5z^2 + 2z + 2 = 0$$
$$D = 4 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -36 < 0$$
$$z = \frac{-2 \pm 6i}{10} = \frac{-1 \pm 3i}{5} \text{ кратности 1.}$$

Итого, имеем:

1.

$$z = 1 \text{ - корень кратности 2,}$$
$$z = \frac{-1+3i}{5} \text{ - корень кратности 1,}$$
$$z = \frac{-1-3i}{5} \text{ - корень кратности 1.}$$

2а. $p(z) = 5 \cdot (z-1)^2 \cdot (z + \frac{1-3i}{5}) \cdot (z + \frac{1+3i}{5})$ - разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{C}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени.

2б. $p(z) = (z-1)^2 \cdot (5z^2 + 2z + 2)$ - разложение $p(z)$ на неприводимые множители над $\mathbb{R}$, поскольку это разложение на многочлены первой степени и второй степени с отрицательным дискриминантом.

Задача 4.

Условие:

Пусть P_n - линейное пространство многочленов степени не выше $n = 4$ с

действетильными коэффициентами. Множество $M \subset P_n$ состоит из всех тех многочленов $p(t)$, которые удовлетворяют условию $p(2-i)=0$.
1) Доказать, что множество M - подпространство в P_n.
2) Найти размерность и какой-либо базис подпространства M.
3) Дополнить базис подпространства M до базиса P_n.

Решение:

$M = \Big\{p(t) \in P_4 \ \Big| \ p(2-i)=0\Big\} \subset P_4$

1б) Найдём общий вид элементов $p(t) \in M$
$p(t) : \deg p(t) \leqslant 4, \ p(2-i)=0.$
$p(t)\vdots(t-(2-i))(t-(2+i)) = t^2-4t+5 \Rightarrow p(t) = \left(t^2-4t+5\right)q(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow \deg q(t) \leqslant 2 \Rightarrow p(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(at^2+bt+c\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow M = \Big\{p(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(at^2+bt+c\right)\Big\}$

1а) Докажем, что M - линейное подпространство P_4.
I) $p_1(t),\, p_2(t) \in M$, т.е. $\begin{cases} p_1(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(a_1t^2+b_1t+c_1\right) \\ p_2(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(a_2t^2+b_2t+c_2\right) \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow p_1(t)+p_2(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left((a_1+a_2)t^2+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)\right) \in M$, т.е. M замкнуто относительно сложения.
II) $p(t) \in M$, т.е. $(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(at^2+bt+c\right)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda p(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(\lambda at^2+\lambda bt+\lambda c\right) \in M$, т.е. M замкнуто относительно умножения на число.
Из I) и II) следует, что M - линейное подпространство $P_4 \Rightarrow M$ - линейное пространство.

2) $M = \Big\{p(t) = \left(t^2-4t+5\right)\left(at^2+bt+c\right)\Big\} =$
$= \Big\{p(t) = at^2\left(t^2-4t+5\right) + bt\left(t^2-4t+5\right) + c\left(t^2-4t+5\right)\Big\} =$
$= \Big\{p(t) = a\left(t^4-4t^3+5t^2\right) + b\left(t^3-4t^2+5t\right) + c\left(t^2-4t+5\right)\Big\}$

0) $p_1 = t^4-4t^3+5t^2 \in M \ (a=1, \ b=0, \, c=0)$
$p_2 = t^3-4t^2+5t \in M \ (a=0, \ b=1, \, c=0)$
$p_3 = t^2-4t+5 \in M \ (a=0, \ b=0, \, c=1)$

2′) $M = L\left[p_1, \ p_2, \ p_3\right], \ \forall p(t) \in M : \ p(t) = ap_1+bp_2+cp_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_1, \ p_2, \ p_3$ - полная система в M.

1) $M \subset P_4$, в P_4 $e = < t^4,\, t^3,\, t^2,\, t,\, 1 >$ - естественный базис.
Найдём координаты многочленов $p_1, \ p_2, \ p_3$ в базисе e:

$$p_1 = t^4 - 4t^3 + 5t^2 = \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = t^3 - 4t^2 + 5t = \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = t^2 - 4t + 5 = \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Составим матрицу A, записав координаты $p_1,\ p_2,\ p_3$ в базисе e в её строки, и найдём её ранг:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5},\ \mathrm{rk}A = 3 \Rightarrow$ строки $A_1,\ A_2,\ A_3$ линейно независимые $\Rightarrow p_1(t) = eA_1^T = t^4 - 4t^3 + 5t^2$,
$p_2(t) = eA_2^T = t^3 - 4t^2 + 5t,\ p_3(t) = eA_3^T = t^2 - 4t + 5$ - линейно незывисимая система.
Из 0), 1), 2$'$) следует, что $< p_1,\ p_2,\ p_3 >$ - базис $M \Rightarrow \dim M = 3$

3) $\dim P_4 = 5 \Rightarrow$ нужно добавить к системе $p_1,\ p_2,\ p_3$ два вектора (многочлена) $q_1, q_2 \in P_4$, выбрав их так, чтобы система $p_1,\ p_2,\ p_3,\ q_1, q_2$ была линейно независимой.
Построим матрицу B, добавив 2 строки к матрице A, таких, чтобы $\mathrm{rk}B = 5$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{rk}B = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ строки $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ B_3 = A_3,\ B_4,\ B_5$ - линейно независимы$\Rightarrow$
$\Rightarrow p_1 = eA_1^T = eB_1^T,\ p_2 = eA_2^T = eB_2^T,\ p_3 = eA_3^T = eB_3^T,\ q_1 = B_4^T,\ q_2 = B_5^T$
- линейно независимая система векторов P_4.

0) $p_1(t) = e \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t^4 - 4t^3 + 5t^2 \in P_4$

$p_2(t) = e \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = t^3 - 4t^2 + 5t \in P_4$

$p_3(t) = e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = t^2 - 4t + 5 \in P_4$

$q_1(t) = e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \in P_4$

$q_2(t) = e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \in P_4$

1) $p_1,\ p_2,\ p_3,\, q_1,\, q_2$ - линейно независимая система векторов P_4

2) $\dim P_4 = 5$

Из 0), 1), 2) следует, что $< p_1,\ p_2,\ p_3,\, q_1,\, q_2 >$ - базис P_4

Задача 5.

Условие:

Доказать, что множество M образует подпространство в пространстве $M_{n\times m}$ всех матриц данного размера. Найти размерность и построить базис M. Проверить, что матрица B принадлежит M и разложить её по базису M.

M - множество матриц, антиперестановочных с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$M = \left\{ x \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = -X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; AX = -XA, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$$

1б) Общий вид элементов $X \in M$

Пусть $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & p & q \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & f & g \\ a & b & c \\ h & p & q \end{pmatrix} = AX$$

$$-\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ h & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b & a & c \\ f & d & g \\ p & h & q \end{pmatrix} = -XA$$

Т.к. $AX = -XA$, то $\begin{pmatrix} d & f & g \\ a & b & c \\ h & p & q \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b & a & c \\ f & d & g \\ p & h & q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = -b \\ f = -a \\ g = -c \\ h = -p \\ q = -q = 0 \end{cases}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

1а) Проверим замкнутость M относительно линейных операций:

I. $X,Y \in M$ т.е. $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ -b_1 & -a_1 & -c_1 \\ -p_1 & p_1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ -b_2 & -a_2 & -c_2 \\ -p_2 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow X + Y = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ -b_1-b_2 & -a_1-a_2 & -c_1-c_2 \\ -p_1-p_2 & p_1+p_2 & 0 \end{pmatrix} \in M$ т.е M замкнуто относительно сложения.

II. $X \in M$, т.е. $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ -p & p & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ -\lambda b & -\lambda a & -\lambda c \\ -\lambda p & \lambda p & 0 \end{pmatrix} \in M$, т.е M замкнуто относительно умножения на число.

Из I. и II. следует, что M - линейное подпространство $\mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow M$ - линейное пространство.

2) Размерность и базис.

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

0) $\underset{b=c=p=0,\ a=1}{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{a=c=p=0,\ b=1}{E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{a=b=p=0,\ c=1}{E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{a=b=c=0,\ p=1}{E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2′) $\forall X \in M : X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & -a & -c \\ -p & p & 0 \end{pmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 + dE_4$

т.е. $X \in L\left[E_1, E_2, E_3, E_4\right],\ M = L\left[E_1, E_2, E_3, E_4\right] \Rightarrow E_1, E_2, E_3, E_4$ - полная система векторов в M.

1) Пусть $\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + \delta E_4 = \overline{0}$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -\beta & -\alpha & -\gamma \\ -\delta & \delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1, E_2, E_3, E_4$ - линейно независимая система векторов в M.

Из 0), 1), 2′) следует, что $e =< E_1, E_2, E_3, E_4 >$ - базис $M \Rightarrow \dim M = 4$.

3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M$

т.к. имеет нужный вид ($a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 1$).

$$B = 1E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 1E_4 = e\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6.

Условие:

Доказать, что множество M функций $x(t)$, заданных на области D, образуют линейное пространство. Найти его размерность и базис.

Решение:

1) $M = \left\{\alpha e^t + \beta t e^t + (\beta - \alpha)\, t^2 e^t + \gamma t^3 e^t\right\}$, $D \in (-\infty; +\infty)$

$M = \left\{\alpha(e^t - t^2 e^t) + \beta(t e^t + t^2 e^t) + \gamma t^3 e^t\right\} = L\left[e^t(1 - t^2),\, e^t(t + t^2),\, e^t t^3\right] \subset$
$\subset C(-\infty; +\infty)$

M - линейная оболочка $e^t(1-t^2)$, $e^t(t+t^2)$, $e^t t^3 \in C(-\infty; +\infty) \Rightarrow M$ - линейное пространство непрерывных функций, определённых на $(-\infty; +\infty) \Rightarrow M$ - линейное пространство.

2)$M = L\left[e^t(1 - t^2),\, e^t(t + t^2),\, e^t t^3\right] \Rightarrow e^t(1-t^2)$, $e^t(t+t^2)$, $e^t t^3$ - полная система в M.

Рассмотрим систему $e^t(1 - t^2)$, $e^t(t + t^2)$, $e^t t^3$ и докажем, что она линейно независима:

Пусть $\alpha e^t(1 - t^2) + \beta e^t(t + t^2) + \gamma e^t t^3 = 0 \; \forall t \in (-\infty; +\infty)$

Т.к. $e^t \neq 0$, можно поделить правую и левую часть уравнения на e^t.

$\alpha(1 - t^2) + \beta(t + t^2) + \gamma t^3 = 0$

Чтобы получить систему из 3 уравнений, трижды продифференцируем уравнение:

$$\begin{cases} -2t\alpha + (1+t)\beta + 3t^2\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + 6t\gamma = 0 \\ 6\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t\alpha + (1+t)2\alpha = 0 \\ \beta = 2\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \beta = 2\alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow e^t(1-t^2)$, $e^t(t+t^2)$, $e^t t^3$ - линейно независимая система векторов.

0) $e^t(1 - t^2) \in M$ ($\alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0$)

$e^t(t+t^2) \in M$ $(\beta = 1,\ \alpha = \gamma = 0)$
$e^t t^3 \in M$ $(\gamma = 1,\ \alpha = \beta = 0)$
1) $e^t(1-t^2)$, $e^t(t+t^2)$, $e^t t^3$ - линейно независимая система векторов в M.
$2')$ $\alpha e^t + \beta t e^t + (\beta - \alpha)\, t^2 e^t + \gamma t^3 e^t = \alpha(e^t - t^2 e^t) + \beta(te^t + t^2 e^t) + \gamma t^3 e^t =$
$= L\left[e^t(1-t^2),\ e^t(t+t^2),\ e^t t^3\right] \Rightarrow e^t(1-t^2),\ e^t(t+t^2),\ e^t t^3$ - полная система в M.
Из 0), 1), $2')$ следует, что $< e^t(1-t^2), e^t(t+t^2), e^t t^3 >$ - базис $M \Rightarrow \dim M = 3$.

Задача 7.

Условие:

Даны векторы:

$$\overline{a} = \overline{OA} = (1,-2,5) = \overline{i} - 2\overline{j} + 5\overline{k} = \begin{pmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix},$$

$$\overline{b} = \overline{OB} = (3,1,-2) = 3\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k} = \begin{pmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},$$

$$\overline{c} = \overline{OC} = (2,-1,3) = 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} = \begin{pmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},$$

$$\overline{d} = \overline{OD} = (6,3,-5) = 6\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{k} = \begin{pmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\-5\end{pmatrix} = e \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\-5\end{pmatrix},$$

где $e = < \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} >$
Лучи OA, OB, OC являются рёбрами трёхгранного угла Т.

1) Доказать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы.
2) Разложить вектор $\overline{d}$ по векторам $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (возникающую при этом систему уравнений решить с помощью обратной матрицы).
3) Определить, лежит ли точка D внутри T, вне T, на одной из границ T (на какой?).
4) Определить, при каких значениях действительного параметра λ вектор $\overline{d} + \lambda\overline{a}$, отложенный от точки O, лежит внутри трёхгранного угла T.

Решение:

1) Если векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V^3$ линейно независимы, то $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - некомпланарны, значит их смешанное произведение $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \neq 0$.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix} A_3 + A_2 \\ -2A_3 + A_1\end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix}-3 & 0 & -1\\ 5 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix} \overset{\downarrow A^2}{=} -1 \cdot (-1) \begin{vmatrix}-3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix} =$$

$= 2 \neq 0 \Rightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ некомпланарны $\Rightarrow \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - линейно независимые.

2) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - некомпланарны $\Rightarrow \overline{d}$ можно представить в виде линейной комбинации $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

$$\overline{d} = x \cdot \overline{a} + y \cdot \overline{b} + z \cdot \overline{c}$$

$$e \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = e \cdot \left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x + 3y + 2z \\ -2x + y - z \\ 5x - 2y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -2x + y - z = 3 \\ 5x - 2y + 3z = -5 \end{cases} \qquad \text{СЛАУ}$$

Матрица системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Матричная запись СЛАУ $A \cdot X = B$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}; \exists! X = A^{-1} \cdot B$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -13 & -7 & 17 \\ -5 & -3 & 7 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -13 & -5 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 17 & 7 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -13 & -5 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 17 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Проверка

$$\begin{cases} 1\cdot(-4)+2\cdot 5 \\ -2\cdot(-4)-1\cdot 5 \\ 5\cdot(-4)+3\cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -4+10 & =6 \\ 8-5 & =3 \\ -20+15 & =-5 \end{cases} \text{(Верно)} \Rightarrow \overline{d}=-4\overline{a}+5\overline{c}$$

3) $\overline{d}=x\overline{a}+y\overline{b}+z\overline{c}$

D лежит внутри $T \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$

D лежит вне $T \Leftrightarrow$ хотя бы одно из числе $x,y,z<0$
D лежит на грани $T \Leftrightarrow$ хотя бы одно из чисел $x,y,z=0$, а два другие числа больше 0

$\overline{d}=-4\overline{a}+5\overline{c}$

$$\begin{cases} x=-4 & <0 \\ y=0 & =0 \\ z=5 & >0 \end{cases} \Rightarrow D \text{ лежить вне трёхгранного угла } T.$$

4) $\overline{d}+\lambda\cdot\overline{a} = x\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}+z\cdot\overline{c}+\lambda\cdot\overline{a} = (x+\lambda)\cdot\overline{a}+y\cdot\overline{b}+z\cdot\overline{c}$, что лежит внутри $T \Leftrightarrow \begin{cases} x+\lambda>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{cases}$

Но так как $y=0$, то $\overline{d}+\lambda\cdot\overline{a}$ не лежит внутри трёхгранного угла T при $\forall\lambda\in\mathbb{R}$