16 семинар

Закончим разбор контрольных и теоретичеких вопросов. Начнем с контрольных вопросов.

Евклидовы пространства

8.1. Какие аксиомы определяют скалярное произведение в евклидовом пространстве? Что они означают на языке билинейных форм? Приведите примеры скалярных произведений.

Слишком простой вопрос. Но привести примеры билинейных форм стоит. Главный пример, конечно, скалярное произведение в пространстве V^3. А в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ – интеграл от произведения по этому промежутку.

8.2. Что такое матрица Грама? Каковы её свойства? Как записать с её помощью скалярное произведение векторов? Может ли матрица Грама в некотором базисе $[e_1, e_2]$ иметь вид (приведены три матрицы)? При положительном ответе найти (e_1, e_2), (e_2, e_1), (x, y), где $x = e_1 + e_2$, $y = e_1 - e_2$.

Трудно не ответить на вопрос о матрице Грама, только что решив седьмую задачу типового расчета. Проговариваем свойства матрицы Грама на приведённых примерах. Вторая матрица отметается сразу из-за несимметричности. Первая матрица симметрична, но не положительно определена, что мы отмечаем сразу с помощью критерия Сильвестра – хотя угловой минор первого порядка, то есть элемент, стоящий в левом верхнем углу, положителен, угловой минор второго порядка, в данном случае определитель всей матрицы Грама, отрицателен . И только третья матрица удовлетворяет обоим условиям.

$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $(e_1, e_2) = (e_2, e_1) = -1$; $(x, y) = X^T GY = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 = 3+1-1-1 = 2.$

8.3. Что такое длина (норма) вектора в евклидовом пространстве? Каковы её свойства? Что такое неравенство Коши-Буняковского? Когда оно превращается в равенство? Как выглядит неравенство треугольника, и почему оно так называется?

$||x|| = \sqrt{(x, x)}$; ясно, что длина, сосчитанная по этой формуле, будет всегда неотрицательна, причем равна нулю только если вектор нулевой (это следует из положительной определённости). Также очевидно, что $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$. В самом деле, $||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x, x)} = |\lambda| \cdot ||x||$. Наконец, длина вектора удовлетворяет неравенству треугольника

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,$$

но докажем это неравенство несколькими строчками ниже. Перед этим разберемся с неравенством Коши-Буняковского

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

(неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы x и y коллинеарны). Приведем такое доказательство. Из положительной определённости скалярного произведения следует, что для любых векторов x, y и любого числа λ справедливо $(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0$; $\lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0$. Мы получили при фиксированных векторах x и y квадратный трехчлен относительно λ, который неотрицателен при всех значениях переменной. Это равносильно тому, что дискриминант неположителен: $(x, y)^2 - ((x, x)(y, y) \leq 0$; $(x, y)^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2$; $|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$. Если векторы x и y коллинеарны (пусть скажем $y = \mu x$), то $|(x, y)| = |(x, \mu x)| = |\mu(x, x)| = |\mu| \cdot |x|^2$; $||x|| \cdot |y|| = ||x|| \cdot ||\mu x|| = \mu||x||^2$, то есть неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство. Если же x и y неколлинеарны, вектор $x + \lambda y$ не равен нулевому ни при каких значениях λ. Проводя ту же выкладку, что и раньше, мы получим, что квадратный трехчлен относительно λ строго положителен при любых λ, поэтому дискриминант должен быть строго отрицательным, то есть в этом случае неравенство Коши-Буняковского строгое.

Переходим к доказательству неравенства треугольника. $|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$, откуда и следует неравенство треугольника. Конечно, мы воспользовались в процессе доказательства неравенством Коши-Буняковского.

Геометрический смысл неравенства треугольника очевиден – сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

8.4. Как вычисляется угол между векторами? Почему это определение корректно? Какие векторы называются ортогональными? Далее выписана матрица Грама в трехмерном пространстве в некотором базисе. Требуется проверить попарную ортогональность векторов базиса и найти их длины.

Не хочется повторять лекцию.

8.5. Что такое ортогональный, ортонормированный базисы в евклидовом пространстве? Как выглядит матрица Грама в ортогональном базисе, в ортонормированном? Как ищется скалярное произведение в ортонормированном базисе? Почему? Как выражаются через скалярное произведение координаты вектора в ортонормированном базисе?

Повторять определения не хочется. В ортогональном базисе матрица Грама очевидно диагональна, в ортонормированном – является единичной, поэтому скалярное произведение вычисляется в привычном ещё со школы виде "сумма произведений координат". Ну а координаты вектора в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям вектора и соответствующих векторов базиса: $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$; $(x, e_i) = x_1(e_1, e_i) + \ldots + x_i(e_i, e_i) + \ldots + x_n(e_n, e_i) = x_i$.

9. Линейные операторы в евклидовом пространстве.

9.1. Какой оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряжённым к линейному оператору $\mathcal{A}$ в евулидовом пространстве E? Будет ли он единственным? Как найти его матрицу, зная матрицу оператора $\mathcal{A}$ в произвольном базисе? А в ортонормированном базисе?

Это оператор, который связан с оператором $\mathcal{A}$ формулой

$$(\mathcal{A}(x), y) = (x, \mathcal{A}^*(y))$$

для любых $x, y \in V$.

Естественно он существует и едиственен, поскольку мы можем задать его матрицу условием $(AX)^TGY = X^TA^TGY = X^TGA^*Y$, откуда $GA^* = A^TG$;

$$A^* = G^{-1}A^TG.$$

В ортонормированном базисе эта формула выглядит проще:

$$A^* = A^T.$$

Важно только проверить, что в другом базисе связь будет такая же (или предположить, что во всех базисах связь такая, и доказать, что при переходе к новому базису матрица сопряжённого оператора меняется по правильному закону.

Итак, пусть есть два базиса, Б_1 и Б_2, связанные матрицей перехода C:

$$\text{Б}_2 = \text{Б}_1C.$$

Матрица Грама в старом базисе – это G_1, в новом – G_2, причем

$$G_2 = C^TG_1C.$$

Матрица сопряженного оператора в старом и новом базисах – это A_1^* и A_2^*. Тогда $A_1^* = G_1^{-1}A_1G_1$; $A_2^* = G_2^{-1}A_2G_2$. Достаточно доказать, что

$$A_2^* = C^{-1}A_1C.$$

Имеем: $A_2^* = G_2^{-1}A_2^TG_2 = (C^TG_1C)^{-1}(C^{-1}A_1C)^TC^TG_1C = C^{-1}G_1^{-1}(C^T)^{-1}C^TA_1^T(C^{-1})^TC^TG_1C = C^{-1}G_1^{-1}A_1^TG_1C = C^{-1}A_1^*C$, что и требовалось.

9.2. Как найти оператор, сопряжённый к произведению операторов; к их сумме? Чему равен сопряжённый оператор к обратному оператору?

Я устал, посмотрите что там на эту тему написано в лекции или какой-нибудь умной книжке. Только не забудьте порядок поменять))

9.3. Какой оператор называется самосопряжённым? Каково характеристическое свойство матрицы самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе? Сохраняется ли самосопряжённость при сложении операторов; при умножении их на числа; при умножении

операторов?

Название "самосопряжённый оператор" говорит само за себя. Термин характеристическое свойство матрицы самосопряжённого оператора мы не использовали, но как легко понять, это свойство – симметричность. Свойства самосопряжённого оператора мы аккуратно рассмотрели на лекции.

9.4. Какова специфика корней характеристического уравнения для самосопряжённого оператора? Каковы свойства его собственных векторов?

Про то, что все они действительные, мы говорили на лекции. Правда, одну лемму мы пока "замылили". Ну и Бог с ней. Потом разберёмся. А ортогональность собственных векторов с различными собственными значениями Вы использовали при решении восьмой задачи вторым способом. Доказательство очень простое, и каждый из Вас должен уметь его приводить.

9.5. Какой оператор называется ортогональным? Что происходит с ортонормированным базисом при действии ортогонального оператора?

Неудачное название оператора, поскольку он сохраняет не только углы (следовательно и ортогональность), но и длины.

9.6. Известно, что линейный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Каков этот оператор?

Конечно, он ортогональный, и такую теорему мы доказывали на лекции.

9.7. Будет ли ортогональный оператор иметь обратный? Если да, то как его найти?

И это у нас было. Обратный оператор совпадает с сопряжённым оператором.

9.8. Известно, что оператор $\mathcal{A}$ обратим, и $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$. Каков этот оператор?

Конечно, он ортогонален: $(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(y)) = (x, (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A})(y) = (x, \mathcal{E}(y)) = (x, y)$.

9.9. Каковы свойства матрицы ортогонального оператора в ортонормированном базисе?

Вы это хорошо знаете: эта матрица ортогональна, то есть транспонированная к ней матрица совпадает с обратной к ней, что равносильно тому, что столбцы (впрочем, как и строчки)образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathbb{R}^n$, где n – размерность пространства.

9.10. Как показать, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису матрица самосопряжённого оператора преобразуется так же, как матрица соответствующей квадратичной формы? Для чего здксь нужна самосопряжённость оператора?

Не сомневаюсь, что если Вы уже защитили типовой, ответ на этот вопрос Вы знаете наизусть.

Возвращаемся к **Теоретическим упражнениям.**

13. Функция $\mathcal{B}(x, y)$ задается через координаты векторов в некотором базисе n-мерного пространства по формуле:

$$\mathcal{B}(x, y) = X^T BY,$$

где B – некоторая квадратная матрица n-го порядка. Доказать, что $\mathcal{B}(x, y)$ – билинейная форма; найти ее матрицу в этом базисе.

Билинейность очевидна. При этом, если в качестве x и y взять векторы базиса e_i и e_j, то сосчитав билинейную форму на них, получим в ответе b_{ij}. Поэтому матрица B и будет матрицей билинейной формы.

14. Доказать, что симметричная билинейная форма $\mathcal{B}(x,y)$ однозначно восстанавливается по порождённой ею квадратичной форме $Q(x)$ по формуле

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

Мы эту формулу выводили на лекции.

15. Доказать, что если ненулевые векторы евклидова пространства попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Мы это тоже доказывали, но давайте повторим: пусть $c_1e_1 + \ldots + c_ne_n = \bar{0}$; умножим скалярно это равенство на e_i; все слагаемые (кроме i-го) обнулятся, а i-е превратится в $c_i(e_i, e_i) = c_i||e_i||^2$. Поскольку векторы ненулевые, длины у них также ненулевые, поэтому $c_i = 0$.

16. Доказать, что в евклидовом пространстве справедливо неравенство треугольника $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$. Когда оно превращается в равенство?

В контрольных вопросах мы уже доказали это неравенство. Посмотрим, когда неравенство превращается в равенство. Проанализировав доказательство неравенства треугольника, видим, в цепочке равенств спряталось одно неравенство – неравенство Коши-Буняковского, причем не в форме $|(x,y)| \le ||x|| \cdot ||y||$, а в форме $(x'y) \le ||x|| \cdot ||y||$. первое неравенство превращается в равенство тогда и только тогда, когда x и y коллинеарны (неважно, сонаправлены или противоположно направлены), второе же становится равенством, когда векторы сонаправлены. Вывод: неравенство треугольника превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы сонаправлены.

17. Доказать, что если $\mathcal{A}_1$ – линейный оператор в n-мерном пространстве, имеющий n различных собственных значений, и $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}_2$ обладает базисом из собственных векторов.

Во-первых, $\mathcal{A}_1$ обладает базисом из собственных векторов, поскольку гарантировано каждое собственное значение доставляет собственный вектор, а раз собственных значений столько же, какова размерность пространства, получаем нужное количество векторов, чья линейная независимость доказывалась на лекции.

Докажем, что эти же векторы будут собственными векторами второго оператора. Итак, пусть $\mathcal{A}_1(x) = \lambda x$; требуется доказать, что $\mathcal{A}_2(x) = \mu x$. Имеем: $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1(x)) = \mathcal{A}_2(\lambda x) = \lambda\mathcal{A}_2(x)$; $\mathcal{A}_2(\mathcal{A}_1(x)) = \mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x))$. Поэтому $\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2(x)) = \lambda\mathcal{A}_2(x)$, откуда или $\mathcal{A}_2(x) = \bar{0}$ (а это означает, что x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}_2$ с собственным значением 0), или $\mathcal{A}_2(x)$ – собственный вектор оператора $\mathcal{A}_1$ с собственным значением λ. Но это означает, что вектор $\mathcal{A}_2(x)$ коллинеарен вектору x, то есть x – собственный вектор оператора $\mathcal{A}_2$.

18. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $\mathcal{A}^2 - \mathcal{A} + \mathcal{E} = 0$. Доказать, что $\mathcal{A}$ обратим, и выразить $\mathcal{A}^{-1}$через $\mathcal{A}$.

Мы такие задачи решали в первом семестре, только там были не операторы, а матрицы. Ответ получаем, переписав равенство в виде $\mathcal{A}(\mathcal{E} - \mathcal{A}) = \mathcal{E}$; $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E} - \mathcal{A}$.

19. Пусть C – невырожденная матрица. Доказать, что квадратичная форма, заданная в некотором базисе матрицей $B = C^TC$ пожительно определена.

Это легко. Пусть $x \ne \bar{0}$. Имеем: $Q(x) = X^TC^TCX = (CX)^T(CX) = Y^TY$, где $Y = CX$. Раз C – невырожденная матрица, то Y – ненулевой столбец, а тогда $Y^TY \ne 0$ (ведь Y^TY равно сумме произведений координат.

20. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ - линейные операторы в конечномерном пространстве V такие, что $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = \mathcal{E}$. Доказать, что оператор $\mathcal{A}_1$ обратим, и найти $\mathcal{A}_1^{-1}$. Верно ли аналогичное утверждение в бесконечномерном пространстве?

Сводя всё к матрицам, получаем $A^1A_2 = E$, то есть произведение определителей матриц равно 1, поэтому обе матрицы обратимы, и $A_1^{-1} = a_2$, а тогда и $\mathcal{A}_1^{-1} = \mathcal{A}_2$. В бесконечномерном пространстве всё сложнее, кто не верит – посмотрите упражнение под номером 9.