Раздел 5. Дифференциальное и интегральное исчисления для абстрактных функций

Лекция 12 Дифференциальное и интегральное исчисления для абстрактных функций.

Абстрактная функция $x(t)$, $\forall t : x(t) \in X$ – функция числового аргумента со значениями в ЛНП. Отображение $\mathbb{R} \to X$ или $[a, b] \to X$ (может быть задана и на других числовых множествах: на луче, интервале, полуинтервале).

Если ЛНП конечномерное – вектор-функция.

Если элементами ЛНП являются последовательности – функциональная последовательность.

Если ЛНП функциональное, то функция двух переменных (или большего числа; т.е. возникает дополнительная переменная). Функция с дополнительным числовым аргументом (параметром).

Непрерывность отображения. В конечномерном случае покомпонентная. В бесколнечноменном случае – по норме ЛНП.

Абстрактная функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна (теорема Каетора).

Можно рассмотреть пространство непрерывных отображений $C([a, b] \to X)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\|_X .$$

Другие пространства, например, $C_{L_p}([a, b] \to X) = \tilde{L}_p([a, b] \to X)$ с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b \|x(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} .$$

Пополнение – $L_p([a, b] \to X)$.

Липшицевость:

$$\exists L > 0, \gamma > 0 : \|x(t') - x(t'')\| \le L|t' - t''|^\gamma .$$

Дифференцируемость. Абстрактная функция дифференцируема в точке t_0, если существует производная в этой точке, т.е. предел

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{x(t_0 + \delta) - x(t_0)}{\delta} .$$

Как и в случае числовой функции вводятся понятия односторонних (левой и правой) производных.

Замечание. Если функция $x(t)$ постоянная (т.е. x – постоянный элемент X, не зависящий от t), то $\dot{x}(t) = O$.

Дифференциал – главная линейная часть приращения:

$$x(t_0 + \delta) - x(t_0) = \dot{x}(t_0)\delta + \omega(x_0, \delta) , \quad \|\omega(x_0, \delta)\| = o(\delta).$$

Функция дифференцируема на интегрвале (a, b), если дифференцируема во всех точках интервала. В этом случае производная сама является абстрактной функцией. Непрерывная дифференцируемость. Можно рассмотреть высшие производные.

Функция дифференцируема на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема на интегрвале (a, b) и имеет односторонние производные на концах отрезка.

Пространства $C^l([a, b] \to X)$, $\tilde{W}_p^l([a, b] \to X)$ (их пополнения – пространства $W_p^l([a, b] \to X)$).

Пусть $f \in X^*$ – непрерывный линейный функционал над X. Тогда $f(x(t))$ – числовая функция. Непрерывная, если непрерывна $x(t)$ как композиция непрерывных отображений.

Дифференцируемость:

$$\frac{df(x(t))}{dt} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x(t+\delta)) - f(x(t))}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} f\left(\frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta}\right) = \\ = f\left(\lim_{\delta \to 0} \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta}\right) = f(\dot{x}(t))$$

(при первом переходе воспользовались линейностью функционала f, а при втором – его непрерывностью).

Утверждение. Если производная абстрактной функции тождественно равна нулевому элементу пространства X, то эта функция – константа (постоянный элемент пространства X, не зависящий от t).

Замечание. Для числовых функций доказывалось на основе формулы конечных приращений, следствия теорем Ролля и Лагранжа. Для абстрактных функций (даже для вектор-функций) теорема Ролля неверна (привести пример!).

Доказательство.

$$\dot{x}(t) \equiv O \Rightarrow \forall f \in X^* : df(x(t))/dt \equiv 0 \Rightarrow f(x(t)) = \text{const} \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t', t'' : f(x(t')) = f(x(t'')) \Rightarrow f(x(t') - x(t'')) = 0 .$$

Теперь вспоминаем следствие из теоремы Хана-Банаха: если на каком-то элементе пространства обращаются в нуль все линейные непрерывные функционалы, то этот элемент нулевой. Значит, $\forall t', t'' : x(t') - x(t'') = O$, т.е. $x(t') = x(t'')$, что и требовалось доказать.

(Напоминание, как получается это следствие. Если элемент ненулевой, рассматриваем одномерное подпространство – его линейную оболочку, рассматриваем на нём ненулевой непрерывный линейный функционал, не обращающийся в нуль на элементе, и продолжаем на всё пространство с сохранением нормы. Отсюда заключаем, что если элемент ненулевой, что существует хотя бы один непрерывный линейный функционал, не обращающийся на нём в нуль.)

Замечание. Для конечномерного пространства доказательство покомпонентное. Это соответствует выбору в качестве функционалов f проекций на одномерные подпространства.

Интегрирование абстрактных функций.

Определённый интеграл от абстрактной функции определяется по Риману: отрезок разбивается на маленькие промежутки, в каждом выбирается точка, в точке вычисляется функция, умножается на длину промежутка и составляется интегральная сумма из таких произведений. Ранг разбиения (максимальная длина промежутка) устремляется к нулю. Если есть предел, не зависящий от способа разбиения и выбора точек, он называется определённым интегралом от абстрактной функции по отрезку, а сама функция – интегрируемой.

Утверждение. Интеграл от постоянного элемента равен произведению этого элемента на длину отрезка интегрирования.

Утверждение. Непрерывная абстрактная функция интегрируема (доказательство аналогично доказательству для числовых функций).

Для интегралов от абстректных функций выполняются свойства линейности и аддитивности. Точно так же, как с числовыми функциями, определяются интегралы с переставленными пределами интегрирования (смена знака) и совпадающими (нулевой элемент).

Утверждение:

$$\forall f \in X^* : \, f\left(\int_a^b x(t)\,dt\right) = \int_a^b f\left(x(t)\right)\,dt$$

(пишем равенство для интегральных сумм, переходим к пределу).

Утверждение:

$$\left\|\int_a^b x(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|x(t)\|\,dt$$

(пишем неравенство для интегральных сумм, переходим к пределу; здесь считаем $a \le b$, в противном случае справа ещё модуль).

Теорема об оценке:

$$\left\|\int_a^b x(t)\,dt\right\| \le \max_{t\in[a,b]} \|x(t)\| \cdot |b-a|\,.$$

Замечание. Теорема о среднем не работает (вместе с формулой конечных приращений).

Интеграл с переменным верхним пределом.

$$y(t) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau$$

Абстрактная функция, непрерывная.

Теорема Барроу. Если функция $x(t)$ непрерывна, то $y(t)$ дифференцируема и $\dot{y}(t) = x(t)$.

Доказательство.

$$y(t+\delta) - y(t) = \int_t^{t+\delta} x(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\delta} x(t)\,d\tau + \int_t^{t+\delta} (x(\tau) - x(t))\,d\tau = x(t)\cdot\delta + \omega(t,\delta)\,,$$

$$\|\omega(t,\delta)\| = \left\| \int_t^{t+\delta} (x(\tau) - x(t))\,d\tau \right\| \le \max_{|\tau - t|\le\delta} \|x(\tau) - x(t)\| \cdot \delta\,,$$

$$\frac{\|\omega(t,\delta)\|}{\delta} \le \max_{|\tau - t|\le\delta} \|x(\tau) - x(t)\| \to_{\delta\to 0} 0\,,$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{y(t+\delta) - y(t)}{\delta} = x(t) + \lim \delta \to 0 \frac{\omega(t,\delta)}{\delta} = x(t)\,.$$

Следствие.

$$\frac{d}{dt}\int_{u(t)}^{v(t)} x(\tau)\,d\tau = x(v(t))\cdot\dot{v}(t) - x(u(t))\cdot\dot{u}(t)\,.$$

Теорема. Для абстрактных функций справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b \dot{x}(t)\,dt = x(b) - x(a)\,.$$

Доказательство. Рассмотрим абстрактную функцию

$$z(t) = x(t) - x(a) - \int_a^t \dot{x}(\tau)\,d\tau$$

и докажем, что она тождественно равна нулевому элементу. Продифференцируем её, используя теорему Барроу:

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}(t) = O\,.$$

Отсюда по доказанному выше вытекает, что эта функция постоянна.

С другой стороны,

$$z(a) = x(a) - x(a) - \int_a^a \dot{x}(\tau)\,d\tau = O\,.$$

Отсюда следует, что $z(t) \equiv O$, откуда

$$\int_a^t \dot{x}(\tau)\,d\tau = x(t) - x(a)\,,$$

что с точностью до обозначений совпадает с формулой Ньютона-Лейбница.

Замечание. Другая полезная форма записи:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \dot{x}(\tau)\, d\tau\,.$$

Ключевая формуля для применения известных численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Оценка разности значений абстрактной функции:

$$\|x(b) - x(a)\| \le \max_{t\in[a,b]} \|\dot{x}(t)\| \cdot |b-a|\,.$$

Оценка разности приращения и дифференциала.
Если производная абстрактной функции удовлетворяет условию Липшица $\|\dot{x}(t') - \dot{x}(t'')\| \le N_2|t' - t''|$ (в частности, если существует ограниченная вторая производная), то мы можем оценить разность между приращением функции и её дифференциалом. Построения напоминают доказательство теоремы Барроу.

$$x(b) - x(a) = \int_a^b \dot{x}(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b \dot{x}(a)\, dt + \int_a^b (\dot{x}(t) - \dot{x}(a))\, dt = \dot{x}(a)\cdot(b-a) + \omega\,,$$

$$\|\omega\| = \left\| \int_a^b (\dot{x}(t) - \dot{x}(a))\, dt \right\| \le \int_a^b \|\dot{x}(t) - \dot{x}(a)\|\, dt \le$$

$$\le \int_a^b N_2|t-a|\, dt = \frac{N_2}{2}|b-a|^2\,,$$

$$\|x(b) - x(a) - \dot{x}(a)\cdot(b-a)\| \le \frac{N_2}{2}|b-a|^2\,.$$

Эта оценка хороша для малых отрезках и функций, производные которых меняются не ислишком быстро.

Если абстрактная функция гладкая, можно пойти дальше, выразив $\dot{x}(t) - \dot{x}(a)$ через интеграл от второй производной, и уточнять выражение для приращения, последовательно находя очередные слагаемые, образующие, как несложно догадаться, формулу Тейлора для абстрактных функций.