Питаренко А. А.
КМБО - 02 - 18

Задача №1

Записать комплексное число z в алгебраической, показательной и тригонометрической формах

$$z = -\frac{1}{12} - ch\left(\ln 6 + i\frac{2\pi}{3}\right)$$

пусть $z_1 = \ln 6 + i\frac{2\pi}{3}$ $\quad ch\, z_1 = \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2}$

$$e^{z_1} = e^{\ln 6 + i\frac{2\pi}{3}} = 6 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$$

$$e^{-z_1} = e^{-\ln 6 - i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i$$

$$ch\, z_1 = \frac{-3 + 3\sqrt{3}\,i - \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{3}}{12}i}{2} = -\frac{37}{24} + \frac{35\sqrt{3}}{24}i$$

$$z = -\frac{1}{12} + \frac{37}{24} - \frac{35\sqrt{3}}{24}i = \frac{35}{24} - \frac{35\sqrt{3}}{24}i = \frac{35}{24}\left(1 - \sqrt{3}\,i\right)$$

алгебраич. форма

$$|z| = \frac{35}{24}\left|1 - \sqrt{3}\,i\right| = \frac{35}{24} \cdot 2 = \frac{35}{12}$$

$$\arg z = \arg(1-\sqrt{3}i) = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1} = \frac{2\pi}{3}$$

$z = \frac{35}{12} \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$ – показательная

$z = \frac{35}{12}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ – тригонометрическая

Задача №2.

$$E = \left\{ \operatorname{arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}-i}{13}\right) \right\}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{2\sqrt{3}-i}{13}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} \cdot i \qquad t = e^{2iz}$$

$$\frac{t+1}{t-1} \cdot i = \frac{2\sqrt{3}-i}{13} \Big| \cdot (-i); \quad \frac{t+1}{t-1} = -\frac{1+2\sqrt{3}i}{13}$$

$$13t+13 = -t-2\sqrt{3}i \cdot t+1+2\sqrt{3}i$$

$$14t+2\sqrt{3}it = -12+2\sqrt{3}i$$

$$t(14+2\sqrt{3}i) = -12+2\sqrt{3}i$$

$$t = \frac{-6+\sqrt{3}i}{7+\sqrt{3}i} = \frac{(-6+\sqrt{3}i)(7-\sqrt{3}i)}{49+3} =$$

$$= \frac{-42+6\sqrt{3}i+7\sqrt{3}i+3}{52} = \frac{-39+13\sqrt{3}i}{52} =$$

$$= \frac{13(-3+\sqrt{3}i)}{4 \cdot 13} = \frac{1}{4}(-3+\sqrt{3}i)$$

$$e^{2iz} = t = \frac{1}{4}(-3+\sqrt{3}i); \quad |t| = \frac{1}{4}|-3+\sqrt{3}i| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg t = \arg(-3+\sqrt{3}i) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

$$2iz = (\ln t)_k = \ln|t| + i\arg(t + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

$$z = \frac{-i}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right)$$

Ответ: $\frac{-i}{2}\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{5\pi}{12} + \pi k\right)$

Титаренко А. А.

Задача №3. КМБО-02-18.

Определить, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ функция $v(x,y)$ является действительной или, соответственно, мнимой частью некоторой регулярной функции $f(z)$. Восстановить $f(z)$.

$f = u + iv$

$$v(x,y) = \frac{3y}{4x^2 - ay^2}$$

$$v = \operatorname{Im} f(z) \Longleftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -24 \cdot x \frac{y}{(-ay^2 + 4x^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 6a \cdot \frac{y^2}{(-a \cdot y^2 + 4x^2)^2} + \frac{3}{-ay^2 + 4x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 384 \cdot x^2 \cdot \frac{y}{(-ay^2 + 4 \cdot x^2)^3} - 24 \cdot \frac{y}{(-ay^2 + 4x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 24 \cdot a^2 \cdot \frac{y^3}{(-a \cdot y^2 + 4 \cdot x^2)^3} + 18a \cdot \frac{y}{(-ay^2 + 4x^2)^2}$$

Питаренко А.А.

Задание № 3 (продолжение) КМБО-02-18

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=384x^2\cdot\frac{y}{(-ay^2+4x^2)^3}-24\frac{y}{(-ay^2+4x^2)^2}+$$

$$+24a^2\cdot\frac{y^3}{(-ay^2+4x^2)^3}+18a\cdot\frac{y}{(-ay^2+4x^2)^2}=$$

$$=\frac{24y(16x^2+a^2y^2)}{(-ay^2+4x^2)^3}+\frac{6y(3a-4)}{(-ay^2+4x^2)^2}=0 \;\Big|\; :6y\cdot(-ay^2+4x^2)^3$$

$$4(16x^2+a^2y^2)+(3a-4)(-ay^2+4x^2)=0;$$

$$64x^2+4a^2y^2-3a^2y^2+12ax^2+4ay^2-16x^2=0;$$

$$48x^2+a^2y^2+12ax^2+4ay^2=0;$$

$$12x^2(4+a)+y^2a(a+4)=0;$$

$$(4+a)(12x^2+y^2a)=0;\ \Rightarrow \underline{a=-4}$$

$$v=\operatorname{Im} f(z)\Leftrightarrow a=-4$$

$$\Rightarrow v=\frac{3y}{4x^2+4y^2}$$

Татаренко А.А.
КМБО-02-1

№3.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{24xy}{16(x^2+y^2)^2} = \frac{3}{2}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$u = \int -\frac{\partial v}{\partial x} dy = \int \frac{3}{2}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy =$$

$$= \frac{3x}{4}\int \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{3x}{4(x^2+y^2)} + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2+y^2} + g'(x) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{x^2}{(y^2+x^2)^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = const = C.$$

$$f(z) = -\frac{3}{4}\frac{x}{(x^2+y^2)} \cancel{+\frac{C}{?}} + i\left(\frac{3y}{4x^2+4y^2}\right)$$

$$f(z) = \frac{-3\bar{z}}{4|z|^2} + C$$

Титаренко А.А.
КМБО-02-18

№4

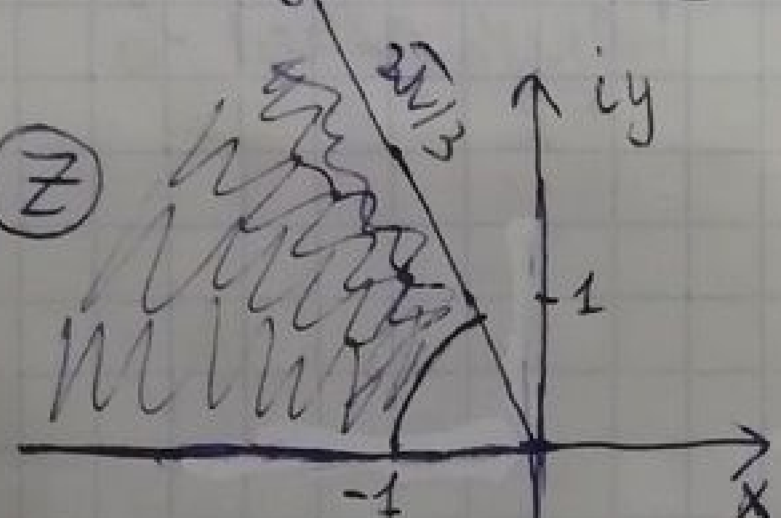
$$f(z) = (1-i)z^4 - 2 + 3i$$

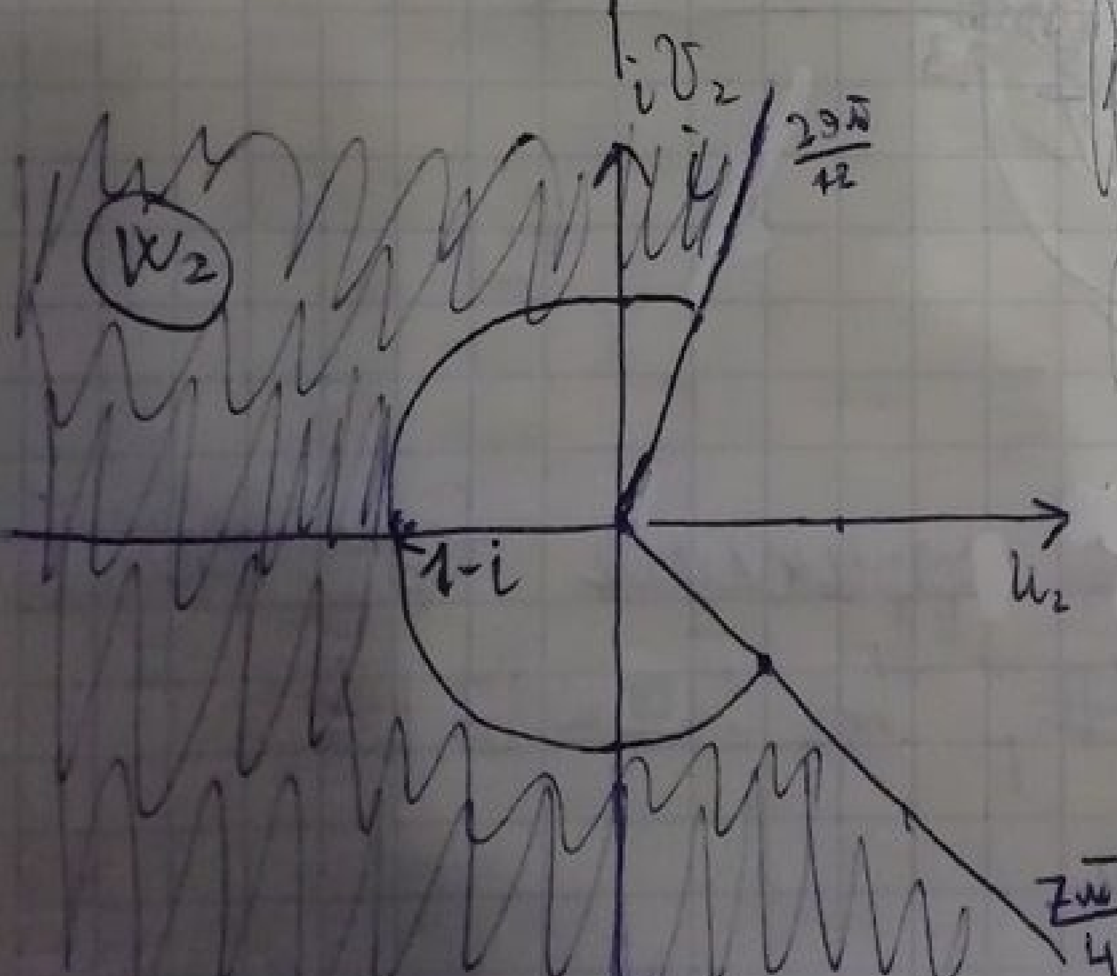
$$E = \{ 1 < |z|, \quad \frac{2\pi}{3} \le \arg z \le \pi \}$$

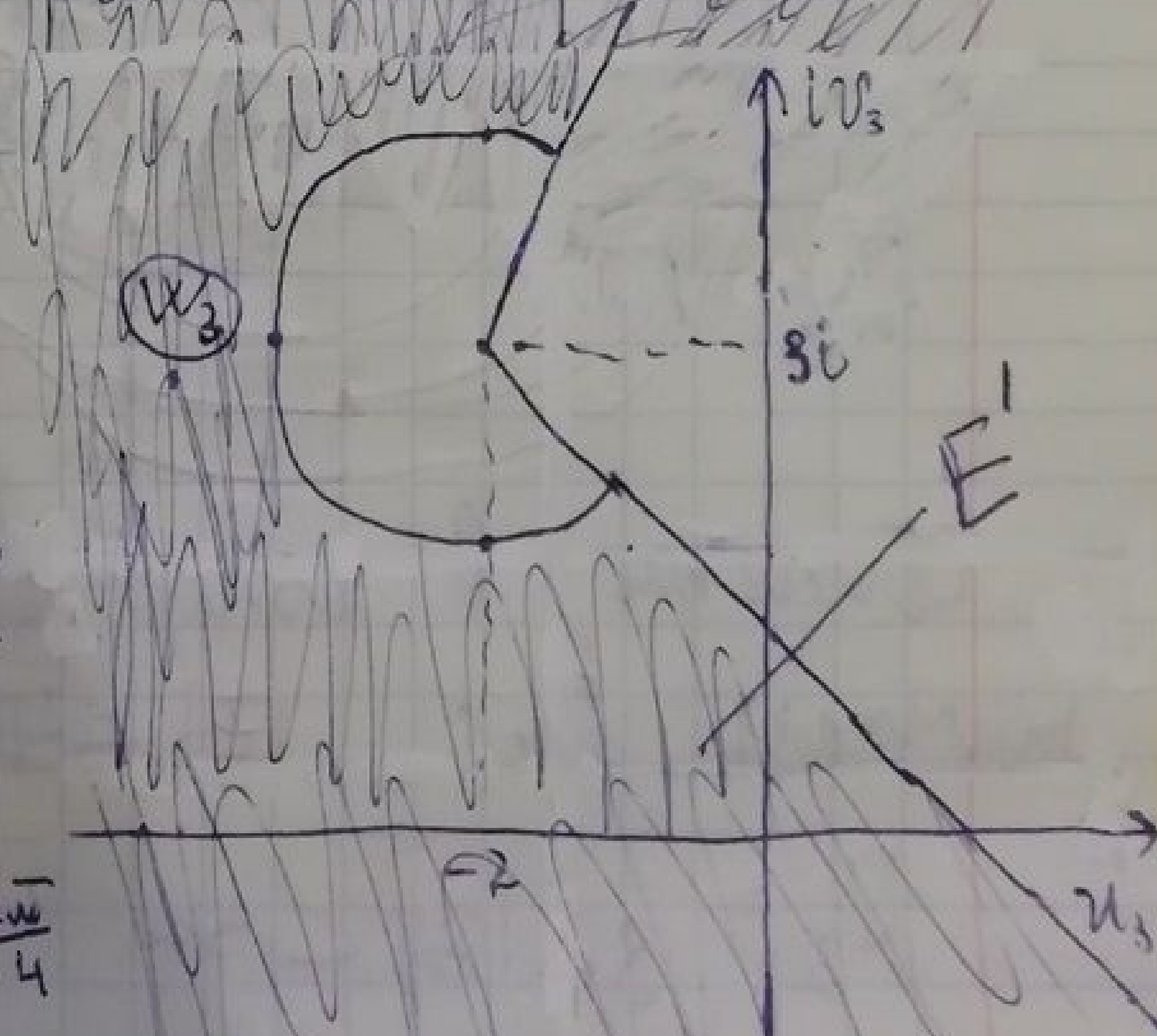
$w_1 = z^4$

$w_2 = (1-i)w_1$

$w_3 = w_2 - 2 + 3i$







$$E' = \{ \ |z| > \sqrt{2} \quad \frac{5\pi}{12} \leq \arg z \leq \frac{7\pi}{7} \ \}$$

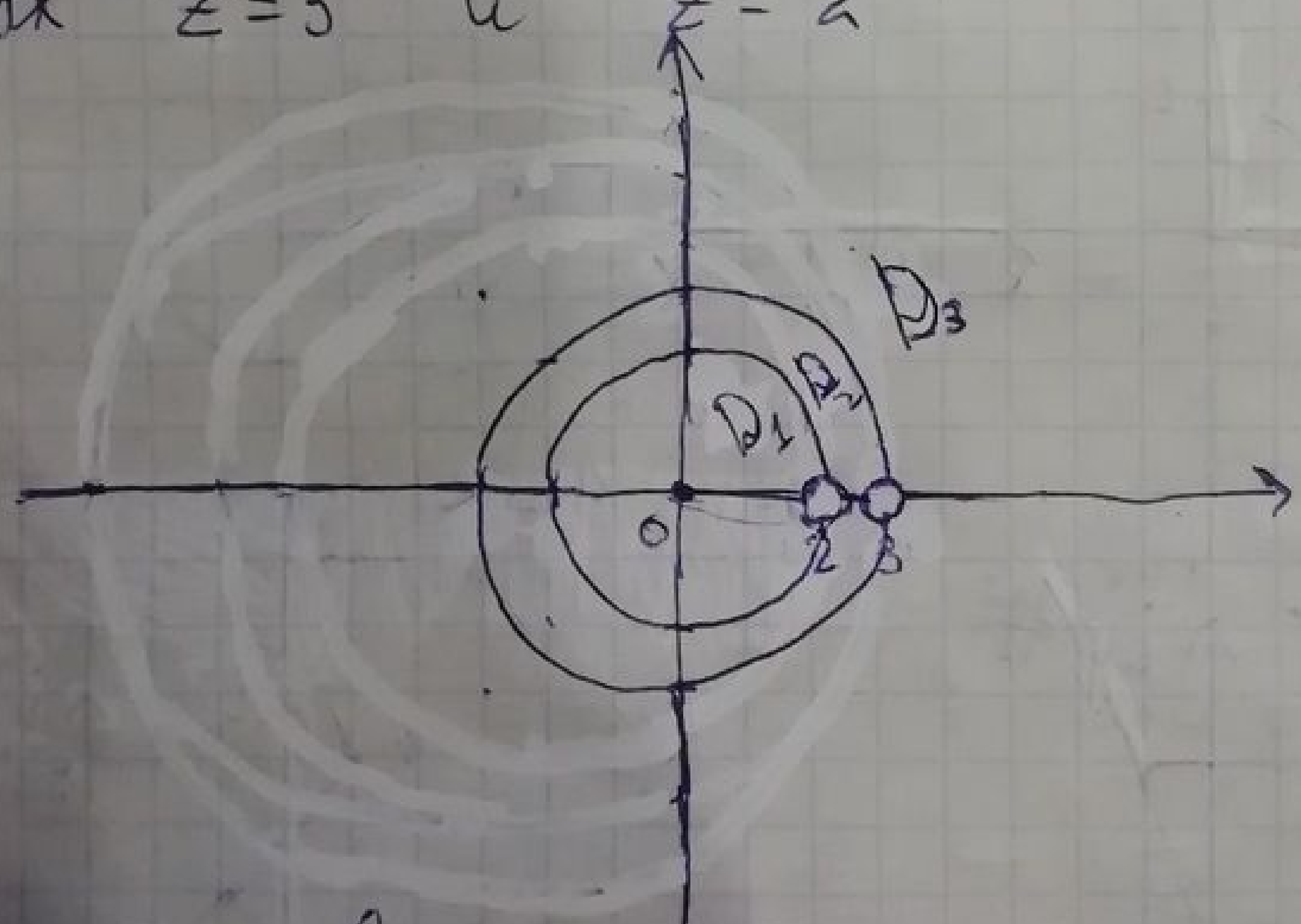
$$E' = \left\{ |z| > \sqrt{2} \quad \frac{5\pi}{12} \le \arg z \le \frac{7\pi}{7} \right\}$$

№5.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \qquad z_0 = 0$$

$$\frac{1}{z^2-5z+6} = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} + \frac{-1}{z-2}$$

1) Аналитичность фун-ции нарушается в точках $z = 3$ и $z = 2$



Области в которых функция $f(z)$ аналитичная: D_1: $|z| < 2$; D_2: $2 < |z| < 3$

D_3: $3 < |z| < \infty$

2)

В области D_1

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} + \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$$

В области D_2:

$$f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{-3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1\cdot z^n}{3^{n+1}} -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

В области D_3

$$(*)\ f(z) = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(3^n - 2^n\right)\cdot\frac{1}{z^{n+1}}$$

2) $z_0 = 0$ не явл изолированной особой точкой

3) Ряд (*) явл рядом Лорана ф-ии $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$

Главная часть ряда (*) содержит положительные степени z, то есть отсутствует $\Rightarrow z = \infty$ является устранимой особой точкой.

$$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -c_{-1}$$

При $n = 0$: $(3^0 - 2^0) \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow c_{-1} = 0$

$$\Rightarrow \underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = 0$$

Питаренко А.А.

№6

КМБО-02-18.

$f(z) = z e^{\frac{\pi z}{z-\pi}}$ $z_0 = \pi$

1) $z \cdot e^{\frac{\pi z}{z-\pi}} = ((z-\pi)+\pi) e^{\pi\left(\frac{z-\pi+\pi}{z-\pi}\right)} = ((z-\pi)+\pi) e^{\pi} \cdot e^{\frac{\pi^2}{z-\pi}} =$

$= ((z-\pi)+\pi) e^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(z-\pi)^n \cdot n!} = e^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n}}{(z-\pi)^{n-1} n!} + e^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(z-\pi)^n n!}$

$[k=n-1]$ $[k=n]$

$= e^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\pi^{2k+2}}{(k+1)!} + \frac{\pi^{2k+1}}{k!} \right] \cdot \frac{1}{(z-\pi)^k}$

2) Главная часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0 = \pi$ содержит беск. число членов $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка z_0 явл. существенно особой

$\underset{z=\pi}{\operatorname{res}} f(z) = C_{-1} = e^{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^4 + 2\pi^3}{2} \right]$

3) $z = \infty$ – полюс 1-го порядка

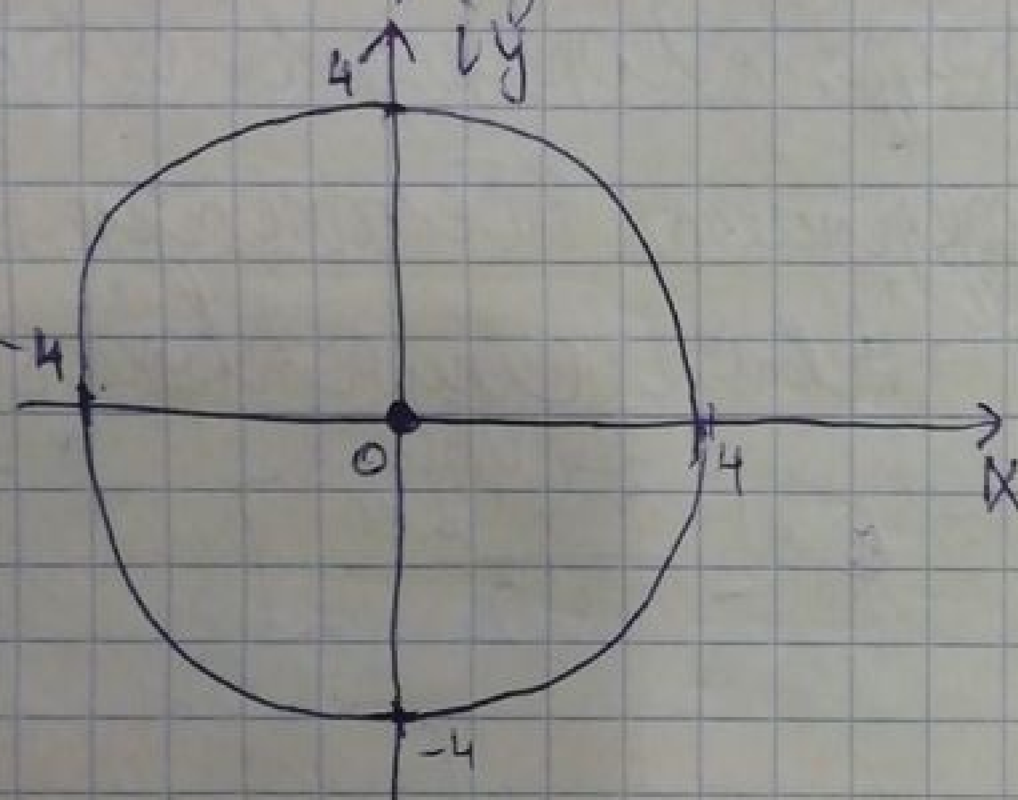
$\underset{z=\infty}{\operatorname{res}} f(z) = -C_{-1} = -e^{\pi} \left[\frac{\pi^4 + 2\pi^3}{2} \right]$

№ 7.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)} \qquad \Gamma = \{\ |z| = 4\ \}$$

особыми точками $f(z)$ явл.

$z=0$ – полюс 2-го порядка, $z=\pi i$ – полюс 1-го порядка.



Внутри контура интегрирования лежат точки: $z=0$; $z=\pi i$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot f(z)\right]' = \lim_{z\to 0}\left[\frac{e^z}{(z-\pi i)}\right]' =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\overset{1}{e^z}(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2} = \frac{-\pi i-1}{(-\pi i)^2} = -\frac{\pi i+1}{(\pi i)^2} =$$

$$= \frac{\pi i+1}{\pi^2}$$

$$\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) = \lim_{z\to \pi i}(z-\pi i)\cdot f(z) = \lim_{z\to\pi i}\frac{e^z}{z^2} =$$

$$= \frac{e^{\pi i}}{(\pi i)^2} = \frac{-1}{\pi^2 \cdot (-1)} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z^2(z-\pi i)} = 2\pi i \cdot \left(\frac{\pi i + 1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right) =$$

$$= \frac{2\pi^3 i^2 + 4i}{\pi} = \frac{4i - 2\pi}{\pi}$$

Найти несобств. интеграл

№ 8. $\int f(x)\,dx$ с помощью выче

28.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}dx}{x^2+4} =$$

$= I.$

Особые точки функции $\frac{e^{iz}}{z^2+4}$: $z_1 = 2i$

$z_2 = -2i$

В верхней полуплоскости лежит точка $z_1 = 2i$

$$\operatorname*{res}_{z=2i}\frac{e^{iz}}{z^2+4} = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)e^{iz}}{z^2+4} =$$

$$= \lim_{z\to 2i}\frac{e^{iz}}{z+2i} = \frac{e^{-2}}{4i} = \frac{1}{4e^2 i}$$

$$I = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i \operatorname*{res}_{z=2i} f(z)\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{2\pi i\cdot\frac{1}{4e^2 i}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{4e^2}$$

Питаренко А.А.
КМБО-02-18

№9

$F(z) = z^5 - 2z^2 + 5z + 1$

$D = \{ \ 1 < |z| < 2 \ \}$

Кольцо D не является односвязной областью, поэтому найдём число нулей в $D_1 : |z| > 1$ и $D_2 : |z| < 2$

В D_1 пусть $f(z) = 5z$

$g(z) = z^5 - 2z^2 + 1$

На границе $\Gamma_1 : |z| = 1$

$|f(z)| = |5z| = 5|z| = 5$

$|g(z)| = |z^5 - 2z^2 + 1| = |z|^5 + 2|z|^2 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \forall \ z \in \Gamma_1$

По теореме Руше в D_1

$N_F = N_f = 1 = N_1$

В D_2 пусть $f(z) = z^5$

$g(z) = -2z^2 + 5z + 1$

На границе $\Gamma_2: |z| = 2$

$$|f(z)| = |z|^5 = 2^5 = 32$$

$$|g(z)| = |-2z^2 + 5z + 1| = 2|z|^2 + 5|z| + 1 =$$

$$= 2^3 + 5 \cdot 2 + 1 = 8 + 10 + 1 = 19$$

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma_2$$

По теор. Руше в D_2

$$N_F = N_f = 5 = N_2$$

Тогда в кольце D число нулей =

$$= N = N_2 - N_1 = 5 - 1 = 4$$

Пилипаренко А.А.

1 №10

С помощью вычетов найти косинус-преобразование Фурье $F_c(\omega)$ функции $f(x)$. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x^4}$$

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2\cdot\cos\omega t}{1+t^4}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2e^{i\omega t}}{1+t^4}dt=$$

$\underline{z_0=e^{\frac{i\pi}{4}}}$ $\underline{z_1=e^{\frac{3\pi i}{4}}}$

$$\overset{\omega>0}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{Re}\{2\pi i\cdot\underset{z=z_0}{\operatorname{res}}f(z)\cdot\underset{z=z_1}{\operatorname{res}}f(z)\}=(*)$$

$$\underset{z=z_0}{\operatorname{res}}f(z)=\lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}}\frac{(z-e^{\frac{i\pi}{4}})z^2\cdot e^{i\omega z}}{z^4+1}=$$

$$=\lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}}\frac{z^2\cdot e^{i\omega z}}{(z-e^{\frac{3\pi}{4}i})(z-e^{\frac{5\pi}{4}i})(z-e^{\frac{7\pi}{4}i})}=$$

$$=\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}\cdot e^{i\omega e^{\frac{i\pi}{4}}}}{(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{\frac{i3\pi}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{\frac{5\pi i}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}}-e^{\frac{7\pi i}{4}})}=$$

$$= \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{iw\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cancel{i} \cdot e^{\frac{\sqrt{2}}{2}iw-\frac{\sqrt{2}}{2}w}}{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right) \cdot \sqrt{2}\cancel{i}} = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}w(i-1)}}{2\sqrt{2}(i+1)}$$

$$\operatorname*{res}_{z\to e^{\frac{3\pi}{4}}} f(z) = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi}{4}}} \frac{z^2 \cdot e^{iwz}}{\left(z-e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(z-e^{\frac{5\pi}{4}i}\right)\left(z-e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)} =$$

$$= \frac{e^{\frac{3\pi}{2}} \cdot e^{iw\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} =$$

$$= \frac{e^{\frac{3\pi}{2}} \cdot e^{w\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}i \cdot \left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)} = \frac{-e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}w(i+1)}}{-2\sqrt{2}i(i-1)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}w(i+1)}}{2\sqrt{2}(-1-i)}$$

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot Re\left\{2\pi i \cdot \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}w(i-1)}}{2\sqrt{2}(i+1)} \cdot \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}w(i+1)}}{2\sqrt{2}(-1-i)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot Re\left\{\cancel{2}\pi\cancel{i} \cdot \frac{e^{-\sqrt{2}w}}{-8\cdot\cancel{2}\cancel{i}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi e^{-\sqrt{2}w}}{-8}$$