КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y).

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x + iy$.

$x = \mathrm{Re}(z)$ – действительная часть, $y = \mathrm{Im}(z)$ - мнимая часть,

i - мнимая единица, $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Сопряжённое комплексное число: $\overline{z} = x - iy$.

Равенство: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны <=> $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Сумма: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Разность: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Произведение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.

Частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$**,**

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа,

$\varphi = \mathrm{Arg}\, z$ - аргумент комплексного числа, $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi n,\ n \in Z$,

$\arg z$ – главное значение аргумента числа z:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \quad y - \text{ любое;} \\ \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, \quad y - \text{ любое;} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа: $z = |z|e^{\arg z} = re^{\varphi}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2e^{\varphi_1 + \varphi_2}$,

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \dfrac{r_1}{r_2}e^{\varphi_1 - \varphi_2}$

Возведение комплексного числа в целую степень:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^ne^{n\varphi} \text{ – формула Муавра.}$$

Извлечение корня из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{r}e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$