Лекция №11.
Свёртка оригиналов, ее свойства. Обращение преобразования Лапласа.

Определение

Сверткой $\varphi * f$ непрерывных функций φ и f, заданных на положительной полуоси числовой прямой $\mathbb{R}_+$, называется интеграл

$$\varphi * f(t) = \int\limits_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Свойства свертки.

1) *Коммутативность.* $\varphi * f = f * \varphi$.
Действительно:

$$\varphi * f(t) = \int\limits_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = [t - \tau = s] =$$

$$= -\int\limits_t^0 \varphi(s) f(t-s) ds = \int\limits_0^t f(t-s)\varphi(s) ds = f * \varphi(t).$$

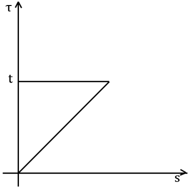
2) *Линейность по обоим аргументам.*

$$f * (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 f * g_1 + \alpha_2 f * g_2,$$
$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) * g = \alpha_1 f_1 * g + \alpha_2 f_2 * g.$$

Действительно:

$$f * (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \int\limits_0^t f(\tau)(\alpha_1 g_1(t-\tau) + \alpha_2 g_2(t-\tau))\, d\tau =$$
$$= \int\limits_0^t (\alpha_1 f(\tau) g_1(t-\tau) + \alpha_2 f(\tau) g_2(t-\tau))\, d\tau =$$
$$= \alpha_1 \int\limits_0^t f(\tau) g_1(t-\tau)\, d\tau + \alpha_2 \int\limits_0^t f(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau =$$
$$= \alpha_1 f * g_1 + \alpha_2 f * g_2$$

3) *Ассоциативность.* $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$.
Действительно:



$$((f * \varphi) * \psi)(t) = \int\limits_0^t (f * \varphi)(\tau)\psi(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t \psi(t-\tau) \int\limits_0^\tau f(s)\varphi(\tau - s)dsd\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_s^t \psi(t-\tau)\varphi(\tau-s)f(s)d\tau ds = [\tau - s = u] =$$

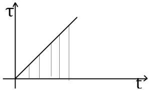
$$= \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \psi(t-s-u)\varphi(u)f(s)duds =$$

$$= \int\limits_0^t f(s) \int\limits_0^{t-s} \psi(t-s-u)\varphi(u)f(s)duds = (f * (\varphi * \psi))(t).$$

Теорема (умножения изображений Бореля)

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ *в* $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ *в* $\operatorname{Re} p > \alpha_2$. *Тогда* $(f * \varphi)(t) \risingdotseq F(p)\Phi(p)$.

Доказательство.



$$f * \varphi \risingdotseq \int_0^\infty e^{-pt}(f*\varphi)(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f(\tau)\varphi(t-\tau)dtd\tau = \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-pt}\varphi(t-\tau)dtd\tau =$$

$$= [t-\tau = u] = \int_0^\infty f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-p(\tau+u)}\varphi(u)du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-pu}\varphi(u)du = F(p)\Phi(p).$$

$\square$

Формулы Дюамеля.

$$h(t) = f * g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \risingdotseq F(p)G(p),$$

$$h'(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g'_t(t-\tau)d\tau + f(t)g(0) \risingdotseq pF(p)G(p) - \underbrace{h(0)}_{=0},$$

аналогично

$$\int\limits_0^t g(\tau)f'_t(t-\tau)d\tau + g(t)f(0) \risingdotseq pF(p)G(p).$$

Последние два равенства называют формулами Дюамеля.

Теорема (Формула обращения Римана-Меллина)

Пусть $f \risingdotseq F$ *в* $\operatorname{Re} p > \alpha$, *тогда в любой точке непрерывности функции* f *выполняется равенство*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \tag{1}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\{p \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} p = a > \alpha\}$. *В точках разрыва функции* f *вместо* $f(t)$ *в левой части формулы (1) следует взять*

$$\frac{1}{2}\left(f(t+0) - f(t-0)\right).$$

Определение

Функция называется мероморфной, если она не имеет других особенностей кроме полюсов.

Теорема

Если изображение $F(p)$ есть мероморфная функция на комплексной плоскости и аналитическая на полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \alpha$ и если существует последовательность окружностей

$$C_n = \{p \in \mathbb{C} \big| |p| = R_n\}, \quad R_1 < R_2 < \ldots < R_n < \ldots \to \infty,$$

на которой $F(p)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg p$, а так же

$$\forall a > \alpha \ \textit{интеграл} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp$$

сходится, то оригиналом изображения $F(p)$ является функция

$$\Theta(t) f(t) = \sum_j \operatorname*{res}_{p_j} e^{pt} F(p).$$

Обращение дробно-рациональных изображений.

Любую правильную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшими дробями являются дроби вида

$$\frac{1}{(p-a)^n}; \quad \frac{Ap+B}{(p^2+ap+b)^n}, \; a^2-4b<0.$$

Оригиналы для этих дробей могут быть получены по теореме о дифференцировании изображений.

Применение формулы Дюамеля.

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} Ly = f, \\ y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$Ly = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y, \quad a_i = const.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} Lz = 1, \\ z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть y и z – решения задач (2) и (3) соответственно.
Обозначим через

$$y \risingdotseq Y(p), \quad z \risingdotseq Z(p), \quad f \risingdotseq F(p)$$

$$R_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Применим преобразование Лапласа к (2) и (3), получим

$$\begin{cases} R_n(p)Y = F, & (4) \\ R_n(p)Z = \dfrac{1}{p}. & (5) \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$Y(p) = pZ(p)F(p).$$

По формуле Дюамеля имеем

$$y(x) \risingdotseq Y(p) \doteqdot \underbrace{f(x)z(0)}_{=0} + \int\limits_0^x f(\tau)z'(x-\tau)d\tau,$$

значит

$$y(x) = \int\limits_0^x f(\tau)z'(x-\tau)d\tau = f * z'.$$

Пример

Операторным методом найти решение задачи Коши

$$y'' + 6y' = xe^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Обозначим преобразование Лапласа функции $y(x)$ через $Y(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала будем иметь

$$y''(x) \doteqdot p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p + 1,$$
$$y'(x) \doteqdot pY - y(0) = pY - 1,$$

а по теореме о дифференцировании изображения

$$xe^{-3x} \doteqdot \frac{1}{(p+3)^2}.$$

Таким образом, функция $Y(p)$ находится из уравнения

$$p^2Y - p + 1 + 6pY - 6 = \frac{1}{(p+3)^2}$$

и равна

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2+6p} + \frac{1}{(p^2+6p)(p+3)^2}.$$

Пример

$$y'' + 6y' = xe^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2+6p} + \frac{1}{(p^2+6p)(p+3)^2}.$$

Разложим полученные дроби в сумму простейших

$$\frac{p+5}{p^2+6p} = \frac{p+5}{p(p+6)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+6}$$

$$A = \left.\frac{p+5}{p+6}\right|_{p=0} = \frac{5}{6}; \quad B = \left.\frac{p+5}{p}\right|_{p=-6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{(p^2+6p)(p+3)^2} = \frac{1}{p(p+6)(p+3)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+6} + \frac{C}{p+3} + \frac{D}{(p+3)^2}$$

$$A = \left.\frac{1}{(p+6)(p+3)^2}\right|_{p=0} = \frac{1}{54}; \quad B = \left.\frac{1}{p(p+3)^2}\right|_{p=-6} = -\frac{1}{54}$$

$$D = \left.\frac{1}{p(p+6)}\right|_{p=-3} = -\frac{1}{9}; \quad -\frac{1}{8} = -\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + C + D$$

$$C = -\frac{1}{8} + \frac{1}{108} + \frac{1}{216} + \frac{1}{9}; \quad C = 0$$

$$Y(p) = \frac{23}{27}\frac{1}{p} + \frac{4}{27}\frac{1}{p+6} - \frac{1}{9}\frac{1}{(p+3)^2}$$

Пример

$$y'' + 6y' = xe^{-3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$Y(p) = \frac{23}{27} \cdot \frac{1}{p} + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{p+6} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{(p+3)^2},$$

откуда

$$y(x) = \frac{23}{27} + \frac{4}{27} e^{-6x} - \frac{1}{9} x e^{-3x}.$$

Пример

Решить задачу Коши

$$y'' + 4y' = e^{4x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

с помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши

$$z'' + 4z' = 1,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0;$$

По формуле Дюамеля имеем

$$y(x) = e^{4x} * z'(x),$$

где $z(x)$– решение вспомогательной задачи

$$z'' + 4z' = 1,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0.$$

Функцию $z'(x)$ будем искать операторным методом.
Для этого обозначим $z(x) \risingdotseq Z(p)$.
Так как

$$z(0) = 0,\ z'(0) = 0,$$

то

$$z'(x) \risingdotseq pZ(p), \quad z''(x) \risingdotseq p^2 Z(p).$$

Функция $Z(p)$ удовлетворяет уравнению

$$p^2 Z + 4pZ = \frac{1}{p},$$

Пример

$$pZ = \frac{1}{p^2+4p} = \frac{1}{p(p+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4}$$

$$A = \left.\frac{1}{p+4}\right|_{p=0} = \frac{1}{4}; \quad B = \left.\frac{1}{p}\right|_{p=-4} = -\frac{1}{4}$$

$$pZ = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right)$$

и следовательно, так как $z'(x) \doteqdot pZ(p)$,

$$z'(x) \doteqdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right).$$

Отсюда

$$z'(x) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4x}).$$

Пример

Окончательно получим

$$y(x) = e^{4x} * z'(x) = e^{4x} * \left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-4x}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^x e^{4(x-\tau)}(1 - e^{-4\tau})\,d\tau = \frac{e^{4x}}{4}\int\limits_0^x (e^{-4\tau} - e^{-8\tau})\,d\tau =$$

$$= \frac{e^{4x}}{4}\left(\frac{e^{-8\tau}}{8} - \frac{e^{-4\tau}}{4}\right)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=x} = \frac{e^{4x}}{4}\left(\frac{e^{-8x}}{8} - \frac{e^{-4x}}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{e^{4x}}{32} + \frac{e^{-4x}}{32} - \frac{1}{16}.$$