Практическое занятие №11
Изолированные особые точки

Краткие теоретические сведения

Определение 1. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой* однозначного характера для функции $f(z)$, если существует проколотая окрестность точки z_0: $0 < |z - z_0| < \rho$, в которой функция $f(z)$ является однозначной и аналитической, а в самой точке z_0 функция $f(z)$ либо не определена, либо не является однозначной и аналитической.

Аналогично, точка $z = \infty$ называется изолированной особой точкой однозначного характера для функции $f(z)$, если функция $f(z)$ является однозначной и аналитической в некотором кольце $\rho < |z| < \infty$. ▲

В зависимости от поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 различают 3 типа особых точек.

Определение 2. Изолированная особая точка однозначного характера z_0 функции $f(z)$ называется:

а) *устранимой особой точкой*, если ∃ конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

б) *полюсом,* если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

в) *существенной особой точкой*, если не ∃ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. ▲

Примеры

а) $z_0 = 0$ – устранимая особая точка для функций

$$\frac{\sin z}{z}\ ;\ \frac{e^z - 1}{z}\ ;\ \frac{1 - \cos z}{z^2};$$

б) $z = -1$ − полюс для функции $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2}$;

в) $z = 0$ – существенно особая точка для функций

$$e^{\frac{1}{z}}\ ;\ e^{\frac{1}{z^2}}\ ;\ \sin\frac{2}{z}\ ;\ \cos\frac{1}{z}.$$

Определение 3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $K: 0 < |z - z_0| < \rho$. Тогда в этом кольце функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{11.1}$$

Ряд (11.1) называется *рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0*, а ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{11.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{11.3}$$

называются соответственно *правильной* и *главной* частью ряда (11.1). ▲

Определение 4. Пусть функция $f(z)$ представляется в области $R < |z| < \infty$ сходящимся рядом

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{11.4}$$

Ряд (11.4) называется *рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки*, а ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{11.5}$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \tag{11.6}$$

называются соответственно *главной* и *правильной* частью ряда (11.4). ▲

Замечание. Рядом Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ называется также ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{11.4a}$$

сходящийся к $f(z)$ в области $R < |z - z_0| < \infty$. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{11.5a}$$

называют главной частью ряда (11.4а), а

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \tag{11.6a}$$

— правильной частью. ▲

Определение типа особой точки по главной части ряда Лорана

Таблица 1

Тип особой точки z_0 функции $f(z)$	Главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0
Устранимая	отсутствует
Полюс	содержит конечное число членов
Существенно особая	содержит бесконечное число членов

Определение порядка полюса для точки $z_0 \neq \infty$

Таблица 2

Точка $z_0 \neq \infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда	1) в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}_\rho(z_0)$ точки z_0, т.е. в области $0 < \|z - z_0\| < \rho$, функция $f(z)$ представляется рядом: $$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, m > 0, c_{-m} \neq 0.$$
	2) $f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^m}$ при $z \to z_0$, где A – некоторое отличное от нуля комплексное число.
	3) $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$, где функция $h(z)$ аналитична в точке z_0 и $h(z_0) \neq 0$.
	4) точка z_0 является нулем порядка m для функции

	$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, z\neq z_0,\\ 0, z=z_0,\end{cases}$$ т.е. $g(z_0)=g'(z_0)=\cdots=g^{(k-1)}(z_0)=0, g^{k}(z_0)\neq 0$.

Определение порядка полюса для бесконечно удаленной точки

Таблица 3

Точка $z=\infty$ является полюсом порядка m для функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда	1) в области $\rho<\lvert z\rvert<\infty$, функция $f(z)$ представляется рядом: $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n, m>0, c_m\neq 0.$$
	2) $f(z)\sim Az^m$ при $z\to\infty$, где A – некоторое отличное от нуля комплексное число.
	3) $f(z)=h(z)z^m$, функция $h(z)$ аналитична в некоторой области $\rho<\lvert z\rvert<\infty$ и $\lim\limits_{z\to\infty} h(z)\neq 0$.

Контрольные вопросы по теоретической части

1) Дайте определение *изолированной особой точки* однозначного характера для функции $f(z)$ (конечной и бесконечной).
2) Какие типы изолированных особых точек существуют? Дайте определение для каждого типа изолированных особых точек.
3) Дайте определение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности конечной точки z_0. Что такое главная и правильная части этого ряда?
4) Дайте определение ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z=\infty$. Что такое главная и правильная части этого ряда?
5) Как определить тип особой точки по главной части ряда Лорана в окрестности этой точки?
6) Как определить порядок полюса для конечной точки z_0?
7) Как определить порядок полюса для точки $z=\infty$?

Практические задания

Указать все конечные особые точки заданных ниже функций и определить их характер:

1) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$

2) $а) f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$; $б) f(z)=\dfrac{1}{1-\cos 2z}$

3) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3\left(e^z-1\right)}$

4) $f(z)=\dfrac{z(\pi-z)}{\sin 2z}$

5) $f(z)=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{tgz-1}$

6) $f(z)=tg\,\dfrac{1}{z-1}$

7) $f(z)=\dfrac{tg(z-1)}{z-1}$

8) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5}$

9) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-3}$

Для заданных ниже функций выяснить характер бесконечно удаленной точки (устранимую точку считать правильной)

10) $f(z)=\dfrac{z^2}{5-2z^2}$

11) $f(z)=\dfrac{3z^5-5z+2}{z^2+z-4}$

Указать все конечные особые точки заданных ниже функций, определить их характер и выяснить характер бесконечно удаленной точки

12) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$

13) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$

14) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z-1}$

Домашнее задание: №№ 13.382, 13.385, 13.386, 13.390, 13.392, 13.400, 13.406, 13.407.

(Первые две цифры соответствуют номеру главы «Ряды и их применение»)