ЛЕКЦИЯ 15.

МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортогональная система многочленов. Сформулируем ряд общих свойств:

1) $p_n(x)$ – многочлен степени n;

2) на интервале $(a;b)$ функция $p_n(x)$ имеет ровно n различных вещественных корней;

3) для каждой системы ортогональных многочленов имеет место *формула Родрига*:

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n \cdot \rho(x)} \cdot \frac{d^n\left[\rho(x)q^n(x)\right]}{dx^n}, \tag{1}$$

где $K_n = const,\ q(x)$ – фиксированный многочлен, не зависящий от n.

4) каждый многочлен из заданной системы ортогональных многочленов удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0, \tag{2}$$

где $a(x),\ b(x)$ – многочлены, не зависящие от n, λ_n – числа;

5) для любых трех последовательно взятых ортогональных многочленов из заданной системы функций $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ справедливо рекуррентное соотношение вида:

$$p_n(x) = (A_n x + B_n)p_{n-1}(x) + C_n p_{n-2}(x),\ n = 2,3,... \tag{3}$$

A_n, B_n, C_n – некоторые константы.

Многочлены Эрмита

Многочлены Эрмита определяются равенством:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \cdot \frac{d^n\left[e^{-x^2/2}\right]}{dx^n},\ n = 0,1,2,... \tag{4}$$

Формула (4) представляет собой формулу Родрига (1), в которой $K_n=(-1)^n,\ \rho(x)=e^{-x^2/2},\ q(x)=1$.

Утверждение 1. Многочлены Эрмита являются решениями дифференциального уравнения

$$y''(x)-xy'(x)+ny(x)=0. \tag{5}$$

Доказательство: Пусть $y(x)=H_n(x)$. Тогда

$$y'(x)=(-1)^n xe^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)+(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(-xe^{-x^2/2}\right)=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+(-x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+C_n^1(-1)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right\}=$$

$$=(-1)^{n+1}e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)},$$

$$y''(x)=(-1)^{n+1}nxe^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}=$$

$$=(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}\right\}.$$

Подставляя указанную функцию $y(x)$ и ее производные в левую часть (5), получим:

$$y''(x)-xy'(x)+ny(x)=(-1)^{n+1}ne^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}\right\}-$$

$$-(-1)^{n+1}e^{x^2/2}nx\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}+(-1)^n e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}=0\ \blacksquare$$

Утверждение 2. Для многочленов Эрмита справедливо рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x)=xH_n(x)-nH_{n-1}(x),\ n=1,2,\ldots. \tag{6}$$

Доказательство:

$$xH_n(x)-nH_{n-1}(x)=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}-(-1)^{n-1}e^{x^2/2}n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left\{x\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}+n\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\right\}=$$

$$=(-1)^n e^{x^2/2}\left(xe^{-x^2/2}\right)^{(n)}=(-1)^n e^{x^2/2}\left(-e^{-x^2/2}\right)^{(n+1)}=$$

$$=(-1)^{n+1}e^{x^2/2}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n+1)}=H_{n+1}(x)\ \blacksquare$$

Утверждение 3. Для многочленов Эрмита справедливо равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}H_n(x)H_m(x)dx=\begin{cases}0,\ m\neq n,\\ \sqrt{2\pi}\cdot n!,\ \ m=n.\end{cases} \tag{7}$$

Доказательство: Из формул (4) и (6) следует, что $H_n(x)$ – многочлен степени n, и коэффициент при x^n в этом многочлене равен единице. Откуда в частности следует, что $H_n^{(n)}(x)=n!, H_n^{(n+1)}(x)=0$. Пусть для определенности $m<n$. Применяя m раз формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}H_n(x)H_m(x)dx=(-1)^n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n)}H_m(x)dx=$$

$$=(-1)^n\left\{H_m(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-1)}H_m'(x)dx\right\}=\ldots=$$

$$=(-1)^{n+m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_m^{(m)}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-m)}dx=$$

$$=(-1)^{n+m}H_m^{(m)}(x)\left(e^{-x^2/2}\right)^{(n-m-1)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=0\,.$$

Если $m=n$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) H_n(x) dx = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n^{(n)}(x) dx =$$

$$= n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 2\sqrt{2} n! \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} n! \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = n! \sqrt{2\pi} \, .$$

Равенство (7) доказано ■

Утверждение 4. Функция $\varphi(x,t) = e^{tx - t^2/2}$ является производящей функцией для многочленов Эрмита, т.е. имеет место равенство

$$\varphi(x,t) = e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \, . \qquad (8)$$

Решение: Продифференцируем функцию $\varphi(x,t)$ по переменной t :

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = (x - t) e^{tx - t^2/2} \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = (x - t) \varphi(x,t) . \qquad (9)$$

Пусть $\varphi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^n}{n!}$. Подставим это разложение в равенство (9):

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - x \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+1}(x) \frac{t^k}{k!} - \sum_{n=0}^{\infty} x y_k(x) \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1}(x) \frac{t^k}{(k-1)!} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_1(x) - x y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(y_{k+1}(x) - x y_k(x) + k y_{k-1}(x) \right) \frac{t^k}{k!} = 0 \, .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получим равенства:

$$y_1(x) - x y_0(x) = 0,$$

$$y_{k+1}(x) - x y_k(x) + k y_{k-1}(x) = 0, \; k = 1,2,\ldots \qquad (10)$$

Рекуррентное соотношение (10) совпадает с рекуррентной формулой (6) для многочленов Эрмита. Осталось показать, что

$$y_0(x) = 1 = H_0(x), \;\; y_1(x) = x = H_1(x).$$

Последние равенства следуют из разложения показательной функции в степенной ряд:

$$\varphi(x,t) = e^{tx - t^2/2} = e^{tx} \cdot e^{-t^2/2} = \left(1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} - \ldots\right) \blacksquare$$

● Используя формулу Родрига (4) и рекуррентное соотношение (6), можно найти явный вид многочленов Эрмита. Выпишем многочлены Эрмита с индексами $n = 0,1,\ldots,5$:

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = x,$$

$$H_2(x) = x^2 - 1,$$

$$H_3(x) = x^3 - 3x,$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3,$$

$$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x.$$

Заметим, что многочлены Эрмита с четными индексами содержат только четные степени x, а нечетными – нечетные степени x.

Задача. Разложить функцию $\operatorname{ch} tx$ по многочленам Эрмита, т.е. представить в виде:

$$\operatorname{ch} tx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) H_n(x). \qquad (11)$$

Решение: Согласно определению гиперболического косинуса

$$\operatorname{ch} tx = \frac{1}{2}\left(e^{tx} + e^{-tx}\right).$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{-t^2/2}$:

$$e^{-t^2/2} \operatorname{ch} tx = \frac{1}{2} e^{tx - t^2/2} + \frac{1}{2} e^{-tx - t^2/2} =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}H_n(-x)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(H_n(x)+H_n(-x)\right)\frac{t^n}{n!}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}2H_{2m}(x)\frac{t^{2m}}{(2m)!}=\sum_{m=0}^{\infty}H_{2m}(x)\frac{t^{2m}}{(2m)!}.$$

Здесь было учтено, что многочлены Эрмита с нечетными индексами являются нечетными функциями, а многочлены Эрмита с четными индексами являются четными функциями и поэтому $H_n(x)+H_n(-x)=0$ для нечетных значений n.

Так как

$$e^{-t^2/2}\operatorname{ch}tx=\sum_{m=0}^{\infty}H_{2m}(x)\frac{t^{2m}}{(2m)!},$$

то

$$\operatorname{ch}tx=\sum_{m=0}^{\infty}H_{2m}(x)\frac{t^{2m}e^{t^2/2}}{(2m)!}.$$

В разложении (11)

$$a_{2m+1}(t)=0,\ a_{2m}(t)=\frac{t^{2m}e^{t^2/2}}{(2m)!},\ m=0,1,2,\ldots\blacksquare$$