Тензорный анализ

(математический анализ, 3-й семестр)

направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

03.12.2020 β-версия

ТЕНЗОРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§1. Верхние и нижние индексы, законы преобразования

Л1

Запишем разложение вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = [\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n][x^1 \dots x^n]^T.$$

Здесь базисные векторы имеют нижние индексы, а координаты – верхние. Это связано с различными законами преобразования при замене базиса. Если элементы базиса преобразуются с помощью матрицы перехода P, $[e'_1 \dots e'_n] = [e_1 \dots e_n]P$, то координаты, записываемые в столбец $X = [x^1 \dots x^n]^T$, с помощью обратной матрицы P^{-1}, $X' = P^{-1}X$.

Итак, векторы $\vec{e}_i$ с нижними индексами преобразуются с помощью матрицы P, а их координаты x^i с верхними — матрицы P^{-1}.

Раньше, в курсах линейной алгебры и дифференциальной геометрии, мы уже встречались с различными величинами, имеющими не только 1 (как координаты вектора), но и 2 индекса.

1. Линейный оператор $\hat{A} : R^n \to R^n$ действует на вектор $\vec{x}$ по формуле $\hat{A}\vec{x} = \hat{A}(x^i\vec{e}_i) = x^i \hat{A} e_i = x^i a_i^k e_k$. Элементы a_i^k матрицы оператора имеют один верхний и один нижний индекс. Это связано с законом преобразования $A' = P^{-1}AP$.

2. Билинейная форма $A(\vec{x}, \vec{y}) = a_{ij}x^i y^j$ ставит в соответствие 2 векторам число. Элементы ее матрицы a_{ij} имеют два нижних индекса, $A' = P^T AP$.

Перечисленные выше величины представляют собой примеры тензоров первого и второго ранга. Определение тензора можно дать как с помощью закона преобразования его компонент при замене базиса, так и не прибегая к его покомпонентной записи. Ниже мы пойдем по второму пути.

§2. Векторы и ковекторы. Определение тензора

О. Пусть V — линейное пространство. Отображение $\phi : V \to R$ называется **линейным функционалом** (линейной формой) на V, если $\forall x_1, x_2 \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_2 \phi(x_2)$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ получим $\phi(\vec{x}) = \phi(x^i\vec{e}_i) = x^i\phi(\vec{e}_i)$. Таким образом, линейный функционал определяется своими значениями на базисных векторах; полагая $\xi_i = \phi(\vec{e}_i) \in \mathbb{R}$, получим

$$\phi(\vec{x}) = \xi_i x^i = [\xi_1 \dots \xi_n][x^1 \dots x^n]^T.$$

Из этой записи видно, что в отличие от вектора-столбца, линейный функционал естественно представлять строкой.

Линейные функционалы можно складывать и умножать на число. Прямой проверкой нетрудно убедиться, что множество всех линейных функционалов на V также является линейным пространством. Оно обозначается как V^* и называется **дуальным** к V, $\dim V^* = \dim V$. Элементы этого пространства имеют много названий – **ковекторы** (сокращение от ковариантного вектора), линейные формы, 1-формы, линейные функционалы, употребляемых разными авторами в зависимости от контекста, традиций и собственного вкуса.

Пример ковектора (линейной формы, или один-формы) – это градиент скалярного поля $\operatorname{grad}\phi(u) = [\frac{\partial\phi(u)}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial\phi(u)}{\partial u^n}]$. Производная скалярного поля $\phi(u)$ по направлению сопоставляет каждому направлению (вектору) $\vec{x} = x^i\vec{e}_i$ число $\nabla_x\phi(u)$,

$$\nabla_x\phi(u) = (\operatorname{grad}\phi(u))_i\, x^i = \frac{\partial\phi(u)}{\partial u^i}x^i,$$

Т.о., $\operatorname{grad}\phi(u)$ – ковектор, и закон преобразования его компонент (координат) $(\operatorname{grad}\phi(u))_i$ при замене базиса отличен от закона преобразования компонент вектора x^i – эти компоненты имеют нижний индекс.

Другой пример ковектора (1-формы) хорошо известен нам из алгебры матриц. Если считать векторами столбцы, то строки будут являться ковекторами: если их перемножить (строка на столбец), то получится число.

Пусть V — пространство столбцов, V^* — пространство строк; элементы V^* — ковекторы (ковариантные векторы), преобразуются так же, как и базис $\vec{e}_i$ в V (преобразуются с помощью P); элементы V — векторы (контравариантные векторы) (преобразуются с помощью P^{-1}).

Подчеркнем, что вектора и ковектора – это элементы различных пространств, и их нельзя, например, складывать друг с другом (как нельзя складывать столбцы со строками). Для этого надо вводить некоторое специальное правило, ставящее в соответствие каждому вектору ковектор и наоборот.

О. Тензором типа (p, q) называется полилинейная (т.е. линейная по каждому аргументу) функция, аргументами которой служат p ковекторов (один-форм) и q векторов, а значениями – вещественные числа.

Компоненты тензора – это его значения на базисных векторах и 1-формах. Компоненты тензора типа (p, q) имеют p верхних и q нижних индексов.

Ранг тензора типа (p, q) равен $p + q$.

скаляр (0,0)
вектор (1,0)
ковектор (линейная форма) (0,1)
билинейная форма (0,2)
линейный оператор (1,1)

Как геометрический объект, тензор не зависит от выбора базиса, от выбора базиса зависят его компоненты. (В этом смысле, ситуация полностью аналогична вектору – сам по себе вектор от выбора базиса не зависит, зависят его координаты.)

Тензорное поле — это отображение, которое каждой точке рассматриваемого пространства ставит в соответствие тензор.

Примеры из физики.

1. Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$, где $A_\mu = [\varphi, -A_1, -A_2, -A_3]$ – потенциалы поля, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Это антисимметричный тензор 2-го ранга,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix},$$

где E_k, H_k – компоненты напряженностей электрического и магнитного полей.

2. Тензор момента инерции твердого тела. Для N материальных точек массы m_α с координатами $x^i_{(\alpha)}$

$$A^{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\delta^{ij}|\vec{x}_{(\alpha)}|^2 - x^i_{(\alpha)}x^j_{(\alpha)}\right)$$

Тензор инерции A^{ij} – величина, связывающая момент импульса твердого тела (и кинетическую энергию его вращения) с его угловой скоростью $\vec{\omega}$ (направление вектора $\vec{\omega}$ задает ось вращения, а $|\vec{\omega}|$ – абсолютную величину угловой скорости): $L^i = A^{ij}\omega_i$, $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,A^{ij}\omega_i\omega_j$. Это симметричный тензор, и как и любой симметричный тензор, его можно диагонализовать (т.е. перейти в систему отсчета, где матрица A^{ij} диагональна).

3. Тензоры напряжений и деформаций упругой среды. Тензор деформаций симметричен, причем его диагональные элементы T_{ij} описывают линейные деформации растяжения либо сжатия, недиагональные – деформацию сдвига.

Отметим, что понятие тензора возникло изначально в теории упругости (tension в переводе с английского – напряжение, tensor – это примерный эквивалент слова напрягающий).

Л2

§3. Тензорное произведение

Определение тензора может быть дано и на основе понятия тензорного произведения.

Прямое или **декартово произведение** множеств $X \times Y$ — множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары этих множеств $(x, y), x \in X, y \in Y$.

Декартова степень множества: $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ — n-кратное прямое произведение.

Если прямое произведение определено для произвольных множеств, то **тензорное произведение** — это операция над определенными множествами — *линейными пространствами* и их элементами.

<u>О</u>. Пусть U и V — векторные пространства над полем $\mathbb{R}$, $\dim U = n$, $\dim V = m$. Пусть $(a_1 \dots a_n)$ — базис в U, $(b_1 \dots b_m)$ — базис в V.
Декартово (прямое) произведение векторных пространств — это множество упорядоченных пар: $U \times V = \{(x, y) : x \in U, y \in V\}$
Тензорное произведение $U \otimes V$:
1) Базис $U \otimes V$ — множество упорядоченных пар (a_i, b_j), $a_i \otimes b_j = f_{ij}$, $\dim(U \otimes V) = mn$.
2) В пространстве $U \otimes V$ паре (x, y) соответствует элемент $x \otimes y = x^i y^j (a_i \otimes b_j) = x^i y^j f_{ij}$.
3) Операции в $U \otimes V$: $\forall\ p = p^{ij} f_{ij}$, $q = q^{ij} f_{ij}$: $p + q = (p^{ij} + q^{ij}) f_{ij}$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ \lambda p = (\lambda p^{ij}) f_{ij}$.

Замена базиса в тензорных произведениях.
Если в исходных векторных пространствах $a_{i'} = a^i_{i'} a_i$, $b_{j'} = b^j_{j'} b_j$, где $[a^i_{i'}]$ и $[b^j_{j'}]$ – матрицы перехода, то для базиса тензорного произведения имеем $a_{i'} \otimes b_{j'} = a^i_{i'} b^j_{j'} (a_i \otimes b_j) = a^i_{i'} b^j_{j'} f_{ij} = f'_{i'j'}$.

Любой элемент $T = p^{ij} f_{ij} \in U \otimes V$ является тензором.

Компоненты, или координаты тензора p^{ij} при замене базиса преобразуются по закону $p^{i'j'} = a^{i'}_i b^{j'}_j p^{ij}$, где $a^{i'}_i$ и $b^{j'}_j$ — элементы матриц, обратных к $[a^i_{i'}]$ и $[b^{j'}_j]$.

Так же как и вектор $x = x^i \vec{e}_i$, тензор $T = p^{ij} f_{ij}$ от выбора системы координат не зависит.

Тензорное произведение векторов $[a_1 \dots a_n] \in U$ и $[b_1 \dots b_m] \in V$ можно представить в виде таблицы:

$$a \otimes b = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \dots b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & \dots & a_1b_m \\ a_2b_1 & \dots & a_2b_m \\ & \dots & \\ a_nb_1 & \dots & a_nb_m \end{bmatrix}$$

Мы рассмотрели тензоры второго ранга, базисы и компоненты (координаты) которых записываются в виде матриц. Нетрудно построить и тензоры более высокого ранга; их можно себе представить как многомерную таблицу. Пусть $\dim U = \dim V = \dim W = n$; элементы базиса f_{ijk} тензорного произведения $a \otimes b \otimes c$ можно записать в виде трехмерной таблицы $n \times n \times n$; они преобразуются по формуле

$$f'_{i'j'k'} = a^i_{i'} b^j_{j'} c^k_{k'} f_{ijk}.$$

Рассмотрим тензорное произведение $T(V) = (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V^*)$ p экземпляров пространства V и q экземпляров пространства V^*. Тензор $T \in T(V)$ – элемент тензорного произведения $T(V)$ – это p раз контравариантный, q раз ковариантный тензор типа (p, q) с компонентами (координатами) $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, имеющими p верхних и q нижних индексов.

§4. Метрический тензор

Выше, давая определения ковектора и тензора, мы рассматривали линейное пространство, не требуя наличия в нем скалярного произведения. Однако, без скалярного произведения мы не сможем ни определить понятие длины (нормы) векторов и ковекторов, ни задать важнейшую операцию тензорной алгебры – подъем и опускание индексов. Последняя задает взаимнооднозначное соответствие между тензорами типа (p, q) и (q, p), в частности между векторами и ковекторами.

Метрический тензор – это симметричный тензор g_{ij} ранга (0,2), посредством которого задается скалярное произведение векторов,

$$\langle x, y \rangle = \langle x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle x^i y^j = g_{ij} x^i y^j.$$

Компоненты тензора g_{ij} представляют собой скалярные произведения векторов базиса пространства V,

$$g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle.$$

С его же помощью любому вектору $\vec{x}$ с компонентами x^i мы можем сопоставить ковектор $\tilde{x}$ с компонентами x_i:

$$x_i = g_{ij} x^j.$$

Рассмотрим теперь матрицу G с элементами g_{ij}. Где должны быть индексы у элементов обратной матрицы G^{-1}? Раз G — матрица билинейной формы, то при замене базиса $G' = P^T G P$. Соответственно G^{-1} преобразуется с помощью обратной матрицы P^{-1}, то есть должна иметь индексы сверху (как и у компонент вектора),

$$g^{ij} = [G^{-1}]^{ij}.$$

Произведение G^{-1} и G дает единичную матрицу:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Соответственно, с помощью тензора g^{ij} типа $(2,0)$ каждому ковектору с компонентами x_i мы можем сопоставить вектор с компонентами x^i ("поднять индекс"):

$$x^i = g^{ij} x_j.$$

Отметим, что для ортонормированного базиса $g^{ij} = \delta^{ij}$ и $x^i = \delta^{ij} x_j = x_i$ – покомпонентная запись вектора и соответствующего ему ковектора совпадают, формулы резко упрощаются. Это в значительной мере объясняет преимущественное использование ортонормированных базисов – при работе в них мы можем особо не задумываться, вектор перед нами или ковектор.

Инварианты тензора – это величины, остающиеся неизменными при преобразованиях координат, или, иными словами, скалярные величины, которые можно построить из компонент тензора. Простейший пример – длина вектора $|\vec{a}|$,

$$|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = g_{ik} a^i a^k,$$

что при $g_{ik} = \delta_{ik}$ сводится к сумме квадратов координат, $|\vec{a}|^2 = \sum (a^i)^2$.

Для тензора второго ранга с помощью метрического тензора g_{ik} можно построить следующие линейные и квадратичные по его компонентам инвариантные величины:

$$\begin{aligned} &g_{ik} F^{ik}, \\ &g_{ik} g_{lm} F^{il} F^{km} = F_{km} F^{km}. \end{aligned}$$

Формулы эти упрощаются при $g_{ik} = \delta_{ik}$:

$$\begin{aligned} g_{ik} F^{ik} &= \delta_{ik} F^{ik} = \sum_{i=1}^{n} F^{ii} = F^{11} + \ldots + F^{nn} = \mathrm{Tr}\, F, \\ g_{ik} g_{lm} F^{il} F^{km} &= F^{il} F_{il} = \sum_{i,l=1}^{n} F_{il} F_{il} = F_{11} F_{11} + F_{12} F_{12} + F_{21} F_{21} + \ldots + F_{nn} F_{nn}. \end{aligned}$$

Первый инвариант представляет собой след – сумму диагональных элементов матрицы.

§5. Алгебраические операции над тензорами

Здесь мы рассмотрим алгебраические операции над тензорами – операции, в результате которых снова получается тензор.

1) Тензоры одинакового типа можно складывать, получая тензоры того же типа. Например, $a^i_j + b^i_j = c^i_j$.
2) Тензорное произведение: (p_1, q_1) и $(p_2, q_2) \to (p_1 + p_2, q_1 + q_2)$. В частности, произведение тензора на скаляр дает тензор исходного типа.
3) Операция свертки переводит тензор типа $(p, q) \to (p-1, q-1)$, понижая его ранг. Например, $\sum_i T^{ij}_{il} = T^j_l$; $\sum_i T^i_i = \mathrm{Tr}\ T$ — скаляр.
4) Поднятие и опускание индексов. Осуществляется с помощью метрического тензора, то есть с помощью g_{ik} и обратного ему g^{ik}, $g^{ik} = [g^{-1}]^{ik}$.
Величинам с верхним индексом x^i отвечают величины с нижним $g_{ki} x^i = x_k$, и обратно, $g^{lk} x_k = g^{lk} g_{ki} x^i = \delta^l_i x^i = x^l$.
Можно поднимать и опускать только часть индексов, например $g_{ik} g_{ml} T^{kln} = T_{im}{}^{n}$.
Примечание. В ортонормированных базисах законы преобразования x_i и x^i одинаковы, как и законы преобразования матриц линейного оператора и билинейной формы.

5) Перестановка индексов одного типа. Например, $T^{ij}_{kl} \to T^{ji}_{kl}$.
6) Симметризация:

$$P_{i_1 \dots i_q} = T_{(i_1 \dots i_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} T_{\sigma(i_1, \dots, i_q)},$$

сумма по всем возможным перестановкам $i_1, \dots, i_q$, соответственно $q!$ слагаемых.
7) Антисимметризация (альтернирование):

$$P_{i_1 \dots i_q} = T_{[i_1 \dots i_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} (-1)^{\sigma} T_{\sigma(i_1, \dots, i_q)},$$

где σ — четность перестановки.

Л3

Тензор называется **симметричным**, если он не меняется при перестановке любых двух индексов одного типа. Пример: метрический тензор g_{ik}.

Тензор называется **антисимметричным** (кососимметричным), если его компоненты меняют знак при перестановке любых двух соседних индексов одного типа.

Соответственно, в результате симметризации получается симметричный тензор, антисимметризации – антисимметричный. Для тензоров второго ранга

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}).$$

Складывая, получим

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}.$$

Т.о., произвольный тензор второго ранга может быть представлен как сумма своих симметричной и антисимметричной частей, В общем случае тензор второго ранга имеет n^2 независимых компонент. Число независимых компонент симметричного тензора второго ранга $n^2/2 + n/2$, антисимметричного – $n^2/2 - n/2$.

Рассмотрим подробнее **симметричные тензоры**.

Если для тензора второго ранга T^i_j, $i, j = 1, 2, \dots n$ выполняется соотношение

$$T^i_j a^j = \lambda a^i, \tag{1}$$

то λ называется *главным значением*, а определяемая вектором a ось – *главной осью* тензора T.

Уравнение (1) представляет собой матричную задачу на собственные значения – однородную систему n линейных уравнений с n неизвестными $(T - \lambda I)a = 0$, для существования нетривиальных решений которой ее определитель должен обращаться в ноль,

$$\det(T - \lambda I) = 0. \tag{2}$$

Корни характеристического уравнения (2) не зависят от выбора базиса. В $\mathbb{R}^3$ имеем

$$\det(T - \lambda I) = -\lambda^3 + T^i_i \lambda^2 + \frac{1}{2}((T^i_i)^2 - T^i_j T^j_i)\lambda + \det T = 0.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты при степенях λ представляют собой инварианты тензора.

Для симметричного тензора справедливы следующие два утверждения:

Утверждение 1. Главные значения действительны.

Утверждение 2. Главные оси, отвечающие различным главным значениям, ортогональны.

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 – главные оси тензора, отвечающие двум различным главным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $\langle Ta_1, a_2\rangle - \langle a_1, Ta_2\rangle = (\lambda_1-\lambda_2)\langle a_1, a_2\rangle$. Для симметричного оператора $\langle Ta_1, a_2\rangle = \langle a_1, Ta_2\rangle$, и соответственно $\langle a_1, a_2\rangle = 0$.

В базисе из главных осей тензор имеет диагональный вид с λ_i на главной диагонали. Нетрудно выразить инварианты тензора через λ_i:

$$\begin{aligned}
&\sum T^i_i = Tr\,T = \sum \lambda_i,\\
&T^i_j T^j_i = \sum (\lambda_i)^2,\\
&\det T = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n.
\end{aligned}$$

Обратимся теперь к **антисимметричным** тензорам.

Утверждение. Антисимметричный тензор $T_{i_1\dots i_n}$ максимального ранга n на $\mathbb{R}^n$ определяется одной своей компонентой $T_{i\dots n}$. Остальные отличаются от нее только множителем $(-1)^\sigma$. Действительно, при совпадающих i_l и i_k компоненты равны 0, при несовпадающих $T_{i_1\dots i_n} = (-1)^{\sigma(i_1\dots i_n)} T_{1\dots n}$, то есть все компоненты совпадают с $T_{1\dots n}$ с точностью до знака.

Утверждение. Антисимметричный тензор типа $(0,p)$ на n-мерном $(p \le n)$ векторном пространстве имеет не больше, чем $C^p_n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ независимых компонент.
Доказательство. Всякая ненулевая компонента определяется p различными числами, выбранными из множества $1, 2, \dots, n$. Порядок влияет только на знак. Число различных наборов из n по p равно $C^p_n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Символ Леви-Чивита

$$\epsilon_{ij\dots k} = \epsilon^{ij\dots k} = \begin{cases} +1, & i,j,\dots k \text{ – четная перестановка } 1,2,\dots,n\\ -1, & i,j,\dots k \text{ – нечетная перестановка } 1,2,\dots,n\\ 0, & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Антисимметричный тензор $T_{i_1\dots i_n}$ максимального ранга n на $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$T_{ij\dots k} = \epsilon_{ij\dots k} T_{12\dots n}.$$

Пример. Выписать компоненты антисимметричных тензоров типа $(p,0)$ в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

Скаляр a имеет одну компоненту. В $\mathbb{R}^2$ вектор имеет две компоненты a_i, антисимметричный тензор второго ранга – одну компоненту $a^{12} = -a^{21}$. В $\mathbb{R}^3$ вектор имеет три компоненты a_i, антисимметричный тензор второго ранга – три независимые компоненты $a^{12} = -a^{21}$, $a^{13} = -a^{31}$, $a^{23} = -a^{32}$ $(a^{11} = a^{22} = a^{33} = 0)$, антисимметричный тензор третьего ранга – одну независимую компоненту, $a^{ijk} = \epsilon^{ijk}a^{123}$.

компоненты	a	a^i	a^{ij}	a^{ijk}
тип тензора	$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$
число компонент в $\mathbb{R}^2$	1	2	1	0
число компонент в $\mathbb{R}^3$	1	3	3	1

Тензор объема. Объем параллилепипеда в $\mathbb{R}^3$, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, дается определителем, $V = \det\,[a\ b\ c]$, где a, b, c – столбцы координат в ортонормированном базисе (напомним, что знак V позволяет учесть ориентацию тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$). Объем антисимметричен по своим аргументам — векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Учитывая, что определитель 3×3 матрицы A с элементами a^{ij} можно записать как $\det A = \epsilon_{ijk}a^{1i}a^{2j}a^{3k}$, имеем

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \epsilon_{ijk}a^i b^j c^k.$$

где ϵ_{ijk} – антисимметричный тензор максимального ранга $3 = \dim \mathbb{R}^3$. Аналогично, в $\mathbb{R}^2$ двумерный объем (площадь) задается формой ϵ_{ij}, а объем в $\mathbb{R}^n$ – n-формой $\epsilon_{\underbrace{i\ldots l}_{n}}$.

Т.о., мы имеем еще одну форму, играющую фундаментальную роль в геометрии: если симметричная 2-форма g_{ik} задает в $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение (и, соответственно, длины и углы), то антисимметричная n-форма $\epsilon_{i\ldots l}$ – объем (и обобщенное векторное произведение $c_i = \epsilon_{ij\ldots k}a^j \ldots b^k$).

Упражнения.

1) Найти $\epsilon_{ij}\epsilon^{ij}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk}$, $\epsilon_{ij\ldots k}\epsilon^{ij\ldots k}$ $[n!]$, $\epsilon_{ij}\epsilon^{ik}$.
2) Исходя из общего определения, выписать формулы для симметризации и антисимметризации тензоров 2 и 3 ранга T_{ij}, T_{ijk}.
3) Компоненты T_{ij} тензора заданы матрицей. Найти $T_{[ij]}, T_{(ij)}$.
4) Пусть A_{ij} – симметричный, B^{ij} – антисимметричный тензор. Найти $A_{ij}B^{ij}$ $[0]$.
5) Показать, что выражение $A_{ij}B^{[ij]}$ зависит только от антисимметричной части тензора A_{ij}.
6) Доказать, что в общем случае тензор типа (2,0) нельзя представить в виде тензорного произведения двух векторов. (Указание: подсчитать число компонент тензора типа (2,0) и выписать координаты тензора, являющегося прямым произведением 2-х векторов.)
7) Посчитать число независимых компонент тензора 3-го ранга в $\mathbb{R}^3$ – общего вида, симметричного, антисимметричного.

§6. Поливекторы, дифференциальные формы и внешнее произведение

Л4

Далее мы будем рассматривать два вида антисимметричных тензоров.

<u>О</u>. Поливектор, или p-вектор – это антисимметричный тензор типа $(p, 0)$.

<u>О</u>. Дифференциальная форма степени p, или p-форма – это антисимметричный тензор типа $(0, p)$.

Теория дифференциальные формы была создана Эли Картаном[1] в начале XX века.

Поливекторы и дифференциальные формы между собой.

Выше мы использовали тензоры g_{ij} и g^{ij} для опускания и поднятия индексов (в частности, каждому вектору с компонентами x^i можно поставить в соответствие ковектор с компонентами $x_i = g_{ij}x^j$, причем в ортономированных базисах $g_{ij} = \delta_{ij}$ и $x^i = x_i$); с той же целью можно использовать тензоры $\epsilon_{ij\ldots k}$ и $\epsilon^{ij\ldots k}$. В R^n для данного антисимметричного тензора T типа $(q, 0)$ с компонентами $T^{k\ldots j} = T^{[k\ldots j]}$ определим тензор $*T$ с компонентами

$$(*T)_{i\ldots l} = \frac{1}{q!}\epsilon_{i\ldots lk\ldots j}T^{k\ldots j}. \tag{3}$$

Тензор (дифференциальная форма) $\tilde{T} = *T$ типа $(0, n-q)$ называется **дуальным** тензору T относительно формы объема $\epsilon_{\underbrace{j\ldots kj\ldots l}_{n}}$.

Звезда Ходжа[2] $*$ – это линейный оператор из пространства антисимметричных тензоров типа типа $(q, 0)$ в пространство антисимметричных тензоров типа типа $(0, n-q)$.

Нетрудно видеть, что дуальный тензор $*T$ антисимметричен и имеет в общем случае $C_n^{n-q} = C_n^q$ независимых компонент – столько же, сколько T. Поэтому соответствие между

[1]Эли Картан (Élie Joseph Cartan, 1869-1951) – французский математик. Один из создателей теории непрерывных групп (групп Ли), создатель теории дифференциальных (внешних) форм, теории пространств с кручением. Им дан общий метод подвижного репера, который в соединении с методом внешних форм является эффективным средством решения многих геометрических проблем.

[2]Вильям Ходж (William Hodge, 1903-1975) – английский математик.

T и $*T$ взаимнооднозначно, обратное соотношение $T = *\tilde{T}$ в компонентах имеет вид

$$T^{k\dots j} = (*\tilde{T})^{k\dots j} = \frac{1}{(n-q)!}\epsilon^{i\dots lk\dots j}(\tilde{T})_{i\dots l}. \qquad (4)$$

Прямое (хотя и довольно длинное) вычисление показывает, что $**T = (-1)^{q(n-q)}T$. Нетрудно видеть, что при нечетном n множитель обращается в единицу.

Введем операцию $\wedge$ – операцию взятия **внешнего произведения**. Пусть $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – 1-формы (ковекторы). Их внешнее произведение дает 2-форму:

$$\tilde{u} \wedge \tilde{v} = \tilde{u} \otimes \tilde{v} - \tilde{v} \otimes \tilde{u}.$$

Здесь и далее 1-формы, чтобы отличать их от векторов, мы будем обозначать волной над буквой. Нетрудно заметить, что для 1-форм

$$\tilde{u} \wedge \tilde{v} = -\tilde{v} \wedge \tilde{u}, \qquad \tilde{u} \wedge \tilde{u} = 0.$$

Базис в пространстве 1-форм (пространстве V^*) состоит из ковекторов $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$, их внешнее произведение

$$\tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j = \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j - \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^i.$$

Элементы $\tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j$, $i < j$ (при $i > j$ имеем те же элементы точностью до знака), образуют базис в пространстве антисимметричных тензоров второго ранга, т.к. по ним можно разложить любой антисимметричный тензор $T_{ij} = -T_{ji}$:

$$\begin{aligned} T_{ij}\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j &= \sum_{i<j} T_{ij}\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j + \sum_{i>j} T_{ij}\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j = \sum_{i<j} T_{ij}\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j + \sum_{i<j} T_{ji}\tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^i \\ &= \sum_{i<j} T_{ij}\left(\tilde{e}^i \otimes \tilde{e}^j - \tilde{e}^j \otimes \tilde{e}^i\right) = \sum_{i<j} T_{ij}\tilde{e}^i \wedge \tilde{e}^j \end{aligned}$$

Часто рассматриваются пространства с базисами:

в пространстве V^*: $dx^1, \dots, dx^n$;

в пространстве V: векторы $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ или $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ (вспомним базис касательного пространства из частных производных $f'_{u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i} f$)

Такой выбор базисов отчасти объясняет названия элементов этих пространств – дифференциальные формы и поливекторы.

Базис в пространстве k-форм (антисимметричных тензоров типа $(0,k)$) состоит из элементов

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k,$$

где

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{(\sigma)} (-1)^\sigma e^{\sigma(i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_k)}.$$

Выражение $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, очевидно, антисимметрично относительно перестановки индексов. По этому базису можно разложить любой антисимметричный тензор типа $(0,k)$.

Рассмотрим подробнее случай пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.

В $\mathbb{R}^2$ 2-форма $dx^i \wedge dx^j$, где $i, j = 1, 2$, в базисе $dx^i \otimes dx^j$ имеет координаты (компоненты) ϵ_{ij}. Действительно, $dx^1 \wedge dx^1 = dx^2 \wedge dx^2 = 0$; $dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 = \epsilon_{12} dx^1 \otimes dx^2 + \epsilon_{21} dx^2 \otimes dx^1$. Произвольная 2-форма $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ пропорциональна $dx^1 \wedge dx^2$ и задает 2-мерный объем $V(u,v) = \epsilon^{ij} u_i v_j$ – площадь параллелограмма, построенного на ковекторах $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$:

$$\tilde{u} \wedge \tilde{v} = (u_1 dx^1 + u_2 dx^2) \wedge (v_1 dx^1 + v_2 dx^2) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) dx^1 \wedge dx^2 = V(u,v) dx^1 \wedge dx^2$$

Аналогичным образом, в $\mathbb{R}^3$ получим, что компоненты 3-формы $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ — это ϵ^{ijk} (задает объем), $\tilde{u} \wedge \tilde{v} \wedge \tilde{w} = \epsilon^{ijk} u_i v_j w_k \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = V(u, v, w) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Рассмотрим внешнее произведение двух 1-форм в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \wedge \tilde{v} &= (u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + u_3 dx^3) \wedge (v_1 dx^1 + v_2 dx^2 + v_3 dx^3) \\ &= u_1 v_1 dx^1 \wedge dx^1 + u_2 v_2 dx^2 \wedge dx^2 + u_3 v_3 dx^3 \wedge dx^3 + \\ &\quad +(u_1 v_2 - u_2 v_1) dx^1 \wedge dx^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1) dx^1 \wedge dx^3 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Первые три слагаемых равны нулю, и следовательно, 2-форма $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ имеет 3 независимые компоненты $T_{12} = -T_{21} = (u_1 v_2 - u_2 v_1)$, T_{13}, T_{23} – столько же, сколько у вектора. Используя формулу $*(dx^i \wedge dx^j) = \epsilon^{ijk} \vec{e}_k$ (см.(4)), найдем дуальный к 2-форме $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$ тензор типа $(1, 0)$ (т.е. вектор)

$$^*(\tilde{u} \wedge \tilde{v}) = (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{e}_2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 = \epsilon^{ijk} u_i v_j \vec{e}_k.$$

Мы получили координаты векторного произведения двух ковекторов с координатами u_i и v_i; это означает, что

$$^*(\tilde{u} \wedge \tilde{v}) = \tilde{u} \times \tilde{v}.$$

то есть векторное произведение двух ковекторов – вектор, дуальный 2-форме $\tilde{u} \wedge \tilde{v}$.

Отметим, что используя суммирование по повторяющимся индексам, сделанные выше выкладки можно записать компактно:

$$^*(\tilde{u} \wedge \tilde{v}) = {}^*((u_i dx^i) \wedge (v_j dx^j)) = u_i v_j \, {}^*(dx^i \wedge dx^j) = u_i v_j (\epsilon^{ijk} \vec{e}_k) = \epsilon^{ijk} u_i v_j \vec{e}_k = \tilde{u} \times \tilde{v}.$$

Основные свойства внешнего произведения:
1) $(k\tilde{a}) \wedge \tilde{b} = \tilde{a} \wedge (k\tilde{b}) = k(\tilde{a} \wedge \tilde{b})$ $\forall k \in K$ – однородность,
2) $(\tilde{a} + \tilde{b}) \wedge \tilde{c} = \tilde{a} \wedge \tilde{c} + \tilde{b} \wedge \tilde{c}$ – дистрибутивность,
3) $(\tilde{a} \wedge \tilde{b}) \wedge \tilde{c} = \tilde{a} \wedge (\tilde{b} \wedge \tilde{c})$ – ассоциативность.
4) $\tilde{a} \wedge \tilde{b} = (-1)^{pq} \tilde{b} \wedge \tilde{a}$, где $\tilde{a}$ – k-форма, а $\tilde{b}$ – q-форма.

Рассмотрим подробнее n-формы – антисимметричные тензоры типа $(0, n)$ в $\mathbb{R}^n$. Каждый такой тензор определяется одним числом $T_{12\ldots n}$, остальные компоненты с несовпадающими индексами отличаются от него только знаком, отвечающим четности перестановки. Т.о., в этом случае мы имеем единственный базисный тензор $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ с компонентами

$$T_{i_1 \ldots i_n} = T_{1 \ldots n} \epsilon_{i_1 \ldots i_n}.$$

При замене координат $y^i = y^i(x)$, $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$,

$$dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \frac{\partial y^1}{\partial x^j} dx^j \wedge \ldots \wedge \frac{\partial y^n}{\partial x^k} dx^k = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

и для полностью антисимметричного тензора имеем

$$T'_{1 \ldots n} dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = T_{1 \ldots n} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \quad T_{1 \ldots n} = T'_{1 \ldots n} \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right).$$

Упражнения.
Показать, что в $\mathbb{R}^3$ произведение трех 1-форм $\tilde{u} \wedge \tilde{v} \wedge \tilde{w} = \epsilon^{ijk} u_i v_j w_k \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.

Интегрирование n-форм. Рассмотрим n-формы в $\mathbb{R}^n$. Эти формы имеют максимально возможный ранг, а следовательно, только одну независимую компоненту (остальные могут отличаться от нее только знаком, см. выше). Следовательно, любая n-форма $\tilde{\alpha} = \tilde{u} \wedge \tilde{v} \wedge \ldots \wedge \tilde{w}$ в $\mathbb{R}^n$ пропорциональна форме $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$,

$$\tilde{\alpha}(x) = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Определим интеграл от n-формы $\tilde{\alpha}$ по области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как

$$\int \tilde{\alpha}(x) = \int f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_U f(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n$$

где в правой части стоит обычный многомерный интеграл по области U.

§7. Внешняя производная

Л5

Мы хотим определить дифференциальный оператор (дифференциал $\tilde{d}$) на дифференциальных формах, который бы сохранял их свойства как форм и был бы обратным к операции интегрирования в смысле формулы

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

На функциях $f(x)$ (0-формах) – это обычный дифференциал df; он сопоставляет 0-форме $f(x)$ 1-форму $\tilde{d}f(x) = df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Однако, $\tilde{d}(\tilde{d}f)$ не может совпадать с $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$: $d^2 f$ содержит лишь симметричные компоненты $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$, и не содержит антисимметричные. Поэтому естественно считать, что $\tilde{d}(\tilde{d}f) = 0$.

Итак, пусть $\tilde{\alpha}$ – p-форма, а $\tilde{\beta}$ и $\tilde{\gamma}$ – q-формы. Положим:
1) $\tilde{d}(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) = \tilde{d}\tilde{\beta} + \tilde{d}\tilde{\gamma}$,
2) $\tilde{d}(\tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}) = (\tilde{d}\tilde{\alpha}) \wedge \tilde{\beta} + (-1)^p \tilde{\alpha} \wedge \tilde{d}\tilde{\beta}$,
3) $\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha}) = 0$.

Свойство 1) – это требование линейности, 3) мы уже обсудили, 2) – аналог правила Лейбница дифференцирования. Множитель $(-1)^p$ необходим потому, что прежде чем подействовать оператором $\tilde{d}$ на $\tilde{\beta}$, его надо “пронести” через p-форму $\tilde{\alpha}$, и обеспечивает согласованность операции $\tilde{d}$ с правилом $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.

Используя свойства 2) и 3), получим

$$\tilde{d}(f\tilde{d}g) = \tilde{d}f \wedge \tilde{d}g. \tag{5}$$

Далее мы будем использовать сокращенные обозначения для частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}$$

Внешнее дифференцирование: градиент, ротор, дивергенция.

Внешняя производная сопоставляет функции (0-форме) f 1-форму (градиент функции) $\tilde{d}f$; в R^3 имеем:

$$\tilde{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\tilde{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\tilde{d}x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\tilde{d}x^3 = f_{,i}\tilde{d}x^i = \operatorname{grad} f.$$

Для выяснения взаимосвязи ротора и внешнего дифференцирования подействуем на ковектор (1-форму) $\tilde{a} = a_i \tilde{d}x^i$ оператором $\tilde{d}$; согласно (5), получим 2-форму

$$\tilde{d}\tilde{a} = \tilde{d}(a_i \tilde{d}x^i) = a_{i,j}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^i.$$

Поскольку $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, то

$$\tilde{d}\tilde{a} = (a_{1,2} - a_{2,1})\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1 + (a_{2,3} - a_{3,2})\tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^2 + (a_{3,1} - a_{1,3})\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^3 \tag{6}$$

Дуальная величина ${}^*\tilde{d}\tilde{a}$ – это тензор типа $(1,0)$, т.е. вектор. Используя соотношение ${}^*(dx^i \wedge dx^j) = \epsilon^{ijk}\vec{e}_k$, получим

$$ {}^*\tilde{d}\tilde{a} = (a_{3,2} - a_{2,3})\vec{e}_1 + (a_{1,3} - a_{3,1})\vec{e}_2 + (a_{2,1} - a_{1,2})\vec{e}_3, \tag{7} $$

т.е. ${}^*\tilde{d}\tilde{a} = \operatorname{rot}\tilde{a} = \nabla \times \tilde{a}$. Итак, в трехмерном пространстве ротору отвечает оператор ${}^*\tilde{d}$.

Дивергенции отвечает ${}^*\tilde{d}^*$. Действительно, возьмем вектор $\vec{a}$ и найдем дуальную ему 2-форму:

$$ {}^*(\vec{a}) = {}^*(a^i\vec{e}_i) = a^i{}^*(\vec{e}_i) = \frac{1}{2}a^i\epsilon_{ijk}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k = a^1\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 + a^2\tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^1 + a^3\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2. \tag{8} $$

Ее внешняя производная – 3-форма

$$ \tilde{d}^*\vec{a} = a^1_{,j}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 + a^2_{,j}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^1 + a^3_{,j}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 = a^i_{,i}\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3. $$

Здесь мы воспользовались тем, что при двух совпадающих индексах $\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^i \wedge \tilde{d}x^k = 0$. Таким образом,

$$ \tilde{d}^*\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}\,\tilde{\omega} = (\nabla \cdot \vec{a})\tilde{\omega}, \tag{9} $$

где $\tilde{\omega} = \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ – элемент объема в декартовых координатах, $*\tilde{d} * \vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}$.

Операции, повышающие и понижающие ранг формы.

Операция внешнего дифференцирования $\tilde{d}$ повышает ранг формы:

p-форма $\tilde{\alpha} \to p+1$-форма $\tilde{\beta} = \tilde{d}\tilde{\alpha}$.

В $\mathbb{R}^3$ эта операция тесно связана с нахождением ротора:

$$ \underset{(0,1)}{\tilde{\alpha}} \to \underset{(0,2)}{\tilde{d}\tilde{\alpha}} \to \underset{(1,0)}{*\tilde{d}\tilde{\alpha}} = \operatorname{rot}\tilde{\alpha}. $$

Операция $*\tilde{d}*$ (дивергенция антисимметричного тензора) понижает ранг формы.

Пример в $\mathbb{R}^3$ – из вектора получаем скаляр:

$$ \underset{(1,0)}{\vec{a}} \to \underset{(0,2)}{*\vec{a}} \to \underset{(0,3)}{\tilde{d} * \vec{a}} \to \underset{(0,0)}{*\tilde{d} * \vec{a}} = \operatorname{div}\vec{a}. $$

Точные и замкнутые формы.

Замкнутая форма: $\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$.

Точная форма: $\tilde{\omega} = \tilde{d}\tilde{v}$.

Точная форма является замкнутой: $\tilde{d}\tilde{\omega} = \tilde{d}(\tilde{d}\tilde{v}) = 0$. На вопрос, любую ли замкнутую форму можно представить как внешнюю производную $\tilde{d}\tilde{v}$, ответ дает лемма Пуанкаре.

Замкнутая форма в односвязной области конечномерного пространства является точной.

В качестве примера рассмотрим 1-форму $\tilde{a}$ в $\mathbb{R}^3$. Если $\operatorname{rot}\tilde{a} = 0$ (безвихревое поле), то $\tilde{a}$ можно представить в виде $\tilde{a} = \operatorname{grad}\varphi = \tilde{d}\varphi$.

Упражнения.

1) Найти внешнюю производную форм $10\tilde{\alpha}$, $(x^1 + x^2)\tilde{\alpha}$, $f(x^1)\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha} = a_i\tilde{d}x^i$ – 1-форма в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, а a_i не зависят от x.

2) Используя формулы, связывающие градиент, ротор и дивергенцию с внешним дифференцированием, показать, что в трехмерном евклидовом пространстве дивергенция ротора и ротор градиента равны нулю.

Л6

§8. Теорема Стокса

Интегрирование на p-мерном пространстве определено только для p-форм, которые могут быть получены как внешние производные от $(p-1)$-форм. Соотношение, обобщающее формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b df = f(b) - f(a), \tag{10}$$

должно связать интеграл от p-формы $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ с интегралом от $(p-1)$-формы $\tilde{\alpha}$. Но $p-1$-форму $\tilde{\alpha}$ можно проинтегрировать только по $p-1$-мерной гиперповерхности, и искомая формула должна связывать интеграл от $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ по некоторой конечной области U с интегралом от $\tilde{\alpha}$ по границе ∂U этой области.

Теорема Стокса для дифференциальной формы $\tilde{\alpha}$ записывается в виде

$$\int_U \tilde{d}\tilde{\alpha} = \int_{\partial U} \tilde{\alpha},$$

где в правой части стоит ограничение $\tilde{a}$ на ∂U.

Точная формулировка теорема Стокса: Пусть на ориентируемом многообразии M размерности n заданы ориентируемое p-мерное подмногообразие U и дифференциальная форма $\tilde{\alpha}$ степени $p-1$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ класса C^1. Тогда, если граница подмногообразия ∂U положительно ориентирована, то $\int\limits_U \tilde{d}\tilde{\alpha} = \int\limits_{\partial U} \tilde{\alpha}$, где $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ обозначает внешний дифференциал формы $\tilde{\alpha}$.

Обратимся к частным случаям.

Рассмотрим кривую γ в $\mathbb{R}^n$ и функцию (0-форму) f; df – 1-форма, получим интеграл вдоль кривой

$$\int_\gamma df = \int_{\partial\gamma} f = f(B) - f(A), \quad \partial\gamma = B^+ \cup A^-.$$

В $\mathbb{R}^1$ имеем формулу Ньютона-Лейбница (10).

Рассмотрим 2-мерную ориентируемую поверхность U в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и 1-форму $\tilde{\alpha} = \alpha_i \tilde{d}x^i$; $\tilde{d}\tilde{\alpha} = \alpha_{i,k} dx^i \wedge dx^k$ – 2-форма. Получим формулу, связывающую интеграл по поверхности с криволинейным интегралом по ограничивающему ее контуру (границе):

$$\iint_U \alpha_{i,k} dx^i \wedge dx^k = \oint_{\partial U} \alpha_i dx^i.$$

В $\mathbb{R}^2$, где $\tilde{d}\tilde{\alpha} = (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}) dx^1 \wedge dx^2$ – это формула Грина

$$\iint_U (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1}) dx^1 \wedge dx^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i dx^i.$$

В $\mathbb{R}^3$ 2-форма $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ дается (6) и соответственно имеем формулу Томсона-Стокса, чаще называемую просто формулой Стокса[3]

$$\iint_U (\alpha_{2,1}-\alpha_{1,2}) dx^1 \wedge dx^2 + (\alpha_{1,3}-\alpha_{3,1}) dx^3 \wedge dx^1 + (\alpha_{3,2}-\alpha_{2,3}) dx^1 \wedge dx^2 = \iint_U \mathrm{rot}\tilde{\alpha} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_{\partial U} \alpha_i dx^i.$$

Рассмотрим теперь $(n-1)$-мерную гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ и $(n-1)$-форму $\tilde{\alpha} = *\vec{a}$, $\tilde{d}\tilde{\alpha} = \tilde{d}{*}\vec{a}$ – это n-форма. В частном случае $\mathbb{R}^3$ 2-форма $*\vec{a}$ дается (8), 3-форма $\tilde{d}\tilde{\alpha} = \tilde{d}{*}\vec{a} = \operatorname{div}\vec{a}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ (см. (9)), и мы получаем формулу Остроградского-Гаусса

$$\iiint_U \operatorname{div}\vec{a}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \iint_{\partial U} \vec{a} \cdot d\vec{\Sigma}.$$

[3] Формулу получил в 1849 г. У.Томсон (William Thomson, он же лорд Кельвин, 1824-1907); а Дж.Стокс (George Stokes, 1819-1903) включил её в ежегодный конкурсный математический экзамен в Кембридже.

Рассматривая $(n-1)$-форму $\tilde{\alpha} = *\vec{a}$, отвечающую n-компонентному вектору $\vec{a}$, нетрудно получить аналог формулы Остроградского-Гаусса для области в $\mathbb{R}^n$.

Мы видим, что теорема Стокса обобщает несколько теорем анализа.

§9. Дифференциальные уравнения и формы

Условия интегрируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим систему из двух уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y),$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = a_1(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = a_2(x,y),$$

Домножим уравнения на dx^i и сложим:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i = a_i(x,y)dx^i, \quad \text{или} \quad \tilde{d}f = \tilde{a},$$

где $\tilde{a}$ – 1-форма. Если f – решение уравнения $\tilde{d}f = \tilde{a}$, то

$$\tilde{d}(\tilde{d}f) = \tilde{d}\tilde{a} = 0, \quad \tilde{d}(a_1 dx^1 + a_2 dx^2) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial a_1}{\partial x^2}dx^2\right) \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial a_2}{\partial x^2}dx^2\right) \wedge dx^2 = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 = 0,$$

откуда получаем хорошо известное необходимое условие совместности системы:

$$\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} = 0.$$

Это же условие, конечно, может быть получено и другими способами, например рассмотрением вторых смешанных производных:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial a_2}{\partial x^1}.$$

Дифференциальные уравнения на языке форм.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad \text{или} \quad dy = f(x,y)dx.$$

Можно ли записать его как уравнение на 1-формы

$$\tilde{d}y - f(x,y)\tilde{d}x = 0$$

на двумерном многообразии M с координатами x, y и каков будет смысл этого уравнения? Т.к. $\tilde{d}x$ и $\tilde{d}y$ линейно независимы, то это уравнение не может быть тождеством. Это соотношение между приращениями dx и dy, выполняющееся только на решениях. Решение имеет вид $y = g(x)$ и является одномерным подпространством в M, коэффициент наклона касательных к нему векторов равен $dy/dx = f(x,y)$. Рассмотрим в т. (x,y) такой вектор $\vec{v} = (1, f(x,y))$; имеем $\tilde{d}y(\vec{v}) = f(x,y)$, $\tilde{d}x(\vec{v}) = 1$ и один форма $\tilde{d}y - f(x,y)\tilde{d}x$ на нем обращается в ноль.

Таким образом, решения дифференциального уравнения задают подпространство в M, касательные векторы к которому аннулируют 1-форму $\tilde{d}y - f(x,y)\tilde{d}x$. Решение дифференциального уравнения оказывается эквивалентным нахождению подпространства, аннулирующего 1-форму или набор 1-форм для систем уравнений или уравнений высших порядков.

§10. Пространство Минковского

Ранее мы рассматривали Евклидово пространство — конечномерное вещественное векторное пространство с положительно определенным скалярным произведением.

Псевдоевклидово пространство — конечномерное вещественное векторное пространство с невырожденным индефинитным (то есть не являющимся положительно определенным, от лат. *indefinitus* - неопределённый) скалярным произведением, которое называют также индефинитной метрикой. Индефинитная метрика не является метрикой в смысле определения метрического пространства, а представляет собой частный случай метрического тензора.

Важнейший пример псевдоевклидова пространства – пространство Минковского. Это 4-мерное пространство специальной теории относительности с метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Четырехвекторы

$$\begin{aligned} &x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3), \\ &x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0 = ct, -x^1, -x^2, -x^3), \\ &x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 (-x^3)^2, \end{aligned}$$

задают точку пространства Минковского – четырехмерного пространства-времени. Такая точка отвечает событию, происходящему в момент t в точке с пространственными координатами (x^1, x^2, x^3).

В отличие от случая Евклидова пространства, где скалярное произведение вектороа самого на себя задает неотрицательную величину – квадрат длины вектора, величина $x_\mu x^\mu$ может также принимать отрицательные значения.

Рассмотрим два 4-вектора, отвечающие 2 точкам пространства-времени, с координатами (ct_1, x_1, y_1, z_1) и (ct_2, x_2, y_2, z_2) и построим скалярную величину, называемую интервалом:

$$S^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Интервал S^2 сохраняется при вращениях, гиперболических поворотах и сдвигах. Гиперболические повороты – это преобразования вида

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

сохраняющие разность квадратов координат, $x_0'^2 - x_1'^2 = x_0^2 - x_1^2$.

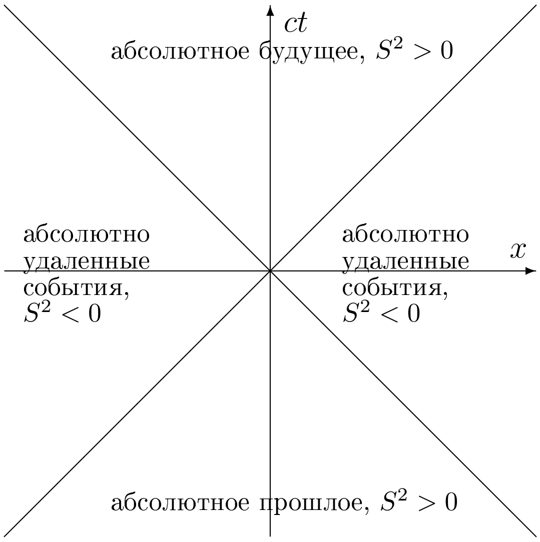
Если $s^2 > 0$, то в некоторой системе отсчета

$$s^2 = c^2(t_2^2 - t_1^2)^2,$$

т.е. события происходят в одной точке в разные моменты времени. Такой интервал называется времениподобным. Если $s^2 < 0$, то в некоторой системе отсчета

$$s^2 = -(x_2^2 - x_1^2)^2,$$

т.е. события происходят в разных точках в один момент времени. Такой интервал называется пространственноподобным. Наконец, если $s^2 = 0$, то интервал называется светоподобным. Геометрически $s^2 = 0$ соответствует так называемый световой конус, внутри которого события всегда разделены временным интервалом (абсолютное будущее и абсолютное прошлое, верхняя и нижняя полости конуса соответственно), а снаружи – пространственным (являются абсолютно удаленными).



Проекция светового конуса на плоскость Ox

Энергия и импульс также представляют собой компоненты 4-вектора,

$$p_\mu = (E/c, p_1, p_2, p_3),$$
$$p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = (mc)^2$$

В системе покоя $E^2/c^2 = (mc)^2$, соответственно имеем $E = mc^2$. При $p/mc \ll 1$ (что отвечает случаю малых по отношению к скорости света скоростей $v/c \ll 1$) имеем

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right)^{1/2} \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$

Первое слагаемое – это энергия покоя, второе – нерелятивисткое выражение для кинетической энергии, $\frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$.

§11. Уравнения Максвелла на языке дифференциальных форм

Напряженности электрического и магнитного полей задаются с помощью скалярного $\varphi = A_0$ и векторного A_i потенциалов:

$$E = \operatorname{grad} A_0 - \partial A/\partial x^0, \quad H = \operatorname{rot} A.$$

Из скалярного и трехмерного векторного потенциалов можно составить ковариантный 4-вектор электромагнитного потенциала $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$. 1-форма потенциала определяется как

$$A = A_\mu dx^\mu.$$

Из этой 1-формы при помощи операции внешнего дифференцирования $\tilde{d}$ получается 2-форма электромагнитного поля:

$$F = \tilde{d}A = \tilde{d}(A_\mu dx^\mu) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_k = \varepsilon_{ijk} F_{ij}, \qquad E_k = F_{k0}.$$

В терминах дифференциальных форм уравнения Максвелла записываются в следующем виде:

$$\tilde{d}F = \tilde{d}\tilde{d}A = 0$$

$$* \tilde{d} * F = -\frac{4\pi}{c} j_{(4)}$$

Здесь $j_{(4)}$ - 4-вектор тока,

$$j_{(4)} = (\rho c, -\rho v^1, -\rho v^2, -\rho v^3) = (\rho c, -j),$$

ρ – плотность электрического заряда в 3-мерном пространстве, v – 3-скорость. Первое уравнение в обычной записи представляет собой первую пару уравнений Максвелла, второе – вторую.

Первое уравнение $\tilde{d}F = \tilde{d}\tilde{d}A = 0$ является следствием определения F как внешней производной 1-формы A.

Подействовав $\tilde{d}$ на второе уравнение, записанное в виде $\tilde{d} * F = -\frac{4\pi}{c} * j_{(4)}$, получаем уравнение непрерывности (закон сохранения заряда):

$$\tilde{d} * j_{(4)} = 0, \text{ или } \partial_\mu j^\mu = 0.$$

3-форма $\tilde{d}F$ (дуальная в R^4 4-вектору) имеет 4 компоненты, 1-форма $*\tilde{d} * F$ также имеет 4 компоненты. Всего, таким образом, получается 8 уравнений. Проделаем переход к обычной записи уравнений Максвелла. Распишем покомпонентно первое уравнение:

$$\tilde{d}F = \frac{1}{2}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0.$$

$\rho, \mu, \nu = 1, 2, 3$ отвечают слагаемые

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 =$$
$$= \left(\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0.$$

Учитывая, что $F_{12} = H_3$, $F_{13} = -H_2$, $F_{23} = H_1$, получим

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial x^i} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} H = 0.$$

Рассмотрение уравнений для компонент $F_{0\nu}$ приведет нас ко второму уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Обратимся теперь ко второй паре уравнений Максвелла. Если компоненты 2-формы F имеют нижние индексы, то компоненты дуального к ней 2-вектора $*F$ – верхние. Опускание и подъем индексов осуществляется с помощью метрического тензора $g^{\mu\nu}$ пространства Минковского,

$$F^{\rho\sigma} = g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu}.$$

Т.к. $g^{\mu\nu}$ диагональна, то

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\mu} g^{\nu\nu} F_{\mu\nu} = (-1)^{(1+\delta_{\mu 0})+(1+\delta_{\nu 0})} F_{\mu\nu} = (-1)^{\delta_{\mu 0}+\delta_{\nu 0}} F_{\mu\nu}.$$

Знак меняется только у компонент, где один индекс нулевой, другой – не нулевой, т. е у компонент $F_{0\mu}$ и $F_{\mu 0}$, что отвечает замене $E \to -E$,

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если символически записать, что $F_{\mu\nu} = (E, B)$, то $F^{\mu\nu} = (-E, B)$. Дуальный $F_{\mu\nu}$ тензор будет иметь компоненты $\hat{F}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\hat{F}^{\rho\sigma} = (-B, -E)$.

В покомпонентной записи второе уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu_{(4)},$$

При $\mu = 0$ имеем

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = \frac{\partial E_k}{\partial x^k} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho.$$

При $\mu = i = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^{i0}}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^i_{(4)}, \quad \frac{\partial(\varepsilon^{ikl}H_l)}{\partial x^k} + \frac{1}{c}\frac{\partial(-E_i)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j^i, \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Задача. Выразить в терминах E и H инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ электромагнитного поля.

§12. Поливекторы Л

Поливекторы

О. Поливектором (также широко распространено наименование *мультивектор*; от англ. "*multivector*") называется антисимметричный тензор типа $(p, 0)$.

По аналогии с p-формами, антисимметричными тензорами типа $(0, p)$ (подробнее о них см. §4), их часто называют *p-векторами.* Поливекторы *дуальны* дифференциальным формам:

$$*(p, 0) = (0, \dim V - p).$$

Примеры поливекторов:

$(0, 0)$ – 0-вектор (*скаляр*)

$(1, 0)$ – 1-вектор (*вектор*)

$(2, 0)$ – 2-вектор (*бивектор*)

$(3, 0)$ – 3-вектор (*тривектор*)

Внешнее произведение поливекторов

Для конструирования поливекторов применяется *внешнее произведение* $(\wedge)$ – линейная ассоциативная антисимметричная бинарная операция. Иначе говоря, для поливекторов u, v и w линейного пространства V, а также для чисел α и β выполняются следующие свойства:

1. Линейность: $u \wedge (\alpha v + \beta w) = \alpha u \wedge v + \beta u \wedge w$
2. Ассоциативность: $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) = u \wedge v \wedge w$
3. $u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$, где u – $p-$вектор, v – $q-$вектор. Если p и q – нечетные, то $u \wedge v = -v \wedge u$ и $u \wedge u = 0$.

Внешнее произведение n векторов ($n \leq \dim V$) дает n-вектор.

Ранее мы рассматривали внешнее произведение (для p-форм) как антисимметричную часть тензорного произведения. Все перечисленные свойства могут быть получены при таком рассмотрении.

Примеры.
В $\mathbb{R}^2$: $(1,0)\wedge(1,0)\to(2,0)\xrightarrow{*}(0,0)$
В $\mathbb{R}^3$: $(2,0)\xrightarrow{*}(0,1)$
В $\mathbb{R}^4$: $(2,0)\xrightarrow{*}(0,2)$

Рассмотрим некоторые частные случаи, начиная с внешнего произведения двух векторов в $\mathbb{R}^2$. Пусть $u=u^ie_i$ и $v=v^je_j$. В этом случае

$$u\wedge v=(u^1e_1+u^2e_2)\wedge(v^1e_1+v^2e_2)=u^1v^2e_1\wedge e_2+u^2v^1e_2\wedge e_1=\begin{vmatrix}u^1 & v^1\\ u^2 & v^2\end{vmatrix}e_1\wedge e_2$$

В рамках двумерного пространства прямое произведение двух векторов является *элементом площади* фигуры, натянутой на эти векторы.

Аналогично внешнее произведение строится и в линейных пространствах большей размерности. Например, при умножении двух векторов в $\mathbb{R}^3$ каждое слагаемое результата будет элементом площади:

$$u\wedge v=\begin{vmatrix}u^1 & v^1\\ u^2 & v^2\end{vmatrix}e_1\wedge e_2+\begin{vmatrix}u^1 & v^1\\ u^3 & v^3\end{vmatrix}e_1\wedge e_3+\begin{vmatrix}u^2 & v^2\\ u^3 & v^3\end{vmatrix}e_2\wedge e_3=p^{ij}e_i\wedge e_j,\quad p^{ij}=\begin{vmatrix}u^i & v^i\\ u^j & v^j\end{vmatrix}.$$

Если положить $u=u_1$, $v=u_2$ и перейти к записи через u^i_k (верхний индекс – номер компоненты, нижний – номер вектора в произведении), то получим

$$p^{i_1i_2}=\begin{vmatrix}u_1^{i_1} & u_2^{i_1}\\ u_1^{i_2} & u_2^{i_2}\end{vmatrix}=\varepsilon^{ik}u_i^{i_1}u_k^{i_2}.$$

В $\mathbb{R}^3$ мы можем перемножить три вектора. Это тройное произведение даст объем натянутого на них параллелепипеда,

$$u\wedge v\wedge w=\begin{vmatrix}u^1 & v^1 & w^1\\ u^2 & v^2 & w^2\\ u^3 & v^3 & w^3\end{vmatrix}e_1\wedge e_2\wedge e_3.$$

Компоненты поливекторов

Как и любой тензор, поливектор определяется своими компонентами. Так, компонента $p^{i_1\dots i_k}$ любого k-вектора, построенного на векторах $u_1\dots u_k$, представима в виде определителя

$$p^{i_1\dots i_k}=\begin{vmatrix}u_1^{i_1} & u_2^{i_1} & \dots & u_k^{i_1}\\ u_1^{i_2} & u_2^{i_2} & \dots & u_k^{i_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ u_1^{i_k} & u_2^{i_k} & \dots & u_k^{i_k}\end{vmatrix}=\varepsilon^{i\dots k}u_1^{i_1}\dots u_k^{i_k}.$$

Свёртка поливекторов

Пусть в линейном пространстве V задана метрика $G=\{g_{ij}\}$. Тогда для p-векторов можно определить операцию, аналогичную скалярному произведению обычных векторов – операцию *свёртки*.

Пусть u и v – p-векторы из V. Тогда свёртка $\langle u,v\rangle$ поливекторов u и v определяется как

$$\langle u,v\rangle=g_{i_1j_1}g_{i_1j_2}\dots g_{i_pj_p}u^{i_1i_2\dots i_p}v^{j_1j_2\dots j_p}$$

Результатом свёртки двух поливекторов является скаляр.

Рассмотрим отдельно случай, когда матрица Грама $G = I$ (это допущение будет оставаться в силе до конца параграфа). В этом случае формулу свёртки p-векторов можно записать короче:

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} u^{i_1 i_2 \dots i_p} v^{i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} u^{i_1 i_2 \dots i_p} v^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

Свертку поливекторов, строящихся как внешнее произведение обычных векторов, удобнее находить как определитель матрицы из скалярных произведений. Об этом говорит следующая теорема.

Т. О свёртке поливекторов (б/д)

Пусть u, v – k-векторы, причём $u = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_k$ и $v = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k$. Тогда

$$\langle u, v\rangle = \begin{vmatrix} \langle u_1, v_1\rangle & \langle u_1, v_2\rangle & \dots & \langle u_1, v_k\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle & \langle u_2, v_2\rangle & \dots & \langle u_2, v_k\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle u_k, v_1\rangle & \langle u_k, v_2\rangle & \dots & \langle u_k, v_k\rangle \end{vmatrix}.$$

Поливекторы удобно использовать для нахождения площадей и объемов. Норма бивектора $|u \wedge v|$ представляет собой площадь паралллелограмма (в R^3 $|u \wedge v| = |u \times v|$), а норма тривектора $|u \wedge v \wedge w|$ – объем параллилепипеда, построенных на соответствующих векторах в R^n.

Задача. Найти площадь параллелограмма в R^4, построенного на векторах $a(1, 2, 3, 4)$ и $b(0, 2, 1, -1)$.

Использование поливекторов для нахождения кривизн кривых в $\mathbb{R}^n$

Пусть $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ – некоторая кривая в n-мерном пространстве. Выпишем её уравнения Френе:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= |\dot\alpha| E_1 \\ \dot E_1 &= |\dot\alpha| k_1 E_2 \\ \dot E_2 &= |\dot\alpha|(-k_1 E_1 + k_2 E_3) \\ &\dots \\ \dot E_i &= |\dot\alpha|(-k_{i-1} E_{i-1} + k_i E_{i+1}) \\ &\dots \\ \dot E_n &= |\dot\alpha|(-k_{n-1} E_{n-1}) \end{aligned}$$

Так как базис Френе является ортонормированным, $|E_i| = 1$. Для нахождения кривизн будем далее работать в терминах производных кривой $(\alpha, \dot\alpha, \ddot\alpha, \dots)$.

Найдём k_1 – первую кривизну кривой α, используя два первых уравнения

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= |\dot\alpha| E_1 \\ \dot E_1 &= |\dot\alpha| k_1 E_2. \end{aligned}$$

По формуле производной произведения:

$$\begin{aligned} &\ddot\alpha = (\dot\alpha)' = |\dot\alpha| \dot E_1 + |\dot\alpha|' E_1 = |\dot\alpha|^2 k_1 E_2 + |\dot\alpha|' E_1, \\ &\dot\alpha \wedge \ddot\alpha = (|\dot\alpha| E_1) \wedge (|\dot\alpha|^2 k_1 E_2 + |\dot\alpha|' E_1) = |\dot\alpha|^3 k_1 E_1 \wedge E_2 + |\dot\alpha||\dot\alpha|' \underbrace{E_1 \wedge E_1}_{=0} \\ &|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha| = |\dot\alpha|^3 k_1 \underbrace{|E_1 \wedge E_2|}_{=1}. \end{aligned}$$

Таким образом,
$$k_1 = \frac{|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}.$$
Если норму внешнего произведения поливекторов выразить через определитель из скалярных произведений
$$|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha| = \begin{vmatrix} \langle\dot\alpha, \dot\alpha\rangle & \langle\ddot\alpha, \dot\alpha\rangle \\ \langle\dot\alpha, \ddot\alpha\rangle & \langle\ddot\alpha, \ddot\alpha\rangle \end{vmatrix},$$
то получим
$$k_1 = \frac{\sqrt{|\dot\alpha|^2|\ddot\alpha|^2 - \langle\dot\alpha, \ddot\alpha\rangle^2}}{|\dot\alpha|^3}$$
Эту формулу мы уже получали ранее в курсе дифференциальной геометрии.

Теперь найдём k_2 – вторую кривизну кривой α, используя три первых уравнения Френе:
$$\begin{aligned}
&\dot\alpha = |\dot\alpha|E_1\\
&\dot E_1 = |\dot\alpha|k_1E_2\\
&\dot E_2 = |\dot\alpha|(-k_1E_1 + k_2E_3)
\end{aligned}$$
Дважды продифференцируем первое уравнение и подставим $\dot E_1$ и $\dot E_2$ из двух других:
$$\begin{aligned}
&\dddot\alpha = |\dot\alpha|^2k_1k_2E_3 + c_1E_1 + c_2E_2,\\
&\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \dddot\alpha = |\dot\alpha|^6k_1^2k_2E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 + (\underbrace{c_1E_1 \wedge E_1 \wedge \ldots}_{0}).
\end{aligned}$$
Отсюда
$$k_2 = \frac{|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \dddot\alpha|}{|\dot\alpha|^6k_1^2} = \frac{|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \dddot\alpha|}{|\dot\alpha \wedge \ddot\alpha|^2}.$$

Теперь рассмотрим общий случай – найдем кривизну k_{i-1} кривой α. Начнём с нахождения нормы поливектора, построенного на производных с 1 по i:
$$\begin{aligned}
&\alpha^{(i)} = |\dot\alpha|^ik_1k_2\ldots k_{i-1}E_i + \sum_{k=1}^{i-1} C_kE_k,\\
&\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i)} = |\dot\alpha|(|\dot\alpha|^2k_1)(|\dot\alpha|^3k_1k_2)\ldots(|\dot\alpha|^ik_1k_2\ldots k_{i-1})E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_i.
\end{aligned}$$
В последней формуле степень $|\dot\alpha|$ равна $1 + 2 + 3 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}$, соответственно
$$\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i)} = |\dot\alpha|^{\frac{i(i+1)}{2}}k_1^{i-1}k_2^{i-2}\ldots k_{i-2}^2k_{i-1}E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_i.$$
Обозначим $S_i = |\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i)}|$,
$$S_i = |\dot\alpha \wedge \ddot\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i)}| = |\dot\alpha|^{\frac{i(i+1)}{2}}k_1^{i-1}k_2^{i-2}\ldots k_{i-2}^2k_{i-1}|E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_i|.$$
С помощью формулы свёртки получаем, что $|E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_i| = 1$. Имеем:
$$S_i = |\dot\alpha|^{\frac{i(i+1)}{2}}k_1^{i-1}k_2^{i-2}\ldots k_{i-2}^2k_{i-1}.$$
Пусть $i - 2 \geq 1$. Рассмотрим произведение S_iS_{i-2}.
$$\begin{aligned}
S_iS_{i-2} &= (k_1^{i-1}\ldots k_{i-1})(k_1^{i-3}\ldots k_{i-3})|\dot\alpha|^{\frac{1}{2}(i(i+1)+(i-2)(i-1))} =\\
&= k_{i-1}(k_1^{i-2}k_2^{i-3}\ldots k_{i-2})^2|\dot\alpha|^{\frac{1}{2}(i(i+1)+(i-2)(i-1))} =\\
&= k_{i-1}S_{i-1}^2|\dot\alpha|
\end{aligned}$$

Выразим отсюда k_{i-1}:
$$k_{i-1} = \frac{S_i S_{i-2}}{|\dot{\alpha}| S_{i-1}^2}$$
Таким образом,
$$k_{i-1} = \frac{|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i)}||\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i-2)}|}{|\dot{\alpha}||\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(i-1)}|^2}.$$

Отметим, что все формулы, полученные выше, дают значение модуля кривизны $|k_i|$, однако ввиду того что все кривизны (кроме последней) неотрицательны, кривизна $k_i = |k_i|$. Последняя кривизна k_{n-1} может быть как положительной, так и отрицательной. Можно показать, что для учета этого знака в полученной формуле норму n-вектора, построенного на производных $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, надо заменить на дуальную ему скалярную величину $*(\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^n) = \det[\alpha^1 \ldots \alpha^n]$ (аналог смешанного произведения в n-мерном пространстве),
$$k_{n-1} = \frac{*(\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(n)})|\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(n-2)}|}{|\dot{\alpha}||\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha} \wedge \cdots \wedge \alpha^{(n-1)}|^2}.$$

§13. Псевдовекторы и псевдоскаляры Л

В этом параграфе мы будем для простоты считать, что $g_{ij} = \delta_{ij}$.

О. Псевдовектором называется величина, компоненты которой преобразуются как вектор при поворотах системы координат, но меняющие свой знак противоположно тому, как ведут себя компоненты вектора при любой инверсии (обращении знака) координат. Обычные вектора также называют полярными, псевдовекторы – аксиальными (осевыми) векторами.

Пример.

В $\mathbb{R}^3$: $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow (2,0)$ – псевдовектор. Может быть получен как величина, дуальная внешнему произведению двух векторов:
$$*(u \wedge v) = u \times v \text{ – псевдовектор}$$
Действительно, при отражении координатных осей u обратится в $-u$, v – в $-v$, в то время как псевдовектор сохранит свой знак:
$$(-u) \wedge (-v) = u \wedge v$$
В $\mathbb{R}^3$ псевдовектором является как векторное произведение двух обычных (полярных) векторов.

Пример псевдовектора в механике – момент импульса
$$M = r \times p$$
и угловая скорость ω. Скорость $v = \omega \times r$ является полярным вектором, как и любое векторное произведение полярного вектора на аксиальный.

Задача. Показать, что напряженность электрического поля E является вектором, а напряженность магнитного H – псевдовектором.

Рассмотрим выражения для E и H через потенциалы,
$$E = \operatorname{grad} A^0 - \partial A/\partial x^0, \quad H = \operatorname{rot} A.$$
При отражении пространственные координаты x^i меняют знак (в отличие от временной x^0), также меняют знак пространственные компоненты потенциала A^i. В результате при пространственном отражении знак E изменится, а знак H сохранится.

О. **Псевдоскаляром** называется величина, не изменяющаяся при переносе и повороте координатных осей, но изменяющая свой знак при замене направления одной оси на противоположное (переходе к базису другой ориентации).

В отличии от обычных скаляров, которые при отражении осей не меняют знак, псевдоскаляры его меняют при отражении нечетного числа осей.

Псевдоскаляром в пространстве $\mathbb{R}^n$ является величина, дуальная n-вектору (т.е. n-мерный аналог смешанного произведения).

Пример. В $\mathbb{R}^3$ смешанное произведение (u, v, w) трех векторов дает псевдоскаляр: при изменении направлений трех осей знаки векторов меняются на противоположные, и соответственно $(-u, -v, -w) = -(u, v, w)$.

R^3:
0-вектор скаляр
1-вектор вектор
2-вектор бивектор $\to^*$ псевдовектор
3-вектор $\to^*$ псевдоскаляр

R^n:
0-вектор скаляр
1-вектор вектор
2-вектор бивектор
...
n-вектор $\to^*$ псевдоскаляр

§14. Многообразия. Римановы пространства Л

Многообразие – это пространство, локально похожее на $\mathbb{R}^n$. Рецепт создания – берем карты отдельных областей, затем их склеиваем.

О. Дифференцируемым n-мерным многообразием называется произвольное множество точек M, в котором введена следующая структура:

1. M представимо в виде конечного или счетного числа областей U_q.

2. В каждой области U_q заданы координаты x_q^α, $\alpha = 1, \dots, n$, называемые локальными координатами. Сами области U_q называют при этом координатными окрестностями или картами.

Пересечение таких областей, если не пусто, само является областью с двумя системами локальных координат. Каждая из этих систем должна выражаться через другую дифференцируемым образом:

$$x_p^\alpha = x_p^\alpha(x_q^1, \dots x_q^n), \quad x_q^\beta = x_q^\beta(x_p^1, \dots x_p^n).$$

Это означает, что Якобиан перехода $\det(\partial x_p^\alpha / \partial x_q^\beta)$ отличен от 0. Класс гладкости функций – это класс гладкости многообразия M.

Риманово многообразие или Риманово пространство – вещественное дифференцируемое многообразие M, в котором каждое касательное пространство снабжено скалярным произведением (метрическим тензором), меняющимся от точки к точке гладким образом.

О. Римановой метрикой в области пространства $\mathbb{R}^n$ называется положительно определенная билинейная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке и гладко зависящая от этой точки,

$$\langle x, y \rangle = g_{ik} x^i y^k.$$

Псевдориманово пространство – пространство с псевдоримановой метрикой. Для нее $\det[g_{ij}] \neq 0$, но при этом форма $g_{ik} x^i y^k$ не является положительно определенной. Метрика типа (p,q), $p+q=n$, где p и q - положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы. Важнейший пример псевдориманова пространства – пространство Минковского специальной теории относительности. Это пространство имеет метрику типа $1,3$.

Замена переменных. Форма объема

В ортонормированном базисе объем, построенный на ковекторах $dx^1,\dots,dx^n$ равен

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Произведем замену координат

$$y^i=y^i(x^1,\dots,x^n),\quad x^i=x^i(y^1,\dots,y^n).$$

В новых переменных имеем

$$\begin{aligned}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n&=\left(\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\right)dy^i\wedge\ldots\wedge\left(\frac{\partial x^n}{\partial y^k}\right)dy^k=\left(\frac{\partial x^1}{\partial y^i}\right)\cdots\left(\frac{\partial x^n}{\partial y^k}\right)\varepsilon^{i\ldots k}dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n\\&=\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right]dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n.\end{aligned}$$

Выразим теперь якобиан перехода $\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right]$ через метрику. Рассмотрим переход между базисами $\beta_x=(dx^1\ldots dx^n)$ и $\beta_y=(dy^1\ldots dy^n)$: $dy^i=\frac{\partial y^i}{\partial x^j}dx^j$, или $\beta_y=P^{-1}\beta_x$, где $P=\left[\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right]$. Матрица билинейной формы g преобразуется по закону $g=P^Tg_0P$, откуда $\det g=\det g_0(\det P)^2$. Учитывая, что для исходного ортонормированного базиса $\det g_0=1$, получим

$$dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n=\sqrt{\det g}\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n.$$

Отметим, что в определенном смысле Римановы многообразия могут рассматриваться как поверхности в $\mathbb{R}^n$. Так, двумерное пространство постоянной положительной кривизны реализуется как поверхность (сфера) в $\mathbb{R}^3$. В общем случае имеет место теорема Нэша о регулярных вложениях: Любое достаточно гладкое риманово многообразие может быть реализовано как подмногооообразие с индуцированной метрикой в $\mathbb{R}^n$ достаточно большой размерности n.

Обобщением понятия прямой для Римановых пространств служит понятие геодезической линии. Линия является геодезической, если параллельно переносимый вдоль нее вектор, будучи касательным в начальной точке, остается касательным везде. В метрических пространствах геодезические являются локально кратчайшими линиями между точками.

Рассмотрим Римановы пространства постоянной кривизны – положительной, отрицательной и нулевой.

[рисунок]

Пространство **постоянной положительной кривизны** $1/R$ – это сфера радиуса R,

$$g_{ik}=\begin{bmatrix}R^2&0\\0&R^2\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

Найдем длину окружности радиуса ρ на сфере. Уравнение окружности

$$\theta = \rho/R, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

Для круга имеем $\theta \le \rho/R$. На окружности $\theta = \rho/R$, $d\theta = 0$

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = R^2 \sin^2(\rho/R)d\varphi^2,$$

длина окружности

$$l_\rho = \int_0^{2\pi} R\sin(\rho/R)d\varphi = 2\pi R\sin(\rho/R).$$

Максимальная длина $2\pi R$ достигается при радиусе окружности $\rho = R\pi/2$. Для случаев $\rho = 0$ (северный полюс) и $\rho = R\pi$ (южный полюс) длина окружности равна нулю. Отношение длины окружности к радиусу всегда меньше 2π:

$$\frac{l_\rho}{\rho} = 2\pi\frac{\sin(\rho/R)}{\rho/R} < 2\pi.$$

Найдем теперь площадь круга на сфере. Учитывая, что $\sqrt{\det g} = R^2|\sin\theta|$, получим

$$S_\rho = \int_0^{\rho/R}\int_0^{2\pi} R^2|\sin\theta|d\theta d\varphi = 2\pi R^2\int_0^{\rho/R}|\sin\theta|d\theta = 2\pi R^2(1-\cos(\rho/R)), \qquad \rho \le \pi R$$

При $\rho = \pi R$ круг совпадает со всей сферой. Если радиус ρ мал, то $\sin(\rho/R) \approx \rho/R$, $1 - \cos(\rho/R) \approx \frac{1}{2}(\rho/R)^2$, и мы получаем формулы Евклидовой геометрии: $l_\rho = 2\pi R\sin(\rho/R) \approx 2\pi R\rho/R = 2\pi\rho$, $S_\rho \approx \pi R^2\frac{1}{2}(\rho/R)^2 = \pi\rho^2$. При $\rho \ll R$ геометрия близка к Евклидовой.

Большой круг – круг, делящий сферу на 2 равные части. Большие круги на поверхности сферы играют роль прямых на плоскости – кратчайший путь между двумя точками проходит по дуге большого круга. (Более точно, большие круги являются геодезическими линиями, обобщающими понятие прямой на плоскости для искривленного пространства.)

Через две точки на сфере (кроме противоположных) можно провести единственный большой круг. При этом не пересекающихся больших кругов нет. Напомним, что в плоском пространстве через данную точку можно провести единственную параллельную (не пересекающуюся с данной) прямую.

Сумма углов треугольника, составленного из аналогов прямых – дуг больших окружностей – всегда больше π.

Пространство **постоянной отрицательной кривизны** $-1/a^2$ имеет геометрию Лобачевского.

В Евклидовой геометрии имеет место аксиома о параллельных прямых – на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной. В геометрии Лобачевского эта аксиома заменяется на следующую:

Через две точки, не лежащие на данной прямой, проходит по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её.

Оказывается, что в такой геометрии через данную точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной (то есть с ней не пересекающихся). Существуют две крайние параллельные (между которыми проходят остальные), угол между ними (угол параллельности) $\vartheta = 2\operatorname{arctg} e^{-b/a}$ зависит от кривизны пространства и расстояния b от прямой до точки. Линией равных расстояний до прямой (эквидистантой или гиперциклом) оказывается не прямая, а кривая.

В геометрии Лобачевского нет подобных, но неравных треугольников: если углы равны, то и треугольники равны. Сумма углов треугольника всегда меньше π и можно ввести такое понятие, как дефект треугольника $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ Площадь треугольника равна $a^2\delta$. При этом, чем меньше рассматриваемая область, тем геометрия ближе к Евклидовой.

Пространство постоянной отрицательной кривизны нельзя целиком вложить в $\mathbb{R}^3$, а лишь частично. Примером такого вложения является псевдосфера, получаемая вращением трактрисы,

$$f(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u))^T, \quad 0 < u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v < 2\pi.$$

На псевдосфере даётся только локальная интерпретация геометрии, т.е. не на всей плоскости Лобачевского, а на ее ограниченном участке. Матрицы первой и второй фундаментальных форм псевдосферы :

$$[g_{ik}] = \begin{bmatrix} a^2\operatorname{ctg}^2 u & 0 \\ 0 & a^2\sin^2 u \end{bmatrix}, \qquad [h_{ik}] = \begin{bmatrix} a\operatorname{ctg} u & 0 \\ 0 & a\sin u\cos u \end{bmatrix}.$$

Гауссова кривизна псевдосферы постоянна и отрицательна, $K = \det h/\det g = -1/a^2$. Площадь обоих раструбов псевдосферы совпадает с площадью сферы $4\pi a^2$, объём $2/3\pi a^3$ — половина от объёма шара.

Геодезические линии на псевдосфере соответствуют прямым геометрии Лобачевского. Сумма углов треугольника, составленного из геодезических, всегда меньше π, а отношение длины окружности к ее радиусу

$$\frac{l_\rho}{\rho} > 2\pi,$$

то есть знаки противоположны знакам в аналогичных соотношениях для пространств постоянной положительной кривизны.

§15. Группы преобразований евклидовых и псевдоевклидовых пространств

Преобразования.

Выше мы рассматривали различные преобразования. Давайте теперь задумаемся о том, какие бывают преобразования, об их классификации.

1. *Активные и пассивные преобразования.*

Активное преобразование – это преобразование одного или нескольких геометрических объектов относительно одной и той же системы координат (например, сдвиг точки, поворот вектора).

Пассивное преобразование – это преобразование системы координат, геометрические объекты не затрагивающее. Сам объект при этом не меняется, пассивным преобразованием связаны описания одного и того же объекта в двух разных системах координат (базисах).

Если перейти на другой, “компьютерный”, язык, то активные преобразования – это движение объекта, пассивные – камеры, с которой за этим объектом ведется наблюдение. В физике понимание этих терминов аналогично – активное меняет физическое положение точки или ориентацию твердого тела, пассивное – замена системы координат, связанной с наблюдателем.

Активные и пассивные преобразования приводят к различным формулам преобразованиям координат (компонент) объекта в базисе.

Выше мы, рассматривая в основном поведение геометрических объектов (тензоров) при замене базиса, очевидно, работали с пассивными преобразованиями.

2. Преобразования также можно классифицировать по тому, что они сохраняют (инвариантам преобразований). Например, при конформных преобразованиях сохраняются углы, при движениях (поворотах, сдвигах и отражениях) – скалярное произведение, при поворотах – расстояние до фиксированной точки (центра поворота).

Далее, естественно рассматривать преобразования не по отдельности, а исследовать сразу все множество преобразований, удовлетворяющих какому-либо условию. Такие множества преобразований описывает теория групп.

Группа — множество, на котором определена ассоциативная бинарная операция, причём для этой операции имеется нейтральный элемент (аналог единицы для умножения), и каждый элемент множества имеет обратный. Ветвь общей алгебры, занимающаяся группами, называется теорией групп. По-существу, группа – это набор "хороших" преобразований, удовлетворяющих свойству ассоциативности и включающий тождественное и обратное.

<u>О</u>. Непустое множество G с заданной на нём бинарной операцией $\circ\colon \mathrm{G}\times\mathrm{G}\to\mathrm{G}$ называется *группой*, если выполнены следующие аксиомы:

1. ассоциативность: $\forall(a,b,c\in G)\colon (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$;
2. наличие нейтрального элемента: $\exists e\in G \quad \forall a\in G\colon (e\circ a = a\circ e = a)$;
3. наличие обратного элемента: $\forall a\in G \quad \exists a^{-1}\in G\colon (a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e)$.

Бинарная операция $\circ$ (композиция преобразований) может представлять собой как сложение (нейтральный элемент – ноль), так и умножение (нейтральный элемент – единица). Мы здесь будем говорить об умножении, т.к., как правило, преобразования будут реализовываться посредством умножения на матрицы.

Преобразования области.

Рассмотрим отображение, при котором каждой точке области Ω_x ставится в соответствие точка области Ω_z, $z^i = z^i(x^1,\dots x^n)$. Если при этом $\det\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\neq 0$, $\det\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\neq 0$, то $x^i = x^i(z^1,\dots z^n)$ и отображение является взаимнооднозначным.

Если области Ω_x и Ω_z совпадают, то говорят, что задано *преобразование области* Ω. Ниже мы рассмотрим множества таких преобразований, удовлетворяющие различным условиям.

Преобразования области образуют группу, т.к. выполняются все аксиомы – ассоциаливности, наличия нейтрального элемента (тождественное преобразование) и наличия обратного элемента φ: $x = x(z)$, φ^{-1}: $z = z(x)$.

Рассмотрим, как ведет себя метрика при преобразованиях области. При замене координат $x^i = x^i(z^1,\dots z^n)$ матрица $[g_{ij}]$ преобразуется как матрица билинейной формы,

$$g = P^T g_0 P, \qquad P = \left[\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right].$$

<u>О</u>. Преобразование $x^i = x^i(z^1,\dots z^n)$ называется *движением* данной метрики g_{ij}, если $g'_{ij}(z^1,\dots z^n) = g_{ij}(x^1,\dots x^n)$. Это преобразования, которые не изменяют метрику. Все движения данной метрики образуют группу – *группу движений.*

Преобразования плоскости.

1. Сдвиги (трансляции) на вектор $\vec{a}$.

$$x^1 = z^1 + a^1, \quad x^2 = z^2 + a^2$$

Элементы матрицы перехода $\frac{\partial x^i}{\partial z^j} = \delta^i_j$, откуда получим $g'_{ij} = g_{ij}$. Произведение (композиция) сдвигов – сдвиг на вектор $\vec{a}+\vec{b}$:

$$x^1 = (z^1+a^1)+b^1 = z^1+(a^1+b^1), \quad x^2 = (z^2+a^2)+b^2 = z^2+(a^2+b^2), \quad a\circ b = a+b.$$

Результат не зависит от порядка, в котором сделаны сдвиги, а это означает, что группа сдвигов коммутативна. Кроме того, данные преобразования не изменяют метрику, а следовательно, являются движениями евклидовой плоскости.

2. Растяжение (гомотетия) с коэффициентом λ.

$$x^1 = \lambda z^1, \quad x^2 = \lambda z^2, \quad \lambda\neq 0.$$

Матрица перехода $P = \left[\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right] = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, $g' = P^T g P = \lambda^2 g$. При $|\lambda| \neq 1$ растяжение движением не является, $\lambda = 1$ отвечает тождественному преобразованию, $\lambda = -1$ – отражению. Произведение растяжений – растяжение с коэффициентом $\lambda\mu$:

$$x^1 = \lambda(\mu z^1), \quad x^2 = \lambda(\mu z^2), \quad \lambda \circ \mu = \lambda\mu.$$

3. Сдвиги и растяжения.

$$x^1 = \lambda z^1 + a^1, \quad x^2 = \lambda z^2 + a^2, \quad \lambda \neq 0.$$

Рассмотрим теперь композицию преобразований $x(z(y))$,

$$z^1 = \mu y^1 + b^1, \quad z^2 = \mu y^2 + b^2, \quad \mu \neq 0.$$

соответственно имеем

$$x^1 = \lambda\mu y^1 + \lambda b^1 + a^1, \quad x^2 = \lambda\mu y^2 + \lambda b^2 + a^2, \quad (\lambda, a) \circ (\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + a).$$

Закон композиции элементов группы показывает, что эта группа является полупрямым произведением групп растяжений и сдвигов. Отметим, что в предыдущих двух случаях результат не зависит от порядка умножения (группы являются коммутативными). В последнем случае результат зависит от порядка, а значит, группа не является коммутативной.

4. Линейные преобразования.

$$x^1 = az^1 + bz^2, \quad x^2 = cz^1 + dz^2, \quad \text{или} \begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1\\ z^2\end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0.$$

требование отличия определителя от нуля необходимо для существования обратного преобразования. Закон композиции определяется умножением матриц, поэтому группа линейных преобразований изоморфна группе невырожденных матриц 2×2.

5. Аффинные преобразования.

Аффинные преобразования – это линейные преобразования и трансляции, образуют 6-параметрическую группу,

$$x^1 = az^1 + bz^2 + \xi^1, \quad x^2 = cz^1 + dz^2 + \xi^2, \quad \text{или} \begin{bmatrix}x^1\\ x^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1\\ z^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{bmatrix}, \quad \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0.$$

Закон композиции

$$(A, \xi) \circ (B, \eta) = (AB, A\eta + \xi).$$

показывает, что группа аффинных преобразования является полупрямым произведением линейной группы и группы сдвигов.

6. Группа движений плоскости.

Рассмотрим преобразования плоскости, сохраняющие евклидову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$:

$$g' = P^T g P.$$

Т.к. $g' = g = I$, то $P^T P = I$, соответственно P – ортогональная матрица. Далее, $\det(P^T P) = (\det P)^2 = 1$, $\det P = \pm 1$. Ортогональные преобразования состоят из вращений, отражений,

$$P = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}, \quad \det P = 1; \qquad P = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \quad \det P = -1.$$

и их композиций. Движения плоскости состоят из поворотов, отражений и сдвигов. Собственные движения (повороты и сдвиги) даются формулой

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}.$$

Движения, сохраняющие начало координат, образуют группу вращений. Закон композиции имеет вид, аналогичный группе аффинных преобразований, где матрицы A и B должны быть заменены на 2×2 матрицы вращений. Часто бывает удобна запись, где преобразование (элемент группы движений плоскости) задается одной матрицей 3×3:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & a^1 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

7. Конформные преобразования. Рассмотрим преобразования, при которых метрика умножается на число. Такое преобразование сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения (свойство сохранения углов) и форму бесконечно малых фигур, откуда и получило свое название. Для преобразований плоскости, сохраняющие евклидову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$ с точностью до численного множителя,

$$g' = P^T g P, \quad g' = \lambda^2 g.$$

имеем $P^T P = \lambda^2$, или $\frac{P^T}{\lambda}\frac{P}{\lambda} = 1$, откуда заключаем, что $A = \frac{P}{\lambda}$ – ортогональная матрица. Следовательно, конформная группа состоит из аффинных преобразований вида

$$x = \lambda A z + \xi,$$

где A-ортогональная матрица, и содержит движения и растяжения. Закон композиции

$$(\lambda A, \xi) \circ (\mu B, \eta) = (\lambda\mu AB, \lambda A\eta + \xi).$$

Аффинные преобразования в $\mathbf{R}^n$.

Аналогичным образом мы можем рассмотреть все описанные выше преобразования в $\mathbb{R}^n$; при этом законы композиции, записанные в матричной форме, будут иметь тот же вид, что и в $\mathbb{R}^2$. Обратим внимание на возможность записи аффинных преобразований с помощью одной матрицы, включающей также параметры сдвига, аналогичной (11),

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix},$$

где A – $n\times n$ матрица с $\det A \neq 0$, x, z, ξ - столбцы высотой n. Обратное преобразование, очевидно, будет задаваться обратной матрицей,

$$(A, \xi)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\xi).$$

Движения в $\mathbf{R}^3$

Движения в $\mathbf{R}^3$ являются частным случаем аффинных преобразований $x = Az + \lambda$ с ортогональной матрицей A. Они задаются 6 параметрами – тремя поворотами и 3 сдвигами,

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & a^1 \\ & \Lambda & & a^2 \\ & & & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где Λ – ортогональная матрица 3×3, отвечающая вращениям. Группа вращений сохраняет сумму квадратов $\sum(x^i)^2 = \sum(z^i)^2$.

Группа трехмерных вращений играет важную роль в математике, физике, компьютерной графике. Поэтому мы подробнее рассмотрим ее параметризацию.

Параметризация группы вращений

1. Ось вращения (задается двумя углами θ, φ, $0 < \theta < \pi$, $-2\pi < \varphi < 2\pi$, определяющими точку на сфере, через которую она проходит) и угол поворота ω, $-2\pi < \omega < 2\pi$.

2. Углы Эйлера. Рассмотрим сначала матрицы, отвечающие однопараметрическим подгруппам вращений относительно трех осей Ox_1, Ox_2, Ox_3

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},\ \omega_2 = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},\ \omega_3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Углы Эйлера определяют три поворота системы, которые позволяют привести любое положение системы к текущему. Обозначим начальную систему координат как (x, y, z), конечную как (X, Y, Z). Пересечение координатных плоскостей xy и XY называется линией узлов N. Угол α между осью x и линией узлов — угол прецессии, угол β между осями z и Z — угол нутации, угол γ между осью X и линией узлов — угол собственного вращения.

Углы Эйлера α, β, γ задают композицию трех последовательных поворотов, $R(\alpha, \beta, \gamma) = \omega_3(\gamma)\omega_1(\beta)\omega_3(\alpha)$.

3. Кватернионы и унитарные матрицы 2×2.

Рассмотрим алгебру кватернионов – асоциативную алгебру с 3 мнимыми единицами. Всего имеется 4 базисных кватерниона $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{1^2} = \mathbf{1},\ \mathbf{i^2} = \mathbf{j^2} = \mathbf{k^2} = -\mathbf{1},\ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \qquad (12)$$

Произвольный кватернион записывается как $q = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Т.к. $\forall q \neq 0\ \ \exists q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$, где сопряженный кватернион $\bar{q} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}$, $|q|^2 = \bar{q}q$, то алгебра кватернионов – это алгебра с делением. Однако, в отличие от алгебры комплексных чисел, алгебра кватернионов некоммутативна.

Векторными кватернионами называются чисто мнимые кватернионы ($a_0 = 0$).

Произвольный кватернион записывается в виде 2×2 комплексной матрицы

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = \begin{pmatrix} q_0 + iq_3 & iq_1 + q_2 \\ iq_1 - q_2 & q_0 - iq_3 \end{pmatrix}.$$

В частности, векторный кватернион

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = X = i\begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$

Вращения представимы в виде:

$$X' = UXU^{-1},$$

где X – мнимый (векторный) кватернион, U – унимодулярный кватернион: $|U| = \det U = 1$, $U^{-1} = \bar{U}^T$. В матричном представлении

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -\overline{u}_2 & \overline{u}_1 \end{pmatrix} \in SU(2),$$

где $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ – параметры Кэли-Клейна. Как следствие унитарности матрицы, эти параметры связаны условием $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$, и могут быть выражены через 3 действительных параметра α, β, γ –углы Эйлера:

$$\begin{cases} u_1 &= \cos\frac{\beta}{2}e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ u_2 &= \sin\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}} \end{cases}$$

Вывод: кватернион можно представить 2×2 комплексной матрицей, а повороты записать через произведение кватернионов (или соответствующих им матриц).

Преобразования в псевдоевклидовом пространстве

Рассмотрим двумерное пространство с метрикой $g = I_{1,1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. В отличие от евклидова пространства с единичной метрикой, компоненты с верхними и нижними индексами, вообще говоря, отличаются знаком: $x_i = g_{ij}x^j$, $x_1 = x^1$, $x_2 = -x^2$. Преобразования, сохраняющие метрику:

$$g' = I_{1,1} = P^T I_{1,1} P, \quad I_{1,1} P^T I_{1,1} P = I_{1,1} I_{1,1} = I, \quad P^{-1} = I_{1,1} P^T I_{1,1}.$$

Это условие определяет так называемые псевдоортогональные матрицы; как и для ортогональных, $\det P = \pm 1$. Соответствующие преобразования содержат отражения и гиперболические повороты

$$P = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{bmatrix}, \quad -\infty < \theta < +\infty.$$

Гиперболические повороты сохраняют разность квадратов: $x_i x^i = (x_1)^2 - (x_2)^2$, в чем нетрудно убедиться, используя аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций, $\operatorname{ch}^2\theta - \operatorname{sh}^2\theta = 1$.

Группа движений пространства Минковского

Группа движений пространства Минковского (группа Пуанкаре) сохраняет псевдоевклидову метрику

$$g_{\mu\nu} = I_{1,3} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Она является полупрямым произведением группы Лоренца $SO(3,1)$, содержащей как обычные, так и гиперболические повороты, и группы четырехмерных трансляций. Всего в ней 10 параметров (4 трансляции, 3 поворота и 3 гиперболических поворота (буста)). Группа Пуанкаре играет важную роль в физике.

В завершение параграфа запишем **явный вид активных и пассивных преобразований на примере группы движений плоскости**. Для этого мы рассмотрим аффинное пространство, включающее в себя как точки, так и векторы, и две системы отсчета – связанную с объектом (например, твердым телом) и с наблюдателем. Точнее, мы имеем два репера $(p; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(p'; \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ – упорядоченных набора, состоящих из точки (начала отсчета) и базиса, прикрепленного к этой точке. Положение одного репера относительно другого задается тремя параметрами – двумя параметрами сдвига $\vec{x} = p' - p$ и параметром поворота (углом φ между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_1'$, входящим в 2×2 матрицу поворотов Φ). Мы видим, что положение задается элементом группы движений, что вполне естественно, т.к. наши два репера совмещаются движением (Φ, x) системы отсчета.

Обозначим за (Φ', x') координаты объекта после преобразования. Активное преобразование – сдвиг и поворот тела с параметрами (A, a) (в репере, связанным с телом) описывается композицией

$$(\Phi', x') = (\Phi, x) \circ (A, a) = (\Phi A, \Phi a + x)$$

а сдвиг и поворот системы отсчета с параметрами (A, a) (в репере, связанным с наблюдателем) – композицией

$$(\Phi', x') = (A, a)^{-1} \circ (\Phi, x) = (A^{-1}, -A^{-1}a) \circ (\Phi, x) = (A^{-1}\Phi, A^{-1}(x - a)).$$

Т.о., активные преобразования связаны с умножением *справа* на элемент группы g, пассивные – *слева* на g^{-1}.

§16. Некоторые приложения тензорного исчисления в механике и физике

Вращение твердого тела и тензор инерции

Тензор инерции описывает свойства твердого тела относительно вращений. Рассмотрим вращающуюся материальную точку массы m. Связь её линейной v и угловой ω скоростей задается формулой $v = \omega \times x$, где x-радиус-вектор точки. Кинетическая энергия материальной точки $E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$.

Чтобы рассчитать энергию вращающегося тела, его надо разбить на бесконечно малые кусочки массы $dm = \rho(x)dV$ (ρ – плотность) и просуммировать их энергию как энергию материальных точек, то есть взять интеграл:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int |\omega \times x|^2 dm, \quad |\omega \times x|^2 = \begin{vmatrix} \langle\omega,\omega\rangle & \langle\omega,x\rangle \\ \langle x,\omega\rangle & \langle x,x\rangle \end{vmatrix} = \omega^2 x^2 - \langle\omega,x\rangle^2.$$

Рассмотрим неподвижный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ с началом в т. O, в нем $x = x^j\vec{e}_j$, $\omega = \omega^i\vec{e}_i$. Мы будем рассматривать только Евклидову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$, в этом случае мы можем не различать верхние и нижние индексы.

$$\begin{aligned} &\omega^2 = \sum(\omega_i)^2 = \delta^{ij}\omega_i\omega_j, \quad x^2 = \sum(x^i)^2 = \delta_{kl}x^kx^l \quad \langle\omega,x\rangle = \delta^i_k\omega_i x^k. \\ &|\omega \times x|^2 = \omega^2x^2 - \langle\omega,x\rangle^2 = (\delta^{ij}\delta_{kl} - \delta^i_k\delta^j_l)\omega_i\omega_j x^k x^l, \\ &E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\omega_i\omega_j\int(\delta^{ij}\delta_{kl} - \delta^i_k\delta^j_l)x^kx^l dm = \frac{1}{2}\omega_i\omega_j I^{ij}, \end{aligned}$$

где

$$I^{ij} = \int(\delta^{ij}\delta_{kl} - \delta^i_k\delta^j_l)x^kx^l dm$$

– симметричный тензор инерции твердого тела. Выпишем его покомпонентно:

$$I^{11} = \int(x_2^2 + x_3^2)dm, \quad I^{22} = \int(x_1^2 + x_3^2)dm, \quad I^{33} = \int(x_1^2 + x_2^2)dm,$$

$$I^{12} = I^{21} = -\int x_1x_2dm, \quad I^{13} = I^{31} = -\int x_1x_3dm, \quad I^{23} = I^{32} = -\int x_2x_3dm.$$

Здесь мы для краткости записи опустили индексы у координат x – здесь мы будем рассматривать только Евклидову метрику $g_{ij} = \delta_{ij}$, в этом случае мы можем не различать верхние и нижние индексы.

Задача. Найти тензор инерции однородного цилиндра высоты h и радиуса R.
Направим ось Oz вдоль оси цилиндра, начало отсчета расположим в его центре. Расчет компонент тензора в связи с геометрией задачи удобно произвести в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} &I_{33} = \iiint_V (x_1^2 + x_2^2)dm = \frac{m}{V}\iiint_V r^2 r dr d\varphi dz = \\ &\frac{m}{\pi R^2 h}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^R r^3 dr = \frac{m}{\pi R^2 h} 2\pi h \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $dm = \frac{m}{V}dV$.

$$I_{22} = \iiint_V (x_1^2 + x_3^2)dm = \frac{m}{V}\iiint_V (r^2\cos^2\varphi + z^2)rdrd\varphi dz =$$
$$\frac{m}{\pi R^2 h}\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}dz\int_0^R r^3dr + \int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-h/2}^{h/2}z^2dz\int_0^R rdr\right) =$$
$$\frac{m}{\pi R^2 h}\left(h\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\varphi + 1}{2}d\varphi + \frac{R^2}{2}2\pi\left.\frac{z^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2}\right) =$$
$$\frac{m}{\pi h}\left(h\frac{R^4}{4}\pi + \pi\frac{h^3}{12}\right) = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).$$

В силу симметрии задачи $I_{11} = I_{22}$. Недиагональные элементы обращаются в ноль, $I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0$. Т.о., мы нашли компоненты тензора инерции цилиндра в базисе, ориентированном по главным осям, являющимися в данном случае осями симметрии тела.

Момент инерции тела относительно оси.

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, задающий вместе с точкой O ось вращения, r – расстояние до оси. Момент инерции точечной массы

$$I = r^2 m.$$

Для распределенной массы $dI = r^2 dm$. Выразим $\vec{r}$ через координаты $\vec{x}$ и $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$,

$$r = |\vec{x}|\sin\alpha, \quad \frac{|\vec{n}\times\vec{x}|}{|\vec{n}|} = |\vec{x}|\sin\alpha = r, \quad r = |\vec{n}\times\vec{x}|.$$

Таким образом,

$$dI = |\vec{n}\times\vec{x}|^2 dm.$$

Сравним это выражение с выражением для кинетической энергии $dE_{\text{кин}} = \frac{1}{2}|\vec{\omega}\times\vec{x}|^2 dm$. ‘Эти выражения совпадают с точностью до численного множителя и замены $x \leftrightarrow \omega$, соответственно для момента инерции тела относительно оси $\vec{n}$ имеем

$$I = I^{ij}n_i n_j.$$

Момент импульса.

Момент импульса замкнутой системы сохраняется. Он является одним из трёх аддитивных (энергия, импульс, момент импульса) интегралов движения. При наличии внешних сил, производная момента импульса по времени равна моменту сил (относительно того же начала O). Для материальной точки псевдовектор момента импульса равен векторному произведению $M = r\times p$, где $p = mv$ – импульс. Для распределенной массы $dM = \vec{x}\times\vec{v}\,dm$, и используя формулы $v = \omega\times x$, $x\times(\omega\times x) = \omega x^2 - x\langle\omega, x\rangle$, получим:

$$M = \int\vec{x}\times\vec{v}\,dm = \int x\times(\omega\times x)dm = \int(\omega x^2 - x\langle\omega, x\rangle)dm.$$

Расписывая полученное выражение покомпонентно, нетрудно убедиться, что коэффициентами разложения M по ω_j являются моменты инерции,

$$M^i = I^{ij}\omega_j.$$

Таким образом, тензор инерции определяет поведение твердого тела относительно вращений – зная его, мы можем посчитать энергию, момент инерции относительно выбранной оси и момент импульса твердого тела.

Тензоры в теории упругости

Теория упругости – раздел механики сплошных сред, изучающий деформации упругих твёрдых тел, их поведение при статических и динамических нагрузках.

Рассмотрим сначала простейший случай. Для тонкого растяжимого стержня закон Гука имеет вид:

$$F = k\Delta l.$$

Здесь F — сила, которой растягивают (сжимают) стержень, Δl — абсолютное удлинение (сжатие) стержня, а k – коэффициент упругости (или жёсткости). Коэффициент упругости зависит как от свойств материала, так и от размеров стержня. Можно выделить зависимость от размеров стержня (площади поперечного сечения S и длины L) явно, записав коэффициент упругости как $k = \frac{S}{L}E$. Величина E называется модулем упругости первого рода, или модулем Юнга и является механической характеристикой материала.

Если ввести относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{L}$ и нормальное напряжение в поперечном сечении $\sigma = \frac{F}{S}$, то закон Гука для относительных величин в случае тонкого растяжимого стержня запишется как

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Основными понятиями теории упругости является напряжения, действующие на малых площадях, которые можно мысленно провести в теле через заданную точку P, деформации в малой окрестности точки P и перемещения самой точки P. Точнее говоря, вводятся тензор напряжений σ_{ij}, тензор малых деформаций ε_{ij} и вектор перемещения u_i.

Тензор напряжений (тензор напряжений Коши) — тензор второго ранга, описывающий механические напряжения в произвольной точке нагруженного тела, возникающие в этой точке при его (тела) малых деформациях.

Компоненты тензора напряжений обозначаются обычно как σ_{ij}. В данной точке проводятся плоскости с нормалями $\vec{e}_i$. Нормальные компоненты сил σ_{ii}, действующих на данные плоскости, записываются на главной диагонали, а в остальных позициях стоят касательные компоненты σ_{ij}, $i \neq j$, векторов напряжений на этих плоскостях.

В $\mathbb{R}^3$ компоненты тензора напряжений σ_{ij} вводят следующим образом. Рассматривают бесконечно малый объём тела (сплошной среды) в виде прямоугольного параллелепипеда, грани которого ортогональны координатным осям и имеют площади dS_i. На каждой грани dS_i параллелепипеда действуют поверхностные силы dF_i. Обозначим проекции этих сил на оси, задаваемые векторами $\vec{e}_i$, как dF_{ij}. Компонентами тензора напряжений называют отношение проекций силы к величине площади грани, на которой действует эта сила:

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_{ij}}{dS_i}$$

По индексу i здесь суммирования нет. Компоненты $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ – это нормальные напряжения, они представляют собой отношение проекции силы dF_i на нормаль к площади рассматриваемой грани dS_i. Компоненты $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ – это касательные напряжения, они представляют собой отношение проекции силы dF_i на касательные направления к площади рассматриваемой грани dS_i. Первый индекс компоненты σ_{ij} относится к грани элемента объема, к которому прикладывается сила, второй – к номеру компоненты силы. При отсутствии собственного момента импульса сплошной среды тензор напряжений симметричен.

Тензор деформации — тензор, который характеризует сжатие (растяжение) и изменение формы в каждой точке тела при деформации.

Тензор деформации Коши-Грина в классической сплошной среде определяется как

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right),$$

где u – вектор, описывающий смещение точки тела: его координаты – разность между координатами близких точек после (dx'_i) и до (dx_i) деформации. Дифференцирование производится по координатам в отсчётной конфигурации (до деформирования). Расстояния до и после деформации связаны через ε_{ij}:

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon^{ij}\, dx_i\, dx_j$$

(по повторяющимся индексам ведётся суммирование). По определению тензор деформации симметричен, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Закон Гука, связывающий тензор напряжений и тензор деформаций, записывается в виде:

$$\sigma_{ij} = c^{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

где c^{ijkl} – тензор модулей упругости.