1 Геометрия Лобачевского

1.1 Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости

Обозначим через $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ верхнюю полуплоскость с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда длина параметризованной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, находится по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_{\gamma} ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}{y(t)}\, dt.$$

Например, длина дуги окружности $\gamma: \; x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 < \alpha \le t \le \beta < \pi$ не зависит от R и равна

$$l(\gamma) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = \ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Длина вертикального отрезка $\gamma: \; x = a$, $y = t$, $y_1 \le t \le y_2$, равна

$$l(\gamma) = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t} = \ln t\Bigg|_{y_1}^{y_2} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

В частности, $l(\gamma) = \infty$, если $y_1 = 0$ или $y_2 = \infty$.

Метрика на H конформно-евклидова – отличается множителем (зависящим от точки) от евклидовой метрики, поэтому углы на H такие же как на евклидовой плоскости.

Найдем площадь "треугольника" Δ с нулевыми углами (Рис. 1), ограниченного полупрямыми $x = \pm R$, $y > 0$, и полуокружностью $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$.

$$S(\Delta) = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{\det G}\, dxdy = \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{y^2} = 2\int\limits_0^R dx \int\limits_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} =$$

$$= -2\int\limits_0^R dx \left(\frac{1}{y}\Bigg|_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\infty}\right) = 2\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t\Bigg|_0^1 = \pi.$$

Снова нет зависимости от R, что не удивительно, поскольку легко видеть, что гомотетия $(x, y) \mapsto (x/R, y/R)$ является изометрией. Изометрией, очевидно, является и сдвиг вдоль оси Ox, т.е. отображение $(x, y) \mapsto (x + a, y)$, $a \in \mathbb{R}$,

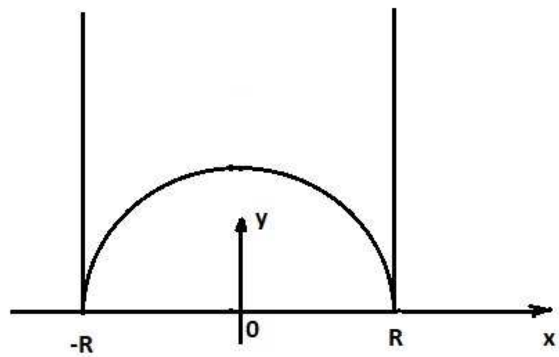

Рис. 1: Треугольник Δ с тремя нулевыми углами.

а также отражение относительно любой вертикальной прямой. Кроме того, изометрией является отображение, которое удобно задать, используя комплексную координату $z = x + iy$, $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$. Действительно,

$$ds^2 = \frac{dz\,d\bar{z}}{y^2} = \frac{dz\,d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}$$

где $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, и мы видим, что при замене z на $-\frac{1}{z}$ метрика не меняется:

$$\frac{d(-\frac{1}{z})d(-\frac{1}{\bar{z}})}{(\operatorname{Im}(-\frac{1}{z}))^2} = \frac{\frac{dz}{z^2}\frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}}{(\frac{y}{z\bar{z}})^2} = \frac{dz\,d\bar{z}}{y^2}.$$

Замечание 1. Композиции изометрий являются изометриями. Композиции сдвигов, гомотетий и отображения $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$ приводят к изометриям, которые являются дробно-линейными отображениями $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, сохраняющими гиперболическую плоскость H. Можно показать (доказывается в курсе ТФКП), что дробно-линейное отображение переводит H в себя тогда и только тогда, когда $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$. [Пояснение: такое дробно-линейное отображение переводит вещественную ось в себя, а из того, что точка i отображается в точку, лежащую в H, следует, что $ad - bc > 0$.]

С помощью указанных изометрий можно перевести любую вертикальную полупрямую в любую верхнюю полуокружность с центром на оси Ox, а также в любую другую вертикальную полупрямую. Соответственно любая верхняя полуокружность изометриями может быть переведена в любую вертикальную полупрямую и в любую верхнюю полуокружность с центром на оси Ox. Полупрямые друг в друга переводятся сдвигами, полуокружности - сдвигами и гомотетиями. Изометрия $z \mapsto -\dfrac{1}{z}$ переводит полуокружность $|z-1| = 1$, $y > 0$, в полупрямую $x = -1/2$, $y > 0$. [Пояснение: $|z-1| = 1 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 1$. Если $w = -\frac{1}{z}$, то $z = -\frac{1}{w}$ и мы получаем соотношение $(-\frac{1}{w}-1)(-\frac{1}{\bar{w}}-1) = 1$. Поэтому $(1+w)(1+\bar{w}) = w\bar{w}$, т.е. $1+w+\bar{w} = 0$. Полагая $w = u+iv$, получаем $u = -1/2$.]

Задача 1. *Отображение $z \mapsto -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$ в декартовых координатах записывается как $(x,y) \mapsto (\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Установить инвариантность метрики на H без использования комплексной координаты z.*

Для параметризованной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, соединяющей точки (a,c) и (a,d), $c < d$, лежащие на вертикальной полупрямой $x = a$, $y > 0$, имеем

$$\int\limits_{\gamma} ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}}{y(t)}\,dt \geq \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{\dot{y}^2(t)}}{y(t)}\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)}\,dt \geq \int\limits_{c}^{d} \frac{dy}{y} = \ln\frac{d}{c}.$$

Следовательно, вертикальные полупрямые, а значит и полуокружности с центром на оси Ox, являются кратчайшими (геодезическими) на плоскости Лобачевского. Расстояние между двумя точками, равное по определению инфинуму длин гладких кривых, соединяющих эти точки, равно длине отрезка геодезической, концами которой являются эти точки. На H реализуется неевклидова геометрия: точками назовем точки полуплоскости H, а прямыми – геодезические на H, т.е. вертикальные полупрямые и полуокружности с центром на оси Ox. Легко проверить, что все аксиомы, кроме пятой выполняются. Например, через две точки можно провести единственную прямую (вертикальную полупрямую, если первые координаты точек одинаковы, а в противном случае – полуокружность, центр которой – точка пересечения оси Ox с перпендикуляром к середине прямолинейного отрезка, соединяющего заданные точки). Наоборот, через точку вне прямой на H проходит бесконечно много прямых, не пересекающихся с данной прямой, т.е. имеет место отрицание пятого постулата (точнее отрицание эквивалентного пятому постулату утверждения). Этот пучок прямых заключен между двумя предельными прямыми, их, обычно, и называют прямыми параллельными заданной прямой (см. Рис. 2), а остальные прямые пучка называют расходящимися или сверхпараллельными.

Треугольником на H будем называть *геодезический треугольник*, т.е. трехвершинную фигуру, стороны которой – отрезки геодезических.

Найдем площадь треугольника $\Delta_{AB\infty}$, у которого одна из сторон – дуга полуокружности с центром на оси Ox, а две другие стороны – вертикальные полупрямые (см. Рис. 3).

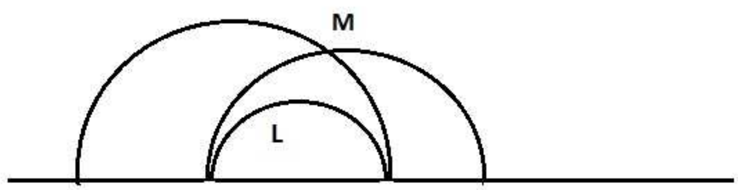

Рис. 2: Точка M, не лежащая на прямой L и две (предельные) параллельные L прямые.

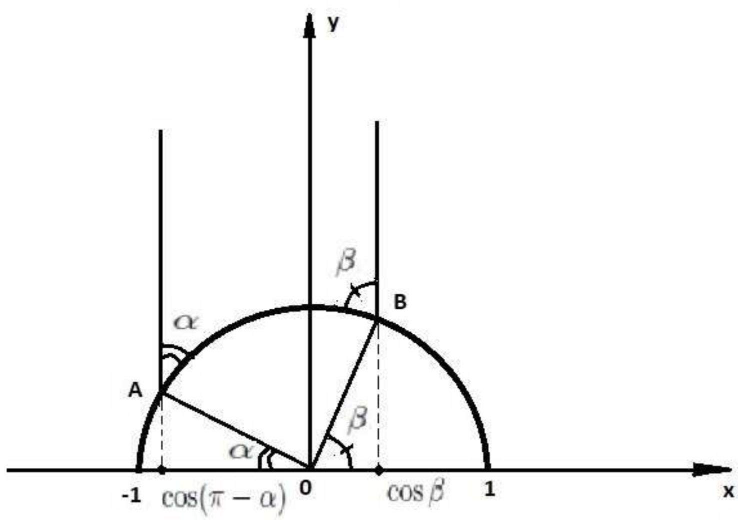

Рис. 3: Треугольник $\Delta_{AB\infty}$ с нулевым углом.

$$S(\Delta_{AB\infty}) = \iint\limits_{\Delta_{AB\infty}} \sqrt{\det G}\, dxdy = \iint\limits_{\Delta_{AB\infty}} \frac{dxdy}{y^2} = \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} =$$

$$= \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} dx \left(-\frac{1}{y} \Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \right) = \int\limits_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x \Bigg|_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} = \pi - \alpha - \beta.$$

Теперь можно найти площадь треугольника, у которого одна из сторон – вертикальный отрезок (см. Рис. 4):

$$S(\Delta_{ABC}) = S(\Delta_{AB\infty}) - S(\Delta_{CB\infty}) = \pi - \alpha - (\beta + \delta) - (\pi - (\pi - \gamma) - \delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

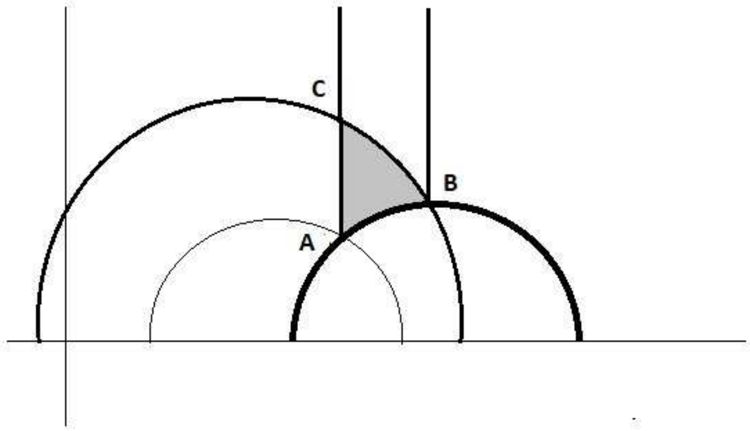

Рис. 4: $\Delta_{ABC} = \Delta_{AB\infty} \setminus \Delta_{CB\infty}$.

Произвольный треугольник (см. Рис. 5) можно разрезать вертикальным отрезком на два треугольника, к которым применимо предыдущее вычисление, и получить, что *площадь произвольного треугольника равна* π *минус сумма его углов*.

Получается, что в отличие от евклидовой геометрии, в неевклидовой сумма углов треугольника всегда меньше π (это утверждение можно принять за аксиому в неевклидовой геометрии вместо отрицания пятого постулата).

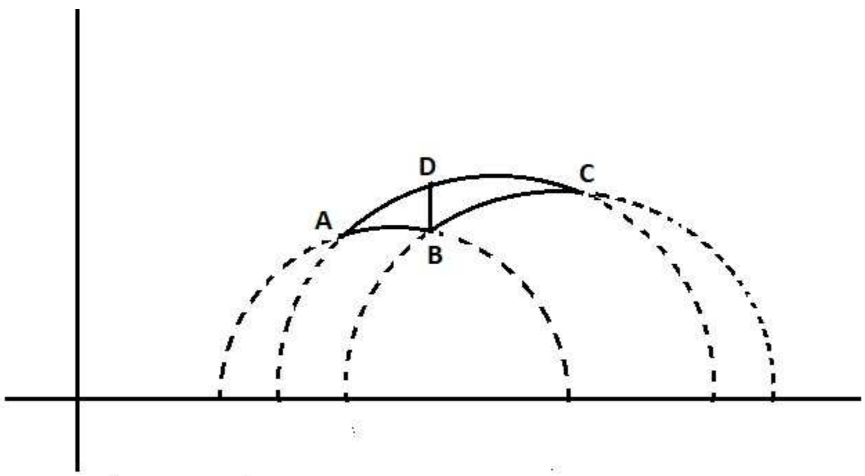

Рис. 5: DB – вертикальный отрезок, $\Delta_{ABC} = \Delta_{ABD} \cup \Delta_{BDC}$.