Задача 1 (1, 2). *Найти общее решение линейного уравнения 1-го порядка двумя способами:*

1. *Методом вариации произвольной постоянной или Бернулли;*
2. *С помощью характеристического уравнения и подбора частного решения по правой части*

Найти также частное решение, удовлетворяющее условию $y(x) = y_0$

$$y' - 3y = e^{3x} - x$$

$$y_0 = -3$$

Решение. 1. *Решим уравнение методом Бернулли:* $y' - 3y = e^{3x} - x$

(a) *Введём замену:* $y = uv, y' = u'v + uv'$
Подставим в исходное уравнение: $u'v + uv' - 3uv = e^{3x} - x$
$u(v' - 3v) + u'v = e^{3x} - x$
Выразим функцию v: $v' - 3v = 0, \frac{dv}{dx} = 3dx$
$\ln|v| = 3x, \Rightarrow v = e^{3x}$

(b) *Подставим найденную функцию* v *в исходное уравнение:* $u'e^{3x} = e^{3x} - x, du = (1 - e^{-3x}x)dx$

(c) *Выразим* u:

$$u = x - \int e^{-3x} x dx = \left[u = x, du = dx; dv = e^{-3x}dx, v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \right] = x + \frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx =$$
$$= x + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + c$$

(d) *Выразим искомую функцию:*

$$y = uv = \left(x + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{9}e^{-3x} + c \right) e^{3x} = xe^{3x} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9} + ce^{3x}$$

2. $L(y) = y' - 3y$, $L(y) = -e^{3x} + x$;
$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}$, *где* $y_{\text{он}}$ *- общее решение неоднородного уравнения,* $y_{\text{оо}}$ *- общее решение однородного уравнения,* $y_{\text{чн}}$ *- частное решение неоднородного уравнения.*
Т.к. правая часть исходного уравнения представима в виде $f_1(x) + f_2(x)$, *то частное решение неоднородного уравнения может быть найдено как* $y_{\text{чн}} = y_1 + y_2$, *где* y_1, y_2 *частные решения уравнений* $L(y) = f_1(x)$, $L(y) = f_2(x)$ *соответственно.*

(a) $y_{\text{оо}} -?$:

$$y' - 3y = 0, \Rightarrow \lambda - 3 = 0, \Rightarrow y_{\text{оо}} = ce^{3x}$$

(b) $y_1 -?$:
$f_1(x) = e^{3x}, \Rightarrow y' - 3y = e^{3x}$;
Будем искать решение вида: $y_1 = axe^{3x}, y_1' = ae^{3x} + 3axe^{3x}$;
$L(y_1) = f_1(x) \Rightarrow ae^{3x} + 3axe^{3x} - 3axe^{3x} = e^{3x} \Rightarrow a = 1, \Rightarrow y_1 = xe^{3x}$

(c) $y_2 -?$:
$f_2(x) = -x, \Rightarrow y' - 3y = -x$
Будем искать решение вида: $y_2 = (Ax + B); y_2' = A$
$L(y_2) = f_2(x) \Rightarrow A - 3Ax - 3B = -x \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{9}$
$y_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$

(d) $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} \Rightarrow y_{\text{он}} = ce^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + xe^{3x}$

3. *Найдём решение, удовлетворяющее начальному условию:*

$$y(0) = -3 \Rightarrow y(0) = c + \frac{1}{9} = -3 \Rightarrow y = -\frac{28}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} + xe^{3x}$$

Задача 2. *Найти общее решение уравнения второго порядка.*

$$yy'' + yy' \operatorname{tg} x + 2(y')^2 = 0$$

Решение. *1.* $yy'' + (y')^2 + yy' \operatorname{tg} x + (y')^2 = 0,$
$(y'y)' + yy' \operatorname{tg} x + (\frac{2y}{2y} y')^2 = 0,$
$(y'y)' + yy' \operatorname{tg} x + \frac{1}{4y^2}(2yy')^2 = 0,$
$(y'y)' + yy' \operatorname{tg} x + \frac{1}{4y^2}((y^2)')^2 = 0,$
$\frac{1}{2}(y^2)'' + \frac{1}{2}(y^2)' \operatorname{tg} x + \left(\frac{(y^2)'}{2y}\right)^2 = 0$

2. $y^2 = u$:
$u'' + u' \operatorname{tg} x + \frac{(u')^2}{2u} = \frac{uu'' + (u')^2}{2u} + u' \operatorname{tg} x = 0,$
$\frac{(uu')'}{2u} + u' \operatorname{tg} x = 0 | * 2u,$
$(uu')' + 2(uu') \operatorname{tg} x = 0$

3. $uu' = k$: $k' + 2k \operatorname{tg} x = 0$
$\frac{dk}{dx} = -2k \operatorname{tg} x \Rightarrow \ln|k| = -2\ln|\cos x| + \ln c_1,$
$k = c_1 \cos^2 x$

4. $u\frac{du}{dx} = c_1 \cos^2 x$:
$udu = c_1 \cos^2 x dx \Rightarrow \frac{u^2}{2} = c_1 \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = c_1 \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\right],$
$u^2 = c_1 x + \frac{1}{2} c_1 \sin 2x + c_1 c_2 \Rightarrow y^4 = c_1 x + \frac{1}{2} c_1 \sin 2x + c_1 c_2$

$y = \sqrt[4]{c_1 x + \frac{1}{2} c_1 \sin 2x + c_1 c_2}$

Решение (Эффективнее)**.** *Здесь было бы проще ввести замену* $y' = yz(x)$ *и решать через неё. Это является стандартным способом в данной ситуации.*

Задача 3. *Найти общее решение уравнения*

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{e^{3x} - e^{4x}}$$

Решение. *Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных*

Пояснение. *Подобрать частное решение по правой части здесь не выйдет, т.к. правая часть не является квазимногочленом.*

1. $y_{\text{оо}}$–?
   Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$
   $(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow y_{\text{оо}} = \mathrm{c}_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$
   ФСР $= \{e^{-2x}, e^{-3x}\}$

2. *Выразим коэффициенты* c_1, c_2 *как функции от аргумента* x*:*

   $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{-3x}$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-3x} = 0 \\ -2c_1'(x)e^{-2x} - 3c_2'(x)e^{-3x} = \frac{1}{e^{3x}-e^{4x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{1}{e^x - 1} \\ c_1'(x) = \dfrac{1}{e^x - e^{2x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x - e^{2x}} = e^{-x} - \ln(1-e^x) + c_{11} \\ c_2(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{e^x - 1} = \ln(1-e^x) - x + c_{22} \end{cases}$$

3. *Теперь подставим найденные коэффициенты и получим ответ:*

$$y_{\text{он}} = (x - e^{-x} - \ln(1-e^x) + c_{11})e^{-2x} + e^{-3x}(-x + \ln(1-e^x) + c_{22}) =$$
$$= e^{-2x}x - e^{-3x}x - e^{-3x} + e^{-3x}\ln(1-e^x) - \ln(1-e^x)e^{-2x} + c_{11}e^{-2x} + c_{22}e^{-3x}$$

Задача 4 (1, 2)**.** $L(y) = (x^2+1)y'' - x2y' + 2y$, $y_1(x) = x^2 - 1$

1. *Проверить, что $y_1(x)$ есть частное решение однородного уравнения $L(y) = 0$. Зная это, найти общее решение уравнения $L(y) = 0$.*

2. *Найти общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ с заданной правой частью $f(x)$, предположив, что одно из частных решений уравнения $L(y) = f(x)$ является многочленом.*

Решение. 1. *Выполним пункт 1:*

(a) *Проверим, что $y_1(x)$ - решение:*

$$2(x^2+1) - 2x(2x) + x(x^2-1) = 2x^2 + 2 - 4x^2 + 2x^2 - 2 \equiv 0$$

(b) *Заметим, что* $\left(\frac{y_{\text{оо}}}{y_1}\right)' = \frac{y'_{\text{оо}}y_1 - y_{\text{оо}}y'_1}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$, *где W - определитель Вронского. Тогда по формуле Лиувилля имеем:*

$$\left(\frac{y_{\text{оо}}}{x^2-1}\right)' = \frac{W}{(x^2-1)^2} = c_1\frac{\exp(\int \frac{2x}{x^2+1}dx)}{(x^2-1)^2} = c_1\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

(c)

$$\frac{y_{\text{оо}}}{x^2-1} = c_1\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx = \mathrm{c}_1\frac{1}{2}\left[\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \int\frac{dx}{(x+1)^2}\right] =$$
$$= -\frac{c_1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + c_2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_{\text{оо}} = -\frac{c_1 * 2x(x^2-1)}{2(x^2-1)} + (x^2-1)c_2 = -c_1x + c_2(x^2-1) = c_1x + c_2(x^2-1)$$

(d) *Т.к. $y_1 = x^2 - 1$ и $y_2 = x$ - линейно независимые функции, то они образуют ФСР для заданного линейного однородного уравнения второго порядка, $\Rightarrow$* $y_{\text{оо}} = c_1x + c_2(x^2-1)$

2. *Найдём общее решение при $L(y) = f(x)$, $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 6x^4 + 12x^2$:*

(a) $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$ *- общее решение однородного уравнения уже известно, найдём частное решение неоднородного уравнения. Предположим, что частным решением является многочлен четвёртой степени.*

(b) *Пусть $g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ - частное решение уравнения $L(y) == f(x)$. Тогда $L(g(x)) = f(x)$:*

$$(x^2+1)(12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2) - 2x(4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) +$$
$$+ 2(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 6x^4 + 12x^2$$

Приведём подобные слагаемые и получим:

$$x^4(12a_4 - 8a_4 + 2a_4) + x^3(6a_3 - 6a_3 + 2a_3) + x^2(2a_2 + 6a_3 - 4a_2 + 2a_2 + 12a_4) + \\ + x(6a_3 - 2a_1 + 2a_1) + (2a_2 + 2a_0) = 6x^4 + 12x^2$$

Получим систему:

$$\begin{cases} 12a_4 - 8a_4 + 2a_4 = 6, \Rightarrow a_4 = 1 \\ 6a_3 - 6a_3 + 2a_3 = 0, \Rightarrow a_3 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 - 4a_2 + 2a_2 + 12a_4 = 12, \Rightarrow a_4 = 1 \\ 6a_3 - 2a_1 + 2a_1 = 0, \Rightarrow a_3 = 0 \\ 2a_2 + 2a_0 = 0, \Rightarrow a_0 = -a_2 \end{cases}$$

Обозначим a_1, a_2 *за свободные переменные* c_1, c_2 *соответственно, тогда имеем:*

$$\begin{cases} a_1 = c_1 \\ a_2 = c_2 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \\ a_0 = -c_2 \end{cases}$$

Тогда $g(x) = x^4 + c_2x^2 + c_1x - c_2$. *Для простоты положим* $c_2 = c_2 = 0$, *тогда* $g(x) = x^4$ *- искомое частное решение.*

(c) *Проверим:*

$$L(x^4) = (x^2 + 1) * 12 * x^2 - 2x * 4x^3 + 2x^4 = 6x^4 + 12x^2$$

(d) *Теперь можно записать общее решение:*

$$y_{\text{он}} = c_1x + c_2(x^2 - 1) + x^4$$

Задача 5 (1, 2). *Решить задачу Коши:*

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

1. *С помощью формулы Дюамеля, решив предварительно вспомогательную задачу Коши:*
$$z'' + az' + bz = 1, z(0) = 0, z'(0) = 0$$
2. *Методом неопределённых коэффициентов (подбором частного решения неоднородного уравнения по правой части).*

Решение. *1. Выполним пункт 1 и решим задачу Коши методом Дюамеля:*

(a) *Сначала решим вспомогательную задачу:*

$$z'' - 5z' + 6z = 1, z(0) = 0, z'(0) = 0$$

- *По теореме о дифференциировании оригинала:*
$$\begin{aligned} z' &\risingdotseq pZ(p) - 0 \\ z'' &\risingdotseq p^2 Z(p) - 0 - 0 \end{aligned}$$
где $Z(p)$ - изображение функции $z(x)$.
- $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$

Запишем вспомогательную задачу в преобразованном виде:

$$\begin{aligned} &p^2 Z(p) - 5pZ(p) + 6Z(p) = \frac{1}{p} \\ &Z(p)(p^2 - 5p + 6) = \frac{1}{p} \\ &Z(p) = \frac{1}{p(p-3)(p-2)} \end{aligned}$$

Разложим $\dfrac{1}{p(p-3)(p-2)}$ *на простейшие дроби:*

$$\frac{1}{p(p-3)(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{p-2}$$

Найдём A, B, C*:*

$$A(p-3)(p-2) + Bp(p-2) + Cp(p-3) = 1$$

$$\begin{aligned} &p = 0: \;\; 6A = 1, A = \frac{1}{6} \\ &p = 2: \;\; -2C = 1, C = -\frac{1}{2} \\ &p = 3: \;\; 3B = 1, B = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\frac{1}{p(p-3)(p-2)} = \frac{1}{6} * \frac{1}{p} - \frac{1}{2} * \frac{1}{p-2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{p-3} \risingdotseq \frac{1}{6} - \frac{1}{2} * e^{2x} + \frac{1}{3} * e^{3x} = z(x)$$

(b) *Т.к.* $z(x)$ *- решение вспомогательной задачи, то решение исходной задаётся формулой:* $y(x) = \int\limits_0^x z'(\tau) f(x-\tau) d\tau$, *где* $f(x) = e^{-x}$.

$$y(x) = \int\limits_0^x z'(\tau) f(x-\tau) d\tau = \int\limits_0^x (-e^{2\tau} + e^{3\tau}) e^{-(x-\tau)} d\tau = e^{-x} \int\limits_0^x (-e^{3\tau} + e^{4\tau}) d\tau =$$

$$= e^{-x} * \left[-\frac{1}{3} e^{3\tau} \Big|_0^x + \frac{1}{4} e^{4\tau} \Big|_0^x \right] = e^{-x} \left[-\frac{1}{3}(e^{3x} - 1) + \frac{1}{4}(e^{4x} - 1) \right] =$$

$$= -\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^{-x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4} - \frac{e^{-x}}{4} = -\frac{e^{2x}}{3} + \frac{e^{3x}}{4} + \frac{e^{-x}}{12}$$

Ответ: $y = -\dfrac{e^{2x}}{3} + \dfrac{e^{3x}}{4} + \dfrac{e^{-x}}{12}$

2. *Выполним пункт 2 и решим методом неопределённых коэффициентов:*
$y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{\text{оо}}$

(a) $y_{\text{оо}}$–?

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) \Rightarrow y_{\text{оо}} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

(b) $y_{\text{чн}}$–?
Т.к. в данном уравнении имеем правую часть специального вида, то частное решение будем искать в виде $y_{\text{чн}} = ae^{-x}$. *Выразим коэффичиент* a, *подставив данное частное решение в уравнение:*

$$ae^{-x} + 5a^{-x} + 6ae^{-x} = e^{-x}, 12a = 1, a = \frac{1}{12}$$

Отсюда $y_{\text{чн}} = \frac{e^{-x}}{12}$

(c) $y_{\text{он}} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{-x}}{12}$

(d) *Найдём решение при заданных начальных условиях:*

$$\begin{cases} y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{-x}}{12} \\ y' = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} - \frac{e^{-x}}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{12} + c_1 + c_2 \\ 0 = -\frac{1}{12} + 3c_1 + 2c_2 \end{cases}$$

Сложим уравнения в полученной системе, тогда: $4c_1 + 3c_2 = 0, c_1 = -\dfrac{3}{4} c_2$

Подставим получившиеся соотношения и окончательно получим:

$$c_2 = -\frac{1}{3}, c_1 = \frac{1}{4}$$

Ответ: $y = \dfrac{e^{-x}}{12} + \dfrac{e^{3x}}{4} - \dfrac{e^{2x}}{3}$

Задача 6. *Найти изображение периодического оригинала с периодом $T = 2a$. На рисунке указан вид его графика на одном периоде.*

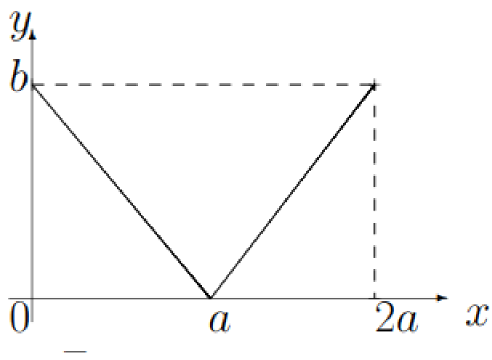

Рис. 1: Вид графика для варианта 18

Решение (a = 2, b = 1)**.** $f(x) \risingdotseq F(p), F(p) =?$

1. *Выразим аналитически заданную графиком функцию:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/2, & x \in [0; 2] \\ 1 + x/2, & x \in [2; 4] \end{cases}$$

2. *Т.к. функция периодическая, воспользуемся формулой:*

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int\limits_0^T e^{-px} f(x) dx$$

где T - период заданной функции ($T = 2a = 4$).

3. *Вычислим $F(p)$:*

$$\frac{1}{1 - e^{-p*4}} \int\limits_0^4 e^{-px} f(x) dx = \frac{1}{1 - e^{-4p}} \left[\int\limits_0^2 (1 - x/2) e^{-px} dx + \int\limits_2^4 (1 + x/2) e^{-px} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-4p}} \frac{e^{-4p}}{2p^2} \Big(2pe^{4p} - 2pe^{2p} - 2p + 2pe^{2p} + e^{2p}(2p + 1) -$$

$$-4p - 1 + e^{2p}(1 + 2p) - e^{4p} \Big) = \frac{e^{-4p}}{2p^2(1 - e^{-4p})} \left(e^{4p}(2p - 1) - 6p + 2e^{2p}(1 + 2p) - 1 \right)$$

Подробное вычисление:

$$\int\limits_0^2 e^{-px}dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_0^2 = -\frac{1}{p}(e^{-2p}-1) = \frac{e^{-4p}}{2p^2}(2pe^{4p}-2pe^{2p})$$

$$\int\limits_2^4 e^{-px}dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_2^4 = -\frac{1}{p}(e^{-4p}-e^{-2p}) = \frac{e^{-4p}}{2p^2}(2pe^{2p}-2p)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^2 xe^{-px}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}(xe^{-px})\Big|_0^2 + \frac{1}{p}\int\limits_0^2 e^{-px}dx\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2}\right) =$$

$$= \frac{e^{-4p}}{2}\left(\frac{-2e^{2p}*p + e^{4p} - e^{2p}}{p^2}\right) = \frac{e^{-4p}}{2}\left(\frac{-e^{2p}(1+2p)+e^{4p}}{p^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_2^4 xe^{-px}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{xe^{-px}}{p}\Big|_2^4 - \frac{e^{-px}}{p^2}\Big|_2^4\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}(4e^{-4p}-2e^{-2p}) - \frac{1}{p^2}(e^{-4p}-e^{-2p})\right] = \frac{1}{2}\Bigg(\frac{2e^{-2p}-4e^{-4p}}{p}+$$

$$+\frac{1}{p^2}(e^{-2p}-e^{-4p})\Bigg) = \frac{e^{-4p}}{2p^2}\left(2pe^{2p}-4p+e^{2p}-1\right) = \frac{e^{-4p}}{2p^2}\left(e^{2p}(2p+1)-4p-1\right)$$

Ответ: $F(p) = \dfrac{e^{-4p}}{2p^2(1-e^{-4p})}\left(e^{4p}(2p-1) - 6p + 2e^{2p}(1+2p) - 1\right)$

Задача 7. *Операторным методом найти решение задачи Коши:*

$$y'' + 2*2y' + (4-9)y = xe^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = -1$$

Решение. *1. Преобразуем исходное выражение:*

$$\begin{aligned}
&y \risingdotseq Y(p)\\
&y' \risingdotseq pY(p) - 1\\
&y'' \risingdotseq p^2Y(p) - p + 1\\
&xe^{-2x} \risingdotseq \frac{1}{(p+2)^2}
\end{aligned}$$

2. Запишем в преобразованном виде:

$$p^2Y - p + 1 + 4(pY - 1) - 5Y = \frac{1}{(p+2)^2}$$

$$Y(p^2 + 4p - 5) - p + 1 - 4 = \frac{1}{(p+2)^2}$$

$$Y(p^2 + 4p - 5) = \frac{1}{(p+2)^2} + p + 3 = \frac{1 + (p+2)^2(p+3)}{(p+2)^2}$$

$$Y = \frac{1 + (p^2 + 4p + 4)(p+3)}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} = \frac{p^3 + p^2(3+4) + p(12+4) + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} =$$

$$= \frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)}$$

3. Представим $\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)}$ *как сумму простейших дробей:*

$$\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 13}{(p+2)^2(p-1)(p+5)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+5} + \frac{D}{(p+2)^2}$$

$$A(p+2)(p-1)(p+5) + B(p+2)^2(p+5) + C(p+2)^2(p-1) +$$

$$+D(p-1)(p+5) = p^3 + 7p^2 + 16p + 13$$

$$p = 1: \quad 54B = 37, \qquad B = \frac{37}{54}$$

$$p = -5: \quad -54C = -17, \quad C = \frac{17}{54}$$

$$p = -2: \quad -9D = 1, \qquad D = -\frac{1}{9}$$

$$p = 0: \quad -10A + \frac{20 * 37}{54} - \frac{4 * 17}{54} + \frac{1 * 5}{9} = 13$$

$$-10A + 13 = 13, A = 0$$

4. $F(p) = \dfrac{37}{54}\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{17}{54}\dfrac{1}{p+5} - \dfrac{1}{9(p+2)^2}$

- $\dfrac{1}{p-1} \risingdotseq e^x$
- $\dfrac{1}{p+5} \risingdotseq e^{-5x}$
- $\dfrac{1}{(p+2)^2} \risingdotseq e^{-2x}x$

Ответ: $y(x) = \dfrac{37}{54}e^x + \dfrac{17}{54}e^{-5x} - \dfrac{1}{9}e^{-2x}x$

Задача 8. *Используя теорему сравнения Штурма, оценить сверху и снизу число нулей решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ на отрезке $[a, b]$.*

$$
\begin{aligned}
&p(x) = -2x \\
&q(x) = (x-2)^2 \\
&a = -12 \\
&b = -6
\end{aligned}
$$

Решение. *Имеем уравнение:*

$$y'' - 2xy' + (x-2)^2 y = 0$$

1. *Введём замену переменной $y = u(x) * z(x)$, где $u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$, чтобы свести исходное уравнение к двучленному виду $z'' + Q(x)z = 0$.*

   - *Тогда $y = e^{\int x dx} z(x) = e^{x^2/2} * z(x)$. Здесь заметим, что число нулей функции $y(x)$ совпадает с числом нулей функции $z(x)$, т.к. $e^{x^2/2} \neq 0 \, \forall \, x$.*
   - *Теперь $Q(x)$ вычисляется по формуле:*

     $$Q(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{p'(x)}{2}$$

     Отсюда:

     $$Q(x) = (x-2)^2 - \frac{1}{4} * 4x^2 + \frac{2}{2} = 5 - 4x$$

   - *Имеем уравнение:*

     $$z'' + (5 - 4x)z = 0$$

2. *На отрезке $[-12, -6]$ $Q(x)$ монотонно убывает, $\Rightarrow$ $29 \leq 5 - 4x \leq 53$. Таким образом, количество n нулей уравнения на отрезке $[-12, -6]$ оценивается снизу и сверху через количество нулей уравнений*

   $$y_1'' + 29y_1 = 0, \; y_2'' + 53y = 0$$

   соответственно.

3. *Найдём количество нулей на отрезке для y_1:*
   Сначала необходимо выразить саму функцию y_1.

   - *Составим и решим характеристическое уравнение:*

     $$
     \begin{aligned}
     &\lambda^2 + 29 = 0 \\
     &\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{29}i
     \end{aligned}
     $$

   - *Общее решение будет иметь вид:*

     $$y_{1\,\text{оо}} = c_1 \cos\sqrt{29}x + c_2 \sin\sqrt{29}x = c\sin(\sqrt{29}x + \phi)$$

- *Найдём нули заданной функции:*

$$c\sin(\sqrt{29}x+\phi)=0$$
$$\sqrt{29}x+\phi=\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\phi}{\sqrt{29}}+\frac{\pi}{\sqrt{29}}k$$

Следовательно, расстояние между соседними нулями $\frac{\pi}{\sqrt{29}}\approx 0.6$. *Отсюда количество нулей* y_1 *на отрезке* : $\left[\frac{-6-(-12)}{\frac{\pi}{\sqrt{29}}}\right]=10.$

4. *Найдём количество нулей на отрезке для* y_2*:*
Сначала необходимо выразить саму функцию y_2.

- *Составим и решим характеристическое уравнение:*

$$\lambda^2+53=0$$
$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{53}i$$

- *Общее решение будет иметь вид:*

$$y_{2\,\text{оо}}=c_1\cos\sqrt{53}x+c_2\sin\sqrt{53}x=c\sin(\sqrt{53}x+\psi)$$

- *Найдём нули заданной функции:*

$$c\sin(\sqrt{53}x+\psi)=0$$
$$\sqrt{53}x+\psi=\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\psi}{\sqrt{53}}+\frac{\pi}{\sqrt{53}}k$$

Следовательно, расстояние между соседними нулями $\frac{\pi}{\sqrt{53}}\approx 0.4$. *Отсюда количество нулей* y_2 *на отрезке* : $\left[\frac{-6-(-12)}{\frac{\pi}{\sqrt{53}}}\right]=13.$

По теореме Штурма имеем:

$$10\le n\le 13$$

где n *- число нулей решений заданного уравнения.*

Ответ: $10\le n\le 13$