Практическое занятие № 16
Обращение преобразования Лапласа и нахождение преобразования Фурье с помощью вычетов. Теорема Руше

Краткие теоретические сведения

● Обращение преобразования Лапласа с помощью вычетов

Определение. *Преобразованием Лапласа функции* $f(t), t \in \mathbb{R}$ называется функция комплексной переменной

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Функция $F(p)$ называется также *изображением.*

Функция $f(t)$ называется *оригиналом,* если

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) на любом конечном отрезке $[a; b] \subset [0; +\infty)$ функция $f(t)$ имеет не более конечного числа точек разрыва 1-го рода;

3) существуют постоянные $M > 0,\ s \in \mathbb{R}$ такие, что

$|f(t)| \leq Me^{st},\ \ t > 0.$

Число $s_0 = inf s$ называется *показателем роста* функции $f(t)$. ▲

Теорема 1. Пусть изображение $F(p)$ является дробно-рациональной функцией с полюсами $p_1,\ p_2, \dots, p_n$. Тогда оригиналом будет функция
$f_0(t) = f(t)\eta(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k}\left(F(p)e^{pt}\right),\quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \blacksquare \qquad (16.1)$$

● Нахождение преобразования Фурье с помощью вычетов

Пусть функция $f(t)$ является абсолютно интегрируемой на всей вещественной оси и кусочно-гладкой на любом конечном отрезке вещественной оси. Тогда имеют место равенства:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \qquad (16.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \qquad (16.3)$$

Которые называются соответственно прямым и обратным преобразованием Фурье функции $f(t)$.

Если $f(t)$ − четная функция, то рассматривают пару косинус-преобразования Фурье:

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega t\, d\omega.$$

При этом $F(\omega) = F_c(\omega)$.

Если $f(t)$ − нечетная функция, то рассматривают пару синус-преобразования Фурье:

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega.$$

При этом $F(\omega) = -iF_s(\omega)$.

● ***Теорема 2. (Теорема Руше)*** Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в ограниченной односвязной области D и на ее границе Γ и пусть $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma$.
Тогда функции $f(z)$ и $F(z) = f(z) + g(z)$ имеют в области D одинаковое число нулей. ■

Практические задания

Найти оригиналы для заданных изображений:

1) $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+1)^2(p^2-4)}$;

2) $F(p) = \dfrac{p^5}{p^6-1}$;

3) $F(p) = \dfrac{1}{p^2-4p+3}$.

4) Найти косинус-преобразование Фурье для функции $f(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$ $(a>0)$.

5) Найти синус-преобразование Фурье для функции $f(t) = \dfrac{t}{t^2+a^2}$ $(a>0)$.

6) Найти преобразование Фурье для функции $f(t) = \dfrac{t-1}{4t^2-8t+5}$.

7) Найти преобразование Фурье для функции $f(t) = \dfrac{t-2}{t^2+4}$.

С помощью теоремы Руше найти число нулей функции $F(z)$ в указанной области:

8) $F(z) = z^8 + 5z^7 - z^4 + 2, \quad 4 < |z| < 6$;

9) $F(z) = z^3 - 5z + 1, \quad а)\, |z| < 1;\ б)\, 1 < |z| < 2;\ в)\, 2 < |z| < 3.$

Ответы: **1)** $\dfrac{t\cos t}{10} - \dfrac{7}{50}\sin t + \dfrac{\operatorname{sh} 2t}{50}$; **2)** $\dfrac{1}{3}\operatorname{ch} t + \dfrac{2}{3}\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}t}{2}$; **3)** $\dfrac{1}{2}\left(e^{3t} - e^{t}\right)$;
4) $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-|\omega|a}$; **5)** $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-|\omega|a} \operatorname{sign}\omega$; **6)** $-\dfrac{i}{4}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \operatorname{sign}\omega \cdot e^{-|\omega|/2 - i\omega}$
7) $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} e^{-2|\omega|} (-1 - i \cdot \operatorname{sign}\omega)$; **8)** 1; **9)** а) 1, б) 0, в) 2.

Домашнее задание: подготовить весь типовой расчет к защите.