7) $(x^2=49) \Leftrightarrow (x=7) \vee (x=-7)$ и

8) $(x^2=49) \Rightarrow (x=7)$ – Л

9) $(x^3=64) \Rightarrow (x=4)$ – И

10) $(x^3=64) \Leftrightarrow (x=4)$ – И

11) $(\forall x \in N): x^2>0$ – И

12) $(\forall x \in Z): x^2>0$ – Л

13) $(\exists x \in N): x^2=16$ – И

14) $(\exists x \in P): x^2=16$ – Л

15) $(\exists! x \in N): x^2=25$ – И

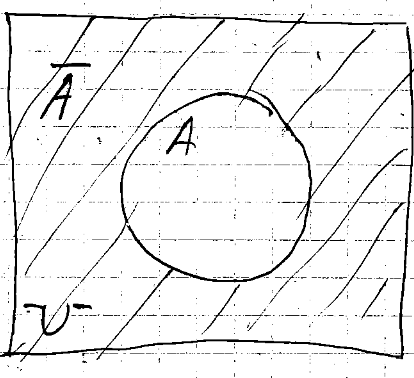
16) $(\exists! x \in Z): x^2=25$ – Л

17) $(\exists x \in Q): x^2=37$ – Л

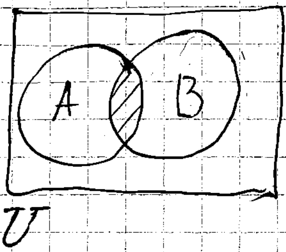
18) $(\exists x \in R): x^2=37$ – И

Семинар 2 (08.09.16)

Операции над мн-ами



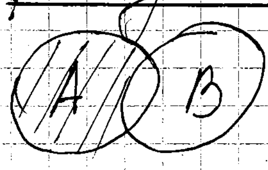
$\bar{A}=\{x \in V \mid x \notin A\}$ – дополнение мн-ва A [до множ-ва V]



$A \cap B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ — **пересечение** множеств A и B.

$A \cup B = \{x \in U \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$

объединение мн-в A и B.



$A \setminus B = \{x \in U \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ — **разность** мн-в.

$A \setminus B \neq B \setminus A$

$\overline{A}$ — унарная операция

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ — бинарные операц.

Union

Задача

$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\} = [1..9]$

$A = \{1, 5, 7, 8\}$ $B = \{3, 5, 8\}$

$\overline{A} = \{2, 3, 4, 6, 9\}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}$

$A \cap B = \{5, 8\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$

$A \setminus B = \{1, 7\}$

$B \setminus A = \{3\}$

Задача $V=[1..9]$

$A=\{2,3,4,9\}$

$B=\{2,4,9\}$

$\overline{A}=\{1,5,6,7,8\}$

$\overline{B}=\{1,3,5,6,7,8\}$

$A\cap B=\{2,4,9\}$

$A\cup B=\{2,3,4,9\}$

$A\setminus B=\{3\}$

$B\setminus A=\emptyset$

Задача $V=$ [redacted] $[1,9]$

$A=(1,7)$ $B=[3,8]$

$\overline{A}=$ [redacted] $\{1\}\cup[7,9]$

$\overline{B}=$ [redacted] $[1,3)\cup(8,9]$

$A\cap B=$ [redacted] $[3,7)$

$A\cup B=(1,8]$

$A\setminus B=(1,3)$

$B\setminus A=[7,8]$

$A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N}) : x = y^2\}$

$A = \{y^2 \mid y \in \mathbb{N}\}$ сокращение для второй

<u>Задача</u>: $A = \left\{\frac{x}{x+16} \mid x \in \mathbb{N}\right\}$

Верно ли что:

1) $\frac{1}{2} \in A$, 2) $\frac{1}{4} \in A$?

1) $\frac{x}{x+16} = \frac{1}{2}$; $2x = x + 16$; $x = 16$; $\cancel{16 \in \mathbb{N}}$

~~значит~~ $\cancel{\frac{1}{}}$ да, $\frac{1}{2} \in A$

2) $\frac{1}{4} = \frac{x}{x+16}$ $\quad \cancel{3}4x = x + 16 \quad x = \frac{16}{3}$

Нет, ~~не верно~~ $\frac{1}{4} \notin A$

<u>Задача</u>:

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y \in \mathbb{N}) : x = \frac{8y+6}{2y-3}\right\}$

Задать мн. A путем переч. его элементов.

$\frac{8y+6}{2y-3} = \frac{(2y-3)\cdot 4 + 18}{2y-3}$ 17 $= 4 + \frac{18}{2y-3}$

$18 \vdots (2y-3) \Rightarrow (2y-3) \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$2y-3=1; \quad y=2$

$2y-3=-1; \quad y=1.$

$\cancel{2y-3=2;} \quad \cancel{y=}$

$\cancel{2y-3=-2;}$

$2y-3=3; \quad y=3$

$\cancel{2y-3=-3;}$

$\cancel{2y-3=6;}$

$\cancel{2y-3=-6;}$

$\cancel{2y-3=9;} \quad y=6$

$\cancel{2y-3=-9;}$

$\cancel{2y-3=18;}$

$2y-3=-18;$

$\cancel{A=\{3, 6, 7, 10\}}$

$\cancel{A = x(2) = \frac{18}{1} = 18}$

$\cancel{x(3) = \frac{18}{?} 4}$

$A=\{6, 10, 22\}$

18

Задача $A = \left\{ \dfrac{x}{x^2 - x + 8} \;\middle|\; x \in [1..100] \right\}$

$|A| - ?$

$$\frac{x}{x^2 - x + 8} = \frac{y}{y^2 - y + 8}$$

$$xy^2 - xy + 8x = x^2y - xy + 8y$$

$$x^2y + xy^2 + 8x + 8y = 0$$

$$xy(x - y) + 8(x - y) = 0$$

$$(xy + 8)(x + y) = 0$$

$x - y = 0 \qquad xy - 8 = 0$

$x = y$

~~$x = -y$ невоз~~

$xy = +8$

~~1, 2, 4, 8~~

~~$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases}$~~

$|A| = 98$

Задача.

1) $(\forall x \in N)\wedge(\forall y \in N): xy > 0$ И.

2) $(\forall x \in N)(\forall y \in Z): xy > 0$ Л

3) $(\forall x \in N)(\exists y \in Z): xy > 0$ И.

4) $(\forall x \in Z)(\forall y \in N): xy > 0$ Л.

5) $(\forall x \in Z)(\exists y \in N): xy \geq 0$ И

6) $(\forall x \in Z)(\exists y \in Z): xy \geq 0$ И.

7) $(\forall x \in N)(\exists y \in R): xy = 1$ И

8) $(\forall x \in N)(\exists y \in N): xy = 1$ Л

9) $(\exists x \in N)(\exists y \in N): xy = 1$ И

10) $(\forall x \in N)(\exists! y \in R): xy = -1$ И

11) $(\forall x \in N)(\exists! y \in Z): xy = -1$ Л

12) $(\exists x \in N)(\exists! y \in Z): xy = -1$ И

~~13~~

Пусть X — множество

max X — наиб. эл-т мн. X

min X — наим. эл-т мн. X

sup ~~inf~~ X — ~~то~~ точная верхняя грань мн-ва X inf X – точная нижняя грань мн.-ва X

$(a - \max X) \Leftrightarrow (a \in X) \wedge (\forall x \in X: x \leq a)$

$(x \vdots 6) \Leftrightarrow (x \vdots 2) \wedge (x \vdots 3)$

$\overline{(x \not\vdots 6)} \Leftrightarrow (x \not\vdots 2) \vee (x \not\vdots 3)$

$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

$(a \neq \max X) \Leftrightarrow (a \notin X) \vee ((\exists x \in X): x > a)$

$X = [2, 7)$

$\min X = 2$

$\max X$ – не существует

$\sup X = 7$

$\inf = 2$

$(a = \sup X) \Leftrightarrow ((\forall x \in X): x \leq a) \wedge$

$\wedge ((\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X): x > a - \varepsilon)$

$(a \neq \sup X) \Leftrightarrow ((\exists x \in X): x > a) \vee$

$\vee ((\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in X): x \leq a - \varepsilon)$

~~(Множество X~~ =

$(a = \sup X) \Leftrightarrow ((\forall x \in X): x \leq a) \wedge$

$\wedge ((\forall b < a)(\exists x \in X): x > b)$

(Множество X ограничено сверху) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X): x \leq M$

(Множество X неограничено сверху) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists x \in X): x > M$

(Множество X ограничено снизу) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X): x \geq M$

(Множество X неограницено снизу) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R})(\exists x \in X): x < M$

(Множество X имеет наиб элемент) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists a \in X)(\forall x \in X): x < a$

(Множество X не имеет наиб элемента) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall a \in X)(\exists x \in X): x > a$

(Число $m \in \mathbb{N}$ делится на $n \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow$

$(\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}): m \vdots n$

$(\exists k \in \mathbb{N}): m = kn$

$(\forall k \in \mathbb{N}): m \neq kn$

(Число $m \in N$ простое) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall k \in N, k \geq 2)(\forall l \in N, l \geq 2)$:

$m \neq kl$

(Число $m \in N$ составное) $\Leftrightarrow$

$(\exists k \in N, k \geq 2)(\exists l \in N, l \geq 2)$:

$m = kl$

$A \Rightarrow B$

достаточное условие для B

необходимое для A

<u>Задача:</u>

1) Для того, чтобы четырех-к был прямоугольником, ... [достаточно], чтобы он был квадратом.

A — данный четырехуг-к явл-ся прямоугольником.

B — данный чет.-к. является квадрат.

$B \Rightarrow A$

достаточное необходимое

23

2) ~~Для того~~

прям-ком

~~[illegible]~~ — " — необходимо ——— ~~параллелограм-~~ параллелогр-

-ом

A - пр $A \Rightarrow B$

B - пар

$A \Rightarrow B$

3) — " — квадратом

необходимо " — ромбом.

4) Для того чтобы нат. число x — " — ~~на 6~~ делилось на 6 необходимо чтобы делилось 3

$\underset{д}{A} \Rightarrow \underset{н}{B}$

5) — " — на 6, необходимо на 2, на 3

6) — " — на 6 ~~дос~~ на 2 и на 3 необходимо и достаточно

Прямая теорема.

$\underbrace{P(x)}_{\text{условие}} \Longrightarrow \underbrace{Q(x)}_{\text{заключ.}}$

Обратная теорема: $Q(x) \Rightarrow P(x)$

Противоположная: $\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{Q(x)}$

теорема противоположная к обратной $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$

3 $P(x)$ = (Четыр-к X является прямоугольником)

$Q(x)$ = (Около четырехуг. X можно описать окр-ть

$P(x) \Rightarrow Q(x)$	$Q(x) \Rightarrow P(x)$	$\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{Q(x)}$	$\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$
И И Л Л	Л И Л И	Л И Л И	И И И Л

$P(x)$ = делится на 3

$Q(x)$ = сумма цифр на 3

$P(x)$ = X делится на ~~8~~ 4

$Q(x)$ = десят. запись числа X заканчивается на 4.

$P(x)$ = число x дел-ся на 5

$Q(x)$ = — // — на 0

Прямая теорема $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и Теорема противоположная к обратной ~~$P(x) \Rightarrow$~~ $\overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$ эквивалентны на этом факте основан метод док-ва от противного

<u>Задача</u> Доказать, что если числа a^2+b^2 делится на 3, то кажд. из чисел а и б делится на 3

<u>Решение</u>

1) Предположим число a не делится на 3 => число b не делится на 3.

$a = 3k+1$	$b = 3\cancel{b}+1$	дает ост. 2
$a = 3k+1$	$b = 3l+2$	ост. 2
$a = 3k+2$	$b = 3l+1$	2
$a = 3k+2$	$b = 3l+2$	2

~~a^2+b^2 дает~~

$$a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 3$$

Получим противоречие. Значит,

$$\left((a^2+b^2) \vdots 3\right) \Rightarrow (a \vdots 3) \wedge (b \vdots 3)$$

Метод математической индукции

Пусть $P(n)$ – утвержд., зависящее от $n \in N$

$$\boxed{\underset{И}{P(1)}} \mid P(2) \mid P(3) \mid \dots \mid \underset{И}{P(k)} \mid \underset{И}{P(k+1)} \dots$$

1) База инд. $P(1)$ – истинно
2) Шаг инд. Если истинно $P(k)$, то истинно $P(k+1)$

Если выполняются 1) и 2), то утверждение $P(n)$ истинно при всех n (аксиома инд. принцип мат инд.)

Задача: Д-ть, что при всех $n \in N$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (*)$$

Решение 1) База инд.

$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ – И.

27

2) Шаг индукции. Предположим, что формула $(*)$ верна при $n=k$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Докажем что формула (*) будет верна также при $n=k+1$

Имеем

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2}+(k+1)^2=\left[\begin{array}{l}\text{используем}\\ \text{предп.}\\ \text{инд}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$\frac{(k+1)\left[2k^2+k+6k+6\right]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$=\frac{(k+1)2(k+2)(k+\frac{3}{2})}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=$$

Мы получили правую часть форм (*) в которой n заменено на $k+1$.

Согласно принципу мат индукции равенство * доказано при всех $n\in N$

Задача. Доказать, что

при всех $n \in N$

$(7^n + 3n - 1) \vdots 9$ ☆

Решение. 1) База инд:

При $n = 1$

$7^1 + 3 - 1 = 9 \vdots 9$

2) Шаг индукции

Предположим, что утвержд. ☆ верно при $n = k$, т. е.

$(7^k + 3k - 1) \vdots 9$

Докажем, что тогда утв. ☆ будет верно при $n = k+1$. Имеем:

$7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3k + 2 =$

$= 7\underbrace{(7^k + 3k - 1)}_{\text{делится на 9 по предп. инд}} - \underbrace{18k + 9}_{\vdots 9} \vdots 9$

Согласно принципу мат инд ~~равенс~~ утв. ☆ верно при $\forall n \in N$