МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 4

Формула полной вероятности и формула Байеса

Формула полной вероятности и формула Байеса

Полная группа событий

Рассматриваем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

События $\{H_k\}$ $(H_k \in \mathcal{A})$ **образуют полную группу событий, если**

1. $\sum_k H_k = \Omega$ **(т.е.** $\{H_k\}$ **покрывают все пространство элементарных событий);**

2. Для всех $k \neq j$ $H_k \cdot H_j = \varnothing$ **(т.е.** $\{H_k\}$ **несовместны).**

При этом справедливо равенство $\sum_k P(H_k) = P(\Omega) = 1$.

Пример: $\{\varnothing, \Omega\}$ **– тривиальная полная группа событий.**

Формула полной вероятности

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС и $P(H_k) > 0$, то

для любого события A: $\quad P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$.

<u>Доказательство</u>:

$A = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot H_k)$ и $(A \cdot H_k) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing$, поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cdot H_k) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

Формула Байеса

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС , $P(H_k) > 0$ и $P(A) > 0$, то для любого события H_j:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A|H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)} .$$

Доказательство: используем определение условной вероятности и формулу полной вероятности

$$P(H_j|A) = \frac{P(A\cdot H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)\cdot P(A|H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)} .$$

Пример

В первом ящике находится 2 белых шара и 3 чёрных, а во втором – 3 белых шара и 1 чёрный. Из первого ящика случайным образом переложен во второй ящик один шар.

Найти вероятность того, что:

a) наудачу извлеченный после этого шар из второго ящика будет белым;

b) из первого ящика был переложен во второй ящик белый шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар;

c) из первого ящика был переложен во второй ящик чёрный шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар.

Решение:

а) Пусть $\boldsymbol{H_1}$={из первого ящика во второй переложили белый шар},

$\boldsymbol{H_2}$={из первого ящика во второй переложили чёрный шар},

$\boldsymbol{A}$= {из второго ящика извлекли белый шар}.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{25}.$$

b) $$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{8}{17}.$$

c) $$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{9}{17}.$$