# Лекция №11

## Классификация особых точек линейной автономной системы второго порядка с постоянными коэффицентами (продолжение).

II) Случай комплексных собственных значений матрицы $A$. Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$ – собственные значения матрицы $A$. Пусть $\omega = u + iv$ – собственный вектор для $\lambda_1$. Тогда $\overline{\omega} = u - iv$ – собственный вектор для $\lambda_2$. Векторы $u = (\omega + \overline{\omega})/2$ и $= (\omega - \overline{\omega})/2i$ линейно независимы, так как получаются из $\omega$ и $\overline{\omega}$ невырожденным линейным преобразованием.

Вектор-функция $x = ce^{(\alpha+\beta i)t}\omega$, где $c$ – любое число, является решением системы (1). Подставляя $c = \rho e^{i\theta}$, $\omega = u + iv$, получаем

$$\begin{gathered} x = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)}(u + iv) = (y_1(t) + iy_2(t))(u + iv), \\ y_1(t) = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta),\, y_2(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta). \end{gathered} \tag{1}$$

Матрица $A$ – вещественная, поэтому решением системы (1)является также $\operatorname{Re} x = uy_1(t) - vy_2(t)$. Вещественное решение $\operatorname{Re} x$ в вещественном базисе $u$, $-v$ координаты $y_1(t)$, $y_2(t)$. Переходя к полярным координатам $r$, $\varphi$, то есть полагая $y_1 = r\cos\varphi$ $y_2 = r\sin\varphi$, получаем

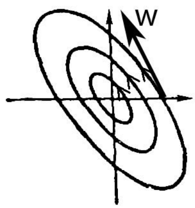
$$r = \rho e^{\alpha t} \quad \varphi = \beta t + \theta, \tag{2}$$

где $\rho > 0$ и $\theta$ – произвольные постоянные. Формула (2) дает все вещественные решения, так как начальная точка решения $y_1(0) = \rho\cos\theta$, $y_2(0) = \rho\sin\theta$ есть произвольная точка плоскости $y_1$, $y_2$.

В случае $\alpha = 0$, то есть $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, траектории (2) – окружности $r = \text{const}$. Особая точка называется центром.

Центр всегда устойчивая но не асимптотически устойчивая особая точка.

На плоскости $x_1$, $x_2$ траектории (2) имеют вид эллипсов. Направление движения по траекториям выбирается в соответствии с вектором скорости $w$, построенным например в точке $(1,\, 0)$ и равным $w = (a,\, b)$ в этой точке.




центр

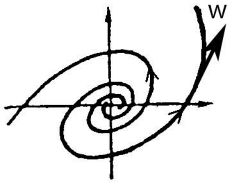
В случае $\alpha \neq 0$ траектории (2) – логарифмические спирали

$$\varphi = \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{r}{\rho} + \theta \quad (0 < r < \infty),$$

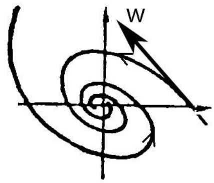
делающие бесконечно много оборотов вокруг начала координат. Особая точка называется фокусом. Фокус асимптотически устойчивый, если $\alpha < 0$, и неустойчивый, если $\alpha > 0$.

На плоскости $x_1$, $x_2$ траектории (2) имеют вид спиралей. Направление движения по траекториям и вид спирали выбираются в соответствии со знаком числа $\alpha$ и с вектором скорости $w$, построенным например в точке $(1,\, 0)$ и равным $w = (a,\, b)$ в этой точке.

Если матрица $A$ имеет одно или два собственных значения, равных нулю, то ее жорданова форма имеет один




фокус $\alpha > 0$




фокус $\alpha < 0$

из трех видов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\det A = 0$, то система

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = 0 \\ cx_1 + dx_2 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, значит, осоых точек у системы (1) бесконечно много.

Системы с такими матрицами легко решаются. Рисунки здесь не приводятся, так как при добавлении в такую систему слагаемых, мылых по сравнению с линейными, картина траекторий обычно резко меняется.