Практическое занятие № 14

Применение вычетов к вычислению определенных и несобственных интегралов

Краткие теоретические сведения

1. Вычисление интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$

где $R(u, v)$ — рациональная функция переменных u, v.

Введем комплексную переменную $z = e^{i\varphi}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), dz = ie^{i\varphi}d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Выполняя указанную замену переменной, получим:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \oint_{|z|=1} R_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} R_1(z), \qquad |z_k| < 1.$$

Здесь $R_1(z)$ – дробно-рациональная функция комплексной переменной z.

2. Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно

Теорема. Пусть $f(x)$ — рациональная функция вещественной переменной x, т.е. $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно. Если функция $f(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $(m - n) \geq 2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z). \blacksquare$$

Замечание. В ряде случаев более удобным оказывается рассмотрение особых точек функции $f(z)$, расположенных в нижней полуплоскости. Можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \underset{z=z_k}{\operatorname{res}} f(z).$$

Практические задания

С помощью вычетов вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x}, \; a > 1;$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x dx}{a + b\cos x}, \; a > b > 0;$

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2}, \; a > 1;$

4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\left(x^2 + a^2\right)^2}, \quad a > 0$;

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - (2ix + 3)^2} dx$;

Домашнее задание: №№ 13.451, 13.453, 13.458, 13.460.

Ответы к задачам:

1) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$; **2)** $\frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)$; **3)** $\frac{\pi\left(1 + a^6\right)}{a^6\left(a^2 - 1\right)}$; **4)** $\pi\sqrt{2}$; **5)** $\frac{\pi}{2a}$; **6)** $\frac{\pi}{4}$.