Дифференциальные уравнения

Курс видеолекций

Доцент кафедры ВМ ИК к.ф.-м.н. Хачлаев Тимур Султанович

e-mail: khachlaev@mirea.ru; тел.: +7(903)103-3952

Темы дисциплины

1. Понятие о дифференциальном уравнении
2. Методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка
3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши
4. Дифференциальные уравнения высших порядков
5. Линейные однородные уравнения
6. Линейные неоднородные уравнения
7. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами
8. Преобразование Лапласа и его свойства
9. Обращение преобразования Лапласа
10. Применение преобразования Лапласа
11. Общая теория систем дифференциальных уравнений
12. Линейные системы
13. Автономные системы
14. Точки покоя автономных систем
15. Устойчивость решений

Литература

Основная

1. Хеннер В. К., Белозерова Т. С., Хеннер М. В.. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений [Электронный ресурс]:. - Санкт-Петербург: Лань, 2017. - 320 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/96873
2. Демидович Б. П., Моденов В. П.. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]:учебное пособие. - Санкт-Петербург: Лань, 2019. - 280 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/115196
3. Романко В. К., Агаханов Н. Х., Власов В. В., и др., Романко В. К.. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению:учебное пособие. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. - 220 с.
4. Зайцев В. Ф., Линчук Л. В., Флегонтов А. В.. Дифференциальные уравнения (структурная теория) [Электронный ресурс]:учебное пособие. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 500 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/98238
5. Филиппов А. Ф.. Сборник задач по дифференциальным уравнениям:Учеб. пособие. - М.: ЛИБРОКОМ, 2013. - 237 с.
6. Эльсгольц Л. Э.. Дифференциальные уравнения:Доп. Мин. высш. и ср. спец. обр. РСФСР в кач. учебника для вузов. - М.: URSS, 2014. - 309 с.

Литература

Дополнительная

1. Петровский И. Г.. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]:. - , 1984. - 296 с. - Режим доступа: http://library.mirea.ru/secret/mm_00057.djvu
2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для студентов мех.-мат. спец. вузов / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1971. — 240 с.: ил
3. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями:Учеб. пособие для вузов. - М.: КомКнига, 2005. - 256 с.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями:Учеб. пособие для вузов. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 175 с.

Определение

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение

$$F(x,\, y,\, y',\, \cdots,\, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

связывающее значение независимой переменной x, неизвестной функции $y(x)$ и её производных до порядка $n \geqslant 1$ включительно.

Определение

Порядок n старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Определение

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $y(x)$, определённая на отрезке или интервале, имеющая n производных на нём и обращающая соотношение (1) в тождество при подстановке в него.

Пример

Соотношение $y' - 2x = 0$ является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Функции вида $y(x) = x^2 + C$, где C– произвольная постоянная, являются решениями уравнения $y' - 2x = 0$.

Как показывает пример, у дифференциального уравнения может быть бесконечно много решений.

Определение

Общим решением дифференциального уравнения называется формула, содержащая все решения дифференциального уравнения.

Замечание

Помимо обыкновенных дифференциальных уравнений, в математике рассматриваются уравнения с частными производными. В них искомая функция зависит от нескольких независимых переменных.

$$z'_y = z''_{xx} \quad z''_{xx} + z''_{yy} = 0 \; -$$

примеры таких уравнений.

Если в задаче, которая привела к дифференциальному уравнению ищется единственное решение, то должно быть задано начальное условие, значение искомой функции $y(x)$ при некотором значении независимой переменной x.
Так задание начального условия

$$y(2) = 5$$

для искомой функции $y(x)$ позволяет получить единственное решение уравнения

$$y' - 2x = 0$$

из рассмотренного выше примера. Этим решением является функция

$$y(x) = x^2 + 1.$$

Замечание

Для большого класса уравнений в нашем курсе общее решение будет содержать столько произвольных постоянных каков порядок дифференциального уравнения и столько же начальных условий надо задавать, чтобы получить единственное решение.

Постановка задачи Коши для уравнения 1-го порядка.

Соотношение

$$F(x,\, y(x),\, y'(x)) = 0 \tag{2}$$

задает задает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. При известных условиях на функцию F, определяемых теоремой о неявной функции, уравнение (2) можно разрешить относительно старшей производной y':

$$y' = f(x,\, y(x)). \tag{3}$$

Задав начальные условия $y(x_0) = y_0$ получим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f(x,\, y(x)), & (4) \\ y(x_0) = y_0. & (5) \end{cases}$$

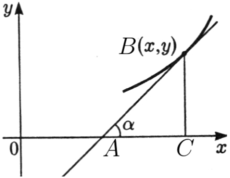
Позже будут сформулированы условия на функцию $f(x,y)$ при которых задача Коши (4), (5) имеет и при том единственное решение.

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

К дифференциальным уравнениям сводятся многие задачи механики, те геометрические задачи, где речь идет о касательных. Одним из первых приложений дифференциальных уравнений было изучение движения планет. Первые примеры применения дифференциальных уравнений для решения геометрических и физических задач дали Ньютон и Лейбниц.

Пример

Найти кривую, любая касательная к которой пересекает ось абсцисс в точке, абсцисса которой вдвое меньше абсциссы точки касания.



Пусть уравнение искомой кривой $y = y(x)$. В прямоугольном треугольнике ABC имеем $BC = y$, из геометрического смысла производной следует, что $\operatorname{tg}\alpha = y'$, а значит катет $AC = BC/\operatorname{tg}\alpha = y/y'$. Так как $OC =$ искомое уравнение имеет вид

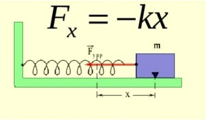
$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{2}.$$

Общим решением этого уравнения является семейство парабол

$$y = Cx^2.$$

Пример

Найти перемещение тела под действием упругой силы.



Пусть искомое перемещение задается уравнением $x = x(t)$. По второму закону Ньютона $ma = F$. Из физического смысла производной следует, что $a(t) = \ddot{x}(t)$, а по закону Гука $F = -kx$. Таким образом дифференциальное уравнение для перемещения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Общим решением этого уравнения являются функции

$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right).$$

Пример

Найти температуру тела $y(t)$ в момент времени t, считая, что скорость изменения температуры пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды.

Пусть a– температура окружающей среды. Тогда дифференциальное уравнение для искомой температуры имеет вид

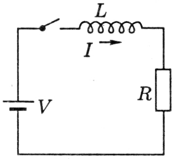
$$y' = k(a - y).$$

Общим решением этого уравнения являются функции

$$y(t) = a - ce^{-kt}.$$

Пример

Найти силу тока при $t > 0$ в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных источника постоянного тока с напряжением V, катушки самоиндукции L, сопротивления R и выключателя, который замыкает цепь при $t = 0$.



Как следует из закона Ома сумма падений напряжения на всех элементах цепи равна напряжению источника тока. Таким образом для нахождения силы тока $I(t)$ имеем задачу Коши

$$\begin{cases} L\frac{dI}{dt} + RI = V, \\ I(0) = 0. \end{cases}$$

Решением этой задачи является функция

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Дифференциальное уравнение для однопараметрического семейства плоских кривых.

Равенство

$$\varphi(x,\, y,\, C) = 0,\ \ (x, y) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, C \in \mathbb{R}, \varphi \in C^1 \tag{6}$$

задает однопараметрическое семейство плоских кривых. Для того чтобы составить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства (6), надо продифференцировать равенство (6), считая y функцией x. Из полученного соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{7}$$

и исходного равенства (6) нужно исключить параметр C. Получившееся соотношение $F(x,y,y') = 0$, связывающее x, y, y' и есть искомое дифференциальное уравнение.

Пример

Составить дифференциальное уравнение для однопараметрического семейства кривых $y - Ce^x = 0$*.*

Система равенств (6), (7) в данном примере будет иметь вид

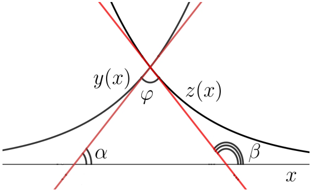
$$\begin{cases} y - Ce^x = 0, \\ y' - Ce^x = 0. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения системы параметр $C = \frac{y}{e^x}$ и подставляя его во второе уравнение системы, получим искомое дифференциальное уравнение $y' - y = 0$.

Задача об ортогональных траекториях.

Определение

Линии пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом φ называются изогональными траекториями.



Пусть график кривой семейства задается уравнением $y = y(x)$, а график изогональной траектории $y = z(x)$. Рассмотрим эти графики в точке их пересечения. Обозначим угол между касательной к кривой семейства и осью абсцисс через α, а угол между касательной к изогональной траекторией и осью абсцисс через β. В точке пересечения x – общий, $y = z$, $\beta = \alpha \pm \varphi$ или $\alpha = \beta \mp \varphi$.

Далее рассмотрим частный случай ортогональных траекторий т.е. случай $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда будем иметь следующее соотношение на производные y' и z'

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\beta \mp \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\frac{1}{z'}.$$

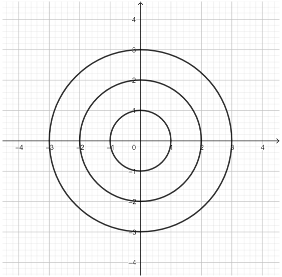
Таким образом, если $F(x, y, y') = 0$ – дифференциальное уравнение для семейства кривых, то $F(x, z, -\frac{1}{z'}) = 0$ – дифференциальное уравнение для ортогональных траекторий.

Пример

Найдем ортогональные траекториии к семейству концентрических окружностей

$$x^2 + y^2 = C$$

с центром в начале координат.



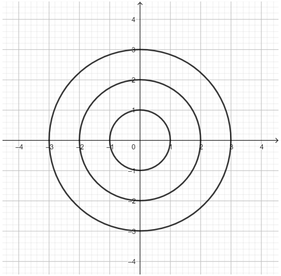
Наши геометрические представления подсказывают, что ортогональными траекториями в этом случае будет семейство прямых проходящих через точку (0,0).

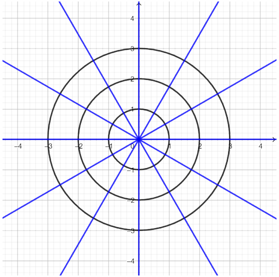
Пример

Найдем ортогональные траекториии к семейству концентрических окружностей

$$x^2 + y^2 = C$$

с центром в начале координат.





Наши геометрические представления подсказывают, что ортогональными траекториями в этом случае будет семейство прямых проходящих через точку (0,0). Убедимся в этом, составив указанным выше способом дифференциальное уравнение для ортогональных траекторий.

Для этого получим сначала дифференциальное уравнение для семейства концентрических окружностей

$$x^2 + y^2 = C.$$

Продифференцируем последнее равенство по x, считая y функцией x. Получим

$$2x + 2yy' = 0,$$

или

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Заменяя в этом соотношении y на z, а y' на $-\frac{1}{z'}$, получим уравнение для ортогональных траекторий

$$-\frac{1}{z'} = -\frac{x}{z},$$

или

$$z' = \frac{z}{x}.$$

Нетрудно убедится, что семейство прямых

$$z = cx$$

является решением для данного уравнения.

Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения 1-го порядка как поля направлений.

В каждой точке $(x,\, y)$ из области $\mathcal{D}$, где определена функция $f(x,\, y)$, уравнение $y' = f(x,\, y)$ определяет производную решения проходящего через эту точку. Так как производная $y' = \operatorname{tg} \alpha$, где α– угол наклона касательной к кривой, проходящей через эту точку, получаем, что в области $\mathcal{D}$ уравнение $y' = f(x,\, y)$ задаёт поле направлений, в каждой точке области $\mathcal{D}$ определяющее направление касательной к решению проходящему через эту точку.