ЛЕКЦИЯ 9. ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Определение 1. Интеграл

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\ (p>0) \tag{1}$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровым интегралом второго рода*, а интеграл

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ (p>0,\ q>0) \tag{2}$$

называется *бета-функцией* или *эйлеровым интегралом первого рода* ▲

Теорема 1. Несобственный интеграл (1) сходится при $p>0$.

Доказательство: Представим интеграл в правой части (1) в виде суммы:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx. \tag{3}$$

Если $p\geq 1$, то первое слагаемое в правой части равенства (3) представляет собой определенный интеграл от непрерывной функции. Если $0<p<1$, то

$$\left|x^{p-1}e^{-x}\right|=x^{p-1}e^{-x}\leq x^{p-1}\ \forall x\in(0;1],$$

$\int\limits_0^1 x^{p-1}dx=\left.\frac{x^p}{p}\right|_0^1=\frac{1}{p}$, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ сходится.

Докажем сходимость второго интеграла в правой части (3). Сначала покажем, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-x/2}=0. \tag{4}$$

Если $0<p<1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-x/2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1-p}e^{x/2}}=0$.

Если $p=1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-x/2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x/2}}=0$.

Если $p>1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1}e^{-x/2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}}{e^{x/2}}=0$.

В последнем случае получаем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Предел равен нулю, так как показательная функция растет быстрее степенной.

Из (4) следует, что функция $f\left(x\right)=x^{p-1}e^{-x/2}$ ограничена на промежутке $\left[1;+\infty\right)$, т.е. $\exists M>0: 0<f\left(x\right)\le M\ \ \forall x\ge 1,\ \forall p>0$. Тогда

$$0<x^{p-1}e^{-x}=f\left(x\right)e^{-x/2}\le Me^{-x/2}\ \ \forall x\ge 1,\ \forall p>0.$$

Так как сходится интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} Me^{-x/2}dx=2M\left(-e^{-x/2}\Big|_{1}^{+\infty}\right)=\frac{2M}{\sqrt{e}},$$

то по признаку сравнения сходится второй интеграл в правой части (3). Показано, что при $p>0$ оба интеграла в правой части равенства (3) сходятся, следовательно несобственный интеграл (1) сходится.■

Свойства гамма-функции

Свойство 1. (Частные значения)

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(1/2\right)=\sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Доказательство:

$$\Gamma(1)=\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=0-\left(-1\right)=1;$$

$$\Gamma(1/2)=\int_{0}^{+\infty} x^{-1/2}e^{-x}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{bmatrix}=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}2tdt=2\int_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}.■$$

Свойство 2. (Формула понижения)

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma\left(p\right),\ p>0. \tag{6}$$

Доказательство:

$$\Gamma(p+1)=\int_{0}^{+\infty} x^{p}e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=x^{p},\ du=px^{p-1}dx\\ dv=e^{-x}dx,\ v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=\left(-e^{-x}x^{p}\Big|_{0}^{+\infty}\right)+\int\limits_{0}^{+\infty}px^{p-1}e^{-x}dx=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p}}{e^{x}}+0+p\int\limits_{0}^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma\left(p\right).\blacksquare$$

Свойство 3.

$$\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N};\tag{7}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot\left(2n-1\right)}{2^{n}}\sqrt{\pi},\ n\in\mathbb{N}.\tag{8}$$

Доказательство: Равенства (7), (8) являются следствием свойств 1 и 2. Действительно, $\forall n\in N$

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\Gamma((n-1)+1)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\ldots=$$
$$=n(n-1)\cdots1\cdot\Gamma(1)=n!\cdot1=n!;$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{2n-1}{2}\Gamma\left(\left(n-\frac{3}{2}\right)+1\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\cdots=$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{2^{n}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^{n}}\sqrt{\pi}\ \blacksquare$$

Свойство 4. (Формула дополнения)

$$\Gamma\left(p\right)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\ 0<p<1.\tag{9}$$

Доказательство формулы (9) см., например, в кн. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.:Физматлит, 2002 – 512 с. ■

Пример 1. Найти значение выражения $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)$.

Решение: Используя формулы понижения и дополнения, получим:

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(1+\frac{11}{6}\right)=\frac{11}{6}\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{11}{6}\cdot\Gamma\left(1+\frac{5}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{11}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{55}{36}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{55}{36}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/6)}=\frac{55\pi}{18}.$$

Ответ: $\frac{55\pi}{18}$.

Теорема 2. Гамма-функция непрерывна и бесконечно дифференцируема в области $p>0$. Для ее k-ой производной справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx\ , \tag{10}$$

причем интеграл в правой части (10) сходится равномерно на множестве $[p_0;+\infty),\ p_0>0$.

Доказательство: Интеграл в правой части равенства (10) представим в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx=\int_0^{1}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx\ ,k\in N. \tag{11}$$

Рассмотрим интеграл $I_k=\int_0^1 x^{p_0-1}\cdot\ln^k xdx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$I_k=\int_0^1 x^{p_0-1}\cdot\ln^k xdx=\frac{1}{p_0}\int_0^1\ln^k xdx^{p_0}=\left.\frac{x^{p_0}\ln^k x}{p_0}\right|_0^{+\infty}-$$

$$=-\frac{k}{p_0}\int_0^1 x^{p_0}\cdot\ln^{k-1}x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=-\frac{k}{p_0}I_{k-1}.$$

Используя полученное рекуррентное соотношение, вычислим интеграл I_k:

$$I_k=-\frac{k}{p_0}I_{k-1}=-\frac{k}{p_0}\left(-\frac{k-1}{p_0}\right)I_{k-2}=\ldots=\frac{(-1)^k k!}{p_0^k}I_0=$$

$$=\frac{(-1)^k k!}{p_0^k}\cdot\int_0^1 x^{p_0-1}dx=\frac{(-1)^k k!}{p_0^{k+1}}.$$

Так как

$$\left|x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}\right|\le\left|x^{p_0-1}\cdot\ln^k x\right|=x^{p_0-1}(-1)^k\ln^k x$$

$$\forall x\in(0;1),\ \forall p\ge p_0,$$

и интеграл I_k сходится, то согласно признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}dx$ сходится абсолютно и равномерно на промежутке $[p_0;+\infty),\ p_0>0$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-1}\cdot e^{-x/2}=0$, то $\exists M>0:\ 0<x^{p-1}\cdot e^{-x/2}\le M$ $\forall x\ge 1$, $\forall p>0$. Следовательно,

$$0<x^{p-1}\cdot\ln^k x\cdot e^{-x}\le M\cdot\ln^k x\cdot e^{-x/2}<M\cdot x^k\cdot e^{-x/2}.$$

А так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}M\cdot x^k\cdot e^{-x/2}dx$ сходится, то второй интеграл в правой части равенства (11) сходится абсолютно и равномерно на промежутке $p>0$.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что несобственный интеграл (10) сходится равномерно на промежутке $[p_0;+\infty),\ p_0>0$ для любых целых неотрицательных значений k. Поэтому выполнены условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Применяя правило Лейбница, получим:

$$\Gamma'(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln x\cdot e^{-x}dx,$$

$$\Gamma''(p)=\int\limits_0^{+\infty}x^{p-1}\cdot\ln^2 x\cdot e^{-x}dx,\ldots\blacksquare \qquad (12)$$

Так как $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$ и функция $\Gamma(p)$ дифференцируема при $p>0$, то согласно теореме Ролля на интервале $(1;2)$ существует точка p_* такая, что $\Gamma'(p_*)=0$. А так как в силу (12) $\Gamma''(p_*)>0$, то p_* является точкой локального минимума. Приближенные значения для p_* и $\Gamma(p_*)$ имеют вид: $p_*=1{,}4616,\ \Gamma(p_*)=0{,}8856$.

Используя формулу понижения (6), можно формально определить функцию $\Gamma(p)$ для нецелых отрицательных значений p. Например,

$$\Gamma(-1/2)=\frac{\Gamma(1/2)}{-1/2}=-2\sqrt{\pi},\ \Gamma(-3/2)=\frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\,.$$

График функции $\Gamma(p)$ представлен на рис. 1.

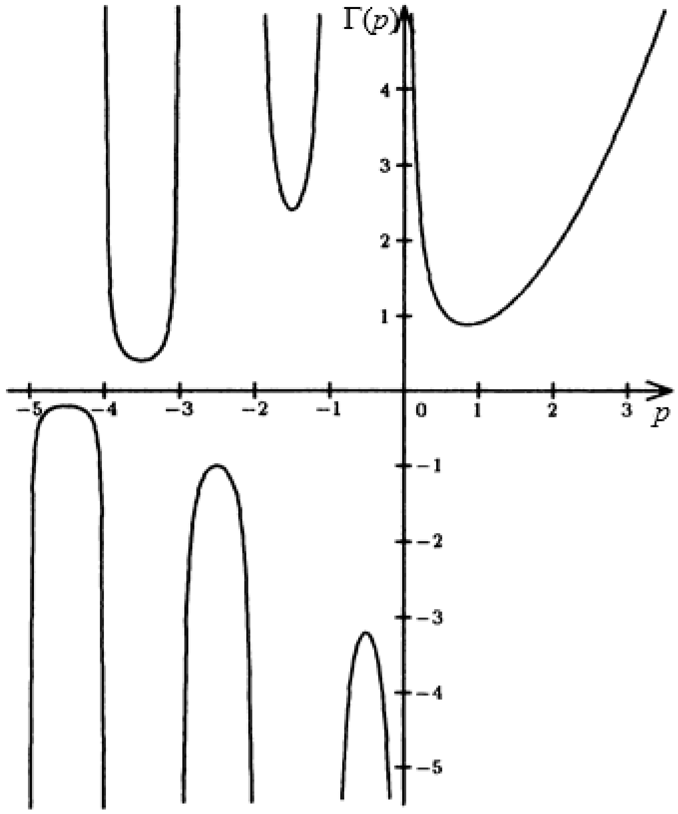

Рисунок 1

Свойства бета-функции

Свойство 1. (Свойство симметрии)

$$B(p,q)=B(q,p),\ \ p>0,\ q>0. \tag{13}$$

Доказательство:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\begin{bmatrix} t=1-x \\ dx=-dt \end{bmatrix}=$$

$$=-\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=B(q,p).\ \blacksquare$$

Свойство 2. (Формулы понижения)

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ \ (p>0,\ q>1), \tag{14}$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q),\ \ (p>1,\ q>0). \qquad (15)$$

Доказательство: При $q>1, p>0$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1 (1-x)^{q-1}d\left(\frac{x^p}{p}\right)=$$

$$=\left.\frac{(1-x)^{q-1}x^p}{p}\right|_0^1+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(q-1)}{p}\int_0^1\left(x^p-x^{p-1}+x^{p-1}\right)(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(x-1)(1-x)^{q-2}dx+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=\frac{(1-q)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\frac{(q-1)}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx=$$

$$=-\frac{q-1}{p}B(p,q)+\frac{q-1}{p}B(p,q-1).$$

Следовательно,

$$B(p,q)\left(1+\frac{q-1}{p}\right)=\frac{q-1}{p}B(p,q-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),\ \ p>0,\ q>1$$

Аналогично доказывается вторая из формул понижения (15) ■