Лекция №14.
Первые интегралы.

Теорема (о неявной функции)

Пусть дана система уравнений

$$\varphi_i(y_1,\ldots,y_n,z)=0,\quad i=1,\ldots,n\quad z\in\mathbb{R}^m\quad m\geqslant 1. \tag{1}$$

Функции $\varphi_i\in C^1$ в окрестности точки $\mathrm{M}(y_1^0,\ldots,y_n^0,z^0)$, в точке M уравнения (1) выполнены и Якобиан $|\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}|_{i,j=1,\ldots,n}\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки z^0 систему (1) можно разрешить относительно $y_1,\ldots,y_n$, а именно существуют такие непрерывные функции $y_1(z),\ldots,y_n(z)$, что для $i=1,\ldots,n$ в окрестности точки z^0

$$\varphi_i(y_1(z),\ldots,y_n(z),z)\equiv 0,\quad y_i(z^0)=y_i^0.$$

Функции $y_1,\ldots,y_n$ – определяются однозначно и являются функциями класса C^1.

Определение

Первым интегралом системы

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\quad (t,\boldsymbol{x})\in D_0,\boldsymbol{f}\in C^1 \tag{2}$$

в области $D\subset D_0$ называется функция $v(t,x_1,\ldots,x_n)\in C^1$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой проходящей в D интегральной кривой системы (2).

Знание одного первого интеграла позволяет уменьшить число неизвестных функций в исследуемой системе. Знание n независимых первых интегралов позволяет получить решение системы не прибегая к интегрированию.
В прикладных задачах первые интегралы часто имеют физический смысл законов сохранения.

Геометрический смысл первого интеграла.

Пусть $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$. Тогда равенство $v(t, x_1, \ldots, x_n) = \text{c}$, c – одно из значений, которые может принимать функция v в области D, определяет в пространстве $(t, \boldsymbol{x})$ n-мерную поверхность. И эта поверхность целиком состоит из интегральных кривых системы (2).
Если $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$, то по теореме о неявной функции можно выразить x_i через оставшиеся переменные и подставить это выражение во все уравнения системы (2). Тем самым получим систему с меньшим числом неизвестных функций (быть может в меньшей области).
Для любой функции $\varphi(y_1, \ldots, y_k) \in C^1$ и первых интегралов $v_1, \ldots, v_k$ сложная функция $\varphi(v_1, \ldots, v_k)$ –тоже первый интеграл. Таким образом первых интегралов бесконечно много.

Определение

Первые интегралы $v_1, \ldots, v_k$ называются функционально независимыми, если ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{i=1\ldots k, j=1\ldots n}$ равен k.

Из линейной зависимости функции следует их функциональная зависимость. Обратное неверно, например, функции $v_1 = (t - x_1)$, $v_2 = (t - x_1)^2$ функционально зависимы, но линейно независимы в любой области.

Теорема

В окрестности любой точки $M(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *области* D_0 *существует* n *независимых первых интегралов системы* (2).

Доказательство.

Возьмем произвольную точку $(t_0, c_1, \ldots, c_n) \in D_0$. По теореме Коши существует единственное решение системы (2), проходящее через эту точку. Обозначим его

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, \ldots, c_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

По теореме о непрерывной зависимости решений от начальных условий функции φ_i – функции класса C^1.
Так как

$$\varphi_i(t, c_1, \ldots, c_n) = c_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то при $t = t_0$ матрица $\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ – единичная и ее определитель (якобиан функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) отличен от 0.

По теореме о неявных функциях можно разрешить систему (3) относительно $c_1,\dots,c_n$ в некоторой окрестности точки M

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1,\dots,n. \tag{4}$$

Функции v_i – независимые первые интегралы системы (2).
Действительно, по теореме о неявных функциях $v_i \in C^1$. Числа $c_1,\dots,c_n$ – одни и те же во всех точках интегральной кривой, проходящей через точку $(t_0,c_1,\dots,c_n)$. Значит v_i постоянны вдоль интегральных кривых и являются первыми интегралами. При любом фиксированном t вблизи t_0 системы функций (3) и (4) взаимно обратны поэтому произведение их якобианов

$$\Delta_1 = \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}\right| \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \left|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|$$

равно единицы.
Значит $\Delta_2 \neq 0$, ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)$ равен n, и первые интегралы $v_1,\dots,v_n$ независимы. $\square$

Теорема

Пусть $v_1, \dots, v_n$ – независимые первые интегралы системы (2) в области D. Пусть точка $M(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ и $v_i(M) = \mathrm{c}_i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда равенства

$$v_i(t, x_1, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{5}$$

определяют решение системы (2) с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^0$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство.

Так как $v_1, \dots, v_n$ – независимые первые интегралы $\det(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$ в точке M. По теореме о неявных функциях систему (5) можно разрешить относительно $x_1, \dots, x_n$ в некоторой окрестности точки M

$$x_j = \varphi_j(t, c_1, \dots, c_n), \quad j = 1, \dots, n \tag{6}$$

Эти функции удовлетворяют системе (5), так как получены из нее. Решение системы (2) удовлетворяет (5) при $t = t_0$ в силу выбора $c_1, \dots, c_n$, оно удовлетворяет (5) и при других t, так как первые интегралы постоянны вдоль решения. $\square$

Теорема

Пусть $v_1, \dots, v_n$ – независимые первые интегралы системы (2) в окрестности U точки $M^*(t_0, x_1^*, \dots, x_n^*)$ и пусть w – первый интеграл системы (2). Тогда найдется функция $F \in C^1$ такая, что $w = F(v_1, \dots, v_n)$ в некоторой окрестности точки M^*.

Доказательство.

Пусть точка $M(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$ и $c_i = v_i(M)$, $i = 1, \dots, n$. Тогда равенства

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

позволяют по теореме о неявной функции получить решение

$$x_j = \varphi_j(t, c_1, \dots, c_n),$$

проходящее через точку М. Такие решения заполняют некоторую окрестность $U_1 \subset U$ точки M^*. Вдоль каждого решения имеем $w = \mathrm{const}$, то есть

$$w(t, \varphi_1(t, c_1, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(t, c_1, \dots, c_n)) \equiv$$
$$\equiv w(t_0, \varphi_1(t_0, c_1, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(t_0, c_1, \dots, c_n)).$$

Обозначим правую часть через $F(c_1, \dots, c_n)$, $F \in C^1$. Переходя от $c_1, \dots, c_n$ к $x_1, \dots, x_n$ и к $v_1, \dots, v_n$, получаем

$$w(t, x_1, \dots, x_n) \equiv F(v_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, v_n(t, x_1, \dots, x_n)).$$

□

Первые интегралы автономной системы.

Теорема

В окрестности любой неособой точки система

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f} \in C^1 \tag{7}$$

имеет $n-1$ *независимых первых интегралов, не содержащих* t.