

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.

ПРОХОРОВ М. Н.

## Лекция 1.

Основные понятия:

**ПЕРЕМЕННАЯ** (величина) – величина, которая при изучении некоторого явления может принимать больше одного значения ( в отличии от КОНСТАНТ).

**МНОЖЕСТВО** – совокупность каких либо объектов произвольной природы.

Все множества, которые мы будем изучать, будут точно определены.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами  $A, B, C, \dots Y, Z$ .

Элементы множества будем обозначать маленькими буквами  $a, b, c, \dots y, z$ .

**Символика и операции над множествами:**  $a \in A, A \subset B, X \cup Y, C \cap M, \emptyset \subset A$  и т.д.

**Кванторы:**  $\forall, \exists, \nexists, \exists!$ , и т. д.

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ) ЧИСЛА.

Натуральные числа  $N=\{1,2,3,\dots\}$ . Целые числа  $Z=\{\dots,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$ .

Рациональные числа  $Q=\{p/q, \text{ где } p \text{ и } q \text{ – целые числа, } q > 0\}$ .

**Теорема.** Всякое рациональное число можно представить в виде периодической десятичной дроби.

**Доказательство.**

**Примеры.** а)  $1/2 = 0,5(0)$ ; б)  $1/3 = 0,(3)$ ; в)  $2/7 = 0,(285714)$ .

**2-е определение рациональных чисел.** Назовём рациональным числом всякую периодическую десятичную дробь.

**Теорема.** 1-е и 2-е определение рациональных чисел эквивалентны.

**Доказательство.**

После выбора начала отсчёта и единичного отрезка рациональные числа можно изображать на числовой оси точками. Однако не всякая точка на такой оси соответствует некоторому рациональному числу. Известна

**Теорема.** Длина диагонали квадрата со стороной равной 1 не равна никакому рациональному числу.

**Доказательство 1(алгебраическое).**

**Доказательство 2(геометрическое).**

Тем не менее мы можем любой точке на числовой оси сопоставить некоторую бесконечную десятичную дробь, причём разным точкам будут соответствовать различные дроби. Это является мотивацией для следующего

**Определение.** Назовём вещественным числом всякую бесконечную десятичную дробь.

Это определение позволяет отождествить точки на прямой с вещественными числами, причём рациональные точки соответствуют периодическим дробям.

**Определение.** Назовём иррациональным числом всякую непериодическую десятичную дробь.

**Пример.** Дробь  $0,1010010001000010000010.....$  непериодична.

**Арифметические действия** с вещественными числами сводятся к таковым для отрезков и подробно рассматривались в курсе математики для средней школы. На практике такие действия выполняются приближённо.

### **Стабилизирующиеся последовательности.**

Пусть  $\{x_n\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  последовательность вещественных чисел.

Последовательность  $\{x_n\}$  называется неубывающей (невозрастающей), если  $x_n \leq x_{n+1}$  ( $x_n \geq x_{n+1}$ ) для любого  $n$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  называется ограниченной сверху (снизу) числом  $M$ , если  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq M$ ) для любого  $n$ . Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Рассмотрим последовательность  $\{a_n\}$  неотрицательных десятичных дробей

$$a_1 = a_{10}, a_{11}a_{12}a_{13}.....$$

$$a_2 = a_{20}, a_{21}a_{22}a_{23}..... \quad (*)$$

$$a_3 = a_{30}, a_{31}a_{32}a_{33}.....$$

.....

Будем говорить, что последовательность  $\{a_n\}$  стабилизируется к числу

$$b = b_0, b_1b_2b_3....., \text{ если } \forall k \in \mathbb{N} \exists m_k \in \mathbb{N}: \forall n > m_k \Rightarrow a_{nk} = b_k.$$

**Теорема.** Если неубывающая последовательность десятичных дробей (\*) ограничена сверху числом  $M$ , то она стабилизируется к некоторому вещественному числу  $b$ .

**Доказательство.**

### Основные свойства действительных чисел.

1. Свойства порядка.
2. Свойства арифметических действий.
3. Архимедово свойство  $\forall c \in \mathbb{R}_+ \exists n \in \mathbb{N}: n > c$ .
4. Неравенства  $|x+y| \leq |x|+|y|$  ,  $|x-y| \geq ||x|-|y||$ .
5. Любая неубывающая ограниченная последовательность  $\{a_n\}$  имеет предел. (Это свойство доказывается чуть позже и, фактически, следует из предыдущей теоремы).

**Определение отрезка, интервала, окрестности точки.**

**Счётность множества рациональных чисел. Несчётность множества вещественных чисел.**

Два множества  $A$  и  $B$  называются эквивалентными (равномощными) , если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Записывают это  $A \sim B$ .

Множество  $A$  называется счётным, если  $A$  равномощно множеству натуральных чисел,  $A \sim \mathbb{N}$ .

**Теорема.** Множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел счётно.

**Доказательство.**

**Теорема.** Множество  $\mathbb{R}$  вещественных чисел несчётно.

**Доказательство.**

## Лекция 2.

*Определение последовательности, способы задания последовательности.*

В известном рассуждении парадокса Зенона «доказывается» невозможность для Ахиллеса догнать черепаху, движущуюся значительно медленнее него.

Если предположить, что скорость Ахиллеса равна 1, скорость черепахи  $q$ , а расстояние между ними равно 1, то легко получить хорошо известную формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, вычислив расстояние, которое должен пройти Ахиллес, чтобы догнать черепаху.

$$1+q+q^2+q^3+\dots+q^n+\dots=\frac{1}{1-q}.$$

Если обозначить  $a_n=1+q+q^2+\dots+q^n$ , то мы получим последовательность  $\{a_n\}$ , имеющую «пределом» число  $\frac{1}{1-q}$ . (Обсуждение)

**Определение.** Число  $A$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  при  $n$  стремящимся к бесконечности, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует натуральное число  $n$ , зависящее от  $\varepsilon$ , такое, что для любого натурального числа  $m$ , большего числа  $n$ , выполняется неравенство  $|x_m - A| < \varepsilon$ .

Это же определение в кванторах:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m \in \mathbb{N}, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - A| < \varepsilon.$$

Записывается это так:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

**Замечание 1.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = A$ .

**Замечание 2.** При вычислении предела последовательности возникают 2 проблемы- вычисление **значения**  $A$  предела и доказательство того, что число  $A$  **является** пределом данной последовательности.

**Примеры.** а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , если  $|q| < 1$ ; в) всякое действительное число является пределом последовательности его *последовательных приближений с точностью до  $n$ -го знака после запятой*.

Следовательно всякое вещественное число есть предел последовательности рациональных чисел. Поэтому говорят, что множество  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел всюду плотно в множестве  $\mathbb{R}$  вещественных чисел.

Пусть  $U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbf{R}: |x - A| < \varepsilon\}$  –  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ . Тогда определение предела выглядит так:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall_{U_\varepsilon(A)} \exists_{n_\varepsilon \in \mathbf{N}}: \forall_{m > n_\varepsilon} \Rightarrow a_m \in U_\varepsilon(A)$ .

**Определение.** Назовём окрестностью  $U(A)$  точки  $A$  произвольное подмножество вещественных чисел, содержащее множество  $U_\varepsilon(A)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

Очевидно, что если  $U(A)$  – произвольная окрестность точки  $A$ , то определение предела эквивалентно следующему:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall_{U(A)} \exists_{n_{U(A)} \in \mathbf{N}}: \forall_{m > n_{U(A)}} \Rightarrow a_m \in U(A). \quad (**)$$

Последнее определение также эквивалентно следующему: число  $A$  есть предел последовательности  $\{a_n\}$ , если вне любой окрестности точки  $A$  содержится конечное число членов последовательности.

**Пример.** Последовательность  $a_n = (-1)^n$  не имеет предела.

**Теорема.** Если существует предел последовательности, то он единственный.

**Доказательство.**

Будем говорить, что последовательность **сходится**, если она имеет предел.

**Теорема.** Если последовательность сходится, то она ограничена.

**Доказательство.**

**Теорема.** Если последовательность  $\{a_n\}$  сходится к отличному от нуля пределу  $A$ , то существует такое  $N \in \mathbf{N}$ , что  $|a_n| > \frac{A}{2}$ , при  $n > N$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , причём  $a_n > b_n$  для всех  $n \in \mathbf{N}$ , то  $A \geq B$ .

**Доказательство.**

**Следствие.** Если  $a_n \in (c, d)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [c, d]$ .

**Теорема (о двух милиционерах).** Если переменные  $a_n \leq b_n$  сходятся к одному пределу и  $a_n \leq c_n \leq b_n$ , то и  $c_n$  сходится к тому же пределу.

### Доказательство.

**Задача.** Доказать, что если  $\Delta_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$ .

**Теорема.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , где  $A, B \in \mathbf{R}$ , тогда

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$ .

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

### Доказательство.

### Примеры.

### Определение бесконечно малых и бесконечно больших величин.

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если  $\forall R > 0 \exists n_R \in \mathbf{N}: \forall m \in \mathbf{N}, m > n_R \Rightarrow |x_m| > R$ . В этом случае пишем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ .

Если последнее неравенство  $x_m > R$ , то пишем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Если последнее неравенство  $x_m < -R$ , то пишем  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

**Задача.** Если  $\{x_n\}$  бесконечно большая и  $x_n \neq 0$ , то  $\{\frac{1}{x_n}\}$  – бесконечно малая.

### Примеры.

**Определение.** Последовательность называется монотонной, если она или неубывает, или невозрастает, или строго убывает, или строго возрастает.

**Теорема.** Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел.

### Доказательство.

**Теорема.** Последовательность  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  строго возрастает и ограничена.

**Доказательство.**

**Определение.** Числом « $e$ » называется предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .

**Примеры.**

**Лекция 3.**

**Теорема ( принцип вложенных отрезков).** Пусть  $\Delta_n = [a_n, b_n]$  – последовательность вложенных отрезков,  $\Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ .

Тогда существует и единственная точка  $c \in \mathbf{R}$ , принадлежащая всем отрезкам  $\Delta_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Доказательство.**

**Задача.** Будет ли верна теорема, если отрезки заменить интервалами. Какое свойство отрезка здесь используется?

**Определение.** Пусть  $X$  – ограниченное сверху (снизу) множество. Точной верхней (нижней) гранью множества  $X$  называется такое вещественное число  $T$ , что :

а) любой элемент  $x \in X$  не больше ( не меньше) чем  $T$ ;

б)  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X: T - \varepsilon < x_\varepsilon \leq T$  (  $T \leq x_\varepsilon < T + \varepsilon$  ).

Будем обозначать это  $T = \sup X$  (  $T = \inf X$  ).

**Примеры.**

**Теорема.** Всякое ограниченное сверху ( снизу) множество вещественных чисел имеет точную верхнюю ( нижнюю ) грань.

**Доказательство.**

**Задача.** Пусть  $X$  и  $Y$  ограниченные сверху множества вещественных чисел. Доказать, что  $\sup (X+Y) = \sup X + \sup Y$ .

Если задана последовательность  $\{x_n\}_{n=1,2,3,\dots}$  и бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ , то можно



определить новую последовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,3,\dots}$ , которая называется подпоследовательностью последовательности  $\{x_n\}$ .

**Теорема (Больцано – Вейерштрасс).** Из всякой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному числу.

**Доказательство.**

**Задача.** Доказать, что из всякой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому конечному числу или к бесконечности.

Пусть  $\{x_{n_k}\}$  некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности  $\{x_n\}$ . Число  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  называется **предельной точкой** последовательности.

**Примеры.**

**Задача.** Пусть  $\{a_n\}$  произвольная последовательность. Построить последовательность  $\{x_n\}$ , множество предельных точек которой совпадает с множеством значений последовательности  $\{a_n\}$ .

**Определение.** Пусть множество  $A \subset \mathbf{R}$  – множество всех предельных точек последовательности  $\{x_n\}$ . Верхним (нижним) пределом последовательности  $\{x_n\}$  называется число  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup A$  или  $+\infty$ , если  $\sup A$  не существует ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A$  или  $-\infty$ , если  $\inf A$  не существует).

**Задача.** Доказать, что верхний (нижний) предел является предельной точкой последовательности.

**Теорема.** Существует предел последовательности  $\{x_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}: \forall k, m \in \mathbf{N}, k > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_k| < \varepsilon.$$

**Теорема (критерий Коши).** Последовательность  $\{x_n\}$  является фундаментальной если и только если существует предел  $a \in \mathbf{R}$  последовательности  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Доказательство.**

**Замечание.** Доказанные нами свойства вещественных чисел:

- а) существования предела у фундаментальной последовательности;
- б) существование точной верхней грани у ограниченного множества;
- в) принцип вложенных отрезков;
- г) существование предела у монотонной ограниченной последовательности,

на самом деле эквивалентны. Поскольку мы уже доказали цепочку  $г) \Rightarrow в) \Rightarrow б) \Rightarrow а)$  то для доказательства такой эквивалентности достаточно решить следующую задачу:

**Задача.** Доказать, что из а) следует г).

Числовое множество, обладающее кроме всех стандартных свойств чисел свойствами а)-г) называется **полным**. Множество рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  не является полным, а множество  $\mathbf{R}$  полное. Само построение вещественных чисел можно определить как «**пополнение**» множества рациональных чисел всеми «пределами» фундаментальных последовательностей.

Оказывается, такое пополнение множества  $\mathbf{Q}$  не единственно. Если для фиксированного простого числа  $p \in \mathbf{N}$  определить « $p$ -адический» модуль произвольного рационального числа  $\frac{q}{r} \in \mathbf{N}$  формулой  $|\frac{q}{r}|_p = p^{-k}$ , где число  $k$  определяется из единственного представления числа  $\frac{q}{r}$  в виде  $\frac{q}{r} = p^k \frac{s}{t}$ , где  $s$  и  $t$  целые числа, взаимно простые с числом  $p$ , то в результате пополнения рациональных чисел с так определённым « $p$ -адическим» расстоянием получаются  $p$ -адические числа  $\mathbf{Q}_p$ , отличные от вещественных чисел и все различные для различных простых  $p$ .

#### Лекция 4.

**Повторение школьного курса.** Определение числовой функции, область определения и множество значений числовой функции, арифметические операции над числовыми функциями. Задание функций формулами. Суперпозиция функций и определение сложной функции. График числовой функции. Возрастающие и убывающие функции. Чётные и нечётные функции. Неявное задание функции. Однозначные и многозначные функции. Параметрическое задание функций. Функции нескольких вещественных переменных. Примеры.

**Определение предела ( по Коши).** Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности конечной точки  $x_0$  за исключением, может быть, самой точки. Число  $a$  называется **пределом функции**  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_\varepsilon > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех  $x$ , для которых, выполняется неравенство  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ . Или кратко:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon}_{\text{по Коши}}.$$

Предел функции обозначается так:  $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Или  $f(x) \rightarrow a$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Односторонние пределы в точке. Левый предел:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Правый предел:

$$a = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Левый и правый пределы обозначают  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ,  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ .

**Теорема.**  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0): f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ .

**Доказательство.**

Конечные пределы в бесконечно удалённых точках определяются так:

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0: \forall x, |x| > R_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0: \forall x > R_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0: \forall x, x < -R_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначения, соответственно  $f(\infty) = A, f(+\infty) = A, f(-\infty) = A$ .

Определим проколотую  $\delta$  –окрестность конечной точки ( $\delta > 0$ ), как

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, 0 < |x - a| < \delta\}, \dot{U}(a + 0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, 0 < x - a < \delta\},$$

$\dot{U}(a - 0, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, 0 < a - x < \delta\}$ , а окрестность бесконечности (которая всегда является проколотой), как

$$\dot{U}(\infty, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, \frac{1}{\delta} < |x|\}, \dot{U}(+\infty, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, \frac{1}{\delta} < x\}, \dot{U}(-\infty, \delta) = \{x \in \mathbf{R}, x < -\frac{1}{\delta}\}.$$

Тогда определение предела функции по Коши выглядит так:

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x \in \dot{U}(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

**Задача.** Написать определение следующих пределов  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

**Примеры.**

**Определение предела функции по Гейне.** Пусть  $f(x)$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Тогда

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \underset{\text{по Гейне}}{\Leftrightarrow} \forall \{x_n\}, x_n \in \dot{U}(a), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

**Теорема.** Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , где  $A$  –конечное число, то  $\exists \dot{U}(a), M > 0: \forall x \in \dot{U}(a) \Rightarrow |f(x)| < M$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , где  $A \neq 0$ , то  $\exists \dot{U}(a): \forall x \in \dot{U}(a) \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$ .  
Если при этом  $A > 0$ , то  $f(x) > \frac{A}{2}$ , если  $A < 0$ , то  $f(x) < \frac{A}{2}$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  и  $f(x) \leq g(x)$  в некоторой окрестности  $\dot{U}(a)$ , то  $A \leq B$ .

**Доказательство.**

**Теорема (о двух милиционерах).** Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , причём  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  в некоторой окрестности  $\dot{U}(a)$ . Тогда  $\exists \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ .

**Доказательство.**

**Теорема (критерий Коши существования предела).**

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \dot{U}(a, \delta_\varepsilon): \forall x', x'' \in \dot{U}(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

при условии, что  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Пусть  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $B = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  конечные пределы. Тогда

а)  $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**Теорема.** Пусть функции  $f(x), g(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(a)$  точки  $A$ , тогда если

а)  $|f(x)| > M > 0$ , а  $\dot{U}(a)$ , причём  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$  в  $\dot{U}(a)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ ;

б)  $|f(x)| < M$  в  $\dot{U}(a)$ , а  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

**Докаательство.**

**Следствие.** а) если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $g(x) \neq 0$  в  $\dot{U}(a)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \infty$ ;

б) если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = 0$ .

**Примеры.**

## Лекция 5, 6.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности  $U(x_0)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Если определить приращение функции, соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$  как  $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ , то данное определение эквивалентно равенству  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$ .

На языке " $\varepsilon - \delta$ ":  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

**Примеры.** Функции  $y = C, x, \sin x, \ln x$  – непрерывны.

Для непрерывных функций свойство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$  показывает,

что знаки предела и функции перестановочны или «можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции».

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывные в точке функции  $x_0$  функции. Тогда  $\alpha f(x) + \beta g(x), f(x) g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$  при  $g(x_0) \neq 0$  – непрерывны.

**Доказательство.**

**Теорема.** Пусть  $g(x)$  непрерывна в точке  $x_0, g(x_0) = a$ , функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $a$ , тогда сложная функция  $\Phi(x) = f(g(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Теорема.** а) Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , то она ограничена в некоторой окрестности  $U(a)$ ;

б) Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) \neq 0$ , то существует окрестность  $U(a)$  точки  $a$ , в которой  $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$ , если  $f(a) > 0$  и  $f(x) < \frac{f(a)}{2} < 0$ , если  $f(a) < 0$ , для любого  $x \in U(a)$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  слева (справа), если  $f(a - 0) = f(a)$ . ( $f(a + 0) = f(a)$ ).

Следовательно, функция непрерывна в точке, если и только если она непрерывна в ней и слева и справа:  $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$ .

**Определение.** Если функция  $f(x)$  имеет конечный и правый и левый пределы в точке  $a$  и эти пределы не совпадают, то точка  $a$  называется точкой разрыва 1-го рода. В этих случаях функция может быть не определена в точке  $a$ , однако терминология сохраняется.

Если у функции не существует правого или не существует левого предела в точке  $a$  или не существует и правого и левого предела или же хотя бы один из них бесконечен, то говорят, что  $a$  -точка разрыва 2-го рода.

**Примеры и рисунки.**

**Задача.** Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции на отрезке не более, чем счётно.

**Функции, непрерывные на отрезке.**

**Определение.** Функция называется непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна во всех внутренних точках отрезка, непрерывна справа в точке  $a$  и непрерывна слева в точке  $b$ .

**Теорема.** Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена.

**Доказательство.**

**Теорема (Вейерштрасс).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то существует точка  $c \in [a, b]$ , такая, что  $f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  и, существует точка  $d \in [a, b]$ , такая, что  $f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ,  $A = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ ,  $B = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ , то для любого значения  $C \in [A, B]$  существует  $c \in [a, b]$ , такое, что  $f(c) = C$ .

**Доказательство.**



**Теорема.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , строго возрастает на нём и  $f(a) = A$ ,  $f(b) = B$ . Тогда  $E_f = [A, B]$  и существует функция  $f^{-1}(y)$  обратная для  $f(x)$ , непрерывная и строго возрастающая на  $[A, B]$ . ( $E_f$  - множество значений  $f(x)$ ).

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **равномерно непрерывной** на множестве  $M \subset \mathbf{R}$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall x', x'' \in M, |x' - x''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .

**Задача.** Функция  $y = \frac{1}{x}$  не является равномерно непрерывной на полуинтервале  $(0, 1]$ .

**Теорема (Кантор).** Функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , равномерно непрерывна на нём.

**Доказательство.**

**Определение и свойства элементарных функций**  $x^n, a^x, \log_a x, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x$ .

**Замечательные пределы.**

**Теорема.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Доказательство.**

**Следствие.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

**Теорема.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

**Доказательство.**

**Следствия.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ .

**Примеры.**

**Эквивалентность функций. Порядок переменной.**

**Определение.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(a)$  точки  $a$ , и  $g(x) \neq 0$  в  $\dot{U}(a)$ . Будем говорить, что  $f(x)$  есть «о-малое» от  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$  и записывать как  $f(x) = o(g(x))$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \quad (*)$$

(Здесь  $a$  – конечное число или  $+\infty$  или  $-\infty$  или  $\infty$ ).

**Примеры.** а)  $x^2 = o(x)$ ,  $1 - \cos x = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $x = o(x^3)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

б) равенство  $\alpha(x) = o(1)$  при  $x \rightarrow a$  определяет бесконечно малую функцию  $\alpha(x)$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{1} = 0$ .

**Замечание.** Равенство  $(*)$  можно записать в виде  $f(x) = \alpha(x)g(x)$ , где  $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = o(1)$  – бесконечно малая при  $x \rightarrow a$ .

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $(*)$  являются бесконечно малыми, то говорят, что  $f(x)$  – бесконечно малая более высокого порядка чем  $g(x)$ , а если  $f(x)$  и  $g(x)$  – бесконечно большие функции, то говорят, что  $f(x)$  – бесконечно большая более низкого порядка, чем  $g(x)$  или, что  $g(x)$  бесконечно большая более высокого порядка, чем  $f(x)$ .

**Определение.** Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются «эквивалентными» при  $x \rightarrow a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ записываем как } \alpha(x) \sim \beta(x) \quad (**).$$

**Теорема.** Отношение  $(**)$  есть отношение эквивалентности, то есть симметрично, рефлексивно и транзитивно.

**Доказательство.**

**Теорема.**  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow a$  если и только если  $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$  при  $x \rightarrow a$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  при  $x \rightarrow a$  то выполняются равенства:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow a} \gamma(x)\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} \gamma(x)\beta(x) \text{ и}$$

б)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}$ , понимаемые так, что если пределы справа для некоторой функции  $\gamma(x)$  существуют, то существуют и пределы слева и они равны.

**Примеры.** а)  $\sin x \sim \tan x \sim x$ ; б)  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ .

**Определение.** Будем говорить, что  $\alpha(x)$  имеет на множестве  $Y$  порядок  $\beta(x)$ , и записывать это, как  $\alpha(x) = O(\beta(x))$  на  $Y$ , если  $|\alpha(x)| \leq C|\beta(x)|$ , для всех  $x \in Y$ , где  $C$  – не зависящая от  $x$  константа.

**Пример.** Функция  $f(x)$  ограничена на  $Y \Leftrightarrow f(x) = O(1)$  на  $Y$ .

## Лекция 7.

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности  $U(x)$  точки  $x \in \mathbf{R}$ .

**Определение.** Производной от функции  $f(x)$  в точке  $x$  называется предел отношения приращения функции в точке  $x$  к приращению аргумента

функции: 
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (*)$$

Также применяются обозначения  $y', \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ .

Значение производной может быть как конечным, так и равным  $\pm\infty$  или  $\infty$ .

Не для всякой функции в данной точке  $x \in \mathbf{R}$  существует производная.

**Определение.** Правой производной в точке  $x$  называется предел:

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Соответственно левой производной – предел

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

**Определение.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  имеет производную на отрезке  $[a, b]$ , если она имеет производную во всех внутренних точках отрезка, правую производную в точке  $a$  и левую производную в точке  $b$ .

**Замечание.** Существование производной в точке  $x$  эквивалентно существованию односторонних производных и равенству  $f'(x+0) = f'(x-0)$ . Будем также говорить в этом случае, что функция дифференцируема в точке  $x$ .

**Пример.**  $f(x) = |x|, x_0 = 0$ .

**Теорема.** Если функция дифференцируема в точке  $x$ , то она непрерывна в  $x$ .

**Доказательство.**

**Физический смысл производной:** мгновенная скорость, линейная плотность, сила тока.

**Геометрический смысл производной** функции  $f(x)$  в точке  $x$  – тангенс угла наклона касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(x, f(x))$ .

**Рисунок.**

**Уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ :**

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

**Примеры.**

**Теорема.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , тогда

$$\text{а) } (Af(x) + Bg(x))' = Af'(x) + Bg'(x);$$

$$\text{б) } (f(x)g(x))' = f'(x)g'(x);$$

$$\text{в) } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Доказательство.**

**Производные элементарных функций.**

**Теорема.**

$$\text{а) } (x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$\text{б) } (\sin x)' = \cos x;$$

$$\text{в) } (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\text{г) } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\text{д) } (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

**Доказательство.**

**Производные сложной и обратной функции.**

**Теорема.** Пусть функция  $y = \varphi(x)$  имеет производную в точке  $x$ , а функция  $z = f(y)$  имеет производную в точке  $y$ , то сложная функция  $F(x) = f(\varphi(x))$  имеет производную в точке  $x$  и  $F'(x) = f'(y) \varphi'(x)$ .

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Теорема.** Пусть функция  $y = \varphi(x)$  имеет производную, отличную от нуля в точке  $x$ , непрерывна и строго возрастает в некоторой окрестности  $U(x)$  точки  $x$ . Тогда обратная к  $\varphi(x)$  функция  $x = \varphi^{-1}(y) = g(y)$  также имеет производную, которая в соответствующей точке  $y$  определяется равенством

$$g'(y) = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

**Доказательство.**

**Теорема** (производные элементарных функций).

а)  $(a^x)' = a^x \ln a;$

б)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

в)  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2};$

г)  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$

д)  $(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)}(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}).$  (логарифмическое дифференцирование);

е)  $sh'x = ch\ x; \ ch'x = sh\ x; \ th'x = \frac{1}{ch^2x}; \ cth'x = \frac{-1}{sh^2x};$

ж)  $Arsh'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$  где  $Arsh\ x$  - функция, обратная к функции  $sh\ x$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  – чётная (нечётная) на  $[a, b]$ , то  $f'(x)$  - нечётная (чётная).

## Лекция 8.

**Определение.** Функция  $x$  называется дифференцируемой в точке  $x_0$ , если существует окрестность  $U(x_0)$ , такая, что  $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ , где  $A$  не зависит от  $\Delta x$ , а зависит только от  $x_0$ .

**Теорема.** Функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$  если и только если существует конечная производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  в точке  $x$  и в этом случае  $A = f'(x)$ .

### Доказательство.

**Замечание.** Принято называть нахождение производной функции – дифференцированием функции.

**Определение.** Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , тогда главная линейная часть  $f'(x)\Delta x$  приращения  $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$  функции называется дифференциалом функции и обозначается  $df(x) = f'(x)\Delta x$ .

**Замечание.** Дифференциал независимой переменной  $x$  не зависит от  $x$ , а только от  $\Delta x$ ,  $dx = \Delta x$ , для функции  $f(x)$  отличной от  $f(x)$ , дифференциал зависит и от  $x$  и от  $\Delta x$ .

**Замечание.**  $dx = \Delta x$ , поэтому дифференциал записывают так  $df(x) = f'(x)dx$ .

**Замечание.** В силу предыдущего замечания для производной функции  $y' = f'(x)$  используются следующие обозначения  $y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ .

### Геометрический смысл дифференциала.

**Теорема.** а)  $d(u \pm v) = du + dv$ ;

$$\text{б) } d(uv) = u'dv + v'du;$$

$$\text{в) } d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u'dv}{v^2}.$$

### Доказательство.

**Приближённое вычисление значения функции:**

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x.$$

## Примеры.

### Производные высшего порядка.

Если производная функции  $f'(x)$  определена в некоторой окрестности  $U(x)$  точки  $x$ , то может существовать производная этой функции  $(f'(x))'$ , которая называется второй производной функции  $f(x)$  и обозначается  $f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'$ . По индукции можно определить  $n$ -тую производную.

**Определение.** Производной  $n$ -того порядка функции  $f(x)$  называется производная  $(n-1)$ -ой производной функции  $f(x)$ :

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

## Примеры.

### Дифференциалы высшего порядка.

Аналогично определению  $n$ -той производной функции определяется  $n$ -тый дифференциал или дифференциал  $n$ -того порядка функции  $d^n f(x)$ .

**Определение.**  $d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$ .

А) Предположим, что  $x$  независимая переменная, т.е. не является сама функцией некоторой другой переменной. Тогда, если рассмотреть  $dx = \Delta x$ , как функцию от  $x$ , то она от  $x$  не зависит и, значит,  $d(dx) = d(\Delta x) = 0$ .

Следовательно

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = df'(x)dx + f'(x)d^2 x = f''(x)dx.$$

Аналогично,  $d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx$ .

Б) Пусть теперь  $x$  зависимая переменная, т.е. является сама функцией некоторой другой переменной  $x = x(t)$ . Тогда формула для первого дифференциала функции  $y = f(x(t))$  имеет вид

$$dy = y'_x dx = y'_x x'_t dt = y'_t dt$$

И не претерпевает изменений. Это свойство называется инвариантностью 1-го дифференциала. Однако уже для 2-го дифференциала имеем:

$$d^2 y = y''_x dx^2 + y'_x d^2 x, \text{ где второе слагаемое ненулевое, } d^2 x \neq 0.$$



### Примеры.

**Теорема.** Пусть функция  $y = y(x)$  задана параметрически:  $\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \left\{ t \in [a, b] \right.$

где функция  $x(t)$  обратима. Тогда  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

### Доказательство.

**Пример.**  $y''_x = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \frac{dt}{dx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$ .

## Лекция 9.

**Определение.** Точка  $a \in \mathbf{R}$  называется точкой локального максимума (минимума) для функции  $f(x)$ , если существует такая окрестность  $U(a)$  точки  $a$ , что  $f(x) \leq f(a)$  ( $f(x) \geq f(a)$ ) для всех  $x \in U(a)$ . Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума функции.

### Примеры.

**Теорема (Ферма).** Если функция  $f(x)$  имеет локальный экстремум и производную в точке  $a$ , то  $f'(a) = 0$ .

### Доказательство.

**Теорема (Ролля).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ , то существует точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $f'(c) = 0$ .

### Доказательство.

**Замечание.** Теорема верна и для интервала  $(a, b)$  если только  $f(a + 0) = f(b - 0)$ .

**Теорема (Коши).** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$ , дифференцируемы на интервале  $(a, b)$  и  $g'(x) \neq 0$  во всех точках интервала  $(a, b)$ , тогда существует точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

### Доказательство.

**Теорема (Лагранж).** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема на интервале  $(a, b)$ , то существует точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ .

### Доказательство.

**Следствие (формула конечных приращений).** В предыдущих обозначениях  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \theta(b - a))$  для некоторого  $\theta \in (0, 1)$  или

$$f(x + \Delta x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x.$$

### Примеры.

**Теорема.** Если функция  $f'(x) \geq 0$  непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , во всех точках интервала  $(a, b)$  имеет  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) > 0$ ), то функция  $f(x)$  неубывает ( строго возрастает ) на  $[a, b]$ .

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Теорема.** Если  $f'(x) \equiv 0$  на  $(a, b)$ , то  $f(x)$  постоянна на  $(a, b)$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется возрастающей в точке  $a$ , если существует проколота окрестность  $U(a)$  точки  $a$ , в которой  $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ .

**Теорема.** Если  $f'(a) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает в точке  $a$ .

**Доказательство.**

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  неубывает на интервале  $(a, b)$ , то  $f'(x) \geq 0$  во всех точках  $(a, b)$ .

**Правило Лопиталя. Раскрытие неопределённостей.**

Будем говорить, что при  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ) отношение  $\frac{f(x)}{g(x)}$  представляет собой неопределённость вида  $\left(\frac{0}{0}\right)$  или  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ .

**Теорема  $\left(\frac{0}{0}\right)$ .** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в некоторой проколота окрестности  $\dot{U}(a)$  точки  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $g(x)$  и  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $\dot{U}(a)$ , тогда если существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , то существует и предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  и эти пределы равны

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Теорема ( $\frac{\infty}{\infty}$ ).** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(a)$  точки  $a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ,  $g(x)$  и  $g'(x) \neq 0$  в окрестности  $\dot{U}(a)$ , тогда если существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , то существует и предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  и эти пределы равны

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Замечание.** В двух предыдущих теоремах, если  $a = \infty$ , то заменой  $x = \frac{1}{t}$  вычисление сводится к случаю  $a = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

**Примеры.**

**Замечание.** а) неопределённость  $0 \cdot \infty$  сводится к случаю или  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$f \cdot g = \frac{f}{(\frac{1}{g})} = \frac{g}{(\frac{1}{f})};$$

б) неопределённость вида  $1^\infty, 0^\infty, \infty^0$  сводится к неопределённости  $0 \cdot \infty$ :

$$f^g = e^{g \ln f}.$$

в) неопределённость  $\infty - \infty$  сводится к случаю  $\frac{0}{0}$ :

$$f - g = \frac{1}{(\frac{1}{f})} - \frac{1}{(\frac{1}{g})} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

**Примеры.**

## Лекция 10.

Пусть  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$  многочлен степени  $n$  с вещественными коэффициентами  $a_i \in \mathbf{R}$ . Если  $x_0$  произвольное число, то можно переразложить многочлен  $P_n(x)$  по степеням  $(x - x_0)^k$  раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые в выражении

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k((x - x_0) + x_0)^k = \sum_{k=0}^n b_k(x - x_0)^k.$$

**Теорема.** Коэффициенты  $b_k$  вычисляются по формулам  $b_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ .

**Доказательство.**

**Замечание.** Под «нулевой» производной функции  $F(x)$  будем понимать саму функцию:  $F^{(0)}(x) = F(x)$ .

**Определение.** Формула  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  называется формулой Тейлора для многочлена  $P_n(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ .

**Пример.** Применим данную формулу к многочлену  $P_n(x) = (x + a)^n$  и получим известную формулу

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} x^k \quad \text{бинома Ньютона.}$$

Пусть теперь  $f(x)$  произвольная функция, имеющая производные в некоторой окрестности  $U(x_0)$ .

**Определение.** Многочлен  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  называется многочленом Тейлора степени  $n$  функции  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ .

Легко проверить, что значения многочлена  $Q_n(x)$  и всех его первых  $n$  производных совпадают в точке  $x_0$ :

$$Q_n(x_0) = f(x_0), Q'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Положим

$$f(x) = Q_n(x) + r_n(x). \quad (*)$$

Формула (\*) называется формулой Тейлора для функции  $f(x)$ . Слагаемое  $r_n(x)$  называется *-тым остаточным членом* формулы Тейлора функции  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ .

**Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  имеет в окрестности  $U_\varepsilon(x_0)$  непрерывную производную  $(n + 1)$ -го порядка, тогда для любого  $x \in U_\varepsilon(x_0)$  существует точка  $c \in (x_0, x)$  такая, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} . \quad (**)$$

**Доказательство.**

Формула (\*\*) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Если  $x_0 = 0$ , то формула (\*\*) называется формулой Маклорена.

**Замечание.** Мы можем считать функцию  $f^{(n+1)}(x)$  ограниченной на некотором отрезке  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  константой  $M$ ,  $|f^{(n+1)}(x)| < M$ . Следовательно,  $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$  и можно записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \quad (**)$$

В таком виде эта формула называется формулой Тейлора для функции  $f(x)$  с остаточным членом в форме Пеано.

**Теорема.** Пусть функция  $f(x)$  представлена в некоторой окрестности  $U(a)$  в виде

$$f(x) = b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n), f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \dots + c_n(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Тогда  $b_k = c_k$ , для всех  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство.**

**Пример.**

Выражение  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  называется рядом. Суммы  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  называются частичными суммами ряда. Если существует конечный

предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то ряд называется сходящимся, иначе – расходящимся.

Для сходящегося ряда, допуская вольность речи, и сумму ряда и сам ряд будем обозначать  $S$  и писать  $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

Пусть функция  $f(x)$  имеет производные любого порядка в окрестности  $U(x_0)$ , тогда можно составить ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = S$ . Множество значений  $x$ , для которых ряд  $S$  сходится будем называть *областью сходимости* ряда  $S$ . Сам ряд в этом случае называется *рядом Тейлора* функции  $f(x)$  а в случае  $x_0 = 0$  - *рядом Маклорена* функции.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  имеет на отрезке  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$  производные любого порядка и остаточный член её формулы Тейлора стремится к нулю

$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ , для всех  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ , то  $f(x)$  раскладывается на этом отрезке в сходящийся к ней ряд Тейлора.

**Доказательство.**

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  имеет на отрезке  $[a, b]$  производные любого порядка, ограниченные все одним и тем же числом  $|f^{(k)}(x)| \leq M, \forall x \in [a, b], k = 0, 1, 2, \dots$ , то ряд Тейлора функции  $f(x)$  сходится на отрезке  $[a, b]$  к функции  $f(x)$ .

**Доказательство.**

## Лекция 11.

### Ряды Тейлора некоторых элементарных функций.

#### Теорема.

- 1)  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , сходится для любого  $x \in \mathbf{R}$ ;
- 2)  $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$ , сходится для любого  $x \in \mathbf{R}$ ;
- 3)  $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ , сходится для любого  $x \in \mathbf{R}$ ;
- 4)  $\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ , сходится для любого  $x \in (-1, 1]$ .
- 5)  $(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k$ , сходится для любого  $x \in (-1, 1)$ .

#### Доказательство.

**Пример.** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x\sqrt[3]{1+x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x(1 + \frac{x}{3} + o(x))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3})x^2 + o(x^2)}{x^2} =$$
$$= -\frac{5}{6}.$$

**Определение.** Точка  $x_0$  называется точкой локального максимума (минимума) функции  $y = f(x)$ , если существует окрестность  $U(x_0)$ , в которой для приращения  $\Delta y$  функции в точке  $x_0$  выполняется неравенство

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0 \ (\geq 0), \ \forall x \in U(x_0).$$

**Определение.** Точка  $x_0$  называется стационарной для  $f(x)$  если функция дифференцируема в точке и  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема.** Пусть  $x_0$  стационарная точка для функции  $f(x)$  и существует вторая непрерывная частная производная  $f''(x)$  в некоторой окрестности  $U(x_0)$ . Тогда, если  $f''(x_0) > 0$ , то  $x_0$  локальный минимум для  $f(x)$ , а если  $f''(x_0) < 0$ , то  $x_0$  локальный максимум для  $f(x)$ .

#### Доказательство.

#### Пример.



**Теорема.** Пусть  $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ , а  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$  и  $f^{(n+1)}(x)$  непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда

а) если  $(n + 1)$  - чётное и  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ , то  $x_0$  - локальный максимум;

б) если  $(n + 1)$  - чётное и  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ , то  $x_0$  - локальный минимум;

в) если  $(n + 1)$  - нечётное, то  $x_0$  не является точкой локального экстремума для функции  $f(x)$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ,  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) \geq 0$ ) на  $[x_0 - \varepsilon, x_0)$ ,  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) на  $(x_0, x_0 + \varepsilon]$ , тогда  $x_0$  точка локального минимума (максимума).

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Пример. Экстремальные значения функции на отрезке.**

**Выпуклость кривой.**

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется выпуклой вверх (вниз) в точке  $x_0$ , если существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что для всех  $x \in U(x_0)$ , график функции  $f(x)$  лежит ниже (выше) касательной к графику  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Определение.** Точка  $x_0$  называется точкой перегиба для функции  $f(x)$ , если существует окрестность  $U_\varepsilon(x_0)$ , такая, что графики  $f(x)$  на промежутках  $(x_0 - \varepsilon, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  лежат по разные стороны от касательной к графику  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

**Теорема.** Пусть  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$  непрерывную производную 2-го порядка и  $f''(x_0) > 0$  ( $< 0$ ). Тогда в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  выпуклая вниз (вверх).

**Доказательство.**

**Следствие.** Если  $x_0$  точка перегиба для функции  $f(x)$  и  $f''(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

**Примеры.**

**Теорема.** Пусть  $f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ , а  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$  и  $f^{(n+1)}(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , тогда

а) если  $n$  чётное число, то  $x_0$  точка перегиба для функции  $f(x)$ ;

б) если  $n$  нечётное число и  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ , то функция выпуклая вниз, а при  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$  функция выпуклая вверх.

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Определение.** Функция называется выпуклой вверх (вниз) на отрезке  $[a, b]$ , если для любых  $c, d \in [a, b]$ , отрезок, соединяющий точки с абсциссами  $c$  и  $d$  на графике функции, лежит ниже (выше) графика  $f(x)$  на отрезке  $[c, d]$ .

**Задача.** Доказать, что функция выпукла вверх (вниз) на отрезке если, и только если она выпуклая вверх (вниз) в каждой точке отрезка.

**Асимптоты.**

**Определение.** а) Прямая  $x = a$  называется вертикальной асимптотой для функции  $f(x)$ , если хотя бы один из пределов  $f(a + 0), f(a - 0)$  равен  $\infty$ ;

б) прямая  $y(x) = kx + b$  называется наклонной асимптотой для функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), если  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - y(x)) = 0$ .

**Примеры.**

**Теорема.** Существует наклонная асимптота для функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ), если и только если существуют конечные пределы  $k =$

$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}$  и  $b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx)$ . В этом случае прямая  $y(x) = kx + b$

является асимптотой.

**Доказательство.**

**Примеры.**

## **Лекция 12.**

**Примеры задач на максимум и минимум.**

**Схема построения графика функции на примерах задач типового расчёта.**

### Лекция 13.

Назовём точками евклидова пространства  $R^n$  множество строк вида  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где все  $x_i \in R, \forall i \in N$ . Каждая такая строка соответствует точке пространства. В случае  $n = 2$  и  $3$  это определение совпадает с определением евклидовой плоскости и 3-х мерного пространства с декартовой системой координат. Определим векторы в  $R^n$  как направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$ , где  $A, B \in R^n$  точки. Назовём координатами вектора  $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$  разность координат точек  $A(x_1, \dots, x_n)$  и  $B(y_1, \dots, y_n)$ . Назовём векторы равными, если равны их координаты. Векторы также будем считать принадлежащими  $R^n$  и различать их с точками. Между векторами естественным образом определяются операции сложения и вычитания и умножения на число по аналогии со случаями  $n = 2$  и  $3$ .

**Определение.** Назовём скалярным произведением векторов  $\vec{a} = (x_1, \dots, x_n)$  и  $\vec{b} = (y_1, \dots, y_n)$  число  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Назовём модулем вектора (или его длиной) число  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

Легко проверить, что для так определённого скалярного произведения все известные свойства скалярного произведения выполняются:

- а)  $|\vec{a}| \geq 0$ , и, если  $|\vec{a}| = 0$ , то  $\vec{a} = \vec{0}$ ;
- б)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;      в)  $(\gamma \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\gamma \vec{b}) = \gamma(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ;
- в)  $\vec{a} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}$ .

**Теорема** (неравенство Коши-Буняковского). Для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$  выполняется неравенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

**Доказательство.**

**Теорема** (неравенство треугольника). Для любых  $\vec{a}, \vec{b} \in R^n$  выполняется неравенство

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

**Доказательство.**

**Определение.** Определим расстояние между точками  $X(x_1, \dots, x_n)$  и  $Y(y_1, \dots, y_n)$  в пространстве  $\mathbf{R}^n$ , как модуль (или длину) вектора  $\overrightarrow{XY}$ :

$$\rho(X, Y) = |X - Y| = |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

(Здесь приведены обозначения, которые мы дальше будем использовать).

**Определение.** Открытым (замкнутым) шаром  $U_r(X)$  в  $\mathbf{R}^n$  радиуса  $r$  называется множество точек  $X(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , чьи координаты удовлетворяют неравенству:

$$|X - X_0|^2 = (x_1 - x_{01})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2 < r^2 \text{ (} \leq r^2 \text{)}.$$

Точка  $X_0(x_{01}, \dots, x_{0n})$  называется центром шара  $U_r(X_0)$ .

**Определение.** Открытым параллелепипедом в  $\mathbf{R}^n$  называется множество точек  $X(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ , чьи координаты удовлетворяют неравенствам:

$|x_1 - a_1| < \varepsilon_1, \dots, |x_n - a_n| < \varepsilon_n$ . Если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = \varepsilon$ , то параллелепипед называется  $n$  – мерным кубом со стороной  $2\varepsilon$ .

Замкнутый параллелепипед определяется аналогично замкнутому шару.

**Определение.** Назовём  $n$  – мерной  $\varepsilon$  – окрестностью точки  $X \in \mathbf{R}^n$  открытый шар  $U_\varepsilon(X)$  с центром в точке  $X \in \mathbf{R}^n$ .

**Определение.** Назовём окрестностью  $U(X)$  точки  $X \in \mathbf{R}^n$  любое множество в  $\mathbf{R}^n$ , содержащее открытый шар  $U_\varepsilon(X) \subset U(X)$  для некоторого  $\varepsilon > 0$ .

**Определение.** Будем говорить, что последовательность  $\{X_k\}_{k=1,2,\dots}$  точек в  $\mathbf{R}^n$  сходится к точке  $X_0 \in \mathbf{R}^n$  и писать  $\lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0$ , если

$$\forall_{U(X_0)} \exists_{n_{U(X_0)} \in \mathbf{N}}: \forall_{m > n_{U(X_0)}} \Rightarrow X_m \in U(X_0).$$

Это определение также эквивалентно следующему:

точка  $X_0$  есть предел последовательности  $\{X_n\}$ , если вне любой окрестности точки  $X_0$  содержится лишь конечное число членов последовательности.

**Теорема.** Если существует предел последовательности, то он единственный.

### Доказательство.

Будем говорить, что последовательность **сходится**, если она имеет конечный предел.

### Примеры.

**Определение.** Последовательность  $\{X_k\}$  называется ограниченной, если  $\exists M \in \mathbf{R}: \forall k \in \mathbf{N} \Rightarrow |X_k| < M$ .

**Теорема.** Если последовательность сходится, то она ограничена.

### Доказательство.

**Теорема (Больцано – Вейерштрасс).** Из всякой ограниченной последовательности  $\{X_k\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{X_{k_l}\}$ , сходящуюся к некоторому конечному числу.

### Доказательство.

**Определение.** Пусть  $\{X_{k_l}\}$  некоторая сходящаяся подпоследовательность последовательности  $\{X_k\}$ . Точка  $A = \lim_{l \rightarrow \infty} X_{k_l}$  называется **предельной точкой** последовательности  $\{X_k\}$ .

**Задача.** Пусть  $\{A_m\}$  произвольная последовательность точек в  $\mathbf{R}^n$ . Построить последовательность  $\{X_k\}$  точек в  $\mathbf{R}^n$ , множество предельных точек которой совпадает с множеством значений последовательности  $\{A_m\}$ .

**Определение.** Последовательность  $\{X_k\}$  называется **последовательностью Коши** или **фундаментальной последовательностью**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}: \forall l, m \in \mathbf{N}, l > n_\varepsilon, m > n_\varepsilon \Rightarrow |X_m - X_l| < \varepsilon.$$

**Теорема (критерий Коши).** Последовательность  $\{X_k\}$  является фундаментальной если и только если существует предел  $A \in \mathbf{R}^n$  последовательности,  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} X_k$ .

### Доказательство.

## Лекция 14.

Множествами в этой лекции будем называть подмножества пространства  $R^n$ .

**Определение.** Множество  $G \subset R^n$  называется открытым, если для любой точки  $X \in G$  существует окрестность  $U(X)$  точки  $X$ , целиком лежащая в  $G$ ,  $U(X) \subset G$ .

**Примеры.** Пространство  $R^n$ , открытый шар  $U_\varepsilon(X)$ , открытый параллелепипед – являются открытыми множествами.

**Определение.** Множество  $G \subset R^n$  называется замкнутым, если его дополнение  $CG$  в  $R^n$ ,  $CG = R^n \setminus G$  – открытое множество.

**Примеры.** Пространство  $R^n$ , замкнутый шар  $U_\varepsilon(X)$ , замкнутый параллелепипед, отрезок и окружность на плоскости, пустое множество  $\emptyset$  – являются замкнутыми множествами.

**Замечание.** Множества  $R^n$  и  $\emptyset$  – являются открытыми и замкнутыми одновременно.

**Определение.** Точка  $X$  называется внутренней точкой множества  $G$ , если существует  $\varepsilon$  - окрестность  $U_\varepsilon(X)$  точки  $X$ , целиком лежащая в  $G$ ,  $U_\varepsilon(X) \subset G$ .

Множество внутренних точек множества  $G$  обозначается  $G^0$  и, очевидно, является открытым множеством.

**Замечание.** Открытое множество можно определить, как множество, для которого  $G = G^0$ .

**Определение.** Точка  $X$  называется граничной точкой множества  $G$ , если любая окрестность  $U(X)$  точки  $X$  содержит как точки множества  $G$ , так и точки дополнения множества  $G$  в  $R^n$ , то есть  $G \cap U(X) \neq \emptyset$ ,  $CG \cap U(X) \neq \emptyset$ .

Множество **всех** граничных точек множества  $G$  называется границей  $G$  и обозначается  $\Gamma G$ . Граничные точки могут принадлежать или не принадлежать множеству  $G$ .

**Теорема.**  $\Gamma G$  - замкнутое множество.

**Доказательство.**

**Замечание.** Если  $G \subset R^n$ , то  $R^n = G^0 \cup \Gamma G \cup CG^0$ , причём множества  $G^0$ ,  $\Gamma G$  и  $CG^0$  попарно не пересекаются.

**Определение.** Замыканием множества  $G$  называется наименьшее замкнутое множество, обозначаемое  $\bar{G}$ , содержащее множество  $G$ .

**Теорема.**  $\bar{G} = G \cup \Gamma G$ .

**Доказательство.**

**Следствие.** Множество замкнуто, если оно содержит все свои граничные точки.

**Теорема.** Множество  $G$  замкнуто если и только если для любой сходящейся к точке  $X_0$  последовательности  $\{X_k\}$  точек, целиком содержащейся в  $G$ , точка  $X_0$  также принадлежит  $G$ .

**Доказательство.**

**Замечание.** Последняя теорема даёт нам альтернативное определение замкнутого множества:

**Определение.** Множество  $G$  называется замкнутым, если для любой сходящейся к точке  $X_0$  последовательности  $\{X_k\}$  точек, целиком содержащейся в  $G$ , точка  $X_0$  также принадлежит  $G$ .

**Примеры.**

**Задача.** Доказать, что:

- а) объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество;
- б) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество;
- в) пересечение любого числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;
- г) объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество;

**Определение.** Открытым покрытием множества  $G$  называется совокупность открытых множеств  $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , (здесь  $W_\alpha$  - открытое множество,  $I$  - множество индексов), такая, что  $G \subset \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ . Покрытие  $\Phi$  называется конечным, если множество  $I$  - конечно.



**Определение.** Множество  $G \subset \mathbf{R}^n$  называется ограниченным, если  $\exists M > 0: \forall X \in G \Rightarrow |X| < M$ .

**Теорема.** Пусть  $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$  есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества  $G \subset \mathbf{R}^n$ , тогда существует конечное подмножество  $I_0$  множества  $I$ ,  $I_0 \subset I$ , такое, что  $\Phi_0 = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I_0}$  также является открытым покрытием множества  $G$ . ( Или, что то же самое, из любого открытого покрытия ограниченного замкнутого множества можно выбрать конечное подпокрытие).

**Лемма.** . Пусть  $\Phi = \{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$  есть открытое покрытие ограниченного замкнутого множества  $G \subset \mathbf{R}^n$ , тогда существует число  $\varepsilon_\Phi > 0$ , зависящее от покрытия  $\Phi$ , такое, что для любой точки  $X \in G$  существует элемент покрытия  $W_{\alpha_X}$ , зависящий от  $X$ , такой, что  $U_{\varepsilon_\Phi}(X) \subset W_{\alpha_X}$ . ( т.е. для любой точки  $X$  открытая  $\varepsilon_\Phi$ -окрестность точки  $X$  содержится в некотором элементе  $W_{\alpha_X}$  покрытия  $\Phi$  ).

**Доказательство леммы.**

**Доказательство теоремы.**

**Определение.** Множество  $G \subset \mathbf{R}^n$  называется компактным, если из всякого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

В силу последнего определения доказанную теорему можно сформулировать так:

**Теорема.** Всякое ограниченное замкнутое множество в  $\mathbf{R}^n$  компактно.

**Примеры.**

## Лекция 15.

Пусть  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  числовая функция переменной  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которую будем записывать как  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Определение предела**(по Гейне). Будем говорить, что функция  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  имеет предел равный числу  $A \in \mathbf{R}$  при значении переменной  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  стремящемся к  $X_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ , если  $f(X)$  определена в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(X_0)$  точки  $X_0$  и для любой последовательности  $\{X_k\}$  точек из окрестности  $\dot{U}(X_0)$ , сходящейся к  $X_0$ , последовательность  $\{f(X_k)\}$  сходится к числу  $A$ . Или

$$A = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) \underset{\text{по Гейне}}{\Leftrightarrow} \forall \{X_k\}, X_k \in \dot{U}(X_0), \lim_{k \rightarrow \infty} X_k = X_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(X_k) = A.$$

**Определение предела (по Коши).** Пусть функция  $f(X)$  определена в некоторой окрестности конечной точки  $X_0$  за исключением, может быть, самой точки  $X_0$ . Число  $A$  называется **пределом функции**  $f(X)$  в точке  $X_0$

если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta_\varepsilon > 0$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что для всех  $X$ , для которых выполняется неравенство  $|X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon$ . Или кратко:

$$A = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) \underset{\text{по Коши}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall X, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon.$$

**Теорема.** Определения предела по Гейне и по Коши эквивалентны.

**Доказательство.**

Рассмотрим некоторую функцию  $f(X)$  определенную в некоторой окрестности  $\dot{U}(X_0)$  конечной точки  $X_0$  за исключением, может быть, самой точки  $X_0$ . Пусть  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  единичный вектор,  $|\vec{\theta}| = 1$ , тогда точки вида  $X_0 + t\vec{\theta} = (x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$ , где  $t > 0$ , образуют луч, выходящий из точки  $X_0$  в направлении вектора  $\vec{\theta}$ . Пределом функции  $f(X)$  по направлению  $\vec{\theta}$  называется предел функции  $F(t) = f(x_{01} + t\theta_1, \dots, x_{0n} + t\theta_n)$ , если он существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(X_0 + t\vec{\theta}).$$

**Пример.** а)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0,$

б)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  не существует, т.к. пределы по направлениям различны.

в)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  не существует, хотя существуют равные пределы по направлениям.

**Определение.** Будем писать  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \infty$  если  $f(X)$  определена в некоторой проколотой окрестности  $\dot{U}(X_0)$  и  $\forall R > 0 \exists \delta_R > 0: \forall X \in \dot{U}(X_0), 0 < |X - X_0| < \delta_R \Rightarrow |f(X)| > R.$

**Определение.** Будем писать  $\lim_{X \rightarrow \infty} f(X) = A$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists R_\varepsilon > 0: \forall X, |X| > R_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - A| < \varepsilon.$

**Теорема.** Пусть  $A = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X), B = \lim_{X \rightarrow X_0} g(X)$  конечные пределы. Тогда

а)  $\lim_{X \rightarrow X_0} (\alpha f(X) + \beta g(X)) = \alpha A + \beta B$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ;

б)  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X)g(X) = AB$ ;

в)  $\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{A}{B}$ , если  $B \neq 0$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $A = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ , где  $A$  — конечное число, то  $\exists \dot{U}(X_0), M > 0: \forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| < M$ .

**Доказательство.**

**Теорема.** Если  $A = \lim_{X \rightarrow X_0} f(X)$ , где  $A \neq 0$ , то  $\exists \dot{U}(X_0): \forall X \in \dot{U}(X_0) \Rightarrow |f(X)| > \frac{|A|}{2}$ . Если при этом  $A > 0$ , то  $f(X) > \frac{A}{2}$ , если  $A < 0$ , то  $f(X) < \frac{A}{2}$ .

**Доказательство.**

**Непрерывные функции.**

Функция  $f(X)$  называется непрерывной в точке  $X_0 \in G \subset \mathbf{R}^n$ , если она определена в некоторой окрестности  $U(X_0)$  и  $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in G}} f(X) = f(X_0)$ .

Если определить приращение функции, соответствующее приращению аргумента  $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , как  $\Delta f(X) = f(X + \Delta X) - f(X)$ , то данное определение эквивалентно равенству  $\lim_{\substack{\Delta X \rightarrow \vec{0} \\ X + \Delta X \in G}} \Delta f(X_0) = 0$ .

На языке " $\varepsilon - \delta$ ":  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall X \in G, 0 < |X - X_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$ .

Для непрерывных функций свойство  $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(\lim_{X \rightarrow X_0} X)$  показывает, что знаки предела и функции перестановочны или - «можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции».

**Теорема.** Пусть  $f(X)$  и  $g(X)$  непрерывные в точке функции  $X_0$  функции. Тогда  $\alpha f(X) + \beta g(X)$ ,  $f(X)g(X)$ ,  $(f(X))/(g(X))$  при  $g(X_0) \neq 0$  - непрерывны.

**Доказательство.**

**Теорема.** Пусть  $g(X)$  непрерывна в точке  $X_0$ ,  $g(X_0) = a$ , функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $a$ , тогда сложная функция  $\Phi(X) = f(g(X))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

**Доказательство.**

**Примеры непрерывных функций.**

**Теорема.** а) Если  $f(X)$  непрерывна в точке  $A$ , то она ограничена в некоторой окрестности  $U(A)$ ;

б) Если  $f(X)$  непрерывна в точке  $A$  и  $f(A) \neq 0$ , то существует окрестность  $U(A)$  точки  $A$ , в которой  $f(X) > \frac{f(A)}{2} > 0$ , если  $f(A) > 0$  и  $f(X) < \frac{f(A)}{2} < 0$ , если  $f(A) < 0$ , для любого  $X \in U(A)$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Функция называется непрерывной на множестве  $G$ , если она непрерывна в каждой точке множества  $G$ .

**Теорема.** Если функция непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве  $G \subset \mathbf{R}^n$ , то она ограничена.

**Доказательство.**

**Теорема (Вейерштрасс).** Если функция  $f(X)$  непрерывна на ограниченном, замкнутом множестве  $G \subset \mathbf{R}^n$ , то существует точка  $C \in G$ , такая, что  $f(C) = \min_{X \in G} f(X)$  и, существует точка  $D \in G$ , такая, что  $f(D) = \max_{X \in G} f(X)$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Непрерывной кривой в  $\mathbf{R}^n$  называется образ отображения

$$\Gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n, \Gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)),$$

задаваемого непрерывными на отрезке  $[a, b]$  функциями  $\{\varphi_i(t)\}$ .

**Определение.** Множество  $G \subset \mathbf{R}^n$  называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в множестве  $G$ .

**Теорема.** Если функция  $f(X)$  непрерывна на ограниченном, замкнутом, связном множестве  $G \subset \mathbf{R}^n$ ,  $a = \min_{X \in G} f(X)$ ,  $b = \max_{X \in G} f(X)$ , то для любого значения  $c \in [a, b]$  существует  $C \in G$ , такая, что  $f(C) = c$ .

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Определение.** Функция  $f(X)$  называется равномерно непрерывной на множестве  $M \subset \mathbf{R}^n$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0: \forall X', X'' \in M, |X' - X''| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(X') - f(X'')| < \varepsilon$ .

**Теорема (Кантор).** Пусть  $M \subset \mathbf{R}^n$  компактное множество,  $f(X)$  непрерывная на  $M$  функция, тогда  $f(X)$  равномерно непрерывна на  $M$ .

**Доказательство.**

**Следствие.** Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нём.

**Примеры.**

## Лекция 16.

Обозначим  $\Delta X_i = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$  и назовём приращением функции  $f(X)$  по  $i$ -той переменной величину  $\Delta_i f(X) = f(X + \Delta X_i) - f(X)$ .

**Определение.** Частной производной по переменной  $x_i$  в точке  $X$  называется предел  $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_i f(X)}{\Delta x_i}$ , если он существует.

Частную производную функции можно рассматривать, как производную функции одной переменной  $x_i$ , когда все остальные переменные фиксированы.

**Рисунок.**

**Примеры.**

Частные производные  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\}$  можно рассматривать, как функции на тех подмножествах в  $\mathbf{R}^n$ , где они определены. И можно, в свою очередь, рассмотреть частные производные этих функций  $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$ , которые назовём вторыми частными производными функции  $f(X)$ .

**Пример.** Для  $n = 2$  имеются две частные производные 2-го порядка  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  по переменным  $x$  и  $y$  и две «смешанные» производные второго порядка  $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  и  $\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ .

**Определение.** Смешанной частной производной  $n$ -того порядка назовём частную производную от производной  $(n - 1)$ -го порядка.

**Пример.**  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ .

**Пример.**

Возникает вопрос, будут ли равны частные производные, взятые по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но в разном порядке, как в примере выше? Ответ даётся следующей теоремой:

**Теорема (о смешанных производных).**

Пусть функция  $f(X) = f(x, y)$  определена вместе со своими производными  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  в некоторой окрестности точки  $X_0$  и пусть функции  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  непрерывны в точке  $X_0$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial y \partial x}. \quad (*)$$

**Доказательство.**

**Замечание.** Если вторые частные производные разрывны в точке, то равенство неверно. Пример – для функции  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } (x, y) = (0, 0); \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$

в точке  $X_0 = 0$  равенство (\*) неверно, т.к. вторые производные разрывны.

**Замечание.** Эта теорема легко распространяется на любые смешанные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования.

Например  $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$ .

**Определение.** Пусть  $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  единичный вектор  $|\vec{\delta}| = 1$ , производной функции  $f(X)$  по направлению  $\vec{\delta}$  в точке  $X \in \mathbb{R}^n$  называется правая производная по  $t$  функции  $F(t) = f(x_1 + t\delta_1, \dots, x_n + t\delta_n)$  в точке  $t = 0$  и обозначается  $\frac{\partial f(X)}{\partial \vec{\delta}} = F'_+(0)$ .

**Замечание.** Частные производные 1-го порядка функции совпадают с производными функции по направлению соответствующих базисных ортов.

**Теорема.** Если функция  $f(X)$  имеет в точке  $X_0$  все непрерывные частные производные первого порядка, то приращение функции в точке  $X_0$  соответствующее приращению аргумента  $\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  можно записать в виде  $\Delta f(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)\Delta x_n + o(\Delta \rho)$ , где  $\Delta \rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ .

**Доказательство.**

**Определение.** Функция называется дифференцируемой в точке  $X_0$ , если приращение функции в точке  $X_0$  соответствующее приращению аргумента

$\Delta X = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  можно записать в виде  $\Delta f(X_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\Delta \rho)$ , где  $\Delta \rho = |\Delta X| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ ,  $A_i \in \mathbf{R}^n$  для всех  $i$ .

**Теорема.** Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные первого порядка и достаточно, чтобы эти производные были непрерывны в точке.

**Доказательство.**

**Примеры.**

**Определение.** Главная линейная часть приращения дифференцируемой функции  $f(X)$  называется дифференциалом функции и обозначается, как  $df(X) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \Delta x_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) dx_n$ .

**Замечание.** Последнее равенство верно в силу  $\Delta x_i = dx_i$ .

**Касательная плоскость. Геометрический смысл дифференциала.**

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением  $z = f(x, y)$  в  $\mathbf{R}^3$ . Кривые на поверхности, заданные уравнениями  $x = x_0$  и  $y = y_0$  обе проходят через точку  $X_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  и, если существуют частные производные  $\frac{\partial f(X_0)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(X_0)}{\partial y}$ ,

то касательные к этим кривым в точке  $X_0$  задаются уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y} (y - y_0) \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z = f(X_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial x} (x - x_0) \end{cases}$$

Касательная плоскость к поверхности, если таковая существует, должна содержать обе эти прямые, откуда немедленно получаем уравнение касательной плоскости:

$$Z - z_0 = \frac{\partial f(X_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(X_0)}{\partial y} (y - y_0), \text{ где } z_0 = f(X_0). \quad (**)$$

Если функции  $\frac{\partial f(X)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(X)}{\partial y}$  непрерывны в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , то расстояние между точкой поверхности  $P(x, y, f(x, y))$  и точкой касательной плоскости  $Q(x, y, Z)$ , с теми же координатами  $(x, y)$  равно:



$$PQ = f(x, y) - \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial y}(y - y_0) = o(\rho), \text{ где } \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \text{ и мы видим, что это расстояние есть}$$
$$o(\rho) = PQ \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

**Рисунок.**

**Примеры.**

### Список литературы.

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988, 432 с.
2. 2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 1. СПб.: Лань, 2016. – 608 с.
3. 3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 2. СПб.: Лань, 2016. – 800 с.
4. 4. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. — 444 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 424 с.
6. Сборник задач по математике для втузов: [в 4 ч.] / Под ред. А. В. Ефимова; А. С. Пospelова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Ч. 1. — 288 с.
7. Сборник задач по математике для втузов; под ред. А. В. Ефимова, А. С. Пospelова. Ч. 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 432 с.