Таким образом, послед (x_n) явл-ся фунд. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (согласно критерию Коши) послед (x_n) сходится.

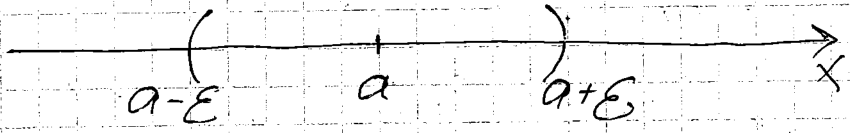
$\exists \lim x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$

Семинар 8 (22.10.16).

Определение предела послед

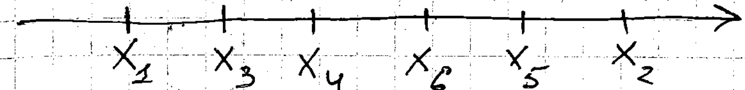
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

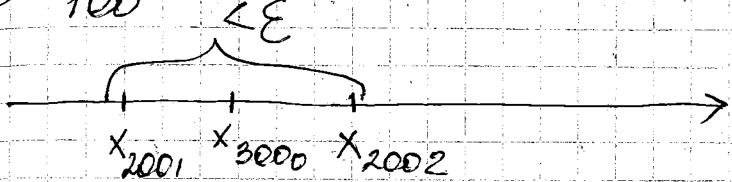


Опред фундаментальной послед

$$(\text{Послед } (x_n) \text{ фунд}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \left[\begin{array}{l} (\forall m, n > N): |x_m - x_n| < \varepsilon \\ (\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}): |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \end{array} \right.$$



$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\quad N = 2000$



<u>Задача</u> $\quad x_n = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n}{n^2}$

Пусть $\varepsilon > 0$

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)}{(n+2)^2} + \frac{\cos(n+3)}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2} \right| \leqslant \frac{|\cos(n+1)|}{(n+1)^2} + \frac{|\cos(n+2)|}{(n+2)^2} + \frac{|\cos(n+3)|}{(n+3)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{|\cos(n+p)|}{(n+p)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ если } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

125

Итак, если $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то

$(\forall n > N)(\forall p \in N): |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \Rightarrow$ послед. x_n явл-ся фундаментальной $\Rightarrow$ (Критерий Коши) послед. сходится.

<u>Задача</u> $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Доказ~~ать~~жем, что послед. (x_n) расходится.

<u>Способ 1</u> $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед (x_n) строго возрастает.

$x_1 = 1$

$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{3}$

$x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$

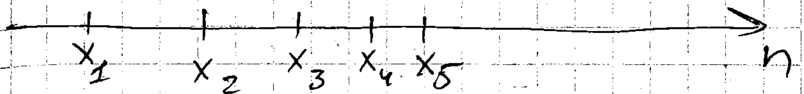
$x_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} >$

$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Аналогично можно доказать, что

$$x_{2^k} \geq \frac{k+2}{2} \qquad x_{16} \geq \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$



Способ 2

(Послед. (x_n) является фунд) $\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N): |x_m - x_n| < \varepsilon$

(Послед. (x_n) не явл-ся фунд) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists m, n > N):$ $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$

Докажем, что послед. (x_n) не явл-ся фунд.

Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ слагаемых}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ послед (x_n) не явл-ся
фунд. $\Rightarrow$ (по критерию Коши)
послед (x_n) расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

расх-ся

— гармонический ряд

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{n}$$

$x_{1000} \approx 7,48 \qquad x_{1000000} \approx 14,39$

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$ — среднее арифметич.

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$ — среднее геометр.

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}{n}}$$ — среднее квадр.

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$ — среднее гармонич.

Утв $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0)$:

$H \leq G \leq A \leq Q$

каждое из равенств имеет место лишь в случает

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

$3, 5, 7, 9,$ — арифм. послед. ~~геометрич~~

$7 = \frac{5+9}{2}$ среднее арифм.

$3 \quad 6 \quad 12 \quad 24 \quad 48$ — геом прогр.

$12 = \sqrt{6 \cdot 24}$

среднее геом.

$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9}$

$\frac{1}{7} = \frac{2}{\frac{1}{1/5} + \frac{1}{1/9}}$ — среднее гарм.

Задача № 1 из [redacted] ТР (в-т 22)

$$x_n = \frac{3n^2+4}{2-n^2}, \quad a = -3, \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

1) С помощью опред. предела последовательности доказать, что число a является пределом послед. (x_n)

2) Для указанного знач ε найти натуральное число N такое, что $(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon$

Решение

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})$$
$$(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon.$$

$$|x_n - a| = \left|\frac{3n^2+4}{2-n^2} - (-3)\right| =$$

$$\left|\frac{3n^2+4}{2-n^2} + 3\right| = \left|\frac{3n^2+4+6-3n^2}{2-n^2}\right| =$$

$$= \frac{10}{|2-n^2|} = \frac{10}{n^2-2}$$ (если n достаточно велико, а именно, если $n \geqslant 2$)

Пусть $\varepsilon > 0$, произвольное положит. число. Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{10}{n^2-2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 - 2 > \frac{10}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 > 2 + \frac{10}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt{2+\frac{10}{\varepsilon}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n > \left[\sqrt{2+\frac{10}{\varepsilon}}\right]$$

Положим $N = \left[\sqrt{2+\frac{10}{\varepsilon}}\right]$, тогда если $n > N$, то $|x_n - a| < \varepsilon$.

Таким образом $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon$

Значит, согласно опред. предела послед. число a явл-ся пределом послед (x_n)

2) Если $\varepsilon = 10^{-2}$, то

$$N = \left[\sqrt{2 + \frac{10}{\varepsilon}}\right] = \left[\sqrt{2+1000}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{1002}\right] = [31{,}65\ldots] = 31$$

Задача №1 из ТР (в-т 24)

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}, \ a = 0, \ \varepsilon = 10^{-3}$$

Решение

$$1) \ |x_n - a| = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} - 0\right| = \frac{1}{3^{2n}}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число.

Тогда

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3^{2n}} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \ln 3^{2n} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n \ln 3 > \ln(1/3) \Leftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow n > \dfrac{\ln(1/3)}{2\ln 3} \Longleftrightarrow n > \left[\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln 3}\right]$

Положим $N = \left[\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln 3}\right]$. Тогда, если $n > N$, то $|x_n - a| < \varepsilon$.

Таким образом

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N): |x_n - a| < \varepsilon$

Значит, согласно определению предела послед-ти (x_n).

2) Если $\varepsilon = 10^{-3}$, то $N = \left[\dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{2\ln 3}\right] = \left[\dfrac{\ln 1000}{2\ln 3}\right] = [3{,}143\ldots] = 3$

<u>Тема 6. Предел функции.</u>

Определение предела функции (по Коши)

Число $a \in \mathbb{R}$ называется <u>пределом</u> ф-ии $f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ (или при $x \to x_0$)

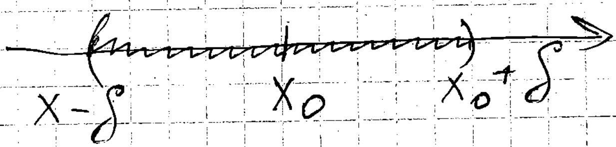
Если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого числа $x \in \mathring{U}_\delta(x)$ имеет место неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется <u>δ-окрестностью</u> точки x_0 и обозначается $U_\delta(x_0)$

x_0 — центр окр.

δ — радиус окр.

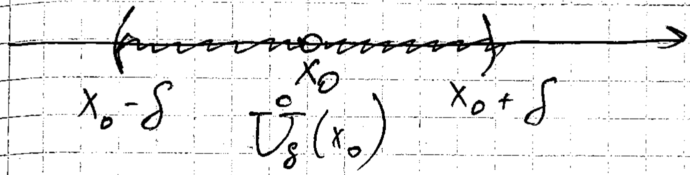
$$U_{0,1}(-5) = (-5{,}1; -4{,}9)$$



die <u>U</u>mgebung — окрестность (нем)

$$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\} =$$

$$= (x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$$ – <u>проколотая δ-окрестность</u> точки x_0



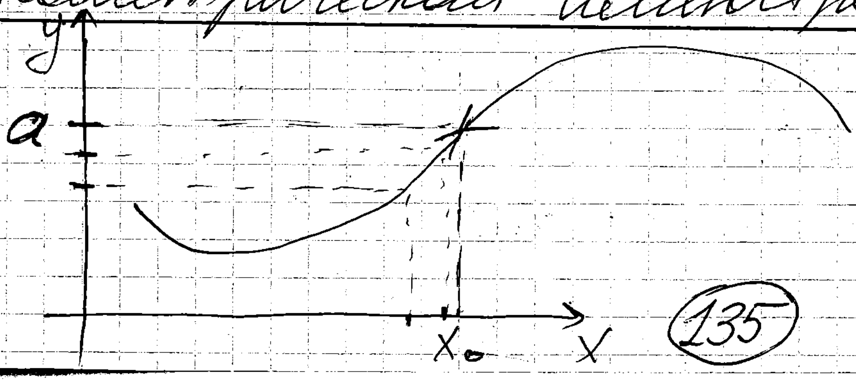
<u>Обозначение</u>: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ или

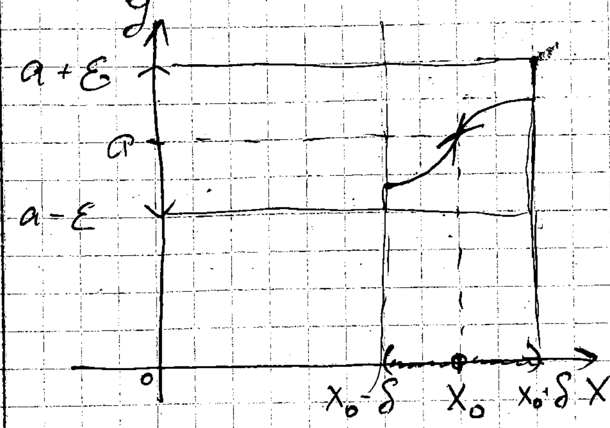
$f(x)\to a$ при $x\to x_0$

<u>Символическая запись</u>

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=a\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)$$
$$\left(\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\right): |f(x)-a|<\varepsilon$$

<u>Геометрическая иллюстрация</u>





$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

<u>Определение предела ф-и</u> (по Гейне)

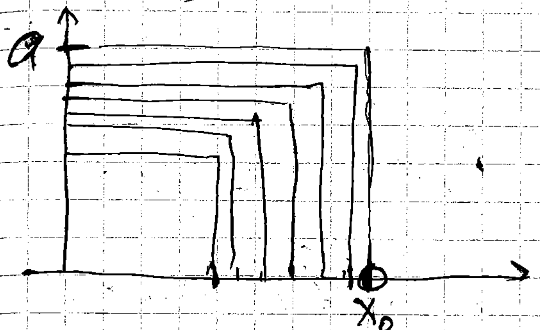
<u>Опр.</u> Число $a \in \mathbb{R}$ называется <u>пределом</u> ф-и $f(x)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ (или при x, стремящемся к x_0), если для любой послед-ти (x_n) такой, что [redacted] $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и при всех $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq x_0$ последовательность [redacted] $\{f(x_n)\}$ сходится и ее пределом является число a, т. е.

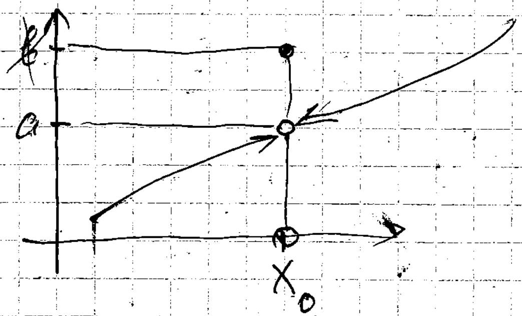
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$$

<u>Символическая запись</u>!

$$\left(\lim f(x)=a\right) \Leftrightarrow \Big(\forall \text{ послед } (x_n) \text{ такой, что } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ и } (\forall n\in\mathbb{N}): x_n \neq x_0\Big):$$

$$\lim f(x_n)=a.$$





$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)=a \qquad a\in\mathbb{R}$$

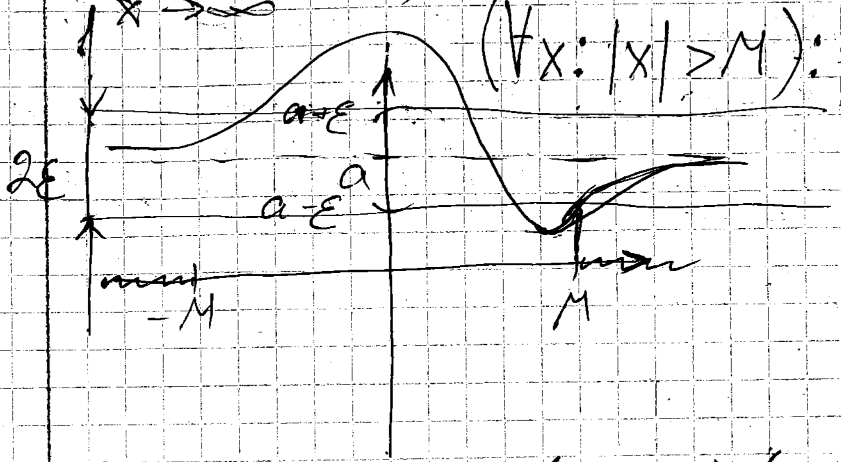
$x_0 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $a=\infty$

$x_0=\infty$ $\qquad$ $a=+\infty$

$x_0=+\infty$ $\qquad$ $a=-\infty$

$x_0=-\infty$

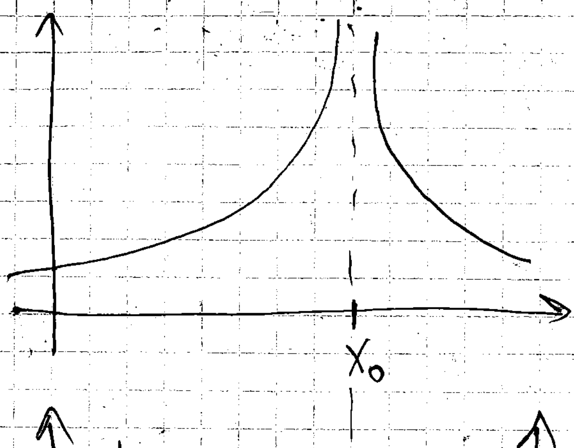
$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=a\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x: |x|>M): |f(x)-a|<\varepsilon$$

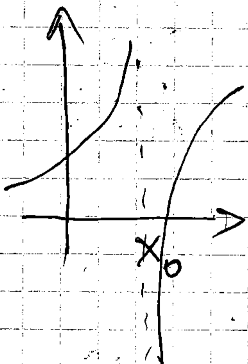


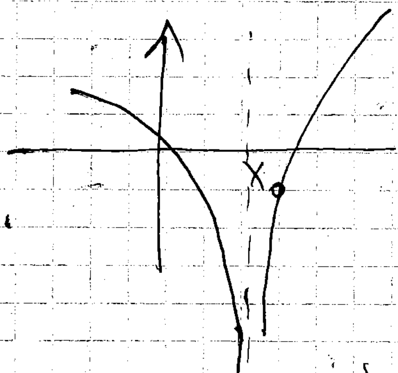
$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)=a\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x > M): |f(x)-a|<\varepsilon$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=a\right)\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists M>0)(\forall x<-M): |f(x)-a|<\varepsilon$$

$$\left(\lim_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}} f(x)=\infty\right)\Leftrightarrow(\forall M>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0)): |f(x)|>M$$







$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\right): f(x) > M$$

$$\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists \delta>0)\left(\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\right): f(x) < -M$$

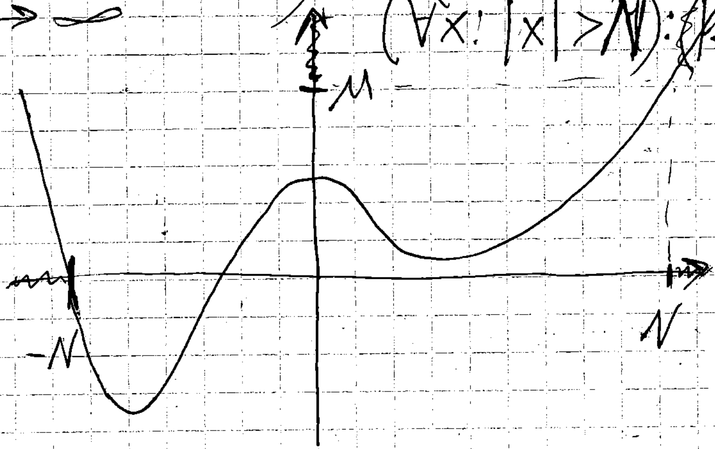
$$\lim f(x) = a$$

$\cancel{x \to x_0}$ $x \to x_0$

$\cancel{x_0 \in \mathbb{R}}$

	$a \in \mathbb{R}$	$a = \infty$	$a = +\infty$	$a = -\infty$
$x_0 \in \mathbb{R}$	основний в-т	+	+	+
$x_0 = \infty$	+	+		+
$x_0 = +\infty$	+	+		
$x_0 = -\infty$	+	+	+	

$$\left(\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty\right) \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N > 0)(\forall x : |x| > N) : |f(x)| > M$$



$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty\right) \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N > 0)(\forall x > N) : |f(x)| > M$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists N > 0)(\forall x < -N) : f(x) > M$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)$$
$$(\exists N>0)(\forall x : |x|>N) : f(x) < -M$$

Задача $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x-2)} =$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 4}{\lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} x - \lim\limits_{x\to 1} 2} = \frac{1-4}{1-1-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Задача $\lim\limits_{x\to 2}$ $\cancel{\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} =$$

$= 1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{5x+1}-\frac{3x^2-2}{x^2+5}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{5x+1}-\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x^2+5}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{5+\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{5}-3=$$

$$=-2\frac{3}{5}=-\frac{13}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}+\frac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)=[\infty+\infty$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cancel{-2x^4}\cancel{+2x^4}+8x^3-4x+x^3+4x^2-2}{(2x+1)(1-2x^2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3+5x^2-4x-2}{(2x+1)(1-2x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{9+5/x-4/x^2-2/x^3}{(2+1/x)(1/x^2-2)}\right)=\frac{9}{-4}=-$$

Задача $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{2x-x^2}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right)=$

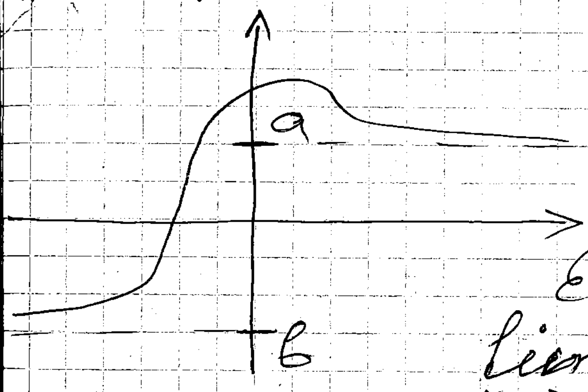
$=[\infty+\infty]=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x(2-x)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x-2-x}{x(2-x)(x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x(2-x)(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x(1-x)}=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+13x-7}-2x\right)=$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$

Если $a\neq b$, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ не сущ

$\frac{9}{4}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+13x-7}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2+13x-7-4x^2}{\sqrt{4x^2+13x-7}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(13-7/x)}{x(\sqrt{4+13/x-7/x^2}+2)}=\frac{13}{4}$ $\quad$ 143

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4x^2+13x-7} - 2x\right) =$$

$$= \left[(+\infty) + (+\infty)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2+13x-7} - 2x\right) = \text{не}$$

сущ-ст.

Задача

$$\sqrt{4x^2+13x-7} = \begin{cases} x\sqrt{4+\frac{13}{x}-\frac{7}{x^2}} \\ (\text{если } x \to +\infty \\ |x|\sqrt{4+\frac{13}{x}-\frac{7}{x^2}} \\ (\text{если } x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim_{x \to 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$$

Задача $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \end{bmatrix} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t^4-t}{t-1} =$

$= \lim\limits_{t\to 1} \frac{t(t^3-1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1} \frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)} =$

$= \lim\limits_{t\to 1} t(t^2+t+1) = 3$

Задача $\lim\limits_{x\to 81} \frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \begin{bmatrix} t=\sqrt[4]{x} \\ x=t^4 \end{bmatrix} = \lim\limits_{t\to 3} \frac{3-t}{9-t^2} = \lim\limits_{t\to 3} \frac{\cancel{3-t}}{\cancel{(3-t)}(3+t)} =$

$\lim\limits_{t\to 3} \frac{1}{3+t} = \frac{1}{6}$

Задача

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+2}\right) =$

$= [\infty - \infty]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+8x+3-(x^2+4x+1)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x+3-4x-1}{x\left(\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+1/x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+2/x}{\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+1/x^2}}=$$

$$=\frac{4}{2}=2.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)=$$

$$=\left[(+\infty)-(+\infty)\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x(4+2/x)}{-x\left(\sqrt{1+8/x+3/x^2}+\sqrt{1+4/x+1/x^2}\right)}=$$

$$=-2$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+1}\right)$ — не существует

Задача

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-3/x}{1+1/x}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{x}=\left[2^{+\infty}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{x}=\left[2^{-\infty}\right]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{x}$$ — не сущ-ет

Задача

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^{2x}-2^{2x}}{3^{3x}+2^{3x}}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^{2x}-2^{2x}}{3^{3x}+2^{3x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{9^{x}-4^{x}}{27^{x}+8^{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9^{x}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\right)}{27^{x}\left(1+\left(\frac{8}{27}\right)^{x}\right)}=\lim\frac{1\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\right)}{3^{x}\left(1+\left(\frac{8}{27}\right)^{x}\right)}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-2^{2x}}{3^{3x}+2^{3x}}=\lim\frac{4^{x}\left(\left(9/4\right)^{x}-1\right)}{8^{x}\left(\left(27/8\right)^{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{\left(9/4\right)^{x}-1}{2^{x}\left(\left(27/8\right)^{x}+1\right)}=-\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=-\infty$$

147

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{2x}-2^{2x}}{3^{3x}+2^{3x}}$$ — не существует.

Задача

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x-\sqrt[4]{x^4+1}}{3x+\sqrt{9x^2-x}-\sqrt[3]{x}}$$ — не сущ-ет

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-\sqrt[4]{x^4+1}}{3x+\sqrt{9x^2-x}-\sqrt[3]{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-x\sqrt{1+1/x^4}}{3x+x\sqrt{9-1/x}-x\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\sqrt{1+1/x^4}}{3+\sqrt{9-1/x}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt[4]{x^4+1}}{3x+\sqrt{9x^2-x}-\sqrt[3]{x}}=\left[\begin{matrix}t=-x\\x=t\end{matrix}\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-5t-\sqrt[4]{t^4+1}}{-3t+\sqrt{9t^2+t}+\sqrt[3]{t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-5t-t\sqrt[4]{1+1/t^4}}{-3t+t\sqrt{9+1/t}+t\sqrt[3]{\frac{1}{t^2}}}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-5-\sqrt[4]{1+1/t^4}}{-3+\sqrt{9+1/t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}}}=\left[\frac{-6}{+0}\right]$$

$$=-\infty$$

148

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{5 + \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^4}}}{\underbrace{3 - \sqrt{9 + 1/t}} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}}$$

$$3 - \sqrt{9 + 1/t} = \frac{\left(3 - \sqrt{9 + \frac{1}{t}}\right)\left(3 + \sqrt{9 + \frac{1}{t}}\right)}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{t}}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{t}}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{t}}}$$

$$3 - \sqrt{9 + \frac{1}{t}} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = \frac{-\frac{1}{t}}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{t}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} \left[-\frac{1}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{1}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{t^2}}} + 1 \right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{-x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}} = \left[\begin{array}{l} x = -t \\ t = -x \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t} + \sqrt{1 + t}}{\sqrt{t^2 - t} - \sqrt{t^2 + t}} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{t} + \sqrt{1 + t}\right)\left(\sqrt{t^2 - t} + \sqrt{t^2 + t}\right)}{t^2 - t - t^2 - t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{t} + \sqrt{1 + t}\right)\left(\sqrt{t^2 - t} + \sqrt{t^2 + t}\right)}{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{1/t+1}\right)t\left(\sqrt{1-1/t}+\sqrt{1+1/t}\right)}{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\sqrt{t}\left(1+\sqrt{1/t+1}\right)\left(\sqrt{1-1/t}+\sqrt{1+1/t}\right)}{-2} =$$

$$= -2\lim_{t\to+\infty}\sqrt{t} = -\infty$$

Семинар 9 (27.10.16)

Пусть ф-я $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Опр Число a наз-ся **пределом** функции $f(x)$ в точке x_0 (или при x, стремящемся к x_0), если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0))$: $|f(x)-a|<\varepsilon$

Пример $f(x)=\sqrt{x}$