$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t}\left(1+\sqrt{1/t+1}\right)t\left(\sqrt{1-1/t}+\sqrt{1+1/t}\right)}{-2t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{t}}\,\sqrt{t}\left(1+\sqrt{1/t+1}\right)\left(\sqrt{1-1/t}+\sqrt{1+1/t}\right)}{-2} =$$

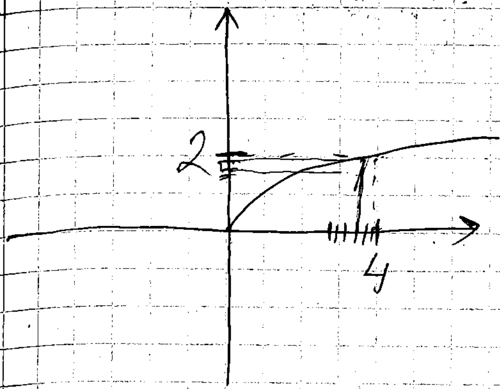
$$= -2\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} = -\infty$$

Семинар 9 (27.10.16)

Пусть ф-я $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0.

Опр Число a наз-ся **пределом** функции $f(x)$ в точке x_0 (~~или~~ при x, стремящемся к x_0), если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0))$: $|f(x)-a|<\varepsilon$

Пример $f(x)=\sqrt{x}$



$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ - не опред.

<u>Односторонние пределы</u>

Пусть ф-я $f(x)$ - определена в некоторой правой проколотой окрестности точки x_0 (то есть ф-я $f(x)$ определена на некотором интервале (x_0, x_1) где $x_0 < x_1$)

<u>Опр</u> Число a называется <u>пределом справа</u> ф-и $f(x)$ в точке x_0, если

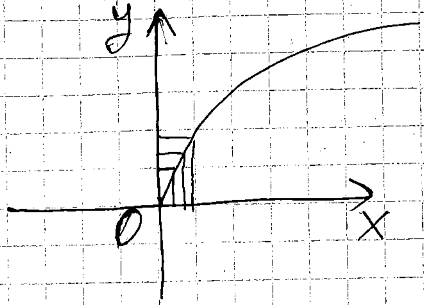
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \underbrace{(x_0, x_0+\delta)}_{\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0)}): |f(x) - a| < \varepsilon$

$\overset{\circ}{U}{}^{+}_{\delta}(x_0)$ ← правая проколотая δ-полуокрестность точки x_0.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = a$

или

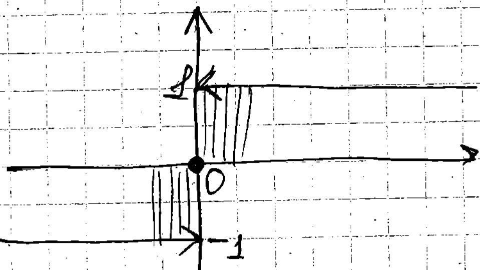
$f(x) \to a$ при $x \to x_0+0$



$\lim\limits_{x \to 0+0} \sqrt{x} = 0$

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x}, \text{ если } x \neq 0}$$



$f(x) = \operatorname{sign} x$

«сигнум»

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = -1$

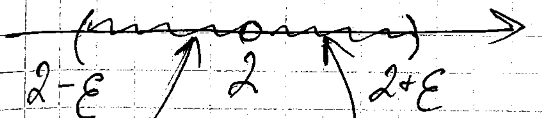
$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0-0} f(x)$

Двусторонний предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют два односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и они равны

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$

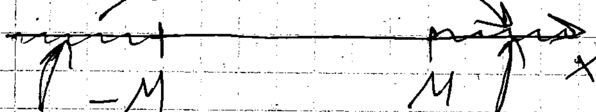
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ $\quad\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ε - окр. $U_\varepsilon(2)$ т 2



левая ε-окр. т2 $\quad$ правая ε-окр. т.2

окрестность ∞



окрестность $-\infty$ $\quad$ окрестность $+\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{\sqrt{3}-2}{-1}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

Задача

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+10} = \left[\frac{3}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 2+0} \frac{\cancel{(x-5)}(x-3)}{\cancel{(x-5)}(x-2)} = \lim_{x \to 2+0} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \left[\frac{-1}{+0}\right] =$$

$$= -\infty$$

Задача

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{x^2-8x+15}{x^2-7x+10} = \left[\frac{3}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 2-0} \frac{(x-3)\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(x-2)} = \left[\frac{-1}{-0}\right] = +\infty$$

Задача

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{x^2-8x+15}{|x^2-7x+10|} = \left[\frac{3}{0}\right] =$$

$$\lim_{x \to 2+0} \frac{(x-5)(x-3)}{|(x-5)(x-2)|} = \cancel{\left[\frac{(-3)(-1)}{|(-3)(+0)|}\right]}$$

$$\cancel{\neq \left[\frac{3}{+0}\right]} = \lim_{x \to 2+0} \left((-1)\frac{x-3}{x-2}\right) = \left[\frac{-1}{+0}\right] = +\infty$$

Задача

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-8x+15}{|x^2-7x+10|} = \lim_{x\to 2-0} \frac{(x-5)(x-3)}{|x-5|\cdot|x-2|} =$$

$$= \lim_{x\to 2-0}\left(-\frac{x-3}{2-x}\right) = \left[-\frac{-1}{+0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-8x+15}{|x^2-7x+10|} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-8x+15}{|x^2-7x+10|} = \infty$$

Задача

$$\lim_{x\to -1+0} 7^{\frac{x-3}{x+1}} = \left[7^{-\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to -1-0} 7^{\frac{x-3}{x+1}} = \left[7^{+\infty}\right] = +\infty$$

$\lim_{x\to -1} 7^{\frac{x-3}{x+1}}$ — не существует.

Задача

$\lim_{x\to -1+0} \log_7 \frac{x-3}{x+1}$ — $\cancel{\log_7}$ предел не определен.

~~Задача~~

$$\lim_{x\to -1-0} \log_7 \frac{x-3}{x+1} = [\log_7 +\infty] = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} \log_7 \frac{x-3}{x+1}$$ — не определен.

Задача

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x-2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2+0} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} =$$

$$= \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2-0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2-0} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} =$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$$

Задача

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x+2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0}\right] = \lim_{x\to 2+0} \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x+2}{x^2-4} = \left[\frac{4}{0}\right] = \lim_{x\to 2-0} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \infty$$

<u>Задача</u>

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x}{1+2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x+1}{1/x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1+x}{1+2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1/x+1}{1/x+2} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x$ – не существует.

<u>Задача</u>

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{3^{\frac{x-1}{2-x}}-1}{3^{\frac{x-3}{x-2}}+1} = \left[\frac{3^{-\infty}-1}{3^{\frac{1}{+0}}+1}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{3^{\frac{x-1}{2-x}}-1}{3^{\frac{x-3}{x-2}}+1} = \left[\frac{3^{+\infty}-1}{3^{+\infty}+1}\right] = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 2-0} \frac{3^{\frac{x-1}{2-x}}\left(1-1/3^{\frac{x-1}{2-x}}\right)}{3^{\frac{x-3}{x-2}}\left(1+3^{\frac{-x+3}{x-2}}\right)} = \lim_{x\to 2-0} 3^{\frac{2x-4}{2-x}} \frac{\left(1-\frac{1}{3^{\frac{x-1}{2-x}}}\right)}{1+3^{\frac{3-x}{x-2}}}$$

$$= 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3^{\frac{x-1}{2-x}}-1}{3^{\frac{x-3}{x-2}}+1}$$ – не существует.

Задача

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2+3^x}{5+3^x} \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{3^x\left(\frac{2}{3^x}+1\right)}{3^x\left(5/3^x+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2/3^x+1}{5/3^x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2+3^x}{5+3^x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2+3^x}{5+3^x}$$ – не сущ-ет.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$$

$$\lim_{x\to x_0+0} = a \qquad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=a$$

	$a\in\mathbb{R}$	
$x\to x_0+0$	+	
$x\to x_0-0$		

$$\left(\lim_{x\to x_0+a} f(x)=\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(x_0,x_0+\delta)): |f(x)|>M$$

$$\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(x_0-\delta,x_0)): f(x)<-M$$

$$\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty\right) \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(x_0-\delta,x_0)): f(x)>M$$

$$\left(\lim f(x)=a\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in(x_0-\delta,x_0)): |f(x)-a|<\varepsilon$$

Предел функции

существует — не существует

предел конечен и равен — предел бесконечен

$a=0$ бесконечно малая ф-я — Бесконечно большая ф-я

Пример $f(x)=\dfrac{x(x-2)}{x-3}$

$f(x)$ — бесконечно малая при $\left[\begin{array}{l} x\to 0 \\ x\to 2 \end{array}\right.$

$f(x)$ — бесконечно большая ~~при~~ при $\left[\begin{array}{l} x\to\infty \\ x\to 3 \end{array}\right.$

Задача $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}-2$.

Является ли ф-ия $f(x)$ бесконечно малой при

а) $x\to 2$ б) $x\to -4$

в) $x\to +\infty$; г) $x\to -\infty$

д) $x\to\infty$

а) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}-2\right)=$
$=\sqrt{9}-1-2=0 \Rightarrow f(x)$ — бесконечно малая при $x\to 2$

б) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=\lim\limits_{x\to -4}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}-2\right)=\sqrt{3}-\sqrt{19}-2\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-ия $f(x)$ не явл-ся бесконечно

160

малой при $x \to -4$

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2-x-1} - 2\right) =$

$= [\infty - \infty] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x-1-x^2+x+1}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x-1}} - 2\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{4x}{x\left(\sqrt{1+3/x-1/x^2}+\sqrt{1-1/x-1/x^2}\right)} - 2\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{1+3/x-1/x^2}+\sqrt{1-1/x-1/x^2}} - 2\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ – б. м. при $x \to +\infty$

г) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2-x-1} - 2\right) =$

$= [\infty - \infty] = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\left(\dfrac{x^2+3x-1-x^2+x+1}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x-1}}\right) - 2\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{4x}{-|x|\left(\sqrt{1+3/x-1/x^2}+\sqrt{1-1/x-1/x^2}\right)}\right) - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ф-я $f(x)$ – не является б. м. при $x \to -\infty$

д) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ – не существует

$f(x)$ не яв-ся бесконечно малой при $x \to \infty$

Ограниченные ф-и.

Опр. Функция $f(x)$ называется ограниченной, если

$$(\exists M>0)(\forall x\in D(f)): |f(x)|<M.$$

Ограниченной сверху

$$(\exists M>0)(\forall x\in D(f)): f(x)<M.$$

Ограниченной снизу

$$(\exists M>0)(\forall x\in D(f)): f(x)>-M$$

Опр.

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $(X\subset D(f))$ [redacted] если

$$(\exists M>0)(\forall x\in X): |f(x)|<M.$$

Опр. Функция $f(x)$ называется ограниченной в окрестности x_0, если

$$(\exists \delta>0)(\exists M>0)(\forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0)): |f(x)|<M$$

Утв. Если ~~в~~ функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$, а ф-я $g(x)$ является ограниченной в окр. т. x_0, то функция $f(x)\cdot g(x)$ является б.м. при $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

Задача $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2+x-2\right)\cos\frac{1}{x^2+2x} =$

$$= \left[0\cdot\cos\infty\right] = 0$$

$$\lim_{x\to -2}\left(x^2+x-2\right) = 0$$

Задача

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x-2}\cdot \cancel{\operatorname{arctg}}\ \sin\frac{x^2+x}{x-2} =$$

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim \frac{x^2-4x+4}{(x-2)\left(x+2\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{8}}{\cancel{(x-2)}(x+2\sqrt{x-1})} = \frac{0}{4} = 0$$

Эквивалентные функции

Пусть либо $x_0 \in \mathbb{R}$, либо $x_0 = \infty$, либо $x_0 = +\infty$, либо $x_0 = -\infty$.

Опр. Ф-и $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Обозначение $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$

Пример $5x^2 + 2x \sim 2x$ при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+2}{2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) \sim g(x)$, при $x \to 0$

Задача $5x^2+2x \sim 5x^2$, при $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+2x}{5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+2/x}{5} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) \sim g(x)$, при $x \to \infty$

$\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim \sqrt[4]{x}$, при $x \to 0+0$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0+0} \frac{\sqrt{t^2+t}}{\sqrt{t}} =$$

$$= \lim_{t \to 0+0} \sqrt{\frac{t^2+t}{t}} = \lim_{t \to 0+0} \sqrt{t+1} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) \sim g(x)$, при $x \to 0+0$

Задача

$\sqrt{x+\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$, при $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \end{bmatrix} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\sqrt{t^2+t}}{t} =$$

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{\frac{t^2+t}{t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{t}} = 1$$

Семинар 10

Теорема: Если $f(x) \sim f_1(x)$ при $x \to x_0$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) g_1(x)$ и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

$$\left(\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right)\right) \neq \lim_{x \to x_0}\left(f_1(x) \pm g_1(x)\right)$$

в общем случае.

Первый замечательный предел (ПЗП)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(x измеряется в радианах).

$$\boxed{\sin x \sim x \text{ при } x \to 0}$$

(равносильная запись ПЗП).

Теорема обобщенный ПЗП.

Если $f(x)$ – б.м. ф-я при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1.$$

Равносильная запись

$$\boxed{\sin f(x) \sim f(x) \text{ при } x \to x_0}$$

Пример

$\sin 3x \sim 3x$

при $x \to 0$.

$\sin \frac{5}{x} \sim \frac{5}{x}$ при $x \to \infty$

$\sin(x^2-1) \sim (x^2-1)$ при $\left[\begin{array}{l} x \to 1 \\ x \to -1 \end{array}\right.$

Задача

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg 7x}{\sin 8x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{\underset{\to 1}{\cos 7x}\,\sin 8x} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin 7x \sim 7x \\ \sin 8x \sim 8x \end{array}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{7\cancel{x}}{8\cancel{x}} = \frac{7}{8}$$

Задача

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(\pi - x)(\pi + x)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{(\pi - x)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = \pi + t \\ t = x - \pi \end{array}\right] = \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + t)}{(\pi - \pi - t)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + t)}{-t} =$$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{-t}=\frac{1}{2\pi}\cdot 1=\frac{1}{2\pi}$$

Задача

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 4x}{1-\cos 6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{2}\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cancel{2}\sin 3x}=\left[\begin{array}{l}\sin\frac{11x}{2}\sim\frac{11x}{2}\\ \sin\frac{3x}{2}\sim\frac{3x}{2}\\ \sin 3x\sim 3x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{11x\cdot\cancel{3x}}{4\cdot(3x)^2}=-\frac{11}{12}$$

Задача $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{6}}=\left[\begin{array}{l}x=t+\frac{\pi}{6}\\ t=x-\frac{\pi}{6}\end{array}\right]$ $\quad\frac{\pi}{6}+t$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\left(\cos t\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\sin t\right)-\sqrt{3}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{2}\cos t\cdot\sqrt{3}-\sin t-\sqrt{3}}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}(\cos t-1)-\sin t}{t}=\sqrt{3}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=$$

$$=\cancel{-}\sqrt{3}\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{t}{2}}{t}-1=-\sqrt{3}\lim\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}-1=$$

$$=\left[\sin^2\frac{t}{2}\sim\left(\frac{t}{2}\right)^2\right]=-\sqrt{3}\lim\frac{2t^{\cancel{2}}}{4\cancel{t}}-1=$$

$$=-1$$

<u>Задача</u> $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$

Неправильное решение

$$\left[\begin{matrix}\sin x\sim x\\ \sin x2\sim 2x\end{matrix}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\cancel{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\cos x-1)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^3}=\left[\begin{matrix}\sin x\sim x\\ \sin\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cancel{2}x\cdot\cancel{2}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{4}}}{\cancel{x^3}}=-1.$$

Задача №2 из Т.Р. В-Т-9

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg\,x - ctg\,x}{\frac{\pi}{4} - x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\pi}{4} - x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-\cos 2x}{\cos x \sin x}}{\frac{\pi}{4} - x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x}{\cos x \sin x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\cos 2x}{\underbrace{\sin 2x}_{1}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\cos 2x}{-x + \frac{\pi}{4}} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\frac{\pi}{4} - x} =$$

$$= \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{4} + t \\ t = x - \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = -2\lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2t\right)}{-t} =$$

$$= -2\lim_{t\to 0} \frac{+\sin 2t}{+t} = \left[\sin 2t \sim 2t\right] =$$

$$= -2\lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = -4$$

Задача № 2. из Т.Р. В-т 5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4tgx-\sin 4x}{tgx-\sin x}$$

$$f(x)=\frac{4tgx-\sin 4x}{tgx-\sin x}=\frac{4\cdot\frac{\sin x}{\cos x}-\sin 4x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}=$$

$$=\frac{4\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}-\sin 4x\cdot\cos x}{\sin x-\sin x\cos x}=\frac{\cancel{4\sin x}-4\cancel{\sin x}\cos^2 x\cdot\cos 2x}{\cancel{\sin}-\cancel{\sin}\cos x}$$

$$=\frac{4(1-\cos^2 x\cos 2x)}{1-\cos x}=\frac{4(1-\cos^2 x(2\cos^2 x-1))}{1-\cos x}=$$

$$=\frac{4(1-2\cos^4 x+\cos^2 x)}{1-\cos x}=4\frac{2\cos^4 x-\cos^2 x-1}{-1+\cos x}=$$

$$=4\frac{2(\cos^2 x-1)(\cos^2 x+\frac{1}{2})}{-1+\cos x}=$$

$$=8(\cos x+1)(\cos^2 x+\tfrac{1}{2})=4(\cos x+1)(2\cos^2 x+1)$$

$$\lim f(x)=$$

$$\lim_{x\to 0}4(\cos x+1)(2\cos^2 x+1)=24$$