$$\lim\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

<u>Задача</u> $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\underbrace{\frac{5}{n^2-3}}_{y_n}\Bigr)^{\overset{z_n}{n^2}}$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2-3}=5\cdot\lim\frac{1}{n^2-3}=$

$=5\cdot 0=0.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n\cdot z_n)=\cancel{\frac{5n^2}{n^2+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2}{n^2-3}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{1-\frac{3}{n^2}}=5$

$$\lim\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^2}=e^5$$

<u>Семинар 7. (15.10.16)</u>

<u>Второй замечательный предел (ВЗП)</u>

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\ \left[1^\infty\right]$$

Обобщенный ВЭП

Если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n z_n = a$ (здесь либо $a \in \mathbb{R}$, либо $a = +\infty$, либо $a = -\infty$), то

$$\lim_{n\to\infty} (1+y_n)^{z_n} = e^a$$

(если $a = +\infty$, то $e^a = +\infty$; если $a = -\infty$, то $e^a = 0$)

Задача $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{n^3} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \Bigl(1 + \underbrace{\frac{5}{n^2-3}}_{y_n}\Bigr)^{\overset{n^3}{z_n}} = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{5}{1-\frac{3}{n^2}} =$$

$$= 0 \cdot 5 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n z_n = \cancel{\frac{5}{n^2-3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{5n^3}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{1-\frac{3}{n^2}} =$$

$$= +\infty$$

Задача

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{5}{n^2-3}}_{y_n}\Big)^{\overbrace{-n}^{z_n}}=e^0=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim\frac{5}{n^2-3}=0$$

$$\lim y_n z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{-5n}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-5}{n\left(1-\frac{3}{n^2}\right)}=$$

$$=0\cdot(-5)=0.$$

Задача

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2-3}\right)^{-n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3+5}{n^2-3}\right)^{-n^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{5}{n^2-3}}_{y_n}\Big)^{\overbrace{-n^3}^{z_n}}=\left[e^{-\infty}\right]=0$$

$$\lim y_n=\lim\frac{5}{n^2-3}=0$$

$$\lim y_n z_n=\lim\frac{-5n^3}{n^2-3}=\lim\frac{-5n}{1-\frac{3}{n^2}}=$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-1\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\underbrace{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2}_{y_n}\right)^{z_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}-\lim 2=$$

$$=2-2=0$$

$$\lim y_n\cdot z_n=\lim\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)\cdot n=[0\cdot\infty]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\cdot n=\lim\frac{4+\frac{1}{n}-4}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}\cdot n=$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-1\right)=\sqrt[4]{e}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}}\right)^n}$$

<u>Задача</u> $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^n-2^n}{8^n+2^n}\right)^{4^n}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8^n+2^n-2\cdot2^n}{8^n+2^n}\right)^{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1\underbrace{-\frac{2\cdot2^n}{8^n+2^n}}_{y_n}\right)^{4^n}=$$

$$=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)\cdot2^n}{8^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)\cdot2^n}{8^n\left(1+\left(\frac{2}{8}\right)^n\right)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{4^n\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)} = 0 \cdot 2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n z_n = \frac{(-2)\, 2^n \cdot 4^n}{8^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n \cdot (-2)}{8^n\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)} = -2$$

<u>Задача</u> $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\lg(n+2016) - \lg n+1\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \lg \frac{n+2016}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \lg\left(1+\frac{2015}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\underbrace{\frac{2015}{n+1}}_{y_n}\Big)^{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim \frac{2015}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2015}{1+\frac{1}{n}} = 0 \cdot 2015 = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2015 n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2015}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= 2015$$

$$\lim_{n\to\infty} \lg\left(1+\frac{2015}{n+1}\right)^n = \cancel{\lim} \lg e^{2015} = \frac{2015}{\ln 10}$$

<u>Принцип вложенных отрезков</u>

Последовательности отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3] \ldots [a_n, b_n] \ldots$ называется последовательностью вложенных отрезков, если каждый последующий отрезок содержится в предыдущем, то есть.

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots \supset$
$\supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

Теорема (принцип вложенных отрезков) Существует точка c, которая принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n \in N$. Если длины отрезков стремятся к 0, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то такая точка единственная

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \ldots \le b_n \le \ldots \le b_3 \le b_2 \le b_1$

Послед (a_n) возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ (по признаку Вейерштрасса) что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

Аналогично, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

$(\forall n\in\mathbb{N}): \; a_n \le b_n$

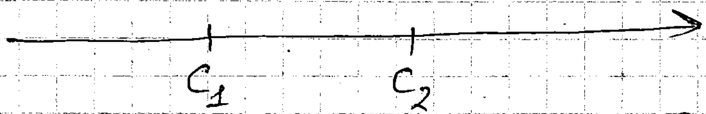
$$\begin{array}{ccc} a_n & \le & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & B \end{array}$$

$\boxed{A \le B}$ (по теореме о переходе к пределу в неравенствах)

Пусть $c = \frac{A+B}{2}$. Тогда

$(\forall n\in\mathbb{N}), \; a_n \le A \le C \le B \le b_n$

$(\forall n\in\mathbb{N}): \; c\in[a_n, b_n]$



$c_1 \in [a_n, b_n] \quad c_2 \in [a_n, b_n]$.

$0 < |c_1 - c_2| \le b_n - a_n \Rightarrow b_n - a_n > 0$ прот.

<u>Замечание</u> Для интервалов данная теорема не верна.

Пример:

$(0,1) \supset (0,\frac{1}{2}) \supset (0,\frac{1}{3}) \supset (0,\frac{1}{4}) \supset \ldots \supset (0,\frac{1}{n}) \supset \ldots$

Не сущ-ет числа c такого, что $c \in (0,\frac{1}{n})$ при всех $n\in\mathbb{N}$, т.е

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset$$

Подпоследовательность

Пусть (x_n) - последовательность и пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ - строго возрастающая послед. нат. чисел $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots)$

Опр. Последовательность x_{n_k} $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ называется подпоследовательностью послед. $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$

Если послед-ть имеет предел a (здесь a либо $a \in \mathbb{R}$, ~~a =~~ либо $a = +\infty$, а либо $a = -\infty$), то любая под послед-ть имеет тот же самый предел a.

Если сущ-ет подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) такое, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$, то a называется частичным пределом последовательности (x_n)

(Здесь либо $a \in \mathbb{R}$, либо $a = +\infty$, либо $a = -\infty$)

L - мн-во всех частичных пределов последовательности (x_n)

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup L$ - верхний предел послед (x_n)

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf L$ - нижний предел послед (x_n).

$\sup A$ - точная верхняя грань множества A (супремум)

$\inf A$ - точная нижняя грань множества A. (инфимум)

Пример $A=[0,3)$

$\min A=0$ $\max A$ не сущ.

$\inf A=0$ $\sup A=3$.

Пример $A=(1,2)\cup\{3\}\cup(7;+\infty)$

$\min A$ не сущ. $\max A$ не сущ.

$\inf A=1$ $\sup=+\infty$.

Пример $x_n=(-1)^n$

$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не сущ.

$(x_{2k})\ \lim x_{2k}=1$. частичный предел

$(x_{2k+1})\ \lim x_{2k+1}=-1$

$L=\{1,-1\}$.

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\sup L=1$.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n=\inf L=-1$

Задача: Дана послед-ть (x_n)

1) Найти мн-во L всех частичных пределов послед (x_n)

2) Найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$:

$$x_n = \frac{3n+(-1)^n\cdot n}{5n+(-1)^n}$$

$$x_{2k} = \frac{6k+2k}{10k+1} = \frac{8k}{10k+1}$$

$$\lim_{k\to\infty}(x_{2k}) = \lim_{k\to\infty}\frac{8k}{10k+1} = \lim\frac{8}{10+\frac{1}{k}} = \frac{4}{5}$$

$$x_{2k+1} = \frac{6k+3-2k-1}{10k+5-1} = \frac{4k+2}{10k+4} = \frac{2k+1}{5k+2}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{5k+2} = \lim_{k\to\infty}\frac{2+\frac{1}{k}}{5+\frac{2}{k}} = \frac{2}{5}$$

$$L = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup L = \frac{4}{5}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf = \frac{2}{5}$$

Задача $x_n = \sin\frac{2\pi n}{3}$

$x_1 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \sin 2\pi = 0$

$x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ldots$

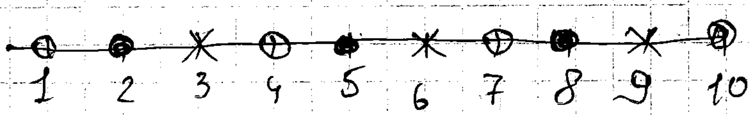
$L \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = \lim \sin 2\pi k = \lim 0 = 0$

$\lim x_{3k+1} = \lim \sin\frac{6\pi k + 2\pi}{3} =$

$= \lim \sin\left(2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\lim x_{3k+2} = \lim \sin\left(2\pi k + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$L = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$



$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача $x_n = 2^{(-1)^n \cdot n}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} 2^{2k} = \lim_{k\to\infty} 4^k = +\infty$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} 2^{(-1)^{2k+1}\cdot 2k+1} = \lim_{k\to\infty} 2^{-(2k+1)} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{4^k\cdot 2} = 0$$

$$L = \{+\infty, 0\}$$

$$\cancel{\sup} \ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf L = 0$$

Задача $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\cdot\cos\frac{\pi n}{2}\right)^n$

$$(x_{4k}) = \left(1 + \frac{1}{4k}\cdot\cos 2\pi k\right)^{4k} = \left(1 + \frac{1}{\underbrace{4k}_{y_k}}\right)^{\frac{4k}{x_k}}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k} = e$$

$$(x_{4k+2}) = \left(1 + \frac{1}{4k+2}\cdot\cos(2\pi k + \pi)\right)^{4k+2} = \left(1 + \frac{(-1)}{4k+2}\right)^{4k+2} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{(-1)}{4k+2}\right)^{4k+2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \left(1+\frac{1}{2k+1}\cdot\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)^{2k+1} =$$

$$=(1)^{2k+1}=1$$

$$\lim x_{2k+1}=1.$$

$$L=\{e, \frac{1}{e}, 1\}.$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = e$$

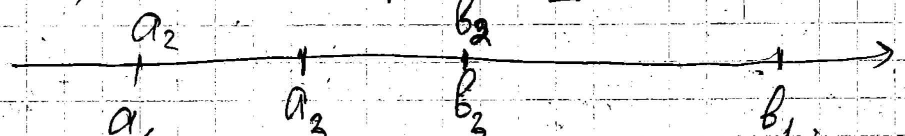
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \frac{1}{e}$$

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Теорема. Из любой огр-ой посл-ти можно выделить сходящуюся подпослед-ть

Док-во основано на исп-и принципа вложенных отрезков.

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\ldots$$



$$(\forall n\in N):\ a_1\le x_n\le b_1$$

$x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\quad x_{n_1} \in [a_1, b_1]$

$x_{n_2} \in [a_2, b_2]$

$x_{n_3} \in [a_3, b_3]$

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k$$

$$\begin{array}{ccc} a_k & x_{n_k} & b_k \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c & c & c \end{array}$$

Фундаментальные последовательности

Опр. Послед (x_n) называется **фундаментальной последовательностью** (или **последовательностью Коши**), если для $\forall \varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $m > N$ и $n > N$ имеет место неравенство

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Символическая запись

(Послед (x_n) фундаментальная) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n > N):$ $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

~~В~~ Равносильное определение

(Посл. (x_n) фунд) $\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})$:

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

<u>Теорема (критерий Коши)</u>

Послед (x_n) сходится (то есть имеет конечный предел) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Послед (x_n) фунд.

$\Rightarrow$ Док-во простое

$\Leftarrow$ Док-во более сложное в нём используется теорема Больцано-Вейерштрасса.

Доказать сходимость посл-ти

$$x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + \frac{\sin 3}{3^3} + \ldots + \frac{\sin n}{3^n}$$

$$x_n = \frac{|\sin 1|}{3} + \frac{|\sin 2|}{3^2} + \ldots + \frac{|\sin n|}{3^n}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{|\sin(n+1)|}{3^{n+1}} \geq 0$$

$$x_n \le \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$$

Докажем, что послед (x_n) фундаментальная. Пусть $\varepsilon > 0$

Имеем.

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{\sin(n+1)}{3^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{3^{n+p}} \right|$$

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_s| \le |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_s|$$

$$\le \frac{|\sin(n+1)|}{3^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{|\sin(n+p)|}{3^{n+p}} \le$$

$$\le \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^p}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3^n} - \frac{1}{2\cdot 3^{n+p}} < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon$$

$$3^n > \frac{1}{2\varepsilon}, \quad \ln 3^n > \ln\frac{1}{2\varepsilon}, \quad n\ln 3 > \ln\frac{1}{2\varepsilon}$$

$$n > \frac{\ln\frac{1}{2\varepsilon}}{\ln 3} \qquad n > \left[\frac{\ln\frac{1}{2\varepsilon}}{\ln 3}\right]$$

Положим $N = \left[\frac{\ln\frac{1}{2\varepsilon}}{\ln 3}\right]$. Тогда

Если $n \ge N$, то $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

$\forall p \in \mathbb{N}$

Таким образом, послед (x_n) явл-ся фунд. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (согласно критерию Коши) послед (x_n) сходится.

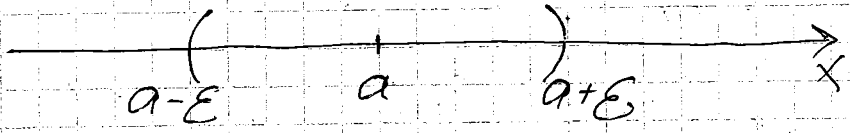
$\exists \lim x_n = a$, $a \in \mathbb{R}$

Семинар 8 (22.10.16).

Определение предела послед.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N): |x_n - a| < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$



Опред фундаментальной послед

$$(\text{Послед } (x_n) \text{ фунд}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \left[\begin{array}{l} (\forall m, n > N): |x_m - x_n| < \varepsilon \\ (\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}): |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \end{array} \right.$$