Лекция №4.
Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод последовательных приближений решения задачи Коши.

Системой нормального вида называется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \dot{x}_2 = f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n). \end{cases} \tag{1}$$

В такой системе число уравнений равно числу неизвестных функций. В левой части каждого уравнения системы стоит первая производная одной из неизвестных функций, в правой части производных нет. Уравнение

$$\dot{x} = f(t,x)$$

является частным случаем такой системы. Для исследования общих свойств систем нормального вида (1) удобно использовать векторные обозначения

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n), \quad \boldsymbol{f} = (f_1,\ldots,f_n).$$

Тогда система (1) запишется в виде одного векторного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

Определение

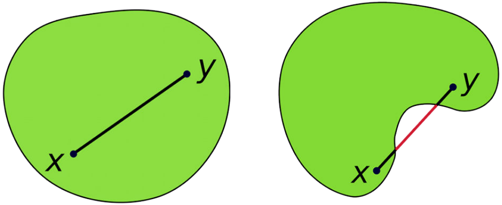
Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет условию Липшица по x в области D, если $\exists\, k = \mathrm{const}$ такая, что $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leqslant k|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|.$$

Если существуют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_j}$, то условие Липшица эквивалентно их ограниченности. $\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial x_j}\right| \leqslant m$. В обратную сторону требуется выпуклость области D.

Замечание

Множество называется выпуклым, если оно содержит вместе с любыми двумя точками весь отрезок, соединяющий их.



Теорема

Пусть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in C^1$ *в* D*, область* D *– выпуклая. Пусть также*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant a, \quad i,j = 1,\dots,n.$$

Тогда $\boldsymbol{f}$ *удовлетворяет условию Липшица в* D *с* $k = na$*.*

Доказательство.

Обозначим через

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (1-t)\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(1) = \boldsymbol{y}, D - \text{выпукла} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi}(t) \in D \, \forall t \in (0,1)$$

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t)))' = \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{\varphi}'(t) = \frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{d\boldsymbol{\varphi}}\right\| = \left\|\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right\| \leqslant na$$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(1)) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(0))| = \left|\int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(t))\right| dt \leqslant \int\limits_0^1 na|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\, dt = na|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$$

$\square$

Теорема

Пусть дана система дифференциальных уравнений, записанная в векторном виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\, \boldsymbol{x}),\ \text{где}\ (t,\boldsymbol{x}) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3}$$

и начальные условия

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}, (t_0,\boldsymbol{x_0}) \in D. \tag{4}$$

Пусть $f(t,\boldsymbol{x})$ непрерывна по $(t,\boldsymbol{x})$ и удовлетворяет условию Липшица по x в области D. Тогда $\exists\, d$, такое, что на отрезке $[t_0 - d, t_0 + d]$ существует единственное решение задачи Коши.

Доказательство единственноести решения.

Пусть $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ два решения задачи Коши. Вычтем одно из другого и обозначим полученную функцию через

$$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t).$$

Покажем, что $\boldsymbol{z}(t) \equiv 0$. Действительно для функции $\boldsymbol{z}(t)$ будем иметь

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t))$$

Умножим это равенство скалярно на $\boldsymbol{z}(t)$

$$\left(\boldsymbol{z},\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}\right)=(\boldsymbol{z},\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)))\leqslant|\boldsymbol{z}|\cdot|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant k|\boldsymbol{z}|\cdot|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|=k|\boldsymbol{z}|^2,$$

$$\frac{d|\boldsymbol{z}|^2}{dt}=2\left(\boldsymbol{z},\frac{d\boldsymbol{z}}{dt}\right)\leqslant 2k|\boldsymbol{z}|^2,$$

$$\frac{d|\boldsymbol{z}|^2}{dt}-2k|\boldsymbol{z}|^2\leqslant 0.$$

Домножим последнее неравенство на $e^{-2kt}\geqslant 0$

$$e^{-2kt}\frac{d|\boldsymbol{z}|^2}{dt}-2ke^{-2kt}|\boldsymbol{z}|^2\leqslant 0,$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-2kt}|\boldsymbol{z}|^2)\leqslant 0.$$

Таким образом функция $e^{-2kt}|\boldsymbol{z}|^2$ – неотрицательна, невозрастает и в силу начальных условий $\boldsymbol{z}(t_0)=0$ при $t=t_0$. Следовательно $\boldsymbol{z}(t)\equiv 0$ при $t\geqslant t_0$. Аналогично рассматривается случай $t\leqslant t_0$. $\square$

Доказательство существования решения.

Уравнение (3) и начальные условия (4) эквивалентны интегральному уравнению

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\, \boldsymbol{x}(s))ds. \tag{5}$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{x}(t)$ – решение уравнения (3) удовлетворяющее начальным условиям (4). Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\, \boldsymbol{x}(t)).$$

Проинтегрируем последнее равенство по t от t_0 до t

$$\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\, \boldsymbol{x}(s))ds,$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\, \boldsymbol{x}(s))ds.$$

В обратную сторону. Пусть $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет (5), следовательно интеграл в (5) имеет смысл, следовательно $\boldsymbol{x}(t)$ – непрерывен, следовательно $\boldsymbol{f}(t,\, \boldsymbol{x}(t))$ – непрерывна, следовательно

$$\exists \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\, \boldsymbol{x}(s))ds\right) = \boldsymbol{f}(t,\, \boldsymbol{x}(t)), \Rightarrow \exists \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\, \boldsymbol{x}(t)).$$

Будем искать решение этого уравнения методом последовательных приближений.
В области D возьмем шар S с центром в точке (t_0,x_0) радиуса R. R такое, что $S \subset D$.
В шаре S функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))$ ограничена, тогда $\exists\, m$ такое, что $\left|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)\right| \leqslant m$.
В S впишем цилиндр Z с осью, параллельной оси t

$$Z = \{(t,x) : |t - t_0| \leqslant d, |x - x_0| \leqslant md\}\,.$$

Тогда $R^2 = d^2 + m^2 d^2$ следовательно $d = \frac{R}{\sqrt{1+m^2}}$.

Построим последовательность последовательных приближений по формулам

$$\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{i-1}(s))ds.$$

Все такие приближения содержатся в цилиндре Z.
$\boldsymbol{x}^0(t) = \boldsymbol{x}_0$ содержится в Z.
Предположим, что $\boldsymbol{x}^{(i-1)}$ содержится в Z, докажем, что тогда и $\boldsymbol{x}^i(t)$ содержится в Z.
Имеем

$$\left|\boldsymbol{x}^i(t) - \boldsymbol{x}^0\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\, \boldsymbol{x}^{i-1}(s)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \left|f(s,\boldsymbol{x}^{i-1}(s)\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} m\, ds = m|t - t_0| \leqslant md.$$

Рассмотрим ряд, членами которого являются функции

$$\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^0, \ldots, \boldsymbol{x}^i - \boldsymbol{x}^{(i-1)}, \ldots, \tag{6}$$

Последовательные приближения $\boldsymbol{x}^i(t)$ являются частичными суммами ряда.
Докажем равномерную сходимость этого ряда. Для этого воспользуемся признаком Вейерштрасса.
Покажем, что

$$|\boldsymbol{x}^{i+1}(t) - \boldsymbol{x}^i(t)| \leqslant \frac{k^i m |t - t_0|^{i+1}}{(i+1)!}, \tag{7}$$

где k – константа Липшица для функции $\boldsymbol{f}$.
Докажем неравенства (7) по индукции.
Для $i = 0$ имеем $|\boldsymbol{x}^1(t) - \boldsymbol{x}^0| \leqslant m|t - t_0|$.
Предположим, что выполнено предположение индукции

$$|\boldsymbol{x}^i(t) - \boldsymbol{x}^{i-1}(t)| = \frac{k^{i-1} m |t - t_0|^i}{i!}.$$

Докажем, что верно (7).

Имеем

$$|\boldsymbol{x}^{i+1}(t)-\boldsymbol{x}^{i}(t)| = \left|\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{i}(s)\,ds-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{i-1}(s)ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t}\left|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{i}(s)\,ds-\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^{i-1}(s)\right|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant k\int_{t_0}^{t}\left|\boldsymbol{x}^{i}(s)-\boldsymbol{x}^{i-1}(s)\right|\,ds \leqslant \frac{k^i m}{i!}\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^i ds =$$

$$= \frac{k^i m}{(i+1)!}(|s-t_0|^{i+1})\Big|_{t_0}^{t} = \frac{k^i m|t-t_0|^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Таким образом неравенства (7) доказаны.
Так как последовательные приближения не выходят из цилиндра Z, то $|t-t_0|\leqslant d$ и следовательно

$$|\boldsymbol{x}^{i+1}(t)-\boldsymbol{x}^{i}(t)| \leqslant \frac{k^i m d^{i+1}}{(i+1)!}.$$

Ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k^i m d^{i+1}}{(i+1)!} \tag{8}$$

является мажорирующим для ряда (6). Ряд (8) сходится по признаку Даламбера.

Действительно

$$\lim_{i\to\infty}\frac{a_{i+1}}{a_i} = \lim_{i\to\infty}\frac{k^i m d^{i+1}}{(i+1)!}\cdot\frac{i!}{k^{i-1} m d^i} = \lim_{i\to\infty}\frac{kd}{i} = 0 < 1.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\boldsymbol{x}^i(t)$ сходится равномерно, следовательно существует предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}^i(t) = \boldsymbol{x}(t)$$

непрерывная функция.

Переходя к пределу в равенстве

$$\boldsymbol{x}^{i+1}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^i(s))ds,$$

получим, что $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(s,\,\boldsymbol{x}(s))ds.$$

Значит $\boldsymbol{x}(t)$ – решение задачи Коши. $\square$

Замечание

В случае, когда на функцию $f(t,x)$ не налагается других условий, кроме непрерывности задача (3), (4) может иметь более одного решения. Например задача

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

имеет решения

$$x(t) \equiv 0, \text{ и } x(t) = t^3.$$