Математический анализ

Определение Пусть A$\subset \mathbb{R}$ - множество всех пределельных точек последовательности $\{a_n\}$. Назовём верхним(нижним) пределом $\{a_n\}$ такое число $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\ A$ ($\lim\limits_{n\to\infty} = inf\ A$)

Задача. Доказать, что верхние и нижние точки - предельные точки $\{a_n\}$.

Теорема $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = B <=> \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной (последовательность Коши).

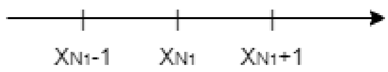
Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n, m > N_\varepsilon; n, m \in \mathbb{N} => |x_m = x_n| < \varepsilon$

Теорема. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} X_N = A, A \in \mathbb{R} <=> \{x_n\}$ - фундаментальная последовательность

Доказательство: $\forall \varepsilon > 0\ \exists_{N_\varepsilon} : \forall n > N_\varepsilon => |x_n - A| < \varepsilon/2$

Тогда $\forall m, n > N(\varepsilon) => |x_n - x_m| = |(x_n - A) + (A - x_m)| \leq |x_n - A| + |x_m - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$<=$ Заметим, что $\{x_n\}-$ ограничена. Действительно, пусть $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall m \geq N_1 => |x_m - x_n| < 1$



Снаружи $\{x_1, x_2, ...x_{N_1-1}\}$ - далее очевидно

По Теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} : \exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = B,\ B \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon : \forall m, n > N(\varepsilon) => |x_m - x_n| < \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$

Пусть $N = max\ \{N(\varepsilon), n_{k_0}\}$, тогда $\forall n > N => |x_m - B| = |(x_m - x_{n_k}) + (x_{n_k} - B)| \leq |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - B| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, где $n_k > n_{k_0}$ - любое $=> B = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, ч.т.д.

Свойства:

а) Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел

б) Принцип вложенных отрезков

в) Всякое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань

г) Всякая фундаментальная последовательность имеет предел

а) => б) => в) => г)

Задача. Доказать, что г) => а) => $\mathbb{R}$ - полное множество

Предел Функции

Функция - отображение одного множества на другое

$\phi : A \to B$

$a \in A \to b = \phi(a)$

$\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

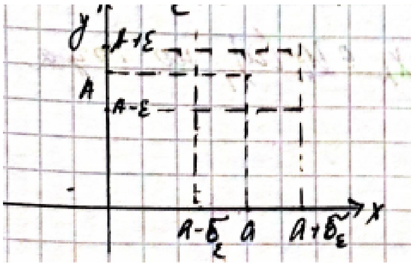
$k \in \mathbb{N} \to a_k$

Числовая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\ulcorner f : \{(x, f(x)), x \in D_f\}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

Определение(По Коши). Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a, \lim\limits_{x\to a} f(x) = A <=> \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta_\varepsilon>0} : \quad \forall x : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon => |f(x) - A| < \varepsilon$



Определение. Проколотой $\varepsilon-$окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $u_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A <=> \forall u_\varepsilon(A) \exists u_{\delta_\varepsilon}(a) : \forall x \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => f(x) \in u_\varepsilon(A)$

Определение. $u(a)$ - проколотая окрестность $<=> \exists_{N_{\varepsilon>0}} : u(a) > u_\varepsilon(a)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A <=> \forall u(A)\ \exists u(a) : \forall x \in u(a) => f(x) \in u(A)$

Определение. $u_R(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > R\}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty(-\infty) <=> \forall_{R>0} \exists_{\delta_\varepsilon>0} : \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon => f(x) > R (f(x) < -R)$

$\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x) = A <=> \forall_{\varepsilon>0} \exists_{R_\varepsilon>0} : \quad \forall_x : x > R_\varepsilon (x < -R_\varepsilon) => |f(x) - A| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty <=> \forall_{R>0} \exists_{M_R>0} : \forall_x : x < -M_R => f(x) > R$

Определение(По Гейне). $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A <=> \forall \{x_n\} : \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a\ \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = A$

Теорема Определение предела по Коши эквивалентно определению по Гейне

Доказательство

$\forall x \in U_\delta(a) => |f(x) - A| < \varepsilon$. Пусть $\{x_n\}$ произовольная : $\lim\limits_{n\to\infty} = a$, тогда для $u_\delta(a)\ \exists_N : \forall_{n>N} => x_n \in u_\delta a$, но тогда

$|f(x_n) - A| < \varepsilon <=> \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ч.т.д.

Доказательство от Гейне к Коши

Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ - по Гейне, т.е. $\forall\{x_n\}\ (x_n \to a)_{n\to\infty} => \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, но (по Коши не существует): $\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x_\delta \in \mathbb{R} : |x_\delta - a| < \delta \wedge |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$

Возьмём последовательность $\{\delta_n\} = \{\dfrac{1}{n}\} \exists x_n \in \mathbb{R} : |x_n - a| < \dfrac{1}{n} \wedge |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$

Имеем последовательность $\{x_n\} : \lim\limits_{n\to\infty} = a$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \neq A$, т.к. $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 \forall n$ - ПРОТИВОРЕЧИЕ!!!!!!!!!!!

Свойства пределов:

1) Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то он единственный.

2) Если $\exists \lim\limits_{x\to a}\ f(x) = A, A \neq 0, A \in \mathbb{R}$, то $\exists u_\delta(A) : \forall x \in u_\delta(A) => |f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$

Доказательство: Для $\varepsilon_0 = \dfrac{|A|}{2} > 0$, тогда $\exists\ \delta_{\varepsilon_0} > 0 : \forall x \in u_{\delta_\varepsilon}(a) => |f(x) - A| < \dfrac{|A|}{2} <=> -\dfrac{|A|}{2} < f(x) - A < \dfrac{|A|}{2}$

а) $A > 0 : 0 < \dfrac{A}{2} < f(x) < \dfrac{3A}{2}$

б) $A < 0 : \dfrac{3A}{2} < f(x) < \dfrac{A}{2} < 0$

3) Если $f(x) \leq g(x)$ в $u(a)$, то и $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Доказательство(от противного):

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Пусть $\varepsilon = \dfrac{A-B}{3}$, тогда $\exists u_{\delta_1}(a) : \forall x \in u_{\delta_1}(a) => f(x) \in u_{\delta_2}(a) => g(x) \in u_\varepsilon(B)$. Пусть $u(a) = u_{\delta_1}(a) \wedge u_{\delta_2}(a)$, тогда $\forall x \in u(a) => f(x) \in u_\varepsilon(A), g(x) \in u_\varepsilon(B) => g(x) < f(x) -$ ПРОТИВОРЕЧИЕ!!!!!!

Свойство 4. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x), B = \lim\limits_{x\to a} g(x), A, B \in \mathbb{R}$ тогда

1) $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda A \quad \lambda \in \mathbb{R}$
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$
3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$
4) Если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Доказательство: Пусть $\{x_n\} : (x_n \to a)_{n\to\infty}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)} = \dfrac{A}{B} => \exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$=(по Гейне)$\dfrac{A}{B}$

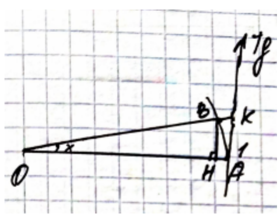
Теорема о двух миллиционерах

Пусть $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ в $u(a)$, причём $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} h(X) = A$

Доказательство: Пусть $\{x_n\} : (x_n \to A)_{n\to\infty}$, тогда $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$

Тогда по Теореме о двух миллиционерах для последовательностей: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = A => \exists \lim\limits_{x\to a} h(x) =$ (по Гейне) A

Пример(Первый замечательный предел)



$\sin x = \dfrac{BH}{BO} = BH$

$tgx \ \dfrac{AK}{OA} = AK$

BH<BA<AK

$S_{\triangle OAB} = \dfrac{x \cdot 1}{2} = \dfrac{x}{2}$ - площадь сектора OAB

$S_{\triangle OAK} = \dfrac{AK \cdot OA}{2} = \dfrac{tgx}{2}$ - площадь $\triangle OAK$

$S_{\triangle OAB} < S_{\triangle OAK}$

$x < tg\ x$

$BH < BA < AK <=> sin\ x < x < tg\ x \mid \ : sin\ x$

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx} \quad (x > 0)$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{sinx} = 1$, ч.т.д.

Пример 2(Второй замечательный предел)

$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$

Рассмотрим функцию [X] - целая часть числа X

[X] - наибольшее целое, не превосходящее [x].

$[1,5] = 1 \qquad [7,25] = 7 \qquad [-7,25] = -8$

$[x] \leq x < [x] + 1$

$(1 + \dfrac{1}{[x]+1})^{[x]} < (1 + \dfrac{1}{x})^x < (1 + \dfrac{1}{[x]+1})^{[x]+1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{[x]+1})^{[x]} = \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{k+1})^{k+1} \cdot \dfrac{1}{(1 + \dfrac{1}{k+1})} = e$

$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \dfrac{1}{[x]})^{[x]+1} = \lim\limits_{k \to \infty} (1 + \dfrac{1}{k})^{k+1} = \lim\limits_{k \to \infty} = (1 + \dfrac{1}{k})^k \cdot (1 + \dfrac{1}{k}) = e$