# Лекция №8.
# Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Будем рассматривать линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{1}$$

$$a_i = const, a_0 \neq 0, a_i \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}).$$

## Определение

Многочлен

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + \ldots + a_n$$

называется характеристическим многочленом для уравнения (1).

## Теорема

*Функция*

$$y(x) = e^{\lambda_0 x}$$

*является решением уравнения (1) тогда и только тогда когда* $\lambda_0$ *– корень характеристического многочлена.*

## Доказательство.

Утверждение теоремы следует из равенства

$$L(e^{\lambda_0 x}) = e^{\lambda_0 x}(a_0\lambda^n + \ldots + a_n),$$

здесь использовалось соотношение

$$\frac{d^k\, e^{\lambda_0 x}}{dx^k} = \lambda_0^k e^{\lambda_0 x}.$$

$\square$

## Теорема

*Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - различные (простые) корни характеристического многочлена, тогда функции $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ldots,\varphi_n(x) = e^{\lambda_n x}$ образуют ФСР уравнения (1).*

## Доказательство.

Так как $\lambda_i$ – корни характеристического многочлена, то функции $\varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}$ – решения уравнения (1). Покажем, что эти функции –линейно независимы. Для этого рассмотрим определитель Вронского

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \cdots & e^{\lambda_n x}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x}\end{vmatrix}=$$

$$=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Последний определитель носит название определителя Вандермонда и как известно из линейной алгебры равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i).$$

Таким образом

$$W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_n}(x)=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)x}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_j-\lambda_i)\neq 0$$

так как числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ - различные. $\square$

## Пример

Решим уравнение

$$y''' - 2y'' - 8y' = 0.$$

*Составим характеристический многочлен для этого уравнения*

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda = 0.$$

*Корнями этого характеристического многочлена являются числа*

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 4.$$

*Таким образом ФСР этого уравнения состоит из функций*

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-2x}, \quad \varphi_3(x) = e^{4x}.$$

*Общее решение уравнения задается формулой*

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{4x}.$$

## Замечание

*Если все коэффициенты уравнения (1) вещественные числа и* $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ *– корень характеристического многочлена, то* $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ *– тоже корень характеристического многочлена.*

## Действительно

*если* $\lambda_0$ *– корень, то*

$$a_0\lambda_0^n + a_1\lambda_0^{n-1} \ldots + a_n = 0,$$

*применим операцию комплексного сопряжения к левой и правой части равенства*

$$\overline{a_0\lambda_0^n + a_1\lambda_0^{n-1} + \ldots + a_n} = \overline{0},$$

$$\overline{a_0\lambda_0^n} + \overline{a_1\lambda_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_n} = \overline{0},$$

$$\overline{a}_0\overline{\lambda_0^n} + \overline{a}_1\overline{\lambda_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a}_n = \overline{0}$$

$$a_0\overline{\lambda}_0^n + a_1\overline{\lambda}_0^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

*Последнее равенство означает, что* $\bar{\lambda}_0$ *– корень характеристического многочлена.*

## Замечание

*Кратности корней* $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ *и* $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ *характеристического многочлена* $P(\lambda)$ *совпадают.*

## Действительно

*Разделим характеристический многочлен* $P(\lambda)$ *на многочлен*

$$(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \bar{\lambda}_0) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2).$$

*Так как оба многочлена имеют вещественные коэффициенты, многочлен полученный в результате деления также будет иметь вещественные коэффициенты. Значит к нему можно применить предыдущее замечание. Отсюда следует, что кратности корней* $\lambda_0$ *и* $\bar{\lambda}_0$ *совпадают.*

## Лемма

*Пусть $y = u + iv$ – комплексное решение уравнения (1) и все коэффиценты $a_i$ уравнения (1) – вещественные числа, тогда функции $u$ и $v$ – вещественные решения уравнения (1).*

## Доказательство.

Покажем сначала, что если функция $y = u + iv$ – комплексное решение уравнения (1), то функция $\bar{y} = u - iv$ – тоже решение этого уравнения. Так как $y$ – решение то выполняется равенство

$$a_0 y^{(n)} + \ldots a_n y = 0,$$

применим операцию комплексного сопряжения к левой и правой части этого равенства

$$\begin{aligned}
\overline{a_0 y^{(n)} + \ldots + a_n y} &= \overline{0}, \\
\overline{a_0 y^{(n)}} + \ldots + \overline{a_n y} &= 0, \\
\overline{a_0}\,\overline{y^{(n)}} + \ldots + \overline{a}_n \overline{y} &= 0, \\
a_0 \overline{y}^{(n)} + \ldots + a_n \overline{y} &= 0.
\end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что $\bar{y}$ – решение уравнения (1).
Так как уравнение (1) – линейное однородное уравнение, то функции

$$u = \frac{y + \bar{y}}{2}, \quad v = \frac{y - \bar{y}}{2i}$$

являются его вещественными решениями. □

## Замечание

*Функции $y = u + iv$ и $\overline{y} = u - iv$ – линейно независимы тогда и только тогда когда функции $u$ и $v$ – линейно независимы.*

Действительно,

*это следует из того, что якобиан преобразования*

$$u = \frac{y + \bar{y}}{2}, \quad v = \frac{y - \bar{y}}{2i}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{-i}{2} \neq 0.$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

таким образом функции $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются вещественными решениями уравнения (1), соответствующими паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$.

Из всего сказанного выше следует, что оказывается верна следующая теорема.

## Теорема

*Пусть все корни характеристического многочлена уравнения (1) различны, а коэффициенты $a_i$ вещественны, тогда ФСР для этого уравнения состоит из функций $e^{\lambda x}$ для каждджого вещественного корня $\lambda$ и функций $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$ для каждой пары комплексно сопряжённых корней $\alpha \pm i\beta$.*

## Пример

Решим уравнение

$$y''' - 8y'' + 37y' - 50y = 0.$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 37\lambda - 50 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -8 | 37 | -50 |
| 2 | 1 | -6 | 25 | 0 |

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 25) = 0, \quad (\lambda - 2)\left((\lambda^2 - 3)^2 + 16\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 + 4i, \quad \lambda_3 = 3 - 4i$$

$$\text{ФСР: } \varphi_1(x) = e^{2x}, \quad \varphi_2(x) = e^{3x}\cos 4x, \quad \varphi_3(x) = e^{3x}\sin 4x$$

$$y_{\text{оо}} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}\cos 4x + c_3 e^{3x}\sin 4x$$

## Случай кратных корней.

### Теорема

*Пусть $\lambda = \lambda_0$ – корень характеристического многочлена уравнения (1) кратности $k_0$, тогда функции*

$$\underbrace{e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k_0-1}e^{\lambda_0 x}}_{k_0\,\text{штук}}$$

*являются решениями уравнения (1).*

### Доказательство.

Для $\forall k = \overline{0, k_0 - 1}$ подставим функцию $x^k e^{\lambda_0 x}$ в уравнение (1), при этом заметим, что

$$x^k e^{\lambda_0 x} = \left( \frac{\partial^k e^{\lambda x}}{\partial \lambda^k} \right) \Bigg|_{\lambda = \lambda_0}.$$

$$L(x^k e^{\lambda_0 x}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left( \frac{\partial^{n-j} x^k e^{\lambda_0 x}}{\partial x^{n-j}} \right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left( \frac{\partial^{n-j}}{dx^{n-j}} \left( \left. \frac{\partial^k e^{\lambda x}}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_0} \right) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \left( \left. \left( \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\partial^{n-j} e^{\lambda x}}{dx^{n-j}} \right) \right|_{\lambda=\lambda_0} \right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left( \left. \left( \frac{\partial^k \lambda^{n-j} e^{\lambda x}}{\partial \lambda^k} \right) \right|_{\lambda=\lambda_0} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left( \left. \left( \frac{\partial^k a_j \lambda^{n-j} e^{\lambda x}}{\partial \lambda^k} \right) \right|_{\lambda=\lambda_0} \right) = \left. \frac{\partial^k \sum_{j=0}^{n} (e^{\lambda x} a_j \lambda^{n-j})}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \left. \frac{\partial^k \left( e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} \right)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \left. \frac{\partial^k \left( e^{\lambda x} P_n(\lambda) \right)}{\partial \lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left( C_k^j \left. \frac{\partial^j P_n(\lambda)}{\partial \lambda^j} \right|_{\lambda=\lambda_0} x^{k-j} e^{\lambda_0 x} \right) = 0$$

так как $\lambda_0$ – корень кратности $k_0$, а $j \leqslant k \leqslant k_0 - 1$. $\square$

## Теорема

*Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *– корни характеристического многочлена уравнения (1). Пусть* $k_1, \ldots, k_m$ *– кратности этих корней соответственно.* $k_1 + \ldots + k_m = n$. *Тогда функции*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \ldots & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \ldots & x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \end{array}$$

*образуют ФСР уравнения (1).*

## Доказательство.

Как следует из предыдущей теоремы, каждая из перечисленных функций является решением уравнения (1).

Остается показать линейную независимость этих функций.

Предположим противное, тогда в равенстве

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + p_m(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0 \qquad (2)$$

хотя бы один из многочленов $p_i(x)$ содержит ненулевой коэффициент.

$$p_1(x)e^{\lambda_1 x} + \ldots + p_m(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0 \tag{2}$$

Пусть нумерация такова, что это многочлен $p_m(x)$.

Разделим равенство (2) на $e^{\lambda_1 x}$ и продифференцируем на один раз больше, чем степень многочлена $p_1(x)$.

Многочлен $p_1(x)$ исчезнет, а степени оставшихся многочленов останутся прежними, хотя сами многочлены и изменятся.

Получится равенство подобное равенству (2), но содержащее на один член меньше. С ним поступим так же.

Будем продолжать до тех пор пока не придем к равенству, содержащему один член

$$r_m(x)e^{(\lambda_m - \lambda_{m-1})x} \equiv 0. \tag{3}$$

Многочлен $r_m(x)$ той же степени, что и многочлен $p_m(x)$, а значит содержит ненулевой коэффициент.

Таким образом равенство (3) невозможно. $\square$

Рассуждая так же как и в случае с простыми корнями придем к следующей теореме

### Теорема

*Пусть все коэффициенты уравнения (1) – вещественные числа. Тогда функции*

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$$

*для каждого вещественного корня $\lambda$ характеристического многочлена кратности $k$, и функции*

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots, & x^{l-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots, & x^{l-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$$

*для каждой пары комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического многочлена кратности $l$ формируют ФСР уравнения (1), состоящую из вещественнозначных функций.*

## Пример

Решим уравнение

$$y^{(7)} - 3y^{(6)} + 5y^{(5)} - 7y^{(4)} + 7y''' - 5y'' + 3y' - y = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^7 - 3\lambda^6 + 5\lambda^5 - 7\lambda^4 + 7\lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

| | 1 | -3 | 5 | -7 | 7 | -5 | 3 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | 3 | -4 | 3 | -2 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | -1 | 2 | -2 | 1 | -1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | | |

$$(\lambda-1)^3(\lambda^4+2\lambda^2+1) = 0, \quad (\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\, k_1 = 3; \quad \lambda_2 = i,\, k_2 = 2; \quad \lambda_3 = -i,\, k_3 = 2$$

$$\text{ФСР: } \varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = xe^x, \quad \varphi_3(x) = x^2e^x$$

$$\varphi_4(x) = \cos x, \quad \varphi_5(x) = x\cos x, \quad \varphi_6(x) = \sin x, \quad \varphi_7(x) = x\sin x$$

$$y_{\text{оо}} = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + c_4\cos x + c_5x\cos x + c_6\sin x + c_7x\sin x$$

## Пример

Построить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (как можно более низкого порядка), имеющее частное решение

$$y_1 = x^2 e^x.$$

$y_1 = x^2 e^x \Rightarrow \lambda = 1$, $k = 3$ корень характеристического многочлена.

$$(\lambda - 1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$