1. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? $G = V_7$

2. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? $G = V_{4,5}$

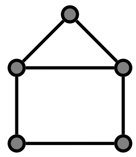
3. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? G — булев куб размерности 4.

4. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? G — клетчатое поле из 5×8 клеток.

5. На каком наименьшем количестве ребер графа G достаточно задать значение потока так, чтобы поток был определен однозначно? G — правильный шестиугольник, в котором каждая вершина соединена с центром в точке O.

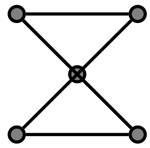
---

6. Постройте все потоки $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_2$ на графе



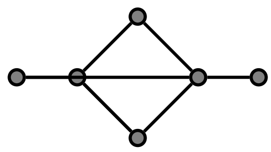
Сколько потоков $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_5$ можно задать на этом графе?

7. Постройте все потоки $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_2$ на графе



Сколько потоков $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_6$ можно задать на этом графе?

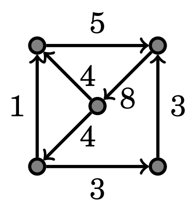
8. Постройте все потоки $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_2$ на графе



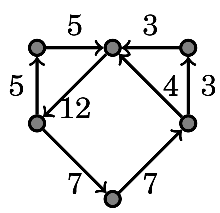
Сколько потоков $f : \vec{E} \to \mathbb{Z}_4$ можно задать на этом графе?

---

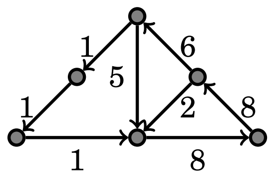
9. Найдите какой-нибудь базис пространства потоков графа и разложите в нем поток:



10. Найдите какой-нибудь базис пространства потоков графа и разложите в нем поток:



11. Найдите какой-нибудь базис пространства потоков графа и разложите в нем поток:



---

12. Найдите все корни многочлена x^2+3x+1, принадлежащие $GL(2,\mathbb{F}_7)$.

13. Найдите все корни многочлена x^3+x^2+2, принадлежащие $GL(3,\mathbb{F}_3)$.

14. Найдите все корни многочлена x^2+x-3, принадлежащие $GL(2,\mathbb{F}_5)$.

---

15. Найдите порядок мультипликативной группы кольца $\mathbb{F}_3[x]/(x^4+2x^3+1)$

16. Определите возможные порядки элемента α в кольце $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где $\alpha^4=\alpha+2$.

17. Определите количество необратимых элементов в кольце $\mathbb{F}_5[\alpha]$, где $\alpha^3=2\alpha^2+3\alpha$.

---

18. Найдите порядок мультипликативной группы $Im\varphi$, где $\varphi:\mathbb{F}_3[x]\to GL(2,\mathbb{F}_3)$,

$$\varphi(p)=p\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

19. Определите возможные порядки элемента в кольце $Im\varphi$, где $\varphi:\mathbb{F}_5[x]\to GL(2,\mathbb{F}_5)$,

$$\varphi(p)=p\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

20. Определите количество необратимых элементов в кольце $Im\varphi$, где $\varphi:\mathbb{F}_3[x]\to GL(2,\mathbb{F}_3)$,

$$\varphi(p)=p\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

---

21. Докажите, что кольцо A матриц $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha+3\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_5$ не является полем.

а) Сколько в нем элементов?
б) Найдие все необратимые элементы.
в) Перечислите все идеалы в A.
г) Можно ли разложить A в прямое произведение колец?

22. Докажите, что кольцо A матриц $\begin{pmatrix}2\alpha & -\beta\\ \beta & \beta-\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_3$ не является полем.

а) Сколько в нем элементов?
б) Найдие все необратимые элементы.
в) Перечислите все идеалы в A.
г) Можно ли разложить A в прямое произведение колец?

23. Докажите, что кольцо A матриц $\begin{pmatrix}\alpha & 2\beta\\ 3\beta & \alpha-\beta\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_5$ не является полем.

а) Сколько в нем элементов?
б) Найдие все необратимые элементы.
в) Перечислите все идеалы в A.
г) Можно ли разложить A в прямое произведение колец?

---

24. Пусть $I=(x^2+1)\subset\mathbb{Z}[x]$. Определите, содержит ли I многочлены:
а) $x^5+4x^3+x^2+3x+4$, б) $x^5+6x^3+2x^2+5x+2$.

25. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{Z}[x]$, содержащие многочлены
а) x^3-2x^2+5, б) x^3+x^2-4x+2

26. В идеале $I=(x^2+2x-3)\subset\mathbb{Z}[x]$ найдите многочлен наименьшей степени, содержащийся в идеале
а) (x^2+x-6), б) (x^2-3x+1)

---

27. Докажите, что идеал $I=(x^3+1)$ не является максимальным в $\mathbb{F}_2[x]$. Перечислите максимальные идеалы, содержащие I.

28. Перечислите все немаксимальные идеалы кольца $\mathbb{F}_3[x]$, содержащие многочлен x^3+x^2-x+2.

29. Перечислите все максимальные идеалы кольца $\mathbb{F}_2[x]$, содержащие многочлены $x^5-x^3+x^2+x$ и x^4-x.

---

30. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+1)$.

31. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{F}_3[x]/(x^4+x^2+x)$.

32. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{F}_3[\alpha]$, где $\alpha^2=\alpha+2$.

33. Перечислите все идеалы кольца $\mathbb{F}_2[\alpha]$, где $\alpha^3=\alpha^2+\alpha$.

---

34. Постройте поле из 49 элементов и найдите в нем элемент t порядка
а) 3, б) 4, в) 6,
для каждого t найдите t^{-1}.

35. Постройте поле из 25 элементов и найдите в нем элемент t порядка
а) 2, б) 4, в) 8,
для каждого t найдите t^{-1}.

36. Постройте поле из 121 элемента и найдите в нем элемент t порядка
а) 5, б) 10, в) больше 10.
для каждого t найдите t^{-1}.

---

37. Пусть $I=(18)$, $J=(24)$ — идеалы в $\mathbb{Z}$. Найдите а) $I\cap J$, б) $I+J$.

38. Пусть $I=(12)$, $J=(45)$ — идеалы в $\mathbb{Z}$. Найдите а) $I\cap J$, б) $I+J$.

39. Пусть $I=(30)$, $J=(50)$ — идеалы в $\mathbb{Z}$. Найдите а) $I\cap J$, б) $I+J$.

---

40. Найдите явный вид последовательности $x_{n+1}=-2x_n+3x_{n-1}$ с помощью характеристического многочлена.

41. Найдите явный вид последовательности $x_{n+1}=5x_n-6x_{n-1}$ с помощью производящих рядов.

42. Найдите явный вид последовательности $x_{n+1}=6x_n-8x_{n-1}$ с помощью характеристического многочлена.

43. Найдите явный вид последовательности $x_{n+1}=-3x_n+4x_{n-1}$ с помощью производящих рядов.

---

44. Найдите такой многочлен $p(x)\in\mathbb{F}_3[x]$, что
а) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x))\cong\mathbb{Z}_3$
б) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x))\cong\mathbb{Z}_9$
в) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x))\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$,
г) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x))\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$,
д) $\mathbb{F}_3[x]/(p(x))\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$,
или докажите его отсутствие.

---

45. Для каждого k найдите количество решений уравнения $a+2b-c=k$, где a,b,c — целые числа, $-1\le a\le 1$, $1\le b\le 3$, $0\le c\le 2$.

46. Для каждого k найдите количество решений уравнения $2a+b+c=k$, где a,b,c — целые числа, $1\le a\le 3$, $0\le b,c\le 2$.

47. Для каждого k найдите количество решений уравнения $a-b-2c=k$, где a, b, c — целые числа, $-1 \le a \le 1$, $-2 \le b \le 0$, $1 \le c \le 3$.

48. Для каждого k найдите количество решений уравнения $2a+2b-c=k$, где a, b, c — целые числа, $0 \le a \le 2$, $1 \le b \le 3$, $-1 \le c \le 1$.