ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ЗАДАЧА ПО ТЕМЕ «ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ»

С. В. Костин

Условие задачи

Точки A, B, C, D заданы своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат Oxy.

1) Доказать, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

2) Определить, можно ли в четырехугольник $ABCD$ вписать окружность. Если да, то найти координаты центра M и радиус r этой окружности.

3) Определить, можно ли около четырехугольника $ABCD$ описать окружность. Если да, то найти координаты центра N и радиус R этой окружности.

N	A	B	C	D
1	$(1,\ 5)$	$(-3,\ 2)$	$(9,\ -7)$	$(4,\ 5)$
2	$(7,\ -3)$	$(3,\ 9)$	$(-4,\ 8)$	$(-7,\ -1)$
3	$(3,\ -2)$	$(7,\ 2)$	$(8,\ 9)$	$(-6,\ 7)$
4	$(8,\ 3)$	$(-2,\ 8)$	$(-4,\ 7)$	$(7,\ -4)$
5	$(1,\ -7)$	$(-7,\ 8)$	$(9,\ 8)$	$(9,\ -1)$
6	$(9,\ -5)$	$(-5,\ 2)$	$(-2,\ 6)$	$(0,\ 7)$
7	$(7,\ 3)$	$(8,\ 1)$	$(5,\ -5)$	$(-1,\ 7)$
8	$(8,\ 5)$	$(-6,\ 7)$	$(3,\ -2)$	$(5,\ -1)$
9	$(5,\ -3)$	$(-1,\ 5)$	$(8,\ 5)$	$(8,\ 1)$
10	$(3,\ -8)$	$(5,\ 3)$	$(-4,\ 6)$	$(-6,\ 5)$

11	$(7,\ 2)$	$(8,\ 9)$	$(-9,\ 2)$	$(5,\ 0)$
12	$(5,\ 5)$	$(3,\ 7)$	$(-4,\ -7)$	$(6,\ -2)$
13	$(3,\ -4)$	$(-2,\ 8)$	$(6,\ 2)$	$(6,\ 0)$
14	$(9,\ -7)$	$(-1,\ 3)$	$(0,\ 5)$	$(2,\ 7)$
15	$(5,\ 3)$	$(4,\ 6)$	$(-5,\ 9)$	$(1,\ -9)$
16	$(3,\ -4)$	$(4,\ -6)$	$(6,\ 8)$	$(5,\ 7)$
17	$(5,\ 8)$	$(-9,\ 8)$	$(-1,\ -7)$	$(5,\ 1)$
18	$(7,\ -3)$	$(8,\ 4)$	$(-4,\ 8)$	$(-6,\ 6)$
19	$(8,\ -1)$	$(7,\ 6)$	$(-7,\ 8)$	$(0,\ -9)$
20	$(3,\ 5)$	$(5,\ 4)$	$(8,\ -2)$	$(1,\ -9)$
21	$(7,\ 3)$	$(-9,\ 3)$	$(3,\ -6)$	$(7,\ -3)$
22	$(8,\ -7)$	$(-4,\ 9)$	$(-2,\ 8)$	$(2,\ 5)$
23	$(3,\ 8)$	$(-9,\ 2)$	$(7,\ -6)$	$(9,\ 5)$
24	$(7,\ 7)$	$(5,\ 9)$	$(3,\ -5)$	$(8,\ 5)$
25	$(2,\ -3)$	$(8,\ 5)$	$(5,\ 9)$	$(-3,\ 9)$
26	$(5,\ 7)$	$(2,\ -2)$	$(-2,\ 0)$	$(-3,\ 3)$
27	$(3,\ -4)$	$(-6,\ 5)$	$(8,\ 7)$	$(7,\ 0)$
28	$(8,\ 5)$	$(9,\ -2)$	$(4,\ 8)$	$(6,\ 7)$
29	$(7,\ 6)$	$(7,\ 3)$	$(-5,\ -6)$	$(3,\ 9)$
30	$(5,\ -7)$	$(-3,\ 9)$	$(-4,\ 8)$	$(-6,\ 4)$
31	$(3,\ 10)$	$(-4,\ 9)$	$(3,\ -14)$	$(6,\ 7)$
32	$(7,\ 8)$	$(9,\ 2)$	$(-3,\ -7)$	$(3,\ 11)$

Методические указания

$\boxed{1}$ Можно предложить два способа доказательства того, что $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

Способ 1. Составить уравнения диагоналей AC и BD. Прямые AC и BD должны иметь ровно одну общую точку P. Найти координаты этой точки. Если точка P лежит строго внутри отрезка AC (то есть $\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AC}$, где $0 < \alpha < 1$) и строго внутри отрезка BD (то есть $\overrightarrow{BP} = \beta\overrightarrow{BD}$, где $0 < \beta < 1$), то четырехугольник $ABCD$ выпуклый. Этот способ реализован ниже при решении варианта 31.

Способ 2. Найти векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Эти векторы должны быть неколлинеарны (то есть должны образовывать базис на плоскости). Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по этому базису: $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$. Четырехугольник $ABCD$ является выпуклым тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три неравенства: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta > 1$. Этот способ реализован ниже при решении варианта 32.

$\boxed{2}$ В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$AB + CD = BC + DA. \tag{1}$$

Координаты центра M вписанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения биссектрис двух смежных углов четырехугольника (например, уравнения биссектрис углов A и B), тогда точка M пересечения этих биссектрис будет центром окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Радиус r вписанной окружности можно найти как расстояние от точки M до одной из сторон четырехугольника, например, до стороны AB: $r = d(M,\ AB)$.

Ниже эта схема реализована при решении варианта 31.

Контроль 1 (обязательный). Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки M до трех других сторон четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу r вписанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, для сильных студентов). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного описанного четырехугольника следующей формулы:

$$S = pr, \tag{2}$$

где S — площадь четырехугольника, p — полупериметр четырехугольника, r — радиус вписанной окружности. При этом площадь S можно найти, например, по формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi, \tag{3}$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей, а φ — угол между ними.

$\boxed{3}$ Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда, во-первых, четырехугольник $ABCD$ является выпуклым и, во-вторых, выполняется равенство

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ. \tag{4}$$

Координаты центра N описанной окружности можно найти следующим образом: составить уравнения серединных перпендикуляров двух смежных сторон четырехугольника (например, уравнения серединных перпендикуляров сторон AB и BC), тогда точка N пересечения этих серединных перпендикуляров будет центром окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

Радиус R описанной окружности можно найти как расстояние от точки N до одной из вершин четырехугольника, например, до вершины A: $R = d(N,\ A) = NA$.

Ниже эта схема реализована при решении варианта 32.

Контроль 1 (обязательный). Для контроля правильности решения задачи целесообразно найти расстояния от точки N до трех других вершин четырехугольника. Все полученные числа должны быть равны радиусу R описанной окружности.

Контроль 2 (необязательный, для сильных студентов). Для контроля правильности решения задачи можно проверить справедливость для данного вписанного четырехугольника следующей формулы:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \tag{5}$$

(это знаменитая теорема Птоломея, гласящая, что у вписанного четырехугольника сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей).

Замечание. В равенстве (4) мы рассматриваем углы $\angle BAD$ и $\angle BCD$ просто как *геометрические углы* на плоскости. Величина каждого из этих углов не превышает 180°. Если под углами $\angle BAD$ и $\angle BCD$ понимать *углы четырехугольника* $ABCD$ (то есть углы, величина которых — в случае невыпуклого четырехугольника — может быть больше 180°), то из равенства (4) автоматически следует выпуклость четырехугольника $ABCD$ (то есть в этом случае требование выпуклости четырехугольника $ABCD$ можно снять).

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 31

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: $A = (3,\ 10)$, $B = (-4,\ 9)$, $C = (3,\ -14)$, $D = (6,\ 7)$.

$\boxed{1}$ Находим уравнения прямых AC и BD:

$$AC = \Big\{ \frac{x-3}{0} = \frac{y-10}{-24} \Big\}, \quad BD = \Big\{ \frac{x+4}{10} = \frac{y-9}{-2} \Big\}.$$

Находим координаты точки O пересечения этих прямых: $O = \Big(3,\ \dfrac{38}{5} \Big)$.

Находим координаты векторов $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BD}$:

$$\overrightarrow{AO} = \Big(0,\ -\frac{12}{5} \Big), \quad \overrightarrow{AC} = (0,\ -24), \quad \overrightarrow{BO} = \Big(7,\ -\frac{7}{5} \Big), \quad \overrightarrow{BD} = (10,\ -2).$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{AO} = \alpha \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BO} = \beta \overrightarrow{BD}$, где $\alpha = 1/10$, $\beta = 7/10$. Поскольку $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, то точка O лежит строго внутри как отрезка AC, так и отрезка BD. Отсюда следует, что четырехугольник $ABCD$ является выпуклым.

$\boxed{2}$ Находим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-7,\ -1), \quad \overrightarrow{BC} = (7,\ -23), \quad \overrightarrow{CD} = (3,\ 21), \quad \overrightarrow{DA} = (-3,\ 3).$$

Находим длины сторон четырехугольника $ABCD$:

$$AB = 5\sqrt{2}, \quad BC = 17\sqrt{2}, \quad CD = 15\sqrt{2}, \quad DA = 3\sqrt{2}.$$

Мы видим, что имеет место равенство

$$AB + CD = 20\sqrt{2} = BC + DA.$$

Из этого равенства, а также из выпуклости четырехугольника $ABCD$ следует, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность (см. рис. 1).

Найдем координаты центра M и радиус r этой окружности.

Найдем орты (единичные векторы) в направлении векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\,\overrightarrow{AB}\,|} = \Big(-\frac{7}{5\sqrt{2}},\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} \Big), \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AD}}{|\,\overrightarrow{AD}\,|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \Big),$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\,\overrightarrow{BA}\,|} = \Big(\frac{7}{5\sqrt{2}},\ \frac{1}{5\sqrt{2}} \Big), \quad \boldsymbol{e}_4 = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\,\overrightarrow{BC}\,|} = \Big(\frac{7}{17\sqrt{2}},\ -\frac{23}{17\sqrt{2}} \Big).$$

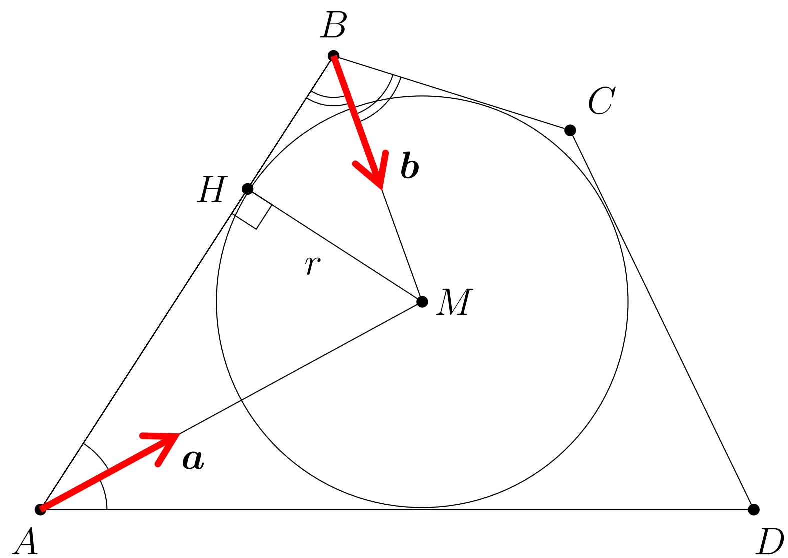

Рис. 1

Вектор $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ направлен по биссектрисе угла A четырехугольника $ABCD$, а вектор $\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$ направлен по биссектрисе угла B четырехугольника $ABCD$. Находим эти векторы:

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = \left(-\frac{2}{5\sqrt{2}},\ -\frac{6}{5\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{5\sqrt{2}} \cdot (-1,\ -3);$$

$$\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 = \left(\frac{154}{85\sqrt{2}},\ -\frac{98}{85\sqrt{2}} \right) = \frac{14}{85\sqrt{2}} \cdot (11,\ -7).$$

Положим $\boldsymbol{a} = (-1,\ -3)$ (вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$) и $\boldsymbol{b} = (11,\ -7)$ (вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4$). Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются направляющими векторами прямых AM и BM (см. рис. 1). Находим уравнения этих прямых:

$$AM = \left\{ \frac{x-3}{-1} = \frac{y-10}{-3} \right\}, \quad BM = \left\{ \frac{x+4}{11} = \frac{y-9}{-7} \right\}.$$

Находим координаты точки M пересечения этих прямых: $M = \left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2} \right)$.

Точка M является центром окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$.

Находим каноническое уравнение прямой AB:

$$AB = \left\{ \frac{x-3}{-7} = \frac{y-10}{-1} \right\}.$$

Переходим от канонического уравнения к общему:

$$AB = \{x - 7y + 67 = 0\}.$$

По формуле расстояния от точки до прямой находим радиус r окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$:

$$r = d(M,\ AB) = \frac{\left| \frac{3}{2} - 7 \cdot \frac{11}{2} + 67 \right|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{30}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Контроль 1 (обязательный)

Находим общие уравнения прямых BC, CD и DA:

$$BC = \{23x + 7y + 29 = 0\}, \quad CD = \{7x - y - 35 = 0\}, \quad DA = \{x + y - 13 = 0\}.$$

По формуле расстояния от точки до прямой убеждаемся, что расстояние от точки M до каждой из этих прямых такое же, как расстояние до прямой AB:

$$d(M,\ BC) = \frac{\left|23 \cdot \dfrac{3}{2} + 7 \cdot \dfrac{11}{2} + 29\right|}{\sqrt{23^2 + 7^2}} = \frac{102}{\sqrt{578}} = \frac{102}{17\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2};$$

$$d(M,\ CD) = \frac{\left|7 \cdot \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{2} - 35\right|}{\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{|-30|}{\sqrt{50}} = \frac{30}{5\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2};$$

$$d(M,\ DA) = \frac{\left|\dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2} - 13\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Поскольку точка M равноудалена от всех сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$, то она действительно является центром окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Контроль 2 (необязательный, для сильных студентов)

Находим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC} = (0,\ -24)$, $\overrightarrow{BD} = (10,\ -2)$.

Находим длины векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (длины диагоналей четырехугольника $ABCD$):

$$d_1 = |\,\overrightarrow{AC}\,| = 24, \quad d_2 = |\,\overrightarrow{BD}\,| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$:

$$(\,\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\,) = 48.$$

Находим косинус угла φ между диагоналями четырехугольника $ABCD$:

$$\cos\varphi = |\cos(\,\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\,)| = \frac{|(\,\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}\,)|}{|\,\overrightarrow{AC}\,| \cdot |\,\overrightarrow{BD}\,|} = \frac{48}{24 \cdot 2\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}.$$

Находим синус угла φ между диагоналями четырехугольника $ABCD$:

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Находим площадь S четырехугольника $ABCD$:

$$S = \frac{1}{2}\, d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2\sqrt{26} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = 120. \tag{$*$}$$

С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABCD$ является описанным, то его площадь S может быть найдена по формуле $S = pr$, где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности.

Имеем:

$$p = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + DA) = \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2} + 17\sqrt{2} + 15\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\,) = 20\sqrt{2}.$$

Поэтому

$$S = pr = 20\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 120. \qquad (**)$$

Формулы $(*)$ и $(**)$ согласуются друг с другом.

$\boxed{3}$ Находим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-7,\ -1), \quad \overrightarrow{AD} = (3,\ -3), \quad \overrightarrow{CB} = (-7,\ 23), \quad \overrightarrow{CD} = (3,\ 21).$$

Находим косинусы углов BAD и BCD:

$$\cos\angle BAD = \frac{(\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\,)}{|\,\overrightarrow{AB}\,| \cdot |\,\overrightarrow{AD}\,|} = \frac{(-7)\cdot 3 + (-1)\cdot(-3)}{5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{18}{30} = -\frac{3}{5};$$

$$\cos\angle BCD = \frac{(\,\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\,)}{|\,\overrightarrow{CB}\,| \cdot |\,\overrightarrow{CD}\,|} = \frac{(-7)\cdot 3 + 23\cdot 21}{17\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}} = \frac{462}{510} = \frac{77}{85}.$$

Поскольку $\cos\angle BCD \neq -\cos\angle BAD$, то $\angle BAD + \angle BCD \neq 180°$.

Следовательно, около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

<u>ОТВЕТ</u>

1) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

2) В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность; центр этой окружности находится в точке $M = \left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right)$, а радиус равен $r = 3\sqrt{2}$.

3) Около четырехугольника $ABCD$ нельзя описать окружность.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 32

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ: $A = (7,\ 8)$, $B = (9,\ 2)$, $C = (-3,\ -7)$, $D = (3,\ 11)$.

$\boxed{1}$ Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ -6), \quad \overrightarrow{AD} = (-4,\ 3), \quad \overrightarrow{AC} = (-10,\ -15).$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ неколлинеарны, а значит, образуют базис на плоскости. Разложим вектор $\overrightarrow{AC}$ по этому базису: $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AD}$. Мы приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta = -10, \\ -6\alpha + 3\beta = -15, \end{cases}$$

решая которую, находим: $\alpha = 5$, $\beta = 5$. Поскольку $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta > 1$, то отсюда следует, что четырехугольник $ABCD$ является выпуклым.

$\boxed{2}$ Находим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ -6), \quad \overrightarrow{BC} = (-12,\ -9), \quad \overrightarrow{CD} = (6,\ 18), \quad \overrightarrow{DA} = (4,\ -3).$$

Находим длины сторон четырехугольника $ABCD$:

$$AB = 2\sqrt{10}, \quad BC = 15, \quad CD = 6\sqrt{10}, \quad DA = 5.$$

Мы видим, что имеет место неравенство

$$AB + CD = 8\sqrt{10} \neq 20 = BC + DA.$$

Из этого неравенства следует, что в четырехугольник $ABCD$ нельзя вписать окружность.

$\boxed{3}$ Находим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (2,\ -6), \quad \overrightarrow{AD} = (-4,\ 3), \quad \overrightarrow{CB} = (12,\ 9), \quad \overrightarrow{CD} = (6,\ 18).$$

Находим косинусы углов BAD и BCD:

$$\cos\angle BAD = \frac{(\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\,)}{|\,\overrightarrow{AB}\,|\cdot|\,\overrightarrow{AD}\,|} = \frac{2\cdot(-4)+(-6)\cdot 3}{2\sqrt{10}\cdot 5} = -\frac{26}{10\sqrt{10}} = -\frac{13}{5\sqrt{10}};$$

$$\cos\angle BCD = \frac{(\,\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD}\,)}{|\,\overrightarrow{CB}\,|\cdot|\,\overrightarrow{CD}\,|} = \frac{12\cdot 6+9\cdot 18}{15\cdot 6\sqrt{10}} = \frac{234}{90\sqrt{10}} = \frac{13}{5\sqrt{10}}.$$

Поскольку $\cos\angle BCD = -\cos\angle BAD$, то $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$.

Из этого равенства, а также из выпуклости четырехугольника $ABCD$ следует, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность (см. рис. 2).

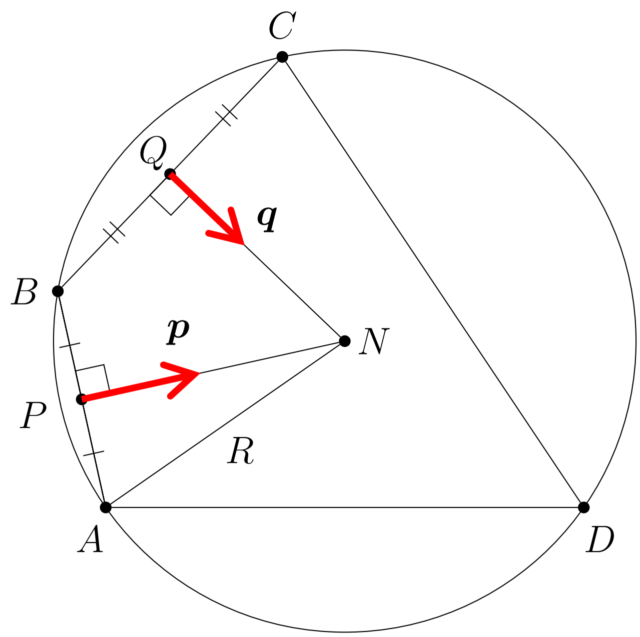

Рис. 2

Найдем координаты центра N и радиус R этой окружности.

Найдем координаты середин P и Q отрезков AB и BC:

$$P = (8,\ 5),\quad Q = \left(3,\ -\frac{5}{2}\right).$$

Зная координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, находим координаты перпендикулярных им векторов: $\boldsymbol{p} = (3,\ 1)$ (вектор $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AB}$) и $\boldsymbol{q} = (3,\ -4)$ (вектор $\boldsymbol{q}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{BC}$). Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ являются направляющими векторами прямых AN и BN (см. рис. 2). Находим уравнения этих прямых:

$$AN = \left\{\frac{x-8}{3} = \frac{y-5}{1}\right\},\quad BN = \left\{\frac{x-3}{3} = \frac{y+5/2}{-4}\right\}.$$

Находим координаты точки N пересечения этих прямых: $N = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{13}{6}\right)$.

Точка N является центром окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$.

Находим координаты вектора $\overrightarrow{NA}$:

$$\overrightarrow{NA} = \left(\frac{15}{2},\ \frac{35}{6}\right) = \frac{5}{6} \cdot (9,\ 7).$$

По формуле длины вектора находим радиус R окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$:

$$R = d(N,\ A) = NA = \frac{5}{6}\sqrt{9^2 + 7^2} = \frac{5}{6}\sqrt{130} = \frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}}.$$

Контроль 1 (обязательный)

Находим координаты векторов $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{ND}$:

$$\overrightarrow{NB} = \frac{1}{6} \cdot (57,\ -1), \quad \overrightarrow{NC} = \frac{5}{6} \cdot (-3,\ 11), \quad \overrightarrow{ND} = \frac{1}{6} \cdot (21,\ 53).$$

По формуле длины вектора убеждаемся, что расстояние от точки N до каждой из точек B, C, D такое же, как расстояние до точки A:

$$d(N,\ B) = NB = \frac{1}{6}\sqrt{57^2 + 1^2} = \frac{1}{6}\sqrt{3250} = \frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}};$$

$$d(N,\ C) = NC = \frac{5}{6}\sqrt{3^2 + 11^2} = \frac{5}{6}\sqrt{130} = \frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}};$$

$$d(N,\ D) = ND = \frac{1}{6}\sqrt{21^2 + 53^2} = \frac{1}{6}\sqrt{3250} = \frac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}}.$$

Поскольку точка N равноудалена от всех вершин четырехугольника $ABCD$, то она действительно является центром окружности, описанной около этого четырехугольника.

Контроль 2 (необязательный, для сильных студентов)

Поскольку четырехугольник $ABCD$ является вписанным, то для него должна выполняться теорема Птоломея, гласящая, что у вписанного четырехугольника сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей, то есть

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

Находим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC} = (-10,\ -15)$, $\overrightarrow{BD} = (-6,\ 9)$.

Находим длины векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ (длины диагоналей четырехугольника $ABCD$):

$$d_1 = |\,\overrightarrow{AC}\,| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}, \quad d_2 = |\,\overrightarrow{BD}\,| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

Находим произведение диагоналей:

$$d_1 d_2 = AC \cdot BD = 5\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 195. \tag{$*$}$$

Находим сумму произведений противоположных сторон:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{10} + 15 \cdot 5 = 120 + 75 = 195. \tag{$**$}$$

Формулы $(*)$ и $(**)$ согласуются друг с другом.

ОТВЕТ

1) $ABCD$ — выпуклый четырехугольник.

2) В четырехугольник $ABCD$ нельзя вписать окружность.

3) Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность; центр этой окружности находится в точке $N = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{13}{6}\right)$, а радиус равен $R = \dfrac{5\sqrt{65}}{3\sqrt{2}}$.