Занятие №12.

Свойства преобразования Лапласа. Теорема Бореля о свёртке. Формула Дюамеля.

$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt.$

$F(p) \doteqdot f(t).$

Пример 1 (на повторение)

Найти изобр-е ф-ции

$f(t) = e^{-t} \cdot t \cdot \sin 3t.$

1) $\sin 3t \doteqdot \frac{3}{p^2+9}$

2) $t \cdot \sin 3t \doteqdot -\frac{d}{dp}\left(\frac{3}{p^2+9}\right) = -(-1)\cdot\frac{3\cdot 2p}{(p^2+9)^2}$

$t \sin 3t \doteqdot \frac{6p}{(p^2+9)^2}$

3) По теор. смещения изобр-я

$e^{-t} \cdot t \sin 3t \doteqdot \frac{6(p+1)}{((p+1)^2+9)^2}$

Свойства преобр-я Лапласа (продолжение)

5°. Теорема интегрир-я оригинала:

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

Найти изобр-е ф-ции $\int_0^t e^{\tau} d\tau.$

Пример. 2. а) $e^{t} \doteqdot \frac{1}{p-1}$; $\int_0^t e^{\tau} d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p-1}$

Проверка: $\frac{1}{p(p-1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p-1} \doteqdot -1 + e^{t} = \int_0^t e^{\tau} d\tau.$

б) $\int_0^t \tau \sin 3\tau\, d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\cdot\frac{6p}{(p^2+9)^2}$ (см. пример 1) $= \frac{6}{(p^2+9)^2}$

6°. Теорема инт-я изображения.

$$\boxed{\int_p^{+\infty} G(q)\,dq \fallingdotseq \frac{\varphi(t)}{t}}$$

$$\varphi(t) \fallingdotseq G(q)$$

Пример 3 (важное следствие).

Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

$f(t) = \frac{\sin t}{t}$; $F(p)$ — ?

$\varphi(t) = \sin t$; $G(q) = \frac{1}{q^2+1}$.

$$\frac{\sin t}{t} \fallingdotseq \int_p^{+\infty} G(q)\,dq = \int_p^{+\infty} \frac{1}{q^2+1}\,dq = \operatorname{arctg} q \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

$\frac{\sin t}{t} \fallingdotseq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$; по опр-ю изобр-я по Лапласу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-pt}\,dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p.$$

Вычислим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, переходя к пределу в этом рав-ве.

$$\lim_{p \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-pt}\,dt = \lim_{p \to 0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p\right)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}}.$$

7°. Теорема о дифф-ии оригинала. ③

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Для функции $y(t) \risingdotseq Y(p)$

$$\boxed{\begin{aligned} y'(t) &\risingdotseq pY(p) - y(0) \\ y''(t) &\risingdotseq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) \end{aligned}}$$

Пример 4.

$y(0)=1,\ y'(0)=2 \Rightarrow y'(t) \risingdotseq pY(p) - 1;$

$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - p - 2.$

Пример 5.

$f(t) = \sin^2 t;\ F(p) - ?$ Применить теор. о дифф. оригинала.

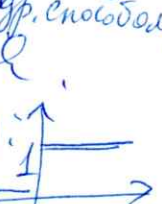
$f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4};\quad \sin^2(0) = 0.$

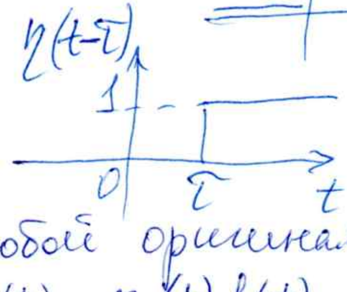
$pF(p) - 0 \risingdotseq f'(t);\ pF(p) = \dfrac{2}{p^2+4} \Rightarrow F(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$ (проверить самост. др. способом).

8°. Теор. о запаздывании оригинала

$$\boxed{\eta(t-\tau)f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p)}$$

$\mathbb{1} = \eta(t) = \chi(t):$





Пример 6. $\eta(t-2)e^{-t} \risingdotseq e^{-2p}\cdot\dfrac{1}{p+1},$

т. к. $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}.$

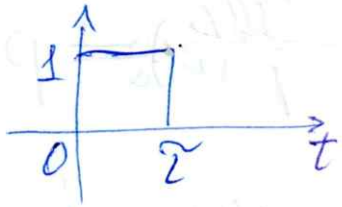
Любой оригинал:

$f(t) = \eta(t)f(t).$

3а

Пример 7. Найти изобр-е ф-ии

$$f(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\le t<\tau\\ 0 & \text{при } t>\tau.\end{cases} \qquad F(p)-?$$



I способ (по Теор. 8°).

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-\tau) \risingdotseq$$

$$F(p)=\frac{1}{p}-e^{-p\tau}\cdot\frac{1}{p}=\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

II способ (непосредственно)

$$F(p)=\int_0^{\tau}e^{-pt}\cdot 1\,dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{t=0}^{t=\tau}=-\frac{1}{p}\left(e^{-p\tau}-1\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$$

(Самост. работа, №3б).

Свёртка оригиналов. (4)

Теорема Бореля об изображении свёртки.

Формула Дюамеля.

Опр. Пусть $f_1(t), f_2(t)$ — оригиналы. Свёрткой ф-ий $f_1(t)$ и $f_2(t)$ наз.

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau}$$

Утв. Свёртка явл. оригиналом.

Замеч.

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau.$$

Теор. (об изображении свёртки) (Бореля).

$f(t) \doteqdot F(p)$; $g(t) \doteqdot G(p)$. Тогда

$$\boxed{F(p)\cdot G(p) \doteqdot f(t) * g(t)}. \qquad (*)$$

$$F(p)G(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau.$$

Пример. Вычислить оригинал

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p-1)}$$

I способ — по лемме Бореля (*).

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2+1} \doteqdot \cos t; \quad F_2(p) = \frac{1}{p-1} \doteqdot e^t.$$

$$F(p) = F_1(p)F_2(p) \doteqdot f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot e^{t-\tau}\,d\tau =$$

$$= e^t \cdot J(t) = e^t \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \cos t\, e^{-t} + \sin t\, e^{-t}\right) = \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

2 раза по частям, см. оборот.

$$\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\, d\tau = e^{-\tau}\cdot\frac{-\cos\tau+\sin\tau}{2}\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= e^{-t}\cdot\frac{-\cos t+\sin t}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos t\, e^{-t}+\sin t\, e^{-t}\right).$$

Пример. Найти изображение свёртки функций: $f(t)=\cos 5t;\ g(t)=\operatorname{sh}3t\cdot e^{2t}$ (к самост. работе).

Решение.

$$F(p)=\frac{p}{p^2+25};\quad G(p)=\frac{3}{(p-2)^2-9};$$

$$f(t)*g(t) \risingdotseq F(p)\cdot G(p)=\frac{p}{p^2+25}\cdot\frac{3}{(p-2)^2-9}$$

Формула Дюамеля.

$$\boxed{pF_1(p)F_2(p) \doteqdot \int_0^t f_1(\tau) f_2'(t-\tau)\,d\tau + f_1(t) f_2(0+)}$$

Если $f_2(0)=0$, то $\boxed{F_1(p)\cdot pF_2(p) \doteqdot f_1(t) * f_2'(t)}$.

Пример 9.

Вычислить оригинал изображения

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p^2+1)}$$

(второй способ — по ф-ле Дюамеля).

$F_2(p)=\frac{1}{p-1} \doteqdot e^t$; $f_2'(t)=e^t$; $f_2(0)=e^0=1$.

$F_1(p)=\frac{1}{p^2+1} \doteqdot \sin t$; $f_1(t)=\sin t$.

$$pF_1(p)\cdot F_2(p) \doteqdot \int_0^t \sin\tau\cdot e^{t-\tau}\,d\tau + \sin t\cdot 1 =$$

$$= e^t \underbrace{\int_0^t \sin\tau\cdot e^{-\tau}\,d\tau}_{J(t)} + \sin t = e^t\left[e^{-\tau}\cdot\frac{-\sin\tau-\cos\tau}{2}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right] + \sin t$$

$$= e^t\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\cos t - \frac{e^{-t}}{2}\sin t\right) + \sin t$$

$$f(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \sin t$$

$$f(t) = \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t).$$ (то же, что получено первым способом).

Дома: ТР, №6, 7.

Задание на дом к занятию № 12.

1. Пользуясь таблицей и свойством линейности, найти изображения функций: $t+1$, $e^{-t}+t$, $\cos 5t-2\sin 5t$, t^2.

2. Пользуясь теоремой подобия, найти изображения функций: $\cos 6t$; $\operatorname{sh} 3t$.

3. Пользуясь теоремой о дифф-ии оригинала, найти изобр-я ф-ий $\sin^2 t$, $t\cdot\sin t$.

4. Пользуясь теоремой о дифф-ии изображения, найти изобр-я ф-ий $t^2\cos t$, $t(e^t+\operatorname{ch} t)$.

5. Пользуясь теоремой инт-я оригинала, найти изобр-е функций: $\int_0^t \tau^2 e^{-\tau}d\tau$, $\int_0^t \cos^2(\omega\tau)\,d\tau$.

6. Пользуясь теоремой инт-я изображения, найти изобр-я ф-ий $\frac{\sin^2 t}{t}$, $\frac{1-e^t}{t}$.

7. С помощью теоремы смещения найти изобр-е ф-ии $e^{-3t}t^2\cos t$.

8. Найти изобр-е периодич. оригинала $f(t)=|\sin t|$, $t>0$.

9. Восстановить оригинал:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5};\qquad G(p)=\frac{p+2}{(p-2)(p+1)(p^2+4)}.$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 1

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=\sin t,\quad g(t)=\cos t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{p}{(p^2+1)^2}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 2

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=e^t,\quad g(t)=e^{2t}$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{1}{p^2-3p+2}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 3

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=\cos t,\quad g(t)=t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{p}{p^2(p^2+1)}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 4

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=\sin t,\quad g(t)=\sin 2t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{2}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 7

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=\operatorname{sh} t,\quad g(t)=\operatorname{ch} t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{p}{p^4-2p^2+1}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 8

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=e^t,\quad g(t)=\sin t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 9

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=t,\quad g(t)=te^t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{1}{p^2(p-1)^2}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 10

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$$f(t)=t,\quad g(t)=\sin 2t$$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$$\tilde{F}(p)=\frac{2}{p^2(p^2+4)}$$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 5

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$f(t)=e^{3t},\ g(t)=t^2$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$\tilde{F}(p)=\frac{2}{p^4-3p^3}$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 6

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$f(t)=\cos t,\ \ g(t)=t^3$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$\tilde{F}(p)=\frac{6}{p^4(p^2+1)}$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 11

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$f(t)=\sin t,\ \ g(t)=t^2$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$\tilde{F}(p)=\frac{1}{(p^2+1)}\cdot\frac{2}{p^3}$

Самостоятельная работа по операционному исчислению

Вариант 12

1.Найти изображение свёртки функций f(t)*g(t):

$f(t)=\operatorname{ch} t,\ \ g(t)=t$

2.Записать оригинал изображения F(p)G(p) в виде свёртки функций f(t)*g(t):

$\tilde{F}(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p}{p^2-1}$