Математический анализ

Предел последовательности

Теорема: Последовательность $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ монотонно возрастает и ограничена.

$1+1, (1+\frac{1}{2})^2, ... (1+\frac{1}{15000000})^{15000000} < e \approx 2,718...$

$(a+b)^k = C_k^0 * a^k + C_k^1 * a^{k-1} * b + ... + C_k^m * a^{k-m} * b^m + C_k^k * b^k$; $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n * \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} * \frac{1}{n^2} + ... \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} * \frac{1}{n^k} + ... + \frac{1}{n^2} = 2 + \frac{(1-\frac{1}{n})}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + ... + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{k-1}{n})}{k!} + ... + \frac{(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{n-1}{n})}{n!}$

$a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 2 + \frac{1+\frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{2}{n+1})}{3!} + ... + \frac{(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{2}{n+1})...(1-\frac{k-1}{n+1})}{k!} + \frac{(1+\frac{1}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1})}{n!} + \frac{(1+\frac{1}{n+1})...(1+\frac{n}{n+1})}{(n+1)!}$

Задано для любого n $a_{n+1} > a_n$

$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{n}{3!} + ... + \frac{1}{k!} + ... + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} ... + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + (1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ т.к. $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\ \forall n \geq 2$

$\frac{1}{n*(n-1)...*2*1} < \frac{1}{(2*2*...*2)_{n-1}}$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty <=> \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) : \forall n > N_\varepsilon,\ n \in N => a_n > \varepsilon$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty <=> \forall \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon) : \forall n > N_\varepsilon,\ n \in N => a_n < -\varepsilon$

Опр. $u_R(+\infty) = \{x \in R : x > R\} => \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty <=> \forall R > 0\ \exists\ N_R : \forall n > N_R => a_n \in u_R(+\infty)$

Опр. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty <=> \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

Пример

Опр. $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Опр. $\{b_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Пример: если $\{a_n\}$ - бесконечно большая, то $b_n = \frac{1}{a_n}$ - бесконечно малая.

Принцип вложенных отрезков

Теорема: пусть $\{[a_n,\ b_n]\}$ - система отрезков такая, что $I_{n+1} = [a_n + 1,\ b_n + 1] \subset I_n[a_n,\ b_n]$ и кроме того заметим, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Тогда существует единственная такая $C \in \mathbb{R}$, что С $= \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n]$

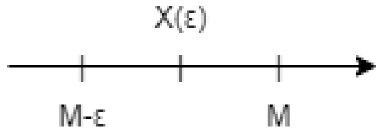
Тут доказательство теоремы должно быть, хз нужно ли оно

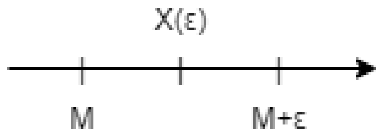
Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ называется точной верхней(нижней) границей множества $x \in X$, если:

1) $\forall x \in X => x \leq M(x \geq M)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, x_\varepsilon \in X : M - \varepsilon < X_\varepsilon \leq M(M \leq X_\varepsilon < M + \varepsilon)$

Обозначим $\sup X = M(\inf X = M)$





$\sup(0;1) = 1,\ \inf(0;1) = 0$

Теорема: Всякая ограниченное сверху(снизу) множество X имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

$\underline{:}$

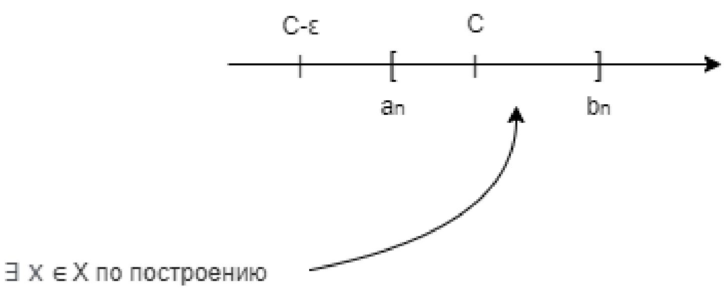
$\exists M_1 : x \in X => x < M_1$

Пусть $x_1 \in X$ - любой $I_1 = [x_1, M_1]$, делим пополам и из двух отрицательных выбираем самый правый, содержащий хотя бы один $x \in X$ - I_2 - повторяем предыдущий шаг - I_3 с I_2 строим аналогично (правее получившегося отрицательного нет ни одной $x \in X$)

Получаем систему I_n вложенных отрезков, тогда по теореме $\exists!\ C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, тогда $C = \sup X$

Пусть $I_n = [a_n; b_n]$, по построению $X \leq b_n\ \forall n$, то $C = \lim\limits_{n\to\infty} b_n => X \leq C$

Пусть $\varepsilon > 0$



Пусть $\{a_n\}$ - некоторая грань, и $a_{i1}, a_{i2}, ...a_{ik}$ такие, что $a_{ij} \in \{a_n\} i_1 \le i_2 \le ... \le i_k$

Тогда $a_i k$ - подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$

Пример: $\{a_n\} = (-1)^n$

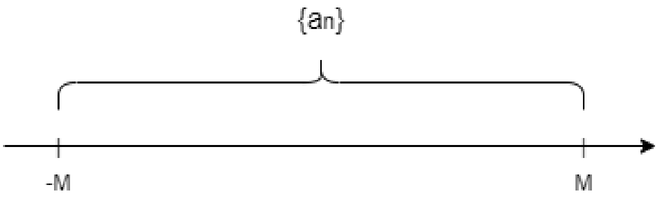
U

$\{a_{2k}\} = \{1, 1, 1, ...1, 1...\}$ - подпоследовательность

<u>$(-)$:</u>

Из всякой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$: $\exists \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A, A \in \mathbb{R}$

Доказательство:



$I_0 = [-M; M]$, выбираем $\forall a_{i1} \in I_0$, делим I_0 пополам, из двух отрезков выбираем тот, в котором содержится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$ - I_1 и в I_1 выбираем любой $a_{i2} : i_2 > i_1$

Повторем шаг: из I_2 выбираем $a_i 3 : i_3 > i_2$

Получаем последовательность $\{a_{in}\}$, где $a_{ik} \in I_{k-1}$, но $\{I_k\}$ - система вложенных отрезков $=> \lim\limits_{k\to\infty} a_{ik} = C$, где $C = \bigcap\limits_{k=1 I_k}^{\infty}$

Пусть $I_k = [d_k, e_k]$

$d_{k-1} \le a_{ik} \le e_{k-1}$, т.к. $a_{ik} \in I_{k-1}$, но $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = C$, $\lim\limits_{k\to\infty} e_k = C => \lim\limits_{k\to\infty} a_{ik} = C$ (по теореме о двух м-рах)

Опр. точка(число) $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой последовательности $\{a_n\}$, если $\exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ - подпоследовательность $=> \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$

Пример $a_n = (-1)^n$ имеет две предельные точки - $A_1 = 1, A_2 = -1$

$\{a_{2n}\} \subset \{a_k\}$

$\{a_{2n}\} = \{1, 1, 1, 1, 1...\}$ - сходится к 1

$\{a_{2n+1}\} \subset \{a_k\}$

$\{a_{2n+1}\} = \{-1, -1, -1, -1...\}$

Пусть $\{b_n\}$ - произвольная последовательность $b_n \in \mathbb{R}$, тогда $\exists \{a_n\}$ - последовательность: $\forall b_n$ есть предельная точка последовательности $\{a_n\}$

:

$$\left|\begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & ... \\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & ... \\ b_1+\frac{1}{2} & b_2+\frac{1}{2} & b_3+\frac{1}{2} & ... \\ b_1+\frac{1}{3} & ... & ... & ... \\ ... & b_2+\frac{1}{k} & ... & ... \\ b_1+\frac{1}{n} & b_2+\frac{1}{n} & b_3+\frac{1}{n}0 & ... \end{array}\right|$$

$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1 + \frac{1}{n}) = b_1$

$\{a_n\}$ - новая последовательность(см табл.), элементы пронумерованы уголком.