Занятие № 15.

Нули решений дифф. ур. II порядка.

Рассмотрим лин. однор. дифф. ур-е II пор.

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$

На отрезке $[a, b]$:
ф-ия $q(x)$ — непрерывна;
$\exists$ ф-ия $p'(x)$ — непрерывна.

Утв. 1. С помощью замены переменной $y = u(x) \cdot z(x)$ ур-е (1) всегда можно привести к двучленному виду:

(2) $z'' + Q(x)z = 0.$

При этом число нулей ф-ии $y(x)$ на $[a, b]$ и число нулей ф-ии $z(x)$ на отрезке $[a, b]$ совпадают.

$$\boxed{u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,dt},}$$

$$\boxed{Q(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{p'(x)}{2}.} \qquad (3).$$

Пример 1. (к самост. работе). ②

С помощью замены переменной

$y = u(x) \cdot z$

свести уравнение к двучленному виду:

$$x^2 y'' - 2x y' + (x^2+2)y = 0.$$

$$(*) \quad y'' - \frac{2}{x} y' + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$$

$p(x) = -\frac{2}{x}$

$q(x) = 1 + \frac{2}{x^2}$

$p'(x) = \frac{2}{x^2}$

Решение.

По ф-ле (3):

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}} = e^{\ln x - \ln x_0} = x \cdot const$$

$$\boxed{y = x \cdot z}$$

$p'(x) = \frac{2}{x^2}$

$$Q(x) = q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{p'(x)}{2} = 1 + \cancel{\frac{2}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x^2}} = 1.$$

Ответ: $z'' + z = 0$.

Проверка: сделаем замену перем. $y = x \cdot z$.

$$y' = z + xz'; \quad y'' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz'' \longrightarrow (*)$$

$$2z' + xz'' - \frac{2}{x}(z + xz') + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xz = 0$$

$$\cancel{2z'} + xz'' - \cancel{\frac{2}{x}z} - \cancel{2z'} + xz + \cancel{\frac{2}{x}z} = 0$$

$$xz'' + xz = 0$$

$$z'' + z = 0 \quad \text{(верно)}.$$

Рассм. вопрос о количестве нулей решения ур. (2) (двучленного) на отрезке $[a, b]$.

Опр. Точка x_0 наз. нулём нетривиального решения ур-я (1), если $y(x_0)=0$, $y\not\equiv 0$.

Далее рассм. двучленные ур-я вида (2). □.

(2) $z''+q(x)z=0$.

Лемма 1. Всякий нуль нетривиального решения $z(x)$ ур-я (2) явл. простым (некратным).

Д-во: если бы $z(x_0)=0$ и $z'(x_0)=0$, то $z(x)\equiv 0$ по теор. ед-ти решения.

Лемма 2. Любое нетрив. решение $z(x)$ ур-я (2) имеет на (a,b) лишь конечное число нулей.

Пример 2. Найти число нулей на $[0;2\pi]$ для реш. ур-ний.

$y''+2^2\cdot y=0$ $\quad y=A\cos(2t+\varphi)$ $\quad \cos(2t+\varphi)=0$

$y''+3^2\cdot y=0$. $\quad y=A\cdot\cos(3t+\varphi)$ $\quad \cos(3t+\varphi)=0$.

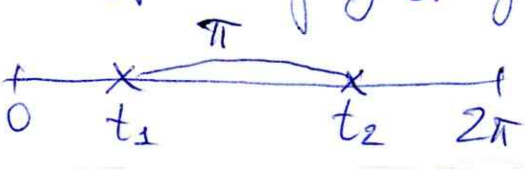
$2t+\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

$2t=\frac{\pi}{2}-\varphi+\pi n$

$t_1=\frac{\pi}{2}-\varphi$; $t_2=\frac{3\pi}{2}-\varphi$

на $[0;2\pi]$ – 2 нуля. (или три).

(нули следуют через π ед.).



$3t+\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n$

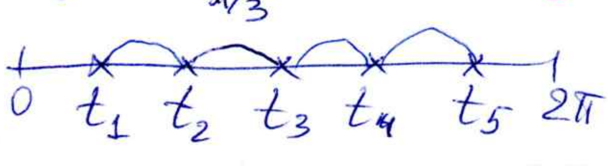
$3t=\frac{\pi}{2}-\varphi+\pi n$

$t=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{3}+\frac{\pi}{3}n$.

$360:60=6$

на $[0;2\pi]$ – пять нулей (или на 1 больше).

(нули следуют через $\frac{\pi}{3}$ ед.).



№ 726 (Филиппов). 4

Найти расстояние между двумя соседними нулями любого нетривиального решения ур-я

$$y'' + m^2 y = 0. \qquad (m>0).$$

Сколько нулей может содержаться на отрезке $a \le x \le b$?

Решение.

$y(x) = A\cos(mx+\varphi)$ — общее решение этого ур-я.

$y' = -Am\sin(mx+\varphi)$ Проверка:

$y'' = -Am^2\cos(mx+\varphi) \to -Am^2\cos(\dots) + Am^2\cos(\dots) \equiv 0.$

Нули решения $y(x)$:

$\cos(mx+\varphi) = 0$

$mx + \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$mx = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k$

$x = \frac{\pi}{2m} - \frac{\varphi}{m} + \frac{\pi}{m}\cdot k.$

Расст. между соседними нулями равно $\boxed{\frac{\pi}{m}.}$ (*)

Число нулей на отрезке $[a, b]$:

(**) $\boxed{N = \left[\frac{b-a}{\pi/m}\right]}$ (или на один больше).

Замечание.

$y'' + m^2\cdot y = 0$

$z'' + M^2\cdot z = 0$

Из (*) следует, что при $M > m$ $z(x)$ имеет на конечном промежутке I больше нулей, чем $y(x)$.

Сравним количества нулей нетривиальных решений двух ур-ний:

(3) $y'' + q(x)y = 0$

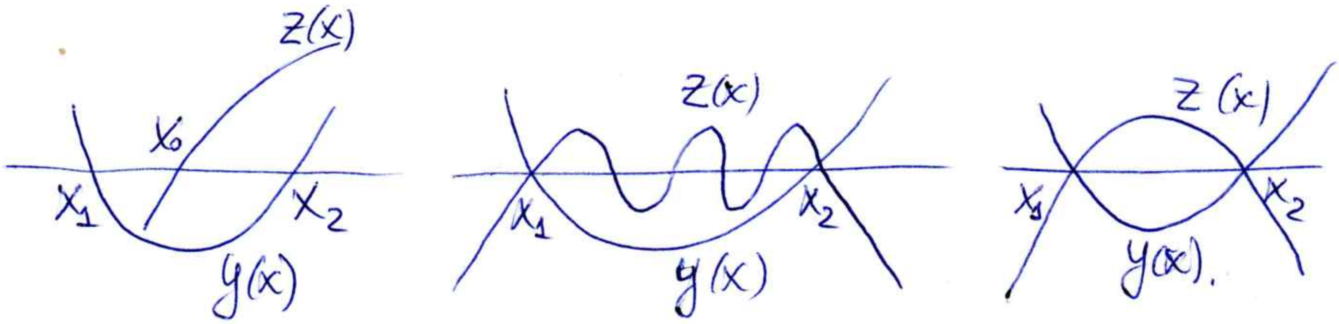
(4) $z'' + Q(x)z = 0$.

Смысл т. Штурма: $Q > q \Rightarrow z(x)$ имеет на I больше нулей, чем $y(x)$.

Теорема Штурма.

Пусть $q(x) \le Q(x)$, $x \in I$ и пусть $y(x)$ – какое-либо нетрив. реш. ур. (3), а $z(x)$ – к.-л. нетрив. решение ур. (4).

Если $x_1, x_2 \in I$ – последовательные нули $y(x)$, то найдётся хотя бы одна точка $x_0 \in (x_1, x_2)$: $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.



Следствие 1.

~~Пусть~~ $y_1(x), y_2(x)$ – два лин.-незав. решения ур. (3). Тогда нули ф-ий $y_1(x)$ и $y_2(x)$ перемежаются, т.е. в промежутке (x_1, x_2) между послед. нулями ф-ии $y_1(x)$ ф-ия $y_2(x)$ имеет в точности один нуль.

Д-во: по т. Штурма для $q(x) \equiv Q(x)$ ф-ия $y_2(x)$ имеет на (x_1, x_2) хотя бы один нуль. Общих нулей не м. б., т.к. если $y_1(x_1) = y_2(x_1) = 0$, то $W(x_1) = 0$ и реш. лин. зависимы. □

Задача №8 ТР. (2017г.)

Оценить число нулей решения ур-е

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ на отрезке $[a, b]$.

Вариант №29.

$p(x) = 2x,\quad q(x) = (x+1)^2,\quad [a, b] = [2, 8]$.

(2) $y'' + 2x \cdot y' + (x+1)^2 \cdot y = 0$.

Решение

Заменой переменной

$$y = z \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}$$ ур-е (1)

приводится к виду: $z'' + Q(x)z = 0$,

где $\boxed{Q(x) = q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x)}$.

$-\frac{1}{2}\int p(x)dx = -\frac{1}{2}\int 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y = z \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Число нулей ф-ии $y(x)$ совпадает с числом нулей ф-ии $z(x)$.

$Q(x) = (x+1)^2 - \frac{1}{4} \cdot 4x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = (x+1)^2 - x^2 - 1 =$
$= \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1} = 2x$.

$z'' + 2x \cdot z = 0$.

На отрезке $[2; 8]$ $4 \leq 2x \leq 16$.

Таким образом, количество n нулей ур-я (2) на отрезке $[2; 8]$ оценивается сверху и снизу через количества нулей ур-ний

$y_1'' + 4y_1 = 0$ и $y_2'' + 16y_2 = 0$.

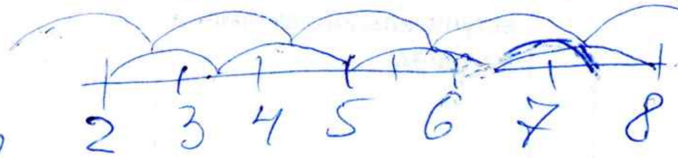
Общее решение первого ур-я:

$y_1(x) = C_1 \sin(2x+\varphi_1)$; нули ф-ии $\sin 2x$: $x = \frac{\pi}{2}k$.

(*) ⇒ расст. между соседними нулями: $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5$

Ф-ия $y_1(x)$ имеет на отрезке [2; 8] длины 6 ед.

3 или 4 нуля;



Общее решение второго ур-я;

$y_2(x) = C_2 \sin(4x+\varphi_2)$;

(*) ⇒ расст. между соседними нулями: $\frac{\pi}{4}$;

На отрезке [2; 8] ф-ия $y_2(x)$ имеет 7 или 8 нулей

Ответ:

$3 \le n \le 7$.

Задача № 8 ТР, вариант 30. (8)

Оценить число нулей решения ур-я

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ на отрезке $[a, b]$

$p(x) = 2\sin 2x, \quad q(x) = 2x, \quad [6; 17].$

(1) $y'' + 2\sin 2x \cdot y' + 2x \cdot y = 0.$

Решение.

Заменой перем. $y = z \cdot e^{-\int \sin 2x dx} = z \cdot e^{\frac{1}{2}\cos 2x}$

ур-е (1) приводится к виду: $z'' + Q(x)z = 0,$

где $Q(x) = q(x) - \frac{p^2(x)}{4} - \frac{1}{2}p'(x).$

$Q(x) = 2x - \frac{4\sin^2 2x}{4} - \frac{4\cos 2x}{2} = 2x - \sin^2 2x - 2\cos 2x.$

Найдём наиб. и наим. зн-я ф-ии $Q(x)$ на отрезке $[6; 17]$.

$12 \le 2x \le 34$ $\qquad 0 \le \sin^2 2x \le 1.$

$11 \le 2x - \sin^2 2x \le 34$ $\qquad -1 \le -\sin^2 2x \le 0.$

$9 \le Q(x) \le 36.$ $\qquad -2 \le 2\cos 2x \le 2$

$-2 \le -2\cos 2x \le 2.$

Кол-во нулей ур-я (1) на отрезке $[6; 17]$ оценивается сверху и снизу через кол-ва нулей ур-ний

$y_1'' + 9y_1 = 0$ и $y_2'' + 36y_2 = 0.$

$y_1(x) = C_1 \sin(3x + \varphi_1)$ $\qquad y_2(x) = C_2\sin(6x + \varphi_2)$

Расст. между нулями $\frac{\pi}{3}$. $\qquad$ Расст. между нулями $\frac{\pi}{6}$

На отр. $[6; 17]$ длиной 11: число нулей: $11 : \frac{\pi}{3} = \frac{33}{\pi} \approx 10$ нулей. На отр. $[6, 17]$ 21 нуль.

Ответ: $\boxed{10 \le n \le 21}$

Дома! Филиппов, № 720; 727–732.