11.9

Геометрическое определение вероятности

29.06.2019 / Artman / Теория вероятностей

Геометрическое определение вероятности применимо для несовместных событий, в которых число равновозможных исходов бесконечно, например, попадания точки на участок отрезка, плоскости, пространства, объёма.

Общая формула для определения геометрической вероятности:

$$P(A) = \frac{mes(g)}{mes(G)}$$

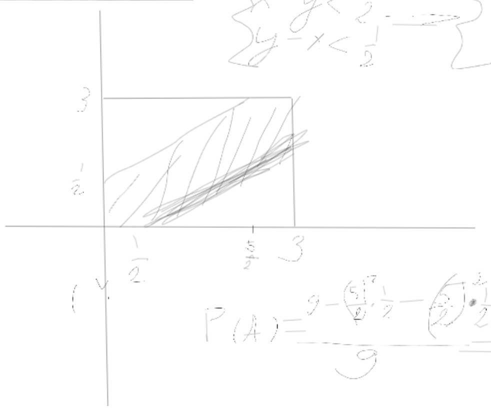
Vitaliy Ruzanov

Отношение меры области g, благоприятствующей событию A, к мере всей области G.

Формула геометрической вероятности попадания точки на участок отрезка L для одномерного пространства равна:

$$P(A) = \frac{\text{длина отрезка l}}{\text{длина отрезка L}}$$

$$\begin{cases} x - y < \frac{1}{2} \\ y - x < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$P(A) = \frac{9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}{9}$$

$y > x - \frac{1}{2}$

$y < \frac{1}{2} + x$

$\frac{11}{36}$

время ожидания не превысит 30 минут.

2. Распределение "хи-квадрат": его плотность, математическое ожидание, дисперсия. Связь с нормальным распределением.

Случайная величина ξ имеет распределение "хи-квадрат" с числом степеней свободы $n = 3$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \xi^2 - 5\xi + 1$.

Расп. «хи-квадрат» с n степенями свободы $\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$	n	2n	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

Распределение «хи-квадрат» с n степенями свободы.

$\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $\quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$

$M\xi = n$

$D\xi = 2n$

При $n = 1$ $\quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы (t-распределение)

$f_\xi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ Обозначение: $t(n)$

$M\xi = 0, n > 1$ $\quad D\xi = \frac{n}{n-2}, n > 2$

При $n = 1$ $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ — распределение Коши

$M\xi = 3 \qquad D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$D\xi = 6 \qquad M\xi^2 = D\xi + (M\xi)^2 = 6 + 9 = 15$

$M(\xi^2 - 5\xi + 1) = M\xi^2 - 5M\xi + 1 = 15 - 15 + 1 = 1$

Гамма-распределение с параметрами $(\alpha, \lambda), \lambda > 0$

$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{\lambda^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$ Обозначение $\gamma(\alpha, \lambda)$

Гамма-функция: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$; $\Gamma(n+1) = n!$

2) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

№3.

A - выучил билет

	$P(H_i)$	$P(A\mid H_i)$
H_1	$\frac{4}{24}$	$\frac{20}{50}$
H_2	$\frac{8}{24}$	$\frac{30}{50}$
H_3	$\frac{12}{24}$	$\frac{50}{50}$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A\mid H_i) =$$

$$= \frac{4}{24} \cdot \frac{20}{50} + \frac{8}{24} \cdot \frac{30}{50} + \frac{12}{24} \cdot \frac{50}{50} = \frac{23}{30}$$

$$P(H_2\mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A\mid H_2)}{P(A)} = \frac{3}{15} \cdot \frac{30}{23} = \frac{6}{23}$$

$$P(H_3\mid A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A\mid H_3)}{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{23} = \frac{15}{23}$$

$$P(B) = P(H_2\mid A) + P(H_3\mid A) = \frac{21}{23}$$

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	0	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

ξ	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

η	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$\xi \cdot \eta$	-1	0	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

$M(\xi \cdot \eta) = -\frac{1}{8}$

$M\xi^2 = \frac{6}{8}$ $\quad M\eta^2 = \frac{5}{8}$

$\alpha = 2\xi - \eta$

$\beta = \xi + 8\eta$

$2\xi - \eta$	-3	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$\operatorname{cov}(\alpha, \beta) = M(\alpha\beta) - M\alpha M\beta = -\frac{43}{8} + \frac{25}{8} = -\frac{18}{8}$$

$\xi + 8\eta$	-1	0	1	7	8	9
P	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$

$$M(\alpha\beta) = M(2\xi^2 + 16\xi\eta - \xi\eta - 8\eta^2) = \frac{12}{8} - 15 \cdot \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{5}{8} = -\frac{3}{8} - \frac{40}{8} = -\frac{43}{8}$$

$M\alpha = -\frac{5}{8}$

$M\beta = \frac{1}{8} + \frac{21}{8} + \frac{18}{8} = 5$

$y) \mid 0 < x < 2 - |y| \}$. Найти математическое

< 2

$|y| = -x - z$

$= 5$

5. Случайный вектор (ξ, η) распредел...

ожидание случайной величины $\zeta = \xi + |\eta|$.

$-2 < y < 2$

$|y| = -x - z$

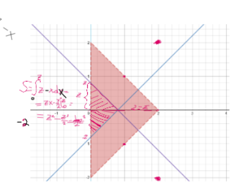
$= 5$

$\zeta = \xi + |\eta|$

$z = x + |y|$ $\quad z < -2;\ F(z) = 0$

$z \in (0; 2)$ $\quad 0 < z < 2$

$-2 < x - 2 < -|y|$



$F = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{1}{4}z^2, & z \in (0, 2) \\ 1, & z > 2 \end{cases}$

$f = \begin{cases} \frac{z}{2} \end{cases}$

$\int_0^2 z \left(\frac{z}{2}\right) dz = \frac{z^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$x > 0$

$0 < x < 2 - |y|$

$x < 2 - |y|$

$x - 2 < -|y|$

$|y| = x + 2$

$|y| < -x + 2$

$|y| = z - x > 0$

$y = -z + x$

$\begin{cases} y = z - x, & y > 0 \\ y = -z + x, & y < 0 \end{cases}$