ЛЕКЦИЯ 4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве

$$G=\{(x,y): a \le x < +\infty,\ y \in D\},$$

причем множество D может быть как конечным отрезком $[c;d]$, так и в общем случае конечным или полубесконечным интервалом. Рассмотрим несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{3.1}$$

Определение 1. Несобственный интеграл (3.1) называется *сходящимся в точке* $y_0 \in D$, если существует конечный предел

$$\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x,y_0)dx = I(y_0),$$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=B_0(\varepsilon)>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ имеет место неравенство

$$\left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \ \blacktriangle$$

Определение 2. Несобственный интеграл (3.1) называется *сходящимся на множестве* D, если он сходится в каждой точке этого множества, т.е. $\forall\varepsilon>0$ и $\forall y\in D\ \exists B_0=B_0(\varepsilon,y)>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ имеет место неравенство

$$\left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \ \blacktriangle$$

Определение 3. Несобственный интеграл (3.1) называется *абсолютно сходящимся на множестве* D, если на множестве D сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty}|f(x,y)|dx \ \blacktriangle$$

Определение 4. Несобственный интеграл (3.1) называется *равномерно сходящимся на множестве* D, если $\forall\varepsilon>0$ и $\exists B_0=B_0(\varepsilon)>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall y\in D$ выполняется неравенство

$$\left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\varepsilon \ \blacktriangle$$

Определение 5. Говорят, что несобственный интеграл (3.1) *сходится неравномерно на множестве* D, если он сходится на множестве D, но при этом $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > a$ $\exists B_1 = B_1(B) \ge B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in D$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \int_{B_1}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \ge \varepsilon_0 \ \blacktriangle$$

Теорема 1. (Признак Вейерштрасса) Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $G = \{(x, y) : a \le x < +\infty,\ y \in D\}$ и $\forall y \in D$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a; A]$ вещественной оси. Если при этом существует функция $F(x)$ такая, что

1) $|f(x, y)| \le F(x)$ $\forall x \in [a; +\infty)$, $\forall y \in D$;

2) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится,

то несобственный интеграл (3.1) сходится абсолютно и равномерно на множестве D

Доказательство: Так как несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x) dx$ сходится и $F(x) \ge 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$, такое, что $\forall B \ge B_0$ выполнено неравенство

$$\left| \int_B^{+\infty} F(x) dx \right| = \int_B^{+\infty} F(x) dx < \varepsilon .$$

По признаку сравнения несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ сходится $\forall y \in D$, т.е. несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится абсолютно на множестве D. Осталось показать, что он сходится равномерно на этом множестве. Действительно, $\forall B \ge B_0$ и $\forall y \in D$

$$\left| \int_B^{+\infty} f(x, y) dx \right| \le \int_B^{+\infty} |f(x, y)| dx \le \int_B^{+\infty} F(x) dx < \varepsilon .$$

Следовательно, интеграл (3.1) сходится равномерно по параметру y на множестве D.■

Теорема 2. (Критерий Коши) Для того чтобы несобственный интеграл (3.1) сходился равномерно по параметру y на множестве D необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ и $\exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B_1, B_2 \ge B_0$ и $\forall y \in D$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство: $\Rightarrow$ Пусть несобственный интеграл (3.1) сходится равномерно на множестве D по параметру y. Тогда по определению равномерной сходимости

$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$, такое, что $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in D$

$$\left|\int_{B}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\forall B_1,\ B_2 \geq B_0$

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y)dx\right| = \left|\int_{B_1}^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{B_2}^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{B_1}^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{B_2}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$ Пусть $\forall \varepsilon > 0$ и $\exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B_1,\ B_2 \geq B_0$ и $\forall y \in D$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

В силу критерия Коши для несобственных интегралов интеграл (3.1) сходится $\forall y \in D$. Переходя в неравенстве $(*)$ к пределу при $B_2 \to +\infty$, получим, что $\forall B_1 \geq B_0$ и $\forall y \in D$

$$\left|\int_{B_1}^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, интеграл (3.1) сходится равномерно по параметру y на множестве D.■

Следствие. Если несобственный интеграл (3.1) сходится на множестве D и $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall B > a\ \exists B_1 = B_1(B) \geq B,\ \exists B_2 = B_2(B) \geq B$ и $\exists y_0 = y_0(B) \in D$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y_0)dx\right| \geq \varepsilon_0,$$

то несобственный интеграл (3.1) сходится неравномерно на множестве D ■

Выше изложенные определение, признак равномерной сходимости и критерий равномерной сходимости сформулированы для несобственных интегралов с бесконечным пределом интегрирования (3.1). Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Пример 1. Доказать, что несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}dx$

а) сходится равномерно на множестве $E_1 = [1;+\infty)$;

б) сходится неравномерно на множестве $E_2 = (0;+\infty)$.

Решение: а) Для доказательства равномерной сходимости воспользуемся определением 4, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ найдем $B_0 = B_0(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in [1;+\infty)$ выполнялось неравенство

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} e^{-xy}dx \right| < \varepsilon . \tag{3.2}$$

Имеем:

$$\left| \int\limits_B^{+\infty} e^{-xy}dx \right| = \int\limits_B^{+\infty} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int\limits_B^{\eta} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty} \left(-e^{-xy}/y \Big|_B^{\eta} \right) =$$

$$= \lim_{\eta\to+\infty} \left(-e^{-\eta y}/y + e^{-By}/y \right) = e^{-By}/y \leq e^{-B} < \varepsilon .$$

Последнее неравенство выполняется, если $-B < \ln\varepsilon \Leftrightarrow B > \ln(1/\varepsilon)$.

Положим $B_0 = \max\{2\ln(1/\varepsilon); 0\}$. Тогда $\forall B \geq B_0$ и $\forall y \in [1;+\infty)$ выполнено неравенство (3.2).

б) Докажем неравномерную сходимость интеграла на множестве E_2, используя определение 5. Для любого $y > 0$ интеграл сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty} \int\limits_0^{\eta} e^{-xy}dx = \lim_{\eta\to+\infty} \left(-e^{-xy}/y \Big|_0^{\eta} \right) = 1/y .$$

Далее, $\forall B \geq 0$ возьмем $y_0 = 1/(B+1)$, $B_1 = B+1$. Тогда

$$\left| \int\limits_{B_1}^{+\infty} e^{-xy_0}dx \right| = -\frac{1}{y_0} e^{-xy_0} \Bigg|_{B_1}^{+\infty} = \frac{1}{y_0} e^{-B_1 y_0} = (B+1)e^{-1} \geq e^{-1} = \varepsilon_0 \blacksquare$$

Пример 2. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-y)^2+1} \tag{3.3}$$

а) на множестве $E_1 = [0;1]$, б) на множестве $E_2 = [0;+\infty)$.

Решение: а) Пользуясь признаком Вейерштрасса, покажем, что интеграл (3.3) сходится равномерно на множестве E_1. Рассмотрим функцию

$$F(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in[0;1];\\ \dfrac{1}{(x-1)^2+1}, \text{ если } x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

Эта функция является мажорантой для функции $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2-1}$,

так как $|f(x,y)|\le F(x)$ $\forall y\in E_1$, $\forall x\ge 0$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty}F(x)dx$ сходится. Согласно признаку Вейерштрасса несобственный интеграл (3.3) сходится абсолютно и равномерно на множестве E_1.

б) Покажем, что на множестве E_2 интеграл (3.3) сходится неравномерно. Воспользуемся для этой цели отрицанием критерия Коши (следствием теоремы 2). Интеграл (3.3) сходится $\forall y\in E_2$:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-y)^2+1}=\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_0^{\eta}\frac{d(x-y)}{(x-y)^2+1}=\lim_{\eta\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x-y)\Big|_0^{\eta}\right]=$$
$$=\pi/2+\operatorname{arctg}y.$$

Заметим, что максимальное значение функция $f(x,y)$ принимает при $x=y$. Поэтому $\forall B>0$ возьмем $B_1=B+1,\ B_2=B+3,\ y_0=B+2$, тогда

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2}f(x,y_0)dx\right|=\left|\int\limits_{B+1}^{B+3}\frac{dx}{(x-B-2)^2+1}\right|=\left|\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+1}\right|=\operatorname{arctg}t\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}=\varepsilon_0.$$

Таким образом, $\exists\varepsilon_0=\pi/2>0$ такое, что $\forall B>0$ $\exists B_1=B_1(B)\ge B$, $\exists B_2=B_2(B)\ge B$ и $\exists y_0=y_0(B)\in E_2$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{B_1}^{B_2}f(x,y_0)dx\right|\ge\varepsilon_0\ \blacksquare$$

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{(x-1)^y}\qquad(3.4)$$

а) на множестве $E_1=[-1;2/3]$, б) на множестве $E_2=[-1;1)$.

Решение: а) При $y\in[-1;0]$ функция $f(x,y)=\dfrac{1}{(x-1)^y}$ как функция

переменной x непрерывна на отрезке интегрирования $[1;2]$, а при $y\in(0;2/3]$

эта функция непрерывна на промежутке $(1;2]$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{(x-1)^y}=+\infty$, т.е. интеграл (3.4) является несобственным интегралом от неограниченной функции. При $x\in(1;2], y\in[-1;2/3]$

$$0<\frac{1}{(x-1)^y}\le\frac{1}{(x-1)^{2/3}}=F(x).$$

Интеграл $\int\limits_1^2 F(x)dx$ сходится, следовательно, несобственный интеграл (3.4) сходится равномерно на множестве E_1 по признаку Вейерштрасса.

б) Покажем, что интеграл (3.4) сходится неравномерно на множестве E_2, т.е. $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall B\in(1;2)$ $\exists B_1\in(1;B]$, $\exists y_0\in[-1;1)$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx\right|\ge\varepsilon_0.$$

Так как

$$\left|\int\limits_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx\right|=\int\limits_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx=\frac{(B_1-1)^{1-y_0}}{1-y_0},$$

то, полагая $y_0=2-B,\ B_1=1+(B-1)^{1/(B-1)}$, получим

$$\left|\int\limits_1^{B_1}\frac{1}{(x-1)^{y_0}}dx\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0\ \blacksquare$$

Пример 4. Доказать, что несобственный интеграл $I(y)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2, если

$$I(y)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx\ , \tag{3.5}$$

а) $E_1=[0;1]$, б) $E_2=[1;+\infty)$.

Решение: а) Для доказательства равномерной сходимости $I(y)$ на множестве E_1 воспользуемся определением 4. Возьмем $B\ge e$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx=-\int\limits_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}d\cos x=-\frac{\ln^y x}{x}\cos x\Big|_B^{+\infty}+$$

$$+\int_B^{+\infty}\left(\frac{y\ln^{y-1}x-\ln^y x}{x^2}\right)\cos x dx=\frac{\ln^y B}{B}\cdot\cos B+$$
$$+\int_B^{+\infty}\left(\frac{y\ln^{y-1}x-\ln^y x}{x^2}\right)\cos x dx.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^y x}{\sqrt{x}}=0\ \ \forall y\in[0;1]$, то $\exists M_1>0,\ \exists M_2>0$ такие, что $\left|\frac{\ln^y x\cdot\cos x}{\sqrt{x}}\right|\le M_1$, $\left|\frac{\left(y\ln^{y-1}x-\ln^y x\right)\cos x}{\sqrt{x}}\right|\le M_2\ \ \forall x\ge e,\ \forall y\in[0;1]$.

Тогда

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx\right|\le\frac{M_1}{\sqrt{B}}+\int_B^{+\infty}\frac{M_2}{x^{3/2}}dx=\frac{M_1}{\sqrt{B}}+\frac{2M_2}{\sqrt{B}}=\frac{M}{\sqrt{B}},$$

где $M=M_1+2M_2$. Если $\frac{M}{\sqrt{B}}<\varepsilon$, то

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{\ln^y x}{x}\cdot\sin x\,dx\right|<\varepsilon. \tag{3.6}$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ положим $B_0=\max\left\{(M/\varepsilon)^2+1;e\right\}$. Тогда $\forall B\ge B_0,\ \forall y\in[0;1]$ выполняется условие (3.6), следовательно, интеграл $I(y)$ сходится равномерно на множестве E_1.

б) Покажем, что интеграл $I(y)$ сходится неравномерно на множестве E_2, используя отрицание критерия Коши, а именно покажем, что $\exists\varepsilon_0>0$ такое, что $\forall B>1\ \exists B_1=B_1(B)\ge B,\ \exists B_2=B_2(B)\ge B$ и $\exists y_0=y_0(B)\in E_2$, для которых выполняется неравенство

$$\left|\int_{B_1}^{B_2}\frac{\ln^{y_0}x}{x}\cdot\sin x\,dx\right|\ge\varepsilon_0. \tag{3.7}$$

Для любого $\forall B>1$ возьмем $B_1=\pi/6+2\pi n$, $B_2=5\pi/6+2\pi n$, $n\in N, B_1\ge B,\ B_2\ge B$. Тогда $\sin x\ge 1/2$ на отрезке $[B_1,B_2]$ и

$$\left|\int_{B_1}^{B_2}\frac{\ln^{y_0}x}{x}\cdot\sin x\,dx\right|\ge\frac{1}{2}\int_{B_1}^{B_2}\frac{\ln^{y_0}x}{x}dx\ge\frac{1}{2}\frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2}\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2}.$$

Далее положим $y_0=\log_{\ln B_1}B_2\ \ (y_0\in[1;+\infty))$. Тогда $\frac{(\ln B_1)^{y_0}}{B_2}=1$

и $\exists \varepsilon_0 = \pi/3$, для которого выполняется неравенство (3.7) ■