Теория вероятностей и математическая статистика
Лектор А.А. Лобузов
Семестр 6 **Лекция 6**

Методы получения точечных оценок

Метод моментов

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ − случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x, \theta_1, ..., \theta_r)$.

Моменты распределения зависят от параметров $\theta_1, ..., \theta_r$

$\mu_1 = \mu_1(\theta_1, ..., \theta_r)$,

...

$\mu_k = \mu_k(\theta_1, ..., \theta_r)$,

...

$\mu_r = \mu_r(\theta_1, ..., \theta_r)$.

Получаем систему из r уравнений с r неизвестными.

Если найти выражения $\theta_k = g_k(\mu_1, ..., \mu_r)$, $k = 1, ..., r$,

то получим оценки параметров $\theta_1, ..., \theta_r$ по методу моментов

$\tilde{\theta}_k(X_1, X_2, ..., X_N) = g_k(\overline{\mu}_1, ..., \overline{\mu}_r)$, $k = 1, ..., r$, где

$$\overline{\mu}_k(X_1, X_2, ..., X_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j^k$$

Пример 1а. Геометрическое распределение

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_N)$ − случайная выборка объёма N из геометрического распределения с параметром θ:

$P(X_j = k) = (1-\theta)^k \theta$, $k = 0, 1, ...$

Математическое ожидание $\mu_1 = \dfrac{1-\theta}{\theta}$.

Выражаем θ через μ_1: $\theta = \dfrac{1}{1+\mu_1}$.

Получаем оценку θ по методу моментов

$$\tilde{\theta}(X_1, X_2, ..., X_N) = \frac{1}{1+\bar{\mu}_1} = \frac{N}{N + \sum_{j=1}^{N} X_j}$$

Пример 2. Гамма-распределение

$\xi \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ – гамма-распределение

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \mu_2^0 = \frac{\alpha}{\lambda^2}, \quad \mu_2 = \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{\alpha}{\lambda} \\ \mu_2^0 = \dfrac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\mu_1}{\mu_2^0} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1^2} \\ \alpha = \dfrac{\mu_1^2}{\mu_2^0} = \dfrac{\mu_1^2}{\mu_2 - \mu_1^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda} = \dfrac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1^2}; \\ \tilde{\alpha} = \dfrac{\bar{\mu}_1^2}{\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1^2}; \end{cases} \qquad \bar{\mu}_1 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j^2$$

Метод максимального правдоподобия

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ – случайная выборка объёма N из распределения с.в. ξ с ф.р. $F(x,\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$.

Пусть

$$f(x,\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} f(x,\boldsymbol{\theta}) - \textit{плотность, если } \xi - \textit{непрерывная с.в.} \\ \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = x), \textit{ если } \xi - \textit{дискретная с.в.} \end{cases}$$

Функция правдоподобия

$$L(\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{N} f(X_j, \boldsymbol{\theta})$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{N} f(x_j, \boldsymbol{\theta}), \textit{ если } \xi - \textit{непрерывная с.в.} \\ \prod\limits_{j=1}^{N} \mathbf{P}_{\boldsymbol{\theta}}(\xi = x_j), \textit{ если } \xi - \textit{дискретная с.в.} \end{cases}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln L(\mathbf{X},\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{N} \ln f(X_j, \boldsymbol{\theta})$$

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{N} \ln f(x_j, \boldsymbol{\theta})$$

Оценка максимального правдоподобия:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r) = \arg\max(\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_N, \theta_1, \ldots, \theta_r))$$

$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r)$ – удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \theta_k} \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_N, \theta_1, \ldots, \theta_r) = 0 \\ k = 1, \ldots, r \end{cases}$$

Пример 1б. Геометрическое распределение

Пусть $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)$ – случайная выборка объёма N из геометрического распределения с параметром θ:

$$\mathrm{P}(X_j = k) = (1-\theta)^k \theta, \; k = 0, 1, \ldots$$

Найдем функцию правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_N, \theta) = \prod_{j=1}^{N} (1-\theta)^{x_j} \theta = \theta^N (1-\theta)^{\sum x_j}$$

$$\ln L(x_1, x_2, \ldots, x_N, \theta) = N \ln \theta + (\sum_{j=1}^{N} x_j) \ln(1-\theta)$$

$$\ln L(x_1, x_2, ..., x_N, \theta) = N(\ln\theta + \bar{\mu}_1 \ln(1-\theta))$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\mathbf{x},\theta) = N(\frac{1}{\theta} - \frac{\bar{\mu}_1}{1-\theta}) = 0,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N), \bar{\mu}_1(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$.

Находим оценку максимального правдоподобия параметра θ

$$\tilde{\theta}(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{1+\bar{\mu}_1} = \frac{N}{N + \sum_{j=1}^{N} x_j}$$