Раздел 6. Дифференцирование нелинейных отображений

Лекция 14 Свойства отображений, дифференцируемых по Фреше.

Пусть отображение $F : X \to Y$ дифференцируемо по Фреше в точке x^*:

$$F(x^* + h) - F(x^*) = F'(x^*)h + \omega(x^*, h)\,, \quad \omega(x^*, h) = o(\|h\|)\,.$$

Утверждение: оператор $F'(x^*)$ определяется единственным образом. Следует из равенства

$$F'(x^*)h = \frac{d}{dt}F(x^* + th)\bigg|_{t=0}\,.$$

Из дифференцируемости по Фреше следует дифференцируемость по Гато, следовательно, дифференцируемость вдоль любого вектора и существование вариации по любому направлению:

$$\operatorname{Var} F(x^*, h^0) = F'(x^*)h^0\,.$$

Если отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x^*, то

$$F(x^* + h) = F(x^*) + F'(x^*)h + \omega(x^*, h)\,,$$

выражение $F(x^*) + F'(x^*)h$ называется аффинной частью оператора и аппроксимирует поведение $F(x)$ в окрестности x^*.

Если сам оператор является аффинным, т.е.

$$F(x) = y_0 + Ax\,,$$

(A – линейный ограниченный), то

$$F(x^* + h) - F(x^*) = (y_0 + A(x^* + h)) - (y_0 + Ax^*) = Ah\,,$$

и $F'(x^*) = A$ (для всех x^*).

Если оператор F линеен и ограничен,

$$F(x) = Ax\,,$$

то производная такого оператора – он сам: $F' = A$.

Пример.

Случай $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (с какой-нибудь нормой, все эквивалентны). $\Phi(x)$ – вещественная функция нескольких переменных.

$$\Phi(x^* + h) - \Phi(x^*) = \Phi'(x^*)h + \omega(x^*, h)\,,$$

$\Phi'(x^*)$ – линейный функционал в $\mathbb{R}^n$, имеет вид линейной комбинации компонент вектора h, коэффициенты – частные производные:

$$\Phi'(x^*)h = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x^*} h_j\,.$$

$\Phi'(x^*)$ – градиент, дифференциал Фреше – обычный дифференциал из матанализа.

Замечание о терминологии. Иногда под градиентом понимают элемент сопряжённого пространства, а иногда – вектор, представляющий функционал в гильбертовом пространстве по теореме Рисса-Фреше. Так, если $X = E^n$, то

$$\Phi'(x^*)h = (h, \operatorname{grad}\Phi)\,,$$

где $\operatorname{grad}\Phi$ – уже вектор исходного пространства.

Пример.

Пусть теперь $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$y_i = F_i(x)\,, \quad i = 1, \ldots, m\,.$$

В этом случае $F'(x^*)$ – линейный оператор из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, представляется матрицей частных производных

$$\left.\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right|_{x=x^*}\,,$$

т.е. матрицей Якоби.

Пример.

Отображение $C[a,b] \to C[a,b]$.

$g(s,\tau)$ – непрерывная функция двух переменных, непрерывно дифференцируемая по второму аргументу.

$x \in C[a,b]$, $y = F(x) \in C[a,b]$,

$$y(s) = g(s, x(s))\,.$$

Ищем дифференциал:

$$\begin{gathered}
F(x+h) - F(x) = g(s, x(s) + h(s)) - g(s, x(s)) = \\
= g_\tau(s, x(s) + \theta(s)h(s))h(s) = \\
= g_\tau(s, x(s))h(s) + (g_\tau(s, x(s) + \theta(s)h(s)) - g_\tau(s, x(s))h(s) = \\
= g_\tau(s, x(s))h(s) + \omega(x, h)\,.
\end{gathered}$$

При вычислениях воспользовались формулой конечных приращений по второму аргументу, $\theta(s) \in (0,1)$. Первое слагаемое представляет собой дифференциал Фреше:

$$\begin{gathered}
F'(x)h = g_\tau(s, x(s))h(s)\,, \\
\|F'(x)h\| = \max_{s\in[a,b]} |g_\tau(s, x(s))h(s)| \le \\
\le \max_{s\in[a,b]} |g_\tau(s, x(s))| \max_{s\in[a,b]} |h(s)| = \\
= \max_{s\in[a,b]} |g_\tau(s, x(s))| \cdot \|h\|\,.
\end{gathered}$$

Производная Фреше – линейный ограниченный оператор,

$$\|F'(x)\| \le \max_{s\in[a,b]} |g_\tau(s, x(s))| \,.$$

Осталось доказать оценку для $\omega(x,h)$. Поскольку нас интересуют малые по норме h, можем считать, например, $\|h\| \le M$, и тогда

$$|x(s) + \theta(s)h(s)| \le \|x\| + M \,.$$

На бикомпакте $[a,b] \times [-\|x\| - M, \|x\| + M]$ непрерывная функция $g_\tau(s,\tau)$ равномерно непрерывна, т.е., в частности,

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 : \{|\tau' - \tau''| < \delta \Rightarrow |g_\tau(s,\tau') - g_\tau(s,\tau')| < \varepsilon\} \,.$$

Возьмём $\|h\| < \delta$, тогда

$$|(x(s) + \theta(s)h(s)) - x(s)| = |\theta(s)h(s)| \le \|h\| < \delta$$

и

$$\begin{aligned}|\omega(x,h)| &= |g_\tau(s, x(s) + \theta(s)h(s)) - g_\tau(s, x(s))h(s)| \le \\ &\le ||g_\tau(s, x(s) + \theta(s)h(s)) - g_\tau(s, x(s))| \cdot \|h\| < \varepsilon\|h\| \,,\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\|\omega(x,h)\|}{\|h\|} < \varepsilon \,.$$

Замечание. Если предположить равномерную липшицевость $g_\tau(s,\tau)$ по второму аргументу, т.е.

$$\exists L > 0\, \forall s \in [a,b]\, \forall \tau \in \mathbb{R}\, |g_\tau(s,\tau') - g_\tau(s,\tau')| \le L \cdot |\tau' - \tau''| \,,$$

то можно получить оценку

$$\|\omega(x,h)\| \le L\|h\|^2$$

(доказать!)

Пример.

Функционал $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \int_a^b g(s, x(s))\, ds \,,$$

где функция g – такая же, как в предыдущем примере. Тогда

$$d\Phi(x,h) = \int_a^b g_\tau(s, x(s))h(s)\, ds$$

(доказать!)

Замечание. Если рассмотреть этот функционал на $L_2[a,b]$, то $\operatorname{grad}\Phi(x) = g_\tau(s, x(s))$, $d\Phi(x,h) = (h, \operatorname{grad}\Phi(x))$.

Высшие производные.

До сих пор рассматривали дифференциал Фреше в фиксированной точке. Если существует при всех $x \in X$, то получаем зависимость $F'(x)$, т.е. нелинейное отображение $x \mapsto F'(x)$ из X в пространство линейных ограниченных операторов $L_O(X,Y)$ (для функционалов – отображение в пространство X^*, так называемое градиентное отображение $x \mapsto \operatorname{grad}\Phi(x)$). Если это отображение само является дифференцируемым по Фреше, можно рассмотреть вторую производную $F''(x)$, которая при фиксированном $x = x^*$ является линейным оператором из X в $L_O(X,Y)$ (в конечномерном случае он задаётся матрицей вторых производных, т.е. матрицей Гессе), а если считать x переменным, то нелинейным отображением из X в $L_O(X, L_O(X,Y))$ и т.д. Полилинейные отображения. В конечномерном случае – многомерные массивы частных производных (тензоры).

Оценка разности значений нелинейного отображения.

Пусть $a, b \in X$ (не числа, а точки ЛНП!). Обозначим $h = b - a$, тогда

$$\varphi(t) = F(a + th) \quad -$$

абстрактная функция, $\varphi(0) = F(a)$, $\varphi(1) = F(b)$.

Утверждение. Если отображение F дифференцируемо по Фреше всюду, то φ – дифференцируемая абстрактная функция. Найдём её производную:

$$\begin{aligned}\dot\varphi(t) = \lim_{\delta\to 0}\frac{\varphi(t+\delta)-\varphi(t)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{F(a+(t+\delta)h)-F(a+th)}{\delta} = \\ = \lim_{\delta\to 0}\frac{F((a+th)+\delta h)-F(a+th)}{\delta} = \\ = F'(a+th)h = F'(a+t(b-a))(b-a)\,.\end{aligned}$$

Тогда, согласно формуле Ньютона-Лейбница для абстрактных функций,

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) = \varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \dot\varphi(t)\,dt = \int_0^1 F'(a+th)h\,dt = \\ = \int_0^1 F'(a+t(b-a))(b-a)\,dt = \left(\int_0^1 F'(a+t(b-a))\,dt\right)(b-a)\end{aligned}$$

(в предпоследней формуле интегрирование идёт в пространстве Y, а в последней – в $L_O(X,Y)$).

Если производная Фреше равномерно по $x \in X$ ограничена, т.е.

$$\exists N_1 > 0\,\forall x \in X : \|F'(x)\| \le N_1$$

(достаточно выполнения этого неравенства на отрезке), то отсюда следует оценка

$$\|F(b) - F(a)\| \le N_1\|b - a\|\,.$$

Предположим теперь, что зависимость производной от x удовлетворяет условию Липшица:

$$\exists N_2 > 0\, \forall x', x'' \in X : \|F'(x') - F'(x'')\| \le N_2 \|x' - x''\|$$

(здесь опять достаточно выполнения этого неравенства на отрезке), тогда

$$\begin{gathered} F(b) - F(a) = \int_0^1 F'(a+th)h\,dt = \\ = \int_0^1 F'(a)h\,dt + \int_0^1 (F'(a+th) - F'(a))h\,dt = \\ = F'(a)(b-a) + \omega\,, \end{gathered}$$

при этом

$$\begin{gathered} \|\omega\| = \left\| \int_0^1 (F'(a+th) - F'(a))h\,dt \right\| \le \\ \le \int_0^1 \|(F'(a+th) - F'(a))h\|\;dt \le \\ \le \int_0^1 \|F'(a+th) - F'(a)\|\,dt \cdot \|h\| \le \\ \le \int_0^1 N_2 t \|h\|\,dt \cdot \|h\| = \frac{N_2}{2}\|b-a\|^2\,. \end{gathered}$$

Эти оценки полностью аналогичны полученным ранее для абстрактных функций (но, ещё раз подчеркну, там значения a и b были числами, а здесь это точки ЛНП).

Таким образом, мы можем оценить разность между приращением функции и дифференциалом Фреше:

$$\|F(b) - F(a) - F'(a)(b-a)\| \le \frac{N_2}{2}\|b-a\|^2\,.$$

Если отображение F двукратно дифференцируемо, то мы можем разность производных Фреше записать в виде

$$F'(a+th) - F'(a) = \int_0^t F''(a+\tau h)h\,d\tau = F''(a)ht + \int_0^t (F''(a+\tau h) - F''(a))h\,d\tau$$

и строить дальше тейлоровское разложение для отображения F.