# Лекция №10

## Классификация особых точек линейной автономной системы второго порядка с постоянными коэффицентами.

Изучаются особые точки линейной автономной системы второго порядка с постоянными коэффицентами.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что матрица коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

невырождена. То есть точка $(x_1, x_2) = (0, 0)$ единственная особая точка системы (1).

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{2}$$

I) Предположим, что $\lambda_1$ и $\lambda_2$ его вещественные корни, а $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ – линейно независимые собственные векторы отвечающие собственным значениям $\lambda_1$ и $\lambda_2$ соответственно. Функция

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2 \tag{3}$$

является решением системы (1). Действительно

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1 + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2, \tag{4}$$

$$A\boldsymbol{x} = A(c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1 + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2. \tag{5}$$

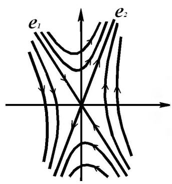
Правые части (2) и (3) совпадают, следовательно совпадают и левые, значит $\boldsymbol{x}(t)$ – решение системы (1).

Обозначим через $\xi_1$ и $\xi_2$ координаты точки в системе координат связанной с собственными векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Тогда уравнение фазовой траектории для решения (3) в этой системе координат примет вид

$$\xi_1 = c\xi_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим следующие случаи 1) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

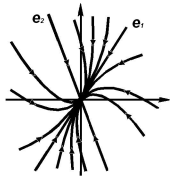
Так как $\lambda_1/\lambda_2 < 0$, то фазовые траектории – "гиперболы". Особая точка $(0,0)$ – седло, неустойчивая особая точка. Картина фазовых тракторий имеет вид




седло $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

2) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

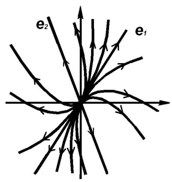
Так как $\lambda_1/\lambda_2 > 1$, то фазовые траектории – "параболы касающиеся собственного вектора, отвечающего меньшему по модулю собственному значению. Особая точка $(0,0)$ – узел, асимптотически устойчивая особая точка. Картина фазовых тракторий имеет вид




узел $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

3) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

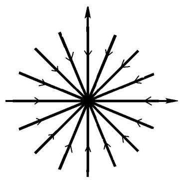
Так как $\lambda_1/\lambda_2 > 1$, то фазовые траектории – "параболы касающиеся собственного вектора, отвечающего меньшему по модулю собственному значению. Особая точка $(0,0)$ – узел, не устойчивая особая точка. Картина фазовых тракторий имеет вид




узел $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

4) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

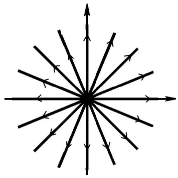
Так как $\lambda_1/\lambda_2 = 1$, то фазовые траектории – прямые, проходящие через точку $(0,0)$. Особая точка $(0,0)$ – дикритический узел, асимптотически устойчивая особая точка. Картина фазовых тракторий имеет вид



дикритический узел $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

5) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.

Так как $\lambda_1/\lambda_2 = 1$, то фазовые траектории – прямые, проходящие через точку $(0,0)$. Особая точка $(0,0)$ – дикритический узел, не устойчивая особая точка. Картина фазовых тракторий имеет вид



дикритический узел $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

II) Предположим теперь, что у матрицы коэффицентов системы $A$ существует только один линейно независимый собственный вектор. Это возможно только в случае совпадающих вещественных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Известно из линейной алгебры, что в этом случае существует базис состоящий из собственного вектора $\boldsymbol{e}_1$ и присоединенного вектора $\boldsymbol{e}_2$, в котором матрица коэффицентов системы примет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если обозначить через $(\xi_1, \xi_2)$ координаты точки в этом базисе, то решение системы (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \xi_1 = e^{\lambda t}(c_1 t + c_2) \\ \xi_2 = c_1 e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{8}$$

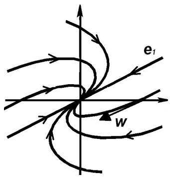
Исключив из (8) переменную t получим

$$\xi_1 = \frac{c_1}{c_2}\xi_2 + \frac{\xi_2}{\lambda} \ln \frac{y}{c_1}.$$

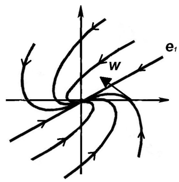
Искать присоединенный вектор не нужно. Картина фазовых траекторий зависит от направления вектора скорости $\boldsymbol{w}$, построенного, например, в точке $(1, 0)$, $\boldsymbol{w} = (a, b)$ и знака $\lambda$.

Рассмотрим два случая

1) $\lambda < 0$. Особая точка – вырожденный узел, асимтотически устойчивая особая точка. Картина фазовых траекторий имеет вид

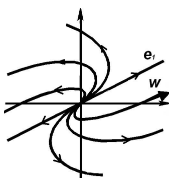



вырожденный узел $\lambda < 0$

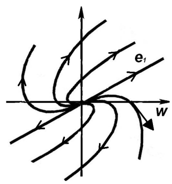



вырожденный узел $\lambda < 0$

1) $\lambda > 0$. Особая точка – вырожденный узел, не устойчивая особая точка. Картина фазовых траекторий имеет вид




вырожденный узел $\lambda > 0$




вырожденный узел $\lambda > 0$