Разбор адач, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 18.04.2020

1. Покажите, что любой непрерывный оператор в евклидовом пространстве $E^n$ компактен.

   Решение. Оператор является компактным, если он произвольное ограниченное множество отображает в предкомпактное. Но непрерывный оператор произвольное ограниченное множество отображает в ограниченное. В то же время в конечномерном пространстве любое ограниченное множество предкомпактно.

2. Пусть для всякого $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l_2$ оператор $A$ действует по формуле
$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2j}\,.$$
   Покажите, что оператор $A$ – компактный оператор из $l_2$ в $E^1$.

   Решение. Покажем ограниченность оператора $A$ (который фактически является линейным функционалом). Удобно показать эту ограниченность на плотном множестве обрывающихся последовательностей. Пусть в рассматриваемой последовательности элементы $\alpha_j$ обращаются в нуль при $j > N$. Воспользуемся неравенством КБШ:
$$|Ax| = \left|\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{2j}\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |\alpha_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4j^2}} < \|x\|_2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{6}}\,.$$
   Здесь я воспользовался формулой
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,$$
   но конкретное значение суммы здесь несущественно: важно, что ряд сходится. Из полученной оценки следует, что оператор (функционал) ограничен на плотном множестве, а тогда он ограничен и на всём пространстве $l_2$. Поэтому образ произвольного ограниченного множества в $l_2$ при отображении $A$ есть ограниченное числовое множество, которое предкомпактно (по теореме Больцано-Вейерштрасса). Оператор компактен.

3. Докажите, что линейный оператор $A$, действующий из $E^n$ в $E^n$, симметричен тогда и только тогда, когда симметрична представляющая его матрица.

   Решение. Произвольный линейный оператор $A$ в $\mathbb{R}^n$ задаётся формулой вида
$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,,$$

где $\{a_{ij}\}$ – элементы представляющей оператор матрицы.

Оператор $A$ симметричен, если для произвольных элементов $x$, $y$ справедливо равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay)\,.$$

В пространстве $E^n$ скалярное произведение элементов $Ax$ и $y$ равно

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^{n} (Ax)_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i\,.$$

Аналогично

$$(x, Ay) = \sum_{i=1}^{n} x_i (Ay)_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\,.$$

Пусть оператор $A$ симметричный. Рассмотрим случай, когда $x = e_k$, $y = e_m$, т.е. $x_i = \delta_{ik}$, $y_i = \delta_{im}$. В этом случае в каждой из сумм останется по одному слагаемому: $(Ae_k, e_m) = a_{mk}$, $(e_k, Ae_m) = a_{km}$, и из равенства $(Ae_k, e_m) = (e_k, Ae_m)$ вытекает, что $a_{mk} = a_{km}$. В силу произвольности $k$ и $m$ последнее равенство означает, что матрица симметрична.

Обратно, пусть матрица симметрична. Тогда для любых $x$ и $y$

$$(Ax, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_j y_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = (x, Ay)\,,$$

что и означает симметричность оператора $A$.

Пояснение. Сначала мы воспользовались симметричностью матрицы, а потом переобозначили (переименовали) индексы, что не повлияло на значение суммы.

4. Выпишите сопряжённый оператор к оператору $A$ в $E^2$, определяемому матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

   Решение. Удобно записать вектор $x$ в виде столбца $x = \binom{x_1}{x_2}$, тогда

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} (Ax, y) &= (x_1 + 4x_2) y_1 + (5x_1 + 2x_2) y_2 = \\ &= x_1 (y_1 + 5y_2) + x_2 (4y_1 + 2y_2) = (x, A^* y)\,, \end{aligned}$$

где

$$A^* y = \begin{pmatrix} y_1 + 5y_2 \\ 4y_1 + 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

5. Покажите, что $(A^*)^* = A$ и $(A^*A)^* = A^*A$.

   Решение. По определению сопряжённого оператора

$$\forall x, y \in H:\ (Ax, y) = (x, A^*y)\,,$$

   и тогда

$$\forall x, y \in H:\ (A^*x, y) = (x, (A^*)^*y)\,.$$

   С другой стороны,

$$\forall x, y \in H:\ (A^*x, y) = (y, A^*x) = (Ay, x) = (x, Ay)\,,$$

   откуда $(A^*)^* = A$. Первое равенство доказано.

   Второе равенство. С одной стороны,

$$\forall x, y \in H:\ (A^*Ax, y) = (x, (A^*A)^*y)\,.$$

   С другой стороны,

$$\forall x, y \in H:\ (A^*Ax, y) = (A^*(Ax), y) =$$
$$= (Ax, (A^*)^*y) = (x, A^*(A^*)^*y) = (x, A^*Ay)\,,$$

   откуда $(A^*A)^* = A^*A$.

   Замечание. Можно было просто воспользоваться полученным ранее равенством $(BA)^* = A^*B^*$, положив $B = A^*$ и воспользовавшись первым доказанным равенством.

6. Проверьте, что если $A$ и $A^*$ – сопряжённые друг к другу операторы, то $A + A^*$, $AA^*$ и $A^*A$ – самосопряжённые операторы и $\|AA^*\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$.

   Доказательство.

$$(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^*\,.$$

   Самосопряжённость $A^*A$ доказана в предыдущей задаче.

   Самосопряжённость $AA^*$ получается из самосопряжённости $A^*A$ подстановкой $A^*$ вместо $A$.

   Для доказательства последнего утверждения вспомним сперва, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (Ax, y) = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (x, A^*y) =$$
$$= \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (A^*y, x) = \|A^*\|\,.$$

   Далее, $\|A^*A\| \le \|A^*\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$.

Оценка в обратную сторону:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|=1} (Ax, Ax) =$$
$$= \sup_{\|x\|=1} (A^*Ax, x) \leq \sup_{\|x\|=\|y\|=1} (A^*Ax, y) = \|A^*A\| .$$

Отсюда $\|A^*A\| = \|A\|^2$. Подставив $A^*$ вместо $A$, получаем $\|AA^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$.

7. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов. Тогда всякому элементу $x \in H$ соответвтует ряд Фурье относительно системы $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

   Оператор $A$, действующий на всякий элемент $x \in H$ по формуле $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i$, называется оператором нормального типа.

   Покажите, что оператор нормального типа в гильбертовом пространстве будет иметь ограниченный обратный тогда и только тогда, когда существует такая постоянная величина $\gamma > 0$, что выполняется неравенство $\inf_n |\lambda_n| \geq \gamma$.

   Замечание. Очевидно, $e_i$ являются собственными элементами оператора $A$, а $\lambda_i$ – соответствующими собственными числами.

   Замечание. Условие $\inf_n |\lambda_n| \geq \gamma$ означает, что множество собственных чисел отделено от нуля.

   Доказательство. Пусть оператор $A$ непрерывно обратим. Применим его к элементам $e_i$: $Ae_i = \lambda_i e_i$.
   Если $\lambda_i = 0$, то опреатор $A$ имеет нетривиальное ядро и, следовательно, необратим.
   Пусть теперь $\forall i : \lambda_i \neq 0$, тогда $A^{-1}(\lambda_i e_i) = e_i$ и $A^{-1} e_i = \lambda_i^{-1} e_i$, т.е. $\lambda_i^{-1}$ – собственное число оператора $A^{-1}$.
   Мы знаем, что

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\| \geq \|A^{-1}e_i\| = \|\lambda_i^{-1} e_i\| = |\lambda_i^{-1}| ,$$

   т.е. $\forall i : |\lambda_i^{-1}| \leq \|A^{-1}\|$. Отсюда следует, что, во-первых, $\|A^{-1}\| > 0$, поскольку $\lambda_i^{-1} \neq 0$, и, во-вторых, $\forall i : |\lambda_i| \geq \gamma = \|A^{-1}\|^{-1} > 0$. Это значит, что $\gamma$ – нижняя грань множества $\{|\lambda_i|\}$. Осталось заменить $i$ на $n$ и вспомнить, что точная нижняя грань – наибольшая из всевозможных нижних граней числового множества. Необходимость доказана.

   Докажем достаточность. Пусть $\inf_n |\lambda_n| = \inf_i |\lambda_i| \geq \gamma > 0$. Оценим снизу квадрат нормы элемента $Ax$:

$$\|Ax\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2 \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^2 |\alpha_i|^2 = \gamma^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \gamma^2 \|x\|^2 \,,$$

откуда $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$. Для доказательства непрерывной обратимости оператора осталось показать, что он сюрьективен (была такая теорема в прошлом семестре, предшествовавшая теореме Банаха).

Итак, рассмотрим уравнение $Ax = y$ и покажем, что оно имеет решение при любой правой части. Представим элемент $y$ в виде ряда Фурье $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, тогда элемент $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, в котором $\alpha_i = \beta_i/\lambda_i$ удовлетворяет уравнению $Ax = y$:

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i = y \,.$$

Следует, однако, проверить, что формула

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} e_i$$

действительно определяет некоторый элемент пространства $H$, т.е. что этот ряд сходится. Мы знаем, что гильбертовом (полном) пространстве необходимым и достаточным условием такой сходимости является сходимость числового ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right|^2 \,.$$

Такая сходимость следует из сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|^2$$

и признака сравнения:

$$|\alpha_i|^2 = \left|\frac{\beta_i}{\lambda_i}\right|^2 \leq \left|\frac{\beta_i}{\gamma}\right|^2 \,.$$

Достаточность доказана.

Замечание. Для того, чтобы формула $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i$ задавала полноопределённый оператор, т.е. чтобы для произвольного элемента $x \in H$ ряд в правой части сходился, мы должны потребовать ограниченности множества $\{|\lambda_i|\}$ сверху, что эквивалентно ограниченности самого оператора $A$. Если такой ограниченности нет, то у оператора $A$ всё равно будет существовать ограниченный обратный, заданный на всём пространстве $H$, но область определения самого оператора $A$, определяемая условием сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2$, будет образовывать в пространстве $H$ некоторое плотное множество, отличное от самого $H$.

Замечание. Оператор $A^{-1}$, обратный к оператору нормального типа, сам относится к этому же классу и действует на элемент $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$ по правилу

$$A^{-1}y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i} e_i\,.$$

Если оператор $A^{-1}$ ограничен, то область его определения – всё пространство, в противном случае – плотное множество в $H$, совпадающее с образом оператора $A$. При этом, разумеется, ядро оператора $A$ должно быть тривиально, т.е. все значения $\lambda_i$ должны быть отличны от нуля.

8. Покажите, что оператор нормального типа в гильбертовом пространстве будет компактным тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

Решение. Пусть $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Это значит, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall n > N :\, |\lambda_n| \le \varepsilon\,.$$

Представим оператор $A$ в виде суммыы $A = A_N + C_N$:

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \alpha_i e_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i = A_N x + C_N x\,.$$

Оператор $A_N$ имеет конечный ранг, при этом $\|C_N\| \le \varepsilon$. Действительно,

$$\|C_N x\|^2 = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2 \le$$

$$\le \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon^2 |\alpha_i|^2 = \varepsilon^2 \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \le \varepsilon^2 \|x\|^2\,.$$

Отсюда вытекает, что оператора $A$ вполне непрерывен и, следовательно, компактен.

Пусть теперь последовательность $\{\lambda_n\}$ к нулю не стремится. Это значит, что найдётся такая окрестность нуля, вне которой лежит бесконечное множество элементов этой последовательности: $|\lambda_i| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Рассмотрим последовательность элементов $e_i$ с номерами, соответствующими таким собственным числам, и заметим, что

$$\|Ae_i - Ae_j\|^2 = \|\lambda_i e_i - \lambda_j e_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 > 2\varepsilon^2\,,$$

что означает, что из последовательности $\{Ae_i\}$, отвечающей указанному подмножеству номеров, нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность, в то время как соответствующая последовательность $\{e_i\}$, очевидно, ограничена. Это означает, что оператор $A$ в этом случае компактным не является.

Замечание. Мы снова видим, уже на примере операторов нормального типа, что в бесконечномерном пространстве компактный оператор не может иметь ограниченного обратного, поскольку стремление последовательности $\{\lambda_n\}$ к нулю, очевидно, протеворечит рассмотренному в предыдущей задаче условию отделённости от нуля.
При этом может случиться, что не выполняется ни то, ни другое условие, если сама последовательность $\{\lambda_n\}$ к нулю не стремится, но у неё есть бесконечно малая подпоследовательность, либо какой-то элемент этой последовательности равен нулю.

9. Покажите, что для всякого ограниченного оператора $A$, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ по формуле $y = Ax$, в пространстве $l_2$ существует "подобный"оператору $A$ ограниченный оператор $\hat{A}$ такой, что $\|\hat{A}\|_{l_2\to l_2} = \|A\|_{H\to H}$. При этом оператор $\hat{A}$ определяется следующим образом: $\hat{A}\hat{x} = \hat{y}$, где
$\hat{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in l_2$ и $\hat{y} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots) \in l_2$ – те элементы $l_2$, которые соответствуют при непрерывном изоморфизме $\tau$ сепарабельного гильбертова пространства $H$ и $l_2$ элементам $x \in H$ и $y \in H$.

Решение. Пусть $\tau : H \to l_2$ – изометрический изоморфизм,

$$\hat{x} = \tau x\,, \quad \alpha_i = (x, e_i)\,, \quad x = \tau^{-1}\hat{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\,.$$

Аналогично

$$\hat{y} = \tau y\,, \quad \beta_i = (y, e_i)\,, \quad y = \tau^{-1}\hat{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\,.$$

Пусть теперь $y = Ax$, или $\tau^{-1}\hat{y} = A\tau^{-1}\hat{x}$, откуда

$$\hat{y} = \tau A \tau^{-1}\hat{x} = \hat{A}\hat{x}\,,$$

где $\hat{A} = \tau A \tau^{-1}$. Операторы, связанные преобразованием такого рода, называются подобными. Обратное преобразование: $A = \tau^{-1}\hat{A}\tau$.

Равенство норм операторов $A$ и $\hat{A}$ почти очевидно и вытекает из изометричности $\tau$:

$$\|\hat{A}\|_{l_2\to l_2} = \sup_{\|\hat{x}\|_{l_2}=1} \|\hat{A}\hat{x}\|_{l_2} = \sup_{\|x\|_H=1} \|\hat{A}\tau x\|_{l_2} =$$
$$= \sup_{\|x\|_H=1} \|\tau^{-1}\hat{A}\tau x\|_H = \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H = \|A\|_{H\to H}\,.$$

Опишем действие оператора $\hat{A}$ явно. Прежде всего, заметим, что в силу линейности и непрерывности оператора $A$

$$y = Ax = A\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j A e_j = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j d_j \,,$$

где $d_j = Ae_j$ (индекс суммирования с $i$ изменили на $j$). Тогда

$$\beta_i = (y, e_i) = (Ax, e_i) = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j A e_j, e_i\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\,(Ae_j, e_i) = \sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\alpha_j \,,$$

где $a_{ij} = (e_i, d_j) = (e_i, Ae_j)$.

10. Покажите, что оператор $\hat{A}$ в пространстве $l_2$, построенный в предыдущей задаче для заданного оператора $A$, будет компактным тогда и только тогда, когда компактным будет исходный оператор $A$.

    Решение. Оператор компактен, если переводит произвольное ограниченное множество в предкомпактное. Мы знаем, что при изометрическом отображении образ ограниченного множества ограничен, а образ предкомпактного множества предкомпактен.

    Пусть оператор $A$ компактен. Покажем, что оператор $\hat{A} = \tau A \tau^{-1}$ также компактен. Рассмотрим его действие на произвольном ограниченном множестве. Образ этого множества при отображении $\tau^{-1}$ останется ограниченным, оператор $A$ переведёт его в предкомпактное, и отображение $\tau$ переведёт это предкомпактное множество снова в предкомпактное. Следовательно, $\hat{A}$ – компактный оператор.

    Пусть теперь оператор $\hat{A}$ компактен. Покажем, что оператор $A = \tau^{-1}\hat{A}\tau$ также компактен. Рассмотрим его действие на произвольном ограниченном множестве. Образ этого множества при отображении $\tau$ останется ограниченным, оператор $\hat{A}$ переведёт его в предкомпактное, и отображение $\tau^{-1}$ переведёт это предкомпактное множество снова в предкомпактное. Следовательно, $A$ – компактный оператор.

Задачи, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 25.04.2020

1. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов. Покажите, что тогда всякий непрерывный линейный оператор $A : H \to H$ может быть задан бесконечной матрицей $\hat{A} = \{a_{ij}\}$, определяемой равенством

$$d_j = Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}e_i \,.$$

2. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор. Покажите, что тогда $\exists\, K \in \mathbb{R}^1_+$ такое, что для $\forall (x_1, \dots, x_m)$ и $\forall (y_1, \dots, y_n)$ имеет место неравенство
$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right|^2 \le K \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \,,$$
где $a_{ij}$ – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше.

3. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор, и $\exists\, K \in \mathbb{R}^1_+$ такое, что для $\forall (x_1, \dots, x_m)$ и $\forall (y_1, \dots, y_n)$ имеет место неравенство
$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \right|^2 \le K \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \,,$$
где $a_{ij}$ – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше. Получите для нормы оператора $A$ оценку сверху.

4. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор. Получите оценку снизу нормы оператора $A$:
$$\sup_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right\} \le \|A\|_H^2 \,,$$
где $a_{ij}$ – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше.

5. Покажите, что оператор $A$, заданный бесконечной матрицей $\hat{A} = \{a_{ij}\}$, относительно полной системы $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов $\{e_i\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $H$ и действующий по формуле
$$Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i$$
вполне непрерывен, если
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty \,.$$