10-й семинар

Поговорим немного об ортогональном операторе, который Вы только что (надеюсь) изучали с помощью 11-й лекции. Так мы называли оператор в евклидовом пространстве (то есть в конечномерном линейном пространстве с зафиксированной билинейной симметричной положительно определенной формой, то есть со скалярным произведением), который не меняет скалярное произведение векторов:

$$(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y)) = (x, y)$$

для всех векторов x и y.

Наряду с другими свойствами ортогонального оператора мы узнали, что в ортонормированном базисе матрица такого оператора ортогональна, что означает, что

$$A^T A = E$$

(на нормальном языке это означает, что столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему (впрочем, как и строчки)). На 10-й лекции мы выяснили, что в пространстве V^2 это или приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix},$$

а это, как нам давно уже известно, матрица поворота плоскости на угол α. Кстати, обращаем внимание на то, что определитель этой матрицы равен 1. Вторая возможность – получить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим этот случай подробно (если $\alpha = \pi k$, есть смысл поговорить отдельно). Для поиска собственных значений пишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \operatorname{Tr} A \cdot \lambda + \det A = 0;\ \lambda^2 - 1 = 0; \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

1) $\lambda_1 = 1$; ищем собственные векторы методом Гаусса:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin^2\frac{\alpha}{2} & 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} & -2\cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

Делим первую строчку на $-2\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$ (не равно нулю благодаря нашей предусмотрительности – мы же потребовали, чтобы угол α не был кратен π), вторую строчку делим на $2\cos\frac{\alpha}{2}$ (опять благодаря предусмотрительности), получаем одинаковые строчки (что-то подобное должно было произойти – ведь при $\lambda = 1$ определитель матрицы $A - \lambda E$ равен нулю). Ищем решение в виде $X = \begin{pmatrix} \text{ь} \\ \text{ъ} \end{pmatrix}$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \text{ь} - \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \text{ъ} = 0;\ X = C\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Получили собственный вектор $e_1 = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \bar{i} + \sin\frac{\alpha}{2}\bar{j}$, идущий по прямой, полученной из оси OX поворотом на угол $\alpha/2$. Этот вектор имеет собственное значение 1, поэтому под действием оператора он, а также все векторы, парллельные ему, остаются неподвижными.

2) $\lambda_2 = -1$. Мой совет – расписать этот случай самостоятельно. Мы же это делать не будем, а просто воспользуемся одним из свойств ортогонального оператора – ортогональное дополнение к инвариантному подпространству также является инвариантным подпространством. Первое инвариантное подпространство, найденное в первом пункте – это векторы, коллинеарные вектору e_1. Ортогональное дополнение к нему – это векторы, коллинеарные вектору $e_2 = -\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \bar{i} + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \bar{j}$, который перпендикулярен e_1. Поскольку $\lambda_2 = -1$, получаем $\mathcal{A}(e_2) = -e_2$, а учитывая, что $\mathcal{A}(e_2) = e_2$, делаем вывод, что наш оператор является оператором отражения относительно прямой

$$-\sin\frac{\alpha}{2}x + \cos\frac{\alpha}{2}y = 0,$$

образующей угол $\alpha/2$ с осью OX

Осталось рассмотреть случай, когда угол α кратен π.

Если $\alpha = 2\pi k$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что это матрица оператора отражения относительно оси OX.

Если $\alpha = 2\pi k + 1$, то

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что это матрица отражения относительно оси OY.

Таким образом, мы доказали, что оператор с матрицей второго вида при любом α – это оператор отражения относительно прямой, полученной из оси OX поворотом на угол $\alpha/2$.

Заметим кстати, что определитель матрицы этого оператора равен минус 1. А заметив еще, что оператор первого вида – оператор поворота – не меняет ориентацию базиса, а оператор второго вида – оператор отражения – ее меняет, понимаем, что определив знак определителя ортогонального оператора на плоскости, уже можем сделать вывод, что осуществляет оператор – поворячивает плоскость или соваршает отражение относительно прямой.

Зададимся вопросом: какой оператор получится, если перемножить два ортогональных оператора на плоскости.

Если это два поворота, то ответ очевиден без выкладок – снова получится поворот на угол, равный сумме углов поворота сомножителей. Кстати, перемножая матрицы операторов поворота на углы α и β, можно таким образом получить формулы для косинуса и синуса суммы и разности.

Если это два отражения, то общие соображения позволяют утверждать, что в результате получится оператор поворота – это следует из того, что у оператора поворота определитель матрицы равен 1, а у оператора отражения равен -1. Кроме того, определитель произведения матриц равен произведению определителей. Ну и наконец, если кто-то забыл, напомню, что минус на минус даёт плюс)).

Перемножая матрицы (это удовольствие я оставляю Вам), легко доказать, что получится оператор поворота на угол, в два раза больший угла между прямыми. Только Вам нужно ещё сообразить, в какую сторону нужно производить вращение. Кроме того, полезно получить этот результат чисто геометрически. Надеюсь, что Вы справитесь. Тем более, что это один из моих любимых вопросов на экзамене)).

Аналогичные соображения позволяют сообразить, что поворот и отражение суммарно дадут отражение. Но этот случай я целиком отдаю Вам на откуп. Творите!

В конце несколько просьб по поводу типового расчета. Пишу об этом, поскольку пока не все о них узнали.

1) Нумеровать присылаемые страницы в соответствии с номером задачи. Например,

```
2_1
```

означает первая задача, вторая страница.

2) Прислать титульный лист.

3) Прислать свою фотографию

4) Подумать на тему, как сделать так, чтобы Ваши типовые занимали не слишком много места на моём компьютере.

5) Присылать свои работы на мою почту

yugolovin@list.ru

6) В письме указывать свой номер телефона, имя, фамилию и номер группы.

Спасибо.