Лекция №4

Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Будем рассматривать системы вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ A = (a_{ij}),\ a_{ij} = \mathrm{const}\,. \tag{1}$$

Теорема. *Пусть λ_0 — корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ ($\lambda_0 \in \mathbb{C}$), $\boldsymbol{h}_0$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ_0. Тогда вектор-функция $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t}$ является решением системы (1).*

Доказательство.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t}}{\mathrm{d}t} = \lambda_0 \boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t},$$
$$A\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t}) = e^{\lambda_0 t} A\boldsymbol{h}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t},$$

следовательно,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

$\square$

Теорема. *Пусть λ_0 — собственное значение матрицы A, которому соответствует жорданова клетка порядка k в жордановой нормальной форме матрицы A, h_0, $h_1, \ldots, h_{k-1}$ — цепочка, состоящая из собственного и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ_0, то есть*

$$\begin{aligned}
&A\boldsymbol{h}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_0,\\
&A\boldsymbol{h}_1 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A\boldsymbol{h}_{k-1} = \lambda_0 \boldsymbol{h}_{k-1} + \boldsymbol{h}_{k-2}.
\end{aligned}$$

Тогда вектор-функции

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{h}_0 e^{\lambda_0 t},\\
&\boldsymbol{x}^2 = (\boldsymbol{h}_1 + t\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{x}^k = (\boldsymbol{h}_{k-1} + t\boldsymbol{h}_{k-2} + \tfrac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{k-3} + \ldots + \tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t}
\end{aligned}$$

являются решениями системы (1).

Доказательство. Для вектор-функции $\boldsymbol{x}^1(t)$ утверждение было доказано в предыдущей теореме. Докажем для произвольной вектор-функции

$$\boldsymbol{x}^l = (\boldsymbol{h}_{l-1} + t\boldsymbol{h}_{l-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t},\ l \leqslant k,$$

$$\begin{gathered}
\dot{\boldsymbol{x}}^l = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\boldsymbol{h}_{l-1} + t\boldsymbol{h}_{l-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t}] =\\
= \lambda_0(\boldsymbol{h}_{l-1} + t\boldsymbol{h}_{l-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t} +\\
+(\boldsymbol{h}_{l-2} + t\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t} =\\
= \lambda_0 \boldsymbol{x}^l + \boldsymbol{x}^{l-1}.
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
A\boldsymbol{x}^l = A[(\boldsymbol{h}_{l-1} + t\boldsymbol{h}_{l-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\boldsymbol{h}_0) e^{\lambda_0 t}] =\\
= e^{\lambda_0 t}(A\boldsymbol{h}_{l-1} + tA\boldsymbol{h}_{l-2} + \frac{t^2}{2}A\boldsymbol{h}_{l-3} + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}A\boldsymbol{h}_0)\\
e^{\lambda_0 t}((\lambda_0\boldsymbol{h}_{l-1} + \boldsymbol{h}_{l-2}) + t(\lambda_0\boldsymbol{h}_{l-2} + \boldsymbol{h}_{l-3}) + \frac{t^2}{2}(\lambda_0\boldsymbol{h}_{l-3} +\\
+\boldsymbol{h}_{l-4}) + \ldots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\lambda_0\boldsymbol{h}_0) = \lambda_0\boldsymbol{x}^l + \boldsymbol{x}^{l-1}.
\end{gathered}$$

Следовательно

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}.$$

□

Следствие. *Вектор-функции, составленные по указанному в предыдущей теореме правилу для всех жордановых клеток матрицы A, образуют ФСР.*

Доказательство. Построенных таким образом решений получиться n штук. Эти решения линейно независимы в силу того, что определитель Вронского этой системы вектор-функций $W_{\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n}(0) \neq 0$ так как совпадает с определителем матрицы для векторов жорданова базиса. $\square$

Лемма (1). *Пусть $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}(t) + i\boldsymbol{v}(t)$ – решение системы* (1)*, коэффициенты матрицы A – вещественные числа, тогда $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)$ – вещественные решения системы* (1).

Доказательство.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) + i\dot{\boldsymbol{v}}(t), \tag{2}$$

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{u} + iA\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

Так как $\boldsymbol{x}(t)$ – решение системы (1) левые части равенств (2) и (3) равны, следовательно равны и правые части, а из того что матрица A, функции $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)$ – вещественны следует выполнение равенств

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = A\boldsymbol{u},$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = A\boldsymbol{v}.$$

$\square$

Замечание. *Вектор-функции $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{u}(t) + i\boldsymbol{v}(t)$ и $\overline{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{u}(t) - i\boldsymbol{v}(t)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы вектор-функции $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)$.*

Действительно, это следует из того, что якобиан преобразования

$$u = \frac{\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}}}{2}, \quad v = \frac{\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}}{2i} \text{ *равный*}$$
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{-i}{2} \neq 0.$$

Лемма (2)**.** *Если*

$$A\boldsymbol{h}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_0,\ A\boldsymbol{h}_1 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_0, \text{ *и так далее,* } \lambda_0 \in \mathbb{C},$$

A *– матрица с вещественными коэффициентами, то*

$$A\overline{\boldsymbol{h}}_0 = \overline{\lambda}_0 \overline{\boldsymbol{h}}_0,\ A\overline{\boldsymbol{h}}_1 = \overline{\lambda}_0 \overline{\boldsymbol{h}}_1 + \overline{\boldsymbol{h}}_0, \text{ *и так далее.*}$$

Доказательство. Действительно, применим к левой и правой части равенства

$$A\boldsymbol{h}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_0$$

операцию комплексного сопряжения и учтем, что коэффициенты матрицы A вещественны

$$\overline{A\boldsymbol{h}_0} = \overline{A}\overline{\boldsymbol{h}}_0 = A\overline{\boldsymbol{h}}_0,$$
$$\overline{\lambda_0 \boldsymbol{h}_0} = \overline{\lambda}_0 \overline{\boldsymbol{h}}_0,$$

отсюда следует, что

$$A\overline{\boldsymbol{h}}_0 = \overline{\lambda}_0 \overline{\boldsymbol{h}}_0.$$

Аналогично поступим с равенством

$$A\boldsymbol{h}_1 = \lambda_0 \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_0,$$

получим

$$\overline{A\boldsymbol{h}_1} = \bar{A}\bar{\boldsymbol{h}}_1 = A\overline{\boldsymbol{h}}_1,$$
$$\overline{(\lambda_0 \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_0)} = \overline{\lambda_0 \boldsymbol{h}_1} + \overline{\boldsymbol{h}}_0 = \overline{\lambda}_0 \overline{\boldsymbol{h}}_1 + \overline{\boldsymbol{h}}_0,$$

отсюда

$$A\overline{\boldsymbol{h}}_1 = \overline{\lambda}_0\overline{\boldsymbol{h}}_1 + \overline{\boldsymbol{h}}_0.$$

$\square$

Лемма (3). *Если $\boldsymbol{x}^j(t)$ – решение системы* (1), *отвечающее собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, построенное как описано выше, A – матрица с вещественными коэффициентами, то сопряженное к нему решение отвечает собственному значению $\overline{\lambda}_0$.*

Доказательство. Построенное по указанному выше правилу решение $\boldsymbol{x}^j(t)$ задается формулой

$$\boldsymbol{x}^j = \left(\boldsymbol{h}_{j-1} + t\boldsymbol{h}_{j-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\boldsymbol{h}_0\right)e^{\lambda_0 t}. \quad (4)$$

Применим операцию комплексного сопряжения к равенству (4), получим

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{x}^j} &= \overline{\left(\boldsymbol{h}_{j-1} + t\boldsymbol{h}_{j-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\boldsymbol{h}_0\right)e^{\lambda_0 t}} = \\ &= \overline{\left(\boldsymbol{h}_{j-1} + t\boldsymbol{h}_{j-2} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{j-3} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\boldsymbol{h}_0\right)}\,\overline{e^{\lambda_0 t}} = \\ &= \left(\overline{\boldsymbol{h}_{j-1}} + \overline{t\boldsymbol{h}_{j-2}} + \overline{\frac{t^2}{2}\boldsymbol{h}_{j-3}} + \ldots + \overline{\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\boldsymbol{h}_0}\right)e^{\overline{\lambda_0 t}} = \\ &= \left(\overline{\boldsymbol{h}_{j-1}} + t\overline{\boldsymbol{h}_{j-2}} + \frac{t^2}{2}\overline{\boldsymbol{h}_{j-3}} + \ldots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\overline{\boldsymbol{h}_0}\right)e^{\overline{\lambda_0}t}.\end{aligned}$$

$\square$

Из доказанной Теоремы и Лемм (1), (2), (3) следует

Следствие. *Для построения ФСР системы* (1) *состоящей из действительнозначных вектор-функций, с матрицей A, имеющей вещественные коэффициенты, следует взять ФСР, состоящую из комплекснозначных вектор-функций, действительные решения оставить, а для каждой пары комплексно-сопряженных решений, выбираем одно из них и берем его действительную и мнимую части.*

Решить примеры:

Пример. *Найти общее решение систем*

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$