Семинар 22 (17.12.16)

Задача $f(x)=(x-5)e^{\frac{1}{x}}$

$y=x-4$ — накл. асимптота при $x\to\pm\infty$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0$$

8) $f(x)=\dfrac{x^2-x+5}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

~~Знак~~ $+$ 0 $+$ знак $f'(x)$

$\nearrow$ $\nearrow$

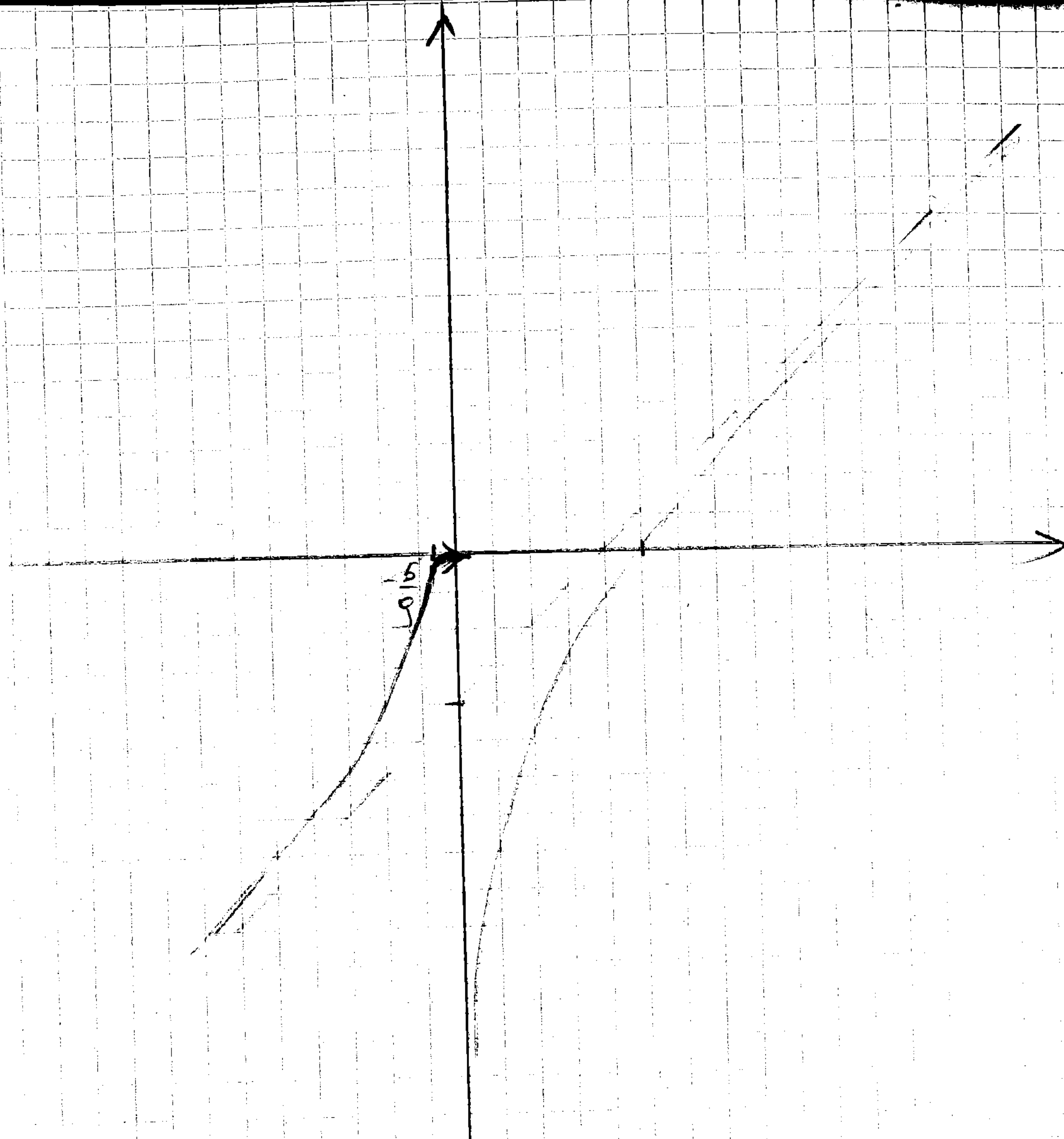
$$\lim_{x\to 0-0} f'(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2-x+5}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = 5\lim_{x\to 0-0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= 5\lim_{x\to 0-0}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{2x} = 5\lim_{x\to 0-0}\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{2x^3} = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x} \\ x=\frac{1}{t} \end{bmatrix} =$$

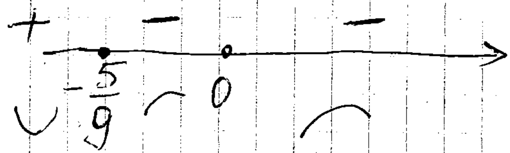
$$= 5\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{\frac{1}{t^2}} = \cancel{\left[\frac{0}{0}\right]} = 5\lim_{t\to-\infty}\frac{t^2}{e^{-t}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= 5\lim_{t\to-\infty}\frac{2t}{-e^{-t}} = 5\left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 5\lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^{-t}} = 0$$

10)



9) $f''(x) = -\frac{9x+5}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}}$



$x = -\frac{5}{9}$ – точка переги-
ба; $f\left(-\frac{5}{9}\right) = -\frac{50}{9} \cdot e^{-\frac{9}{5}} \approx$
$\approx \dots$

$f'\left(-\frac{5}{9}\right) = \dots$

<u>Задача</u> $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$

2) [redacted]

3) Функция $f(x)$ непрерывна при $x \in D(f)$

4) $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}} = \left[x = -t\right] =$

$= \lim\limits_{t \to 0+0} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+4t}} = \lim \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t+4}} = [0$

$\lim\limits_{x \to 4+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 4+0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}} = \left[\frac{16}{+0}\right] = +\infty \Rightarrow$

Прямая $x = 4$ – вертикальная асимптота при $x \to 4+0$.

5) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1-4/x}}=1$

$\cancel{k=\lim}\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}}\right)=\cancel{\left(\frac{x^2\left(1-\sqrt{1-4/x}\right)}{x\sqrt{1-4/x}}\right)}=$

$\cancel{=\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)}{\sqrt{x^2-4x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(x^2-x^2+4x)}{\sqrt{x^2-4x}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{x^2\sqrt{1-4/x}\left(1+\sqrt{1-4/x}\right)}=$

$=2.$

Прямая $y=kx+b=x+2$ накл-ая асим-птота при $x\to+\infty$

$k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4x}}=$

$\cancel{=\lim\limits_{x\to-\infty}}\left[\begin{matrix}x=-t\\ t=-x\end{matrix}\right]=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{-t^2}{t\sqrt{t^2-4t}}=$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{t}\frac{-1}{\sqrt{1-4/t}}=-1.$

4

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}+\cancel{k}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\begin{bmatrix} t=-x\\ x=-t\end{bmatrix}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-t\sqrt{t^2+4t}}{\sqrt{t^2+4t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t(t-\sqrt{t^2+4t})}{\sqrt{t^2+4t}}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t(t^2-t^2-4t)}{\sqrt{t^2+4t}\,(t+\sqrt{t^2+4t})}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-4t^2}{t^2\sqrt{1+4/t}\,(1+\sqrt{1+4/t})}=$$

$$=-2.$$

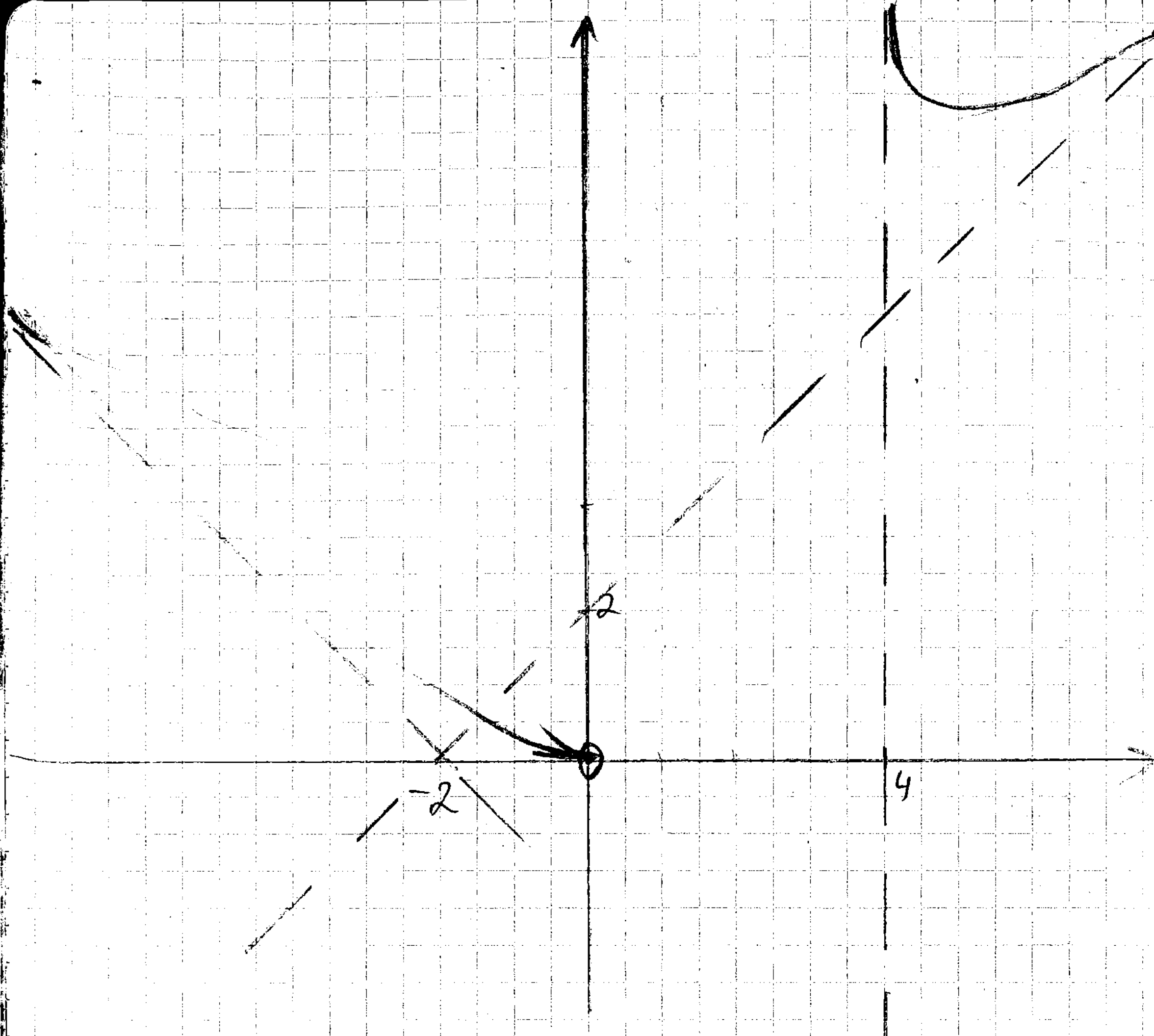
Прямая $y=kx+b=-x-2$ явл-ся наклонной ас. при $x\to-\infty$

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4x}}$

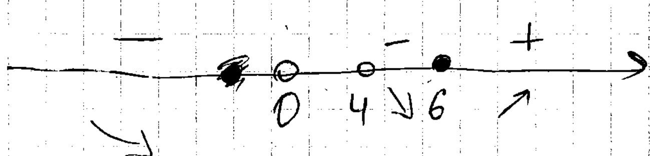
~~График функции~~ [illegible]
~~осью Oy в точке (0,0)~~

~~График~~

График не имеет пересечений с осью Ox и осью Oy.



8) $f'(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{(x^2-4x)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x^2(x-6)}{(x^2-4x)^{\frac{3}{2}}}$



6

376

$x = 6$ – точка минимума

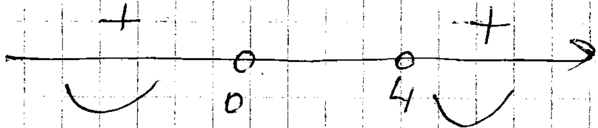
$$\lim_{x \to 0-0} \frac{x^2(x-6)}{(x^2-4x)^{\frac{3}{2}}} = \begin{bmatrix} x = -t \\ t = -x \end{bmatrix} =$$

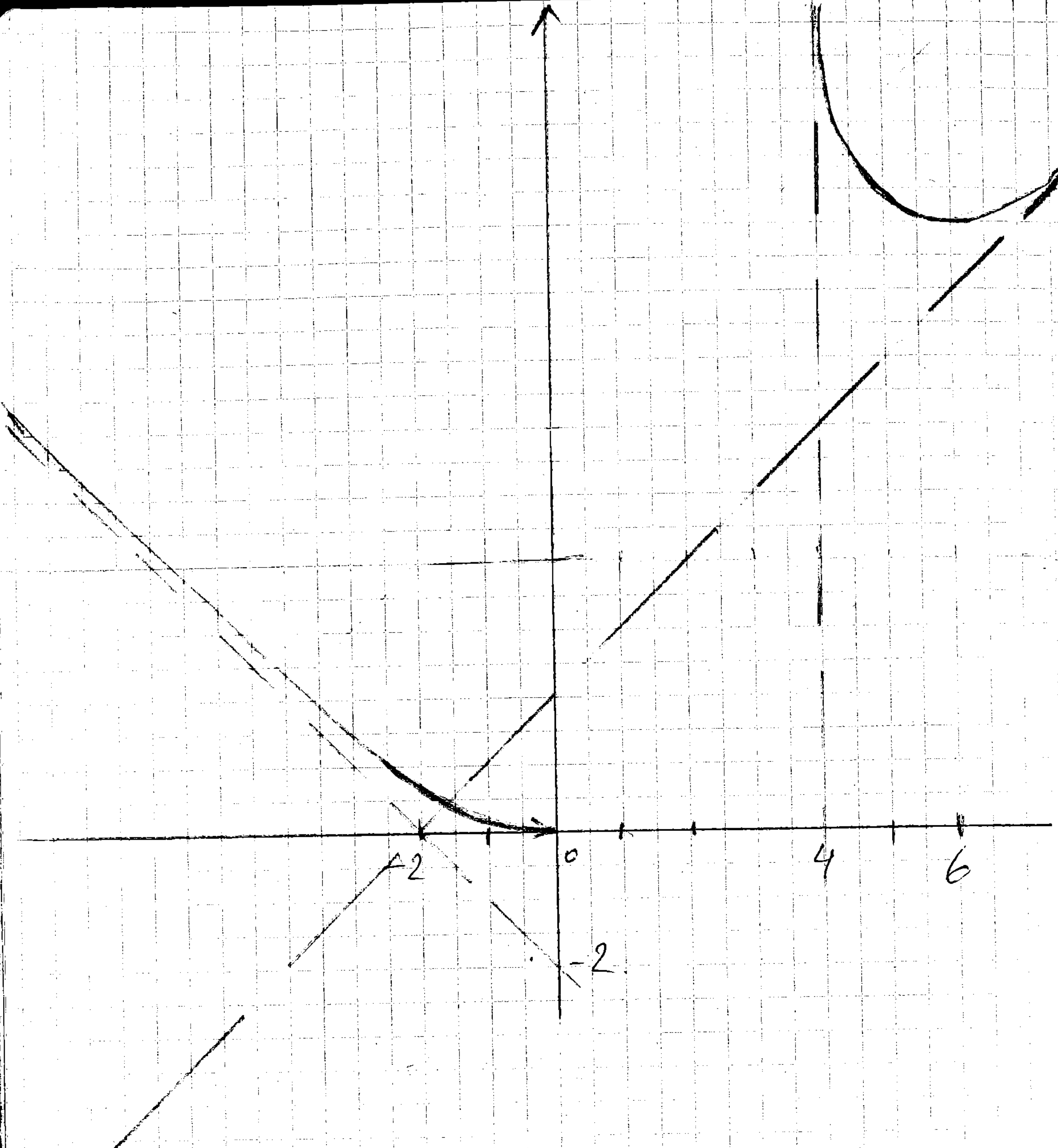
$$= \lim_{t \to 0+0} \frac{t^2(\underbrace{-t-6}_{\to 6})}{(t^2+4t)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t \to 0-0} \frac{-t^2 \cdot 6}{(t(t+4))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim_{t \to 0-0} \frac{-6t^2}{(4t)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t \to 0-0} \frac{-6t^2}{8t^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \lim \left(-\frac{3}{4} t^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

9) $f''(x) = \dfrac{12x^2}{(x^2-4x)^{\frac{5}{2}}}$





378

Задача

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$$

1) $D(f)=[-1;2)\cup(2;+\infty)$

2) —

3) Непрерывна ~~на~~ ~~ООФ~~ при $x\in(-1,2)\cup(2;+\infty)$

4) $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}=\left[\frac{\sqrt{3}}{+0}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}=\left[\frac{\sqrt{3}}{-0}\right]=-\infty \Rightarrow x=2$ - т. разр. 2-го рода

$\lim\limits_{x\to -1+0}=\lim\limits_{x\to -1+0}\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}=0$

Прямая $x=2$ верт. асимптота.

5) Ищем наклонные ас.

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}}{x^2(1-2/x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/x}}{x^{\frac{3}{2}}(1-2/x)}=0$

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f x-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}}{x(1-2/x)}=0$

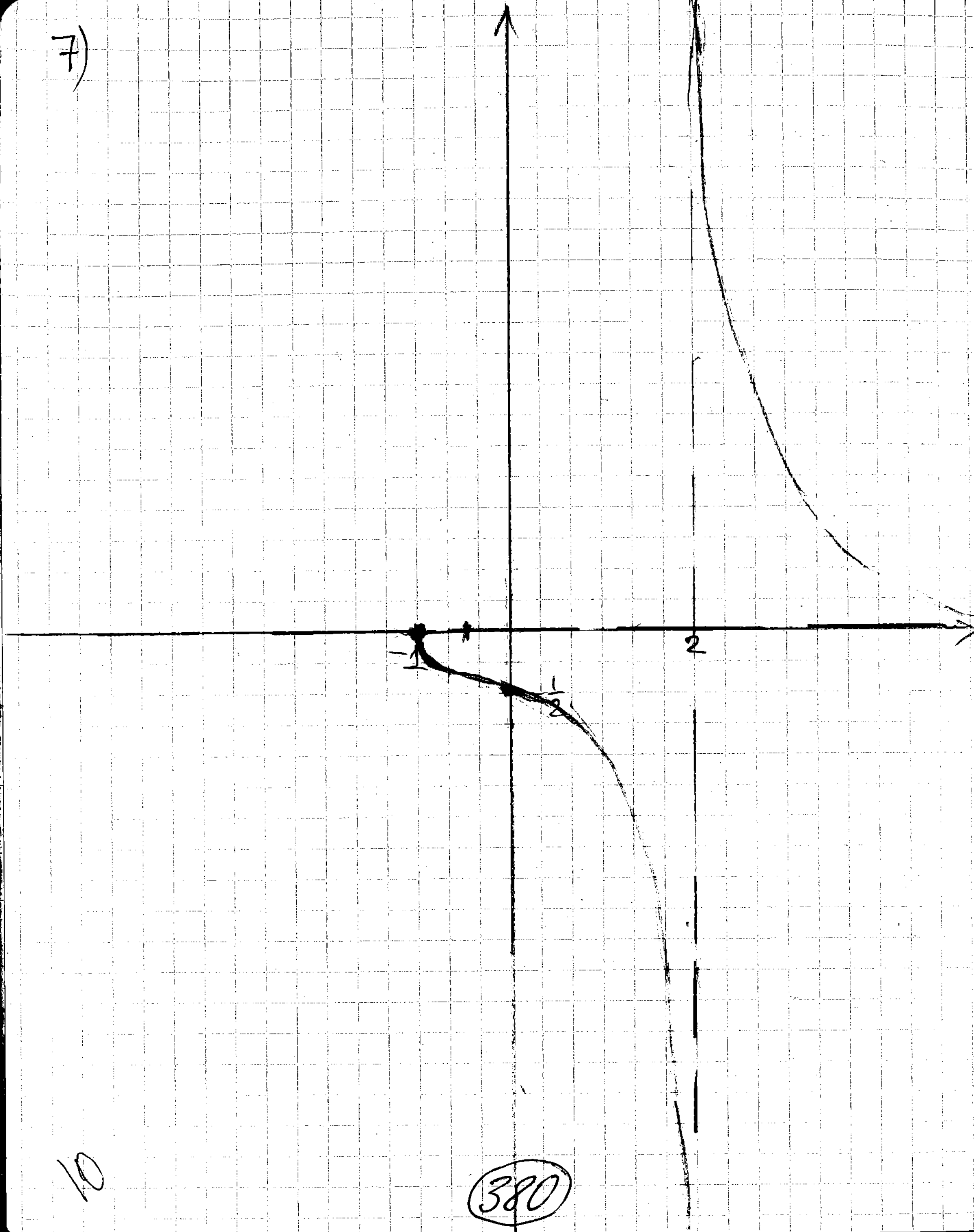
Прямая $y=0$ накл. ас. при $x\to+\infty$

6) График $f(x)$ пересекает Oy в точке $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$

График $f(x)$ пересекает Ox в точке $(-1,0)$

379

7)

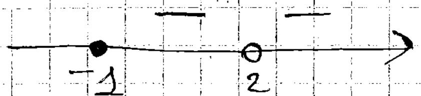


10

380

8) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-2) - \sqrt{x+1}}{(x-2)^2} =$

$= \frac{(x-2-2x-2}{2\sqrt{x+1}(x-2)^2} = -\frac{(x+4)}{2\sqrt{x+1}(x-2)^2}$

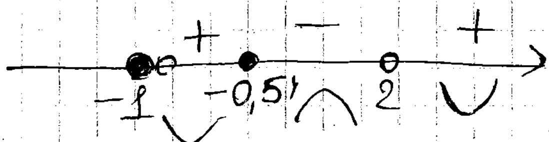


~~9) $f''(x) = -\frac{(2\sqrt{x+1}(x-2)^2) - (x+4)(\sqrt{x+1})}{4(x+1)(x-2)^4}$~~

$\lim\limits_{x\to -1+0} f'(x) = -\lim \frac{x+4}{2\sqrt{x+1}(x-2)^2} = -\infty$

~~$\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\lim \frac{x+4}{2\sqrt{x+1}(x-2)^2} = -\frac{4}{2\cdot 1\cdot 4} = -\frac{1}{2}$~~

9) $f''(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^2+8x+4}{(x-2)^3(x+1)^{\frac{3}{2}}} =$



$x = -0{,}54$ — точка перегиба

$f(-4+2\sqrt{3}) = \ldots$

<u>Задача</u>. Построить график функции $f(x) = x^x$.

Тема 14 Функции нескольких переменных

$\mathbb{R}^2$ - мн-во всех пар действ. чисел

$\mathbb{R}^n$ - множество всех упоряд. наборов из n действ. чисел

$X \subset \mathbb{R}$

$f: X \to \mathbb{R}$ - функ-я одной перем.-ой

$X \subset \mathbb{R}^2$

$\forall f: X \to \mathbb{R}$ - ф-я двух переменных.

Пример

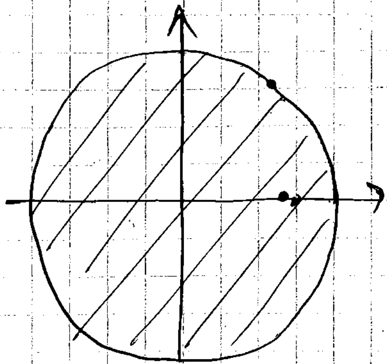
$z = f(x, y) = 2 + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Множество определения

$25 - x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 25$.

$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ - круг радиуса 5 с центром в т. $(0,0)$

12



$P(3,0)$

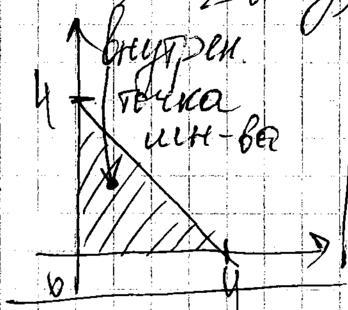
$$f(P)=f(3,0)=$$
$$=2+\sqrt{25-9}=6.$$
$$f(0,0)=2+\sqrt{25}=7.$$
$$f(3,4)=2+\sqrt{25-9-16}=2.$$

<u>Пример</u>

$$z=f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{4-x-y}$$

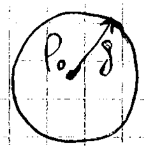
$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 4-x-y\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 4 \end{cases}$$

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x\geq 0)\wedge(y\geq 0)\wedge(x+y\leq 4)\}$$

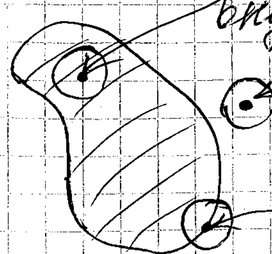


Пусть $P_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ и пусть $\delta>0$. Множество

$$U_\delta(P_0)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$



называется <u>δ-окрестностью</u> точки P_0.



Граничная точка мн-ва может как принадлежать так и не принадлежать ему

<u>Опр</u> Число a наз-ся <u>пределом</u> ф-ии $f(x)$ в точке $P_0=(x_0, y_0)$, если:

1) Функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки P_0.

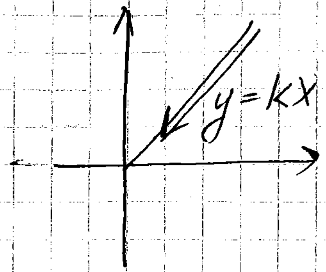
2) $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall P\in \mathring{U}_\delta(P_0)): |f(P)-a|<\varepsilon$

<u>Обозначение</u> $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

<u>Пример</u> $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+4}+2)}{x^2+y^2+4-4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2+4}+2) = 4$

Пример $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2} =$



Если $y=kx$, то

$$f(x,y)=f(x,kx)=\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=$$

$$=\frac{k}{1+k^2}.$$

Таким образом, предел зависит от k

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} f(x,y)$ – не сущ-ет.

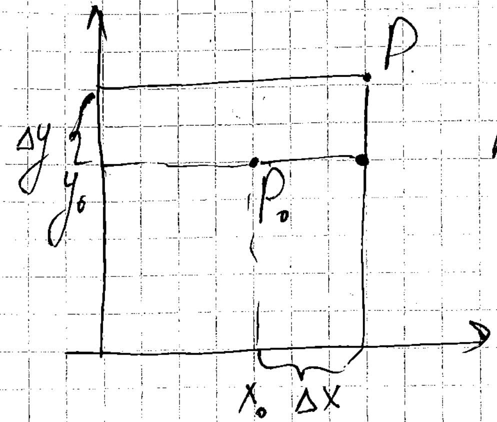
Опр. Функция $f(x,y)$ – назыв-ся **непрерывной** в P_0, если

1) Функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки P_0

2) [redacted] Существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Частные производные



$z=f(x,y)$

Разность

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

называется <u>приращением</u> функции $z=f(x,y)$ в точке P_0

Разность

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0 + \cancel{\Delta y}) - f(x_0,y_0)$$

называется частным <u>приращением</u> функции $f(x,y)$ в точке P_0 по переменной x

<u>Опр</u> Если сущ-ет конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$,

то этот предел наз-ся <u>частной производной</u> ф-ии $f(x, y)$ в точке P_0 по переменной x

<u>Обозначения:</u>

$f'_x(P_0)$ $f'_x(x_0, y_0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$z'_x(P_0)$ $z'_x(x_0, y_0)$ $\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)$ $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$

Таким образом, по опред.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

<u>Задача № 18 ТР (в-т 5)</u>

Найти частные производные 1-го порядка ф-ии.

$$f(x, y) = x^2 \ln(x+y)$$

<u>Решение</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \ln(x+y) + x^2 \cancel{\ln} \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2}{x+y}$$

Дифференциал ф-ии неск. переменных

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy.$$

Задача $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ dz

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y^2}\right)}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}(y^2+x^2)} = \frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y^2}\right)}\cdot(-x)\cdot y^{-2} = -\frac{x\cdot y^2}{y^2(y^2+x^2)} = -\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$dz = \frac{y}{y^2+x^2}dx - \frac{x}{y^2+x^2}dy.$$

Задача

$u = f(x,y,z) = x\cdot y^z$ Найти du

в т. $P_0=(1,2,3)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\cdot z\cdot y^{z-1}$$

18

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x\cdot y^z\cdot \ln y$$

$$du = y^z dx + xzy^{z-1}dy + xy^z\cdot \ln y\, dz$$

$$du = 2^3 dx + 1\cdot 3\cdot 2^2 dy + 1\cdot 2^3 \ln 2\, dz =$$

$$= 8dx + 12dy + 8\ln 3\, dz$$

<u>Опр</u> Функция $z=f(x,y)$ называется <u>дифференцируемой</u> в точке $P_0=(x_0,y_0)$, если

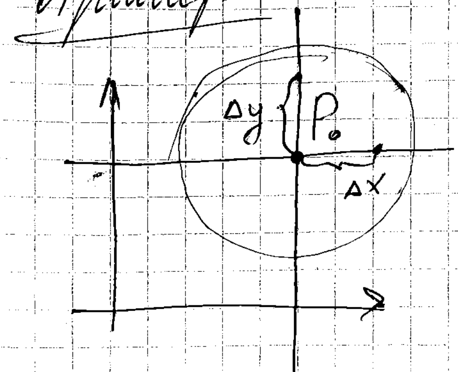
1) функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности т. P_0

2) Существуют константы A и B такие, что имеет место равенство

$$\overbrace{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)+}^{\Delta z}$$
$$+A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\ \rho\to 0,$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x^2)+(\Delta y^2)}$

Пример

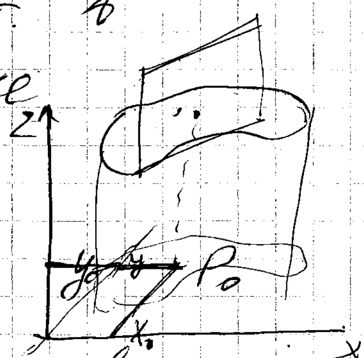


Если ф-я $z=f(x,y)$ дифф-а в точке $P_0=(x_0,y_0)$ то

1) функция $f(x,y)$ непрерывна в точке P_0

2) ф-я $f(x,y)$ имеет в точке частные пр-ые

$$\frac{\partial f}{\partial x}=A \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=B$$



(обратное не верно!)

Частные производные высших порядков

$$z=f(x_0,y_0)+\overbrace{A(x-x_0)+B(y-y_0)}^{dz}$$

– ур-е касат. пл-ти к графику ф-ии $z=f(x,y)$ в точке P_0 (точнее в точке $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$)

$z = f(x, y)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$$ чистые частные пр-ые 2-го порядка.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}$$ смешанные частные пр-ые 2-го порядка

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

дифференциал 2-го порядка.

Задача из ТР № 19 (вт 24)

Найти смеш. частные пр-ые 2-го порядка и убедиться, что они равны

$z = f(x,y) = x\ln\frac{y}{x}$

[redacted] $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln\frac{y}{x} + x\cdot\frac{1}{y/x}\cdot(-y)\cdot\frac{1}{x^2} =$

$= \ln\frac{y}{x} - 1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{x}{y}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

Градиент и производная по направлению

Пусть ф-ия $z = f(x,y)$ дифф-ма в точке $P_0 = (x_0, y_0)$. Тогда вектор

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$$

наз-ся градиентом ф-ции $f(x,y)$ в точке P_0

<u>Задача</u> $f(x,y) = 3x^2y - 8y + 5$.
Найти grad f в точке $P_0 = (-2,5)$

<u>Решение</u>

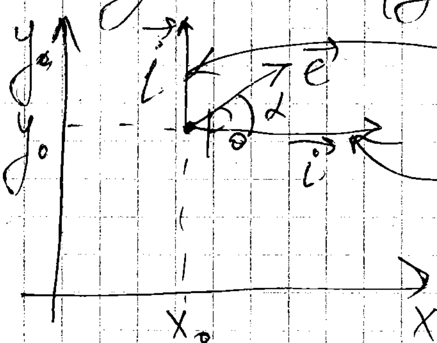
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = -60$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 4$$

$$\operatorname{grad} f(P_0) = (-60, 4)$$

Если $u = f(x,y,z)$, то

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$



скорость изм. ф-ции равна $\frac{\partial f}{\partial y}$

скорость изм. ф-ции равна $\frac{\partial f}{\partial x}$

$\vec{e}$ - единичный вектор.

$\vec{e} = (e_1, e_2)$

Предел $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0+e_1 t,\ y_0+e_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}$

наз-ся <u>производной</u> ф-ции $f(x,y)$ в точке P_0 <u>по напр-ю вектора $\vec{e}$</u>. <u>Обозн-е</u>: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Имеет место след. формула

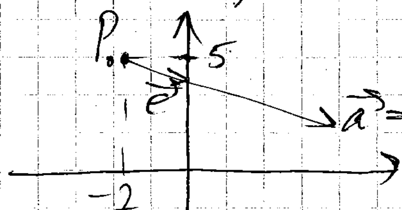
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(P_0) = (\mathrm{grad}\, f(P_0), \vec{e})$$

скалярное пр-е.

<u>Задача</u> $z = f(x, y) = 3x^2y - 8y + 5$

$P_0 = (-2, 5)$

$|\vec{a}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



$\vec{a} = (7, -1)$ $\quad \vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\dfrac{7}{5\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{5\sqrt{2}}\right)$

$\operatorname{grad} f(P_0) = (-60, 4)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left(\operatorname{grad} f(P_0), \vec{e}\right) =$$

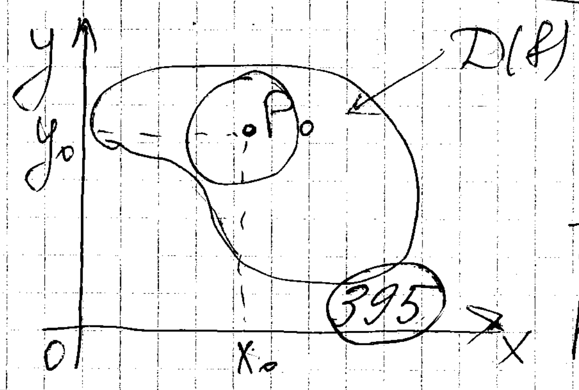
$$= (-60)\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}} + 4\cdot\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) = -\frac{420}{5\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{424}{5\sqrt{2}}.$$

Точки экстремума ф-ции неск-их пер-ных

<u>Опр</u> Точка $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ наз-ся <u>точкой максимума</u> ф-ции $f(x,y,z)$, если

1) Функция $f(x,y,z)$ опр-на в нек-ой окр-ти т. P_0
2) $(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathring{U}_\delta(P_0)) : f(P) < f(P_0)$



<u>Утв</u> в точке экстремума частные пр-ные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ либо равны 0, либо не сущ.

(для ф-ий 1-ой перем. это Теорема Ферма)

Пусть у функции $u=f(x,y,z)$ в точке $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ существуют все частные пр-ые 2-го порядка тогда из них можно сост. матрицу

$$H=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Эта матрица наз-ва-ся <u>матрицей Гессе</u> (Hesse)

Основные миноры матр. H.
(главные)

$$\Delta_1=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \qquad \Delta_3=|H|$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

__Теорема__ Пусть ф-я
$u=f(x,y,z)$ имеет непр.
частные пр-е 2-го порядка
в окрестности точки $P_0=(x_0,y_0,z_0)$
и пусть $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)=0$
то есть P_0 — стац. точка
ф-ии f

Тогда, если главные
миноры матрицы Гессе
положительны ($\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$), то P_0 т. мин.
если главные
миноры
чередуют знак ($\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0$),
начиная со знака «−», то
P_0 — точка максимума

Задача № 20 из ТР (в-т 14).

Найти т. экстремума ф-ии [redacted] $u(x,y,z) = xy + xz - 2yz - 4x^2 - y^2 - 5z^2 - 2y$ $D(f) = \mathbb{R}^3$

Решение

Находим стац. точки.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -8x + y + 2 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x - 2y - 2z - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x - 2y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 2z = 2 \\ x - 2y - 10z = 0 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -8 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -10 \end{vmatrix} = -8\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8(16) - 1(-10 + 2) = \cancel{8 \cdot 16 + 8 = 8 \cdot 17} = -8 \cdot 15 =$$

$$= -120.$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = \ldots = 16.$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -10 \end{vmatrix} = \ldots = 158$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -8 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -30$$

$$x = \frac{|A_1|}{A} = \frac{16}{-120} = -\frac{2}{15}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{158}{120} = -\frac{79}{60}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$$

$P_0 = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{79}{60}, \frac{1}{4}\right)$ - стац. точка.

Находим частные пр-ые 2-го порядка.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -8$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \ldots$$

Сост-ем матрицу Гессе

$$H=\begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix}$$

Находим гл-е миноры.

$$\Delta_1=|-8|=-8<0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=15>0.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -10 \end{vmatrix}=-120<0$$

<u>Ответ</u>: $P_0=\left(-\frac{2}{15}, -\frac{79}{60}, \frac{1}{4}\right)$ - точка максимума

<u>Задача</u> Найти точки экструмума функции $z=x^3+3xy^2-15x-12y$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \qquad x^2+2xy+y^2=9$$

$$(x+y)^2=9$$

30 400

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$$

Стац. точки $P_1=(1,2)$, $P_2=(2,1)$, $P_3=(-1,-2)$

$P_4=(-2,-1)$

Находим пр-ие вт-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=6y$$

1) $H(P_1)=\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$

$\Delta_1=|6|=6>0$

утверждать

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix}=36-144=-108<0$

<u>Замечание</u> В случае ф-й 2-ух переменных, если $\Delta_2<0$, то можно ут-ать, что данная точка не явл-ся т. экстремума. P_1 – стац. точка, не явл. т. экстремума

2) $H(P_2)=\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$

$\Delta_1=|12|=12>0$

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}=108>0 \Rightarrow P_2$ – точка минимума

P_3 – стац. точка, не явл-ся т. экстремума

P_4 – точка максимума

401

Формула Тейлора
для ф-й двух переменных

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+o(\rho^n)$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{df}+$$

$$+\frac{1}{2!}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial z}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)}_{d^2f}+$$

$$+o(\rho^2).\quad \rho\to 0$$