ЛЕКЦИЯ 6. СИЛЫ РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ. СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ЦЕНТР МАСС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

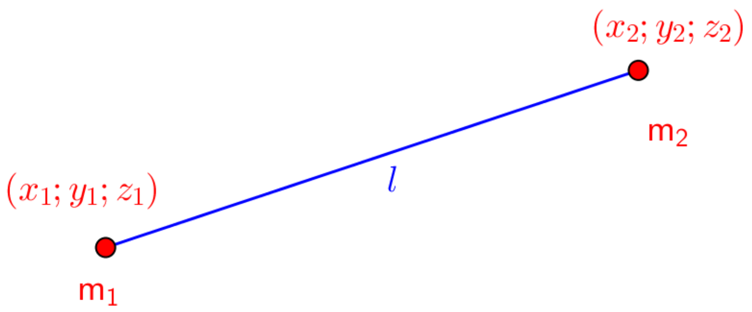
СИЛЫ РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ.

Аксиомы механики формулируются для *свободного* движения материальной точки, то есть, такого движения, при котором точка может занимать произвольное положение в пространстве. Альтернативой является движение механической системы со *связями*.

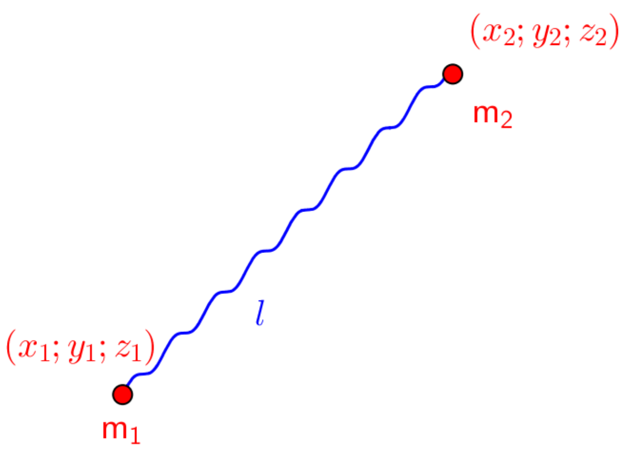
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Связями* в механике называются ограничения, наложенные на движение механической системы: на координаты или скорости точек, ее составляющих. Соответствующее движение называется *движением со связями.* Связи в механике записываются в виде уравнений или неравенств.

ПРИМЕРЫ.

I. Две материальные точки массами m_1 и m_2, соединенные стержнем длины l. Уравнение связи $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2$.



II. Две материальные точки массами m_1 и m_2, соединенные нерастяжимой нитью длины l. Уравнение связи $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 \le l^2$.



III. Материальная точка с координатами $(x; y; z)$ движется по сфере радиуса R: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

IV. Материальная точка с координатами $(x; y; z)$ может двигаться внутри сферы радиуса R: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

V. Материальная точка с координатами $(x; y; z)$ может двигаться внутри раздувающейся сферы, радиус которой увеличивается со скоростью a: $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2 t^2$.

VI. Обруч радиуса R катится без проскальзывания по прямой. Уравнение связи $\vec{v}_C = 0$, где C – точка касания .

Связь, налагающая ограничения только на координаты точек, называется *геометрической*. Общий вид такой связи

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad (1.1)$$

или

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) \le 0 \qquad (1.2)$$

или

$$f(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) \ge 0. \qquad (1.3)$$

Связь, налагающая ограничения на скорости точек, называется *кинематической*.

Связь, не зависящая от времени, называется *стационарной*.

Связь, зависящая от времени, называется *нестационарной*.

Связь, которая задается уравнением (1.1) , называется *неосвобождающей*.

Связь, которая задается неравенствами (1.2) или (1.3), называется *освобождающей*.

ЗАДАНИЕ. Определите, к каким типам относятся связи в примерах I-VI.

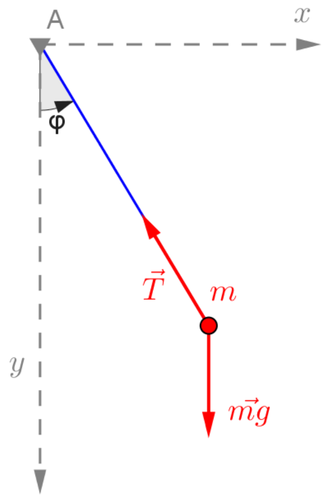
Связи мешают свободному движению механической системы, отклоняя ее движение от того, которое могла бы иметь система под действием тех же сил, но в отсутствии связей. Но тем же эффектом обладают и силы: они изменяют движение системы. Это лежит в основе аксиомы, которая называется

ПРИНЦИП ОСВОБОЖДЕНИЯ ОТ СВЯЗЕЙ.

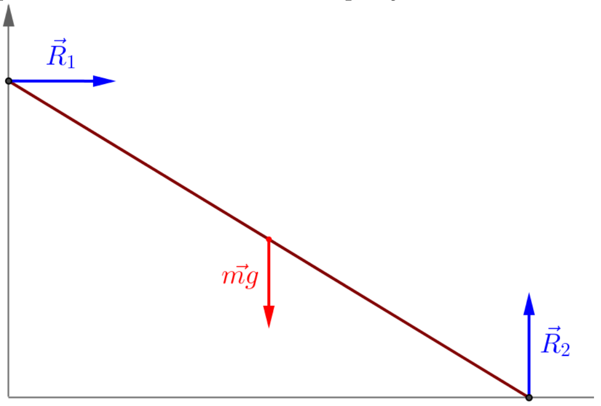
Действие связей можно заменить силами так, что движение системы не изменится, и считать систему свободной, но подверженной действию дополнительных сил, которые называются *силами реакции связей*.

Реакция связи представляет собой силу, приложенную в точке, в которой связь соприкасается с механической системой, и направленной противоположно тому направлению, по которому связь препятствует движению.

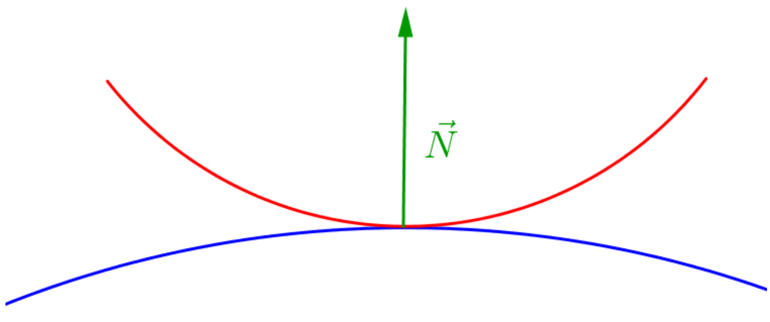
VII. Груз массы m подвешен на нерастяжимой нити длины l. Уравнение связи $x^2 + y^2 = l^2$. Груз может двигаться только по окружности. Можно ввести силу натяжения нити $\vec{T}$, под действием которой груз также будет двигаться по окружности радиуса l и считать, что нить отсутствует. Нить препятствует увеличению расстояния от груз до точки подвеса. Поэтому сила $\vec{T}$ направлена противоположно, то есть, к точке подвеса.



VIII. Лестница прислонена к стене. Силы реакции направлены, как показано на рисунке.



IX. При соприкосновении гладких поверхностей, сила реакции $\vec{N}$ направлена по нормали. Это – определение гладких поверхностей.



Связи, развивающая нормальную реакцию, называются *идеальными*. При соприкосновении шероховатых поверхностей, появляется еще касательная составляющая силы реакции, которая называется *силой трения*.

Силы реакции связей – это «фиктивные» силы, которые вводятся в механике для удобства описания движения механических систем со связями. В отличие от них, силы, действующие между различными объектами, называются *активными* силами.

СИЛОВОЕ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ.

Вообще говоря, силы, действующие на механическую систему, зависят от координат, скоростей точек и от времени. Если же сила зависит только от координат, но не от скоростей точек, можно считать, что задано *силовое поле*, то есть, в каждой точке пространства задан вектор $\vec{F}(x, y, z, t)$ - сила, которая действует на материальную точку в точке с координатами (x, y, z).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сила $\vec{F}(x, y, z)$ называется *потенциальной*, если существует функция U такая, что $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$. Функция U называется *потенциальной энергией силового поля*.

ТЕОРЕМА (критерий потенциальности силы).

Для потенциальности силы $\vec{F}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial z} \end{cases}.$$

ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Примером системы параллельных сил, действующих на механическую систему, является поле силы тяжести.

Рассмотрим механическую систему из n материальных точек с массами $m_1, \dots, m_n$, радиус-векторы которых соответственно $\vec{r}_1, \dots \vec{r}_n$. На i-ю точку действует сила тяжести $\vec{F}_i = \overrightarrow{m_i g}$.

Результирующей силой будет сила, величина которой равна $F = g\sum_{i=1}^{n} m_i$, а радиус-вектор точки приложения которой вычисляется по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{F_1\vec{r}_1 + \cdots + F_n\vec{r}_n}{F_1 + \cdots + F_n} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка C с радиус-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}$$

называется *центром масс* системы материальных точек.

Для абсолютно твердого тела можно считать, что задана непрерывная функция распределения плотности $\rho(x, y, z)$ и элемент массы равен $dm = \rho dV$, где dV - элемент объема. Тогда, перейдя к пределу, получаем формулы для вычисления центра масс твердого тела, которые в координатной форме имеют вид

$$x_C = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV},$$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV},$$

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dV}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)dV}.$$

Для плоской фигуры $dm = \rho(x,y)dS$ и координаты центра масс вычисляются по формулам

- $$x_C = \frac{\iint\limits_S x\rho(x,y)dS}{\iint\limits_S \rho(x,y)dS},$$
  $$y_C = \frac{\iint\limits_S y\rho(x,y)dS}{\iint\limits_S \rho(x,y)dS}.$$

Координаты центра масс кривой $\gamma : \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$, где t – параметр вдоль кривой, с линейной плотностью распределения массы $\rho(t)$ - функции от точек кривой, вычисляются как криволинейные интегралы

$$x_C = \frac{\int\limits_\gamma x(t)\rho(t)dl}{\int_\gamma \rho(t)dl},$$

$$y_C = \frac{\int\limits_\gamma y(t)\rho(t)dl}{\int_\gamma \rho(t)dl},$$

$$z_C = \frac{\int\limits_\gamma z(t)\rho(t)dl}{\int_\gamma \rho(t)dl},$$

где $dl = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$.

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС.

1. *Метод симметрии.*

Если механическая система имеет симметрию – относительно точки, прямой, плоскости, - то центр масс находится, соответственно, в центре симметрии, на оси симметрии, на плоскости симметрии.

Докажем, к примеру, что при симметрии относительно плоскости центр масс механической системы лежит в этой плоскости.

Докажем от противного. Предположим, что центр масс C не лежит в плоскости симметрии. Отразим систему относительно плоскости симметрии. Тогда центр масс перейдет в точку C', симметричную точке C. С другой стороны, механическая система перейдет в себя, т.е. центр масс не изменится. Противоречие.

2. *Метод группировки.*

Если механическую систему (например, тело), V разделить на две части V_1 и V_2 с массами M_1 и M_2 соответственно, найти радиус – векторы центров масс каждой части, соответственно, $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то центр масс C системы V - это центр масс двух материальных точек с массами M_1 и M_2 и – радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то есть, вычисляется по формуле

$$\vec{r}_C = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2}.$$

Следствие 1. Центр масс выпуклого множества лежит внутри этого множества.

Следствие 2. Центр масс системы из n материальных точек лежит внутри выпуклой оболочки этих точек.

УПРАЖНЕНИЕ. Доказать следствия 1 и 2.

3. *Метод отрицательных масс*.

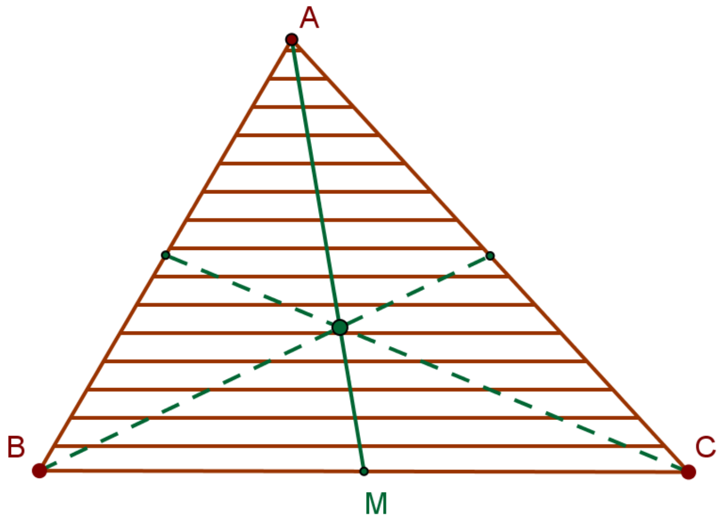
Если выпуклое тело V массы M содержит полость W, то можно заполнить эту полость массой с какой-нибудь плотностью распределения $\rho(x.y.z)$, получив выпуклое тело $V \cup W$ с добавочной массой m – массой заполненной полости. С другой стороны, рассмотрим тело W с отрицательной плотностью $-\rho(x, y, z)$, масса которого $(-m)$. Тогда центр масс тела V находится как центр масс системы, состоящей из двух материальных точек массами $M+m$ и $(-m)$, помещенных, соответственно, в центры масс тел $V \cup W$ и W, то есть

$$\vec{r}_C = \frac{(M+m)\vec{r}_1 - m\vec{r}_2}{M},$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ - соответственно радиус- векторы тел $V \cup W$ и W.

ПРИМЕР. Доказать, что центр масс однородной треугольной пластины – точка пересечения медиан.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.



Разобьем треугольник на тонкие полоски , параллельные стороне *BC*. Центр тяжести каждого отрезка лежит в его середине, то есть, на медиане *AM*. Заменим каждую полоску материальной точкой, масса которой равна массе полоски, и расположенной в центре масс полоски. Получим систему материальных точек, лежащих на *AM*. Поэтому центр масс треугольника лежит на медиане *AM*. Аналогично доказывается, что центр масс лежит на двух других медианах. Поэтому центр масс треугольника – точка пересечения медиан. Если вершины треугольника имеют координаты $A=(x_1,y_1), B=(x_2,y_2), C=(x_3,y_3)$, то координаты центра масс равны $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.