

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)”

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4 СЕМЕСТР

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ 010500

ФАКУЛЬТЕТА КИБЕРНЕТИКИ

МОСКВА 2012

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ЗАДАЧА 1. Найдите общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ двумя способами: а) сведя систему к уравнению 3-го или 2-го порядка с помощью исключения неизвестных; б) отыскав собственные числа и собственные и присоединенные векторы матрицы A и составив по ним ФСР системы.

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
19	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

ЗАДАЧА 2. 1) Найдите матричную экспоненту e^{tA} двумя способами: а) используя ФСР соответствующей линейной системы дифференциальных уравнений; б) операторным методом. 2) С помощью матричной экспоненты решите задачу Коши $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$.

№	Матрица A	Вектор \bar{x}_0	№	Матрица A	Вектор \bar{x}_0
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

№	Матрица A	Вектор \bar{x}_0	№	Матрица A	Вектор \bar{x}_0
13	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

ЗАДАЧА 3. 1) Найдите общее решение линейной неоднородной системы двумя способами: а) методом вариации произвольных постоянных; б) методом неопределенных коэффициентов (в виде квазимногочленов).
 2) Операторным методом найдите частное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = n(\bmod 3) \cdot (-1)^n$, $y(0) = n(\bmod 5) \cdot (-1)^{n+1}$, где n — номер варианта.

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y + (t - 2)e^{3t} \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$	2	$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y - e^{-2t} \cos 3t \end{cases}$
3	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - e^{-3t} \sin t \\ \dot{y} = 5x - 4y \end{cases}$	4	$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -x - 2y + e^{-t} \cos 2t \end{cases}$
5	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4x - y + (2t - 3)e^t \end{cases}$	6	$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + e^t \sin 2t \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$

№	Система уравнений	№	Система уравнений
7	$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y - (2t + 1)e^{-t} \end{cases}$	8	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + (t + 4)e^{2t} \\ \dot{y} = 2x + 5y \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x + 4y + e^{-t} \cos 3t \end{cases}$	10	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - e^{-t} \sin 3t \\ \dot{y} = 5x + 4y \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + (t - 1)e^{2t} \\ \dot{y} = 5x + 3y \end{cases}$	12	$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x + 2y + (t + 3)e^{-2t} \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = x + y + (4 - t)e^{2t} \end{cases}$	14	$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y - (2t + 5)e^{3t} \\ \dot{y} = x - 5y \end{cases}$
15	$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 5y + e^{-2t} \sin t \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$	16	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = -5x - 4y + (3t + 1)e^{-t} \end{cases}$
17	$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - e^{-t} \cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$	18	$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y \\ \dot{y} = 6x - y + (t + 3)e^{2t} \end{cases}$
19	$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y - e^t \sin 4t \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$	20	$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y \\ \dot{y} = -5x + 3y + (3t - 2)e^{-t} \end{cases}$
21	$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - e^t \cos 2t \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$	22	$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 4x - y + (1 - 2t)e^{-2t} \end{cases}$
23	$\begin{cases} \dot{x} = -x + 5y - e^{-3t} \sin 2t \\ \dot{y} = -x - 5y \end{cases}$	24	$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = -2x - 5y + (3 - t)e^{-2t} \end{cases}$

ЗАДАЧА 4. Исследуйте на устойчивость линейные системы из задач 1, 2 и 3.

ЗАДАЧА 5. Определите тип особой точки однородной системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ с матрицей A из задачи 3. Нарисуйте фазовый портрет системы (точное построение фазовых траекторий не требуется).

ЗАДАЧА 6. Исследуйте на устойчивость нулевое решение нелинейной системы. Определите тип соответствующей точки покоя. Проиллюстрируйте поведение фазовых траекторий системы вблизи начала координат.

№	Система уравнений
1	$\begin{cases} \dot{x} = e^y \sin x + \ln(1 + x + y) \\ \dot{y} = \sqrt{1 - 4x} + 5y \cos x - 1 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x)(1 - y) - \cos(x + 2y) \\ \dot{y} = e^{2x+y} - (1 + y)^4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + 3x) + 4ye^{x-y} \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(3x + y) + \operatorname{tg} y \end{cases}$
4	$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x)^3 e^{2y} - 1 \\ \dot{y} = \arcsin(x - 3y) - \sin(x^2 + y) \end{cases}$
5	$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\cos x - 6y} - 2 \ln(x + y + 1) - 1 \\ \dot{y} = 2e^{x+2y} - 2 \cos x \end{cases}$
6	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^{3x} + y) \\ \dot{y} = 6x \cos y - \operatorname{arctg}(x + y) \end{cases}$
7	$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{1 + \sin 3x} - e^{3y-x} \\ \dot{y} = (1 + x)^3 / (1 + y)^3 - \cos(xy) \end{cases}$
8	$\begin{cases} \dot{x} = 3 \ln(\sin x + \cos y) + \operatorname{tg} y \\ \dot{y} = e^{x+y} + 2 \operatorname{arctg}(x + 2y) - 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dot{x} = (1 + 2y)^3 - e^{x+y} \\ \dot{y} = 4\sqrt{1 + x - 2y} + e^{xy} - 5 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^y - 2x) \\ \dot{y} = (\cos x - \sin y)^4 (\cos y + \sin x)^3 - 1 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dot{x} = \sin(x - 2y) \cos(x + 2y) \\ \dot{y} = \sqrt{e^{x+2y} + \sin 5x} - y - 1 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x + y)^3 / (1 + x) - e^{y^2} \\ \dot{y} = \ln(1 + \sin(2x + y)) \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x} = 3 \arcsin(y - x) + 2y \cos(y - x) \\ \dot{y} = \sqrt[3]{\cos x + 6y} - e^{x+y} \end{cases}$
14	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^{2(x+y)} + \operatorname{tg} 2x) \\ \dot{y} = (1 + x)^5 (1 + y)^3 - e^{2(x-y)} \end{cases}$

№	Система уравнений
15	$\begin{cases} \dot{x} = x \operatorname{tg} y - 2 \arcsin(x - y) \\ \dot{y} = 2\sqrt{1 + 3y} - 2e^{x-y^2} \end{cases}$
16	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\cos^2 x - \sin y) - 2xe^y \\ \dot{y} = 2 \operatorname{arctg}(x - y) - 3 \operatorname{arctg}(x^2 + y) \end{cases}$
17	$\begin{cases} \dot{x} = 2 \ln(e^x + x + y) - 4ye^{x+2y} \\ \dot{y} = (1 + x)^4/(1 + y) - \cos(xy) \end{cases}$
18	$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{e^{2x} - 3y} - 2e^{x^2+y^2} \\ \dot{y} = -3 \sin(x - y) - \operatorname{tg} y \end{cases}$
19	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - \sin(x + 4y)) \\ \dot{y} = 2e^{x-y} - 3ye^{x+y} - 2 \end{cases}$
20	$\begin{cases} \dot{x} = 2 \arcsin(x + y) + y \cos x \\ \dot{y} = \sqrt[3]{e^{3x+2y} + \sin 4y} - e^{x^2-2y} \end{cases}$
21	$\begin{cases} \dot{x} = (1 - \sin x)^4/(1 + \sin y)^2 - 1 \\ \dot{y} = 3 \operatorname{arctg}(x + y) + \arcsin(x + 2y) \end{cases}$
22	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^{3(y-x)} - \operatorname{tg} 2x) \\ \dot{y} = 2e^{x^2} - 2\sqrt{1 + x + y} \end{cases}$
23	$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^{4x} - \sin y) \\ \dot{y} = 4 \arcsin(x + y) - 3x \end{cases}$
24	$\begin{cases} \dot{x} = (1 + x + y)^7 - e^x \\ \dot{y} = \sqrt{\cos(x - y) - 2 \sin(x + y)} - 1 - y \end{cases}$

ЗАДАЧА 7. Для заданной системы: а) найдите точки покоя; б) линеаризуйте систему в окрестностях точек покоя; в) определите тип точек покоя и исследуйте их на устойчивость.

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} \dot{x} = 2 - x \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$	2	$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$

№	Система уравнений	№	Система уравнений
3	$\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8 \end{cases}$	4	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = (x - y - 1)(1 + x - y) \end{cases}$
5	$\begin{cases} \dot{x} = 2x(1 - x) \\ \dot{y} = (x + y)(1 - 2x) \end{cases}$	6	$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y^2 - 1 \\ \dot{y} = 6x - y^2 + 7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 4y - 8 \end{cases}$	8	$\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2xy + 8 \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy - 3x \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$	10	$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)(1 - 2x) \\ \dot{y} = 2x(x - 1) \end{cases}$
11	$\begin{cases} \dot{x} = (x - y)^2 - 1 \\ \dot{y} = (x - y)y \end{cases}$	12	$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x + 1) \\ \dot{y} = -4x - 2y \end{cases}$
13	$\begin{cases} \dot{x} = 8 - 4x \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 4x^2 \\ \dot{y} = 4x + 8 - 2xy \end{cases}$
15	$\begin{cases} \dot{x} = -2xy \\ \dot{y} = 2x + 4y - 4 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = xy - 2x - 8 \end{cases}$
17	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2 \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases}$	18	$\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2 \\ \dot{y} = y - 2 \end{cases}$
19	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 3x - 2xy - 4 \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 \\ \dot{y} = 1 - x^2 - xy \end{cases}$
21	$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8 \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \dot{x} = 4 - 4x - 2y \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$
23	$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = 2y^2 - 3y - xy - 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 3 - 3x - 4y \end{cases}$