Теория вероятностей и математическая статистика

Лектор А.А. Лобузов

Семестр 6 **Лекция 12**

Свойства основных распределений математической статистики

Пусть $\mathbf{X}=(X_1, X_2, ..., X_N)$ − выборка из распределения случайной величины ξ, X_i − независимы. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в математической статистике распределения.

Нормальное распределение $N(a,\sigma^2)$, $\sigma>0$

Плотность распределения $N(a,\sigma^2)$ $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Функция распределения $N(a,\sigma^2)$ $F_\xi(x)=\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$,

где $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(t)dt$, $\varphi_0(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ − соответственно функция и плотность распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$.

Математическое ожидание $\mathrm{M}\xi=a$, дисперсия $\mathrm{D}\xi=\sigma^2$,

характеристическая функция $g_\xi(t)=e^{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

Если для всех $X_i \sim N(a,\sigma^2)$ и X_i независимы, то $\overline{\mathbf{X}}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i \sim N(a,\dfrac{\sigma^2}{N})$

или $\dfrac{\overline{\mathbf{X}}-a}{\sigma}\sqrt{N}\sim N(0,1)$.

Гамма-распределение $\gamma(\alpha,\lambda)$, $\lambda>0$

Плотность распределения $\gamma(\alpha,\lambda)$ $f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \dfrac{\lambda^\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x>0.\end{cases}$

Математическое ожидание $\mathrm{M}\xi=\dfrac{\alpha}{\lambda}$, дисперсия $\mathrm{D}\xi=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$,

характеристическая функция $g_\xi(t)=(1-ibp)^{-\alpha}$, $b=\dfrac{1}{\lambda}$.

Если для всех $X_i \sim \gamma(\alpha_i,\lambda)$ и X_i независимы, то $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i \sim \gamma(\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i,\lambda)$.

Распределение «хи–квадрат» с n степенями свободы $\chi^2(n)=\gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$

Плотность распределения $\chi^2(n)$ $f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \dfrac{2^{-\frac{n}{2}}\cdot x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}e^{-\frac{x}{2}}, x>0.\end{cases}$

где $\Gamma(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

Математическое ожидание $\mathrm{M}\xi=\dfrac{\alpha}{\lambda}$, дисперсия $\mathrm{D}\xi=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$,

характеристическая функция $g_\xi(t)=(1-2ip)^{-\frac{n}{2}}$.

Если для всех $X_i \sim \chi^2(k_i)$ и X_i независимы, то $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i \sim \chi^2(\sum\limits_{i=1}^{N}k_i)$.

Если $\xi \sim N(0,1)$, то плотность случайной величины $\eta=\xi^2$ равна

$f_\eta(y)=\begin{cases}0, y\le 0;\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, y>0;\end{cases}$, т.е. $\eta \sim \chi^2(1)$.

Если $X_i \sim N(0,1)$ и X_i независимы, то $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i^2 \sim \chi^2(N)$.

Если $X_i \sim N(a,\sigma^2)$ и X_i независимы, то $\sum_{i=1}^{N}(\frac{X_i - a}{\sigma})^2 \sim \chi^2(N)$.

Если $X_i \sim N(a,\sigma^2)$ и X_i независимы, то $\sum_{i=1}^{N}(\frac{X_i - \overline{\mathbf{X}}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(N)$, при этом

$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{\mathbf{X}})^2$ и $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ независимы.

Распределение Стьюдента с n степенями свободы $t(n)$

(t-распределение)

Плотность распределения $t(n)$ $f_\xi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$.

Математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = 0$ при $n \geq 2$,

дисперсия $\mathrm{D}\xi = \frac{n}{n-2}$ при $n \geq 3$.

Если $\xi \sim N(0,1)$ и $\eta \sim \chi^2(N)$ независимы, то $\xi\sqrt{\frac{n}{\eta}} \sim t(N)$.

Если $X_i \sim N(0,1)$ $(i = 0,1,...N)$ и X_i независимы, то $\dfrac{X_0}{\sqrt{\overline{\mathbf{X}^2}}} \sim t(N)$,

где $\overline{\mathbf{X}^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2$.

Если $X_i \sim N(a,\sigma^2)$ $(i = 1,...N)$ и X_i независимы, то $\frac{\overline{\mathbf{X}} - a}{S}\sqrt{N} \sim t(N-1)$,

где $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$, $S = \sqrt{S^2}$, $S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{\mathbf{X}})^2$.

Распределение Фишера-Снедекора $F(k_1,k_2)$

(*F*-распределение с (k_1,k_2) степенями свободы)

Плотность распределения

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0,\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)\cdot k_1^{\frac{k_1}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\cdot x^{\frac{k_1}{2}-1}\cdot(k_1x+k_2)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, \ x>0.\end{cases}$$

Математическое ожидание $\mathrm{M}\xi=\frac{k_2}{k_2-2}$ при $k_2\ge 3$,

дисперсия $\mathrm{D}\xi=\frac{2k_2^2(k_1+k_2-2)}{k_1(k_2-2)^2(k_2-4)}$ при $k_2\ge 5$.

Если для всех $\xi\sim\chi^2(k_1)$ и $\eta\sim\chi^2(k_2)$ независимы, то $\dfrac{\xi/k_1}{\eta/k_2}\sim F(k_1,k_2)$.

Если выборки $\mathbf{X}=(X_1,X_2,...,X_N)$ и $\mathbf{Y}=(Y_1,Y_2,...,Y_M)$ независимы, $X_i\sim N(a_1,\sigma^2)$ и X_i независимы, $Y_i\sim N(a_2,\sigma^2)$ и Y_i независимы, то верны свойства

1) $\dfrac{\overline{\mathbf{X}^2}}{\overline{\mathbf{Y}^2}}\sim F(N,M)$, где $\overline{\mathbf{X}^2}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}X_i^2$, $\overline{\mathbf{Y}^2}=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{M}Y_i^2$;

2) $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(N-1,M-1)$, где $S_1^2=\dfrac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}(X_i-\overline{\mathbf{X}})^2=\dfrac{N}{N-1}(\overline{\mathbf{X}^2}-(\overline{\mathbf{X}})^2)$,

$S_2^2=\dfrac{1}{M-1}\sum\limits_{i=1}^{M}(Y_i-\overline{\mathbf{Y}})^2=\dfrac{M}{M-1}(\overline{\mathbf{Y}^2}-(\overline{\mathbf{Y}})^2)$.