Лекция №13

Исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова (продолжение)

Продолжим изучение устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \qquad (s).$$

Теорема (теорема Четаева о неустойчивости)**.** *Пусть $\boldsymbol{x}(t) \equiv 0$ - решение системы (s). Пусть область D пространства $\boldsymbol{x}$ лежит в шаре $S(|\boldsymbol{x}| < \varepsilon)$, а ее граница $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $0 \in \Gamma_0$, $|\boldsymbol{x}| < \varepsilon$ на Γ_0, $|\boldsymbol{x}| = \varepsilon$ на Γ_1, множество Γ_1 может быть пустым. Пусть в $D \cup \Gamma$ существует непрерывная функция $v(\boldsymbol{x})$, $v(\boldsymbol{x}) = 0$ на Γ_0, а в D имеем $v \in \mathrm{C}^1$, $v(x) > 0$,*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(s)} \geqslant w(\boldsymbol{x}) > 0,$$

w непрерывна в $D \cap \Gamma$. Тогда нулевое решение системы (s) неустойчиво.

Доказательство. Предположим, что нулевое решение устойчиво. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что любое решение $\boldsymbol{x}(t)$ с начальным условием $\boldsymbol{x}(t_0) \in D$, $|\boldsymbol{x}(t_0)| < \delta$, остается в шаре S при $t_0 \leqslant t < \infty$. Пока $\boldsymbol{x}(t) \in D$, имеем

$$\frac{dv(\boldsymbol{x}(t))}{dt} > 0,$$

значит, $v(\boldsymbol{x}(t))$ возрастает и $v(\boldsymbol{x}(t)) > v(\boldsymbol{x}(t_0)) = v_0 > 0$.

Та часть D_0 множества $D \cup \Gamma$, где $v(\boldsymbol{x}) \geqslant v_0$ – ограниченное замкнутое множество (в его предельных точках имеем тоже $x \in D \cup \Gamma$, $v(\boldsymbol{x}) \geqslant v_0$ вследствие непрерывности $v(\boldsymbol{x})$). Решение $\boldsymbol{x}(t)$ не может выйти из D_0, ибо на Γ_0

$v(\boldsymbol{x}) = 0$, а на Γ_1 решение не попадает, так как $|\boldsymbol{x}(t)| < \varepsilon$. На D_0 имеем $w(\boldsymbol{x}) \geqslant \beta > 0$,

$$\frac{d}{dt} v(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant w(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant \beta,$$
$$v(\boldsymbol{x}(t)) - v(\boldsymbol{x}(t_0)) \geqslant \beta(t - t_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty.$$

Это противоречит ограниченности функции $v(\boldsymbol{x})$ в D_0. Следовательно, нулевое решение неустойчиво. $\square$

Пример. *Устойчиво ли нулевое решение системы*

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by - y^2, \\ \dot{y} = cx + dy - x^2, \end{cases} \tag{1}$$
$$(a, b, c, d > 0)?$$

При малых x, y в первой четверти имеем $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$, значит, там решения удаляются от точки $(0, 0)$. Возьмем

$$v = xy \text{ в области } D(x > 0,\ y > 0, x^2 + y^2 < \varepsilon^2).$$

Тогда

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = \dot{x}y + x\dot{y} = axy + \underline{by^2} - \underline{y^3} + \underline{cx^2} + dxy - \underline{x^3} = w(x, y).$$

При малом ε и $0 < x < \varepsilon$, $0 < y < \varepsilon$ сумма подчеркнутых членов положительна, поэтому в D $w(x, y) > 0$. По Теореме Четаева нулевое решение неустойчиво.