Практическое занятие №9
Интеграл от функции комплексной переменной.
Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Краткие теоретические сведения

Определение. Рассмотрим на комплексной плоскости z кусочно-гладкую ориентированную кривую γ и предположим, что функция $f(z)$ определена на этой кривой. Разобьем кривую γ на n частичных дуг последовательными точками деления

$$a = z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b,$$

где a и b – концы кривой γ. На каждой из частичных дуг $\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ выберем произвольную точку ζ_k и составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}. \tag{1}$$

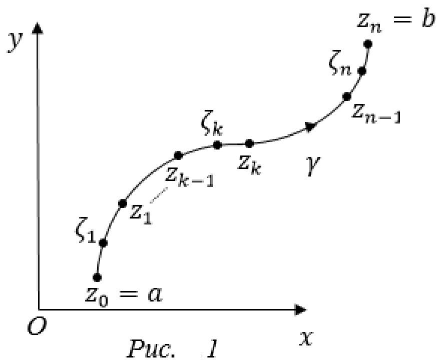

Рис. 1

Если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{max \\ 1\le k\le n} |\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

не зависящий ни от способа разбиения кривой γ на частичные дуги, ни от выбора точек ζ_k на этих дугах, то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой γ и обозначается

$$\int_{\gamma} f(z)dz. \tag{2}$$

Таким образом,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{\substack{max \\ 1\le k\le n} |\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k.$$

▲

● Если γ – кусочно-гладкая кривая, а $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная на γ функция, то интеграл (2) существует и справедливо равенство

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\gamma} u(x,y)dy + v(x,y)dx. \tag{3}$$

● Если кривая γ задана параметрически уравнением $\gamma: z = z(t), t_0 \le t \le t_1$, то

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$

● Ветвь многозначной функции выделяется заданием ее значения в некоторой точке z_0. При интегрировании ветви многозначной функции по замкнутому контуру начальной точкой пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции, т.е. точка z_0.

Теорема 1. (Теорема Коши для односвязной области)

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому контуру γ, лежащему в D, равен нулю (рис. 2), т.е.

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Теорема 1а. (Теорема Коши для односвязной области)

Пусть D – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы, т.е. в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ (рис. 3). Тогда

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0. \blacksquare$$

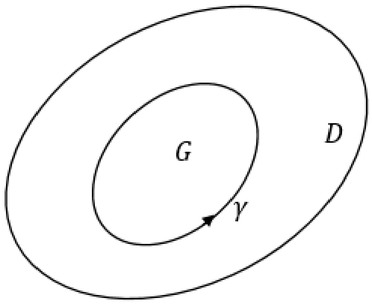

Рис. 2

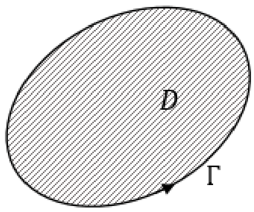

Рис. 3

Теорема 2. (Теорема Коши для многосвязной области)

Пусть граница многосвязной области D состоит из замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ_0 и попарно непересекающихся замкнутых кусочно-гладких кривых $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, расположенных внутри Γ_0, и пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна вплоть до ее границы (рис. 4). Тогда

$$\oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k^-} f(z)dz = 0 \Leftrightarrow \tag{4}$$

$$\oint_{\Gamma_0^+} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\Gamma_k^+} f(z)dz. \tag{4a}$$

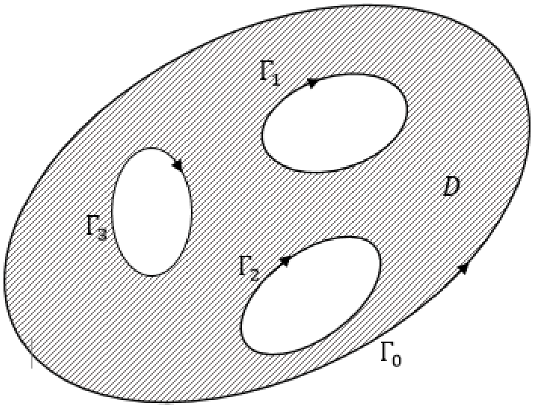

Рис. 4

Следствие 1. *Пусть функция* $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ *аналитична в области* D *и пусть* γ *и* γ_1 *– простые замкнутые кривые (одна лежит внутри другой), образующие границу области* $\mathrm{D}_1 \subset \mathrm{D}$. *Тогда*

$$\oint_{\gamma^+} \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \oint_{\gamma_1^+} \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{dz}. \blacksquare$$

Следствие 2. Если функция $f(z)$ аналитична в области D, то значение интеграла от функции $f(z)$, взятого вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ, лежащей в области D, не зависит от выбора кривой, а определяется положением начальной и конечной точек этой кривой:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz := \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

Здесь z_0, z_1 – начальная и конечная точки кривых γ и γ_1. ■

Определение. Пусть функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ определена в области D, а функция $\mathrm{F}(\mathrm{z})$ дифференцируема в этой области. Если $\mathrm{F}'(\mathrm{z}) = \mathrm{f}(\mathrm{z})\ \forall \mathrm{z} \in \mathrm{D}$, то функция $\mathrm{F}(\mathrm{z})$ называется первообразной функции $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ в области D. ▲

● Любая первообразная $\Phi(\mathrm{z})$ функции $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ выражается формулой

$$\Phi(\mathrm{z}) = \int_{\mathrm{z}_0}^{\mathrm{z}} \mathrm{f}(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \mathrm{C}.$$

● **Формула Ньютона-Лейбница.**

Пусть функция $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ аналитична в односвязной области D, точки $\mathrm{z}_0, \mathrm{z}_1$ принадлежат области D. Тогда

$$\int_{\mathrm{z}_0}^{\mathrm{z}_1} \mathrm{f}(\mathrm{z})\mathrm{dz} = \Phi(\mathrm{z}_1) - \Phi(\mathrm{z}_0),$$

где $\Phi(\mathrm{z})$ – одна из первообразных функции $\mathrm{f}(\mathrm{z})$ в области D.

● **Интегральные формулы Коши.** Если функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D с кусочно-гладкой границей Γ и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, то $\forall z_0 \in D$ имеют место равенства:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0), \qquad (5)$$

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), n \in \mathbb{N}. \qquad (6)$$

Практические задания

Вычислить интегралы по заданным контурам:

1) $\int_l (2z+1)\bar{z}dz,\ \ l = \{z : |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\}$.

2) $\int_l \operatorname{Im} z dz,\ \ l = \{z = x + ix^2,\ 0 \le x \le 1\}$.

3). $\int_l \cos\bar{z}dz,\ l$ - отрезок прямой от точки $z_0 = \pi$ до точки $z_1 = \frac{\pi}{2} + i$.

4) $\int\limits_{l} \frac{dz}{\sqrt[3]{z}}, \quad l = \{z : |z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi\},\ \sqrt[3]{1} = 1$.

5) $\int\limits_{l} Lnz dz, \quad l = \{z : |z| = 1\},\ Lni = \frac{\pi i}{2}$.

6) $\int\limits_{l} e^{z} dz,\ l = \left\{z = x + iy : y = x^{3}, 1 \le x \le 2\right\}$.

7) $a)\ \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{2}}{z-2i} dz, \quad b)\ \oint\limits_{|z|=4} \frac{z^{2}}{z-2i} dz$.

8) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^{2}-1} dz$.

9) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{(z-1)^{2}(z-3)} dz$.

10) $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{che^{i\pi z}}{z^{3}-4z^{2}} dz$.

Домашнее задание: №№ 12.232, 12.236, 12.248, 12.251, 12.258, 12.261, 12.263, 12.264, 12.270.
Первые две цифры соответствуют номеру главы «Теория функций комплексной переменной»

Указание. Проработать лекции 8 и 9. Постараться решить задачи, которые планировались на занятии (задачи 1-10) самостоятельно. Будут дополнительно присланы решения этих задач. Выполнить самостоятельно домашнее задание.