ЛЕКЦИЯ 5. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве

$$G=\{(x,y): a\le x<+\infty,\ y\in D\},$$

причем множество D может быть как конечным отрезком $[c;d]$, так и в общем случае конечным или полу бесконечным интервалом. Рассмотрим несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{4.1}$$

Теорема 1. (Непрерывность интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве G;

2) несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно на множестве D.

Тогда функция $I(y)$ является непрерывной на множестве D.

Доказательство: Так как несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно по параметру y на множестве D, то $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0>a$ такое, что $\forall B\ge B_0$ и $\forall y\in D$

$$\left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве G, то собственный интеграл

$$\int_a^B f(x,y)dx$$

является непрерывной функцией на множестве D, т.е. $\forall y_0\in D\ \exists\delta>0$ такое, что $\forall y\in D$ и удовлетворяющих условию $|y-y_0|<\delta$, выполнено неравенство

$$\left|\int_a^B f(x,y)dx-\int_a^B f(x,y_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда $\forall y\in D$ и удовлетворяющих условию $|y-y_0|<\delta$, получим:

$$|I(y)-I(y_0)|=$$

$$=\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx-\int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx\right|=\left|\int_a^B f(x,y)dx-\int_a^B f(x,y_0)dx+\right.$$

$$+\int\limits_{B}^{+\infty} f(x,y)dx-\int\limits_{B}^{+\infty} f(x,y_0)dx\right| \le \left|\int\limits_{a}^{B}[f(x,y)-f(x,y_0)]dx\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{B}^{+\infty} f(x,y)dx\right|+\left|\int\limits_{B}^{+\infty} f(x,y_0)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Таким образом, показано, что функция $I(y)$ непрерывна в точке y_0. А так как y_0 – произвольная точка множества D, то $I(y)$ непрерывна на множестве D. ■

Пример 1. Доказать, что

$$I(y)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx \tag{4.2}$$

является непрерывной функцией на множестве $D=[0;+\infty)$.

Решение: Введем в рассмотрение функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}, x\in(0;+\infty), y\in[0;+\infty), \\ 1,\ x=0, y\in[0;+\infty). \end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $G=\{(x,y): 0\le x<+\infty,\ 0\le y<+\infty\}$. Покажем, что несобственный интеграл (4.2) сходится равномерно на множестве D. Для любого $B>0$

$$\int\limits_{B}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx=-\int\limits_{B}^{+\infty}\frac{e^{-xy}}{x}d\cos x=-\cos x\cdot\frac{e^{-xy}}{x}\Bigg|_{B}^{+\infty}+\int\limits_{B}^{+\infty}\cos x\cdot d\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right).$$

Тогда для оценки модуля интеграла получим:

$$\left|\int\limits_{B}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\left|\frac{\cos B}{Be^{By}}\right|+\left|\int\limits_{B}^{+\infty} d\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)\right|\le\frac{1}{B}+\left|\frac{e^{-xy}}{x}\Bigg|_{B}^{+\infty}\right|=\frac{1}{B}+\frac{1}{B}=\frac{2}{B}.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists B_0=4/\varepsilon>0$ такое, что $\forall B>B_0$ и $\forall y\in D$

$$\left|\int\limits_{B}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\frac{2}{B}\le\frac{2}{B_0}=\frac{2\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

Согласно определению равномерно сходящегося несобственного интеграла (определение 4, лекция 4) несобственный интеграл (4.2) сходится равномерно на множестве D.

Выполнены условия теоремы 1, следовательно, функция $I(y)$ непрерывна на множестве D ■

Теорема 2. (Интегрирование несобственного интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве

$$G_1 = \{(x,y): a \le x < +\infty,\ c \le y \le d\};$$

2) несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно на отрезке $[c;d]$.

Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (*)$$

Доказательство: Так как выполнены условия 1) и 2) теоремы, то функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c;d]$, следовательно, существует повторный интеграл в левой части равенства $(*)$.

В силу равномерной сходимости несобственного интеграла (4.1) на отрезке $[c;d]$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists B_0 = B_0(\varepsilon) > a$ такое, что $\forall B \ge B_0$ и $\forall y \in [c;d]$

$$\left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{(d-c)}.$$

Применим теорему об интегрировании собственного интеграла по параметру:

$$\int_c^d dy \int_a^B f(x,y)\,dx = \int_a^B dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \qquad (**)$$

Справедлива оценка:

$$\left|\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx - \int_c^d dy \int_a^B f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_c^d dy \int_B^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_c^d dy \left|\int_B^{+\infty} f(x,y)dx\right|\right| < \left|\int_c^d \frac{\varepsilon}{(d-c)}dy\right| = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{B\to+\infty} \int_c^d dy \int_a^B f(x,y)\,dx = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Так как существует предел при $B \to +\infty$ в левой части равенства $(**)$, то существует предел при $B \to +\infty$ и в правой части этого равенства. Переходя в $(**)$ к пределу при $B \to +\infty$, получим равенство $(*)$. Теорема доказана. ■

Пример 2. (Интеграл Дирихле) Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4.3}$$

Решение: Рассмотрим несобственный интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx, \quad y \in [\delta; B],\ 0 < \delta < B.$$

На отрезке $[\delta; B]$ этот несобственный интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Действительно,

$$\left|e^{-xy} \sin x\right| \le e^{-\delta x} \ \ \forall x \in [0;+\infty),\ \forall y \in [\delta; B] \text{ и } \int_0^{+\infty} e^{-\delta x} dx = \frac{1}{\delta}.$$

Согласно теореме 2

$$\int_\delta^B dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^{+\infty} dx \int_\delta^B e^{-xy} \sin x dy. \tag{4.4}$$

Вычисляя повторные интегралы в левой и правой частях равенства (4.4), получим:

$$\int_\delta^B dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_\delta^B \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_\delta^B = \operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg}\delta,$$

$$\int_0^{+\infty} dx \int_\delta^B e^{-xy} \sin x dy = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-xy}}{x} \sin x \Bigg|_\delta^B \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x\delta} - e^{-xB}\right) \frac{\sin x}{x} dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-x\delta} - e^{-xB}\right) \frac{\sin x}{x} dx = \operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg}\delta. \tag{4.5}$$

В примере 1 было показано, что несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится равномерно на множестве $D = [0;+\infty)$, следовательно является непрерывной функцией на этом множестве. Переходя в равенстве (4.5) к пределу при $B \to +\infty$, а затем к пределу при $\delta \to +0$, получим равенство (4.3) ■

Пример 3. Используя результат предыдущего примера, вычислить интеграл

$$D(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} dx. \tag{4.6}$$

Решение: Заметим, что $D(y)$ – нечетная функция. Если $y > 0$,то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{xy}\,d(xy) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$D(y) = \begin{cases} \pi/2, & y > 0, \\ 0, & y = 0, \\ -\pi/2, & y < 0. \end{cases}$$

Ответ: $D(y) = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y$.

Теорема 3. (Дифференцирование несобственного интеграла по параметру)

Пусть

1) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на множестве

$$G_1 = \{(x,y) : a \le x < +\infty,\ c \le y \le d\};$$

2) несобственный интеграл (4.1) сходится равномерно на отрезке $[c;d]$;

3) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,c)dx$ сходится.

Тогда несобственный интеграл (4.1) сходится на отрезке $[c;d]$, является на этом отрезке непрерывно-дифференцируемой функцией и

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Доказательство: Пусть $y \in [c;d]$ и y фиксировано. Рассмотрим интеграл

$$J(z) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,z)}{\partial y}\,dx$$

как функцию переменной z на отрезке $[c;d]$.

Из первых двух условий теоремы 3 следует, что функция $J(z)$ является непрерывной на отрезке $[c;d]$. Согласно теореме 2

$$\int_c^y dz \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,z)}{\partial y}\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^y \frac{\partial f(x,z)}{\partial y}\,dz =$$

$$= \int_a^{+\infty} [f(x,y) - f(x,c)]dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - C, \qquad C = \int_a^{+\infty} f(x,c)dx.$$

Откуда следует сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Так как функция $J(z)$ является непрерывной на отрезке $[c;d]$, то функция

$$\Phi(y) = \int_c^y J(z)dz$$

является непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[c;d]$ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Тогда

$$\Phi'(y) = J(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - C\right) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \ \blacksquare$$

Пример 4. Используя дифференцирование по параметру, вычислить несобственный интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}}{x}dx, \ 0 < \alpha < 1.$$

Решение: При $x \to 0$

$$e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2} = 1 - \alpha x^2 - 1 + x^2 + o\left(x^2\right) = (1-\alpha)x^2 + o\left(x^2\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}}{x} = 0$.

На множестве

$$G = \{(x,\alpha): 0 \le x < +\infty, \ \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2\}, \ 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$$

рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \left(e^{-\alpha x^2} - e^{-x^2}\right)\Big/x, \ x \in (0;+\infty), \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]; \\ 0, x = 0, \ \alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]. \end{cases}$$

На указанном множестве функция $f(x,\alpha)$ непрерывна вместе со своей частной производной по параметру α:

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\begin{cases}-xe^{-\alpha x^2}\ , \ x\in(0;+\infty),\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2];\\ 0,\ x=0,\ \alpha\in[\alpha_1;\alpha_2].\end{cases}$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$ сходится равномерно на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ по признаку Вейерштрасса. Действительно,

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right|\le xe^{-\alpha_1 x^2}\ \ \forall x\in[0;+\infty),\ \forall\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2];$$

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-\alpha_1 x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha_1}e^{-\alpha_1 x^2}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{1}{2\alpha_1}.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx$ сходится по признаку сравнения:

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx=\int\limits_0^{1} f(x,\alpha_1)dx+\int\limits_1^{+\infty} f(x,\alpha_1)dx \qquad (4.7)$$

Первый из интегралов в правой части (4.7) является определенным, а для второго интеграла при $x\ge 1$ имеет место оценка:

$$|f(x,\alpha_1)|\le\left|\frac{e^{-\alpha_1 x^2}}{x}\right|+\left|\frac{e^{-x^2}}{x}\right|\le e^{-\alpha_1 x^2}+e^{-x^2}\le 2e^{-\alpha_1 x^2}\le 2e^{-\alpha_1 x}.$$

То есть $0<f(x,\alpha_1)\le 2e^{-\alpha_1 x}$ и несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}2e^{-\alpha_1 x}dx$ сходится.

Выполнены условия теоремы 3, поэтому можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int\limits_0^{+\infty}\left(-xe^{-\alpha x^2}\right)dx=-\frac{1}{2\alpha}.$$

Откуда следует, что $I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C$. Так как $I(1)=0$, то $C=0$.

Ответ: $I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha$.