Вопросы на зачет

Дискретная математика 1_64

КАФЕДРА ВМ / ИНСТИТУТ ИКБПС

Задачи.

Задача 1. На множестве $A \times B$, где $A = \{11, 12, 13, 14\}$, $B = \{21, 22, 23\}$, задано отношение с помощью матрицы $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а на множестве $B \times C$, где $C = \{31, 32, 33, 34\}$, задано отношение $R_2 = \{(21, 32), (22, 34), (23, 33)\}$. Определить композицию отношений R_1 и R_2.

Решение. По матрице отношения R_1 найдем элементы отношения R_1: $\{(11, 22), (12, 22), \}$. Для отношения $(11, 22) \in R_1$ существует элемент $22 \in B$ такой, что $(22, 34) \in R_2$, следовательно, $(11, 34) \in R_1 \circ R_2$. Для элемента $(12, 22) \in R_1$ — $(12, 34) \in R_1 \circ R_2$. Откуда следует, что $R_1 \circ R_2 = \{(11, 34), (22, 34)\}$.

Ответ: $R_1 \circ R_2 = \{(11, 34), (22, 34)\}$.

Задача 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. На первое место можем поставить только три цифры так как первая цифра 0 не образует четырехзначного числа. На второе место можем поставить только три цифры (включая 0 и отбросив цифру первого места). На третье место — 2 цифры, а на четвертое место, оставшуюся одну цифру. Всего будет $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

Ответ: 18.

Задача 3. Определить общее целочисленное решение уравнение $6x + 5y = 3$.

Решение. $\text{НОД}(6, 5) = 1$ и 3 делится на 1, следовательно, данное уравнение имеет целочисленное решение. В этом случае частное целочисленное решение задается формулами $x_0 = \frac{uc}{\text{НОД}(a,b)}, y_0 = \frac{vc}{\text{НОД}(a,b)}$, где целые числа u и v берутся из представления $au + bv = \text{НОД}(a, b)$. Для нашего уравнения имеем $x_0 = 3u, y_0 = 3v$, где u и v берутся из представления $6u + 5v = 1$. Полагая $v = -1$, находим $u = 1$. Итак, $u = 1, v = -1$. Тогда, частное решение равно $x_0 = 3 \cdot 1 = 3, y_0 = 3 \cdot (-1) = -3$. Общее целочисленное решение уравнения $ax + by = c$ задается формулой $\begin{cases} x = x_0 + \frac{bt}{\text{НОД}(a,b)}, \\ y = y_0 - \frac{at}{\text{НОД}(a,b)}, \end{cases}$ где t — произвольное целое число. Откуда получаем общее целочисленное решение исходного уравнения.

$$\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = -3 - 6t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 3 + 5t, \\ y = -3 - 6t, \end{cases}$ *где t — произвольное целое число.*

Задача 4. Найти решение сравнения $54x \equiv 6\ (mod\ 4)$.

Решение. $\text{НОД}(54, 4) = 2$. 6 делится на 2, то исходное сравнение имеет решение. Число таких решений два. Подберем решение уравнения $54x + 4y = 6$. В уравнении $54x + 4y = 6$ обе части уравнения можно сократить на 2. Тогда $27x + 2y = 3$. Так как нас устроит любое решение уравнения $27x + 2y = 3$, то положим $y = -12$. Тогда $27x - 24 = 3$. Отсюда $x_0 = 1$. Решения сравнения $54x \equiv 6\ (mod\ 4)$ задаются формулой $x_0 + tm/\text{НОД}(a, m)\ \ (mod\ m) = 1 + 4t/2 = 1 + 2t\ (mod\ 4), t = 1, 2$.

При $t = 1$ получаем одно решение $x \equiv 3\ (mod\ 4)$. При $t = 2$ получаем другое решение $x \cdot\equiv 5 \equiv 1\ (mod\ 4)$.

Ответ: $x \equiv 3\ (mod\ 4), x \equiv 1\ (mod\ 4)$.

Задача 5. Решить систему сравнений $\begin{cases} x \equiv 1\ (mod\ 2), \\ x \equiv 3\ (mod\ 5), \\ x \equiv 2\ (mod\ 7). \end{cases}$

Решение. Числа 2, 5, 7 – попарно взаимно простые числа. Пусть $M = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$, тогда $M_1 = 35, M_2 = 14, M_3 = 10$.

Найдем решение сравнения $35z_1 \equiv 1\ (mod\ 2)$. Представим сравнение в виде $(34 + 1)z_1 \equiv 1(mod\ 2)$, откуда следует, что $z_1 \equiv 1\ (mod\ 2)$, которое и является решением.

Решим сравнение $14z_2 \equiv 3\ (mod\ 5)$. Эквивалентным ему сравнением является сравнение $4z_2 \equiv 3\ (mod\ 5)$ или $4z_2 \equiv 8\ (mod\ 5)$. Так как 4 и 5 взаимно простые числа, то из последнего сравнения следует решение исходного сравнения: $z_2 \equiv 2\ (mod\ 5)$.

И, наконец, решим третье сравнение $10z_3 \equiv 2\ (mod\ 7)$. Это сравнение эквивалентно сравнению $3z_3 \equiv 2\ (mod\ 7)$ или $3z_3 \equiv 9\ (mod\ 7)$, откуда $z_3 \equiv 3\ (mod\ 7)$ является решением третьего сравнения.

$M_1z_1 + M_2z_2 + M_3z_3 \equiv 35 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \equiv 93 \equiv 23\ (mod\ 70)$. Из китайской теоремы об остатках следует, что сравнение

$$x \equiv 23\ (mod\ 70)$$

является решением заданной системы сравнений.

Ответ: $x \equiv 23\ (mod\ 70)$.

Примечание. ***В задачах 4, 5 необходимо представлять ответ в виде $\boldsymbol{x \equiv r\ (mod\ m)}$, где $\boldsymbol{0 \le r < m}$.***

Задача 6. В таблице указаны частоты букв. Построить по этим данным код Хаффмана. Кодировать в сообщении слово «истина».

Буква	*а*	*н*	*о*	*с*	*т*	*и*
Частота	14	9	28	25	8	15

Расположим буквы в порядке убывания частот.

Буква	*о*	*с*	*и*	*а*	*н*	*т*
Частота	28	25	15	14	9	8

Объединим две буквы с наименьшими частотами (*н, т*) в один составной знак (*н т*). Этому знаку припишем частоту, равную сумме частот букв «*н*», «*т*» (9+8=17). После этого расположим все знаки в порядке убывания частот.

Буква	*о*	*с*	*нт*	*и*	*а*
Частота	28	25	17	15	14

Объединим две буквы с наименьшими частотами (*и, а*) в один составной знак (*и а*). Этому знаку припишем частоту, равную сумме частот букв «*а*», «*и*» (15+14=29). После этого расположим все знаки в порядке убывания частот.

Буква	*иа*	*о*	*с*	*нт*
Частота	29	28	25	17

На третьем шаге будет получена следующая таблица.

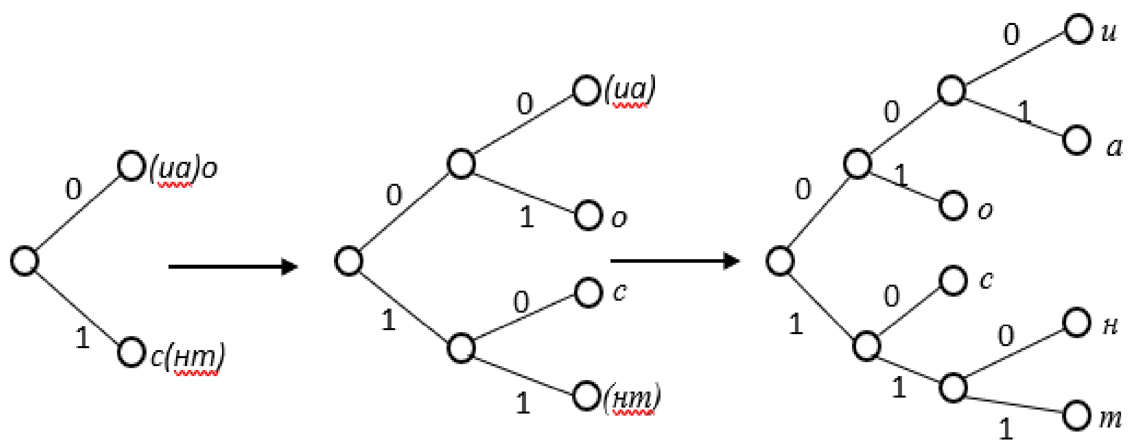
Буква	*с(нт)*	*иа*	*0*
Частота	42	29	28

На 4-м шаге будет получена следующая таблица.

Буква	*(иа)(о)*	*с(нт)*
Частота	57	42

На последнем шаге получаем *((иа)(о))(с(нт))*.

После этого строим *дерево кодирования*. Припишем первой компоненте последнего объединения символ 0, а второй компоненте — символ 1. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока все исходные знаки не будут закодированы.



Получаем таблицу кодирования.

Буква	*и*	*а*	*о*	*с*	*н*	*т*
Код	000	001	01	10	110	111

Так как по таблице кодирования *и=000, с=10, т=111, а=001*, то слово «истина» кодируется последовательностью 00010111000110001.

Ответ: 00010111000110001

<u>Примечание к задаче 6.</u> ***Строго следите за объединением символов. Если в таблице частот символ находится слева, то он в объединении находится слева.*** В противном случае вы получите другую таблицу кодирования и не совпадет с таблицей кодирования автора задачи 5.

Задача 7. Найти маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 8.

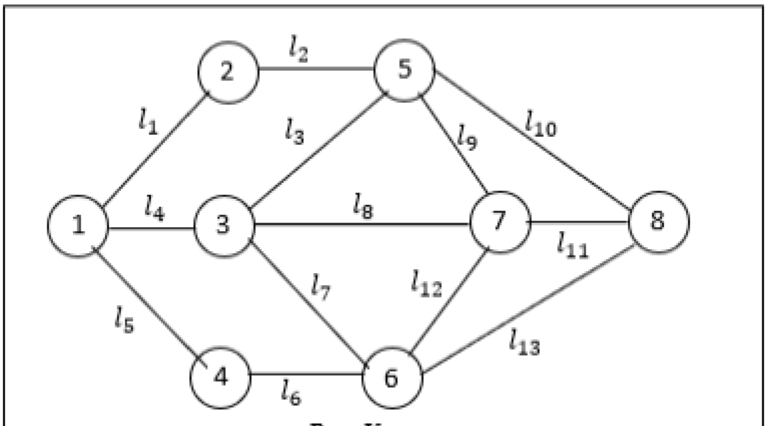


Рис. К задаче

Где длины ребер: $l_1 = 2, l_3 = l_4 = l_6 = 1, l_2 = 2, l_5 = 3, l_7 = 3, l_8 = 4, l_9 = 2, l_{10} = 4, l_{11} = 1, l_{12} = 3, l_{13} = 5$. В ответе укажите длину искомого маршрута. Выберите **один** верный вариант ответа:

Решение. Припишем вершине 8 число 0.

8 вершина соединена с вершинами 5, 6 и 7, но с вершин 5, 6 и 7 в вершину 8 можно попасть и другими путями (по направлению к 8). Тогда находим $\min(0+4, 0+5, 0+1) = 1$ и вершине 7 приписываем число 1, а ребро (7, 8) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 7 и 8 вершин определяем число 6 вершины: $\min(1+3, 0+5) = 4$. Ребро (6,7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 7 и 8 вершин найдем число 5 вершины: $\min(1+2, 0+4) = 3$. Ребро (5,7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 5, 6 и 7 вершин найдем число 3 вершины: $\min(3+1, 1+4, 4+3) = 4$. Ребро (3, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числу 5 вершины найдем число 2 вершины: $5+2=7$. Ребро (2, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числу 6 вершины найдем число 4 вершины: $4+1=5$. Ребро (4, 6) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 2, 3 и 4 вершин найдем число 1 вершины: $\min(7+2, 4+1, 5+3) = 5$. Ребро (1, 3) изобразим двумя чертами со стрелкой.

Двигаясь из начальной вершины 1 к конечной вершине 8 по ребрам со стрелкой, получаем кратчайший путь 1 – 3 – 5 – 7 – 8. Его длина равна 5 (это число вершины 1).

Ответ: минимальная длина маршрута 5, путь 1 – 3 –5 – 7 – 8.

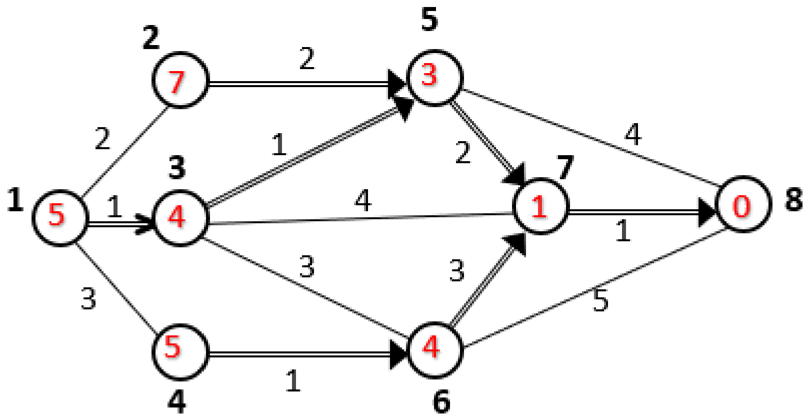


Рис. к задаче 7.

Вопросы.

1. Определение декартового произведения двух множеств.
2. Определение отношения.
3. Композиция двух отношений.
4. Построение матрицы отношений.
5. Нахождение отношения по матрице отношений.
6. Определение перестановок. Формула числа перестановок.
7. Размещение. Число размещений.
8. Перестановки с повторениями.
9. Размещения с повторениями.
10. Понятие графа. Определение.
11. Метод присвоения меток.
12. Алгоритм нахождения кратчайшего пути между двумя пунктами.
13. Деление с остатком.
14. Алгоритм Евклида.
15. Наибольший общий делитель.
16. Наименьшее общее кратное.
17.Классы вычетов по модулю.
18. Решение сравнений.
19. Китайская теорема об остатках.
20. Код с проверкой четности.
21. Код с тройным повторением.
22. Код Хаффмана.