Разбор задач, которые должны были быть рассмотрены на практическом занятии 25.04.2020

1. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ ортонормированных векторов. Покажите, что тогда всякий непрерывный линейный оператор $A : H \to H$ может быть задан бесконечной матрицей $\hat{A} = \{a_{ij}\}$, определяемой равенством

$$d_j = Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i \,.$$

Решение. Элемент $y = Ax$ представляется в виде суммы ряда

$$y = Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \,,$$

где

$$\beta_i = (y, e_i) = (Ax, e_i) = f_i(x) \,,$$

функционалы f_i линейны и непрерывны в силу линейности и непрерывности оператора A и скалярного произведения. Покажем, что действие этих функционалов полностью определяется матрицей $\hat{A}$.

Рассмотрим сначала в пространстве H плотное множество, состоящее из конечных линейных комбинаций элементов системы $\{e\}$:

$$x = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j \,.$$

В силу линейности оператора A

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j Ae_j = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j d_j \,,$$

и тогда

$$\beta_i = f_i(x) = (Ax, e_i) = \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j d_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(d_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \alpha_j \,.$$

Продолжим эти функционалы по непрерывности на всё пространство H. Пусть

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j \,,$$

тогда

$$\beta_i = f_i(x) = f_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j\right) = \lim_{N\to\infty} f_i\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j e_j\right) =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\alpha_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\alpha_j\,.$$

Таким образом, мы получили формулу, связывающую координаты векторов x и y

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\alpha_j\,,$$

полностью аналогичную соответствующей формуле для конечномерных пространств.

Замечание. Сходимость рядов для β_i и квадратичная суммируемость последовательности $\{\beta_i\}$ при условии квадратичной суммируемости последовательности $\{\alpha_j\}$ вытекает из ограниченности оператора A. Обратно, если матрица $\hat{A}$ такова, что для произволной последовательности $\alpha \in l_2$ сходятся все ряды для β_i, и справедливо включение $\beta \in l_2$, то матрица определяет некоторый полноопределённый линейный замкнутый оператор, ограниченный в силу теоремы Банаха о замкнутом графике.

Замечание. Для неограниченных операторов эта формула, вообще говоря, может не выполняться, поскольку функционалы f_i не являются непрерывными, и мы не можем устроить предельный переход. Это значит, что одной и той же матрице $\hat{A}$ могут, вообще говоря, соответствовать разные операторы. Однако если оператор A замкнут, то равенство для β_i выполняется на его области определения, причём эта область определяется как раз условиями сходимости рядов для β_i и квадратичной суммируемости результирующей последовательности β. Таким образом, множество операторов, задаваемых своей матрицей – это множество замкнутых операторов.

2. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор. Покажите, что тогда $\exists\, K \in \mathbb{R}^1_+$ такое, что для $\forall(x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall(y_1, \ldots, y_n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right|^2 \le K \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2\,,$$

где a_{ij} – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше.

Решение. Всё, что мы знаем про числа $\{a_{ij}\}$ – это то, что они являются элементами матрицы ограниченного линейного оператора A. Поэтому мы должны как-то проинтерпретировать доказываемое неравенство в терминах, характеризующих действие этого оператора в пространстве H. Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства под знаком модуля:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(e_i, d_j)x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j d_j\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j A e_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, A\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\right) = (x, Ay)\,,$$

где

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i\,, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\,.$$

Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right| = |(x, Ay)| \leq \|x\| \cdot \|Ay\| \leq \|x\| \cdot \|A\| \cdot \|y\|\,.$$

Возводя в квадрат (это можно сделать в силу неотрицалельности левой и правой части), получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right|^2 \leq \|A\|^2 \cdot \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = \|A\|^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2\,,$$

т.е. доказвыаемое неравенство со значением $K = \|A\|^2$.

3. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор, и $\exists\, K \in \mathbb{R}^1_+$ такое, что для $\forall(x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall(y_1, \ldots, y_n)$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right|^2 \leq K \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2\,,$$

где a_{ij} – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше. Получите для нормы оператора A оценку сверху.

Решение. Мы только что выяснили, что это неравенство может быть записано в виде

$$|(x, Ay)|^2 \leq K \cdot \|x\|^2 \cdot \|y\|^2\,,$$

где

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i\,, \quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\,.$$

Отсюда вытекает, что

$$\forall x, y \in Y \cap \sigma_1(o) : |(x, Ay)| \le \sqrt{K}\,,$$

где Y – плотный в H линеал, состоящий из конечных линейных комбинаций элементов $\{e_i\}$, а $\sigma_1(o)$ – единичная сфера с центром в нуле. Отсюда вытекает, что норма A как оператора из Y в H не превосходит $\sqrt{K}$. Действительно,

$$\|A\|_{Y\to H} = \sup_{y\in Y\cap\sigma_1(o)} \|Ay\| = \sup_{y\in Y\cap\sigma_1(o), \|x\|=1} |(x, Ay)| =$$
$$= \sup_{x,y\in Y\cap\sigma_1(o)} |(x, Ay)| \le \sqrt{K}\,,$$

последнее равенство справедливо с силу плотности множества Y. Но норма ограниченного оператора на всём пространстве и на плотном линеале совпадают, поэтому $\|A\| \le \sqrt{K}$. Оценка получена.

Замечание. Как мы знаем, ограниченный оператор, заданный на плотном линеале, единственным образом продолжается на всё пространство с сохранением нормы. Однако если мы заранее не знаем, что оператор A ограничен, то нет и уверенности, что он совпадает с таким продолжением, так что из исходного неравенства мы можем заключить его ограниченность на Y, но не на всём пространстве. Если, однако, известно, что оператор A замкнут, то в этом случае его график содержит все свои предельные точки, и A тогда совпадает со своим продолжением по непрерывности и, тем самым, ограничен.

4. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задана полная система $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов. Пусть $A : H \to H$ – ограниченный линейный оператор. Получите оценку снизу нормы оператора A:

$$\sup_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right\} \le \|A\|_H^2\,,$$

где a_{ij} – элементы матрицы оператора, рассмотренной выше.

Решение. Нам удобно будет сначала рассммотреть родственную задачу. Докажем, что

$$\sup_j \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right\} \le \|A\|_H^2\,.$$

Действительно,

$$d_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i\,,$$

и поэтому

$$\|d_j\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}^2$$

в силу равенства Парскваля. С другой стороны,

$$\forall j : \|d_j\| = \|Ae_j\| \le \|A\|,$$

откуда и вытекает рассматриваемое вспомогательное неравенство.

Мы знаем, что матрицы операторов A и A^* отличаются перестановкой индексов, поэтому, применяя доказанное неравенство к оператору A^*, получаем

$$\sup_i \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \right\} \le \|A^*\|^2 .$$

Для доказательства исходного утверждения осталось вспомнить, что $\|A\| = \|A^*\|$.

5. Покажите, что оператор A, заданный бесконечной матрицей $\hat{A} = \{a_{ij}\}$, относительно полной системы $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ ортонормированных векторов $\{e_i\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H и действующий по формуле

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i$$

вполне непрерывен, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty .$$

Решение. Если оператор A задаётся своей матрицей, то он замкнут. Докажем сначала, что этот оператор ограничен, и квадрат его нормы не превосходит фигурирующей в задаче суммы. Мы знаем, что если

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j ,$$

то

$$y = Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i ,$$

где

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \alpha_j .$$

Из неравенства КБШ следует, что

$$\beta_i^2 \le \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \cdot \|x\|^2 ,$$

и тогда

$$\|Ax\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \cdot \|x\|^2 ,$$

откуда и вытекает оценка

$$\|A\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 .$$

Докажем теперь полную непрерывность этого оператора. Если двойной ряд сходится, то по любому $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \le \varepsilon^2 .$$

Разобьём оператор A в сумму $A = A_N + C_N$ операторов таких, что первые N строк матрицы оператора A_N совпадают со строками матрицы оператора A, а далее следуют нули, а в матрице оператора C_N, наоборот, первые N строк нулевые, а прочие элементы совпадают с a_{ij}. В этом случае по доказанному $\|C_N\| \le \varepsilon$, при этом оператор A имеет конечный ранг, не превосходящий N, поскольку $ImA \subset L(e_1, e_2, \dots, e_N)$. Возможность такого разбиения и означает полную непрерывность оператора A.

Замечание. Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что матрица суммы двух операторов есть сумма матриц слагаемых. Действительно, если $A = B + C$, то

$$a_{ij} = (e_i, Ae_j) = (e_i, (B+C)e_j) = (e_i, Be_j) + (e_i, Ce_j) = b_{ij} + c_{ij} .$$

Другое дело, что не любая бесконечная матрица является матрицей некоторого ограниченного оператора, но в данном случае ограниченность оператора C_N вытекает из доказанной оценки, а A_N ограничен как разность двух ограниченных операторов.

Замечание. Мы могли бы разбить матрицу на две иным способом, разделив её не по гризонтали, а по вертикали. В этом случае первое слагаемое было бы также оператором конечного ранга, его образ совпадал бы с линейной оболочкой элементов $d_1, d_2, \dots, d_N$. Возможно также в качестве первого слагаемого выбрать оператор с квадратной матрицей, действующий в конечномерном подпространстве – линейной оболочке первых N элементов полной ортонормированной системы.

Замечание. Вполне непрерывные (компактные) операторы, для которых сходится двойной ряд из квадратов модулей матричных элементов, относятся к классу операторов Гильберта-Шмидта. Такие операторы образуют замкнутое подпространство в пространстве линейных ограниченных операторов.

Задачи, которые должны были быть рассмотрены на общем практическом занятии 16.05.2020

1. Пусть $q(t)$ – заданная непрерывная функция. Покажите, что любые два решения задачи Штурма-Лиувилля
$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) + q(t)x(t) = \lambda x(t) \\ x(a) = x(b) = 0 \end{cases}$$
отвечающие различным значениям λ, взаимно ортогональны в пространстве $L_2[a, b]$.

2. Пусть A – симметричный компактный оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве H, $\{\lambda_i\}$ – последовательность его ненулевых собственных чисел, упорядоченных по убыванию модуля, λ – некоторое число, отличное от нуля и от значений λ_i, и
$$d = \inf_i |\lambda - \lambda_i| \neq 0 \, .$$
Покажите, что
$$\left\| (\lambda E - A)^{-1} \right\| = \max \left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d} \right) \, .$$

3. Пркажите, что резольвентное множество непрерывного оператора открыто.

4. Опишите спектр компактного симметричного оператора в случае конечномерного и бесконечномерного гильбертова пространства.

5. Докажите компактность оператора, задаваемого равенством
$$Ax = \sum_{k=1}^{N} (x, \psi_k) e_k \, .$$

6. Проверьте, что оператор, сопряжённый к рассмотренному выше, задаётся формулой
$$Ay = \sum_{k=1}^{N} (y, e_k) \psi_k \, .$$

7. Покажите, что любой ограниченный оператор переводит компактное множество в компактное.

8. Если A и B – ограниченные линейные операторы, то $(AB)^* = B^* A^*$.

9. Если A^{-1} существует и ограничен, то A^* имеет ограниченный обратный и $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

10. Покажите, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве H компактный оператор не может иметь ограниченного обратного.

11. Покажите, что в гильбертовом пространстве оператор, сопряжённый к компактному оператору, компактен.