$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{y+\frac{2x^2}{3y}}{y^2} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3y^2+2x^2}{3y^3} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{y^3}$$

$$y''' = -\frac{2}{9}\cdot(-3)\cdot\frac{1}{y^4}\cdot y' = \frac{2}{3y^4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x}{y} =$$

$$= -\frac{4x}{9y^5}$$

Семинар 17 (03.12.16)

Тема 10.

Теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема Ролля. Пусть

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$

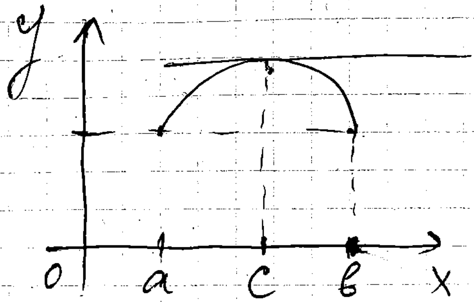
2) функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b)

3) $f(a) = f(b)$

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$ 265

1

Геометрическая иллюстрация



Задача

$$f(x) = x^3 - 4x \quad [-2; 2]$$

$$f(-2) = -8 + 8 = 0$$

$$f(2) = 8 - 8 = 0$$

$$f(-2) = f(2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 =$$

$$3x^2 - 4 = 0$$

266

$x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

<u>Задача</u> $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $[-1, 1]$

$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

В т. $x=0$ $f(x)$ не дифф-а (не имеет конечную произв.)

Отсюда $f(x)$ не удовл. усл. Т. Ролля

<u>Задача</u>

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi, & \text{если } x \in (0, \pi] \\ \sin x, & \text{если } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

$[-\pi, \pi]$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim (x - \pi) = -\pi$.

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} \sin x = 0$

$x = 0$ - точка разрыва $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ усл. Т. Ролля не выполняется

3

Задача

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0,1] \\ \sin x, & \text{если } x\in\left[-\frac{3\pi}{2},0\right) \end{cases}$$

[redacted] на $\left[-\frac{3\pi}{2}, 1\right]$

1) $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \sin x = 0$

$f(0)=0$

$f(x)$ - непрерывна на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, 1\right]$

2) $$f'(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x\in[0,1] \\ \cos x, & \text{если } x\in\left[-\frac{3\pi}{2},0\right) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0+0} f'(x) = \lim \underset{1}{\cancel{f(x)}} = 1 \\ &\lim_{x\to 0-0} f'(x) = \lim_{x\to 0-0} \cos x = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ - диф-а в т. } x=0$$

3) $f(1)=1$

$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

$f(1) = f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

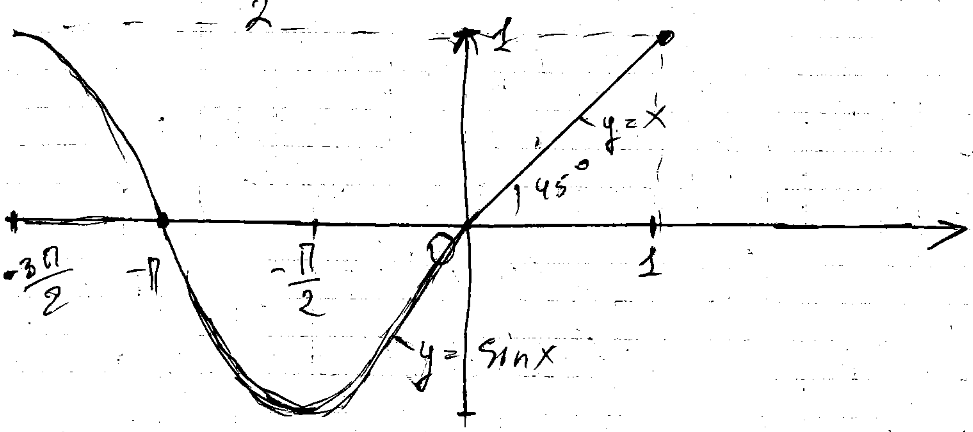
$f(x)$ – уд-ет ~~усл~~ всем усл-ям теоремы Ролля на $\left[-\frac{3\pi}{2}, 1\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ c \in \left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right) : f'(c) = 0$

$f'(x) = 0$

$\cos x = 0$

$c = x = -\frac{\pi}{2}$



Задача

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Сколько корней имеет уравнение $f'(x) = 0$?

Решение

$f(x)$ – многочлен 4-й степени $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)$ – многочлен 3-й степени $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение $f'(x) = 0$ имеет не более трех корней

Функция $f(x)$ на отрезке $[1, 2]$ удовлетворяет всем усл. т. Ролля.

$f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow (\exists c_1 \in (1, 2)) : f'(c) =$

аналогично рассматривая отрезки $[2, 3]$ и $[3, 4]$

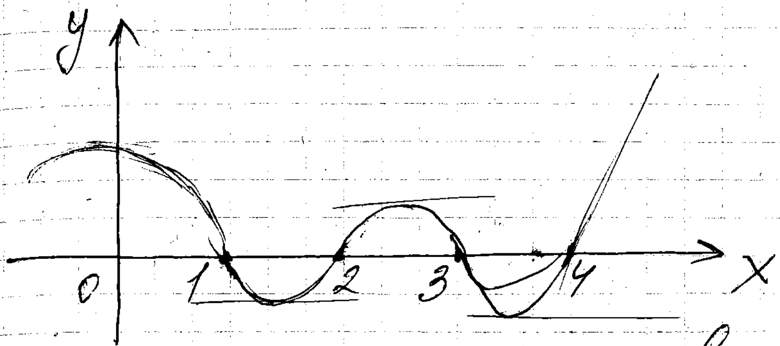
Можно доказать, что

[redacted] $(\exists c_2 \in (2, 3)) : f'(c_2) = 0$

$(\exists c_3 \in (3, 4)) : f'(c_3) = 0$

Итак, уравнение $f'(x) = 0$ имеет не менее 3 корней c_1, c_2, c_3. Поскольку $f'(x)$ многочлен 3-й степени, то более 3-х корней уравнение $f'(x) = 0$ иметь не может.

Утверждение доказано



Если функция $f(x)$ диф-ема, то между любыми двумя нулями функции $f(x)$ обязательно содержится хотя бы один нуль ее производной (это следует из т. Ролля)

Теорема ~~Нау~~ Лагранжа.

Пусть

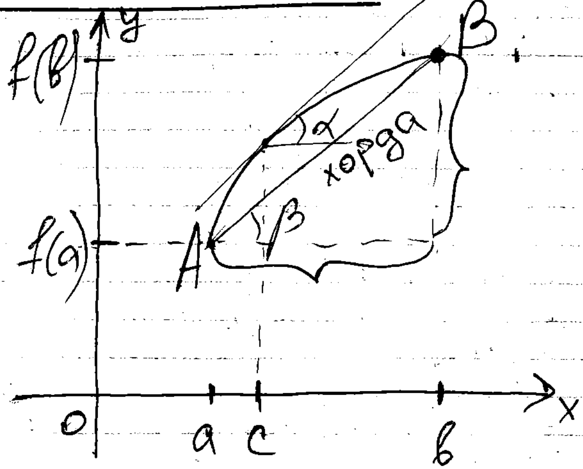
1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

2) $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b)

Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что 271

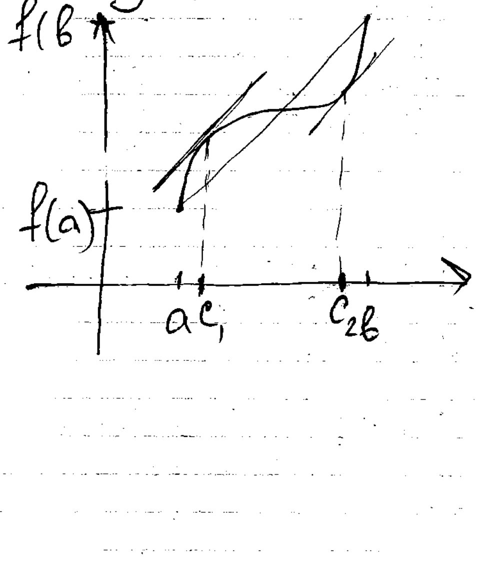
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Геом. смысл



$f'(c)=\operatorname{tg}\beta$

$\alpha=\beta$



Задача

$f(x) = x - x^3, \; x \in [-2, 1]$

Функция $f(x)$ удовл. условию Т. Лагранжа

$f'(x) = 1 - 3x^2$

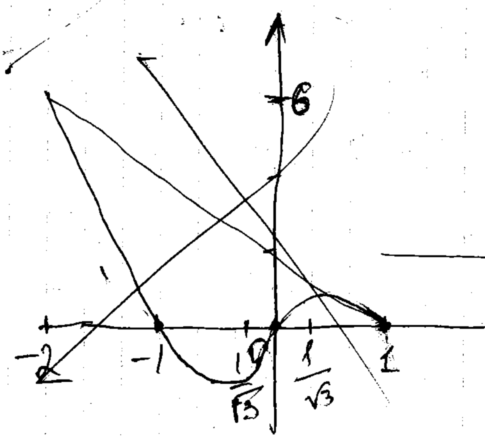
$$\frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{0 - 6}{3} = -2$$

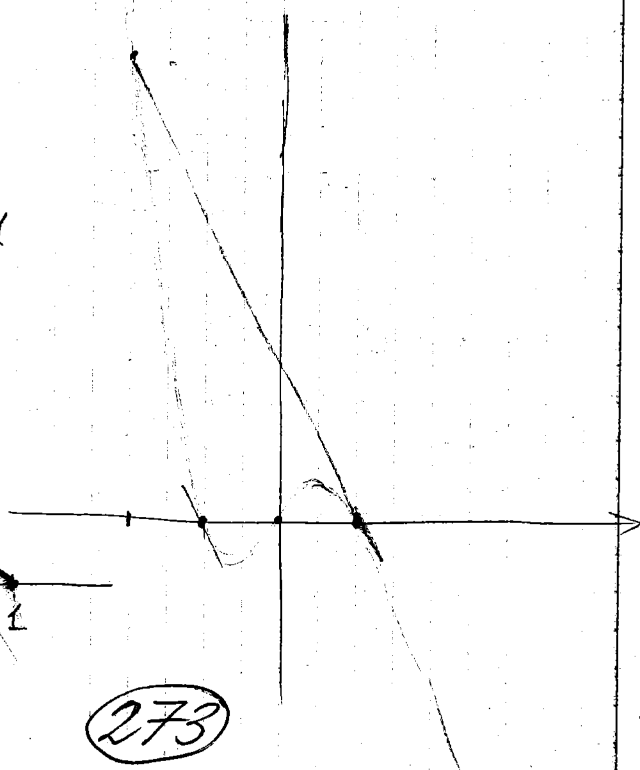
$1 - 3x^2 = -2$

$-3x^2 = -3$

$x = \pm 1$

Итак $c = -1$





Задача $f(x)=\ln x$ $[1,e]$.

$f(e)=1$ $f(1)=0$.

$$f'(c)=\frac{1}{e-1}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$x=e-1$.

Итак $c=e-1$.

Задача

$$f(x)=\begin{cases}3-x^2, & \text{если } x\in[0,1]\\ \frac{2}{x}, & \text{если } x\in(1,2].\end{cases}$$

на отрезке $[0,2]$.

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2}{x}=2$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(3-x^2)=2$$

$f(1)=2$

$$f'(x) = \begin{cases} \cancel{3}-2x, & \text{если } x \in [0,1] \\ -\dfrac{2}{x^2}, & \text{если } x \in (1,2) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -2.$$

$$\lim_{x \to 1-0} f'(x) = \lim_{x \to 1-0} -2x = -2$$

$f(x)$ - диф-а в т $x = 1$, причем $f'(1) = -2$.

$\cancel{f'(c) = -1}$ $\quad f(0) = 3$

$f(2) = 1.$

$$f'(c) = \frac{3-1}{0-2} = -1.$$

$-2x = -1$ $\qquad -\dfrac{2}{x^2} = -1.$

$x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Итак $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = \sqrt{2}$

Задача Доказать, что

$(\forall a, b \in \mathbb{R})$: $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

Если $a = b$, то неравенство верно. Пусть $a < b$.

Рассмотрим функцию

$f(x) = \sin x$

Эта функция уд-ет всем условиям т-ы Лагранжа на отрезке $[a, b] \Rightarrow \exists c \in (a, b)$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$\cos c = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin b - \sin a = \cos c\,(b - a) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sin a - \sin b| = |\cos c| \cdot |a - b| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\sin a - \sin b| \le |a-b|$.

Пусть $a<b$. Доказать, что

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

Решение. Рассмотрим ф-ю $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[a,b]$. Функция $f(x)$ удовл-ет всем условиям т. Лагранжа $\Rightarrow (\exists c \in (a,b)): f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+c^2} = \frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{b-a}{1+c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} \le \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a \le \frac{b-a}{1+a^2}$$

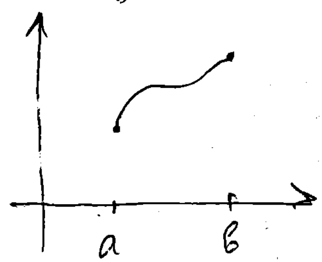
Пример. $a=1 \quad b=\frac{4}{3}$

$$\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} \le \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4} \le \frac{\frac{4}{3}-1}{2}$$ 277

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25} \le \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \le \frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

Следствие из теоремы Лагранжа

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X, дифференцируема во всех внутренних точках промежутка X и во всех внутр. точках промежутка X $f'(x)=0$. Тогда функция $f(x)$ постоянна на промежутке X



Док-во Пусть a и b — произвольные точки промежутка X, a<b. Функция f(x) удовл. всем усл. т. Л. на отрезке [a, b]. Поэтому

$$(\exists c \in (a, b)) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f(a) = f(b).$$

$f'(c) = 0$ по условию

Задача Доказать тождество
$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

Решение Рассмотрим функцию $f(x) = \arccos + \arcsin$ на отрезке $[1, 1]$.

Функция $f(x)$ непрерывна на отр $[-1, 1]$. В любой т. $x \in (-1, 1)$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (см следствие т. Л)

$$f(x) = c \quad x \in [-1, 1]$$

279

$f(0)=\arccos 0+\arcsin 0=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$

Задача Доказать тождество.

$2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi$,

$x\in[1,+\infty)$.

Рассмотрим функцию $f(x)=2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ на луче [redacted] $[1,+\infty)$.

Функция $f(x)$ − непрерывна на луче $[1,+\infty)$

Во внутренних точках луча $[1,+\infty)$ ф-я диф-а.

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2\sqrt{x^4-2x^2+1}}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2-2x^2\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^{\cancel{2}}(x^2-1)}$$

16 (280)

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2\cancel{(x^2-1)}}{(1+x^2)\cancel{(x^2-1)}} = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (согласно сл. т. Л) $f(x) = C$, $x \in [1, +\infty)$

$$f(1) = 2\operatorname{arctg} 1 + \arcsin\frac{2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad (\forall x \in [1; +\infty)):$$

$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{4x^2} = \pi$$

<u>Следствие №2 из т. Л</u>

Пусть функция $f(x)$ - непрерывна в некоторой окрестности т x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности т x_0. Тогда, если сущ-ет конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = A$ то функция диф-на в т x_0 и $f'(x_0) = A$.

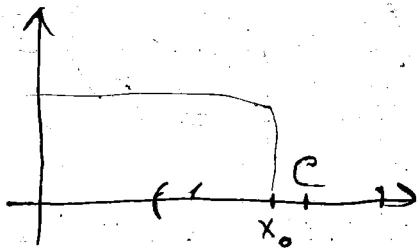
$$f'(x_0) = \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

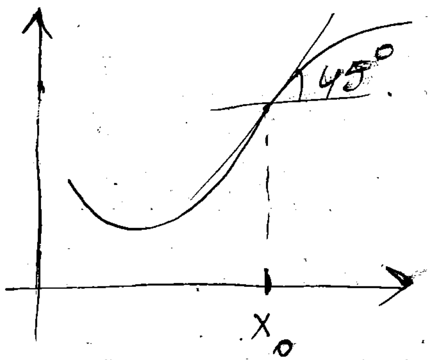
на отрезке $[x_0, x]$

функц $f(x)$ удовл.

всем усл. т. Л

$$= \lim_{x \to x_0} f'(c) = A$$





Теорема Коши. Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$.

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференц. на интервале (a,b).

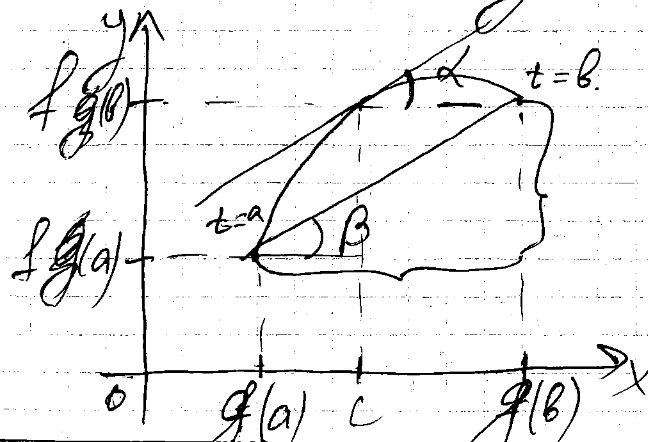
3) $(\forall x \in (a,b)): g'(x) \neq 0$

Тогда

$(\exists c \in (a,b)): \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Геом. смысл.

Рассмотрим точку $P(t) = (g(t), f(t))$ на пл-ти Oxy.



$\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

(283)

Задача

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$

Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ уд-ют всем условиям т. Коши на отрезке $[1, 4]$.

$g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$

$3x^2 - 14x + 20 = 0$

$D = 196 - 240 = -46 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) \neq 0 \ \forall x.$

$$(\exists c \in (1, 4)): \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2x - 2}{3x^2 - 14x + 20}$$

$f(4) = 16 - 8 + 3 = 11$

$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$g(4) = \cancel{64}\ 16 - 7 \cdot 16 + 5 \cdot 16 - 5 = 27$

$g(1)=9.$

$$\frac{2(x-1)}{3x^2-14x+20} = \frac{11-2}{27-9} = \frac{1}{2}$$

$4x-4 = 3x^2-14x+20.$

$3x^2-18x+24=0$

$x^2-6x+8=0.$

$\cancel{x_{1,2}=2,}$ $x=2.$

$c=2.$

Тема 11 Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя)

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой δ окрестности $\mathring{U}_\delta(x_0)$ точки

$$\mathring{U}_\delta(x_0) = (x_0-\delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0+\delta)$$

x_0 причем $(\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)):\ g'(x) \neq 0$

Пусть либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=0$ и

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, либо
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,
и [redacted] пусть существует (конечный или бесконечный) предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда существует предел отношения самих функций причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Замечание</u> Правило Лопиталя справедливо также для односторонних пределов ($x\to x_0+0$, $x\to x_0-0$) и для пределов на бесконечности ($x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$) $\left[\frac{0}{0}\right]\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Задача № 8 из ТР (в-т 9)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(e^{x^2}+\frac{\sin x}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Задача № 8 из ТР (в-т 13)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 2x)'}{(\ln\cos 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot(-\sin 2x)\cdot 2\,\overset{\to 1}{(\cos 3x)}}{\underset{1}{\cos 2x}\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=$$

$$=\begin{bmatrix}\sin 2x\sim 2x\\ \sin 3x\sim 3x\end{bmatrix}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{4}{9}$$

Задача № 8 из ТР (в-т-14)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\pi-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\cancel{\lim}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\sin x}\cdot\cos x+e^{\cos x}\cdot\sin x}{-4}=\frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{-4}=-\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}{2\sqrt{2}}$$

Вариант 8 из (ТР в-т 24).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-\cos x}-1}{2^{\arcsin x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{2-\cos x}}\cdot\sin x}{2^{\arcsin x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\to 1}}{2\underbrace{\sqrt{2-\cos x}}_{\to 1}\underbrace{2^{\arcsin x}}_{\to 1}\ln 2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\ln 2}\lim_{x\to 0}\sin x=0$$

Задача №8 из ТР (в-т 5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)=\cancel{\left[\frac{0}{0}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{(8+x)^4}}-\frac{1}{2\sqrt{(4+x)^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{8+x}}+\frac{1}{\sqrt{4+x}}}=\cancel{\frac{-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}$$

$$\cancel{=-\frac{5}{12}}=\frac{-\frac{1}{3\cdot 2^4}-\frac{1}{2^4}}{1}=-\frac{1}{4\cdot 3}=-\frac{1}{12}$$

24

Задача № 9 из ТР (в-т 9)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2\,tg\,x}{1+\cos 4x} = \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\cos 4x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos}\,1 - 2\sin x\cos x}{(1+\cos 4x)\cdot\cos^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin 2x}{\frac{1+\cos 4x}{2}} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{\cancel{4}}{\cancel{2}}2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\cos 2x}{-4\sin 4x} = \cancel{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}}\ \cancel{\frac{\cos 2x}{\sin 4x}}$$

$$= \frac{2}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\cos 2x}}{2\sin 2x\cancel{\cos 2x}} = \frac{1}{2}\lim \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

Задача

$$\lim_{x\to 3+0} \frac{\cos x\cdot \ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)} = \cos 3\lim_{x\to 3+0} \frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \cos 3\lim_{x\to 3+0} \frac{1(e^x-e^3)}{(x-3)\cdot e^x} = \cancel{\cos 3}\left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \cos 3\lim_{x\to 3+0} \frac{e^x}{e^x+e^x(x-3)} = \cos 3\lim_{x\to 3+0} \frac{1}{1+x-3} =$$

$$= \cos 3$$

Задача

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\ln\arccos x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\arccos x}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x\sqrt{1-x^2}}{(1-x)}=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 1-0}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 1-0}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}=\sqrt{2}\lim_{x\to 1-0}\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\sqrt{2}\lim_{x\to 1-0}\frac{2}{\sqrt{1+x}}=2$$

Раскрытие неопределенностей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Задача №9 из ТР (В-т 24)

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Задача

$$\lim_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\cancel{(-2)x^{-3}}}{\cancel{-2\cdot x^{-3}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty$$

Задача

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^2\cdot\sin^2x}=\cancel{\left[\frac{0}{0}\right]}=[\sin x\sim x]$$

$$\cancel{=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos x-2x}{x^4\sin^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2}{x^4}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=$$

291

27

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{4x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{12x^2} = \cancel{2t}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos 2x - 1)}{12x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{4}\sin^2 x}{3\,\cancel{12}x^2} =$$

$$= \left[\sin x \sim x\right] = -\lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

Задача № 9 из ТР [redacted] (В-т 5

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x\cdot\sin x - \pi}{2\cos x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{2}\sin x + \cancel{2}x\cdot\cos x}{-\cancel{2}\sin x} = -1.$$

Задача

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)=$$

$$=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

Раскрытие неопределенности вида [redacted] 1^∞

Задача №9 из ТР (в-т 14)

$$\lim_{x\to1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\Big(1+\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}-1}_{g(x)}\Big)^{\underbrace{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}_{h(x)}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} g(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to 1}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$$

$$= [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}-1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}-1}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\right)} = \cancel{\lim_{x\to 1}}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2} = -1$$

Раскрытие неопределенностей вида $[0^0]$ и $[\infty^0]$

Задача 9 из ТР (В-т 22)

$$\lim_{x\to+\infty}\left((\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}\right) = [\infty^0]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\ln(\ln 2x)}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x}} =$$

$$= e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln 2x)}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2x}\cdot\frac{1}{\cancel{2x}}\cdot\cancel{2}}{\cancel{\frac{1}{x}}} = \lim \frac{1}{\ln 2x} = 0$$

Задача 9 [redacted] из ТР (в-т 13)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\pi-2x)^{\cos x} = \left[0^0\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \left(e^{\ln(\pi-2x)}\right)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} e^{\cos x\ln(\pi-2x)} =$$

$$= e^0 = 1$$

1) $\lim \cos x \ln(\pi-2x) = [0\cdot\infty] =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln(\pi-2x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\cancel{1}\frac{1}{\pi-2x}\cdot(-2)}{-\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{-2\cos^2 x}{\sin x(\pi-2x)} =$$

$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos^2 x}{(\pi-2x)} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{-2\cos x\cdot \overset{1}{\sin x} \to 1}{-2} =$$

$$= 0$$

Задача

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^2+3^x)^{\frac{1}{x}} = [\infty^0] = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\ln(5x^2+3^x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(5x^2+3^x)}{x}}$$

$$= e^{\ln 3} = 3.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(5x^2+3^x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{10x+3^x\cdot\ln 3}{(5x^2+3^x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{10+\ln^2 3\cdot 3^x}{10x+3^x\ln 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 3\cdot 3^x}{10+\ln^2 3\cdot 3^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{4} 3\cdot \cancel{3^x}}{\cancel{3^x}\cdot\cancel{\ln^3 3}} = \ln 3$$

Задача (экз. билет) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\sin(x-1)} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)}{\cos(x-1)} = 1$$

296

Задача (составил я)

32 $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \ldots = -$

Тема 12 Формула Тейлора

Теорема Пусть ф-я $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда имеет место формула

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0 \quad (1)$$

Краткая запись $(1')$

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{многочлен Тейлора}}+\underbrace{o\left((x-x_0)^n\right)}_{x\to x_0}$$

остаточный член формулы Тейлора (в форме Пеано)

(1) и $(1')$ — формула Тейлора n-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с остаточным членом в форме Пеано (297)

Если $x_0 = 0$, то формула (1) и (1') принимают вид:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (2)$$

$x \to 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n) \quad x \to 0 \quad (2')$$

(2) и (2') — <u>формула Маклорена</u> n-го порядка для $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано

<u>Стандартные разложения функций по ф-ле Маклорена</u>

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

3) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots[\alpha-(n-1)]}{n!} x^n + o(x^n)$

6) $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

7) $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

8) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$

9) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + o(x^8)$

10) $\operatorname{arctg} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)$.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

Частные случаи формулы 5 ($\alpha = -1$)

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$$

Замечание.

Разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ с помощью замены переменной $x = x_0 + t$ можно свести к разложению функции $g(t) = f(x_0 + t)$ по формуле Маклорена

Задача №10 из ТР (в-т 13)

Разложить функцию

$$f(x)=\frac{x^2-4}{2x+1}$$

по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0=2$ до [redacted] $o((x-x_0)^4)$.

Решение:

Способ 1

(Непосредственное нахождение производных)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-4}{2x+1}\right)'=\frac{2x\cdot(2x+1)-2(x^2-4)}{(2x+1)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+2x-2x^2+8}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x+2)(2x+1)^{\cancel{2}}-2\cancel{(2x+1)}\cdot 2(2x^2+2x+8)}{(2x+1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{(4x+2)(2x+1)-4(2x^2+2x+8)}{(2x+1)^3}=$$

$$=\frac{8x^2+8x+2-8x^2-8x-32}{(2x+1)^3}=-\frac{30}{(2x+1)^3}=$$

$$=-30(2x+1)^{-3}$$

$$f'''(x) = -30\cdot(-3)(2x+1)^{-4}\cdot 2 = 180(2x+1)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 180\cdot(-4)(2x+1)^{-5}\cdot(2) =$$
$$= -1440(2x+1)^{-5} = -\frac{1440}{(2x+1)^5}$$

$$f(2) = \frac{x^2-4}{2x+1}\Big|_{x=2} = \frac{4-4}{4+1} = 0$$

$$f'(2) = \frac{2x^2+2x+8}{(2x+1)^2}\Big|_{x=2} = \frac{8+4+8}{25} = \frac{4}{5}$$

$$f''(2) = -\frac{30}{125} = -\frac{6}{25}$$

$$f'''(2) = \frac{180}{625} = \frac{36}{125}$$

$$f^{(4)}(2) = -\frac{1440}{5\cdot 625} = -\frac{288}{625}$$

Формула Тейлора 4-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки

$x_0 = 2$ с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-4)^4 + o((x-2)^4) =$$

$$= \frac{4}{5}(x-2) - \frac{3}{25}(x-2)^2 + \frac{6}{125}(x-2)^3 -$$

$$- \frac{12}{625}(x-2)^4 + o((x-2)^4),\ x \to 2$$

Способ 2 (с помощью стандартных разложений)

Замена переменной

$x = x_0 + t = \cancel{2+} t$

Тогда $t = x - 2$ Имеем:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x+1} = \frac{(2+t)^2 - 4}{2(2+t)+1} = \frac{4t+t^2}{5+2t} =$$

$$= (4t+t^2) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{5}t} = \cancel{(4t+t^2)\frac{1}{5}\frac{1}{1}}$$

$$= (4t+t^2) \cdot \frac{1}{5}\underbrace{\left(1+\frac{2}{5}t\right)^{-1}}_{1} =$$

$$= (4t+t^2) \cdot \frac{1}{5}\left[1 + (-1)\left(\frac{2t}{5}\right) + \frac{(-1)\cdot(-2)}{2!}\left(\frac{2}{5}t\right)^2 + \right.$$

$$+\frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}\left(\frac{2}{5}t\right)^3+o\left(\left(\frac{2}{5}t\right)^3\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{5}(4t+t^2)\left[1-\frac{2}{5}t+\frac{4}{25}t^2-\frac{8}{125}t^3+\right.$$

$$\left.+o(t^3)\right]=\frac{1}{5}\left(4t-\frac{8}{5}t^2+\frac{16}{25}t^3-\frac{32}{125}t^4+\right.$$

$$\frac{1}{5}\quad+4t\,o(t^3)+t^2-\frac{2}{5}t^3+\frac{4}{25}t^4-\frac{8}{125}t^5+$$

$$+t^2\,o(t^3)=$$

$o(t^4)$, $o(t^4)$, $o(t^5)$

$$=\frac{1}{5}\left(4t-\frac{3}{5}t^2+\frac{6}{25}t^3-\frac{12}{125}t^4+o(t^4)\right)=$$

$$=\frac{4}{5}(x-2)-\frac{3}{25}(x-2)^2+\frac{6}{125}(x-2)^3-\frac{12}{625}(x-2)$$

$$+o\left((x-2)^4\right)$$

Задача №10 из ТР (в-т 16)

$f(x)=\cos^2(2x+6)\quad x_0=-4$, до $o((x-x_0)^5)$

Решение Способ 1

$$f'(x)=2\cos(2x+6)(-\sin(2x+6))\cdot 2=$$

$$=-2\sin(4x+12)$$

(304)

$f''(x)=-2\cos(4x+12)\cdot 4=-8\cos(4x+12)$

$f'''(x)=+8\sin(4x+12)\cdot 4=+32\sin(4x+12)$

$f^{(4)}(x)=32\cdot 4\cos(4x+12)=128\cos(4x+12)$

$f^{(5)}(x)=-128\cdot 4\sin(4x+12)=-512\sin(4x+12)$

$f(-4)=\cos^2(-8+6)=\cos^2(-2)=\cos^2 2$

$f'(-4)=-2\sin(-16+12)=-2\sin(-4)=$
$=2\sin 4$

$f''(-4)=-8\cos(-4)=-8\cos 4$

$f'''(-4)=-32\sin 4$

$f^{(4)}=128\cos 4$

$f^{(5)}=512\sin 4$

Формула Тейлора 5-го порядка для функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0=-4$ с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = f(-4) + f'(-4)(x - x_0) + \frac{f''(-4)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(-4)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(-4)}{4!}(x-x_0) +$$

$$+ \frac{f^{5}(-4)}{5!} + o\left((x-x_0)^5\right) =$$

$$= \cos^2 2 + 2\sin 4\,(x+4) - 4\cos 4\,(x+4)^2 -$$

$$- \frac{16\sin 4}{3}(x+4)^3 + \frac{16\cos 4}{3}(x+4)^4 +$$

$$+ \frac{64\sin 4}{15}(x+4)^5 + o\left((x+4)^5\right),\ x \to -4$$

2 Способ

Замена переменной

$x = x_0 + t = -4 + t$

Тогда $t = x + 4$. Имеем

$$f(x) = \cos^2(2x+6) = \cos^2(2(-4+t)+6) =$$

$$= \cos^2(2t-2) = \frac{1+\cos(4t-4)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t-4) = \leftarrow$$

Нам надо получить разло-
жение по степеням t, то
есть (306) разложение вида

$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\cos 4t}_{2)} \cdot \cos 4 + \underbrace{\sin 4t}_{3)} \cdot \sin 4\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4 \left(1 - \frac{(4t)^2}{2!} + \frac{(4t)^4}{4!} + o((4t)^5)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin 4 \left(4t - \frac{4t^3}{3!} + \frac{(4t)^5}{6!} + o((4t)^6)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4 + (2\sin 4)t - (4\cos 4)t^2 -$$

$$- \left(\frac{16}{3}\sin 4\right)t^3 + \left(\frac{16}{3}\cos 4\right)t^4 + \left(\frac{64}{5}\sin 4\right)t^5$$

$$+ o(t^5) = \cos^2 2 + 2\sin 4(x+4) - 4\cos 4(x+4)^2 -$$

$$- \frac{16\sin 4}{3}(x+4)^3 + \frac{16\cos 4}{3}(x+4)^4 + \frac{64\sin 4}{15}(x+4)^5$$

$$+ o((x+4)^5),\ x \to -4$$

Задача №10 из ТР (вар-т 5)

$f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$, $x_0 = 1$ до $o((x-x_0)^4)$

Решение. Способ 2.

Замена переменной $x = x_0 + t = 1 + t$. Тогда $t = x - 1$. Имеем

$$f(x)=\sqrt[3]{3(1+t)+5}=\sqrt[3]{8+3t}=$$

$$=2\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}t}=2\left(1+\frac{3}{8}t\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}t+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{3}{8}t\right)^2+\right.$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{3}{8}t\right)^3+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{4!}\left(\frac{3}{8}t\right)^4$$

$$\left.+o\left(\left(\frac{3}{8}t^4\right)\right)\right]=2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{32}t^2+\frac{5}{768}t^3-$$

$$-\frac{5}{3072}t^4+o(t^4)=2+\frac{1}{4}(x-1)-\frac{1}{32}(x-1)^2$$

$$+\frac{5}{768}(x-1)^3-\frac{5}{3072}(x-1)^4+o((x-1)^4)$$

Семинар 18 (01.12.16)

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда имеет место формула