Ряды Тейлора, Маклорена.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Использование рядов Тейлора для нахождения пределов.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-x+O(x^7)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+O(x^4)\right)=-\frac{1}{6}.$$

—————//—————

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2!}+\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots\right]}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+O(x^6)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+O(x^2)\right)=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{12}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+\frac{x^2}{2}\right)}{x(\sin x-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4!}+O(x^6)}{x\left(-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right)}=$$

$$\sin x-x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots-x=$$

$$=-\frac{x^3}{3!}+O(x^5).$$

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^2}{2}+O(x^6)\right)=$$

$$= \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{x^4}{4!} + O(x^6)}\Big) =$$

$$= \frac{x^4}{4} + O(x^6) - \left[\frac{x^4}{4} + O(x^6)\right]^2 \cdot \frac{1}{2} + \dots =$$

$$= \frac{x^4}{4!} + O(x^6).$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{1}{24} + O(x^2)\right)}{x^4\left(-\frac{1}{6} + O(x^2)\right)} = \frac{1/24}{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{4}.$$

——— // ———

Использование ряда Тейлора для вч. интеграла.

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x}\,dx =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) dx =$$

$$= x\Big|_0^{1/2} - \frac{x^3}{3\cdot 3!}\Big|_0^{1/2} + \frac{x^5}{5\cdot 5!}\Big|_0^{1/2} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 3!\, 2^3} + \frac{1}{5\cdot 5!\, 2^5} - \frac{1}{7\cdot 7!\, 2^7} + \dots =$$

$$= 0{,}5 - \frac{1}{24\cdot 8} + \frac{1}{\underbrace{600\cdot 32}} - \dots$$

$\varepsilon = 0{,}001$. ?

$\approx 0{,}5 - \frac{1}{24\cdot 8}$ — интеграл посчитан до 0,001.

Ряд Лейбница: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$

$|a_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

0,000 001.

$$\int^{0{,}1} \frac{e^x - 1}{x}\,dx = \qquad \text{до } 0{,}001$$

0

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}-1}{x}=$$

$$=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$$

$$=\int_0^{0,1}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots\right)dx=$$

$$=x\Big|_0^{0,1}+\frac{x^2}{2\cdot 2!}\Big|_0^{0,1}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot n!}\Big|_0^{0,1}+\ldots=$$

$$=0,1+\frac{(0,1)^2}{2\cdot 2!}+\ldots+\frac{(0,1)^n}{n\cdot n!}+r_n(x),\quad r_n(x)=\frac{\xi^{n+1}}{n\cdot(n+1)!}$$

$$\xi\in[0,0,1].$$

Ост. член ряда Тейлора....

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+r_n(x).$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(N+1)}}{(N+1)!}(\xi).\quad \xi\in[0,x].$$

$$|r_n(x)|<\frac{(0,1)^{n+1}}{n\cdot(n+1)!}.$$

$$\frac{(0,1)^{n+1}}{n\cdot(n+1)!}<0,001.$$

$$n=1\quad\frac{0,1}{1\cdot 2},\qquad n=2\quad\frac{(0,1)^2}{2\cdot 3!}\qquad n=3\quad\frac{(0,1)^3}{3\cdot 4!}$$

Достаточно 3х членов.

$$\int=0,1+\frac{(0,1)^2}{2\cdot 2}+\frac{(0,1)^3}{3\cdot 6}=0,1+\frac{0,01}{4}+\frac{0,001}{18}.$$

—— // ——

$$\int_0^{0,5}x\cdot\ln(1+x^2)\,dx=$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots$$

$$=\int_0^{0,5}x\cdot\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\frac{x^8}{4}+\ldots\right)dx=$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{2\cdot 5} + \frac{x^8}{3\cdot 8} - \frac{x^{10}}{4\cdot 10} + \ldots \right) \Big|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2^4\cdot 4} - \frac{1}{2^6\cdot 2\cdot 5} + \frac{1}{2^8\cdot 3\cdot 8} - \ldots$$

$$= \frac{1}{64} - \frac{1}{640} = \frac{9}{640}$$ до 0,001.

Числовые ряды:

Необх. пр-к сходимости.

$a_n \geq 0$

Знакочер. ряды $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$

Условие и абс. сх-ть.

Функц. ряды, равном. сх-ть.

Степенные ряды.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \ldots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}$$

$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \ldots 2n$

$$a_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n} = 2^n \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}$$

$a_n \to 0$ при $n \to \infty$

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 \cdots 2n\cdot 2(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n\cdot(n+1)} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2^{n+1}}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = 1$$ ряд расходится.

Объяснить зач, оценки.

$e = ?$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Вычислить до 0,001 ?

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

$$r_n < 0{,}001.$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in [0, x].$$

$$|r_n(x)| < 0{,}001.$$

$$r_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

$$r_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot 1 \qquad |r_n| < 0{,}001. \quad \xi \in [0, 1].$$

$e < 3.$

$$\frac{3^1}{(n+1)!} < 0{,}001.$$

$$(n+1)! > \frac{3}{0{,}001}$$

—//—

Вопросы....

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{5}{4n}\right)}{\sqrt[5]{(2n)^5 - 1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{5}{4(n+1)}\right)}{\sqrt[5]{(2n+2)^5 - 1}} \cdot \frac{\sqrt[5]{(2n)^5 - 1}}{\cos\left(\frac{5}{4n}\right)} = 1$$

Даламб. не работает.

Сравним с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{5}{4n}\right)}{\sqrt[5]{(2n)^5 - 1}} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n \sqrt[5]{1 - \frac{1}{(2n)^5}}} = \frac{1}{2}.$$

—//—

$$\sum^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2}\right)^{\frac{n^2}{2}}$$

$$\sum_{n=1} \left(\frac{\quad}{\sqrt{n^2+3}} \right)^{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2}+2}{\sqrt{n^2}+3} \right)^{\frac{n^3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{\sqrt{n^2+3}} \right)^{\frac{n^3}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{\sqrt{n^2+3}} \right)^{(\sqrt{n^2+3})\cdot\frac{n^3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}} = \infty.$$

— // —

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \quad \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{-n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 3^{-n} e^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{3} \right)^{n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{-n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n} = \frac{e}{3} < 1.$$

ряд сходится...

— // —

Функц. ряд...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}} \qquad [-3, 0].$$

$$|x+1| \sin^2 nx \sim |x+1| \leq 2.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n+1}} \quad \text{сравним с} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot n^{3/2}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{3/2}}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2 \neq 0$$

— // —

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n (x-1)} \qquad [4; 5].$$

$$\ln(4-1) < \ln(x-1) < \ln(5-1)$$

$\ln 3 < \ln(x-1) < \ln 4$

$\ln^n 3 < \ln(x-1) < \ln^n 4$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n 3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{\ln^{n+1} 3} \cdot \frac{\ln^n 3}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3} < 1 \quad \text{сход.}$$

—//—

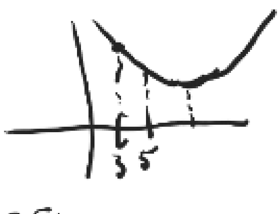
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{n}\right)^n \qquad [3;5].$$

$\frac{1}{x} + \frac{x}{n}$ максимум.

$-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{n} = 0;$ $x^2 = n.$ $x = \sqrt{n}.$

макс. знач. $= \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ макс $x=3.$

$n > 25.$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{n}\right)^n$$

$n > 25.$

По признаку Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{сход.}$$

$n < 25.$

$$\max \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{3}{n} \\ \frac{1}{5} + \frac{5}{n} \end{Bmatrix} \qquad n < 25.$$

$10.$

$\sum a_n.$ $a_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{n}\right)^n,$ $n > 25.$

$a_n = 10,$ $n < 25.$

— // —

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{n}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\cdot (x-1)^n.$$

Даламбер.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot |x-1|^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt{n}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\cdot |x-1|^n} =$$

$$= |x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot|x-1| < 1.$$

$$|x-1|<2.$$

$$-2<x-1<2$$

$$-1<x<3$$

$x_1=-1.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt{n}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\cdot(-2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}. \qquad \sum\frac{1}{n^{3/2}}.$$

сходится.

$x_2=3.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sqrt{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}\cdot\sqrt{n}.$$

сход. абс

Ответ $[-1, 3]$ - абс. сход.

— // —

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}\, n\ln n}(x-1)^n$$

Даламбер

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n/2}\cdot n\cdot\ln n}{3^{\frac{n+1}{2}}(n+1)\ln(n+1)}\cdot|x-1| =$$

$$= |x-1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\sqrt{3}(n+1)\ln(n+1)} = \frac{|x-1|}{\sqrt{3}} < 1.$$

$$|x-1| < \sqrt{3}$$
$$1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3}$$

$x = 1+\sqrt{3}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n/2} \cdot n \ln n} \cdot 3^{n/2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\frac{1}{n \ln n} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

расход.

$x = 1-\sqrt{3}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{\frac{n}{2}} \cdot n \ln n} \cdot (-\sqrt{3})^n = \sum_{n=1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \ln n}$$

усл. сх.

— // —

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x-2$$

$$t = x-2 \qquad x = 2+t$$

$$f(t) = \frac{1}{2+t} = \quad \text{по ст. } t$$

$$= \frac{1}{2(1+\frac{t}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^3 + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \dots$$

— // —