ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики, механики и компьютерных наук

Кафедра теории функций и функционального анализа

В.Е.КОВАЛЬЧУК, П.А.ЧАЛОВ

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Интегральное исчисление
Определенный интеграл

Ростов-на-Дону

Оглавление

1 Определенный интеграл

Классическое определение интеграла, данное в XIX веке Коши и Риманом, обеспечило решение многих задач математики, механики, физики. Задачи вычисления площадей плоских фигур, объемов пространственных тел, длины дуги, определение работы, произведенной переменной силой, определения масс тел по удельной плотности, нахождение центров тяжести, пути по скорости, скорости по ускорению и многие другие задачи приводят к понятию определенного интеграла.

1.1 Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Рассмотрим несколько геометрических и физических задач, которые, как мы убедимся, решаются совершенно одинаково, несмотря на их внешнюю несхожесть.

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Определение 1.1 *Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.*

Для вычисления площади криволинейной трапеции естественно поступить следующим образом. Разобьем данную криволинейную трапецию на меньшие криволинейные трапеции. Для этого ее основание (сег-

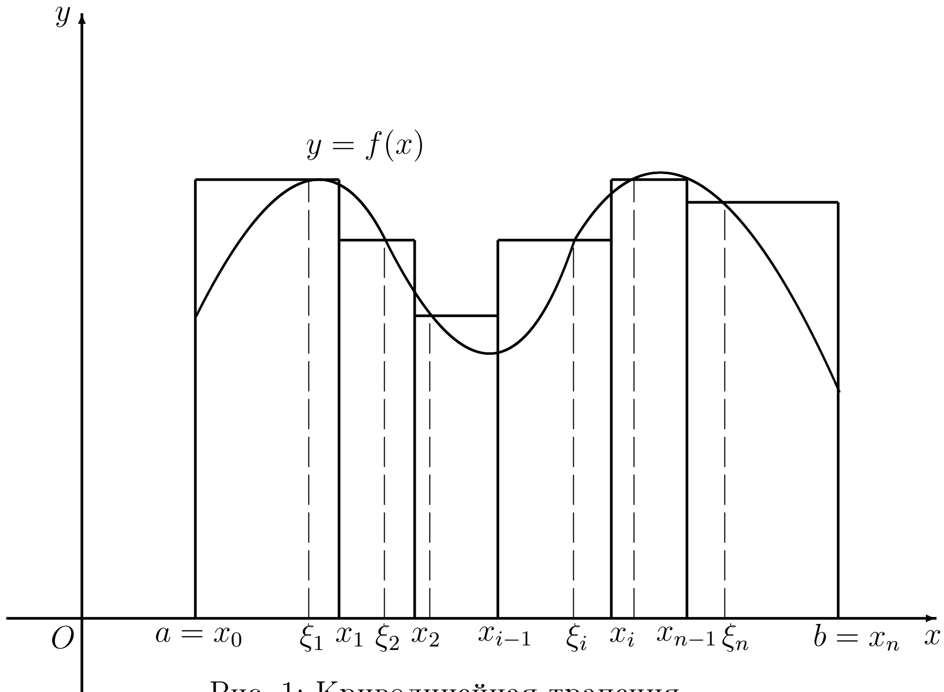

Рис. 1: Криволинейная трапеция.

мент $[a, b]$) разобьем на n (необязательно равных) частей (рис. 1) точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, возьмем произвольную точку ξ_i и будем считать, что площадь трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ «приближенно» равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(\xi_i)$. Тогда площадь S всей трапеции «приближенно» равна сумме площадей построенных прямоугольников, то есть

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad \text{где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Естественно ожидать, что чем «мельче» будут сегменты $[x_{i-1}, x_i]$ на которые мы разбиваем сегмент $[a, b]$, тем меньше сумма площадей прямоугольников будет отличаться от «площади» трапеции. Таким образом мы приходим к равенству

$$S = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad \text{где } \Delta = \max\left\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

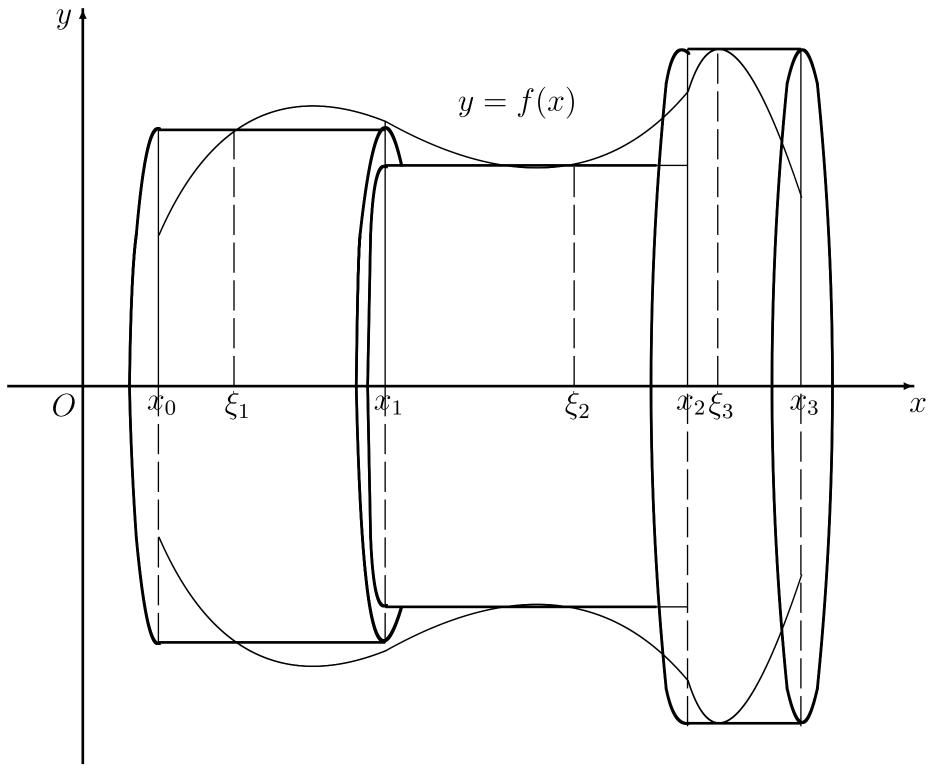

Рис. 2: Тело вращения ($n = 3$).

Задача о вычислении объема тела вращения

Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции. Разобьем сегмент $[a, b]$ на n, на каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, выберем по точке ξ_i и рассмотрим цилиндры с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$ (рис. 2). Будем считать, что «объем» тела вращения «приближенно» равен сумме объемов полученных цилиндров:

$$V \approx \pi \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) \Big)^2 \Delta x_i.$$

Тогда, как и в предыдущей задаче, приходим к следующей формуле:

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(\xi_i) \Big)^2 \Delta x_i \quad \text{где } \Delta = \max \{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Задача о вычислении массы неоднородного стержня

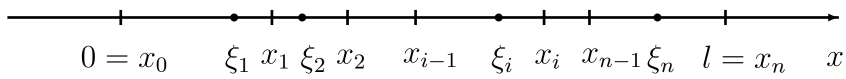

Рис. 3: Неоднородный стержень.

Рассмотрим неоднородный стержень длины l, расположенный на сегмент $[0, l]$ оси Ox (рис. 3). Пусть линейная плотность стержня в точке $x \in [0, l]$ равна $\rho(x)$. Разобьем стержень на кусочки точками

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = l.$$

и будем считать, что на каждом из этих кусочков плотность стержня постоянна и равна $\rho(\xi_i)$, где ξ_i — какая-либо точка сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Как известно, при постоянной плотности ρ масса M стержня вычисляется по формуле: $M = \rho \cdot l$. Тогда масса i-того кусочка «приближенно» равна $\rho(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Поэтому масса M всего стержня «приближенно» находится по формуле $M \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\, \Delta x_i$, а точное значение по следующей формуле:

$$M = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\, \Delta x_i, \qquad \text{где } \Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Задача о вычислении работы переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox из точки $x = 0$ в точку $x = S$ под действием переменной силы $\mathcal{F}$, направленной вдоль оси Ox. Как известно, работа A по перемещению материальной точки под действием постоянной силы $\mathcal{F}$ на расстояние S вычисляется по формуле $A = \mathcal{F} \cdot S$.

Для решения поставленной задачи, разобьем сегмент $[0, S]$ на сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, точками (рис. 4)

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = S$$

и на каждом из них выберем какую-нибудь точку ξ_i. Будем предполагать, что от точки x_{i-1} до точки x_i материальная точка M перемещается

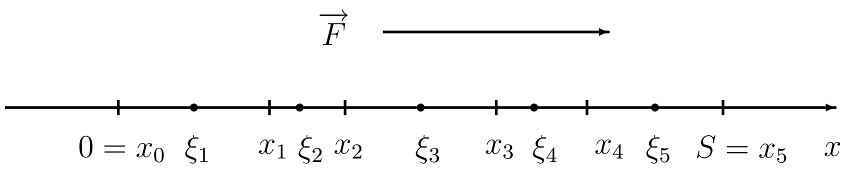

Рис. 4: Работа переменной силы.

под действием постоянной силы $\mathcal{F}(\xi_i)$. Тогда $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, а при неограниченном «измельчении» сегмента $[0, S]$ получим

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \qquad \text{где } \Delta = \max\left\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Отвлекаясь от конкретного содержания рассмотренных задач, видим, что все они решаются одним и тем же методом, а именно, сегмент, на котором определена функция, разбивается на несколько меньших сегментов, на каждом из них выбирается по одной точке, после чего составляется сумма произведений значении функции в выбранных точках и длин соответствующих сегментов разбиения и, наконец, совершается предельный переход.

Можно привести еще массу задач из самых разных областей естествознания и техники, решаемых этим же методом. Изучение и обоснование изложенного метода и приводит нас к понятию определенного интеграла.

1.2 Интегральные суммы. Интегрируемость

Символом T будем обозначать *разбиение сегмента* $[a, b]$ $(a < b)$ при помощи некоторых несовпадающих друг с другом точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

на n сегментов $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$.

Точки x_0,x_1,. . .,x_n называют *точками* или *узлами разбиения* T, а сегменты $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... , $[x_{n-1}, x_n]$ — *частичными сегментами*.

Числа $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ принято называть *длинной частичного сегмента* и *параметром разбиения*, соответственно.

Пусть T_1 и T_2 — два разбиения сегмента $[a, b]$. Разбиение T_2 называют *продолжением разбиения* T_1, если каждый узел разбиения T_1 является узлом разбиения T_2.

Пример 1.1 *Пусть x_i и x_i' — узлы разбиений T и T' сегмента $[a, b]$. Является ли одно из разбиений продолжением другого, если*

$$\begin{aligned} a)\quad & x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \\ & x_i' = a + \frac{b-a}{2n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n; \\ b)\quad & x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \\ & x_i' = a + \frac{2(b-a)}{n+i} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n > 1. \end{aligned}$$

Решение. a) Разбиение T не являются продолжениями разбиения T' поскольку количество узлов разбиения T' больше, чем имеет узлов разбиение T. А разбиение T' является продолжением разбиения T, так как $x_i = x_{2i}'$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

b) Нетрудно видеть, что разбиения T и T' имеют по n узлов и среди узлов каждого из них есть узлы не принадлежащие другому разбиению, например, x_1 не является узлом разбиения T', а x_1' — узлом разбиения T. Поэтому разбиения T и T' не являются продолжениями друг друга. ■

Пусть $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, T — разбиение сегмента $[a, b]$ с узлами x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, а ξ_i — произвольная точка частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, а ξ_i.

Определение 1.2 *Число*

$$I\{x_i, \xi_i\} = I(x_0, x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$$

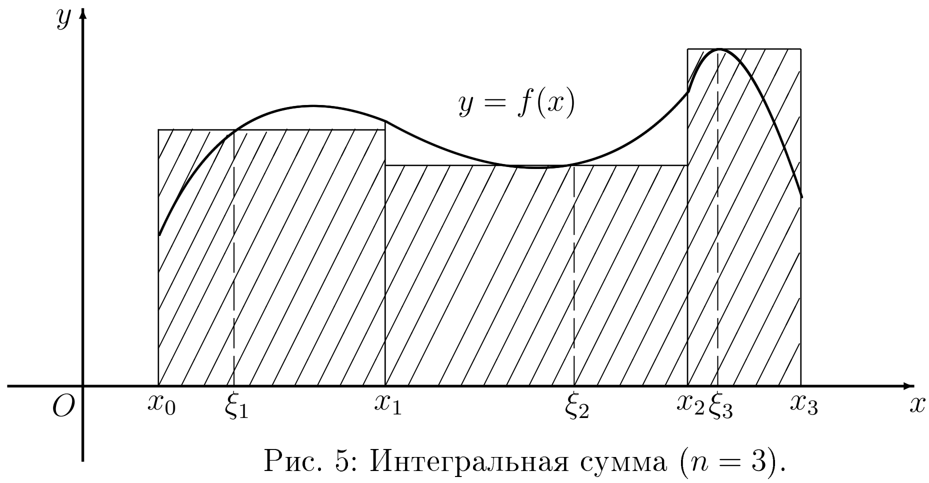

Рис. 5: Интегральная сумма ($n = 3$).

называется интегральной суммой функции f, соответствующей данному разбиению T сегмента $[a, b]$ и данному выбору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.

Интегральная сумма имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим криволинейную трапецию. Интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$, отвечающая выбранному разбиению T и данному выбору точек ξ_i, представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры (рис. 5).

Пример 1.2 *Составить и вычислить интегральные суммы функции $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданной равенством $f(x) = C$, где $C \in \mathbb{R}$, соответствующие произвольному разбиению T сегмента $[a, b]$ и произвольному набору промежуточных точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$.*

Решение.

$$I\{x_i, \xi_i\} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C \Delta x_i = C \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b - a).$$

■

Определение 1.3 *Число I называется пределом интегральных сумм $I\{x_i, \xi_i\}$ при $\Delta \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ и при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство*

$$|I\{x_i, \xi_i\} - I| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

При этом пишут

$$I = \lim_{\Delta \to 0} I\{x_i, \xi_i\}. \tag{1.2}$$

Определение 1.4 *Функция f называется интегрируемой (по Риману) на сегменте $[a, b]$ (будем писать $f \in R[a, b]$), если существует (конечный) предел I интегральных сумм $I\{x_i, \xi_i\}$ этой функции при $\Delta \to 0$. Число I называется определенным интегралом от функции f по сегменту $[a, b]$ и обозначается следующим образом:*

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{1.3}$$

Первым, удовлетворяющим современным требованиям строгости, определением интеграла принято считать определение, данное Коши. Предполагая что функция f непрерывна на сегменте $[a, b]$, Коши рассматривал интегральную сумму вида

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i.$$

Определение интегральных сумм у Римана такое же, как у Коши, с тем отличием, что значение функции на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ выбирается произвольно (для непрерывных функций это несущественно). Однако, в отличие от Коши, и в этом — принципиальный шаг вперед, Риман рассматривает всю совокупность функций, к которым применим процесс интегрирования, и выясняет необходимые и достаточные условия, при которых функция оказывается интегрируемой.

Пример 1.2 показывает, что функция $f(x) = C$ интегрируема на каждом сегменте $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b C dx = C(b - a).$$

Пример 1.3 *Показать, что функция $f(x) = x$ интегрируема на любом сегменте $[a, b]$ и справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}. \tag{1.4}$$

Решение. Для произвольного разбиения T и любого выбора точек ξ_i интегральная сумма данной функции имеет вид:

$$I\left\{x_i, \xi_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Delta x_i.$$

Поскольку функция f возрастает, справедлива оценка

$$I_1 \leq I\left\{x_i, \xi_i\right\} \leq I_2, \tag{1.5}$$

где

$$I_1 = I\left\{x_i, x_{i-1}\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i, \quad I_2 = I\left\{x_i, x_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$. Тогда при любом разбиении T с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
I_1 =& \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\left(x_i - x_{i-1}\right) = \\
=& -x_0^2 + x_0 x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 + x_2 x_3 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_n = \\
=& -\frac{1}{2} x_0^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 - \ldots - \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})^2 + \frac{1}{2} x_n^2 = \\
=& \frac{1}{2}\left(x_n^2 - x_0^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \Delta x_i \geq \\
\geq& \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}\left(b - a\right) \Delta > \\
>& \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \frac{1}{2}\left(b - a\right) \delta = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогично выводим оценку $I_2 < \dfrac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right) + \varepsilon$. Из этих оценок и неравенства (1.5) получаем

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - \varepsilon < I\left\{x_i, \xi_i\right\} < \frac{b^2 - a^2}{2} + \varepsilon,$$

или

$$\left| I\left\{x_i, \xi_i\right\} - \frac{b^2 - a^2}{2} \right| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Таким образом, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T, параметр которого удовлетворяет условию $\Delta < \delta$, при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство (1.1). В соответствии с определениями 1.3 и 1.4 функция $f(x) = x$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

■

Теорема 1.1 *Если функция f интегрируема на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на нем.*

Доказательство. Предположим противное, то есть что функция f неограничена на сегменте $[a, b]$. Тогда для каждого разбиения T она будет неограниченной хотя бы на одном из частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$. Поэтому, за счет выбора точки ξ_k на этом сегменте, слагаемое $f(\xi_k)\Delta x_k$, а следовательно, и всю сумму $I\{x_i, \xi_i\}$ можно сделать сколь угодно большими. В таком случае, очевидно, не может быть и речи о конечном пределе интегральных сумм. Таким образом, $f \notin R[a, b]$, что противоречит условию. ■

Однако не каждая ограниченная на сегменте функция интегрируема на нем.

Пример 1.4 *Доказать, что функция Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональная точка,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональная точка,} \end{cases}$$

неинтегрируема ни на каком сегменте $[a, b]$.

Решение. Возьмем любой сегмент $[a, b]$ и произвольное его разбиение T. На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ зафиксируем одну рациональную точку ξ_i' и одну иррациональную точку ξ_i''. Составим интегральные суммы $I\{x_i, \xi_i'\}$ и $I\{x_i, \xi_i''\}$. Очевидно, что $I\{x_i, \xi_i'\} = b - a$, $I\{x_i, \xi_i''\} = 0$. Следовательно функция Дирихле D неинтегрируема на сегменте $[a, b]$. ■

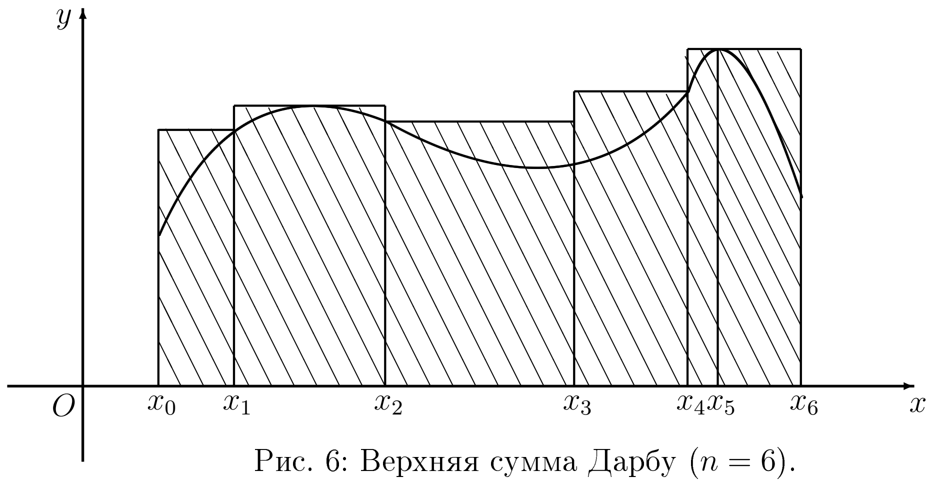

Рис. 6: Верхняя сумма Дарбу ($n = 6$).

1.3 Верхние и нижние суммы Дарбу

Пусть функция f ограничена на сегменте $[a, b]$, а T — произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Введем обозначения:

$$M_i = \sup\Big\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \Big\}, \quad m_i = \inf\Big\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \Big\}. \quad (1.7)$$

Определение 1.5 *Суммы*

$$S = S(T) = S_f(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \text{ и } s = s(T) = s_f(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad (1.8)$$

называются соответственно верхней и нижней интегральными суммами или верхней и нижней суммами Дарбу функции f для данного разбиения T сегмента $[a, b]$.

Очевидно, что

$$s_f(T) \leq S_f(T), \quad (1.9)$$

так как $m_i \leq M_i$ для каждого i. Более того, поскольку на каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ справедливы неравенства $m_i \leq f(x) \leq M_i$, то любая интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$ данного разбиения T сегмента

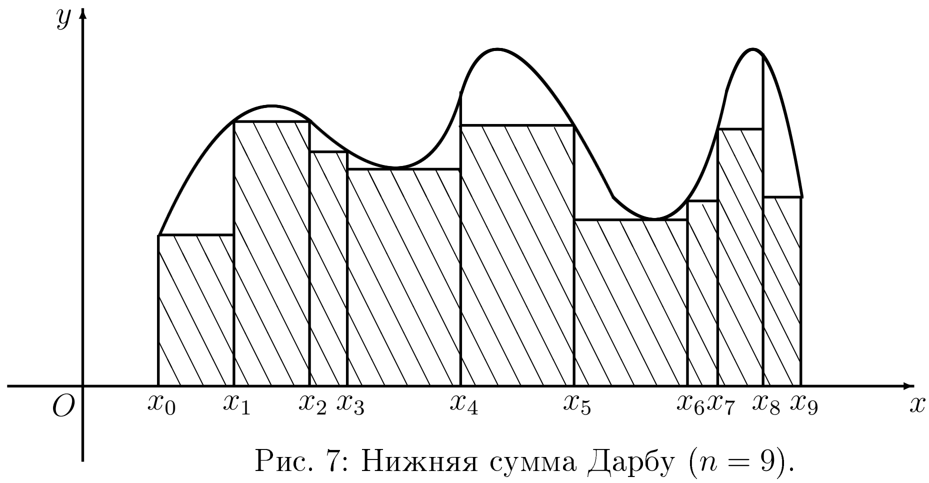

Рис. 7: Нижняя сумма Дарбу ($n = 9$).

$[a, b]$ заключена между верхней и нижней суммами Дарбу S и s этого разбиения, то есть

$$s(T) \le I\{x_i, \xi_i\} \le S(T). \tag{1.10}$$

Выясним геометрический смысл верхней и нижней сумм Дарбу. Рассмотрим криволинейную трапецию, отвечающую заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции f. Тогда верхняя сумма Дарбу равна площади элементарной ступенчатой фигуры, содержащей криволинейную трапецию (рис. 6).

Аналогично нижняя сумма Дарбу равна площади элементарной ступенчатой фигуры, содержащейся в криволинейной трапеции (рис. 7).

Таким образом, верхняя и нижняя суммы Дарбу приближают «площадь» криволинейной трапеции с избытком и с недостатком. Поэтому для «существования площади» криволинейной трапеции, скорее всего, должно выполняться предельное равенство

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0.$$

Позже мы докажем справедливость этого предположения для непрерывных и некоторых разрывных функций, а пока перейдем к изучению свойств верхних и нижних сумм Дарбу функции f.

Свойство 1 *Для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ верхняя сумма Дарбу является точной верхней гранью, а нижняя сумма Дарбу — точной нижней гранью множества всех интегральных сумм $I\{x_i, \xi_i\}$.*

Доказательство. Покажем, что $S = \sup\{I\{x_i, \xi_i\}\}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани при каждом i для числа $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ найдется $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ такое, что

$$M_i - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(\xi_i) \leq M_i.$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Отсюда следует оценка

$$S - \varepsilon < I\{x_i, \xi_i\} \leq S,$$

которую и требовалось получить. ■

Свойство 2 *Пусть разбиение T' является продолжением разбиения T сегмента $[a, b]$. Тогда справедливы оценки $S(T') \leq S(T)$ и $s(T') \geq s(T)$.*

Говоря другими словами, при измельчении разбиения верхняя сумма Дарбу может только уменьшиться, а нижняя — только увеличиться.

Доказательство. Очевидно, что разбиение T' можно получить из разбиения T путем последовательного добавления новых узлов к узлам x_i разбиения T. Поэтому достаточно доказать свойство для случая, когда разбиение T' имеет по сравнению с T лишь один новый узел x'. Пусть $x' \in (x_{k-1}, x_k)$. Тогда в суммах $S(T)$ и $S(T')$ все слагаемые одинаковые, за исключением следующих: слагаемое $M_k \Delta x_k$, имеющееся в сумме $S(T)$, в сумме $S(T')$ заменено суммой двух слагаемых $M_k' \Delta x_k' + M_k'' \Delta x_k''$, где

$$M_k' = \sup\left\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x']\right\}, \qquad \Delta x_k' = x' - x_{k-1},$$
$$M_k'' = \sup\left\{f(x) : x \in [x', x_k]\right\}, \qquad \Delta x_k'' = x_k - x'.$$

Но так как $M_k' \leq M_k$ и $M_k'' \leq M_k$, то и

$$M_k' \Delta x_k' + M_k'' \Delta x_k'' \leq M_k \Delta x_k' + M_k \Delta x_k'' = M_k (\Delta x_k' + \Delta x_k'') = M_k \Delta x_k.$$

Отсюда следует оценка $S(T') \le S(T)$. Аналогичные рассуждения приводя и к оценке $s(T') \ge s(T)$. ■

Свойство 3 *Для любых разбиений T' и T'' сегмента $[a,b]$ справедливо неравенство $s(T') \le S(T'')$.*

Доказательство. Построим разбиение T сегмента $[a,b]$, являющееся продолжением и разбиения T' и разбиения T'' (взяв, например, в качестве узлов разбиения узлы обоих разбиений T' и T''). Тогда, учитывая (1.9), по свойству 2 получаем $s(T') \le s(T) \le S(T) \le S(T'')$. ■

Непосредственным следствием свойства 3 является

Свойство 4 *Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу функции f для всевозможных разбиений сегмента $[a,b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм ограничено сверху.*

На основании этого свойства и теоремы о существовании точных граней определены числа

$$\underline{I} := \sup\{s(T)\}, \quad \overline{I} := \inf\{S(T)\},$$

где точные грани берутся по всевозможным разбиениям T сегмента $[a,b]$.

Определение 1.6 *Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ называются соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу от функции f.*

Свойство 5 *Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего интеграла Дарбу, то есть $\underline{I} \le \overline{I}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное разбиение T' сегмента $[a,b]$. По свойству 3 для любого разбиения T'' сегмента $[a,b]$ справедлива оценка $s(T') \le S(T'')$. Следовательно число $s(T')$ является какой-то нижней гранью множества $\{S(T)\}$ верхних сумм Дарбу функции f для всевозможных разбиений T сегмента $[a,b]$. Поэтому $s(T') \le \inf\{S(T)\} = \overline{I}$. А последнее означает, что число $\overline{I}$ есть какая-то верхняя грань множества $\{s(T)\}$. Отсюда следует, что $\underline{I} = \sup\{s(T)\} \le \overline{I}$. ■

Пример 1.5 *Вычислить нижний и верхний интегралы Дарбу от функции Дирихле D на сегменте $[a,b]$.*

Решение. Для любого разбиения T исходного сегмента имеем:

$$m_i = \inf\left\{D(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = 0,\ M_i = \sup\left\{D(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = 1.$$

Поэтому

$$s\,(T) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad S\,(T) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b - a.$$

Следовательно, $\underline{I} = 0$, $\overline{I} = b - a$. ■

1.4 Критерий интегрируемости ограниченной функции

Определение 1.7 *Число A называется пределом верхних (нижних) сумм Дарбу S (s) при стремлении к нулю параметра разбиений, если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что при любом разбиении T сегмента $[a,b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка $|S - A| < \varepsilon$ $(|s - A| < \varepsilon)$.*

Теорема 1.2 *Для того, чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\Delta \to 0} (S - s) = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f \in R\,[a,b]$. Следовательно (см. определения 1.3 и 1.4) существует число I, для которого по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a,b]$, параметр которого удовлетворяет условию $\Delta < \delta$, и при любом выборе точек ξ_i на частичных сегментах $[x_{i-1}, x_i]$ выполняется неравенство $|I\,\{x_i, \xi_i\} - I| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, то есть

$$I - \frac{\varepsilon}{4} < I\,\{x_i, \xi_i\} < I + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.12}$$

Но в силу свойства 1.2 нижняя и верхняя суммы Дарбу являются точными верхней и нижней гранями интегральных сумм $I\left\{x_i, \xi_i\right\}$. Поэтому из (1.12) и (1.9) следует, что $I - \dfrac{\varepsilon}{4} \le s \le S \le I + \dfrac{\varepsilon}{4}$. Отсюда выводим оценку

$$0 \le S - s \le \left(I + \frac{\varepsilon}{4}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

А это означает, что (1.11) выполняется.

Достаточность. Сначала докажем равенство верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

По определению верхнего и нижнего интегралов Дарбу и свойству 1.6 имеем:

$$s \le \underline{I} \le \overline{I} \le S.$$

Отсюда следует, что

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S - s.$$

По условию предел при $\Delta \to 0$ правой части этого неравенства равен нулю. Поэтому и разность $\overline{I} - \underline{I} = 0$. А это означает, что $\overline{I} = \underline{I}$. Обозначим общее значение интегралов $\overline{I}$ и $\underline{I}$ буквой I.

Теперь докажем, что число I есть предел интегральных сумм при стремлении к нулю параметра разбиений.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. На основании (1.11) для выбранного ε найдем $\delta > 0$ такое, что при выполнении условия $\Delta < \delta$ будет выполняться оценка

$$S - s < \varepsilon. \tag{1.13}$$

Пусть T — любое разбиение сегмента $[a, b]$ с параметром $\Delta < \delta$ и ξ_i — произвольные точки частичных сегментов $[x_{i-1}, x_i]$. Поскольку

$$s \le I\left\{x_i, \xi_i\right\} \le S \quad \text{и} \quad s \le I \le S,$$

то, вычитая одно из этих неравенств из другого, получаем:

$$-(S - s) \le I\left\{x_i, \xi_i\right\} - I \le S - s.$$

Отсюда и (1.13) следует, что

$$|I\{x_i,\xi_i\} - I| \le S - s < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора ε, согласно определений 1.3 и 1.4, $f \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = I$.

■

Дарбу назвал функцию интегрируемой, если $\overline{I} = \underline{I}$. Как мы видим, это определение интегрируемости эквивалентно определению Римана.

Определение 1.8 *Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Колебанием функции f на сегменте $[a,b]$ называют число $\omega = M - m$, где M и m — точные грани f на сегменте $[a,b]$.*

Предложение 1.1 *Пусть $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда ее колебание ω на сегменте $[a,b]$ можно вычислить по формуле*

$$\omega = \sup\Big\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [a,b]\Big\}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Пусть M и m — точные грани функции f на сегменте $[a,b]$. Возьмем произвольные $x', x'' \in [a,b]$. Из очевидных неравенств

$$m \le f(x') \le M, \quad m \le f(x'') \le M,$$

получаем

$$-\omega = -(M-m) \le f(x') - f(x'') \le M - m = \omega$$

или

$$|f(x') - f(x'')| \le \omega.$$

Это означает, что ω есть какая-то верхняя грань множества

$$L := \Big\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in [a,b]\Big\}.$$

Докажем, что ω — точная верхняя грань множества L. С этой целью, возьмем любое $\varepsilon > 0$. По определению точных граней, найдутся $x', x'' \in [a,b]$ такие, что

$$f(x') > M - \frac{\varepsilon}{2}, \quad f(x'') < m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вычитая из первого неравенства второе, получаем

$$f(x') - f(x'') > (M - m) - \varepsilon = \omega - \varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора ε, следует доказываемое равенство. ■

Пусть ω_i обозначает колебание функции f на i-ом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i.$$

Поэтому условие интегрируемости (1.11) может быть записано в виде

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0 \qquad (1.15)$$

что на языке «$\varepsilon - \delta$» означает: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon. \qquad (1.16)$$

В этой форме его обычно и применяют.

Для полноты изложения приведем без доказательства, хорошо известный, критерий интегрируемости Лебега.

Определение 1.9 *Говорят, что система множеств $\{\Sigma_\alpha\}$ образует покрытие множества X (или покрывает множества X), если любая точка x множества X принадлежит хотя бы одному из множеств системы $\{\Sigma_\alpha\}$.*

Определение 1.10 *Множество $X \subset [a, b]$ называют множеством меры нуль (лебеговой меры нуль), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется не более чем счетное покрытие множества X сегментами $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ такое, что $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \varepsilon$.*

Очевидно, что в этом определении сегменты $[a_k, b_k]$ можно заменить интервалами (a_k, b_k).

Теорема 1.3 *(Критерий Лебега). Для того чтобы ограниченная на сегменте функция была интегрируемой по Риману на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрыва этой функции имело меру нуль.*

Доказательство этого утверждения имеется, например, в [3] (стр. 401–409), в [7] (стр. 409–410) и др..

1.5 Классы интегрируемых функций

Применяя доказанный критерий (теорему 1.2), выделим некоторые классы интегрируемых функций.

Интегрируемость непрерывных функций

Теорема 1.4 *Если $f \in C\,[a,b]$, то $f \in R\,[a,b]$ (то есть любая непрерывная на сегменте функция интегрируема на нем).*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$, поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta$ справедлива оценка

$$|f\,(x') - f\,(x'')| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}. \tag{1.17}$$

Рассмотрим произвольное разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$. Так как f равномерно непрерывна на сегменте $[a,b]$, то она непрерывна и на каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ и по второй теореме Вейерштрасса достигает на нем свои точные грани. Пусть $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ точки, в которых достигаются соответственно точная верхняя и точная нижняя грани функции f. Тогда, в виду выбора разбиения T и оценки (1.17), имеем:

$$\omega_i = M_i - m_i = f\left(x_i'\right) - f\left(x_i''\right) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем условие интегрируемости (1.16)

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

■

Интегрируемость некоторых разрывных функций

Теорема 1.5 *Пусть функция f ограничена на сегменте $[a,b]$. Если для любого $\sigma > 0$ можно указать конечное число интервалов, покрывающих множество точек разрыва функции f, с суммой длин меньшей σ, то $f \in R\left[a,b\right]$ (то есть f интегрируема на $[a,b]$).*

Доказательство. Ввиду ограниченности функции f найдутся постоянные M и m такие, что

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in \left[a,b\right]. \tag{1.18}$$

Мы предполагаем, что функция f имеет хотя бы одну точку разрыва на сегменте $[a,b]$. Но тогда очевидно, что $M > m$, так как иначе функция $f(x) \equiv c \equiv \mathrm{const}$, и следовательно, непрерывна на указанном сегменте.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{4(M-m)}$. По условию, найдется конечное число интервалов (α_j, β_j), $j = 1, 2, \ldots, l$, покрывающих все точки разрыва функции f таких, что

$$\sum_{j=1}^{l} \left(\beta_j - \alpha_j\right) < \sigma. \tag{1.19}$$

Множество X точек сегмента $[a,b]$, не принадлежащих выбранным интервалам, состоит из конечного числа попарно непересекающихся сегментов. На каждом из этих сегментов функция f непрерывна, а по теореме Кантора и равномерно непрерывна. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что для любых x', x'' одновременно принадлежащих одному из сегментов, образующих множество X, справедлива оценка

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{1.20}$$

как только $|x' - x''| < \delta$.

Не уменьшения общности, можно предполагать, что

$$\delta < \frac{\varepsilon}{8l\,(M-m)}. \tag{1.21}$$

Теперь возьмем любое разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$. Для этого разбиения слагаемые суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ разделим на три группы:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum{}' \omega_i \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i \Delta x_i + \sum{}''' \omega_i \Delta x_i. \tag{1.22}$$

В сумму $\sum' \omega_i \Delta x_i$ включены те слагаемые, для которых $[x_{i-1}, x_i] \subset X$. Ввиду (1.20), колебание функции f на каждом из этих сегментов меньше $\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Поэтому

$$\sum{}' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}' \Delta x_i \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.23}$$

Во вторую сумму $\sum'' \omega_i \Delta x_i$ включены те слагаемые, которые отвечают частичным сегментам $[x_{i-1}, x_i]$, целиком содержащимся в объединении сегментов $[\alpha_j, \beta_j]$ по всем $j = 1, 2, \ldots, l$. Для этих сегментов $\omega_i \le M - m$, поэтому, учитывая (1.19) и выбор σ, имеем

$$\begin{aligned} \sum{}'' \omega_i \Delta x_i \le (M-m) \sum{}'' \Delta x_i \le (M-m) \sum_{j=1}^{l} (\beta_j - \alpha_j) < \\ < (M-m)\,\sigma = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

В третьей сумме $\sum''' \omega_i \Delta x_i$ остались слагаемые, отвечающие частичным сегментам $[x_{i-1}, x_i]$, не попадающим целиком ни в объединении сегментов $[\alpha_j, \beta_j]$, ни в X. Учитывая, что этих слагаемых не более, чем $2l$, и принимая во внимание (1.21), получаем:

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{\prime\prime\prime}\omega_i\Delta x_i \le (M-m)\sum\nolimits^{\prime\prime\prime}\Delta x_i < (M-m)\,2l\delta < \\ < (M-m)\;2l\,\frac{\varepsilon}{8l\,(M-m)} = \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Используя в (1.22) оценки (1.23) - (1.25), получаем условие интегрируемости (1.16). ■

Следствие 1.1 *Ограниченная на сегменте функция, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте.*

В частности, кусочно непрерывная на сегменте функция интегрируема на этом сегменте.

Доказательство. Пусть l — количество точек разрыва функции. Возьмем любое $\sigma > 0$ и покроем каждую точку разрыва интервалом длины меньшей, чем σ/l. Тогда сумма всех интервалов, покрывающих точки разрыва, будет меньше σ.

Напомним, что функция называется кусочно непрерывной на сегменте $[a,b]$, если она имеет на этом сегменте лишь конечное множество точек разрыва первого рода. Поэтому кусочно непрерывная на сегменте функция ограничена на нем.

■

Замечание 1.1 *Пусть $f \in R\,[a,b]$. Очевидно, что если функция $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ отличается от функции f лишь на конечном множестве точек, то $g \in R\,[a,b]$, причем*

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим пример интегрируемой функции, имеющей *бесконечное* множество точек разрыва.

Пример 1.6 *Доказать, что функция $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная формулой (рис. 8)*

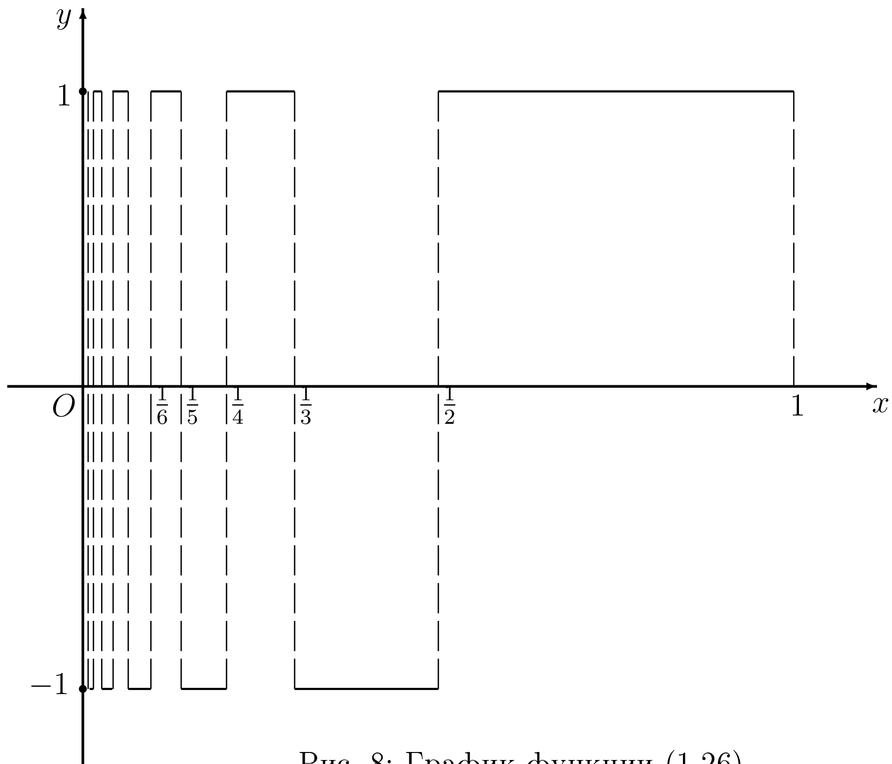

Рис. 8: График функции (1.26).

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если}} \quad x \in \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ -1, & \text{\textit{если}} \quad x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right], \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{\textit{если}} \quad x = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

интегрируема на сегменте $[0,1]$.

Решение. Функция f имеет разрывы в точках $x_0 = 0$ и $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное положительное число σ и покроем точку x_0 интервалом $\left(-\dfrac{\sigma}{4}, \dfrac{\sigma}{4}\right)$. В этот интервал попали либо все точки x_n, $n = 0, 1, \ldots$ либо точка x_0 и все точки x_n начиная с некоторого номера. Предположим, что в указанный интервал не попало p точек. Покроем каждую из них интервалом длины меньшей, чем $\dfrac{\sigma}{2p}$. В любом случае, сумма длин интервалов, покрывающих все точки разрыва меньше, σ. Следовательно выполняются все условия теоремы 1.5. Поэтому $f \in R\,[a,b]$. ■

Интегрируемость монотонных ограниченных функций

Теорема 1.6 *Если функция $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ монотонная ограниченная, то $f \in R\,[a, b]$.*

Доказательство. Пусть, например, f не убывает на сегменте $[a, b]$ (в случае, когда f не возрастает, доказательство аналогично).

Возьмем T — произвольное разбиение сегменте $[a, b]$. Пусть Δ — параметр этого разбиение. Тогда для любого частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ имеем:

$$\omega_i = M_i - m_i = f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right).$$

Умножая это неравенство на Δx_i и суммируя по всем i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leq \Delta \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \Delta \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x_i\right) - f\left(x_{i-1}\right)\right) = \Delta\left(f(b) - f(a)\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta \longrightarrow 0$, получаем условие интегрируемости (1.15). ■

1.6 Основные свойства определенного интеграла

Первые два свойства обобщают понятие определенного интеграла.

Свойство 1 *Будем считать, что*

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{1.27}$$

для любой функции f, определенной в точке $x = a$.

Формула (1.27) рассматривается как соглашение. Ее нужно считать естественным распространением понятия определенного интеграла на сегмент нулевой длины (на вырожденный сегмент).

Часто приходится рассматривать $\int\limits_b^a f(x)\,dx$, где по прежнему $a < b$.

Свойство 2 *Будем считать, что при $a < b$ и $f \in R\,[a,b]$*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.28}$$

Эта формула также рассматривается как соглашение. Ее нужно считать естественным обобщением понятия определенного интеграла на случай, когда аргумент функции f пробегает сегмент $[a,b]$ при $a < b$ в направлении от b к a (в этом случае в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ отрицательны).

Следующие два свойства показывают, что интеграл является линейной функцией на множестве $R\,[a,b]$.

Свойство 3 *Если $f \in R\,[a,b]$ и $C \in \mathbb{R}$, то $Cf \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.29}$$

Это свойство очевидно, поскольку интегральные суммы функций Cf и f отличаются на постоянный множитель C. Таким образом, постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

Свойство 4 *Пусть $f, g \in R\,[a,b]$. Тогда $f+g \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\int_a^b (f+g)\,(x)\,dx := \int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.30}$$

Доказательство. Ясно, что любая интегральная сумма $I_{f+g}\left\{x_i,\xi_i\right\}$ функции $f+g$ равна сумме интегральных сумм $I_f\left\{x_i,\xi_i\right\}$ и $I_g\left\{x_i,\xi_i\right\}$ функций f и g соответственно, то есть справедливо равенство

$$I_{f+g}\left\{x_i,\xi_i\right\} = I_f\left\{x_i,\xi_i\right\} + I_g\left\{x_i,\xi_i\right\}. \tag{1.31}$$

А поскольку при $\Delta \longrightarrow 0$ предел правой части (1.31) существует, то существует и предел левой части. Но

$$\lim_{\Delta\to 0} I_{f+g}\left\{x_i,\xi_i\right\} = \int\limits_a^b (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx,$$

$$\lim_{\Delta\to 0} I_{f}\left\{x_i,\xi_i\right\} + \lim_{\Delta\to 0} I_{g}\left\{x_i,\xi_i\right\} = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Отсюда следует равенство (1.30). ■

К свойствам 3 и 4 естественно примыкает утверждение об интегрируемости произведения интегрируемых функций.

Свойство 5 *Если* $f, g \in R\,[a,b]$, *то* $f \cdot g \in R\,[a,b]$.

Доказательство. Поскольку интегрируемые на сегменте функции ограничены на нем, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|f(x)| \le M, \qquad |g(x)| \le M, \quad x \in [a,b]\,. \tag{1.32}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f, g \in R\,[a,b]$, найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$ выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^g \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{1.33}$$

где ω_i^f — колебание функции f, а ω_i^g — колебание функции g на i-ом частичном сегменте.

Зафиксируем любое разбиение T сегмента $[a,b]$ с параметром $\Delta < \delta$. Пусть ω_i^{fg} обозначает колебание функции fg на i-ом частичном сегменте этого разбиения. Если мы докажем, что

$$\omega_i^{fg} \le M\left(\omega_i^f + \omega_i^g\right), \tag{1.34}$$

то, используя оценки (1.33), легко получим следующую оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{fg} \Delta x_i \le M\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i^g \Delta x_i\right) < \varepsilon,$$

то есть условие интегрируемости функции fg.

Итак приступим к доказательству (1.34). Для этого, на i-ом частичном сегменте возьмем две произвольные точки x' и x''. Тогда, используя (1.32) и предложение 1.1, выводим

$$\begin{aligned}
&|f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| = \\
=&|f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \le \\
\le&|f(x')|\,|g(x') - g(x'')| + |g(x'')|\,|f(x') - f(x'')| \le \\
\le&M\left(\omega_i^f + \omega_i^g\right).
\end{aligned}$$

И, следовательно, ввиду (1.14), получаем (1.34). ■

Следствие 1.2 *Квадрат (и вообще любая натуральная степень) интегрируемой на сегменте $[a, b]$ функции интегрируем на $[a, b]$.*

Обратное утверждение неверно: из интегрируемости f^2 не следует, вообще говоря, интегрируемость f, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное}, \\ -1, & \text{если } x \text{ иррациональное}, \end{cases} \quad a \le x \le b, \tag{1.35}$$

не интегрируема на $[a, b]$, хотя функция $f^2(x) = 1$ интегрируема на этом сегменте.

Теперь рассмотрим свойство о сужении промежутка интегрирования.

Свойство 6 *Если $f \in R\,[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, то $f \in R\,[c, d]$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f \in R\,[a, b]$, найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого разбиения T сегмента $[a, b]$ с параметром $\Delta < \delta$ справедлива оценка (1.16).

Теперь возьмем произвольное разбиение T' сегмента $[c, d]$ с параметром $\Delta < \delta$ и дополним его до разбиения T сегмента $[a, b]$ с таким же параметром Δ. Поскольку для любого i произведение $\omega_i \Delta x_i$ неотрицательно, справедливо оценка

$$\sum\nolimits' \omega_i \Delta x_i \le \sum \omega_i \Delta x_i,$$

где сумма, стоящая в левой части, построена по разбиению T' сегмента $[c, d]$, а сумма, стоящая в правой части, — по разбиению T сегмента $[a, b]$. Отсюда и (1.16) следует оценка $\sum' \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, которая означает интегрируемость функции f на сегменте $[c, d]$. ■

Далее нам предстоит доказать, что интеграл является аддитивной функцией отрезка интегрирования. Напомним определение аддитивной функции.

Определение 1.11 *Пусть X — некоторое множество и $\mathcal{E}$ — некоторый класс его подмножеств. Неотрицательная функция φ, определенная на $\mathcal{E}$, называется аддитивной, если для любых $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ таких, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, справедливо равенство*

$$\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2).$$

Свойство 7 *Если $f \in R[a, b]$ и $c \in (a, b)$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1.36)$$

Доказательство. Заметим, что существование каждого из интегралов, стоящих в правой части (1.36), вытекает из предыдущего свойства.

Возьмем произвольные разбиения T' и T'' сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ и любые, соответствующие им, интегральные суммы $I'\{x_i, \xi_i\}$ и $I''\{x_i, \xi_i\}$. Пусть T разбиение сегмента $[a, b]$, узлами которого являются все узлы разбиений T' и T''. Тогда интегральная сумма $I\{x_i, \xi_i\}$, соответствующая разбиению T сегмента $[a, b]$ равна сумма интегральных сумм $I'\{x_i, \xi_i\}$ и $I''\{x_i, \xi_i\}$, то есть

$$I\{x_i, \xi_i\} = I'\{x_i, \xi_i\} + I''\{x_i, \xi_i\}.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta \longrightarrow 0$ получим (1.36). ■

Справедливо и обратное утверждение.

Свойство 8 *Пусть $f \in R[a, c]$ и $f \in R[c, b]$. Тогда $f \in R[a, b]$ и справедливо равенство (1.36).*

Доказательство. Точка c может находиться как внутри, так и вне сегмента $[a, b]$.

Начнем со случая, когда $c \in (a, b)$. Так как $f \in R\,[a, c]$ и $f \in R\,[c, b]$, то f ограничена на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, а следовательно и на сегменте $[a, b]$. Поэтому найдутся числа m и M такие, что

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]\,. \tag{1.37}$$

Если $M = m$, то $f(x) = C = const$. Следовательно, $f \in R\,[a, b]$. А поскольку

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = C\,(b - a)\,, \ \int\limits_a^c f(x)\,dx = C\,(c - a)\,, \ \int\limits_c^b f(x)\,dx = C\,(b - c)\,.$$

то отсюда, замечая, что $C\,(b - a) = C\,(c - a) + C\,(b - c)$, получаем (1.36).

Пусть $M > m$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из интегрируемости функции f на сегментах $[a, c]$ и $[c, b]$ следует существование положительного числа δ такого, что для любых разбиений T' и T'' сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$ с параметрами разбиений меньшими δ, справедливы оценки

$$\sum{}' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \sum{}'' \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{1.38}$$

где первая сумма построена по разбиению T' сегмента $[a, c]$, а вторая — по разбиению T'' сегмента $[c, b]$.

Без ограничения общности, можно считать, что

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2\,(M - m)}. \tag{1.39}$$

Теперь возьмем произвольное разбиение T с параметром разбиения меньшим δ. Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ — узлы разбиения T.

Если $x = c$ является узлом разбиения T, то T есть объединение разбиений T' сегмента $[a, c]$ и T'' сегмента $[c, b]$ с параметрами разбиений меньшими δ. Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum{}' \omega_i \Delta x_i + \sum{}'' \omega_i \Delta x_i, \tag{1.40}$$

где $\sum'\omega_i\Delta x_i$ соответствует разбиению T' сегмента $[a,c]$, а $\sum''\omega_i\Delta x_i$ — разбиению T'' сегмента $[c,b]$.

Отсюда, ввиду (1.38), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.41}$$

Если же $x=c$ не является узлом разбиения T, то продолжим разбиение T, добавив к его узлам точку $x=c$. Получим разбиение $\widetilde{T}$. Пусть $c\in(x_{k-1},x_k)$. Поскольку параметр разбиения $\widetilde{T}$ меньше δ, по доказанному выше, для разбиения $\widetilde{T}$ выполняется (1.41), и тем более следующая оценка

$$\sum_{i\neq k}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.42}$$

Используя (1.42) и (1.39), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i\neq k}\omega_i\Delta x_i + \omega_k\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)\,\delta < \varepsilon. \tag{1.43}$$

Благодаря (1.41) и (1.43), получаем условие интегрируемости (1.16). Следовательно, $f\in R\,[a,b]$ и по свойству 7 выполняется равенство (1.36).

Пусть теперь c лежит вне сегмента $[a,b]$, например, $c<a$. Тогда, по свойству 7 (поскольку a находится между c и b), имеем

$$\int_c^b f(x)\,dx := \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда, применяя свойство 2, выводим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Случай $c>b$ аналогичен предыдущему. ■

Следующие шесть свойств выражаются неравенствами.

Свойство 9 *Если* $f\in R\,[a,b]$ *и* $f(x)\geq 0$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \tag{1.44}$$

Доказательство. Действительно, каждая интегральная сумма $I\left\{x_i, \xi_i\right\}$ неотрицательна, следовательно и предел $\lim\limits_{\Delta \to 0} I\left\{x_i, \xi_i\right\}$ неотрицателен. ■

Свойство 10 *Если $f, g \in R\,[a,b]$ и всюду на $[a,b]$ (то есть в каждой точке $x \in [a,b]$) $f(x) \geq g(x)$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.45}$$

Доказательство. Так как $f(x) - g(x) \geq 0$, то (1.45) следует из свойств 9, 4 и 3. ■

Свойство 11 *Если $f \in R\,[a,b]$ и удовлетворяет на нем неравенствам $m \leq f(x) \leq M$, то*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{1.46}$$

Доказательство. Положим $g(x) \equiv m$ на сегменте $[a,b]$. Тогда $f(x) \geq g(x)$ всюду на $[a,b]$ и по свойству 10

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^b m\,dx = m(b-a).$$

Правая часть оценки (1.46) доказывается аналогично. ■

Свойство 12 *Если $f \in C\,[a,b]$, неотрицательна и не равна тождественно нулю, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{1.47}$$

Доказательство. Функция f интегрируема на $[a,b]$, поскольку она непрерывна на нем. А так как f неотрицательна и не равна тождественно нулю, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f\left(\xi\right) = 2k > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции найдется сегмент

$[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, содержащий точку ξ, в пределах которого значения функции f будут не меньше числа $k > 0$. Теперь, применяя свойства 6, 7, 11 и 9, выводим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^\alpha f(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int\limits_\beta^b f(x)\,dx \geq \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq k(\beta - \alpha) > 0.$$

■

Следствие 1.3 *Если функция f непрерывна и неотрицательна на сегменте $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv o$ на $[a, b]$.*

Свойство 13 *Если $f \in R\,[a, b]$, то и $|f| \in R\,[a, b]$ и справедливо оценка*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1.48}$$

Доказательство. Сначала докажем интегрируемость функции $|f|$. Возьмем произвольное разбиение T сегмента $[a, b]$. Пусть ω_i^f и $\omega_i^{|f|}$ — колебания функций f и $|f|$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Покажем, что

$$\omega_i^{|f|} \leq \omega_i^f. \tag{1.49}$$

Пусть m^f, M^f, $m^{|f|}$, $M^{|f|}$ обозначают точные грани функций f и $|f|$ на частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$. Очевидно, что для граней m^f и M^f возможны только следующие три случая:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad m^f \geq 0 \quad (\Longrightarrow M^f \geq 0);\\
&(b) \quad M^f \leq 0 \quad (\Longrightarrow m^f \leq 0);\\
&(c) \quad m^f < 0, \quad M^f > 0.
\end{aligned}$$

В случае (a) справедливы равенства $m^{|f|} = m^f$ и $M^{|f|} = M^f$ (рис. 9(a)). Поэтому (1.49) выполняется.

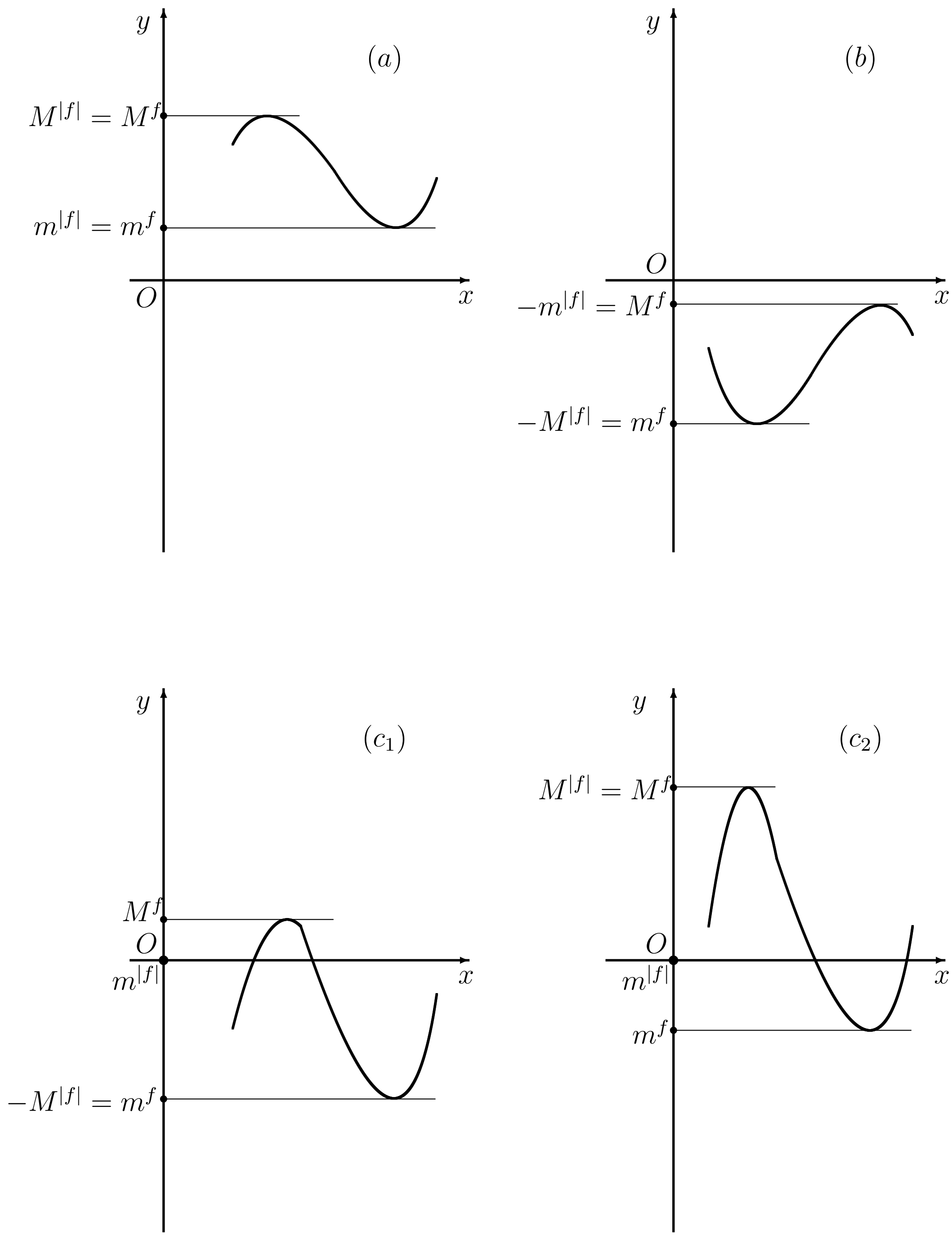

Рис. 9: Колебания (непрерывной) функции f.

В случае (b) имеем: $m^{|f|} = -M^f$ и $M^{|f|} = -m^f$ (рис. 9(b)). Отсюда получаем

$$\omega_i^{|f|} = M^{|f|} - m^{|f|} = -m^f - \left(-M^f\right) = M^f - m^f = \omega_i^f,$$

и следовательно (1.49) выполняется.

В случае (c) справедливы следующие соотношения (рис. 9$(c_1), (c_2)$)

$$\omega_i^f = M^f - m^f = M^f + \left|m^f\right|, \quad M^{|f|} = \max\left\{M^f, \left|m^f\right|\right\}, \quad 0 \le m^{|f|} \le M^{|f|}.$$

Отсюда выводим

$$\omega_i^{|f|} = M^{|f|} - m^{|f|} \le M^{|f|} = \max\left\{M^f, \left|m^f\right|\right\} \le M^f + \left|m^f\right| = \omega_i^f.$$

Таким образом, оценка (1.49) выполняется и в этом случае, а следовательно она выполняется всегда.

Умножая обе части (1.49) на Δx_i и суммируя по всем i, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{|f|} \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i^f \Delta x_i. \tag{1.50}$$

Поскольку $f \in R\,[a,b]$, то переходя в (1.50) к пределу при $\Delta \longrightarrow 0$, приходим к равенству

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{|f|} \Delta x_i = 0.$$

Следовательно, $|f| \in R\,[a,b]$.

Теперь докажем оценку (1.48). Так как $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, то по свойству 10 получаем

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\, dx \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx,$$

а эти оценки равносильны оценке (1.48). ■

Замечание. Следует помнить, что из интегрируемости модуля функции, вообще говоря, не следует интегрируемость самой функции. Такой функцией, например, является функция, заданная формулой (1.35).

Свойство 14 *Если* $f, g \in R\,[a,b]$, $m \le f(x) \le M$ *и* $g(x) \ge 0$ *всюду на* $[a,b]$, *то*

$$m \int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le M \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.51}$$

Доказательство. Справедливость оценки (1.51) вытекает из очевидных неравенств $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ и свойств 5, 10 и 3. ■

Следующие три свойства называются теоремами о среднем значении.

Свойство 15 *(Первая теорема о среднем значении). Пусть* $f \in R\,[a,b]$, *и пусть* m *и* M *— точные грани функции* f *на сегменте* $[a,b]$. *Тогда найдется число* μ, *удовлетворяющее неравенствам* $m \le \mu \le M$, *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a)\,. \tag{1.52}$$

Доказательство. По свойству 7 справедливы оценки (1.47), из которых следует, что

$$m \le \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Полагая $\mu = \int\limits_a^b f(x)\,dx \big/ (b-a)$, получаем формулу (1.52). ■

Число $\int\limits_a^b f(x)\,dx \big/ (b-a)$ называется *средним значением функции* f *на сегменте* $[a,b]$.

Следствие 1.4 *Если* $f \in C\,[a,b]$, *то найдется точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f\,(\xi)\,(b-a)\,. \tag{1.53}$$

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса на сегменте $[a,b]$ найдутся точки α и β в которых достигаются точные грани функции f то есть такие, что

$$f(\alpha) = m = \inf\Big\{ f(x) : x \in [a,b] \Big\}, \quad f(\beta) = M = \sup\Big\{ f(x) : x \in [a,b] \Big\}.$$

Тогда, по теореме о промежуточном значении, на сегменте $[\alpha, \beta]$, а следовательно, и на сегменте $[a, b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$. Заменив в (1.52) μ на $f(\xi)$, получим (1.53). ■

Формулу (1.53), а иногда и формулу (1.52), называют *первой формулой среднего значения*.

Свойство 16 *Пусть $f, g \in R[a, b]$, и пусть m и M — точные грани функции f на сегменте $[a, b]$. Пусть, кроме того, функция g неотрицательна (или неположительна) на всем сегменте $[a, b]$. Тогда найдется число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.54}$$

В частности, если $f \in C[a, b]$, то найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{1.55}$$

Формула (1.55) называется *первой формулой среднего значения в обобщенной форме*.

Доказательство. Начнем с доказательства справедливости формулы (1.54). Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то, в силу (1.51), имеем: $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$. Поэтому в качестве μ можно взять любое число, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$.

Пусть $\int\limits_a^b g(x)\,dx \neq 0$. Разделив все части неравенств (1.51) на число $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, получим

$$m \leq \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right) \leq M.$$

Отсюда, полагая $\mu = \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right) \Big/ \left(\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$, выводим формулу (1.54).

Если же функция f непрерывна на сегменте $[a,b]$, то как показано при доказательстве следствия 1.4, на указанном сегменте найдется точка ξ такая, что $f(\xi)=\mu$, и поэтому формула (1.54) принимает вид (1.55). ■

Свойство 17 *(Вторая теорема о среднем значении). Пусть $f \in R[a,b]$, а $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ монотонна. Тогда на сегменте $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)\,dx. \tag{1.56}$$

Формула (1.56) называется *второй формулой среднего значения* или формулой Бонне.

Доказательство этого утверждения можно найти в большинстве учебников (см., например, [3], стр. 385–389; [1], стр. 351–352; [4], стр. 117–119 и т. д.).

В заключение приведем несколько свойств часто применяемых в процессе вычисления интегралов.

Свойство 18 *Если четная функция $f \in R[-a,a]$, то*

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int\limits_o^a f(x)\,dx. \tag{1.57}$$

Доказательство. По свойству 6 $f \in R[-a,0]$ и $f \in R[0,a]$, а по свойству 7 справедливо равенство

$$\int\limits_{-a}^a f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)\,dx + \int\limits_o^a f(x)\,dx. \tag{1.58}$$

Нетрудно видеть, что отображение $\varphi:[0,a] \longrightarrow [-a,0]$, заданное равенством $\varphi(x)=-x$, является биекцией. Поэтому каждой интегральной сумме $I\{x_i,\xi_i\}$, построенной по некоторому разбиению T сегмента $[0,a]$ соответствует интегральная сумма $I\{x_i',\xi_i'\}$ (и наоборот), построенной по разбиению T' сегмента $[-a,0]$ с $x_i' = -x_{n-i}$ и $\xi_i' = -\xi_{n-i}$. Легко убедиться, что для каждого i справедливо равенство $\Delta x_i' = \Delta x_{n-i}$. Поэтому, учитывая четность функции f, выводим

$$I\left\{x_i',\xi_i'\right\} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i'\right)\Delta x_i' = \sum_{i=1}^{n} f\left(-\xi_{n-i}\right)\Delta x_{n-i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f\left(-\xi_i\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = I\left\{x_i,\xi_i\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int\limits_{o}^{a} f(x)\,dx. \qquad (1.59)$$

Комбинируя (1.58) и (1.59), получаем (1.57). ■

Свойство 19 *Если нечетная функция $f \in R\,[-a,a]$, то*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \qquad (1.60)$$

Доказательство. Рассуждая так же как и при доказательстве свойства 18, вместо равенства (1.59) получим следующее равенство

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{o}^{a} f(x)\,dx. \qquad (1.61)$$

Поэтому из (1.58) и (1.61), следует (1.60). ■

Свойство 20 *Если периодическая функция f с периодом τ интегрируема на любом сегменте $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, то*

$$\int\limits_{a+k\tau}^{b+k\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (1.62)$$

при всех $a,b \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Очевидно, что отображение φ сегмента $[a,b]$ на сегмент $[a+k\tau, b+k\tau]$, заданное равенством $\varphi(x) = x + k\tau$, является биекцией. Поэтому каждой интегральной сумме $I\left\{x_i,\xi_i\right\}$, построенной по разбиению T сегмента $[a,b]$ соответствует интегральная сумма $I\left\{x_i', \xi_i'\right\}$, построенная по разбиению T' сегмента $[a+k\tau, b+k\tau]$ с $x_i' = x_i + k\tau$ и $\xi_i' = \xi_i + k\tau$ (и наоборот).

Нетрудно видеть, что $\Delta x_i' = \Delta x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что $I\left\{x_i', \xi_i'\right\} = I\left\{x_i, \xi_i\right\}$. Действительно, учитывая периодичность функции f, имеем

$$I\left\{x_i', \xi_i'\right\} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i'\right)\Delta x_i' = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i + k\tau\right)\Delta x_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i = I\left\{x_i, \xi_i\right\}.$$

Отсюда, путем предельного перехода, получается равенство (1.62). ■

Свойство 21 *Если периодическая функция f с периодом τ интегрируема на любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, то*

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx \tag{1.63}$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Возьмем любое $a \in \mathbb{R}$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $k\tau \leq a < (k+1)\tau$.

Если $a = k\tau$, то $a + \tau = (k+1)\tau$. Поэтому, на основании свойства 20, выводим равенство (1.63):

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0+k\tau}^{\tau+k\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx.$$

Если же $a \neq k\tau$, то $k\tau < a < (k+1)\tau = k\tau + \tau < a + \tau < (k+1)\tau + \tau$. Поэтому, применяя свойства 7, 20 и 8, получаем равенство (1.63):

$$\int\limits_{a}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{k\tau+\tau} f(x)\,dx + \int\limits_{(k+1)\tau}^{a+\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{(a-k\tau)+k\tau}^{\tau+k\tau} f(x)\,dx + \\ + \int\limits_{0+(k+1)\tau}^{(a-k\tau)+(k+1)\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{a-k\tau}^{\tau} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a-k\tau} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\tau} f(x)\,dx.$$

■

1.7 Основная формула интегрального исчисления

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f \in R\,[a,b]$, и пусть $c \in [a,b]$ — произвольная фиксированная точка.

Тогда, по свойствам интеграла (свойство 6) $f \in R\,[c,x]$ при любом $x \in [a,b]$. Поэтому можно рассмотреть функцию $F : [a,b] \longrightarrow R$, задаваемую формулой

$$F(x) = \int\limits_c^x f(t)\,dt. \tag{1.64}$$

Функцию (1.64) называют *интегралом с переменным верхним пределом.*

Интеграл с переменным верхним пределом можно определять на интервале (a,b). Рассмотрим функцию f определенную на этом интервале и интегрируемую на любом сегменте $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$. Зафиксируем любую точку $c \in (a,b)$ и зададим функцию $F : (a,b) \longrightarrow R$ формулой (1.64).

Теорема 1.7 *Если функция $f \in R\,[a,b]$, а F — функция, определяемая равенством (1.64), то $F \in C\,[a,b]$.*

Доказательство. Так как $f \in R\,[a,b]$, то она ограничена на сегменте $[a,b]$. Следовательно, существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in [a,b]$. Зафиксируем произвольный элемент $x_0 \in [a,b)$ и докажем непрерывность функции F в точке x_0 справа. С этой целью оценим разность $|F(x) - F(x_0)|$ при $x \in [x_0,b]$. Поскольку

$$F(x) - F(x_0) = \int\limits_c^x f(t)\,dt - \int\limits_c^{x_0} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt,$$

то

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int\limits_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq \int\limits_{x_0}^x |f(t)|\,dt \leq M\,(x - x_0)\,. \tag{1.65}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ из условия $\delta \leq \varepsilon / M$. Тогда из (1.65) следует, что для всех $x \in [x_0,b]$ и удовлетворяющих условию

$x - x_0 < \delta$ справедлива оценка $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$, из которой вытекает непрерывность функции F в точке x_0 справа. Аналогично доказывается непрерывность функции F в любой точке $x_0 \in (a, b]$ слева. ■

Следствие 1.5 *Если функция f определена на интервале (a, b) и интегрируемую на любом сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то функция F, заданная формулой (1.64), непрерывна на интервале (a, b).*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и любой сегмент $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, содержащий точку x_0. По теореме 1.7 функция F непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$, а следовательно, и в точке x_0. ■

Существование первообразной для непрерывной функции

Теорема 1.8 *(Основная теорема интегрального исчисления). Если $f \in R[a, b]$, то функция F, заданная формулой (1.64), дифференцируема в каждой точке x_0 непрерывности подынтегральной функции, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Отметим, что при совпадении точки x_0 с точкой a или b речь идет соответственно о производной справа в точке a или слева в точке b. Доказательство утверждения при этом не меняется.

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in [a, b]$ — одна из точек непрерывности функции f. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ и δ-окрестности $U = U_\delta(x_0)$ точки x_0 справедлива оценка

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1.66}$$

Оценим $\left|\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right|$ при $|x - x_0| < \delta$. Так как

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt,$$

то

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^{x}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \le$$

$$\le \frac{\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|}\int\limits_{x_0}^{x}\big|f(t)-f(x_0)\big|\,dt < \frac{\varepsilon\,(x-x_0)\operatorname{sgn}(x-x_0)}{|x-x_0|} = \varepsilon,$$

поскольку, благодаря (1.66) выполняется неравенство $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ при всех t, заключенных между x_0 и x. Из полученного неравенства следует, что $F'(x_0)$ существует, причем $F'(x_0)=f(x_0)$. ■

Следствие 1.6 *Любая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция f имеет на этом сегменте первообразную. Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом, т. е. функция F, заданная формулой (1.64).*

Доказательство. Согласно теореме 1.7, функция F непрерывна на сегменте $[a,b]$, а согласно теореме 1.8, она дифференцируема в каждой точке этого сегмента (поскольку f непрерывна на нем). Поэтому F — первообразная функции f на сегменте $[a,b]$. ■

Замечание. Утверждения теоремы 1.8 и следствия 1.6 справедливы и в случае, когда функция f определена на интервале (a,b) и интегрируемую на любом сегменте $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$.

Формула Ньютона-Лейбница – основная формула интегрального исчисления

Теорема 1.9 *Если $f\in C\,[a,b]$, а Φ — произвольная первообразная функции f на сегменте $[a,b]$, то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \Phi(b)-\Phi(a) = \Phi(x)\,\Big|_a^b\,. \tag{1.67}$$

Формула (1.67) является основной формулой интегрального исчисления и называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Доказательство. Благодаря следствию 1.6, можно утверждать, что любая первообразная Φ функции f на сегменте $[a,b]$ имеет вид

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C, \tag{1.68}$$

где C — некоторая постоянная.

Принимая во внимание равенство $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$ (см. свойство 1), находим $C = \Phi(a)$. Таким образом из (1.68) получаем формулу

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + \Phi(a).$$

Вычисляя теперь значение функции Φ в точке b, приходим к формуле (1.67). ∎

Пример 1.7 *Применяя формулу Ньютона-Лейбница, найти следующие определенные интегралы:*

$$a)\quad \int\limits_3^6 x^2\,dx;\quad b)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx;\quad c)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Решение.

$$a)\quad \int\limits_3^6 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,\Big|_3^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} = 72 - 9 = 63;$$

$$b)\quad \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1;$$

$$c)\quad \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

∎

Пример 1.8 *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-1}^1 |x|\,dx$.

Решение. Так как подынтегральная функция $f(x) = |x|$ — четная, то используя свойство 18, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} |x|\ dx = 2\int\limits_{0}^{1} |x|\ dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\,dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\ \Big|_0^1 = 1.$$

■

Пример 1.9 *Вычислить интеграл* $\int\limits_{-a}^{a} x^7 \sqrt[8]{a^4 - x^4}\,dx.$

Решение. Так как подынтегральная функция нечетная, то по свойству 19 интеграл равен нулю. ■

Пример 1.10 *Вычислить интеграл* $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x}\,dx.$

Решение. Поскольку подынтегральная функция периодическая с периодом 2π и нечетная, то применяя свойства 21 и 19, получаем

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^4 x}\,dx = 0.$$

■

Следующие примеры призваны предостеречь читателя от часто совершаемых ошибок при применении формулы Ньютона-Лейбница.

Пример 1.11 *Верны ли следующие применения формулы Ньютона-Лейбница при нахождении определенных интегралов:*

$$a)\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\ \Big|_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln|-1| = 0;$$

$$b)\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\ \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}?$$

Решение. а) Приведенное решение неверно, поскольку подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на сегменте $[-1, 1]$ неограничена, и следовательно, неинтегрируема на нем (см. теорему 1.1).

b) Здесь ошибка заключается в том, что функция $F(x) = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ терпит разрыв в точке $x = 0$, принадлежащей сегменту $[-1, 1]$, поэтому не может служить первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на рассматриваемом отрезке. Вспомним, что по определению первообразная дифференцируемая, а следовательно, непрерывная функция. Чтобы решение было правильным, необходимо следить, чтобы функция, выбираемая на роль первообразной, была непрерывна на всем промежутке интегрирования, а если сделать это не удается, то следует разбить отрезок интегрирования на несколько отрезков таких чтобы на каждом из них можно было подобрать непрерывную функцию, являющуюся первообразной подынтегральной функции.

Теперь приведем три правильных решения примера b).

Первое решение. Одной из первообразных для функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на сегменте $[-1, 1]$ является функция $\Phi(x) = \operatorname{arctg} x$, поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \,\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Второе решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, то функции

$$F_1(x) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad -1 \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

непрерывны на сегментах $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно. Поэтому, разбивая исходный интеграл на два интеграла, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = F_1(x)\,\Big|_{-1}^{0} + F_2(x)\,\Big|_{0}^{1} =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\operatorname{arctg}(-1)\right)\right) + \left(-\operatorname{arctg} 1 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Третье решение. Рассмотрим функцию $\Phi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad -1 \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x = 0, \\ \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что эта функция непрерывна и дифференцируема на сегменте $[-1,1]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$ при всех $x \in [-1,1]$. Поэтому, применяя формулу Ньютона-Лейбница, находим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \Phi(x)\,\Big|_{-1}^{1} = = \big((\pi - \operatorname{arctg} 1) - (-\operatorname{arctg}(-1))\big) = \frac{\pi}{2}.$$

■

1.8 Основные методы интегрирования

Вычисление интеграла путем предельного перехода в интегральных суммах, то есть непосредственно по определению, в общем случае задача достаточно сложная. Поэтому возникает вопрос о более простых способах вычисления определенного интеграла Римана. Очевидно, что методы, применявшиеся для нахождения неопределенных интегралов, годятся и для вычисления определенных.

Метод разложения

Пусть функцию $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ представлена в виде линейной комбинации функций $f_j \in R\,[a,b]$, $j = 1,2,\ldots,n$, для которых интегралы $\int\limits_a^b f_j(x)\,dx$ известны. Тогда, благодаря свойствам (4) и (3), функция $f \in R\,[a,b]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int\limits_a^b f_j(x)\,dx. \tag{1.69}$$

Пример 1.12 *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(5x)\,dx.$

Решение. Так как $\sin(3x)\cos(5x) = \frac{1}{2}\sin(8x) - \sin(2x)$, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(8x) - \sin(2x)\big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

■

Замена переменной в интеграле Римана (метод подстановки)

Теорема 1.10 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция* $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$ *— непрерывно-дифференцируема (то есть имеет непрерывную производную) на сегменте* $[\alpha, \beta]$*;*

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$*;*

3) *функция* $f \in C\,[a, b]$.

При этих условиях справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{1.70}$$

Формула (1.70) называется *формулой замены переменной под знаком определенного интеграла*.

Доказательство. Пусть Φ — какая-нибудь первообразная функции f на сегменте $[a, b]$. Тогда $F : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, где $F = \Phi \circ \varphi$ — первообразная функции $(f \circ \varphi)\,\varphi' : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, так как по теореме о дифференцировании сложной функции $\Big(\Phi\big(\varphi(t)\big)\Big)' = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Заметим, что $f \in C\,[a, b]$ по условию, а $(f \circ \varphi)\,\varphi' \in C\,[\alpha, \beta]$ как сложная функция, образованная непрерывными функциями. Применяя формулу Ньютона-Лейбница (1.67) выводим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi\big(\varphi(\beta)\big) - \Phi\big(\varphi(\alpha)\big) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

■

Замечание 1.2 *В формулировке теоремы 1.10 не обязательно требовать, чтобы значения функции φ не выходили за пределы сегмента $[a,b]$, но тогда функция f должна быть определена и непрерывна на сегменте $[A,B] \supset [a,b]$, на котором расположены все значения функции φ.*

Замечание 1.3 *При замене переменной в определенном интеграле после нахождения первообразной нет надобности возвращаться к старой переменной, как в неопределенном интеграле. Поскольку, если вычислен один из интегралов в формуле (1.70), представляющий собой число, то тем самым вычислен и другой.*

Пример 1.13 *Вычислить* $\displaystyle\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Решение. Положим $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt$. При $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ значения функции $\varphi(t) := a\sin t$ заполняют сегмент $[0,a]$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = a$. Следовательно все условия теоремы 1.10 выполнены, поэтому

$$\int\limits_{0}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

■

Пример 1.14 *Вычислить интеграл* $\displaystyle I = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx.$

Решение. Сделаем замену переменной, положив $x = \pi - t$. Тогда, при изменении x от 0 до π переменная t изменяется от π до 0 и $dx = -dt$. По теореме 1.10 имеем

$$\begin{aligned} I = -\int\limits_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =& \pi\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_{0}^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \\ =& \pi\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - I. \end{aligned}$$

Решая, данное уравнение относительно I, получаем

$$I = \frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\,\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

■

Формула интегрирования по частям

Теорема 1.11 *Пусть функции $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывно-дифференцируемы (то есть имеют непрерывные производные) на сегменте $[a, b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{1.71}$$

Формула (1.71) называется формулой интегрирования по частям для определенного интеграла. Так как $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$, эту формулу записывают еще в следующем виде:

$$\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\,\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{1.72}$$

Доказательство. В справедливости формулы (1.71) убедиться нетрудно. Действительно функция uv является первообразной для функции $(uv)' = uv' + u'v$. Следовательно по формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int\limits_a^b \big(u(x)v'(x) + u'(x)v(x)\big)\,dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^b.$$

Отсюда, используя свойство 4, получаем доказываемую формулу (1.71).

■

Пример 1.15 *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Тогда $du = dx$, $v = -\cos x$ и

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\,\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi + \sin x\,\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

■

Пример 1.16 *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, находим $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Тогда

$$\int\limits_0^{1} \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^{1} - \int\limits_0^{1}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

■

Пример 1.17 *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$.

Решение. Положим $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$. Тогда $du = e^x\,dx$, $v = \sin x$ и

$$\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = e^x\sin x\,\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\,dx = -\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\,dx.$$

Еще раз проинтегрируем по частям, полагая $u = e^x$, $dv = -\sin x\,dx$, при этом найдем $du = e^x\,dx$, $v = \cos x$. Тогда

$$\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = e^x\cos x\,\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x\cos\,dx = -e^{\pi} - 1 - \int\limits_0^{\pi} e^x\cos\,dx.$$

Отсюда находим

$$\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right).$$

■

2 Несобственные интегралы (определения и вычисление)

Займемся обобщением понятия определенного интеграла. Мы уже познакомились с понятием определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для случая сегмента $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и ограниченной функции f. Но иногда приходится иметь дело либо с интегралами по неограниченному промежутку либо с интегралами от неограниченных функций. Такие интегралы называются *несобственными.* Сначала определим интеграл на одномерном неограниченном связном множестве (таковыми являются полупрямые $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ и вся прямая $\mathbb{R}$), а затем введем понятие интеграла от неограниченной функции на ограниченном полуинтервале $[a,b)$ или $(a,b]$.

2.1 Несобственные интегралы первого рода

Определение 2.1 *Пусть функция f определена на полупрямой $[a,+\infty)$ и интегрируема (по Риману) на любом сегменте $[a,R] \subset [a,+\infty)$. Предел (конечный)*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)\,dx, \tag{2.1}$$

если он существует, называется несобственным интегралом первого рода от функции f по полупрямой $[a,+\infty)$.

Для предела (2.1) используют обозначение:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Сам символ (2.2) также называют несобственным интегралом первого рода и говорят, что *несобственный интеграл* (2.2) *сходится*, если предел (2.1) существует, и *расходится* в противном случае.

Замечание 1. Если $b > a$, то наряду с интегралом (2.2) можно рассматривать интеграл $\int\limits_b^\infty f(x)\,dx$. Очевидно, что из сходимости одного из указанных интегралов следует сходимость другого и справедливо равенство

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx.$$

Аналогично определяются несобственные интегралы по полупрямой $(-\infty, b]$ и всей прямая $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{R'\to-\infty\\ R''\to+\infty}} \int_{R'}^{R''} f(x)\,dx.$$

Пример 2.1 *Пусть $a > 0$. Исследовать, при каких значениях p сходится или, что то же самое, определен несобственный интеграл*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{2.3}$$

Решение. Так как функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ непрерывна на полупрямой $[a, +\infty)$, она интегрируема на любом сегменте $[a, R) \subset [a, +\infty)$, причем

$$\int_a^R \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \dfrac{R^{1-p} - a^{1-p}}{1-p} & \text{при} \quad p \neq 1, \\ \left.\ln x\right|_a^R = \ln\dfrac{R}{a} & \text{при} \quad p = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что предел $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_a^R \frac{dx}{x^p}$ существует и равен $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$ только при $p > 1$. Следовательно,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \quad \text{при} \quad p > 1,$$

а при остальных значениях p интеграл (2.3) расходится, т. е. не определен. ■

Пример 2.2 *Вычислить интеграл*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \tag{2.4}$$

Решение.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \\ = \lim_{R\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x \, \Big|_0^R \right) = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2}.$$

■

Основная формула интегрирования

В приведенных примерах сначала вычислялся интеграл по ограниченному промежутку, а затем путем предельного перехода вычислялся несобственный интеграл. Запишем это одной формулой.

Пусть функция f определена на полупрямой $[a, +\infty)$ и для каждого $R > a$ интегрируема на сегменте $[a, R]$, и пусть для нее существует первообразная F на всей полупрямой $[a, +\infty)$. Тогда

$$\int\limits_a^R f(x)\,dx = F(R) - F(a) = F(x)\,\Big|_0^R .$$

Поэтому

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} (F(R) - F(a)) = \lim_{R\to+\infty} F(R) - F(a). \tag{2.5}$$

Теперь понятно, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{R\to+\infty} F(R) = F(+\infty).$$

Из (2.5) следует формула Ньютона-Лейбница для несобственных интегралов первого рода:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^{+\infty} .$$

Пример 2.3 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}. \tag{2.6}$$

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

■

Пример 2.4 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}. \tag{2.7}$$

Решение. Сначала найдем какую-нибудь первообразную функции для $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$ на полупрямой $[1,+\infty)$. Так как

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

то

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} + C.$$

Таким образом, одной из первообразных функции $f(x)$ является функция $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$. Найдем предел (если он существует) $F(x)$ при $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0.$$

Следовательно, $F(+\infty) = 0$, а поскольку $F(1) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln 2$, то по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} = F(+\infty) - F(1) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

■

Замена переменных

Теорема 2.1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функция* $\varphi : [\alpha, +\infty) \longrightarrow [a, +\infty)$ — *возрастающая и непрерывно-дифференцируемая на полупрямой* $[\alpha, +\infty)$*;*

2) $\varphi(\alpha) = a,\ \lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ *;*

3) *функция* $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ — *непрерывна.*

При этих условиях из сходимости одного из следующих несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ и } \int\limits_\alpha^{+\infty} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt \tag{2.8}$$

вытекает сходимость другого и их равенство.

Доказательство. Возьмем произвольное $\rho > \alpha$. Поскольку функция φ возрастает и непрерывна на сегменте $[\alpha, \rho]$, этому сегменту соответствует сегмент $[a, R]$ такой, что при изменении аргумента функции φ на сегменте $[\alpha, \rho]$ ее значения заполняют сегмент $[a, R]$, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\rho) = R$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.10 о замене переменной по знаком определенного интеграла. Поэтому справедливо равенство

$$\int\limits_a^R f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\rho f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{2.9}$$

В силу возрастания функции φ, $R \longrightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда $\rho \longrightarrow +\infty$. Поэтому из формулы (2.9) следует справедливость утверждения доказываемой теоремы. ∎

Интегрирование по частям

Теорема 2.2 *Пусть функции* u *и* v — *непрерывно-дифференцируемы на полупрямой* $[a, +\infty)$ *и пусть существует предельное значение*

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = A.$$

Тогда сходимость одного из интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx \tag{2.10}$$

влечет сходимость другого и справедливость равенства

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = A - u(a)v(a) - \int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx. \tag{2.11}$$

Формула (2.11) называется формулой интегрирования по частям.

Доказательство. Рассмотрим произвольный сегмент $[a, R]$. На этом сегменте функции u и v удовлетворяют всем условиям теоремы 1.11. Поэтому

$$\int\limits_a^{R} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\,\Big|_a^R - \int\limits_a^{R} u'(x)v(x)\,dx. \tag{2.12}$$

Поскольку при $R \longrightarrow +\infty$ существует конечный предел первого слагаемого правой части (2.12), то предел всей правой части (2.12) будет существовать тогда и только тогда, когда будет существовать предел левой части этого равенства, что означаем одновременную сходимость или расходимость интегралов (2.10). В случае их сходимости из (2.12), путем предельного перехода, получаем равенство (2.11). ■

Пример 2.5 *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Решение. Будем интегрировать этот интеграл по частям. Положим $u = \ln x$, $dv = \dfrac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$. Тогда находим $du = \dfrac{dx}{x}$ и $v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Поэтому

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\,\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)}. \tag{2.13}$$

Введем обозначение: $\Phi(x) = \dfrac{\ln x}{2(1+x^2)}$. Применяя второе правило Лопиталя, вычисляем

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^2} = 0.$$

А так как $\Phi(1) = 0$, то учитывая результат примера 2.4, окончательно получаем
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln 2.$$
■

2.2 Несобственные интегралы второго рода

Определение 2.2 *Пусть на полуинтервале $[a,b)$ задана функция f. Точка $x = b$ называется особой точкой функции f, если функция f не ограничена на полуинтервале $[a,b)$, но ограничена на любом сегменте $[a,b-\alpha] \subset [a,b)$.*

Если, кроме того, функция $f \in R\,[a,b-\alpha]$ при любом $0 < \alpha \leq b-a$, то на полуинтервале $(0,b-a]$ определена функция
$$F(\alpha) := \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Определение 2.3 *Если существует (конечный) предел*
$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx, \tag{2.14}$$
то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают
$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx. \tag{2.15}$$

Символ (2.15) также называют несобственным интегралом второго рода. Причем, если предел (2.14) существует, то *несобственный интеграл называют сходящимся*, в противном случае, — *расходящимся.*

Аналогично определяется несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если функция f неограничена в окрестности точки $x = a$. Если же функция f неограничена в окрестности точки $x = c$ $a < c < b$, то следует рассмотреть отдельно два интеграла $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ и если каждый из них сходится, то сходится и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Пример 2.6 *Определить при каких значениях параметра p сходится интеграл*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}. \tag{2.16}$$

Решение. Этот интеграл является несобственным тогда и только тогда, когда $p > 0$. Очевидно, что точка $x = b$ — особая точка подынтегральной функции $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$. А так как функция f непрерывна на полуинтервале $[0, b)$, она интегрируема на любом сегменте $[a, b-\alpha]$ и

$$\int\limits_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^{b-\alpha} = \dfrac{(b-a)^{1-p} - \alpha^{1-p}}{1-p} & \text{при} \quad p \neq 1, \\ -\ln(b-x)\Bigg|_a^{b-\alpha} = \ln\dfrac{b-a}{\alpha} & \text{при} \quad p = 1. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ существует и равен $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ при $p < 1$ и не существует при $p \geq 1$. Это означает, что рассматриваемый несобственный интеграл при $p < 1$ сходится, а при $p \geq 1$ расходится. ■

2.3 Связь между несобственными интегралами первого и второго рода

При некоторых ограничениях на подынтегральные функции, с помощью замены переменной, можно от несобственных интегралов одного рода переходить к несобственным интегралам другого рода. Например, справедливо следующее

Предложение 2.1 *Пусть функция $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывна на полусегменте $[a, b)$ и b — особая точка этой функции. Тогда из сходимости одного из интегралов*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \quad и \quad \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует сходимость другого и их равенство.

Доказательство. Возьмем произвольное $\alpha \in (0, b-a]$. В интеграле $\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx$ произведем замену переменной, полагая $x = b - \dfrac{1}{t}$. Тогда $dx = \dfrac{dt}{t^2}$, переменная x пробегает сегмент $[a, b-\alpha]$ тогда и только тогда, когда переменная t пробегает сегмент $\left[\dfrac{1}{b-a}, \dfrac{1}{\alpha}\right]$, причем точка a переходит в точку $\dfrac{1}{b-a}$, а точка $(b-\alpha)$ — в точку $\dfrac{1}{\alpha}$. Следовательно, по теореме о замене переменной в определенном интеграле (теорема 1.10), имеем

$$\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Это равенство показывает, что из существования одного из пределов

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует существование и другого и их равенство, чем и завершается доказательство предложения (2.1). ∎

Пример 2.7 *Преобразовать несобственный интеграл второго рода*

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$$

в несобственный интеграл первого рода.

Решение. Подынтегральная функция непрерывна на полусегменте $[0,2)$ и неограничена в окрестности точки $x=2$, то есть $x=2$ — ее особая точка. Поэтому

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_0^{2-\alpha} = \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)\sqrt{\frac{1}{t}}} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\alpha} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}}.$$

■

3 Геометрические приложения определенного интеграла

3.1 Длина дуги кривой

Многие выдающиеся ученые занимались изучением кривых. Многие годы жизни они посвятили решению задач, которые современные студенты, применяя интегральное исчисление, решают теперь на практических занятиях. Например, изучение циклоиды связано с именами Галилея, Торричелли, Вивиани.

В различных разделах математики термин кривая, абстрагирующий наше обыденное представление о кривой линии, определяется по разному, в зависимости от целей и методов исследования. В математическом анализе под кривой подразумевают любое непрерывное отображение сегмента (или множество значений этого отображения) в пространство $\mathbb{R}^n$.

Плоская кривая

Одним из способов задания кривой является *параметрический.*

Определение 3.1 *Пусть функции* φ *и* $\psi \in C\,[\alpha, \beta]$. *Кривой (плоской кривой) будем называть множество точек плоскости, координаты которых задаются уравнениями*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\,. \tag{3.1}$$

При этом точку $A\,(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ *назовем началом кривой, а точку* $B\,(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ *— концом.*

Переменную t называют *параметром*, а уравнения (3.1) — *параметрическими уравнениями кривой*.

Если параметр t интерпретировать как время, то кривую, заданную уравнениями (3.1), можно рассматривать как траекторию (след) движения точки на плоскости. Это соображение делает приведенное определение кривой вполне естественным.

Отметим, что одна и та же кривая может быть задана (параметризована) бесчисленным множеством способов путем представления параметра t в виде непрерывной строго монотонной функции некоторого другого параметра.

Заметим также, что наше прежнее представление о кривой как графике непрерывной функции $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ является частным случаем определения 3.1. Действительно, полагая $x = t$, $y = f(t)$, получаем параметрические уравнения графика функции f.

Определение 3.2 *Кривая L, определяемая уравнениями (3.1), называется простой, если из того, что $t_1 \neq t_2$, (t_1,$t_2 \in [\alpha, \beta]$) следует, что* $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

Таким образом, каждой точке простой кривой отвечает только одно значение параметра t из сегмента $[\alpha, \beta]$.

В дальнейшем мы будем изучать только такие кривые, определяемые уравнениями (3.1), для каждой из которых существует разбиение сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ на частичные сегменты $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, такие что для любого i кривая

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i]$$

является простой. Примеры таких кривых приведены на рисунке 10.

Определение 3.3 *Кривая L называется простой замкнутой кривой, если ее конец совпадает с ее началом, то есть $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, но для любого $\gamma \in (\alpha, \beta)$ обе кривые*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \gamma]\,,$$
$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\gamma, \beta]$$

являются простыми.

На рисунке 10 изображены кривые: (a) — простая замкнутая, (b) — замкнутая, но не простая, (c) не замкнутая и не простая.

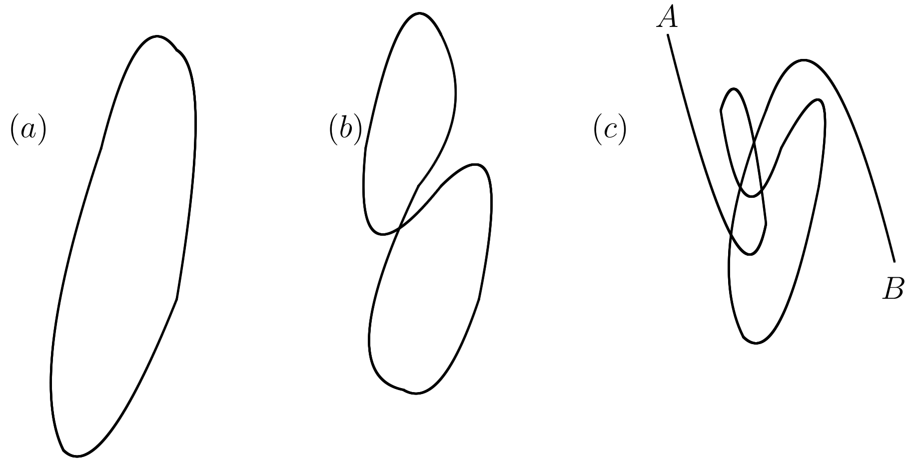

Рис. 10: Примеры кривых.

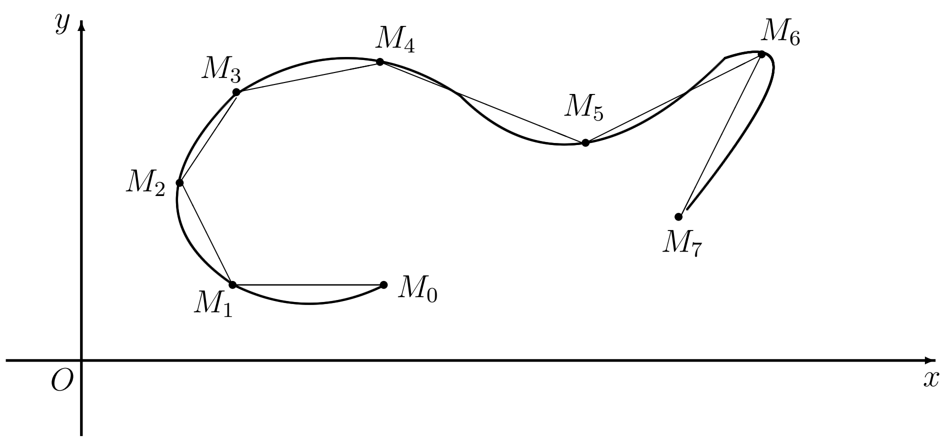

Рис. 11: Ломанная, вписанная в простую кривую ($n = 7$).

Пусть L — простая кривая, определяемая уравнениями (3.1). Возьмем произвольное разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Пусть M_0,M_1,…, M_n — точки кривой L, отвечающие значениям параметра $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Соединим последовательно точки M_0,M_1,…, M_n отрезками. Полученную ломанную $M_0 M_1 \ldots M_n$ назовем *ломанной, вписанной в кривую* L *и отвечающей данному разбиению* T *сегмента* $[\alpha, \beta]$ (рис. 11).

Очевидно, что длина $\overline{\ell}_i(T)$ звена $M_{i-1}M_i$ этой ломаной равна

$$\begin{aligned}\overline{\ell}_i(T) = &\ \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}\ = \\ = &\ \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}\,.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Поэтому длина $\overline{\ell}\,(T)$ всей ломанной, вписанной в кривую L и отвечающей данному разбиению T, находится по формуле

$$\overline{\ell}\,(T) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\ell}_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\big)^2 + \big(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big)^2}\,. \tag{3.3}$$

Определение 3.4 *Кривая L называется спрямляемой, если множество $\left\{\overline{\ell}(T)\right\}$ длин вписанных в нее ломанных, отвечающих всевозможным разбиениям T сегмента $[\alpha, \beta]$, ограничено. При этом точная верхняя грань ℓ множества $\left\{\overline{\ell}(T)\right\}$, то есть число*

$$\ell = \sup\left\{\overline{\ell}(T)\right\}, \tag{3.4}$$

называется длиной дуги кривой L.

Лемма 3.1 *Пусть простая кривая L, определяется уравнениями (3.1), T и T^* — произвольные разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$, $\overline{\ell}(T)$ и $\overline{\ell}(T^*)$ — длины ломаных, вписанных в кривую L и отвечающих разбиениям T и T^* соответственно. Если разбиение T^* является продолжением разбиения T, то $\overline{\ell}(T) \leq \overline{\ell}(T^*)$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда разбиение T^* получено из разбиения T добавлением лишь одного нового узла t^*. Пусть значению параметра t^* на кривой L соответствует точка C, расположенная между точками M_{k-1} и M_k. Ломанная, отвечающая разбиению T^*, отличается от ломанной, отвечающей разбиению T, лишь тем, что одно звено $M_{k-1}M_k$ заменено двумя звеньями $M_{k-1}C$ и CM_k. Так как длина стороны $M_{k-1}M_k$ треугольника $M_{k-1}CM_k$ не превосходит суммы длин двух других его сторон $M_{k-1}C$ и CM_k, то $\overline{\ell}(T) \leq \overline{\ell}(T^*)$. ■

Теорема 3.1 *Если функции φ и ψ — непрерывно дифференцируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая L, определяемая параметрическими уравнениями (3.1), спрямляема и длина ℓ ее дуги может быть вычислена по формуле*

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\,. \tag{3.5}$$

Доказательство. Сначала докажем, что кривая L спрямляема. Для этого преобразуем выражение (3.3) длины $\overline{\ell}(T)$ ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей произвольному разбиению T сегмента $[\alpha, \beta]$. Из условия теоремы следует, что для каждой из функций φ и ψ на каждом частичном сегменте $[t_{i-1}, t_i]$ выполняются все условия теоремы Лагранжа. Поэтому, для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ найдутся точки τ_i, $\tau_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$ такие, что

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i, \quad \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\tau_i^*)\Delta t_i.$$

Следовательно, формула (3.3) принимает вид

$$\overline{\ell}\,(T) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(\varphi'(\tau_i)\big)^2 + \big(\psi'(\tau_i^*)\big)^2}\, \Delta t_i. \tag{3.6}$$

По условию функции φ и ψ имеют на сегменте $[\alpha, \beta]$ непрерывные производные. Следовательно, эти производные ограничены. Поэтому найдется число $M > 0$ такое, что

$$|\varphi'(t)| \le M, \quad |\psi'(t)| \le M, \quad t \in [\alpha, \beta]\,.$$

Теперь, используя представление (3.6), выводим оценку

$$\overline{\ell}\,(T) \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{M^2 + M^2}\, \Delta t_i = M\sqrt{2}\, \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = M\sqrt{2}\,(\beta - \alpha),$$

которая справедлива при любом разбиению T. По определению 3.4 кривая L спрямляема. Теперь приступим к доказательству формулы (3.5).

Прежде всего отметим, что интеграл, стоящий в формуле (3.5), существует. Действительно, поскольку функции φ и ψ имеют непрерывные производные на сегменте $[\alpha, \beta]$, подынтегральная функция непрерывна, а следовательно и интегрируема на этом сегменте. Пусть I обозначает упомянутый интеграл, то есть

$$I := \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt\,. \tag{3.7}$$

Следовательно нужно доказать, что $\ell = I$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения ℓ следует, что существует разбиение T^* сегмента $[\alpha, \beta]$ при котором справедлива оценка

$$0 \le \ell - \overline{\ell}\,(T^*) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.8}$$

По условию теоремы производная ψ' функции ψ непрерывна, поэтому функция ψ' интегрируема на сегменте $[\alpha, \beta]$.

На основании определения интеграла и критерия интегрируемости найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\widetilde{T}$ сегмента $[\alpha, \beta]$ с параметром разбиения $\widetilde{\Delta} < \delta$, при любом выборе точек $\widetilde{\tau}_i$ на частичных сегментах $\big[\widetilde{t}_{i-1}, \widetilde{t}_i\big]$, выполняются оценки

$$\big|I\left\{\widetilde{t}_i, \widetilde{\tau}_i\right\} - I\big| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad S(\widetilde{T}) - s(\widetilde{T}) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.9}$$

где $I\left\{\widetilde{t}_i, \widetilde{\tau}_i\right\}$ — любая интегральная сумма функции $\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}$, соответствующая данному разбиению $\widetilde{T}$, а $S(\widetilde{T})$ и $s(\widetilde{T})$ — суммы Дарбу функции ψ' для этого же разбиения $\widetilde{T}$ сегмента $[\alpha, \beta]$.

Зафиксируем произвольное разбиение $\widetilde{T}$ сегмента $[\alpha, \beta]$ с параметром разбиения $\widetilde{\Delta} < \delta$ и построим новое разбиение T сегмента $[\alpha, \beta]$, добавив к узлам разбиения $\widetilde{T}$ все узлы разбиения T^*.

Разбиение T является продолжением разбиения T^*, поэтому по лемме 3.1 имеем $\overline{\ell}\,(T^*) \le \overline{\ell}\,(T)$. Отсюда и из (3.8) следует оценка

$$0 \le \ell - \overline{\ell}\,(T) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.10}$$

Пусть $I\{t_i,\tau_i\}$ — интегральная сумма функции $\sqrt{\bigl(\varphi'(t)\bigr)^2+\bigl(\psi'(t)\bigr)^2}$, соответствующая разбиению T сегмента $[\alpha,\beta]$ с теми же точками τ_i, что и в формуле (3.6), то есть

$$I\{t_i,\tau_i\}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i)\bigr)^2}\,\Delta t_i, \tag{3.11}$$

а $S(T)$ и $s(T)$ — суммы Дарбу функции ψ' построенные для разбиения T сегмента $[\alpha,\beta]$. А поскольку разбиение T является продолжением разбиения $\widetilde{T}$, то параметр Δ разбиения T удовлетворяет условию $\Delta<\delta$. Ввиду этого, оценки (3.9) влекут следующие оценки

$$\bigl|I\{t_i,\tau_i\}-I\bigr|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.12}$$

$$S(T)-s(T)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.13}$$

Разность $\ell-I$ представим в виде

$$\ell-I=\bigl(\ell-\overline{\ell}\,(T)\bigr)+\bigl(\overline{\ell}\,(T)-I\{t_i,\tau_i\}\bigr)+\bigl(I\{t_i,\tau_i\}-I\bigr)$$

и оценим ее абсолютную величину. Применяя оценки (3.10) и (3.12), получаем

$$|\ell-I|<\frac{2\varepsilon}{3}+\bigl|\overline{\ell}\,(T)-I\{t_i,\tau_i\}\bigr|. \tag{3.14}$$

Теперь оценим $\bigl|\overline{\ell}\,(T)-I\{t_i,\tau_i\}\bigr|$. Используя представления (3.6), (3.11) и оценку (3.13), выводим

$$\begin{aligned}
&\bigl|\overline{\ell}\,(T)-I\{t_i,\tau_i\}\bigr|=\\
=\ &\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i^*)\bigr)^2}\,\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i)\bigr)^2}\,\Delta t_i\right|\le\\
\le\ &\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i^*)\bigr)^2}-\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i)\bigr)^2}\right|\,\Delta t_i=\\
=\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{\Bigl|\Bigl(\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i^*)\bigr)^2\Bigr)-\Bigl(\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i)\bigr)^2\Bigr)\Bigr|}{\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i^*)\bigr)^2}+\sqrt{\bigl(\varphi'(\tau_i)\bigr)^2+\bigl(\psi'(\tau_i)\bigr)^2}}\,\Delta t_i\le\\
\le\ &\sum_{i=1}^{n}\frac{\bigl|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)\bigr|\bigl|\psi'(\tau_i^*)+\psi'(\tau_i)\bigr|}{\bigl|\psi'(\tau_i^*)\bigr|+\bigl|\psi'(\tau_i)\bigr|}\,\Delta t_i.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\dfrac{\bigl|\psi'(\tau_i^*)+\psi'(\tau_i)\bigr|}{\bigl|\psi'(\tau_i^*)\bigr|+\bigl|\psi'(\tau_i)\bigr|}\le 1$, получаем

$$\bigl|\overline{\ell}\,(T)-I\{t_i,\tau_i\}\bigr|\le\sum_{i=1}^{n}\bigl|\psi'(\tau_i^*)-\psi'(\tau_i)\bigr|\,\Delta t_i\le S(T)-s(T)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) следует оценка $|\ell - I| < \varepsilon$. В силу произвольности ε это означает, что $\ell = I$. Теорема доказана. ■

Выражение

$$d\ell = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt \tag{3.16}$$

называется дифференциалом дуги. С учетом этого обозначения, формула (3.5) длины дуги кривой может быть записана в виде

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} d\ell\,. \tag{3.17}$$

Замечание 3.1 *Если кривая L является графиком непрерывно дифференцируемой на сегменте $[a, b]$ функции f, то кривая L спрямляема и длина ℓ ее дуги может быть найдена по формуле*

$$d\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx\,. \tag{3.18}$$

Действительно, как уже отмечалось, график функции можно рассматривать как кривую, определяемую параметрическими уравнениями

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b]\,.$$

Нетрудно проверить, что при таком задании кривой L все условия теоремы 3.1 выполняются.

Замечание 3.2 *Если неотрицательная функция r непрерывно дифференцируема на сегменте $[\theta_1, \theta_2]$, то кривая L определяемая уравнением*

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\theta_1, \theta_2]\,,$$

заданным в полярной системе координат, спрямляема и длина ℓ ее дуги может быть найдена по формуле

$$d\ell = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi\,. \tag{3.19}$$

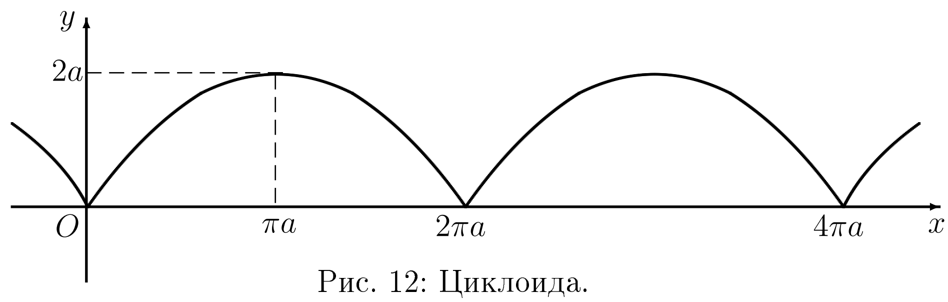

Рис. 12: Циклоида.

Действительно, выбирая в качестве параметра переменную φ и полагая $x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi$, получаем (3.19).

Пример 3.1 *Вычислить длину одной арки циклоиды (рис. 12)*

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Решение. Вычислим $d\ell$. Так как $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$. Находим

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right) = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}\,.$$

Следовательно, учитывая, что $\sin\dfrac{t}{2} \geq 0$ при $0 \leq t \leq 2\pi$, имеем $d\ell = 2a\sin\dfrac{t}{2}\,dt$. Поэтому

$$\ell = \int\limits_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\,\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

■

Пример 3.2 *Найти длину дуги цепной линии $y = a\,ch\dfrac{x}{a}$ от точки $A(0,a)$ до точки $B(a, a\,ch1)$ (рис. 13).*

Решение. Дифференциал дуги находим по формуле (3.18):

$$d\ell = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx.$$

Теперь вычисляем длину дуги

$$\ell = \int\limits_0^a d\ell = \int\limits_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\,\Big|_0^a = a\operatorname{sh}1 = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right).$$

■

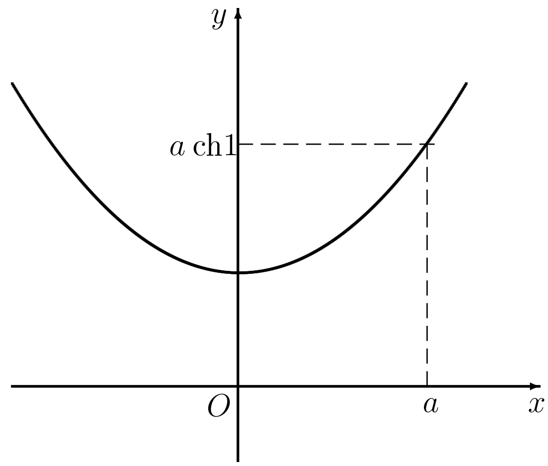

Рис. 13: Цепная линия

Пример 3.3 *Вычислить длину дуги кривой L, определяемой уравнением $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ (рис. 14).*

Решение. Функция $\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ четная 4π периодическая. Следовательно кривая L симметрична относительно полярной оси. При изменении φ от 0 до 2π функция r возрастает от 0 до a, то же происходит и при изменении φ от 0 до -2π. Поэтому при изменении φ от -2π до 2π получается замкнутая кривая, изображенная на рисунке 14.

Рассматриваемая кривая не является простой, но сегмент $[-2\pi, 2\pi]$ можно разбить на четыре сегмента $[-2\pi, -\pi]$ $[-\pi, 0]$ $[0, \pi]$ $[\pi, 2\pi]$, на каждом из которых кривая L будет простой. Следовательно длина дуги всей кривой равна сумме длин дуг составляющих ее частей, то есть

$$\ell = \int\limits_{-2\pi}^{-\pi} d\ell + \int\limits_{-\pi}^{0} d\ell + \int\limits_{0}^{\pi} d\ell + \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\ell = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} d\ell.$$

Найдем дифференциал $d\ell$ по формуле (3.19). Так как

$$r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2 = a^2\left(\sin^8\frac{\varphi}{4} + \sin^6\frac{\varphi}{4}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{4}\right) = a^2\sin^6\frac{\varphi}{4},$$

то

$$d\ell = \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi = a\sin^3\frac{\varphi}{4}\, d\varphi.$$

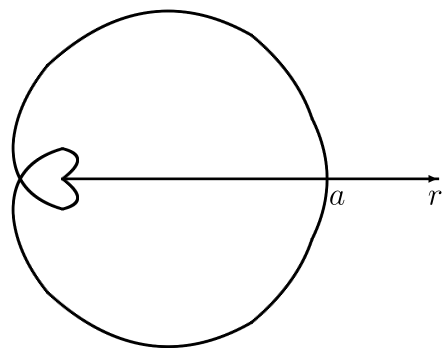

Рис. 14: $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$

Поэтому

$$\ell = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} d\ell = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} a\sin^3\frac{\varphi}{4}\,d\varphi = 2a\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}\,d\varphi =$$
$$= -8a\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)\,d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right) = -8a\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16}{3}a.$$

■

Понятие пространственной кривой

Пространственная кривая определяется в полной аналогии с плоской кривой. Например, *простой пространственной кривой* называют множество точек пространства, координаты которых задаются уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]\,, \tag{3.20}$$

где функции φ, ψ и χ — непрерывны на сегменте $[\alpha, \beta]$, причем различным значениям параметра t соответствуют различные точки указанного множества.

Отметим, что вся терминология, введенная для плоских кривых, естественным образом переносится на пространственные кривые. Поэтому достаточные условия спрямляемости пространственной кривой формулируются и доказываются подобно случаю плоской кривой.

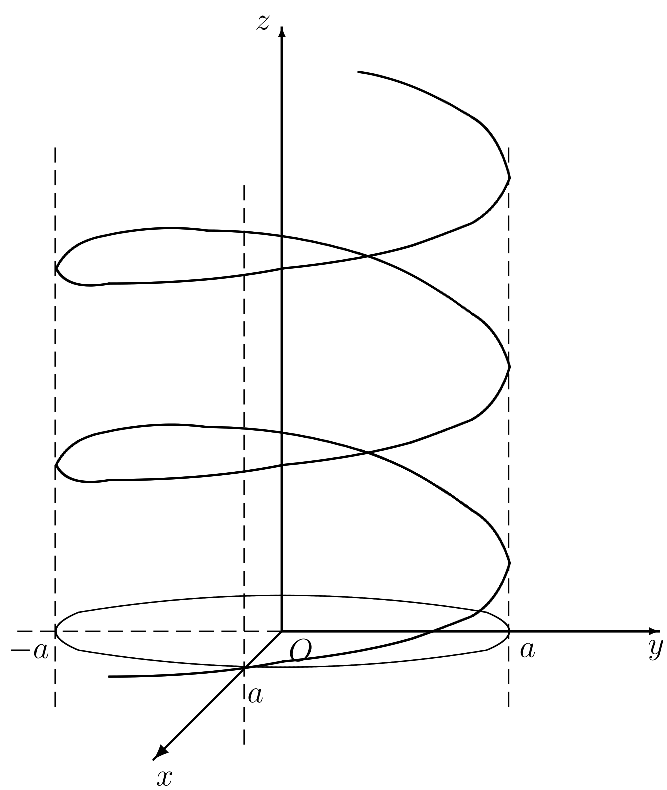

Рис. 15: Винтовая линия

Теорема 3.2 *Если функции φ, ψ и χ — непрерывно дифференцируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$, то кривая L, определяемая параметрическими уравнениями (3.20), спрямляема и длина ℓ ее дуги может быть вычислена по формуле*

$$\begin{aligned}\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\chi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt = \\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt\,.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Пример 3.4 *Вычислить длину дуги части винтовой линии (рис. 15)*

$$x = a\,\cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Решение.

$$\ell = \int\limits_0^{t_0} d\ell = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2\,\sin^2 t + a^2\,\cos^2 t + b^2}\, dt = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, t_0.$$

■

3.2 Площадь плоской фигуры

Площадь принадлежит к наиболее известным математическим понятиям. Практическое знакомство с площадями сделало это понятие для нас естественным. Из курса элементарной математики известно понятие площади для простых геометрических фигур, например, ограниченных отрезками прямых. А что такое «площадь» фигуры, ограниченной иными линиями? В элементарной геометрии не дается определения площади такой фигуры. Точное определение площади представляет значительные логические трудности.

Долгое время в математике господствовала точка зрения, что площадь — первичное понятие, не подлежащее определению. Никому и в голову не приходило, что понятие площади нуждается в специальном определении. Математики на протяжении многих столетий вычисляли площади различных фигур. Очевидно, что такие вычисления (площадь прямоугольника, треугольника, трапеции, круга и т. д.) должны были опираться на некоторые принципы, свойства площади, заменяющие определение. Перечислим основные из этих свойств.

1) Площадь фигуры неотрицательна.

2) Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур без общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.

3) Равные фигуры имеют равные площади.

4) Площадь единичного квадрата равна единице.

Методы, позволяющие вычислять площади фигур на основании этих свойств, в своих основных чертах были разработаны еще в древности. Сначала было установлено, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту и что для вычисления площади произвольного многоугольника достаточно разбить многоугольник на треугольники без общих внутренних точек и сложить площади этих треугольников.

Для вычисления «площади $S(P)$» произвольной фигуры P рассматривались многоугольник Q_B, содержащийся в P, и многоугольник Q_O, содержащий P. В силу монотонности площади справедливо неравенство:

$$S\left(Q_B\right) \leq S\left(P\right) \leq S\left(Q_O\right).$$

Таким образом, площади многоугольников Q_B и Q_O служат приближенными значениями «площади» фигуры P с недостатком и с избытком. Погрешность обоих приближений не превышает разности $Q_O - Q_B$. Но всегда ли можно сделать эту разность сколь угодно малой*? Простой пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Пусть P — множество точек квадрата E со стороной, равной единице, координаты которых рациональны. Так как в любой окрестности точки из E имеются точки множества P, то каждый многоугольник Q_O, содержащий множество P, обязан содержать и квадрат E. Следовательно, $S\left(Q_O\right) \geq 1$. Но множество P не имеет внутренних точек, поэтому $S\left(Q_B\right) = 0$ и $Q_O - Q_B \geq 1$.

Приведенный пример наводит на мысль, что разумно ограничить некоторыми условиями множество фигур на плоскости, для которых можно вводить понятие площади.

Определение 3.5 *Плоской фигурой (или просто фигурой) называется часть плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой L. Кривую L называют границей фигуры.*

В частности, если L — простая замкнутая ломанная, то фигура называется *многоугольником*.

Понятие площади многоугольника, введенное в курсе элементарной математики, является основным для определения понятия квадрируемости (существования площади) плоской фигуры.

Определение 3.6 *Говорят, что фигура Q_1 вписана в фигуру Q_2 или фигура Q_2 описана вокруг фигуры Q_1, если каждая точка фигуры Q_1 и ее границы, принадлежит фигуре Q_2 или ее границе.*

Пусть $\{S_B\}$ — числовое множество площадей многоугольников, вписанных в плоскую фигуру Q, а $\{S_O\}$ — числовое множество площадей многоугольников, описанных вокруг фигуры Q. Ясно, что множество $\{S_B\}$ ограничено сверху (площадью любого многоугольника, описанного вокруг фигуры Q), а множество $\{S_O\}$ ограничено снизу (например, числом нуль). Следовательно, существуют числа

$$\underline{S} = \underline{S}\{Q\} = \sup\{S_B\} \text{ и } \overline{S} = \overline{S}\{Q\} = \inf\{S_O\}.$$

Определение 3.7 *Числа $\underline{S}$ и $\overline{S}$ называются соответственно нижней и верхней площадями фигуры Q.*

Предложение 3.1 *Для каждой плоской фигуры справедливо неравенство $\underline{S} \le \overline{S}$.*

Доказательство. Предположим, что возможно противное, то есть, что для некоторой плоской фигуры выполняется неравенство $\underline{S} > \overline{S}$. Тогда, положим $\varepsilon = \frac{\underline{S}-\overline{S}}{2} > 0$. По определениям точных граней найдутся вписанный в фигуру многоугольник Q_B, и описанный вокруг фигуры многоугольник Q_O, для площадей которых выполняются оценки

$$S_B > \underline{S} - \varepsilon, \quad S_O < \overline{S} + \varepsilon. \tag{3.22}$$

Но из выбора числа ε следует, что

$$\underline{S} - \varepsilon = \frac{\underline{S} + \overline{S}}{2} = \overline{S} + \varepsilon.$$

Поэтому оценки (3.22) влекут $S_O < S_B$, что невозможно. Предложение доказано. ■

Определение 3.8 *Плоская фигура Q называется квадрируемой, если верхняя площадь $\overline{S}$, этой фигуры совпадает с ее нижней площадью $\underline{S}$. При этом их общее значение, то есть число $S = \overline{S} = \underline{S}$, называют площадью фигуры Q.*

Отметем, что существуют неквадрируемые плоские фигуры (см., например, [1], стр. 381).

Теорема 3.3 *Для того, чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такие описанный вокруг фигуры Q и вписанный в фигуру Q многоугольники, чтобы разность их площадей $S_O - S_B$ была бы меньше ε, то есть*

$$S_O - S_B < \varepsilon. \tag{3.23}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть фигура Q была квадрируема, то есть $\overline{S} = \underline{S}$. Из определения чисел $\overline{S}$ и $\underline{S}$, как точных граней соответствующих множеств, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить многоугольник, вписанный в фигуру Q с площадью S_B и многоугольник, описанный вокруг фигуры Q с площадью S_O такие, что

$$\underline{S} - S_B < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad S_O - \overline{S} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что $\overline{S} = \underline{S}$, получаем оценку (3.23).

Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию, существуют многоугольник, вписанный в фигуру Q с площадью S_B и многоугольник, описанный вокруг фигуры Q с площадью S_O такие, что выполняется неравенство (3.23). Из этого неравенства и из неравенств

$$S_B \le \underline{S}, \quad \overline{S} \le S_O$$

по предложению 3.1 получаем $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$. В силу произвольности выбора $\varepsilon 0$, из последней оценки следует равенство $\overline{S} = \underline{S}$. По определению 3.8 фигура Q квадрируема. ■

Площадь криволинейной трапеции

Если понятием площади заинтересовались только в XIX, то проблемой вычисления площадей конкретных фигур математики занимались многие столетия и даже тысячелетия. Задачи подобного сорта (вычисление длин дуг кривых, площадей фигур, объемов тел) оставались важнейшими математическими проблемами до знаменитых работ Ньютона и Лейбница, заложивших основы математического анализа. Интегральное исчисление дает исключительно простой способ решения.

Напомним, что криволинейной трапецией называют фигуру ограниченную графиком функции непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a, b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox.

Знaя, что всякая непрерывная на сегменте функция интегрируема на нем, легко доказать следующее утверждение.

Теорема 3.4 *Криволинейная трапеция P представляет собой квадрируемую фигуру, площадь $S(P)$ которой может быть найдена по формуле*

$$S(P) = \int\limits_a^b f(x)\, dx. \tag{3.24}$$

Доказательство. Так как $f \in C\,[a, b]$, то $f \in R\,[a, b]$. Пусть I обозначает $\int\limits_a^b f(x)\, dx$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По критерию интегрируемости найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[a, b]$ с параметром разбиения $\Delta < \delta$ выполняется оценка

$$S - s < \varepsilon, \tag{3.25}$$

где S и s — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f, отвечающие разбиению T. Но S и s равны соответственно площадям S_O и S_B ступенчатых фигур (многоугольников), первая из которых описана вокруг криволинейной трапеции, а вторая вписана в криволинейную трапецию (рис. 16).

По теореме 3.3, ввиду оценки (3.25), криволинейная трапеция является квадрируемой фигурой. Пусть $S(P)$ обозначает ее площадь. Из неравенств

$$s = S_B \leq S(P) \leq S_O = S, \quad s \leq I \leq S,$$

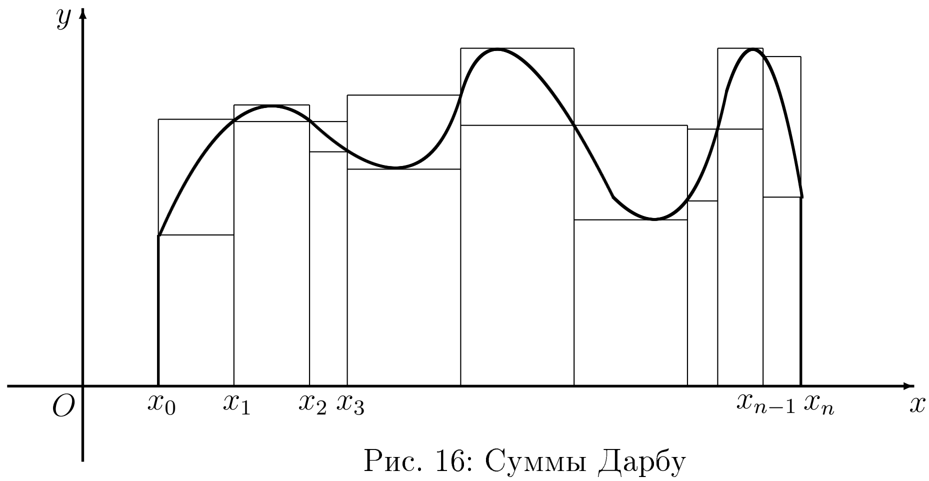

Рис. 16: Суммы Дарбу

снова используя оценку (3.25), выводим

$$S(P) - I \leq S - s < \varepsilon.$$

А это, в силу произвольности выбора ε, означает, что $S(P) = I$. ■

Пусть функции $f, g \in C\,[a, b]$, причем $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a, b]$. Рассмотрим фигуру ограниченную сверху графиком функции f, снизу — графиком функции g и отрезками вертикальных прямых $x = a$ и $x = b$ (рис. 17). Ее площадь может быть вычислена как разность площадей криволинейных трапеций $ABDE$ и $ABCF$, то есть

$$S = \int\limits_a^b f(x)\ dx - \int\limits_a^b g(x)\ dx = \int\limits_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ dx. \tag{3.26}$$

При этом не имеет значения расположение графиков функций f и g относительно оси Ox, поскольку фигуру $FCDE$ всегда можно поднять вертикально вверх настолько, чтобы она расположилась над осью Ox, и вычислить ее площадь. Очевидно, что при вертикальном сдвиге рассматриваемой фигуры ее площадь не меняется и последняя часть формулы (3.26) не претерпевает изменений.

На рисунке 18 изображена фигура ограниченная слева графиком непрерывной функции $x = \psi(y)$, справа — графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$, сверху — отрезком прямой $y = d$, а снизу — отрезком прямой

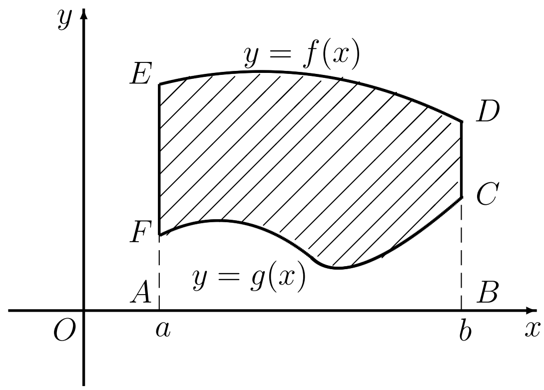

Рис. 17: Разность площадей

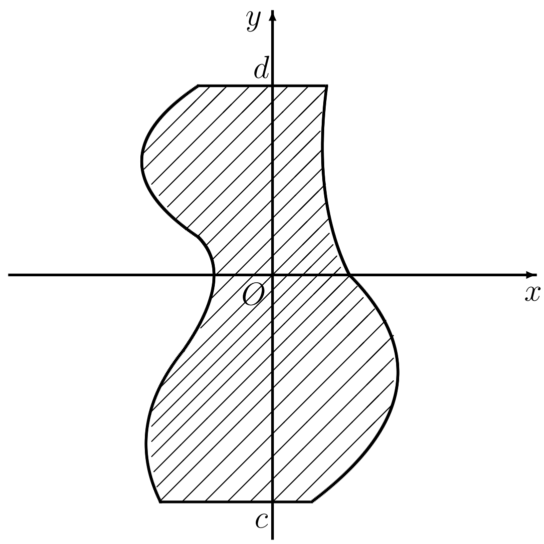

Рис. 18: Площадь фигуры

$y = c$. Понятно, что площадь этой фигуры находится по формуле

$$S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))\ dy. \tag{3.27}$$

Пример 3.5 *Вычислить площадь фигуры ограниченной эллипсом*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, то площадь фигуры будет равна учетверенной площади криволинейной трапеции заштрихованной на рисунке 19.

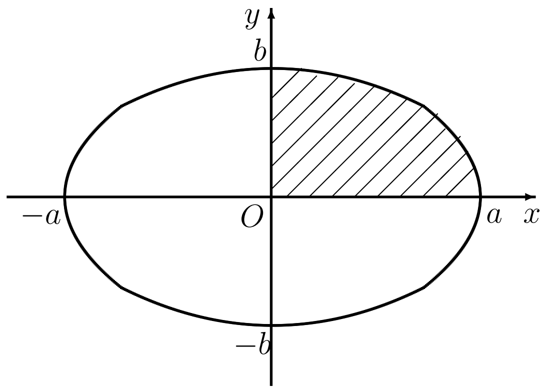

Рис. 19: Эллипс

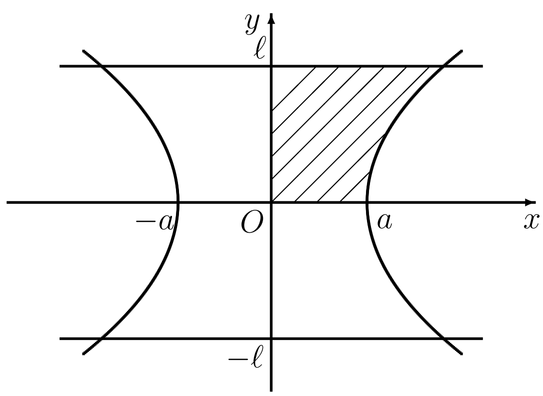

Рис. 20:

Выражая y из уравнения эллипса находим

$$S = 4\,\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Делая замену переменной $x = a\sin t$, получаем

$$S = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2ab\left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

■

Пример 3.6 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной ветвями гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *и прямыми* $y = \pm\ell$ *(рис. 20).*

Решение. Ввиду симметрии фигуры относительно координатных осей, искомая площадь равна учетверенной площади части фигуры, расположенной в первом квадранте. Разрешим уравнение гиперболы относительно x, получим $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$.

Применяя формулу (3.27), имеем

$$S = 4 \cdot \frac{a}{b} \int\limits_0^{\ell} \sqrt{b^2 + y^2}\, dy. \tag{3.28}$$

Пусть I обозначает $\int\limits_0^{\ell} \sqrt{b^2 + y^2}\, dy$. Для вычисления интеграла I домножим и числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\sqrt{b^2 + y^2}$, получаем

$$\begin{aligned} I = \; & \int\limits_0^{\ell} \sqrt{b^2 + y^2}\, dy = \int\limits_0^{\ell} \frac{b^2 + y^2}{\sqrt{b^2 + y^2}}\, dy = \\ & = b^2 \int\limits_0^{\ell} \frac{dy}{\sqrt{b^2 + y^2}} + \int\limits_0^{\ell} y \cdot \frac{y\, dy}{\sqrt{b^2 + y^2}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Интеграл $\int\limits_0^{\ell} \frac{dy}{\sqrt{b^2 + y^2}}$ — табличный; вычислим его.

$$\int\limits_0^{\ell} \frac{dy}{\sqrt{b^2 + y^2}} = \ln\left(y + \sqrt{b^2 + y^2}\right)\Bigg|_0^{\ell} = \ln\left(\ell + \sqrt{b^2 + \ell^2}\right) - \ln b. \tag{3.30}$$

К интегралу $\int\limits_0^{\ell} y \cdot \frac{y\, dy}{\sqrt{b^2 + y^2}}$, применим метод интегрирования по частям. Положим $u = y$, $dv = \frac{y\, dy}{\sqrt{b^2 + y^2}}$. Тогда $du = dy$, $v = \sqrt{b^2 + y^2}$ и поэтому

$$\int\limits_0^{\ell} y \cdot \frac{y\, dy}{\sqrt{b^2 + y^2}} = y\sqrt{b^2 + y^2}\,\Bigg|_0^{\ell} - \int\limits_0^{\ell} \sqrt{b^2 + y^2}\, dy = \ell \cdot \sqrt{b^2 + \ell^2} - I. \tag{3.31}$$

Из (3.29), (3.30) и (3.31), находим

$$I = \frac{1}{2} \cdot b^2 \left(\ln\left(\ell + \sqrt{b^2 + \ell^2}\right) - \ln b\right) + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \sqrt{b^2 + \ell^2}.$$

Подставляя найденное значение интеграла I в (3.28), получаем

$$S = 2ab \ln \frac{\ell + \sqrt{b^2 + \ell^2}}{b} + \frac{2a\ell}{b}\sqrt{b^2 + \ell^2}.$$

■

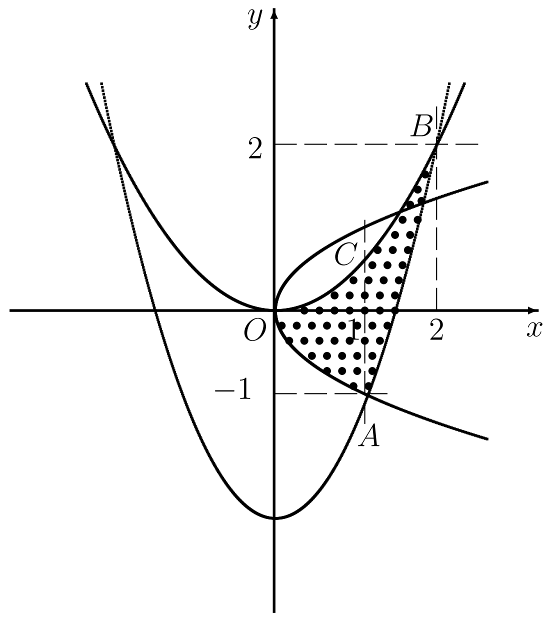

Рис. 21:

Пример 3.7 *Вычислить площадь криволинейного треугольника, ограниченного правыми ветвями парабол $y = x^2 - 2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2$ и нижней ветвью параболы $y^2 = x$ (рис. 21).*

Решение. Для вычисления будем использовать формулу (3.24), поэтому сначала определим абсциссы вершин криволинейного треугольника.

Решая три системы уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}, \tag{3.32}$$

находим

$$x_O = 0, \quad x_A = 1, \quad x_B = 2.$$

Криволинейный треугольник OAB сверху ограничен ветвью параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$, а снизу, от точки O до точки A — ветвью параболы $y^2 = x$ и от точки A до точки B — ветвью параболы $y = x^2 - 2$.

Разобьем треугольник OAB на две части отрезком AC прямой $x = 1$. Площадь каждой из образовавшихся криволинейных треугольников

OAC и ABC может быть вычислена по формуле (3.24). Итак получаем

$$S=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\left(-\sqrt{x}\right)\right)\,dx+\int\limits_1^2\left(\frac{1}{2}x^2-\left(x^2-2\right)\right)\,dx=$$
$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\right)\,dx+\int\limits_1^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)\,dx=$$
$$=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{1}{6}x^3+2x\right)\Bigg|_1^2=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{8}{6}+4+\frac{1}{6}-2=\frac{5}{3}\,.$$

■

Заметим, что для вычисления площади треугольник OAB можно было использовать и формулу (3.27), но все равно этот треугольник пришлось бы разбить на два треугольника осью абсцисс. На рисунке 21 отмечены ординаты точек A и B, необходимые при вычислениях.

Площадь криволинейного сектора

Напомним, что круговым сектором называется часть круга, ограниченная некоторой дугой и двумя радиусами, проведенными к концам этой дуги. Из школьного курса математики известно, что *круговой сектор* является квадрируемой фигурой и его площадь равна длине дуги сектора, умноженной на половину радиуса

$$S=\frac{\varphi R^2}{2}, \tag{3.33}$$

где R — радиус дуги сектора, а φ — радианное измерение этой дуги.

Опираясь на эти знания, докажем квадрируемость криволинейного сектора.

Определение 3.9 *Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением*

$$r=r\left(\varphi\right),\quad \varphi\in\left[\alpha,\beta\right], \tag{3.34}$$

где функция $r:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ — непрерывна и неотрицательна на этом сегменте.

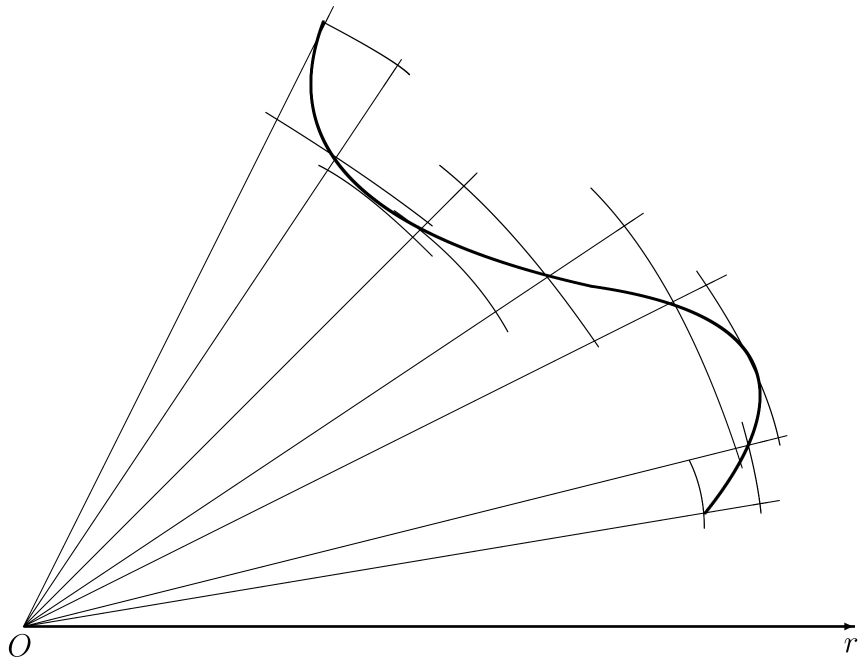

Рис. 22: Криволинейный сектор

Криволинейным сектором называется плоская фигура, ограниченная кривой L и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (лучами, составляющими с полярной осью углы α и β).

Теорема 3.5 *Криволинейный сектор P представляет собой квадрируемую фигуру, площадь $S(P)$ которой может быть вычислена по формуле*

$$S(P) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{3.35}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию функция $r \in C\,[\alpha, \beta]$,то и функция $\dfrac{r^2}{2} \in C\,[\alpha, \beta]$, а, следовательно, $\dfrac{r^2}{2} \in R\,[\alpha, \beta]$. По критерию интегрируемости (теорема 1.2) найдется $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T сегмента $[\alpha, \beta]$ точками

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n = \beta$$

с параметром разбиения $\Delta < \delta$ справедлива оценка

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{3.36}$$

где S и s — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $\frac{r^2}{2}$, соответствующие разбиению T сегмента $[\alpha,\beta]$.

По определению сумм Дарбу имеем

$$S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}R_i^2\Delta\varphi_i,\quad s=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r_i^2\Delta\varphi_i,$$

где

$$R_i=\sup\left\{r(\varphi):\varphi\in[\theta_{i-1},\theta_i]\right\},\ r_i=\inf\left\{r(\varphi):\varphi\in[\theta_{i-1},\theta_i]\right\}.$$

Разобьем криволинейный сектор P на n криволинейных секторов лучами $\varphi=\theta_i$, $i=1,2,\ldots,n-1$. Очевидно, что суммы S и s равны площадям веерообразных фигур соответственно описанной вокруг криволинейного сектора и вписанной в криволинейный сектор и состоящих из круговых секторов (рис. 22). Поскольку круговой сектор является квадрируемой фигурой, в веерообразную фигуру, вписанную в криволинейный сектор, можно вписать многоугольник Q_B, площадь которого S_B будет отличаться от s меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, а вокруг веерообразной фигуры, описанной вокруг криволинейного сектора, можно описать многоугольник Q_O, площадь которого S_O будет отличаться от S меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, то есть будут выполняться неравенства

$$s-S_B<\frac{\varepsilon}{4},\quad S_O-S<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.37}$$

По построению многоугольник Q_B вписан в криволинейный сектор, а многоугольник Q_O описан вокруг криволинейного сектора. Но оценки (3.37) и (3.36) влекут оценку

$$S_O-S_B<\varepsilon. \tag{3.38}$$

Следовательно, по критерию квадрируемости (теорема 3.3) криволинейный сектор P квадрируем. Пусть $S(P)$ — его площадь. Из очевидных неравенств

$$S_B\le S(P)\le S_O,\quad S_B\le s\le\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi\le S\le S_O,$$

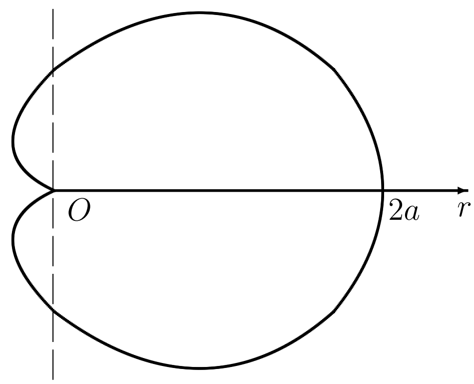

Рис. 23: Кардиоида

и из оценки (3.38) получаем

$$\left| S(P) - \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора ε, это означает, что выполняется равенство (3.35). ■

Пример 3.8 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой* $r = a\,(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$ *(рис. 23).*

Решение. Так как функция $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ — четная, кривая симметрична относительно полярной оси. Кроме того, эта функция 2π-периодичная, поэтому

$$\begin{aligned} S =& 2 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} r^2(\varphi)\, d\varphi = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi = \\ =& a^2 \int\limits_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi = \\ =& a^2 \left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right) \Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}\,. \end{aligned}$$

■

Напомним определения двух важных видов кривых.

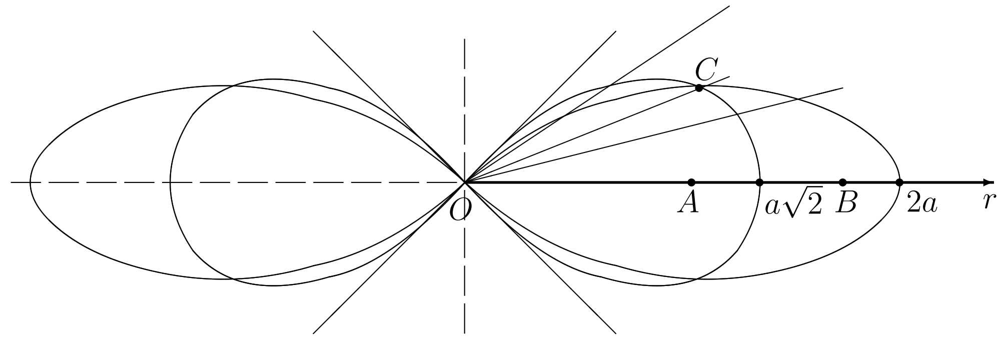

Рис. 24:

Определение 3.10 *Лемнискатой Бернулли называют плоскую алгебраическую кривую 4-го порядка, уравнение которой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид:*

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2a^2\left(x^2-y^2\right)=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Определение 3.11 *Розами называют плоские кривые, уравнения которых в полярных координатах имеют вид*

$$\rho=a\sin k\varphi,$$

где a и k — постоянные.

Пример 3.9 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2=2a^2\cos 2\varphi$, двухлепестковой розой $r=2a\cos 2\varphi$ и содержащую a) точку $A(a,0)$; b) точку $B(a\sqrt{3},0)$ (рис. 24).*

Решение. Сначала выразим r из уравнения лемнискаты. Получим $r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Очевидно, что обе функции $r=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ и $r=2a\cos 2\varphi$ определены лишь для тех значений φ при которых $\cos 2\varphi\ge 0$. Решая это неравенство, находим

$$-\frac{\pi}{4}+\pi k\le\varphi\le\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Но поскольку обе функции π-периодические, то достаточно рассмотреть два последовательных значения k, например, $k = 0$ и $k = 1$. Тогда аргумент φ меняется в пределах

$$-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Ввиду π-периодичности обеих функций, достаточно построить обе кривые только при изменении аргумент φ на первом сегменте, а затем продолжить их на второй. А так как обе функции еще и четные, то построить кривые достаточно лишь при $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ и отобразить симметрично полярной оси.

При изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{4}$ функция $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$ убывает от $a\sqrt{2}$ до 0, и функция $r = 2a\cos 2\varphi$ тоже убывает, но от $2a$ до 0.

Выясним пересекаются ли кривые, определяемые этими уравнениями, когда $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ r = 2a\cos 2\varphi \end{cases}$$

Исключая r, получаем уравнение

$$\cos 2\varphi\,(2\cos 2\varphi - 1) = 0.$$

Это уравнение имеет (на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$) два решения $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, при этих значениях φ кривые пересекаются. Теперь можем построить обе эти кривые (смотрите рис. 24). Кривые пересекаются в точках O и C.

Рассмотрим задачу а). Нетрудно видеть, что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{6}$ радиус-вектор меняется от нуля до лемнискаты, а при изменении φ от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{4}$ — от нуля до розы. Поэтому, учитывая симметрию фигуры относительно полярной оси получаем

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 2a^2\cos 2\varphi\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4a^2\cos^2 2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos 2\varphi\,d\varphi + 2a^2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\varphi)\ d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sin 4\varphi}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\left(3\sqrt{3}+2\pi\right)a^2}{12}.$$

Теперь рассмотрим задачу b). Очевидно, что φ изменяется в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{6}$, при этом радиус-вектор меняется от лемнискаты до розы. Поэтому

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\left(4a^2\cos^2 2\varphi - 2a^2\cos 2\varphi\right)\ d\varphi =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 4\varphi - \cos 2\varphi)\ d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sin 4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)a^2}{12}.$$

■

Пример 3.10 *Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой*

$$x^4 + y^4 = a^2\left(x^2+y^2\right).$$

Решение. Перейдем к полярной системе координат, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Уравнение кривой после соответствующих преобразований примет вид (рис. 25):

$$r^2 = \frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}$$

Так как фигура имеет четыре оси симметрии, достаточно вычислить площадь заштрихованной части фигуры (см. рис. 25) и умножить ее на восемь.

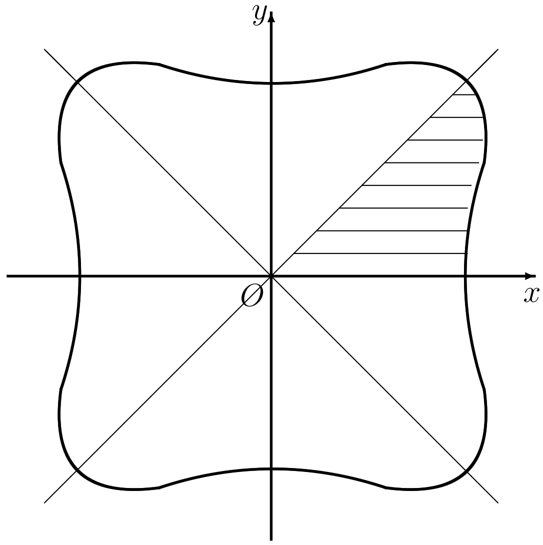

Рис. 25:

Итак, $S = 8a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{2-\sin^2 2\varphi}$. Сделаем в этом интеграле замену переменной. Положим $t = \operatorname{tg} 2\varphi$. Тогда

$$S = 4a^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2a^2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \pi a^2\sqrt{2}\,.$$

■

3.3 Контрольные вопросы, задачи, упражнения

1. При каком $\delta > 0$ из неравенства $\max\{\Delta x_k : \ k = 1, 2, \ldots, n\} < \delta$ следует оценка

$$\left|\int\limits_0^{\pi} \sin x dx - \sum_{k=1}^{n} \sin\xi_k \Delta x_k\right| < 0.001?$$

2. С помощью определённых интегралов доказать равенства

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2;$$
$$b)\ \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. С помощью определённых интегралов найти пределы следующих числовых последовательностей:

$$a)\quad s_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

$$b)\quad s_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right);$$

$$c)\quad s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{2n-1}{n^2}; \qquad d)\quad s_n = \frac{\sqrt{n!}}{n};$$

$$e)\quad s_n = \frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \ldots + \frac{(4n-1)^3}{n^4};$$

$$f)\quad s_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}};$$

$$g)\quad s_n = \frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}};$$

$$h)\quad s_n = \frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$$

4. Применяя теорему о среднем значении, оценить интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{10}\sqrt[3]{1+x^7}dx.$$

5. Исходя из определения интеграла, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 xdx$.

6. Пусть узлы $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 4$ образуют геометрическую прогрессию. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x^3dx$, как предел интегральных сумм, выбирая в качестве ξ_i

   а) левые концы частичных сегментов;

   б) правые концы частичных сегментов;

   в) середины частичных сегментов.

7. Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a;b]$ и $\alpha \in (a;b)$. Доказать, что функция

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \geq \alpha, \\ 0, & \text{если } x < \alpha \end{cases}$$

интегрируема на сегменте $[a;b]$.

8. В интеграле $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ сделаем замену $x = \sin t$. Можно ли в качестве пределов изменения t взять числа π и $\dfrac{\pi}{2}$?

9. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{5-2\cos x}$ сделать замену $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$?

10. Найти производную функции

$$a)\ F(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt \qquad (x>0); \quad b)\ F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \ln t dt \qquad (x>0).$$

11. Найти производную y'_x функции y, заданной параметрически

$$x = \int\limits_1^{t^3} \sqrt[3]{\tau}\ln\tau d\tau; \qquad y = \int\limits_{\sqrt{t}}^{3} \tau^2 \ln\tau d\tau.$$

12. Найти стационарные точки функции

$$a)\ F(x) = \int\limits_0^{2x} \frac{\sin t}{t}dt; \qquad b)\ F(x) = \int\limits_0^{x^2} \frac{t^2-5t+4}{2+e^t}dt.$$

13. Не вычисляя интеграла, найти точки экстремума функции

$$F(x) = \int\limits_0^x (t-1)(t-2)^2 dt.$$

14. Найти пределы

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}; \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$c)\ \lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{tg t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}; \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3};$$

$$e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}dt}.$$

15. Доказать, что функция F, заданная в $(1;+\infty)$ интегралом $F(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t}$, обладает свойствами

$$F(x_1\cdot x_2) = F(x_1) + F(x_2), \qquad F\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = F(x_1) - F(x_2).$$

16. Доказать, что площади $S_0,\ S_1,\ S_2,\dots$, ограниченные осью Ox и полуволнами кривой $y = e^{-\alpha x}\sin\beta x$ $(x>0)$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{-\alpha\pi/\beta}$.

17. Доказать, что если функция f непрерывна на сегменте $[a;b]$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ для всякого сегмента $[\alpha;\beta]$ $(a\le\alpha<\beta\le b)$, то $f(x)\ge 0$ для любого $x\in[a;b]$.

18. Доказать, исходя из геометрических соображений, что если неотрицательная функция f возрастает и выпукла на сегменте $[a;b]$, то

$$(b-a)f(a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

19. Доказать, что в равенстве $\int\limits_a^b e^{2x}dx = e^{2\xi}(b-a)$ число $\xi > \dfrac{a+b}{2}$.

20. Исходя из геометрических соображений, доказать, что $\int\limits_0^\pi \sin 2x dx = 0$.

21. Пусть f'' непрерывна на сегменте $[a;b]$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b xf''(x)dx = \Big(bf'(b) - f(b)\Big) - \Big(af'(a) - f(a)\Big).$$

22. Не вычисляя интегралы $\int\limits_0^1 \sqrt{x}dx$ и $\int\limits_0^1 x^3dx$, установить, какой из них больше?

23. Доказать равенства

$$a)\ \int\limits_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi f(\sin x)dx,$$

если f непрерывна на сегменте $[0;1]$;

$$b)\ \int\limits_0^t f(x)g(t-x)dx = \int\limits_0^t f(t-x)g(x)dx,$$

если f и g непрерывны на сегменте $[0;t]$;

$$c)\ \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx,$$

если f непрерывна на сегменте $[a;b]$;

$$d)\ \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m dx = \int\limits_a^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m dx, \qquad (m > 0).$$

24. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является первообразной периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Является ли функция F периодической?

25. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является первообразной нечётной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Является ли функция F чётной?

26. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является первообразной чётной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Является ли функция F нечётной?

27. Доказать, что функция $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ не имеет на всей числовой оси ни одной первообразной.

28. Доказать, что если функции $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы на $[a; b]$, если для всех $x \in [a; b]$ выполнено неравенство $f(x) \leq g(x)$ и существует такая точка $x_0 \in [a; b]$, для которой $f(x_0) < g(x_0)$, причём обе функции f и g непрерывны в этой точке, то $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b g(x)dx$.

29. Будет ли интегрируема на отрезке всякая функция, у которой интегрируема на этом отрезке её абсолютная величина?

30. Если функция f интегрируема на некотором отрезке и не обращается на нём в ноль, то будет ли на этом отрезке интегрируема функция $\frac{1}{f}$?

31. Доказать, что если функция f убывает на отрезке $[0; 1]$, то для любого $\theta \in (0; 1)$ выполняется неравенство $\theta \int\limits_0^1 f(x)dx \leq \int\limits_0^\theta f(x)dx$.

32. Пусть функция $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ имеет на сегменте $[a; b]$ непрерывную производную второго порядка. Известно, что касательная к графику функции f в точке с абсциссой $x = a$ составляет угол $\frac{\pi}{3}$, а в точке с абсциссой $x = b$ составляет угол $\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\int\limits_a^b f''(x)dx$.

33. Доказать, что если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f в точках, симметричных относительно точки $\xi = \frac{a+b}{2}$, принимает рав-

ные значения, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = 2\int\limits_a^\xi f(x)dx.$$

34. Доказать, что если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)\int\limits_0^1 f(a+(b-a)x)dx.$$

35. Доказать, что для непрерывной при $x \geq 0$ функции f справедливо равенство

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} xf(x)dx, \qquad a > 0.$$

36. Доказать, что если f — непрерывная на всей числовой оси периодическая с периодом T функция, то для любого числа a выполняется равенство

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

Литература

[1] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Основы математического анализа. Часть I,* М.: Наука, 1971.

[2] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, *Основы математического анализа. Часть II,* М.: Наука, 1973.

[3] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов, *Математический анализ,* М.: Наука, 1979.

[4] Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II,* М.: Наука, 1962.

[5] Г.М. Фихтенгольц, *Основы математического анализа. Том I,* М.: Наука, 1957.

[6] В.А. Зорич, *Математический анализ. Часть I,* М.: Наука, 1981.

[7] И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, А.Ф. Калайда, *Математический анализ. Часть I,* Киев: Вища школа, 1983.

[8] Г.Е. Шилов, *Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1-2,* М.: Наука, 1969.

[9] Д.А. Райков, *Одномерный математический анализ,* М.: Высшая школа, 1982.

[10] Б.П. Демидович, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу (для университетов и педагогических институтов),* М.: Наука, 1961.

[11] В.Грэнвиль и Н.Лузин, *Курс диференциального и интегрального исчисления. Часть II. Интегральное исчисление*, М.-Л.: ОНТИ, 1934.

[12] Н.Н.Лузин, *Интегральное исчисление*, Л.: Советская Наука, 1949.

[13] И.Н.Песин, *Развитие понятия интеграла,* М.: Наука, 1966.

[14] *Математическая энциклопедия (в пяти томах),* М.: Советская энциклопедия, 1977-1985.

[15] Я.И.Ривкинд, *Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах,* Минск: Вышэйшая школа, 1971.

[16] И.А.Марон, *Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах,* М.: Наука, 1973.

Предметный указатель