Раздел 2. Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве

Лекция 5 Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму и общий вид линейного ограниченного функционала.

Теорема о разложении гильбертова пространства в сумму ортогональных подпространств.

Пусть теперь $Q = Y \subset H$ – замкнутое подпространство гильбертова пространства H. На этот раз мы не предполагаем сепарабельности Y.

Утверждение: произвольный линеал – выпуклое множество. Действительно, если элементы z', z'' принадлежат линеалу, то ему принадлежит произвольная их линейная комбинация $\alpha z' + \beta z''$, в том числе и выпуклая линейная комбинация вида $\lambda z' + (1-\lambda)z''$ при $\lambda \in [0,1]$. Отсюда следует, что подпространство (замкнутый линеал) является замкнутым выпуклым множеством.

Поскольку подпространство Y удовлетворяет условиям теоремы о метрической проекции, получаем:

$$\forall w \in H \, \exists z \in Y \, \forall u \in Y : \, \|w - z\| \le \|w - u\|$$

(при $u \ne z$ неравенство строгое).

Воспользуемся необходимым и достаточным условием метрической проекции:

$$\forall u \in Y : (w - z, u - z) \le 0 \, .$$

Так как $u, z \in Y$, то и $y = u - z \in Y$, и когда u пробегает всё подпространство Y, то и y также пробегает всё это подпространство. Поэтому условие может быть переписано в виде

$$\forall y \in Y : (w - z, y) \le 0 \, .$$

Если $y \in Y$, то и $-y \in Y$, поэтому получаем:

$$\forall y \in Y : (w - z, -y) = -(w - z, y) \le 0 \, ,$$

то есть

$$\forall y \in Y : (w - z, y) \ge 0 \, .$$

Отсюда

$$\forall y \in Y : (w - z, y) = 0 \, ,$$

то есть $h = w - z \in Y^{\perp}$.

Таким образом, нами доказана

Теорема Беппо Леви об ортогональном разложении:

Если H – гильбертово пространство, а Y – его замкнутое подпространство, то произвольный элемент гильбертова пространства $w \in H$ допускает представление в виде ортогональной суммы

$$w = z + h \, , \quad z \in Y \, , \, h \in Y^{\perp} \, ,$$

$z = P_Y w$ – ортогональная (и метрическая) проекция w на подпространство Y, а $h = P_Y^{\perp} w$ – на его ортогональное дополнение $Y^{\perp}$.

Ранее было доказано, что такое разложение единственно, и что из существования такого разложения для произвольного элемента следует, что $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$.

Теорема может быть проинтерпретирована таким образом, что постранство H представляется в виде прямой ортогональной суммы подпространств

$$H = Y \oplus Y^{\perp}\,,$$

любая пара элементов которых взаимно ортогональна.

Утверждение: если $Y \subset H$ и $Y_1 \subset Y$ – подпространства, и $Y_2 = Y \ominus Y_1$, то $Y = Y_1 \oplus Y_2$ (доказать).

Проекторы

Из ортогонального разложения пространства H, межде прочим, следует представление единичного оператора E в пространстве H в виде суммы двух ортогональных проекторов

$$E = P_Y + P_Y^{\perp}\,,$$

на Y и $Y^{\perp}$.

В общем случае операторы проектирования (проецирования), или просто проекторы в произвольном линейном пространстве X определяются условием

$$P^2 = P\,.$$

Это значит, что

$$\forall x \in X : P(Px) = Px\,,$$

т.е. на любой элемент из образа оператора повторное его действие влияния не оказывает. Это означает, что образ проектора – это его собственное подпространство, отвечающее собственному числу 1.

Оператор $E - P$ также является проектором:

$$(E-P)^2 = E - 2P + P^2 = E - P\,.$$

Образ оператора P является ядром оператора $E - P$, поскольку

$$(E-P)P = P - P^2 = O\,.$$

Точно так же образ $E - P$ – это ядро P. Поскольку

$$\forall x \in X : x = Px + (E-P)x\,,$$

пространство X представляется в виде прямой суммы образов P и $E - P$, которые являются собственными подпространствами P, отвечающими собственным числам 1 и 0 (и, соответственно, 0 и 1 для $E - P$).

Заметим, что единичный и нулевой оператор также являеются проекторами.

В случае ространства со скалярным произведением проектор называют ортогональным проектором (ортопроектором), если его образ и ядро взаимно ортогональны, и косым проектором в противном случае. Если P_1 и P_2 – ортогональные проекторы на взаимно ортогональные подпространства $H_{1,2} \subset H$, то их сумма $P_1 + P_2$ – ортопроектор на ортогональную сумму $H_1 \oplus H_2$. В таком случае часто вместо $P_1 + P_2$ пишут $P_1 \oplus P_2$. В частности, если P – ортопроектор, то

$$E = P \oplus (E - P)\,.$$

Теорема об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Сейчас мы, пользуясь теоремой Беппо Леви, получим универсальное представление для произвольного линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

Теорема Рисса-Фреше. Любой линейный ограниченный функционал $f \in H^*$ над гильбертовым пространством H представляется в виде

$$f(x) = (x, y_f)\,,$$

где элемент $y_f \in H$ единственным образом определяется по f. При этом

$$\|y_f\|_H = \|f\|_{H^*}\,.$$

Доказательство. Пусть $f \in H^*$ – линейный ограниченный функционал. Рассмотрим его ядро

$$N_f = Kerf = \{x \in H : f(x) = 0\}\,.$$

В силу линейности f множество N_f – линеал (доказать). В силу ограниченности f этот линеал замкнут, т.е. является подпространством в H (доказать).

В силу теоремы об ортогональном разложении произвольный элемент $x \in H$ представляется в виде

$$x = z + h\,, z \in N_f\,, h \in N_f^{\perp}\,,$$

тогда

$$f(x) = f(z) + f(h) = f(h)\,.$$

Рассмотрим ортогональное дополнение $N_f^{\perp}$ к ядру функционала. Если это ортогональное дополнение тривиально, то функционал f нулевой, т.е.

$$\forall x \in H : f(x) = 0\,,$$

и его ядро – всё пространство H. В этом случае

$$f(x) = (x, o) = 0\,,$$

где o – нулевой элемент пространства H. Нормы функционала и нулевого элемента совпадают и равны нулю. Представление единственно, поскольку ортогональное дополнение ко всему пространству тривиально.

Пусть теперь ортогональное к ядру функционала $N_f^{\perp}$ нетривиально, тогда f – ненулевой функционал. Докажем, что тогда подпространство $N_f^{\perp}$ одномерно, т.е. любые два его ненулевые элемента $h_{1,2} \in N_f^{\perp}$ линейно зависимы.

Рассмотрим элемент

$$u = f(h_1)h_2 - f(h_2)h_1 \in N_f^{\perp}$$

и вычислим значение функционала на этом элементе:

$$f(u) = f(h_1)f(h_2) - f(h_2)f(h_1) = 0\,,$$

откуда $u \in N_f$. Это значит, что $u \in N_f \cap N_f^{\perp}$, то есть $u = o$. Поскольку $h_{1,2} \neq o$, значения $f(h_{1,2}) \neq 0$ (в противном случае соответствующий элемент принадлежал бы пересечению ядра функционала и его ортогонального дополнения, т.е. был бы равен нулю). Это значит, что нетривиальная линейная комбинация h_1 и h_2 равна o, что и доказывает линейную зависимость h_1 и h_2 и, тем самым, одномерность $N_f^{\perp}$.

Пусть $e_0 \in N_f^{\perp}$ – нормированный элемент, $\|e_0\| = 1$. Тогда ортогональная проекция произвольного элемента $x \in H$ на $N_f^{\perp}$ равна

$$h = (x, e_0)e_0\,,$$

и тогда

$$f(x) = f(h) = f((x, e_0)e_0) = (x, e_0)f(e_0) = (x, f(e_0)e_0) = (x, y_f)\,,$$

где

$$y_f = f(e_0)e_0\,.$$

Равенство норм функционала и представляющего его элемента, а также единственность такого представления были доказаны раньше. Теорема Рисса-Фреше доказана.

Замечание. Ранее мы видели, что скалярное произведение (x, y) при фиксированном элементе $y \in X$ задаёт линейный ограниченный функционал над пространством со скалярным произведением X. Сейчас мы установим, что если это пространство полное (гильбертово), т.е. $X = H$, то такое представление является универсальным, т.е. таким образом можно представить произвольный элемент сопряжённого пространства $f \in H^*$. Таким образом, установлена изометрическая биекция гильбертова пространства H и сопряжённого пространства H^*.

Утверждение: гильбертовы пространства рефлексивны (доказать)

Если пространство со скалярным произведением X не является полным, то сопряжённое пространство X^* изометрично его пополнению (доказать).

Пример. На пространстве $X = C_{L_2}[a,b]$ произвольный линейный ограниченный функционал имеет вид

$$f(x) = \int_a^b x(t) y_f(t)\, dt\,,$$

где $y_f \in L_2[a,b]$, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Замечание Операторы конечного ранга в гильбертовом пространстве имеют вид

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (x, u_i) v_i$$