Линейные однородные дифф. уравнения высших порядков.

Зан. 8.

(1) $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$.

$$L(d)=a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+a_n(x)$$

$L(d)$ — дифференциальный оператор.

(1) : $L(d)y=0$. ← ЛОДУ (с переменными коэфф.)

Свойства решений лин. дифф. ур-я.

1°. $L(y_1)=0,\ L(y_2)=0 \Rightarrow L(y_1+y_2)=0$.

2°. $\forall c=const\ \ L(y)=0 \Rightarrow L(cy)=0$.

Т.е. решения ЛОДУ можно складывать и умножать на числа, т.е. они образуют лин. пр-во.

$1°, 2° \Rightarrow L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right)=\sum_{k=0}^{n} c_k L(y_k),\ c_k=const$

Если $y_1,\ldots,y_m$ — решения, то $\forall c_1,\ldots,c_m$

$c_1y_1+\ldots+c_my_m$ — решение.

<u>Опр.</u> Ф-ции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ наз. линейно зав. на (a,b), если $\exists c_1,\ldots,c_n$: $\forall x\in(a,b)$

$c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)=0$.

<u>Опр.</u> Ф-ции $y_1,\ldots,y_n$ наз. лин. <u>незав.</u> если из условия $c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)\equiv0$ на (a,b) следует $c_1=0,\ldots,c_n=0$.

Примеры.

$1, x, 2x+5$ – лин. зав.

$1, x, x^2, \ldots, x^n$ – лин. незав.

$e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}$ – лин. незав.

Опр. Фундаментальная система решений (ФСР) ур-я (1) порядка n – это ровно n лин.-незав. решений.

Определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Теор. Для $y_1 \ldots y_n$ – решений д. ур. (1)

$W(x) = 0 \iff$ система $\{y_1 \ldots y_n\}$ лин. зав.

Замеч.

Или $W(x) \neq 0$ (ни в одной точке),

или, если $\exists x_0 : W(x_0) = 0$, то $W(x) \equiv 0$ (во всех точках).

Теор. Если в ур-нии $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x) y^{(i)} = 0$

ф-ии $\alpha_0(x), \ldots, \alpha_n(x)$ непрер. в промежутке I, то $\exists$ ровно n лин. нез. решений на промежутке I.

Пример. Составить дифф. ур-е, если известна его фундам. система реш. (2а)

$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-x}.$

Решение.

1) Убедимся, что ф-ии $y_1(x)$, $y_2(x)$ лин. незав.

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x} \neq 0.$$

2) Общее решение д. ур-я:

$$y = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-x}.$$

Исключим C_1 и C_2.

$$y' = -C_2 e^{-x} \Rightarrow C_2 = -y' e^{x}$$

$$y = C_1 - y' e^{x} \cdot e^{-x} = C_1 - y';$$

$y + y' = C_1$; исключим C_1 дифференцированием

$$y' + y'' = 0.$$

Ответ: $y'' + y' = 0.$

Второй способ.

$$0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} & y \\ 0 & -e^{-x} & y' \\ 0 & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 1 \cdot e^{-x} \begin{vmatrix} -1 & y' \\ 1 & y'' \end{vmatrix} = e^{-x}(-y'' - y')$$

Ответ: $y'' + y' = 0.$

Понижение порядка ЛОДУ при известном частном решении.

(1) : $L(d)y=0$, $L(d)$ — лин. дифф. оператор.

Пусть $y_ч$ — частное решение: $L(y_ч)=0$.

Сделаем замену:

$$y = y_ч(x)\cdot z$$

$$L(y) = \underbrace{L(y_ч)}_{=0}\cdot z + y_ч\cdot P(z')=0$$ (без д-ва).

Получим д.ур-е, не содержащее z:

$$P(z')=0.$$

$z'=u$ ⇒ понижение порядка на 1.

II способ — по ф-ле Лиувилля-Остроградского (см. занятие 6).

ТР, зад. 4 1), вар. 28.

Найти общее решение лин. дифф. ур-я

(*) $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

$y_1 = x^2$ — частное решение.

а) Убедимся, что $y_1 = x^2$ — ч. реш.

$y_1' = 2x$, $y_1'' = 2$.

$x^2 \cdot 2 + x \cdot 2x - 4 \cdot x^2 \equiv 0$ (верно).

б) Решим ур-е.

Замена перем.: $y = x^2 \cdot z$ → в (*)

$y' = 2xz + x^2z'$;

$y'' = 2z + \underline{2xz'} + \underline{2xz'} + x^2z'' = 2z + 4xz' + x^2z''$

$x^2(2z + 4xz' + x^2z'') + x(2xz + x^2z') - 4x^2z = 0$

$5x^3z' + x^4z'' = 0$

$5z' + xz'' = 0$. ; $u = z'$;

$5u + xu' = 0$.

$x\frac{du}{dx} = -5u$

$\frac{du}{u} = -5\frac{dx}{x}$

$\ln|u| = -5\ln|x| + \ln C_1$

$u = \frac{C_1}{x^5} \Rightarrow z' = C_1x^{-5}$

$z = -C_1 \cdot \frac{x^{-4}}{4} + C_2 = \frac{\tilde{C}_1}{x^4} + C_2$;

$y = x^2 \cdot z = \frac{\tilde{C}_1}{x^2} + C_2 \cdot x^2$.

Ответ: $y = \frac{\tilde{C}_1}{x^2} + C_2x^2$.

ТР, №4 1) (№9.284)

$$(1-x^2)y''-2xy'+2y=0. \quad (*)$$

Дано: $y_1(x)=x$ – частное решение; найти общее решение дифф. ур-я.

Решение.

1) $(1-x^2)\cdot 0-2x\cdot 1+2x\equiv 0$ (верно).

2) Замена переменной:

$$\left.\begin{aligned} y&=x\cdot z\\ y'&=z+xz';\\ y''&=z'+z'+xz''=2z'+xz'' \end{aligned}\right\} \to (*)$$

$$(1-x^2)(2z'+xz'')-2x(z+xz')+2xz=0.$$

$$2z'+xz''-2x^2z'-x^3z''-\cancel{2xz}-2x^2z'+\cancel{2xz}=0.$$

$$z''(x-x^3)+z'(2-4x^2)=0.$$

$$z'=u.$$

$$u'(x-x^3)=u(4x^2-2).$$

$$\frac{du}{u}=\frac{2(2x^2-1)}{x(1-x^2)}dx$$

$$\ln|u|=-2\int\frac{x^2-1+x^2}{(x^2-1)\cdot x}dx=-2\left[\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x\,dx}{x^2-1}\right]$$

$$\ln|u|=-2\left[\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\right]+\ln C_1=-2\ln|x|-\ln|x^2-1|+\ln C_1$$

$$u(x)=\frac{C_1}{x^2(x^2-1)};\quad z(x)=C_1\int\frac{1-x^2+x^2}{(x^2-1)x^2}dx=-C_1\int\frac{dx}{x^2}+C_1\int\frac{dx}{x^2-1}$$

$$z=\frac{C_1}{x}+\frac{C_1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2;\quad y=x\cdot z.$$

Ответ: $y(x)=C_1+x\cdot\frac{C_1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2\cdot x.$

Однородные лин. ур-я с постоянными коэфф-тами.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

Характеристич. ур-е:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Корни хар. ур-я	Соответствующее решение
$\lambda_0 \in R$, некратный	$C \cdot e^{\lambda_0 x}$
$\lambda_0 \in R$, кратности k.	$e^{\lambda_0 x}(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{k-1} x^{k-1})$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$ некратный	$e^{\alpha x}[\cos\beta \cancel{x} \cdot A + \sin\beta x \cdot B]$
$\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности k	$e^{\alpha x}[\cos\beta x(A_0 + A_1 x + \ldots + A_{k-1} x^{k-1}) + \sin\beta x(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{k-1} x^{k-1})]$

(1)

Занятие №8.

Однородные линейные уравнения высших порядков с пост. коэфф.

Хар. ур-е: $a_0\lambda^n + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \Rightarrow$ корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

№1. По данным корням характеристич. ур-я ЛОДУ с ПК составить ДУ и написать его общее решение.

а) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2$.

$y_1 = e^{3x},\ y_2 = e^{-2x}$.

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

$(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$.

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.

$y'' - y' - 6y = 0$.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$y_1 = e^x;\ y_2 = xe^x$.

$y = (C_1 + C_2 x)e^x$

$(\lambda - 1)^2 = 0$.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.

$y'' - 2y' + y = 0$.

в) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.

$y_1 = e^{3x}\cos 2x$

$y_2 = e^{3x}\sin 2x$

$y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$(\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i) = 0$.

$(\lambda - 3)^2 + 4 = 0$.

$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$.

$y'' - 6y' + 13y = 0$.

Можно также вычислить y', y'' и исключить C_1, C_2.

г) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$y_1 = e^{2x},\ y_2 = xe^{2x}$

$y_3 = x^2 e^{2x}$.

$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$

$(\lambda - 2)^3 = 0$.

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$

$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

д) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

$y = C_1 + e^{4x}(C_2 + C_3 x)$.

$\lambda(\lambda - 4)^2 = 0;\ \lambda(\lambda^2 - 8\lambda + 16) = 0$.

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda = 0$

$y''' - 8y'' + 16y' = 0$.

№2. Найти общее решение диффр. ур-я. ②

а) $y''' + 4y'' + 3y' = 0.$

$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = 0.$

$\lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0$

$\lambda(\lambda + 3)(\lambda + 1) = 0.$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = -1.$

$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{-x}.$

б) $y''' + 2y'' + y' = 0.$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda + 1)^2 = 0.$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = -1.$

$y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x).$

в). $y^{(4)} + 4y'' = 0.$

$\lambda^4 + 4\lambda^2 = 0.$

$\lambda^2(\lambda^2 + 4) = 0.$

$\lambda_{1,2} = 0,\ k = 2$

$\lambda_{3,4} = \pm 2i.$

$y = C_1 + C_2 x +$
$+ C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$

г) $y'' + 4y' + 5y = 0.$

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$

$(\lambda + 2)^2 + 1 = 0.$

$(\lambda + 2)^2 = -1$

$\lambda = -2 \pm i$

$y = e^{-2x}(\cos x \cdot C_1 + \sin x \cdot C_2)$

д) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0.$

$\lambda^6 + 3\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 = 0.$

$(\lambda^2 + 1)^3 = 0.$

$\lambda_1 = +i,\ k = 3$

$\lambda_2 = -i,\ k = 3.$

$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos x +$
$+ (D_1 + D_2 x + D_3 x^2)\sin x.$

е). $y''' - 3y' = 0.$

$\lambda^3 - 3\lambda = 0.$

$\lambda(\lambda^2 - 3) = 0.$

$\lambda(\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3}) = 0.$

$y = C_1 + C_2 e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x}$

Найти общее решение ЛОДУ(N) с пост. коэфф. (3)

№10.334.

$y^{(5)}-6y^{(4)}+9y^{(3)}=0$

$\lambda^5-6\lambda^4+9\lambda^3=0$

$\lambda^3(\lambda^2-6\lambda+9)=0$

$\lambda^3(\lambda-3)^2=0$

$\lambda_1=0,\ k=3$

$\lambda_2=3,\ k=2.$

$y=C_1+C_2x+C_3x^2+$
$+e^{3x}(C_4x+C_5)$

№10.332.

$y^{(4)}-8y''+16y=0$

$\lambda^4-8\lambda^2+16=0$

$\lambda^2=t$

$t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0;\ (\lambda^2-4)^2=0;$

$(\lambda-2)^2(\lambda+2)^2=0.$

$\lambda_{1,2}=2;\quad \lambda_{3,4}=-2.$

$y=e^{2x}(C_1+C_2x)+e^{-2x}(C_3+C_4x)$

№10.335.

$y^{(6)}-2y^{(5)}+3y^{(4)}-4y^{(3)}+3y''-2y'+y=0.$

$\lambda^6-2\lambda^5+3\lambda^4-4\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+1=0.$

$\lambda=1:\ 1-2+3-4+3-2+1=0 \Rightarrow \lambda=1$ – корень.

$(\lambda^6-2\lambda^5+\lambda^4)+(2\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2)+(\lambda^2-2\lambda+1)=0.$

$\lambda^4(\lambda^2-2\lambda+1)+2\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1)+(\lambda^2-2\lambda+1)=0.$

$(\lambda-1)^2(\lambda^4+2\lambda^2+1)=0$

$\lambda=1,\ k=2.$

$\lambda^2=t;\ t^2+2t+1=0,\ (t+1)^2=0$

$t=-1;\ k=2 \Rightarrow \lambda^2=-1.$

$\lambda=i,\ k=2$

$\lambda=-i,\ k=2.$

Ответ:

$y=e^x(C_1x+C_2)+\cos x(C_3x+C_4)+\sin x(C_5x+C_6).$

3) Решить задачу Коши:

$y'' + y - 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$

$(\lambda - 1)^2 = 0.$

$y = e^x(C_1 + C_2 x); \quad y' = e^x(C_1 + C_2 x + C_2).$

$x = 0: \quad 1 = e^0(C_1 + 0 \cdot C_2) \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

$-2 = e^0(C_1 + C_2); \quad -2 = 1 + C_2; \quad \boxed{C_2 = -3}$

Ответ: $y = e^x(1 - 3x).$

4) Решить краевую задачу:

а) $y'' + y = 0,$

$y'(0) = y'(\pi) = 0.$

$y = A\cos(x + \varphi).$

$y' = -A\sin(x + \varphi).$

$y'(0) = -A\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi k. \Rightarrow y = A\cos(x + \pi k) =$
$= (-1)^k \cdot A \cdot \cos x.$

$y'(\pi) = -A\sin(\pi + \varphi) = A\sin\varphi = 0.$

$y'(\pi) = (-1)^{k+1} \cdot A \sin\pi = 0 \quad \forall A.$

Ответ: $y = A\cos x.$

Дома:
Ефимов, Поспелов, т. 2
№10.282, 10.286, 10.289, 10.299, 10.306, 10.321, 10.332, 10.333, 10.383,

Дома:
ТР, задача №2, зад 1).
задача 4(б) а), б).