Практическое занятие №10
Ряд Лорана

Краткие теоретические сведения

Определение. *Рядом Лорана* называется ряд вида:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{10.5}$$

где z – независимая комплексная переменная, c_n – заданные комплексные числа, z_0 – фиксированная точка комплексной плоскости.

Ряд Лорана (10.5) называется сходящимся в точке z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{10.6}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{10.7}$$

Ряд (10.6) называется *правильной* частью ряда Лорана (10.5), а ряд (10.7) – *главной* частью ряда Лорана (10.5). Сумма ряда (10.5) по определению равна сумме рядов (10.6) и (10.7). ▲

Ряд (10.6) является степенным рядом. Он сходится в круге $|z-z_0|<R$,

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Согласно радикальному признаку Коши ряд (10.7) сходится, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}\right|}<1 \Rightarrow |z-z_0|>\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}=r.$$

Если $r<R$, то областью сходимости ряда (10.5) является кольцо

$$K: r<|z-z_0|<R.$$

К этом кольце сумма ряда (10.5) является аналитической функцией. При этом в любом «меньшем» кольце $r' \le |z-z_0| \le R', r<r' \le R' <R$, ряд (10.5) сходится абсолютно и равномерно.

***Теорема*. (разложение аналитической в кольце функции в ряд Лорана)**

Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $K: r<|z-z_0|<R$ $(0\le r<R<+\infty)$, единственным образом представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{10.8}$$

коэффициенты c_n которого определяются формулами:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi, n=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{10.9}$$

где $\gamma_\rho: |z-z_0|=\rho, r<\rho<R$. ■

На практике для разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана формулами (10.9), как правило, не пользуются, а используют известные степенные разложения:

1) $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}, \qquad |z|<\infty;$

2) $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z|<\infty;$

3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

4) $shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |z| < \infty;$

5) $chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < \infty;$

6) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1;$

7) $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$

Практические задания

Найти все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$. Указать области, в которых справедливы полученные разложения.

1) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}, \quad z_0 = 2.$

2) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+3)}, \quad z_0 = 0.$

3) $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}, \quad z_0 = 0.$

4) $f(z) = \frac{1}{(z-3)^2}, \quad z_0 = 1.$

5) $f(z) = \frac{z^2+z-1}{z^2(z+1)}, \quad z_0 = 1.$

6) $f(z) = ze^{\frac{1}{z-2}}, \quad z_0 = 2.$

7) $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$

8) $f(z) = z\sin\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1.$

9) $f(z) = z\cos\frac{\pi(z+3)}{z+1}, \quad z_0 = -1.$

10) $f(z) = e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}}, \quad z_0 = 1.$

Домашнее задание: №№ 13.352, 13.355, 13.358, 13.360, 13.371, 13.372, 13.375.
(Первые две цифры соответствуют номеру главы «Ряды и их применение»)