§6. Внешняя геометрия поверхностей. Основной оператор гиперповерхности

Гиперповерхность $f : U \subseteq R^n \to R^{n+1}$ – поверхность, размерность которой на 1 меньше размерности окружающего пространства.

Пример гиперповерхности — двумерная поверхность в R^3:
f'_{u^1}, f'_{u^2} — базис $T_p f$
$\vec{N}$ — единичный нормальный вектор, $|\vec{N}| = 1$
Тройка $f'_{u^1}, f'_{u^2}, \vec{N}$ положительно ориентирована.

Нормальное гауссово поле - это единичное нормальное к гиперповерхности векторное поле:

$$\vec{N}(u) = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{|f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}|} = \frac{f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}}{\sqrt{\det g}}.$$

Знаменатель — объем параллелотопа, построенного на векторах базиса касательного векторного пространства.

Добавляя к базису касательного к гиперповерхности пространства вектор $\vec{N}(u)$, мы получим базис $f'_{u^1}, \ldots, f'_{u^n}, \vec{N}(u)$ всего пространства R^{n+1}.

О. Линейный оператор $L_p : T_p f \to T_p f$, действующий по правилу

$$L_p(f'_{u^i}) = -\vec{N}'_{u^i}.$$

называется называется **основным оператором гиперповерхности** $f : U \to R^{n+1}$, или оператором Петерсона-Вейнгартена

<u>О</u>. Второй фундаментальной формой гиперповерхности $f: U \to R^{n+1}$ в т. $p \in U$ называется билинейная форма $II_p(X,Y)$, определенная в касательном пространстве T_pf:

$$\forall X, Y \in T_pf \quad II_p(X,Y) = \langle L_p(X), Y \rangle.$$

(Билинейность обеспечивается линейностью оператора L_p.)

Матрица второй фундаментальной формы:

$$II_p(X,Y) = II_p(x^i f'_{u^i}, y^j f'_{u^j}) = x^i y^j II_p(f'_{u^i}, f'_{u^j}) = x^i y^j h_{ij},$$

где мы ввели обозначение

$$h_{ij} = II_p(f'_{u^i}, f'_{u^j}) = \langle L_p(f'_{u^i}), f'_{u^j} \rangle = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle.$$

Так как $\vec{N} \perp T_pf$, то $\langle \vec{N}, f'_{u^j} \rangle = 0$. Дифференцируя, имеем $\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle + \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle = 0$, и получаем второй способ нахождения h_{ij}:

$$h_{ij} = -\langle N'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle N, f''_{u^i u^j} \rangle. \qquad (*)$$

<u>Т</u>. Для гиперповерхности $f: U \to R^{n+1}$:
1) вторая фундаментальная форма $II_p(X,Y)$ симметрична,
2) основной оператор гиперповерхности L_p — самосопряженный.

Вычислительная формула для h_{ij}:

$$h_{ij} = -\langle \vec{N}'_{u^i}, f'_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f''_{u^i u^j} \rangle = \frac{\langle f'_{u^1} \times \cdots \times f'_{u^n}, f''_{u^i u^j} \rangle}{\sqrt{\det g}} = \frac{\det[f'_{u^1}, \ldots, f'_{u^n}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}$$

Частный случай. $f: U \subseteq R^2 \to R^3$:

$$h_{ij} = \frac{\det[f'_{u^1}, f'_{u^2}, f''_{u^i u^j}]}{\sqrt{\det g}}$$

<u>Т</u>. В стандартном базисе $f'_{u^1}, \ldots, f'_{u^n}$ касательного пространства T_pf матрица оператора L_p имеет вид:

$$[L_p] = [g_{ij}]^{-1}[h_{ij}].$$

<u>О.</u> Пусть $f : U \to R^{n+1}$ — гиперповерхность, $L_p : T_pf \to T_pf$ ее основной оператор. Тогда:

1) $K(p) = \det[L_p]$ — **полная (Гауссова) кривизна** гиперповерхности f в точке p
2) $H(p) = \dfrac{1}{n}\operatorname{Tr}[L_p]$ — **средняя кривизна** гиперповерхности f в точке p
3) Собственные значения $k_1 \dots k_n$ называются **главными нормальными кривизнами**.
4) Собственные вектора $X_1 \dots X_n$ оператора L_p называются **главными направлениями**.

Примечание. $K = k_1 \cdot \dots \cdot k_n$; $\quad H = \dfrac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$; главные направления попарно ортогональны, т.к. L_p - самосопряженный оператор.

Полная (гауссова) кривизна может быть найдена по формуле

$$K = \det[L_p] = \det\left([g]^{-1}[h]\right) = \frac{\det h}{\det g}.$$