КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ.

АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ И ПОСТРОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА.

1. Написать уравнение движения.
2. Написать интеграл энергии и найти потенциальную энергию $U(x)$
3. Построить график $U(x)$.
4. Найти положения устойчивого и неустойчивого равновесия – экстремумы функции $U(x)$ и отметить их на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$.
5. Написать уравнения фазовых кривых

$$y = \pm\sqrt{\frac{2(h - U(x))}{m}}$$

6. Выбрать несколько характерных значений полной энергии h и построить соответствующие фазовые кривые с помощью механической модели «шарик, скатывающийся с горки».
7. Построить сепаратрису.
8. Указать направление движения фазовой точки по фазовым кривым.
9. Найти угол, под которым сепаратриса пересекает ось x. Угловой коэффициент ищется по формуле

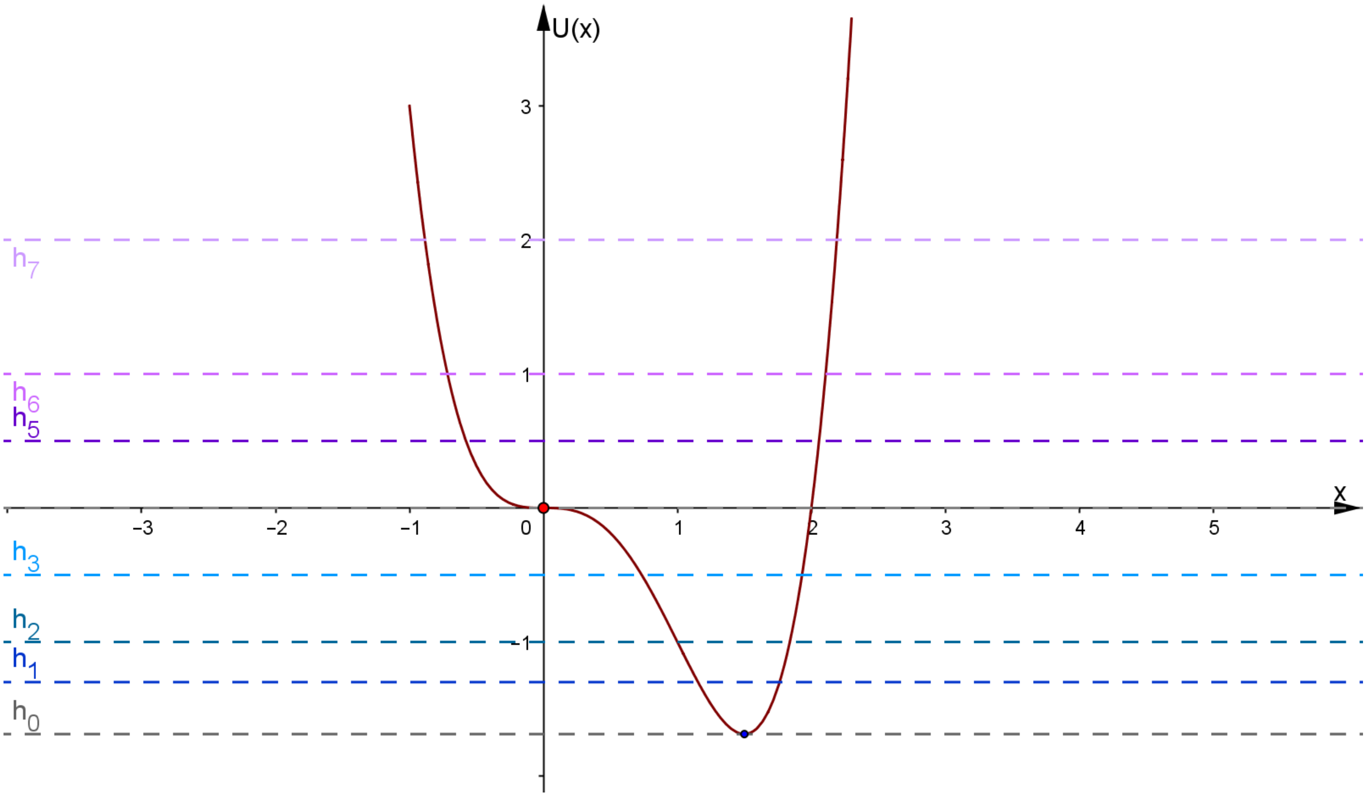
$$k = \lim_{x\to x_0}\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to x_0}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm\lim_{x\to x_0}\frac{U'(x)}{\sqrt{\frac{2(h_0 - U(x))}{m}}},$$

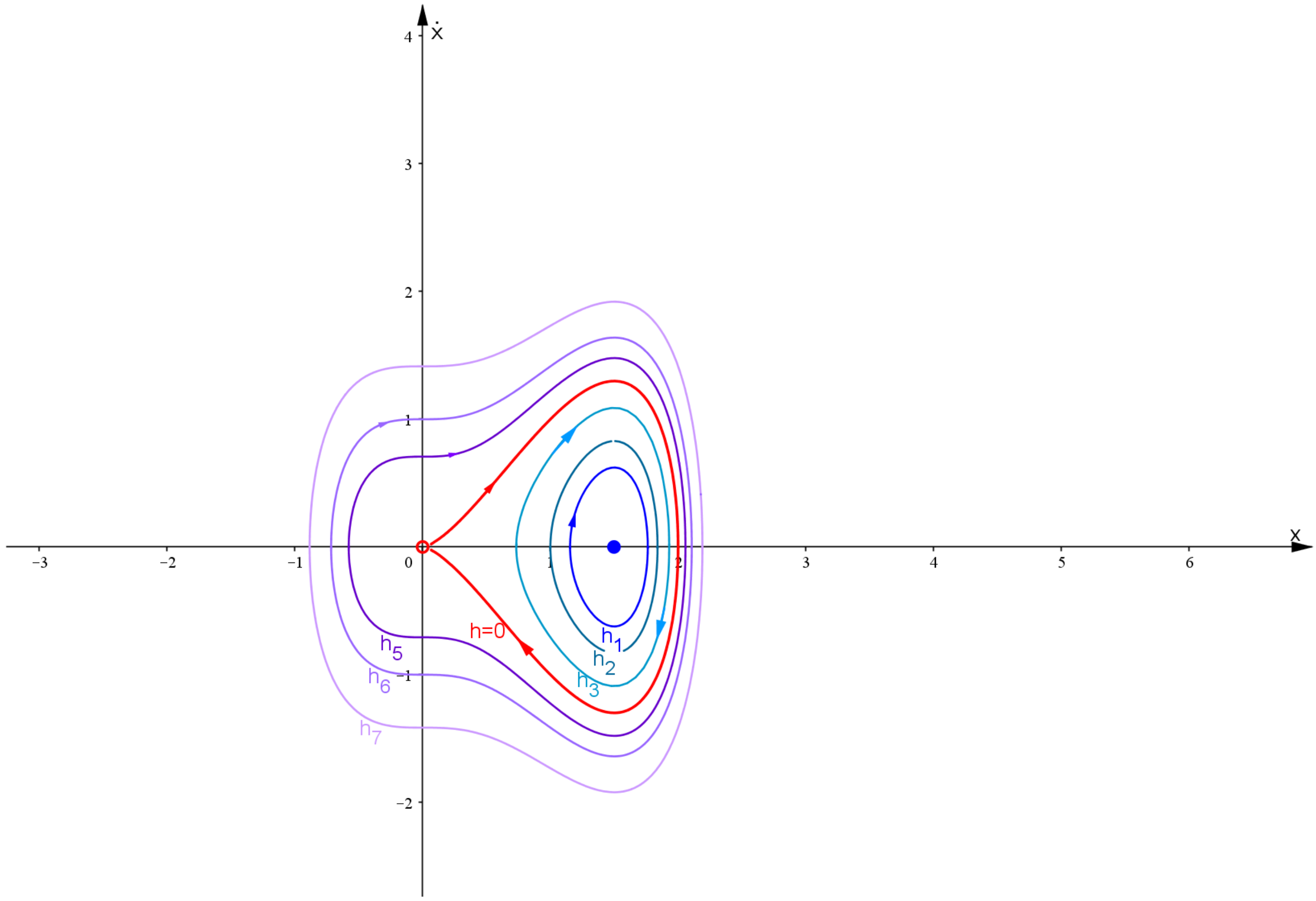
где x_0 - точка неустойчивого равновесия, h_0 - соответствующая полная энергия.

ПРИМЕР.

Материальная точка массы $m = 1$движется по прямой под действием силы $F(x) = -4x^3 + 6x^2$. Построить фазовый портрет.

РЕШЕНИЕ. График потенциальной энергии $U(x)=x^4-2x^3$ и фазовый портрет.





ЗАДАЧИ.

Материальная точка массой $m=1$ движется по оси Ox под действием силы $f(x)$.

a) Написать уравнение движения.
b) Найти потенциальную энергию $U(x)$ и написать интеграл энергии.
c) Построить график функции $U(x)$.
d) Построить фазовый портрет.
e) Найти угол, под которым сепаратриса пересекает ось x.

1. $f(x) = -\sin x$
2. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$
3. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$
4. $f(x) = -1 + \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = x\cos x - \sin x$
6. $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ. НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА.

1. Уравнение эллипса в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

$p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр; $e = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $2c$ – расстояние между фокусами; начало полярной системы отсчета (полюс) выбирается в правом фокусе.

2. Формулы Бине:

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

$$F = -\frac{mc^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right],$$

c- постоянная площадей.

3. Интеграл площадей $r^2\dot{\varphi} = c$.
4. $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{c}{2}$ - закон постоянства секторной скорости.

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА.

1. Орбиты всех планет и комет солнечной системы представляют собой конические сечения (т.е. кривые второго порядка), в одном из фокусов которых расположено Солнце.
2. Площади, заметаемые радиус-векторами планет с началом в Солнце прямо пропорциональны интервалам времени движения планет (т.е. закон площадей)
3. Планеты движутся по эллипсам, и квадраты их периодов *T* обращения вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей эллипсов: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$.

ТЕОРЕМА (НЬЮТОН).

Законы Кеплера справедливы тогда и только тогда, когда сила взаимодействия планеты с Солнцем выражается формулой $\vec{F} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, где *M*- масса Солнца, *m* – масса планеты, γ - универсальная гравитационная постоянная.

ЗАДАЧИ.

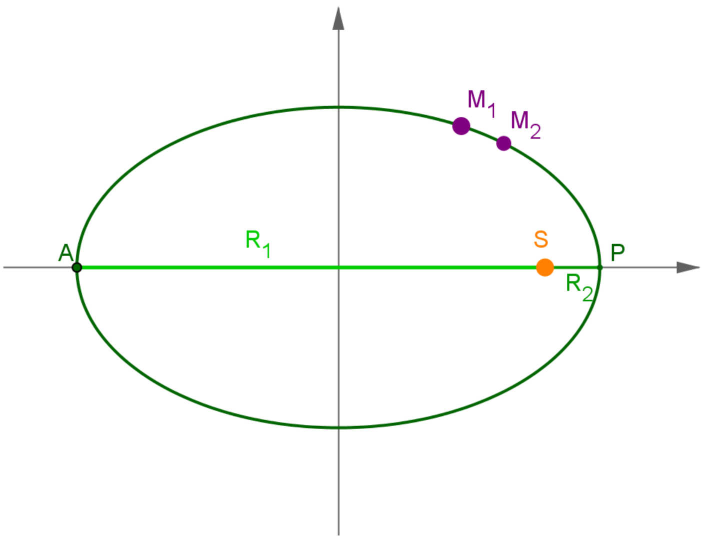
Задача 1. Вывести уравнение эллипса в полярных координатах: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где $p = \frac{b^2}{a}$ - фокальный параметр, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ - эксцентриситет орбиты.

Задача 2. Пусть планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Доказать, что сила, действующая на планету, обратно пропорциональна квадрату расстояния *r* до фокуса (Солнца).

Задача 3. Планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Период ее обращения – *T*, полуоси эллипса – a и b . Вычислить секторную скорость $\frac{dS(t)}{dt} = \frac{c}{2}$.

Задача 4. Используя результат задачи 3 и 3-й закон Кеплера, показать, что коэффициент пропорциональности в формуле для силы, выведенной в задаче 2 (должна получиться формула $F = -\frac{mc^2}{pr^2}$), не зависит от планеты (то есть $\frac{c^2}{p}$ - одинаков для всех планет и равен $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$).

Задача 5. Два астероида M_1 и M_2 описывают один и тот же эллипс, в фокусе *S* которого находится Солнце, двигаясь с одинаковыми секторными скоростями. Расстояние между астероидами настолько мало, что дугу M_1M_2 эллипса можно считать отрезком. Когда середина дуги M_1M_2 была в перигелии *P*, ее длина равнялась *a*. Чему будет равна длина дуги M_1M_2 в тот момент, когда ее середина будет проходить афелий *A*, если $SA = R_1$, $SP = R_2$?



Задача 6. Под действием центральной силы материальная точка массой *m* описывает лемнискату $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Полюс совпадает с центром силы. Определить силу, действующую на точку, если известно, что в начальный момент $\varphi = 0$ и скорость точки равна v_0.

Задача 7. Точка *M*, масса которой *m*, движется под действием центральной силы *F*, зависящей только от *r*. Зная, что скорость точки меняется по закону $v = \frac{\alpha}{r}$, найти силу *F* и траекторию точки.

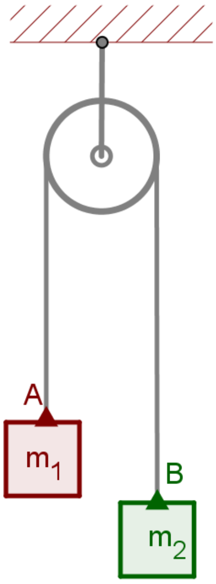
Задача 8. Точка *M* движется вокруг неподвижного центра под действием притяжения к этому центру. Найти скорость v_2 в наиболее удаленной от центра точке траектории, если скорость точки в наиболее близком к нему положении $v_1 = 30$ см/с.

Задача 9. Шарик массой *m*, привязанный к нерастяжимой нити, скользит по гладкой горизонтальной плоскости. Другой конец нити втягивают с постоянной скоростью *u* в отверстие, сделанное в плоскости. Определить движение шарика и натяжение нити *T*, если известно, что в начальный момент нить натянута, расстояние между шариком и отверстием равно *R*, а проекция начальной скорости на перпендикуляр к направлению нити равна v_0.

Задача 10. Материальная точка массы m притягивается к неподвижному центру с силой $F = \frac{10m}{r^3}$, где r - расстояние точки от притягивающего центра. В начальный момент $\varphi_0 = 0, r_0 = 1, v_0 = 2$, причем начальная скорость составляет с радиус-вектором точки угол в 45 градусов. Найти траекторию точки и закон движения $r(t), \varphi(t)$.

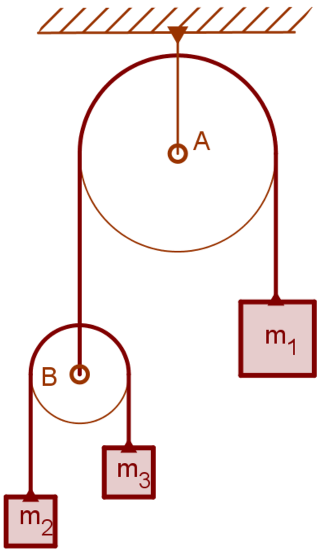
Все задачи нужно решить, используя общее уравнение динамики.

1. Два груза с массами m_1 и m_2 подвешены на концах нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. На грузы действует сила тяжести. Найти ускорение грузов.



Ответ: $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.

2. Через неподвижный блок A перекинута нерастяжимая нить, к одному концу которой подвешен груз с массой m_1, а к другому – еще один блок B, через который тоже перекинута нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_2 и m_3. При этом $m_1 < m_2 + m_3$, $m_2 > m_3$. Массами локов можно пренебречь. Начальные скорости грузов равны нулю. Найти, при каком соотношении

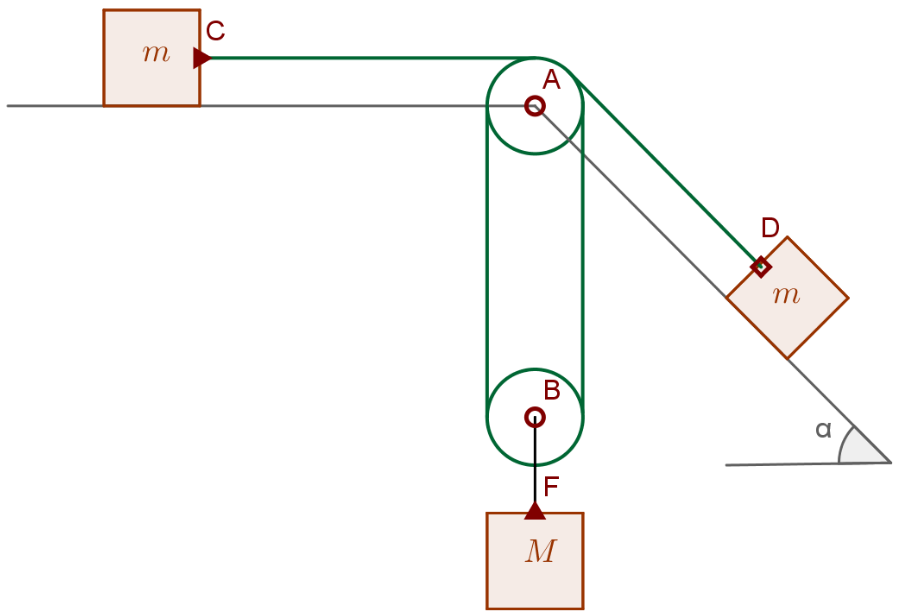


масс груз с массой m_1 будет опускаться.

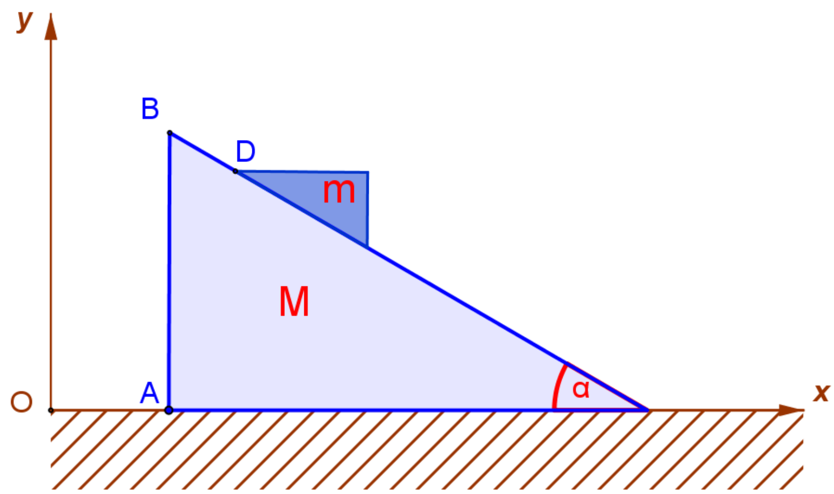
Ответ: $m_1 > \dfrac{4m_2m_3}{m_2+m_3}$.

3. Два груза *C* и *D* массой m каждый привязаны к концам нерастяжимой и невесомой нити. Эта низ от груза *C* идет через неподвижный блок *A*, охватывает подвижный блок *B*, возвращается вверх на неподвижный блок *A*, проходит параллельно гладкой наклонной плоскости, где к концу нити привязан груз *D*. Наклонная плоскость образует угол α с горизонтом. К подвижному блоку *B* прикреплен груз *F* массой *M*. Коэффициент трения скольжения груза *C* о горизонтальную плоскость равен *k*. Массами блоков можно пренебречь. Выяснить условие, при котором груз *F* будет опускаться. Найти ускорение этого груза. В начальный момент скорости всех грузов равнялись нулю.

Ответ: $a = g\dfrac{M - m(k+\sin\alpha)}{M+2m}$.

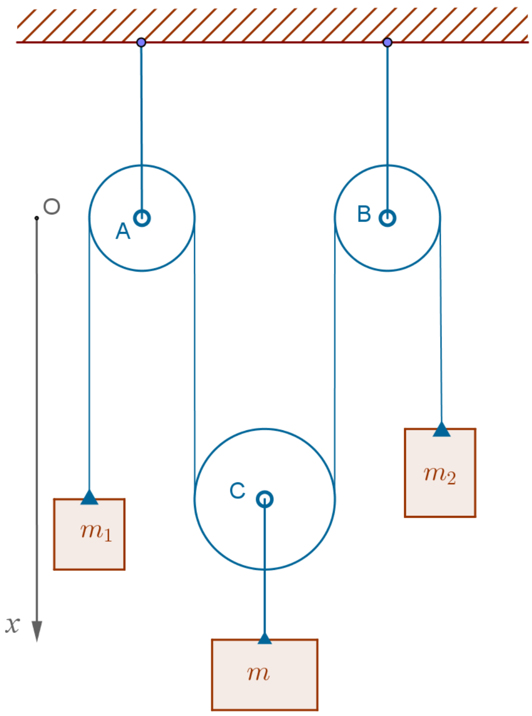


4. Призма массой *m* под действием силы тяжести скользит по гладкой боковой грани призмы с массой *M*, образующей угол α с горизонтом. Горизонтальная поверхность – идеально гладкая. Определить ускорение призмы с массой *M*.



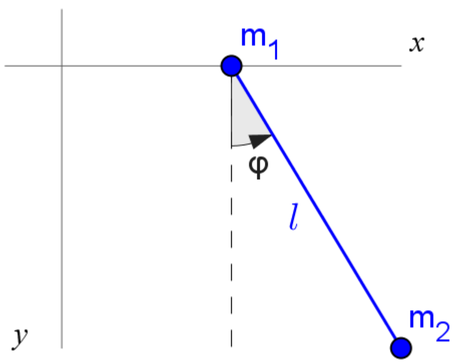
Ответ: $\dfrac{mg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}$

5. Через неподвижные блоки A и B переброшен шнур, поддерживающий подвижный блок C. К блоку C подвешен груз массой m. К концам шнура подвешены грузы массами m_1 и m_2. Определить ускорение всех трех грузов, пренебрегая массами блоков и шнуров и трением в осях.



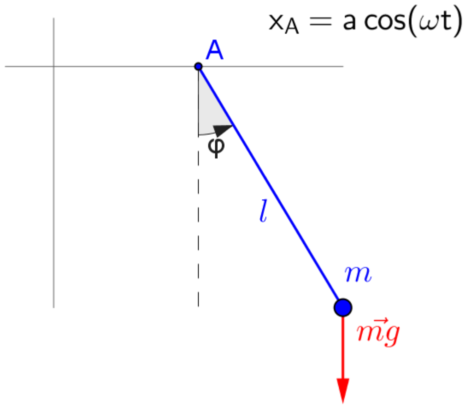
Ответ: $\ddot{x}_1=\dfrac{m(m_1-3m_2)+4m_1m_2}{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}$, $\ddot{x}=\dfrac{m(m_1+m_2)-4m_1m_2}{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}$, $\ddot{x}_2=\dfrac{m(m_2-3m_1)+4m_1m_2}{m(m_1+m_2)+4m_1m_2}$.

6. Тележка массой m_1 может перемещаться по горизонтальной прямой. К тележке подвешен маятник массой m_2 на нерастяжимой нити длиной l. Система находится в поле силы тяжести. Составить

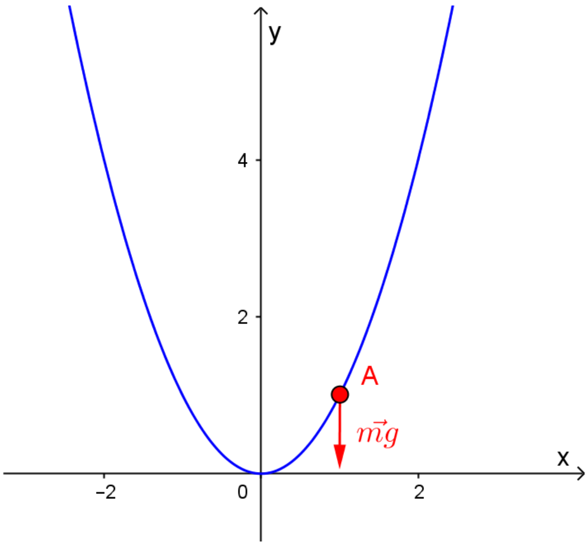


уравнения движения системы.

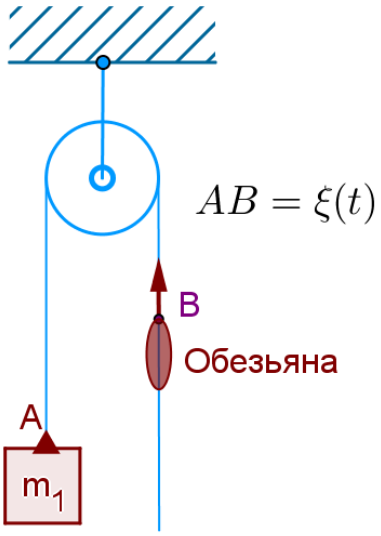
7. Составить уравнения движения плоского маятника массой m_2 и длиной l, точка подвеса которого совершает горизонтальные колебания по закону $x = a\cos\omega t$.



1. Материальная точка массой m движется в вертикальной плоскости по гладкой кривой $y = x^2$. В момент $t = 0$ точка находилась в вершине параболы и имела скорость v_0.
   a) Составить уравнения Лагранжа I рода.
   b) Найти уравнение движения точки.
   c) Написать интеграл энергии.
   d) Найти силу реакции в зависимости от координаты x.



2. На одном конце нерастяжимой нити, перекинутой через гладкий невесомый блок, укреплен груз массы m_1. По другому концу нити перемещается обезьяна массы m_2 по закону $\xi(t)$ относительно нити.
   a) Составить уравнения Лагранжа I рода.
   b) Найти ускорение обезьяны.
   c) Найти натяжение нити (силу реакции).

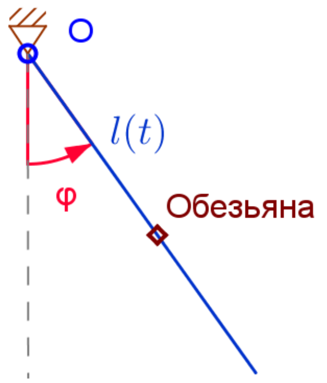


3. Обезьяна, масса которой равна m, взбирается по невесомому шесту, способному вращаться в плоскости вокруг неподвижной точки O. Расстояние от обезьяны до точки O меняется по закону $l = l(t)$.

   a) Составить уравнения Лагранжа I рода.

   b) Написать дифференциальное уравнение для угла φ отклонения шеста от вертикали.

   c) Найти силу реакции.

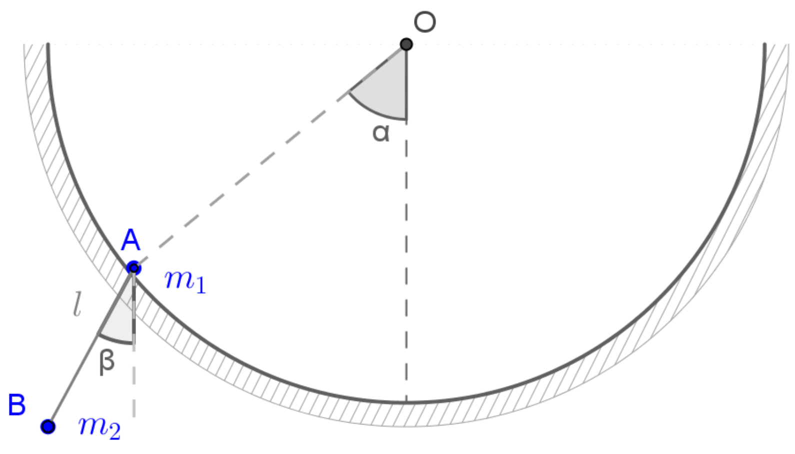


4. Точечная масса m_1 движется в вертикальной плоскости по внутренней гладкой поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Точечная масса m_2, присоединенная к массе m_1 посредством невесомого стержня AB длиной l, может колебаться вокруг оси A, перпендикулярной плоскости чертежа. Положения масс определены с помощью углов α и β, отсчитываемых от вертикали.

   a) Написать уравнения Лагранжа I рода.

   b) Составить дифференциальные уравнения движения системы.

   c) Найти силы реакции.



5. Материальная точка массой m движется в вертикальной плоскости по гладкой кривой $xy = 1$. В момент времени $t = 0$ точка находилась в точке с координатами (1;1) и имела скорость v_0.

   a) Составить уравнения Лагранжа I рода.

   b) Найти уравнение движения точки.

   c) Написать интеграл энергии.

d) Найти силу реакции в зависимости от координаты x.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1.

Уравнение связи $\varphi(x,y) = y - x^2 = 0$.

a) Уравнения Лагранжа I рода

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\lambda x \\ m\ddot{y} = -mg + \lambda \end{cases} \tag{1.1}$$

b) Умножим второе уравнение системы (1.1) на $2x$ и сложим с первым, получим

$$m\left(\ddot{x} + 2x\ddot{y}\right) = -2mgx\,. \tag{1.2}$$

Из уравнения связи $\dot{y} = 2x\cdot\dot{x},\ \ddot{y} = 2\dot{x}^2 + 2x\cdot\ddot{x}$. Подставив это в уравнение (1.2), получим уравнение движения материальной точки:

$$\left(1+4x^2\right)\ddot{x} + 4x\dot{x}^2 = -2gx\,.$$

c) Умножим первое уравнение системы (1.1) на $\dot{x}$, второе – на $\dot{y}$ и сложим, получим

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2}\right) = -mg\dot{y} + \lambda(\dot{y} - 2x\dot{x})\,.$$

Но $\dot{y} - 2x\dot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(y - x^2\right) = 0$ в силу уравнения связи. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} + mgy\right) = 0$$

и

$$m\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{2} + mgy = h = Const$$

- закон сохранения энергии (интеграл энергии). Константу h найдем из начальных условий:

$$x(0)=0;\, y(0)=0,\, \dot{x}(0) = v_0,\, \dot{(0)} = 0 \Rightarrow h = m\frac{v_0^2}{2}\,.$$

Окончательно интеграл энергии примет вид

$$\left(1+4x^2\right)\frac{\dot{x}^2}{2} + gx^2 = \frac{v_0^2}{2}\,. \tag{1.3}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $y = x^2$ и $\dot{y} = 2x\dot{x}$.

d) Сила реакции связи равна $\vec{R} = \lambda\,\mathrm{grad}\,\varphi = \lambda(-2x;1)$. Множитель λ выразим из второго уравнения системы (1.1):

$$\lambda = m\ddot{y} + mg = 2m\dot{x}^2 + 2mx\ddot{x} + mg\,.$$

Подставив $m\ddot{x}$ из (1) уравнения системы (1.1), получим уравнение для λ, из которого найдем

$$\lambda = m\frac{2\dot{x}^2 + g}{1+4x^2}.$$

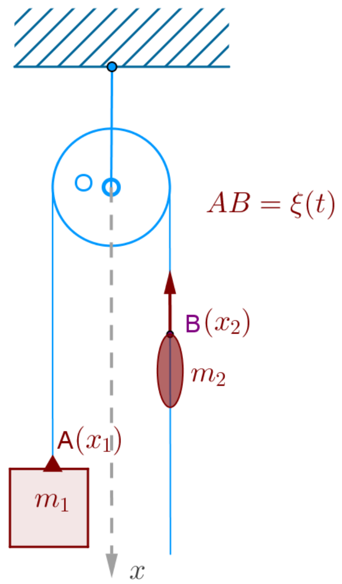
Выразим $\dot{x}^2$ из интеграла энергии (1.3) и получим окончательное выражение для λ:

$$\lambda = m\frac{2v_0^2 + g}{\left(1+4x^2\right)^2}.$$

Величина силы реакции равна

$$\left|\vec{R}\right| = \lambda\sqrt{1+4x^2} = m\frac{2v_0^2 + g}{\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2.



Направим ось x вертикально вниз. Начало – в центре блока. Пусть координата груза - x_1, координата обезьяны - x_2. Уравнение связи

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \xi(t) = 0. \tag{2.1}$$

a) Уравнения Лагранжа I рода:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g + \lambda \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g + \lambda \end{cases}. \tag{2.2}$$

b) Чтобы написать уравнение движения обезьяны, нужно исключить λ и x_1. Вычтем из первого уравнения системы(2.2) второе:

$$m_2\ddot{x}_2 - m_1\ddot{x}_1 = \left(m_2 - m_1\right)g. \tag{2.3}$$

Из уравнения связи (2.1) получаем, что $\ddot{x}_1 = \ddot{\xi}(t) - \ddot{x}_2$. Подставляем это в уравнение (2.3) и получаем уравнение движения обезьяны:

$$\ddot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ddot{\xi}(t) + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g.$$

c) Сила натяжения нити (сила реакции) равна $R = \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \lambda$. Ее можно получить из второго уравнения системы (2.2):

$$R = \lambda = m_2\left(\ddot{x}_2 - g\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\ddot{\xi}(t) - 2g\right)$$

Для вычисления моментов инерции применяются все те же методы, что и для нахождения координат центра масс, а именно:

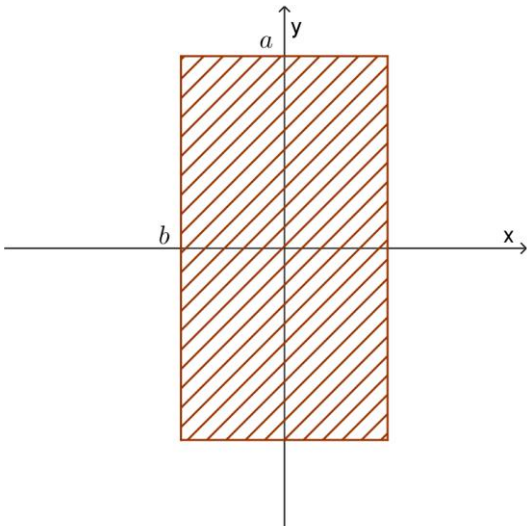
- Группировка: Если твердое тело V есть объединение двух частей: $V = V_1 \cup V_2$, то $I_l(V) = I_l(V_1) + I_l(V_2)$, где l – ось, относительно которой считается момент инерции.
- Метод отрицательных масс
- Метод симметрии
- Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Примеры решения задач – в лекции №6.

ЗАДАЧА 1. Найти момент инерции однородного проволочного кольца массы m, имеющего форму окружности радиуса R, относительно оси, проходящей через середину окружности перпендикулярно ее плоскости. Толщиной кольца пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Все точки окружности расположены на расстоянии R от оси, поэтому момент инерции будет такой же, как и у материальной точки массы m относительно оси, то есть $I_z = mR^2$.

ЗАДАЧА 2. Найти моменты инерции I_x, I_y, I_z сплошной прямоугольной пластины $a \times b$. Найти также момент инерции пластины относительно ее диагонали.



РЕШЕНИЕ. (Размеры по оси x – a, по оси y – b)

$$I_x = \iint_S \mu y^2 dS = 4\mu \int_0^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_0^{\frac{a}{2}} dx = 4 \cdot \frac{m}{ab} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^{\frac{b}{2}} \cdot x\Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{mb^2}{12}.$$

Аналогично, $I_y = \dfrac{ma^2}{12}$.

$$I_z = I_x + I_y = \frac{m(a^2+b^2)}{12}$$ (так как фигура плоская).

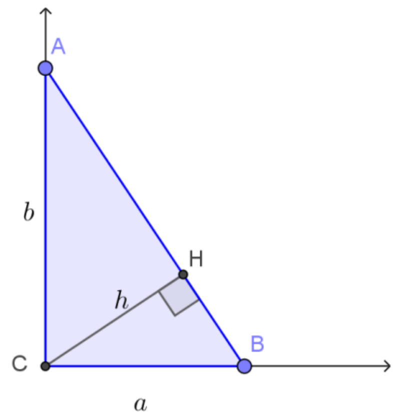
Направляющий вектор диагонали равен $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b,0)$, $I_d = \sum\limits_{i,j=1}^{3} I_{ij} n_i n_j = I_x n_x^2 + I_y n_y^2 = \dfrac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$.

2-й способ. Так как пластина однородная, то для нахождения I_x ее можно «сплющить» по оси x с сохранением массы. Получится стержень. Следовательно, момент инерции прямоугольника такой же, как и у стержня, т.е. $I_x = \dfrac{mb^2}{12}$.

ЗАДАЧА 3. Найти моменты инерции прямоугольного треугольника с катетами a и b и массой m

(a) относительно катетов;

(b) относительно гипотенузы.



РЕШЕНИЕ.

$$I_y = \iint_S \mu x^2 dS = \mu \int_0^a x^2 dx \int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy = \mu b \int_0^a x^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \frac{2m}{ab} \cdot b \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ma^2}{6}.$$

Аналогично $I_x = \dfrac{mb^2}{6}$.

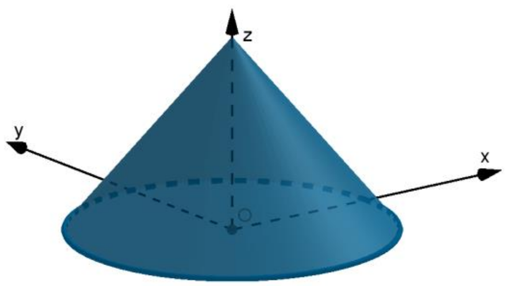
Чтобы вычислить момент инерции треугольника относительно гипотенузы B, разобьем его на два треугольника ACH и CHB, момент инерции которых относительно катетов мы знаем: $\dfrac{m_1 h^2}{6}$ и $\dfrac{m_2 h^2}{6}$ соответственно. Момент инерции треугольника ABC относительно гипотенузы будет равен сумме этих моментов: $I_{AB} = \dfrac{(m_1+m_2)h^2}{6} = \dfrac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$.

2-й способ нахождения I_{AB}. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $ACBD$. Моменты инерции треугольников ABC и ABD относительно AB равны и в сумме составляют момент инерции прямоугольника относительно диагонали, который мы вычислили в задаче 2. Поэтому

$I_{AB} = \dfrac{1}{2} I_d = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2m \cdot a^2 b^2}{6(a^2+b^2)} = \dfrac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$ (мы учли, что масса прямоугольника равна $2m$).

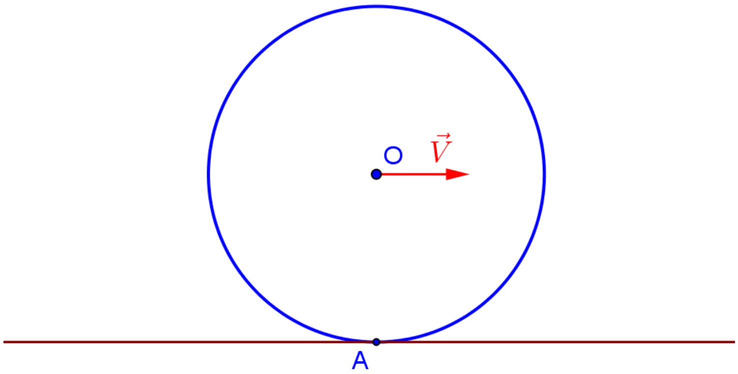
ЗАДАЧА 4. Найти момент инерции относительно оси Oz однородного конуса массы m, радиус основания которого R и высота h.

РЕШЕНИЕ. Вычисляем в цилиндрических координатах. $dV = r dr dz d\varphi$.



$$I_z = \iiint_V \mu r^2 dV = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^{h\left(1-\frac{r}{R}\right)} dz = \frac{m}{V} \cdot 2\pi \int_0^R r^3 \cdot h\left(1 - \frac{r}{R}\right) dr = \frac{3m}{\pi R^2 h} \cdot 2\pi \cdot h \cdot \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5R}\right)\Bigg|_0^R = \frac{3}{10} mR^2.$$

ЗАДАЧА 5. Обруч массы M и радиуса R катится без проскальзывания по прямой с постоянной скоростью V. Найти кинетическую энергию обруча.



РЕШЕНИЕ. По теореме о кинетической энергии абсолютно твердого тела (см. лекцию), кинетическая энергия обруча равна

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \tag{0.1}$$

В этой формуле первое слагаемое – это кинетическая энергия центра масс, второе – кинетическая энергия вращения относительно центра масс, I – момент инерции. Момент инерции кольца относительно оси, проходящей через центр масс кольца O, равен MR^2. Угловая скорость вращения $\omega = \frac{V}{R}$. Подставляя это в формулу (0.1), получаем $T = MV^2$.

2-Й СПОСОБ. Так как мгновенный центр вращения – точка касания обруча с прямой A, то кинетическая энергия равна $T = \frac{I_A\omega^2}{2}$, где I_A - момент инерции кольца относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через точку A. I_A считаем по теореме Гюйгенса – Штейнера:

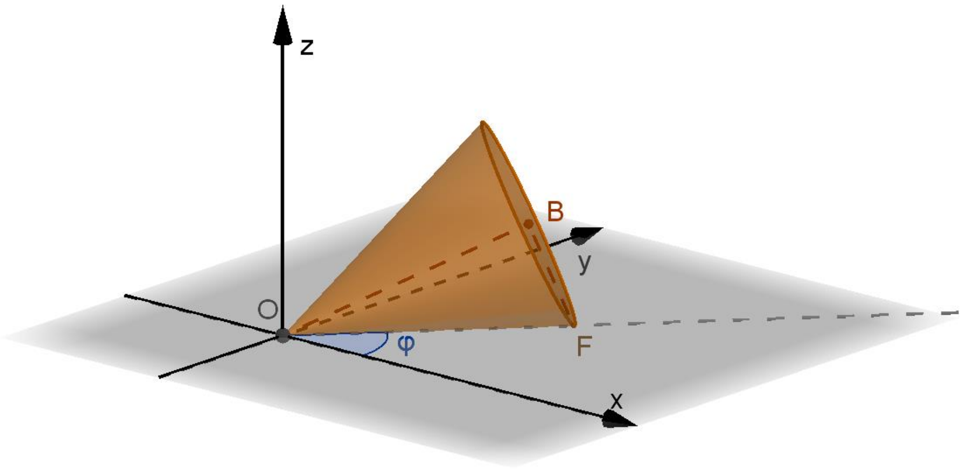
$$I_A = I_O + MR^2 = 2MR^2.$$

Отсюда получаем $T = \frac{1}{2} \cdot 2MR^2 \cdot \left(\frac{V}{R}\right)^2 = MV^2$.

ВОПРОС. Что изменится, если в той же задаче полый цилиндр катится по плоскости с постоянной скоростью?

ОТВЕТ. Ничего.

ЗАДАЧА 6. Однородный конус катится по плоскости без проскальзывания так, что его вершина закреплена в точке *O*, а центр основания движется с постоянной по величине скоростью $\vec{v}$. Масса конуса равна *m*, радиус основания *R*, высота *h*. Найти кинетическую энергию и кинетический момент конуса.



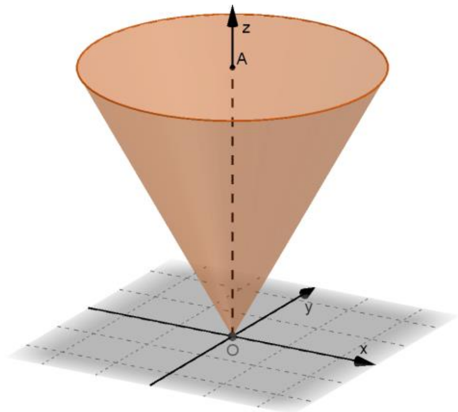
РЕШЕНИЕ.

В каждый момент конус вращается вокруг мгновенной оси вращения –образующей конуса OF.

Кинетическая энергия конуса равна $T = \dfrac{I_l \omega^2}{2}$, где I_l - момент инерции конуса относительно образующей. Величину угловой скорости можно найти, так как мы знаем скорость точки *B*. Она, по условию, равна v. Угловая скорость равна $\omega = \dfrac{v}{\rho}$, где ρ - расстояние от точки В до оси вращения, то есть, высота в прямоугольном треугольнике *OBF*. Она равна $\rho = \dfrac{hR}{\sqrt{h^2 + R^2}}$, и угловая скорость равна

$$\omega = \frac{v\sqrt{h^2 + R^2}}{hR}.$$

Осталось посчитать момент инерции I_l относительно образующей конуса. Найдем тензор инерции I_{ij} относительно точки O – вершины конуса. Он будет иметь диагональный вид вследствие симметрии конуса. Момент инерции I_z относительно оси *z* мы нашли в задаче 4. Он равен



$$I_z = \frac{3}{10} m R^2.$$

По определению, $I_x = \mu \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dV$, $I_y = \mu \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dV$,

$I_z = \mu \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dV$. Из симметрии также ясно, что $I_x = I_y$. Для упрощения вычислений заметим, что

$$I_x + I_y = \mu \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + 2z^2) dV = I_z + 2\mu \iiint\limits_V z^2 dV .$$

ЗАДАЧА 7. Последний интеграл вычисляем в цилиндрических координатах. $dV = rdrdzd\varphi$,

$$\iiint\limits_V z^2 dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} z^2 r dr = 2\pi \int_0^h z^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{R^2 z^2}{h^2} dz = \frac{\pi R^2 h^3}{5} .$$

$\mu = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 h}$,

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z + \mu \iiint\limits_V z^2 dV = \frac{3mR^2}{20} + \frac{3mh^2}{5} = \frac{3m}{20}\left(R^2 + 4h^2\right).$$

Единичный направляющий вектор образующей (можно выбрать любую , мы берем в плоскости Oxz

$\vec{n} = \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}, 0, \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$.

$I_l = I_x n_x^2 + I_y n_y^2 + I_z n_z^2 = \frac{I_x R^2 + I_z h^2}{R^2 + h^2} = \frac{3mR^2\left(R^2 + 6h^2\right)}{20\left(R^2 + h^2\right)}$;

$$T = \frac{I_l \omega^2}{2} = \frac{3mR^2\left(R^2 + 6h^2\right)}{40R^2} .$$

Кинетический момент равен $\vec{K} = \mathbf{I}\vec{\omega}$, где $\mathbf{I}$ – тензор инерции. Вектор мгновенной угловой скорости направлен по оси вращения *OF*, $\vec{\omega} = -\omega(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$.

$$\vec{K} = (-I_x \omega \cos\varphi, -I_y \omega \sin\varphi, 0) = I_x \vec{\omega} .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

ЗАДАЧА 8. Найти момент инерции абсолютно твердого тела массы *m*, имеющего форму кругового однородного цилиндра, радиус основания которого равен *R*, а высота – *h*, относительно его оси симметрии.

Ответ: $\frac{mR^2}{2}$

ЗАДАЧА 9. Найти момент инерции однородной полукруглой пластинки радиуса *R* и массы *m* а)относительно диаметра; б) относительно оси симметрии полукруга.

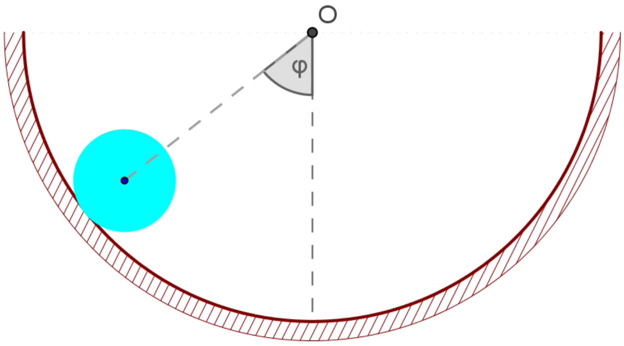
Ответ: $\frac{mR^2}{4}, \frac{mR^2}{4}$

ЗАДАЧА 10. Найти моменты инерции прямоугольного параллелепипеда массы *m*, ребра которого равны *a, b* и *c*, относительно ребер.

Ответ: $\dfrac{m(a^2+b^2)}{3}, \dfrac{m(b^2+c^2)}{3}, \dfrac{m(c^2+a^2)}{3}$

ЗАДАЧА 11. Однородный диск массы M и радиуса R катится без проскальзывания по прямой с постоянной скоростью *V*. Найти кинетическую энергию диска.

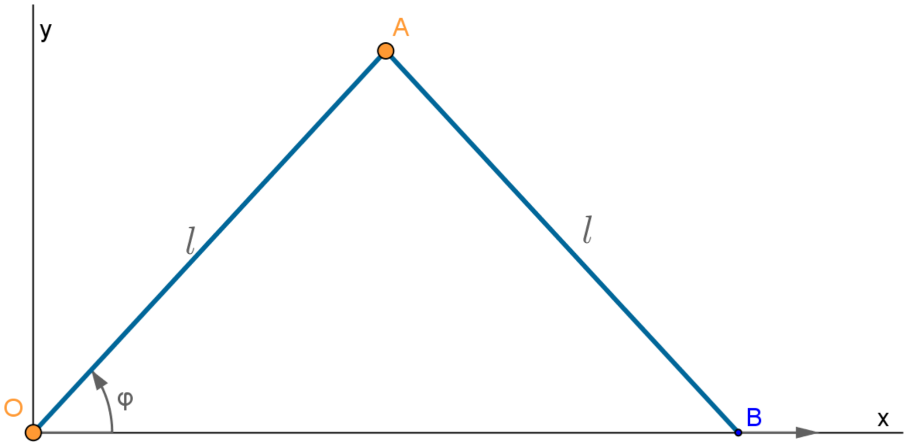
ЗАДАЧА 12. Однородный цилиндр массы *m* и радиуса *a* катится без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиуса *R*. Найти кинетическую энергию



цилиндра в зависимости от угловой скорости $\dot{\varphi}$.

Ответ: $T=\dfrac{3}{4}m(R-a)^2\dot{\varphi}^2$.

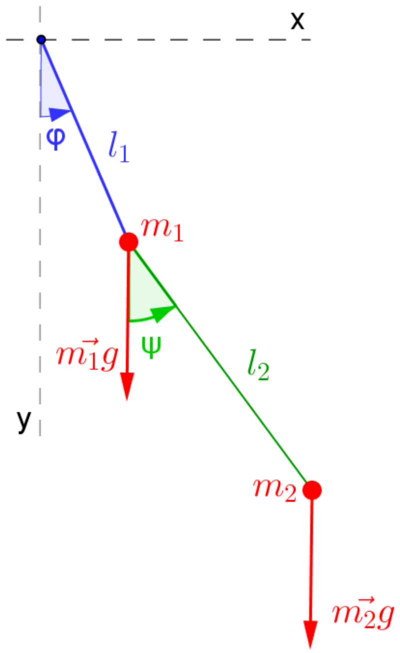
ЗАДАЧА 13. Найти кинетическую энергию системы, состоящей из двух тонких однородных стержней массы *m* и длины *l*, шарнирно скрепленных в точке *A* (см. рис.) Стержень *OA* вращается вокруг точки *O*, а конец стержня *AB* скользит вдоль оси *Ox*.



Ответ: $T=\dfrac{ml^2}{3}\left(1+3\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2$.

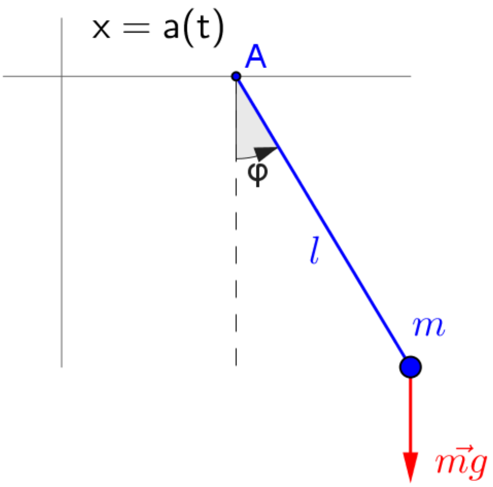
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА II РОДА.

1. Написать лагранжиан и составить уравнения движения двойного маятника,



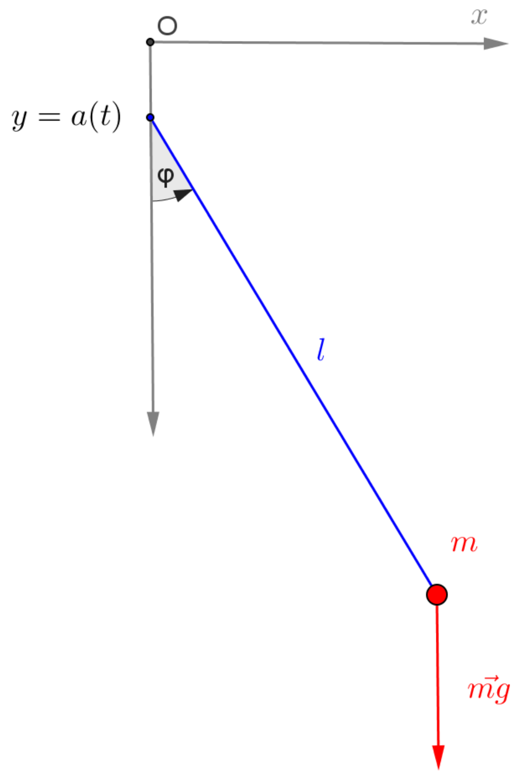
изображенного на рисунке.

2. Написать лагранжиан и составить уравнения движения плоского маятника массой m и длиной l, точка подвеса которого движется по горизонтали по закону $x = a(t)$.



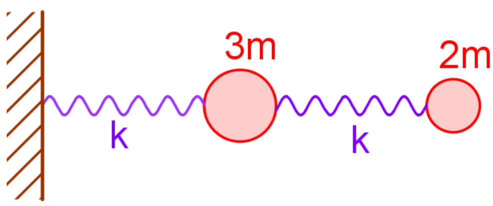
3. Написать лагранжиан и составить уравнения движения плоского маятника массой m, подвешенного на нити, длина которой изменяется по закону $l = a\cos\omega t$.

4. Написать лагранжиан и составить уравнения движения плоского маятника массой m и длиной l, точка подвеса которого движется вертикально по закону $y = a(t)$.

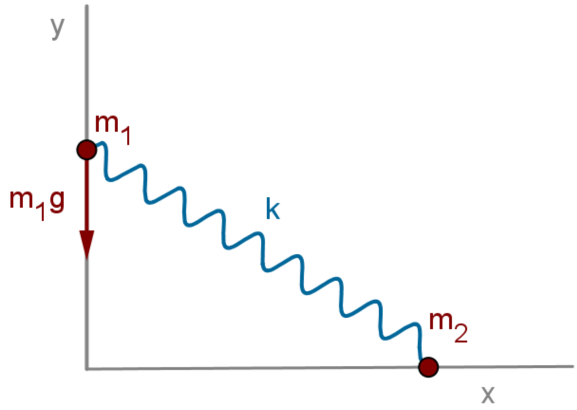


5. Материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$. Написать уравнения движения.

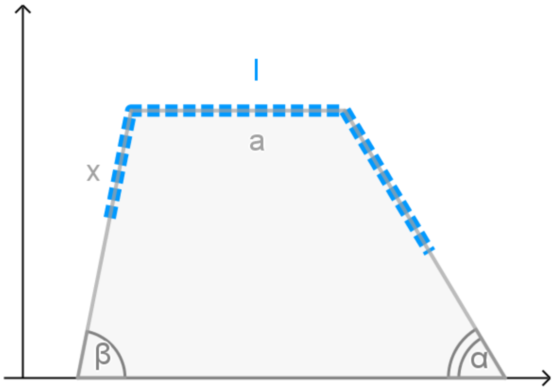
6. Написать уравнения Лагранжа 2-го рода и найти собственные частоты колебаний для системы, изображенной на рисунке. Сила тяжести отсутствует. Длина обеих пружин в недеформированном состоянии равна l_0.



7. Две точечные массы m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, могут двигаться без трения по сторонам прямого угла под действием силы тяжести. Длина пружины в ненапряженном состоянии равна l_0. Составить уравнения Лагранжа.



8. Однородная тяжелая цепочка длины l перекинута через неподвижную призму, имеющую форму трапеции с острыми углами α и β при основании. Верхнее основание равно a, $a < l$. Составить лагранжиан и написать уравнения Лагранжа.



9. Цилиндр массой m скатывается без проскальзывания по боковой грани призмы с массой M, образующей угол α с горизонтом. Определить ускорение призмы.