1.Бесконечные множества, их мощность. Операции над множествами. Диагональный процесс нумерации.

Бесконечное множество — множество, не являющееся конечным.
Множество является бесконечным тогда и только тогда, когда оно содержит подмножество равномощное себе.

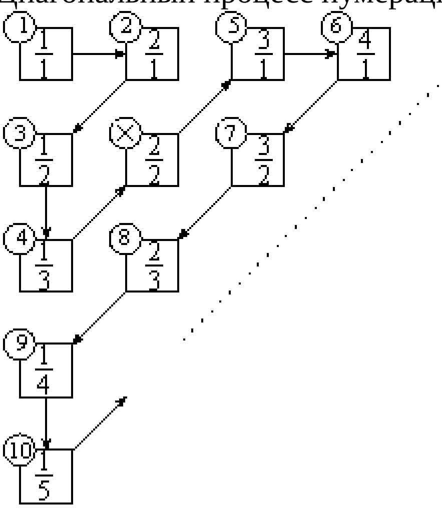
Мощность множества — характеристика множеств , обобщающая понятие количества элементов конечного множества. Счётные множества являются самыми «маленькими» бесконечными множествами.

Операции над множествами:

- пересечение
- объединение
- разность
- симметрическая разность (объединение — пересечение)
- декартово произведение

- дополнение

Диагональный процесс нумерации.



Теорема Кантора гласит, что

Любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств.

Доказательство

Предположим, что существует множество **A**, равномощное множеству всех своих подмножеств $\mathbf{2^A}$, то есть, что существует такая биекция **f**, ставящая в соответствие каждому элементу множества **A** некоторое подмножество множества **A**.

Рассмотрим множество **B**, состоящее из всех элементов **A**, не принадлежащих своим образам при отображении **f** (оно существует по аксиоме выделения):$\mathbf{B=\{x\in A: x\notin f(x)\}}$.

f биективно, а $\mathbf{B\subset A}$, поэтому существует $\mathbf{y\in A}$ такой, что $\mathbf{f(y)=B}$.

Теперь посмотрим, может ли **y** принадлежать **B**.

Если **y**∈**B**, то **y**∈**f(y)**, а тогда, по определению **B**, y∉**B**.

И наоборот, если **y**∉ **B** , то **y∉f(y)**, а следовательно, **y**∈**B**. В любом случае, получаем противоречие.

Следовательно, исходное предположение ложно и **A** не равномощно $\mathbf{2^A}$.

Заметим, что $\mathbf{2^A}$ содержит подмножество, равномощное **A** (например, множество всех одноэлементных подмножеств A), а тогда из только что доказанного следует $\mathbf{|2^A|>|A|}$.

2.Теорема Бернштейна.

Теорема Кантора — Бернштейна, утверждает, что если существуют инъективные отображения f:A→ B и g:B→ A между множествами A и B, то существует взаимооднозначное отображение h:A→ B. Другими словами, что мощности множеств A и B совпадают.

Доказательство

Пусть $\mathbf{C_0 = A\backslash g[B]}$, и $\mathbf{C_{n+1} = g[f[C_n]]}$ при **n>=0** и $\mathbf{C} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{C_n}$

Тогда, для любого x∈A положим

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in C \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \notin C \end{cases}$$

Если **x** не лежит в **C**, тогда **x** должен быть в **g[B]** (образе множества **B** под действием отображения **g**). И тогда существует $\mathbf{g^{-1}(x)}$, и h отображение.

Осталось проверить, что h:A→B - биекция.

Проверим, что h - сюрьекция.

Нужно доказать, что $\forall y \in B \exists x \in A h(x) = y$

$\forall y \in B$

I Если $y \in f(C)$, то $\exists x \in C f(x) = y$. Тогда $h(x) = f(x) = y$

II $y \notin f(C)$

Пусть $x = g(y)$. Предположим, $x \in C$. Тогда $x \in C_n$, при $n > 0$, значит $x \in g(f(C_{n-1}))$.

$\Rightarrow \exists c \in C_{n-1} \left.\begin{matrix} x = g(f(c)) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$, т. к. g - инъекция, то $y = f(c) \in f(C)$, что противоречит предположению.

Значит $x \notin C$. Тогда $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = y$

Проверим, что h - инъекция.

Нужно доказать, что $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\mathrm{I}\ x_1, x_2 \in C$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (f - инъекция)

$\mathrm{II}\ x_1, x_2 \notin C$

$g^{-1}(x_1) = g^{-1}(x_2) \Rightarrow x_1 = g(g^{-1}(x_1)) = g(g^{-1}(x_2)) = x_2$

$\mathrm{III}\ x_1 \in C, x_2 \notin C$

$h(x_1) = f(x_1), h(x_2) = g^{-1}(x_2)$

$h(x_1) = h(x_2)$

$x_2 = g(h(x_2)) = g(h(x_1)) = g(f(x_1)) \in C$ Значит этот случай невозможен.

3. Метрические пространства. Аксиомы метрического пространства. Примеры метрических пространств. Подпространство метрического пространства.

Метри́ческим пространством называется множество, в котором между любой парой элементов определено обладающее определенными свойствами расстояние, называемое ме́трикой.

Метрическое пространство есть пара (X,p), где X — множество, а p — числовая функция, которая определена на декартовом произведении X*X, принимает значения в множестве вещественных чисел, и такова, что

1. p(x, y) = 0 <=> x=y (аксиома тождества)
2. p(x, y) = p(y, x) (аксиома симметрии)
3. p(x, z)<=p(x, y)+p(y, z) (аксиома треугольника или неравенство треугольника)

Метрическое пространство (X1, p1) называется подпространством метрического пространства (X, p) если X1⊂X и для любой пары точек a и b множества X1 справедливо равенство d1(a, b) = d(a, b).

4.Выпуклость множеств и функций. Неравенство Минковского. Пространства l_p.

Выпуклое множество — множество, содержащее вместе с любыми двумя точками соединяющий их отрезок.

Выпуклая функция — функция, у которой надграфик является выпуклым множеством.

Неравенство Минковского

Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, и функции $f, g \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, то есть $\int\limits_X |f|^p\, d\mu < \infty,\ \int\limits_X |g|^p\, d\mu < \infty$, где $p \geq 1$, и интеграл понимается в смысле Лебега. Тогда $f + g \in L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, и более того:

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p} \leq \left(\int\limits_X |f(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\, \mu(dx)\right)^{1/p}.$$

В Евклидовом / Lp пространстве

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p},\ \forall x, y \in E.$$

Lp - лебеговы пространства.

- линейны
- неравенством треугольника является неравенство Минковского
- эквивалентность: f~g, если f(x)=g(x)
- норма $||x|| = (\mathrm{int}(a..b)(x(t)^p dt))^{1/p}$
- метрика p(f, g) = ||f – g||

5.Предел последовательности элементов в метрическом пространстве. Свойства сходящихся последовательностей.

пространство является метрическим, то предел можно определить с помощью метрики: если существует элемент $x \in T$ такой, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n (n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon),$$

где $d(x, y)$ — метрика, то x называется пределом x_n.

Свойства сходящихся последовательностей

Всякая бесконечно малая последовательность является сходящейся. Её предел равен нулю.

Удаление любого конечного числа элементов из бесконечной последовательности не влияет ни на сходимость, ни на предел этой последовательности.

Любая сходящаяся последовательность ограничена. Однако не любая ограниченная последовательность сходится.

Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является ограниченной и при этом её верхний и нижний пределы совпадают.

Если последовательность (x_n) сходится, но не является бесконечно малой, то, начиная с некоторого номера, определена последовательность ($1 / x_n$), которая является ограниченной.

Сумма сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью.

Разность сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью.

Произведение сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью.

Частное двух сходящихся последовательностей определено, начиная с некоторого элемента, если только вторая последовательность не является бесконечно малой. Если частное двух сходящихся последовательностей определено, то оно представляет собой сходящуюся последовательность.

Если сходящаяся последовательность ограничена снизу, то никакая из её нижних граней не превышает её предела.

Если сходящаяся последовательность ограничена сверху, то её предел не превышает ни одной из её верхних граней.

Если все элементы некоторой последовательности, начиная с некоторого номера, лежат на отрезке между соответствующими элементами двух других сходящихся к одному и тому же пределу последовательностей, то и эта последовательность также сходится к такому же пределу.

Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. При этом фундаментальная числовая последовательность всегда сходится (как и любая фундаментальная последовательность элементов полного пространства).

6. Предельная точка множества и замкнутые множества. Замыкание множеств. Плотные множества. Сепарабельные метрические пространства.

Преде́льная точка множества — это такая точка, любая проколотая окрестность которой пересекается с этим множеством.
Замкнутое множество — подмножество пространства, дополнение к которому открыто.

Замыканием множества U топологического пространства X называют минимальное по включению замкнутое множество Z, содержащее U.

Плотное множество — подмножество пространства, точками которого можно сколь угодно хорошо приблизить любую точку объемлющего пространства. Формально говоря, A плотно в X, если всякая окрестность любой точки x из X содержит элемент из A.

Сепарабельное метрическое пространство (от лат. separabilis — отделимый) — топологическое пространство, содержащее счётное всюду плотное множество с метрикой.

7. Замкнутые и открытые множества, их конечные и счётные объединения и пересечения. Дополнения замкнутых и открытых множеств.

Замкнутое множество — подмножество пространства, дополнение к которому открыто. Открытое множество — это множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью.

Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Объединение любого числа открытых множеств есть открытое множество.

Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

Объединение счётного и конечного множества счётно.

Дополнение замкнутого множества открыто.
Дополнение открытого множества замкнуто.

8.Фундаментальная последовательность. Полные и неполные метрические пространства. Примеры.

Последовательность точек x_n метрического пространства (X, p) называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:
для любого $E > 0$ существует такое натуральное N_E, что $p(x_n, x_m) < E$ для всех $n, m > N_E$.

Полное метрическое пространство — метрическое пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится (к элементу этого же пространства).

Примеры:
-действительные числа в метрике |x-y| - полное
-рациональные числа в той же метрике — неполное

9.Полнота пространства E_n.

Полнота евклидова пространства

[править]

Утверждение (покоординатная сходимость в $\mathbb{R}^n$):

Пусть дана последовательность $\overline{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\overline{x}^{(m)} \to \overline{x}$ в $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любого $j \in 1, \dots, n$ последовательность $\overline{x}_j^{(m)} \to \overline{x}_j$

$\triangleright$

$\Longrightarrow$:

Если последовательность сходится, то из неравенства $|x_j^{(m)} - x_j| \leq \|x^{(m)} - x\|$ устанавливается, что последовательность сходится и покоординатно.

$\Longleftarrow$:

Пусть для любого j выполняется $x_j^{(m)} \to x_j$. Из определения предела, для любого ε существует M_j, для которого $|x_j^{(m)} - x_j| \leq \varepsilon/\sqrt{n}$. Тогда для $m > M = M_1 + \cdots + M_n$ написанное выше неравенство выполняется для всех j.

$\|\overline{x}^{(m)} - \overline{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j^{(m)} - x_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$, следовательно, утверждение доказано по определению предела.

10.Полнота пространства l_2.

Норма на L_p вместе с линейной структурой порождает метрику:

p(f,g) = $\|f-g\|_p$,

а следовательно, на пространствах возможно определить сходимость: последовательность функций $\{f_n\}$(n=1..infty) $\subset L_p$ называют сходящейся к функции f $\in L_p$, если:

$\|f_n-f\|_p$ -> 0 при n -> infty.

11.Полнота пространства C[a,b].

Пусть $\{x_k\}(k=1..\infty)$— фундаментальная последовательность в C[a; b].

Покажем, что эта последовательность сходится.

Так как $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в C[a; b], то для любого ε > 0 существует натуральное число N = N(ε), такое, что для любых n, m > N выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) = \| x_n - x_m\| = \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - xm(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что для каждого $t \in [a; b]$ и n, m > N

$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$.

Пользуясь критерием Коши равномерной сходимости последовательности функций, получим, что последовательность {xn(t)} сходится равномерно на [a; b]. Как известно, ее предел x(t) в этом случае будет непрерывной функцией. Устремляя в последнем неравенстве m к ∞, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon \text{ для всех } t \in [a; b] \text{ и для всех } n > N,$$

причем $x(t) \in C[a; b]$. А это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства C[a; b].

Таким образом, пространство C[a; b] полно.

12. Отображения метрических пространств. Непрерывность отображения на языке ε,δ и на языке последовательностей, их эквивалентность. Непрерывность расстояния.

Отображение метрических пространств - однозначная парная связь элементов одного пространства с элементами из другого пространства.

Отображение f :X -> Y метрического пространства (X,p_X) в метрическое пространство (Y,p_Y) называется непрерывным в точке а, если для всякого **ε** >0 существует **δ** >0, что для всякого $x \in X$, такого, что $p_X(x,a)<$**δ**, выполняется неравенство: $p_Y(f(x),f(a))<$ **ε** .

Функция f (x) называется непрерывной в точке a ∈M, если для любой последовательности $\{x_n\} \in M$ из условия x_n -> a при n->inf следует, что $f(x_n)$-> f(a) при n->inf.

Эквивалентность:

Теперь рассмотрим определение по Гейне. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к $a \in A$, то для любого вещественного числа $\delta > 0$ существует такой номер $n_\delta > 0$, что

$$n > n_\delta \Rightarrow \rho_X(x_n, a) < \delta.$$

Аналогично, если

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a),$$

то для любого вещественного числа $\epsilon > 0$ существует такой номер $n_\epsilon > 0$, что

$$n > n_\epsilon \Rightarrow \rho_Y(f(x_n), f(a)) < \epsilon.$$

Если выбрать из n_ϵ и n_δ наибольшее

$$n_0 = \max(n_\epsilon, n_\delta),$$

то при $n > n_0$ будут выполняться оба условия. Последовательность $\{x_n\}$ можно взять произвольно, значит для любого $x \in A$ такого, что

$$\rho_X(x, a) < \delta$$

будет выполняться неравенство

$$\rho_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Непрерывность расстояния. Легко видеть, что функция «расстояние» ρ(x, y) непрерывна по каждому из аргументов. Действительно, из неравенства треугольника при $x_n \to x$ (что по определению сходимости в метрическом пространстве означает не что иное, как $\rho(x_n, x) \to 0$)

имеем ρ(x_n, y) <= ρ(x_n, x) + ρ(x, y) ; ρ(x, y) <= ρ(x_n, x) + ρ(x_n, y), откуда с учётом ρ(x_n, x) → 0 по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем $\lim_{n\to\infty}$ ρ(x_n, y) <= ρ(x, y) ; ρ(x,y) <= $\lim_{n\to\infty}$ ρ(x_n, y) или ρ(x, y) <= $\lim_{n\to\infty}$ ρ(x_n, y) <= ρ(x, y). В силу тождества ρ(x, y) = ρ(y, x) для второго аргумента нет необходимости проводить доказательство.

13.Принцип сжимающих отображений.

Пусть на метрическом пространстве (M, ρ) определён оператор A:M → M. Он называется сжимающим на M, если существует такое неотрицательное число a<1, что для любых двух точек x,y∈M выполняется неравенство *ρ(Ax,Ay)<=a*ρ(x,y)*.

Теорема Банаха:

Пусть $(\mathbb{X}, d)$ — непустое полное метрическое пространство. Пусть $T: \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ — сжимающее отображение на $\mathbb{X}$, то есть существует число $0 \leqslant \alpha < 1$ такое, что

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y)$$

для всех x, y из $\mathbb{X}$. Тогда у отображения T существует, и притом ровно одна, неподвижная точка x^* из $\mathbb{X}$ (неподвижная означает $Tx^* = x^*$).

Число α часто называют *коэффициентом сжатия*.

Если число α равно 1, то есть отображение не сжимающее, теорема может **не выполняться**.

Доказательство

Возьмём произвольный фиксированный элемент метрического пространства $x \in \mathbb{X}$ и рассмотрим последовательность $x_1 = Tx, x_2 = Tx_1, \ldots, x_{n+1} = Tx_n$.

Таким образом получим последовательность $\{x_n\}$.

Покажем, что эта последовательность фундаментальная. В самом деле:

$$d(x_1, x_2) = d(Tx, Tx_1) \leqslant \alpha d(x, x_1) = \alpha d(x, Tx),$$
$$d(x_2, x_3) = d(Tx_1, Tx_2) \leqslant \alpha d(x_1, x_2) \leqslant \alpha^2 d(x, Tx),$$
$$\ldots,$$
$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \alpha^n d(x, Tx).$$

По неравенству треугольника для

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leqslant \alpha^n(1+\alpha+\ldots+\alpha^{p-1})d(x, Tx) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha} d(x, Tx)$$

Так как по условию $0 < \alpha < 1$, то $d(x_n, x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x, Tx)$. Отсюда следует, что $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$ при $n \to \infty$ и любом $p > 0$.

Значит, последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе (фундаментальная).

В силу полноты пространства $\mathbb{X}$ существует элемент $x_0 \in \mathbb{X}$, являющийся пределом этой последовательности $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Докажем, что $Tx_0 = x_0$.

По неравенству треугольника, $d(x_0, Tx_0) \leqslant d(x_0, x_n) + d(x_n, Tx_0) = d(x_0, x_n) + d(Tx_{n-1}, Tx_0) \leqslant d(x_0, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x_0)$. Так как $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, то для любого $\epsilon > 0$ при достаточно большом n $d(x_0, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ и $d(x_0, x_{n-1}) < \frac{\epsilon}{2}$. Так как $\epsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $d(x_0, Tx_0) = 0$, то есть $x_0 = Tx_0$, что и требовалось доказать.

Докажем единственность неподвижной точки у оператора сжатия. Предположим, что существуют два различных элемента $x_0, y_0 \in \mathbb{X}$, такие, что $Tx_0 = x_0, Ty_0 = y_0$. Тогда $d(x_0, y_0) = d(Tx_0, Ty_0) \leqslant \alpha d(x_0, y_0)$. Если допустить, что $d(x_0, y_0) > 0$, то из предыдущего следует, что $\alpha \geqslant 1$. Но это противоречит условию $\alpha < 1$. Таким образом, наше допущение что $d(x_0, y_0) > 0$ неверно и $x_0 = y_0$.

14. Применение(???) принципа сжимающих отображений к трансцендентным уравнениям.

Трансцендентное уравнение — это уравнение вида f(x)=g(x), где функции f и g являются аналитическими функциями, и по крайней мере одна из них не является алгебраической.

15. Применение принципа сжимающих отображений к системам линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим отображение A n-мерного арифметического эвклидова пространства в себя

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \; i = 1, ..., n.$$

Если данное отображение является сжатием, то для решения уравнения $Ax = x$ можно применить принцип сжимающих отображений. Определим, при каких условиях отображение A будет сжимающим.

$\rho(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$. Рассмотрим два вектора: x и x' — преобразование A ставит им в соответствие вектора y и y':

$$\rho(y, y') = \max_{1 \le i \le n} |y_i - y_i'| = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x_j - x_j' \right) \right|$$

Применив аксиому треугольника для модуля, получим:

$$\rho(y, y') \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \left| x_j - x_j' \right|.$$

Так как

$$\left| x_j - x_j' \right| \le \max_{1 \le i \le n} \left| x_j - x_j' \right| = \rho(x, x'),$$

то

$$\rho(y, y') \le \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \rho(x, x').$$

Отсюда следует условие сжимаемости:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \le \alpha < 1, \; i = 1, ..., n$$

16.Применение принципа сжимающих отображений к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Уравнение Фредгольма второго рода — это интегральное уравнение вида

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t).$$

Функции $K(t,s)$ (ядро) и $f(t)$ (правая часть) заданы, λ — произвольный параметр, необходимо найти функцию x.

Будем считать, что функции $K(t,s)$ (ядро) и $f(t)$ является непрерывными при

$$a \le t \le b, \ a \le s \le b.$$

Кроме того, существует такое число M, что

$$|K(t,s)| \le M.$$

Рассмотрим отображение $y = Ax$ полного пространства непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $C[a;b]$ в себя, заданное формулой

$$y(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t).$$

Определим, при каких условиях данное отображение является сжимающим в равномерной метрике

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{t\in[a;b]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Рассмотрим две функции x_1 и x_2 и оценим

$$\rho(y_1, y_2) = \rho(Ax_1, Ax_2) = \max_{t\in[a;b]} \left| \lambda \int\limits_a^b K(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds \right|.$$

По свойствам интеграла:

$$\rho(y_1, y_2) \le |\lambda|(b-a) \max_{t\in[a;b]} \max_{s\in[a;b]} |K(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]|.$$

Так как ядро ограничено числом M, то:

$$\rho(y_1, y_2) \le |\lambda|(b-a)M \max_{s\in[a;b]} |x_1(s) - x_2(s)| = |\lambda|(b-a)M\rho(x_1, x_2).$$

Таким образом, отображение A является сжимающим при условии

$$|\lambda| \le \frac{1}{(b-a)M},$$

а значит, что при выполнении данного условия последовательность

$$x_{n+1}(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)x_n(s)ds + f(t)$$

будет сходится к решению уравнения. В качестве начального приближения можно взять произвольную непрерывную функцию $x_0(t)$.

17. Применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

и задано начальное условие

$$y(x_0) = y_0,$$

причём функция f определена и непрерывна в некоторой плоской области G, содержащей точку (x_0, y_0), и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le M\,|y_1 - y_2|.$$

Задача решения дифференциального уравнения с начальным условием (задача Коши) эквивалентна задаче решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,(t, \varphi(t))\,dt.$$

Так как функция f непрерывна, то в некоторой плоской области $G' \subseteq G,\ \ (x_0, y_0) \in G'$ будет иметь место

$$|f(x,y)| \le K.$$

Подберём $d > 0$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Если $|x - x_0| \le d$ и $|y - y_0| \le Kd$, то $(x,y) \in G'$;
2. $Md < 1$.

Обозначим пространство всех непрерывных функций φ, определённых на отрезке $|x - x_0| \le d$ и удовлетворяющих условию $|\varphi(x) - y_0| \le Kd$, как C^* и введём в нём метрику следующим образом

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{|x-x_0|\le d} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Данное метрическое пространство полно, так как является замкнутым подпространством полного метрического пространства (пространства всех непрерывных функций, заданных на том же отрезке). Докажем, что отображение $\psi = A\varphi$, заданное формулой

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt,$$

переводит пространство C^* в себя и является сжатием этого пространства. Пусть $\varphi \in C^*$ и $|x - x_0| \le d$, тогда

$$|\psi(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))dt\right| \le Kd,$$

а значит $A(C^*) \subseteq C^*$. Теперь докажем, что отображение является сжатием, действительно:

$$|\psi_1 - \psi_2| \le \int\limits_{x_0}^{x} |f(t,\varphi_1(t)) - f(t,\varphi_2(t))|\,dt \le Md \max_{|x-x_0|\le d} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Так как $Md < 1$, то отображение A — является сжатием. Таким образом, задача Коши имеет единственное решение в пространстве C^*.

18. Компактное и бикомпактное метрическое пространство. Примеры. Ограниченность компактного множества. Компактность ограниченного множества в E_n. Некомпактность единичного шара в l_2.

Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность точек в нём содержит сходящуюся подпоследовательность.

Метрическое пространство (X, ρ) называется компактом, если любая бесконечная последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Для конечномерных евклидовых пространств подпространство является компактом тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Понятия компактности и бикомпактности равносильны в применении к метрическим пространствам.

Примеры:
Замкнутые и ограниченные множества в R^n

Компактность ограниченных множеств в E^n

Множество в E^n, описываемое неравенствами: $\Pi(a, b) = \{a_i <= x_i <= b_i\}$, i = 1,2, ... ,n , называется параллелепипедом и является компактом. Действительно, пусть последовательность элементов $x^{(k)} \in \Pi(a, b)$,k = 1,2, ... Тогда числовая последовательность первых координат этих элементов— $\{x_1^{(k)}\}$, содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(k1)}\}$.Числовая последовательность вторых координат, относящихся к элементам, выбранным на первом шаге, — $\{x_1^{(k1)}\}$, — содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(k2)}\}$ и так далее.

Последовательность n-ых координат, относящихся к элементам, выбранным на (n−1)-ом шаге,—$\{x_n^{(k(n-1))}\}$,—содержитсходящуюсяподпоследовательность $\{x_n^{(k(n))}\}$. Полученная в результате указанного выше процесса последовательность элементов $\{x_n^{(k(n))}\}_{(n=1..inf)} \subset \Pi(a, b)$ и сходится в E^n.Всилу замкнутости множества $\Pi(a, b)$ в E^n, ее предел принадлежит $\Pi(a, b)$, то есть рассматриваемое нами множество—компакт. Пользуясь результатом этого примера, легко доказать, что компактом будет любое замкнутое ограниченное множество в E^n (то есть множество n-ок из E^n, все компоненты которых ограничены по модулю). Для доказательства этого достаточно заметить, что такое множество содержится в некотором компакте $\Pi(a, b)$ и любое замкнутое подмножество компакта само является компактом.

Некомпактность единичного шара в l_2

Рассмотрим замкнутый шар S(O, 1) в пространстве l_2 с центром в точке O = (0,0, ... ,0, ...) и радиуса 1, то есть множество последовательностей действительных чисел таких, что: $Sum(i=1..\infty)\ X_i^2 <=1$. Множество S(O, 1) не является компактным подмножеством в l_2 (и тем более не является компактом). Действительно, последовательность $e^{(n)} = (0, ... ,0,1,0, ...)$, где 1 стоит на n-ом месте, не содержит никакой фундаментальной подпоследовательности, так как $\rho(e^{(m)}, e^{(n)}) = \sqrt{2}$, если m != n. Следовательно, рассматриваемое множество не компактно. Не компактно даже множество элементов из l_2, удовлетворяющих условию: $Sum(i=1..\infty)\ X_i^2 =1$.

19. Ограниченность непрерывного на бикомпакте функционала.

Непрерывный *функционал* $f(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***ограничен***.

Доказательство. Предположим противное.

Тогда $\forall n = 1, 2, \ldots \ \exists \mathbf{x_n} \in \mathbf{Q}$ такой, что $|f(\mathbf{x_n})| > n$.

По предположению, последовательность $\mathbf{x_n}$ содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\mathbf{x_{n_k}}$, $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x_{n_k}} = \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$.

В силу ***непрерывности*** $f(\mathbf{x})$ на ***компакте*** $\mathbf{Q}$: $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x_{n_k}}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, но, по построению, $|f(\mathbf{x_{n_k}})| > n_k$ и, следовательно, последовательность $\mathbf{f}(\mathbf{x_{n_k}})$ ***не сходится***.

Получили противоречие.

20.Достижение верхней и нижней граней значений непрерывным на бикомпакте функционалом.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывный функционал f (x), заданный на компакте Q, достигает на компакте Q своей верхней грани.

Доказательство. Функционал f (x) ограничен сверху на компакте Q. Пусть $M = \sup_Q f(x)$. По определению верхней грани, ∀n = 1,2, ..., найдется такая точка x_n компакта Q, что

$$M >= f(x_n) >= M - 1/n \quad (1).$$

В силу (1) — $\lim_{(n\to\infty)} f(x_n) = M$. С другой стороны, последовательность $\{x_n\}$, в силу компактности Q, содержит сходящуюся подпоследовательность — $\{ x_{nk} \}$.

Пусть $\lim_{(n\to\infty)} x_{nk} = z$.

Тогда, в силу непрерывности f и (1): $\lim_{k\to\infty} f(x_{nk}) = f(z) = M$.

Таким образом, в точке $z \in Q$ достигается верхняя грань f — M на компакте Q.

Рассуждая аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы, можно доказать, что непрерывный на компакте функционал обязательно достигает своей нижней грани.

21.Равномерная непрерывность непрерывного на бикомпакте функционала.

Непрерывный функционал f (x), заданный на компакте Q, равномерно непрерывен на этом компакте, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, если $\rho(x1, x2) < \delta(\varepsilon)$, $x1, x2 \in Q$

Доказательство. Пусть это не так.

Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ и $\exists \mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}$ такие, что $\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}\right) < \frac{1}{n}$, но

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n)}\right) \right| \geqslant \varepsilon_0$$

Ввиду того, что $\mathbf{Q}$ ***компакт***, из последовательности $\left\{\mathbf{x}_1^{(n)}\right\}$ можно выбрать ***сходящуюся*** подпоследовательность.

Пусть это будет подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right\}$ и пусть эта подпоследовательность ***сходится*** при $n_k \to \infty$ к ***точке*** $\mathbf{x}_0$ компакта $\mathbf{Q}$.

Тогда ***подпоследовательность*** $\left\{\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right\}$ последовательности $\left\{\mathbf{x}_2^{(n)}\right\}$ будет также при $n_k \to \infty$ ***сходиться*** к ***точке*** $\mathbf{x}_0$, т.к. в силу неравенства треугольника и определения последовательностей $\left\{\mathbf{x}_1^{(n)}\right\}$, $\left\{\mathbf{x}_2^{(n)}\right\}$

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \leqslant \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) < \frac{1}{n_k} + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \to 0 \quad \text{при } n_k \to \infty.$$

В силу ***непрерывности*** функционала f в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ обе последовательности $\left\{f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right)\right\}$ и $\left\{f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right)\right\}$ будут ***сходиться*** при $n_k \to \infty$ к одному и тому же ***значению*** $f(x_0)$.

Но тогда обязательно ***найдётся*** такое $N(\varepsilon_0)$, что при $n_k > N(\varepsilon_0)$ будет ***выполнено*** неравенство

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right) \right| < \varepsilon_0,$$ которое ***противоречит*** нашему предположению.

И тем самым утверждение доказано.

22.Понятие ε-сети и критерий компактности метрического пространства.

Подмножество Σ метрического пространства (X, ρ) называется ε-сетью (для множества X), если $\forall x \in X$ замкнутый шар S(x, ε) содержит хотя бы одну точку из Σ, другими словами каждая точка $x \in X$ отстоит на расстоянии не большем ε от некоторой точки z ε-сети Σ.

Критерий компактности Хаусдорфа.
Для того, чтобы метрическое пространство (X, ρ) было компактным, необходимо и достаточно, чтобы в нем, для любого ε > 0, существовала конечная (состоящая из конечного числа точек) ε-сеть.

Доказательство.
Необходимость.
Предположим, что для какого-то ε > 0, для определенности ε = 1, в компактном пространстве X не существует конечной 1-сети. Построим в X последовательность, не содержащую никакой фундаментальной подпоследовательности. В качестве начальной точки такой последовательности можно взять любую точку X. Пусть это будет точка x0. Так как в X не существует 1-сети, состоящей из одной точки, найдется точка $x_1 \in X$ такая, что $\rho(x_0, x_1) >= 1$.

Точки x_0 и x_1, по предположению, также не образуют 1-сеть. Поэтому найдется точка x_2 такая, что $\rho(x_0, x_2) >= 1$, $\rho(x_1, x_2) >= 1$. Этот процесс можно продолжить. В результате получим последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ из X, которая, по построению, не будет фундаментальной, так как $\forall m$ и $n > m$ — $\rho(x_m, x_n) >= 1$.

Достаточность.
Пусть в X существует конечная ε-сеть при любом ε > 0. Рассмотрим произвольную последовательность $x_1, \dots ,x_n, \dots$ точек из X. Покажем, что она содержит фундаментальную подпоследовательность. Обозначим $\Sigma k = \{y^{(k)}_1 , y^{(k)}_2 , \dots y^{(k)}_{mk} \}$ конечную 1/k-сеть в X, где k = 1,2, ... Положим k = 1. Объединение замкнутых шаров радиуса 1 с центрами в точках $y^{(1)}_1,y^{(1)}_2,\dots,y^{(1)}_{mk}$ покрывает все X. Поэтому точки рассматриваемой нами подпоследовательности $\{x_n\}$ как-то расположены в этой совокупности шаров. Так как шаров конечное число, а последовательность $\{x_n\}$ бесконечна, то, по крайней мере в одном из шаров, находится бесконечное число членов нашей последовательности. Выделим один из таких шаров. Пусть точка x_{n1} находится в этом выделенном шаре.

Этим завершается первый шаг процесса. Положим теперь k = 2. Пусть $y^{(2)}_1,y^{(2)}_2,\dots,y^{(2)}_{m2}$ конечная 1/2-сеть в X. Аналогично выше сказанному, какой-либо из шаров радиуса 1/2 с центром в одной из этих точек содержит бесконечно много точек из $\{x_n\}$, попавших в шар, который был выделен на первом шаге процесса. Выделим один из этих шаров второго шага процесса. В выделенном шаре содержится бесконечное множество точек $\{x_n\}$. Поэтому найдется номер n2 > n1 такой, что точка xn2 принадлежит этому шару второго выделения. По построению xn2 , принадлежит также шару, выделенному на первом шаге процесса. Полагая последовательно k = 3, 4, ... , получим подпоследовательность {xnk } последовательности $\{x_n\}$. Эта подпоследовательность фундаментальна, так как члены этой последовательности с номерами nk, nk+1, ... , по построению, принадлежат шару радиуса 1/k при k = 1, 2, ...

Следствие 1.

Всякое компактное множество Q метрического пространства X ограничено.

Доказательство. Пусть $\Sigma 1$ def = $\{z_j\}_{(j=1..n)}$ есть 1-сеть для множества Q и x0 фиксированный элемент пространства X. Пусть

$d = \max_j \rho(x0, zj)$.

Тогда для всякого элемента x ∈Q имеем: ρ(x0, x) <= 1 + d ,

что и означает ограниченность множества Q в пространстве X.

23.Компактность множества функций в пространстве C[a,b].

Множество Q функций {ϕ(t)} в пространстве C[a,b] называется равномерно ограниченным, если ∃M такое, что для любой функции ϕ(t) ∈Q |*ϕ(t)*| <= *M*,   *t*   *[a,b]*

Множество Q функций {ϕ(t)} в пространстве C[a,b] называется равностепенно непрерывным, если ∀ε > 0 ∃δ (ε) > 0 такое, что для любой функции ϕ(t) ∈Q |*ϕ (t1) − ϕ (t2)*| < *ε*, если |t1−t2|<δ(ε), t1, t2 ∈[a,b]

Любое конечное множество функций {ϕj (t)}j=1..n из пространства C[a,b] равностепенно непрерывно.

Критерий компактности в пространстве C[a,b] содержит

Теорема Арцела.

Для того, чтобы множество Q функций {ϕ(t)} в пространстве C[a,b] было компактно, необходимо и достаточно, чтобы
1◦. Множество Q было равномерно ограниченным в пространстве C[a,b].
2◦. Множество Q было равностепенно непрерывным в пространстве C[a,b].

Доказательство смотри на страницах 80-86 учебника.

24. Изометрия метрических пространств. Пополнение неполных метрических пространств.

Два метрических пространства (X, ρX) и (Y, ρY) называются изометричными, если существует такое взаимнооднозначное соответствие τ между ними, что:

$\forall x, y \in X\ \rho X(x, y) = \rho Y(\tau(x), \tau(y))$.

И, наоборот:

$\forall x0 = \tau(x), y0 = \tau(y) \in Y\ \rho Y(x0, y0) = \rho X(x, y)$.

Само отображение τ называется изометрией (между X и Y).

Полное метрическое пространство Y называется пополнением пространства X, если:
1◦. В Y есть подпространство Y0 изометричное X.
2◦. Y0 всюду плотно в Y, т.е. [Y0] = Y.

Теорема. Любое неполное метрическое пространство X имеет пополнение. Все пополнения метрического пространства X изометричны между собой.

25. Примеры неполных метрических пространств и их пополнений.

Пример 1 — пополнение пространства рациональных чисел [0,1].
Метрическое пространство X, элементами которого являются рациональные числа отрезка [0,1], а расстояние между которыми вводится стандартным образом, как на всей числовой прямой, очевидно, неполно. Его стандартное пополнение — метрическое пространство Y — отрезок [0,1] с расстоянием между точками, как на всей числовой прямой.

Пример 2 — пополнение пространства R^Φ.
Рассмотрим арифметическое пространство R^1 (числовая прямая) с метрикой, задаваемой следующим образом: $\rho(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, где Φ(x) непрерывная, строго возрастающая функция, заданная на R^1 и такая, что $\lim_{(x\to-\infty)} \Phi(x) = 0$, $\lim_{(x\to+\infty)}\Phi(x) = 1$.
Полученное метрическое пространство, которое мы для удобства будем обозначать R^Φ, — неполное. Действительно, как легко проверить, последовательность $\{x_n = n\}$ фундаментальна в этом пространстве, но предела в этом пространстве не имеет.
Пополнением (одним из возможных!) этого пространства служит отрезок [0,1] со

стандартной метрикой, так как, легко показать, что рассматриваемое пространство изометрично интервалу (0,1). При этом, требуемое для изометрии взаимо однозначное соответствие задается отображением: x <-$^{\tau}$ -> Φ(x), — а замыкание интервала (0,1) есть отрезок [0,1].

26. Пополнение пространства непрерывных функций со среднеквадратичной метрикой.

Пример 3 — пространство L_2 [a,b], как пополнение пространства C_{L2}[a,b].
Вновь рассмотрим метрическое пространство C_{L2} [a,b], состоящее из непрерывных на конечном отрезке [a,b] функций, с метрикой
$\rho(x,y) =(int_{(a..b)}[x(t)-y(t)]^2\, dt)^{1/2}$.
Пополнение рассматриваемого пространства с точностью до изометрии совпадает с метрическим пространством L_2[a,b], которое состоит не из индивидуальных функций, а из классов эквивалентных между собой функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, позволяющим ввести метрику, согласованную с текущей метрикой.

27. Определение и свойства линейного пространства. Подпространство линейного пространства.

Множество X называется линейным пространством, если:

1. Для любых двух элементов x, y из X определена операция их сложения, т.е. однозначно определен элемент x + y в линейном пространстве X, называемый суммой элементов x и y.
2. Для любого элемента x из X и любого числа γ, определена операция умножения элемента x на число, т.е. однозначно определён элемент γx в линейном пространстве X, называемый произведением элемента x и числа γ.
3. Операции сложения элементов и умножения элементов на числа в X подчиняются следующим аксиомам:

1◦. — Коммутативность сложения: x + y = y + x .
2◦. — Ассоциативность сложения: (x + y) + z = x + (y + z) .
3◦. — Существование нейтрального относительно сложения элемента:
В X существует элемент O, называемый нейтральным по сложению такой, что
$\forall x \in X : x + O = x$.
4◦. — Существование противоположного элемента: Для любого x уравнение x + y = O разрешимо в X. Элемент $y \in X$ называется противоположным к элементу x.
5◦. — Ассоциативность умножения (на числа): Если λ, μ числа, то: λ(μx) = (λμ)x .
6◦. — Нейтральность e относительно операции умножения: $\forall x \in X : e \cdot x = x$.
7◦. — Дистрибутивность сложения элементов (относительно умножения на числа):
$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.
8◦. — Дистрибутивность сложения чисел (относительно умножения на элементы):
$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot y$.

Свойства:
1. В любом линейном пространстве X нейтральный элемент O может быть только один.
2. В любом линейном пространстве X уравнение: $a + x = a$, для всякого фиксированного элемента $a \in X$, имеет только одно решение: $x = O$ — нейтральный элемент пространства X.
3. Для всякого элемента x из линейного пространства X противоположный к нему элемент $-x$ определяется единственным образом.
4. Для всякого числа λ имеет место формула: $\lambda \cdot O = O$.
5. Для всякого элемента x в линейном пространстве X имеет место формула: $0 \cdot x = O$.
6. Для всякого элемента x в линейном пространстве X имеет место формула: $(-1) \cdot x = -x$.
7. В любом линейном пространстве X уравнение: $a + x = b$ имеет только одно решение: $x = b + (-a)$.
8. Если в линейном пространстве X имеет место равенство $\lambda \cdot x = O$, то это возможно только тогда, когда либо $\lambda = 0$, либо $x = O$.
9. Если в линейном пространстве X имеет место равенство $\lambda \cdot x = \mu \cdot x$, при $x != O$, то $\lambda = \mu$.

Подпространство.
Совокупность L элементов линейного пространства X, называется подпространством в X, если результаты операций сложения любых двух элементов из L и умножения любого элемента из L на любое число принадлежат L.

28. Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства. Размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств одинаковой размерности. Бесконечномерные линейные пространства

Элементы $x^{(1)}, \dots ,x^{(n)}$ линейного пространства X называются линейно независимыми, если из условия: $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)} = O$, следует: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Линейное пространство X называется n-мерным, если в этом пространстве существует n линейно независимых элементов, но любые n + 1 элементов линейного пространства X линейно зависимы.

Любые два конечномерных линейных нормированных пространства данного числа измерений n — X1 и X2, — изоморфны между собой, т.к. каждое из них изоморфно пространству En соответствующего числа измерений. Устанавливаемый в теореме изоморфизм τ является непрерывным в обе стороны отображением пространств X1, X2 и En .

Если $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ в линейном пространстве X существует n линейно независимых элементов, то линейное пространство называется бесконечномерным.

Пример. Линейные пространства l2, C[a,b], Dk [a,b] примеров — бесконечномерные.

29. Нормированные линейные пространства. Примеры. Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на число. Изоморфизм нормированных линейных пространств одинаковой размерности. Эквивалентность норм. Полнота конечномерных линейных нормированных пространств и замкнутость конечномерных подпространств.

Если в линейном пространстве X, каким-либо образом, ввести метрику ρ, то оно превращается в линейное метрическое пространство (X, ρ) и, таким образом, приобретает все свойства общих метрических пространств.

Неотрицательный функционал, определенный на линейном пространстве X называется нормой и обозначается $||x||$ ($\forall x \in X$), если он обладает следующими свойствами:

1◦.Невырожденность: $||x|| >= 0$, и, если : $||x|| = 0$, то : $x = O$.

2◦.Положительная однородность: $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

3◦.Полуаддитивность или неравенство треугольника: $||x + y|| <+ ||x|| + ||y||$.

Если в линейном пространстве X введена норма $||x||$, то в нём может быть введена метрика ρ по формуле: $\rho(x, y) = ||y - x||$

Примеры:
Вещественные числа (n-мерное пр-во)
Непрерывные функции на отрезке
Ограниченные последовательности

В любом линейном нормированном пространстве X обе операции — сложения векторов и умножения вектора на число, — непрерывны.

Доказательство.
1. Пусть последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к элементу x, а последовательность элементов $\{y_n\}$ сходится к элементу y в линейном нормированном пространстве X, при $n\to\infty$. Тогда, в силу неравенства треугольника: $||(x_n + y_n) - (x + y)|| <= ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0$, при $n\to\infty$, что означает непрерывность сложения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве X.
2.Пусть последовательность элементов $\{x_n\}$ сходится к элементу x в линейном нормированном пространстве X, а последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ сходится к числу γ при $n\to\infty$. Тогда, добавляя и вычитая слагаемое $\{\gamma \cdot x_n\}$, на основании неравенства треугольника, получаем: $||\gamma_n x_n - \gamma x|| <= ||(\gamma_n - \gamma) \cdot x_n + \gamma (x_n - x)|| <= |\gamma_n - \gamma| \, ||x_n|| + |\gamma| \, ||x_n - x|| \to 0$, при $n \to \infty$, что означает непрерывность умножения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве X.

Изоморфизм.. смотри ?28

Две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ в линейном пространстве X называются эквивалентными, если существуют такие постоянные κ_1 ,к2 > 0, что для любого $x \in X$ справедливо двойное неравенство: $\kappa_1 \cdot ||x||_1 <= ||x||_2 <= \kappa_2 \cdot ||x||_1$.

Любое конечномерное линейное нормированное пространство X полное.
Действительно, любое конечномерное линейное нормированное пространство X размерности n полно,т.к.оно непрерывно изоморфно полному пространству En.

Всякое конечномерное подпространство Lm в линейном нормированном пространстве X замкнуто, т. е. обязательно является замкнутым подпространством X.
Доказательство.

Пусть e1, e2, ... ,em базис Lm, а последовательность {xk}, k = 1, 2, ... ,k, ... сходится к вектору x0 при $k \to \infty$ в пространстве X.

Покажем, что вектор x0 принадлежит подпространству Lm.

В самом деле, каждый вектор последовательности {xk} имеет разложение по базису Lm : $xk = \alpha_1^{(k)}e1 + \cdots + \alpha_m^{(k)}em$, где $\alpha_1^{(k)}$, ... ,$\alpha_m^{(k)}$ — коэффициенты разложения элемента xk , k = 0, 1, ... ,n, ...

Каждая из последовательностей $\alpha_1^{(k)}$, ... ,$\alpha_m^{(k)}$ координат указанных разложений является сходящейся числовой последовательностью.

Обозначим пределы этих последовательностей $\alpha_1^{(0)}$, , ... ,$\alpha_m^{(0)}$ и рассмотрим вектор: $\alpha_1^{(0)}e1 + \cdots + \alpha_m^{(0)}em$. Очевидно, что этот вектор принадлежит Lm и, в силу единственности предела в метрическом пространстве X, совпадает с вектором x0.

30. Банаховы пространства

Банаховы пространства

Определение 40. ***Полное*** *линейное нормированное пространство называется* ***банаховым*** *пространством* ***(В-пространством)***.

Если линейное нормированное пространство ***неполно***, то, в силу теоремы о пополнении (параграф 4 главы 1), его можно ***пополнить***.

Вообще говоря, ***пополнение*** линейного нормированного пространства не обязано быть ***линейным*** пространством.

Однако, можно показать, что среди пополнений ***обязательно*** есть ***банахово*** пространство с ***нормой***, согласованной с первоначальной, в том смысле, что ее значения на части этого пространства, соответствующей ***пополняемому*** пространству $\mathbf{X}$, ***совпадают*** со значениями, даваемыми ***первоначальной*** нормой.

Пример банахова пространства – действительные числа.

Определение 41. *Пусть* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ *некоторые элементы* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$.

Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$$

формально представляющее из себя **бесконечную** *сумму всех элементов множества* $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *называется* **рядом**, *составленным из элементов* $\{\mathbf{x}_k\}$.

"Параллельно" с ***рядом*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ рассмотрим для каждого n ***конечную сумму***

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k ,$$

которая ***называется*** n-ой ***частичной суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$.

Определение 42. ***Ряд*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *называется* ***сходящимся*** *к* ***элементу*** $\mathbf{x}$, *если* ***последовательность*** *частичных сумм этого ряда* $\{\mathbf{s}_n\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k\right\}$ ***сходится*** *к* $\mathbf{x}$, *т.е.*

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \to 0 \quad \textit{при} \;\; n \to \infty .$$

Элемент $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *к которому сходится последовательность* $\{\mathbf{s}_n\}$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$, *называется* ***суммой ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$.

В силу ***полноты*** пространства $\mathbf{X}$ для сходимости ***последовательности*** частичных сумм $\{\mathbf{s}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы эта последовательность была ***фундаментальной***.

Сделанное выше замечание позволяет сформулировать ***достаточное*** условие сходимости рядов из элементов в ***банаховом*** пространстве.

Утверждение 21 (***Обобщённый признак К. Вейерштрасса***)**.** *Пусть все* ***элементы*** $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ***ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***мажорируются*** *числами* $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *т.е. для всех* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_k .$$

Пусть ***числовой ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k ,$$

составленный из ***неотрицательных*** *чисел* α_k , ***сходится***.

Тогда **ряд** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***сходится*** *в банаховом пространстве* $\mathbf{X}$ *к некоторому его* ***элементу*** $\mathbf{x}$.

Доказательство. Неравенство

$$\| \mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n \|_{\mathbf{X}} = \| \mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_{n+2} + \cdots + \mathbf{x}_{n+p} \|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}$$

показывает, что в силу ***критерия Коши*** для ***числового*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, правая часть этого неравенства $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \to 0$ при $n \to \infty , \forall\, p > 0$ и, следовательно, ***последовательность*** $\mathbf{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k$ ***частичных сумм*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{X}$.

Поэтому в пространстве $\mathbf{X}$ ***существует*** такой элемент $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{s}_n$.

Этот ***элемент*** $\mathbf{x}$ и будет ***суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$. $\square$

Упражнения и задачи к параграфу 1.

1. Доказать ***бесконечномерность*** пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

2. Множество $\mathbf{M}$ в ***линейном*** пространстве $\mathbf{X}$ называется ***выпуклым***, если оно вместе с любыми своими точками $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ содержит все точки $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, такие, что $\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1$, или, выражаясь ***геометрическим*** языком, целиком содержит ***отрезок***, концами которого являются точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Показать, что любой ***шар*** в линейном ***нормированном*** пространстве является ***выпуклым*** множеством.

3*. Доказать, что ***аксиома треугольника*** в определении линейного ***нормированного*** пространства и условие ***выпуклости единичного шара*** этого пространства ***эквивалентные*** утверждения.

4. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ***базис*** n-мерного ***линейного*** пространства $\mathbf{X}$.

Тогда ***всякий*** элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ имеет ***единственное*** разложение:

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j .$$

Показать, что каждая из формул

$$\|\mathbf{x}\|_I = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j|$$

и

$$\|\mathbf{x}\|_{II} = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

определяет ***норму*** в пространстве $\mathbf{X}$.

5. Доказать, что ***нормы*** $\|\mathbf{x}\|_I$ и $\|\mathbf{x}\|_{II}$ в ***любом конечномерном*** линейном пространстве $\mathbf{X}$, введённые в предыдущем упражнении, ***эквивалентны*** (см. определение 39).

31. Теорема Рисса о почти перпендикуляре

Рисс.

Пусть L - замкнутое подпр-во в линейном нормированном пр-ве X, $L \subset X, L \neq X$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists u \in X : \|u\|_X = 1 :$

$\forall x \in L \Rightarrow \|u - x\|_X > 1 - \varepsilon$

<u>Другими словами и нах-ся на положительном расстоянии от всех $x \in L$.</u>

Док-во: Пусть $u_0 \in X$, $u_0 \notin L$

Рассмотрим $f : L \to \mathbb{R}$

$f(x) = \|u_0 - x\|_X \geq 0$

$\inf\limits_{x \in L} f(x) = \inf\limits_{x \in L} \|u_0 - x\| = d \geq 0.$

$\{x_n\}$ - минимизирующая последовательность (т.е. $\{f(x_n)\} \to \inf f(x)$)

$d \leq \|u_0 - x_n\|_X < d + \varepsilon$

$d \neq 0$, т.к. иначе u_0 был бы предельной эл-той всякой $\{x_n\}$ для $f(x)$ и обязан бы был принадлежать L (в силу замкнутости L).

$d = \inf\limits_{x \in L} \|u_0 - x\|_X$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in L$;

$0 < d \leq \|u_0 - x_0\|_X < d + d \cdot \varepsilon$

Положим $u = \dfrac{u_0 - x_0}{\|u_0 - x_0\|_X}$

$\|u\|_X = 1.$

$\forall x \in L:$

$\exists \; v = x_0 + \|u_0 - x_0\|_X \cdot x$

$v \in L$ и $\|u - x\|_X = \left\| \dfrac{u_0 - x_0}{\|u_0 - x_0\|_X} - x \right\|_X =$

$= \dfrac{1}{\|u_0 - x_0\|_X} \|u_0 - x_0 - \|u_0 - x_0\|_X \, x\|_X =$

$= \dfrac{1}{\|u_0 - x_0\|_X} \|u_0 - v\|_X > \dfrac{1}{d + d\varepsilon} \|u_0 - v\|_X \geq$

$\geq \dfrac{d}{d + d\varepsilon} = \dfrac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon$

32. Связь конечномерности и компактности

Связь конечномерности и компактности.

Теорема.

Для того, чтобы подпр-во L лин-го норм. пр-ва X было конечномерным, необх. и дост., чтобы каждое ограниченное мн-во эл-тов из L было компактно.

Док-во: Необходимость

$\exists |L| = n$

L непрерывно изоморфно E^n (см. прошлые вопросы)

всякое огр-е мн-во эл-тов $M \in L$

взаимнооднозначно и взаимнонепрерывно

преобразуется в огр-е мн-во $N \in E^n$.

Всякое огр-е мн-во $N \in E^n$ компактно,

~~то~~ в каждом таком мн-ве N найдется хотя бы

одна бесконечная фундам-я посл-ть.

$\{\dot{x}_k\}$

Каждому эл-ту $\{\dot{x}_k\}$ соот. один эл-т $M \in L$,

в M получается посл. $\{x_k\}$

$\{x_k\}$ - фунд в M (т.к. изоморфизм непр-ый),

$\Rightarrow M$ компактное

Достаточность.

Пусть всякое ***ограниченное*** множество $M \in L$ ***компактно.***

Покажем, что в этом случае пространство L ***конечномерно.***

Возьмём в L произвольный элемент x_1 с нормой 1 : $\| x_1 \| = 1$.

Рассмотрим линейное подпространство L_1, ***порождаемое*** единственным элементом x_1.

Если $L = L_1$, то теорема доказана.

Если же $L \neq L_1$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в L найдётся такой элемент x_2, что, во-первых, $\| x_2 \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства L_1 будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| x_2 - x_1 \| \geqslant 1/2$.

Обозначим через L_2 линейное ***подпространство*** в L линейную оболочку векторов x_1, x_2.

Если $L = L_2$, то теорема доказана.

Если же $L \neq L_2$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в L найдётся такой элемент x_3, что, во-первых, $\| x_3 \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства L_2 будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| x_3 - x_1 \| \geqslant 1/2$ и $\| x_3 - x_2 \| \geqslant 1/2$.

Продолжая процесс дальше, мы на каждом шаге этого процесса имеем только ***две возможности***: либо ***при некотором*** n подпространство $\mathbf{L}_n$, построенное как линейная оболочка множество ***всех линейных комбинаций*** элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаемых на каждом шаге элементов пространства $\mathbf{L}$, совпадает с $\mathbf{L}$: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_n$, процесс построения новых векторов ***обрывается*** на данном шаге и теорема, таким образом, ***доказана***.

Либо процесс ***продолжается бесконечно***, т.е. для ***всякого*** n имеет место ***вторая*** возможность: $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_n$, и тогда по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент x_{n+1}, что, во-первых, $\| x_{n+1} \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до ***всех*** элементов подпространства $\mathbf{L}_n$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| x_{n+1} - x_1 \| \geqslant 1/2$, и $\| x_{n+1} - x_2 \| \geqslant 1/2$, и так далее: $\| x_{n+1} - x_n \| \geqslant 1/2$.

В этом случае мы ***эффективно*** строим ***бесконечную*** последовательность векторов из пространства $\mathbf{L}$ $\{ x_k \}$ такую, что во-первых, $\| x_k \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_k$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| x_k - x_m \| \geqslant 1/2$ при $m < k$.

Но, указанная таким образом ***ограниченная*** последовательность $\{ x_k \}$ ***не может*** содержать бесконечной ***фундаментальной*** подпоследовательности, что противоречит ***компактности*** единичной сферы пространства $\mathbf{L}$. $\square$

33. Линейные операторы. Примеры. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Его норма
+ 34. Примеры ограниченных и неограниченных

2.2 Линейные операторы

Определение и примеры

Определение 43. *Пусть* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *два* ***линейных нормированных пространства.***

Отображение $\mathbf{A}$ *из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$ *называется* ***линейным оператором,*** *если для* ***любых*** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ *и* ***любых*** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$:

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{A}\mathbf{x}_2 .$$

Пример 1. Оператор $\mathbb{O}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$ этот оператор ставит в соответствие нулевой элемент $\mathbb{O}_{\mathbf{X}}$ этого пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{O}\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbb{O}_{\mathbf{X}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Пример 2. Оператор $\mathbb{E}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие тот же самый элемент $\mathbf{x}$ этого же пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{E}\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Пример 3. Оператор $\mathbf{\Lambda}$ определяется следующим условием: при некотором заранее фиксированном числе λ каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\lambda \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства:
$\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} \overset{def}{=} \lambda \cdot \mathbf{x}$.

Пример 4. Пусть $\alpha(t)$ непрерывная на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функция одного вещественного переменного t, т.е. некоторый фиксированный ***элемент*** пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Для всякого элемента $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определим оператор $\mathbf{A}$ (умножения на функцию) $\alpha(t)$ следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x} \overset{def}{=} x(t)$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\alpha(t) \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{def}{=} \alpha(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма оператора

Теорема 9. ***Линейный оператор*** $\mathbf{A}$, ***непрерывный*** *в точке* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ ***непрерывен*** *в* ***любой*** *другой точке линейного пространства* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в точке $\mathbf{x}_0$, то есть $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ такое, что:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta \tag{1}$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ***любые*** точки $\mathbf{X}$, то, обозначая $\mathbf{x} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{x}_0$ и используя ***линейность*** $\mathbf{A}$, из (1) получим:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta .$$

То есть:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta .$$

Но, справедливость этих неравенств, как раз, и означает ***непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$ в точке $\mathbf{u}$ (или $\mathbf{v}$). □

В дальнейшем мы будем опускать нижние индексы у знака ***нормы***, указывающие на ***пространство***, в котором она определена, если это ясно из контекста.

Определение 44. ***Оператор*** $\mathbf{A}$ *называется* ***ограниченным,*** *если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\exists$ ***постоянная*** $\mathbf{M} > 0$ *такая, что:*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \mathbf{M} \cdot \|\mathbf{x}\| .$$

Множество *всех таких возможных постоянных* $\mathbf{M}$ ***ограничено снизу*** *нулем и, поэтому, имеет* ***нижнюю грань.***

Эта ***нижняя грань обозначается*** $\|\mathbf{A}\|$ *и называется* ***нормой оператора*** $\mathbf{A}$.

Утверждение 22.

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| .$$

Доказательство. Обозначим правую часть этого предполагаемого равенства через $\mathbf{L}$.

Из ***ограниченности*** $\mathbf{A}$ следует $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ и поэтому $\mathbf{L} \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

С другой стороны

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = 1, \quad \text{и потому:} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \left\| \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\,\mathbf{x}\,\|} \right) \right\| \cdot \|\,\mathbf{x}\,\| \leqslant \mathbf{L}\, \|\mathbf{x}\| .$$

Следовательно $\|\mathbf{A}\| \leqslant \mathbf{L}$.

Окончательно: $\|\mathbf{A}\| = \mathbf{L} = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$. □

Оказывается, что свойства ***ограниченности*** и ***непрерывности*** линейного оператора не являются ***независимыми.***

Теорема 10. ***Ограниченный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** *и, наоборот,* ***непрерывный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***ограничен.***

Доказательство. Действительно, в силу ***ограниченности*** $\mathbf{A}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon ,$$

если

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{A}\|} .$$

Но это означает ***непрерывность*** $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$, а, поэтому, и в ***любой*** точке пространства $\mathbf{X}$.

Доказательство ***обратного*** утверждения проведем ***от противного***.

Пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в $\mathbb{O}$, но ***не ограничен***.

Тогда найдется последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$, $\|\mathbf{x}_n\| = 1$, такая, что:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x_n}\| \geqslant n, \quad n = 1, \ldots$$

Последовательность

$$\mathbf{y}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{n}$$

сходится к $\mathbb{O}$ при $n \to \infty$, но $\|\mathbf{A}\mathbf{y}_n\| \geqslant 1, \quad n = 1, \ldots$.

Это ***противоречит*** непрерывности $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$. $\square$

Линейный оператор в $\mathbb{R}^n_{\max}$

Пример 5. В ***линейной алгебре*** показывается, что ***любое линейное*** отображение $\mathbf{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ задается ***матрицей*** $\mathcal{A}$, имеющей n столбцов и m строк:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на ***элемент*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ***определяется*** как ***умножение матрицы*** $\mathcal{A}$ на ***столбец*** $(x_1, \ldots, x_n)$ по известному из линейной алгебры классическому правилу.

Введем в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ ***норму***:

Утверждение 23. ***Оператор*** $\mathbf{A}$, *порожденный матрицей* $\{a_{ij}\}$, — *линейный* ***ограниченный*** *оператор из* $\mathbb{R}^n_{\max}$ *в* $\mathbb{R}^n_{\max}$.

Доказательство. Действительно, образ элемента $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть элемент $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, где

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \qquad \|\mathbf{y}\| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \right) \cdot \|\mathbf{x}\| .$$

Отсюда:

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \right) \qquad (2)$$

Покажем, что ***правая*** часть неравенства равна его ***левой*** части.

Пусть ***максимум*** в правой части (2) ***достигается*** на индексе $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим ***элемент*** $\mathbb{R}^n$, определенный следующим образом: $x_j = sgn\,(a_{i_0 j})$, где $sgn\,(\cdot)$ означает ***знак*** соответствующего элемента матрицы.

Ясно, что $\|\mathbf{x}\| = 1$. Кроме того:

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i_0 j}\,|, \quad \text{а} \quad |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \quad \text{при } i \neq i_0 .$$

Следовательно:

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \right) = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij}\,| \right)$$

Линейный интегральный оператор,

действующий из $\mathbb{C}\,[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ в $\mathbb{C}\,[\mathrm{a},\mathrm{b}]$

Пример 6. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ***интегральный оператор***, действующий по формуле:

$$\mathbf{Ax} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}x\,(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\,s)x(s)\,ds, \quad \mathbf{a} \leqslant s,\,t \leqslant \mathbf{b}\;.$$

Функция $\mathcal{K}\,(t,\,s)$ называется ***ядром*** интегрального оператора.

Мы предполагаем функцию $\mathcal{K}\,(t,\,s)$ ***непрерывной*** на множестве $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \times [\mathrm{a},\mathrm{b}]$.

Выше определённый интегральный оператор, обычно, называют интегральным оператором ***Фредгольма***.

Непосредственно из свойств интеграла следует ***линейность*** введенного оператора.

Кроме того:

$$\left|\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\,s)x(s)\,ds\right| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x}\,\| \cdot \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\,s)\,|\;ds\;.$$

Оценка, полученная в правой части неравенства, не зависит от t и поэтому:

$$\|\,\mathbf{Ax}\,\| \;\leqslant\; \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\,s)\,|\;ds \,\cdot\, \|\,\mathbf{x}\,\|\;,$$

и

$$\|\,\mathbf{A}\,\| \;\leqslant\; \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\,s)\,|\;ds \qquad (3)$$

Замечание. Можно показать, что оценка (3) является ***точной***: ***норма*** оператора $\mathbf{A}$ равна правой части ***оценки*** (3).

Пример неограниченного оператора

Пусть $\mathbf{X}$ ***линейное подпространство*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, состоящее из всех ***непрерывно дифференцируемых*** функций.

Линейное подпространство $\mathbf{X}$ — линейное ***нормированное пространство*** с ***нормой***, наследуемой из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Рассмотрим ***оператор дифференцирования***

$$\mathbf{Ax} \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\,[\,x\,(t)\,]\ .$$

Оператор $\mathbf{A}$, очевидно, ***линеен***. Покажем, что ***оператор*** $\mathbf{A}$ ***неограничен***, как оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В самом деле, ***множество*** элементов

$$\mathbf{x}_n \overset{def}{=} x_n\,(t) \equiv sin\,nt,\ \ n\,=\,1,\,2,\,3,\,\ldots\ \ ,$$

пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ при

$$n\,>\,\frac{\boldsymbol{\pi}}{2\max\{\,|\mathbf{a}|,\,|\mathbf{b}|\,\}}\ ,$$

принадлежит ***единичной сфере*** пространства $\mathbf{X}$ с центром в нуле: $\mathbb{O} \overset{def}{=} x\,(t)\,\equiv\,0\,.$

Если же к указанным функциям применить оператор $\mathbf{A}$, то соответствующие ***образы*** указанных элементов $\mathbf{Ax}_n$ ***не*** будут ***ограничены все*** сразу, при достаточно большом n, никакой фиксированной постоянной:

$$\|\mathbf{Ax}_n\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}}\left|\frac{d}{dt}\,[x_n\,(t)]\right| = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}}|n\cdot cos\,nt| = n\cdot\max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}}|cos\,nt| = n\to\infty\,.$$

Заметим, что рассматривая оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, как оператор действующий из пространства $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, являющегося собственной частью $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, мы получим ***ограниченный*** оператор, т.к.

$$\left\| \frac{d}{dt}\mathbf{x} \right\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| \frac{d}{dt}\left[x(t) \right] \right| \leqslant \| \mathbf{x} \|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} ,$$

в силу чего

$$\left\| \frac{d}{dt} \right\|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant 1 .$$

35. Поточечная сходимость в пространстве линейных операторов.

Последовательность операторов {An}, n = 1, 2, 3, ... из пространства L_O (X, Y) сходится поточечно к оператору A $\in L_O$ (X, Y), если $\forall x \in X$: $||A_n x - Ax||Y \to 0$, при $n \to \infty$.

Для поточечной сходимости операторов соответствующим образом определяются и фундаментальные (относительно поточечной сходимости) последовательности операторов $\{A_n\}$, n = 1, 2, 3, ..., из пространства L_O (X, Y).

Замечание.
Очевидно, что в пространстве операторов LO (X, Y) из сходимости последовательности операторов {An}, n = 1, 2, 3, ..., по норме к оператору A, следует поточечная сходимостью этой же последовательности операторов {An} к тому же самому оператору A в LO (X, Y). Обратное заключение неверно

Пример.
В линейном нормированном пространстве l_2 рассмотрим последовательность операторов {Pn}, n = 1, 2, 3, ..., определяемых для всякого элемента x def= (x1, ... ,xn, ...) пространства l2 следующим образом: *Pnx =* ^{def} *(x1, ... ,xn, 0, 0, …) =*^{def} *xn.*
Т.к. $x \in l2$, то
$||x-Pnx||_{l2} =^{def} ||(0,... ,0,xn+1,xn+2,...)||_{l2} = (sum_{(j=n+1..\infty)} x^2_j)$^1/2 $\to 0$ при $n \to \infty$, что, как раз, и означает, что последовательность операторов {Pn} поточечно сходится к единичному оператору E в пространстве l2, переводящему всякий элемент пространства x из l2 снова в этот же элемент x : *Pnx* $\to$ *Ex = x при n* $\to \infty$. Однако, сходимость последовательности операторов {Pn} по норме к тому же единичному оператору E не имеет места, т.е.
$||E-Pn||_{LO(l2,l2)} ! \to 0$ при $n \to \infty$, т.к. при любом n, например, для вектора en+1= ^{def} (0, ... ,0, 1, 0, ...) из l2, где 1 стоит на месте с номером n + 1, имеем:
$||Ee_{n+1} - P_n e_{n+1}||_{l2} = ||e_{n+1} - O||_{l2} = ||e_{n+1}||_{l2} = 1$.
Поэтому, для всех n
$||E-Pn||_{LO\ (l2,l2)} = \sup_{||x||l2=1} ||Ex-P_n x||_{l2} >= ||Ee_{n+1} - Pne_{n+1}||l2 = 1 ! \to 0$.

36. Принцип равномерной ограниченности. Теорема Банаха-Штейнгауза.

Будем рассматривать последовательность линейных ограниченных операторов $A_n : X \to Y$.

Определение:

Последовательность A_n **поточечно ограничена**, если $\forall x \in X \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < +\infty$.

Определение:

Последовательность A_n **равномерно ограничена**, если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$.

Теорема (Банах, Штейнгауз, принцип равномерной ограниченности):

Пусть X — банахово, $A_n \in L(X, Y)$, A_n поточечно ограничена. Тогда A_n равномерно ограничена.

Доказательство:

Сначала покажем, что существует замкнутый шар $\overline{V}(a, r)$, в котором $\sup\limits_n \sup\limits_{x\in\overline{V}} \|A_n x\| < +\infty$. Покажем от противного, пусть такого шара нет, возьмем тогда произвольный замкнутый шар $\overline{V}$, в нем $\sup\limits_n \sup\limits_{x\in\overline{V}} \|A_n x\| = +\infty$.

Тогда в силу неограниченности найдется n_1 и $x_1 \in \overline{V} : \|A_{n_1} x_1\| > 1$; A_{n_1} непрерывен, значит, можно взять $V_r(x_1) = \overline{V_1} \subset \overline{V}$, где $r(V_1) \leq \frac{r(\overline{V})}{2}$.

Опять в силу неограниченности найдется $n_2 > n_1$ и $x_2 \in V_1(x_1) : \|A_{n_2} x_2\| > 2$; A_{n_2} непрерывен, берем $V_r(x_2) = \overline{V_2} \subset \overline{V_1}$, где $r(V_2) \leq \frac{r(\overline{V}_1)}{2}$.

Продолжая таким образом, выстраиваем последовательность вложенных шаров $\overline{V}_{n_m} : \overline{V}_{n_{m+1}} \subset \overline{V}_{n_m}, r_{n_m} \to 0, \forall x \in \overline{V}_{n_m} : \|A_{n_m} x\| > m$.

Так как X - банахово, то существует $c \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{V}_{n_m}$, $\sup\limits_m \|A_{n_m}(c)\| < +\infty$.

Но $\forall m : \|A_{n_m}(c)\| > m$, то есть, $\sup\limits_m \|A_{n_m}(c)\| = +\infty$. Получили противоречие, значит, такой шар $\overline{V}(a, r)$ найдется, пусть на нем $\sup\limits_n \sup\limits_{x\in\overline{V}} \|A_n x\| = M$. Заметим, любому $x \in \overline{V}(0, 1)$ в соответствие можно поставить $x' \in \overline{V}(a, r)$ как $x' = rx + a$, тогда $\|A_n x\| = \frac{\|A_n x' - A_n a\|}{r} \leq \frac{M + \|A_n a\|}{r}$. По поточечной ограниченности операторов, $\exists M_1 : \|A_n a\| \leq M_1$, таким образом, $\|A_n x\| \leq \frac{M+M_1}{r}$, то есть ограничена константой, не зависящей от n и x.

37. Продолжение непрерывного оператора, заданного на плотном множестве(маловато ???).

20. Продолжение по непрерывности линейного функционала со всюду плотного линейного подмножества НП.

Лемма:

Пусть X - НП, Y всюду плотно в X, f - ограниченный линейный функционал из Y. Тогда $\exists! g : X \to \mathbb{R} : g(y) = f(y),\ \|g\| = \|f\|$ (существует единственное продолжение, сохраняющее норму)

38. Линейные ограниченные функционалы в линейных нормированных пространствах. Сопряжённые пространства. Неравенство Гёльдера.

Линейно-сопряжённое пространство

Пространство всех линейных функционалов, определённых на линейном пространстве E, также образует линейное пространство. Это пространство называется *сопряжённым* к E, оно обычно обозначается E^*.

Свойства

- В конечномерном случае сопряжённое пространство E^* имеет ту же размерность, что и пространство E над полем F:

  любому базису $\{e^i\}_{i=1}^n$ из E можно поставить в соответствие т.н. *двойственный базис* $\{e_i\}_{i=1}^n$ из E^*, где функционал e_i — проектор на вектор e^i:

  $$e_i(x) = e_i(\alpha_1 e^1 + \ldots + \alpha_n e^n) = \alpha_i, \quad \forall x \in E$$

- Если пространство E евклидово, то есть на нём определено скалярное произведение, то существует канонический изоморфизм между E и E^*.
- Если пространство E гильбертово, то по теореме Рисса существует изоморфизм между E и E^*.
- В конечномерном случае верно также, что пространство, сопряжённое к сопряжённому E^{**}, совпадает с E (точнее, существует канонический изоморфизм между E и E^{**}).

Неравенство Гёльдера

Формулировка

Пусть $(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, а $L^p \equiv L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство функций вида $f : X \to \mathbb{R}$ с конечной интегрируемой p-ой степенью. Тогда в последнем определена полунорма:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \, \mu(dx) \right)^{1/p},$$ где $p \geq 1$, обычно подразумевается, что это натуральное число.

Пусть $f \in L^p$, а $g \in L^q$, где $p, q \geq 1,\ 1/p + 1/q = 1$. Тогда $f \cdot g \in L^1$, и $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Доказательство

Переформулируем неравенство Гёльдера, выразив нормы через соответствующие интегралы.

Пусть X — пространство с мерой μ, $E \subset X$, E измеримо. Тогда:

$$f \in L^p, g \in L^q, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \int\limits_E |fg| \, d\mu < +\infty, \ \int\limits_E |fg| \, d\mu \leq \left(\int\limits_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int\limits_E |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}$$

Для доказательства воспользуемся следующим утверждением (неравенство Юнга): $a, b \geq 0, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$

Положим $a = \frac{|f(x)|^p}{\int\limits_E |f|^p d\mu}$ $\quad b = \frac{|g(x)|^q}{\int\limits_E |g|^q d\mu}$ $\quad I_1 = \int\limits_E |f|^p d\mu > 0$ $\quad I_2 = \int\limits_E |g|^q d\mu > 0$

Применяя неравенство, получаем: $|f(x)g(x)| \leq I_1^{1/p} I_2^{1/q} \left(\frac{|f(x)|^p}{p \cdot I_1} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot I_2} \right)$

Заметим, что правая часть неравенства суммируема по множеству E (отсюда вытекает и суммируемость левой части). Интегрируя неравенство по E, получаем:

$$\int\limits_E |fg| \, d\mu \leq I_1^{1/p} I_2^{1/q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = I_1^{1/p} I_2^{1/q}$$ Неравенство Гельдера доказано.

Примечание: Если I_1 или I_2 равен 0, то это значит, что f или g эквивалентны нулю на E, и неравенство Гёльдера очевидно выполняется.

39.Теорема Хана-Банаха(та ли ???).

Теорема о непрерывном продолжении линейного функционала

Всякий линейный ограниченный функционал f, определённый на линейном многообразии Y линейного нормированного пространства X, можно продолжить на все пространство с сохранением нормы.

Для любых двух различных точек линейного нормированного пространства или локально выпуклого пространства существует линейный непрерывный функционал, определённый на всем пространстве, для которого его значения в этих точках различны.

Доказательство

Сначала докажем, что существует продолжение в одном направлении. Пусть $z \in X \setminus Y$. Рассмотрим линейное пространство вида:
$Y_z \doteq \{y + az,\ y \in Y,\ a \in \mathbb{R}\}$.

Продолжение f на Y_z запишем: $\tilde{f}(y + az) \doteq f(y) + a\tilde{f}(z)$,
где $\tilde{f}(z)$ — вещественное число, которое необходимо определить. Для произвольных $y_1, y_2 \in Y$ и $a, b > 0$ выполняется:

$$f(ay_1 + by_2) = (a+b)f\left(\frac{a}{a+b}y_1 + \frac{b}{a+b}y_2\right) \leqslant (a+b)p\left(\frac{a}{a+b}y_1 + \frac{b}{a+b}y_2\right) =$$

$$= (a+b)p\left(\frac{a}{a+b}(y_1 - bz) + \frac{b}{a+b}(y_2 + az)\right) \leqslant ap(y_1 - bz) + bp(y_2 + az).$$

Отсюда $a\left(f(y_1) - p(y_1 - bz)\right) \leqslant -b\left(f(y_2) - p(y_2 + az)\right)$

Как следствие $\frac{1}{b}\left(-p(y_1 - bz) + f(y_1)\right) \leqslant \frac{1}{a}\left(p(y_2 + az) - f(y_2)\right) \quad \forall\, y_1, y_2 \in Y, \quad \forall a, b > 0.$

Определим $c \in \mathbb{R}$ так $\sup\limits_{a>0, y\in Y}\left\{\frac{1}{a}\left[-p(y - az) + f(y)\right]\right\} \leqslant c \leqslant \inf\limits_{a>0, y\in Y}\left\{\frac{1}{a}\left[p(y + az) - f(y)\right]\right\}.$

Выполняется равенство $ac \leqslant p(y + az) - f(y) \quad \forall\, y \in Y, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$

Определим $\tilde{f}(z) = c.$

Для всех $y \in Y$ и произвольных $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство: $\tilde{f}(y + az) = f(y) + ac \leqslant p(y + az)$, поэтому $\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \quad \forall\, x \in Y_z$.

Для завершения доказательства используем лемму Цорна. Пусть E является множеством всех возможных продолжений, удовлетворяющих условия теоремы. Данное множество является частично упорядоченным из-за включения областей определения, и каждое линейно упорядоченное подмножество имеет супремум (объединение областей определения). Поэтому по лемме Цорна данное множество имеет максимальный элемент. Данный элемент равен всему пространству, иначе в противном случае можно осуществить дальнейшее продолжение воспользовавшись только определенной конструкцией.

40. Вполне непрерывный оператор. Его непрерывность. Примеры.

Линейный оператор A, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, называется вполне непрерывным (компактным) оператором, если образ любой ограниченной в X последовательности {xn} содержит сходящуюся в Y подпоследовательность.

Пример.
Любой линейный оператор, действующий из пространства Em в пространство En, — вполне непрерывен.

Всякий вполне непрерывный оператор A непрерывен.
Доказательство.
Действительно, множество {Ax : ||x|| = 1} компактно в Y и, поэтому, ограничено, то есть ∃C > 0 : $\sup_{||x||=1}||Ax|| < C$. Следовательно оператор A ограничен и, поэтому, непрерывен.

Свойства

- Всякий вполне непрерывный оператор является ограниченным, однако не всякий ограниченный оператор является вполне непрерывным
- Линейная комбинация вполне непрерывных операторов A, B вида $\alpha A + \beta B$, где α, β - числа, также является вполне непрерывным оператором
- Пусть A - вполне непрерывный оператор, отображающий бесконечномерное банахово пространство в себя, и B - произвольный линейный ограниченный оператор, определённый на этом же пространстве. Тогда AB и BA являются вполне непрерывными операторами
- Если последовательность вполне непрерывных операторов $\{A_n\}$, отображающих пространство E_x в полное пространство E_y, равномерно сходится к оператору A (то есть $\|A - A_n\| \to 0$), то A также вполне непрерывный оператор.

41. Линейное пространство линейных операторов.

Пусть A и B два линейных оператора, определенных в линейном пространстве X и действующих в линейное пространство Y. Тогда, естественным образом можно определить линейные операторы $C \stackrel{def}{=} A+B$ и $D \stackrel{def}{=} \lambda \cdot A$, где λ произвольное действительное число.

По определению:
$(A + B)\, x \stackrel{def}{=} Ax + Bx$.
$(\lambda \cdot A)x \stackrel{def}{=} \lambda\, (Ax)$.

Можно также определить нулевой оператор O :
$Ox \stackrel{def}{=} O, \quad x \quad X$
и противоположный оператор (−A) к (произвольному) линейному оператору
$A{:}(-A)x \stackrel{def}{=} -(Ax), \forall x \in X$.

Совокупность всех линейных операторов, действующих из X в Y, — образует линейное пространство — L (X, Y).
Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения всех аксиом, определяющих линейное пространство.

42. Структура и основные свойства(???) линейного нормированного пространства линейных ограниченных операторов.

$$\|\,\mathbf{A}\,\| = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |\,a_{ij}\,| \right)$$

Если X и Y — линейные нормированные пространства, то множество линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, само является линейным нормированным пространством, норма каждого элемента которого есть ||A||. Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать LO (X, Y), чтобы отличать его от линейного пространства L (X, Y), введенного выше.

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения для LO (X, Y) всех 3-х аксиом, определяющих линейное нормированное пространство.

43. Условия полноты линейного нормированного пространства линейных операторов(???).

Обычная проверка на полноту?

44. Произведение операторов. Обратный оператор. Разрешимость операторного уравнения. Теорема Банаха об одновременной непрерывности взаимно обратных биективных отображений банаховых пространств(???).

Если X, Y, Z — три линейных пространства, оператор A действует из X в Y, а B — оператор, действующий из Y в Z, то можно определить произведение (композицию) операторов A и B : Cx = B(Ax) .
Таким образом, оператор C действует из X в Z и будет линейным оператором, если линейны оба оператора A и B.

Оператор C, действующий из Y в X называется обратным к оператору A, действующему из X в Y, если: CAx = x, $\forall x \in X$ ACy = y, $\forall y \in Y$

Существование обратного оператора к оператору A эквивалентно однозначной разрешимости операторного уравнения: *Ax = y, y Y (4)*
Доказательство.
Действительно, пусть A имеет обратный — A^{-1}. Тогда $\forall y \in Y$ элемент $A^{-1}y$, очевидно, является решением уравнения (4). Покажем, что это решение — единственное. В самом деле, в противном случае, пусть z —какое-либо решение (4), отличное от $A^{-1}y$. Тогда: $A(A^{-1}y-z)=O$.
Подействовав на это равенство оператором A^{-1}, получим: $A^{-1}y - z = O$ *или* $z = A^{-1}y$.
Пусть теперь уравнение (4) однозначно разрешимо при любом $y \in Y$. Обозначим это решение C(y). Покажем, что C(y) — линейное отображение. Действительно, $\forall y1, y2 \in Y$, рассмотрим линейную комбинацию αy1 + β y2. Тогда C(αy1 + β y2) — единственное решение уравнения (4) с правой частью αy1 + β y2. Но, из линейности A следует, что αCy1 + β Cy2 — решение этого же уравнения. Поэтому, в силу единственности решения уравнения (4) :
C(αy1 + β y2) = αCy1 + β Cy2 ,
и, следовательно, C — линейный оператор. Непосредственно проверяется, что оператор C удовлетворяет $C = A^{-1}$.

45.Достаточное условие непрерывной обратимости линейного оператора.

Если X и Y линейные нормированные пространства, то можно ставить вопрос о непрерывности (ограниченности) обратного оператора A^{-1}.

Теорема

Пусть A линейное отображение линейного нормированного пространства X на линейное нормированное пространство Y такое, что для некоторого m > 0 выполнено условие:

$||Ax|| >= m \cdot ||x||, \quad x \quad X \qquad (5)$

Тогда существует обратный оператор A^{-1} и, кроме того, справедлива следующая оценка нормы этого обратного оператора:

$||A^{-1}|| <= 1/m$

Доказательство.

Действительно, так как A — отображение на Y, то $\forall y \in Y$, уравнение Ax=y имеет решение, которое, в силу (5), единственно. Следовательно оператор A^{-1} существует. Полагая в (5) $x = A^{-1}y$, получим: $||A^{-1}|| <= 1/m * ||y||$, что и означает утверждаемую оценку нормы обратного оператора.

46. Теорема Банаха об обратном операторе.

Определение:

Оператор $A : X \to Y$ называется **непрерывно обратимым**, если существует $A^{-1} : Y \to X$ и $\|A^{-1}\| < \infty$, причем A^{-1} должен быть определен на всем Y.

Теорема (Банах, о непрерывной обратимости I-C):

Пусть X — B-пространство, оператор $C : X \to X, C \in L(X)$ и $\|C\| < 1$. Тогда оператор $I - C$, где I — тождественный оператор, непрерывно обратим.

Доказательство:

$L(X)$ — B-пространство.

Рассмотрим следующие суммы: $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C^k$. $\qquad (I - C)S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (C^k - C^{k+1}) = I - C^{n+1}$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k$ — ряд в B-пространстве $L(X)$ сходится, если сходится ряд из соответствующих норм. Покажем это: пусть есть операторный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Рассмотрим последовательность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$, она будет сходиться если сходится в себе (по Банаховости пространства). Тогда $S_n - S_m = \sum\limits_{i=m}^{n} A_i$, а $\|S_n - S_m\| = \| \sum\limits_{i=m}^{n} A_i \| \leq \sum\limits_{i=m}^{n} \|A_i\|$ (так как для конечного числа членов норма суммы меньше суммы норм), но так как последовательность норм сходится, она также сходится в себе и $\sum\limits_{i=m}^{n} \|A_i\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$, то есть частичные суммы сходятся в себе, а, значит, и сходятся.

Из того, что $\|C^k\| \leq \|C\|^k$, получаем $\left\| \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k \right\| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|C\|^k = \frac{1}{1-\|C\|} < \infty$.

Так как $\|C\| < 1$, то существует такой $S \in L(X)$, что $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k$. $\quad S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. Поскольку $\|C\| < 1$, то $\|C^k\| \to 0$, а значит, и $C^k \to \mathbb{O}$.

$(I - C)S_n = I - C^{n+1}$. Устремляя n к бесконечности, получаем $(I - C)S = I$, а значит $S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k = (I - C)^{-1}$ — ограниченный оператор.

47.Открытость множества обратимых операторов.

Непрерывность обратного оператора следует из принципа открытых отображений Банаха: оператор A, как непрерывный оператор, любое открытое множество переводит в открытое. Тогда для оператора A^{-1}его прообраз R(A)=Y открыт.

49.Собственные числа и собственные элементы оператора.

Элемент x != O линейного пространства X, в котором действует оператор A, называется собственным элементом, если для некоторого действительного числа λ выполнено равенство:

Ax = λx (9)

Число λ называется собственным значением, соответствующим собственному элементу x.

48. Резольвента оператора. Резольвентное множество и спектр оператора. Открытость резольвентного множества и замкнутость спектра(???).

Значение параметра λ (см 49) называется регулярным для оператора A, если при этом значении λ существует ограниченный обратный оператор по отношению к оператору ($\lambda E - A$). Этот оператор — $(\lambda E - A)^{-1} \stackrel{def}{=} R_\lambda^A$, называется резольвентой оператора A, а множество регулярных значений λ называется резольвентным множеством оператора A. Множество значений параметра λ, не являющихся регулярными, образуют спектр оператора A.

Таким образом, все собственные значения λ оператора A входят в спектр этого оператора, т.к. при таком значении λ $\ker(\lambda E - A) =^{def} \{x \in X \mid (\lambda E - A)x = O\}$!={O} ,и, поэтому, оператор ($\lambda E - A$) необратим.