Семинар 3 (15.09.16)

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ — упорядоченный набор — ~~это~~

Упоряд. наборы $(a_1, a_2, \ldots a_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называются <u>равными</u>, если $(m = n) \wedge (a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \ldots \wedge (a_m = b_m)$

Пусть A и B множества.

Множества всех уп-ых наборов (a, b), где $a \in A$, $b \in B$, называется <u>декартовым произведением</u> множеств A и B.

<u>Обозначение</u> $A \times B$

$A^2 = A \times A$ - декартов квадрат множества A.

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ - декартовое произведение множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$.

<u>Задача</u> $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 7\}$.

$A \times B = \{(1,3), (1,7), (2,3), (2,7), (3,3), (3,7)\}$

$B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (7,1), (7,2), (7,3)\}$

$B^2 = B \times B = \{(3,3), (3,7), (7,3), (7,7)\}$

$B^3 = B \times B \times B = \{(3,3,3), (3,3,7), (3,7,3), (3,7,7), (7,3,3), (7,3,7), (7,7,3), (7,7,7)\}$

$B \times A \times B \{(3,1,3), (3,1,7), (3,2,3), (3,2,7), (3,3,3), (3,3,7), (7,1,3), (7,1,7), (7,2,3), (7,2,7), (7,3,3), (7,3,7)$

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$

Тема 2 Действительные числа

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ - множество рациональных чисел

$\mathbb{I}$ - множество иррациональных чисел

Пусть $x \in \mathbb{Q}$, $x = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несокр. дробь.}}$

$$\begin{array}{l|l} m & n \\ \hline & \underbrace{\ldots}_{\text{десятичная дробь.}} \end{array}$$

Число x можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Если $n = 2^p \cdot 5^5$, то число x можно записать в виде конечной десят. дроби.

Пример

$$\underset{\text{обыкн.}}{\frac{7}{25}} = \underset{\text{конечн. десят.}}{0{,}28} = 0{,}28(0) = 0{,}27(9)$$

бесконечные периодические десятичные

$$\begin{array}{r|l} 70 & 25 \\ \cline{2-2} -50 & 0{,}28 \\ \cline{1-1} 200 & \\ -200 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$\frac{7}{26} = 0{,}2\underbrace{(692307)}_{\text{период.}}$$

$$\begin{array}{r|l} 70 & 26 \\ \cline{2-2} -52 & 0{,}2(692307 \\ \cline{1-1} 180 & \\ -156 & \\ \cline{1-1} 240 & \\ -234 & \\ \cline{1-1} 60 & \\ -52 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -80 \\ 78 \\ \hline -200 \\ 182 \\ \hline -180 \\ 156 \\ \hline 24 \end{array}$$

Возможные остатки.
(1, 2, 3, ..., 25)

<u>Задача</u> $x = 3,2(107)$

~~3,2 1000x = 32107,(107)~~

$10x = 32,(\cancel{7}107)$

$10000x = 32107,(107)$

$10000x - 10x = 32107(107) - 32,(107)$.

$9990x = 3207\cancel{0}5$

$x = \dfrac{32075}{9990} =$ дробь надо сократить, для этого надо найти НОД чисел.

$= \dfrac{6415}{1998}$

несократимая дробь

Алгоритм Евклида нахождения НОД

32075	9990	2105	1570	535	500
0	3	4	1	2	1

)6

35	10	5	0
14	3	2	

Задача: Д-ть, что $x=\sqrt{3}$ – иррац. число.

Решение.

Предположим $x=\sqrt{3}$ рациональное число. тогда $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$ ← несократимая дробь.

$3=\frac{m^2}{n^2}$ $\quad m^2=3n^2$

$$(m^2 \vdots 3)\wedge(3\in P) \Rightarrow (m \vdots 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (m=3p) \Rightarrow ((3p)^2=3n^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3p^2=n^2)(n^2 \vdots 3) \Rightarrow (\cancel{3}\, n \vdots 3)$$

Противоречие.

Задача Д-ть $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – иррац. число

Решение

Предположим, что x – рациональное число. Имеем. $\sqrt{3}=x-\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3=x^2-2\sqrt{2}x+2) \Rightarrow (2\sqrt{2}x=x^2-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}=\frac{x^2-1}{2x}\right). \text{ Но } \frac{x^2-1}{2x}\in R,$$

$\sqrt{2}\in I$

~~Противоречие~~
Получили противоречие, значит наше предположение неверно, $x \in \mathbb{I}$

Задача

Д-ть, что $\overset{(*)}{x} = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} =$

$\#$ — рациональное.

Решение

1) Возведем равенство (*) в куб.

$a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3 = (a+b)^3$

$x^3 = 9 + \sqrt{80} + 9 - \sqrt{80} + \left(3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2(9-\sqrt{80})} \right)x$

$x^3 = 18 + 3x\sqrt[3]{(81-80)} \to \frac{\#}{1}$

$x^3 = 18 + 3x$

$x^3 - 3x - 18 = 0$. $(x-3)(x^2+3x+6) = 0$.

$x = 3$ — корень. $x^2 + 3x + 6$,

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x - 18 & x-3 \\ \hline x^3 - 3x^2 & x^2+3x+6 \\ \hline +3x^2 - 3x & \\ 3x^2 - 9x & \\ \hline 6x - 18 & \\ 6x - 18 & \end{array}$$

$D = 9 - 24 = -15$
нет корней.

Поскольку $x \in \mathbb{R}$, то $x=3$.

Мы доказали, что $x \in \mathbb{Q}$

Задача

$$x = \frac{0,(12)}{0,(13)}$$

Записать x в виде обыкновенной и в виде бесконечной периодической десят.

$y = 0,(12)$

$100y = 12,(12)$

$99y = 12$

$y = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

$z = 0,(13)$

$100z = 13,(13)$

$99z = 13$

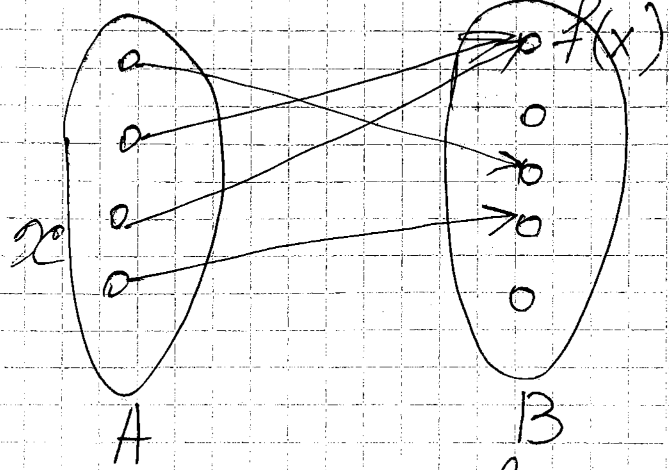
$z = \frac{13}{99}$

$$\frac{y}{z} = \frac{12 \cdot 99}{99 \cdot 13} = \frac{12}{13} = 0,(923076)$$

1 20 | 13
117 | 0,(923076)9...
30
26
40
39
10
91
90
78
120
117
3

Тема 3 Отображение (= функция)

Пусть A и B — множества. Пусть каждому элементу $x \in A$ ~~по~~ поставлен в соответствие нек-й эл-т множества B. Тогда говорят, что задано отображение множества A во множество B, или что задана ф-я действующая из A в B.



$f: A \to B$,

такая запись означает, что f - отображение множества A во множество B

$f: x \mapsto f(x)$,

ограниченная стрелка

function

$A = D(f)$ - множество определения функции f.

B = множество прибытия функции f

$E(f)$ - ~~множество~~ $\{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$ - множество значений функции f

Пусть $f: A \to B$ - функция

Задача: Найти $D(f)$

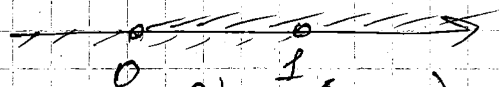
~~X~~ $f(x) = \log_3(\log_{\frac{1}{3}} x)$.

Решение.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x > 0 \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} 1$$

$$x < 1.$$



$$D(f) = (0;1).$$

Задача:

Найти ~~мн-во~~ $D(f)$.

$$f(x) = \arccos \frac{x^2}{x+2}.$$

$x + 2 \neq 0 \qquad x \neq 2$

$$-1 \leq \frac{x^2}{x+2} \leq 1$$

$$-x - 2 \leq x^2 \leq x + 2$$

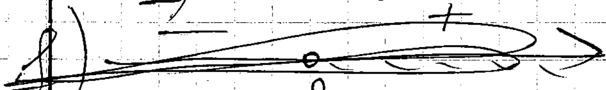
$x^2 \geq -x - 2 \qquad x^2 + x + 2 \geq 0$

$x^2 \leq x + 2 \qquad x^2 - x - 2 \leq 0.$

$$\begin{cases}\frac{x^2}{x+2} \geq -1; & \frac{x^2}{x+2}+1\geq 0;\\ \frac{x^2}{x+2}\leq 1; & \frac{x^2}{x+2}-1\leq 0;\end{cases}$$

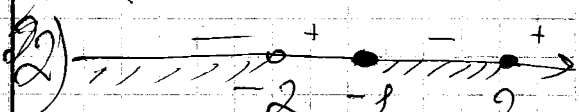
$$\begin{cases}\frac{x^2+x+2}{x+2}\geq 0;\\ \frac{x^2-x-2}{x+2}\leq 0;\end{cases}$$ ~~$x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$~~

1) $x > -2.$



$x\in(-2;+\infty)$

2)



$x\in(-\infty;-2)\cup[-1;2]$

$D(f)=[-1;2]$

Задача Найти. ~~$D(y)$~~

$E(f)$ $f(x)=7-7x-x^2$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{+7}{-2} = -3,5.$

$y_в = 7+7\cdot 3,5-12,25.$

40

$\cancel{3{,}5(2+7-3{,}5)=3{,}5\cdot 5{,}5}$

$\begin{array}{r} 5{,}5 \\ \times\, 3{,}5 \\ \hline 275 \\ 165 \\ \hline 19{,}25 \end{array}$

$= -\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{4}+7=$

$-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+19\frac{1}{4}=-(x+3{,}5)+19{,}25$

$E(f)=(-\infty;\ 19{,}25]$

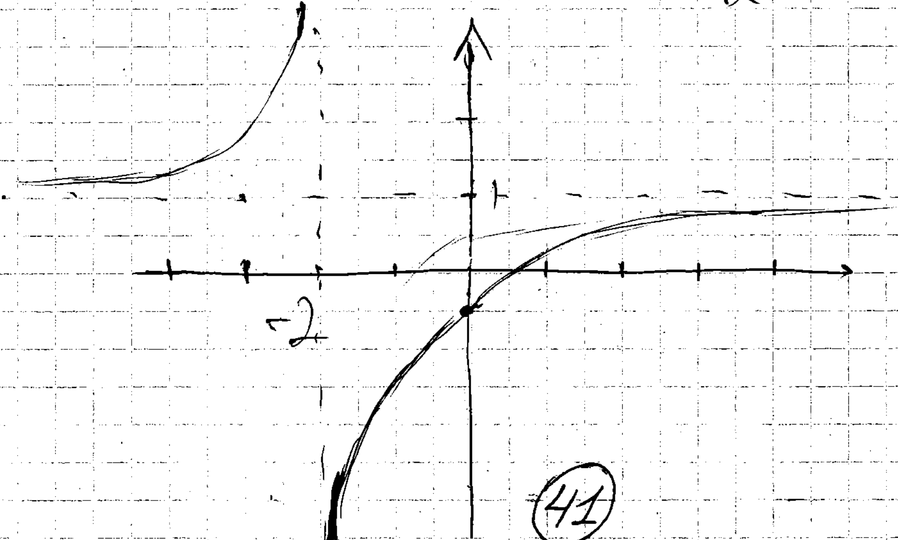
Задача. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$

$D(f)=?\quad E(f)=?$

$\cancel{D(f)=(-\infty; ...)}$

$D(f)=(-\infty;-2)\cup(-2,+\infty)$.

$f(x)=\frac{x+2-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}$



$E(f) = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

~~R~~

Задача: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$;

$E(f) = ?$

$D(f) = \mathbb{R}$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = a$$

$$x^2 - x = a(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - ax^2 - a = 0$$

$$x^2(1 - a) - x - a = 0 \quad a \neq 1$$

1) $a = 1$

~~$-x - a = 0$~~

~~$a = -x$~~

$x + 1 = 0$

$x = -1$.

2) $D = 1 + 4a(1 - a) = 1 + 4a - 4a^2 \geq 0$

$$-4a^2 + 4a + 1 \geq 0$$

$$4a^2 - 4a - 1 \leq 0$$

$$g(a) = 4a^2 - 4a - 1$$

$g(a) = 0$ при $a \in \left\{\dfrac{\cancel{2\pm}\,1 \pm \sqrt{2}}{2}\right\}$

$D = 4 + 4 = 8$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{4} =$$

42

$+ \quad - \quad +$

$\dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} \qquad \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$

$a \in \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Ответ: $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Суперпозиция фун-ий

$f \circ g$ – суперпозиция функций f и g.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$f(x) = 2^x$

$g(x) = \sin x$.

$(f \circ g)(x) = 2^{\sin x}$

$(g \circ f)(x) = \sin(2^x)$

$(f \circ f)(x) = 2^{2^x} = 2^{(2^x)}$

$g \circ g = \sin(\sin x)$

Задача

$f(x) = \sqrt{5-4x-x^2}$

$g(x) = \frac{1}{x}$

1) $D(f \circ g) = ?$

2) $E(g \circ f) = ?$

Решение

1) $(f \circ g)(x) = \sqrt{5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{5x^2-4x-1}{x^2}}$

~~$D(f \circ g) = R \setminus 0$~~

$\cancel{\sqrt{5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} \geq 0}$

$\cancel{5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2} \geq 0}$ $\quad x \neq 0.$

$$\frac{5x^2-4x-1}{x^2} \geq 0$$

$$\frac{5(x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{x^2} \geq 0$$

$+ \quad - \quad - \quad +$

$-\frac{1}{5} \quad 0 \quad 1$

$$D(f\circ g) = \left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty)$$

2) $$(g\circ f) = \frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5-4x-x^2}} > 0$$

$\frac{+4}{-2} = -2 \qquad 5+8-4 = 9$

$\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$

<u>Задача</u>: Известно что $D(f) = R \setminus \{-5\}$. и $(\forall x \in R)$:

$f(3x+10) = \frac{x+7}{x+5}$

Найти: $f(x)$.

$3x+10=t \Rightarrow x=\frac{t-10}{3}$

$\cancel{x=\frac{t-10}{3}}$

$f(t)=\frac{\frac{t-10}{3}+7}{\frac{t-10}{3}+5}=\frac{t-10+21}{t-10+15}=$

$\frac{t+11}{t+5}$

$f(x)=\frac{x+11}{x+5}$

<u>Задача</u>

$f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=x^2+1.$

$f(x)-?$

$\cancel{\frac{x+1}{x+2}=t}$ $f(x)=\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2+1=\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}+1$

$\frac{x^2+2x+1+x^2+4x+4}{x^2+4x+4}=\frac{2x^2+6x+5}{x^2+4x+4}$

$\frac{x+1}{x+2}=t$

$x+1=t(x+2)$ $\quad x=\frac{2t-1}{1-t}$

$x-tx=2t-1$

$$f(t)=\left(\frac{2t-1}{1-t}\right)^2+1.$$

$$=\frac{4t^2-4t+1}{1-2t+t^2}+1=\frac{4t^2-4t+1+1-2t+t^2}{1-2t+t^2}=$$

$$\frac{5t^2-6t+2}{t^2-2t+1}$$

$$f(x)=\frac{5x^2-6x+2}{x^2-2x+1}$$

Задача. $f(2-x)+2f(x+1)=\cos x\ (*)$ $(\forall x\in R)$

Найти $f(x)$

Заменим в р-ве * x на $1-x$

$$f(2-1+x)+2f(1-x+1)=\cos(1-x)$$

$$f(\cancel{3}1+x)+2f(2-x)=\cos(1-x)$$

$$2f(2-x)+4f(x+1)=2\cos x$$

$$\cancel{2f(2-x)=}$$

$$3f(x+1)=2\cos x-\cos(1-x)$$

$$f(x+1)=\frac{2\cos x-\cos(1-x)}{3}$$

$$\cancel{x+1=t}$$

$$x=t-1.$$

$$f(x-1+1)=\frac{2\cos(x-1)-\cos(1-x+1)}{3},$$

$$f(x)=\frac{2\cos(x-1)-\cos(\overset{x-2}{\cancel{2-x}})}{3}= \cancel{2\cos(x-1)}$$

Четные и нечетные ф-ции

Ф-я $f(x)$ называется **четной**, если

1) $(\forall x \in D(f)) : (-x) \in D(f)$

т. е. множество $D(f)$ симметрично отн. O

т. $x=0$.

2) $(\forall x \in D(f)) : f(-x)=f(x)$

Ф-я называется **нечетной**

...

2) $f(-x)=-f(x)$

Задача $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$\cancel{x+\sqrt{x^2+1}>0}$$

$$\cancel{\sqrt{x^2+1}>-x}$$

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=$$

$$=\ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=$$

$$=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

$f(x)$ – нечетная

Задача $f(x)=\frac{2^x}{4^x+1}$

$$f(-x)=\frac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{2^x}}{\frac{1}{4^x}+1}=$$

$$=\frac{2^x}{1+4^x}=f(x)$$

$f(x)$ – четная.

Периодическая ф-я

Функция $f(x)$ — периодическая с периодом T, если
1) $(\forall x \in D(f)): (x \pm T) \in D(f)$
2) $(\forall x \in D(f)): (f(x-T) = f(x+T) = f(x))$

Задача

Явл-ся ли периодическими ф-и.
1) $f(x) = \cos 2x + \cos 3x$
2) $f(x) = \cos\sqrt{x}$
3) $f(x) = \cos x^2$

1) $f(0) = 2$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \pi k \\ 3x = \pi l \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi k \\ x = \frac{2\pi l}{3} \end{cases}$$

$x = 2\pi n$

$f(x \pm 2\pi) = f(x) \Rightarrow f(x)$ — периодическая функция с наим. периодом $T = 2\pi$.