Вариант 30

Задача 1

С помощью определения предела последовательности показать, что данная последовательность u_n при $n \to \infty$ имеет своим пределом число A. Найти целое значение N, начиная с которого $|u_n - A| < \varepsilon$.

$$u_n = \left(-\frac{2}{7}\right)^n \quad A = 0 \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

Решение

Рассмотрим неравенство

$$|u_n - 0| = \left|\left(-\frac{2}{7}\right)^n\right| < \varepsilon \qquad n \text{ - натуральное}$$

Откуда логарифмируя обе части неравенства получим $\ln\left(\frac{2}{7}\right)^n < \ln\varepsilon$, $n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}$.

Следовательно, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}\right]\ \forall n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. То есть, число 0 является пределом последовательности.

Пусть теперь $\varepsilon = 10^{-3}$. Тогда $N(\frac{1}{1000}) = \left[\dfrac{\ln\frac{1}{1000}}{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}\right] = 5$

Задача 2

Вычислить продел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

Решение

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1 + (\cos x - 1))^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0}(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}\cdot\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1 - 2\sin^2 x)^{\frac{-1}{2\sin^2 x}}\right]^{\frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = e^{-2}$$

Задача 3

Вычислить производную $y'(x)$

$$y(x) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}$$

Решение

$$y'(x) = \left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)^2}}\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3 - \frac{x^4}{\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{3}x}{3 - x^4}$$

Задача 4

Вычислить производную $y'(x)$

$$y(x)=\frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}$$

Решение

$$y'(x)=\left(\frac{1}{24}\ln\frac{x^3}{x^3+8}\right)'=\frac{1}{24}\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)\left(\frac{3x^2(x^3+8)-3x^2x^3}{\left(x^3+8\right)}\right)=\frac{24x^2}{24x^3}=\frac{1}{x}$$

Задача 5

Вычислить логарифмическую производную $y'(x)$

$$y(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$$

Решение

Имеем $\ln y=\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}(1+x)-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}(1-x)$

$$\frac{y'}{y}=\left(\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}(1+x)-\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}(1-x)\right)'$$

$$y'=y\left(\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}(1+x)}+\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}(1-x)}\right)=y\left(\frac{1}{3(1+x)}+\frac{1}{3(1-x)}\right)=\frac{2y}{3(1+x)(1-x)}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{(1+x)(1-x)}$$

Задача 6

Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной параметрически.

$$\begin{cases}x=t+\ln(\cos t)\\ y=t-\ln(\sin t)\end{cases}$$

Решение

По формуле $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ имеем

$$y'_t=\left(t-\ln(\sin t)\right)'=1-\frac{\cos t}{\sin t}=1-ctgt$$

$$x'_t=\left(t+\ln(\cos t)\right)'=1-\frac{\sin t}{\cos t}=1-tgt$$

$$y'_x=\frac{1-ctgt}{1-tgt}$$

Задача 7

Вычислить производную $y'(x)$ функции, заданной неявно уравнением $f(x;y)=0$

$$f(x;y)=x^2\sin y+y^3\cos x-2x$$

Решение

Функция $y(x)$ определяется исходным уравнением, поэтому, если подставить её вместо у в левую часть равенства, получим тождество $x^2\sin y+y^3\cos x-2x=0$.

Продифференцируем левую часть равенства по правилу дифференцирования сложной функции

$$2x\sin y(x) + x^2\cos y(x) * y'(x) + 3y^2\cos x * y'(x) - y^3\sin x - 2 = 0$$

Отсюда легко находим $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2 - 2x\sin y(x) + y^3\sin x}{x^2\cos y(x) + 3y^2\cos x}$$

Задача 8

Найти предел, используя правило Лопиталя.

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - e^{-3x}}{tg6x}$$

Решение

Неопределённость типа $\frac{0}{0}$. Используем правило Лопиталя

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - e^{-3x}}{tg6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{2x} - e^{-3x}\right)'}{\left(tg6x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x} + 3e^{-3x}}{\dfrac{6}{\cos^2 6x}} = \frac{5}{6}$$

Задача 9

Найти предел, используя правило Лопиталя.

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$$

Решение

Неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Используем правило Лопиталя

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(1 + 2\ln\sin x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{2\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

Задача 10

Функцию y = f(x) разложить ли формуле Тейлора и окрестности точки x_0 до $o((x - x_0)^n)$ $\quad f(x) = (-x + 4)e^{x+3} \quad x_0 = -2 \quad n = 5$

Решение

Делаем замену x+2=t, x=t-2

$$f(t) = (-(t-2) + 4)e^{t-2+3} = (6 - t)e^{t+1} = e(6 - t)e^t$$

Используем стандартное разложение

$$f(t) = e(6 - t)(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)) =$$

$$= 6e + 6et + 3et^2 + et^3 + \frac{et^4}{4} + \frac{et^5}{20} + o(t^5) - et - et^2 - \frac{et^3}{2} - \frac{et^4}{6} - \frac{et^5}{24} =$$

$$= 6e + 5et + 2et^2 + \frac{et^3}{2} + \frac{et^4}{12} + \frac{et^5}{120} + o(t^5)$$

Возвращаемся к переменной x:

$$f(x)=6e+5e(x+2)+2e(x+2)^2+\frac{e(x+2)^3}{2}+\frac{e(x+2)^4}{12}+\frac{e(x+2)^5}{120}+o((x+2)^5)$$

Задача 11

Вычислить предел двумя способами:

а) используя разложение по формуле Тейлора:

б) с помощью правила Лопиталя.

$$A=\lim_{x\to+0}\frac{e^x-\sin x-1-x^2/2}{x^3}$$

Решение

$$а)\ A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1-x^2/2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-x+\frac{x^3}{6}-1-\frac{x^2}{2}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3}$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1-x^2/2}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-\sin x-1-x^2/2\right)'}{\left(x^3\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x-x}{3x^2}=$$

б)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-\cos x-x\right)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x+\sin x-1\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{6}=\frac{1}{3}$$

Задача 12

Построить график функции $y=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+px+q}$

a=1, b=3, c=15, d=18, p=5, q=6.

Решение

$$y=\frac{x^3+3x^2+15x+18}{x^2+5x+6}$$

Область определения $x\neq-2$; $x\neq-3$ (нули знаменателя)

Функция имеет вид $y=P(x)/Q(x)$. Так как $P(-2)=-8\neq 0$, $P(-3)=-27\neq 0$, то прямые $x=-2$ и $x=-3$ являются вертикальными асимптотами. При этом значение функции стремится к $-\infty$ когда x стремится к -2 справа или к -3 слева (это легко определяется по знакам числителя и знаменателя в окрестности указанных точек). Аналогично, значение функции стремится к $+\infty$ когда x стремится к -2 слева и к -3 справа.

Поделив («уголком») числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби:

$$y=x-2+\frac{19x+30}{x^2+5x+6} \qquad (1)$$

Отсюда видно, что прямая $y=x-2$ является наклонной асимптотой (так как при $x\to\infty$ дробная часть функции в формуле (1) стремится к 0). Наклонную асимптоту можно найти и по стандартным формулам. Из формулы (1) следует, что график функции пересекает наклонную асимптоту в единственной точке $x=-30/19\approx-1.58$.

Положение экстремумов и точки перегиба уточним с помощью производных. Имеем: $y'=\dfrac{x^2(x^2+10x+18)}{(x^2+5x+6)^2}$ $\qquad y''=\dfrac{x(38x^2+180x+216)}{(x^2+5x+6)^3}$

Из выражения для производных следует, что $x=0$- точка перегиба, в точке $x=-5+\sqrt{7}\approx-2.35$ функция достигает минимума (который как легко вычислить, положителен), в точке $x=-5-\sqrt{7}\approx-7.64$ функция достигает максимума.

Строим график.

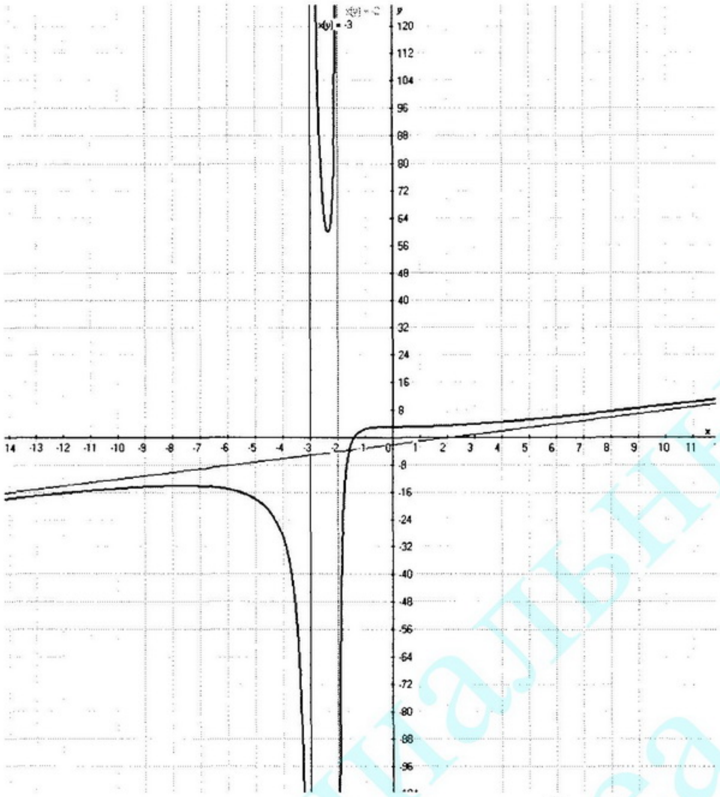

Рис. 1

Задача 13

Построить график функции $y(x)$

$y = x(x^2-1)^{-1/3}$

Решение

Представим функцию в виде $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

1). Область определения - $x \neq 1$ и $x \neq -1$, то есть: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2). Функция y(x) не является ни чётной ни нечётной функцией. Периодической функция не является

3). Имеем 2 вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$. График не имеет наклонных или горизонтальных асимптот.

4). Пересечение с осью OY найдём, вычислив значение y(x) при $x = 0$: имеем $y(0) = 0(0^2-1)^{-1/3} = 0$. Имеем точку (0;0).

Для нахождения пересечений графика с осью OX следует решить уравнение $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0$. Корень этого уравнения x=0. Имеем ту же точку (0;0).

5). Производная данной функции равна

$$y' = (x(x^2-1)^{-1/3})' = (x^2-1)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2-1)^{-4/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{2x^2}{3\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x^2-3}{3\left(x^2-1\right)\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Определяем положение экстремумов. Решим уравнение $y' = 0$, то есть $x^2 - 3 = 0$. Корнями этого уравнения являются точки $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$. $x \neq 1$ и $x \neq -1$

6). Вторая производная функции равна

$$y''=\left(\frac{x^2-3}{3\left(x^2-1\right)^{4/3}}\right)'=\frac{6x\left(x^2-1\right)-8x\left(x^2-3\right)}{9\left(x^2-1\right)^{7/3}}=\frac{6x^3-6x-8x^3+24x}{9\left(x^2-1\right)^{7/3}}=\frac{18x-2x^3}{9\left(x^2-1\right)^{7/3}},$$

Найдём точки перегиба. Решим уравнение $y''=0$, то есть $\frac{18x-2x^3}{9\left(x^2-1\right)^{7/3}}=0$. Корни этого уравнения $x=0$, $x=3$ и $x=-3$. $x\neq 1$ и $x\neq -1$. Точки перегиба: $x=0$, $x=3$ и $x=-3$.

7). С учётом предыдущих шести пунктов строим график функции y(x).

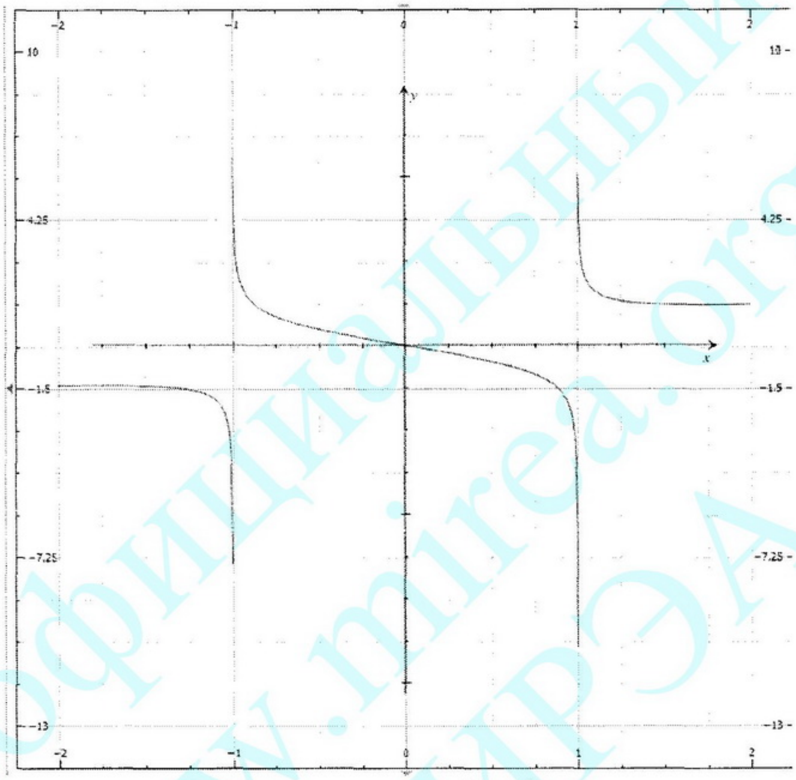

Рис. 2

Задача 14

Построить график функции

$$y=\frac{e^{x-3}}{2x+7}$$

Решение

Прямая $y=-7/2$ - вертикальная асимптота. Используя правило Лопиталя, имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-3}}{2x+7}=+\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-3}}{2x+7}=0$$

Функция имеет положительный знак при $y>-7/2$ и отрицательна $y<-7/2$. Этих данных достаточно, чтобы нарисовать эскиз графика.

Вычислим производные и уточним положение экстремумов и точек перегиба:

$$y'=\frac{2x+5}{\left(2x+7\right)^2}e^{x-3} \qquad y''=\frac{\left(4x^2+20x+29\right)}{\left(2x+7\right)^3}e^{x-3}$$

Вторая производная нулей не имеет и меняет знак при переходе через вертикальную асимптоту. Точка $x=-5/2$ - минимум. График функции приведён на рис. 3.

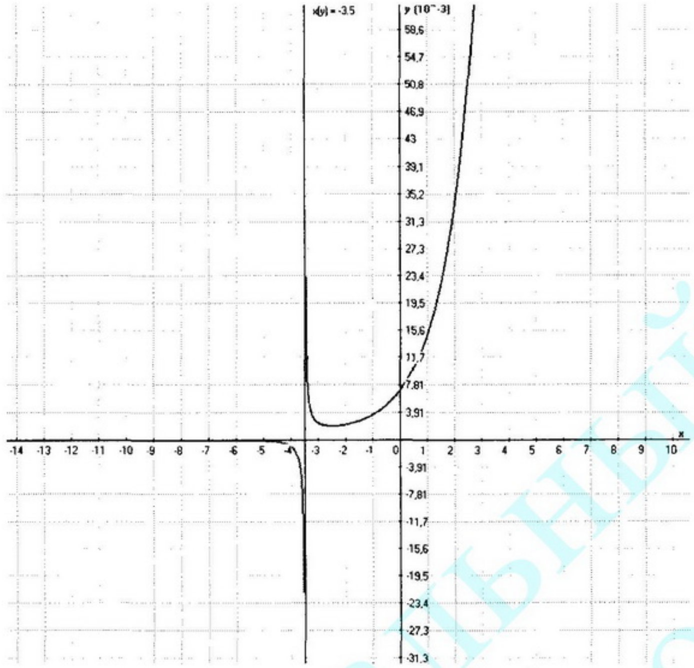

Рис. 3

Задача 15

. Построить линию, заданную уравнением $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\rho = 4\sin^2 3\varphi$

Решение

Используя свойства тригонометрических функций, имеем

$\rho = 2(1 - \cos 6\varphi)$.

Следовательно, период функции равен $\dfrac{2\pi}{6} = 60^\circ$. При возрастании угла от 0° до 30° значения функции возрастают от 0 до 4. При дальнейшем увеличении угла до 60° значения функции убывают до 0. На рис. 4 приведён график, он состоит из 6 лепестков.

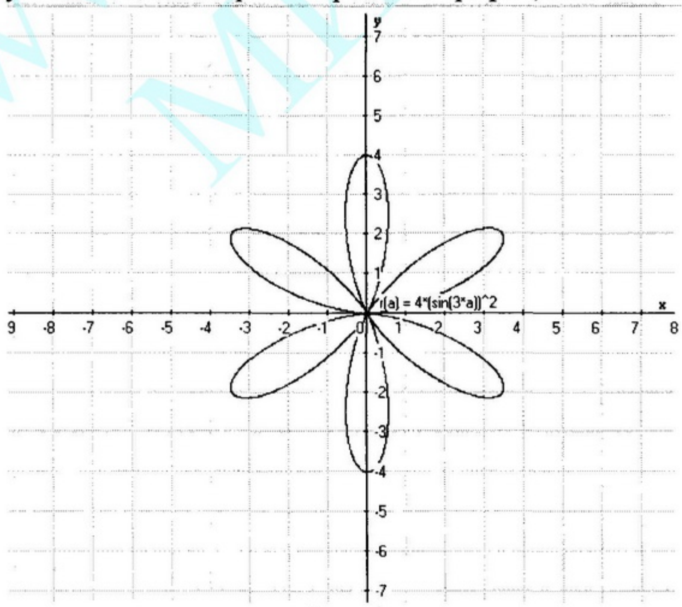

Рис. 4

Задача 16

Вычислить приближенно указанные величины.

$\log_3 82$

Решение

Рассмотрим функцию $y(x) = \log_3 x$. Выберем, соответственно, $x_0 = 81$, $x_1 = 82$. Найдём значения функции и её производной:

$$y(x_0) = \log_3 81 = 4,\ y'(x) = \frac{1}{x\ln 3},\ y'(x_0) = \frac{1}{81\ln 3} \approx 0.0112$$

Используя формулу для приближённых вычислений, $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\left(x_1 - x_0\right)$, получим:

$$\log_3 82 \approx 4 + 0.0112\left(82 - 81\right) = 4.0112$$

Задача 17

Вычислить приближенно указанные величины.

$\cos 63^\circ$

Решение

Рассмотрим функцию $y(x) = \cos x$. Перейдём к безразмерной переменной – от градусов к радианам. Выберем, соответственно, $x_0 = 60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$, $x_1 = 63^\circ = \dfrac{63\pi}{180}$. Найдём значения функции и её производной:

$$y(x_0) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ y'(x) = -\sin x,\ y'(x_0) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Используя формулу для приближённых вычислений, $y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\left(x_1 - x_0\right)$, получим:

$$\cos 63^\circ = \cos\frac{63\pi}{180} \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{63\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{60 - \pi\sqrt{3}}{120} \approx 0.45$$

Задача 18

Вычислить частные производные первого порядка

$z = y\ln(x^2 - y^2)$

Решение

Вычисляем первые производные:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{2yx}{x^2 - y^2} \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}$$

Задача 19

Вычислить смешанные производные второго порядка и проверить, что они равны.

$z = xy\sin(x - y^2)$

Решение

Вычисляем первые производные:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = y\sin(x - y^2) + xy\cos(x - y^2) \quad \frac{\delta z}{\delta y} = x\sin(x - y^2) - 2xy^2\cos(x - y^2)$$

Дифференцируя первое равенство по y, а второе – по x, находим смешанные производные:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \sin(x-y^2) - 2y^2\cos(x-y^2) + x\cos(x-y^2) + 2xy^2\sin(x-y^2) =$$

$$= (1+2xy^2)\sin(x-y^2) + (x-2y^2)\cos(x-y^2)$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x} = \sin(x-y^2) + x\cos(x-y^2) - 2y^2\cos(x-y^2) + 2xy^2\sin(x-y^2) =$$

$$= (1+2xy^2)\sin(x-y^2) + (x-2y^2)\cos(x-y^2)$$

Убеждаемся, что равенство $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 z}{\delta y \delta x}$ выполнено.

Задача 20

Найти и исследовать точки экстремума функции.

$$u = 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - xz - \frac{1}{2}yz - 10x$$

Решение

Найдём стационарные точки из условия:

$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} = 10x + 2y - z - 10 = 0; \\ \frac{\delta u}{\delta y} = 2y + 2x - \frac{1}{2}z = 0; \\ \frac{\delta u}{\delta z} = 2z - x - \frac{1}{2}y = 0. \end{cases}$$

Решая получившуюся систему уравнений, получим координаты стационарной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $x_0 = \frac{75}{59}$, $y_0 = \frac{70}{59}$, $z_0 = \frac{20}{59}$. В M_0 выполнено необходимое условие экстремума. проверим выполнение достаточного условия экстремума. Проверим критерий Сильвестра. Вычислим в M_0 вторые производные.

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 10, \ \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 2, \ \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} = 2, \ \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = 2, \ \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} = -1, \ \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x} = 2$$

и составим из них матрицу $A = \|a_{ij}\|$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Угловые миноры матрицы А

$$\Delta_1 = a_{11} = 10, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 16, \ \Delta_3 = \det A = -18,$$

Следовательно в этой точке экстремум отсутствует