Решения тестов семинара 14.

2. Выберите правильное утверждение

Пусть K, L - поля, $K \subset L$. Тогда $u \in L$ - кратный корень $f(x) \in K[x]$

$$\Updownarrow$$

1) $(f(x), f'(x)) \neq 1$;
2) u - корень $f'(x) \in K[x]$;
3) u - корень $(f(x), f'(x))$;
4) $(f(x), f'(x)) = (x-u)$.

Ответ: 3).

Пояснения: 1) $\Longleftrightarrow \exists$ кратный корень $f(x)$
2) u может вообще не быть корнем $f(x)$
„u-кратный корень $f(x)$" $\Rightarrow$ 2), но не наоборот
4) $\Rightarrow$ u-кратный корень $f(x)$, но не наоборот.
например, если u - трехкратный корень $f(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x), f'(x)) \vdots (x-u)^2$

3. Какое из перечисленных утверждений не является истинным?

Пусть K-поле, $\operatorname{char} K = p \neq 0$, Φ - эндоморфизм Фробениуса K тогда

1) Φ явл. мономорфизмом;
2) $\Phi|_{\text{простое подполе}} = id$;
3) Φ является автоморфизмом K;
4) Φ явл. линейным оператором в линейном пространстве K над простым подполем.

Ответ: 3) Пояснения: 3) истинно, если K - конечное поле, а здесь K - произвольное поле, $\operatorname{char} K = p \neq 0$.

4. Какое из перечисленных утверждений не является истинным.

Пусть поле $K \supset \mathbb{F}_p$, $|K| = p^n$, Φ - эндоморфизм Фробениуса K, тогда

1) Φ явл. автоморфизмом K;
2) $\Phi^n = id$;
3) если $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, u - корень $f(x) \Rightarrow \Phi(u)$ - корень $f(x)$,
4) если $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, $\deg f(x) = n$, u - корень $f(x) \Rightarrow u, \Phi(u), \Phi^2(u), \dots, \Phi^{n-1}(u)$ - различные корни $f(x)$.

Ответ: 4)

Пояснение: здесь $f(x)$ - произвольный многочлен над $\mathbb{F}_p$, м. б., приводимый. Тогда он вообще может не иметь $n = \deg f$ различных корней.

5. Выберите правильный ответ.
Пусть поле $K = \mathbb{F}_p[\alpha]$, $\dim_{\mathbb{F}_p} K = n$. Чему равна $\deg m_{\alpha^p}(x)$? 1) np; 2) n; 3) $p^n - 1$; 4) p.

Ответ: 2)

Пояснение: α - примитивный элемент $K \Rightarrow$ $\deg m_\alpha(x) = n$.
1) $m_\alpha(\alpha) = 0$,
2) $m_\alpha(x)$ - неприводимый мн-н над $\mathbb{F}_p$,
3) старш. коэф. $m_\alpha(x)$ равен 1.

α - корень $m_\alpha(x) \Rightarrow \alpha^p$ - тоже корень $m_\alpha(x)$

1) $m_\alpha(\alpha^p) = 0$
2) $m_\alpha(x)$ - неприводим.
3) старш. коэф. $m_\alpha(x) = 1$

$\Rightarrow m_{\alpha^p}(x) = m_\alpha(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \deg m_{\alpha^p}(x) = n$.

Проверьте себя с помощью теста.

Выберите правильный ответ.

Пусть K - конечное поле, $|K| = p^n$. α - примитивный элемент расширения K над простым подполем. Чему равна $\deg m_\alpha(x)$?

1) p
2) $\operatorname{ord} \alpha$
3) n

Ответ: 3) Пояснения: $\dim_{\mathbb{F}_p} K = n \Rightarrow \langle 1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle$ - базис $K = \mathbb{F}_p[\alpha]$
$\Rightarrow \alpha^n$ линейно выражается через $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$.