Def/ Ойлеров път/цикъл

Ойлеров път в свързан мултиграф G наричаме път минаващ само по веднъж през всяко ребро в графа. Ако двата крайни върха в графа съвпадат, то имаме Ойлеров цикъл и графа го наричаме Ойлеров.

Th/ Нека $G=\langle V, E\rangle$ е свързан мултиграф.
G е Ойлеров т.с.т.к. всеки връх е от четна степен.

⇒/ Нека G е Ойлеров т.е. в него има Ойлеров цикъл. То всеки връх е от четна степен, защото при обхождане на мултиграфа, то имаме път м/у всеки два върха (свързана) като отрежем някакво парче от цикъла. Но всяко влизащо ребро в произволен връх съответства излизащо (различно от влизащо) и всяко ребро се съдържа точно по веднъж в този цикъл. Значи $(\forall v \in V)$ [deg(v) е четно число]

⇐/ Нека G е свързан мултиграф и $(\forall v \in V)$[deg(v) is even]
Деф. процедура за построяване на Ойлеров граф
1) Избираме произв. връх r за начален. Озн. t=r.
2) Тръгвайки от t продължаваме по някое необходено ребро, маркираме го като обходено (t) и стигаме до съседен връх v. Правим v текущ (t=v) и продължаваме със стъпка 2) докато е възможно т.е. свършим необх. ребра.

Нека допуснем, че сме приключили и $t \neq r$. Но това означава, че deg(t) е нечетна т.к. сме влизали и излизали от t по различни ребра и при последното влизане не сме успели да излезем. Абсурд!
Следователно, когато спрем, то $t=r$ и всички обходени ребра образуват Ойлеров цикъл.

3) Ако цикълът съд. всички ребра в мултиграфа => done

4) Иначе премахваме обходените ребра от $n$-тото ребро и получаваме подмултиграф, чиито върхове са пак от четна степен.

Проверяваме за всеки връх участващ във вече построения цикъл дали има излизащо необходено ребро.

Ако допуснем, че такова няма стигаме до противоречие, че G е свързан граф.

След като има поне едно такова и нека вземем връх, от който излиза ребро участващ в цикъла. Нека е $v_0$. Повтаряме стъпка 2) с начален $v = v_0$ и строим нов цикъл. След това разкъсваме двата цикъла в общия им връх $v_0$ и с отъждествяване на краищата им получаваме нов цикъл, за който проверяваме (стъпка 3).

Алгоритъмът завършва тогава, когато се изчерпат ребрата и е построен Ойлеров цикъл. Значи графът е Ойлеров ☒

Следствие/ Свързаният мултиграф G съдържа Ойлеров път т.с.т.к. всички върхове са от четна степен, като само два са от нечетна.