Твърд ② / $n, m \in \mathbb{N}, n > m$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Д-во/ Забелязваме, че на всяко подмн-во $A' \subseteq A$ за $|A| = n$ и $|A'| = m$, то еднозначно съответства подмн-во $A \setminus A'$ и $|A \setminus A'| = |A| - |A'| = n - m$.

принцип на изваждането (разликата)

Оттам прилагаме правило за биекция и за A' и $A \setminus A'$. ~~т.е. $A \setminus A' = \emptyset$ или $n = m$~~

④ Алгоритми за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти - хомогенни, нехомогенни.

Def/ Рекурентно отношение от ред r

Нека $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са членове на редицата:

$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-r}), n \geq r$ - рекур. отн. от ред r.

① Л.Р.О. Хом. П.К.

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ - дадени нач. условия

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r}, \; c_r \neq 0, \; c_i \in \mathbb{R}$

Алго:

1) Намираме характ. ур-е на хомог. част.

$a_n - c_1 a_{n-1} - \dots - c_r a_{n-r} = 0$.

$x^r - c_1 . x^{r-1} - \dots - c_r x^0 = 0$

2) Решаваме х.у. и намираме корени $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}$

3) 2 случая

3.1) Всички корени са различни

общ вид: $a_n = x_1^n . A_1 + x_2^n . A_2 + \dots + x_r^n . A_r$

3.2) Не всички са разл. Нека $x = x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k}$

общ вид: $a_n = \dots + (A_{i1} + A_{i2} . n + A_{i3} n^2 + \dots + A_{ik} n^{k-1}) . x^n + \dots$

4) Правим с-ма за дадените $a_0, \dots, a_{r-1}$

$a_0 = A_1.x_1^0 + A_2.x_2^0 + \dots + A_r.x_r^0$

$a_1 = A_1.x_1^1 + A_2 x_2^1 + \dots + A_r x_r^1$

$a_{r-1} = A_1.x_1^{r-1} + A_2 x_2^{r-1} + \dots + A_r x_r^{r-1}$

5) Решаваме с-мата и получаваме $A_1, \dots, A_r$.
Заместваме в общия вид и получаваме отг.

② Л.Р.О. Нехом. П.К.

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ – зададени нач. условия

$a_n = c_1.a_{n-1} + c_2.a_{n-2} + \dots + c_r.a_{n-r} + \underbrace{f(n)}_{\text{нехом.ч}}$, $c_r \neq 0$.

За реш. на нехом. лин. рек отн. с пост. коеф., то трябва
$f(n) = e_1^n P_1(n) + e_2^n.P_2(n) + \dots + e_s^n.P_s(n)$,
да се представи $\quad deg(P_i) = d_i$ за $i \in \{1, \dots, s\}$

Т.е. нехом. част представяме като константа
e на степен n по полином от степен d.

Алгоритъмът за решаване е същия, с изключение, че на стъпка 2) добавяме още $(d+1)$ еднакви корена $(= e)$

Примери за ХС

(1) Нека
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

1) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

2) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$D = 9 - 4.2 = 1$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \nearrow 2 = \alpha_1, \searrow 1 = \alpha_2$

Сл. 3.1)

Значи $a_n = A_1 . 2^n + A_2 . 1^n = \alpha_1^n . A_1 + \alpha_2^n . A_2$

$$\begin{cases} a_0 = A_1 + A_2 \\ a_1 = 2A_1 + A_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 3 = 2A_1 + A_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = 1 - A_1 \\ 3 = 2A_1 + 1 - A_1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A_1 = 2, \ A_2 = -1$

$\Rightarrow a_n = \cancel{1} . 2^{n+1} - 1$

(2) Нека
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 4.1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{2} = 1$ - 2кр корен $\quad a_n = (A_1 . n + A_2) . 1^n$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A_2 \\ a_1 = 2 = A_1 + A_2 \end{cases} \Leftrightarrow A_1 = 1$$

т.е. $a_n = n + 1$.

(3) Примери за неХС

Алгоритъмът е почти същия, но на стъпка 2) преди намиране на общия вид на хар. уравнение добавяме още $(d+1)$ корена (еднакви $= e$)

(1)
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{1}_{\text{не х.ч.}} \end{cases}$$

$a_n - 2a_{n-1} = 0$

$x - 2 = 0 \iff x_1 = 2$

$f(n) = 1$ и $\deg(f) = 0$

предст. във вида $e^n P(n) \Rightarrow 1 = 1^n . 1$

Добавяме $(0+1)$ пъти $e = 1$ като корен.

Значи $a_n = 2^n . A_1 + 1^n . A_2$

$$\begin{cases} a_0 = 0 = A_1 + A_2 \iff A_1 = -A_2 \iff A_1 = 1 \\ a_1 = 1 = 2A_1 + A_2 \iff A_2 = -1 \\ \text{Т.е. } a_n = 2^n - 1 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases}$$

$x - 1 = 0 \iff x_1 = -1$

$f(n) = n + 1 = 1^n . \underbrace{(n+1)}_{\deg(n+1) = 1} \Rightarrow \underline{x_2 = x_3 = 1}$ $\deg(n+1)+1$ пъти

Имаме 3кратен корен 1

$$a_n = (A_1 n^2 + A_2 n + A_3) 1^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A_3 \\ a_1 = 2 = A_1 + A_2 + 1 \iff A_1 = 1 - A_2 = 1/2 \\ a_2 = 4 = A_1 4 + 2A_2 + 1 \iff (1 - A_2)4 + 2A_2 + 1 - 4 = 0 \end{cases}$$

$-2A_2 = -1 \iff A_2 = \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + 1$