Longest increasing subsequence.

$A[1, \ldots, n]$

Имаме дадени числа $a_1, \ldots, a_n$.

Подредица от такова подмножество на тези числа в дадения нареда $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ т.е. $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

Като добавим нарастваща, ще имаме предвид строго нарастваща.

прим:

A: 5 2 7 3 6 7 9

$A[i] < A[j]$

$i < j \in \{1, \ldots, 7\}$

DAG:

Търсим най-дълъг път в този DAG.

$i \xrightarrow[\text{edge}]{} j \iff a_i < a_j$

for $j \leftarrow 1$ to n do:

$\quad lis[j] \leftarrow 1 + \max\{ lis[i] \mid \langle i, j \rangle \in E \}$ ($A[i] < A[j]$)

търсим най-дългата строго нарастваща редица в подмасива $A[1..(j-1)]$, която изисква последният ѝ елемент да бъде „<" от нашето $A[j]$

$A[1]$

$A[1, \ldots]$

$lis[1], \ldots, lis[j-1]$

base case е за $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $lis[i] = 1$

$lis[j] \iff$ дължината на най-дългата строго растяща подредица, завършваща с елемента $A[j]$

bottom-up approach:

```
LIS(A[1,...,n]): int
    lis[1,...,n]: arr of ints
    for i ← 1 to n do
        lis[i] ← 1
    for i ← 2 to n do:
        for j ← 1 to (i-1) do
            if A[j] < A[i]
                lis[i] ← max(lis[i],
                             lis[j] + 1)
    max ← 1
    for i ← 1 to n do:
        max ← max(max, lis[i])
    return max
```

lis[i]?

lis[j]

$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_j < a_i$

```
p[1,...,n]: array of ints
for i ← 1 to n do:
    p[i] ← -1

for i ← 2 to n do:
    for j ← 1 to (i-1) do
        if A[j] < A[i] & lis[j]+1 > lis[i]
            lis[i] ← lis[j]+1
            p[i] ← j

max ← 1
lastIndex ← -1
for i ← 1 to n do:
    if max < lis[i]
        max ← lis[i]
        lastIndex ← i
```

```
printPath(A, p, i)
    if p[i] = -1
        return
    printPath(A, p, p[i])
    print A[i]

// printPath(A, p, lastIndex)
```

$T(n) \simeq n^2$

$S(n) \simeq n$

Subset sum

Даден ви е масив от положителни цели числа $A[1,\dots,n]$ и положително цяло число S.
Въпросът е съществува ли

$$(\exists I \subseteq \{1,\dots,n\})\left[\sum_{i \in I} A[i] = S\right] ?$$

1. # на подпроблемите ни ?
Във всеки един момент се питаме дали в $A[1,\dots,i]$ има $I \subseteq \{1,\dots,i\}$, т.е. $\sum_{i \in I} A[i] = S_0$, $S_0 \leq S$

$\Theta(n.S)$

(2) $A[1,\dots,i]$ $1 \le j \le i$: $A[j]$

S_0

добавяме го в решението, ако $A[j] \le S_0$

$S_0 - A[j]$

ако не го добавим към реш-ни.

time/subproblem

$\Theta(1)$

(3) $dp[0,\dots,n][0,\dots,S]$

$dp[0][i] \leftarrow false$ $\quad 1 \le i \le S$

$dp[i][0] \leftarrow true$ $\quad 1 \le i \le n$

$dp[0][0] \leftarrow true$

$dp[i][j] \leftarrow dp[i-1][j] \vee \underbrace{dp[i-1][j-A[i]]}_{A[i] \le j}$

$i \leftarrow 1,\dots,n$

$j \leftarrow 1,\dots,S$

4 Топо. ред:

for $i \leftarrow 1$ to n do

for $j \leftarrow 1$ to S do

$dp[i][j] \leftarrow \max(dp[i-1][j],$

$dp[i-1][j-A[i]])$

if $A[i] \leq j$

if $A[i] > j$

$dp[i][j] \leftarrow dp[i-1][j]$

else

$dp[i][j] \leftarrow \max(dp[i-1][j],$

$dp[i-1][j-A[i]])$

$dp[i][j] = true \Leftrightarrow$ когато в префикс $A[1,\dots,i]$ можем да намерим $I \subseteq \{1,\dots,i\}$ т.е. $\sum_{k \in I} A[k] = j$

(5) $dp[n][S] = true \Leftrightarrow$

$\exists I \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{k \in I} A[k] = S$

$\Theta(n \cdot S) \to$ псевдополиномиална сложност, т.к. зависи колко бита нужни за да запишем числото S

Edit distance

Дадени са ни две думи <u>u</u> и <u>v</u> и искаме да разберем <u>най-евтиния</u> начин, по който да преобразуваме думата <u>u</u> в думата <u>v</u> използвайки операциите върху букви:

- добавяне
- изтриване
- замяна

на буква някъде в думата x

Може различните операции за различни букви да струват различно. Тогава не само броят операции искаме да минимизираме, но и според цените на операциите.

прим: snowy и sunny

sunny
snowy

u: s _ n o w y
v: s u n n _ y

insert u

replace o → n

delete w

3 cost

_ s n o _ w y
s u n _ n _ y

5 cost

1. подпроблемите: # колко е

$u[1,\dots,i]$
$v[1,\dots,j]$

$u[1,\dots,(i-1)]$
$v[1,\dots,j]$

2. $O(|u| \cdot |v|)$

2. Guess a part of the solution for a subproblem:

$u[1, \dots, i]$
$v[1, \dots, j]$

Goal!!!!

$u[i] = v[j]$

a) $\sqcup \to v[j]$ $\quad dp[i][(j-1)]$

b) $u[i] \to \sqcup$ $\quad dp[(i-1)][j]$ $\quad u[1, \dots, (i-1)]$ $\quad v[1, \dots, j]$

c) $u[i] \to v[j]$ $\quad dp[(i-1)][(j-1)]$ $\quad u[1, \dots, (i-1)]$ $\quad v[1, \dots, (j-1)]$

③ Базови случаи:

$dp[0, \ldots, |u|][0, \ldots, |u|]$

$dp[0][0] \leftarrow 0$

$dp[0][i] \leftarrow i \quad 1 \leq i \leq |u|$

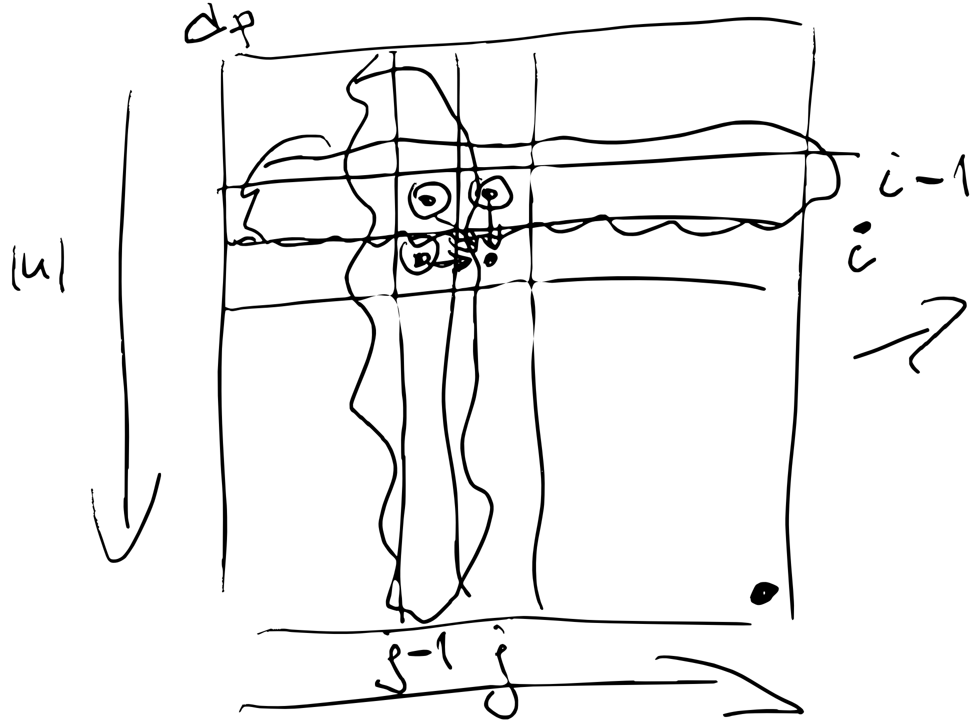
$dp[i][0] \leftarrow i \quad 1 \leq i \leq |u|$

$$dp[i][j] \leftarrow \min(1 + dp[i][j-1],\ 1 + dp[(i-1)][j],\ diff(u[i], v[j]) + dp[(i-1)][(j-1)])$$

$i \leftarrow 1 \ldots |u|$

$j \leftarrow 1 \ldots |v|$

```
diff(c1, c2):
    if c1 = c2
        return 0
    return 1
```



$\Theta(|v|+|u|)$

$\Theta(|v|\cdot|u|)$

dp[|u|][|v|]