Останалите ни от довършване зад:

(12) $5^{n^2}$ и $(5n)!$

$n \asymp n\lg 5 + 2\lg 2 \;\alpha\; 5n.\lg 5n \asymp n\lg n$

(15) $2^{n^3}$ и $(2n)^{7n}$

$n^3 \asymp n^3.\lg 2 \succ 7n.\lg 2n \asymp n\lg n$

(14) $(5n)!$ и $(2n)^{7n}$

С логаритмуване не става, но знаем, че

$$n! \asymp \frac{n^{n+1/2}}{e^n}$$

$$(5n)! \asymp \frac{(5n)^{5n+1/2}}{e^{5n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{5n}.5^{1/2}.\cancel{n^{5n}}.n^{1/2}}{e^{5n}.2^{7n}.n^{\cancel{7n}\,2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5^5}{2^7.e^5}\right)^n . \frac{\sqrt{5}.\sqrt{n}}{n^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{5}\, \underbrace{\left(\frac{3125}{128.e^5}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} . \underbrace{\frac{1}{n^{2n-1/2}}}_{\downarrow 0} = 0$$

$e \approx 2{,}81$

$3125 < 128.e^5 \approx 18997$

$(5n)! \;\alpha\; (2n)^{7n}$

Сл| $1 = n^{\frac{1}{\lg n}} \prec \lg(\lg^* n) \prec \lg^* n = \lg^*(\lg n) \prec 2^{\lg^* n} \prec$

$\prec n\sqrt{n} \prec \frac{n^3}{\lg n} \prec n^3 \cdot \lg(\lg n) \prec n^3 \cdot \lg n \prec$

$\prec 4^n \cdot n^7 \prec 5^n \cdot n^2 \prec (5n)! \prec (2n)^{7n} \prec 2^{n^3}$

---

Зад| Подредете по асимпт. нар. ф-циите:

$f_1 = (\lg n)^{\lg n}$, $f_2 = n^{\lg n!}$, $f_3 = 3n^3 + 3n^2 \asymp n^3$, $f_4 = 1 + \binom{\lg n}{\frac{1}{2}\lg n}$, $f_5 = n^2$

$f_6 = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, $f_7 = \sum_{k=1} \frac{1}{k^2}$, $f_8 = n^{\lg \lg n}$, $f_9 = 1 + \binom{\lg n}{n}$, $f_{10} = \lg \lg n$

---

Д-во| Заради $f_4$ и $f_9$ допускаме, че $n$ е точна степен на двойката.

① $f_1$ и $f_2$

$\lg f_1 = \lg(\lg n) \cdot \lg n$ $\quad \lg f_2 = \lg n! \cdot \lg n$

Знаем, че $\lg(\lg n) \prec \lg n$ т.е. тогава

$\lg f_1 \prec (\lg n)^2$

$\lg f_1 \prec (\lg n)^2 \prec n \prec \lg n! \prec \lg f_2$

т.е. $f_1 \prec f_2$

② $\underline{f_1 \asymp f_8}$

$$2^{\lg f_1} = 2^{\lg n \cdot \lg\lg n} \iff 2^{\lg\lg n \cdot \lg n} \checkmark = 2^{\lg\lg n \cdot \lg n}$$

③ $\underline{f_8 \text{ и } f_3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lg\lg n}}{n^3 + 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\lg\lg n - 3}}{1 + 3 \cdot \underbrace{1/n}_{\to 0}} = \infty$$

т.е. $f_8 \succ f_3$

④ $\underline{f_3 \text{ и } f_5}$

$$f_3 = n^3 + 3n^2 \succ f_5 = n^2$$

⑤ $\underline{f_5 \text{ и } f_4}$

$$f_4 = 1 + \binom{\lg n}{\frac{\lg n}{2}} \quad \text{Нека } m = \lg n$$

$$f_4 = 1 + \binom{m}{\frac{m}{2}} \asymp \binom{m}{\frac{m}{2}} \asymp \frac{2^m}{\sqrt{m}} = \frac{n}{\sqrt{\lg n}} \qquad m = \lg n$$

Тогава $\underline{f_5 = n^2 \succ f_4} \asymp \frac{n}{\sqrt{\lg n}}$

⑥ $\underline{f_4 \text{ и } f_6}$

$$f_6 \asymp \lg n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\sqrt{\lg n}}}{\lg n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\lg n)^{3/2}} = \infty \qquad (\lg n)^{3/2} \prec n$$

Значи $\underline{f_4 \succ f_6}$

⑦ $f_6 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \asymp \log n$ и $f_{10}$

$\log\log n \propto \log n$

⑧ $f_{10} = \log\log n$ и $f_7 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$k(k-1) \le k^2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1+k-k}{k.(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}.(k-1)} - \frac{\cancel{k-1}}{k.\cancel{(k-1)}}\right] =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = 1 + 1 - \cancel{1/2} + \cancel{1/2} - \cancel{1/3} + \dots + \cancel{1/(n-1)} - 1/n = 1 + 1 - 1/n < 2$$

Значи $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \asymp 1$

Тогава $f_{10} \succ f_7$

⑨ $f_7$ и $f_9$

$f_9 = 1 + \left(\frac{\log n}{n}\right) \asymp 1$ и $f_9 \asymp f_7$

$\log n \le n$ за достатъчно големи $n$

$$f_9 \asymp f_7 \propto f_{10} \propto f_6 \propto f_4 \propto f_5 \propto f_3 \propto f_8 \asymp f_1 \propto f_2$$

**HW!** Подредете $3^{n^2}$, $2^{n^2+n}$, $(n+5)^n$, $\left(\frac{n}{2}\right)^n$, $n!$, $(n!)^{\log n}$, $(\log n)^{n!}$

$$n! \propto \left(\frac{n}{2}\right)^n \propto (n+5)^n \propto (n!)^{\log n} \propto 3^{n^2} \propto 2^{n^2+n} \propto (\log n)^{n!}$$

# Коректност и сложност на итеративни алгоритми

**def** | **Инварианта на цикъл**

Твърдение, което е вярно при всяка итерация на цикъла.

**Задача** | sum(A[1..n] : array of numbers) : number

```
1) s ← 0
2) for k ← 1 to n
3)     s ← s + A[k]
4) return s
```

цикъл по брояч (редове 2)–3))

**Инварианта:** Всеки път, когато алгоритъма изпълнява проверката $k \le n$ за край на цикъла е в сила $s = \sum_{i=1}^{k-1} A[i]$ за $k \in \{1, \dots, n+1\}$

**Д-во на инвариантата е индукция по $k$:**

**База:** При първата проверка $k \le n$, то $k = 1$. Тялото на цикъла не се е изпълнило нито веднъж, т.е. $s = 0$

$$\sum_{i=1}^{k-1} A[i] = \sum_{i=1}^{0} A[i] = 0.$$

Поддръжка

(ИП) Нека за някое $k \in \{1, \dots, n\}$ (да не е последното) $S = \sum_{i=1}^{k-1} A[i]$.

(Стъпка) Тогава $k \leq n$ и ще влезем в цикъла и ще изпълним ред 3 т.е.:

$$S_{new} = S + A[k] \underset{(ИП)}{=} \sum_{i=1}^{k-1} A[i] + A[k] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} A[i]$$

След това увеличаваме $k$ с 1 ще т.е. $k_{new} = k+1$ и сега

$S_{new} = \sum_{i=1}^{k_{new}-1} A[i]$ за следващото достигане на ред 2)

Т.е. инвариантата е изпълнена и при новата проверка.

<u>Доказателство за коректност на самия алгоритъм:</u>

Терминация

1) Пълна коректност: Алгоритъмът ще завърши. Следва от това, че цикълът е по броя и ред 3) се изпълнява краен брой пъти (n пъти).

2) Частична коректност: Ако алгоритъмът завършва, то той връща коректен резултат.

Тук ще разгледаме на последната проверка на цикъла какво се случва.
$k = n+1$ и от инварианата следва, че
$S = A[1] + A[2] + \ldots + A[n+\cancel{1}\cancel{-1}]$
Проверка: $n+1 \leq n$ ✗
Алгоритъмът излиза от цикъла и отиво на ред 4 и връща $S = \sum_{i=1}^{n} A[i]$ т.е. връща сумата на елементите на масива.
Сложност по време: $T(n) = \Theta(n)$
$M(n) = \Theta(1)$

HW
Задача | alg(A[1...n]: array of numbers): number

1) $s \leftarrow 0$
2) for $k \leftarrow 1$ to $n$ ←
3) if $A[k] = 4$
4) $s \leftarrow s+1$
5) return s

Алгоритъмът връща броя на 4-ките в масива.
Инварианта:
$S$ = броя на 4-ките в масива $A[1 \ldots k-1]$

HW
Задача | alg(A[1..n]: array of numbers): number

1) $k \leftarrow 1$
2) while $k \leq n$ and "A[k] е нечетно" do ← инв.
3) $k \leftarrow k+1$
4) return k

Алгоритъмът връща индекса на първото четно число ($n+1$, ако в масива има само нечетни числа).

Инвариантата: Числата $A[1..k-1]$ са нечетни.

<u>Забел.</u>

1) Трябва да се разгледат 2 случая за върнатата стойност: $\in \{1, \ldots, n\}$ или е $n+1$

2) Този път цикълът е по условие: Ще завърши ли? - Да, защото ще се изпълни не повече от $n$ пъти (горна граница $k \leq n$).