Асимптотични нотации, асимптотичноположителни ф-ции (Дефиниции, основни свойства)

Нека предположим, че във входните данни се съдържа всичко необходимо за решаването на задачата без излишна информация.

Ще казваме, че $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ е асимптотично неотрицателна, ако $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[f(n) \geq 0]$.

Ако е строго неравенството, то f е асимптотично положителна.

Ще си говорим за сложности - минимална, средна, максимална.

Нека g е ас. неотр. ф-я. Въвеждаме следните класове ф-ции. Ще ги наричаме асимптотични нотации:

$$\Theta(g) = \{f \mid (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c_1 . g(n) \leq f(n) \leq c_2 . g(n)]\}$$

$\Theta(g)$ е м-вото от всички ф-ции, които

се от същия порядък както g
растат асимптотично еднакво с g.
Ще записваме това с $f \in \Theta(g)$,
$f = \Theta(g)$ или $f \asymp g$.

$$O(g) = \{ f \mid (\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$[n_0 \leq n \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq c.g(n)] \}$$

м-вото от всички ф-ции, които
растат асимптотично не по-бързо
от g. Записваме $f \in O(g)$, $f = O(g)$, $f \preceq g$.

$$o(g) = \{ f \mid (\forall c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$[n_0 \leq n \Rightarrow 0 \leq f(n) < c.g(n)] \}$$

м-вото от всички ф-ции, които
растат асимптотично по-бавно от g.
Записваме $f \in o(g)$, $f = o(g)$, $f \prec g$.

$$\Omega(g) = \{ f \mid (\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$$
$$[n_0 \leq n \Rightarrow 0 \leq c.g(n) \leq f(n)] \}$$

м-вото от всички ф-ции, които
растат асимптотично не по-бавно
от g. Записваме $f \in \Omega(g)$, $f = \Omega(g)$, $f \succeq g$

$$\omega(g) = \{ f \mid (\exists c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \; [n_0 \leq n \Rightarrow 0 \leq c.g(n) < f(n)] \}$$

м-вото от всички ф-ции, които растат асимптотично по-бързо от g.

Записваме $f \in \omega(g)$, $f = \omega(g)$, $f \succ g$.

$\asymp, \preceq, \succeq, \prec, \succ$ са бинарни релации върху ф-ции. Ще видим техни с-ва:

Някои основни свойства на асимптотичните нотации

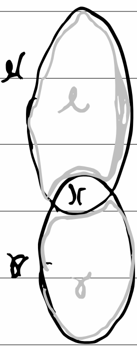
Нека f, g, h са асимп. неотр. ф-ции.

1. Всички са транзитивни. Ако $f \sigma g$ и $g \sigma h$, то $f \sigma h$ за $\sigma \in \{\prec, \preceq, \succeq, \succ, \asymp\}$.
2. Θ, O и Ω са рефлексивни: $f \sigma f$ за $\sigma \in \{\preceq, \succeq, \asymp\}$.
3. $f \succeq g$ и $g \succeq f$ iff $f \asymp g$
4. Θ е симетрична: $f \asymp g$, то $g \asymp f$.
5. $f \preceq g$ iff $g \succeq f$ и $f \prec g$ iff $g \succ f$

Транспонирана симетрия

6. Няма ф-ции f и g, такива че едновременно $f \prec g$ и $g \prec f$.

⑦ o, ω са асиметрични: $f \sigma g \not\Rightarrow g \sigma f$, $\sigma \in \{o, \omega\}$



Т.е. Θ е релация на еквивалентност в/у м-вото от асимптотично неотр. ф-ции. O и Ω са квази наредби, а o, ω са строги квази наредби.

⑧ Гранични теореми

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ iff $f(n) \prec g(n)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ iff $f(n) \succ g(n)$

3) Ако съществува $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ iff $f(n) \asymp g(n)$
$0 < c < \infty$

Д-во | 3) За фиксирано $c > \varepsilon > 0$ и достатъчно големи n, то:

$$c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon \quad \text{iff}$$

$$\underbrace{(c-\varepsilon)}_{c_1} \cdot g(n) \le f(n) \le \underbrace{(c+\varepsilon)}_{c_2} \cdot g(n).$$

∎

☆ $f \asymp g \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ съществува

Нека $g(n)=1$, а $f(n) = 2+\sin(n)$
осцилира в интервал $[1;3]$.

$$0 \le g(n).\underbrace{1}_{c_1} \le 2+\sin(n) \le g(n).\underbrace{3}_{c_2}$$

$f \asymp g$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin(n)}{1} = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$
не съществува.

Зад 1 • За всяка константа $c>0$, то $c.f \asymp f$.

• Няма значение от основата на логаритъма различават се само в положителна константа $\log_a n$, $\log_b n$, $a,b>1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad \text{т.е.} \quad \lg n \asymp \log n$$

$$\log n \asymp \log_2 n \asymp \log_{1000} n \asymp \ln n$$

• Не всеки две ф-ции се сравними.
Нека $f(n)=n$, а $g(n)=n^{1+\sin(n)}$, $g(n)$ осцил. м/у 1 и n^2, т.е. $f(n) \not\theta\, g(n)$, $\theta \in \{\prec, \preceq, \asymp, \succ, \succeq\}$.

• Имаме право за пренебрегване несамо константи, но и ограничени множители както и събираеми от по-нисък порядък:

$$\underbrace{n^2}_{}(\overset{\text{ограничен множител}}{10+\sin(n)}) \asymp n^2$$

$$\overset{\text{const}}{5}n^3 \underbrace{-4n+3}_{\text{по-нисък порядък}} \asymp n^3$$

3) Нека f и g са асимпт.пол. и $a>1$.

- Ако $f \prec g$ и g расте неограничено, то $a^f \prec a^g$ <u>експонентата усилва разликата</u>, <u>логаритъма я смалява</u>
- Ако $\log_a f \prec \log_a g$ и g расте неогр., то $f \prec g$

<u>Д-во</u> 1) Т.к. g расте неогр., то и $g-f$ расте неогр. Ако допуснем противното, то

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)-f(n)+f(n)}{g(n)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)-f(n)}{g(n)}}_{\text{ограничено е } g-f \to 0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}}_{f \prec g \to 0} = 0 \quad ↯$$

Т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{f(n)}}{a^{g(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\underbrace{g(n)-f(n)}_{\text{неогр. расте}}}} = 0 \to a^{f(n)} \prec a^{g(n)}$$

∎

★ $f \asymp g \not\Rightarrow a^f \asymp a^g$

$f \preceq g \not\Rightarrow a^f \preceq a^g$

Ако $f(n) = 2n$, а $g(n) = n$, то $f(n) \asymp g(n)$
значи и $f(n) \preceq g(n)$, но $\underline{2^{2n} \succ 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

★★ $\log_a f \asymp \log_a g \not\Rightarrow f \asymp g$

$\log_a f \preceq \log_a g \not\Rightarrow f \preceq g$

$f(n) = 2^{2n}$, $g(n) = 2^n$

$2n \log 2 \asymp n \cdot \log 2$ и значи и $\preceq$ е в сила, но нямаме $\asymp$ и $\preceq$ без логаритъма.

(10) Още полезни теореми:

$a>1$
$$\begin{cases} a^f \asymp a^g \to f \asymp g \\ a^f \preceq a^g \to f \preceq g \\ a^f \prec a^g \not\Rightarrow f \prec g \end{cases}$$

примери от (★) върши работа

$a>1$
$$\begin{cases} f \asymp g \to \log f \asymp \log g \\ f \preceq g \to \log f \preceq \log g \\ f \prec g \not\Rightarrow \log f \prec \log g \end{cases}$$

$n^2 \prec n^3$, но $2\log n \asymp 3\log n$

④ a) $a>1$, $\alpha, \beta > 0$

$(\log_a n)^\alpha \propto n^\beta$

b) $n^\beta \propto a^n$

c) $a^n \propto n!$

d) $n! \propto n^n$

Д-во | a) Нека $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} > \alpha$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n^\alpha}{n^\beta} \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\log_a n}{n^\gamma}\right)^\alpha = 0^\alpha = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\gamma} \underset{\text{Л'Коп.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\ln a}}{(\gamma-1).n^{\gamma-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln a\,(\gamma-1).n^\gamma} =$$

$= 0$

т.е. $(\log_a n)^\alpha \propto n^\beta$

b) $n^\beta \propto a^n$? ✓

$\beta \log_a n \propto n.\log_a \xrightarrow{\text{7ч}} n^\beta \propto a^n$

c) $a \propto n!$? ✓

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n.(n-1)\ldots 1}{a.a.\ldots a} = \infty$$

d) $n! \propto n^n$?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\dots 1}{n\cdot n\dots n} = \lim_{n\to\infty} 1\cdot\underbrace{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\dots\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} =$$

$= 0$ ✓

НЩ ① $p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$, $a_0 > 0$
Тогава $p(n) \asymp n^k$.
② За фикс. $k \in \mathbb{N}$ док, че $\binom{n}{k} \asymp n^k$
③ Док, че $(n+a)^b \asymp n^b$, $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}^+$
④ Възможно ли е $f \asymp g$ и $f \not\prec g$ и $f \not\succ g$?
⑤ $\max\{f, g\} \asymp f + g$ (f и g асимпт. пол.)
*Използваме съществено, че са асимптотично положителни

Д-во ① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_k}{n^k}\right) = a_0$, $a_0 > 0$ т.е.

$p(n) \asymp n^k$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}{n^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\,\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k \text{ times}}} = \lim_{n\to\infty} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{1}{k!} > 0$$

③ За $n \geq \lceil a \rceil$, то $n+a \leq n + \lceil a \rceil \leq 2n$
За $n \geq 2\lceil a \rceil$, то $n + a \geq n - \lceil a \rceil \geq \frac{n}{2}$

$$\left(\frac{n}{2}\right)^b \leq (n+a)^b \leq (2n)^b$$

$c_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^b$, $c_2 = 2^b$, $n_0 \geq \lceil 2a \rceil$

④ $g(n)=n$, $f(n)=\begin{cases} n, & n \text{ even} \\ 1/n, & n \text{ odd} \end{cases}$

$f \not\asymp g$ за $n_0=1$, $c=1$.

- Ако $f \prec g$, то
$(\forall c>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n_0 \le n \Rightarrow 0 \le f(n) < c \cdot g(n)]$

За $c \le 1$ не става $0 \le n < c \cdot n$ ↯

- Ако $f \asymp g$ то
$(\exists c_1>0)(\exists c_2>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n_0 \le n \Rightarrow$
$0 \le c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)]$

За $n > \frac{1}{\sqrt{c_1}}$ не е в сила $0 \le c_1 . n \le \frac{1}{n}$
odd

~~$0 \le c_1 n^2 \le 1$~~

$n^2 \le \frac{1}{c_1}$

$n \le \frac{1}{\sqrt{c_1}}$

⑤ f и g са асимп. полож. т.е.:
$(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_1)[f(n)>0]$
$(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \ge n_2)[g(n)>0]$
За $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, то
$0 \le c_1 . (f(n)+g(n))$ за $n \ge n_0$ и $c_1 > 0$.
За $n \ge n_0$, то
$0 \le 1/2 (f(n)+g(n)) \le \max\{f(n), g(n)\} \le f(n)+g(n)$

$c_1 = 1/2$, $c_2 = 1$, $n_0 = n_0$.