Unfinished work for next time

a) $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n \cdot \log n$

b) $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$

c) $T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^4$

HW директно МТ

d) $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + T(\log_2 n) + n$

Използвайки индукция леко го решим, че $T(n) \approx 2^n$.

e) $T(n) = 3 \cdot T(\sqrt[3]{n}) + \log_3 n$

f) $T(n) = T(\log_2 n) + 1$

d) $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + T(\log_2 n) + n$

? $h(n)$: $T(n) \asymp h(n)$

$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + n \to T(n) \asymp 2^n$

$T(n) \asymp 2^n$

1) $T(n) \succsim 2^n$

2) $T(n) \precsim 2^n$

$f(n) \succsim g(n) \overset{?}{\iff} (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$
$[n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)]$

$f(n) \precsim g(n) \overset{?}{\iff} (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})$
$[n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)]$

$\exists c>0$, че за достатъчно големи n, то $0 \le \boxed{c \cdot 2^n \le T(n)}$

(ИП) Допускаме, че $\exists c>0$, т.т.

$$\boxed{T(n-1) \ge c \cdot 2^{n-1}}$$

$$T(n-2) \ge c \cdot 2^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{T(\log_2 n) \ge c \cdot 2^{\log_2 n} = \underline{c \cdot n}}$$

$$\vdots$$

$$T(1) \ge c \cdot 2^1 = c \cdot 2$$

$$T(n) = \underline{2} \cdot T(n-1) + T(\log_2 n) + n \ge$$

$$c \cdot 2^n + c \cdot n + n = c \cdot 2^n + \underbrace{n \cdot (c+1)}_{\ge 0} \ge c \cdot 2^n$$

$$T(n) \ge c \cdot 2^n$$

$$T(n) \gtrsim 2^n$$

$\underline{T(n) \asymp 2^n}$

$\exists c > 0$, т.е. за дост. големи n, то

$$\underline{0 \leq T(n) \leq c \cdot 2^n}$$

(ИП): $T(n-1) \leq c \cdot 2^{n-1}$

$T(n-2) \leq c \cdot 2^{n-2}$

$\vdots$

$T(\log_2 n) \leq c \cdot 2^{\log_2 n} = \underline{c \cdot n}$

$\vdots$

$T(1) \leq c \cdot 2^1 = c \cdot 2$

$$\underline{T(n)} = \underline{2} \cdot T(\underline{n-1}) + T(\underline{\log_2 n}) + n \leq$$

$$c \cdot 2^n + \underbrace{c \cdot n + n}_{\neq 0 \; n \geq 1} \not\leq c \cdot 2^n$$

$\exists c, d > 0, \alpha > 1$

$T(n) \leq c \cdot 2^n - d \cdot \alpha^n \leq c \cdot 2^n$

- $T(n) \leq c \cdot 2^n - d$
- $T(n) \leq c \cdot 2^{n-d}$
- $T(n) \leq c \cdot 2^n - n \cdot d$

$\ldots$

$(\forall n)$: ....

$T(n) = 2 T(n-1) + T(\log_2 n) + n \leq$

$\cancel{c \cdot 2^n} - 2 \cdot d \cdot \alpha^{n-1} + c \cdot n - d \cdot \alpha^{\log_2 n} + n \leq$

$\cancel{c \cdot 2^n} - d \cdot \alpha^n$

$\Longleftrightarrow$

$\underbrace{d \cdot \alpha^n - 2 d \cdot \alpha^{n-1}}_{\text{експоненциална}} + \underbrace{c \cdot n + n + d \cdot \alpha^{\log_2 n}}_{\text{линейна ф-я}} \leq 0$

$d \cdot \alpha^n - 2 \cdot d \cdot \alpha^{n-1} < 0 \quad // d\alpha^{n-1} > 0$

$\alpha - 2 < 0 \iff \alpha < 2$

$\alpha \in (1; 2)$

$T(n) \leq c \cdot 2^n - d \cdot \alpha^n \leq c \cdot 2^n$

e) $T(n) = 3 \cdot T(\sqrt[3]{n}) + \log_3 n$

$n^{1/3}$

$n = 3^{\log_3 n} \to n^{1/3} = 3^{\frac{\log_3 n}{3}}$

Полагаме $m = \log_3 n$

$T(3^{\log_3 n}) = 3 \cdot T\left(3^{\frac{\log_3 n}{3}}\right) + \underline{\log_3 n}$

$T(3^m) = 3 \cdot T(3^{\frac{m}{3}}) + m$

$Q(m) = T(3^m)$

$Q(m) = 3 \cdot Q\left(\frac{m}{3}\right) + m$

$a = 3,\ b = 3,\ k = \log_a b = 1$

$m^k = m^1 \asymp m = f(m)$

По $\underline{\text{II}}$ри случай, получаваме $Q(m) \asymp m^k \cdot \log m =$

$= \underline{m} \cdot \log m$

$T(n) \asymp \log n \cdot \log(\log n)$

f) $T(n) = T(\log_2 n) + 1$

$\log^* n$ = # прилагания на $\log$ примерно $k \in \mathbb{N}$, т.ч. $\log^{(k)} n \leq 1$

$$n \to \log_2 n \to \log_2 \log_2 n \to \dots \to \log^* n$$

$$\Theta(1) \quad \Theta(1) \quad \Theta(1) \quad \Theta(1)$$

$T(n) \asymp \log^* n$

$$1 \prec \log^* n \prec \log n$$

$n \cdot \log^* n$

Сортирания

	Сортировка	Устойчивост stable	Време	Особености
бавни/квадратни	Insertion sort	V	$T(n) \asymp n^2$	Ползва се за дъното на рекурсията на бързи алго.
	Selection sort	V	$T(n) \asymp n^2$	Минимален брой размествания
бързи	Heap sort	X	$T(n) \asymp n \log n$	сортира in-place (малко доп. памет) $M(n) \asymp 1$
	Quick sort	V/~	$T(n) \asymp n \log n$ при идеалния избор от алго. pick, else $T(n) \asymp n^2$	Най-бързи алгоритми за общи данни
	Merge sort	V	$T(n) = n . \log n$	$M(n) \asymp n$ паралелност
линейни	Counting sort	V	$T(n) \asymp n$, ако $max - min \leq n$ (малък диап. на цели числа)	$T(n,k) \asymp n+k$ за $k = max - min$
	Radix sort (метода бройните с-ми)	V	$T(n,k) \asymp k * n$ k-брой цифри	$T(n) \asymp n$, ако k е малко (за къси цели числа)

Дизайн на алгоритми.

(с масиви)

Зад 1) **Разбиване (partition)**

Дадено: 1) числов масив $A[1 \ldots n]$

2) критична стойност: value

Търси се: разбиване на A на 2 части – големи и малки ел-ти.

$T(n) \asymp n$

$M(n) \asymp 2n \asymp n$

B C

$B[1 \ldots n]$

$\cancel{C[1 \ldots n]}$

Зад 2 Търсене на дадена стойност

Дадено: n масив $A[1..n]$

=> стойност key

Търси се индексът i на key т.ч. $A[i]=key$

a) масивът е сортиран:
Тогава Binary Search $\to T(n) \asymp \log n$

b) масивът е произволен
$T(n) \asymp n$

Зад(3) Търсене на брой сравнения за:

a) min/max в произволен масив;

b) min и max в произволен масив;

c) Може ли b) да се реализира с по-малък брой сравнения?

d) А да намерим кои a) и втория по големина max/min?

---

a) последов. минаване, $T(n) \asymp n$, $n-1$ сравн.

b) 1x посл. минавания $T(n) \asymp n$, $2(n-1)$ сравн.

c) $\overset{?}{n}$ $a_1 < a_2$ $\quad a_3 \; a_4 \quad \dots \quad a_{n-1} \; a_n \quad n/2$

$max_1 = max$

$min_1 = min$

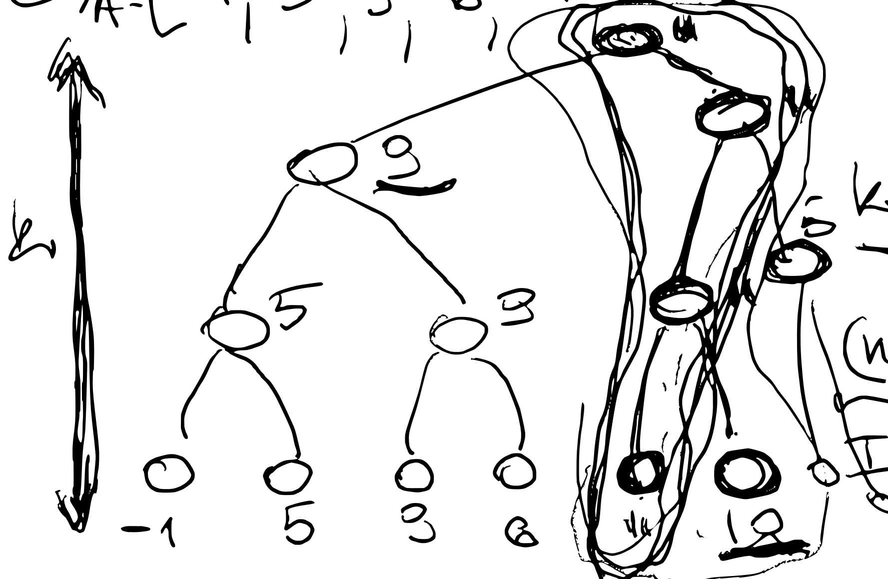
a_n

$max_1, \ldots, max_{n/2} \xrightarrow{max} n/2 - 1$

$min_1, \ldots, min_{n/2} \xrightarrow{min} n/2 - 1$

$$\frac{3n}{2} - 2 = 2 \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \frac{n}{2} \approx \frac{3}{2} \cdot n$$

d) $A = [-1, 5, 3, 6, 11, 12]$



$k = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$(n-1) + (\lfloor \log_2 n \rfloor - 1)$

Зад 4) Търсене на k-ти най-голям/най-малък елемент (вкл. и търсене на медиана)

PICK $\to \Theta(n)$

зад. 5 Имаме масив и искаме да намерим двата елемента, за които $A[i].A[j]$ е максимално.

$A[1 \ldots n]$ - числа $\underbrace{\in \mathbb{Z} \text{ числа}}$

? двата елем., т.ч. $A[i].A[j]$ да е максимални.

$A = [\underbrace{-12, -11}, \underbrace{0, 1}]$

$\underbrace{(-12).(-11) > 0}$

Намираме $\underbrace{2^{\text{та}} \text{ н.г.ел.}}$ и $\underbrace{2^{\text{та}} \text{ н.м.ел.}}$

Правим произв.-та им -> a, b

Отг.-ът $= \underbrace{\max(a, b)}$

Зад 6) Имаме масив $A[1 \ldots n]$ от естествени числа в интервал: $1 \leq a_i \leq k$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Дадено е и товa k.
Колко числа има в интервал $[a, b]$ за $1 \leq a \leq b \leq k$, $a, b \in \mathbb{N}$?

Зад 7

Даден е сортиран масив с числата от 0 до n и едно от тях липсва. Кое е то?

Зад. 8 Имаме два сортирани масива $A[1..n]$ и $B[1...n]$ с еднакъв брой елементи. Имаме $C = A \cup B$.

union

Медианата на C?

HW Имаме $2n$ играча, $A[1\ldots 2n]$ е числов масив, в който на позиция i е силата на игра i.

Да се разделят на два отбора по n играча, т.е. да са максимално неравностойни.

Hint: Оптимален времеви алгоритъм е със сложност $\Theta(n)$.