

Дизайн 2 - Графи

Предложете колкото е възможно по-бързи (в асимптотичен смисъл) и оптимални по памет алгоритми за проблемите по-долу. Ако не е уточнено в условието считаме, че даденият граф е неориентиран.

Означения: $G(V, E)$, $i, j \in V$ – фиксирани произволни върхове.

DAG – ориентиран ациклически граф

G^R : графът, който се получава като сменим посоката на ребрата на G .

Дефиниции:

- Pre-order number, post-order number: номерата, които върховете получават при обхождане с DFS съответно преди и след обхождане на техните наследници.
- Диаметър: най-дългият измежду най-късите пътища между всеки два върха.
- Срязващ връх (cut vertex, articulation point): връх, който ако бъде изтрит заедно с инцидентните с него ребра, ще се увеличи броя на свързаните компоненти на графа.
- Мост (bridge): ребро, което ако бъде изтрито, ще се увеличи броя на свързаните компоненти на графа.
- Клика: пълен подграф. Кликово число на граф: броят на върховете в максимална по мощност клика. Антиклика (независимо множество): празен подграф (без съседни върхове). Число на независимост на граф: броят на върховете в максимална по мощност антиклика.
- Доминиращо множество: подмножество D на V , такова че всеки връх, който не принадлежи на D е пряк наследник на някой връх от D . Число на доминиране на граф: броят на върховете в минимално по мощност доминиращо множество.
- Връх i в ориентиран граф. Полустепен на входа i : броя на влизащите ребра; полустепен на изхода на i : броя на излизащите ребра. Sink: връх, от който не излизат ребра. Source: връх, към който не влизат ребра.
- Свързан ориентиран граф: за всеки два върха i и j има път от i до j или от j до i . Силно свързан: за всеки два върха i и j има път от i до j и от j до i . Силно свързана компонента (SCC): максимален подграф, в който всеки два върха са силно свързани.
- Нека силно свързаните компоненти на ориентиран граф са C_1, C_2, \dots, C_k . Компонентен граф: граф с върхове $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ и ребра: има ориентирано ребро от C_i до C_j , ако съществуват върхове i в C_i и j в C_j : има път от i до j в G .
- Хамилтонов цикъл: минава през всеки връх точно по веднъж.
- Нека G е свързан мултиграф. Ойлеров цикъл - в който всяко ребро участва точно по веднъж. Аналог. Ойлеров път.
- T – покриващо дърво на G . Bottleneck edge: най-тежкото ребро в T . MBST(min bottleneck spanning tree): покриващо дърво с минимална стойност на bottleneck edge; bottleneck: тежестта на това ребро.

Основни задачи

Да се докаже, че:

1. Неориентиран граф с n върха и поне n ребра е цикличен.
2. В DAG има поне един sink и поне един source.

Да се намери:

1. Броят на свързаните компоненти на граф.
2. Дали граф е цикличен.
3. Най-късият път (по брой ребра) от връх i до връх j .
4. А) Най-късият път в претеглен граф с неотрицателни ребра от връх i до връх j .
В) -//- ако има отрицателни ребра.
5. Дължините на най-късите пътища в претеглен граф между всеки два върха.
6. Броят на пътищата от връх i до връх j с дължина k ребра.
7. Дадени са градове и цените за построяване на велоалеи между някои от тях. Да се намери каква е минималната сума, с която може да се построят велоалеи, така че да има път между всеки два града.
8. А) Дадени са задачи и зависимости между тях от типа: задача i трябва да се изпълни преди задача j . Да се намери ред за изпълнение на задачите (ако съществува).
В) Да се подредят върховете на DAG така че всеки връх да се намира след своите наследници.
9. Най-близкият общ предшественик на два върха в дърво (възможно най-отдалечения от корена).

Други задачи

1. Всички прости пътища от връх i до връх j .
2. Дали граф е Хамилтонов. Хамилтоновия цикъл с минимална дължина.
3. А) Броят на простите пътища от връх i до връх j в DAG.
В) Дължината на най-дългия път в DAG.
4. Диаметърът на дърво.
5. А) Броят на срязващите върхове.
В) Броят на мостовете.
6. А) Кликовото число и числото на независимост на дърво.
В) -//- на граф. Всички максимални по включване антиклики в граф.
7. Числото на доминиране на граф.
8. А) Неориентиран свързан мултиграф. Да се докаже, че съдържа:
 - Ойлеров цикъл \Leftrightarrow всички върхове са от четна степен.
 - Ойлеров път \Leftrightarrow има точно два върха от нечетна степен.В) Ориентиран свързан мултиграф. Да се докаже, че съдържа:
 - Ойлеров цикъл \Leftrightarrow за всеки връх полустепените на входа и на изхода са равни.

А за Ойлеров път?

С) Да се намери Ойлеров цикъл. А път?

9. А) Да се докаже, че компонентният граф е DAG.

В) Нека C е SCC в G , i връх в C . Да се докаже, че множеството от достижими от i върхове в G съвпада с C .

С) Да се докаже, че върхът с най-голям post-order number принадлежи на source SCC в G .

Д) Да се намерят силно свързаните компоненти на граф.

10. Ребро, което участва във всички цикли в ориентиран граф (ако съществува).

11. Покриващо дърво, което минимизира:

А) най-лекото ребро

В) най-тежкото ребро (MBST).

С) Да се провери дали bottleneck-а е число по-малко или равно на c ($c = \text{const}$).

12. Второто по оптималност минимално покриващо дърво.

13. Частично покриващо дърво на G с k ($k \leq n$) върха: покриващо дърво на графа G_1 , състоящ се от тези k върха и инцидентните им ребра от G . Минималното измежду всички частични покриващи дървета с произволни k върха на G ?