зад $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

?: $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ и f биекция

?: $g: 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и g биекция

$f(n) = 2n$

- инекция

$(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$

Нека $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$ произволни и нека $\underbrace{f(x) = f(y)}_{\text{def } f}$;

$\underbrace{2x = 2y}_{x = y}$;

- сюрекция

$(\forall y \in 2\mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})[f(x) = y]$

Нека $y \in 2\mathbb{N} \to$

Зад $|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |2\mathbb{N}+1|$

$f(n) = 2n+1$

Зад $|\mathbb{N}| \stackrel{?}{=} |\mathbb{Z}|$

$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

$\left[\begin{array}{l} 0, -1, 1, -2, 2, \ldots \\ 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \end{array}\right.$

$$f(n) = (-1)^n \cdot \left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right)$$

- Нека $n, m \in \mathbb{N}$, т.ч. $\underbrace{f(n) = f(m)}$

$$(-1)^n \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = (-1)^m \cdot \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \rightarrow$$

n и m трябва да имат една и съща четност

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$$

$$\left| \frac{n+1}{2} - \frac{m+1}{2} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{n-m}{2} \right| \leq 1$$

$$|n-m| \leq 2$$

- Щом n и m са с еднаква четност, то $n-m$ не може да е 1
- Може ли $|n-m| = 2$?

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$$ БОО нека $m > n$

- Тр. остава $|n-m| = 0$ ✓. т.е. $n = m$

• Сюрекция

Нека $z \in \mathbb{Z}$.

$f(n) = z$

n – нечетно

$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = z$ (-5)

При нег. $\left\lfloor \frac{2|z|+1}{2} \right\rfloor$ $2|z|$

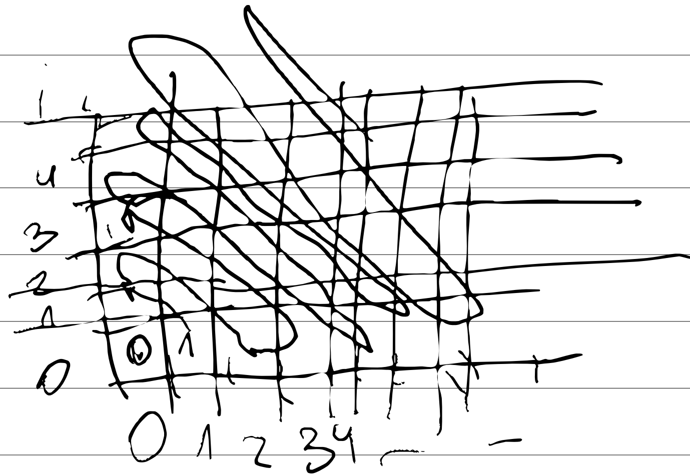
При четно $\left\lfloor \frac{2z+1}{2} \right\rfloor$ $2z$

$y = (-1)^{x} \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ ...

НИ Покажете, че $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{Z}|$

Hint: Използвайте, че сме док., че $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ и композиция на две биекции е биекция.

309 $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$



$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(a,b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a$

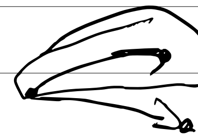
$\frac{n}{m}$ $\langle n, m \rangle$

380 a) Ако f и g са ф-ции, то $f \cap g$ е ф-я) $\boxed{HW}$

b) Ако f и g са ф-ции, за които

$$\underbrace{\forall x [x \in Dom(f) \cap Dom(g) \Rightarrow f(x) = g(x)]}_{\text{"съгласувани"}}$$

Тогава $f \cup g$ е ф-я



a) $f \cap g$ е ф-я?

$\forall x \forall y \forall y' [\langle x, y \rangle \in f \cap g \;\&\; \langle x, y' \rangle \in f \cap g \Rightarrow y = y']$

Нека x, y, y' са произв. и $\langle x, y \rangle \in f \cap g$ и $\langle x, y' \rangle \in f \cap g$,

$\underline{\langle x, y \rangle \in f}$ и $\langle x, y \rangle \in g$ $\quad$ $\underline{\langle x, y' \rangle \in f}$ и $\langle x, y' \rangle \in g$

От f ф-я и $\downarrow$

$y = y'$

b) Нека f и g са произ. и

$\underline{\forall x\,[x \in Dom(f) \cap Dom(g) \Rightarrow f(x) = g(x)]}$. (*)

Искаме $f \cup g$ да е ф-я.

Нека x, y, y' са т.е.

$\underbrace{\langle x, y\rangle \in f \cup g}$ и $\underbrace{\langle x, y'\rangle \in f \cup g}$

$\langle x, y\rangle \in f$ или $\langle x, y\rangle \in g$ $\quad$ $\langle x, y'\rangle \in f$ или $\langle x, y'\rangle \in g$

Сл. 1 $(\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x, y'\rangle \in f)$ или

$(\langle x, y\rangle \in g$ и $\langle x, y'\rangle \in g)$.

Нека БОО е първото $\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x, y'\rangle \in f$ и от това, че f е ф-я, то $y = y'$.

Аналогично

Сл. 2 БОО $\underbrace{\langle x, y\rangle \in f}_{x \in Dom(f)}$ и $\underbrace{\langle x, y'\rangle \in g}_{x \in Dom(g)}$

$\underbrace{\hphantom{x \in Dom(f) \qquad x \in Dom(g)}}_{x \in Dom(f) \cap Dom(g)}$

От (A), то значи $\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{g(x)}_{y'}$

$y = y'$.

Т.е. $f \cup g$ е ф-я

A, B мн-ва.

Зад $\mathcal{F} = \{ f \mid f : A \to B \}$ тотални и R е бинарна рел. в/у B.

Да деф. $S = \{ \langle f, g \rangle \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \mid (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a) \rangle \in R] \}$

Докажете или дайте контра-пример за следните твърдения:

Ако R е:

(1) • рефлексивна, то S е рефл.

(2) • симетрична, то S е симетр.

(3) • транзитивна, то S е транзитивна

$\langle f, g \rangle \in S \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a) \rangle \in R]$

(1) Нека R е рефлексивна.

/* $\forall x \, \langle x, x \rangle \in R$ */

Нека $f \in \mathcal{F}$. Искаме $\langle f, f \rangle \in S$?

$(\forall a \in A)[\langle f(a), f(a) \rangle \in R]$, но R е рефл.

значи $\langle f, f \rangle \in S$. $\Rightarrow$ S е рефл.

$\langle f, g\rangle \in S \Leftrightarrow (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a)\rangle \in R]$

(2). Нека R е симетрична.

$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$

Нека $\langle f, g\rangle \in S$. Искаме $\langle g, f\rangle \in S$?

$\Downarrow$

$(\forall a \in A)[\underbrace{\langle f(a), g(a)\rangle \in R}]$

R симетрична

$\underbrace{(\forall a \in A)[\langle g(a), f(a)\rangle \in R]}$

$\Downarrow$

$\langle g, f\rangle \in S$

(3) Нека R е транзитивна.

$\langle x, y\rangle \in R$ & $\langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$.

Нека $\langle f, g\rangle \in S$ и $\langle g, t\rangle \in S$. Искаме $\langle f, t\rangle \in S$?

От $\underbrace{\langle f, g\rangle \in S}$, и от $\underbrace{\langle g, t\rangle \in S}$

$(\forall a \in A)[\langle f(a), g(a)\rangle \in R]$ $(\forall a \in A)[\langle g(a), t(a)\rangle \in R]$

Нека $a_0 \in A$. Тогава

$\langle f(a_0), g(a_0)\rangle \in R$ и $\langle g(a_0), t(a_0)\rangle \in R$.

Но R е транзитивна, т.е. $\langle f(a_0), t(a_0)\rangle \in R$.

Но $a_0 \in A$ е произволно, значи

$\langle f, t\rangle \in S$.

Индукция

Принцип на индукцията на $\mathbb{N}$

Нека $m \in \mathbb{N}$

За всяко св-во $\varphi(n)$, ако:

(база) $\varphi(m)$ е вярно

(стъпка) $\forall k\, (\underbrace{((k \geq m) \,\&\, \varphi(k))}_{\text{индукт. хипотеза}} \Rightarrow \varphi(k+1))$

стъпка

Тогава $\varphi(n)$ е вярно за всяко $n \geq m$.

Зад. За вс. $n \in \mathbb{N}_{>0}$, то

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$$

Д-во/ Нека $\varphi(n) \Leftrightarrow$ "$1+3+\dots+(2n-1) = n^2$".

(база): $\varphi(1)$? $1 = 1$ ✓

(инд.хип): Нека за $k \geq 1$ е в сила $\varphi(k)$.

(стъпка): Искаме $\mathcal{P}(k+1)$ да е вярно.

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=$$

$$=\underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{\text{инд. хип. } \mathcal{P}(k) \to \,=\, k^2}+(2k+1)=$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

Значи $\mathcal{P}(k+1)$ е в сила.

Заключ. док., че за вс. $n \in \mathbb{N}_{>0}$, то $\underbrace{n^2=1+3+\dots+(2n-1)}_{\mathcal{P}(n)}$.

Принцип на силната математическа индукция за $\mathbb{N}$

Нека $a, b \in \mathbb{N}$ т.ч. $a \geq b$.
За всяко с-во $\varphi(n)$, ако:

① $\forall m \left((b \geq m \geq a) \Rightarrow \varphi(m) \right)$ база

② $\forall m \left(\underbrace{(m > b) \,\&\, \varphi(a) \,\&\, \varphi(a+1) \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi(m)}_{\text{предполож.}} \Rightarrow \varphi(m+1) \right)$.

стъпка

Тогава $\varphi(n)$ е в сила за всяко $n \geq a$.

Зад. Да се док., че за вс. ест. число $n \geq 2$, то n е просто число или n е произв. от прости числа.

$\varphi(n) \leftrightharpoons$ "n е просто или n е произв. от прости числа"

(инд. хип.) Нека за $m \geq 2$ имаме с-во $\varphi(k)$ за $m \geq k \geq 2$.

(стъпката) Дали $\varphi(m+1)$ е в сила?

(сл. 1) $m+1$ е просто число $\to$ ✓ $\varphi(m+1)$

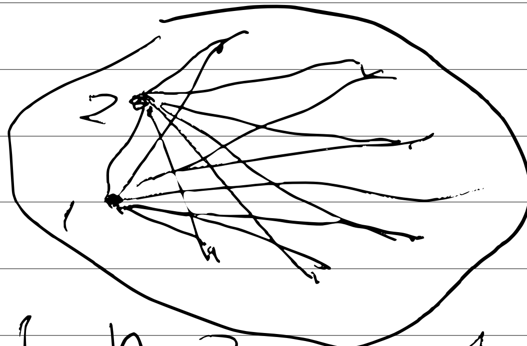
(сл. 2) $m+1$ не е просто $\to$ $m = x . y$ и

$\underbrace{m \geq x \geq 2}_{\text{(и. хип.) } \varphi(x)}$ и $\underbrace{m \geq y \geq 2}_{\text{(и. хип.) } \varphi(y)}$

Тогава от $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ и $m = x \cdot y$ получаваме, че m се представя като произв. от прости числа.

Заключ., че за вс. $n \in \mathbb{N}_{>1}$, то $\varphi(n)$.

Зад. Д-ве, че за $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$



здрависване от $n+1$ души

$n \quad n-1 \quad n-2 \; \dots \; 1$

$n=0$ $\qquad \sum_{i=1}^{0} i = 0 = \frac{0.(0+1)}{2} = 0$ ✓

$n=1$ $\qquad \sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$ ✓

И.П. $\quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i}_{} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$ ✓

Зад. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.е.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$ индуктивна деф.

Да се док., че $f(n) = n!$

<u>Индукция</u>

1в) 0

$f(0) = 1 \quad n!(1) = 1! = 1$

Нека за n е вярно (ИП)

$f(n) = n!$

$n+1$) $f(n+1) = n+1 \cdot \underbrace{f(n)}_{\text{ИП}} = (n+1)\, n! = (n+1)!$

Редицата на Фибоначи

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; n \geq 2 \end{cases}$$

$a_n \leq \phi^{n-1}$, $n \geq 1$, където $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

златното сечение

0 0 1 1 2

б.) $1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1-1} \geq 1$

и.п.) $a_k \leq \phi^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$ (ИП)

и.с.) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$\leq \phi^{n-1} + \phi^{n-2} = \phi^{n-2} \cdot (1+\phi) \leq \phi^{n-2} \cdot \phi^2 = \phi^n$

ϕ^n $\quad 1 + \phi \leq \phi^2$

$1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \overset{?}{\le} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$1+a \le 1+2a \le a^2$

$a^2-2a-1 = (a-1)^2-2$

$a^2 \ge 1+a$

$a^2-1-a \ge 0$

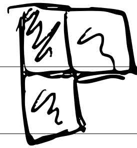
$\frac{2+1+\sqrt{5}}{2} \le \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \overset{?}{\le} \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

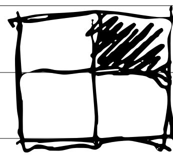
$12+4\sqrt{5} \underset{=}{\le} 12+4\sqrt{5}$

1,4

Зад. Тримино 

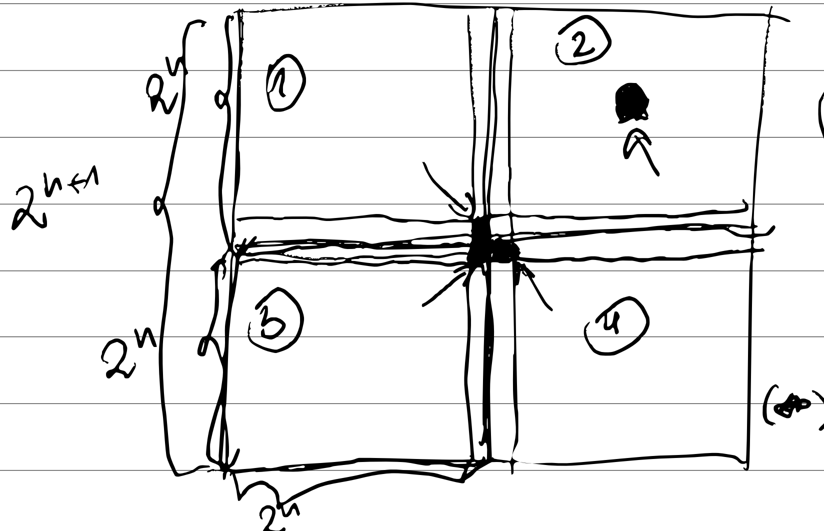
Док., че всяка квадратна дъска $2^n \times 2^n$, $n \geq 1$ с точно едно произволно липсващо квадратче може да се покрие изцяло с тримино.

$P(n) \leftrightharpoons$ „$2^n \times 2^n$ с едно липс. квадр. се покрива от тримино".

Uза: $n=1$  $2^1 \times 2^1$ V

ИП: за всички дъски с размерност $2^n \times 2^n$ и произв. липс. квадр. е в сила $P(n)$.

Стъпка: $2^{n+1} \times 2^{n+1}$



$2^{n+1} \times 2^{n+1}$

(и.х) за 1, 2, 3 и 4

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}$

то и (*) важи

да покрием.

$\underbrace{2^{n+1} = 2^n \cdot 2}$

HW Редица $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се определя по формулите:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 11 \\ a_n = 5 \cdot a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}, \; n > 3 \end{cases}$$

Док., че за $n \geq 1$, то $a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$

HW $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.ч.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ f(n-1) + n, & \text{за } n \geq 1 \end{cases}$$

Док., че $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$