Рекурентни уравнения

def | Рекурентна числова редица

Числова редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича рекурентна, ако съществува $k > 0$, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ за елементите на редицата е изпълн.:

$$\boxed{(*) \quad a_{n+k} + P_1(n)\, a_{n+k-1} + \dots + P_k(n)\, a_n = g(n)}$$

Ако $P_1(n) \dots P_k(n)$ са константи, то (*) се нарича линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти от ред k. Ако $g(n) = 0$, рек. отн. се нарича хомогенно. В противен случай се нарича нехомогенно.

b) Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти - хомогенни и нехомогенни

def | Рекурентно отношение от ред r

Нека $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са членове на редицата, където

$a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r})$, $n \geq r$.

рекурентно отношение от ред r

начални условия (r на брой)

! Отново: Това, което разбираме под решаване на лин. рек. отн. е да определим ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. $a_n = f(n)$.

(i) Линейни рек. отн. хомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ - начални условия

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_r \cdot a_{n-r}$, $n \geq r$

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

Алгоритъм:

1) Намираме характеристично уравнение на хомогенното ур.: $x^n - c_1 \cdot x^{n-1} - \dots - c_r \cdot x^{n-r} = 0$ $/ : x^{n-r} \neq 0$

$a_n - c_1 \cdot a_{n-1} - \dots - c_r \cdot a_{n-r} = 0 \rightarrow$

$P(x) = x^r - c_1 \cdot x^{r-1} - \dots - c_r \cdot x^0 = 0$, където

$P(x)$ се нарича характеристичен полином на рек. редица, а уравнението $P(x) = 0$ се нарича характеристично уравнение (делихме на $x^{n-r} \neq 0$)

2) Решаваме характеристичното уравнение и намираме корени $\{x_1, \dots, x_r\}_M \subseteq \mathbb{C}$ (не им знаем кратностите).

3) Имаме два случая за тези корени:

3.1) Всички корени са различни помежду им.

Тогава общият вид на рек. отн. е

$Q_n = x_1^n \cdot A_1 + x_2^n \cdot A_2 + \dots + x_r^n \cdot A_r$

3.2) Не всички са различни. Нека $t < r$.

Нека $x_s = x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{ik}$ за $s \leq t$

Общ вид:

$Q_n = x_1^n \cdot A_1 + \dots + (A_{i1} + A_{i2} \cdot n + \dots + A_{ik} \cdot n^{k-1}) \cdot x_s^n + \dots + A_t x_t^n$ за $t < r$

4) Правим система за аргументите $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ (да кажем, като в сл. 3.1))

$$\begin{cases} a_0 = A_1 \cdot x_1^0 + A_2 \cdot x_2^0 + \ldots + A_r \cdot x_r^0 \\ a_1 = A_1 \cdot x_1^1 + A_2 \cdot x_2^1 + \ldots + A_r \cdot x_r^1 \\ \ldots \\ a_{r-1} = A_1 \cdot x_1^{r-1} + A_2 \cdot x_2^{r-1} + \ldots + A_r \cdot x_r^{r-1} \end{cases}$$

5) Решаваме системата и получаваме остойностявания за $A_1, \ldots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор.

C1) Линейни рек. отн. хомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ - начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \ldots + c_r . a_{n-r}$, $n \geq r$

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

Алгоритъм:

1) Намираме характеристично уравнение на хомогенната част:

$a_n - c_1 . a_{n-1} - \ldots - c_r . a_{n-r} = 0 \to$

$P(x) = x^r - c_1 . x^{r-1} - \ldots - c_r . x^0 = 0$, където

$P(x)$ се нарича характеристичен полином на рек. редица, а уравнението $P(x) = 0$ се нарича характеристично уравнение (делихме на $x^{n-r} \neq 0$)

2) Решаваме характеристичното уравнение и намираме корени $\{x_1, \ldots, x_r\}_M \subseteq \mathbb{C}$ (не им знаем кратностите).

3) Имаме два случая за тези корени:

3.1) Всички корени са различни помежду си.

Тогава общият вид на рек. отн. е

$a_n = x_1^n . A_1 + x_2^n . A_2 + \ldots + x_r^n . A_r$

3.2) Не всички са различни. Нека $t < r$.

Нека $x_s = x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_k}$ за $s \leq t$

Общ вид:

$a_n = x_1^n . A_1 n^0 + \ldots + (A_{i_1} + A_{i_2} . n + \ldots + A_{i_k} . n^{k-1}) . x_s^n + \ldots + A_t x_t^n$ за $t < r$

4) Правим система за дадените $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ (за конкр. случай сл. 3.1)

$a_0 = A_1 . x_1^0 + A_2 . x_2^0 + \ldots + A_r . x_r^0$

$a_1 = A_1 . x_1^1 + A_2 . x_2^1 + \ldots + A_r . x_r^1$

$\ldots$

$a_{r-1} = A_1 . x_1^{r-1} + A_2 . x_2^{r-1} + \ldots + A_r . x_r^{r-1}$

5) Решаваме системата и получаваме остойностявания за $A_1, \ldots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор.

322) Да се реши рекурентното отн.:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 3 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

322)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

Проверка! Винаги! Работим само с частни случаи и, ако не сме внимателни, то могат да се появят чужди решения!

(322) Да се реши рекурентното отн:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \; a_1 = 3 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}, \; n > 1 \end{cases}$$

Реш:/ 1) $a_n - 3a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} = 0$

$x^n - 3 \cdot x^{n-1} + 2 \cdot x^{n-2} = 0 \quad / : x^{n-2} \neq 0$

$x^2 - 3 \cdot x + 2 = 0$

2) $x_1 = 2, \; x_2 = 1$

$\{2, 1\}_M$

3.1) $a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 1^n = A_1 \cdot x_1^n + A_2 \cdot x_2^n$

4) $\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 + A_2 \iff A_2 = 1 - A_1 \\ a_1 = 3 = 2 \cdot A_1 + A_2 \iff 3 = 2 \cdot A_1 + 1 - A_1 \end{cases}$

$\iff 2 = A_1$

$A_2 = -1$

5) $a_n = 2^{n+1} - 1 = f(n)$

302)

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2 \end{cases}$$

1) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1$

2) $\hookrightarrow \{1, 1\}_M$

3.2) $a_n = (A_1 + n \cdot A_2) \cdot x_1^n = (A_1 + n \cdot A_2) \cdot 1^n =$

$= A_1 + n \cdot A_2$

4) $$\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 \\ a_1 = 2 = A_1 + A_2 \end{cases} \rightarrow A_2 = 1$$

5) $a_n = n + 1 = A_1 + n \cdot A_2$

$A_1 = 1 = A_2$

320) Да се реши всяко от рек. отн., съгласно дадените нач. условия:

a) $a_1 = 8,\ a_2 = 18$
$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$

b) $a_0 = 4,\ a_1 = 7$
$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$

c) $a_0 = 10,\ a_1 = 16$
$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

d) $a_0 = 1,\ a_1 = 1$
$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

e) $a_0 = 1,\ a_1 = 8$
$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

f) $a_0 = 1,\ a_1 = 2$
$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n$

g) $a_0 = -4,\ a_1 = 5$
$a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$.

f) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \end{cases}$

1) $x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0$

2) $x_1 = 3\ ,\ x_2 = -1$

$\hookrightarrow \{3, -1\}_M$

$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$

3.1) $a_n = A_1 \cdot x_1^n + A_2 \cdot x_2^n = A_1 \cdot 3^n + A_2 \cdot (-1)^n$

4) $\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 + A_2 \iff A_2 = 1 - A_1 \\ a_1 = 2 = 3 \cdot A_1 - A_2 \iff 2 = 3 \cdot A_1 - 1 + A_1 \end{cases}$

$\iff 3 = 4 \cdot A_1 \iff A_1 = 3/4$

$A_2 = 1/4$

5) $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{4} + \dfrac{(-1)^n}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot \left(3^{n+1} + (-1)^n\right)$

(ii) <u>Линейни рек. отн. нехомогенни с постоянни коеф.</u>

Дадено:

$a_0, \dots, a_{r-1}$ – начални условия

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_r \cdot a_{n-r} + g(n)$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, \dots, r\}$, а $g(n) \neq 0$

$g(n)$ се нарича нехомогенна част

За реш. на нехом. лин. рек. отнош.
с пост. коеф. то трябва $g(n)$
да се представи така:

$$g(n) = e_1^n . P_1(n) + e_2^n . P_2(n) + \dots + e_s^n . P_s(n)$$

където e_i са различни едно от
друго константи, а $P_i(n)$ е
полином на n от степен d_i
за $i \in \{1, \dots, s\}$.
Алгоритъмът за решаване е почти
същият: на стъпка 1) и 2) се
грижим за решението на
хомогенното рек. и в края на
стъпка 2) добавяме (d_1+1) еднакви
корена $= e_1$, (d_2+1) еднакви корена
$= e_2$, ..., (d_s+1) еднакви корена
$= e_s$ - корени на нехомогенното
рек. Оттам нататък е същото

зад

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{1}_{\text{нех.е.}} \end{cases}$$

зад

$$\begin{cases} a_0 = 4,\ a_1 = -11,\ a_2 = 41 \\ a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2.(-1)^n + \\ \quad + (-2)^{n+3} \end{cases}$$

зад

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 16 \\ a_{n+1} = 8a_n - 15a_{n-1} + 7n^2 5^n + 4^n - \\ \quad - 6n.3^n - 8n^2 + 19 + 2.5^n \end{cases}$$

(302) $\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{1}_{} = g(n) \end{cases}$

$\underbrace{a_n = 2a_{n-1}}_{\text{не х.т.}}$

1) $x = 2$

2) $\hookrightarrow \{2\}_M \longrightarrow \cup \to \{1, 2\}_M$

$g(n) = 1^n \cdot n^0 \rightsquigarrow \{1\}_M$

3) $a_n = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n = A_1 + A_2 \cdot 2^n$

4) $\begin{cases} a_0 = 0 = A_1 + A_2 \iff A_2 = -A_1 \\ a_1 = 1 = A_1 + 2A_2 \iff A_2 = 1, \ A_1 = -1 \end{cases}$

5) $a_n = -1 + 2^n = 2^n - 1$

309

$a_0 = 4,\ a_1 = -11,\ a_2 = 41$

$a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2\cdot(-1)^n + (-2)^{n+3} = g(n)$

1) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$

2) $x_1 = -1,\ x_2 = x_3 = -2 \rightsquigarrow \{-1, -2, -2\}_M$

$g(n) = 2\cdot\underbrace{(-1)^n}_{e_1^n}\cdot n^0 + (-8)\cdot\underbrace{(-2)^n}_{e_2^n}\cdot n^0$

$\to \{-1, -2\}_M \longrightarrow \cup$

$\{-1, -1, -2, -2, -2\}_M$

3.2) $a_n = (A_1 + n\cdot A_2)\cdot(-1)^n +$

$(B_1 + n\cdot B_2 + n^2\cdot B_3)\cdot(-2)^n$

3a)

$a_0 = 0,\ a_1 = 16$

$a_{n+1} = 8a_n - 15a_{n-1} + 7n^2 5^n + 4^n -$
$- 6n.3^n - 8n^2 + 19 + 2.5^n$ $\quad g(n)$

1) $x^2 - 8x + 15 = 0$

2) $x_1 = 3,\ x_2 = 5 \rightsquigarrow \{3,5\}_M$

$$g(n) = (7.n^2 + 0.n^1 + 2.n^0).5^n +$$
$$((-8).n^2 + 0.n^1 + 19.n^0).1^n +$$
$$n^0.4^n +$$
$$((-6).n^1 + n^0.0).3^n$$

$\{5,5,5,1,1,1,4,3,3\}_M \to \cup$

3.2) $\{5,5,5,5,1,1,1,3,3,3,4\}_M$

$a_n = (A_1 + A_2.n + A_3 n^2 + A_3 n^3).5^n + (B_1 + B_2.n + B_3 n^2).1^n +$
$+ (C_1 + C_2.n + C_2.n^2).3^n + D_1.4^n$

302)

a) $\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + n \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = -3 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 27.5^n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = -a_{n-1} + 3.2^{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2^n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 2, \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n + 5.2^{n+1} \end{cases}$

③ Особени случаи

a) когато свободния член не е квазиполином

при: $a_n = a_{n-1} + \sqrt[3]{n}$, $a_1 = 6$

b) когато коеф. са непостоянни

при: $a_n = n\, a_{n-1}$, $a_1 = 1$

c) когато има променлива дължина на историята

при: $a_1 = 20$, $a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

В курса по ДАА ще се научите и тях да ги решите.

309 Намерете формула за всяка от сумите:

a) $1+2+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

b) $2+8+24+\dots+n.2^n$

c) $2+4+\dots+2n = n.(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

d) $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$,

e) $5+7+9+\dots+(2n+3)$

f) $3+7+11+\dots+(4n-1)$

g) $2+6+10+\dots+(4n-2)$

h) $1+5+9+\dots+(4n+1)$

b) $2+8+24+\ldots+n.2^n$, $n \in \mathbb{N}$

$n=0 \to a_0 = 0$

$n=1 \to a_1 = 1.2^1 = 2$

$n=2 \to a_2 = 1.2^1 + 2.2^2 = 2+8 = 10$

$n=3 \to a_3 = 1.2^1 + 2.2^2 + 3.2^3 = \ldots$

$n>0 \to \overset{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=0}^{n} i.2^i = \underbrace{a_{n-1}}_{\sum_{i=0}^{(n-1)} i.2^i} + n.2^n$

$a_n = a_{n-1} + n.2^n \to o(n) = n^1 . \underbrace{2^n}_{e_1^n}$

1) $x = 1$

2) $\to \{1\}_M$ $\cup$ $\{2,2\}_M$

$\{1,2,2\}_M$

3.2) $a_n = A_1 + (A_2 + n.A_3).2^n$

4) $Q_0 = 0 = A_1 + A_2$

$Q_1 = 2 = A_1 + A_2 . 2 + A_3 . 2$ —

$Q_2 = 10 = A_1 + A_2 . 4 + A_3 . 8$ —

$$\begin{cases} 2 = A_2 + 2A_3 \\ 8 = 2A_2 + 6A_3 \;(/2) \Leftrightarrow 4 = A_2 + 3A_3 \end{cases}$$ —

$\Leftrightarrow$

$A_3 = 2$

$A_2 = -2$

$A_1 = 2$

5) $Q_n = 2 + (-2 + n.2).2^n = \sum_{i=0}^{n} i.2^n$

Интересни приложения

зад 1) Намерете рек. отношение и начални условия за броя на двоичните думи с дължина n, в които няма две съседни нули. Намерете формула за този брой. Определете броя на думите с дължина 10.

$\Sigma = \{0, 1\}$, нека за $n \in \mathbb{N}$

$\Sigma_n \leq \Sigma^n$, $\Sigma_0 = \{\varepsilon\}$ празна дума <>

$\Delta_n \subseteq \Sigma_n$, $\Delta_n = \{w \mid w \in \Sigma_n \; \& \; \neg(\exists u \exists v (w = u00v))\}$

думи

Нека $a_n \leq |\Delta_n|$

$\Sigma_0 = \{\varepsilon\} \to \Delta_0 = \{\varepsilon\} \to a_0 = 1$

$$\Sigma_1 = \{1, 0\} \rightsquigarrow \Delta_1 = \{1, 0\} \rightsquigarrow Q_1 = 2$$

$$\Sigma_2 = \{00, 01, 10, 11\} \rightarrow \Delta_2 = \{01, 10, 11\} \rightsquigarrow Q_2 = 3$$

$$\ldots \quad |\Sigma_n| = 2^n$$

$w \in \Delta_n ? \quad n \geq 2$

$\hookrightarrow w \equiv 1 w_1, \quad w_1 \in \Delta_{n-1} \rightarrow A_n$

$\hookrightarrow w \equiv 01 w_1, \quad w_1 \in \Delta_{n-2} \rightarrow B_n$

$$A_n \cap B_n = \emptyset, \quad A_n \cup B_n = \Delta_n$$

$$\underbrace{|\Delta_n|}_{Q_n} = |A_n| + |B_n| = \underbrace{|\Delta_{n-1}|}_{Q_{n-1}} + \underbrace{|\Delta_{n-2}|}_{Q_{n-2}}$$

$$\begin{cases} Q_0 = 1, \ Q_2 = 2 \\ a_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Φιβονάτσι

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$Q_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot A_2$$

$$\left| \begin{array}{l} Q_0 = 1 = A_1 + A_2 \iff A_2 = 1 - A_1 \\ Q_1 = 2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot A_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot A_2 \iff \end{array} \right.$$

$$4 = (1+\sqrt{5}) \cdot A_1 + (1-\sqrt{5})(1-A_1) \iff$$

$$4 = \cancel{A_1} + A_1 \cdot \sqrt{5} + 1 - \cancel{A_1} - \sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot A_1$$

$$\iff \frac{3+\sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = A_1 \leadsto A_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2 \cdot \sqrt{5}}$$

$$Q_n = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2 \cdot \sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2 \cdot \sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$Q_7 = 21$, $Q_8 = 34$, $Q_9 = 55$, $Q_{10} = 89$

Зад 3 Колко са думите от n десетични цифри с четен брой нули?

Зад: може и 00123.

$|\Sigma| = 10$

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ $\#_i(\omega)$ - брой на срещанията на буквата i в ω $i \in \{0, \dots, 9\}$

$\Sigma_n = \Sigma^n$

$A_n = \{\omega \mid \omega \in \Sigma_n \text{ \& } ``\#_0(\omega) \text{ е четно число"}\}$

$a_n \leftrightharpoons |A_n|$

$n = 0 \rightsquigarrow \Sigma_0 = \{\varepsilon\} \to A_0 = \{\varepsilon\} \to a_0 = 1$

$n = 1 \rightsquigarrow \Sigma_1 = \Sigma \to A_1 = |\Sigma| - \underbrace{1}_{\text{заради } 0} \to a_1 = 9$

$n = 2 \rightsquigarrow \Sigma_2 = \Sigma^2 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow a_2 = 9.9 + 1 = 82$

00, $\underbrace{01, 02, \dots, 09}_{\text{няма } 9}$, 10, 11, 12, ..., 20, 21, ..., 30, ...

$w \in \Delta_n$?

$\hookrightarrow w = 0 w_1 \ , \ w_1 \in \Sigma_{n-1} \setminus \Delta_{n-1} \} \ 10^{n-1} - a_{n-1}$

$\cap$

$\hookrightarrow w = d w_1 \ , \ d \in \Sigma \setminus \{0\} \ , \ w_1 \in \Delta_{n-1} \} \to 9 . a_{n-1}$

$\emptyset =$

$\cup = \Delta_n$

$a_n = 10^{n-1} - a_{n-1} + 9 . a_{n-1} = 10^{n-1} + 8 . a_{n-1}$

$a_0 = 1 \ , \ a_1 = 9$

$10^{n-1} = \dfrac{10^n . n^0}{10}$

$\{8\}_M \cup \{10\}_M$

$\{8, 10\}_M$

$a_n = A_1 . 8^n + 10^n . A_2$

$1 = A_1 + A_2 \iff A_2 = 1 - A_1$

$9 = 8 . A_1 + 10 . A_2 \iff 9 = 8 . A_1 + 10 - 10 A_1 \iff$

$-1 = -2 . A_1 \iff A_1 = \frac{1}{2}$

$A_2 = \frac{1}{2}$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(8^n + 10^n\right)$$

Зад 3) а) Докажете че числото
$(3+\sqrt{5})^{2020}+(3-\sqrt{5})^{2020}$ е
цяло и намерете цифрата на
единиците му.
b) Намерете първите 4 цифри
(най-левите) на числото (както
и броя на цифрите му.

$a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$

★ периодични редици

→ стандартен
вид на числото
да намерите

Задача Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Да се реши функционалното уравнение

(*) $f(f(x)) = 6x - f(x)$ за $x \in \mathbb{N}$ произв.

$a_0 = x_0 \in \mathbb{N}$ произволно

$a_1 = f(x_0)$

...

$a_n = f(f(\dots(f(x_0))\dots))$

$\to a_n = f(a_{n-1})$