Представяне на релации

Нека $R \subseteq A^2$, където $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$

и $\langle a, b\rangle \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \mid b$

a) представяне на R чрез таблица/матрица $M(|A| \times |A|)$ с елементи m_{ij}, където $m_{ij} = \begin{cases} 0, & \langle i, j\rangle \notin R \\ 1, & \langle i, j\rangle \in R \end{cases}$

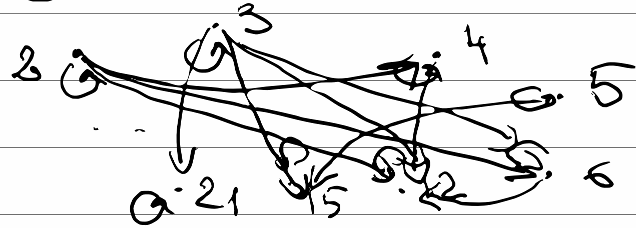
$1 \leq i \leq |A|$, $1 \leq j \leq |A|$

a\b	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0	0
12	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	1

b) представяне на R чрез изброяване на елементите на R (м-во)

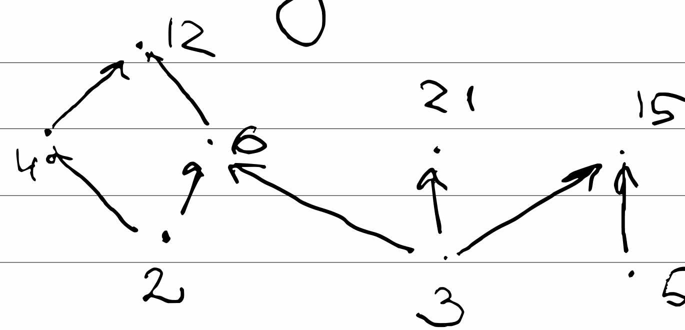
$R = \{\langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \ldots, \langle 21,21\rangle, \langle 2,4\rangle, \ldots, \langle 2,12\rangle, \ldots\}$

c) представяне на R чрез граф:



d) представяне на R чрез диаграма на Хасе:

Особености: граф, в който примките не се изобр., ако има стрелка $\langle a,b\rangle$ и $\langle b,c\rangle$, то не се изобразява стрелката $\langle a,c\rangle$, стрелките се заменят с отсечки (в някои случаи)



Задачи за релации

① **Какви с-ва притежават релациите?**

a) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow a+b$ е четно

b) $R \subseteq \mathbb{N}^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow a \mid b$

c) $R \subseteq (\mathbb{Z}^2)^2$, където
- $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in R \Leftrightarrow a+d = b+c$
- $\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle \in R \Leftrightarrow a.d = b.c$

d) $R \subseteq \mathbb{N}^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})[a+k=b]$

e) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{Z}$

f) $R \subseteq (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow a \subseteq b$

g) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, където
$\langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow b = a^2$

② $R \subseteq (\Sigma^*)^2$, където
$R = \{\langle u, v\rangle \mid |u| = |v|\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

рел. на еквив. ли е R?

def <u>Обратна релация и композиция</u>

$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$

$R \circ S = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in R \ \& \ \langle z, y\rangle \in S)\}$

$$\begin{cases} R^0 = Id_A \\ R^{n+1} = R^n \circ R, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

* Може да комбинираме релации, за да получаваме нови, благодарение на теор. множ. операции.

* Може да конструираме рефл., сим., транзит. затваряне:

не конкурира(т) операциите обикн.

$r(R) = R \cup Id_A$

$s(R) = R \cup R^{-1}$ ← чупи

$R^+ = t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$, за $|A| = n$

$R^* = rt(R) = \bigcup_{i=0}^{n} R^i$

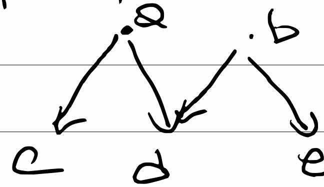
$R^+ = R^* \circ R$, $R^* = r(R^+)$

③ Какво е рефл., сим. и транз. затв. на:

a) $R_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle a, b\rangle \in R_1 \iff a < b$

b) $R_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, $\langle a, b\rangle \in R_2 \iff a \neq b$?

* пример за мин. елем.



a, b мин. елем., но не са н.м.е.

def/ формули за брой на елементи на м-ва

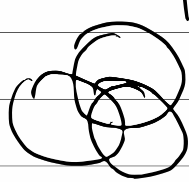
1) $|A \cup B| = |A| + |B|$

→ 2) $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$, ако

$A_i \cap A_j = \emptyset$ за $1 \le i < j \le n$

→ 3) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

→ 4) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$



5) $|A \setminus B| = |A| - |B|$, за $B \subseteq A$

→ 6) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

→ 7) $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

8) $|A \Delta B| = |A| + |B|$, за $A \cap B = \emptyset$

→ 9) $|\overline{A}| = |\mathcal{U}| - |A|$

→ 10) $|A \times B| = |A| . |B|$ и

→ 11) $|A_1 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1} |A_i|$

→ 12) $|A^n| = |A|^n$

→ 13) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

④ Нека фикс $B \subseteq A$.
Деф. R в/у $\mathcal{P}(A)$:
$R = \{ \langle X, Y \rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid (X \Delta Y) \subseteq B \}$.
Да се R е рел. на екв. и за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ съществува точно едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

⑤ СУСЕ за ени $\langle A, < \rangle$:
• $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има мин. ел."$]$
• не е вярно, ее безкр. строго намаляв. редица $x_1 > x_2 > \ldots$

def| фундирана наредба, добра наредба

$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \to (\exists m \in X) \neg(\exists y \in X)[\langle y, m\rangle \in R]]$

всяко непр. м-во притт. поне един мин. елем.

$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \to (\exists m \in X)(\forall y \in X)[\langle m, y\rangle \in R \vee m = y]]$

най-малък елемент

(6) $\langle Fin(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ фундирано? добре наредено?

Функции

Специален вид релация: $f \subseteq A \times B$

изпълнява условието $f: A \to B$

$\forall x \forall y \forall y' (\langle x, y\rangle \in f \;\&\; \langle x, y'\rangle \in f \Rightarrow y = y')$

з.едно $X \subseteq A$ свърз. най-много на едно $y \in B$

Частични: $Dom(f) \subseteq A$ $\to f: A \rightsquigarrow B$

Тотални: $Dom(f) = A$ $f: A \to B$ казва

$Dom(f) \leftrightharpoons \{x \mid (\exists y \in B)[f(x) = y]\}$

$Range(f) \leftrightharpoons \{y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y]\}$

Рисунки

Специални ф-ции:

a) инекции

$\forall x \forall x' \forall y (\langle x, y\rangle \in f \ \& \ \langle x', y\rangle \in f \Rightarrow x = x')$

„f не слепва точки"

b) сюрекции

$\forall y \exists x (\langle x, y\rangle \in f)$

$Range(f) = B$

c) биекции = сюрекция и инекция

Нека f^{-1} е обр. рел: $f^{-1}(y) = x \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x) = y$

- f инекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е ф-я
- f е биекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е биекция $B \to A$
- f е биекция $\Leftrightarrow$ има g ф-я, т.ч. $f \circ g = Id_B$ и $g \circ f = Id_A$

Образ на м-во под ф-я: $f[X] \subseteq B$

Праобраз: $f^{-1}[Y] \subseteq A$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$

Какви са ф-циите?

1) $f(x) = 2x$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

2) $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3) $f: P^{\mathbb{N}} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ и $f(x) \leq \min_{\mathbb{N}} x$

4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$

5) $f: \{0, 1, \dots, 8\} \to \{0, 1, \dots, 8\}$, $f(x) = 2x \bmod 8$

6) $f: (0; 1) \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

7) $f: \mathbb{R}^+ \to (0; 1)$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

3) $f: (0; 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x-1)} - 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ \dfrac{1}{2x+1} - 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Мощност на м-ва

Изброими и неизброими м-ва

М-вата A и B имат една и съща мощност/кардиналност, ако има биекция м/у тях

М-вото A е **крайно**, **ако**
има ест. число n т.ч. има
биекция м/у A и $\{1, \ldots, n\}$
или $A = \emptyset$)

Тогава $|A| = n$ за $n \geq 0$
се нарича броя на елем. на A.

М-вото A е изброимо безкр., ако
има биекция м/у A и $\mathbb{N}$.

М-вото A е изброимо, ако е
или крайно, или изобр. безкр.

Прим/ <u>изброими и неизброими м-ва:</u>

a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ -> изобр.

b) $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -> неизобр.

c) $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизобр.

d) Σ^* за Σ крайно е изобр.

e) $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ е неизобр. -> неизобр. много езици.

3зад Док, че $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

Зад. Док, че м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^-$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

* Важно да се използва композиция на две биекции е биекция !

$f_1 : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, \quad f_1(x) = 2x$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-, \quad f_2(x) = -(x+1)$

$$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ even} \\ -\frac{(x+1)}{2}, & x \text{ odd} \end{cases}$$

$h' : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1, \quad h'(x) = 2x+1$

$$f_4 \leq h' \circ f_3, \quad f_4(x) = \begin{cases} x+1, & x \text{ even} \\ -x, & x \text{ odd} \end{cases}$$

$h'' : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}, \quad h'(x) = 2x$

$$f_5 \leq h'' \circ f_3, \quad f_5(x) = \begin{cases} x, & x \text{ even} \\ -(x+1), & x \text{ odd} \end{cases}$$