Основни комбинаторни конфигурации с или без наредба, с или без повторение

Основна задача:

Дадени са ни n обекта $a_1, \ldots, a_n$ и искаме да изберем $b_1, \ldots, b_k$ (k от тях).

„Изборът" ни задава ф-я f, $f: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

По колко начина можем да направим този избор, т.е. колко са ф-циите f?

① **Вариации с повторение**

Има значение наредбата

a_i – различими; b_j – различими;

f – произволна

Т.е. можем да повтаряме избора ни и ни вълнува наредбата.

При различими b_j, то f_1 и f_2 са различими

f_1	f_2
$1 \to 2$	$1 \to 3$
$2 \to 3$	$2 \to 2$

за b_1 за b_2 за b_k

Отг: $\underbrace{n.n. \ldots n}_{k \text{ пъти } n} = n^k = |\tilde{V}_n^k|$

(2) Вариации без повторение

Има значение наредбата.

a_i - различими; b_j - различими;

f - инекция.

Т.е. вълнува ни наредбата и не повтаряме.

Отг: $n.(n-1).(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = |V_n^k|$

за b_1 за b_2 за b_k

(2') Пермутации без повторение

Като (2), но $k=n$.

Тогава $|P_k| = n.(n-1)\ldots 1 = n!$

(3) Комбинации без повторение

Няма значение наредбата.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - инекция

Тогава в примера за f_1 и f_2

$\underbrace{f_1}$ и $\underbrace{f_2}$, то f_1 не се различава от f_2.

$1 \to 2$ $\quad$ $1 \to 3$

$2 \to 3$ $\quad$ $2 \to 2$

Т.е. не различаваме кое е първо и кое е второ.

$$|C_n^k| = \frac{|V_n^k|}{|P_k|} = \frac{n.(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} =$$

начини за пермутиране k елемента (не различаваме наредбата)

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

биномен коеф. начини да вземем k елемента измежду n-во съвършенно n елемента.

④ Комбинации с повторение

Не ни интересува наредбата и можем да повторим.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - произволна

прим/ $n = 3$ $a_1\ a_2\ a_3$

$k = 2$ $b_1\ b_2$

$\{a_1, a_2\}$ $\{a_1, a_1\}_м$
$\{a_1, a_3\}$ $\{a_2, a_2\}_м$ мулти
$\{a_2, a_3\}$ $\{a_3, a_3\}_м$ м-во

Тогава нека x_i - брой пъти, в които сме избрали a_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$.

Трябва да му намерим броя решения. Колко вектора $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ има т.ч. $x_i \geq 0$ за $i \in \{1, \dots, n\}$?

Нека $x_i' = x_i + 1$.

Тогава $x_1' + \dots + x_n' = k + n$ т.е. всеки елемент е избран поне веднъж: $x_i' \geq 1$ за $i \in \{1, \dots, n\}$.

имат еднакъв брой решения

Тогава съпоставяме вектор:

$$\langle x_1', x_2', \dots, x_n' \rangle \xrightarrow[f]{} \langle \underbrace{x_1'}_{y_1}, \underbrace{x_1' + x_2'}_{y_2}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i' = n + k}_{y_n} \rangle$$

~~частични суми~~ нарушавани ~~суми~~ (строго растящи вектори)

Твърдим, че g е биекция

- <u>сюрекция</u>

  1ва комп. (стара) = 1ва комп. (нова): $x_1' = y_1$

  $x_i' = y_i - y_{i-1}$, за $i > 1$

- <u>инекция</u>

Нека $\langle x_1', \dots, x_n' \rangle \neq \langle t_1', \dots, t_n' \rangle$

като $x_i' \neq t_i'$ е най-лявата позиц. на различие.

Тогава $y_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} x_k' = \sum_{k=1}^{i-1} t_k'$ и

$$\underline{y_{i-1}} + x_i' \neq \underline{y_{i-1}} + t_i'$$

Т.е. g е биекция.

Тогава броя решения на оригин. ур-е е същия като броя реш. на това ур-е.

$$\langle y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, n+k \rangle$$

$$y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < n+k$$

$x_i' > 0$

за всеки техен избор получаваме вектор

т.е.

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{k+(n-1)}{k} = \left|\tilde{C}^{\,n-1}_{n+k-1}\right|$$

защото редицата е растяща и

$$y_{n-1} = x_1' + x_2' + \dots + x_{n-1}' \le n+k-1 < n+k < y_n$$

заради $x_n' \ge 1$

Пермутации с повторение

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$$

$$\tilde{P}_n^{k_1,\dots,k_m}(k_1,\dots,k_m) = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}$$

колко пъти се повтаря a_i за $i \in \{1,\dots,m\}$

Зад. Колко са четирицифрените цели положителни десетични числа, които могат да се образуват с цифрите от това м-во $\{0,1,2,3,4,5\}$, т.е.:

a) в записа на числото няма повтарящи се цифри

b) в записа на числото може да има повтарящи се цифри

c) в записа на числото може да има

повтарящи се цифри и числата са нечетни.

a) $U = \{c_1c_2c_3c_4 \mid c_1 \neq 0$ &
$(\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\})$
$[i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j]\}$

$\underbrace{c_1}_{5} \cdot \underbrace{c_2}_{5} \cdot \underbrace{c_3}_{4} \cdot \underbrace{c_4}_{3}$

без 0   без c_1 без c_1, c_2 без c_1, c_2, c_3

по принцип на умн., то

Отг: 5.5.4.3

b) $U = \{c_1c_2c_3c_4 \mid c_1 \neq 0\}$

Отг: 5.6.6.6

без 0

c) $U = \{c_1c_2c_3c_4 \mid c_1 \neq 0$ & $c_4 \in \{1, 3, 5\}\}$

Отг: 5.6.6.3

без 0   без 0, 2 и 4.

зад. a) Колко са двуцифрените числа съставени от цифрите {1, 3, 5, 7, 3}?

Отг: Числата се различават според техния ред т.е. $23 \neq 32$ и т.н. т.е. имаме вариации с повторение

$$\tilde{V}_5^2 = 5^2 = 25$$

b) Ако цифрите са написани на картончета? → числата са вариации без повторение

$$V_5^2 = 5.4 = 20$$

зад. По колко начина можем да подредим в редица 2 зелени, 3 червени и 4 сини топки?

Пермутации с повторение:

$$P_9(2;3;4) = \frac{9!}{2!3!4!}$$

зад. a) По колко начина можем да разпределим 10 ябълки (различни) м/у 3 деца?

зад.: Важно е не само колко ябълки, а и кои ябълки (различни са).

$Я_1 \quad Я_2 \quad Я_3 \quad \ldots \quad Я_{10}$

$д_1$

$д_2$

$д_3$

Имаме пермутации с повторение

$\tilde{V}_3^{10} = 3^{10}$

b) по колко начина хонорар от 10 метални левчета може да бъде разпределен м/у 3-ма души?

Зад: може и 0 лв. да получи човек.

Лв. са неразличими т.е. получаваме редици, в които не се интересуваме от реда, а само колко пъти се среща даден човек т.е. търсим решение на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

за $x_i \in \mathbb{N}$ за $i \in \{1,2,3\}$.

$$\tilde{C}^2_{\underbrace{10+(3-1)}_{12}} = \binom{10+(3-1)}{(3-1)}$$

c) Както b), но сега всеки трябва да получи поне 2 лв.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

като $x_i \geq 2$ за $i \in \{1, 2, 3\}$.

Нека $y_i = x_i - 2$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Тогава

$$y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 = 10$$

$$y_i \geq 0, \ i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

т.е. $C^{3-1}_{4+(3-1)} = \binom{4+(3-1)}{3-1}$.

---

322) Вероятност $= \dfrac{\#\text{ хубави случаи}}{\#\text{ всички случаи}} \in [0;1]$

При игра на бридж получавате 13 карти от общо 52. Какво е вероятността да получите:

a) точно 2 дами?

b) поне 2 дами?

c) поне 1 дама

Всички изходи C_{52}^{13} – няма значение как са подредени картите в ръката ни, само кои са!

a) Добри случаи: $C_4^2 \cdot C_{48}^{11}$

2 дами от 4   останалите

Вероятност $= \dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^{11}}{C_{52}^{13}}$

b) Добри случаи: $C_4^2 \cdot C_{48}^{11} + C_4^3 \cdot C_{48}^{10} + C_4^4 \cdot C_{48}^{9}$

Вероятност $= \dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^{11} + C_4^3 \cdot C_{48}^{10} + C_4^4 \cdot C_{48}^{9}}{C_{52}^{13}}$

c) начин 1: добри случаи:

$C_4^1 \cdot C_{48}^{12} + C_4^2 \cdot C_{48}^{11} + C_4^3 \cdot C_{48}^{10} + C_4^4 \cdot C_{48}^{9}$

вероятност = ...

начин 2: лоши случаи: $C_4^0 \cdot C_{48}^{13}$

Вероятност $= \dfrac{\overbrace{C_{52}^{13} - C_4^0 \cdot C_{48}^{13}}^{\text{добри}}}{C_{52}^{13}}$

322) По колко начина n елемента могат да се подредят:

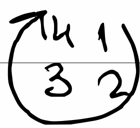
а) в редица;

б) в кръг, ако различаваме двете посоки; ↻ ≠ ↺

в) в кръг, ако не различаваме двете посоки: ↻ = ↺

а) $P_n = n!$

б) на всяко подредба в кръг съответстват n подредби в редица



1, 2, 3, 4
2, 3, 4, 1
3, 4, 1, 2
4, 1, 2, 3

Значи $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

в) наполовина на б)

т.е. $\frac{(n-1)!}{2}$

↑ все тая посоката

(328) По колко начина 10 души могат да се наредят в редица, така че трима приятеля да са един до друг?

Нека да пакетираме 3-мата приятели → като един елемент ги гледаме. Така имаме 8 елемента, които да пермутираме т.е. 8!. Но в пакета приятелите могат да се разместват, т.е. има още 3! Така става 8!.3!

Обобщено: n души в редица, т.е. m приятели да са един до друг:

$$P_{n-m+1} . P_m = (n-m+1)! . m!$$

---

(329) Брой пътища от долния ляв до горния десен ъгъл? На всяка стъпка или ↑ или →

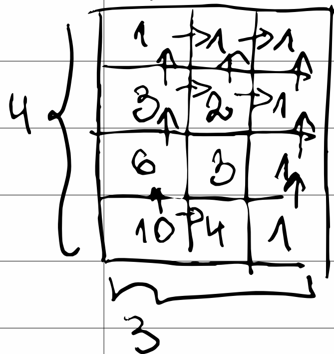
а)

2	▨	1
1 →	1 →	1
2 →	1	▨
3 →	1 →	0

има забранени клетки

Реш: с динамично прогр.

b) няма задраскани клетки



Начин 1: с ДП

Начин 2: Всеки път има 5 стъпки, от които 3 нагоре и 2 надясно т.е. достатъчно е да посочим позициите → (или ↑).

$\{2, 5\}$ т.е. ↑→↑↑→

→ $C_5^2 = C_5^3 = 10$.

c) няма задраскани клетки и таблицата е $m \times n$.

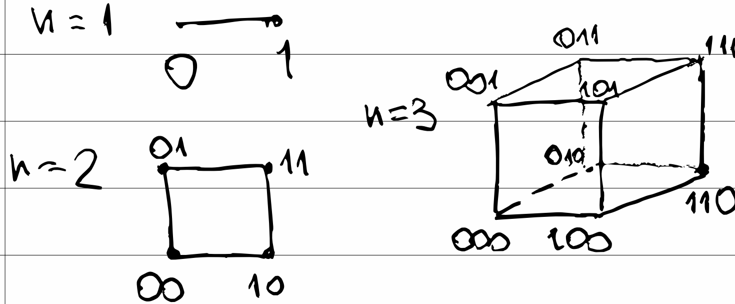
пътища: $C_{m+n-2}^{n-1} = C_{m+n-2}^{m-1}$

---

302 Хиперкуб (n-мерен куб):

- върхове: всички наредени n-орки от 0-ли и 1-ци;
- ребра: има м/у върхове, които се различават само в една позиция

прим:



a) Колко върха има хиперкуба?

$V_n^2 = 2^n$

b) Колко ребра има хиперкуба?

Всеки връх има n ребра влизащи в него. Т.к. има n битови позиции, които могат да се switch-ват, за да получим ребро.

Т.к. реброто се брои два пъти: на влизане и излизане, то получаваме

$\frac{n.2^n}{2} = n.2^{n-1}$ ребра

c) 000
$\swarrow$ 1 цр
001
$\swarrow$ 2 цифри
010
$\swarrow$ 3 цифри
100

Подредете n-торките, т.е. всеки две съседни n-торки (а също и първо и последно) да се различават само в 1 позиция.

С индукция n

База: $n=1$, то $0 \to 1$

Стъпка: От $n-1$ към n.

Дописваме отразено огледално копие на подредбата в оригинала (т.е. лявата половина) и добавяме 0 пред всеки член, а в копието добавяме 1-ца пред всеки член.

6) Принцип на включване и изключване

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| +$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{(n+1)} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Зад. В група от 20 студента футбол играят 9, волейбол - 7 и 4 - и волейбол и футбол.
Колко студента не играят нито футбол, нито волейбол?

$$|Ф \cup В| = \underbrace{|Ф|}_{9} + \underbrace{|В|}_{7} - \underbrace{|Ф \cap В|}_{4} = 12$$

12 играят поне един от двата спорта

→ $20 - 12 = 8$ не играят физ.

(329) В група от студенти всеки знае поне един чужд език, като 13 знаят английски, 25 - френски, 21 - немски, 7 - англ. и немски, 13 - англ. и френски, 9 - френски и немски, 3 - англ, фр. и нем. Колко студенти има в групата.

От това, че всеки знае поне един език знаем

$|U \setminus (Ф \cup Н \cup А)| = 0$

$|Ф \cup Н \cup А| = |Ф| + |Н| + |А| -$

$|Ф \cap Н| - |Ф \cap А| - |А \cap Н| +$

$|А \cap Ф \cap Н| = \underbrace{13 + 25 + 21}_{65} \underbrace{- 7 - 13 - 9}_{-29} +$

$\underbrace{+3}_{68} = 39$

т.е. $|U \setminus (Ф \cup Н \cup А)| = |U| - 39 = 0$

$Ф \cup Н \cup А \subseteq U$

т.е. $|U| = 39$. принцип на включване

(зад) Да се намери броят на m-цифр. цели неотрицателни десетични числа, които съдържат всяка от цифрите $0, 1, \dots, 9$ поне веднъж, като се допуска число да започва с нула.

$A = \{0, 1, \dots, 9\} \to \overline{\overline{A}} = 10$

Колко са m-цифр. цели неотр. числа?

Точно 10^m (пермутации с повтор.)

Нека U е м-вото от всички m-цифрени цели неотр. числа

2 вида — всяка цифра се среща в записа на числа) A
— поне една цифра не се среща в записа на числа) B

разбиване

$A \cup B = U$ и $A \cap B = \emptyset$.

$B = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_9$ като

B_i – не се среща цифрата i.

Тогава

$$|A| = |U \setminus B| =$$

$$= \left|U \setminus \bigcup_{i=0}^{9} A_i\right| = |U| - \Big(\sum_{i=0}^{9} |A_i| -$$

$$\sum_{0 \le i < j \le 9} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{10+1} \left|\bigcap_{i=0}^{9} A_i\right| .$$

Сега $|U| = 10^n$

$|A_i| = 9^n, \ i = 0, \ldots, 9$

$|A_i \cap A_j| = 8^n, \ 0 \le i < j \le 9$

$\ldots$

$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_9}| = (10-9)^n, \ 0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_9 \le 9$

$|A_0 \cap \ldots \cap A_9| = \left|\bigcap_{i=0}^{9} A_i\right| = (10-10)^n = 0^n = 0$

Т.е. $$|A| = \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \binom{10}{i} \cdot (10-i)^n$$

(30з) Да се намери броят на разположенията на числата $1, 2, \dots, n$ в n позиции, при които никое число $i \in \{1, \dots, n\}$ не е на позиция с номер i.

U - всички разположения

$|U| = n!$

$A \cup B = U$, където

A - никое число i не е на поз. №i

B - има поне число i, което е на поз. №i.

$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$

и $A \cap B = \emptyset$

Тогава

$$|A| = |U \setminus B| = |U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i| =$$

$$= |U| - \left(\sum_{i=1}^{n} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |B_i \cap B_j| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} B_i \right| \right)$$

$|U| = n!$

$|B_i| = (n-1)!$

...

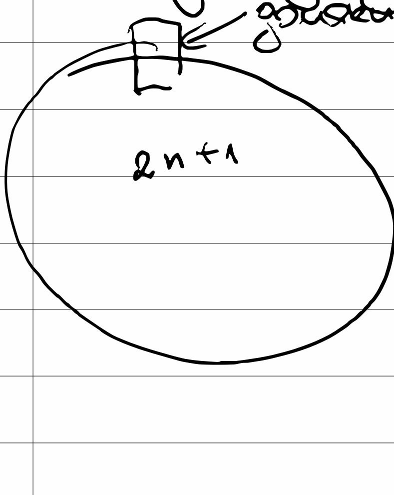
$|B_1 \cap \dots \cap B_n| = 1! = 1$

$$= n! - (n-1)! \cdot \binom{n}{1} + (n-2)! \cdot \binom{n}{2} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+2} \binom{n}{n} \cdot (n-n)! =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} (n-i)!$$

Зад. На обяд били поканени n двойки бивши съпрузи. По колко начина може да се разположат около кръглата маса с 2n места и едно място за домакина, така че никои два бивши съпрузи да не са един до друг.



домакин и от неговото гледна точка всъщност масата става една голяма пейка.

Нека $\mathcal{U}$ - всевъзможни разположения на $2n$ гости по пейката: $|\mathcal{U}| = (2n)!$

$A \cup B = \mathcal{U}$, $A \cap B = \emptyset$

A - няма два съседни бивши съпрузи

B - има поне една двойка бивши съпрузи един до друг.

Номерираме двойките от 1 до n.

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, където

B_i - разположения, в които двойка i не се разделя за $1 \le i \le n$.

Тогава $|A| = |\mathcal{U} \setminus B| = \left|\mathcal{U} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right| = \to$

комплектовам двойка i в единица

$|\mathcal{U}| = (2n)!$

$|B_i| = (2n-1)! \cdot 2$ ← размествам двойка i помежду им

$|B_i \cap B_j| = (2n-2)! \cdot 2^2$ ← за се менят помежду си двойките

$\ldots$

$\left|\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right| = (2n-n)! \cdot 2^n$

$$= |\mathcal{U}| - \left(\sum_{i=1}^{n} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |B_i \cap B_j| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} B_i \right| \right) =$$

$$= (2n)! - \binom{n}{1} \cdot (2n-1)! \cdot 2 + \binom{n}{2} \cdot (2n-2)! \cdot 2^2 -$$

$$\dots + (-1)^{n+2} \cdot \binom{n}{n} \cdot (2n-n)! \, 2^n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (2n-i)! \cdot 2^i$$