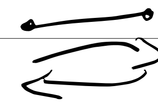
Графи

Мн-во от върхове V (vertex) и мн-во от ребра $E \subseteq V \times V$ ⇝ $G = \langle V, E \rangle$ (edge).

Ориентиран граф.

Ако е в сила за E:

- $\forall x \neg E(x,x)$;
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Rightarrow E(y,x))$,



$\{u,v\} \in E$

то имаме неориентиран граф.

мулти граф: Ако $G_м = \langle V, E_м, f_м \rangle$, т.е. $f: E_м \to V \times V$ на всяко ребро ѝ връща краищата

е $d_+(v)$ – колко ребра влизат във v (степен на вход); $d_-(v)$ — || — (степен на изход). Ако G е неориентиран, то $d_+(v) = d_-(v) = d(v)$.

Представяния:

- чрез матрица на инцидентство
- чрез списък на съседство

→ ефективно при граф с много ребра

→ ефективно при граф с малко ребра.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & v_1 & v_2 & \cdots & v_i & \cdots & v_j \\
\hline
v_1 & & & & & & \\
v_2 & & & & & & \\
v_i & & & & & & 0 \\
v_j & & & & 1 & & \\
\end{array}
$$

$v_i \to v_j$

$v_1, \dots, v_n$

$V[1, \dots, n]$

$$V[i] = adj(v_i) = \{ v_j \mid v_i \in v_j \}$$

300. Нека $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Да се намери броят на:

крайни неор. граф

$|V| = n$

a) КНГ с множество от върхове V

b) КНГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

върхове, в които не влизат и не излизат ребра

HW

c) КОГ с м-во от върхове V, $|V \times V|$

d) КОГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

a) $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V \ \& \ v \neq u\} = A$

избор за u $\rightarrow \underline{n.(n-1)} \leftarrow$ избор за v $= \binom{n}{2} = |A|$

$2 \leftarrow$ искаме неподредени двойки

$E \in \mathcal{P}(A)$, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{\binom{n}{2}}$

b) U – м-во от всички графи с n върха

$|U| = 2^{\binom{n}{2}}$

a)

$A \leftrightharpoons$ всички графи с n върха без изолир. върхове

$B \leftrightharpoons$ —11— с поне един изолиран връх

$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$

B_i – върхо v_i е изолиран.

$|B_i| = 2^{\binom{n-1}{2}}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

$|B_i \cap B_j| = 2^{\binom{n-2}{2}}$, $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$

$|A| = |U| - |\overline{B}| = 2^{\binom{n}{2}} - \left(\sum_{i=1}^{n} |B_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |B_i \cap B_j| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} B_i \right| \right) =$

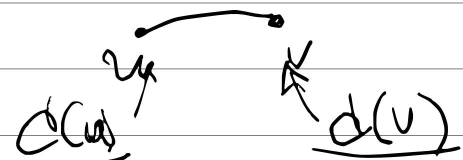
$$= 2^{\binom{n}{2}} - \underset{\binom{n}{1}}{\underset{\shortparallel}{n}} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} + \binom{n}{2} \cdot 2^{\binom{n-2}{2}} + \cdots$$

$$+ (-1)^n \cdot 2^{\binom{n-n}{2}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot (-1)^i \cdot 2^{\binom{n-i}{2}}$$

302. Нека $G=\langle V, E\rangle$ е КНП.
Покажете, че:
а) $\sum\limits_{v\in V} d(v) = 2m$ за $|E| = m$.
б) Броят на върховете от нечетна степен е четно число.

а) $d(v)$ – брой на ребра свързващи v с останалите върхове



Фиксираме ребро $e \in E \Longrightarrow$ има $u, v \in V$
$e = \{u, v\}$.
$d(u)$ брой е веднъж и $d(v)$ брой е веднъж
Това е за всяко ребро $e \in E$
Значи $\sum\limits_{v\in V} d(v) = 2m$

b) Нека $V_1 \subseteq V$, т.ч. $v \in V_1 \Leftrightarrow \underline{d(v)}$ е нечетно.

$V_2 \subseteq V$, т.ч. $v \in V_2 \Leftrightarrow d(v)$ е четно.

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $\underline{V_1 \cup V_2 = V}$.

$$\underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{четно}} = 2.m = \underbrace{\sum_{v_1 \in V_1} \overbrace{d(v_1)}^{\text{нечетно}}}_{\text{четно}} + \underbrace{\sum_{v_2 \in V_2} \overbrace{d(v_2)}^{\text{четно}}}_{\text{четно число}}$$

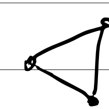
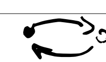
Оттук $|V_1|$ е четно.

302. Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е КНП с $|V| \geq 2$, то има поне два върха с еднакви степени.

302 Да се покаже, че във всяка група от 6 човека има трима, които __не се познават__ или има трима, които __се познават__.

(302) Нека $G = \langle V, E \rangle$ е КНГ.
Покажете, че ако той има точно два върха с нечетна степен, то между тях има път в G.

def | Път в НГ е последователност от върхове $v_0 v_1 \ldots v_k$, т.е. м/у всеки два съседни има ребро. → НГ → ОГ →
Брой ребра в пътя -> дължината му

def | Цикъл: път $v_0 v_1 \ldots v_k$ и $v_k = v_0$.
Най-къс цикъл: → НГ - 3 върха 
↳ ОГ - 2 върха 

def | $P_G = \{ \langle a,b \rangle \mid \langle a,b \rangle \in V \times V$ & има път от a до b в G $\}$.
релация на еквивалентност и разбива графа на компоненти

def| НГ е <u>свързан</u> <-> м/у всеки два върха има път <-> компонентите на свързаност е само една.

def| • ОГ е <u>слабо свързан</u> <-> м/у всеки два върха има път поне в едната посока

• ОГ е <u>силно свързан</u> <-> м/у всеки два върха има път и в двете посоки

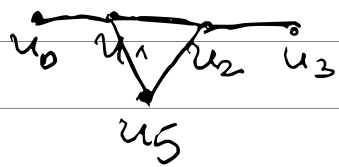
300. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е НГ с n върха и брой ребра $|E| > \frac{(n-1).(n-2)}{2}$.

Докажете, че G е свързан граф.

(302) Нека $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ е свързан граф с n върха. Докажете, че $|\mathcal{E}| \geq n-1$.

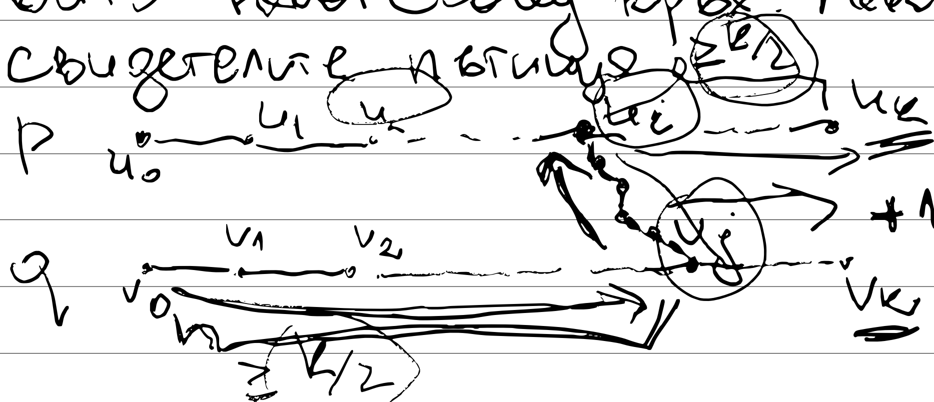
Още: док., че G има точно един прост цикъл т.с.т.к. има точно $|\mathcal{E}| = n$ ребра.

302. Нека $G=\langle V,E\rangle$ е свързан граф. Докажете че всеки два прости (ацикличени/безцикли) пътя с дължина, равна на максималната за графа, имат общ връх.



Всеки два най-дълги прости пътя имат общ връх.

Нека поне два най-дълги прости пътя, които нямат общ връх. Нека P, Q са свидетелите на лъжата.



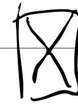
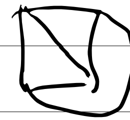
Нека $|\Gamma| \geq 2.\frac{k}{2} + 1 = k+1$

Т.к. p и q са максимални по дълж.

$|p| = |q| = k$ Абсурд! (не е дърво на графа)

Следователно тези пътища p и q имат поне един общ връх.

302) $G = \langle V, E \rangle$ е НП.

G се нарича самодопълващ, ако е изоморфен на $\overline{G}$ (грубо казано еднакви  $\cong$ )

Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е самодопълващ, то $|V| \equiv 0 \pmod 4$ или $|V| \equiv 1 \pmod 4$

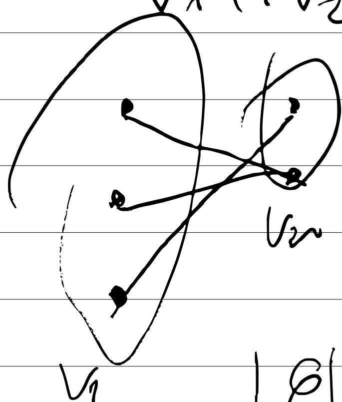
300. G е двуделен граф (НП).

a) Док., че $\sum_{v\in V_1} d(v) = \sum_{v\in V_2} d(v)$

b) Док., че ако $G=\langle V, E\rangle$ е k-регулярен двуделен граф, то двата дяла имат същия брой върха.

$V = V_1 \cup V_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ и само м/у тях има ребра (м/у двата дяла)



a) $$\sum_{v\in V} d(v) = 2m = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v)$$

$$|E| = |\{\{u,v\} \mid u\in V_1 \ \&\ v\in V_2\}| = m =$$
$$= \sum_{u\in V_1} d(u) = \sum_{v\in V_2} d(v)$$

b) Док, че ако $G=\langle V, E\rangle$ е k-регулярен двуделен граф, то двата дяла имат същия брой върха.

$k > 0$

$$\forall v \in V \rightsquigarrow \underline{d(v) = k}$$

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m = \underbrace{\sum_{v\in V_1} d(v)}_{m} + \underbrace{\sum_{v\in V_2} d(v)}_{m}$$

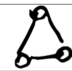
$$\sum_{v\in V_1} \overset{k}{d(v)} = \sum_{v\in V_1} k = k \cdot \sum_{v\in V_1} 1 = k \cdot |V_1| =$$

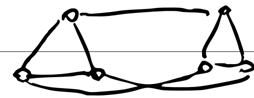
$$= \sum_{v\in V_2} \overset{k}{d(v)} = k \cdot |V_2|$$

$$\cancel{k} \cdot |V_1| = \cancel{k} \cdot |V_2|$$

$$|V_1| = |V_2|$$

300. $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ редица от графи.

$G_0 = K_3$ 

$G_1 \longrightarrow$ 

G_{n+1} = две копия на G_n като м/у копията има ребра, които свързват съответните върхове на копията.

Задача: $G_n = \langle V_n, E_n \rangle$, колко са $|V_n|$ и $|E_n|$

30 зад

Нека G е КНГ $G = \langle V, E \rangle$ и $|V| = n$, $|E| = m$. СУСЕ:

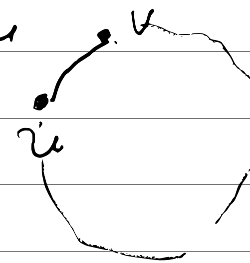
a) G е дърво (свързан ацикл.);

b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път;

c) G е свързан и $n = m+1$;

d) G е ацикличен и $n = m+1$;

e) G е ацикличен и ако кои да е два "несъседни" (не са свързани с ребро) върха се свържат с ребро, то в резултатния граф ще има точно един цикъл.



a) → b) → c) → d) → e) → a)

a) G е дърво (свързан ацикл.);

b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път;

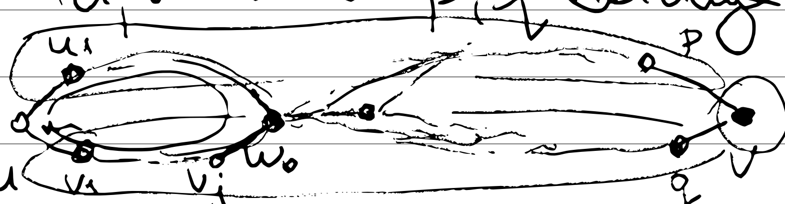
a) $\to$ b)

От свързаността знаем имаме, че м/у всеки два върха има път.

Искаме единственост.

Нека да доп. прот. т.е. има два върха, м/у които има поне два различни пътя.

Нека $u, v \in V$ и p, q пътища са свързващи.



$A \neq \emptyset \to A \subseteq \{ w \mid w \in V$ & w е общ връх за пътищата p и $q\}$

$v \in A$

$w_0 \in A$ & да бъде с най-малък индекс по q

Тогава $u u_1 \ldots w_0 v_j \ldots v_1 u$ е цикъл. Абсурд!

b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път → Всеки връх участва в поне едно ребро ⊙

c) G е свързан и $n = m+1$;

b) → c) $\qquad |E| = |V| - 1$

G е свързан ←

Защо $|E| = |V| - 1$? $\qquad |E| \geq |V|$

Нека $V_0 \leftrightharpoons \{v_0\}$, $v_0 \in V$ произволно

$V_1 \leftrightharpoons V_0 \cup \{v_1 \mid \{v_0, v_1\} \in E\}$

$V_2 \leftrightharpoons V_1 \cup \{v_2 \mid (\exists v_1 \in V_1 \setminus V_0)[\{v_1, v_2\} \in E]\}$

$$V_n \leftrightharpoons \bigcup_{i=0}^{n-1} V_i = V$$

↑ b)

$|E| \qquad |V_{i+1} \setminus V_i|$ − брой добавени нови ребра $\geq |V_{i+1}| - |V_i|$

принцип на изваждането

$$\| \bigcup_{i=0}^{n-1} (|V_{i+1}| - |V_i|) = \underbrace{|V_n|}_{n} - \underbrace{|V_0|}_{1} = n - 1$$

c) G е свързан и $n = m+1$;

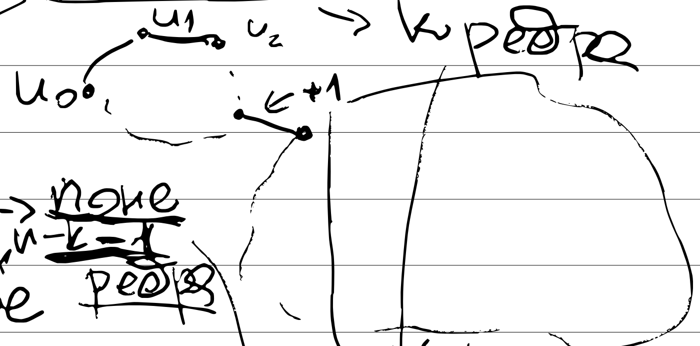
d) G е ацикличен и $n = m+1$;

c) $\rightarrow$ d)

Доп., че има цикъл в G и нека

$c = u_0 u_1 \dots u_k = u_0$ е този цикъл

k върха $\quad$ k ребра



$(n-k)$ останали върхове $\rightarrow$ поне $n-k-1$ ребра

$n-1$

$= |E| \geq n-k-1+1+k = n$ $\quad$ E

и ребра задача

$\Leftrightarrow$ $G = \langle V, E \rangle$, $|V| = n$ и G е свързан

Тогава $|E| \geq n-1$

c) → d).

Доп., че има цикъл в G и нека

$C = u_0 u_1 \ldots u_k = u_0$ е този цикъл

върха ребра

Махаме 1 ребро от $u_0 u_1 \ldots u_k = u_0$ произв.

Графът остава свързан.

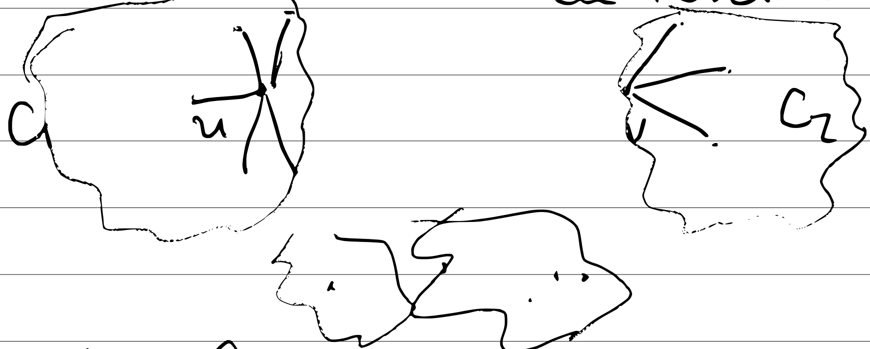
(302) Нека $G=\langle V, E\rangle$ е свързан мг и $w \in V$ е негов **срязващ/критичен** връх (след неговото отстраняване на w и ребрата, инцидентни с него, броят на свързаните компоненти на G се увеличава).

Нека G_1 е графът, получен от G чрез отстраняване на w и ребрата, инцидентни с него.

Докажете, че графът G_1 е свързан.

392) Нека $G = \langle V, E \rangle$ е кнг. Покажете, че ако той има точно два върха с нечетна степен, то между тях има път в G.

Нека в G има точно два върха с нечетна степен, но м/у тях няма път. Нека u и v са тези върха.



Т.е. G не е свързан и има поне две комп. на свърз. $C_1, \dots C_k$, $k \geq 2$.
Нека БОО $u \in C_1$, $v \in C_2$.

Нека разгл. $v \in C_2$.

$G_2 = \langle C_{2v}, E \cap (C_2 \times C_2) \rangle$

$\Rightarrow$ графа с точно един връх от нечетна степен.

Абсурд!