Основни комбинаторни конфигурации с или без наредба, с или без повторение

Основна задача:

Дадени са ни n обекта $a_1, \ldots, a_n$ и искаме да изберем $b_1, \ldots, b_k$ (k от тях).

„Изборът" ни задава ф-я f,
$f: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

По колко начина можем да направим този избор, т.е. колко са функциите f?

① Вариации с повторение

Изображение наредата

a_i - различни; b_j - различни;

f - произволна

Т.е. можем да повторяме изборо ни и ни величава наредбата.

При различни b_j, то f_1 и f_2 са различни

$$\underline{f_1} \qquad \underline{f_2}$$

$$\begin{array}{ll} 1 \to 2 & 1 \to 3 \\ 2 \to 3 & 2 \to 2 \end{array}$$

$$f_1 \neq f_2$$

$$\begin{array}{ll} b_1 \to a_2 & b_1 \to a_3 \\ b_2 \to a_3 & b_2 \to a_1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

за b_1 за b_2 за b_k

Отг: $\underbrace{n.n.\dots n}_{n} = n^k = \tilde{V}_n^k$

клетки и принципа умн.

② Вариации без повторение

Има значение наредбата.

a_i - различни; b_j - различни;

f - инекция.

Т.е. влияние на наредбата и не повторение.

Отг: $n.(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = V_n^k$

за b_1 за b_2 за b_k

②' Пермутации без повторение

Като ②, но $k=n$.

Тогава $P_k = n.(n-1)\dots 1 = n!$

3) Комбинации без повторение

Няма значение наредбата.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - инекция

$b_1 \to a_3$
$b_2 \to a_2$

$b_1 \to a_2$
$b_2 \to a_3$

Тогава в примера за f_1 и f_2

f_1	и	f_2
$1 \to 2$		$1 \to 3$
$2 \to 3$		$2 \to 2$

, то f_1 не се различава от f_2.

Т.е. не различаваме кое е първо и кое е второ.

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Биномен коеф. начини за вземем k елемента подмн-во на мн-во съдържащо n елемента.

начини за пермутиране k елемента (не различаваме наредбата)

④ Комбинации с повторение

Не ни интересува наредбата и може да повторение.

a_i - различими; b_j - неразличими; f - произволна

прим/ $n = 3$ a_1 a_2 a_3

$k = 2$ b_1 b_2

$\{a_1, a_2\}_M$ $\{a_1, a_1\}_M$

$\{a_1, a_3\}_M$ $\{a_2, a_2\}_M$

$\{a_2, a_3\}_M$ $\{a_3, a_3\}_M$ мулти мн-во

Тогава нека x_i - брой пъти, в които сме избрали a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

Трябва да ги намерим броя решения. Колко вектора $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ има т.ч. $x_i \geq 0$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$?

Финален резултат:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{k+(n-1)}{k} = \tilde{C}^{\,n-1}_{n+k-1}$$

✪ Пермутации с повторение

$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n,$

$$\tilde{P}_n^{k_1,\ldots,k_n}(k_1,\ldots,k_n) = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$$

колко пъти се повтаря a_i за $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$\tilde{C}_n^k = \tilde{P}_n(n-k,k)$$

(303) Колко са четирицифрените цели положителни десетични числа, които могат да се образуват с цифрите от това м-во {0, 1, 2, 3, 4, 5}, т.е.:

a) в записа на числото има повтарящи се цифри

b) в записа на числото може да има повтарящи се цифри

c) в записа на числото може да има повтарящи се цифри и числата са нечетни.

$|\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}| = 6$

$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_4$

$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

без 0, без c_1

$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot c_3$

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

без 0

всичко

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3$

без 0

{1, 3, 5}

U – b)

A – c)

B – d) + числата со четни.

$$A = U - B \quad \rightarrow |U| = 2|A| = 2|B|$$

392 а) Колко са двуцифрените числа съставени от цифрите {1, 3, 5, 7, 3}?

б) Ако цифрите са написани на картончета?

т.е. без повторения

$\tilde{V}_5^2$

V_5^2

(зад) По колко начина можем да подредим в редица 2 зелени, 3 червени и 4 сини топки?

$$\tilde{P}_n(k_1,\dots,k_t) = \binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\binom{n-(n-k_t)}{k_t}}_{1} =$$

$k_1+\dots+k_t=n$

$$= \frac{n!}{k_1!\,\cancel{(n-k_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\,\underbrace{\cancel{(n-k_1-k_2)}}_{-(k_1+k_2)}!}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{(n-(n-k_t))!}=k_t!}{k_t!\,.\,\underbrace{(n-(n-k_t)-k_t)!}_{\underset{1}{0!}}} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_t!} = \frac{(k_1+k_2+\ldots+k_t)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_t!}$$

$$\tilde{P}_9(2,3,4) = \frac{(\overset{2}{k_1}+\overset{3}{k_2}+\overset{4}{k_3})!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!}$$

(зад.) а) По колко начина можем да разпределим 10 ябълки (различни) м/у 3 деца?

Зад: Важно е не само колко ябълки, а и кои ябълки (различни са).

b) По колко начина хонорар от 10 монети левовете може да бъде разпределен м/у $3^{-ма}$ души?

Зад: може и 0 лв да получи човек.

$$\tilde{V}^{10}_{3} = 3^{10}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

а*) ябълките не са различни

$$\binom{10+(3-1)}{\underbrace{(3-1)}_{2}} = \binom{12}{2} = \binom{12}{10}$$

$\underbrace{я_1 я_2}$ | | $\underbrace{я_{10}}$

комбинации с повторение

322 Вероятност = $\dfrac{\#\text{ хубави случаи}}{\#\text{ всички случаи}} \in [0;1]$

При игра на бридж получавате 13 карти от общо 52. Каква е вероятността да получите:

a) точно 2 дами?

b) поне 2 дами?

c) поне 1 дама?

$$\frac{\binom{52}{13} - \binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}$$

4 дами → искаме точно 2 от тях

$$\underbrace{\binom{52}{13}}_{\text{всички}}$$

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{11}}{\binom{52}{13}} = \ldots = 0{,}2135$$

→ мин. 0 дами и 1 дама

$$\frac{\binom{52}{13} - \left(\binom{4}{0}\cdot\binom{48}{13} + \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{12}\right)}{\binom{52}{13}}$$

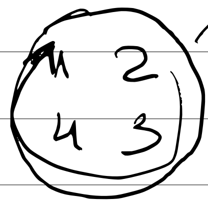
329) По колко начина n елемента могат да се наредят:

a) в редица;

b) в кръг, ако различаваме двете посоки; $\circlearrowright \neq \circlearrowleft$

c) в кръг, ако не различаваме двете посоки: $\circlearrowright = \circlearrowleft$

$n! = P_n$



1234 3412
2341 4123

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Всяка наредба в кръг съответства на n наредби в редичка.

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

302

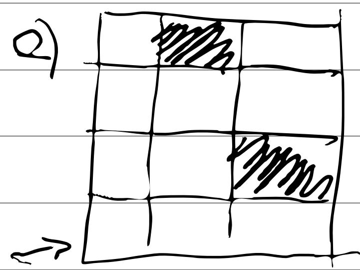
HW

По колко начина 10 души могат да се наредят в редица, такова трима приятеля да са един до друг?

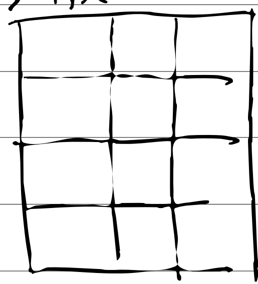
HW

302) Брой пътищата от долния ляв до горния десен ъгъл? На всяка стъпка или ↑ или →

a)



b) няма задраскани клетки



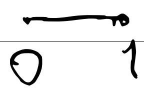
c) няма задраскани клетки и таблицата е $m \times n$.

Зад HW

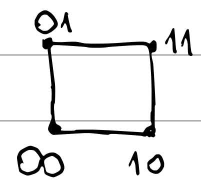
Хиперкуб (n-мерен куб):

- върхове: всички наредени n-орки от 0ли и 1ци;
- ребра: има м/у върхове, които се различават само в една позиция

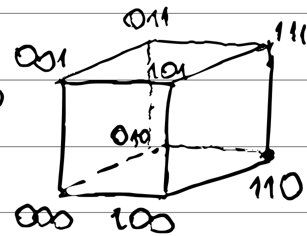
пр.: $n=1$



$n=2$



$n=3$



а) Колко върха има хиперкуба?

b) Колко ребра има хиперкуба?

c) 000

1ир

001

2ири

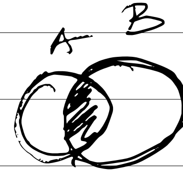
010

3ири

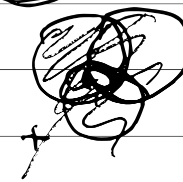
100

Подредете n-торките, т.ч. всеки две съседни n-торки (а също и първо и последно) да се различават само в 1 позиция.

б) Принцип на включване и изключване



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + $$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots$$

$$\dots + (-1)^{(n+1)} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

(зад) В група от 20 студента футбол играят 9, волейбол – 7 и 4-ма волейбол и футбол.
Колко студента не играят нито футбол, нито волейбол?

Ф – играят футбол
В – играят волейбол

$$|U \setminus (В \cup Ф)| = 20 - 12 = 8$$

$$|В \cup Ф| = \underbrace{9}_{|Ф|} + \underbrace{7}_{|В|} - \underbrace{4}_{|Ф \cap В|} = 12$$

Зад. Имаме група от студенти, в която всеки знае поне един чужд език, като 13 знаят английски, 25 - френски, 21 - немски, 7 - англ. и немски, 13 - англ. и френски, 9 - френски и немски, 3 - англ., фр. и нем. Колко студента има в групата?

$|U| = ?$

$\uparrow$ групата

$$U \setminus (Ф \cup Н \cup А) = \emptyset$$

$$Ф \cup Н \cup А \subseteq U$$

$$U \subseteq Ф \cup Н \cup А$$

$$U = Ф \cup Н \cup А$$

$$|U| = \overbrace{|Ф|}^{25} + \underbrace{|Н|}_{21} + \underbrace{|А|}_{19} - \underbrace{|Ф \cap Н|}_{9} - \overbrace{|Ф \cap А|}^{7} - \overbrace{|Н \cap А|}^{13} + \underbrace{|Ф \cap Н \cap А|}_{3} = 65 - 29 + 3 = 39$$

Зад. Да се намери броят на векторите с дължина m, всеки от който съдържа всяка от цифрите $0, 1, \ldots, 9$ поне веднъж (като се допуска да започва с нула.)

$\underbrace{0000123456789}_{m}$

$\langle \underset{1}{\_}, \_ \ldots \underset{m}{\_} \rangle$

U – всички m-мерни вектори с комп. $\in \{0, 1, \ldots 9\}$

$|U| = 10^m$

$\langle \_, \_, \ldots \underset{m}{\_} \rangle$

A – по условие

B – поне една цифра не се съдържа.

$A \cup B = U$, $A \cap B = \varnothing$

$$B = \underbrace{B_0} \cup \underbrace{B_1} \cup \ldots \cup \underbrace{B_9}$$

B_i – не се среща цифрата i.

$$|A| \underset{\text{принцип за събиране}}{=} |U \setminus B| = |U \setminus \bigcup_{i=0}^{9} B_i| =$$

$$= \underbrace{|U|} - \left(\sum_{i=0}^{9} |B_i| - \sum_{0 \le i < j \le 9} |B_i \cap B_j| + \ldots + \underbrace{(-1)^{11} \left| \bigcap_{i=0}^{9} B_i \right|}_{0} \right) =$$

$|B_i| = 9^n$

$|B_i \cap B_j| = 8^n$

$\ldots$

$\left| \bigcap_{i=0}^{9} B_i \right| = 0^n = 0$

$$= \underbrace{10^n} - \binom{10}{1} 9^n + \binom{10}{2} \cdot 8^n - \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \cdot \binom{10}{i} \cdot (10-i)^n$$

(3аg) Да се намери броят на разположенията на числата $1, 2, \dots, n$ в n позиции, при които никое число $i \in \{1, \dots, n\}$ не е на позиция с номер i.

Зад. На обяд били поканени n двойки диви съпрузи. По колко начина могат да се разположат около кръглата маса с 2n места и едно място за домакина, така че никои два диви съпрузи да не са един до друг?

домакин

U – всичките разположения

A – условие

B – има поне една двойка диви съпрузи, които са един до друг.

Номерираме двойките с числата от 1..n.

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots B_n$

$|U| = (2n)!$

$|B_i| = 2\cdot(2n-1)!$

$|B_i \cap B_j| = \underset{i}{2}\cdot\underset{j}{2}\cdot\underbrace{(2n-2)!}_{\text{останали}}$

$\left|\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right| = 2^n\cdot(2n-n)! = 2^n\cdot n!$

От гледна точка на двойките е една голяма пейка с 2n места

$|A| = |U \setminus B| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right|$

$\boxed{\text{HW}}$ Нека да има n двойки. Тогава по колко начина да разположим 2n души съпрузи на кръгла маса без да има двойки души съпрузи един до друг.

Нютонов бином и методи за доказателства на комбинаторни тъждества

C_n^k

★ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

★ $\binom{n}{k}$ = # начини по които можем да изберем k среди от n (от тях и взимаме a-тата) $= C_n^k$

Th/ $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ т.е.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$$

Th $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\tilde{P}_n}_{\text{перм. слаг.}}(k, n-k) \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot x^k$$

Обобщение:

$$(x_1 + \ldots + x_l)^n = \sum \tilde{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_l) \cdot x_1^{k_1} \ldots x_l^{k_l}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_l$ – цели неотр.

$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n.$

Методи за доказателства на комбинаторни тъждества

В комбин. едно тъждество може да бъде доказано по формален начин (чрез заместване, еквивалентни преобразувания и т.н.), така и по чисто комбинаторен път чрез преброяване на елементите на подходяща избрана конфигурация по два различни начина. Тази техника е известна като принцип на двукратното броене.

Подходи:

* Чрез формулите за броя на съчетанията
* Чрез разсъждение:

принципи за изчер. броене

- Брои едно нещо два пъти
- Брои елементите на две множества и построяване биекция

* Чрез Нютонов бином
* Чрез математическа индукция

322 Док-те: $C_n^k = C_n^{n-k}$

зад

За $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, то

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Зад 0

Триъгълник на Паскал

n

	1						$n = 0$
$k = 0$	1	1					$n = 1$
$k = 0$	1	2	1				$k = n$
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	

k-ти елемент от n-тия ред е равен на $\binom{n}{k}$

k_n

зависи от n k

392

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ?$$

380) Принципа за вкл. и изкл. е равносилен на следното тъждество.

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} = 1$$

309

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = ?$$

Зад Докажете $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$