Графи

Мн-во от върхове V и мн-во от ребра $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ ⇝ $\underline{G = \langle V, \mathcal{E} \rangle}$.

Ориентиран граф.

Ако е в сила за $\mathcal{E}$:

- $\forall x \neg \mathcal{E}(x, x)$;
- $\forall x \forall y (\mathcal{E}(x, y) \Rightarrow \mathcal{E}(y, x))$,

то имаме неориентиран граф.

мулти граф: Ако $G_M = \langle V, \mathcal{E}_M, f_M \rangle$, т.ч. $f: \mathcal{E}_M \to V \times V$ на всяко ребро ни връща краищата.

$d_+(v)$ – колко ребра влизат във v (степен на вход); $d_-(v)$ — " — (степен на изход). Ако G е неориентиран, то $d_+(v) = d_-(v) = d(v)$.

Представяния:

- чрез матрица на инцидентство → ефективно при граф с много ребра
- чрез списък на съседство → ефективно при граф с малко ребра.

300. Нека $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Да се намери броят на:

a) КНГ с множество от върхове V

b) КНГ с м-во от върхове V, в които няма <u>изолирани върхове</u>

върхове, в които не влизат и не излизат ребра

c) КОГ с м-во от върхове V,

d) КОГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

---

a) Нека $\mathcal{U}$ - м-во от КНГ т.е.

$\mathcal{U} = \{ G = \langle V, \mathcal{E} \rangle \mid \mathcal{E} \subseteq V \times V \}$

Колко най-много ребра може да има в неориентиран граф (краен)?

$\mathcal{E}_{max} = \{ \{v, u\} \mid v, u \in V \ \& \ v \neq u \} =$

$= \binom{n}{2}$

Графи с $\mathcal{E}_{max}$ се наричат <u>пълни</u> графи.

Тогава всеки под V се образува като изберем някои ребра от

Emax. Тогава нека $k = \binom{n}{2}$:

$$|\mathcal{U}| = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{i} \underset{\text{ТВ.}}{=} 2^{\binom{n}{2}}$$

b) Сега изолиран връх е $d(v)=0$.
Такива няма да има, ако $d(v) \geq 1$ за всяко $v \in V$.

Нека $\mathcal{U}$ - всички графи (a))
и A - графи без изол. върхове
B - има поне един изол. връх

Тогава $A \cap B = \emptyset$, но и $A \cup B = \mathcal{U}$.

По принцип на изваждане:

$|A| = |\mathcal{U} \setminus B| = |\mathcal{U}| - |B| = (*)$.

B може да се представи като
$B = B_{v_1} \cup \ldots \cup B_{v_n}$, където
B_{v_i} - върха v_i е изолиран.

Тогава по принципа на вкл. и изкл.:

$$(*) = 2^{\binom{n}{2}} - \Bigg(\underbrace{\binom{n}{1}}_{n} \cdot 2^{\binom{n-1}{2}} -$$

1 връх избиране

ребра за останалите

$- \binom{n}{2} \cdot 2^{\binom{n-2}{2}} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 2^{\binom{n-n}{2}}] =$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot 2^{\binom{n-i}{2}}.$$

c) При ориентирани всеe

$E_{max} = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in V \} =$

$= V \times V$

Тогава $|U| = 2^{|V \times V|} = 2^{n^2}$

d) Отново с принципа на вкл. и изкл. получаваме

$$|A| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot 2^{(n-i)^2}$$

302. Нека $G=\langle V, E\rangle$ е КНП.

Покажете, че:

a) $\sum\limits_{v\in V} d(v) = 2m$ за $|E|=m$.

b) Броят на върховете от нечетна степен е четно число.

---

a) Защото всяко ребро е броено два пъти: по веднъж от двата края.

b) Нека $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$

V_1 - върхове с нечетна степен

V_2 - върхове с четна степен

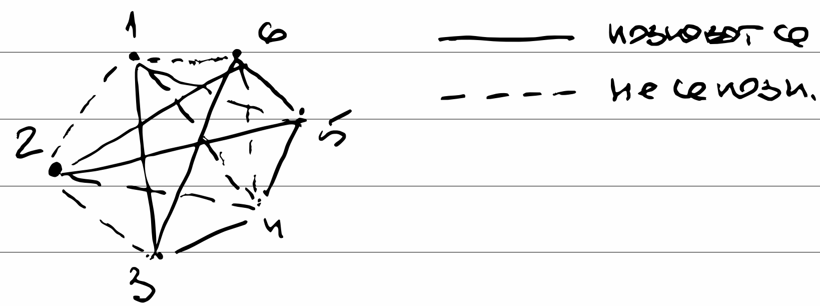
Тогава

$$\sum_{v\in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v_1\in V_1} d(v_1)}_{\text{кратно на 2} \to \text{четно е}} + \sum_{v_2\in V_2} d(v_2) = 2\cdot m$$

302. Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е КНП с $|V| \geq 2$, то има поне два върха с еднакви степени.

Започвам с група от n души и познанства.

300) Да се покаже, че във всяка група от 6 човека има трима, които не се познават или има трима, които се познават.



Нека $x \in \{1, \dots, 6\}$. Тогава x може да е свързан с 5 останали върхи с 2 типа ребра т.е. от Дирихле поне 3 ребра ще са от едно и също шарка. Сега да разгледаме върховете свързани с x по тези три ребра. Ако кои да е два са свързани с ребро от същата шарка сме готови. Нека всички тогава са свързани

с ребра от другата шарка ->
ето три върха свързани с
ребра по другата шарка и пак
сме готови.

300) Нека $G = \langle V, E \rangle$ е КНГ.
Покажете, че ако той има точно два върха с нечетна степен, то между тях има <u>път</u> в G.

<u>def</u> | <u>Път в НГ</u> е последователност от върхове $v_0 v_1 \dots v_k$, т.е. м/у всеки два съседни има ребро $\to$ НГ, $\to$ ОГ $\to$

Брой ребра в пътя $\to$ дължината му

<u>def</u> | <u>Цикъл</u>: път $v_0 v_1 \dots v_k$ и $v_k = v_0$.
Най-къс цикъл: $\to$ НГ – 3 върха
$\hookrightarrow$ ОГ – 2 върха

<u>def</u> | $P_G = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in V \times V \ \&$ има път от a до b в $G \}$.

релация на еквивалентност и разбива графа на <u>компоненти на свързаност</u>

def НГ е <u>свързан</u> $\Longleftrightarrow$ м/у всеки два върха има път $\Longleftrightarrow$ компонентите на свързаност е само една.

def • ОГ е <u>слабо свързан</u> $\Longleftrightarrow$ м/у всеки два върха има път поне в едната посока

• ОГ е <u>силно свързан</u> $\Longleftrightarrow$ м/у всеки два върха има път и в двете посоки

Доп. противното т.е. <u>има точно</u> два върха с нечетна степен, м/у които няма път в G.
Нека u и v са свидетели с $u \in V$, $v \in V$ и $d(u)$, $d(v)$ нечетни.
Тогава G не е свързан и има <u>поне две</u> компоненти на свързаност. Нека $C_1, \dots, C_k$ са комп. на свързаност и $u \in C_1$, $v \in C_2$
за $k \geq 2$

Тогава $G_1 = \langle C_1, E \cap (C_1 \times C_1) \rangle$

е граф с точно един връх

от нечетна степен $\Rightarrow$ ↯ с

$\sum_{v \in C_1} d(v)$ да е четно!

(300) Нека $G=\langle V, E\rangle$ е НП с n върха и брой ребра $|E| > \frac{(n-1).(n-2)}{2}$.

Докажете, че G е свързан граф.

Доп., че G не е свързан т.е. има поне два върха без път между тях. Тогава има компонента с t върха за $t \in \{1, .., n-1\}$. Останалите $n-t$ върха са в останалите компоненти/та.

Максималния брой ребра в графа е $\frac{t.(t-1)}{2} + \frac{(n-t).(n-t-1)}{2} =$

$= \frac{t^2 - n.t + (n^2-n)}{2} = f(t)$.

$f(1)$ и $f(n-1)$ са максимуми, а за $f(n/2)$ имаме минимум.

За $f(n-1) = \frac{(n-1).(n-2)}{2}$ т.е.

най-големият брой ребра, които

може да има несвързан граф е $\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$. Но $|E| > \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$

$\lightning$ е допускането

т.е G трябва да е свързан

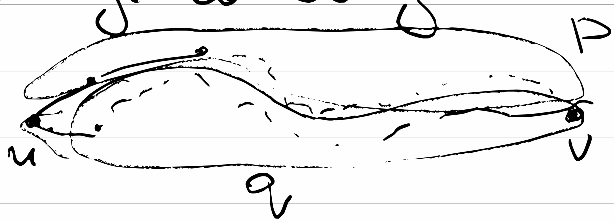
★ Колко е броят на всички КНГ-е с n върха и с k свързани комп.?

300. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан граф с n върха. Докажете че $|E| \geq n-1$.

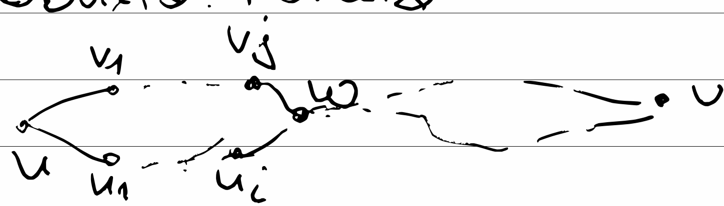
Нека G е свързан граф и $|V| = n$. Ако в G няма цикли, то значи G е ацикличен и по def значи G е дърво.
Ще покажем, че в този случай $|E| = n-1$.
С индукция по n.
За $n = 1$ е окей.
Допускаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$ то $G_n = \langle V_n, E_n \rangle$ и $|E_n| = |V_n| - 1 = n-1$ и G_n е дърво.
За $G_{n+1} = \langle V_{n+1}, E_{n+1} \rangle$ - дърво ?
Т.к. е ацикличен и свързан граф, то значи всеки два върха са свързани по единствен път,

допускаме противното

защото, ако не беше в сила това, нека $u, v \in V_{n+1}$ и p, q пътища със свидетели:



Нека w е най-лявата точка на пресичане ($\neq u$) (т.е. общо за пътищата p и q). Такава има, защото т. v удовлетворява условието. Тогава



$u u_1 \ldots u_i w v_j \ldots v_1 u$ е цикъл, но в G_{n+1} няма цикли. Абсурд!

Така във всяко дърво [illegible] пътищата м/у всеки два върха са единствени/уникални.

Тогава, ако премахнем от G_{n+1} кое да е ребро, ние ще предизвикаме появата на две нови компоненти на свързаност (от тази единст. на пътищата). Нека t_1 и t_2 са броят върхове в свързаните компоненти C_1 и C_2 на G_{n+1} при премахването на произволното ребро. Тогава за подграфите на G_{n+1}:

- $G_{t_1} = \langle C_1, E_{n+1} \cap (C_1 \times C_1) \rangle$
- $G_{t_2} = \langle C_2, E_{n+1} \cap (C_2 \times C_2) \rangle$

е в сила (i.h), т.к. $|C_1| = t_1 \leq n$ и $|C_2| = t_2 \leq n$, още $t_1 + t_2 = n+1$.

Значи $|E_{n+1} \cap (C_1 \times C_1)| = t_1 - 1$ и $|E_{n+1} \cap (C_2 \times C_2)| = t_2 - 1$.

Но тогава:

$$n+1 = |E_{n+1} \cap (C_1 \times C_1)| + 1 + |E_{n+1} \cap (C_2 \times C_2)| + 1 =$$

$$= (\underbrace{|E_{n+1} \cap (C_1 \times C_1)| + |E_{n+1} \cap (C_2 \times C_2)|}_{|E| - 1 \ \leftarrow \text{ заради произволно ребро}}) + 2 =$$

$$= |E| - 1 + 2 = |E| + 1.$$

Сега нека в G има поне един цикъл. Т.к. G е свързан, то $\exists$ м/у всеки два върха път и вт.

С индукция по броят на циклите в G, ще покажем, че $|\mathcal{E}| \geq n$

Нека има точно един цикъл в G. Тогава нека $v_0 v_1 v_2 \ldots v_k v_0$ е този цикъл. Тогава като премахнем реброто $\{v_k, v_0\} \in \mathcal{E}$, то получаваме свързан подграф на G с точно един цикъл по-малко, т.е този подграф става дърво!

Нека $G_1 = \langle V, \mathcal{E} \setminus \{\{v_k, v_0\}\} \rangle$.

Тогава $|\mathcal{E} \setminus \{\{v_k, v_0\}\}| + 1 = |\mathcal{E}|$ и също $|\mathcal{E} \setminus \{\{v_k, v_0\}\}| = |V| - 1$

т.е. $|\mathcal{E}| = |V| = n$ ✓

Нека е в сила за всеки графи с м-во от върхове V,

т.е. са свързани и имат точно k цикли.
За граф с върховете V и с $k+1$ цикли в сила ли е? По същият начин както в дозата чрез намалим броят на циклите поне с един и така чрез приложим (i.h), за да получим за текущия граф, че броя на ребрата е поне n.
Така получихме, че ако в G има поне един цикъл и G е свързан с $|V| = n$, то $|E| \geq n$.
Комбинираме го със случаят, когато G е дърво с $|V| = n \leadsto |E| = n-1$ и получаваме, че:
$|E| \geq n-1$. $\boxtimes$

300) Нека G е КНГ, $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ и $|V| = n$, $|\mathcal{E}| = m$. СУСЕ:

a) G е дърво (свързан ацикл.);

b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път;

c) G е свързан и $n = m+1$;

d) G е ацикличен и $n = m+1$;

e) G е ацикличен и ако кои да е два "несъседни" (не са свързани с ребро) върха се свържат с ребро, то в резултатния граф ще има точно един цикъл.

---

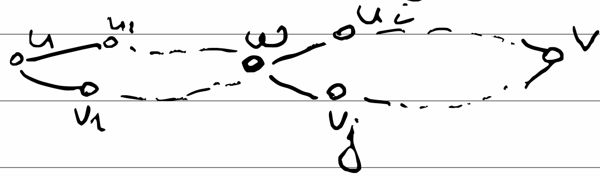
a) -> b) -> c) -> d) -> e) -> a)

a) -> b) подобно на предишната задача разсъждение

Нека G е дърво и доп., че има поне два върха в G, т.ч. са свързани с поне два различни пътя.

Нека $u, v \in V$ са свидетели и пътищата $p = uu_1 \dots v$, $q = uv_1 \dots v$

са същите свидетели. Нека върха
w е най-левия общ връх
за p и q $(\neq u)$. Такъв има,
защото v го удовлетворява



това свойство.

Тогава пътищата м/у u и w
по p и q заедно образуват
цикъл $u v_1 \ldots w \ldots u_1 u$, което
противоречи на това, че
G е ацикличен граф.
Абсурд!!

b) $\to$ c)

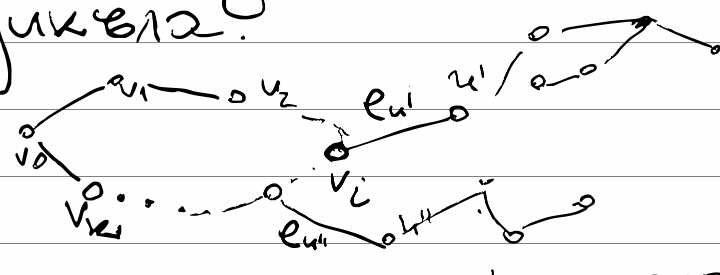
Т.к. м/у всеки 2 върха
съществува единствен път то
G е свързан.

От предното твърдение
вътре доказахме с индукция

по $\underline{n}$, че $|E| = n-1$.

c) -> d)

Нека допуснем, че в G има цикъл (и нека той е $p = v_0 v_1 \dots v_k = v_0$) от дължина k, т.е. имаме k върха и k ребра в този цикъл. Ако в този цикъл участват всички върхове, то $k = n$ значи $|E| \geq n$ -> Абсурд! Нека $k \neq n$. Т.к. G е <u>свързан за всеки връх</u> <u>u който не е в цикъла имаме</u> път от $\underline{u}$ до някой връх в цикъла.



Т.к. е свързан граф и останалите върхове са навързани. За всеки връх тип $\underline{u}$ има ребро e_u, което е <u>мост</u>.

Нека БОО е един връх u.
Имаме k ребра в цикъла + e_u + (?). Т.к. в цикъла участва k върха, то остават $(n-k)$ върха.
Този подграф е свързан и значи има поне $(n-k)$ ребра. Така $|E| \geq \underbrace{k}_{\text{в цикъла}} + \underbrace{1}_{e_u} + \underbrace{(n-k)}_{\text{подграф на } G_u} =$

$= n+1$ Абсурд!

d) → e)

Т.к. G е ацикличен, то свързаните компоненти на G са дървета сами по себе си. Нека $C_1, \dots, C_k$ са свързаните компоненти на G и $t_i = m_i + 1$ са броят на върховете на C_i-тата компонента.

Така $n = \sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} (m_i + 1) = \underline{m + k}$

Но $n = m+1$ т.е. $k = 1$ и следва, че G е свързан от което следва, че G е дърво. За всеки два

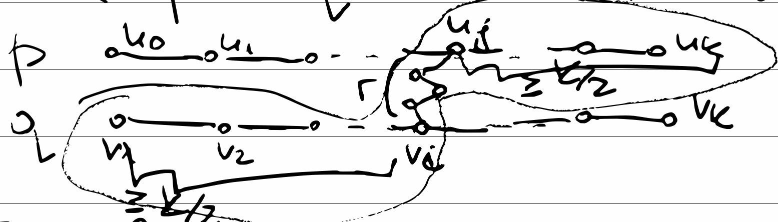
несъседни върха u и v,
то в G имаме единствен път
свързващи ги и добавяйки
реброто {u,v} получаваме този
единствен цикъл в G.

e) -> a)

Т.к. свързването на които и да е
несъседни върха в G с ребро ще
предизвика появата на точно един
цикъл, то съответно върховете
трябва да са свързани с път.
Т.е. G е свързан!

302. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан граф. Докажете, че всеки два прости (ациклични/без цикли) пътя с дължина, равна на максималната за графа, имат общ връх.

Допускаме, че има поне два максимални пътя без общ връх.
Нека p и q са тези пътища:



Т.к. G е свързан, то има или директно ребро изходящо от връх v_i примерно на пътя q към връх u_j от пътя p или има път, който ги свързва и не ползва никакви върхове участващи в p или q (иначе стават циклични ℓ).

БОО

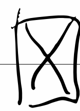
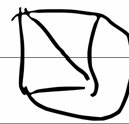
БОО нека $i, j \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Тогава образувахме по-дълъг път $v_0 v_1 \dots v_i r u_j \dots u_k$ и в пътя r има поне едно ребро!

Значи получихме по-дълъг път с дължина поне $k+1$.

300) $G = \langle V, E \rangle$ е НГ.

G се нарича самодопълващ, ако е изоморфен на $\overline{G}$

(грубо казано еднакви  $\cong$ )

Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е самодопълващ, то $|V| \equiv 0 \pmod 4$ или $|V| \equiv 1 \pmod 4$

Щом $G \cong G'$, то $|E| = |\overline{E}|$

Значи

$$|V \times V| = 2|E| = \frac{|V|.(|V|-1)}{2} \iff$$

$$|V|.(|V|-1) = 4.|E|$$

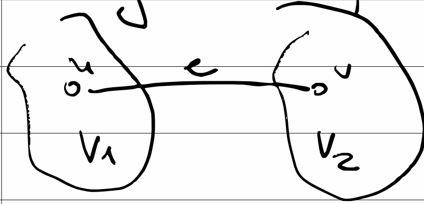
Значи $|V| \equiv 0 \pmod 4$ или $(|V|-1) \equiv 0 \pmod 4$.

300) G е двуделен граф (НП).

а) Док., че $\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v)$

b) Док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е k-регулярен двуделен граф, то двата дяла имат същия брой върхове.

а) Нека $e \in E$, т.е. същ. $u \in V_1$ и същ. $v \in V_2$, т.ч. e свързва u и v.



Твърдим, че e допринася с 1-ца във всеки от ст-тите $d(u)$ и $d(v)$.

Ако допуснем, че e допринася с повече от 1-ца, то същ. $u_0 \in V_1$, $u_0 \neq u$, т.ч. $u_0 \in \{u, v\}$ и същ. $v_0 \in V_2$, $v_0 \neq v$, т.е. $v_0 \in \{u, v\}$, което ни води до абсурд!

Значи всяко ребро допринася с точно 1-ца в $d(u)$ и $d(v)$, а те

Бяха произволни, т.е. излиза

$$\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{u \in V_2} d(u).$$

b) Нека доп., че $|V_1| \neq |V_2|$ и БОО $|V_1| < |V_2|$.

Имаме, че $(\forall u \in V_2)(\exists v_1 \in V_1) \ldots$

$\ldots (\exists v_k \in V_1)[\{v_i, u\} \in \mathcal{E}$ за $i \in \{1, \ldots, k\}]$

т.е. ребрата инцидентни с върхове от V_1 са $|V_2| \cdot k$, но $|V_1| < |V_2|$ т.е. по принципа на Дирихле ще имаме връх от V_1, който е с поне $k+1$ инцидентни ребра. $\not\downarrow$ с а)