

Определения:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I) [x \in A_i]\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I) [x \in A_i]\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n \}$$

Угол один закон с н-во и
одно изыскание и закон!

Закон н-во:

- $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$ (закон де Моргана)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$
- $C \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (C \cap A_i)$
- $A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Докажите, что:

• Если $A \in \mathcal{B}$ и $B \in \mathcal{C}$, то $A \in \mathcal{C}$

• $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

• $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

!

• $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

• $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Решения:

• $A \cup B = \overline{(A \cap B)}$ (де Моргана)

Требуется доказать

(a) $A \cup B \subseteq \overline{(A \cap B)}$

(b) $\overline{(A \cap B)} \subseteq A \cup B$

(a) От def. $x \in \pi.e.$ исходно.

$$\forall x (x \in A \cup B \Rightarrow x \in \overline{(A \cap B)})$$

Нужно $x \in A \cup B$ (оно предположено, ~~good~~, ~~требуется~~ и ~~какое~~ и ~~истинно~~ ~~good~~ ~~over~~). Тогда от def. $x \in U$, то $x \in A$ или $x \in B$. Б.О.О. и ~~не~~

$x \in A$. Τότε $x \notin \bar{A}$ ($A \cap \bar{A} = \emptyset$).

Τότε $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \bar{A}$, το
 $x \notin \bar{A} \cap \bar{B}$. Άρα $x \in \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}$.

(b) Ηρό $x \in \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})}$. Άρα
 $x \notin (\bar{A} \cap \bar{B})$. Τότε $x \notin \bar{A}$ ή $x \notin \bar{B}$.
Ενν. ή $x \in A$, τότε $x \in A$.
Η $A \subseteq A \cup B$, τ.χ. $x \in A \cup B$.

$$\bullet A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$$

(\rightarrow) Ηρό $A \subseteq B$.

$$(a) A \cup B \subseteq B$$

$$(b) B \subseteq A \cup B$$

(a) Ηρό $x \in A \cup B$. Άρα $x \in A$
ή $x \in B$. Αν $x \in A$, τότε $x \in B$
 $x \in B$. Αν $x \in B$, τότε $x \in B$.

(b) Ηρό $x \in B$. Η $B \subseteq A \cup B$, τ.χ.
 $x \in A \cup B$.

(\leftarrow) Ηρό $A \cup B = B$.

Ηρό $x \in A$. Οτ $A \subseteq A \cup B$, τότε $x \in A \cup B$,
η $A \cup B = B$, άρα $x \in B$.

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- (a) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- (b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

(a) Let $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Then
 $x \subseteq A \cap B$. As $A \cap B \subseteq A$ and
 $A \cap B \subseteq B$, so $x \subseteq A$ and $x \subseteq B$
 i.e. $x \in \mathcal{P}(A)$ and $x \in \mathcal{P}(B)$ and
 $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) Let $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Then
 $x \in \mathcal{P}(A)$ and $x \in \mathcal{P}(B)$, and
 $x \subseteq A$ and $x \subseteq B$. Now we go
 together towards $x \subseteq A \cap B$
 $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

$$\bullet \underbrace{C \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)}_{\mathcal{D}} = \underbrace{\bigcap_{i=1}^n (C \setminus A_i)}_{\mathcal{E}}$$

$$(a) \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$$

$$(b) \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$$

$$(a) \text{ show } x \in C \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right).$$

$$\text{Therefore } x \in C \text{ and } x \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{(\forall i: 1 \leq i \leq n) [x \notin A_i]} \\ & \underbrace{(\forall i: 1 \leq i \leq n) [x \in \overline{A_i}]} \\ & x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}. \end{aligned}$$

$$\text{show } x \in C \text{ and } x \in \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \rightarrow$$

(b)

$$x \in C \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} = \bigcap_{i=1}^n (C \cap \overline{A_i}) =$$

↑
same
or
same

$$= \bigcap_{i=1}^n (C \setminus A_i)$$

Знаю ли я, ee?:

- ① Если $A \in \mathcal{B}$ и $B \in \mathcal{C}$, то $A \in \mathcal{C}$
- ② $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- ③ $A \setminus B = A \Delta (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap B) \setminus A}_{\emptyset}$
- ④ $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
- ⑤ $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

① Конкретный пример:

$\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, но $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

② $(\{1, 2\} \setminus \{2\}) \setminus \{2\} \neq$
 $= \{1, 2\} \setminus (\{2\} \setminus \{2\})$

$\{1, 2\} \setminus \{2\} = \{1\}$; $\{1\} \setminus \{2\} = \emptyset$
 $\{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$; $\{1, 2\} \setminus \emptyset = \{1, 2\}$

③ Если $x \in A \setminus B$. Значит $x \in A$ и $x \notin B$. Т.к. $A \cap B \subseteq B$, то значит $x \notin A \cap B$ и тогда $x \in A \setminus (A \cap B) = A \Delta (A \cap B)$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{P}(\{0,1\} \times \{1\}) = \mathcal{P}(\{ \langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle \}) \\ = \{ \emptyset, \{ \langle 0,1 \rangle \}, \{ \langle 1,1 \rangle \}, \{ \langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle \} \}$$

$$\mathcal{P}(\{0,1\}) \times \mathcal{P}(\{1\}) = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\} \} \\ \times \{ \emptyset, \{1\} \} = \{ \langle \emptyset, \emptyset \rangle, \dots \}$$

$$\textcircled{5} \quad A \times (B \setminus C) \stackrel{?}{=} (A \times B) \setminus (A \times C) \\ \text{H.E.}$$

$$\text{Let } A = \{0,1\}, B = \{0\}, C = \{1\}.$$

$$A \times (B \setminus C) = \emptyset$$

$$A \times B = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle \}$$

$$A \times C = \{ \langle 0,1 \rangle, \langle 1,1 \rangle \}$$

$$(A \times B) \setminus (A \times C) = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle \}$$

Реляции

Свойства, отношения, признаки

и один

аргумент

и много аргументов.

Свойства с 2 и 3 арг.

Прим: "естественно" = $\{0, 2, \dots\}$

Реляции с 2 и 3 арг.

Для любых $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$, R — реляция (двух)
(Если $A = B$, тогда $R \subseteq A \times A$
— реляция на A).

Обобщение на A_1, \dots, A_n с 3 арг.
Реляция на n -арг. A_1, \dots, A_n —
 $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

R — n -местная реляция.

За $n=2 \rightarrow$ двухарная реляция.

$R = \{ \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \mid \alpha_i \in A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$

$\langle \alpha_1 \rangle = \alpha_1$

$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle = \langle \alpha_1, \langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \rangle$

Основные с-ва на бинар. отношения.
Нем $R \subseteq A \times A$.

R е:

a) рефлексивна, ако

$$(\forall a \in A) [\langle a, a \rangle \in R]$$

b) симметрична, ако

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A) [\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R]$$

c) транзитивна, ако

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A) [\langle a, b \rangle \in R \text{ \& } \langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R]$$

d) антирефлексивна, ако

$$(\forall a \in A) [\langle a, a \rangle \notin R]$$

e) антисимметрична, ако

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A) [\langle a, b \rangle \in R \text{ \& } \langle b, a \rangle \in R \Rightarrow a = b]$$

или

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A) [a \neq b \text{ \& } \langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R]$$

f) строго антисимметрична, ако

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A) [a \neq b \Rightarrow ((\langle a, b \rangle \in R \text{ \& } \langle b, a \rangle \notin R) \vee (\langle a, b \rangle \notin R \text{ \& } \langle b, a \rangle \in R))]$$

е) Асимметрично отношение

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[\langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \notin R]$$

Прим. $\subseteq A \times A$ е: рефл., сим., транз.
 $\neq \subseteq A \times A$ е: антирефл., сим., не е транз.
 $\subset \subseteq A \times A$ е: транз., антирефл., антисим.,
симметрично. \equiv асим., транз.
 $\leq \subseteq A \times A$ е: рефл., транз., антисим.

Зад. $\forall x, y \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}^2$:

$$(\forall k \in \mathbb{N})[x + k = y] \Leftrightarrow \underline{x R y}$$

- рефл. \checkmark
- не е сим.: $1 + 3 = 4$, но $4 + ? = 1$
- Транзитивен \checkmark
- не е антирефл.: $1 + 0 = 1$
- Антисим. е $x + k_1 = b$ и $b + k_2 = x \rightarrow$
 $x = b \checkmark$
- не е симметрично.

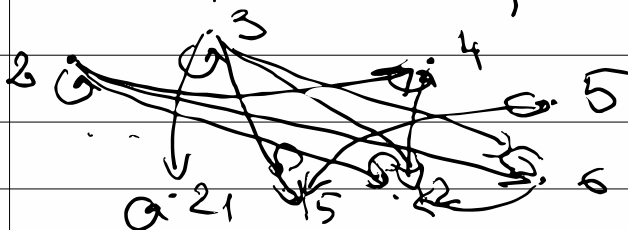
Има още задачи !

300. Невр $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$.
 $\langle a, b \rangle \in R \Leftrightarrow a \mid b$
 $a, b \in A$ def

а) представьте R с таблицей, с
 и-б, с ориентированным графом,
 с диаграммой Хэсби

a/b	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0	0
12	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	1

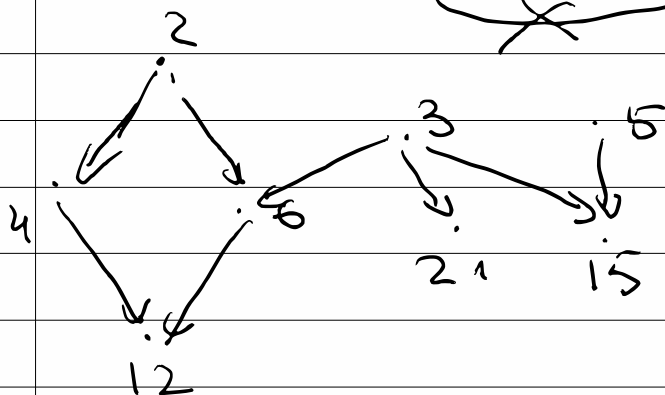
$R = \{ \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \dots, \langle 21, 21 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \dots, \langle 2, 12 \rangle, \dots \}$



с заданной на X асе (определен
граф:

без рефлексивности и без транзитивности
т.е. $a|b$ и $b|c$, но не $a|c$.

$a \rightarrow b \rightarrow c$
 ~~$a \rightarrow c$~~



б) Какое R строго СВ-отношение

- рефл. $e \rightarrow$ не является
- не является симметричным, но является антисимметричным
- не является сильно антисимметричным
- транзитивно

3.22 $R_> = \{ \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \}$

$R_>, R_<, R_<=, R_>=, R_< \neq$ относит. гл.

Доказ.:
 $R_< \neq$

a) $R_< \cap R_<= = R_<=$

b) $R_< \Delta R_<= = R_<=$

c) $R_<= = R_< \cup R_<=$

d) $\overline{R_<} = R_<=$

★ Решим ли эквивалентность
 рефл., сим., транзит.

прим: =

Ано R е реф. по экв. бл A то
 $a \in A : [a]_R = \{ b \mid a R b, b \in A \}$
 ето е по экв. сур R .

$$A = \bigcup_{a \in A} [a], \quad [a] \cap [b] = \emptyset \iff a \bar{R} b.$$

300/ $\emptyset \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* = \{ \langle u, v \rangle \in R \}$

значит u и v имеют длину и
 являются словами $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$
 рел.но экв. ли е?
 Σ^* - всевозможные слова 0 и 1.
 ✓

300/ Как описать $B \subseteq A$.

Де ф. R в $\mathcal{P}(A)$:

$$R = \{ \langle X, Y \rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid (X \Delta Y) \in B \}$$

Докаем R е рел.но экв. и \exists

для $X \in \mathcal{P}(A)$ существует такое
 слово $Y \in \mathcal{P}(A)$, т.е. $X \cap B = \emptyset$.

$$A \not\subseteq B \quad \& \quad B \not\subseteq A$$

Diagram illustrating the structure of a binary tree (likely a Huffman tree) with nodes labeled with binary strings and leaf nodes labeled with letters:

```
graph TD; Root(( )) --> L1a[010]; Root --> L1b[011]; L1a --> L2a[0100]; L1a --> L2b[0101]; L1b --> L2c[0110]; L1b --> L2d[0111]; L2a --> L3a[01000]; L2a --> L3b[01001]; L2b --> L3c[01010]; L2b --> L3d[01011]; L2c --> L3e[01100]; L2c --> L3f[01101]; L2d --> L3g[01110]; L2d --> L3h[01111]; L3a --> L4a[010000]; L3a --> L4b[010001]; L3b --> L4c[010010]; L3b --> L4d[010011]; L3c --> L4e[010100]; L3c --> L4f[010101]; L3d --> L4g[010110]; L3d --> L4h[010111]; L3e --> L4i[011000]; L3e --> L4j[011001]; L3f --> L4k[011010]; L3f --> L4l[011011]; L3g --> L4m[011100]; L3g --> L4n[011101]; L3h --> L4o[011110]; L3h --> L4p[011111]; L4a --> L5a[0100000]; L4a --> L5b[0100001]; L4b --> L5c[0100010]; L4b --> L5d[0100011]; L4c --> L5e[0100100]; L4c --> L5f[0100101]; L4d --> L5g[0100110]; L4d --> L5h[0100111]; L4e --> L5i[0101000]; L4e --> L5j[0101001]; L4f --> L5k[0101010]; L4f --> L5l[0101011]; L4g --> L5m[0101100]; L4g --> L5n[0101101]; L4h --> L5o[0101110]; L4h --> L5p[0101111]; L4i --> L5q[0110000]; L4i --> L5r[0110001]; L4j --> L5s[0110010]; L4j --> L5t[0110011]; L4k --> L5u[0110100]; L4k --> L5v[0110101]; L4l --> L5w[0110110]; L4l --> L5x[0110111]; L4m --> L5y[0111000]; L4m --> L5z[0111001]; L4n --> L5aa[0111010]; L4n --> L5ab[0111011]; L4o --> L5ac[0111100]; L4o --> L5ad[0111101]; L4p --> L5ae[0111110]; L4p --> L5af[0111111]; L5a --> L6a[01000000]; L5b --> L6b[01000001]; L5c --> L6c[01000010]; L5c --> L6d[01000011]; L5d --> L6e[01000100]; L5d --> L6f[01000101]; L5e --> L6g[01000110]; L5e --> L6h[01000111]; L5f --> L6i[01001000]; L5f --> L6j[01001001]; L5g --> L6k[01001010]; L5g --> L6l[01001011]; L5h --> L6m[01001100]; L5h --> L6n[01001101]; L5i --> L6o[01001110]; L5i --> L6p[01001111]; L5j --> L6q[01010000]; L5j --> L6r[01010001]; L5k --> L6s[01010010]; L5k --> L6t[01010011]; L5l --> L6u[01010100]; L5l --> L6v[01010101]; L5m --> L6w[01010110]; L5m --> L6x[01010111]; L5n --> L6y[01011000]; L5n --> L6z[01011001]; L5o --> L6aa[01011010]; L5o --> L6ab[01011011]; L5p --> L6ac[01011100]; L5p --> L6ad[01011101]; L5q --> L6ae[01011110]; L5q --> L6af[01011111]; L5r --> L6ag[01100000]; L5r --> L6ah[01100001]; L5s --> L6ai[01100010]; L5s --> L6aj[01100011]; L5t --> L6ak[01100100]; L5t --> L6al[01100101]; L5u --> L6am[01100110]; L5u --> L6an[01100111]; L5v --> L6ao[01101000]; L5v --> L6ap[01101001]; L5w --> L6aq[01101010]; L5w --> L6ar[01101011]; L5x --> L6as[01101100]; L5x --> L6at[01101101]; L5y --> L6au[01101110]; L5y --> L6av[01101111]; L5z --> L6aw[01110000]; L5z --> L6ax[01110001]; L5aa --> L6ay[01110010]; L5aa --> L6az[01110011]; L5ab --> L6ba[01110100]; L5ab --> L6bb[01110101]; L5ac --> L6bc[01110110]; L5ac --> L6bd[01110111]; L5ad --> L6be[01111000]; L5ad --> L6bf[01111001]; L5ae --> L6bg[01111010]; L5ae --> L6bh[01111011]; L5af --> L6bi[01111100]; L5af --> L6bj[01111101]; L5ag --> L6bk[01111110]; L5ag --> L6bl[01111111]; L6a --> L7a[010000000]; L6b --> L7b[010000001]; L6c --> L7c[010000010]; L6c --> L7d[010000011]; L6d --> L7e[010000100]; L6d --> L7f[010000101]; L6e --> L7g[010000110]; L6e --> L7h[010000111]; L6f --> L7i[010001000]; L6f --> L7j[010001001]; L6g --> L7k[010001010]; L6g --> L7l[010001011]; L6h --> L7m[010001100]; L6h --> L7n[010001101]; L6i --> L7o[010001110]; L6i --> L7p[010001111]; L6j --> L7q[010010000]; L6j --> L7r[010010001]; L6k --> L7s[010010010]; L6k --> L7t[010010011]; L6l --> L7u[010010100]; L6l --> L7v[010010101]; L6m --> L7w[010010110]; L6m --> L7x[010010111]; L6n --> L7y[010011000]; L6n --> L7z[010011001]; L6o --> L7aa[010011010]; L6o --> L7ab[010011011]; L6p --> L7ac[010011100]; L6p --> L7ad[010011101]; L6q --> L7ae[010011110]; L6q --> L7af[010011111]; L6r --> L7ag[010100000]; L6r --> L7ah[010100001]; L6s --> L7ai[010100010]; L6s --> L7aj[010100011]; L6t --> L7ak[010100100]; L6t --> L7al[010100101]; L6u --> L7am[010100110]; L6u --> L7an[010100111]; L6v --> L7ao[010101000]; L6v --> L7ap[010101001]; L6w --> L7aq[010101010]; L6w --> L7ar[010101011]; L6x --> L7as[010101100]; L6x --> L7at[010101101]; L6y --> L7au[010101110]; L6y --> L7av[010101111]; L6z --> L7aw[010110000]; L6z --> L7ax[010110001]; L6aa --> L7ay[010110010]; L6aa --> L7az[010110011]; L6ab --> L7ba[010110100]; L6ab --> L7bb[010110101]; L6ac --> L7bc[010110110]; L6ac --> L7bd[010110111]; L6ad --> L7be[010111000]; L6ad --> L7bf[010111001]; L6ae --> L7bg[010111010]; L6ae --> L7bh[010111011]; L6af --> L7bi[010111100]; L6af --> L7bj[010111101]; L6ag --> L7bk[010111110]; L6ag --> L7bl[010111111]; L7a --> L8a[0100000000]; L7b --> L8b[0100000001]; L7c --> L8c[0100000010]; L7c --> L8d[0100000011]; L7d --> L8e[0100000100]; L7d --> L8f[0100000101]; L7e --> L8g[0100000110]; L7e --> L8h[0100000111]; L7f --> L8i[0100001000]; L7f --> L8j[0100001001]; L7g --> L8k[0100001010]; L7g --> L8l[0100001011]; L7h --> L8m[0100001100]; L7h --> L8n[0100001101]; L7i --
```

* Разлика: минимален елемент
 или минимален елемент \neq
 (максимален елемент \neq максимален елемент)

максимален елемент

аз съм по-голям

(максимален елемент \neq максимален елемент и
 аз съм по-голям)

$$\rightarrow \forall x [x \leq a \Rightarrow x = a]$$

$$\rightarrow \forall x [a \leq x]$$

Може да има минимален елемент:

Ако има максимален елемент, то то е!

(Аналогично за максимален елемент)

* Обратна релация и композиция

$$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$$

$$R \circ S = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle x, z \rangle \in R \text{ и } \langle z, y \rangle \in S) \}$$

$$R^0 = Id_A$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R, n \geq 0.$$

