309 Докажете $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

309 Докажете м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^-$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

Важно да се използва композиция на две биекции е биекция !

$f_1 : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x$

$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^-$, $f_2(x) = -(x+1)$

$$f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\quad f_3(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ even} \\ -\frac{(x+1)}{2}, & x \text{ odd} \end{cases}$$

$h' : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1$, $h'(x) = 2x+1$

$$f_4 \leq h' \circ f_3,\quad f_4(x) = \begin{cases} x+1, & x \text{ even} \\ -x, & x \text{ odd} \end{cases}$$

$h'' : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $h'(x) = 2x$

$$f_5 \leq h'' \circ f_3,\quad f_5(x) = \begin{cases} x, & x \text{ even} \\ -(x+1), & x \text{ odd} \end{cases}$$

(зад) $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

a) $f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$

b) $f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$

c) $f(x,y) = 2x(2^y+1)$

Биекции ли са?

(зад) a) Ако f и g са ф-ции, то $f \cap g$ е ф-я

b) Ако f и g са ф-ции, за които $\forall x [x \in Dom(f) \cap Dom(g) \Rightarrow f(x) = g(x)]$, „съгласувани"

то $f \cup g$ е ф-я.

(зад) Нека $f: A \to B$ е произволна ф-я. Проверете, че:

a) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}[X \sigma Y] = f^{-1}[X] \sigma f^{-1}[Y]]$

$\sigma \in \{\cap, \cup, \setminus\}$

b) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f[X] \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq f^{-1}[Y]]$

c) При какви условия за f
- $(\forall X \subseteq A)[X = f^{-1}[f[X]]]$
- $(\forall Y \subseteq B)[Y = f[f^{-1}[Y]]]$
- $(\forall X, Y \subseteq A)[f[X] \setminus f[Y] = f[X \setminus Y]]$

Зад. Нека $F = \{f \mid f: A \to B\}$ и R е бинарна рел. в/у B.
Де деф.:
$S = \{\langle f, g \rangle \in F \times F \mid (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a) \rangle \in R]\}$

Докажете или дайте контра-пример за следните твърдения:
Ако R е:
a) рефлексивна, то S е рефл.
b) симетрична, то S е симетр.
c) транзитивна, то S е транзит.

! Да споменем CSB th

за всеки две мн-ва A и B,

$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$ & $\overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

! Th Cantor

Нека A е мн-во. Тогава $\overline{\overline{A}} \lneq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

зад Док-те $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ е изброимо!

за $D \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ и

$D = \{n_0 < n_1 < \dots < n_k\}$ и

$v = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$

$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, $f(v) = D_v$.

зад
- ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ изброимо ли е?
- $(0;1)_{\mathbb{R}}$ изброимо ли е?

Индукция

Принцип на индукцията (обикновена) за $\mathbb{N}$ числа

Нека $m \in \mathbb{N}$.

За всяко с-во $\varphi(n)$, ако:

(база) 1) $\varphi(m)$ е вярно

2) $\forall k \big(\underbrace{(\underbrace{(k \geq m) \,\&\, \varphi(k)}_{\text{инд. хипотеза}} \Rightarrow \varphi(k+1))}_{\text{стъпка}} \big)$

То $\varphi(n)$ е вярно за всяко $n \geq m$.

Нека $m \in \mathbb{N}$.

Д-вото, че с-во $\varphi(n)$ е вярно за вс. ест. число $n \geq m$ се състои в:

1) Д-во, че $\varphi(m)$ е вярно

2) Допускаме, че $\varphi(k)$ е вярно за произволно $k \geq m$.

3) Д-ваме, че $\varphi(k+1)$ е вярно.

Прим: | За вс. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, то

$$n^2 = 1+3+5+\dots+(2n-1).$$

Д-во | Нека $\varphi(n) \leftrightharpoons 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$.

(база): $\varphi(1)$ е в сила $\Leftrightarrow$ $1 = 1^2$. ✓

(инд. хип.): Нека за $k \geq 1$ е в сила $\varphi(k)$.

(стъпка): Искаме $\varphi(k+1)$ да е вярно:

$$1+3+5+\dots+(2(k+1)-1) =$$

$$= 1+3+5+\dots+(2k+1) =$$

$$= \underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}_{\overset{(i.h.)}{k^2}} + (2k+1) =$$

$$= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2.$$

Значи за вс. $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, то $\varphi(n)$ е в сила.

Принцип на силна математическа индукция за $\mathbb{N}$

Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и $a \geq b$.
За всяко с-во $\varphi(n)$, ако:

① $\forall m((b \geq m \geq a) \Rightarrow \varphi(m))$ и

② $\forall m((m > b) \,\&\, \varphi(a) \,\&\, \varphi(a+1) \,\&\, \dots \,\&\, \varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1))$, то

$\varphi(n)$ е в сила за всяко ест. число $n \geq a$.

Състои се д-вото в:

① Доказателство, че $\varphi(m)$ е вярно за $b \geq m \geq a$ (по-дебела база)

② Допускаме, че за произволно $m > b$, то $\varphi(k)$ е в сила за всяко k, т.е. $m \geq k \geq a$.

③ Доказателство, че $\varphi(m+1)$ е в сила.

Прим: Да се докаже $(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq 2 \rightarrow$ „n е просто" $\vee$ „n е произв. на прости числа"$]$

Реш: Нека $\varphi(n) \leftrightharpoons$ „n е просто" $\vee$ „n е произв. от прости числа".

База: $\varphi(2)$ дали е в сила?
Да 2 е просто

Инд.хип: Нека за $m > 2$, е-во $\varphi(k)$ е в сила за $m \geq k \geq 2$.

Стъпка: Дали $\varphi(m+1)$ е в сила?

Сл.1 $m+1$ е просто число $\rightarrow$ ✓

Сл.2 $m+1$ не е просто $\longrightarrow m = x.y$ за $m \geq x \geq 2$ и $m \geq y \geq 2$, т.е. е съставно

Но изп. (I.H) за x и y т.е. имаме $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ и значи и $m+1$ е произв. на прости числа.
и.

Значи за вс. $n \geq 2$ ест. число, то е или просто, или произв. от прости числа

(Зад) Да се докаже:

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 \mid (n^3 - n)$

d) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>1})\ n! < n^n$

e) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>14})\ n = 3.a + 8.b,\ a, b \in \mathbb{N}$

f) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in \mathbb{R})$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i . y^{n-i}$$

Прим за рекурсивна ф-я:

(Зад) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.е.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n . f(n-1) & , n \geq 1 \end{cases}$$

Да се докаже $f(n) = n!$

Прим. с рекурентно редица:

Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се определя по формулата:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 11 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}, \; n > 3 \end{cases}$$

Док, че за $n \geq 1$, то

$$a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$$

Зад. a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ деф.:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ f(n-1) + n, & \text{за } n \geq 2 \end{cases}$$

Док, че $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \; n \geq 1$

b) Редицата на Фибоначи:

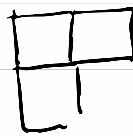
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; n \geq 2 \end{cases}$$

Док, че $a_n \le \Phi^{n-1}$, $n \ge 1$, където

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

златното сечение

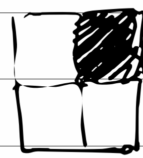
Зад. Тримино



Док, че всяко квадратно табло $2^n \times 2^n$ ($n \ge 1$) с едно произволно липсващо квадратче може да се покрие с няколко тримино.

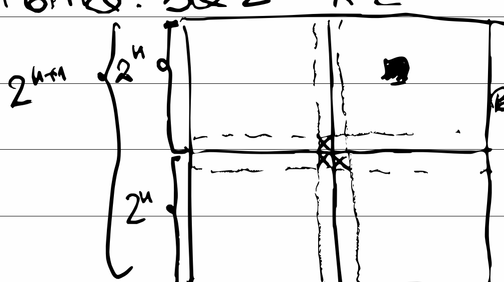
База: $n = 1$

$2^1 \times 2^1$



Хипотеза: за $2^n \times 2^n$

Стъпка: за $2^{n+1} \times 2^{n+1}$



Всичките 4 квадрата са от вида $2^n \times 2^n$ и за всеки от тях имаме инд. хип. ги опразваме.

$2^{n+1} = 2 . 2^n$