Нека $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

302) Може ли плочките от домино с числа $0, \dots, n-1$ ($= J_n$) да се наредят (всичките) в кръгова наредба (~~първото~~ и последната плочка са съседни).

Д-м, че такава наредба съществува т.с.т.к. n е нечетно.

М-во от плочки $\boxed{* \mid \#}$, където

- на мястото на $*$ и $\#$ седи точно едно число;
- за всяко $A \subseteq J_n$ и $|A| = 2$ съществува точно една плочка с тези числа $\boxed{2 \mid 3}\boxed{3 \mid 4}$
- за всяко $A \subseteq J_n$ и $|A| = 1$ съществува точно една плочка с това число. $\boxed{2 \mid 2}$

Върховете са J_n. КНГ

$a, b \in J_n$, $\{a, b\} \in E \leftrightarrow \{a, b\}$ е множ и $a, b \in J_n$

т.е. $E = \{\{a\} \mid a \in J_n\} \cup \{\{a, b\} \mid a, b \in J_n, a \neq b\}$

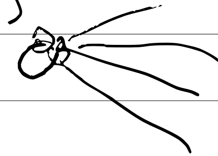
с примки е този КНГ.

$G = \langle J_n, E \rangle$ е пълен с ~~примки~~ → свързан.

Обхождане всички ребра на графа.

затворена Ойлерова верига (ЗОВ)

→ всеки връх е от едно и също степен т.е. имаме $(n+1)$-регулярен.



Th G е свързан граф.

Твърдя:

а) в G има ЗОВ ↔ има 0 върха от нече. степени

b) в G има ДОВ ↔ има 2 върха от нече. степени

G има кретова нерода $\Leftrightarrow$ n - нечетно

- свързан
- $(n+1)$-рег.
- пълен
- с n върха

Th Ойлер.

(302) Докажете, че за всеки граф G (неориентиран без примки и кратни ребра), то

$$\underbrace{\chi(G)}_{\text{върховото хроматично число}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}, \quad |E| = m$$

Нека $G = \langle V, E \rangle$, т.е. $|V| = n$, $|E| = m$

Нека доп., че м/у две антиклики няма ребро.
Но тогава с $\chi(G) - 1$ ще оцветим G.
минимално ↯ с избора на $\chi(G)$.

R над V т.ч. $\forall a, b \in V : aRb \iff a$ и b са в един и същ цвят.

$G' = \langle V', E' \rangle$.

$V' = V/_R$, $[a]_R, [b]_R \in V'$

$[a]_R E' [b]_R \iff (\exists a' \in [a]_R)(\exists b' \in [b]_R)[a' E b']$.

$|V'| = \chi(G)$

$|E'| = \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G) \cdot (\chi(G) - 1)}{2} \le |E| = m$

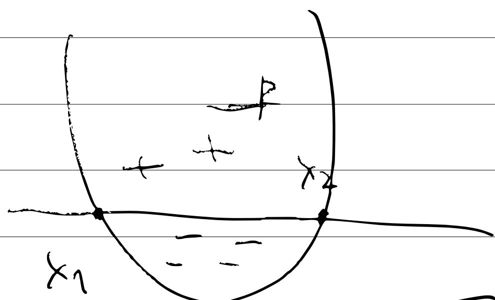
$$\chi(G) \cdot (\chi(G)-1) \leq 2 \cdot m$$

$$\underbrace{\chi(G)^2 - \chi(G) - 2m}_{} \leq 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot m = 1 + 8m$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+8m}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$$



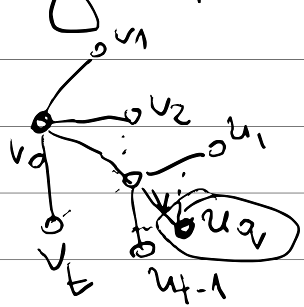
$$\underbrace{\max\left(0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+2m}\right) \leq \chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+2m}}_{}$$

(302) $G=\langle V,E\rangle$ е t-регулярен граф за $t>0$, чийто най-малък цикъл (A) е с дължина 4.
Док., че $|V|=n \geq 2t$.

$G=\langle V,E\rangle$, $|V|=n$, $(\forall v\in V)[d(v)=t]$

$t\in \mathbb{N}_{>0}$.

Нека $v_0\in V$. Тогава има $v_1,\dots,v_t\in V$ две по две различни, т.ч. $\{v_0,v_i\}\in E$, $i\in\{1,\dots,t\}$.



Нека $i\in\{1,\dots,t\}$.

Тогава $d(v_i)=t$. Значи съвц $u_1,\dots,u_{t-1}$ две по две разл. $\in V$, т.ч. $\{v_i,u_j\}\in E$, $j\in\{1,\dots,t-1\}$.

Допускаме, че за някое $v_k=u_q$, $k\in\{1,\dots,t\}$, $q\in\{1,\dots,t-1\}$.

Тогава имаме цикъл с дълж. 3

прим: $v_k v_0 u_q v_k$ с (*).

Така $\{v_1, \dots, v_t\} \cap \{u_1, \dots, u_{t-1}\} = \emptyset$

$v_0 \notin \{v_1, \dots, v_t\}$.

? $v_0 \in \{u_1, \dots, u_{t-1}\}$?

Да, ако за някое $q \in \{1, \dots, (t-1)\}$, т.е.

$v_0 = u_q$

$u_q v_i u_q$ с избор на $u_1, \dots, u_{t-1}$

и дълж на t-регулярността на G

Значи $v_0 \notin \{v_1, \dots, v_t\} \cup \{u_1, \dots, u_{t-1}\}$

$\{v_0\} \cup \{v_1, \dots, v_t\} \cup \{u_1, \dots, u_{t-1}\} \subseteq V$

$|\{v_0\} \cup \{v_1, \dots, v_t\} \cup \{u_1, \dots, u_{t-1}\}| = 2t \le n$

$|V| = n$

<u>def</u> | Множеството:

$\mathbb{B}^n \leftrightharpoons \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in \{0,1\},\ i \in \{1, \dots, n\}\}$

се нарича <u>n-мерен двоичен куб</u>

n-мерните вектори са <u>върховете</u>

на куба.

<u>def</u> | <u>Тегло на вектор</u> $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathbb{B}^n$

се нарича числото:

$$w(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

за $w : \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}^n \to \mathbb{N}$.

def / М-вото $B^n_k = \{\alpha \mid \alpha \in B^n, \omega(\alpha) = k\}$ се нарича <u>k-ти</u> слой на <u>n-мерния двоичен куб</u>.

def / <u>Разстояние по Хеминг</u> м/у два вектора $\alpha, \alpha' \in B^n$ се нарича числото

$$\rho(\alpha, \alpha') = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i'|$$

Векторите $\alpha, \alpha' \in B^n$ са <u>съседни</u>, ако $\rho(\alpha, \alpha') = 1$ и <u>противоположни</u>, ако $\rho(\alpha, \alpha') = n$.
Тако ненаредена двойка от съседни върхове на куба B^n се нарича <u>ребро</u> на куба.

def | М-вото $B^n_k(\alpha) \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') = k\}$ се нарича **сфера**, а $S^n_k(\alpha) \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') \le k\}$ – **кълбо** с център α.

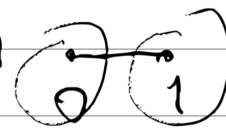
def | Последователност $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ от върхове на куба B^n се нарича **верига**, свързваща α_0 и α_k, ако $(\forall i \in \{0, \dots, k-1\})[\rho(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1]$.

Числото k се нарича дължина на веригата.

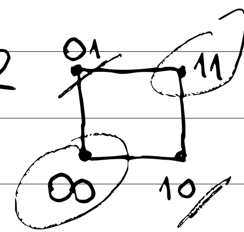
def | Номер на вектор $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B^n$ се нарича числото:

$$\nu(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$$

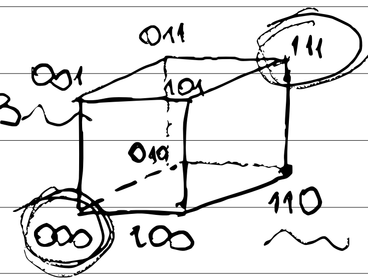
прим: $n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



3а)

a) $|B^n| = ?$

b) $|B^n_k| = ?$

c) $\nu(<1,1,0,0,1,0>) = ?$

d) $?\alpha$, т.ч. $\alpha \in B^n$ и $\nu(\alpha) = 19$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.ч. $2^{n-1} \leq \nu(\alpha) < 2^n$.

$$G = <\underbrace{B^n}_{V}, \underbrace{\{\{\alpha, \alpha'\} \mid \alpha, \alpha' \in B^n \ \& \ \rho(\alpha, \alpha') = 1\}}_{E}>$$

a) $|V| = ?$

$|V| = 2^n$

b) $|B^n_k| = \binom{n}{k}$

$B^n_k = \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \& \ \omega(\alpha) = k\}$

$B^n_k(<0,\dots,0>) \rightarrow \rho(\alpha, <0,\dots,0>) = k$

c) $\nu(\langle 1,1,0,0,1,0\rangle) = ?$

d) ? α, т.ч. $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 13$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

c) $\nu(\langle \overset{5}{1}, \overset{4}{1}, \overset{3}{0}, \overset{2}{0}, \overset{1}{1}, \overset{0}{0}\rangle) = 2 + 2^4 + 2^5 = 50$

$$\underset{\alpha \in B^n}{\nu(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$$

d) ? $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 13$

$\langle \overset{9}{0}, \overset{8}{0}, \overset{7}{0}, \overset{6}{0}, \overset{5}{0}, \overset{4}{1}, \overset{3}{0}, \overset{2}{0}, \overset{1}{1}, \overset{0}{1} \rangle$

e) $|E| = ?$

Нека $\alpha \in B^n$. $\alpha = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$

$\langle \bar{a}_1, \ldots, a_n\rangle$

$\langle a_1, \bar{a}_2, \ldots, a_n\rangle$

$\vdots$

$\langle a_1, a_2, \ldots, \bar{a}_n\rangle$

Т.е. G n-регулярен.

$|E| = \frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} \cdot n$

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.ч.

$2^{n-1} \leq \nu(\alpha) < 2^n$

$C = \{ \alpha \mid \alpha \in B^n_k \ \& \ 2^{n-1} \leq \nu(\alpha) \}$

$\nu(\alpha) = \langle \underset{n-1}{1} . \ \_\_ \ \underset{0}{\_\_} \rangle$

$\nu(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$

$|C| = \binom{n-1}{k-1}$

Зад 8 Док., че:

Нека $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) B^n е двуделен граф.

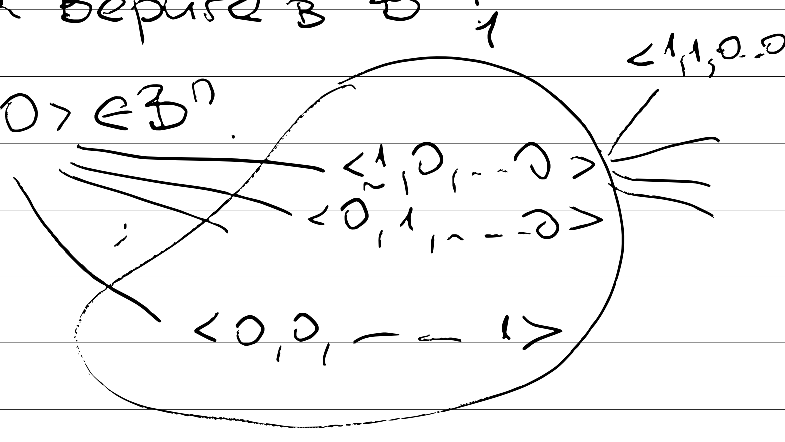
b) Върховото хроматично число на B^n е 2.

c) Ребровото хроматично число на B^n е n.

d) B^n е Хамилтонов

e) За кои n съществува Ойлерова верига в B^n?

a) Нека $\underline{\alpha = \langle 0, 0, \dots 0 \rangle} \in B^n$.
0



$\underline{\omega(\beta) \,\%\, 2 = \text{цвят на } \beta}$

Нека $\alpha, \beta \in B^n$ и α, β от един и същ цвят.

$\omega(\alpha) \,\%\, 2 = \omega(\beta) \,\%\, 2$ и $\{\alpha, \beta\} \in E(G)$.

т.е. $|\omega(\alpha) - \omega(\beta)|$ е четно

Но от $\{\alpha, \beta\} \in E \rightarrow \rho(\alpha, \beta) = 1$

$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i|$ → 1 е нечетно

$\rightarrow \rho(\alpha, \beta)$ е четно

↯

Следователно няма съседи от един и същ цвят.

c) От n-регулярността на G, то
χ' = реброво хром. число $\geq n$

Нека $\alpha \in B^n$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \alpha$

- I: $\langle \bar{a}_1, \dots, a_n \rangle$
- II: $\langle a_1, \bar{a}_2, \dots, a_n \rangle$
- $\vdots$
- $\langle a_1, a_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$

Оцвет.: разлика в поз. i $\rightarrow$ цвят i е реброто свързващо двата върха.

$\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\} \in E$ и имат еднакви цвят

БОО на поз. i α и β се разл.

def $\rightarrow$ β и γ се разл. пак на поз. i $\rightarrow$ $\alpha = \gamma$

само двоични за значение на i-та позиция в двоичен вектор

Релации над B^n

① **Лексикографска наредба**

$R_{lex} \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_{lex} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leqq \left(\begin{array}{l} a_1 < b_1 \ \text{или} \\ (\exists k \in \{2, \dots, n\})[(\forall i \in \{1, \dots, k-1\})[a_i = b_i] \ \& \ a_k < b_k] \end{array} \right)$$

$$\text{или} \ \underset{i=1}{\overset{n}{\&}} a_i = b_i$$

② **По номер**

$R_\nu \subseteq B^n \times B^n$, $\alpha, \beta \in B^n$:

$$\alpha R_\nu \beta \leqq \nu(\alpha) \leq \nu(\beta)$$

③ **Предшествие**

$R_\preceq \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_\preceq \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leqq (\forall i \in \{1, \dots, n\})[a_i \leq b_i]$$

303) Нека $0 \leq \ell < k \leq n$ и

$A(\alpha) = \{\beta \mid \beta \in B^n, \beta$ е сравним с $\alpha\}$.

Намерете броя на елементите на:

a) $A(\alpha) \cap B^n_k$, за $\alpha \in B^n_\ell$

b) $A(\alpha) \cap B^n_\ell$, за $\alpha \in B^n_k$

c) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_k$.

(300) Докажете, че в куба B^n има:

а) $n!$ различни нарастващи вериги с дължина n.

б) $k!\,(n-k)!$ различни нарастващи вериги с дължина n, съдържащи даден вектор $\alpha \in B^n_k$.