Принцип на Дирихле
Pigeonhole principle
Принцип на чекмеджетата.

* Ако имаме $n+1$ или повече предмета и искаме да ги поставим в n чекмеджета, то има поне едно чекм. с поне 2 предмета.
* Ако $A = n$ и $B = k$, т.е. $n > k$, то за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ ($Dom(f) = A$) съществуват поне два елемента на A: a_1 и a_2, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$

Обобщен вариант

* Ако имаме $n.k+1$ или повече предмета да поставим в n чекм., то ще има поне 1 чекм. с поне $k+1$ пред.

* Ако $\overline{A}=m$ и $\overline{B}=k$, и $m>n.k$, тогава за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ същ. поне $k+1$ точки от A: $a_1, \dots, a_{k+1}$, т.е.

$$f(a_1)=f(a_2)=\dots=f(a_{k+1}).$$

302) Аз имам 7 чифта чорапи в чекмеджето ми - един за всеки цвят от дъгата. Колко чорапа трябва да извадя т.е.:

а) да изтегля поне един чифт;

б) ако той има своите 7 чифта ръкавици отново по един чифт за цвят от дъгата и не мога да различа чорап от ръкавица, по колко неща трябва да изтегля за да имам със сигурност един чифт от всеки цвят чорапи и ръкавици.

Реш 1

а) Ще изтегля поне един чифт;

предмети: 8 чорапа

чекмеджета: 7 цвята

8 > 7 -> на 8мият път теглене

на чорап ще получим поне 1 чифт

б) Ако там има също 7 чифта ръкавици отново по един чифт за цвят от двата и не става за разлика чорап от ръкавица, пак колко неща трябва да изтегля за да имам със сигурност един чифт еднакъв цвят чорапи и ръкавици.

$$\text{предм.}: \cancel{2}\,22 \quad\to\quad 22 / \underbrace{7}_{n} = \underbrace{3}_{k} \text{ ост. } 1 \to$$

$$\text{чифт}: 7$$

$$22 = \underbrace{7}_{n} \cdot \underbrace{3}_{k} + 1 \Rightarrow \text{имаме } \underline{k+1} = \underline{3+1 = 4 \text{ предмета}}$$

$$\underline{\text{в един цвят}}$$

322 Шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа. Колко най-малко чорапа трябва да извадим наслуки, за да може измежду извадените със сигурност да има:

а) поне 2 едноцветни

б) поне 4 едноцветни

в) поне 2 разноцветни

Реш / а) предм: 3 чорапа

чекм: 2 цвята

• $\underset{n}{3}/\underset{}{2} = \underset{k}{1} + \text{ост. } \underset{1}{1} \rightarrow 3 = \underset{n}{2}.\underset{k}{1} + 1 \rightarrow$

$k+1 \rightarrow$ поне 2 едноцветни чорапа сме извадили

a) $21 \to \underset{\text{сини}}{\underline{10}} \to$ поне 1 червен изтеглен

$21 \to 20 \to$ поне 1 син изтеглен

→ поне 1 разноцветен чифт

b) поне 4 едноцветни

предмети: 7

чекм.: 2

$\underbrace{7}/\underbrace{2}_{n} = \underbrace{3}_{k} + \text{ост. } 1 \to 7 = \underbrace{3}_{k}.2 + 1 \to$

поне $\underline{k+1} = 3+1 = 4$ чорапа в един и същ цвят

?

$x = n.k + 1$

Зад. Покажете, че в група от n души има поне двама с равен брой познанства вътре в групата.

Познанство: симетрична и антирефлексивна и нетранзитивна

хора

$A = \{p_1, \ldots, p_n\} \longrightarrow |A| = n$

$B = \{0, 1, \ldots, n-1\} \longrightarrow |B| = n$

$f : A \to B$: $f(x)$ — # познанства на човека $x \in B$

тотална $\quad x \in A$

Сл.1 Ако има $(\exists x \in A)[f(x) = 0]$.

Т.е. $\neg(\exists y \in A)[f(y) = n-1]$

$f' : A \xrightarrow{\text{тотална}} B \setminus \{n-1\}$ свиване деф. към f.

$f = f'$

$|A| = n > |B \setminus \{n-1\}| = n-1$

По ПД тогава има $p_i, p_j \in A$ т.ч.

$f(p_i) = f(p_j)$

сл. 2 $\quad \neg(\exists x \in A)[f(x) = 0] \models 1$

$(\forall x \in A)[f(x) \neq 0] \models 1$

$(\forall x \in A)[f(x) \geq 1]$

$f' : A \xrightarrow{\text{тотална}} B \setminus \{0\}$ свиване деф към f.

$f = f'$

$|A| = n > |B \setminus \{0\}| = n-1$

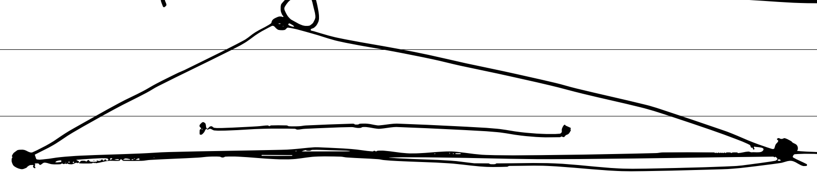
ПД ще имаме поне $p_i, p_j \in A$ т.ч.

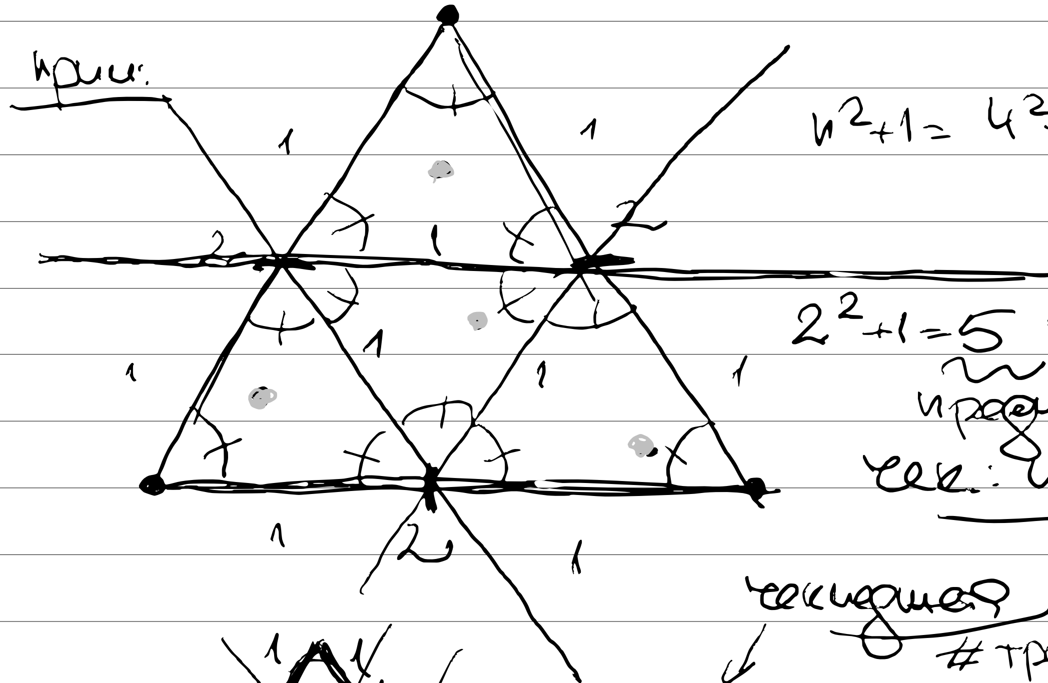
$f(p_i) = f(p_j)$.

(зад) Даден е равностр. Δ със страна на страната n>0. Док., че както и да се изберат n²+1 точки от вътрешността на Δ, то м/у тях ще има поне две на разстояние по-малко или равно на 1.

n>0

(*) Използваме наготово: всяка отсечка м/у две точки в произв. Δ е не по-голяма от най-голямата му страна. Равенство се достига само когато точките са краищата на тази страна.



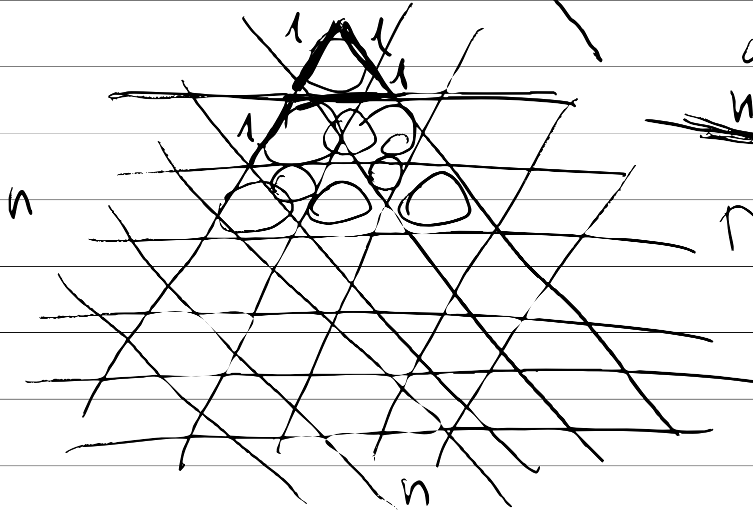


$n^2+1 = 4^2+1 = 16+1 = \underline{17}$

$2^2+1 = 5 = \underline{n^2+1}$

предмети

сек: $\underline{4} = n^2$



секциите

триъгълници

$$n^2 = 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

По ИП.

предмети: n^2+1

секции: n^2

Зад. Вие и приятел играете следната игра. Приятелят ви избира 10 числа измежду 1 до 40. Печелите, ако може да намерите две различни множества от по три числа измежду избраните 10, така че сумата от числата на едното м-во да е равна на сумата от числата на другото м-во. Покажете, че винаги може да спечелите играта.

$C \subseteq \{1, \ldots, 40\}, \quad |C| = 10$

$A \subseteq \{D \mid D \in \mathcal{P}(C) \ \& \ |D| = 3\}$

B – възможни суми на 3 числа от 1 до 40

* B – възможни суми на 3 числа от 1 до 40

$\min B = 6 = 1+2+3$

$\max B = 117 = 38+39+40$

$|B| = 117 - 6 + 1 = 112$

* $|A| = ?$

$A = \{ D \mid D \in P(C) \ \& \ |D| = 3 \}$

$|C| = 10 \qquad \binom{10}{3} = C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} = 120$

$|A| = 120$

$sum : A \to B, \quad |A| > |B|$

тотална $\quad sum(D) = \sum$ елем. на $D \in B$

По ПД има поне две разл. подм-ва с една и съща сума.

(300) Док., че м/у произволно избрани $n+1$ ест. числа, винаги може да се намерят две, разликата на които се дели на $n > 0$.

Избраните произволно $n+1$ ест. числа.

$A = \{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N}$

$|A| = n+1$

$B = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $|B| = n$

остатъци по mod n

$f : A \xrightarrow{\text{тотална}} B$

(сл.1) Има поне 2 еднакви числа в A. $m_i = m_j$

Тогава $m_i - m_j = 0 \bmod n = 0$.

(сл.2) Всички са различни помежду си.

$\bmod_n : A \xrightarrow{\text{тотална}} B \rightarrow$ поне 2 числа с еднакъв

$|A| = n+1$, $|B| = n$ остатък.

m_i, m_j : $\quad \mathrm{mod}_n(m_i) = \mathrm{mod}_n(m_j)$

$$\mathrm{mod}_n(x) = x \bmod n$$

$$m_i \equiv_n m_j \iff \underline{(m_i - m_j) \bmod n = 0}$$

$$n \mid (m_i - m_j)$$

т.е. m_i и m_j са свидетели за това свойство.

Комбинаторика

Основни принципи

1) **Принцип на биекцията**

Ако A и B са крайни м-ва, м/у които има биекция, то $|A| = |B|$.

взаимно чужди множества

2) **Принцип на събирането**

Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са крайни, две по две непресичащи се множества, то за тяхното обединение е изпълнено

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

разбираме на м-во $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

3) Принцип на изваждането

Ако A и B са крайни м-ва, то

$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

$B \subseteq A$

$|A| = |A| - |B|$

Още: $|\overline{A}| = |\mathcal{U}| - |A|$

„добрите случаи са всички без лошите".

4) Принцип на умножението

Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са крайни мн-ва, то за тяхното декартово произв. е изп., че $\left|\underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

"Ако трябва да изберем обекта от различен вид, като първия може да се избере по k_1 начина, втория по k_2 начина, ..., последния по k_n начина, то комплекта може да се образува по $k_1 . k_2 \ldots k_n$ начина."

5) **Принцип на делението**

Ако A и B са крайни м-ва и функцията $f: A \to P(B)$ е, т.ч.:

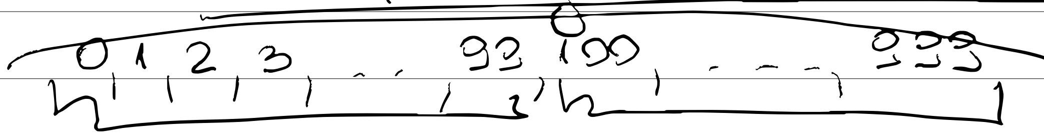
- $|f(x)| \neq 0 \to f(x) \neq \emptyset$ и $f(x) \subseteq B$
- $(\forall a_1, a_2 \in A)[f(a_1) \cap f(a_2) = \emptyset]$
- $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\left[b \in f(a) \Rightarrow |f(a)| = \dfrac{|B|}{|A|}\right]$

("Ако всеки обект е броен п пъти, то истинският брой = привиден брой / п")

Още го знаем така:

за A и B крайни м-ва и $|B| \neq 0$, то $|A| = \dfrac{|A \times B|}{|B|}$

322) Колко са трицифрените числа от 100 до 333?



100

$\underbrace{333}\ -\ \underbrace{100} + 1 = 300$

Принцип на изв

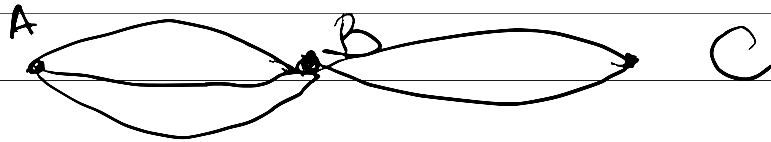
$3 \cdot 10 \cdot 10 = 300$

всички без 0

всички цифри

302

От град А до град В може да се придвижим по три различни начина, а от В до С – по два.
По колко начина може да се придвижим от А до С, минавайки през В?



$3 \cdot 2 = 6$

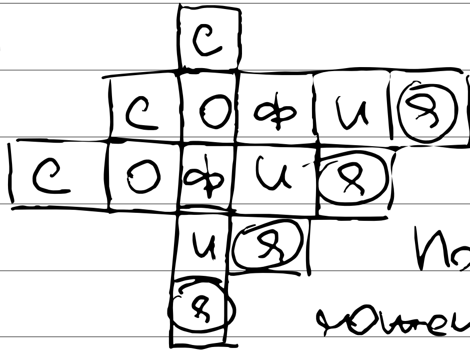
Принцип на умножението

3зад По колко начина може да се именува дете с първо име състоящо се най-много от три части, като всяка от тях се избира от списък с дължина 300?

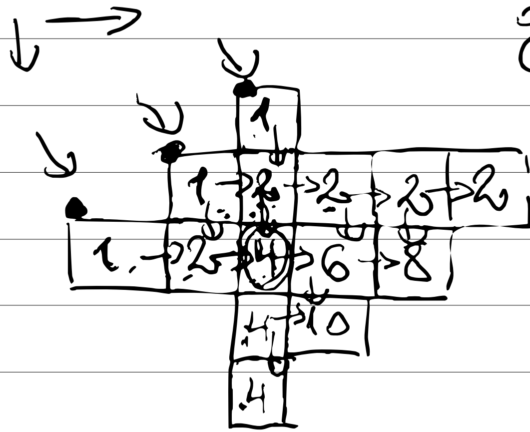
$$\underbrace{300 + 300.299 + 300.299.298}_{\text{принц. на събиране}}$$

пр. за ч-к

зад.



Можем да се движим само надясно или надолу. По колко начина можем да изпишем думата „София"?



$2+8+10+4=24$

успешни пътя

Зад. 1 $R \subseteq A^2$ и $|A| = n$. Колко релации R са:

a) рефл.

b) антирефл.

c) симетрични

d) антисиметрични

e) силно антисиметрични

---

a) рефл.

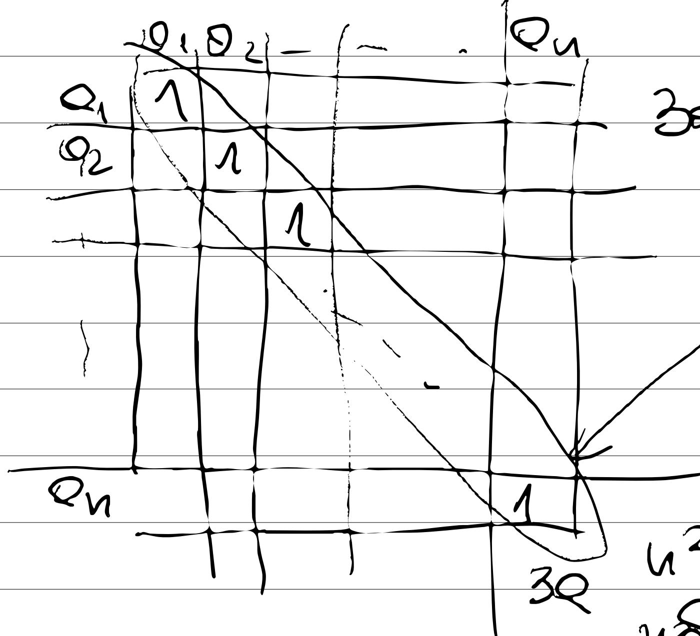
матрица на [illegible]

n — диагонални клетки

n^2

$n.(n-1)$ и

$$2 = 2^{n^2-n} = |\{f \mid f: A \times A \to \{0,1\} \ \& \ f(i,i) = 1 \text{ за } i \in A\}|$$



За рефл. то ите са и клетки

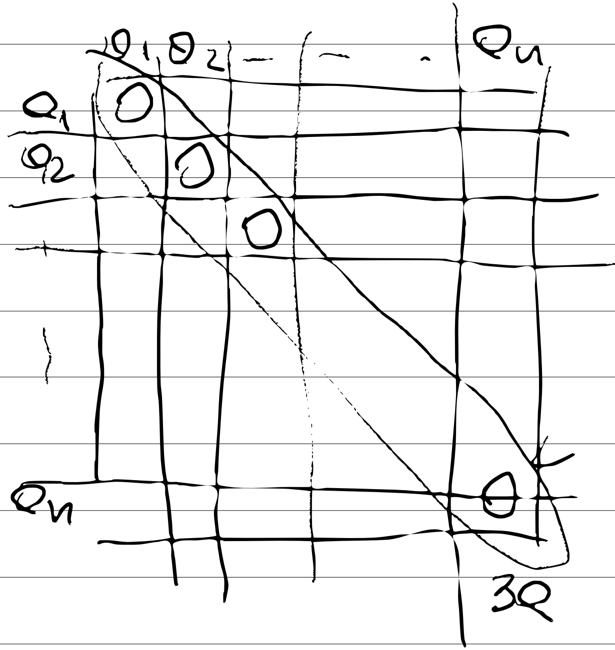
$n^2 - n$ всички фиксирани.

$n^2 - n$ трябва да изберем ст-ти за клетките.

$|\{f \mid f : A \times A \to \{0, 1\}$ & „диагонал от единици" $\}| =$

$= 2^{n^2 - n} = 2^{n \cdot (n-1)}$

b) антирефлексивни



n – фикс. клетки.

$\underline{n^2-n}$

2^{n^2-n} брой релации

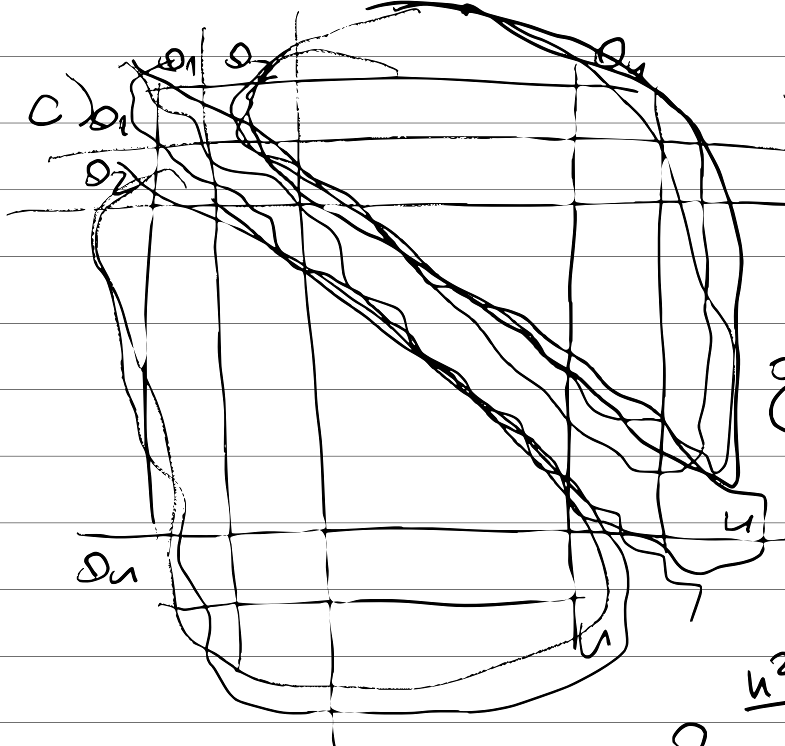
$\underline{f} : \underline{Refl_A} \longrightarrow Irrefl_A$

$\underline{f}(R) = R \setminus \underline{Id_A}$

биекция.

$|Refl_A| = 2^{n^2-n} \to |Irrefl_A| = 2^{n^2-n}$

c)



$\forall x \forall y (xRy \Rightarrow yRx)$

2

$\underbrace{n}_{\text{gueosvon}} + \frac{n^2 - n}{2} =$

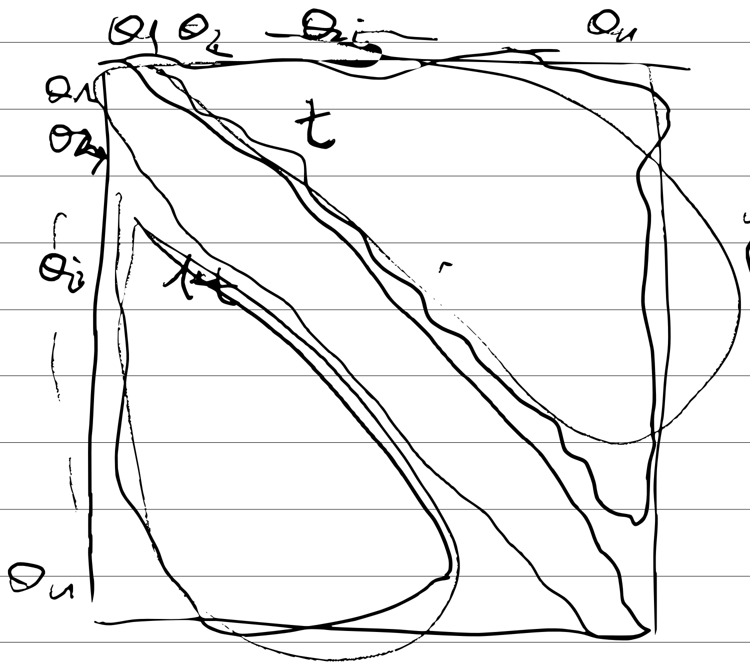
$= \frac{n^2+n}{2}$

$2^{\frac{n^2+n}{2}} = |Sym_A|$

d) антисиметрични

$$\forall x \forall y (xRy \,\&\, x \neq y \Rightarrow y \overline{R} x) \iff$$

$$\forall x \forall y (xRy \,\&\, yRx \Rightarrow x = y)$$



$$\underbrace{n}_{\text{диагон.}} + \frac{n^2 - n}{2} = $$

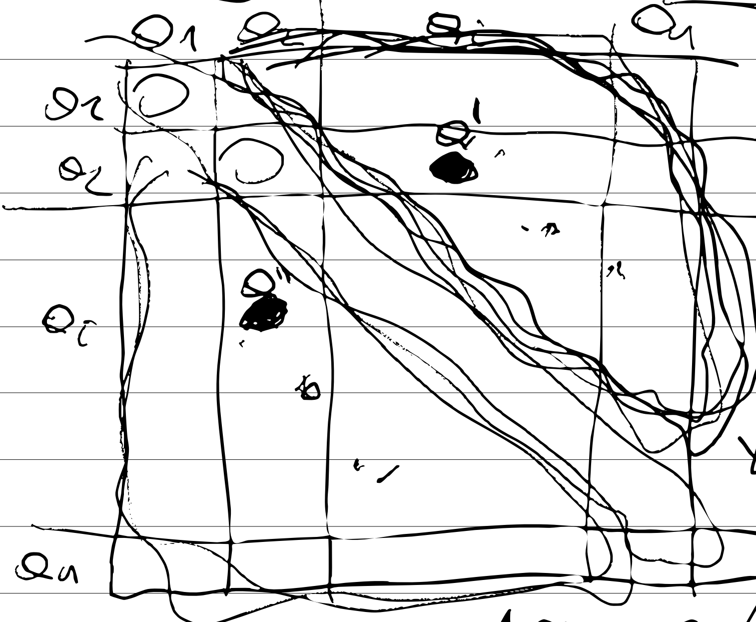
$$= \frac{n^2+n}{2}$$

$$|Asym_A| = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

е) силно антисиметрични релации

$$\forall x \forall y \left(x \neq y \Rightarrow (xRy \;\&\; y\bar{R}x) \vee (x\bar{R}y \;\&\; yRx) \right).$$

$(x\bar{R}y \vee yRx)$ & $(xRy \vee y\bar{R}x)$



$a' + a'' \leq 1$

Ω

$\langle a', a'' \rangle = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle$

$$2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

~~не може едновременно~~

Лоши случаи: $\langle a', a'' \rangle = \langle 1, 1 \rangle$.

$$2^{n^2} - \Sigma$$

Основни комбинаторни конфигурации с или без наредба, с или без повторение

Основна задача:

Дадени са ни n обекта $a_1, \ldots, a_n$ и искаме да изберем $b_1, \ldots, b_k$ (k от тях).

„Изборът" ни задава ф-я f,
$f: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

По колко начина можем да направим този избор, т.е. колко са функциите f?

① **Вариации с повторение**

Изображение наредбата

a_i - различими; b_j - различими;

f - произволно

Т.е. можем да повтаряме избора ни или величина наредбата.

При различими b_j, то f_1 и f_2 са различими

f_1	f_2
$1 \to 2$	$1 \to 3$
$2 \to 3$	$2 \to 2$

за b_1 за b_2 за b_k

$$\text{От: } \underbrace{n.n.\ldots n}_{k \text{ пъти } n} = n^k = \left|\tilde{V}_n^k\right|$$

② Вариации без повторение

Има значение наредбата.

a_i - различни; b_j - различни;

f - инекция.

Т.е. вълнува ни наредбата и не повторение.

Отг: $\underset{\text{за } b_1}{n} \cdot \underset{\text{за } b_2}{(n-1)} \cdot \underset{\text{за } b_k}{(n-(k-1))} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = |V_n^k|$

②' Пермутации без повторение

Като ②, но $k=n$.

Тогава $|P_k| = n \cdot (n-1) \ldots 1 = n!$

3) Комбинации без повторение

Няма значение наредбата.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - инекция

Тогава в примера за f_1 и f_2

f_1	f_2
$1 \to 2$	$1 \to 3$
$2 \to 3$	$2 \to 2$

, то f_1 не се различава от f_2.

Т.е. не различаваме кое е първо и кое е второ.

$$|C_n^k| = \frac{|V_n^k|}{|P_k|} = \frac{n.(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

$|P_k|$ - начини за пермутиране k елемента (не различаваме наредбата)

Биномен коеф. начини за вземем k елемента подмн-во на мн-во съдържащо n елемента.

④ **Комбинации с повторение**

Не ни интересува наредбата и може да повторение.

a_i - различими; b_j - неразличими;
f - произволна

прим/ $n = 3$ $a_1\ a_2\ a_3$
$k = 2$ $b_1\ b_2$

$\{a_1, a_2\}$ $\{a_1, a_1\}_M$
$\{a_1, a_3\}$ $\{a_2, a_2\}_M$
$\{a_2, a_3\}$ $\{a_3, a_3\}_M$

мулти мн-во

Тогава нека x_i - брой пъти, в които сме избрали a_i, $i=1,2,\dots,n$.

$x_1+x_2+\dots+x_n=k$.

Трябва да му намерим броя решения. Колко вектора $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ има т.ч. $x_i \geq 0$ за $i \in \{1,\dots,n\}$?

финален резултат:

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{k+(n-1)}{k} = \left| \tilde{C}^{\,n-1}_{n+k-1} \right|$$

★ Пермутации с повторение

$n = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$

$$\tilde{P}_n^{k_1,\dots,k_n}(k_1,\dots,k_n) = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_n)!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$$

колко пъти се
повтаря a_i за $i \in \{1,\dots,n\}$

(зад) Колко са четирицифрените цели положителни десетични числа, които могат да се образуват с цифрите от това м-во {0, 1, 2, 3, 4, 5}, т.е.:

а) в записа на числото има повтарящи се цифри

b) в записа на числото може да има повтарящи се цифри

c) в записа на числото може да има повтарящи се цифри и числата са нечетни.

302 a) Колко са двуцифрените числа съставени от цифрите $\{1, 3, 5, 7, 3\}$?

b) Ако цифрите са написани на картончета?

303 По колко начина можем да подредим в редица 2 зелени, 3 червени и 4 сини топки?

Зад. а) По колко начина можем да разпределим 10 ябълки (различни) м/у 3 деца?

Заб: Важно е не само колко ябълки, а и кои ябълки (различни са).

b) По колко начина хонорар от 10 монети левчета може да бъде разпределен м/у $3^{-ма}$ души?

Заб: може и 0 лв да получи човек.

Зад. Вероятност = $\dfrac{\#\text{ хубави случаи}}{\#\text{ всички случаи}} \in [0;1]$

При игра на бридж получавате 13 карти от общо 52. Какво е вероятността да получите:

a) точно 2 дами;

b) поне 2 дами?

c) поне 1 дама

322) По колко начина n елемента могат да се подредят:

a) в редица;

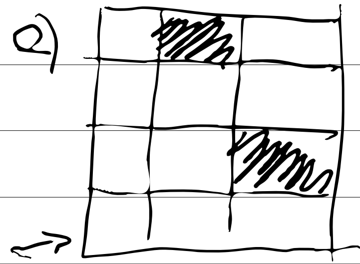
b) в кръг, ако различаваме двете посоки: $\circlearrowright \neq \circlearrowleft$

c) в кръг, ако не различаваме двете посоки: $\circlearrowright = \circlearrowleft$

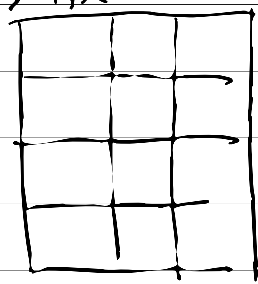
зад. По колко начина 10 души могат да се наредят в редица, така че трима приятеля да са един до друг?

(302) Брой пътищата от долния ляв до горния десен ъгъл? На всяка стъпка или ↑ или →

a)



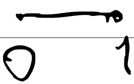
b) няма забранени клетки



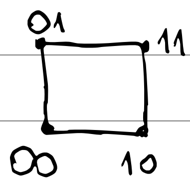
c) няма забранени клетки и таблицата е $m \times n$.

302) Хиперкуб (n-мерен куб):
- върхове: всички наредени n-орки от 0ли и 1ци;
- реброве: има м/у върхове, които се различават само в една позиция

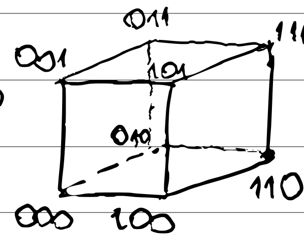
Прим: n = 1



n = 2



n = 3



а) Какъв вероятно ... хиперкуба?

b) Колко ребра има хиперкуба?

c) 000
$\downarrow$ 1 пр
001
$\downarrow$ 2 пръи
010
$\downarrow$ 3 пръи
100

Подредете n-торките, т.е. всеки две съседни n-торки (а също и първо и последно) да се различават само в 1 позиция.

б) <u>Принцип на включване и изключване</u>

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| +$$
$$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots$$

$$\dots + (-1)^{(n+1)} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Зад. В група от 20 студента футбол играят 9, волейбол - 7 и 4-ма волейбол и футбол.
Колко студента не играят нито футбол, нито волейбол?

(зад) В група от студенти всеки знае поне един чужд език, като 13 знаят английски, 25 - френски, 21 - немски, 7 - англ. и немски, 13 - англ. и френски, 9 - френски и немски, 3 - англ., фр. и нем.
Колко студенти има в групата.

Зад) Да се намери броят на m-цифр. цели неотрицателни десетични числа, които съдържат всяка от цифрите 0, 1, ..., 9 поне веднъж, като се допуска число да започва с нула.

Зад. Да се намери броят на разположенията на числата $1, 2, \ldots, n$ в n позиции, при които никое число $i \in \{1, \ldots, n\}$ не е на позиция с номер i.

Зад. На обед били поканени n двойки бивши съпрузи. По колко начина може да се разположат около кръглата маса с $2n$ места и едно място за домакина, така че никои два бивши съпрузи да не са един до друг?

Нютонов бином и методи за доказателства на комбинаторни тъждества

TODO!