def | Множеството:

$$B^n = \{\langle a_1,\dots,a_n\rangle \mid a_i \in \{0,1\},\ i \in \{1,\dots,n\}\}$$

се нарича n-мерен двоичен куб

n-мерните вектори са върховете на куба.

def | Тегло на вектор $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in B^n$ се нарича числото:

$$w(\langle a_1,\dots,a_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

за $w : \bigcup_{i=1}^{\infty} B^n \to \mathbb{N}$.

def / n-тото $B^n_k = \{\alpha \mid \alpha \in B^n, \omega(\alpha) = k\}$ се нарича k-ти слой на n-мерния двоичен куб.

def / Разстояние по Хеминг м/у два вектора $\alpha, \alpha' \in B^n$ се нарича числото

$$\rho(\alpha, \alpha') = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i'|$$

Векторите $\alpha, \alpha' \in B^n$ са съседни, ако $\rho(\alpha, \alpha') = 1$ и противоположни, ако $\rho(\alpha, \alpha') = n$.

Тако неподредена двойка от съседни върхове на куба B^n се нарича ребро на куба.

<u>def</u> | Мн-вото $\underline{B_k^n(\alpha)} \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') = k\}$ се нарича <u>сфера</u>, а $S_k^n(\alpha) \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') \leq k\}$ – <u>кълбо</u> с център α.

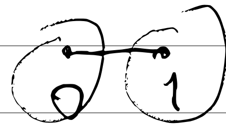
<u>def</u> | Последователност $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ от върхове на куба B^n се нарича <u>верига</u>, свързваща <u>α_0 и α_k</u>, ако $(\forall i \in \{0, \dots, k-1\}) [\rho(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1]$.
Числото k се нарича дължина на веригата.

def | Номер на вектор $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B^n$

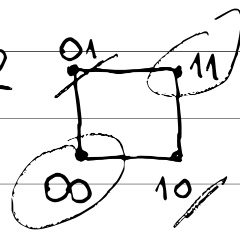
се нарича числото:

$$\nu(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$$

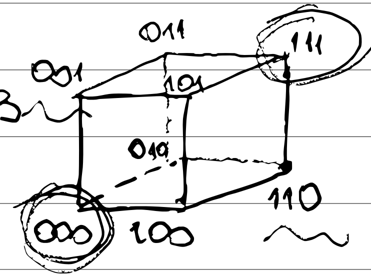
прим: $n=1$



$n=2$



$n=3$



392 a) $|B^n| = ?$

b) $|B^n_k| = ?$

c) $\nu(\langle 1,1,0,0,1,0\rangle) = ?$

d) ? α, т.с. $\alpha \in B^n$ и $\nu(\alpha) = 19$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.с. $2^{n-1} \le \nu(\alpha) < 2^n$.

$$G = \langle \underbrace{B^n}_{V}, \underbrace{\{\{\alpha,\alpha'\} \mid \alpha,\alpha' \in B^n \ \&\ \rho(\alpha,\alpha') = 1\}}_{E} \rangle$$

a) $|V| = ?$

$|V| = 2^n$

b) $|B^n_k| = \binom{n}{k}$

$B^n_k = \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \&\ \omega(\alpha) = k\}$

$B^{n}_k(\langle 0,\dots,0\rangle) \rightarrow \rho(\alpha, \langle 0,\dots,0\rangle) = k$

c) $\nu(\langle 1,1,0,0,1,0\rangle) = ?$

d) ? α, т.ч. $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 13$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

c) $\nu(\langle \overset{5}{1},\overset{4}{1},\overset{3}{0},\overset{2}{0},\overset{1}{1},\overset{0}{0}\rangle) = 2 + 2^4 + 2^5 = 50$

$$\underset{\alpha \in B^n}{\nu(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$$

d) ? $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 13$

$\langle \overset{}{\underset{9}{0}}, \underset{8}{0}, \underset{7}{0}, \underset{6}{0}, \underset{5}{0}, \underset{4}{1}, \underset{3}{0}, \underset{2}{0}, \underset{1}{1}, \underset{0}{1} \rangle$

e) $|E| = ?$

Нека $\alpha \in B^n$. $\alpha = \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$

$\langle \bar{a}_1, \dots, a_n\rangle$

$\langle a_1, \bar{a}_2, \dots, a_n\rangle$

$\vdots$

$\langle a_1, a_2, \dots, \bar{a}_n\rangle$

Т.е. G n-регулярен.

$$|E| = \frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} \cdot n$$

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.ч.

$2^{n-1} \le \nu(\alpha) < 2^n$ ✓

$C \subseteq \{\alpha \mid \alpha \in B^n_k \ \& \ 2^{n-1} \le \nu(\alpha)\}$

$\nu(\alpha) = \langle 1 \ . \ \_\_ \ \_\_ \ \_\_ \rangle$

$n-1 \qquad n-1 \qquad 0$

$$\nu(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^{n-i}$$

$$|C| = \binom{n-1}{k-1}$$

Зад Док, че:

Нека $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) B^n е двуделен граф.

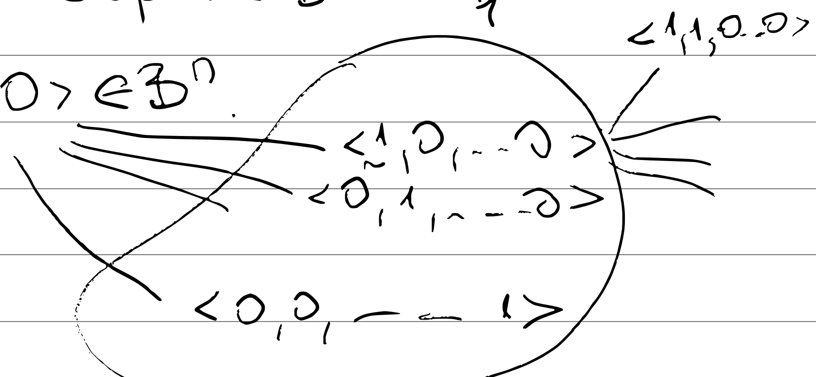
b) Върховото хроматично число на B^n е 2.

c) Ребровото хроматично число на B^n е n.

d) B^n е Хамилтонов

e) За кои n съществува Ойлерова верига в B^n?

a) Нека $\alpha = \langle \underline{0,0,\dots,0} \rangle \in B^n$.



$\omega(\beta)\ \%\ 2 = \text{цвят на } \beta$

Нека $\alpha, \beta \in B^n$ и α, β от един и същ цвят.

$\omega(\alpha)\%2 = \omega(\beta)\%2$ и $\{\alpha, \beta\} \in E$.

т.е. $|\omega(\alpha) - \omega(\beta)|$ е четно

Но от $\{\alpha, \beta\} \in E \rightsquigarrow \rho(\alpha, \beta) = 1$

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - b_i|$$

$\rightarrow \rho(\alpha, \beta)$ е четно

$\rightarrow 1$ е четно $\lightning$

Следователно няма съседи от един и същ цвят.

c) От n-регулярността на G, то
t = върхово хром. число $\geq n$

Нека $\alpha \in B^n$

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \alpha$

- I: $\langle \bar{a}_1, \dots, a_n \rangle$
- II: $\langle a_1, \bar{a}_2, \dots, a_n \rangle$
- $\vdots$
- $\langle a_1, a_2, \dots, \bar{a}_n \rangle$

Оцвет.: разлика в поз. i → цвят i е добро свързващо два върха.

$\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\} \in E$ и са от единия свой цвят.

БОО на поз. i α и β се разл.

def → β и γ се разл. пак на поз. i $\Rightarrow \alpha = \gamma$

само две опции за значение на i-та позиция в двоичен вектор

d) B^n е Хамилтонов?

За всяко $n \in \mathbb{N}_{>0}$, то B^n е Хамилтонов.

Ще използваме код на Грей.

По индукция:

База: $n=1 \leadsto$  $0 - 1$

$n=2 \leadsto$  $00 - 01 - 11 - 10$

$n=3 \leadsto$  $000 - 001 - 011 - 010 - 110 - 111 - 101 - 100$

ИП: за B^n има Хамилт. цикъл: $\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{2^n-1}$

Стъпка: за B^{n+1}:

$$0\alpha_0\,0\alpha_1\ldots 0\alpha_{2^n-1}\,1\alpha_{2^n-1}\,1\alpha_{2^n-2}\ldots 1\alpha_1\,1\alpha_0$$

С индукция показахме, че ~~за всяко~~ за всяко $n \in \mathbb{N}_{>0}$ B^n е Хамилтонов.

е) За кои n съществува Ойлерова верига в $\mathcal{B}^n$?

$n \in \mathbb{N}_{>0}$:

- n – четно ⇝ n-регулярен $(\forall v \in \mathcal{B}^n)[d(v) = n]$
  Затворена Ойлерова верига
- n – нечетно
  - $\underline{n = 1}$ ⇝ Ойлеров път.
  - $n > 1$ ⇝ нямаме нищо.

Релации над B^n

1) Лексикографска наредба

$R_{lex} \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1,\dots,a_n\rangle, \langle b_1,\dots,b_n\rangle \in B^n$:

$\langle a_1,\dots,a_n\rangle R_{lex} \langle b_1,\dots,b_n\rangle \leftrightharpoons$

$a_1 < b_1$ или

$(\exists k \in \{2,\dots,n\})[(\forall i \in \{1,\dots,k-1\})[a_i = b_i] \;\&\; a_k < b_k]$

или $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} a_i = b_i$

пълна наредба

също

2) По номер

$R_\nu \subseteq B^n \times B^n$, $\alpha, \beta \in B^n$:

$\alpha R_\nu \beta \leftrightharpoons \nu(\alpha) \le \nu(\beta)$

$\alpha = \langle 1,0,1\rangle$

$\beta = \langle 0,1,0\rangle$

$\alpha \not\preceq \beta$

$\beta \not\preceq \alpha$

3) Предшествие

$R_\preceq \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1,\dots,a_n\rangle, \langle b_1,\dots,b_n\rangle \in B^n$:

$\langle a_1,\dots,a_n\rangle R_\preceq \langle b_1,\dots,b_n\rangle \leftrightharpoons$

$(\forall i \in \{1,\dots,n\})[a_i \le b_i]$

несравними

303) Нека $0 \le \ell < k \le n$ и

$A(\alpha) = \{\beta \mid \beta \in B^n, \beta$ е сравним с $\alpha\}$

Намерете броя на елементите на:

a) $A(\alpha) \cap B^n_k$, за $\alpha \in B^n_\ell$

b) $A(\alpha) \cap B^n_\ell$, за $\alpha \in B^n_k$

c) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_k$.

$\beta \preceq \alpha \vee$

$\alpha \preceq \beta$

a) Нека $\alpha \in B^n_\ell$. Тогава нека $\beta \in A(\alpha) \cap B^n_k$.

От $\beta \in B^n_k \rightsquigarrow \beta$ има k единици и значи

$w(\alpha) = \ell < w(\beta) = k \Rightarrow \alpha \preceq \beta$.

иначе $\beta \in A(\alpha)$

$I(\alpha)$ - ф-я над векторите B^n, $n \in \mathbb{N}_{>0}$, която връща мн-во от индексите, на които имаме 1-ци във вектора

$I(\alpha) \subseteq I(\beta) \rightsquigarrow \binom{n-\ell}{k-\ell}$

единици за поставяне

b) Нека $\alpha \in B^n_k$, $\beta \in A(\alpha) \cap B^n_l$.

$w(\alpha) = k > w(\beta) = l$. $\to \beta \preceq \alpha$

$\beta \in A(\alpha)$ $\alpha = \langle 0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0 \rangle$

$I(\beta) \subseteq I(\alpha)$

$O(\alpha) \subseteq O(\beta)$

$n-k$

имаме нули в α

$$\binom{k}{l} = \binom{k}{k-l}$$

на k позиции във вектора β

трябва да сложим $k-l$ нули

c) Нека $\alpha \in B^n_k$. $|A(\alpha)| = ?$

$$|A(\alpha)| = \sum_{i=1}^{k-1} |A(\alpha) \cap B^n_i| + 1 + \sum_{i=k+1}^{n} |A(\alpha) \cap B^n_i|$$

300. Докажете, че в куба B^n има: ($n \in \mathbb{N}_{>0}$)

а) $n!$ различни нарастващи вериги с дължина n.

б) $k!.(n-k)!$ различни нарастващи вериги с дължина n, съдържащи даден вектор $\alpha \in B^n_k$.

а) $\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ нули}} \xrightarrow{n \text{ избора}} 01\ldots0 \xrightarrow{n-1 \text{ избора}}$

$n.(n-1).(n-2)\ldots1 = n!$

б) $\alpha \in B^n_k$

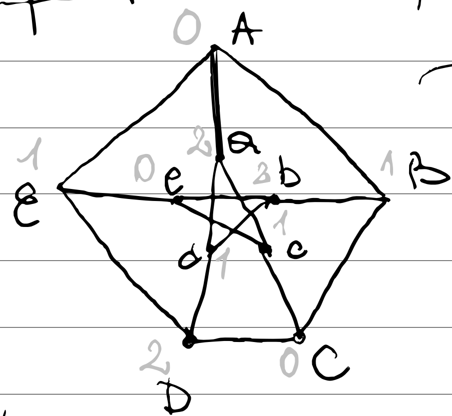
α надолу: сводим k-те 1-ци ↳ от а) $k!$

α нагоре: $(n-k)$ 0-ли нулираме 1-ци ↳ $(n-k)!$

а)

$k!.(n-k)!$

Граф на Петерсен



$P = \langle V, E \rangle$

ABCDEebdac

Зад | Намерете върховото хроматично число на P.

P е 3-регулярен $\Rightarrow \chi(P) \geq 3$.

A -> 0, E -> 1, B -> 1, D -> 2, C -> 0, a -> 2,
b -> 2, c -> 1, d -> 1, e -> 0.

$\varphi \to \chi(P) \leq 3$

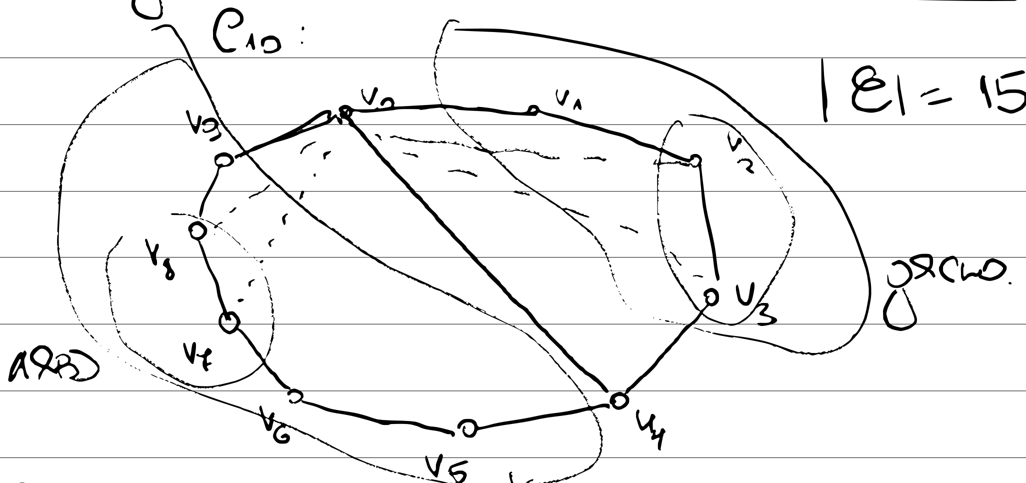
$\chi(G) = 3$

Тв | В P няма цикли с дължина 3 или 4.

300. Хамилтонов ли е Ф?

C_{10}:

$|E| = 15$



Допускаме, че е Хамилтонов.

Нека за v_0 да работим. БОО.

Допускаме че v_0 е свързан с v_4.

Тогава условно имаме две части от върховете и дясна. В своята част има как

v_9, v_8, v_7, v_0, v_5 v_1, v_2, v_3

да има най-ребра м/у върховете от цикъл с дълж. 3 или 4?.

=> Има ребра м/у лявата и дясната част. Но отляво има 5 върха, от дясно 3, а трябва да свържем 4 ребра и и получения граф да е 3-рег. ↯.

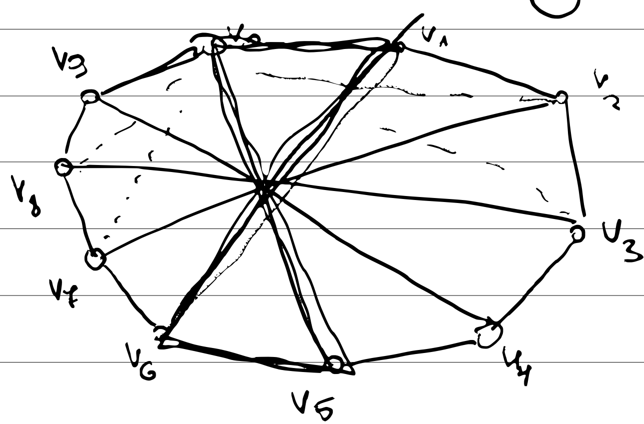
Аналогично за $v_9 - v_8$.

Нека $v_0 - v_5$.

Тогава $N(v_0) = \{v_9, v_8, v_7, v_6\}$

$N(v_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Имаме 4 ребра за допълним и да е 3 рег. получения граф. => ∃ с цикъл с дължина 4.



=> Ф не е Хамилтонов.

Булеви (двоични) функции

Припомняне:

Двоични ф-ции на 1 променлива

x	$\tilde{0}$	x	$\tilde{\overline{x}}$	$\tilde{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

константа 0 — id — отрицание на x — константа 1

$J_2 = \{0, 1\}$

$\mathcal{F}_2 = \{f : J_2^n \to J_2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

$\underbrace{J_2 \times \ldots \times J_2}_{n \text{ пъти}} = J_2^n$

м-вото от всички булеви ф-ции.

$\mathcal{F}_2^n = \{f : J_2^n \to J_2\}$

м-вото от всички булеви ф-ции на n променливи.

$|J_2^n| = ? = 2^n$

$|\vec{J_2}| = 2$

$|\mathcal{F}_2^n| = |\{f(\tilde{x}^n) \mid f(\tilde{x}^n) \in \mathcal{F}_2\}| = 2^{2^n}$

Двоични ф-ции на 2 променливи

x	y	$\tilde{0}$	$x\&y$	$\neg(x\to y)$	x	$\neg(y\to x)$	y	$x\oplus y$	$x\vee y$	$x\downarrow y$	$x\leftrightarrow y$	$\bar{y}$	$y\to x$	$\bar{x}$	$x\to y$	$x\mid y$	$\tilde{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$(x\&\bar{y})$

$(y\&\bar{x})$

XOR
$(x\&\bar{y})\vee(\bar{x}\&y)$

стелка на Пирс

еквивал.
$(x\&y)\vee(\bar{x}\&\bar{y})$

чертка на Шефер
(Nand $x\&y$)

?
$0|0=1$

$\overline{x\&y} = x|y$

Свойства:

1. Комутативност:
   - $x \& y = y \& x$
   - $x \vee y = y \vee x$
   - $x \oplus y = y \oplus x$

2. Асоциативност
   - $(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$
   - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
   - $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

3. Дистрибутивност
   - $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$
   - $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$
   - $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$

4. Идемпотентност
   - $x \& x = x$
   - $x \vee x = x$
   - $x \oplus x = \tilde{0}$

5. С-ва на отрицанието
   - $x \& \bar{x} = \tilde{0}$
   - $x \vee \bar{x} = \tilde{1}$
   - $x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$

6) С-ва на константите

- $x \& \tilde{0} = \tilde{0}$
- $x \& \tilde{1} = x$
- $x \vee \tilde{0} = x$
- $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$
- $x \oplus \tilde{0} = x$
- $x \oplus \tilde{1} = \overline{x}$

7) Закони за двойното отр.

$\neg(\overline{x}) = x$

8) Закони на Де Морган

- $\neg(x \vee y) = \overline{x} \& \overline{y}$
- $\neg(x \& y) = \overline{x} \vee \overline{y}$

392 Да се намери броят на:

a) двоичните функции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

b) —"— , които приемат стойност 1 на не-малко от k вектора от стойности на променливите;

c) —"— , които са симетрични.

def | ф-я $f(x_1,..,x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1,..,x_n) = f(x_{i_1},..,x_{i_n})$ за всяка пермутация $i_1,..,i_n$ на индексите $1,2,..,n$.

Т.е. функцията, която ст-т зависи само от # на 1-ците.

в) двойките ф-ции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

$x_1 x_2 \dots x_n$	$f(x_1, \dots, x_n)$
$0 0 \dots 0$	σ_0
$0 0 \dots 1$	σ_1
$\dots$	$\dots$
$0 1 \dots 1$	$\sigma_{2^{n-1}-1}$
$1 0 \dots 0$	$\tilde{\sigma}_{2^{n-1}-1}$
$1 0 \dots 1$	$\vdots$
$\dots$	$\vdots$
$1 1 \dots 1$	$\tilde{\sigma}_0$

$$U = \{ f \mid f \in F_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in J_2^n)[f(\alpha) \neq f(\tilde{\alpha})] \}$$

$$\boxed{|U| = 2^{2^{n-1}}} = \frac{2^{2^n}}{2} - 2^{2^{n-1}}$$

b) —"— които приемат стойност 1 на най-малко от k вектора от стойности на променливите;

$$v_f = \langle \underbrace{f(0\ldots0), f(0,\ldots1), \ldots\ldots, f(1,\ldots1)}_{2^n} \rangle$$

$$U \leq \{ f \mid f \in F_2^n \ \& \ 0 \leq w(f) < k \}$$

$$|U| = \binom{2^n}{0} + \binom{2^n}{1} + \ldots \binom{2^n}{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2^n}{i}$$

е) — || — , които са <u>симетрични</u>.

<u>def</u> | ф-я $f(x_1, .., x_n)$ е <u>симетрична</u>, ако $f(x_1, .., x_n) = f(x_{i_1}, .., x_{i_n})$ за всяка пермутация $i_1, .., i_n$ на индексите $1, 2, .., n$.

Т.е. функциите, които ст-т зависи само от # на 1-ците.

$\mathcal{U} = \{ f \mid f \in F_2^n \ \& \ f(x_1, .., x_n) = f(x_{i_1}, .., x_{i_n})$ за всяка пермутация на индексите $1, 2, .., n \}$

$V_f = \langle 0, 1, \ldots, 1\!\!\!/ \rangle$ ~> n+1-мерни вектори

- 0: 1-ци в $x_1, .., x_n$
- 1: 1-ца в $x_1, .., x_n$
- n: n едини. в $x_1, .., x_n$

$|\mathcal{U}| = 2^{n+1}$

$\neg, \Rightarrow$

$\neg(x \Rightarrow y) = x \,\&\, \bar{y}$

$x \,\&\, y = \neg(x \Rightarrow \bar{y}) = x \,\&\, \neg(\bar{y}) = x \,\&\, y$

$x \vee y$

$\bar{x} \Rightarrow y = \neg(\bar{x}) \vee y = x \vee y$