Нека $n \geq 2$.

302) Може ли плочките от домино с числа $\{0, \dots, n-1\} = J_n$ да се наредят (всичките) в кръгова наредба (първото и последната плочка са съседни).

Док., че такава наредба съществува т.с.т.к. n е нечетно.

М-во от плочици $\boxed{* \mid \#}$ където
- на мястото на $*$ и $\#$ седи точно едно число;
- за всяко $A \subseteq J$ и $|A| = 2$ съществува точно една плочка с тези числа
- за всяко $A \subseteq J$ и $|A| = 1$ съществува точно една плочка с това число.

Нека $V = J_n$, а

$$E = \{\{u\} \subseteq J_n \mid u \in J_n\} \cup \{\{u, v\} \mid u, v \in J_n \,\&\, u \neq v\}.$$

КНГ с примки, при това пълен. Знаем G е свързан. По т-ма на Ойлер, ще имаме затворена Ойлерова верига т.с.т.к. всеки връх е от

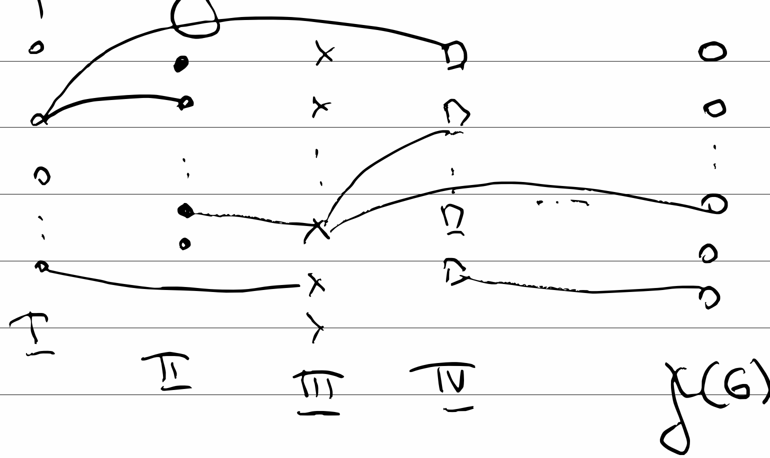
четна степен. Т.к. е пълен значи $(\forall v \in V)[d(v) = n+1 = (n-1) + 2]$
приятелите

Кога $n+1$ е четно? Когато n е нечетно!
Използваме тh на Ойлер и получаваме твърдението ни.

(302) Покажете, че за всеки граф G (неориентиран без примки и [illegible]), то

$$\underbrace{\chi(G)}_{\text{върховото хроматично число}} \le 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}, \quad |E| = m$$

Нека подредим върховете в дялове спрямо цветът им



Всяко едно такова да образува антиклика. Нека допуснем, че между две от антикликите не съществува ребро. Но тогава можем да ги слеем и оцветим в един и същи цвят и да получим, че с $\chi(G) - 1$ цвята можем да оцветим върховете в G.

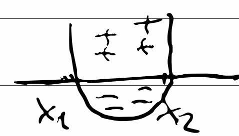
Значи м/у всеки две антиклики има поне едно ребро.

Нека комплектоваме антикликите в множества и си ги представим като върхове, за които знаем, че м/у всеки всеки две от тях има ребро. Тогава той има $\binom{\chi(G)}{2}$ ребра или $\binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G).(\chi(G)-1)}{2}$.

Само тая този брой не надвишава този на истинския граф G.

$$\frac{\chi(G).(\chi(G)-1)}{2} \le m$$

$$\chi(G)^2 - \chi(G) - 2m \le 0$$

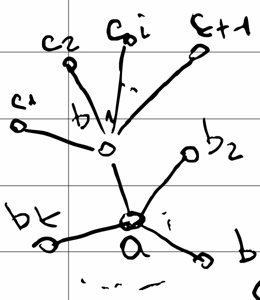


$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} = 1 \pm \sqrt{1/4+2m}$$

т.е. $\frac{1}{2} - \sqrt{1/4+2m} \le \chi(G) \le 1 + \sqrt{1/4+2m}$

(302) $G = \langle V, E\rangle$ е t-регулярен граф за $t > 0$, чийто най-малък цикъл е с дължина 4.
Док., че $|V| = n \geq 2t$.

Нека $a \in V$. От G t-рег $\leadsto$ има $b_1, \dots, b_t$ – различни помежду си върхове от V, т.е. $a \notin \{b_1, \dots, b_t\}$, но $\{a, b_i\} \in E$ за всяко $i \in \{1, \dots, t\}$. Нека $b_1, \dots, b_t$ са свидетели.



Да разгл. b_1. Т.к. $d(b_1) = t$ и G е t-рег. и $\{a, b_1\} \in E$ $\leadsto$ има $c_1, \dots, c_{t-1}$ – разл. помежду си върхове от V като $b_1, a \notin \{c_1, \dots, c_{t-1}\}$ (иначе ще получим цикъл с дълж. 3) но $\{b_1, c_i\} \in E$ за всяко $i \in \{1, \dots, t-1\}$.
Нека $c_1, \dots, c_{t-1}$ са свидетели.
Нека $i \in \{1, \dots, t-1\}$ произволно.
Ако $c_i = b_j$ за някое $j \in \{2, \dots, t\}$, то $a b_1 b_j a$ е цикъл с дълж. 3 $\leadsto$ ↯.

Значи $\{b_1, \dots, b_t\} \cap \{c_1, \dots, c_{t-1}\} = \emptyset$.

Също $a \notin \{b_1, \dots, b_t\} \cup \{c_1, \dots, c_{t-1}\}$,

т.е. $|\{b_1, \dots, b_t\} \cup \{c_1, \dots, c_{t-1}\} \cup \{a\}| = 2t$.

Така $|V| \geq 2t$.

def | Множеството:

$B^n \leftrightharpoons \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, n\} \}$

се нарича <u>n-мерен двоичен куб</u>

n-мерните вектори са <u>върховете</u>

на куба.

def | <u>Тегло на вектор</u> $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B^n$

се нарича числото:

$$\omega(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

за $\omega : \bigcup_{i=1}^{\infty} B^n \to \mathbb{N}$.

def | М-вото $B^n_k = \{ \alpha \mid \alpha \in B^n, \omega(\alpha) = k \}$

се нарича k-ти слой на <u>n-мерния

двоичен куб</u>.

def | <u>Разстояние по Хеминг</u> м/у

два вектора $\alpha, \alpha' \in B^n$ се

нарича числото

$$\rho(\alpha, \alpha') = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i'|$$

Векторите $\alpha, \alpha' \in B^n$ са <u>съседни</u>, ако $\rho(\alpha,\alpha') = 1$ и <u>противоположни</u>, ако $\rho(\alpha,\alpha') = n$.
Всяка ненаредена двойка от съседни върхове на куба B^n се нарича <u>ребро</u> на куба.

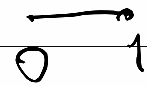
<u>def</u> | М-вото $\underline{B^n_k(\alpha)} \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') = k\}$ се нарича <u>сфера</u>, а $S^n_k(\alpha) \leftrightharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') \le k\}$ – <u>кълбо</u> с център α.

<u>def</u> | Последователност $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ от върхове на куба B^n се нарича <u>верига</u>, свързваща α_0 и α_k, ако $(\forall i \in \{0, \dots, k-1\})[\rho(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1]$.
Числото k се нарича дължина на веригата.

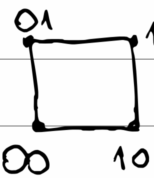
<u>def</u> | <u>Номер на вектор $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$</u> $\in B^n$ се нарича числото:

$$\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{n-i}$$

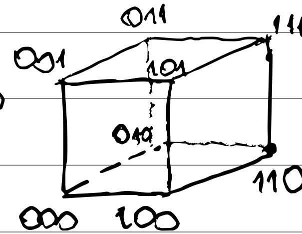
<u>Прим:</u> $n=1$



$n=2$



$n=3$



302 a) $|B^n| = ?$

b) $|B^n_k| = ?$

c) $\nu(<1,1,0,0,1,0>) = ?$

d) $?\alpha$, т.е. $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 19$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.е.

$2^{n-1} \le \nu(\alpha) < 2^n$

a) $|B^n| = 2^n$

b) $|B^n_k| = \binom{n}{k}$

c) $\nu(<\overset{5}{1},\overset{4}{1},\overset{3}{0},\overset{2}{0},\overset{1}{1},\overset{0}{0}>) = 2^5 + 2^4 + 2^1 = 32 + 16 + 2 = 50$

d) $\alpha \in B^{10}$, $\nu(\alpha) = 19$, $\alpha = <\overset{9}{0},\overset{8}{0},\overset{7}{0},\overset{6}{0},\overset{5}{0},\overset{4}{1},\overset{3}{0},\overset{2}{1},\overset{1}{0},\overset{0}{1}>$

e) Ако всеки ребро $\alpha \in B^n$, $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то съседите ще са му тези, чието разстояние по Хеминг от α е 1.

$$\alpha \quad \begin{cases} \beta_1 = \langle \bar{a}_1, a_2, \dots, a_n \rangle \\ \beta_2 = \langle a_1, \bar{a}_2, \dots, a_n \rangle \\ \dots \\ \beta_n = \langle a_1, a_2, \dots, \bar{a}_n \rangle \end{cases}$$

Т.е. от всеки връх излизат по $\underline{n}$ ребра. Върховете са 2^n, това $2^n.n$, но делим на 2, защото всяко ребро ще го броим два пъти. Така $\frac{2^n.n}{\cancel{2}} = 2^{n-1}.n$ за $n \geq 1$. Също показахме, че B^n е $\underline{n\text{-регулярен}}$.

f) За да е изпълнено, че $\alpha \in B^n_k$, то $\nu(\alpha) \geq 2^{n-1}$, то трябва $\alpha = \langle 1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Така остават още $(k-1)$ единици да разпределим на $(n-1)$ позиции и получаваме който отговор:

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

(509) Док, че:
Нека $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
a) B^n е двуделен граф.
b) Върховото хроматично число на B^n е 2.
c) Ребровото хроматично число на B^n е n.
d) B^n е Хамилтонов
e) За какви n съществува Ойлерова верига в B^n?

a) От това, че $\alpha, \beta \in B^n$, то те са съседни, ако $\rho(\alpha, \beta) = 1$, то значи, че се различават в четността си.
Тогава B^n е двуделен с дялове:
$V_1 \leftrightharpoons \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \&\ \nu(\alpha)$ е четно$\}$
$V_2 \leftrightharpoons \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \&\ \nu(\alpha)$ е нечетно$\}$
b) Следва от a)

c) n цвята са необходими, т.к. от Th имаме, че
реброво хром. число $\geq \max_{v \in V} d(v)$,

а B^n е n-рег. значи
реброво хром. число $\geq$ <u>n</u>.

<u>Достатъчни</u> са n цвята, защото оцветяваме с цвят k, $k \in \{1, \dots, n\}$ онези ребра свързващи онези върхове, чиято единствена разлика е в <u>k-та позиция</u>.