Семинар - 1

Съждителна и предикатна логика

I Съждителна логика

0. Съждения

Ще ги делим с букви $p, q, r, \dots$

Те могат да бъдат верни или неверни.

Основните логически операции са:

0.) отрицание (не): $\neg p$, $\bar{p}$

1.) конюнкция (и): $p \wedge q$, $p \& q$

2.) дизюнкция

2.0) включваща (или): $p \vee q$

2.1) изключваща (или/или): $p \oplus q$, $p \,\hat{}\, q$

„или само p, или само q"

3.) импликация (ако p, то q):

$p \Rightarrow q$, $p \to q$

антецедент (достатъчно) консеквент (необходимо)

4.) двустранна импликация (тогава и само тогава), още биимпликация, еквиваленция: $p \Leftrightarrow q$, $p \leftrightarrow q$

Сега нека T (true) и F (false) са някакви обекти като единственото ни условие е да са различни: $T \neq F$.

Таблици:

p	$\neg p$
F	T
T	F

p	q	$p \& q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	* $p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	T	T

* От лемата следва всичко!

Някои логически закони

- $p \Leftrightarrow p$
- $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- $p \,\&\, q \Rightarrow p \vee q$
  * $p \vee q \not\Rightarrow p \,\&\, q$ Грешно!
- $p \,\&\, (q \vee r) \Leftrightarrow (p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r)$
  * $p \,\&\, (q \vee r) \not\Leftrightarrow (p \,\&\, q) \vee r$ Грешно!

Както в аритметиката и тук имаме ред на операции, т.е. приоритет на дадените операции:

$$\neg \quad \& \quad \overset{\vee}{\oplus} \quad \rightarrow \quad \Leftrightarrow$$

висок → нисък

$(\neg p \,\&\, q) \Leftrightarrow ((\neg p) \,\&\, q)$, а не $\cancel{\neg(p \,\&\, q)}$

- $\neg(p \,\&\, q) \Leftrightarrow (\neg p \,\&\, \neg q)$ закони на
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ де Морган
- $\neg(p \oplus q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$
- $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \oplus q)$
- $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \,\&\, \neg q)$

- $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
- $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (p \Rightarrow q) \,\&\, (q \Rightarrow p) \\ (q \Leftrightarrow p) \\ (\neg p \Leftrightarrow \neg q) \\ (\neg q \Leftrightarrow \neg p) \end{array} \right.$
- $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$ (контрапозиция

  * $(p \Rightarrow q) \not\equiv (\neg p \Rightarrow \neg q)$

Има 2^{2^n} са възможните логически ф-ции на n аргумента.

При $n=1$: $\neg p$; T; F; p
(отрицание p; винаги истина; винаги лъжа; p).

Класификация на логическите изрази

0) Тавтологии: винаги верни, логически закони
1.) Противоречия: винаги неверни
2) Синтетични: понякога верни, понякога не верни

Таблицен метод (на Пирс) за класификация (разпознаване на трите вида логически изрази)

зад. 0.) Класиф. следните изрази

a) $p \& \neg p$

b) $p \& q \Rightarrow p \vee q$

c) $p \vee q \Rightarrow p \& q$

Прим. реш. a)

p	$\neg p$	$p \& \neg p$
T	F	F
F	T	F

т.е. $p \& \neg p$ е логическо противоречие.

зад. 1.) Док. логическите закони:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

c) $p \& (q \vee r) \Leftrightarrow (p \& q) \vee (p \& r)$

т.е. докажете, че са логически закони, тавтологии

зад. 2) Да се изрази $\vee$ чрез $\Rightarrow$.

Отг. $p \vee q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

II Предикатна логика

* Предикат (признак)
  - свойства (с 1 аргумент)
  - отношения (с 2 или повече арг.)

още семантични релации.

<u>Прим.:</u> $p(x) \stackrel{def}{=}$ „x е вегетарианец"

! x не е T или F, но p(x) е.

$x \in$ {„животни"} : <u>множество от допустими стойности</u> за аргум. на p. (МДС)

p(котка) = F, p(зайче) = T

$q(x,y) \stackrel{def}{=}$ „x е приятел с y" <u>отнош.</u>

$r(x) \stackrel{def}{=} q(\text{Петър}, y)$ <u>с-во</u>

$t(x,y,z) \stackrel{def}{=}$ „x е пил y в z"

МДС: $x \in$ {„совак"}, $y \in$ {„капучино"}, $z \in$ {„заведение"}.

Нека сега да попреговорим:

- Изречението: „Пенчо $\underbrace{\text{и}}_{\&}$ Пешо са програмисти".

Нека $p(x) \leftrightharpoons$ „x е програмист"

Тогава $p(\text{Пенчо}) \& p(\text{Пешо})$.

- Изречението: "Пенчо и Пешо са колеги".

Нека $q(x,y) \leftrightharpoons$ "x и y са колеги".

Тогава $q(\text{Пенчо}, \text{Пешо})$.

Квантори:

- $\forall$ - универсален квантор (всеки)
- $\exists$ - екзистенциален квантор (съществува)

прим. |

$\forall x\, q(x,y)$ с q предното отношение значи: „всички са колеги с y".
Получаваме с-во на y и нека $s(y) \overset{def}{\leftrightharpoons} \forall x\, q(x,y)$.

$\exists x\, q(x,y)$: „има поне един, който е колега с y" - това е свойство y

Някои логически закони:

- $\forall x \forall y\, q(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, q(x,y)$
- $\exists x \exists y\, q(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, q(x,y)$
- $\forall x \exists y\, q(x,y) \not\Rightarrow \exists y \forall x\, q(x,y)$

- $\exists y \forall x\, q(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\, q(x,y)$

- $\neg(\forall x\, p(x)) \Leftrightarrow \exists x\, \neg p(x)$
- $\neg(\exists x\, p(x)) \Leftrightarrow \forall x\, \neg p(x)$
- $\forall x\, p(x) \Leftrightarrow \neg \exists x\, \neg p(x)$
- $\exists x\, p(x) \Leftrightarrow \neg \forall x\, \neg p(x)$

Пример от ДИС с „$\neg$“:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon]$$

$\neg$

$$a \neq \lim_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})[n \geq n_0 \;\&\; |a_n - A| \geq \varepsilon]$$

Ще използваме абревиатури:

$(\forall x \in M)\, p(x) \leftrightharpoons \forall x\,(x \in M \Rightarrow p(x))$

$(\exists x \in M)\, p(x) \leftrightharpoons \exists x\,(x \in M \,\&\, p(x))$

при M непразна съвкупност от елементи.

(302) Казваме, че $f: D \to \mathbb{R}$ е равн. непрекъсната ф-я в/у D, ако:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(\forall x \in D)$

$[\,|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]$

Как е отрицанието?

ДСТР Семинар 0

Множества

* Множеството ще го приеме като първично понятие т.е. без формална дефиниция разчитайки на интуицията ни и факта, че е естествено понятие.
Като неформално определение можем да дадем следното:
„множество наричаме съвкупност от определени различни един от друг елементи".

Общо взето голяма работа с понятието множество, а в училище сумата години се учим да работим с небезизвестните $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и т.н.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \,\&\, n \neq 0\}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C} = \{a + b.i \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

* В множеството няма наредба!
Т.е. $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 2, 1\} = \ldots$

* Всички елементи на множеството са уникални:
$\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$
Има по-специални м-ва, в които ще позволяваме повторения.
Тях ще наричаме мултим-ва и ще бележим $\{1, 1, 2, 3\}_м$.
Тогава $\{1, 1, 2, 3\}_м \neq \{1, 2, 3\}_м$!

Доказано една от най-трудните концепции, която и късно се е появила, е тази на „нищо" (в числови термини 0, в термини на множество $\varnothing$ – празното мн-во).
$\varnothing$ е специално и се характеризира с това, че не съдържа нито един елемент.

* Множествата може да имат като елементи други множества
* с „A, B, C, ..." ще бележим конкретни м-ва.

Основни отношения м/у м-ва

① „$\in$" – принадлежност

„$x \in y$" се чете „м-вото x прин. на м-вото y"

при положение, че с $x, y, z, \dots$ означаваме променливи, които ще отъждествяваме с м-ва.

прим:/ $6 \in \mathbb{N}$, $6 \in \{6, 5, 1\}$, $6 \notin \{1, 2\}$

② „=" – равенство

„$x = y$" четем „м-вото x и y са равни"

Основната характеризация на =, която говорим за множества е, че множествата изцяло се определят по техните елементи:

$$x = y \underset{def}{\Leftrightarrow} \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

В теория ZF, която Скелето ще ви разкаже на лекции, това изречение се нарича аксиома за <u>обемност</u>.

! Разлика м/у <u>съдържание</u> и <u>обем</u>:

- под <u>съдържание</u> ще разбираме „смисъла" на м-вото
- под <u>обем</u> ще разбираме елементите, от които се състои множеството

<u>прим:</u> Нека $U = \{10, 20, 30, 5, 7, 9\}$.

$A \leftrightharpoons \{$"завършващите на 0 елементи на U"$\} = \{10, 20, 30\}$

$B \leftrightharpoons \{$"всички четни"$\} = \{10, 20, 30\}$

Сега по обем $A = B$, но по съдържание не са равни.

Други отношения са:

- $\subseteq$ - подмножество

  $x \subseteq y \leftrightharpoons \forall z(z \in x \Rightarrow z \in y)$

прим.: $\{0, 1, 2\} \subseteq \mathbb{N}$

- $\supseteq$ - надмножество

  $x \supseteq y \leftrightharpoons \forall z(z \in y \Rightarrow z \in x)$

прим.: $\mathbb{N} \supseteq \{0, 1, 2\}$

- $\subset$ - строго подмножество (още се бележи $\subsetneq$).

  $x \subset y \leftrightharpoons x \subseteq y \;\&\; x \neq y$

- $\supset$ - строго надмножество (още $\supsetneq$)

  $x \supset y \leftrightharpoons x \supseteq y \;\&\; x \neq y$

* $x \subseteq y$ т.с.т.к. $y \supseteq x$

(т.с.т.к. - тогава и само тогава когато)

Това, че $\emptyset$ можем да го характеризираме с израза:

$\forall x (x \notin \emptyset)$.

Универсалното мн-во U, с:

$\forall x (x \in U)$

! Проблем: нарушаване на Кантор, ако имаме твърде голяма свобода, в това за конструиране на мн-ва. Затова всяка теория има собствено универсално мн-во, а няма едно общо за всички!

* Още $x = y$ т.с.т.к. $x \subseteq y \ \& \ y \subseteq x$.

* Разлика м/у $\in$ и $\subseteq$!

$\{a, b, \{c\}\} \subseteq \{a, b, \{c\}, d, e\}$,

но

$\{a, b, \{c\}\} \notin \{a, b, \{c\}, d, e\}$

* С $|A|$, $\overline{\overline{A}}$ ще бележим броя на елементите на конкретното м-во А. Наричаме го мощност, кардиналност на м-вото А.

прим.: $|\emptyset| = 0$ $|\{\emptyset\}| = 1$

с-во: $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = \emptyset$

$x \subseteq y \rightarrow |x| \leq |y|$

$x \subsetneq y \rightarrow \begin{cases} |x| < |y| & \text{за крайни м-ва} \\ |x| \leq |y| & \text{за безкрайни} \end{cases}$

прим: $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$ са с равен брой елементи.

Задаване на множество

- чрез изброяване на елементи
- чрез свойство $\{x \in A \mid p(x)\}$
- чрез функция, $f(x)$
  $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$

$\{1, 2, 3\}$

$A = \{1, 2, 5\}$, $p(x) \leftrightharpoons$ „x е четно",

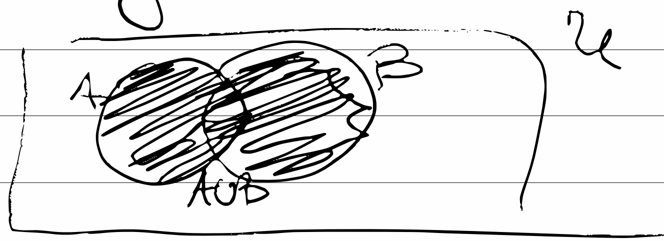
$B \leftrightharpoons \{x \in A \mid p(x)\} = \{2\}$

$f(n) = 2n$, $f[A] \leftrightharpoons \{2, 4, 10\}$

Операции врху множества

Нека A и B се произволни м-ва.

0) **Обединение** $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

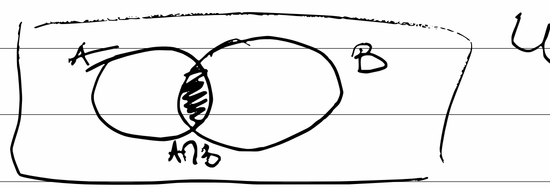


прим.: $A \cup A = A$, за секое м-во A

$A \cup \emptyset = A$, за секое м-во A

$\{1, 2, \emptyset\} \cup \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{1, 2, \emptyset, \{\emptyset\}\}$

1) **Сечение** $A \cap B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \in B\}$

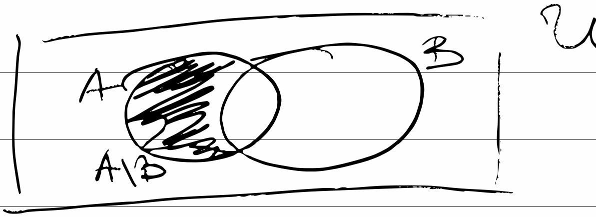


прим.: $A \cap A = A$, за вс. м-во A

$A \cap \emptyset = \emptyset$, за вс м-во A

$\{1, 2, \emptyset\} \cap \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{1, 2\}$

2) **Разлика** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\} =$



прим: $A \setminus A = \emptyset$
$A \setminus \emptyset = A$
$\emptyset \setminus A = \emptyset$
за вс. м-ва A

$\{1, 2, \emptyset\} \setminus \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\}$

в) Симетрична різниця

$A \Delta B = \{x \mid x \in A \oplus x \in B\} =$
$= \{x \mid (x \in A \,\&\, x \notin B) \cup (x \notin A \,\&\, x \in B)\} =$
$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

прим: $A \Delta \emptyset = A$
$A \Delta A = \emptyset$
$A \Delta B = B \Delta A$
$\{1, 2, \emptyset\} \Delta \{1, 2, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

4) <u>Допълнение</u> $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$

<u>прим.)</u>

$$\left.\begin{aligned} \overline{A} &= U \setminus A \\ A \setminus B &= A \cap \overline{B} \\ \overline{\overline{A}} &= A \end{aligned}\right\}$$ за вс. A, B м-ва

5) <u>Степенно м-во</u>

$$\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\} = 2^A$$

<u>прим.)</u>

$\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

$\mathcal{P}(\{2, 3\}) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

По-късно ще видим, че ако $|A| = n$, то $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

б) Декартово произведение

! Наредена двойка (дефиниция Куратовски):

$$\langle a, b\rangle \leftrightharpoons \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Тогава

$$A \times B \leftrightharpoons \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \,\&\, y \in B\}$$

прим.: $\{1,2\} \times \{\emptyset, \{\emptyset\}\} =$

$\{\langle 1, \emptyset\rangle, \langle 1, \{\emptyset\}\rangle, \langle 2, \emptyset\rangle, \langle 2, \{\emptyset\}\rangle\}$

...

TODO нотатка...

за редица и-ва $\cup$, $\cap$, $\times$ и задачи за добавяне!

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)[x \in A_i]\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)[x \in A_i]\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}$$