Още дефиниране:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)[x \in A_i]\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)[x \in A_i]\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$$

Идея още задачи с м-во и нещо индукция и задачи!

Задачи м-ва:

- $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$ (довърши)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$
- $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $C \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$
- $A \subseteq B \longrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

Вярно ли е, че?:

- ако $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Решения:

- $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$ (довърши)

Трябва да докажем, че

(a) $A \cup B \subseteq \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$

(b) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \subseteq A \cup B$

(a) От def. на $\subseteq$ т.е. искаме:

$\forall x (x \in A \cup B \Rightarrow x \in \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})})$

Нека $x \in A \cup B$ (ако предп. е лъжа, good, трябва и когато е истина да е окей). Тогава от def. на $\cup$, то $x \in A$ или $x \in B$. Б.О.О. нека

$x \in A$. Тогава $x \notin \overline{A}$ $(A \cap \overline{A} = \emptyset)$.
Тогава от $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A}$ то
$x \notin \overline{A} \cap \overline{B}$. Значи $x \in \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$.

(b) Нека $x \in \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$. Значи
$x \notin (\overline{A} \cap \overline{B})$. Тогава $x \notin \overline{A}$ или $x \notin \overline{B}$.
БОО, нека $x \notin \overline{A}$. Тогава $x \in A$.
Но $A \subseteq A \cup B$, т.е. $x \in A \cup B$.

- $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$

($\rightarrow$) Нека $A \subseteq B$.

(a) $A \cup B \subseteq B$

(b) $B \subseteq A \cup B$

(a) Нека $x \in A \cup B$. Значи $x \in A$
или $x \in B$. Ако $x \in A$, то от $A \subseteq B$
$x \in B$. Ако $x \in B$, то $x \in B$.

(b) Нека $x \in B$. Но $B \subseteq A \cup B$, т.е.
$x \in A \cup B$

($\leftarrow$) Нека $A \cup B = B$.

Нека $x \in A$. От $A \subseteq A \cup B$, то $x \in A \cup B$,
но $A \cup B = B$, значи $x \in B$.

• $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(a) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

(a) Нека $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Значи $x \subseteq A \cap B$. От $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$, то $x \subseteq A$ и $x \subseteq B$ т.е. $x \in \mathcal{P}(A)$ и $x \in \mathcal{P}(B)$ и $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(b) Нека $x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Значи $x \in \mathcal{P}(A)$ и $x \in \mathcal{P}(B)$, и $x \subseteq A$ и $x \subseteq B$. Може да се докаже тогава $x \subseteq A \cap B$

$$\frac{x \subseteq A \cap B}{x \in \mathcal{P}(A \cap B)}.$$

• $\underbrace{C\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)}_{D} = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n}(C\setminus A_i)}_{\mathcal{E}}$

(a) $D \subseteq \mathcal{E}$

(b) $\mathcal{E} \subseteq D$

(a) Нека $x \in C\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Тогава $x \in C$ и $\underbrace{x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i}$

↳ $\underbrace{(\forall i : n \geq i \geq 1)[x \notin A_i]}$

↳ $\underbrace{(\forall i : n \geq i \geq 1)[x \in \overline{A_i}]}$

↳ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Значи $x \in C$ и $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ $\rightarrow$

(b)

$$x \in C \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \underset{\substack{\wedge \\ \text{може} \\ \text{се} \\ \text{вземе}}}{=} \bigcap_{i=1}^{n}\big(\underbrace{C \cap \overline{A_i}}_{\text{def }\setminus}\big) =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n}(C\setminus A_i)$$

Вярно ли е, че?:

1. ако $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
3. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) \cup \underbrace{(A \cap B) \setminus A}_{\emptyset}$
4. $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
5. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

1. Контрапример:

$\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, но $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

2. $(\{1,2\} \setminus \{2\}) \setminus \{2\} \neq$

$= \{1,2\} \setminus (\{2\} \setminus \{2\})$

$\{1,2\} \setminus \{2\} = \{1\}$; $\{1\} \setminus \{2\} = \emptyset$

$\{2\} \setminus \{2\} = \emptyset$; $\{1,2\} \setminus \emptyset = \{1,2\}$

3. Нека $x \in A \setminus B$. Значи $x \in A$ и $x \notin B$. Т.к. $A \cap B \subseteq B$, то значи $x \notin A \cap B$ и това $x \in A \setminus (A \cap B) =$

$A \Delta (A \cap B)$

(4) $\mathcal{P}(\{0,1\}\times\{1\}) = \mathcal{P}(\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\})$

$= \{\emptyset, \{\langle 0,1\rangle\}, \{\langle 1,1\rangle\},$
$\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}\}.$

$\mathcal{P}(\{0,1\})\times\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$
$\times \{\emptyset,\{1\}\} = \{\langle\emptyset,\emptyset\rangle, \dots$

(5) $A\times(B\setminus C) \overset{?}{=} (A\times B)\setminus(A\times C).$

<u>не</u>.

Нека $A=\{0,1\}$, $B=\{0\}$, $C=\{1\}$.

$A\times(B\setminus C)=\emptyset$

$A\times B=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

$A\times C=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$(A\times B)\setminus(A\times C)=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

Релации

Свойства, отношения, признаци

на един аргумент — на поне 2 аргумента.

Свойствата са мн-ва.

Прим: "четно число" $= \{0, 2, \ldots\}$

Релациите също са мн-ва.

Всеки има $A \times B$.

$R \subseteq A \times B$, R е релация (бинарна)

(може $A = B$, тогава $R \subseteq A \times A$ е релация над A).

<u>Обобщение</u>, ако $A_1, \ldots, A_n$ са мн-ва

релация над мн-вата $A_1, \ldots, A_n$ е

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

R се нарича n-местна релация.

За $n = 2 \to$ бинарна релация.

$R = \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_i \in A_i\}$, където

$\langle a_1 \rangle = a_1$

$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_n \rangle \rangle$

<u>Основни с-ва на бин. релации.</u>

Нека $R \subseteq A \times A$.

R e:

a) <u>рефлексивна</u>, ако
$(\forall a \in A)[\langle a,a \rangle \in R]$

b) <u>симетрична</u>, ако
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[\langle a,b \rangle \in R \Rightarrow \langle b,a \rangle \in R]$

c) <u>транзитивна</u>, ако
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)[\langle a,b \rangle \in R \ \& \ \langle b,c \rangle \in R \Rightarrow \langle a,c \rangle \in R]$

d) <u>антирефлексивна</u>, ако
$(\forall a \in A)[\langle a,a \rangle \notin R]$

e) <u>антисиметрична</u>, ако
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[\langle a,b \rangle \in R \ \& \ \langle b,a \rangle \in R \Rightarrow a = b]$

или

$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \neq b \ \& \ \langle a,b \rangle \in R \Rightarrow \langle b,a \rangle \notin R]$

f) <u>силно антисиметрична</u>, ако
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[a \neq b \Rightarrow ((\langle a,b \rangle \in R \ \& \ \langle b,a \rangle \notin R) \vee (\langle a,b \rangle \notin R \ \& \ \langle b,a \rangle \in R))]$

е) асиметрична, ако
$(\forall a \in A)(\forall b \in A)[\langle a,b\rangle \in R \Rightarrow \langle b,a\rangle \notin R]$.

прим: $=$ $\subseteq A \times A$ е: рефл, сим, транз
$\neq$ $\subseteq A \times A$ е: антирефл, сим, не е транз
$<$ $\subseteq A \times A$ е: транз, антирефл, антисим, силноантисим. $\equiv$ асим, транз.
$\leq$ $\subseteq A \times A$ е: рефл, транз, антисим.

зад 1 Какво е $R \subseteq \mathbb{N}^2$:
$(\exists k \in \mathbb{N})[a+k=b] \Leftrightarrow aRb$

- рефл. ✓
- не е сим: $1+3=4$, но $4+?=1$
- транзитивна ✓
- не е антирефл: $1+0=1$
- антисим е $a+k_1=b$ и $b+k_2=a \rightarrow a=b$ ✓
- не е силноантисим.

Има още задачи!

Зад 1 Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$.

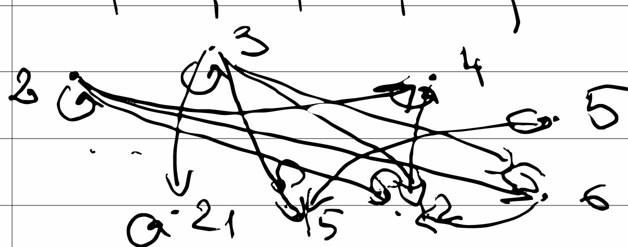
$\langle a, b \rangle \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} a \mid b$

$a, b \in A$

a) представете R с таблица, с м-во, с ориентиран граф, с диаграма на Хасе

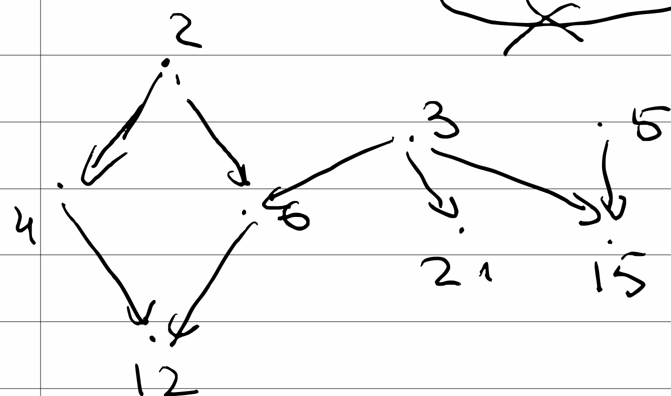
a\b	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	0	1	1	1	1
4	0	0	1	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0	0
12	0	0	0	0	0	1	0	0
15	0	0	0	0	0	0	1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	1

$R = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \ldots, \langle 21,21 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \ldots, \langle 2,12 \rangle, \ldots\}$



с диаграма на Хасе (опростен граф:
без примки и без транзитивност
т.е. $a|b$ и $b|c$, то $a|c$.

$a \to b \to c$



b) Какво е R спрямо св-вата

- рефл. е -> не е антирефл.
- не е симетрична, но е антисиметрична
- не е силно антисим.
- транзитивна е

Зад. / $R_{>} = \{ \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b \}$

$R_{\geq}, R_{\leq}, R_{<}, R_{=}, R_{\neq}$ аналог. деф.

Док. че:

a) $R_{\geq} \cap R_{\leq} = R_{=}$

b) $R_{\geq} \,\Delta\, R_{\neq} = R_{\leq}$

c) $R_{\neq} = R_{<} \cup R_{>}$

d) $\overline{R_{>}} = R_{\leq}$

☆ <u>Релации на еквивалентност</u>

рефл, сим, транзит.

прим: $=$

Ако R е рел. на екв. в/у A то $a \in A$: $[a]_R = \{ b \mid aRb, b \in B \}$ клас на екв. спр R.

$A = \bigcup_{a \in A} [a]$, $[a] \cap [b] = \emptyset \Longleftrightarrow a \overline{R} b$.

Зад 1 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* = \{ \langle u, v \rangle \in R \mid$ думите u и v имат едно и също дължина $\}$, $\Sigma^* = \{0, 1\}$

рел. на екв. ли е?

Σ^* - всички думи с букви 0 и 1.

√

Зад 1 Нека фикс $B \subseteq A$.

Деф. R в/у $P(A)$:

$R = \{ \langle X, Y \rangle \in P(A) \times P(A) \mid (X \Delta Y) \subseteq B \}$.

Да се R е рел. на екв. и за

всяко $X \in P(A)$ съществува точно

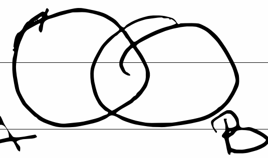
едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

* <u>Частична наредба</u>

рефл, антисим, транзит.

прим: $\leq$, $\geq$, $\subseteq$, $\supseteq$

Несравними елементи при $\subseteq$



$A \nsubseteq B$ & $B \nsubseteq A$

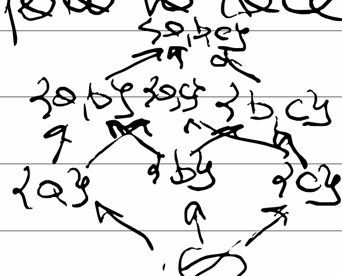
* <u>Пълна наредба</u>

частична нар, в която всеки два са сравними, т.е. рефл, транзит, силно антисиметрична.

* строги → част. нар.: асим. и транз
  → пълни нар: асим, транз, силно антисим.

Диаграми на Хасе имат за релациите на наредбите.

<u>зад 1</u> Диаграма на Хасе за $P(\{a,b,c\})$ за $\subseteq$:



* Разлика: минимален елемент $\neq$
няма никой под него
(може и никой да немож да се сравня)

най-малък елемент:
аз съм под всеки
(мога с всеки да се сравня и
все съм под тях)

$\to \forall x\,[x \leq a \Rightarrow x = a]$

$\to \forall x\,[a \leq x]$

Може да има много мин. ел.
Ако има най-малък ел., то той е !.
(Аналогично за макс. и н.г.е.)

* Обратна релация и композиция

$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\}$

$R \circ S = \{\langle x, y\rangle \mid \exists z(\langle x, z\rangle \in R$ и $\langle z, y\rangle \in S\}.$

$$\begin{cases} R^0 = Id_A \\ R^{n+1} = R^n \circ R, \ n \geq 0. \end{cases}$$

Задачи:

- $A \cup B = \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $C \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (C \setminus A_i)$
- $A \subseteq B \to \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Вярно ли е:

- $A \in B$ и $B \in C$, то $A \in C$
- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- $A \setminus B = A \,\Delta\, (A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$