def / Фиктивна променлива в бул. ф-я.

Променливата x_i е фиктивна за ф-я $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \Leftrightarrow$ за всеки вектор α от J_2^n $\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.ч.

$f(\alpha) = f(\alpha')$.

def / Съществена променлива в бул. ф-я

Пром. x_i е съществено за ф-я $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ за някой вектор α от J_2^n

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.е.

$f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

Т.е. съществената променлива не е фиктивна за f.

(309) Да се намери броят на двоичните ф-ции на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.

$\mathcal{U} \leftrightharpoons \mathcal{F}_2^n$, $|\mathcal{U}| = 2^{2^n}$

$A \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\forall i \in \{1,..,n\})[\text{"}x_i \text{ е същ. за } f\text{"}]\}$

е фикт.

$B \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\exists i \in \{1,..,n\})[\text{"}x_i \text{ не е същ. за } f\text{"}]\}$

Тогава $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathcal{F}_2^n = \mathcal{U}$

$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

B_i – "x_i е фикт. за ф-ята f"

$|\mathcal{U}| = |A \cup B| = |A| + |B| \rightsquigarrow |A| = |\mathcal{U}| - |B| = (*)$

принц. собр. $A \cap B = \emptyset$

$|B_i| = 2^{2^{n-1}}$, т.к. x_i е фиктивна то. $f(\alpha)$ не зависи от ст-то на x_i в α.

$\underset{i \neq j}{|B_i \cap B_j|} = 2^{2^{(n-2)}}$, $\ldots$, $|\bigcap_{i=1}^{n} B_i| = 2^{2^0} = 2^1 = 2$ – $\tilde{0}$ – $\tilde{1}$

$$(\ast) = 2^{2^n} - \binom{n}{1} \cdot 2^{2^{n-1}} + \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}} + \cdots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \cdot 2^{2^{n-n}} =$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}}}$$

392) Определете фиктивните и съществените променливи на ф-та f

→ a) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (x \to (x \vee y)) \to z$

b) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (11110000)$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00110011)$

→ d) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00111100)$

a)

x y z	$(x \vee y)$	$x \to (x \vee y)$	$(x \to (x \vee y)) \to z$
0 0 0	0	1	0
0 0 1	0	1	1
0 1 0	1	1	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	1	0
1 0 1	1	1	1
1 1 0	1	1	0
1 1 1	1	1	1

x и y е фиктивни и само z има значение

$(x \to (x \vee y)) \to z \mathrel{\models\!\!\!|}$

$\neg(x \to ((x \vee y))) \vee z \mathrel{\models\!\!\!|}$

$(x \mathbin{\&} \neg(x \vee y)) \vee z \mathrel{\models\!\!\!|}$

$(x \mathbin{\&} \bar{x} \mathbin{\&} \bar{y}) \vee z \mathrel{\models\!\!\!|} z$

$\equiv \tilde{0}$

$\to$ d) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00111100)$, $f(\tilde{x}^3) = x \oplus y$

x	y	z	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

- x е съществена свидетели са: $\langle 0,0,0 \rangle$ и $\langle 1,0,0 \rangle$.
- y е съществена свидетели са $\langle 0,0,0 \rangle$ и $\langle 0,1,0 \rangle$.
- z е фиктивна

Композиции и формули над множество от булеви функции

* Един от начините за проверка на еквивалентност на ф-ли е табличния метод.

Зад Постройте таблицата на ф-ята f, представена чрез формулата φ над множеството от съюзи/свързващи връзки $F = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \downarrow, \mid, \leftrightarrow\}$

a) $\varphi \leftrightharpoons (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$

b) $\varphi \leftrightharpoons \neg(\bar{x} \vee y) \vee ((x \& \bar{z}) \downarrow (x \leftrightarrow y))$

c) $\varphi \leftrightharpoons \bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus (x \& z)))$

d) $\varphi \leftrightharpoons (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$

d) $\varphi \equiv (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$

x	y	z	$x \mid y$	$(x \mid y) \downarrow z$	$((x \mid y) \downarrow z) \mid y$	$(((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

$x \mid y \dashv\vdash \neg(x \,\&\, y)$

$x \downarrow y \dashv\vdash \neg(x \vee y)$

x	y	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

зад. Еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ?

а) $\varphi \leftrightharpoons ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \& (x \vee z))$ и

$\psi \leftrightharpoons (x \leftrightarrow y)$

→ б) $\varphi \leftrightharpoons ((x \to y) \to z)$ и $\psi \leftrightharpoons x \to (y \to z)$

x	y	z	$x \to y$	$(x \to y) \to z$	$(y \to z)$	$x \to (y \to z)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

→ φ и ψ не са еквивалентни ф-ли

Зад. Използвайки с-вата на операциите, проверете еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ:

а) $\varphi \leftrightharpoons (\overline{x} \& \overline{z}) \vee (x \& \overline{y}) \vee (x \& \overline{z})$ и

$\psi \leftrightharpoons x \& \neg(y \& z) \vee (\overline{x} \& \overline{z})$

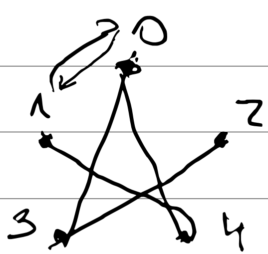
→ b) $\varphi \leftrightharpoons (x \to y) \to ((x \& \overline{y}) \oplus (x \Leftrightarrow \overline{y}))$ и

$\psi \leftrightharpoons (x \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y})$

$$\psi \vDash\dashv ((x \vee y) \& \overline{x}) \vee ((x \vee y) \& \overline{y}) \vDash\dashv$$

$$\vDash\dashv (\underbrace{(x \& \overline{x})}_{F} \vee (y \& \overline{x})) \vee ((x \& \overline{y}) \vee \overbrace{(y \& \overline{y})}^{F}) \vDash\dashv$$

$$\vDash\dashv (y \& \overline{x}) \vee (x \& \overline{y}) \vDash\dashv x \oplus y$$



$$\varphi \leftrightharpoons (x \to y) \to ((x \,\&\, \bar{y}) \oplus (x \leftrightarrow \bar{y})) \dashv\vdash$$

$$\neg(x \to y) \vee ((\neg(x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, (x \leftrightarrow \bar{y})) \vee$$

$$((x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, \neg(x \leftrightarrow \bar{y}))) \dashv\vdash$$

$$x \,\&\, \bar{y} \vee (((\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y}) \,\&\, (y \vee x)) \vee$$

$$((x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, ($$

Пълни множества от булеви функции. Теорема на Бул

def | Затворена обвивка на м-во от бул. ф-ии $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е м-вото $[F]$, което:

- $F \subseteq [F]$
- Нека f и g са произволни ф-ции от $[F]$. Нека $f \in \mathcal{F}_2^n, n \geq 1$. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f също се съдържа в $[F]$ за $1 \leq i \leq n$.
- $[F]$ е най-малкото м-во на „$\subseteq$" с тези с-ва.

→ затваряне от всички суперпозиции на функции от F

$[F]$

С-ва на затварянето обвивка

За всяко $F \subseteq \mathcal{F}_2$:

- $F \subseteq [F]$
- $F \subseteq G \rightarrow [F] \subseteq [G]$ монотонност
- $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$
- $[[F]] = [F]$

def/ М-вото $A \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно, ако $[A] = \mathcal{F}_2$.

def/ Базис на $\mathcal{F}_2$ е м-во $F \subseteq \mathcal{F}_2$, т.ч. F е пълно и F е минимално вкл. с това с-во.

Th на Бул/ М-вото $\{\&, \vee, \neg\}$ от булеви функции е пълно.

Th/ Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно м-во и $G \subseteq \mathcal{F}_2$ и $F \subseteq [G]$. Тогава и G е пълно.

(392) Покажете, че м-вото от булеви ф-ли G е пълно:

a) $G = \{\&, \neg\}$

b) $G = \{\vee, \neg\}$

c) $G = \{\mid\}$

d) $G = \{\downarrow\}$

e) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, \oplus\}$

f) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, x \oplus y \oplus z\}$

a) $x \& y \models \overline{(\overline{x} \vee \overline{y})}$

b) $x \vee y \models \overline{(\overline{x} \& \overline{y})} \models \neg(\overline{x} \& \overline{y})$

c) $x \mid y \models \neg(x \& y)$

$x \mid x \models \neg(x \& x) \models \neg x$

$(x \mid x) \mid (y \mid y) \models \neg(\neg x \& \neg y) \models x \vee y$

e) $x \oplus \tilde{1} \models \overline{x}$

$\&$ $\rightarrow$ a)

литерал е променлива или отрицание на променлива

$\overline{x_{i_1}} \& x_{i_2}^{\sigma} \& \dots \& x_{i_k}$

<u>def</u> | Нека $f(x_1, \dots, x_n) \neq \tilde{0}$ е булева ф-я. Тогава дизюнктивна нормална форма на f е представяне на f като дизюнкция от <u>елементарни конюнкции</u> (т.е. само от променливи свързителната връзка "$\vee$" са изградени дизюнкциите).

Аналогично конюнктивна нормална форма на f е представяне на f като конюнкция от <u>елементарни дизюнкции</u>

<u>def</u> | За променлива x и $\sigma \in \{0, 1\}$ дефинираме $x^{\sigma} \leftrightharpoons \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1 \end{cases}$.

$\boxed{x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma}$

булев литерал

$(\bar{x} \& y) \vee (x \& \bar{y})$

$(x \vee y) \& (\bar{x} \vee \bar{y})$ $x \oplus y$

def / Нека $f(x_1,\dots,x_n) \neq \tilde{0}$ е двоична ф-я.

Дизюнктивната нормална форма

$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee (x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n})$$

$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha)=1]$$

се нарича <u>Съвършена ДНФ за ф-ята f.</u>

$x_1,\dots,x_n$	f
$0\ 1 \dots 0$	1
	1
	1

Аналогично

$$f(x_1,\dots,x_n) = \&(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$

$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha)=0]$$

се нарича <u>Съвършено КНФ за ф-ята f.</u>

Пълна конюнкция/дизюнкция във ф-я $f \in F_2^n$ е такава кон./диз., че всички променливи участват точно веднъж в <u>тази конюнкция</u>.

$$x_1^{\sigma_1} \& x_2^{\sigma_2} \& \dots \& x_n^{\sigma_n}$$

елем. пълна кон. $\rightarrow$

$$\sigma = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle \in J_2^n$$

Следствие от Th Бул.

$[\{\vee, \&, \neg\}]$ е пълно и

$$(\forall f \in F_2)\left[f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee_{\substack{f(\sigma)=1\\ \sigma\in\mathcal{J}_2^n\\ f\in F_2^n}} (x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n})\right]$$

$$(\forall f \in F_2^n)\left[f(x_1,\dots,x_n) = \mathop{\&}_{\substack{f(\sigma)=0\\ \sigma\in\mathcal{J}_2^n\\ f\in F_2^n}} (x_1^{\bar\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar\sigma_n})\right]$$

Т.е. всяка булева функция има СДНФ и СКНФ.

* Имаме биекция м/у F_2^n и съвършените ДНФ на тези ф-ции, освен константата 0. Тя няма СДНФ.
* Имената на всички променливи в СДНФ във всяка елементарна конюнкция се среща точно веднъж. Наричат се пълни тези елем. конюнкции. Аналогично за СКНФ и елементарните дизюнкции.

зад Да се напише в СДНФ и СКНФ на ф-ята f:

a) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (x \oplus y) \to y \& z$ $\qquad f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee\limits_{\substack{f(\sigma)=1 \\ \sigma \in J_2^n}} (x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n})$

b) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (01101100)$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (10001110)$

a)

$x\ y\ z$	$x \oplus y$	$y \& z$	$f(x,y,z)$
0 0 0	0	0	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	0	0	1
1 1 1	0	1	1

$(x \vee \bar{y} \vee z) \&$

$(\bar{x} \vee y \vee z) \&$

$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

$f(x,y,z) \leftrightharpoons (\bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& z) \vee$
$(\bar{x} \& y \& z) \vee (x \& y \& \bar{z}) \vee (x \& y \& z)$

$f(x,y,z) \models (x \vee \bar{y} \vee z) \,\&\, (\bar{x} \vee y \vee z) \,\&\, (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightarrows (10001110)$

x	y	z	$f(\tilde{x}^3)$		
0	0	0	1	$\rightsquigarrow$	$\bar{x} \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{z}$
0	0	1	0	$\rightsquigarrow$	$x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	0	$\rightsquigarrow$	$x \vee \bar{y} \vee z$
0	1	1	0	$\rightsquigarrow$	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1	0	0	1	$\rightsquigarrow$	$x \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{z}$
1	0	1	1	$\rightsquigarrow$	$x \,\&\, \bar{y} \,\&\, z$
1	1	0	1	$\rightsquigarrow$	$x \,\&\, y \,\&\, \bar{z}$
1	1	1	0	$\rightsquigarrow$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

СДНФ

$\vee$

$\&$

СКНФ

302) Намерете дължината на СДНФ на f!

a) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$

b) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n)$

c) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$

a) $\alpha \in J_2^n \rightsquigarrow w(\alpha)$ четност!

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & w(\alpha) \text{ нечетно} \\ 0, & w(\alpha) \text{ четно} \end{cases}$$

x	y	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

на всички вектори J_2^n, т.ч. теглото им е четно (има четен брой 1-ци)

||

на всички вектори J_2^n, т.ч. теглото им е нечетно

2^{n-1} дължина на СДНФ на a)

b) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n})$

СКНФ $\rightsquigarrow$ СДНФ

2 нуля $\quad 2^n - 2$

c) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \dots \oplus x_n$

$\alpha \in J_2^n$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & (w(\langle a_4, a_5, \dots, a_n \rangle) \% 2 = 0 \text{ и } \\ & (\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \langle 0, 0, 0 \rangle \text{ и } \\ & \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \langle 1, 1, 1 \rangle)) \text{ или } \\ & (w(\langle a_4, a_5, \dots, a_n \rangle) \% 2 = 1 \text{ и } \\ & (\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \text{ или } \\ & \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle)) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$a_i \in \{0, 1\}$

$$2^{n-4} \cdot (2^3 - 2) + 2^{n-4} \cdot 2 = 2^{n-4} \cdot (2^3 - 2 + 2) =$$
$$= 2^{n-1}$$

(зад) Намерете броя на булевите функции на n променливи, чиито СДНФ удовл. условието:

а) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е равен на броя на променливите без отрицание

b) Всяка пълна конюнкция в СДНФ съдържа поне две променливи с отриц.

c) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е нечетно число

d) Във всяка пълна конюнкция на СДНФ броят на променливите с отрицание не е по-голям от броя на променливите без отрицание

a) $\underline{\underline{U}} \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in J_2^n)[w(\alpha) = n/2 \Rightarrow f(\alpha) = 0] \}$

$$P \leftrightharpoons \{ \alpha \mid \alpha \in J_2^n \ \& \ w(\alpha) = n/2 \}$$

$$m = |P| = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно} \\ \binom{n}{n/2}, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$f \in U$

$x_1, \ldots, x_n$	$f(\tilde{x}^n)$
α_1	0
$\vdots$	$\vdots$
α_m	0
α_{m+1}	σ_{m+1}
$\vdots$	$\vdots$
α_{2^n}	σ_{2^n}

Отг.: $2^{(2^n - m)}$

$\sigma_i \in \{0, 1\}$

$i \in \{m+1, \ldots, 2^n\}$

b) $\mathcal{U} \subseteq \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in \mathcal{J}_2^n) \ [\underbrace{w(\overline{\alpha}) < 2}_{} \Rightarrow f(\alpha) = 0] \}$

$\overline{\alpha} = \langle \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n \rangle$

инвертира

броят на нулите във вектора α

$\alpha \in \mathcal{J}_2^n$

$w(\overline{\alpha}) = 0 \rightsquigarrow 1$

$w(\overline{\alpha}) = 1 \rightsquigarrow \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$\hookrightarrow n+1$ лоши вектора

$$2^{2^n} - \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} \cdot (-1)^{i+1} \cdot 2^{(2^n - i)}$$