(320) Да разгл. ф-циите $f: B \to A$ за $|B| = k$, $|A| = n$. Колко са сюрективните ф-ции? $A = \{a_1, .., a_n\}$, $B = \{b_1, .., b_k\}$

Сюрективност: $Range(f) = A$.

Нека с $U \leftrightharpoons \{f \mid f: B \to A\}$.

Не е сюрективност ако точка $a_i \in A$, т.е $a_i \notin Range(f)$.

Нека $C \leftrightharpoons$ сюрекциите

$D \leftrightharpoons$ не сюрекциите

Тогава

$D \leftrightharpoons D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$,

където $D_i$ - м-во от ф-ции, в чиито Range не влиза $a_i$.

$|A| = |U \setminus B| = |U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i| =$

$= |U| - |\bigcup_{i=1}^{n} B_i| =$

$|U| = n^k$

$|B_i| = (n-1)^k$

$|B_i \cap B_j| = (n-2)^k$

$|\bigcap_{i=1}^{n} B_i| = (n-n)^k = 0$

Тогава

$$|\mathcal{U}| - \left( \sum_{i=1}^{n} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |B_i \cap B_j| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} B_i \right| \right) =$$

$$= n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k + \dots + \dots + \binom{n}{n-1}(n-(n-1))^k + \binom{n}{n}(n-n)^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k.$$

# Нютонов бином и методи за доказателства на комбинаторни тъждества

$C_n^k$

* $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$

* $\binom{n}{k}$ = # начини по които можем да изберем $k$ скоби от $n$ (от тях вземаме $a$-тата) $= C_n^k$

Th| $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ т.е.

$(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$

Забl $0^0$ по принцип е неопр., но при работа с полиноми $0^0$ се счита за 1.

Th| $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \underline{\tilde{P}_n}(k, n-k) \cdot a^k \cdot b^{n-k}$
перм. степ.

$(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot x^k$

Обобщение:

$$(x_1+\dots+x_e)^n = \sum \tilde{P}_n(k_1,k_2,\dots,k_e)\cdot x_1^{k_1}\dots x_e^{k_e}$$

$k_1,k_2,\dots,k_e$ – цели неотр.

$k_1+k_2+\dots+k_e=n.$

## Методи за доказателства на комбинаторни тъждества

В комбин. едно тъждество може да бъде доказано по формален начин (чрез заместване, еквивалентни преобразувания и т.н.), така и по чисто комбинаторен път чрез преброяване на елементите на подходяща избрана конфигурация по два различни начина. Тази техника е известна като принцип на двукратното броене.

Подходи:

* Чрез формулите за броя на съчетенията
* Чрез разсъждение:

принцип за двубр. броене

- Брои едно нещо два пъти
- Брои елементите на две множества и построяване биекция

* Чрез Нютонов бином
* Чрез математическа индукция

---

Зад. Док. че: $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

<u>I начин</u>: <u>Готови ф-ли</u>

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

<u>II начин</u>: Чрез разсъждения (строим биекция)

Забелязваме, че на всяко подмн-во $A' \subseteq A$ за $|A| = n$ и $|A'| = k$, то еднозначно съответствие между м-ва

$\emptyset$ $A\setminus A'$ и $|A\setminus A'| \underset{\text{прин. за изв.}}{=} |A| - |A'| = n - m$

Оттук нататък прилагаме правилото за биекцията.

**Задача** За $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, то

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

---

Начин 1 чрез разсъжд.

Нека фикс. x.

Деф. м-вата:

$|A| = \binom{n}{k}$;

$|A_1|$ - Ако x е избрано отляво, то имаме оставащо: $\binom{n-1}{k-1}$

$|A_2|$ - Ако x не е избрано отляво, то: $\binom{n-1}{k}$

още k, които не сме избрали.

Т.к. $A = A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ по принц. на събиране: $|A| = \binom{n}{k} = |A_1| + |A_2|$.

__решение 2__: через ф-лу

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(n-\cancel{1}-(k-\cancel{1}))!\cdot(k-1)!}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{\overset{n-k}{1}}{k}+\frac{\overset{k}{1}}{n-k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\cdot\left(\frac{n}{k\cdot(n-k)}\right)=\binom{n}{k}$$

зад 3) Триъгълник на Паскал

1 $n = 0$

$k=0$ 1 1 $n = 1$

$k=0$ 1 2 1 $k=n$

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

$n$ $k$

$k$-ти елемент от $n$-тия ред е равен на $\binom{n}{k}$

$k \le n$

Зависи от $n$ и $k$

е индукция по $n$.

База $n=0$ и $n=1$

Отделно за $k=0$ и $k=n$

Стъпка от $n-1$ към $n$:

Ще използваме следното тъждество

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{и.п.}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{и.п.}}$$

зад 2

зад 4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ?$

Начин 1: Чрез разсъжд. (принцип на двукр. броене).

Всички подм-ва на n-елементно
м-во са $2^{n}$. Тези подм-ва
са от следните n+1 вида:
1) с 0 елемента, т.е. $\binom{n}{0}=1$, $(\emptyset)$
2) с 1 елемент: $\binom{n}{1}=n$

...

k+1) с k елемента: $\binom{n}{k}$

...

(n+1) с n елемента: $\binom{n}{n}=1$

т.е. $\underbrace{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}}=2^{n}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}$$

Начин 2: С Нютонов бином

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\underbrace{1^{k}\cdot1^{n-k}}_{n}=(1+1)^{n}=2^{n}.$$

Зад 5) Принципа за вкл. и изкл. е равносилен на следното тъждество:

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1$$

---

Имаме $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^k$.

Нека $x=-1$. Тогава $(1-1)^n=0^n=0=$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

Нека $/*$ по $-1$ (умножим по $-1$)

$$0=\underbrace{-\binom{n}{0}}_{-1}+\binom{n}{1}-\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}$$

$$1=\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}.$$

---

Зад 6) $\sum_{k=0}^{n}k.\binom{n}{k}=?$

---

Идеи 1: Принцип на двукр. броене.

Средно колко елементи има едно подмн-во на $n$-елементно мн-во?

$\binom{n}{0} = 1$ мн-во с $0$ елем.;

$\binom{n}{1} = n$ мн-ва с $1$ елем.;

...

$\binom{n}{k}$ мн-ва с $k$ елем $= \binom{n}{n-k}$ мн-ва с $n-k$ елемента

...

Т.е. средно по $\frac{n}{2}$ елементи в мн-во

От друга страна средният брой елементи е

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}}{2^n}$$

← събираемото $k$ се среща $\binom{n}{k}$ пъти и всички събираеми са колкото всички подмн-ва ($2^n$).

Значи $\frac{n}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}}{2^n} \rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot n$$

начин 2: С индукция

1) База: $n=0$ , $n=1$

$$0\cdot\binom{0}{0} = 0\cdot 2^{-1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\overbrace{\overbrace{0\cdot\binom{1}{0}}^{0} + \overbrace{1\cdot\binom{1}{1}}^{1}}^{1} = 1\cdot 2^{0} = 1 \quad \checkmark$$

2) От $n-1 \mapsto n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n-1}{k-1} =$$

за $k=0$ събираемото е $=0$.

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot\binom{n-1}{k} + \overbrace{n\cdot\binom{n-1}{n}}^{0} + \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot\binom{n-1}{k-1} +$$

$$+ \underbrace{n\cdot\underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{1}}_{n} =$$

(i.h)

$$= (n-1)\cdot 2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1+1)\binom{n-1}{k-1} + n =$$

$$= (n-1)\cdot 2^{n-2} + \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 1\cdot\binom{n-1}{k-1} + n =$$

Нека $k' = k-1$

$$= (n-1)\cdot 2^{n-2} + \sum_{k'=0}^{n-2} k'\binom{n-1}{k'} + \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-1}{k'} + n =$$

(!n)

$$= (n-1)\cdot 2^{n-2} + \sum_{k'=0}^{n-1} k'\cdot\binom{n-1}{k'} - \overbrace{(n-1)\cdot\binom{n-1}{n-1}}^{=(n-1)} +$$

Вадим излишно събрано

$$+ \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'}}_{\text{това е вече } 2^{n-1}} + n - \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{1} =$$

$$= (n-1)\cdot 2^{n-2} + (n-1)\cdot 2^{n-2} - \cancel{(n-1)} +$$

$$+ 2^{n-1} \cancel{+n} \cancel{-1} = (n-1)\cdot 2^{n-2}\cdot 2 + 2^{n-1} =$$

$$= (n-1)\cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

Начин 3: Биномни коеф

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k\right)'_x = \left((1+x)^n\right)'_x$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot x^{k-1} = n \cdot (1+x)^{n-1} \cdot 1$$

зам. $x = 1$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

---

HW) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot (k+3) \cdot \binom{n}{k} \cdot 5^k = ?$

---

Зад 8) Док-те $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

---

Начин 1: Принцип за двукр. броене.

Имаме група от $2n$ деца – $n$ момчета и $n$ момичета

По колко начина може да изберем $k$ деца от всички: $\binom{2n}{n}$
(*)

от едната страна.
От другата може да изберем $k$ момчета и след това $n-k$ момичета:
$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2 \text{ за конкретно } k$$
$$\underset{\binom{n}{k}}{\text{// защ}}$$
т.е.
$\hookrightarrow$ за произволно да $n$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \underset{(*)}{=} \binom{2n}{n}.$$

<u>начин 2</u>: <u>Нютонов бином</u>

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$$
Колко е коеф. пред $x^n$?
- отляво: $\binom{2n}{n}$
- отдясно: От първия множител взимаме $k$-та степен $\binom{n}{k} \cdot x^k$, а

От втория множител взимаме $(n-k)^{\text{то}}$ степен $\binom{n}{n-k}x^{n-k}$

Умножаваме ги и получаваме

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}x^{n}$$

Но това е за произволно $k$ от $0$ до $n$

т.е.
$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2}_{\text{пред } x^n \text{ отдясно коеф}} = \underbrace{\binom{2n}{n}}_{\text{пред } x^n \text{ отляво коеф.}}$$

# Рекурентни уравнения

def | **Рекурентна числова редица**
Числова редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича рекурентна, ако съществува $k_0 > 0$, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ за елементите на редицата е изпълн.:

$$(*) \quad \boxed{a_{n+k} + P_1(n).a_{n+k-1} + \ldots + P_k(n).a_n = g(n)}$$

Ако $P_1(n), \ldots, P_k(n)$ са константи, то $(*)$ се нарича линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти от ред $k$. Ако $g(n) = 0$, рек. отн. се нарича хомогенно. В противен случай се нарича нехомогенно

① **Общи методи за решаване на рек. ур-е** (т.е. да се намери ф-я $f : \mathbb{N} \to \{a_n \mid n \geq 0\}$, т.е. $f(n) = a_n$, където $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е рекурентна числова редица)

a) Налучкване + индукция

(302)

$$\begin{cases} a_0 = 57 \\ a_n = (a_{n-1})^2, \ n \geq 1 \end{cases}$$

Нека да разгледаме част от елементите:

$a_1 = 57^2$, $a_2 = 57^4$, $a_3 = 57^8$, ...

Налучкване: $a_n = 57^{2^n}$

Д-во с индукция:

(base): $n = 0 \to a_0 = 57^{2^0} = 57^1 = 57$

(i.h): За $n > 0$ е в сила тв. т.с.

$a_n = 57^{2^n}$

(i.step): $a_{n+1} \overset{(def)}{=} (a_{(n+1)-1})^2 = a_n^2 \overset{(i.h)}{=} \left(57^{2^n}\right)^2 =$

$\overset{\text{с-во степени}}{=} 57^{2^n \cdot 2} = 57^{2^{n+1}}$.

b) Развиване (удобно, ако $a_n$ зависи само от един предходен елемент)

(303)

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n^3, \ n \geq 1. \end{cases}$$

Решение:

$a_{n+1} = a_n + n^3$

$a_n = a_{n-1} + (n-1)^3$

$a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)^3$

$a_{n-2} = a_{n-3} + (n-3)^3$

Т.е. $a_{n+1} = a_{n-1} + (n-1)^3 + n^3 =$

$= a_{n-2} + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 = \dots$

$= \dots = \underbrace{10}_{a_1} + \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{\boxed{HW}}{=} \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2}$

Тогава $a_n = 10 + \left(\frac{(n-1).n}{2}\right)^2$

Проверка: $a_1 = 10$, $a_2 = 10 + 1^3 = 11 = 10 + \left(\frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)^2$;

$a_3 = 11 + 2^3 = 19 = 10 + \left(\frac{\cancel{2}.3}{\cancel{2}}\right)^2 = 19$

$\dots$

! Не се използва този тип разсъждения за рек. ур-я от вида $a_n = \underbrace{2a_{n-1}} + \underbrace{3a_{n-2}}$

от повече от един член зависи $a_n$.

② Специални методи

а) Периодични редици

зад Дадено:

$\begin{cases} a_1 = 10, a_2 = 12 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$

Търси се $a_{2015}$?

---

Нека да разгл. част от елементите:

$a_1 = 10, a_2 = 12, a_3 = 12 - 10 = 2,$

$a_4 = 2 - 12 = -10, a_5 = -10 - 2 = -12,$

$a_6 = -12 - (-10) = -2, a_7 = -2 - (-12) = 10$

$a_8 = 10 - (-2) = 12, \ldots$

(*) Имаме нужда от две повтарящи се елемента в същия ред, за да бъде редицата периодична. (от $(n-(n-2)) = 2 = k$).

(*) Имаме нужда от $k$ повтарящи се елемента в същия ред, за да бъде редицата периодична, където $k$ = max индекс − min индекс в рек. ур-е.

(*) В този случай редицата е периодична с период 6. Тогава $2015 \% 6 = 5$

т.е. $a_{2015} = a_5 = -12$.