Отиване към Фроене

Зад 1 $R \subseteq A^2$ и $|A| = n$. Колко релации R са:

a) рефл.

b) антирефл.

c) симетрични

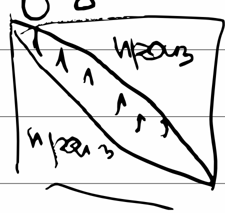
d) антисиметрични

e) силно антисиметрични

Общо рел. над A има 2^{n^2}, защото

$\{f \mid f: A \times A \to \{0,1\}\}$, $|\{f\}| = 2^{n^2}$

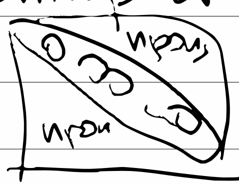
матрица описваща задача R.

a) 

Отг: 2^{n^2-n}

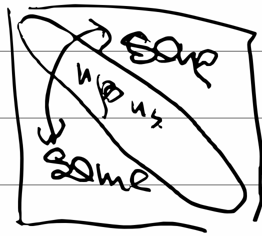
клетки на диагонала

b) антирефл.



Отг: пак 2^{n^2-n}

c)



От: диагонал: n

всички без диаг: n^2-n

всички под/над диаг: $\frac{n^2-n}{2}$

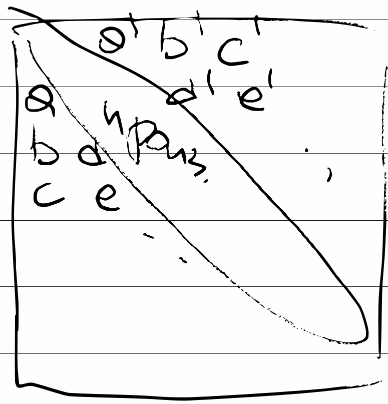
$$2^{\underbrace{\frac{n^2-n}{2}}_{\text{избор прим. на тези над диаг.}}+\underbrace{n}_{\text{диаг.}}} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

d)

От $2^{\frac{n^2+n}{2}}$

тези отгоре зависят от тези отдолу избор.

e)



$\langle a, a' \rangle = \langle 0, 0 \rangle \vee$

$\langle 0, 1 \rangle \vee$

$\langle 1, 0 \rangle$

3 възможности за всяка двойка.

Отг: $\underline{2^n} \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

брой на възм. за диагонала

брой двойки в котр. $\langle a, a' \rangle$ и имат възм. 3 ст-ти.

Принцип на Дирихле
Pigeonhole principle
Принцип на чекмеджетата.

* Ако имаме $n+1$ или повече предмета и искаме да ги поставим в n чекмеджета, то има поне едно чек. с поне 2 предмета.
* Ако $\overline{\overline{A}} = n$ и $\overline{\overline{B}} = k$, т.е. $n > k$, то за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ съществуват поне два елемента на A: a_1 и a_2, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$

* Ако имаме $n.k + 1$ или повече предмета да поставим в n чек., то ще има поне 1 чек. с поне $k+1$ пред.
* Ако $\overline{\overline{A}} = m$ и $\overline{\overline{B}} = k$, и $m > n.k$, тогава за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ съвд. поне $k+1$ точки от A: $a_1, \ldots, a_{k+1}$, т.е. $f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_{k+1})$.

302) Аз имам 7 чифта чорапи в чекмеджето си - едни за всеки цвят от дъгата.
Колко чорапа трябва да извадя т.е.:

а) да изтегля поне един чифт;

б) ако той има своите 7 чифта ръкавици отново по един чифт за цвят от дъгата и не иска да различава чорап от ръкавица, пак колко неща трябва да изтегля за да има със сигурност един чифт еднакъв цвят чорапи и ръкавици.

а) предмети: 8 чорапа

чекмеджето: 7 цвета

$8 > 7$ → значи трябва поне 8 чорапа да извадя, за да се подсигуря! $\underbrace{8 / \underset{n}{7} = \underset{k}{1} + \text{ост. } 1}$

$8 = \underset{n}{7} \cdot \underset{k}{1} + 1$ → поне $k+1 = 1+1 = 2$

чорапа са от едни и същи цвят

б) предмети: 22
чекмеджета: 7 цвята
Искаме 4 обекта от един и същи цвят.
Възможно е 21 обекта да изтеглим 3 за всеки цвят.
Тогава на 22рия обект със сигурност вече сме изтеглили това, което ни трябва.

$22 / 7 = \underbrace{3}_{k}$ ост. $1 \rightarrow 22 = \underbrace{7}_{n} . \underbrace{3}_{k} + 1 \rightarrow$

$\overset{\shortparallel}{n}$

поне $\underline{\underline{k+1}} = 3+1 = 4$ предмета от един и същ цвят.

(322) Шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа. Колко най-малко чорапа трябва да извади наслуки, за да може измежду извадените със сигурност да има:

a) поне 2 едноцветни

b) поне 4 едноцветни

c) поне 2 разноцветни

---

a) предмети: 3 чорапа

чекмеджета: 2 цвята

$\underbrace{3/2}_{n} = \underbrace{1}_{k}$ ост. 1 $\rightarrow 3 = n.k + 1 \rightarrow$

$k+1 = 1+1 = \overbrace{2 \text{ предмета}}^{\text{чорапа}}$ в едно и същ $\underbrace{\text{чекмедже}}_{\text{цвят}}$

b) предмети: 7 чорапа

чекмеджета: 2 цвята

$\underbrace{7/2}_{n} = \underbrace{3}_{k}$ ост. 1 $\rightarrow k+1 = 4$ чорапа от един и същ цвят

c) предмети: 21 чорапа
чекм.: 2 цвята
~~21/2 => 10 от 1 несъмнено~~
От 21 > 10 -> не всички са сини -> поне един червен
От 21 > 20 -> не всички са червени -> поне един син
-> Значи имаме поне 2 разноцв.

(зад) Покажете, че в група от n души има поне двама с равен брой познанства вътре в групата.

Предмети: n души -> $A = \{p_1, \dots, p_n\}$
чекм.: # познанства: $\underbrace{1, \dots, n}_{n}$
т.е. пов. n на брой

$B = \{1, 2, \dots, n\}$ и
$f : A \to B$, $f(p_i) = $ # позн. на p_i.

* Приемаме, че релацията познанство е рефл. и симетрична.

(Сл. 1) Ако има човек познаващ само

свое си т.е.

$(\forall x \in A)[f(x)=1]$, то значи

няма как да има човек,

който да познава всички

и т.н. От-то и СВ няма

прообраз и значи $f: A \to B \setminus \{1\}$

е също тотална ф-я, но тук

$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B \setminus \{1\}}}$ т.е. ще има поне

двама човека с еднакъв #

познанства.

сл.2 ¬ на сл.1 т.е. $(\forall x \in A)[f(x) \neq 1]$ т.е.

$(\forall x \in A)[f(x) > 1]$.

Тогава пак няма да има

самотници т.е.

$f: A \to B \setminus \{1\}$. но $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B \setminus \{1\}}}$

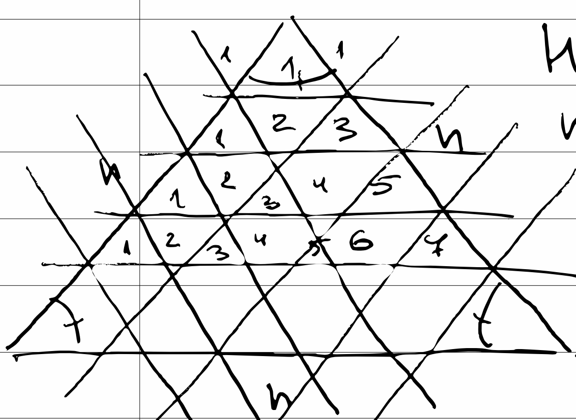
значи пак от ПД имаме

двама души с равен #

познанства.

(322) Даден е равностр. Δ с дължина на страната $n>0$. Док., че както и да се изберат n^2+1 точки от вътрешността на Δ, то м/у тях ще има поне две на разстояние по-малко или равно 1.

(*) Използваме наготово: всяка отсечка м/у две точки в произв. Δ е не по-дълга от най-голямата му страна. Равенство се достига само когато точките са краищата на тази страна.



Нарязваме Δ-ка с прави успор. на страните на равностр. Δ със страна 1.

Какъв е броя на малките Δ-чета? Ами сметаме $1+3+\dots+(2n-1)=n^2$

Тогава чекми: n^2 чисел и предмети: n^2+1 точки →
поне 2 точки в един квадрат
Δ. От (*) знаем те са на разст.
точно ≤ 1.

Зад Вие и приятел играете следната игра. Приятелят ви избира 10 числа измежду 1 до 40. Печелите, ако може да намерите две различни множества от по три числа измежду избраните 10, така че сумата от числата на едното м-во да е равна на сумата от числата на другото м-во. Покажете, че винаги може да спечелите играта.

$C = \{1, \ldots, 40\}$

$T \subseteq C$ и $|T| = 10$; $T = \{a_1, \ldots, a_{10}\}$

$A \subseteq \{<x_1, x_2, x_3> \mid x_i \in T\}$

$B \subseteq \{\sum_{i=1}^{3} x_i \mid x_i \in T\}$ $\underline{\max B} \leq 40+39+38 = 117$

$1+2+3 = \underline{6 \leq \min B}$

$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{3} = 120$, а $\overline{\overline{B}} \leq 117-(6-1)$

$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ и по ПД ще има две 3елем. подмн-ва с еднаква сума.

302 Дж, че м/у произволно избрани $n+1$ ест. числа, винаги може да се намерят две, разликата на които се дели на n.

предмети: $n+1$ числа

чекмеджета: $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$ -> n на брой

По ПД значи има две даващи един и същ остатък (mod n) и значи разликата им се дели на n!..

Комбинаторика

Основни принципи

1) Принцип на биекцията

Ако A и B са крайни м-ва, м/у които има биекция, то $|A| = |B|$

2) Принцип на събирането

Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са крайни двете по две непресичащи се множества, то за тяхното обединение е изпълнено

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

3) Принцип на изваждането

Ако A и B са крайни м-ва, то

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Още: $|\overline{A}| = |U| - |A|$

„добрите случаи са всички без лошите"

4) Принцип на умножението

Ако $A_1, A_2, \dots, A_n$ са крайни мн-ва, то за тяхното декартово произв. е изп., че $\left| \times_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.

"Ако трябва да изберем n обекта от различен вид, като първия може да се избере по k_1 начина, втория по k_2 начина, ..., последния по k_n начина, то комплекта може да се образува по $k_1.k_2 \dots k_n$ начина."

5) Принцип на делението

Ако A и B са крайни мн-ва и функцията $f: A \to P(B)$ е, т.ч:

- $|f(x)| \neq 0 \to f(x) \neq \emptyset$ и $f(x) \subseteq B$
- $(\forall a_1, a_2 \in A)[f(a_1) \cap f(a_2) = \emptyset]$
- $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\left[b \in f(a) \Rightarrow |f(a)| = \frac{|B|}{|A|}\right]$

"Ако всеки обект е броен n пъти то истинския брой = $\frac{\text{привиден брой}}{n}$"

3 зад.

Колко са трицифрените числа от 100 до 999?

$\underbrace{\underbrace{1, \dots, 99}_{99 \text{ бр.}}, 100, \dots, 999}_{999} \rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{999}_{\text{всички}} - \underbrace{99}_{\text{лоши}} = \underbrace{900}_{\text{хубави}}$ <u>Принцип на изваждането</u>

3 зад.

От град A до град B може да се придвижим по три различни пътя, а от B до C – по два. По колко начина може да се придвижим от A до C, минавайки през B?

Нека Q е мн-вото от придвижвания от A до C през B. Всяко придвижване е наредена двойка с първа комп. – пътя за придв. от A към B и втора комп. – пътя за придв. от B към C. Ако $T_{AB} = \{a_1, a_2, a_3\}$, а $T_{BC} = \{b_1, b_2\}$, то значи $Q = P_{AB} \times P_{BC}$ и т.е.

по принцип за умножение

$|Q| = |P_{AB} \times P_{BC}| = |P_{AB}| . |P_{BC}| =$

$= 3.2 = 6.$

(зад) По колко начина може да се именува дете с първо име състоящо се най-много от три части, като всяко от тях се избира от списък с дължина 300?

U - м-во от имена от тип, които търсим.

$U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, където

A_1 - само 1 част

A_2 - част 1 - част 2

A_3 - част 1 - част 2 - част 3

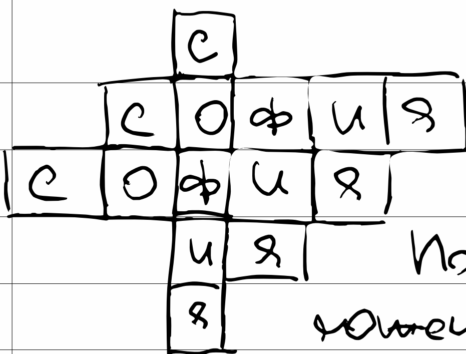
$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \emptyset$

Принцип за събиране

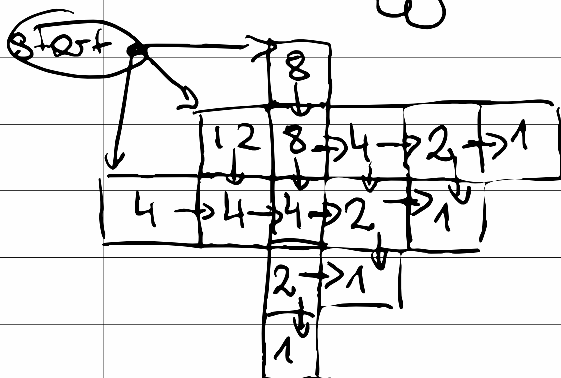
$|U| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| =$

$= 300 + 300.299 + 300.299.298.$

зад.



Можем да се движим само надолу или надясно. По колко начина можем да изпишем думата „София“?



- за "я" → 1 начин
- за "ия" → по 2 начина
- за "фия" → по 4 начина
- за "офия" → по 8 или 4 начина
- за "София" → по 4, 8 или 12 начина

т.е. „София“ = 4 + 8 + 12 = 24.