509) Док, че:

Нека $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

a) B^n е двуделен граф.

b) Върховото хроматично число на B^n е 2.

c) Ребровото хроматично число на B^n е n.

d) B^n е Хамилтонов

e) За кои n съществува Ойлерова верига в B^n?

a) От това, че $\alpha, \beta \in B^n$, то те са съседни, ако $\rho(\alpha, \beta) = 1$, то значи, че се различават в четността си.

Тогава B^n е двуделен с дялове:

$V_1 \leftrightharpoons \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \& \ „w(\alpha) \text{ е четно}"\}$

$V_2 \leftrightharpoons \{\alpha \mid \alpha \in B^n \ \& \ „w(\alpha) \text{ е нечетно}"\}$

b) Следва от a)

c) n цвята са необходими, т.к. от Th имаме, че

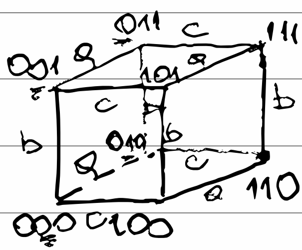
реброво хром. число $\geq \max\limits_{v \in V} d(v)$,

а B^n е n-рег. значи

реброво хром. число $\geq n$.

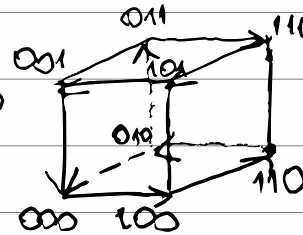
Достатъчни са n цвята, защото оцветяваме с цвят $k \in \{1, \dots, n\}$ онези ребра свързващи онези върхове, чиято единствена разлика е в k-та позиция.

$n=3$



d) Използвайки кода на Грей: такава наредба в/у B^n, т.е. два последователни върха да се различават в точно един бит.

$n=3$



С индукция по $\underline{n}$.

За $n=1 \rightsquigarrow 0-1$

За $n=2 \rightarrow 00-01-11-10$

Нека за $n \in \mathbb{N}_{>0}$ имаме, че B^n има Хамилтонов цикъл $\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{2^n-1}$.

Тогава за B^{n+1}, то Хамил. цикъл е:

$0\alpha_0, 0\alpha_1, \dots, 0\alpha_{2^n-1}, 1\alpha_{2^n-1}, \dots, 1\alpha_0$

е Хамилтонов цикъл.

е) За $n=1 \rightsquigarrow$ имаме отворена.

За n – четно, то всеки връх ще е от четна степен, защото B^n е n-рег $\rightarrow$ затворена верига.

За n – нечетно и $n>1 \rightsquigarrow$ никаква.

Релации над B^n

1) **Лексикографска наредба**

общо

$R_{lex} \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_{lex} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leftrightharpoons$

$a_1 < b_1$ **или**

$(\exists k \in \{2, \dots, n\})[(\forall i \in \{1, \dots, k-1\})[a_i = b_i] \,\&\, a_k < b_k]$

или $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} a_i = b_i$

2) **По номер**

$R_\nu \subseteq B^n \times B^n$, $\alpha, \beta \in B^n$:

$\alpha R_\nu \beta \leftrightharpoons \nu(\alpha) \leq \nu(\beta)$

3) **Предшествие**

$R_\alpha \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_\alpha \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leftrightharpoons$

$(\forall i \in \{1, \dots, n\})[a_i \leq b_i]$

(зад) Нека $0 \leq \ell < k \leq n$ и

$A(\alpha) = \{\beta \mid \beta \in B^n, \beta$ е сравним с $\alpha\}$.

Намерете броя на елементите на:

a) $A(\alpha) \cap B^n_k$, за $\alpha \in B^n_\ell$

b) $A(\alpha) \cap B^n_\ell$, за $\alpha \in B^n_k$

c) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_k$

т.е. $\beta \preceq \alpha \vee \alpha \preceq \beta$

пример за несрав: $\langle 0,1,1 \rangle \not\preceq \langle 1,1,0 \rangle$

a) Нека $\alpha \in B^n_\ell$. Тогава $w(\alpha) = \ell$.

Нека $\beta \in A(\alpha) \cap B^n_k$.

Тогава $w(\beta) = k$. Но

$\ell < k$ по условие т.е.

$w(\alpha) < w(\beta)$. $\rightsquigarrow \alpha \preceq \beta$

Т.е. имаме $(n-\ell)$ позиции на

които да поставим $(k-\ell)$

единици, за да получим едно

такова β. Така $\binom{n-\ell}{k-\ell}$

b) Нека $\alpha \in B^n_k \rightsquigarrow w(\alpha) = k$.

Нека $\beta \in A(\alpha) \cap B^n_\ell \rightsquigarrow w(\beta) = \ell$ и

$\ell < k$. $\rightsquigarrow \beta \preceq \alpha$.

Т.е. имаме k позиции, на

които да поставим $(k-\ell)$ нули.

c) $|A(\alpha)| = \sum_{i=1}^{k-1} |A(\alpha) \cap B_i^n| + |B_k^n| + \sum_{i=k+1}^{n} |A(\alpha) \cap B_i^n|$.

(302) Докажете, че в куба B^n има:

а) $n!$ различни нарастващи вериги с дължина n.

b) $k!(n-k)!$ различни нарастващи вериги с дължина n, съдържащи даден вектор $\alpha \in B_k^n$.

а) Нека $G = \langle B^n, E \rangle$, за $E = \{ \langle \alpha, \beta \rangle \mid \rho(\alpha, \beta) = 1 \}$.

Нека $\alpha_0 \in B^n$.

Тогава съсед от α_0 избираме по $\underline{n}$ начина.

Нека $\alpha_0 E \alpha_1$.

Сега съсед на α_1 ще изберем по $\underline{(n-1)}$ начина (без α_0).

И т.н.

Така $n.(n-1)\ldots 1 = n!$

Те са и максимални т.е. от $\langle 0, 0, \ldots 0 \rangle$ до $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$ върви.

b) Нека $\alpha \in B^n_k$.

Сега ще изберем съсед на α β с тегло $\omega(\alpha)-\omega(\beta)=1$ по $(n-k)$ начина.

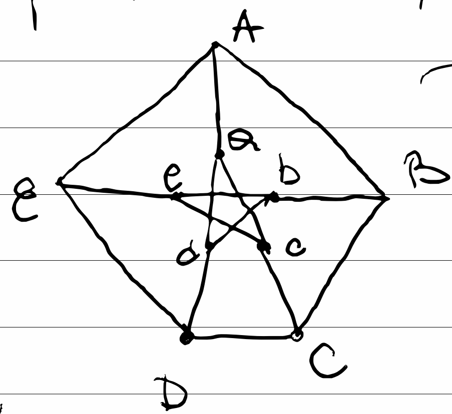
Аналогично бихме избрали съсед на α β с тегло $\omega(\beta)-\omega(\alpha)=1$ по k начина.

идеята е да вървим надолу до $<0,0,\dots,0>$

идеята е да вървим нагоре до $<1,1,\dots,1>$.

Така става $(n-k).(n-k-1)\dots1$ и $k.(k-1).(k-2)\dots1$ т.е. $(n-k)!.k!$

Граф на Петерсен



$\mathcal{P} = \langle V, E \rangle$

Зад | Намерете върховото хроматично число на $\mathcal{P}$.

Има цикъл с нечетна дължина ⇝ $ABCDEA$ ⇝ 2 цвята няма да ни стигнат (от Th на Kőnig) ⇝ поне 3 цвята ни трябват (нужни са).

Три цвята са достатъчни при:
$A=1$, $B=2$, $C=1$, $D=2$, $E=3$, $a=3$,
$b=3$, $c=2$, $d=1$, $e=1$.

Т.е. $\chi(\mathcal{P}) = 3$

Тв | В $\mathcal{P}$ няма цикли с дължина 3 или 4.

300/6

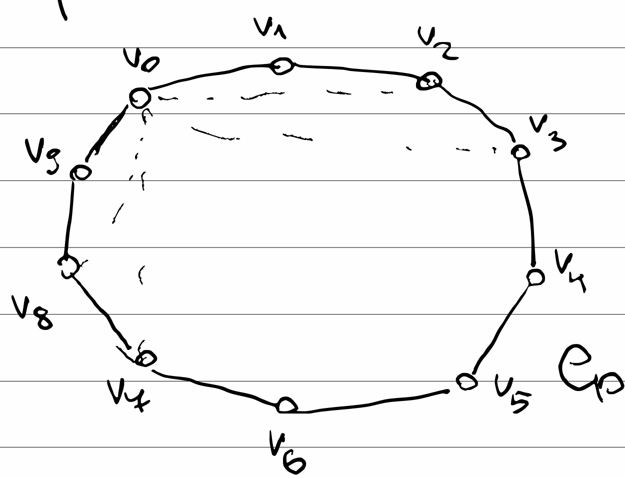
Хамилтонов ли е Ф?

Има Хамилтонов път: ABCDEecadb

Защо няма Хамилтонов цикъл?

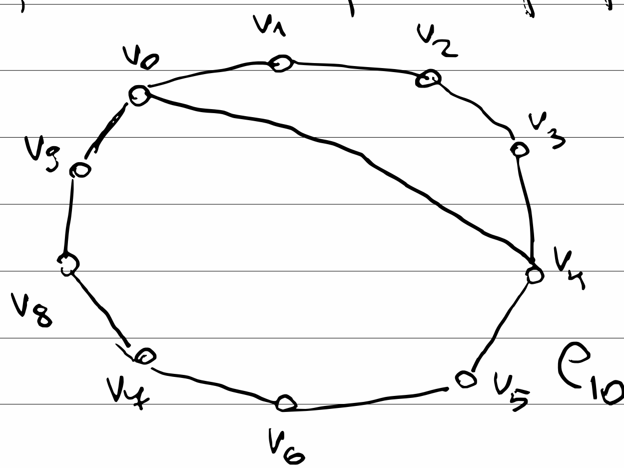
Има 5 ребра във външния пентагон, 5 ребра във вътрешния пентаграм и 5 ребра тип мост м/у пентаграма и пентагона

Да допуснем, че е Хамилтонов. Тогава графът трябва да може да се представи като C_{10} + още 5 ребра. Нека вземем v_0.



Не можем да свържем v_0 с v_2 $\rightsquigarrow$ цикъл $v_0 - v_1 - v_2 - v_0$ с дълж. 3.

Аналогично v_0 с v_8 не можем.
Не можем и v_0 с v_3 и съответно с v_7, защото ще имаме цикъл с дълж. 4 (все пак G няма цикли с дължина 3 и 4).
Ще покажем, че не можем да свържем v_0 с v_4, v_5 и v_6. (аналогично за v_5 и v_6)
Доп., че v_0 е свързано с ребро с v_4.



Нека разгл. v_5. Него не можем да го свържем с кой да е друг връх, т.к. ще се получи цикъл с дълж. 3 или цикъл с дълж. 4. ↯.

Така G не е Хамилтонов.

Булеви (двоични) функции

Припомняне:

Двоични ф-ции на 1 променлива

x	$\tilde{0}$	x	$\bar{x}$	$\tilde{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

константа 0 — id — отрицание на x — константа 1

$\mathcal{F}_2 \leftrightharpoons \{f : J_2^n \to J_2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

м-вото от всички булеви ф-ции.

$\mathcal{F}_2^n \leftrightharpoons \{f : J_2^n \to J_2\}$

м-вото от всички булеви ф-ции на n променливи.

$$|\mathcal{F}_2^n| = |\{f(\tilde{x}^n) \mid f(\tilde{x}^n) \in \mathcal{F}_2\}| = 2^{2^n}$$

Двоични ф-ции на 2 променливи

x	y	$\tilde{0}$	$x \& y$	$\neg(x \to y)$	x	$\neg(y \to x)$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$\bar{y}$	$y \to x$	$\bar{x}$	$x \to y$	$x \mid y$	$\tilde{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$(x \& \bar{y})$

$(y \& \bar{x})$

XOR

$(x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y)$

стелка на Пирс

еквивал.

$(x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y})$

чертата на Шефер

(Nand $\overline{x \& y}$)

Свойства:

① Комутативност:

- $x \& y = y \& x$
- $x \vee y = y \vee x$
- $x \oplus y = y \oplus x$

② Асоциативност

- $(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

③ Дистрибутивност

- $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$
- $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$
- $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$

④ Идемпотентност

- $x \& x = x$
- $x \vee x = x$
- $x \oplus x = \tilde{0}$

⑤ С-во на отрицанието

- $x \& \bar{x} = \tilde{0}$
- $x \vee \bar{x} = \tilde{1}$
- $x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$

6. С-ва на константите

- $x \,\&\, \tilde{0} = \tilde{0}$
- $x \vee \tilde{0} = x$
- $x \oplus \tilde{0} = x$
- $x \,\&\, \tilde{1} = x$
- $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$
- $x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

7. Закони за двойното отр.

$\neg(\bar{x}) = x$

8. Закони на Де Морган

- $\neg(x \vee y) = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$
- $\neg(x \,\&\, y) = \bar{x} \vee \bar{y}$

(392) Да се намери броят на:

a) двоичните ф-ции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

b) —||—, които приемат стойност 1 на по-малко от k вектора от стойности на променливите;

c) —||—, които са симетрични.

def | ф-я $f(x_1, \ldots, x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ за всяка пермутация $i_1, \ldots, i_n$ на индексите $1, 2, \ldots, n$.

Т.е. функцията ст-т зависи само от # на 1-ците.

a) Нека

$$\mathcal{U} \leq \{ f(\tilde{x}^n) \in \mathcal{F}_2^n \mid (\forall \alpha \in \mathbb{F}_2^n)[f(\alpha) \neq f(\bar{\alpha})] \}$$

Нека $f(\tilde{x}^n) \in \mathcal{U}$. Тогава таблицата ѝ изгл. така:

x_1	$x_2 \ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \ldots, x_n)$
0	0 ..	0	0	σ_1
0	0 ..	0	1	σ_2
...				
0	1 ..	1	1	$\sigma_{2^{n-1}}$
1	0 ..	0	0	$\bar{\sigma}_{2^{n-1}}$
...				
1	1 ..	1	0	$\bar{\sigma}_2$
1	1 ..	1	1	$\bar{\sigma}_1$

$\sigma_i \in \{0, 1\}$

Огледално разположени.

Следователно всяка ф-я е еднозначно опр. от първите си 2^{n-1} ст-ти и

$$|U| = |\{f \in F_2^{n-1}\}| = \frac{2^{2^n}}{2} = 2^{2^{n-1}}$$

b) Нека

$U = \{f \in F_2^n \mid 0 \le w(v_f) < k\}$, където

за $f \in F_2^n$ с v_f означаваме:

$v_f = \langle f(0,0,\dots,0), f(0,0,\dots,1), \dots, f(1,1,\dots,1)\rangle$.

вектор стълб от ст-тите

Имаме 2^n позиции в v_f т.е. това е

$$|U| = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2^n}{i}.$$ # вектори с до k единици в дължина си

c) Нека

$U = \{f \in F_2^n \mid f \text{ е симетрична}\}$

Т.к. е симетрична т.е няма значение от реда на аргументите какво ще получим като ст-т, то $|U| = 2^{n+1}$. Даже няма нужда да позим за всички ст-ти на ф-ята функ. и стойност. Т.е. може с (n+1)-мерен вектор да представим такава ф-я която на позиция i е 0, [illegible] ще е равна на ст-та на f под булев вектор с i единици в него.