320) Да разгл. ф-циите
$f: B \to A$ за $|B| = k$, $|A| = n$.
Колко са сюрективните
ф-ции? $A = \{a_1, .., a_n\}$, $B = \{b_1, .., b_k\}$

Нека $A = \{a_1, .., a_n\}$, $B = \{b_1, .., b_k\}$
кога $f: B \to A$ е сюрекция?
$\forall y \exists x\; f(x) = y$ $\to$ $Range(f) = A$
$\in B$ $\in A$

$\neg$

$U \leftrightharpoons \{ f \mid f: B \to A \}$
$C \leftrightharpoons$ всички сюрективни в U
$\neg \forall y \exists x\; f(x) = y \models\!\!\dashv \exists y \neg \exists x\; f(x) = y \models\!\!\dashv$
$\exists y \forall x \neg f(x) = y$, $\models\!\!\dashv (\exists a \in A)[a \notin Range(f)]$
$f(x) \neq y$

$D \leftrightharpoons$ всички не сюрективни в U
$C \cap D = \emptyset$, $C \cup D = U$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \dots \cup D_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

D_i - $\underset{\sim}{a_i} \notin Range(f)$

$$|U| = |C| + |D|$$

$$|C| = \underline{|U|} - \underline{|D|} = (*)$$

$$|U| = \{f \mid f: B \to A\} = n^k$$

$|B| = k \quad |A| = n$

$\langle \underbrace{n}_{k,\, e_1}, \underbrace{\quad}, \dots, n \rangle$

$$|D_i| = \underset{\sim}{(n-1)^k}$$

$$|D_i \cap D_j| = (n-2)^k$$

$\dots$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} D_i\right| = (n-n)^k = 0$$

$$(*) = n^k - \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (n-1)^k}_{=\sum_{i=1}^{n} |D_i|} - \underbrace{\sum_{1 \le i < j \le n} (n-2)^k}_{=\sum_{1 \le i < j \le n} |D_i \cap D_j|} + \dots + \underbrace{(-1)^n \cdot 0}_{=(-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} D_i\right|} \right) =$$

$$= \binom{n}{0} \cdot n^k - \binom{n}{1} \cdot (n-1)^k + \binom{n}{2} \cdot (n-2)^k + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} (n-n)^k$$

$$= \underline{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^k}$$

$$\parallel$$

$$|C|$$

Нютонов бином и методи за доказателства на комбинаторни тъждества

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{= C_n^k} a^k \cdot b^{n-k}}$$

$\binom{n}{k}$ = # начини по които можем да изберем k скоби от n (от тях взимаме a-тата) $= C_n^k$

Th $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$ т.е.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$$

Th $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underline{\tilde{P}_n(k, n-k)} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

перм. слож.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot x^k$$

Обобщение:

$$(x_1 + \ldots + x_e)^n = \sum \tilde{P}_n(k_1, k_2, \ldots, k_e) \cdot x_1^{k_1} \ldots x_e^{k_e}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_e$ – цели неотр.

$k_1 + k_2 + \ldots + k_e = n$

$$\frac{n!}{k_1! \, k_2! \ldots k_e!} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_e)!}{k_1! \, k_2! \ldots k_e!}$$

Методи за доказателства на комбинаторни тъждества

В комбин. едно тъждество може да бъде доказано по формален начин (чрез заместване, еквивалентни преобразувания и т.н.), така и по чисто комбинаторен път чрез преброяване на елементите на подходяща избрана конфигурация по два различни начина. Тази техника е известна като <u>принцип на двукратното броене</u>.

Подходи:

* Чрез формулите за броя на съчетанията
* Чрез разсъждение:

принцип за двукр. броене

- Броим едно нещо два пъти
- Броим елементите на две множество и построяване биекция

* Чрез Нютонов бином
* Чрез математическа индукция

(3зд) Док., че: $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

I начин: чрез разсъжд.

$A' \subseteq A$, $|A| = n$, $|A'| = k$, то значи

$|A \setminus A'| = |A| - |A'| = n - k$

принцип на изваждане

По принципа на биекцията значи

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

II начин: чрез еквив. преобразувания

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(\underbrace{n-(n-k)}_{k})!\,(\underbrace{n-k}_{t})!} = \binom{n}{n-k}$$

Зад. За $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, то

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{A} = \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{A_1} + \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{A_2} \quad (*)$$

Решени: Чрез принцип за двукр. броене.

$|A| = \binom{n}{k}$

$|A_1| = \binom{n-1}{k}$

$|A_2| = \binom{n-1}{k-1}$

Нека фикс. x от тези n елемента, от които избираме.

> x не участва в k елем. подм-во

> x участва в k елем. подм-во

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$A_1 \cup A_2 = A$

По принцип на събирането $(*)$ е вярно.

II начин

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(\underbrace{n-1-(k-1)}_{\underbrace{n-1-k+1}_{n-k}})!\,(k-1)!}+$$

$$+\frac{(n-1)!}{k!\,(\underbrace{n-1-k}_{n-(k+1)})!}=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-(k+1))!}\left(\frac{1}{n-k}+\frac{1}{k}\right)=$$

$$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-(k+1))!}\cdot\frac{n}{(n-k)\cdot k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Зад

Триъгълник на Паскал

n

					1							$n=0$
			$k=0$	1		1						$n=1$
		$k=0$	1		2		1	$k=n$				
		1		3		3		1				
	1		4		6		4		1			
1		5		10		10		5		1		

k ти елемент от n-тия ред е равен на $\binom{n}{k}$

$$(x+1)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

k, n

зависи от n k

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{(i.h)} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{(i.h)}$$

[illegible]

База $n=0$ и $n=1 \rightarrow 1$

$\rightarrow 1$ $\qquad$ 1 1

(i.h.)

Стъпка $n-1 \rightarrow n$

Зад $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ?$

I начин: ф-ла

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{k} \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

II начин: через розсвету

рез 0: 1

рез 1: 2 · рез 0

рез 2: 2 · рез 1

— ——

рез n: 2 · (рез(n − 1))

т.е. рез n: 2^n

$\binom{n}{0} \to 1$

$\binom{n}{1} \to n$

$\binom{n}{2}$

. . . —

$\binom{n}{n} \to 1$

2^n

392

Принципа за вкл. и изкл. е равносилен на следното тъждество.

$$\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\binom{n}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}=1$$

$$0=(1+x)^n \underset{x=-1}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k =$$

$$=\underbrace{\binom{n}{0}}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

$$-\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}=-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\underbrace{\binom{n}{n}}_{1} \quad /\cdot(-1)$$

$$1=\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\dots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Зад. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} \overset{(\#)}{=} ?$

I начин:

$$\left[(1+x)^n\right]'_x = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\right)'_x$$

$$n\cdot(1+x)^{n-1}\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

зам. $x=1$

$$n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k$$

II начин: С индукция по n + преброяване

III начин: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (*)

В (#) разл. коеф. пред $\binom{n}{k}$ (n

за едното

$k\cdot\binom{n}{k}$ $\qquad (n-k)\cdot\binom{n}{n-k} \overset{(*)}{=} \underline{(n-k)}\cdot\binom{n}{k}$

другото

$\binom{n}{k}\cdot(\cancel{k}+n-\cancel{k}) = n\cdot\binom{n}{k}$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} n\binom{n}{k}}{2} = \frac{n\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}{2} = \frac{n\cdot 2^{\cancel{n}\,n-1}}{\cancel{2}} =$$

$$= n\cdot 2^{n-1}$$

Зад 3) Док-те $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Начин 1:

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$$

Какъв коеф. пред x^n?

Отляво:

$$\binom{2n}{n}$$

Отдясно зафикс. k

$$\binom{n}{k} \cdot x^k \cdot \binom{n}{n-k} x^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k}^2 \cdot x^n$$

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.}$$

начин II: Искаме n души да извадим от група с 2n души

$$\binom{2n}{n}$$

→ n момчета

→ n момичета

За фикс. k: → k от момчета

→ n−k → ще бъдат за момичета

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$$

начин III: С индукция по n

Рекурентни уравнения

def | Рекурентна числова редица

Числова редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича рекурентна, ако съществува $k>0$, т.ч. за всяко $n \in \mathbb{N}$ за членовете на редицата е изпълн.:

$$(*) \quad \boxed{a_{n+k} + P_1(n) \cdot a_{n+k-1} + \dots + P_k(n)\, a_n = g(n)}$$

Ако $P_1(n) \dots P_k(n)$ са константи, то (*) се нарича линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти от ред k. Ако $g(n) = 0$, рек. отн. се нарича хомогенно. В противен случай се нарича нехомогенно

1) Общи методи за решаване на рек. ур-е (т.е. да се намери ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n \mid n \geq 0\}$, т.е. $f(n) = a_n$, където $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е рекурентна числова редица)

а) Налучкване + индукция

Зад
$$\begin{cases} a_0 = 57 \\ a_n = (a_{n-1})^2, \quad n \geq 1 \quad (\#) \end{cases}$$

$a_0 = 57$

$a_1 = 57^2 = a_0^2$

$a_2 = 57^4 = a_1^2$

...

$a_n = 57^{2^n}$ $(*)$

$$a_n = 57^{2^n}$$

База: $n = 0$

$$a_0 = 57 = 57^{2^0} = 57^1$$

$\underbrace{n}_{(i.h.)} \overset{>0}{} \mapsto n+1$

$$a_{n+1} \underset{(\#)}{=} (\underline{a_n})^2 \underset{(i.h.)}{=} \left(57^{2^n}\right)^2 = 57^{2^n \cdot 2} = 57^{2^{n+1}}$$

с-во на степенување

т.е. $(\forall n \in \mathbb{N}) \left[a_n = \underbrace{57^{2^n}}_{f(n)} \right]$

$$f : \mathbb{N} \to \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

b) Развиване (удобно, ако a_n зависи само от един предходен член)

Зад.

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n^3, \; n \geq 1. \end{cases}$$

Развиване:

$$a_{n+1} = a_n + n^3$$

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)^3$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)^3$$

...

$$a_{n+1} = a_{n-1} + (n-1)^3 + n^3 = a_{n-2} + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 =$$

$$= a_{n-3} + (n-3)^3 + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 = \dots =$$

$$= \underbrace{a_1}_{10} + (\underbrace{n-(n-1)}_{1})^3 + (\underbrace{n-(n-2)}_{2})^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 =$$

$$= 10 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 =$$

$$= 10 + \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$\text{HW} \quad \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$$

$$2\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-3)^3 + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3\right)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a.b + b^2)$$

$$n^3 + 1^3 = (n+1)(n^2 - n + 1)$$

$$(n-1)^3 + 2^3 = (n+1)((n-1)^2 - (n-1)2 + 4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$\dots$$

$$(n+1).\left(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 - (n + (n-1).2 + (n-2).3 + \dots + 1.n) + (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n2)\right)$$

$$a_{n+1} = 10 + \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 10 + 1^3 = 11 = 10 + \left(\frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}}\right)^2 = 11$$

$$a_3 = 11 + 2^3 = 13 = 10 + \left(\frac{\cancel{2}.3}{\cancel{2}}\right)^2 = 10+3 = 13$$

...

$$a_n = 10 + \left(\frac{(n-1).n}{2}\right)^2 \quad \text{вс. } n \in \mathbb{N}$$

② Специални методи

а) Периодични редици

Зад. Дадено:

$a_1 = 10,\ a_2 = 12$

$a_n = a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 3$

Търси се a_{2020}?

$a_1 = 10,\ a_2 = 12,\ a_3 = 12 - 10 = 2,\ a_4 = 2 - 12 = -10,$

$a_5 = -10 - 2 = -12,\ a_6 = -12 - (-10) = -2,$

$a_7 = -2 - (-12) = -2 + 12 = 10$

$a_8 = 10 - (-2) = 12$

Период: 6

$a_1 = a_7 = 10$

$7 \% 6 = 1$

$(n - (n-2)) = 2$

$a_0 = a_6$

$a_{2020} = a_4 = -10$

$2020 \% 6 = 4$

b) Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти – хомогенни и нехомогенни

def | Рекурентно отношение от ред r

Нека $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са членове на редицата, където

$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-r}),\ n \geq r.$

(рекурентно отношение от ред r

начални условия (r на брой)

Отново: Това, което разбираме под решаване на лин. рек. отн. е да определим ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. $a_n = f(n)$.

c) Линейни рек. отн. хомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ - начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \dots + c_r . a_{n-r}$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

Алгоритъм:

1) Намираме характеристичното уравнение на хомогенната рек.:

$$a_n - c_1 . a_{n-1} - \dots - c_r . a_{n-r} = 0$$

$P(x) = 1 . x^r - c_1 . x^{r-1} - \dots - c_r . x^0 = 0$, където

$P(x)$ се нарича характеристичен полином на рек. редица, а уравнението $P(x) = 0$ се нарича характеристично уравнение (делихме на $x^{n-r} \neq 0$)

2) Решаваме характеристичното уравнение и намираме корени $\{x_1, \dots, x_r\}_M \subseteq \mathbb{C}$ (не им знаем кратностите).

3) Имаме два случая за тези корени:

3.1) Всички корени са различни помежду им.

Тогава общият вид на рек. отн. е

$$a_n = x_1^n \cdot A_1 + x_2^n \cdot A_2 + \dots + x_r^n \cdot A_r$$

3.2) Не всички са различни. Нека $t < r$.

Нека $x_s = x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{ik}$ за $s \leq t$

Общ вид:

$$a_n = x_1^n \cdot A_1 + \dots + (A_{i1} + A_{i2} \cdot n + \dots + A_{ik} \cdot n^{k-1}) \cdot x_s^n + \dots + A_t x_t^n \text{ за } t < r$$

4) Правим система за дадените $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ (да кажем, е дадена сл. 3.1))

$$\begin{cases} a_0 = A_1 \cdot x_1^0 + A_2 \cdot x_2^0 + \ldots + A_r \cdot x_r^0 \\ a_1 = A_1 \cdot x_1^1 + A_2 \cdot x_2^1 + \ldots + A_r \cdot x_r^1 \\ \ldots \\ a_{r-1} = A_1 \cdot x_1^{r-1} + A_2 \cdot x_2^{r-1} + \ldots + A_r \cdot x_r^{r-1} \end{cases}$$

5) Решаваме системата и получаваме стойностите за $A_1, \ldots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор.

(322) Да се реши рекурентното отн:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 3 \\ a_n = 3 . a_{n-1} - 2 . a_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

(323)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

Проверка! Винаги! Работим само с частни случаи и, ако не сме внимателни, то могат да се появят чужди решения!

320) Да се реши всяко от рекурентн., съгласно зададените нач. условия:

a) $\begin{cases} a_1 = 8, \ a_2 = 18 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 4, \ a_1 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 = 10, \ a_1 = 16 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 8 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_0 = -4, \ a_1 = 5 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n. \end{cases}$

(ii) Линейни рек. отн. нехомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, \dots, a_{r-1}$ – начални условия

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \dots + c_r \cdot a_{n-r} + g(n)$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, \dots, r\}$, а

$g(n)$ се нарича нехомогенна част

За реш. на нехом. лин. рек. отнош. с пост. коеф., то трябва $g(n)$ да се представи така:

$$g(n) = e_1^n \cdot P_1(n) + e_2^n \cdot P_2(n) + \ldots + e_s^n \cdot P_s(n)$$

където e_i са различни една от друга константи, а $P_i(n)$ е полином на n от степен $d_i - 1$ за $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Алгоритъмът за решаване е почти същият: на стъпка 1) и 2) се грижим за решението на хомогенната част и в края на стъпка 2) добавяме (d_1+1) еднакви корена $= e_1$, (d_2+1) еднакви корена $= e_2$, ..., (d_s+1) еднакви корена $= e_s$ – корени на нехомогенната част. Оттам нататък е същото

Зад

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{1}_{\text{не х.е.}} \end{cases}$$

Зад

$$\begin{cases} a_0 = 4,\ a_1 = -11,\ a_2 = 41 \\ a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2\cdot(-1)^n + (-2)^{n+3} \end{cases}$$

Зад

$$\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 16 \\ a_{n+1} = 8a_n - 15a_{n-1} + 7n^2 5^n + 4^n - 6n\cdot 3^n - 8n^2 + 19 + 2\cdot 5^n \end{cases}$$

309

a) $\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + n \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = -9 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 27 \cdot 5^n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = -a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2^n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 2,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n + 5 \cdot 2^{n+1} \end{cases}$

3) Особени случаи

a) Когато свободния член не е квазиполином

прим: $a_n = a_{n-1} + \sqrt[3]{n}$, $a_1 = 6$

b) Когато коеф. са непостоянни

прим: $a_n = n \, a_{n-1}$, $a_1 = 1$

c) Когато има променлива дължина на историята

прим: $a_1 = 20$, $a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

В курса по ДАА ще се научите и тях да борите.

302 Намерете формула за всяка от сумите:

a) $1+2+\ldots+n$

b) $2+8+24+\ldots+n\cdot 2^n$

c) $2+4+\ldots+2n$

d) $1+3+\ldots+(2n-1)$

e) $5+7+9+\ldots+(2n+3)$

f) $3+7+11+\ldots+(4n-1)$

g) $2+6+10+\ldots+(4n-2)$

h) $1+5+9+\ldots+(4n+1)$

Интересни приложения

Зад 1) Намерете рек. отношение и начални условия за броя на двоичните думи с дължина n, в които няма две съседни нули. Намерете формула за този брой. Определете броя на думите с дължина 10.

Зад 2) Колко са думите от n десетични цифри с четен брой нули?

3ад: Може и 00123.

Зад 3) а) Докажете че числото $(3+\sqrt{5})^{2020}+(3-\sqrt{5})^{2020}$ е цяло и намерете цифрата на единиците му.

b) Намерете първите 4 цифри (най-левите) на числото (цяло и броя на цифрите му).

Задача Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Да се реши функционалното уравнение

$$(*) \quad f(f(x)) = 6x - f(x) \quad \text{за } x \in \mathbb{N}$$

<u>произ.</u>