def / Фиктивна променлива в бул. ф-я.

Променливата x_i е фиктивна за ф-я $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ за всеки вектор α от J_2^n $\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.ч.

$f(\alpha) = f(\alpha')$.

def / Съществена променлива в бул. ф-я

Пром. x_i е съществено за ф-я $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ за някой вектор α от J_2^n

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.ч.

$f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

Т.е. съществената променлива не е фиктивна за f.

зад) Да се намери броят на двоичните ф-ции на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.

Реш. /

Нека $\mathcal{U} \subseteq F_2^n$, $|\mathcal{U}| = 2^{2^n}$.

Може с принципа на вкл. и изкл.

Нека $A \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\forall i \in \{1,\dots,n\})$ [„x_i е същ. за f"]$\}$

и $B \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\exists i \in \{1,\dots,n\})$ [„x_i не е същ. за f"]$\}$

Тогава $A \cup B = \mathcal{U}$.

Нека $B_i \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \&$ „x_i е фикт. пром. за f"$\}$.

Тогава $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

Искаме $|A|$?

$|\mathcal{U}| = |A \cup B| = |A| + |B|$

$A \cap B = \emptyset$

принц. на съб.

Тогава $|A| = |\mathcal{U}| - |B| = (*)$.

Сега:

$|B_i| = 2^{2^{n-1}}$, т.к. x_i е фиктивна т.е. функ. от-т. на $f(\alpha)$ не зависи от ст-тта на α_i.

$|B_i \cap B_j| = 2^{2^{n-2}}$, аналогично

...

$|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n| = 2^{2^{n-n}} = 2^1 = \underset{\text{констаните 1 и 0}}{\underline{2}}$.

Тогава:

$$(\ast) = 2^{2^n} - \binom{n}{1} \cdot 2^{2^{n-1}} + \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 2^{2^{n-n}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot 2^{2^{n-i}}$$

(392) Определете фиктивните и съществените променливи на ф-ята f

a) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (x \to (x \vee y)) \to z$

b) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (11110000)$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00110011)$

d) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00111100)$

Реш (d)

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

* z е фиктивна
* y е съществена
  $f(\langle 1,0,0\rangle) \neq f(\langle 1,1,0\rangle)$
* x е съществена
  $f(\langle 0,0,0\rangle) \neq f(\langle 1,0,0\rangle)$

Композиции и формули над множество от булеви функции

Един от начините за проверка на еквивалентност на ф-ли е табличния метод.

Зад Постройте таблицата на ф-ята f, представена чрез формулата φ над множеството от свързващи връзки $F = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \downarrow, |, \leftrightarrow\}$.

a) $\varphi \leftrightharpoons (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$

b) $\varphi \leftrightharpoons \neg(\bar{x} \vee y) \vee ((x \,\&\, \bar{z}) \downarrow (x \leftrightarrow y))$

c) $\varphi \leftrightharpoons \bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus (x \,\&\, z)))$

d) $\varphi \leftrightharpoons (((x | y) \downarrow z) | y) \downarrow z$

Реш!

d)

x y z	$x \mid y$	$(x \mid y) \downarrow z$	$((x \mid y) \downarrow z) \mid y$	$(((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	0	1	0
1 0 0	1	0	1	0
1 0 1	1	0	1	0
1 1 0	0	1	0	1
1 1 1	0	0	1	0

302) Еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ?

a) $\varphi \leftrightharpoons ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \& (x \vee z))$ и

$\psi \leftrightharpoons (x \leftrightarrow y)$

b) $\varphi \leftrightharpoons (x \to y) \to z)$ и $\psi \leftrightharpoons x \to (y \to z)$

Реш / b) Пак с табличка:

x y z	$x \to y$	$(x \to y) \to z$	$y \to z$	$x \to (y \to z)$
0 0 0	1	0	1	1
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

Не, не са еквивалентни.

Зад Използвайки с-вата на операциите, проверете еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ:

a) $\varphi \leftrightharpoons (\overline{x} \& \overline{z}) \vee (x \& \overline{y}) \vee (x \& \overline{z})$ и
$\psi \leftrightharpoons x \& \neg(y \& z) \vee (\overline{x} \& \overline{z})$

b) $\varphi \leftrightharpoons (x \to y) \to ((x \& \overline{y}) \oplus (x \leftrightarrow \overline{y}))$ и
$\psi \leftrightharpoons (x \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y})$

Реш/

b) $\varphi \boxminus (x \& \overline{y}) \vee (((x \& \overline{y}) \& \neg(x \leftrightarrow \overline{y})) \vee (\neg(x \& \overline{y}) \& (x \leftrightarrow \overline{y})))$ $\boxminus$

$$\varphi \models (x \,\&\, \bar{y}) \vee (((x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, \neg(x \Leftrightarrow y)) \vee (\neg(x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, (x \Leftrightarrow \bar{y}))) \models$$

$$(x \,\&\, \bar{y}) \vee ((x \,\&\, \bar{y}) \,\&\, ((x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y))) \vee ((\bar{x} \vee y) \,\&\, ((\bar{x} \vee \bar{y}) \,\&\, (y \vee x)))$$

$$\models (x \,\&\, \bar{y}) \vee \underbrace{((x \,\&\, \bar{y}) \vee (\underbrace{x \,\&\, \bar{x} \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{y}}_{F}))}_{(x \,\&\, \bar{y})} \vee$$

$$((\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y}) \,\&\, (y \vee x)) \models$$

$$(x \,\&\, \bar{y}) \vee ((\bar{x} \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y}) \,\&\, (y \vee x)) \models$$

$$\models (x \,\&\, \bar{y}) \vee ((\bar{x} \vee \underbrace{(y \,\&\, \bar{y})}_{F}) \,\&\, (y \vee x)) \models$$

$$\models (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, (y \vee x)) \models$$

$$\models (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y \vee \underbrace{\bar{x} \,\&\, x}_{F}) \models$$

$$\models (x \,\&\, \bar{y}) \vee (\bar{x} \,\&\, y) \models x \oplus y$$

$$\psi \models ((x \vee y) \,\&\, \bar{x}) \vee ((x \vee y) \,\&\, \bar{y}) \models$$

$$\models ((\underbrace{x \,\&\, \bar{x}}_{F}) \vee (y \,\&\, \bar{x})) \vee ((x \,\&\, \bar{y}) \vee (\underbrace{y \,\&\, \bar{y}}_{F})) \models$$

$$\models (y \,\&\, \bar{x}) \vee (x \,\&\, \bar{y}) \models x \oplus y$$

Еквивалентни са.

Пълни множества от булеви функции. Теорема на Пост

def | Затворена обвивка на м-во от бул. ф-ии $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е м-вото $[F]$, което:

- $F \subseteq [F]$
- Нека f и g са произволни функции от $[F]$. Нека $f \in \mathcal{F}_2^n$, $n \geq 1$. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f винаги се съдържа в $[F]$, за $1 \leq i \leq n$.
- $[F]$ е най-малкото м-во на „$\subseteq$" с тези с-ва.

С-ва на затворената обвивка

За всяко $F \subseteq \mathcal{F}_2$:

- $F \subseteq [F]$
- $F \subseteq G \rightarrow [F] \subseteq [G]$
- $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$
- $[[F]] = [F]$

def | М-вото $A \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно, ако $[A] = \mathcal{F}_2$.

def | Базис на $\mathcal{F}_2$ е м-во $F \subseteq \mathcal{F}_2$, т.ч. F е пълно и F е минимално вкл. с това с-во.

Th на Бул /
Мн-вото $\{\&, \vee, \neg\}$ от булеви функции е пълно.

Th / Нека $F \subseteq F_2$ е пълно мн-во и $G \subseteq F_2$ и $F \subseteq [G]$.
Тогава и G е пълно.

Зад Покажете, че мн-вото от булеви ф-ии G е пълно:

a) $G = \{\&, \neg\}$
b) $G = \{\vee, \neg\}$
c) $G = \{|\}$
d) $G = \{\downarrow\}$
e) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, \oplus\}$
f) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, x \oplus y \oplus z\}$

Реш /

c) $x | x = \bar{x}$

$(x|y)|(x|y) = x \& y$

Оттам $x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$ по Де Морган.

e) $x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

Оттам $x \vee y = \overline{\bar{x} \& \bar{y}}$.

def | Нека $f(x_1,\dots,x_n) \neq \tilde{0}$ е булева ф-я.
Тогава дизюнктивна нормална форма на f е представяне на f като дизюнкция от елементарни конюнкции (т.е. само от променливи свързителната връзка "v" са изградени дизюнкциите).
Аналогично конюнктивна нормална форма на f е представяне на f като конюнкция от елементарни дизюнкции

---

def | За променлива x и $\sigma \in \{0,1\}$ дефинираме
$$x^{\sigma} \leftrightharpoons \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0 \\ x, & \sigma = 1. \end{cases}$$
$\boxed{x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma}$

---

def | Нека $f(x_1,\dots,x_n) \neq \tilde{0}$ е двоична ф-я.
Дизюнктивната нормална форма
$$f(x_1,\dots,x_n) = \bigvee (x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_n^{\sigma_n})$$
$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha) = 1]$$
се нарича Съвършена ДНФ за ф-ята f.
Аналогично
$$f(x_1,\dots,x_n) = \&(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$$
$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha) = 0]$$
се нарича Съвършена КНФ за ф-ята f.

Следствие от тм Бул.

$\mathcal{O}[\{\vee, \&, \neg\}]$ е пълно и

$$(\forall f \in \mathcal{F}_2)\left[f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{f(\sigma) = 1 \\ \sigma \in J_2^n \\ f \in \mathcal{F}_2^n}} (x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n})\right]$$

и

$$(\forall f \in \mathcal{F}_2)\left[f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{f(\sigma) = 0 \\ \sigma \in J_2^n \\ f \in \mathcal{F}_2^n}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})\right]$$

Т.е. всяка булева ф-я има СДНФ и СКНФ.

* Имаме биекция м/у $\mathcal{F}_2^n$ и съвършените ДНФ на тези ф-ции, освен константата $\tilde{0}$. Тя няма СДНФ.
* Имената на всички променливи в СДНФ във всяка елементарна конюнкция се срещат точно веднъж. Наричаме ги пълни тези елем. конюнкции. Аналогично за СКНФ и елементарните дизюнкции.

Зад Да се напише в СДНФ и СКНФ на ф-ята f:

a) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (x \oplus y) \rightarrow y \& z$

b) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (01101100)$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (10001110)$

Реш /

a)

x y z	$x \oplus y$	$y \& z$	$(x \oplus y) \rightarrow y \& z$
0 0 0	0	0	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	0	0
0 1 1	1	1	1
1 0 0	1	0	0
1 0 1	1	0	0
1 1 0	0	0	1
1 1 1	0	1	1

СДНФ

$$f(\tilde{x}^3) = (\bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}) \vee (\bar{x} \& \bar{y} \& z) \vee (\bar{x} \& y \& z) \vee (x \& y \& \bar{z}) \vee (x \& y \& z)$$

Записване дизюнкцията на единиците на f чрез аргументите ѝ.

СКНФ:

$$f(x^3) = (\bar{x} \lor y \lor \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \lor y \lor z) \,\&\, (\bar{x} \lor y \lor \bar{z})$$

b)

x y z	f(x, y, z)
000	0
001	1
010	1
011	0
100	1
101	1
110	0
111	0

СДНФ:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \,\&\, \bar{y} \,\&\, z) \lor (\bar{x} \,\&\, y \,\&\, \bar{z}) \lor (x \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{z}) \lor (x \,\&\, \bar{y} \,\&\, z).$$

СКНФ:

$$f(x,y,z) = (x \lor y \lor z) \,\&\, (x \lor \bar{y} \lor \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \lor \bar{y} \lor z) \,\&\, (\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z})$$

c) СДНФ:

$$f(x,y,z) = (\bar{x} \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{z}) \lor (x \,\&\, \bar{y} \,\&\, \bar{z}) \lor (x \,\&\, \bar{y} \,\&\, z) \lor (x \,\&\, y \,\&\, \bar{z}).$$

СКНФ: $f(x,y,z) = (x \lor y \lor \bar{z}) \,\&\, (x \lor \bar{y} \lor z) \,\&\, (x \lor \bar{y} \lor \bar{z}) \,\&\, (\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z})$

(302) Намерете дължината на СДНФ на f!

a) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$

b) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n})$

c) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \dots \oplus x_n$

Реш/

(*) Броят на пълните елементарни конюнкции в СДНФ на f се нарича дължината на СДНФ на f.

a) Нека $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in J_2^n$.

Тогава $f(\alpha) = f(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) =$

$$= a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = \begin{cases} 1, & \omega(\alpha) \text{ е нечетно} \\ 0, & \omega(\alpha) \text{ е четно} \end{cases}$$

Т.е. дължината на СДНФ на f = броят на двоичните вектори, всеки от които има нечетно тегло.

Този брой е $\frac{2^n}{2}$

броят на векторите с четен # единици = броят на векторите с нечетен # единици

b) Нека $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in J_2^n$.

Тогава $f(a_1, \ldots, a_n) = (a_1 \vee \ldots \vee a_n) \& (\overline{a_1} \vee \ldots \vee \overline{a_n}) =$

$= \begin{cases} 1, & a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1 \text{ и } \overline{a_1} \vee \ldots \vee \overline{a_n} = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Т.е. в двете дизюнкции трябва поне един от литералите да е положителен.

Това се получава, когато $\alpha \neq \tilde{1}$ и $\alpha \neq \tilde{0}$.

Това значи общината на СДНФ на f е $\underline{2^n - 2}$.

c) комбинация от a) и b).

Нека $\alpha = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in J_2^n$.

Тогава

$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \big(w(\langle a_4, a_5, \ldots, a_n \rangle) \text{ има нечетен брой единици и } (\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \tilde{0} \text{ или } \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \tilde{1})\big) \\ & \text{или} \\ & \big(w(\langle a_4, a_5, \ldots, a_n \rangle) \text{ има четен брой единици и } \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \tilde{0}, \tilde{1}\big). \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Тогава имаме $\left(\frac{2^{n-3}}{2} \cdot 2\right) + \left(\frac{2^{n-3}}{2} \cdot (2^3 - 2)\right)$.

(3зд) Намерете броя на булевите функции на n променливи, чиито СДНФ удовл. условията:

a) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е равен на броя на променливите без отрицание

b) Всяка пълна конюнкция в СДНФ съдържа поне две променливи с отриц.

c) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е нечетно число

d) Във всяка пълна конюнкция на СДНФ броят на променливите с отрицание не е по-голям от броя на променливите без отрицание

---

a) Нека $\mathcal{U} \leftrightharpoons \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \;\&$
$$(\forall \alpha \in \mathcal{J}_2^n) [\omega(\alpha) = n/2 \Rightarrow f(\alpha) = 0] \}$$

Нека $P \leftrightharpoons \{ \alpha \mid \alpha \in \mathcal{J}_2^n \;\&\; \omega(\alpha) = n/2 \}$

Нека $f \in \mathcal{F}_2^n$. Тогава
$$|P| = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно} \\ \binom{n}{n/2}, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$x_1 \ldots x_n$	$f(x_1,\ldots,x_n)$
α_1	0
$\vdots$	$\vdots$
$\alpha_{\|P\|}$	0
β_1	σ_1
$\vdots$	$\vdots$
$\beta_{2^n-\|P\|}$	$\sigma_{2^n-\|P\|}$

$, f \in U$

за $\sigma_i \in \{0,1\}$

Ако $(\forall i \in \{1,\ldots,2^n-|P|\})[\sigma_i = 0]$, то трябва да го махнем.

Така получаваме, че

$|U| = |\{v_f = \langle 0,\ldots,0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{2^n-|P|}\rangle \mid (\exists i \in \{1,\ldots,2^n-|P|\})[\sigma_i = 1]\}| =$

$= |\{\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_{2^n-|P|}\rangle \mid (\exists i \in \{1,\ldots,2^n-|P|\})[\sigma_i = 1]\}| =$

$= 2^{2^n-|P|} - 1.$

заради $\tilde{0}$.

b) $U \leftrightharpoons \{f \mid f \in \mathcal{P}_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in J_2^n)[\omega(\alpha) < 2 \Rightarrow f(\alpha) = 0]\}$

За $\omega(\alpha) = 0$ имаме само $\alpha = \tilde{1}$.

За $\omega(\alpha) = 1$ имаме $\binom{n}{n-1}$ избора, т.е. $\binom{n}{1} = n$ избора къде да е 0-лата.

Т.е. имаме общо $n+1$ вектора нарушаващи условието.

$$|\mathcal{U}| = 2^{2^{n}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \binom{n+1}{i} \cdot 2^{2^{n}-i}}_{}$$

има поне i вектора от лошите участващи с 1-ци във ф-ята f.

c) $\mathcal{U} \leftrightharpoons \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in \mathcal{J}_2^n)$

броя на нулите в α е нечетно число $\to$ $[\, \omega(\tilde{\alpha}) \% 2 = 1 \Rightarrow f(\alpha) = 0 \,] \}$

вектори с четен брой 0-ли е равен на # вектори с нечетен брой 0-ли $\rightsquigarrow 2^{n-1}$

Тогава

$$|\mathcal{U}| = 2^{2^{n}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{2^{n-1}} (-1)^{i+1} \binom{2^{n-1}}{i} \cdot 2^{2^{n}-i}}_{}$$

има поне i вектора от лошите с нечетен брой нули участващи в f с 1.

d) $\mathcal{U} \leq \{f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \;\&$

$(\forall \alpha \in \mathcal{J}_2^n)[\underbrace{\omega(\bar{\alpha}) > \omega(\alpha)}_{\text{брой на единиците при отрицание е строго по-голям от броя на единиците без отрицание}} \Rightarrow f(\alpha) = 0]\}$

$\binom{n}{n/2+i}$ избора за 0-ли вектор α. за $i \in \{1, \dots, n/2\}$

за n четно и

$\binom{n}{\frac{n-1}{2}+i}$ избора за 0-ли вектор α за $i \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}+1\}$

Т.е. това са лоши вектори, които трябва да стоят 0 в f.

Нека $m \leq \begin{cases} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n}{n/2+i}, & n \text{ even} \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+1} \binom{n}{\frac{n-1}{2}+i}, & n \text{ odd} \end{cases}$

Тогава

$$|\mathcal{U}| = 2^{2^n} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i+1)} \cdot \binom{m}{i} \cdot 2^{2^n - i}}_{\text{колко лоши вектора са с 1-ци в } f \text{ и колко са тези } f}$$