b) Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти - хомогенни и нехомогенни

Азаін

def | Рекурентна числова редица

Числова редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича рекурентна, ако съществува $k_0 > 0$, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ за елементите на редицата е изпълн.:

$$\boxed{(*) \quad a_{n+k} + P_1(n).a_{n+k-1} + \ldots + P_k(n).a_n = g(n)}$$

Ако $P_1(n), \ldots, P_k(n)$ са константи, то (*) се нарича линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти от ред k. Ако $g(n) = 0$, рек. отн. се нарича хомогенно. В противен случай се нарича нехомогенно.

def | **Рекурентно отношение от ред r**

Нека $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са членове на редицата, където

$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-r})$, $n \geq r$.

рекурентно отношение от ред r

начални условия (r на брой)

! Отново: Това, което разбираме под решаване на лин. рек. отн. е да определим ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. $a_n = f(n)$.

(i) Линейни рек. отн. хомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ - начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \dots + c_r . a_{n-r}$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

Алгоритъм:

1) Намиране характеристично уравнение на хомогенната част:

$a_n - c_1 . a_{n-1} - \dots - c_r . a_{n-r} = 0$

$P(x) = 1 . x^r - c_1 . x^{r-1} - \dots - c_r . x^0 = 0$, където

$P(x)$ се нарича характеристичен полином на рек. редица, а уравнението $P(x) = 0$ се нарича характеристично уравнение (делихме на $x^{n-r} \neq 0$)

2) Решаваме характеристичното уравнение и намираме корени $\{x_1, \dots, x_r\}_M \subseteq \mathbb{C}$ (не им знаем кратностите).

3) Имаме два случая за тези корени:

3.1) Всички корени са различни помежду им.

Тогава общият вид на рек. отн. е

$a_n = x_1^n . A_1 + x_2^n . A_2 + \dots + x_r^n . A_r$

3.2) Не всички са различни. Нека $t < r$.

Нека $x_s = x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{ik}$ за $s \leq t$

Общ вид:

$a_n = x_1^n . A_1 + \dots + (A_{i1} + A_{i2} . n + \dots + A_{ik} . n^{k-1}) . x_s^n + \dots + A_t x_t^n$ за $t < r$

4) Правим система за делените $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ (да компенсираме със сл. 3.1))

$$\begin{cases} a_0 = A_1.x_1^0 + A_2.x_2^0 + \ldots + A_r.x_r^0 \\ a_1 = A_1.x_1^1 + A_2.x_2^1 + \ldots + A_r.x_r^1 \\ \ldots \\ a_{r-1} = A_1.x_1^{r-1} + A_2.x_2^{r-1} + \ldots + A_r.x_r^{r-1} \end{cases}$$

5) Решаваме системата и получаваме остойностявания за $A_1, \ldots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор.

(322) Да се реши рекурентното отн:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \; a_1 = 3 \\ a_n = 3.a_{n-1} - 2.a_{n-2}, \; n > 1 \end{cases}$$

1) $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

$\hookrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $D = 9 - 4.2 = 1$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ ↗ 2, ↘ 1 $\Rightarrow \{2, 1\}_M$

сл. 3.1) Всички корени са разл. пол. си:
Значи общ вид:

$a_n = A_1 . 2^n + A_2 . 1^n = A_1 . x_1^n + A_2 . x_2^n$

4) Правим с-ма използвайки нач. условия

$$(\#)\ \begin{cases} a_0 = 1 = A_1 + A_2 \\ a_1 = 3 = 2A_1 + A_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

5) Решаване с-ма (#)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = 1 - A_1 \\ 3 = 2.A_1 + 1 - A_1 \end{cases} \Leftrightarrow A_1 = 2,\ A_2 = -1$$

Значи $a_n = 2^{n+1} - 1,\ n \in \mathbb{N}_u$

$f(n) = 2^{n+1} - 1.$

302)
$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2 \end{cases}$$

1) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 4.1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2}{2} = 1$ - двукратен корен

$\rightsquigarrow \{1, 1\}_M$

Значи общия вид (сл. 3.2а):

$a_n = (A_1 \cdot n + A_2) \cdot 1^n$

4) $\begin{cases} a_0 = 1 = A_2 \\ a_1 = 2 = A_1 + A_2 \end{cases}$

5) $A_1 = 1$, $A_2 = 1$ и значи

$\boxed{a_n = n + 1}$, $n \in \mathbb{N}$

300) До се реши всяко от рек. отн., съгласно дадените нач. условия:

a) $\begin{cases} a_1 = 8, \; a_2 = 18 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 4, \; a_1 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 = 10, \; a_1 = 16 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1, \; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 1, \; a_1 = 8 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

g) $\begin{cases} a_0 = -4, \ a_1 = 5 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n. \end{cases}$

Проверка! Винаги! Работим само с тези случаи и, ако не сме внимателни, то могат да се появят чужди решения!

(ii) Линейни рек. отн. нехомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, \ldots, a_{r-1}$ – начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \ldots + c_r . a_{n-r} + g(n)$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, \ldots, r\}$, а

$g(n)$ се нарича нехомогенна част

За реш. на нехом. лин. рек. отнош. с пост. коеф., то трябва $g(n)$ да се представи така:

$g(n) = e_1^n . P_1(n) + e_2^n . P_2(n) + \quad + e_s^n . P_s(n)$,

където e_i са различни една от друга константи, а $P_i(n)$ е полином на n от степен $d_i - 1$ за $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Алгоритъмът за решаване е почти същият: на стъпка 1) и 2) се грижим за решението на хомогенната част и в края на стъпка 2) добавяме $(d_1 + 1)$ еднакви корени $= e_1$ (d_2+1) еднакви корени $= e_2$, ..., (d_s+1) еднакви корени $= e_s$ – корени на нехомогенната част. Оттам нататък е същото

(302) $\begin{cases} a_0 = 0,\ a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + \underbrace{1}_{\text{нех.ч.}} \end{cases}$

---

1) $a_n - 2a_{n-1} = 0$

2) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 2} \to \{2\}_M$ реш. от х.ч.

$g(n) = 1$ и $\deg(g) = 0$

Ще предст.: $g(n) = \underbrace{1^n}_{e^n} \cdot 1 \cdot n^0$

Добавяме $(0+1)$ пъти $e = 1 \rightsquigarrow \{1\}_M$ реш. на нех.ч.

Сега всички решения са $\{2, 1\}_M$ и общ вид: $\underline{a_n = 2^n \cdot A_1 + 1^n \cdot A_2}$.

3) Всички корени са разл.

4) и 5) $\begin{cases} a_0 = 0 = A_1 + A_2 \Leftrightarrow A_1 = -A_2 \Leftrightarrow A_1 = 1 \\ a_1 = 1 = 2A_1 + A_2 \Leftrightarrow A_2 = -1 \end{cases}$

Т.е. $a_n = 2^n - 1$.

Зад. $\begin{cases} a_0 = 4,\ a_1 = -11,\ a_2 = 41 \\ a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2.(-1)^n + (-2)^{n+3} \end{cases}$

1) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = 0$

2) $(x+1)(x+2)^2 = 0$

$\rightsquigarrow \{-1, -2, -2\}_M$

Своб $g(n) = \underbrace{2}_{\deg(\cdot)=0}\underbrace{(-1)^n}_{e_1} . n^{0} + \overbrace{(-8)}^{\deg(\cdot)=0} . \underbrace{(-2)^n}_{e_2} . n^{0}$

Изд. $(0+1)$ нати $e_1 = -1$ и

$(0+1)$ нати $e_2 = -2$ $\rightsquigarrow \{-1, -2\}_M$

Тогa: $\{-1, -1, -2, -2, -2\}_M$

решения от х.е. и нех.т.

Общ вид:

$a_n = (A_{11}.n + A_{12}).(-1)^n + (A_{21}.n^2 + A_{22}.n + A_{23}).(-2)^n$

Получаваме с-ма:

$a_0 = 4 = A_{12} + A_{23}$

$a_1 = -11 = \ldots$

$a_2 = 41 = \ldots$

$a_3 = -139 = \ldots$

$a_4 = 425 = \ldots$

След решаването ѝ получаваме

$a_n = (1-2n).(-1)^n + (3+2n+n^2).(-2)^n$

Зад

$$\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = 16 \\ a_{n+1} = 8a_n - 15a_{n-1} + 7.n^2.5^n + 4^n - \\ \quad -6n.3^n - 8n^2 + 13 + 2.5^n \end{cases}$$

От. х.е: $x^2 - 8x + 15 = 0$

$D = 64 - 4.15 = 4$

$x_{1,2} = \dfrac{8 \pm 2}{2} \to 5, \to 3 \quad \}\ \{5, 3\}_M$

От нехе: $\underbrace{}_{deg(.)=2}$ $\underbrace{}_{deg(.)=0}$ $\underbrace{}_{deg(.)=2}$

$g(n) = (7n^2+2).5^n + n^0.4^n + (8n^2+13).1^n +$

$+ \underbrace{(-6.n)3^n}_{deg(.)=1}$

$\to \{5, 5, 5, 4, 1, 1, 1, 3, 3\}_M$

Така получаваме

$\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1, 1, 43\}$ и

който иска да я довърши...

302) a) $\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + n \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = -3 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 27 . 5^n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = -a_{n-1} + 3 . 2^{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2^n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 2, a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n + 5 . 2^{n+1} \end{cases}$

3) Особени случаи

a) Когато свободния член не е квазиполином

прим: $a_n = a_{n-1} + \sqrt[3]{n}$, $a_1 = 6$

b) Когато коеф. са непостоянни

прим: $a_n = n\, a_{n-1}$, $a_1 = 1$

c) Когато има променлива дължина на историята

прим: $a_1 = 20$, $a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

В курса по ДАА ще се научите и тях да ги решавате.

Зад) Намерете формула за всяка от сумите:

a) $1 + 2 + \dots + n$

b) $2 + 8 + 24 + \dots + n.2^n$

c) $2 + 4 + \dots + 2n$

d) $1 + 3 + \dots + (2n-1)$

e) $5 + 7 + 9 + \dots + (2n+3)$

f) $3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)$

g) $2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2)$

h) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n+1)$

b) Нека $a_n = 2 + 8 + 24 + \dots + n \cdot 2^n$.

Тогава $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + (n+1) \cdot 2^{n+1}$.

От. хр: $\{1\}_M$: $a_{n+1} - a_n = 0 \to \underline{x - 1 = 0}$

От нехр: $\{2, 2\}_M$

$g(n) = \underbrace{(2n+2)}_{\deg(\cdot) = 1} \cdot 2^n$

Така $a_n = A_1 \cdot 1^n + (A_2 \cdot n + A_3) 2^n$

$a_2 = 10$, $a_3 = 34$

$$\begin{cases} a_1 = 2 = A_1 + 2A_2 + 2A_3 \\ a_2 = 10 = A_1 + 8A_2 + 4A_3 \\ a_3 = 34 = A_1 + 24A_2 + 8A_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 = 6A_2 + 2A_3 \,/:2 \to A_3 = 4 - 3A_2 \\ 24 = 16A_2 + 4A_3 \,/:4 \end{cases}$$

$\hookrightarrow 6 = 4A_2 + A_3$

$\hookrightarrow 6 = 4A_2 + \underline{4} - 3A_2$

$\hookrightarrow A_2 = 2$

$A_3 = -2$

$2 = A_1 + \overbrace{2 \cdot 2}^{4} + \overbrace{2 \cdot (-2)}^{-4} \to A_1 = 2$

Така $a_n = 2 + (2n - 2) \cdot 2^n$

✓ $a_4 = 2 + 6 \cdot \underbrace{2^4}_{16} = 96 + 2 = 98 = 34 + 4 \cdot \underbrace{2^4}_{16} = 98$

Интересни приложения

Зад 1 Намерете рек. отношение и начални условия за броя на двоичните думи с дължина n, в които няма две съседни нули. Намерете формула за този брой. Определете броя на думите с дължина 10.

Нека $\Sigma = \{0,1\}$ и за $n \in \mathbb{N}$ деф. Σ_n - за с-вото от думи с дължина n над Σ.

Нека $\Delta_n \subseteq \Sigma_n$, т.ч. в него са всички думи, в които няма две съседни нули.

Тогава $\Sigma_0 = \{e\} \to \Delta_0 = \{e\}$;

$\Sigma_1 = \{0,1\} = \Sigma \to \Delta_1 = \{0,1\}$;

$\Sigma_2 = \{00, 01, 10, 11\} \to \Delta_2 = \{01, 10, 11\}$

...

където за всяка дума $\omega \in \Delta_n$, $n \geq 2$, то

а) $\omega = \omega_1 1$, $\omega_1 \in \Delta_{n-1}$

b) $\omega \equiv \omega_1 10$, $\omega_1 \in \Delta_{n-2}$.

Значи $\Delta_n = A \cup B$, където $A \subseteq \Delta_n$ - м-во от думи от вида а) и $B \subseteq \Delta_n$ - м-во от думи от вида b).

$A \cap B = \emptyset$ и $\Delta_n = A \cup B$ т.е. по принципа на събирането то

$|\Delta_n| = |A| + |B| = |\Delta_{n-1}| + |\Delta_{n-2}|$.

За $n = 0 \to |\Delta_0| = 1 \to a_0 = 1$

За $n = 1 \to |\Delta_1| = 2 \to a_1 = 2$

За $n \geq 2 \to |\Delta_n| = |\Delta_{n-1}| + |\Delta_{n-2}| \to$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ за $n \in \mathbb{N}$

$\to x^2 - x - 1 = 0$

$\to D = 1 - 4.(-1) = 5$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Значи $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n . A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) . A_2$

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 1 = A_1 + A_2 \to A_1 = 1 - A_2 \\ a_1 = 2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) A_2 \Leftrightarrow \end{array} \right.$$

$$2=(1-A_2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+A_2\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$A_2=\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}, \quad A_1=\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}$$

Τωρα

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$a_0=1$

$a_1=2$

$a_2=3$

$a_3=5$

$a_5=8$

$a_6=13$

$a_7=21$

$a_8=34$

$a_9=55$

$a_{10}=89$

$\ldots$

(389) Колко са думите от n десетични цифри с четен брой нули?

(380) Може и 00123.

Нека $a_n = \#$ думи с четен брой нули от дължина n.

$n=1 \to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightsquigarrow \underbrace{9}_{\text{9 цифри без.}} = a_1$

$n=2 \to 00, \cancel{01}, \cancel{02}, \ldots, \cancel{10}, 11, 12, \ldots, \cancel{20}, 21, \ldots 99$

$a_2 = \underbrace{9.9}_{\text{9 цифри без. ненулеви}} + \underbrace{1}_{\text{и двете са 0-ли}} = 82$

$a_3 = \underbrace{9.9.9}_{\text{нито едно не е 0}} + \underbrace{3.9}_{\text{две нули}} = 756$

3 начина за трета буква; избор за трета буква

Нека отново $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ е азбуката, Σ_n - думи над Σ с дълж. n, $A_n \subseteq \Sigma_n$ - думи над Σ с дълж. n и с четен брой нули.

За последната буква имаме два случая $w \in A_n$

a) $w = w_1 d$ и $d \in \Sigma \setminus \{0\}$

Тогава $w_1 \in A_{n-1}$ и значи имаме

$\underbrace{a_{n-1} \cdot 9}_{\text{опции за последна цифра}}$ на брой думи от този тип.

б) $w = w_1 0$

Тогава $w_1 \in \underbrace{\Sigma_{n-1} \setminus A_{n-1}}_{\text{всички думи с дълж. } n-1 \text{ и с нечетен брой 0-ли}}$.

$|\Sigma_n| = 10^n \rightsquigarrow |\Sigma_{n-1}| = 10^{n-1}$

значи имаме $10^{n-1} - a_{n-1}$

принцип на изваждането

Така разделихме $A_n = \overset{a)}{A} \cup \overset{б)}{B}$ и $A \cap B = \emptyset$. По принцип на събирането, то $|A_n| = |A| + |B|$

$a_n = 9 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} =$

$= 8 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1} =$

$= 8 \cdot a_{n-1} + \underbrace{n^0 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10^n}_{g(n) \rightsquigarrow \deg(\cdot) = 0}$

От. х.т: $\{8\}_{M}$, а от не х.т: $\{10\}_{M}$

Тогa $a_n = A_1 . 8^n + A_2 . 10^n$

$$\left| \begin{array}{l} a_1 = 9 = 8.A_1 + 10.A_2 \;/.8 \\ a_2 = 82 = 64.A_1 + 100.A_2 \end{array} \right\} - \Leftrightarrow$$

$10 = 20.A_2 \Leftrightarrow A_2 = 1/2$

$9 = 8.A_1 + \cancel{10}^{5}.1/\cancel{2} \Leftrightarrow A_1 = 1/2$

Тогa $a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$.

Зад 3) а) Докажете че числото $(3+\sqrt{5})^{2020}+(3-\sqrt{5})^{2020}$ е цяло и намерете цифрата на единиците му.

б) Намерете първите 4 цифри (най-левите) на числото, както и броя на цифрите му.

а) Нека $\boxed{a_n=(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n \quad (*)}$

Нека да намерим с ф-ли на Виет квадратно ур-е с корени $3\pm\sqrt{5}$.

$x_1+x_2=3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}=\underline{6}$

$x_1.x_2=(3^2-(\sqrt{5})^2)=\underline{4}$

$x^2-6x+4=0$

$x^2=6x-4$ характерист. ур-е

$\underline{a_{n+2}=6.a_{n+1}-4a_n}$

рекурентното отношение

Нека да сметнем няколко члена и да се подсигурим:

от $(*)$ $\begin{cases} a_0=1+1=2, & a_2=28=\overset{36}{\overline{6.6}}-\overset{8}{\overline{4.2}} \quad (V) \\ a_1=6 \end{cases}$

Т.к. 6 и −4 са цели числа и a_1, a_2 също са цели, то по индукция може да док., че "ако a_n и a_{n+1} са цели, то a_{n+2} е цяло"

Тогава ще можем да заключим, че за вс. $n \in \mathbb{N}$ a_n е цяло вкл. и за $n = 2020$.

Сега искаме цифрата на единиците т.е.

? $a_{2020} \% 10 = ?$?

Нека d_n е $a_n \% 10$ тази цифра.

Тогава $\underbrace{d_0 = 2}_{a_0 = 2}$, $\underbrace{d_1 = 6}_{a_1 = 6}$, $\underbrace{d_2 = 8}_{a_2 = 28}$, ...

$d_n \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ за вс. n.

$d_{n+2} = a_{n+2} \% 10 = (6a_{n+1} - 4a_n) \% 10 =$
$= (6b_{n+1} - 4b_n) \% 10$

$d_3 = (\underbrace{\overbrace{6.d_2}^{168} - \overbrace{4.d_1}^{24}}_{144}) \% 10 = \underline{\underline{4}}$

$d_4 = (\underbrace{\underbrace{6.d_3}_{24} - \underbrace{4.d_2}_{32}}_{-8}) \% 10 = \underline{\underline{2}}$

$$d_5 = (\underbrace{\overbrace{6.d_4}^{12} - \overbrace{4.d_3}^{16}}_{-4}) \% 10 = \underline{\underline{6}}$$

Започнаха да се повторят!

Значи $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ е периодична с период 4.

Така $b_{2015} = b_0 = \underline{\underline{2}}$

$2020 \% 4 = 0$

b) Ще приведем числото в стандартен запис.

$$\log_{10}((3+\sqrt{5})^{2020}) = 2020.\log_{10}(3+\sqrt{5}) =$$

$$= 2020 . 0,713 = \underbrace{1452,3307}$$

значи е число с 1452 цифри

Значи $(3+\sqrt{5})^{2020} \approx 10^{1452,3307}$.

$$(\underbrace{3-\sqrt{5}}_{\in(0;1)})^{2020} \approx 0$$

Ще вземем числото с повече цифри, защото ни интересуват само първите няколко цифри!

$$(3+\sqrt{5})^{2020} + (3-\sqrt{5})^{2020} \approx$$

$$(3+\sqrt{5})^{2020} + 0 \approx 10^{1452,3907} =$$

$$= 10^{1452} \cdot \underbrace{10^{0,3907}}_{\in (10^0;10^1) = (1;10)} =$$

$$2,4586686$$

$$= 2,4586686 \cdot 10^{1452}$$

стандартен запис

2458 са първите четири цифри

и завършва на 0

Остават още 1447 неизвестни

цифри.

Задача Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Да се реши функционалното уравнение
(*) $f(f(x)) = 6x - f(x)$ за $x \in \mathbb{N}$ произв.

Нека $x_0 \in \mathbb{N}$ е произволно и розгл: $x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots$

Т.е. $a_n = \underbrace{f(\dots f}_{n \text{ пъти}}(x_0)\dots)$

и $a_0 = x_0$, $a_{n+1} = f(a_n)$

Тогава (*) става:

$a_{n+2} = 6 \cdot a_n - a_{n+1}$

$\hookrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\hookrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$ $\nearrow -3$, $\searrow 2$ $\leadsto \{2, -3\}_M$

Значи $a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot (-3)^n$

Ако $A_2 < 0$, то за достатъчно големи четни n, то $a_n < 0 \leadsto a_n \notin \mathbb{N}$ (не е позволено, защото $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$). Значи $A_2 \geq 0$

Ако $A_2 > 0$, то за достатъчно големи нечетни n, то пак $a_n < 0$.

Значи $\underline{\underline{\underline{A_2 = 0}}}$

Така $a_n = A_1 . 2^n$.

$n=0 \to a_0 = A_1 . 2^0 = A_1 = x_0$

$n=1 \to a_1 = A_1 . 2^1 = 2.A_1 = f(x_0)$

$$f(x_0) = 2x_0.$$

Но $x_0 \in \mathbb{N}$ е произволно.

Значи $f(x) = 2x$ за всс $x \in \mathbb{N}$.

Проверка:

$f(f(x)) = f(2x) = 2.(2x) = 4x =$

$= 6x - \underbrace{2x}_{f(x)}$

$f(\underbrace{f(\underbrace{f(x)}_{x})}_{f(x)}) = f(4x) = 2.(4x) =$

$= 2.(6x - 2x) =$

$= 6.\underbrace{2x}_{f(x)} - \underbrace{4x}_{f(f(x))}$ ✓