(зад) Нека фикс $B \subseteq A$.
Деф. R в/у $\mathcal{P}(A)$:
$R = \{\langle X, Y \rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid (X \Delta Y) \subseteq B\}$.
Док. че R е рел. на екв. и за
всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ съществува точно
едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

(зад) Следва за еши $\langle A, R \rangle$
• $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има R-мин. ел"$]$
• не е вярно, че същ. строго намаляв.
редица $x_{i+1} R x_i$
$i \in \mathbb{N}$

петък: $8^{30} - 10$ (платки)
$11^{15} \div 13$

(зад) $\langle Fin(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ фундирано? добре наредено?

Зад 3) СУСЕ за ЧЕНМ $\langle A, R \rangle$

(1) • $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има R-мин. ел."$]$

(2) • не е вярно, че същ. строго намаляв. редица $x_{i+1} R x_i$, $x_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$ $\rightarrow$ $x_{i+1} \neq x_i : i \in \mathbb{N}$

(1) $\rightarrow$ (2) и (2) $\rightarrow$ (1)

(1) $\rightarrow$ (2) $\vdash$ $\neg(2) \rightarrow \neg(1)$ $\qquad$ (1) & $\neg(2) \rightarrow \neg(1)$

Имаме (1) искаме (2).

Да, че не е в сила (2) имаме

$(x_i)_{i=0}^{\infty}$ е свидетел $x_{i+1} R x_i$ за $i \in \mathbb{N}$.

$\emptyset \neq \{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq A$. $\qquad$ $a : (\forall x \in A)[xRa \Rightarrow x = a]$

по (1) $\{x_0, x_1, \ldots\}$ има R-мин. ел.

Нека $a \in \{x_0, x_1, \ldots\}$ е R-мин. ел.

Значи има $i_0 \in \mathbb{N}$: $a = x_{i_0}$. Но тогава

$x_{i_0+1} R x_{i_0}$ значи $x_{i_0+1} \neq x_{i_0}$ Абсурд

Готово имаме (2)

(зад) СУСЕ за ЧЕНИ $\langle A, R \rangle$

(1) • $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има R-мин. ел"$]$

(2) • не е вярно, че същ. строго намаляв.

R-редица $x_{i+1} R x_i$ $\quad x_i \in A$

$\underbrace{x_{i+1}}_{T}$ $\quad i \in \mathbb{N}$ $\quad \rightarrow x_{i+1} \neq x_i : i \in \mathbb{N}$

$(2) \rightarrow (1)$ $\quad \underbrace{\neg(2)}_{F} \vee \underbrace{(1)}_{T}$

Нека (2) е в сила. Допускаме, че (1) не е в сила.

Нека $B_0 \subseteq A$, $B_0 \neq \emptyset$ и B_0 няма R-мин. ел. е свидетел. $\exists x (x \in B_0)$

Нека $x_0 \in B_0$ е свидетел. $\quad (2) \& \neg(1) \rightarrow \neg(2)$

$\neg(\exists y \in B_0)(\forall x \in B_0)[xRy \Rightarrow x = y]$ $\quad \rightarrow (1)$

$\forall y$ $\quad (2) \rightarrow (1)$

има е R-мин. в B_0

$(\forall y \in B_0)(\exists x \in B_0)[xRy \wedge x \neq y]$

Нека $x_1 \in B_0$ е свидетел т.е. $x_1 R x_0$ и $x_0 \neq x_1$

По за x_1 същото $\Rightarrow$ $x_2 R x_1 R x_0$ и $x_2 \neq x_1$

....

Нека A е м-во.

Зад. Нека фикс. $B \subseteq A$.

Деф. релация R_B в/у $\mathcal{P}(A)$ така:

$$\langle X, Y \rangle \in R_B \iff X \Delta Y \subseteq B, \ X, Y \subseteq A$$

Да се R_B е рел. на екв. и за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ съществува точно едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

1) R_B е рел. на екв. → рефл., сим., транз.

2) за вс. $X \subseteq A$ същ. точно едно м-во $Y \in [X]_{R_B}$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$

- $\forall x [\langle x, x \rangle \in R_B]$

Нека $X \subseteq A$. $X \Delta X = \emptyset \subseteq B$ ⟹ $\langle X, X \rangle \in R_B$.

- $\forall x \forall y [\langle x, y \rangle \in R_B \Rightarrow \langle y, x \rangle \in R_B]$.

Нека $X, Y \subseteq A$ и $\langle X, Y \rangle \in R_B$: $X \Delta Y \subseteq B$

$$\overset{\subseteq B}{X \Delta Y} = Y \Delta X$$

$$X \Delta Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X = Y \setminus X \cup X \setminus Y = Y \Delta X \subseteq B$$

$$\langle Y, X \rangle \in R_B$$

- $\forall X \forall Y \forall Z [\langle X, Y \rangle \in R_B \wedge \langle Y, Z \rangle \in R_B \to \langle X, Z \rangle \in R_B]$.

Нека $X, Y, Z \subseteq A$ и $X \Delta Y \subseteq B$ и $Y \Delta Z \subseteq B$.

Искаме $X \Delta Z \subseteq B$?

$$\forall x (x \in X \Delta Z \to x \in B).$$

Нека $t \in X \Delta Z = X \setminus Z \cup Z \setminus X$.

сл.1 $t \in X \setminus Z$. $\mapsto$ $t \in X$ и $t \notin Z$.

сл.1.1 $t \in Y$ $\mapsto$ $t \in Y \setminus Z \subseteq Y \Delta Z \subseteq B$

сл.1.2 $t \notin Y$ $\mapsto$ $t \in X \setminus Y \subseteq X \Delta Y \subseteq B$

сл.2 $t \in Z \setminus X$ аналогично.

$$\boxed{\begin{aligned} X \Delta Y &= X \setminus Y \cup Y \setminus X \subseteq B \\ Y \Delta Z &= Y \setminus Z \cup Z \setminus Y \subseteq B \end{aligned}}$$

2) За вс. $X \subseteq A$ същ. точно едно м-во $Y \in [X]_{R_B}$
т.е. $Y \cap B = \varnothing$

$X, Y \in \mathcal{P}(A)$: $\langle X, Y \rangle \in R_B \iff X \Delta Y \subseteq B$.

$[X]_{R_B} \leq \{ Y \mid Y \in \mathcal{P}(A), X \Delta Y \subseteq B \}$

Нека $X \subseteq A$ произв.

$\exists$) има Y т.е. ___ ___

!) ако Y_1 и Y_2 са т.е. ...., то $Y_1 = Y_2$

$Y \leq X \setminus B$

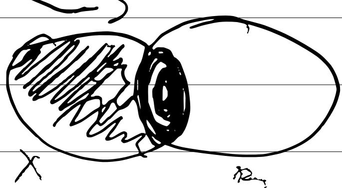
Ограничения за Y: | $Y \cap B = \varnothing \longrightarrow \bullet \setminus B$

| $X \Delta Y \subseteq B \longrightarrow X \setminus B$

$X \setminus Y \cup Y \setminus X \subseteq B$

$X \setminus B \cap B = \varnothing$ ✓

$\underbrace{X \setminus (X \setminus B)}_{B \cap X \subseteq B} \subseteq B$ и $\underbrace{(X \setminus B) \setminus X}_{\varnothing} \subseteq B$



Нека $Y_1, Y_2 \subseteq A$ и $Y_1 \cap B = \emptyset$, $Y_1 \Delta X \subseteq B$ и

$Y_2 \cap B = \emptyset$, $Y_2 \Delta X \subseteq B$

$Y_1 \setminus X \cup X \setminus Y_1 \subseteq B$, където $Y_1 \setminus X = \emptyset$

$Y_2 \setminus X \cup X \setminus Y_2 \subseteq B$

$Y_1 \setminus X \subseteq B$

$Y_1 \cap B = \emptyset$

Искаме $Y_1 = Y_2$

$Y_1 \setminus X = \emptyset \iff Y_1 \subseteq X$

$Y_2 \setminus X = \emptyset \iff Y_2 \subseteq X$

$t \in Y_1$, тогава $t \notin B$

$$\boxed{Y_1 \subseteq X,\ Y_2 \subseteq X,\ Y_1 \cap B = \emptyset,\ Y_2 \cap B = \emptyset,\ X \setminus Y_1 \subseteq B,\ X \setminus Y_2 \subseteq B}$$

$Y_1 = Y_2 \iff Y_1 \subseteq Y_2$ и $Y_2 \subseteq Y_1$

$Y_1 \subseteq Y_2$? Нека $t \in Y_1$. Тогава $t \in X$.

Също $Y_1 \cap B = \emptyset$, то $t \notin B \mapsto t \notin X \setminus Y_2$

$\boxed{!\ t \notin B \text{ и } A \subseteq B, \text{ то } t \notin A}$

Но $t \in X$ и значи $t \in Y_2$.

Функции

Специален вид релация: $f \subseteq A \times B$

изпълняваща условието $f: A \to B$

$$\forall x \forall y \forall y' (\langle x, y \rangle \in f \ \& \ \langle x, y' \rangle \in f \Rightarrow y = y')$$

<u>Частични</u>: $Dom(f) \subseteq A \rightarrow f: A \nrightarrow B$

<u>Тотални</u>: $Dom(f) = A$, $f: A \to B$ казваме

$$Dom(f) \rightleftharpoons \{x \mid (\exists y \in B)[f(x) = y]\}$$

$$Range(f) \rightleftharpoons \{y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y]\}$$

Инекция, сюрекция, биекция..

- f е инекция $\Leftrightarrow f^{-1}$ е ф-я
- f е биекция $\Leftrightarrow f^{-1}$ е биекция $B \to A$
- f е биекция $\Leftrightarrow$ има g ф-я, т.ч. $f \circ g = Id_B$ и $g \circ f = Id_A$

Образ на м-во под ф-я: $f[X] \subseteq B$

Прообраз: $f^{-1}[Y] \subseteq A$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$

$X \subseteq A \to f[X] \leftrightharpoons \{ f(x) \mid x \in X \}$

$f^{-1}[Y] \leftrightharpoons \{ f^{-1}(x) \mid x \in Y \}$

$R^n \leftrightharpoons R \circ \ldots \circ R$

$R^0 \leftrightharpoons Id$

$R^{n+1} \leftrightharpoons R^n \circ R$

$R^1 = Id \circ R = R$

Какви са функциите?

1) $f(x) = 2x$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
2) $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
3) $f: \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ и $f(x) \leftrightharpoons \min_{\mathbb{N}} x$
4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$

$R^+ \leftrightharpoons \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

$R^* \leftrightharpoons \bigcup_{i \geq 0}^{\infty} R^i = R^+ \cup Id$

Кокви са ф-циите?

1) $f(x) = 2x$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

2) $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ и $f(x) \le \min_{\mathbb{N}} x$

4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$

3) инекция? $\underline{x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}$

$\underline{\forall x \forall x' \forall y \, [\, f(x) = f(x') = y \Rightarrow x = x' \,]}$

4) f е сюрекция, защото $n \in \mathbb{N}$, то $\underline{f(\{n\}) = n}$.

$\underline{\{n\} \subseteq \mathbb{N}}$.

$\{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$

Нека $\overset{x=}{\{1,2\}}$, $\overset{x'}{\{1,3\}}$, $\overset{y}{1}$

$f(\{1,2\}) = f(\{1,3\}) = 1$, но $\{1,2\} \neq \{1,3\}$

Контрапример: значи f не е инекция.

4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$

✓ Инекция, защото за $n \neq m$, то $f(n) = \langle n, n \rangle$ и $f(m) = \langle m, m \rangle$.

<u>Тв/</u> $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x'$ и $y = y'$

Тогава $f(n) \neq f(m)$

Сюрекция? Дали $\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ има прообраз при f?

Нека $n = 0$, $m = 1$. Тогава няма $k \in \mathbb{N}$, т.е. $f(k) = \langle 0, 1 \rangle$.

5) $f: \{0,1,\dots,8\} \to \{0,1,\dots,8\}$, $f(x) = 2x \bmod 8$

6) $f: (0;1)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

7) $f: \mathbb{R}^+ \to (0;1)_{\mathbb{R}}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

8) $f: (0;1)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x-1)} - 1, & 1/2 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2x+1} - 1, & 0 < x < 1/2 \\ 0, & x = 1/2 \end{cases}$

Инекция? ✓

Нека $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ и $r_1 \neq r_2$. Искаме

$$\frac{1}{r_1+1} = f(r_1) \underbrace{\neq}_{\text{искаме}} f(r_2) = \frac{1}{r_2+1}$$

Доп.,,ме $f(r_1) = f(r_2)$

$$\frac{1}{r_1+1} = \frac{1}{r_2+1}$$

$$r_1 = r_2 \quad ↯$$

Тоест $f(r_1) \neq f(r_2)$

$$\boxed{f: \mathbb{R}^+ \to (0;1)_{\mathbb{R}} \qquad f(x) = \frac{1}{x+1}}$$

Дали е сюрекция?

Нека $r \in (0;1)_{\mathbb{R}}$. Искаме $r' \in \mathbb{R}^+$, т.ч.

$$f(r') = r$$

$$\frac{1}{r'+1} = r$$

$$1 = r.(r'+1)$$

$$\frac{1}{r} - 1 = r' \in \mathbb{R}^+$$

Значи f е сюрекция

$$|\mathbb{R}| = |(0;1)_{\mathbb{R}}| \qquad |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^+|$$

ТВ1 $f: A \to B$, $g: B \to C$, f и g биекции

$g \circ f$ е биекция.

Мощност на м-ва

Изброими и неизброими м-ва

$n \leqslant \emptyset$

$n+1 \leqslant \{0,1,\dots,n\}$

М-вата A и B имат една и съща мощност/кардиналност, ако има биекция м/у тях.

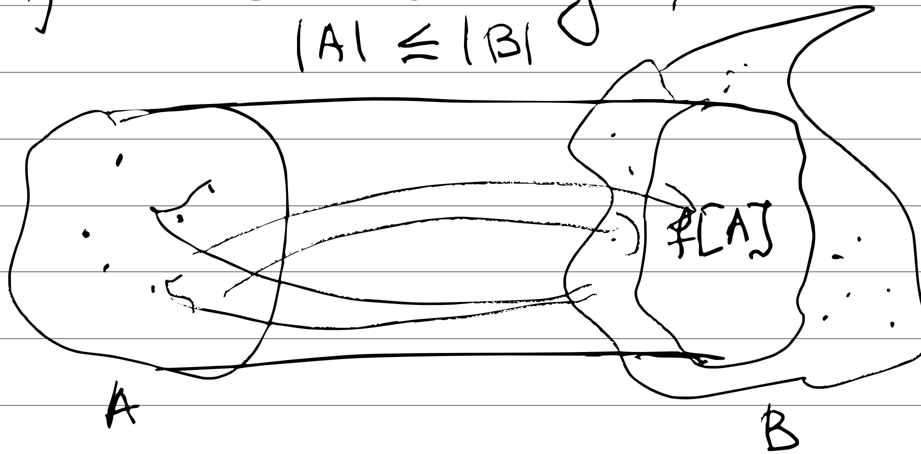
М-вото A е **крайно**, ако има ест. число n т.ч. има биекция м/у A и $\{0,\dots,n-1\}$ или $A=\emptyset$.

Тогава $|A| = n$ за $n \geq 0$ се нарича брой на елем. на A.

М-вото A е **изброимо безкр.**, ако има биекция м/у A и $\mathbb{N}$.

М-вото A е изброимо, ако е или крайно, или избр. безкр.

Ако $f: A \to B$ е инекция, то
$$|A| \leq |B|$$



Cantor-Shröder-Bernstein theorem

Ако $f: A \to B$ и $g: B \to A$ са инекции, то

$$|A| \leq |B| \qquad |B| \leq |A|$$

$$|A| = |B|$$

Прим/ изброими и неизброими м-ва:

a) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ -> изобр.

b) $\mathbb{R}$, $(0;1)$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ -> неизбр.

c) $\{f \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизбр.

d) Σ^* за Σ краен е изобр. $\longrightarrow$ $\Sigma = \{0, 1\}$

e) $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ е неизбр. -> неизбр.

много езици.

Зад. Док, че $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

Зад. Док, че м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^-$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

★ Важно да се използва композиция на две биекции е биекция

!

зад. Док, че $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

зад. Док, че м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^-$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

Важно да се използва композиция на две биекции е биекция !

$$|2\mathbb{N}| \overset{?}{=} |2\mathbb{N}+1|$$

$f: 2\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1$, $f(x) \leq x+1$

$$f \begin{pmatrix} 0, & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots \end{pmatrix}$$

$|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ и $|2\mathbb{N}+1| = |\mathbb{N}|$

$|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$

$|\mathbb{N}| = |2\mathbb{Z}|$

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ и $|\mathbb{Z}| = |2\mathbb{Z}|$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$0 \to 0$

$1 \to 1$

$2 \to -1$

$3 \to 2$

$4 \to -2$

$5 \to 3$

$6 \to -3$

$7 \to 4$

$\dots$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & x = 2k \text{ четно} \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \text{ нечетно} = 2k+1 \end{cases}$$

$g: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$

$\phantom{g: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} = \{}0, 1, -1, 2, -2, \dots$

$g(x) = 2x$

$g \circ f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & x \text{ четно} \\ \dfrac{x+1}{2}, & x \text{ нечетно} \end{cases}$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

1) f инекция

$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

сл1) еднаква четност. БОО нека x и x' са четни

Тогава $f(x) = -\dfrac{x}{2}$ и $f(x') = -\dfrac{x'}{2}$

Нека още $f(x) = f(x')$. Тогава

$$-\frac{x}{2} = -\frac{x'}{2} \Leftrightarrow x = x' \quad ↯$$

сл2) различна четност. БОО нека x е четно и x' е нечетно. Тогава $f(x) = -\dfrac{x}{2}$, $f(x') = \dfrac{x'+1}{2}$

Нека още $f(x) = f(x')$, т.е. $-\dfrac{x}{2} = \dfrac{x'+1}{2} \Leftrightarrow -1 = \underbrace{x'+x}_{\in \mathbb{N}}$

↯

Значи f е инекция.

f е сюрекция?

Нека $z \in \mathbb{Z}$. Искаме x, т.е. $f(x) = z$.

Сл. 1 $z > 0$

Тогава $\frac{x+1}{2} = z$

$$\boxed{x = 2z - 1}$$

Сл. 2 $z \leq 0$.

Тогава $-\frac{x}{2} = -|z| = z$

$$\boxed{x = 2.|z|}$$

$$\underset{x \in \mathbb{Z}}{f^{-1}(x)} = \begin{cases} 2z - 1, & z > 0 \\ 2.|z|, & z \leq 0 \end{cases}$$

Тоест f е сюрекция $\leadsto$ f е биекция.

(300) $f: \underline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{N}$

a) $f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$

b) $f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$

c) $f(x,y) = 2x(2^y+1)$

Биекции ли са?