Зад1 $R_< = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$

Аналогично дефин: $R_\geq$, $R_\leq$, $R_\neq$, $R_>$, $R_=$.

a) $R_\geq \cap R_\leq = R_=$

b) $R_\geq \Delta R_\neq = R_\leq$

c) $R_\neq = R_< \cup R_>$

d) $\overline{R_>} = R_\leq$

(*) $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$$\underbrace{R_\geq}_{A} \ \Delta\ \underbrace{R_\neq}_{B} \overset{?}{=} \underbrace{R_\leq}_{C}$$

1) $R_\geq \Delta R_\neq \subseteq R_\leq$

2) $R_\leq \subseteq R_\geq \Delta R_\neq$

1) $R_{\geq} \Delta R_{\neq} \subseteq R_{\leq}$

Нека $x \in R_{\geq} \Delta R_{\neq}$. Тогава от (*)

$x \in R_{\geq} \setminus R_{\neq} \cup R_{\neq} \setminus R_{\geq}$. От def. на „$\cup$", то:

сл.1 $x \in R_{\geq} \setminus R_{\neq}$

сл.2 $x \in R_{\neq} \setminus R_{\geq}$.

$x \in R_{\geq}$, но $\underbrace{x}_{\langle a,b\rangle} \notin R_{\neq} = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{R}, a \neq b\} =$

$= \{x \mid \exists a \exists b (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, x = \langle a,b\rangle, a \leq b)\}$

$x = \langle a,b\rangle$ за $a,b \in \mathbb{R}$, $a \geq b$

$a = b$

$x \in R_{=} \subseteq R_{\leq}$

Така $x \in R_{\leq}$

сл. 2 $x \in R_{\neq} \setminus R_{\geq}$.

$x \in R_{\neq}$ и $x \notin R_{\geq}$

има $a, b \in \mathbb{R}$ $x = \langle a, b \rangle$ и $a \neq b$

$a < b$

$x \in R_{<} \subseteq R_{\leq}$

$x \in R_{\leq}$

От сл.1 и сл.2 знаем $(R_{\geq} \setminus R_{\neq}) \cup (R_{\neq} \setminus R_{\geq}) \subseteq R_{\leq}$

2) $R_{\leq} \subseteq R_{\geq} \Delta R_{\neq}$

$x \in R_{\leq} \rightsquigarrow x = \langle a, b \rangle$ и $a \leq b$

сл.1 $a < b \to a \neq b$

сл.2 $a = b \to a \geq b$

Представяния на релации

1) Т.м. представяне

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to R = \{\langle a, b\rangle \mid a \mid b,\ a, b \in \mathbb{N}\}$.

2) За R крайна бин. релация → представяне чрез матрица на инцидентност / съседство

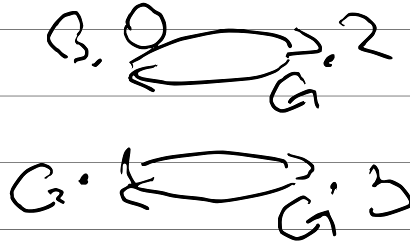
$A = \{0, 1, 2, 3\}$

$R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in A,\ a \equiv b \pmod 2\}$

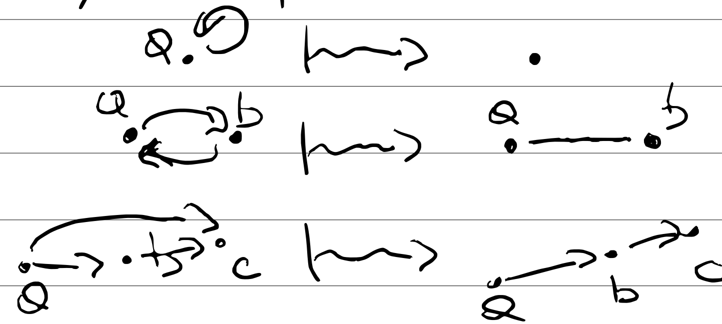
$2 \mid (a - b)$

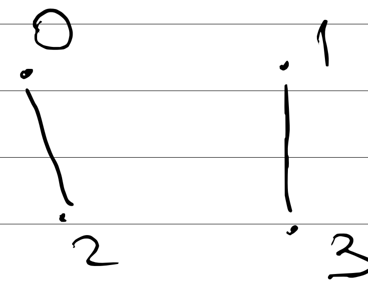
a \ b	0	1	2	3
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1
2	1	0	1	0
3	0	1	0	1

3) чрез ориентирани графи

3) 

4) Диаграма на Хасе





$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Зад/ $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$

$\langle a, b \rangle \in R \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})[a + k = b]$

Какво е релацията R?

- рефлексивна: $\forall x (xRx)$
- не е симетрична
- транзитивна
- антисиметрична

→ частична наредба ($a \leq b$)

- Нека $x \in \mathbb{N}$. Тогава за $k=0$, то $x+0=x$,
т.е. $\langle x,x\rangle \in R$.

- Нека $x,y \in \mathbb{N}$ и $\langle x,y\rangle \in R$ и $\langle y,x\rangle \in R$.

$$(\exists k \in \mathbb{N})[x+k=y] \quad (\exists k \in \mathbb{N})[y+k=x]$$

Нека k_1 е свидетел за и k_2 е свидетел за.

Тогава $x+k_1=y$ и $y+k_2=x$

$$(x+k_1)+k_2=x$$

$$k_1+k_2=0$$, но $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, т.е. $k_1=k_2=0$

Това излиза, че $x=y$.

- Нека $x,y,z \in \mathbb{N}$ и $\langle x,y\rangle \in R$ и $\langle y,z\rangle \in R$.

$$(\exists k \in \mathbb{N})[x+k=y] \quad (\exists k \in \mathbb{N})[y+k=z]$$

Нека k_1 е свидетел за и k_2 е свидетел за.

$x+k_1=y$ и $y+k_2=z \mapsto (x+k_1)+k_2=z \mapsto$

$$x + \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\in \mathbb{N}} = z \rightsquigarrow \underline{\langle x, z \rangle \in R}.$$

$\underline{k_3 = k_1 + k_2}$

R е ч.н. над $\mathbb{N}$

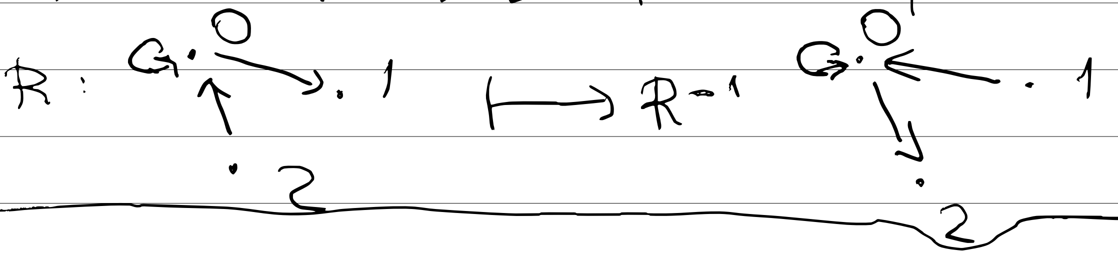
↳ $\langle \mathbb{N}, R \rangle$ е ч.н.м.

---

def/ Обратна релация

Нека A е м-во и R е бин. рел. над A.

Тогава $R^{-1} \leftrightharpoons \{ \langle a, b \rangle \mid \langle b, a \rangle \in R \}$



def| Композиция на релации

Нека A е м-во и R, S бин. рел. над A.

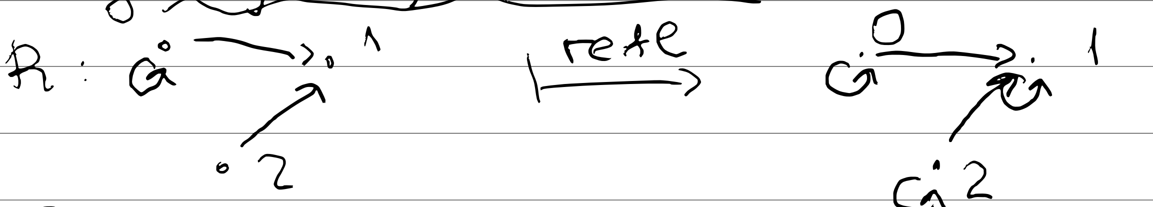
$$\underbrace{R \circ S}_{\text{„R след S"}} \leftrightharpoons \{\underbrace{\langle x, y\rangle}_{\in A \times A} \mid \exists z_{z \in A}(\langle z, y\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \in S)\}$$

„R след S"

★ A м-во, то $\overset{\text{identity}}{Id_A} \leftrightharpoons \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$.

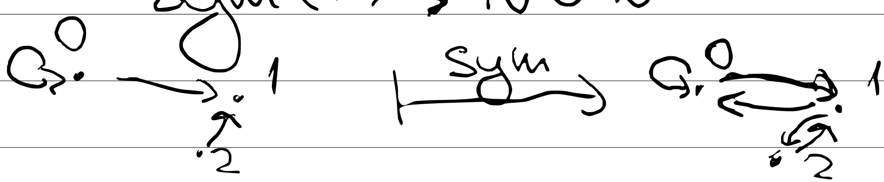
★ Рефлексивно затваряне на рел. R:

$refl(R) \leftrightharpoons R \cup Id_A$ $\qquad$ R?



★ Симетрично затваряне на рел. R:

$sym(R) \leftrightharpoons R \cup R^{-1}$ $\qquad$ $\forall x \forall y [xRy \rightarrow yRx]$



* Транзитивно затваряне на R

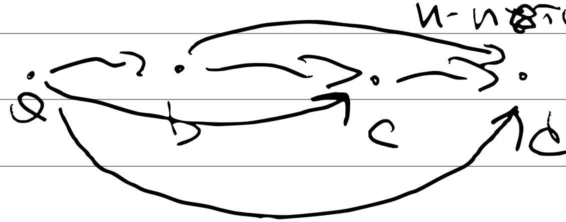
$R^+ = trans(R) \leftrightharpoons \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

$$a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{n-1} \to a_n$$

R^n

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\rightsquigarrow$ $R^1 \leftrightharpoons R$
$R^{n+1} \leftrightharpoons R^n \circ R$

$R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-пъти } R}$



* Рефл. и транз. затв.

$R^* \leftrightharpoons R^+ \cup Id_A = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$

условяме се, че $R^0 \leftrightharpoons Id_A$

$R_< \cup R_= = R_\le$

$R_= \circ R_< = R_<$

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^* \setminus Id_A = R^* \circ R = \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} R^i\right) \circ R = \bigcup_{i=0}^{\infty} (R^i \circ R) = \bigcup_{i=1} R^i$$

$$R \circ Id_A = Id_A \circ R = R$$

A м-во, R е ч.н.

най-малък ел. $a \in A$ и $(\forall x \in A)[\underbrace{aRx}_{R\text{-по-малък}}]$ — xRa — аз съм по-малък от всички

минимален ел. $a \in A$ $(\forall x \in A)[xRa \rightarrow x = a]$

"няма по-малък от мен" aRx

има минимален

има най-малък

минимални

Ако ч.н. R е и линейно

$\boxed{\text{мин. ел.} = \text{н.м.е}}$

A - крайно $|A|$ - брой на ел. на м-вото A.

1) $A \cap B = \emptyset$ — взаимно чужди м-ва

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

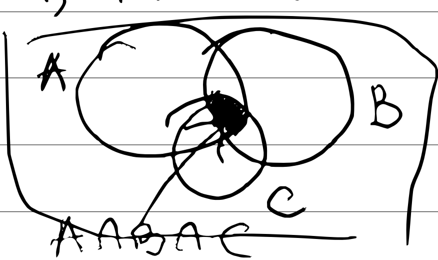
2) $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

3) $A_1, \ldots, A_n$ — взаимно чужди

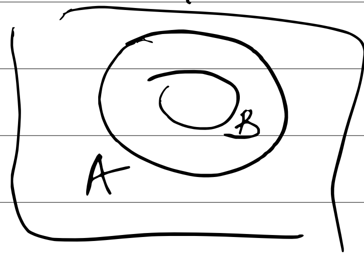
$A_i \cap A_j = \emptyset$ за $1 \le i < j \le n$

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

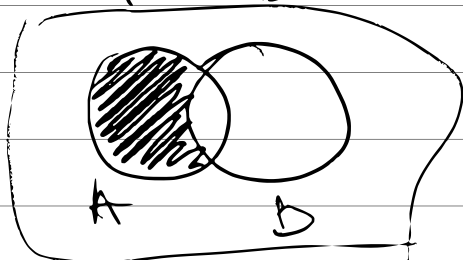
4) $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



★ $B \subseteq A$: $|A \setminus B| = |A| - |B|$



★ $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$



★ $|A \triangle B| = |A \setminus B \cup B \setminus A| = |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap A| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$

★ $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

★ $|A_1 \times \dots \times A_n| = \left| \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$

$$|A^n| = |\underbrace{A\times\ldots\times A}_{n-1\ \times}| = |A|\ldots|A| = |A|^n$$

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

$$\mathcal{P}(A) \leftrightharpoons \{B \mid B \subseteq A\}$$

A е крайно $\iff A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

За $B \subseteq A \rightsquigarrow \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ е хар. в-р

$b_i \in \{0,1\} : b_i = 1 \iff a_i \in B$

$1 \le i \le n$

$$\underbrace{2.2.2.\ldots.2}_{n \text{ пъти } 2\text{-ки}} = 2^n$$

$$\{\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \mid b_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n\} = \{0,1\}^n$$

HW1 Нека R е ч.н. над A, $A \neq \emptyset$

$\langle A, R \rangle$ е ч.н.м.

Следните условия са еквивалентни:

- $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има мин. ел." $]$
- не е вярно, че същ. строго намаляваща R-редица (дескрайна) $(x_i)_{i=1}^{\infty}$: $x_{i+1} R x_i$, $i = 1, \dots, n, \dots$

def/ Фундирана релация R над A

$R \subseteq A \times A$

$(\forall B \subseteq A)[\exists x (x \in B) \Rightarrow (\exists m \in B)(\forall x \in B)[xRm \rightarrow x = m]]$

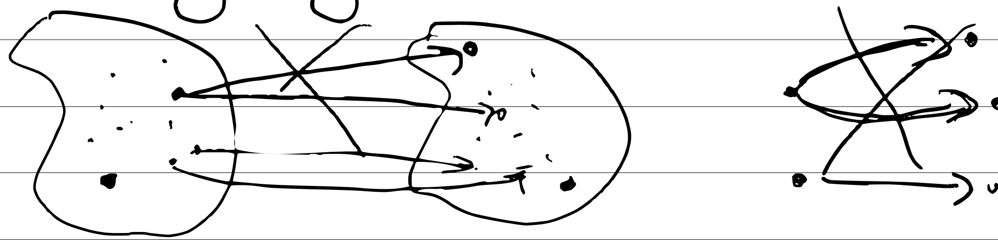
def/ $\langle A, R \rangle$ ч.н.м. над A

R е добра наредба, ако

$(\forall B \subseteq A)[\exists x (x \in B) \Rightarrow (\exists m \in B)(\forall x \in B)[mRx]]$

def/ $R \subseteq A \times B$

R е функция от A в B, ако



$A \quad B$

$$\forall x \forall y \forall y' \left(\langle x, y \rangle \in R \land \langle x, y' \rangle \in R \rightarrow y = y' \right)$$

функционалност

$\langle x, y \rangle \in R \mapsto R(x) = y$

$f \subseteq A \times B$ и f ф-я

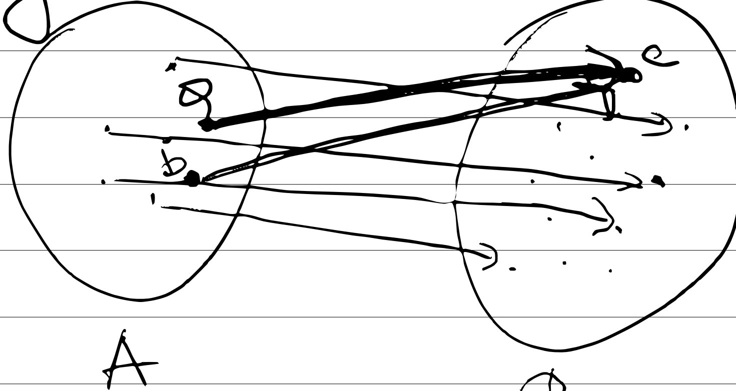
$Dom(f) \rightleftharpoons \{ x \mid (\exists y \in B)[f(x) = y] \}$ домейн

$Range(f) \rightleftharpoons \{ y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y] \}$

Частична ф-я: $Dom(f) \subseteq A$. $\quad f : A \nrightarrow B$

Тотална ф-я: $Dom(f) = A$. $\quad f : A \rightarrow B$

Инекции



"ф-я, която не слепва точки"

$\forall x \forall x' \forall y \, [\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x', y\rangle \in f \to x = x']$

ТВ| f е инекция $\iff$ f^{-1} е функция

($\Rightarrow$) Нека f е инекция.

$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$

Нека x, y, y' са т.ч. $\langle x, y\rangle \in f^{-1}$ и $\langle x, y'\rangle \in f^{-1}$. От деф. на f^{-1}, то $\langle y, x\rangle \in f$ и $\langle y', x\rangle \in f$. f е инекция, то $y = y'$.

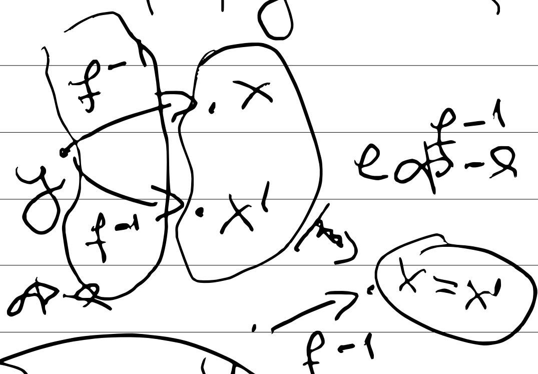
(⇐) Нека f^{-1} е ф-я.

Искаме да док., че f е инекция:

$\forall x \forall x' \forall y [\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x', y\rangle \in f \to x = x']$?

Нека x, x', y са т.ч. $\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x', y\rangle \in f$.

$\langle y, x\rangle \in f^{-1}$ $\quad \langle y, x'\rangle \in f^{-1}$



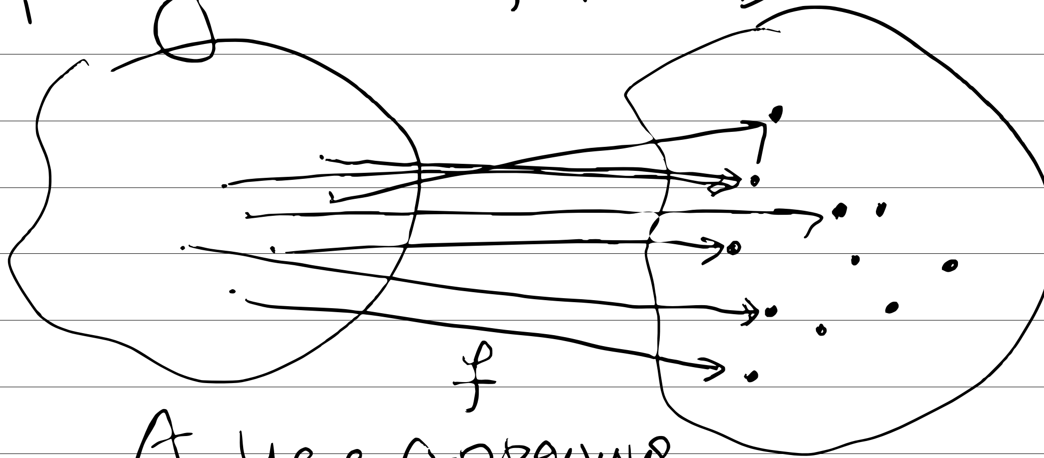
$x = x'$

f^{-1} е ф-я $\Rightarrow$ f е инекция

$\forall x \forall y \forall y'$ ...

$\forall x \forall x' \forall y [\ldots \to \ldots]$

Сюрекция $f: A \to B$



Нее сюрекция

$\forall y \exists x (\langle x, y\rangle \in f)$

$(\forall y \in B)(\exists x \in A)[\langle x, y\rangle \in f]$

$\iff$ Range$(f) = B$

Биекция: f е ф-я инективна и сюрективна

$f: A \to B$ $\quad |A| \overset{!}{=} |B|$

$f : A \to B$

ТВ (1) f е биекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е биекция

2) f е биекция $\Leftrightarrow$ има ф-я $g : B \to A$ т.ч.

$f \circ g = Id_B$ и $g \circ f = Id_A$.

3) f и g са биекции, то и $f \circ g$ е биекция

$f : A \to C$ $\quad g : B \to A$ $\qquad g : B \to C$

f е биекция $\Longrightarrow$ f^{-1} е биекция

искаме

От f инекция, то f^{-1} е ф-я.

f^{-1} – инекция?

– сюрекция?