Графи

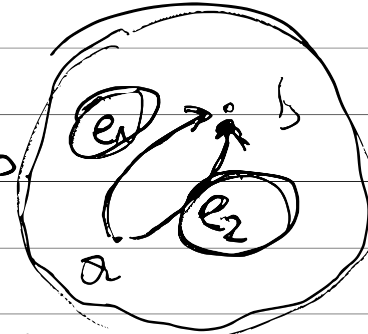
Мн-во от върхове V и мн-во от ребра $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ ⇝ $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$.

Ориентиран граф.

Ако е в сила за $\mathcal{E}$:

- $\forall x \neg \mathcal{E}(x,x)$;
- $\forall x \forall y (\mathcal{E}(x,y) \Rightarrow \mathcal{E}(y,x))$,

то имаме неориентиран граф.

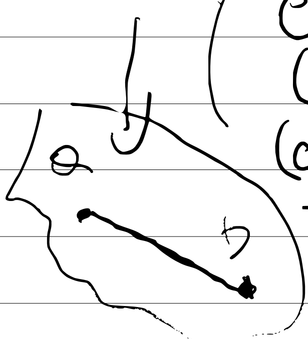


мулти граф

Ако $G_M = \langle V, \mathcal{E}_M, f_M \rangle$, т.ч.

$f: \mathcal{E}_M \to labels$

на всяко ребро ни връща крайщата.



С $d_+(v)$ – колко ребра влизат във v (степен на вход); $d_-(v)$ — || — (степен на изход). Ако G е неориентиран, то $d_+(v) = d_-(v) = d(v)$.

Представяния:

- чрез матрица на инцидентност
- чрез списък на съседство

→ ефективно при граф с много ребра

→ ефективно при граф с малко ребра

	a_1	...	a_n
a_1	0		
a_2	1		
⋮			
a_n			

a_i → a_1

$v - v_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$

$l(v) \to \{v_1, \dots, v_k\}$

(300) Нека $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Да се намери броят на: → краен неориентиран граф

a) КНГ с множество от върхове V

b) КНГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

върхове, в които не влизат и не излизат ребра

c) КОГ с м-во от върхове V

d) КОГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

? $G = \langle V, R \rangle$ $R \subseteq V \times V$, R е антирефл. и симетрична

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$$

$$2^{\frac{n.(n-1)}{2}}$$

Колко двудел. подгр-за на V имаме?

начина → $\binom{n}{2}$ неориентирано

да конструираме 1 ребро

$\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$

$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}}$$

б) НКГ с м-во от върхове V, в които няма изолирани върхове

върхове, в които не влизат и не излизат ребра

$v \in V$, $d(v) = 0$, тогава е изолиран

$\mathcal{U}$ – # всички графи над V

A – графи без изол. върхове

B – $\neg A$

$A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathcal{U}$ $\quad 2^{\binom{n}{2}}$

По прин. на изкл.

$$|A| = |\mathcal{U} \setminus B| = |\mathcal{U}| - |B| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \cdot 2^{\binom{n-i}{2}}$$

$B \subseteq \mathcal{U}$

$B = B_{v_1} \cup \dots \cup B_{v_n}$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot 2^{\binom{n-i}{2}} \cdot (-1)^{i+1}$

B_{v_i} – v_i-ти връх е изолиран.

$|B_{v_i}| = 2^{\binom{n-1}{2}}$

$|B_{v_i} \cap B_{v_j}| = 2^{\binom{n-2}{2}}$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} B_{v_i}\right| = 2^{\binom{n-n}{2}} = 2^{\binom{0}{2}} = 2^{0} = 1$$

c) КОГ над V ? $\quad |V| = n$

$$\underline{\underline{E}} \subseteq V \times V$$

$$|V \times V| = n^2$$

$$G = \langle V, E \rangle$$

$$2^{n^2}$$

d) КОГ над V без изол. върхове

$$|A| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot \underline{\underline{2^{(n-1)^2}}}$$

302. Нека $G=\langle V, E\rangle$ е КНП.
Покажете:
а) $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$ за $|E|=m$.
б) Броят на върховете от нечетна степен е четно число.

а) за $v_i \neq v_j \in V$ ~> ако има ребро e/u тях, то $d(v_i)$ го брои и $d(v_j)$ го брои.

б) $V = V_1 \cup V_2$ ← нечетни $d(v)\%2$ $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
четни $d(v)\%2=0$

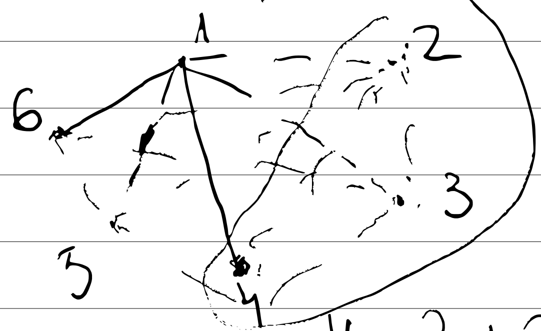
$$\sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v \in V_1} d(v)}_{\text{четни числа, сумата е четна}} + \sum_{v \in V_2} d(v) = 2.m$$

> и това е четно

(309) Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е
КНГ с $|V| \geq 2$, то има поне два
върха с еднакви степени.

Задача: група от n души ~>
има поне двама души с
еднакъв брой познанства
симетрично
> рефл. или антирефл.

300) Да се покаже, че във всяка група от 6 човека има поне трима, които не се познават или има поне трима, които се познават.



——— познават се

- - - - не се познават

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

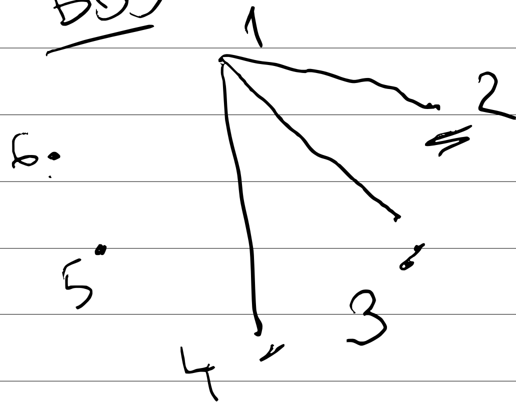
$(\forall v_1 \neq v_2 \neq v_3 \in V)\,\left[\underbrace{\{v_1, v_2, v_3\}^2 \subseteq R}_{\text{познават се}} \text{ или } \underbrace{\{v_1, v_2, v_3\}^2 \cap R = \emptyset}_{\text{не се познават}}\right]$

$x \in V$ ⇝ x може да е свързан с 5 души

По Дирихле 2 типа връзки и 5 връзки ⇝ има 3 от един и същ тип.

БОО $x = 1$ ⇝ 1 е свързан с 2, 3, 4 с еднакви връзки

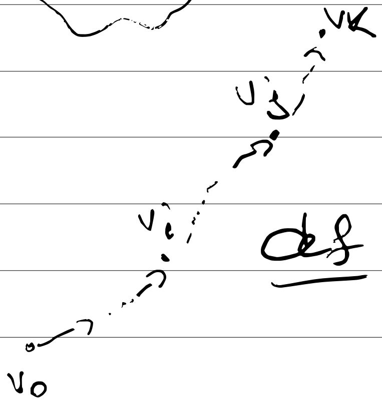
БОО



Ако м/у 2,3,4 има поне едно солидно ребро м/у тях сме готови.
Иначе ако 2,3,4 не се познават, пак сме я решили задачата

прост път
и
ацикличен
път

$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k$

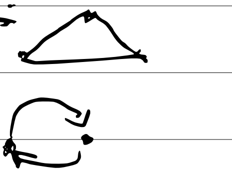


def | **Път в НГ** е последователност от върхове $v_0 v_1 \dots v_k$, т.е. м/у всеки два съседни има ребро (НГ) / (ОГ →)

Брой ребра в пътя → дължината ѝ

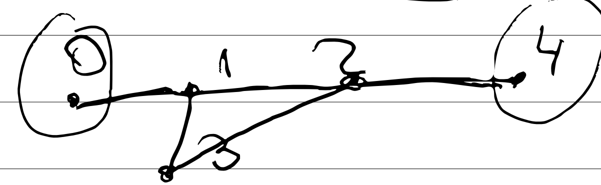
def | **Цикъл**: път $v_0 v_1 \dots v_k$ и $v_k = v_0$.

Най-къс цикъл: → НГ – 3 върха
↳ ОГ – 2 върха

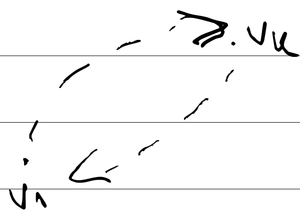


def | $P_G = \{\langle a,b\rangle \mid \langle a,b\rangle \in V \times V$ & има път от a до b в G $\}$.

релация на еквивалентност
и разбива графа на компоненти на свързаност

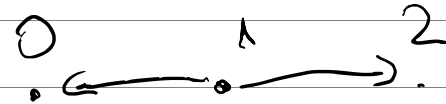


def1 НГ е свързан $\leftrightarrow$ м/у всеки два върха има път $\leftrightarrow$ компонентите на свързаност е само една.



def1. ОГ е слабо свързан $\leftrightarrow$ м/у всеки два върха има път поне в едната посока

• ОГ е силно свързан $\leftrightarrow$ м/у всеки два върха има път и в двете посоки



302. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е КНГ.
Покажете, че ако той има точно два върха с нечетна степен, то между тях има прост път в G.

Доп. противното, т.е. има точно два върха с нечетна степен $u, v \in V$, и те са свидетели, т.е. м/у u и v в G няма път.
Тогава G не е свързан $\Rightarrow$ има поне 2 компоненти на свързаност.
Нека $C_1, \dots, C_t$, $t \geq 2$ са комп. на свързаност на G. Значи $u \in C_i \neq C_j \ni v$.
Нека разгл. C_i

$$G_1 = \langle C_i, E \cap (C_i \times C_i) \rangle$$ е граф с точно един връх от нечет. степен. $\lightning$ с $\sum_{v \in C_i} d(v)$ е четно

303. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е КНГ с $n = |V|$ върха и брой ребра $|E| > \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$.

Докажете, че G е свързан граф.

Доп., че G не свързан. Нека $C_1, \dots, C_t$, $t \geq 2$ са комп. на свързаност на G.

Нека фикс. $C_1 \leadsto |C_1| = k$.

За останалите комп. имаме $n - k$

\# ребра в пълен граф с k върха $\longrightarrow \frac{k\cdot(k-1)}{2} + \frac{(n-k)\cdot(n-k-1)}{2} = f(k)$

$f(1) = f(n-1)$ максимуми

$f(n-1) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ макс. \# на ребра в един несв. граф

Но $|E| > \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2}$ $\boxed{\mathcal{E}}$ $|E| \leq f(n-1)$

300. Нека G е КНП, $G = \langle V, E \rangle$ и $|V| = n$, $|E| = m$. СУСЕ:

a) G е дърво (свързан ацикл.);

b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път;

c) G е свързан и $n = m+1$;

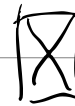
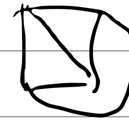
d) G е ацикличен и $n = m+1$;

e) G е ацикличен и ако кои да е два "несъседни" (не са свързани с ребро) върха се свържат с ребро, то в резултатния граф ще има точно един цикъл.

302. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан граф. Докажете, че всеки два прости/(ацикличи/безцикли) пътя с дължина, равна на максималната за графа, имат общ връх.

302. $G = \langle V, E \rangle$ е НП.

G се нарича самодопълващ, ако е изоморфен на $\overline{G}$

(грубо казано еднакви  $\cong$ )

Да се док., че, ако $G = \langle V, E \rangle$ е самодопълващ, то $|V| \equiv 0 \pmod 4$ или $|V| \equiv 1 \pmod 4$

зад. G е двуделен граф (НП).

а) Док., че $\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v)$

b) Док., че ако $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ е k-регулярен двуделен граф, то двата дяла имат еднакъв брой върхове.