302) Нека G е КНГ $G = \langle V, E \rangle$ и $|V| = n$, $|E| = m$. СУСЕ:

a) G е дърво (свързан ацикл.);

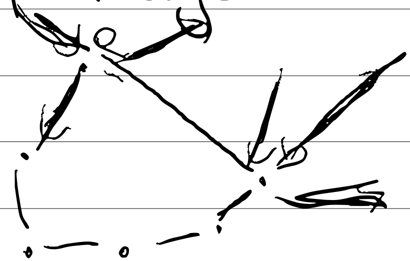
b) Всеки два върха в G са свързани по единствен път;

c) G е свързан и $n = m+1$; $m = n-1$

d) G е ацикличен и $n = m+1$;

e) G е ацикличен и ако кои да е два "несъседни" (не са свързани с ребро) върха се свържат с ребро, то в резултатния граф ще има точно един цикъл.

a → b



а) G е свързан и ацикличен $\Leftrightarrow$

с) G е свързан и $m = n-1$, където $|V| = n$, $|E| = m$.

а) $\Rightarrow$ с)

Искаме $m = n-1$

Доп. че $m \neq n-1$. Тогава имаме 2 случая:

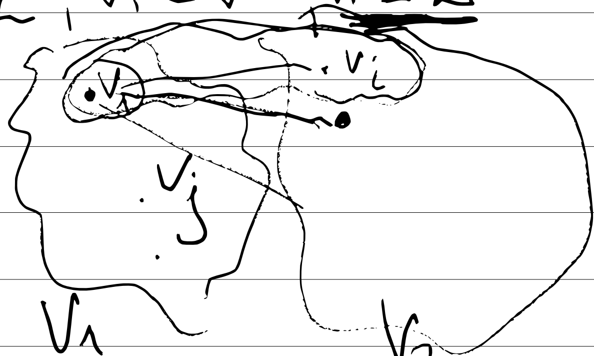
сл. 1 $m < n-1$

сл. 2 $m > n-1$

Нека $m < n-1$.

$.v_1 \quad .v_2 \quad \ldots \quad .v_n$

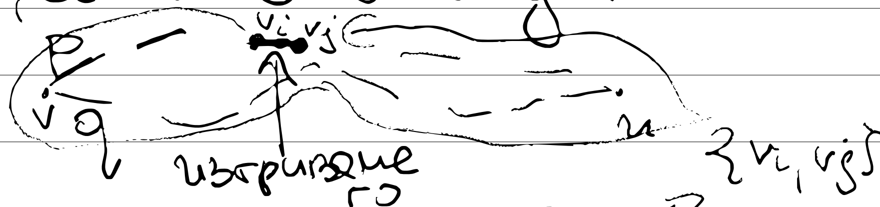
$d(v_i) \geq 1$, $v_i \in V$ $\quad n \geq 2$



инвариант $\langle V_1, E \cap (V_1 \times V_1) \rangle$ е свързан и ацикличен.

c) => a)

Доп., че в G има цикъл.



Нека отстраним произ. ребро от БОО p.

Тогава $|E \setminus \{\{v_i, v_j\}\}| = n-1-1 = n-2$.

Но G' продължава да е свързан, а $E' \subseteq E \setminus \{\{v_i, v_j\}\}$, $G' = \langle V, E' \rangle$ подграф на G е отново свързан с n върха.

Абсурд! (по (*))

зад. ★ Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан граф с n върха. Докажете че $|E| \geq n-1$.

С индукция по $|V| = n$.

$n \to n+1$

★ Във всяко дърво пътищата м/у всеки два върха са единствени.

$w \neq u$

302. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан граф.
Докажете, че всеки два прости (ацикличн/безцикли) пътя с дължина, равна на максималната за графа, имат общ връх.

Допускаме противното, т.е. има поне два макс. пътя без общ връх

$p : \underbrace{u_0 - u_1 - \dots - u_i}_{\geq k/2} - \dots - u_k$

$q : \underbrace{v_0 - v_1 - \dots - v_j}_{\geq k/2} - \dots - v_k$

$r \geq 1$

БОО $i, j \geq \frac{k}{2}$

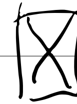
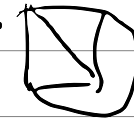
$\underbrace{u_0 u_1 - u_i}_{\geq k/2} \underbrace{r}_{\geq 1} \underbrace{v_j v_{j-1} - v_0}_{\geq k/2}$

Но G е свързан $\rightarrow$ има път м/у u_i и v_j

$r : \begin{cases} u_i - v_j \\ u_i - \underbrace{w_0 - w_1 - \dots \to w_k}_{\text{не уч. в } p \text{ и } q} - v_j \end{cases}$

зад. $G = \langle V, E \rangle$ е НП. $e \in E \rightsquigarrow e = \{u, v\}$

G се нарича **самодопълващ**, ако е изоморфен на $\overline{G}$

(грубо казано еднакви  $\cong$ )

10) Да се док., че ако $G = \langle V, E \rangle$ е самодопълващ, то $|V| \equiv 0 \pmod 4$ или $|V| \equiv 1 \pmod 4$

$|V| = n$

$\overline{G} = \langle V, \overline{E} \rangle$

$G \cong \overline{G} \rightsquigarrow |E| = |\overline{E}|$

$\binom{n}{2} = 2|E| = \frac{n.(n-1)}{2}$

$v E u \Longleftrightarrow h(v) \overline{E} h(u)$

h е биекция

$h : V \to V$

$n.(n-1) = 4|E|$

$\to n \% 4 = 0$

$(n-1) \% 4 = 0$ т.е. $n \% 4 = 1$

зад. G е двуделен граф (НП).

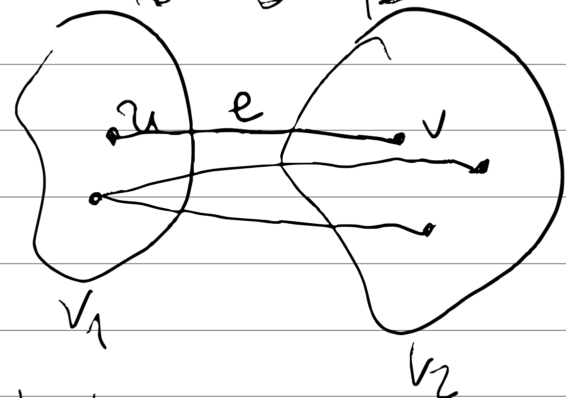
а) Док., че $\sum_{v \in V_1} d(v) = \sum_{v \in V_2} d(v)$

b) Док., че, ако $G = \langle V, E \rangle$ е k-регулярен двуделен граф, то двата дяла имат същия брой върха.

$d(v) = k$
$v \in V$

$G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle : V_1 \cap V_2 = \emptyset$

а)



b) $|V_1| = |V_2|$ ако G е двуд. и k-рег.

Док., че $|V_1| \neq |V_2|$, БОО $|V_1| < |V_2|$

$|V_1| < |V_2|$

Имаме, че $(\forall u \in V_2)(\exists v_1 \in V) \ldots (\exists v_k \in V)$

$[\{v_i, u\} \in E]$

За всеки връх от V_2 имаме k на брой върха от $|V_1|$ т.е. $|V_2| \cdot k$ ребра.

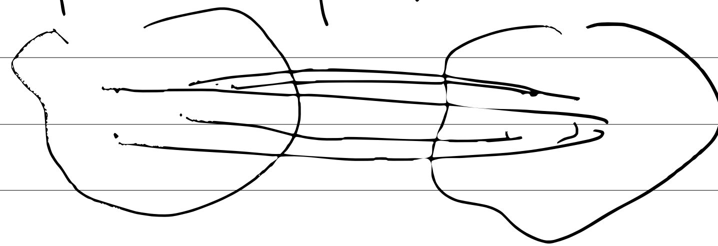
Но по Дирихле от $|V_1| < |V_2|$ има връх от V_1, който е с поне $k+1$ инц. ребра. (Σ с 2)

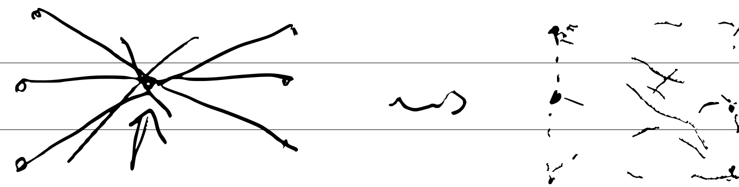
Вар. 2: $$\sum_{v \in V_1} d(v) = k \cdot |V_1| = k \cdot |V_2| = \sum_{v \in V_2} d(v)$$

300. Нека $G = \langle V, E \rangle$ е свързан НГ и $w \in V$ е негов срязващ/критичен връх (след неговото отстраняване на w и ребрата, инцидентни с него, броят на свързаните компоненти на G се увеличава).
Нека G_1 е графът, получен от G чрез отстраняване на w и ребрата, инцидентни с него.
Докажете, че графът $\overline{G_1}$ е свързан.

Нека $C_1, \ldots, C_k$ са комп. на св. на G_1.
Нека $u \in C_i$, $v \in C_j$, $i \neq j$.
Тогава $\{u, v\} \notin E_1 \rightsquigarrow \{u, v\} \in \overline{E_1}$ и
$\{u, v\} \in E_1 \rightsquigarrow \{u, v\} \notin \overline{E_1}$

М/у всеки две разл. ком. на св. в G_1, те са свързани с ребра в $\overline{G_1}$.





Нека $u, v \in C_i$. Но има поне още 1 комп. прин. C_{i+1}. От предното има $w \in C_{i+1}$ и $\{u, w\} \in \overline{E_1}$, $\{v, w\} \in \overline{E_1}$.

def| Клика

Пълен граф т.е. $G = \langle V, E \rangle$ и $|E| = \binom{n}{2} = \frac{n.(n-1)}{2}$

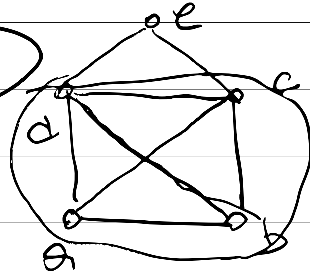
За произволен граф имаме, че $0 \leq |E| \leq \binom{n}{2}$.

Антиклика е граф без ребра т.е. няма два върха, които да са свързани с ребро $\rightsquigarrow |E| = 0$.

def| Кликово число

Кликово число на граф е броят на върховете на най-голямата клика в графа!

зад



Какво е кликовото число на графа?

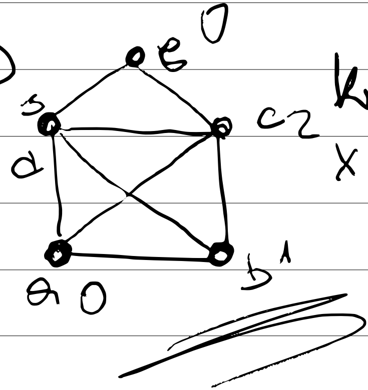
4

$\{a, b, c, d\}$

def | Върхово хроматично число

Това е най-малкият брой цветове необходими за оцветяване на върховете на граф, така че никои два едноцветни върха да не са свързани с ребро.

300 0

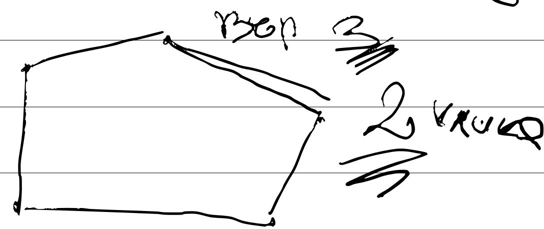


Какво е върховото
хром. число на графа?

Th | Върховото хроматично число е по-голямо или равно на кликовото число.

Зад Постройте пример за th-ята, за който се получава ">"

C_5 :



Th на Кьониг!

Един граф е двуцветен/двуделен $\Longleftrightarrow$ графът не съдържа цикъл с нечетна дължина!

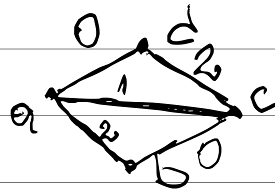
↳ т.е. с нечетен брой ребра

Да минем към оцветяване на ребра.

<u>def</u> <u>Реброво хроматично</u>

Минимален брой цветове необходими за оцветяване на ребрата, така че никои две едноцветни ребра да нямат общ връх.

зад 8



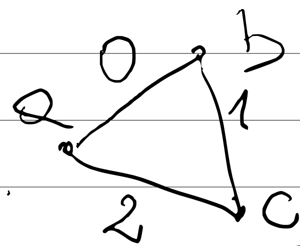
Какво е реберното хром. число на графа?

Th| Реберното хроматично число е $\geq \max\limits_{v \in V} d(v)$.

В последната задача имаме „=“.

Зад) Да построим граф, за който е изпълнено „<“.

C_3:



Всички цикли с нечетна дължина са окей

Зад Нека $G = \langle V, E \rangle$ е дърво.
Какви са:
a) кликовото число ;
b) върховото хром. число ;
c) ребровото хром. число ?

a) $|V| > 1 \rightsquigarrow 2$

$|V| = 1 \rightsquigarrow 1$

b) Няма цикли $\rightsquigarrow$ няма цикли от нечетна дължина

По тh Кьониг $\rightsquigarrow$ $|V| > 1 \rightsquigarrow 2$

$|V| = 1 \rightsquigarrow 1$

c) $\max\limits_{v \in V} d(v)$