Рекурентни уравнения

def| Рекурентна числова редица

Числова редица $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се нарича рекурентна, ако съществува $k_0 > 0$, т.е. за всяко $n \in \mathbb{N}$ за елементите на редицата е изпълн.:

$$(*) \quad \boxed{a_{n+k} + P_1(n) \cdot a_{n+k-1} + \ldots + P_k(n) \cdot a_n = g(n)}$$

Ако $P_1(n), \ldots, P_k(n)$ са константи, то $(*)$ се нарича линейно рекурентно отношение с постоянни коефициенти от ред k. Ако $g(n) = 0$, рек. отн. се нарича хомогенно. В противен случай се нарича нехомогенно.

1) Общи методи за решаване на рек. ур-е (т.е. да се намери ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n \mid n \geq 0\}$, т.е. $f(n) = a_n$, където $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е рекурентна числова редица)

a) Налучкване + индукция

Зад.

$$\begin{cases} a_0 = 57 = 57^{2^0} \\ a_n = (a_{n-1})^2 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$a_0 = 57$, $a_1 = 57^2$, $a_2 = (a_1)^2 = (57^2)^2 = 57^4 = 57^{2^{(2)}}$

$a_3 = (a_2)^2 = (57^4)^2 = 57^8 = 57^{2^{(3)}}$

$a_n = 57^{2^n}$

Индукция по n:

База: $n = 0$: $a_0 = 57 = 57^{2^0}$

Допускаме, че за n е в сила: $a_n = 57^{2^n}$

$n \mapsto n+1$: $a_{n+1} \stackrel{def}{=} (a_n)^2 \stackrel{(\text{i.h.})}{=} (57^{2^n})^2 \underset{\text{с-во на степ.}}{=} 57^{2^n \cdot 2} = 57^{2^{n+1}}$

$(\forall n \in \mathbb{N})[a_n = 57^{2^n}]$

b) ~~Развиване~~ (удобно, ако a_n зависи само от един предходен член)

Зад.
$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + n^3, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

$$a_{n+1} = a_n + n^3$$
$$a_n = a_{n-1} + (n-1)^3$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + (n-2)^3$$

$$\dots$$

$$a_{n+1} = a_{n-1} + (n-1)^3 + n^3 = \dots =$$
$$= \underbrace{10}_{a_1} + \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{\boxed{HW}}{=} \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2}$$

$$a_n = 10 + \left(\frac{(n-1).n}{2}\right)^2$$

$$a_1 = 10 = 10 + \left(\frac{(1-1)\cdot 1}{2}\right)^2$$

$$a_2 = 11 = 10 + \left(\frac{(2-1)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}}\right)^2$$

$$a_3 = 13 = 10 + \left(\frac{\cancel{(3-1)}\cdot 3}{\cancel{2}}\right)^2 = 13$$

...

Cung: $a_n = 10 + \left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)^2$

! Не се използва този тип

- разсъждения за рек. ур-я от вида $\underline{a_n} = \underbrace{2a_{n-1}} + \underbrace{3a_{n-2}}$

  от повече от един член зависи a_n.

(2) Специални методи

а) Периодични редици

(зад) Дадено:

$$\begin{cases} a_1 = 10, \ a_2 = 12 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \ n \geq 3 \end{cases}$$

Търси се a_{2021}?

(A) Имаме нужда от два повтарящи се елемента в същия ред, за да бъде редицата периодична. (от $(n-(n-2)) = 2 = k$).

(A) Имаме нужда от k повтарящи се елемента в същия ред, за да бъде редицата периодична, където k = max индекс − min индекс в рек. ур-е.

$$\begin{cases} a_1 = 10, \ a_2 = 12 \\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, \ n \geq 3 \end{cases}$$

$a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 12 - 10 = 2$,

$a_4 = 2 - 12 = -10$, $a_5 = -10 - 2 = -12$,

$a_6 = -12 - (-10) = -2$,

$a_7 = -2 - (-12) = 10$,

$a_8 = 10 - (-2) = 12$

$8 - 2 = 6 = k$

$a_{2021} = a_5 = -12$

$2021 \% 6 = 5$

b) Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни уравнения с константни коефициенти - хомогенни и нехомогенни

def | Рекурентно отношение от ред r

Нека $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са членове на редицата, където

$$a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-r}), \quad n \geq r.$$

рекурентно отношение от ред r

начални условия (r на брой)

! Отново: Това, което разбираме под решаване на лин. рек. отн. е да определим ф-я $f: \mathbb{N} \to \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, т.е. $a_n = f(n)$.

c) Линейни рек. отн. хомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ - начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \ldots + c_r . a_{n-r}$,

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

Алгоритъм:

1) Намиране характеристично уравнение на хомогенната рек.:

$a_n - c_1 . a_{n-1} - \ldots - c_r . a_{n-r} = 0$

$x^n - c_1 . x^{n-1} - \ldots - c_r . x^{n-r} = 0$ / $x^r - c_1 . x^{r-1} - \ldots - c_r . x^0 = 0$, където

$P(x)$

$P(x)$ се нарича характеристичен полином на рек. редица, а уравнението $P(x) = 0$ се нарича характеристично уравнение (делихме на $x^{n-r} \neq 0$)

2) Решаваме характеристичното уравнение и намираме корени $\{x_1, \dots, x_r\}_M \subseteq \mathbb{C}$ (не им знаем кратностите).

3) Имаме два случая за тези корени:

3.1) Всички корени са различни помежду им.

Тогава общият вид на рек. отн. е

$$Q_n = x_1^n \cdot A_1 + x_2^n \cdot A_2 + \dots + x_r^n \cdot A_r$$

$x_1^n \cdot A_1 \cdot n^0$

$1-1$ и n^0

3.2) Не всички са различни. Нека $t < r$.

Нека $x_s = x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_k}$ за $s \le t$

Общ вид:

$$Q_n = x_1^n \cdot A_1 + \dots + (A_{i_1} + A_{i_2} n + \dots + A_{i_k} n^{k-1}) \cdot x_s^n + \dots + A_t x_t^n \text{ за } t < r$$

$x_1^n \cdot A_1 \cdot n^{1-1}$

n^0

4) Правим система за дадените $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ (до които ги, ако сме в сл. 3.1)

$$\begin{cases} a_0 = A_1 \cdot x_1^0 + A_2 \cdot x_2^0 + \dots + A_r \cdot x_r^0 \\ a_1 = A_1 \cdot x_1^1 + A_2 \cdot x_2^1 + \dots + A_r \cdot x_r^1 \\ \dots \\ a_{r-1} = A_1 \cdot x_1^{r-1} + A_2 \cdot x_2^{r-1} + \dots + A_r \cdot x_r^{r-1} \end{cases}$$

5) Решаваме системата и получаваме стойностите за $A_1, \dots, A_r$. Заместваме в общия вид и получаваме отговор.

(322) Да се реши рекурентното отн:

$$\begin{cases} a_0 = 1, \ a_1 = 3 \\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2}, \ n > 1 \end{cases}$$

1) $a_n - 3a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} = 0$

$\rightarrow x^n - 3 \cdot x^{n-1} + 2 \cdot x^{n-2} = 0 \ / : x^{n-2} \neq 0$

$P(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \rightarrow 1, \rightarrow 2$, $\{\overset{x_1}{2}, \overset{x_2}{1}\}_M$

3.1) $a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot 1^n = A_1 \cdot 2^n + A_2$

4)

$$\begin{cases} a_0 = 1 = A_1 \cdot 2^0 + A_2 \Leftrightarrow A_2 = 1 - A_1 \\ a_1 = 3 = A_1 \cdot 2^1 + A_2 \Leftrightarrow 3 = 2 \cdot A_1 + 1 - A_1 \end{cases}$$

$A_1 = 2 \rightarrow A_2 = -1$

5) $a_n = 2 \cdot 2^n + (-1) = 2^{n+1} - 1 = f(n) = a_n$

Зад.

$a_0 = 1,\ a_1 = 2$

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2$

1) $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$

$\to x^n - 2x^{n-1} + x^{n-2} = 0 \ / : x^{n-2} \neq 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

2) $\longrightarrow \{1, 1\}_M$

$x_1 = x_2 = 1$

3.2) $a_n = (A_1 . n^0 + A_2 . n^1) . 1^n = A_1 + A_2 . n$

4) $a_0 = 1 = A_1 + A_2 . 0 = A_1$

$a_1 = 2 = A_1 + A_2 . 1 = 1 + A_2 \to A_2 = 1$

5) $\to$

$\boxed{a_n = n + 1}$

$(a_0 = 0 + 1 = 1,\ a_1 = 1 + 1 = 2,\ a_2 = 4 - 1 = 3, \dots$

320) Да се реши всяко от рек. отн., съгласно дадените нач. условия:

a) $\begin{cases} a_1 = 8,\ a_2 = 18 \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 4,\ a_1 = 7 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_0 = 10,\ a_1 = 16 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 8 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$ ✓

g) $\begin{cases} a_0 = -4,\ a_1 = 5 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n \end{cases}$

Проверка! Винаги! Работим само с тези случаи и, ако не сме внимателни, то могат да се появят чужди решения!

f) $\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 3a_n \end{cases}$

1) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 3a_n = 0$

$\hookrightarrow x^{n+2} - 2x^{n+1} + 3x^n = 0 \quad /: x^n \neq 0$

$\hookrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = 1 - 3 = -2 = 2 \cdot i^2$

2) : $x_{1,2} = 1 \pm i \cdot \sqrt{2}$

3.1) $a_n = A_1 \cdot (1 + i \cdot \sqrt{2})^n + A_2 (1 - i \cdot \sqrt{2})^n$

4) $\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 2 = A_1 + A_1 \cdot i \cdot \sqrt{2} + A_2 - A_2 \cdot i \cdot \sqrt{2} \end{cases}$

$2 = 1 + (A_1 - A_2) \cdot i \cdot \sqrt{2}$

$(A_1 - A_2) = A_1 - A_2 = \frac{1}{i \cdot \sqrt{2}} \ /\!/ \cdot (-i \cdot \sqrt{2}) = \frac{-i\sqrt{2}}{-2}$

$A_1 + A_2 = 1 \Leftrightarrow$ $A_1 = \frac{i\sqrt{2}}{2} + A_2$

$$\frac{i\cdot\sqrt{2}}{2} + A_2 + A_2 = 1$$

$$2A_2 = \frac{1 - \frac{i\cdot\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A_2 = \frac{2 - i\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$A_1 = \frac{i\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{2 - i\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + i\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$Q_n = \tilde{A}_1 \cdot (1 + i\cdot\sqrt{2})^n + A_2 (1 - i\cdot\sqrt{2})^n$$

$$Q_n = \frac{(2 + i\cdot\sqrt{2}) \cdot (1 + i\cdot\sqrt{2})^n}{4} + \frac{(2 - i\cdot\sqrt{2}) \cdot (1 - i\cdot\sqrt{2})^n}{4}$$

$$Q_0 = 1 = \frac{2 + \cancel{i\cdot\sqrt{2}}}{4} + \frac{2 - \cancel{i\cdot\sqrt{2}}}{4} = 1$$

$$Q_1 = 2 = \frac{(2 + i\cdot\sqrt{2}) \cdot (1 + i\cdot\sqrt{2})}{4} + \frac{(2 - i\cdot\sqrt{2}) \cdot (1 - i\cdot\sqrt{2})}{4}$$

$$= \frac{8}{4} = 2$$

(ii) Линейни рек. отн. нехомогенни с постоянни коеф.

Дадено:

$a_0, \dots, a_{r-1}$ – начални условия

$a_n = c_1 . a_{n-1} + c_2 . a_{n-2} + \dots + c_r . a_{n-r} + g(n)$

$c_r \neq 0$, $c_i \in \mathbb{R}$ за $i \in \{1, \dots, r\}$, а

$g(n)$ се нарича нехомогенна част

За реш. на нехом. лин. рек. отнош. с пост. коеф., то трябва $g(n)$ да се представи така:

$$g(n) = e_1^n . P_1(n) + e_2^n . P_2(n) + \quad + e_s^n . P_s(n)$$

където e_i са различни едно от друго константи, а $P_i(n)$ е полином на n от степен d_i за $i \in \{1, \dots, s\}$.

Алгоритъмът за решаване е почти същият: на стъпка 1) и 2) се грижим за решението на хомогенната част и в края на стъпка 2) добавяме (d_1+1) еднакви корена $= e_1$, (d_2+1) еднакви корена $= e_2$, ..., (d_s+1) еднакви корена $= e_s$ – корени на нехомогенната част. Оттам нататък е същото

1) 2) → 3)

реш. на х. ч.

реш. на не х. ч.

$\deg(P_1(n)) = d_1$ ... $\deg(P_s(n)) = d_s$

$$g(n) = e_1^n \cdot P_1(n) + \dots + e_s^n \cdot P_s(n)$$

322

$a_0 = 0,\ a_1 = 1$

$a_n = 2a_{n-1} + 1$

$g(n) = 1 \cdot n^0 \, \underbrace{1^n}_{e^n}$

$\{1\}_M$

1) $x - 2 = 0$

$x = 2$

2) $\{2\}_M$

2') $\{1, 2\}_M$

3.1) $a_n = A_1 \cdot 1^n + A_2 \cdot 2^n$

4) $0 = A_1 + A_2 \Leftrightarrow A_2 = -A_1 \rightarrow A_2 = 1$

$1 = A_1 + 2A_2 \Leftrightarrow A_1 = -1$

$\boxed{a_n = 2^n - 1}$

300.

$a_0 = 4, \; a_1 = -11, \; a_2 = 41$

$a_{n+3} = -5a_{n+2} - 8a_{n+1} - 4a_n + 2\cdot(-1)^n + (-2)^{n+3}$

$g(n) = 2\cdot(-1)^n + (-2)^{n+3} =$

$P_1(n)\cdot(-1)^n + P_2(n)\cdot(-2)^n =$

$= 2\cdot n^0\cdot(-1)^n + (-8\cdot n^0\cdot(-2)^n)$

$\{-1, -2\}_M$

$x^3 + 5\cdot x^2 + 8\cdot x + 4 = 0 \quad // (x+1)$

	1	5	8	4
-1				
-2				

$\{-1, -2, -2\}_M$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$\{-1, -1, -2, -2, -2\}$

$a_n = (A_1 + A_2\cdot n)\cdot(-1)^n + (A_3 + A_4\cdot n + A_5\cdot n^2)\cdot(-2)^n$

Ген. a_3 и a_4 $\to$ заместване в с-мата и нам. $A_1, .., A_5$.

$$a_n = (1-2.n).(-1)^n + (3+2n+n^2).(-2)^n$$

3ag

$a_0 = 0, \quad a_1 = 16$

$a_{n+1} = 8a_n - 15a_{n-1} + \underbrace{7 \cdot n^2 \cdot 5^n + 4^n - 6n \cdot 3^n - 8n^2 + 19 + 2 \cdot 5^n}$

$$g(n) = 7 \cdot n^2 \cdot 5^n + 4^n - 6 \cdot n \cdot 3^n - 8n^2 + 13 + 2 \cdot 5^n =$$

$$= \underbrace{(7 \cdot n^2 + 0 \cdot n^1 + 2)}_{\deg = 2} \cdot 5^n + \underbrace{(-6 \cdot n + 0)}_{\deg = 1} \cdot 3^n +$$

$$+ \underbrace{n^0 \cdot 1 \cdot 4^n}_{\deg = 0} + \underbrace{(-8 \cdot n^2 + 0 \cdot n^1 + 13) \cdot 1^n}_{\deg = 2}$$

$$\{5, 5, 5, 3, 3, 4, 1, 1, 1\}_M$$

302

a) $\begin{cases} a_0 = 0, \; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + n \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_0 = 0, \; a_1 = -3 \\ a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 27 \cdot 5^n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = -a_{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_0 = 1, \; a_1 = 2 \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n + 2^n \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_0 = 2, \; a_1 = 1 \\ a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n + 5 \cdot 2^{n+1} \end{cases}$

3) Особени случаи

a) Когато свободния член не е квазиполином

прим: $a_n = a_{n-1} + \sqrt[3]{n}$, $a_1 = 6$

b) Когато коеф. са непостоянни

прим: $a_n = n\, a_{n-1}$, $a_1 = 1$

c) Когато има променлива дължина на историята

прим: $a_1 = 20$, $a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

В курса по ДАА ще се научите и тях да решите.

309 Намерете формула за задача от сумите:

a) $1+2+\ldots+n$

b) $2+8+24+\ldots+n.2^n$

c) $2+4+\ldots+2n$

d) $1+3+\ldots+(2n-1)$

e) $5+7+9+\ldots+(2n+3)$

f) $3+7+11+\ldots+(4n-1)$

g) $2+6+10+\ldots+(4n-2)$

h) $1+5+9+\ldots+(4n+1)$

Интересни приложения

Зад 1 Намерете рек. отношение и начални условия за броя на двоичните думи с дължина n, в които няма две съседни нули. Намерете формула за този брой. Определете броя на думите с дължина 10.

Зад 2) Колко са думите от n десетични цифри с четен брой нули?

Зад: Може и 00123.

Зад 3 a) Докажете, че числото $(3+\sqrt{5})^{2020}+(3-\sqrt{5})^{2020}$ е цяло и намерете цифрата на единиците му.

b) Намерете първите 4 цифри (най-левите) на числото, цялата и броя на цифрите му.

Зад 4) Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Да се реши функционалното
уравнение
(*) $f(f(x)) = 6x - f(x)$ за $x \in \mathbb{N}$
произ.