Зад. Да се докаже:

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 3 \mid (n^3 - n)$

d) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>1})\ n! < n^n$

e) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>14})\ n = 3.a + 8.b,\ a, b \in \mathbb{N}$

f) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in \mathbb{R})$
$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i . y^{n-i}$$

d) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>1})$ $n! < n^n$

$0! = 1$, $0^0 = 1$

База: $n = 2$: $2! = 2 \cdot 1 < 2^2 = 4$ ✓

ИХ: Нека доп., че за $n > 1$: $n! < n^n$

ИС: $n \mapsto n+1$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot \underbrace{n!}_{\text{ИХ.}} < (n+1) \cdot n^n < (n+1) \cdot (n+1)^n = (n+1)^{n+1}$$

$n < n+1$

f) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in \mathbb{R})$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}$$

База: $n=0$. Нека $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(x+y)^0 = 1 = \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i} \qquad \binom{n}{0} = 1$$

ИХ: Нека за n е в сила тв.

ИС: $n \mapsto n+1$

Нека $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \overset{ИХ}{=}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}\right) \cdot x + \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i}\right) \cdot y =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{i+1} \cdot y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n+1-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{i+1} \cdot y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^{i} \cdot y^{n+1-i} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} x^{j} \cdot y^{n+1-j} \left(\underbrace{\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}}_{\binom{n+1}{j}} \right)$$

$$\frac{n!}{(n-j)!\, j!} + \frac{n!}{(n-j+1)!\,(j-1)!} = \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!} \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n+1-j} \right)$$

$$= \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!} \cdot \left(\frac{\cancel{j}+1+n-\cancel{j}}{(n-j)\cdot(j+1)} \right) = \frac{(n+1)!}{(n-j)!\,(j+1)!} = \binom{n+1}{j}$$

прим за рекурсивна ф-я:

зад $f: N \to N$, т.е.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$

Да се док, че $f(n) = n!$

прим. с рекурентна редица

Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се определя по формулите:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 11$$
$$a_n = 5a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

Док, че за $n \geq 1$, то

$$a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$$

Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се определя по формулите:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 11 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6.a_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Док. че за $n \geq 1$, то

$$a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$$

База: $n=3$: $a_3 = 5.a_2 - 6.a_1 = 5.11 - 6.5 =$

$= 55 - 30 = 25$

$a_3 = 2^{3+1} + 3^{3-1} = 16 + 9 = 25$

ИХ: За $n \geq 3$ нека е в сила тв. за $3 \leq k \leq n$

ИС: $3, \ldots, n \mapsto n+1$

$$a_{n+1} = 5.a_n - 6.a_{n-1} \overset{\text{ИХ}}{=} 5.(2^{n+1} + 3^{n-1}) - 6.(2^n + 3^{n-2}) =$$

$$= 5.2^{n+1} + 5.3^{n-1} - 3.2^{n+1} - 2.3^{n-1} =$$

$$= 2^{n+2} + 3^n \quad ✓$$

3зад а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ деф:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ f(n-1) + n, & \text{за } n \geq 2 \end{cases}$$

Док, че $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \; n \geq 1$

b) Редицата на Фибоначи:

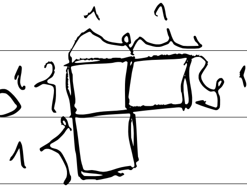
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \; n \geq 2 \end{cases}$$

Док, че $a_n \leq \Phi^{n-1}, \; n \geq 1$, където

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

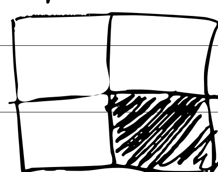
златното сечение

Зад. Тримино



Докажете, че всяко квадратно табло $2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ с едно произволно липсващо квадратче може да се покрие с няколко тримино.

База: $n = 1$

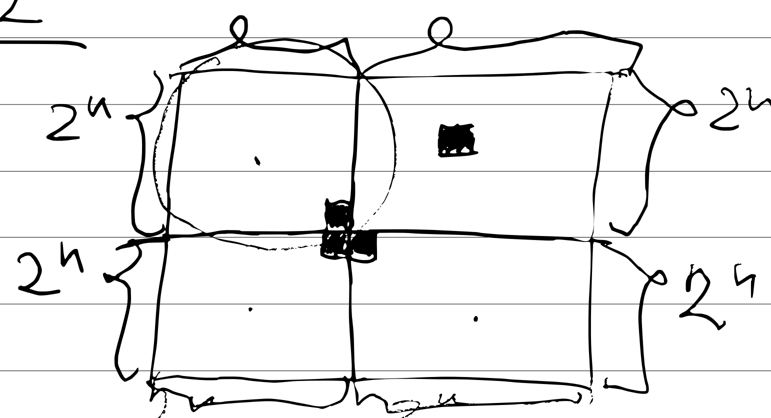


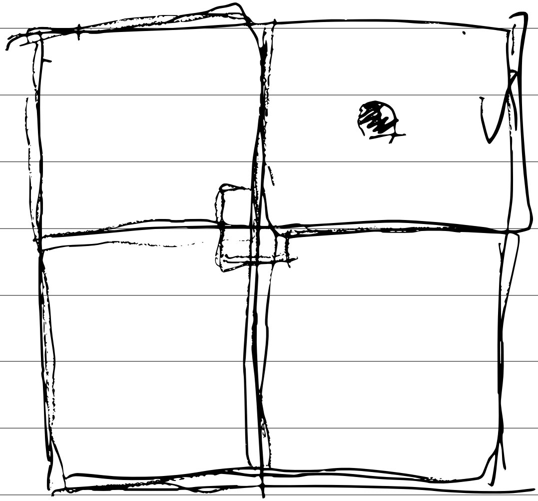
2×2

ИХ: $n \rightsquigarrow 2^n \times 2^n$

ИС: $n \mapsto n+1$

$2^{n+1} \times 2^{n+1}$





Зад 1 $R \subseteq A^2$ и $|A| = n$. Колку релации R се:

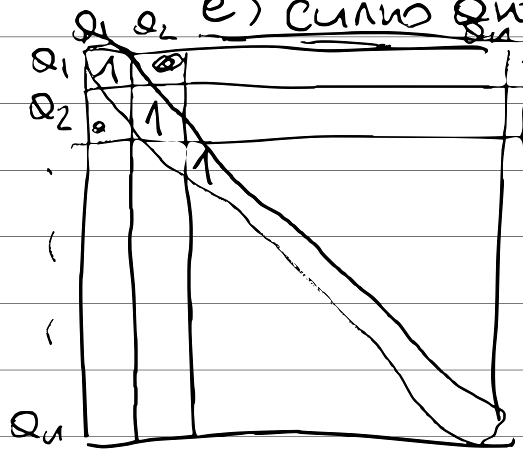
a) рефл.

b) антирефл.

c) симетрични

d) антисиметрични

e) силно антисиметрични



главна дијагонала ↓ n

$n^2 - n$ важно без дијагонала

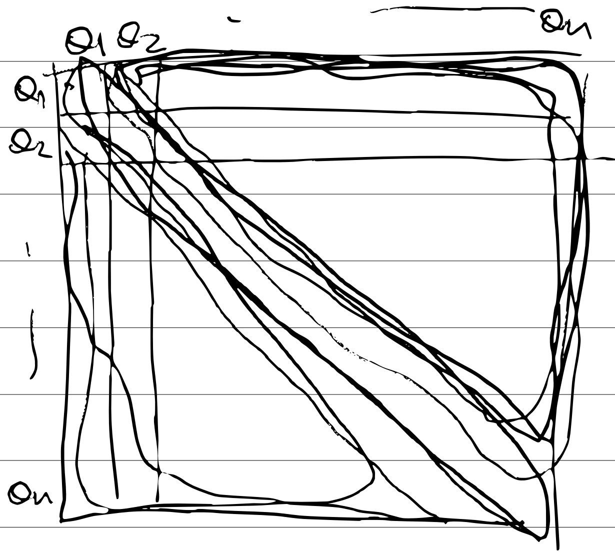
$f: \to \{0, 1\}$

$n \times n$

a) 2^{n^2-n}

b) 2^{n^2-n}

c) симетрични



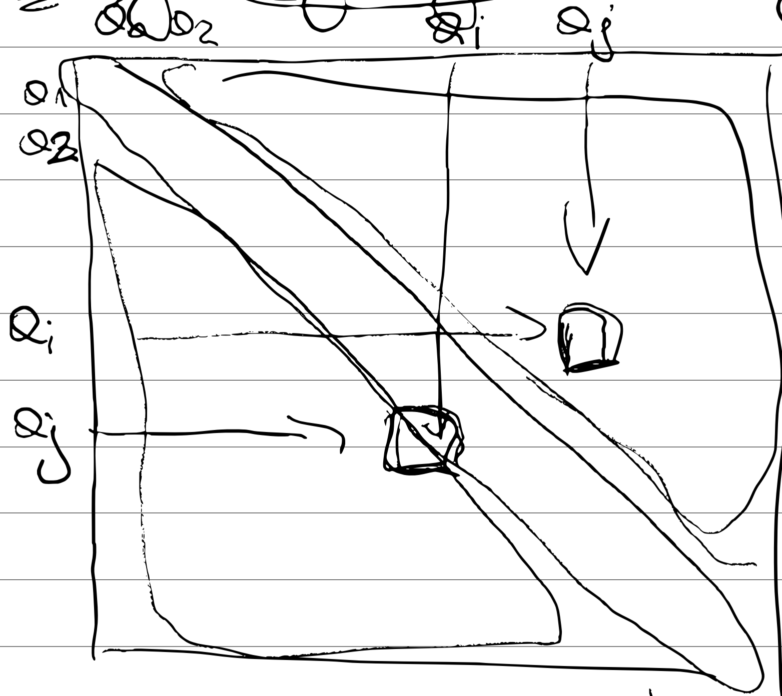
n×n

$$\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$2^{\frac{n^2+n}{2}}$$

d) антисиметрични

$\forall x \forall y (xRy \,\&\, yRx \Rightarrow x=y)$



$\langle\langle a_i, a_j\rangle, \langle a_j, a_i\rangle\rangle$ → $\langle 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 1, 0\rangle$

$i \neq j$

$3^{\frac{n^2-n}{2}} \cdot 2^n$

$A[i][j] + A[j][i] \neq 2$, $n \times n$

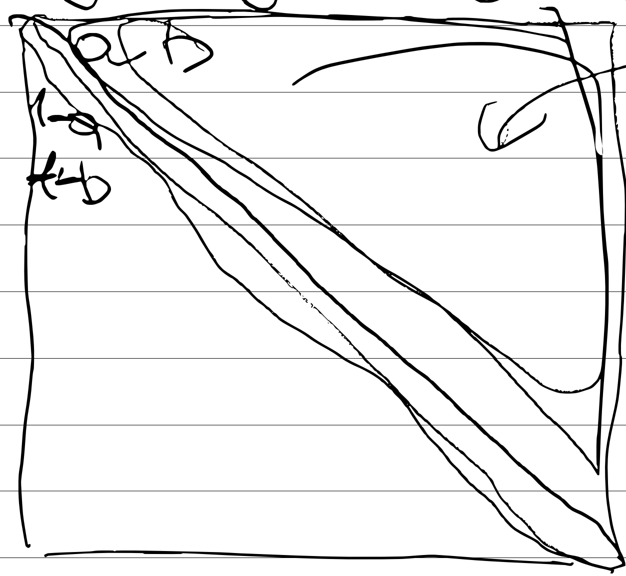
$i \neq j$

$\forall x (xRx \Rightarrow x=x)$ I

$\forall x (\neg xRx \vee x=x)$

e) силно антисиметрични

$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (xRy \,\&\, \neg yRx) \vee (\neg xRy \,\&\, yRx))$



n

3

$\frac{n^2-n}{2}$

$\langle \langle a_i, a_j \rangle, \langle a_j, a_i \rangle \rangle$ $\langle 0, 1 \rangle$ $\langle 1, 0 \rangle$

$2^{\left(n + \frac{n^2-n}{2}\right)} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$

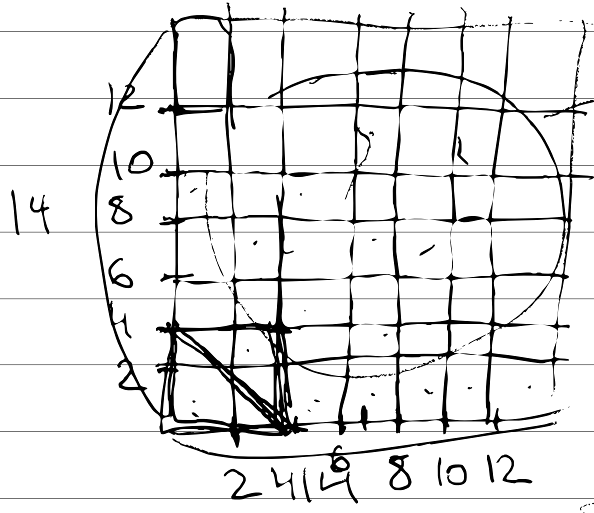
Принцип на Дирихле
Pigeonhole principle
Принцип на чекмеджетата.

* Ако имаме $n+1$ или повече предмета и искаме да ги поставим в n чекмеджета, то има поне едно чек. с поне 2 предмета.
* Ако $\overline{A}=n$ и $\overline{B}=k$, т.е. $n>k$, то за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ съществуват поне два елемента на A: a_1 и a_2, т.е. $f(a_1) = f(a_2)$

* Ако имаме $n.k+1$ или повече предмета да поставим в n чекм., то ще има поне 1 чекм. с поне $k+1$ пред.

* Ако $\overline{A} = m$ и $\overline{\overline{B}} = k$, и $m > n.k$, тогава за всяка тотална ф-я $f: A \to B$ същ. поне $k+1$ точки от A: $a_1, \ldots, a_{k+1}$, т.е.

$$f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_{k+1}).$$



49 точки

Док., че поне 2 от тях са на разст. по-малко от 3

$\sqrt{2} = 1,4$

49 квадратчета, 49 точки

$49 / 4 = 12$

$49 \% 4 = 1$

$\boxed{\text{НЮ}}$