③ Особени случаи

a) Когато свободния член не е квазиполином

прим: $a_n = a_{n-1} + \sqrt[3]{n}$, $a_1 = 6$

b) Когато коеф. са непостоянни

прим: $a_n = n \, a_{n-1}$, $a_1 = 1$

c) Когато има променлива дължина на историята

прим: $a_1 = 20$, $a_n = n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$

В курса по ДАА ще се научите и тях да борите.

309 Намерете формула за всяка от сумите:

a) $1+2+\ldots+n$

b) $2+8+24+\ldots+n\cdot 2^n$

c) $2+4+\ldots+2n$

d) $1+3+\ldots+(2n-1)$

e) $5+7+9+\ldots+(2n+3)$

f) $3+7+11+\ldots+(4n-1)$

g) $2+6+10+\ldots+(4n-2)$

h) $1+5+9+\ldots+(4n+1)$

b) $2+8+24+\dots+n\cdot 2^n$

$a_n = 2+8+24+\dots+n\cdot 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_1 = 2, \quad a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + (n+1)\cdot 2^{n+1} \end{cases}$$

(1) $a_{n+1} = a_n$

$x^{n+1} = x^n \quad / : x^n \neq 0$

$x = 1$

$\{1\}_M$

$g(n) = \underbrace{(2n+2)}_{P_1(n)} \cdot \underbrace{2^n}_{e^n}$

$dg(P_1) = 1$

$\{2, 2\}_M$

$\{1, 2, 2\}_M$

$a_n = A_1 \cdot 1^n + (A_2 \cdot n + A_3)\cdot 2^n$ $\quad a_2 = 2+8 = 10$

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_3 \longrightarrow A_1 = -A_3 \longrightarrow A_1 = 2 \quad A_2 = 2 \\ 2 = A_1 + 2A_2 + 2\cdot A_3 \longrightarrow 2A_2 + A_3 = 2 \quad / \cdot 3 \\ 10 = A_1 + 8\cdot A_2 + 4A_3 \quad 6A_2 + 2A_3 = 8 \end{cases}$$

$-A_3 = 2 \to A_3 = -2$

$$a_n = 2 + (2.n-2).2^n$$

$$a_3 = 10 + 24 = 34 = 2+(2.3-2).2^3 = 34$$

d) $1+3+\dots+(2n-1)$

$a_n = 1+3+\dots+(2n-1)$ $n \geq 1$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$a_{n+1} = a_n + (2n+1).1^n$

$g(n) = (2n+1).1^n$

$\{1\}_M$ $\{1,1\}_M$ $P(n)$ e^n

$\{1,1,1\}_M$ $\deg(..) = 1$

$a_n = (n^2.A_1 + n.A_2 + A_3).1^n$

$0 = A_3$

$1 = A_1 + A_2 + A_3$ $./2$

$4 = 4A_1 + 2.A_2 + A_3$

$2A_1 = 2 \rightarrow A_1 = 1$

$A_2 = 0$

$a_n = n^2$

$g(n) = P_1(n).e_1^n + P_2(n).e_2^n + \dots + P_k(n)e_k^n$

h) $1+5+9+\dots+(4n+1)$

$a_n = 1+5+3+\dots+(4n+1)$

$$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 6 \\ a_{n+1} = a_n + (4n+5) \end{cases}$$

$\{1\}_M \quad \{1,1\}_M$

$\{1,1,1\}_M$

$a_n = (A_1 . n^2 + A_2 . n + A_3) . 1^n$

$$\begin{cases} 0 = A_3 \\ 1 = A_1 + A_2 \quad / . 2 \\ 6 = 4 . A_1 + 2 . A_2 \end{cases}$$

$2A_1 = 4 \rightarrow A_1 = 2$

$A_2 = -1$

$a_n = 2 . n^2 - n .$

$a_2 = 6, \quad a_3 = 15 = 15$

Интересни приложения

Зад. 1 Намерете рек. отношение и начални условия за броя на двоичните думи с дължина n (в които няма две съседни нули. Намерете формула за този брой. Определете броя на думите с дължина 7.

Нека $\Sigma = \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$: Σ_n – м-вото от думи с дълж. n над Σ.

Нека $\Delta_n \subseteq \Sigma_n \rightsquigarrow \Delta_n$ – няма две съседни нули.

$$\begin{cases} \Sigma_0 = \{\varepsilon\} \rightsquigarrow \Delta_0 = \{\varepsilon\} \\ \Sigma_1 = \{0, 1\} \rightsquigarrow \Delta_1 = \{0, 1\} \\ \Sigma_2 = \{00, 01, 10, 11\} \rightsquigarrow \Delta_2 = \{01, 10, 11\} \end{cases}$$

$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cdot \{0, 1\}$

за Δ_n?

A B

a) $w \in \Delta_{n-1} \rightsquigarrow w_1 = w1 \in \Delta_n$

b) $w \in \Delta_{n-2} \rightsquigarrow w_1 = w10 \in \Delta_n$

$$A \cup B = A_n \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\underbrace{|A_n|}_{a_n} = |A| + |B| = \underbrace{|A_{n-1}|}_{a_{n-1}} + \underbrace{|A_{n-2}|}_{a_{n-2}}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot A_2 \qquad A_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$a_0 = 1 = A_1 + A_2 \rightarrow A_1 = 1 - A_2$$

$$a_1 = 2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot A_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot A_2$$

$$2 = (1 - A_2) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - A_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\frac{5+\sqrt{5}}{\cancel{2}} = A_2 \cdot \left(\frac{-2\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right) \qquad A_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$a_0 = 1$, $a_2 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$,
$a_5 = 13$, $a_6 = 21$, $a_7 = 34$, ...

HW

Колко са думите от n десетични цифри с четен брой нули?

(300): може и 00123.

Същата идея като презнаня

$a_n = \frac{1}{2} \cdot (8^n + 10^n)$

$9 a_{n-1}$

$A_n \to w = w_1 d, \quad d \neq 0 \qquad 9 |A_{n-1}|$

$\to w = w_1 0 \to |\Sigma^{n-1} \setminus A_{n-1}|$

$10^{n-1} - a_{n-1}$

$$\boxed{a_n = 9 \cdot a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1}}$$

Зад 2 а) Докажете, че числото $(3+\sqrt{5})^{2021} + (3-\sqrt{5})^{2021}$ е цяло и намерете цифрата на единиците му.

b) Намерете първите 8 цифри (най-левите) на числото, както и броя на цифрите му.

Зад 3) $a_0 = 5/2$

$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \ n \geq 1$

Да се докаже за вс. n: $\lfloor a_n \rfloor = 2^k$ за някое k.

по индукция

$a_0 = \frac{5}{2}, \quad a_1 = \frac{17}{4}, \quad a_2 = \frac{17^2 - 32}{16} = \frac{257}{16}$

$\frac{4+1}{2} = \frac{2^2+1}{2}, \quad \frac{4^2+1}{4}, \quad \frac{16^2+1}{16}$

$\frac{(2^1)^2+1}{2}, \quad \frac{(2^2)^2+1}{2^2}, \quad \frac{(2^4)^2+1}{2^4} = \frac{2^4 \cdot 2^4+1}{2^4}$

$\frac{2 \cdot 2+1}{2}, \quad \frac{2^2 \cdot 2^2+1}{2^2}$

$$a_n = \frac{(2^{2^n})^2 + 1}{2^{2^n}} = 2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}}$$

$$a_3 = \frac{257^2 - 2 \cdot 16^2}{16^2} =$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad Q_n = 2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}}$

$n = 0$: $\quad 2^{2^0} + \frac{1}{2^{2^0}} = 2^1 + \frac{1}{2^1} = \frac{5}{2}$

$n \mapsto n+1$

$$Q_{n+1} = (Q_n)^2 - 2 = \left(2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}}\right)^2 - 2 =$$

$$= 2^{2^{n+1}} \cancel{+ 2 \cdot 2^{2^n} \cdot \frac{1}{2^{2^n}}} + \frac{1}{2^{2^{n+1}}} \cancel{- 2} = 2^{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}$$

$\lfloor Q_n \rfloor = 2^{2^n}$

cong. k: $\lfloor Q_n \rfloor = 2^k$

Зад. 4 Колко са пермутациите без повторение $a_1, \dots, a_n$ на числата $1, 2, \dots, n$, т.е. удовлетворяват неравенствата $k-1 \le a_k \le k+1$ за вс. $k : 1 \le k \le n$?

b_n $\qquad a_k \in \{k-1, k, k+1\}$

$0 \le a_1 \le 2$

$1 \le a_2 \le 3$

за $k = n$: $n-1 \le a_n \le n+1$

сл.1 $a_n = n$

Товаа $1, \dots, n-1$

$k-1 \le a_k \le k+1 : 1 \le k \le n-1$

b_{n-1}

сл.2 $a_n = n-1$

$n-2 \le a_{n-1} \le n$

$n-3 \le a_{n-2} \le n-1$

$k < n-1$

$\rightarrow a_{n-1} = n$

$1, \dots, n-2$

b_{n-2}

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, \quad n \geq 3$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 2$$

1

2, 1
1, 2