Зад) Нека $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ е КОГ, $|V| \geq 2$, т.ч.

(*) $\forall u \forall v \, (u \neq v \rightarrow \langle u, v \rangle \in \mathcal{E} \vee \langle v, u \rangle \in \mathcal{E})$.

Дж, че в G същ. хамилтонов път.

Док:/ С индукция по # на върховете.

База: $n = 2$ $\quad v_0 \to v_1 \qquad v_0 \leftarrow v_1$

Благодарение на (*) all is good.

Инд.пред: Доп, че за всички графи G: $|V| = n \geq 2$ и изп. (*) е в сила твърдението.

Инд.стъпка: $n \longmapsto n+1$

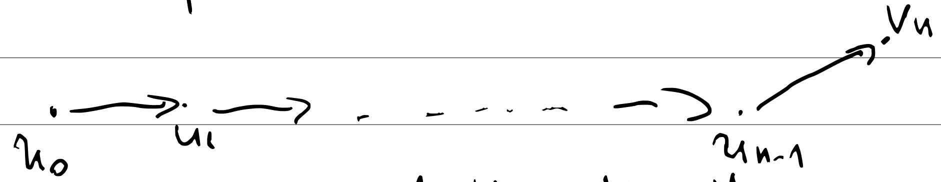
Нека $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ е изобр. на V. и $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ изп с-во (*). Нека $G_1 = \langle V_1, \mathcal{E}_1 \rangle$ с деф:

$V_1 \leftrightharpoons V \setminus \{v_n\}$, $\mathcal{E}_1 \leftrightharpoons \{\langle u, w \rangle \mid \langle u, w \rangle \in \mathcal{E}, u \neq v_n, w \neq v_n\}$.

Тогава $|V_1| = n$ и изп. с-во (*) G_1. По (i.h.) имаме хамилт. път в G_1. Нека $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$ е пермутация на върховете от V_1, т.ч. $\langle u_i, u_{i+1} \rangle \in \mathcal{E}$ за $0 \leq i \leq n-2$.

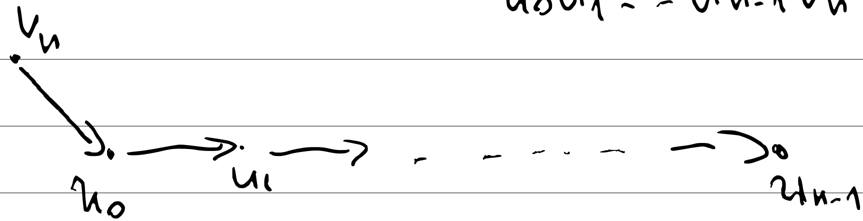
Сега навързваме v_n:

Сл. 1



$u_0u_1\dots u_{n-1}v_n$

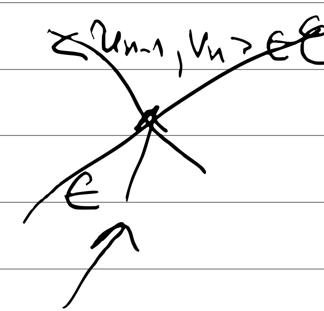
Сл. 2



$v_nu_0u_1\dots u_{n-1}$

Сл. 3 $\{\langle v_n,u_0\rangle, \langle u_{n-1},v_n\rangle\}\cap E = \emptyset$

Но тогава по (*):



$n-1 \notin S$

$u_0u_1\dots u_iv_nu_{i+1}\dots u_{n-1}$

$\emptyset \neq S \subseteq \{k \mid 0\le k\le n-1,\ \langle u_k,v_n\rangle\in E\}$

$0\in$

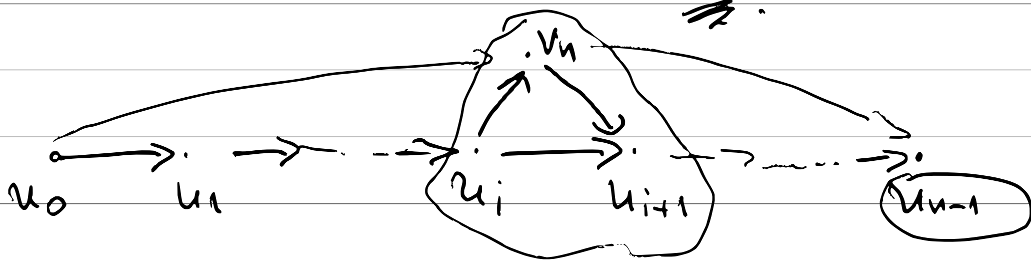
$0\le k\le n-2$

Нека $\underset{\sim}{i} \leq \max S$

$0 \leq i \leq n-2$ $\quad \langle u_i, v_n \rangle \in E$

$\langle v_n, u_{i+1} \rangle \in E$

от максим. на i



$\emptyset \neq S \subseteq \{k \mid 0 \leq k \leq n-1, \langle u_k, v_n \rangle \in E\}$

$u_0 \in$

$0 \leq k \leq n-2$

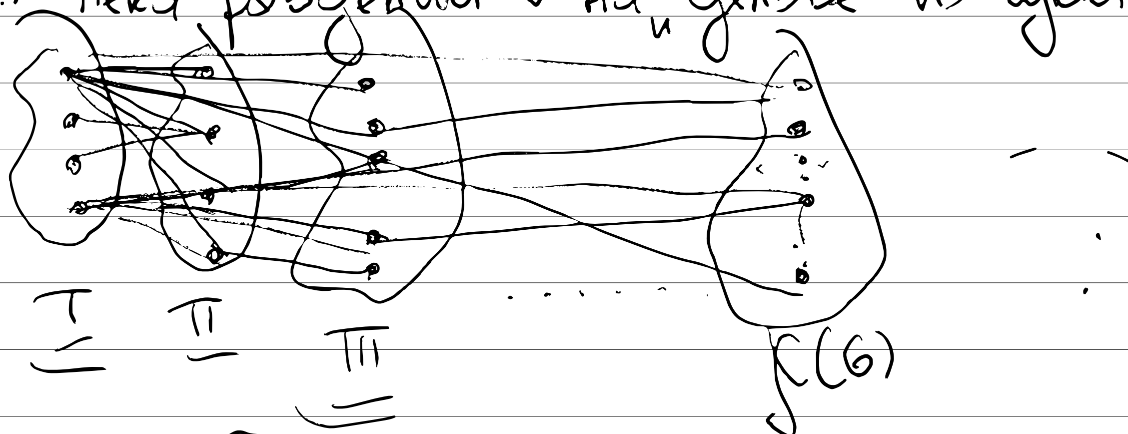
$n-1 \notin S$ заради случая, в който сме

(302) Докажете, че за всеки граф G КНГ (неориентиран без примки и кратни), то

$$\chi(G) \le \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}, \quad |E| = m$$

χ – върховото хроматично число

Д-во:/ Нека разделим V на „дялове" и цветове



Всеки дял образува антиклика.

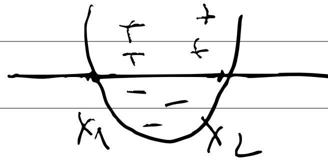
М/у върховете на всеки две различни антиклики има ребра. => М/у всеки две антиклики има поне едно ребро

Нехай розгл. $G' = \langle \{I, II, \dots, \gamma(G)\}, E' \rangle$

повн. граф

$$|E'| = \binom{\gamma(G)}{2} = \frac{\gamma(G)\cdot(\gamma(G)-1)}{2}$$

$$\frac{\gamma(G)\cdot(\gamma(G)-1)}{2} = \binom{\gamma(G)}{2} \le m = |E|$$



$$\gamma(G)^2 - \gamma(G) - 2m \le 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8m}}{2} = 1 \pm \sqrt{1/4 + 2m}$$

$$1/2 - \sqrt{1/4+2m} \le \gamma(G) \le \underbrace{1 + \sqrt{1/4+2m}}$$

Хиперкуб

<u>def</u> | Множеството:

$$B^n \leftrightharpoons \{\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \mid a_i \in \{0,1\},\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

се нарича <u>n-мерен двоичен куб</u>

n-мерните вектори са <u>върховете</u> на куба.

<u>def</u> | <u>Тегло на вектор</u> $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in B^n$

се нарича числото:

$$w(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

за $w : \bigcup_{i=1}^{\infty} B^n \to \mathbb{N}$.

def / М-вото $B^n_k = \{\alpha \mid \alpha \in B^n, \omega(\alpha) = k\}$ се нарича k-ти слой на n-мерния двоичен куб.

def / Разстояние по Хеминг м/у два вектора $\alpha, \alpha' \in B^n$ се нарича числото
$$\rho(\alpha, \alpha') = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_i'|$$

Векторите $\alpha, \alpha' \in B^n$ са съседни, ако $\rho(\alpha, \alpha') = 1$ и противоположни, ако $\rho(\alpha, \alpha') = n$.

Всяка неподредена двойка от съседни върхове на куба B^n се нарича ребро на куба.

def | Мн-вото $B^n_k(\alpha) \rightleftharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha')=k\}$ се нарича **сфера**, а

$S^n_k(\alpha) \rightleftharpoons \{\alpha' \mid \alpha' \in B^n, \rho(\alpha,\alpha') \le k\}$ – **кълбо** с център α

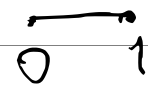
def | Последователност $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ от върхове на куба B^n се нарича **верига**, свързваща α_0 и α_k, ако $(\forall i \in \{0, \dots, k-1\})[\rho(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1]$.

Числото k се нарича дължина на веригата.

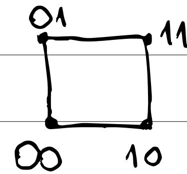
def | Номер на вектор $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in B^n$ се нарича числото:

$$\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot 2^{n-i}$$

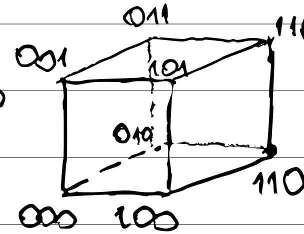
прим: $n=1$



$n=2$



$n=3$



зад a) $|B^n| = ?$

b) $|B^n_k| = ?$

c) $\nu(\langle 1, 1, 0, 0, 1, 0\rangle) = ?$

d) ? α, т.е. $\alpha \in B^n$ и $\nu(\alpha) = 19$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.е. $2^{n-1} \leq \nu(\alpha) < 2^n$

a) $|B^n| = 2^n$ $\quad \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ $\quad 2.2 \dots 2 = 2^n$

$\hookrightarrow \{0,1\}$ $\quad |\{0,1\}^n|$

b) $|B^n_k| = \binom{n}{k}$

c) $\nu(\langle \underset{5}{1}, \underset{4}{1}, \underset{3}{0}, \underset{2}{0}, \underset{1}{1}, \underset{0}{0} \rangle) = 2^5 + 2^4 + 2^1 = 50$

d) ? α, т.ч. $\alpha \in B^{10}$ и $\nu(\alpha) = 13$?

e) Брой ребра в куба B^n ?

f) Брой върхове $\alpha \in B^n_k$, т.ч. $2^{n-1} \le \nu(\alpha) < 2^n$

d) $\alpha \in B^{10}$ $\quad \alpha = \langle a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, \overset{1}{\underset{4}{a_4}}, \underset{3}{a_3}, \underset{2}{a_2}, \overset{1}{\underset{1}{a_1}}, \overset{1}{\underset{0}{a_0}} \rangle$

$\nu(\alpha) = 13 = 2^4 + 2^1 + 2^0$

e) $\alpha \in B^n$

α колко съседа има?

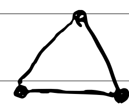
$\alpha = \langle a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0 \rangle \to \beta_1 = \langle \overline{a_{n-1}}, \ldots \rangle$

$\beta_2 = \langle a_{n-1}, \overline{a_{n-2}}, \ldots \rangle$

$\vdots$

$\beta_n = \langle a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, \overline{a_0} \rangle$

$$\frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} \cdot n$$ ребра.



Н.Г. $\nearrow 2$

Сега ще покажем, че B^n е n-регулярен.

f) $\alpha \in B^n_k \Rightarrow w(\alpha) = k$, $2^{n-1} \le \nu(\alpha) < 2^n$

$\alpha = \langle 1, \underbrace{a_2, a_3, \ldots, a_n}_{} \rangle$ $n-1$ своб., още $(k-1)$ $\quad \binom{n-1}{k-1}$

309) Док-ее:

Нека $n \in \mathbb{N}_{>0}$

a) B^n е двуделен граф.

b) Върховото хроматично число на B^n е 2.

c) Ребровото хроматично число на B^n е n.

d) B^n е Хамилтонов

e) За какви n съществува Ойлерова верига в B^n?

a) $\alpha, \beta \in B^n$ има ребро м/у тях $\Leftrightarrow \rho(\alpha, \beta) = 1 =$

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ $\quad = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$

$\beta = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$

$w(\alpha)$ $\quad w(\beta)$

четно $\quad$ нечетно

$V_1 \leftrightharpoons \{ \alpha \mid \alpha \in B^n \ \& \ w(\alpha) \% 2 = 0 \}, \ V_2 = V \setminus V_1$

c) Реберното хроматично число на B^n е n.

d) B^n е Хамилтонов

e) За кои n съществува Ойлерова верига в B^n?

$$\geq \max_{\alpha \in B^n} d(\alpha) = n$$

$$(\forall \alpha \in B^n)[d(\alpha) = n]$$

Защо са достатъчни?

Примерно оцветяване: за цвят $k \in \{1, \ldots, n\}$ ще оцветим ребро в него, ако $\rho(\alpha, \alpha') = 1$ и е на k-та позиция тази разлика

$\alpha = \langle a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n \rangle$

$\alpha' = \langle a_1, \ldots, \bar{a}_k, \ldots, a_n \rangle$

$\to$ свързващо върхове α и α'

d) B^n е Хамилтонов

e) За какви n съществува Ойлерова верига в B^n?

e) За кои $n \in \mathbb{N}$ ще имаме отворена Ойлерова вер.?

$\underline{n=1}$

За кои $n \in \mathbb{N}$ ще имаме затворена Ойлерова вер.?

<u>n – четно</u>

При n - нечетно $n>1$ – никаква

d) Th Ore, $|V| \geq 3$

V За всеки два несъс. u, v $d(u)+d(v) \geq n$

$\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_{2^n-1}$

$\underbrace{0\alpha_0, 0\alpha_1, \dots, 0\alpha_{2^n-1}, 1\alpha_{2^n-1}, \dots, 1\alpha_1, 1\alpha_0}$

Релации над B^n

1) Лексикографска наредба

$R_{lex} \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_{lex} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \Leftrightarrow$

$a_1 < b_1$ или

$(\exists k \in \{2, \dots, n\})[(\forall i \in \{1, \dots, k-1\})[a_i = b_i] \,\&\, a_k < b_k]$

или $\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} a_i = b_i$

2) По номер

$R_\nu \subseteq B^n \times B^n$, $\alpha, \beta \in B^n$:

$\alpha R_\nu \beta \Leftrightarrow \nu(\alpha) \leq \nu(\beta)$

③ Предшествие

$R_{\preceq} \subseteq B^n \times B^n$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in B^n$:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle R_{\preceq} \langle b_1, \dots, b_n \rangle \leftrightharpoons$

$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) [a_i \leq b_i]$

зад. Нека $0 \le l < k \le n$ и

$A(\alpha) = \{\beta \mid \beta \in B^n, \beta$ е сравним с $\alpha\}$.

Намерете броя на елементите на:

a) $A(\alpha) \cap B^n_k$, за $\alpha \in B^n_l$

b) $A(\alpha) \cap B^n_l$, за $\alpha \in B^n_k$

c) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_k$.

т.е. $\beta \preceq \alpha$ v $\alpha \preceq \beta$

пример за несрав: $\langle 0,1,1\rangle \not\preceq \langle 1,1,0\rangle$

$b_i \le a_i$

$\beta \preceq \alpha$

a) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_l \to w(\alpha) = l$

$\beta \in A(\alpha) \cap B^n_k \rightsquigarrow w(\beta) = k$

$l < k$

$\nu(\alpha) \le \nu(\beta)$

α и β са сравними

$\alpha \preceq \beta$

$a_i \le b_i$ за $1 \le i \le n$

Взимаме l на брой фикс. 1-ци. $k-l$, $n-l$ $\binom{n-l}{k-l}$

b) $\alpha \in B^n_k \to \omega(\alpha) = k$

$\beta \in A(\alpha) \cap B^n_\ell \rightsquigarrow \omega(\beta) = \ell < k$

$\beta \preceq \alpha$

$b_i \le a_i$

$$\binom{k}{k-\ell} = \binom{k}{\ell}$$

к любой фикс. 1-цы.

c) $A(\alpha)$, $\alpha \in B^n_k$ $\qquad |A(\alpha) \cap B^n_k|$

$$|A(\alpha)| = \sum_{i=1}^{k-1} |A(\alpha) \cap B^n_i| + \sum_{i=k+1}^{n} |A(\alpha) \cap B^n_i| + 1.$$

300) Докажете, че в куба B^n има:

а) $n!$ различни нарастващи вериги с дължина n.

б) $k!(n-k)!$ различни нарастващи вериги с дължина n, съдържащи даден вектор $\alpha \in B^n_k$.

Булеви (двоични) функции

Припомняне:

Двоични ф-ции на 1 променлива

x	$\tilde{0}$	x	$\bar{x}$	$\tilde{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

константа 0 — id — отрицание на x — константа 1

С $\mathcal{F}_2 \leftrightharpoons \{ f : J_2^n \to J_2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \}$

м-вото от всички булеви ф-ции.

С $\tilde{\mathcal{F}}_2^n \leftrightharpoons \{ f : J_2^n \to J_2 \}$

м-вото от всички булеви ф-ции на n променливи.

$$|\mathcal{F}_2^n| = |\{ f(\tilde{x}^n) \mid f(\tilde{x}^n) \in \tilde{\mathcal{F}}_2 \}| = 2^{2^n}$$

Двоични функции на 2 променливи

x	y	$\tilde{0}$	$x \& y$	$\neg(x \to y)$	x	$\neg(y \to x)$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$\bar{y}$	$y \to x$	$\bar{x}$	$x \to y$	$x \mid y$	$\tilde{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$(x \& \bar{y})$

$(y \& \bar{x})$

XOR
$(x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y)$

стелка на Пирс

еквивал.
$(x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y})$

чертата на шефер
(Nand $x \& y$)

Свойства:

1. Комутативност:
- $x \& y = y \& x$
- $x \vee y = y \vee x$
- $x \oplus y = y \oplus x$

2. Асоциативност
- $(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
- $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

3. Дистрибутивност
- $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$
- $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$
- $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$

4. Идемпотентност
- $x \& x = x$
- $x \vee x = x$
- $x \oplus x = \tilde{0}$

5. С-во на отрицанието
- $x \& \bar{x} = \tilde{0}$
- $x \vee \bar{x} = \tilde{1}$
- $x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$

⑥ С-ва на константите

- $x \& \tilde{0} = \tilde{0}$
- $x \vee \tilde{0} = x$
- $x \oplus \tilde{0} = x$
- $x \& \tilde{1} = x$
- $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$
- $x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

⑦ Закон за двойното отр.

$\neg(\bar{x}) = x$

⑧ Закони на Де Морган

- $\neg(x \vee y) = \bar{x} \& \bar{y}$
- $\neg(x \& y) = \bar{x} \vee \bar{y}$

(392) Да се намери броят на:

а) двоичните функции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

b) —||—, които приемат стойност 1 на не по-малко от k вектора от стойности на променливите;

c) —||—, които са симетрични.

def | ф-я $f(x_1, .., x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1, .., x_n) = f(x_{i_1}, .., x_{i_n})$ за всяка пермутация $i_1, .., i_n$ на индексите $1, 2, .., n$.

Т.е. функционалната ст-т зависи само от # на 1-ците.