зад

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

a) $f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x = \sum_{i=0}^{x+y} i + x$

и трите са биекции

b) $f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$

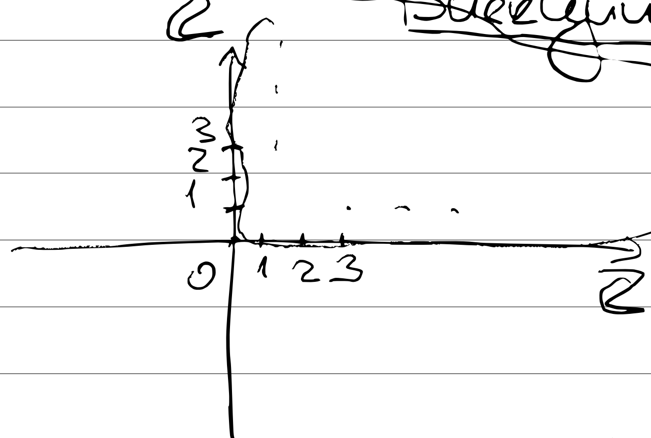
c) $f(x,y) = 2x(2^y+1)$

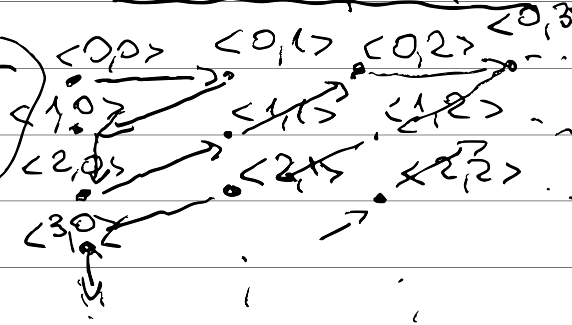
не е сюрекция -> 1 няма първообраз

$\langle 0,1\rangle \xrightarrow{\text{не е инекция}} 0$

$\langle 0,2\rangle \to$

Биекции ли са?





за а) идеята

$\frac{n.(n+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n} i$

Зад. a) Ако f и g са ф-ции, то $f \cap g$ е ф-я

$\forall x \forall y \forall y' (g \cap f(x) = y \wedge g \cap f(x) = y' \Rightarrow y = y')$

$f = \{\langle x, y\rangle \mid ..\}$

$g = \{\langle x, y\rangle \mid ..\}$

b) Ако f и g са ф-ции, за които

$\forall x [x \in Dom(f) \cap Dom(g) \Rightarrow f(x) = g(x)]$,

"съгласувани"

то $f \cup g$ е ф-я.

Зад. Нека $f : A \to B$ е произволна ф-я.

Проверете че:

a) $(\forall X, Y \subseteq B)[f^{-1}[X \sigma Y] = f^{-1}[X] \sigma f^{-1}[Y]]$

$\sigma \in \{\cap, \cup, \setminus\}$

b) $(\forall X \subseteq A)(\forall Y \subseteq B)[f[X] \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq f^{-1}[Y]]$

c) При какви условия за f:

- $(\forall X \subseteq A)[X = f^{-1}[f[X]]]$
- $(\forall Y \subseteq B)[Y = f[f^{-1}[Y]]]$
- $(\forall X, Y \subseteq A)[f[X] \setminus f[Y] = f[X \setminus Y]]$.

b) f и g ф-ции

$f(1) = 2$ $\qquad f: \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$

$f(2) = 3$ $\qquad g: \{2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

$g(2) = 3$

$g(3) = 2$ $\qquad g': \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

$g'(1) = 3,\ g'(2) = 3,\ g'(3) = 2$

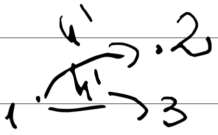
$h \subseteq f \cap g = \{\langle 2, 3\rangle\}$

$Dom(f \cap g) = Dom(f) \cap Dom(g) = \{2\}$

$Range(f \cap g) = Range(f) \cap Range(g) = \{1, 2, 3\}$

$h: \{2\} \to \{1, 2, 3\}$

$h(2)$

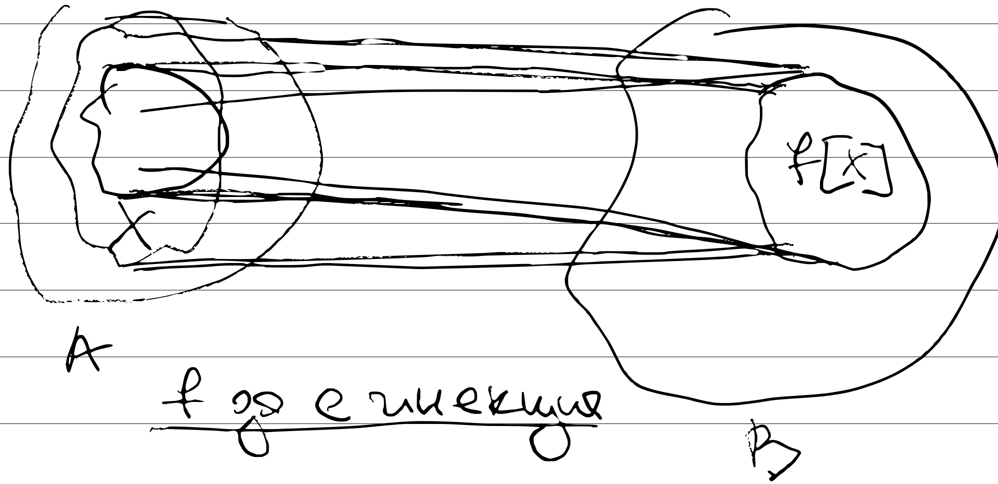


f и g са съвм., но

f и g' не са съвм. т.к.

$f(1) = 2,\ g'(1) = 3$ и $h' \subseteq f \cup g' = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \ldots\}$

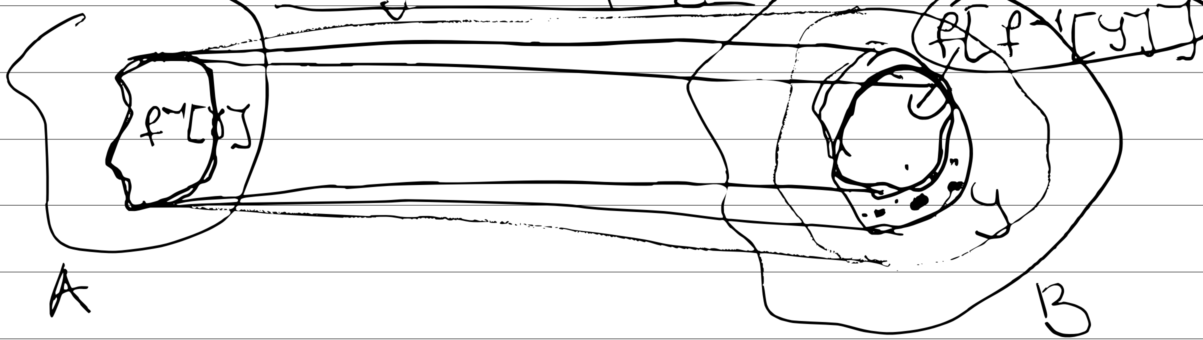
$X \subseteq A \qquad X = f^{-1}[f[X]]$



f да е инекция

$Y \subseteq B \qquad Y = f[f^{-1}[Y]]$

f да е сюрекция



(30g) Нека $F = \{f \mid f: A \to B\}$ и R е бинарна рел. в/у B $R \subseteq B \times B$

Дефинираме:

$S \subseteq F \times F$, $S = \{\langle f, g \rangle \in F \times F \mid (\forall a \in A)[\langle f(a), g(a) \rangle \in R]\}$

Докажете или дайте контра-пример за следните твърдения:

Ако R е:

a) рефлексивна, то S е рефл.

b) симетрична, то S е симетр.

c) транзитивна, то S е транзит.

a) Нека R е рефл., т.е. $\forall x [xRx]$

Нека $f \in F$. Нека $a \in A$ произв.

Тогава $\langle \underset{\in B}{f(a)}, \underset{\in B}{f(a)} \rangle \in R$. Т.к. $a \in A$, то

тогава $\langle f, f \rangle \in S$. Т.ч. S е рефл.

б) Нека R е сим.

Нека $f, g \in F$ и $\langle f, g \rangle \in S$.

Искаме $\langle g, f \rangle \in S$?

Нека $a \in A$ произв. $\langle f(a), g(a) \rangle \in R$ ⟹ R е симетрич.

$\langle g(a), f(a) \rangle \in R$

Т.к. $a \in A$ е произв, то $\langle g, f \rangle \in S$.

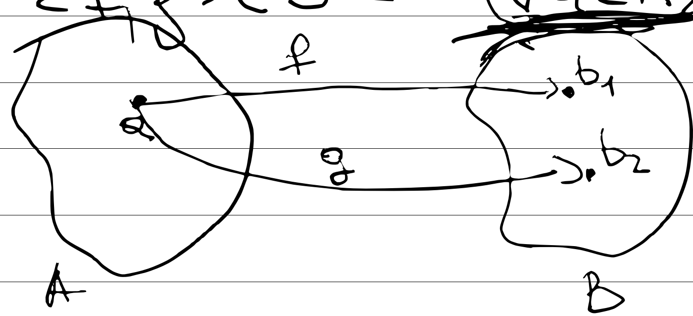
S е симетрична.

$F = \{ f \mid f : A \to B \}$

$R \subseteq B \times B$

$S \subseteq F \times F$

$\langle f, g \rangle \in S \leftrightarrow (\forall a \in A) [\langle \overbrace{f(a)}^{\in B}, \overbrace{g(a)}^{\in B} \rangle \in R]$



R в/у B

c) Нека R е транзитивна.

Нека $f, g, h \in F$, т.ч. $f S g$ (1) и $g S h$ (2).

Искаме $f S h$?

$\langle f, h \rangle \in S \iff (\forall a \in A)[\langle f(a), h(a) \rangle \in R]$

Нека $a \in A$ произв. От (1) $\langle f(a), g(a) \rangle \in R$, а от (2) $\langle g(a), h(a) \rangle \in R$.

Но R е транзит. $\langle f(a), h(a) \rangle \in R$.

Т.к. $a \in A$ е произв., то $\langle f, h \rangle \in S$.

Т.е., ако R е рел. на екв., то и S е рел. на екв.

$\#_R \bigcirc \#_S$

?

CSB th

За всеки две мн-ва A и B

$$\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}} \ \& \ \overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

$|A| = \overline{\overline{A}}$

Th Cantor

Нека A е мн-во. Тогава $\overline{\overline{A}} \lneq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

зад. Дали $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ е изброимо!

крайните подмножества на $\mathbb{N}$

за $D \in \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ и

$D = \{n_0 < n_1 < \dots < n_k\}$ и

$v = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$

$f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$, $f(v) = D_v$.

$D \mapsto v$

$f : \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$

$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$

зад.
- ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ изброимо ли е?
- $(0,1)_{\mathbb{R}}$ изброимо ли е?

${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} = \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$.

$x_1 + \dots + x_k = n \to$ сумата на ел. в м-вото

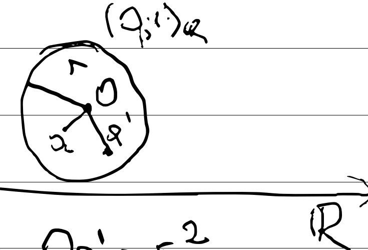
$x_i \in \mathbb{N}$

k - брой ел. в м-вото

$P_{fin}(\mathbb{N})$ да е в биекция с $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ и след това $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ знаем, че има биекция м/у него и $\mathbb{N}$.

- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ изброимо ли е?
- $(0;1)_{\mathbb{R}}$ изброимо ли е?

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{ f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$.



И двете са неизброими.

$Oa \cdot Oa' = r^2$

$0 < x < 1/2$

$x = 1/2$

$1/2 < x < 1$

Индукция

Принцип на индукцията (аксиома) за $\mathbb{N}$ числа

Нека $m \in \mathbb{N}$.

За всяко с-во $P(n)$, ако:

(база) 1) $P(m)$ е вярно

2) $\forall k((\underbrace{(k \geq m) \& P(k)}_{\text{инд. хипотеза}} \Rightarrow P(k+1))$

стъпка

То $P(n)$ е вярно за всяко $n \geq m$.

Нека $m \in \mathbb{N}$.

Д-вото, че с-во $P(n)$ е вярно за вс. ест. число $n \geq m$ се състои в:

1) Д-во, че $P(m)$ е вярно

2) Допускаме, че $P(k)$ е вярно за произволно $k \geq m$.

3) Д-ваме, че $P(k+1)$ е вярно.

Прим: 1 За вс. $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$, то

$$n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

$\varphi(k)$: $k^2 = 1+3+5+\ldots+(2k-1)$

$n=1$.

База: $\varphi(1)$ е в сила? ✓

$$1^2 = 1 = 2.1-1$$

И.П./И.Х.: Нека за $k \geq 1$ имаме $\varphi(k)$.

И.С.: Искаме $\varphi(k+1)$?

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1 \overset{(\text{И.Х.})}{=} 1+3+5+\ldots+(2k-1)+2k+1$$

$$2k'-1 = 2k+1$$

за $k' = k+1$

Принцип на силната математическа индукция за $\mathbb{N}$

Нека $a, b \in \mathbb{N}$ и $a \geq b$

за всяко с-во $P(n)$, ако:

(1) $\forall m ((b \geq m \geq a) \Rightarrow P(m))$ и

(2) $\forall m ((m > b) \,\&\, P(a) \,\&\, P(a+1) \,\&\, \ldots \,\&\, P(m) \Rightarrow P(m+1))$, то

$P(n)$ е в сила за всяко ест. число $n \geq a$.

$n \geq a$ и, $n-1, n-2, \ldots a$

$n+1$

Състои се д-вото в:

(1) Доказателство, че $P(m)$ е вярно за $b \geq m \geq a$ (по-добре база)

(2) Допускаме, че за произволно $m > b$, то $P(k)$ е в сила за всяко k, т.е. $m \geq k \geq a$.

(3) Доказателство, че $P(m+1)$ е в сила.

Пример: Да се докаже $(\forall n \in \mathbb{N})[n \geq 2 \rightarrow$ "n е просто" $\vee$ "n е произв. на прости числа"$]$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\varphi(n) \leftrightarrows}$

База: $\varphi(2)$ ✓

И.Х: Нека за някое n и за вс. k, т.е. $n \geq k \geq 2$ имаме $\varphi(k)$.

И.С. Искаме $\varphi(n+1)$

$n+1 =$

сл.1 $n+1$ е просто число.

Тогава $\varphi(n+1)$

сл.2 $n+1$ е съставно число

$n+1 = p.q$ за $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q < n+1$

По И.Х за p и за q, то

$p = r_1 \ldots r_k$ – всичките

$q = r_1' \ldots r_l'$ – са прости.

$n+1 = \underbrace{r_1 \ldots r_k . r_1' \ldots r_l'}_{\varphi(n+1).}$

Зад. Да се докаже:

a) $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}$

b) $(\forall n \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

c) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3 \mid (n^3 - n)$

d) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>1}) \quad n! < n^n$

e) $(\forall n \in \mathbb{N}_{>14}) \quad n = 3.a + 8.b, \; a, b \in \mathbb{N}$

f) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x, y \in \mathbb{R})$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i . y^{n-i}$$

прим за рекурсивна ф-я:

зад $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.е.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & n \geq 1 \end{cases}$$

Да се докаже, че $f(n) = n!$

прим. с рекурентна редица.

Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ се определя по формулите:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 11 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6 \cdot a_{n-2}, \quad n > 3 \end{cases}$$

Докажете за $n \geq 1$, то

$$a_n = 2^{n+1} + 3^{n-1}$$

322 а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ деф:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ f(n-1) + n, & \text{за } n \geq 2 \end{cases}$$

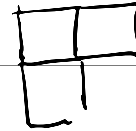
Док, че $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, n \geq 1$

б) Редицата на Фибоначи:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

Док, че $a_n \leq \Phi^{n-1}$, $n \geq 1$, където

$$\underbrace{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{златното сечение}}.$$

Зад. Тримино 

Докажете всяко квадратно дъска $2^n \times 2^n$ $(n \geq 1)$ с едно изрязано единично квадратче може да се покрие с няколко тримино.