$R_{>} = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$

Аналогично деф: $R_{\geq}$, $R_{\leq}$, $R_{<}$, $R_{=}$, $R_{\neq}$

Док. че:

a) $R_{\geq} \cap R_{\leq} = R_{=}$

b) $R_{\geq} \Delta R_{\neq} = R_{\leq}$

c) $R_{\neq} = R_{<} \cup R_{>}$

d) $\overline{R_{>}} = R_{\leq}$

$\boxed{R_{\geq} \cap R_{\neq} = R_{>}}$

симетрична разлика

$\boxed{A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A \quad (\star)}$

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

1) $R_{\geq} \Delta R_{\neq} \subseteq R_{\leq}$

2) $R_{\leq} \subseteq R_{\geq} \Delta R_{\neq}$

Нека $x \in R_{\geq} \Delta R_{\neq}$. От $(\star)$ $x \in R_{\geq} \setminus R_{\neq} \cup R_{\neq} \setminus R_{\geq}$.

От def. на „$\cup$" то $x \in R_{\geq} \setminus R_{\neq}$ или $x \in R_{\neq} \setminus R_{\geq}$.

сл. 1 $x \in R_{\geq} \setminus R_{\neq}$.

По def. на „\": $x \in R_{\geq}$ и $x \in R_{\neq}$

$R_{\neq} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq b\}$

$\underbrace{x \notin R_{\neq}}_{\langle a, b\rangle} \rightsquigarrow a = b$ | $R_{\neq} \cap R_{=} = \emptyset$

$R_{\neq} \cup R_{=} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow x \in R_{=} \subseteq R_{\leq}$

$x \in R_{\leq}$

Сл. 2 $x \in R_{\neq} \setminus R_{\geq}$. Тогава $x \in R_{\neq}$ и $x \notin R_{\geq}$.

$R_{\geq} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}$ & $a \geq b\}$

$x = \langle a, b\rangle$ $x \notin R_{\geq} \rightsquigarrow a \ngeq b \rightsquigarrow a < b$

$x \in R_{<} \subseteq R_{\leq}$

$x \in R_{\leq}$

$x \in R_{\leq} \rightsquigarrow x = \langle a, b\rangle : a \leq b \rightarrow a < b$, $\rightarrow a \neq b$

Представяне на релации

↳ дефиниция т.н.

$a, b \in \mathbb{R}: \langle a,b\rangle \in R \iff a \leq b$

$R = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$

$R \subseteq A \times A$

свойства

за крайна релация: с матрица на инцидентност

	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	
c	0		1

$\langle a,b\rangle \in R \iff M[a][b] = 1$

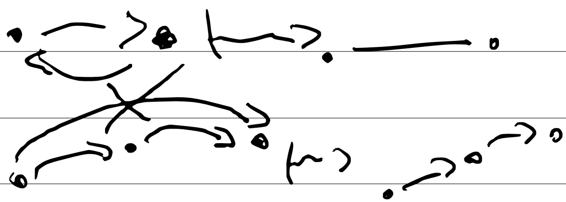
M

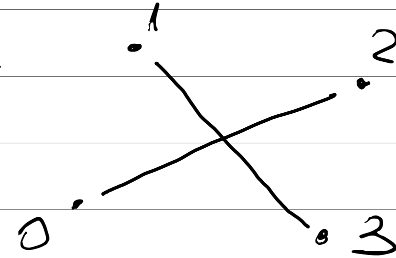
↳ графи: 

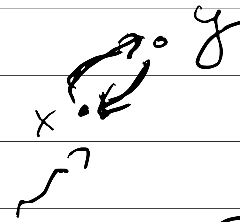
$\langle a,b\rangle \in R \iff a \equiv b \pmod 2$

$2 \mid (a-b)$

⇝ диаграма на Хасе: няма примки

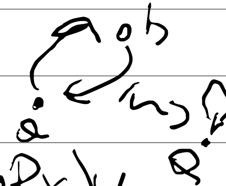






симетричност $\forall x \forall y\, (xRy \to yRx)$

антисим. $\forall x \forall y\, (xRy \wedge yRx \to x = y)$



силно антисим.: $\forall x \forall y\, (x \neq y \to (xRy \wedge \neg yRx) \vee (yRx \wedge \neg xRy))$

Нека $\Sigma = \{a, b\}$ - азбука.

Нека Σ^* - м-вото от всички думи над Σ

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$

празната дума

конкатенация

$\underbrace{u, v}_{\text{думи}} \to uv$

то, ва ⇝ това

$|u|$ – дължината на думата u

$u \in \Sigma^*$ $\quad |\varepsilon| = 0$

$|a| = 1 \quad \boxed{u \in \Sigma^* : |u| \in \mathbb{N}}$

$|ab| = 2$

$R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^* = (\Sigma^*)^2$

$R = \{ \langle u, v \rangle \mid u, v \in \Sigma^*, |u| = |v| \}.$

Каква е релацията R?

- симетрична ✓
- транзитивна ✓
- рефлексивна ✓

$\Big\}$ → релация на еквивалентност.

Нека $u, v \in \Sigma^*$, $\langle u, v \rangle \in R$, т.е. $\overbrace{|u|}^{\in \mathbb{N}} = \overbrace{|v|}^{\in \mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Искаме } \langle v, u \rangle \in R, \text{ т.е. } |v| = |u|.}$

От знанието ни за ест. числа $\mathbb{N}$ е релацията $=$ то $|v| = |u|$

симетрична: $\boxed{\forall x \forall y (\langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)}$

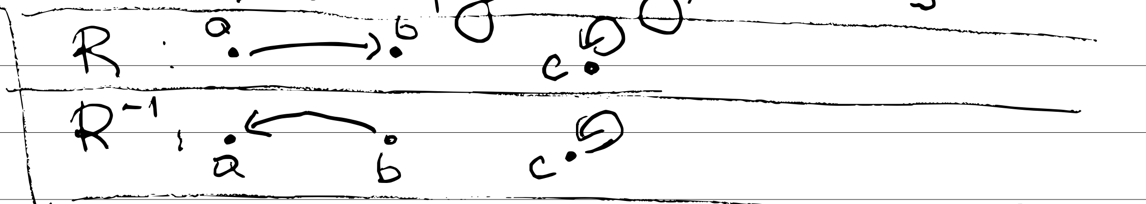
Има безброй много класове на еквив. R (колкото ест. числа). Всеки клас е краен.

---

def| Обратна релация

Нека A е м-во, $R \subseteq A \times A$.

$R^{-1} \leftrightharpoons \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$



def| Композиция на релации.

Нека A е м-во, $R, S \subseteq A \times A$.

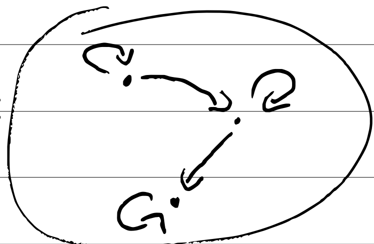
$R \circ S \leftrightharpoons \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z (\langle z, y \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in S) \}$

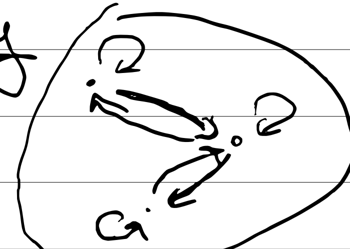
„R след S", „композицията на R и S"

Нека A е м-во. $Id_A \leftrightharpoons \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

Рефлексивно затваряне на бин. релация

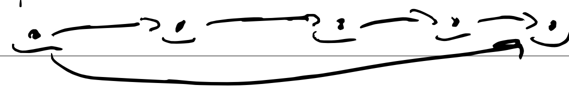
$refl(R) \leqslant R \cup \underbrace{Id_A}_{\text{identity}}$

R: 

$\rightsquigarrow sym(R)$: 

$sym(R) \leqslant R \cup R^{-1}$: симетрично затваряне на R.

Транзитивно затваряне на R:



$\leqslant$
$:=$
$\overset{def}{=}$

$$\begin{cases} R^1 \leqslant R \\ R^{n+1} \leqslant R^n \circ R, \ n > 1 \end{cases}$$

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ пъти комп. } R}$$

$$R^+ = trans(R) \leqslant \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Рефл. и транзит. затваряне

$$\begin{cases} R^1 \leftrightharpoons R \\ R^{n+1} \leftrightharpoons R^n \circ R \\ R^0 \leftrightharpoons Id_A \end{cases}$$

$$R \circ Id_A = R^1 = R$$

$$R^* = refTr(R) = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

$$\boxed{\begin{gathered} R^* = R^+ \cup Id_A \\ R^+ = R^* \circ R \end{gathered}}$$

с-ва

def| Най-малък елемент спрямо R - ч.н. над A

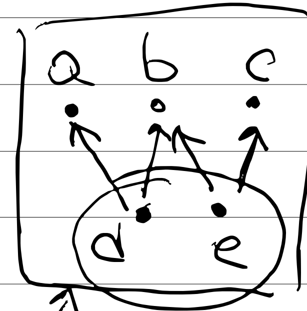
$a \in A : \forall x\, (aRx)$

„по-малък е от всички по R"

def| Мин. ел. спрямо R - ч.н. над A

$a \in A : \forall x\, (xRa \rightarrow x = a)$

„няма никой под него спрямо R"

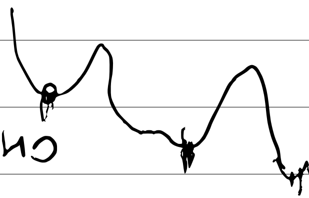


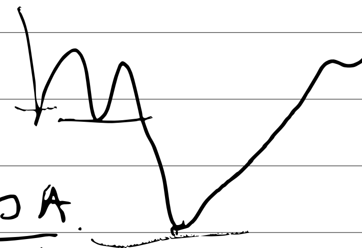
2 мин: d, e

★ Ако ч.н. R е и <u>линейна</u>, то всеки два са сравними

минимален съвпада с най-малък (дефинициите)

Аналогично за максимален и най-голям.





A - крайно

$|A|$ - броят на елементите в м-вото A.

1) Нека A, B крайни $A \cap B = \emptyset$.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

2) Нека $A_1, \dots, A_n$ са взаимно чужди м-ва т.е.

$A_i \cap A_j = \emptyset$ за $1 \leq i < j \leq n$

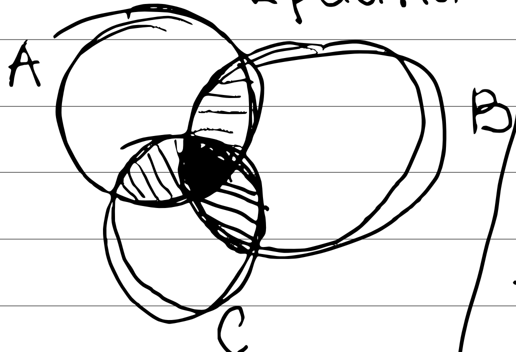
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

3) Нека A, B <u>крайни</u>

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

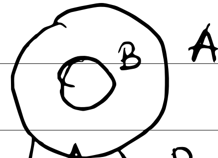
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A, B, C произволни крайни

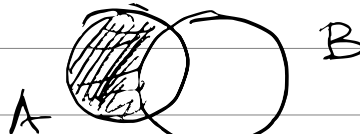


★ $B \subseteq A$

$$|A \setminus B| = |A| - |B|$$

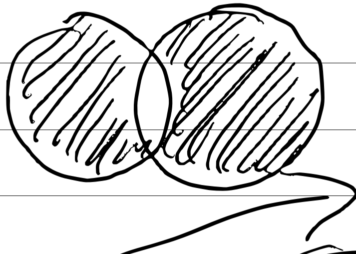


★ $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|.$



?

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

$$|A \times B| = |A| . |B|$$

$$\left|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$|A| = n$

$\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$

$b_i \in \{0, 1\}$

За $B \subseteq A$, то деф:

$\underbrace{\langle b_1, \dots, b_n \rangle}$: $b_i \in \{0, 1\}$

$b_i = 1 \leftrightarrow a_i \in B$

за $1 \le i \le n$

$\underbrace{2.2.2.\dots.2}_{n \text{ на брой}} = 2^n$

$\{0, 1\}^n$

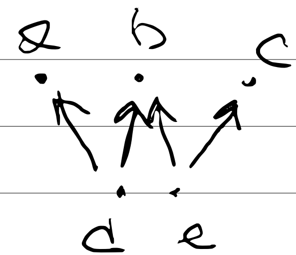
строга частична наредба

Задача / Нека $\langle A, < \rangle$ е строго частично наредено м-во, НЧМ т.е. $< \subseteq A \times A$ и $<$ е с.ч.н. над A.

Докажете, че следните условия са еквивалентни:

- $(\forall B \subseteq A)\ [B \neq \emptyset \to$ "B има минимален ел."$]$
- не е вярно, че съществува строго намаляваща редица $x_1 > x_2 > \dots$ безкрайна

| A – м-во
| $A = \{a, b, c\}$ } $\to$ $A = \{a\}$
| $a = b = c$



def | Фундирана наредба

R е ч.н. над A $\rightsquigarrow$ $\langle A, R\rangle$ е ч.н.м.

R е фундирана над A ако:

$$(\forall X \subseteq A)[\underbrace{X \neq \emptyset}_{X \text{ е непразно}} \to \underbrace{(\exists m \in X)\neg\exists y[y \in X \land yRm]}_{X \text{ има минимален елемент}}]$$

R е добра наредба над A ако:

$$(\forall X \subseteq A)[\underbrace{X \neq \emptyset}_{X \text{ е непразно}} \to \underbrace{(\exists m \in X)(\forall n \in X)(mRn)}_{X \text{ има най-малък елемент}}]$$

$\{0\} \subseteq \{0,1\}$

$\{1\} \subseteq$

$A \to B$

$\neg B \to \neg A$

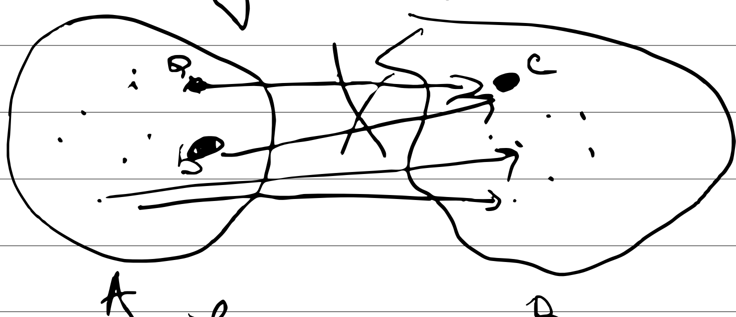
$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \to y = z)$

функционалност

$\langle x, z \rangle \in R \to R(x) = z$

$f \subseteq A \times B$

инекция: f е ф-я, $f: A \to B$



$\forall x' \forall x'' \forall y [\langle x', y \rangle \in f \wedge \langle x'', y \rangle \in f \to x' = x'']$

$f(x') = y = f(x'')$

$\Downarrow$

$x' = x''$

f инекция

f не слепва точки $|A| \leq |B|$

$\boxed{\text{HW}}$ f е инекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е функция

f да сюрекция