Минимизация на двоични ф-ции

(Минимално покритие)

def | Един елем. конюнкция k е **импликанта за ф-я f**, ако $\Pi(k) \subseteq \Pi(f)$

Единиците на k са единици и на f.

def | **Проста импликанта.**

k е проста имп. за f, ако

(i) k е имп. за f.

(ii) $\neg \exists k'$ (k' имп. за f " и $\Pi(k) \subseteq \Pi(k') \subseteq \Pi(f)$)

т.е., ако махнем буква от k, то

тя престава да бъде импликанта

def | • Сложност на ДНФ - брой букви които я формират

• Всяка минимална ДНФ се състои от прости импликанти (подбрани за покриват единиците на f)

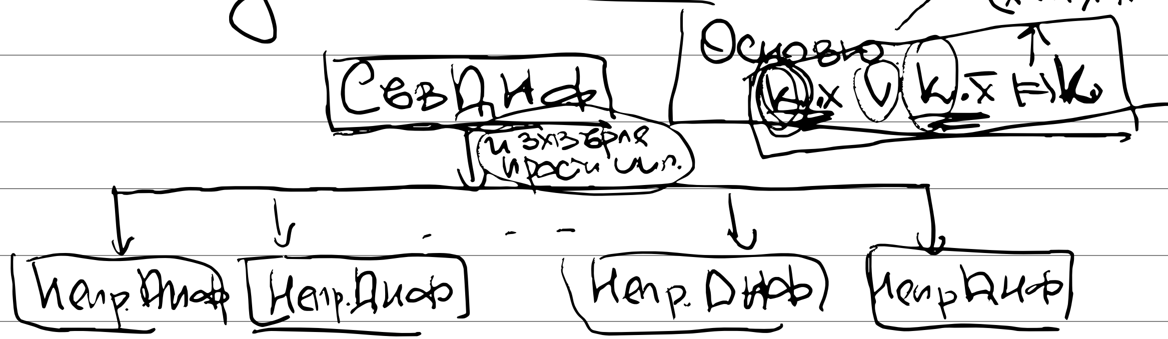
• Съкратена ДНФ - всички прости импликанти

• Неприводима ДНФ - ако махнем кой да е проста импликанта, то тя престава да представя ф-то.
Една ф-я може да има повече от една неприводима ДНФ.
Минималните ДНФ се определят от неприводимите.

Т.к. не ефективно с цяло изчерп.
да търсим минимални покрития $K.x \vee K.\bar{x} \vdash K$
ще се запознаем с алгоритъма
на Куайн-Маккласки

$(x \vee \bar{x})$
$\vdash 1$

$\vdash K$



Всеки от неприводимите, чийто брой букви е минимален, се наричат минимални ДНФ.

$\neg, \vee, \&, (,)$

Идеята е да започнете от всички импликанти и да ги сведете до прости.

Ако сформирате дизюнкция от простите импликанти ще получите Съкратена ДНФ.

Оттам нататък за да получите неприводими ДНФ, от които ще подберете минималните, то трябва да вземете простите импликанти и да видите кои единици покриват f.

От тези изречения можете да получите различни (или единствен) вариант за неприводими ДНФ. От тях избираме минималните които искаме да са с възможно най-малка дължина (колкото се може по-малко букви в записа (напр. &, v, -))

303) $f \in F_2^3$. По метода на Куайн-Маккласки генерирайте мин. ДНФ на f

a) $f = \langle 0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \rangle$ (индекси 0 1 2 3 4 5 6 7)

b) $f = \langle 1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \rangle$

c) $f = \langle 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \rangle$ $\qquad k_0 . x \vee k . \bar{x} \vdash k$

d) $f = \langle 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \rangle$

e) $f = \langle 1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1 \rangle$

a)

	x y z	
0	0 0 0	0
1	0 0 1	1
2	0 1 0	0
3	0 1 1	1
4	1 0 0	0
5	1 0 1	0
6	1 1 0	0
7	1 1 1	1

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee xyz$

мин. от 1ви ред

мин.	0	1
1	001	0-1 (1&3)
3	011	-11 (3&7)
7	111	

прости имп.

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}z \vee yz$

	1	3	7
(1&3)	●	○	
(3&7)		○	●

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}z \vee yz$

длина : 4

b) $f = \langle 1\,0000\,0\,1\,0 \rangle$

0 6

	0
0	000
6	110

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

прости

0 1 2 3 4 5 6 7

e) $f = \langle 0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \rangle$

		0 лев	1 вц	2 рц
1	001	(1&3) 0–1	(1&3&5&7) – – 1
2	010	(1&5) –01	(1&3&5&7) – – 1
3	011	(2&3) 01–	
5	101	(3&7) –11	
7	111	(5&7) 1–1	

	1	2	3	5	7
1 2 3 8 5 8 7	●		⊙	o	o
2 8 5		●	o		

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}y \vee z$

d) $f = \langle 1 1 1 1 1 1 1 1 \rangle = \tilde{1}$

$\underbrace{- \; - \; -}_{\text{от ред 3}}$

e) $f = \langle 1 1 1 0 0 1 1 1 \rangle$

e) $f = \langle 11100111 \rangle$

	x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

	0лео	1вм	
0	000	(0&1) 00-	t_1
1	001	(0&2) 0-0	t_2
2	010	(1&5) -01	t_3
5	101	(2&6) -10	t_4
6	110	(5&7) 1-1	t_5
7	111	(6&7) 11-	t_6

прости ск.

$f(\tilde{x}^3) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z} \vee xz \vee xy$

		0	1	2	5	6	7
t_1	0&1	O	O				
t_2	0&2	O		O			
t_3	1&5		O		O		
t_4	2&6			O		O	
t_5	5&7				O		O
t_6	6&7					O	O

$\varphi \leq (t_1 \vee t_2).(t_1 \vee t_3).(t_2 \vee t_4).(t_4 \vee t_6).(t_5 \vee t_6).(t_3 \vee t_5)$

описва покриването. КНФ $\longrightarrow$ ДНФ

$\varphi \models (t_1 \vee t_1 t_3 \vee t_2 t_1 \vee t_2 t_3).(t_2 t_4 \vee t_4 \vee t_2 t_6 \vee t_4 t_6).(t_5 \vee t_6)$

$\models (\cancel{t_1 t_2 t_4} \vee t_1 t_4 \vee t_1 t_2 t_6 \vee \cancel{t_1 t_4 t_6} \vee \cancel{t_1 t_2 t_3 t_4} \vee \cancel{t_1 t_3 t_4} \vee$
$\cancel{t_1 t_2 t_3 t_6} \vee \cancel{t_1 t_3 t_4 t_6} \vee \cancel{t_1 t_2 t_4} \vee \cancel{t_1 t_2 t_4} \vee \cancel{t_1 t_2 t_6} \vee$
$\cancel{t_1 t_2 t_4 t_6} \vee t_2 t_3 t_4 \vee \cancel{t_2 t_3 t_4} \vee t_2 t_3 t_6 \vee \cancel{t_2 t_3 t_4 t_6}).(t_5 \vee t_6)$

$\models (t_1 t_4 t_5 \vee \cancel{t_1 t_2 t_5 t_6} \vee t_2 t_3 t_4 t_5 \vee \cancel{t_2 t_5 t_6} \vee t_1 t_4 t_6 \vee$
$t_1 t_2 t_6 \vee \cancel{t_2 t_3 t_4 t_6} \vee t_2 t_3 t_6) \models$

$t_1 t_4 t_5 \vee t_1 t_4 t_6 \vee t_2 t_3 t_6 \vee t_1 t_2 t_6 \vee t_2 t_3 t_4 t_5$

$\to (t_1 \vee t_2 . t_3).(t_4 \vee t_2 . t_6).(t_5 \vee t_3 . t_6) \models$

$\models (t_1 t_4 \vee t_1 t_2 t_6 \vee t_2 t_3 t_4 \vee t_2 t_3 t_6).(t_5 \vee t_3 t_6) \models$

$t_1 t_4 t_5 \vee t_1 t_3 t_4 t_6 \vee t_1 t_2 t_5 t_6 \vee \cancel{t_1 t_2 t_3 t_6} \vee t_2 t_3 t_4 t_5 \vee \cancel{t_2 t_3 t_4 t_6} \vee$
$\cancel{t_2 t_3 t_5 t_6} \vee t_2 t_3 t_6$

$f=1 \quad t_1t_4t_5 \vee t_2t_3t_6 \vee t_1t_3t_4t_6 \vee t_1t_2t_5t_6 \vee t_2t_3t_4t_5$

genau 6   genau 8

$$f(\tilde{x}) = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xz$$
$$= \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}z \vee xy$$

А може да има прости импликанти
от различен ред!
Съкратена ДНФ ≡ всички прости
импликанти съдържа, а мин. ДНФ =
след избор на някои от простите импл.,
т.ч. всички 1-ци да са покрити и да
е минимален броят на импликантите

Зад. Намерете всички минДНФ на

a) $f = \langle 1101001110101010 \rangle$

b) $f = \langle 0110101111010001 \rangle$

Критерий за пълнотата на мн-во от булеви функции

Затворени подмн-ва на F_2, максимални подмн-ва на F_2, които не са пълни:

- $T_0 \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2 \ \& \ f(\tilde{0}) = 0 \}$

  запазващи нулата ф-ции

- $T_1 \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2 \ \& \ f(\tilde{1}) = 1 \}$

  запазващи единицата ф-ции

- $S \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2 \ \& \ f(\alpha) = \overline{f(\bar{\alpha})} \}$

  самодвойнствени ф-ции.

  вектори от 0-ци и 1-ци за f.

- $M \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2 \ \& \ [\underbrace{\alpha \preceq \beta}_{\text{частична наредба}} \Rightarrow f(\alpha) \le f(\beta)] \}$

  монотонни ф-ции

  предшествие (хиперкуб върховете)

- $L \leftrightharpoons \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2 \;\&\; f = \underline{a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n}$ за $a_i \in \{0,1\} \}$

линейни функции

<u>Th | Пост-Яблонски</u>

Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$.

F е пълно $\Longleftrightarrow$ $F \not\subseteq T_0$, $F \not\subseteq T_1$, $F \not\subseteq L$, $F \not\subseteq M$, $F \not\subseteq S$.

<u>Следствие</u> |

Една ф-я f е Шеферова, ако $[\{f\}] = \mathcal{F}_2$.

за $f \in \mathcal{F}_2$:

$\{f\}$ е пълно $\Longleftrightarrow$ $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$

(303) Да се намери броят на шеферовите ф-ции на n променливи.

$$U = \{ f \mid f \in F_2^n \;\&\; \underbrace{[\{f\}] = F_2}_{f \notin T_0 \cup T_1 \cup S} \} =$$

$$= \{ f \mid f \in F_2^n \;\&\; f(\tilde{0}) = 1 \;\&\; f(\tilde{1}) = 0 \;\&\; (\exists \alpha \in J_2^n)[\, f(\alpha) \neq f(\bar{\alpha}) \,] \}$$

$$= \underbrace{\{ f \mid f \in F_2^n \;\&\; f(\tilde{0}) = 1 \;\&\; f(\tilde{1}) = 0 \}}_{A_0} \setminus \underbrace{\{ f \mid f \in F_2^n \;\&\; (\forall \alpha \in J_2^n \setminus \{\tilde{0}, \tilde{1}\})[\, f(\alpha) = \overline{f(\bar{\alpha})} \,] \}}_{A_1}$$

$f(\tilde{0}) = 1 \to f(\tilde{1}) = 0$

$$|A_0| = 2^{2^n - 2}$$

$$|A_1| = 2^{\frac{2^n - 2}{2}} = 2^{2^{n-1} - 1}$$

> A_0 не пазят 0 и 1

> A_1 не пази 0 и 1, но е самодвойнствен.

00 . . . 0
00 . . . 1
011 . . . 1
100 . . . 0
1 00 . . . 1

$$|A_0| - |A_1| = 2^{2^n - 2} - 2^{2^{n-1} - 1}$$

T_0

T_1

S

M

L

зад. Да се провери пълно ли е м-вото от булеви ф-ции:

a) $\{x \to y,\ x \to (\bar{y} \& z)\} \to$ е пълно

b) $\{x \& y,\ \bar{x} \leftrightarrow (y \& z)\}$

c) $\{<01101001>,\ <10001101>,\ <00011100>\}$

a) $x \to y \notin T_0$

$x \to (\bar{y} \& z) \notin T_1$

$x \to (\bar{y} \& z) \notin S$

$\alpha \preceq \beta \iff a_i \leq b_i$ за $1 \leq i \leq n$

$\alpha = <a_1, \dots, a_n>$

$\beta = <b_1, \dots, b_n>$

xyz	$x \to \bar{y} \& z$
000	1
001	1
010	1
011	1
100	0
101	1
110	0
111	0

$x \to y \notin M$

$x \to y \models \neg x \vee y \models (x . (\neg y)) \models 1$

$x . (1 \oplus y) \oplus 1 \models x \oplus xy + 1$

$x \to y \notin L$.