Основни комбинаторни конфигурации с или без наредба, с или без повторение

Основна задача:

Дадени са ни n обекта $a_1, \ldots, a_n$ и искаме да изберем $b_1, \ldots, b_k$ (k от тях).

„Изборът" ни задава ф-я f,

$f: \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

По колко начина можем да направим този избор, т.е. колко са ф-циите f?

① **Вариации с повторение**

Изображение на редата

a_i – различни; b_j – различни;

f – произволно

Т.е. можем да повторяме избора ни и ни въпроса на редата.

При различни b_j, то f_1 и f_2 са различни

1 2 3

b_1 b_2

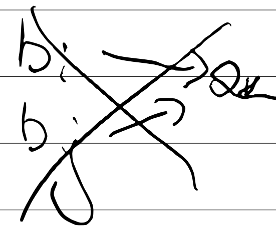
	f_1	f_2
b_1	$1 \to 2$	$1 \to 3$
b_2	$2 \to 3$	$2 \to 2$

за b_1 за b_2 за b_k

$$\text{Отг: } \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k \text{ пъти } n} = n^k = \left|\tilde{V}_n^k\right|$$

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad |A| = n \qquad |\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k-1 \ \times}| = n^k$$

② Вариации без повторение



Има значение наредбата.

a_i - различни; b_j - различни;

f - инекция.

Т.е. вълнува ни наредбата и не повторение.

Отг: $n.(n-1).(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} = |V_n^k|$

за b_1 за b_2 за b_k

$(n-k)! = 0! = 1$ за $n=k$

②' Пермутации без повторение

като ②, но $k=n$.

Тогава $|P_n| = n.(n-1)\ldots 1 = n!$

за b_1

③ **Комбинации без повторение**

Няма значение наредбата.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - инекция

Тогава в примера за f_1 и f_2

f_1	и	f_2
$1 \to 2$		$1 \to 3$
$2 \to 3$		$2 \to 2$

, то f_1 не се различава от f_2.

Т.е. не различаваме кое е първо и кое е второ.

$$|C_n^k| = \frac{|V_n^k|}{|P_k|} = \frac{n.(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

начини за пермутиране k елемента (не различаваме наредбата)

биномен коеф. начини за вземем k елемента подмн-во на мн-во съдържащо n елемента.

④ **Комбинации с повторение**

Не ни интересува наредбата и може да повторение.

a_i - различими; b_j - неразличими;

f - произволна

прим/ $n = 3$ a_1 a_2 a_3

$k = 2$ b_1 b_2

$\{a_1, a_2\}$ $\{a_1, a_1\}_M$

$\{a_1, a_3\}$ $\{a_2, a_2\}_M$

$\{a_2, a_3\}$ $\{a_3, a_3\}_M$

мулти мн-во

Тогава нека x_i - брой пъти, в които сме избрали a_i, $i=1,2,\dots,n$. $a_1,\dots,a_n$

$x_1+x_2+\dots+x_n=k$

Трябва да ги номерим брой решения. $b_1,\dots,b_k$

Колко вектора $\langle x_1, x_2,\dots,x_n\rangle$ има т.ч. $x_i \geq 0$ за $i\in\{1,\dots,n\}$?

имат еднакъв брой решения

Нека $x_i' = x_i+1$.

$(x_1+1)+(x_2+1)+\dots+(x_n+1)=\underline{n+k}$

Тогава $x_1'+\dots+x_n'=k+n$ т.е. всеки елемент е избран поне веднъж: $x_i'\geq 1$ за $i\in\{1,\dots,n\}$.

Тогава съпоставяме вектор:

$$\langle x_1', x_2',\dots,x_n'\rangle \xrightarrow{f} \langle \underbrace{x_1'}_{y_1}, \underbrace{x_1'+x_2'}_{y_2},\dots,\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i'}_{y_n}=n+k\rangle$$

парциални суми (строго растящи вектори)

$$y_1<y_2<y_3<\dots<y_{n-1}<\underbrace{n+k}_{y_n}$$

Твърдим, че g е биекция

- сюрекция

1ва комп. (стара) = 1ва комп. (нова) : $x_1' = y_1$

$x_i' = y_i - y_{i-1}$, за $i > 1$

- инекция

Нека $\langle x_1', \ldots, x_n' \rangle \neq \langle t_1', \ldots, t_n' \rangle$

като $x_i' \neq t_i'$ е най-лявата позиц. на различие.

Тогава $y_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} x_k' = \sum_{k=1}^{i-1} t_k'$ и

$y_{i-1} + x_i' \neq y_{i-1} + t_i'$

Т.е. g е биекция.

$n+k-1$

$y_1, \ldots, y_{n-1}$

не е важен реда

и не се повтарят

$y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < n+k$

Тогава броя решения на оригин. ур-е е същия като броя реш. на това ур-е.

$\langle y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, n+k \rangle$

$y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < n+k$

$x_i' > 0$

за всеки

техен избор получаваме вектор

т.е.

$$\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{k+(n-1)}{k} = \left|\tilde{C}^{\,n-1}_{n+k-1}\right|$$

защото редицата е растяща и

$$y_{n-1} = x_1' + x_2' + \dots + x_{n-1}' \le n+k-1 < n+k < y_n$$

заради $x_i' \ge 1$

$a_1, \dots, a_n$ изб. $b_1, \dots, b_k$

$$\underbrace{\overset{b_{j_1}}{\star}\ \overset{b_{j_2}}{\star}}_{\text{за } a_1}\ \Big|\ \underbrace{\overset{b_{j_3}}{\star} \dots \overset{b_j}{\star}}_{\text{за } a_2}\ \Big|\ \dots\ \Big|\ \underbrace{\overset{b_j}{\star} \dots \overset{b_k}{\star}}_{\text{за } a_n}$$

k обекта $b_1, \dots, b_k$

n−1 разделителя

$(n-1)+k$ обекта

★ Пермутации с повторение

$n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ n

$$\tilde{P}_n^{k_1,\dots,k_m}(k_1, \dots, k_m) = \frac{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}$$

колко пъти се повтаря a_i за $i \in \{1, \dots, m\}$

$n = k + (n-k)$

$m = 2$

$$5 = \overbrace{k_1}^{2} + \overbrace{k_2}^{1} + \overbrace{k_3}^{2}$$

$\underbrace{11}\,\underbrace{2}\,\underbrace{3}\,\underbrace{3}$

2 1 1 3 3

1 2 1 3 3

3 1 2 3 1

....

$$\frac{5!}{2!\,2!\,1!}$$

за 2ки за 3ки за 1ци

перmутации с повторение

Зад. Колко са четирицифрените цели положителни десетични числа, които могат да се образуват с цифрите от това м-во {0, 1, 2, 3, 4, 5}, т.е.:

а) в записа на числото няма повтарящи се цифри?

b) в записа на числото може да има повтарящи се цифри

c) в записа на числото може да има повтарящи се цифри и числата са нечетни.

а) $\mathcal{U} = \{d_1 d_2 d_3 d_4 \mid d_1 \neq 0, d_i \neq d_j\}$

$|\mathcal{U}|$ $\quad \underbrace{d_1}_{5 \text{ избора}} . \underbrace{d_2}_{5 \text{ изб.}} . \underbrace{d_3}_{4} . \underbrace{d_4}_{3}$ $\quad |\mathcal{U}| = 5 . 5 . 4 . 3$

b) в записа на числото може да има повтарящи се цифри

c) в записа на числото може да има повтарящи се цифри и числата са нечетни.

$U = \{ d_1 d_2 d_3 d_4 \mid d_1 \neq 0 \}$

$|U| = 5.6.6.6$

$$\begin{array}{cccc} d_1 . & d_2 . & d_3 . & d_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 6 & 6 & 6 \end{array}$$

$d_i \in \{0, 1, .., 5\}$

c) $U = \{ d_1 d_2 d_3 d_4 \mid d_1 \neq 0, d_4 \% 2 = 1 \}$

$$\begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 5 & 6 & 6 & 3 \end{array}$$

(302) a) Колко са двуцифрените числа съставени от цифрите {1, 3, 5, 7, 3}?

$|\tilde{V}_5^2| = 5.5 = 25$

b) Ако цифрите са написани на картончета?

$|V_5^2| = 5.4 = 20$

Зад. По колко начина можем да подредим в редица 2 зелени, 3 червени и 4 сини топки?

$$n = 9 = \underbrace{2}_{k_1} + \underbrace{3}_{k_2} + \underbrace{4}_{k_3}$$

$$\tilde{P}_n^{k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!} = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} =$$

$$=$$

$$\tilde{P}_n(k_1, k_2, k_3)$$

Зад. а) По колко начина можем да разпределим 10 ябълки (различни) м/у 3 деца?

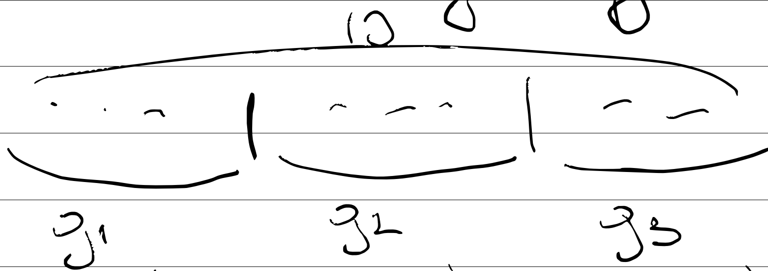
Зад: Важно е не само колко ябълки, а и кои ябълки (различими са).

$$10 = a_1 + a_2 + a_3 \qquad a_i \geq 0$$

$$\underbrace{3}_{я_1} \cdot \underbrace{3}_{я_2} \cdot \underbrace{3}_{я_3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{3}_{я_{10}} = 3^{10}$$

b) по колко начина хонорар от 10 метални левчета може да бъде разпределен м/у 3-ма души?

Зад: може и 0 лв да получи човек.



$$\binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = \frac{\cancel{12}^{6} \cdot 11}{\cancel{2}} = 66$$

$$\underline{g_1 + g_2 + g_3 = 10}$$

$$g_i \geq 0$$

c) Както b), но сега всеки трябва да получи поне 2 лв.

$$\begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 = 10 \\ g_i \geq 2 \end{cases}$$

$$g_i' = g_i - 2$$

$$\begin{cases} g_1' + g_2' + g_3' = 10 - 6 = 4 \\ g_i' \geq 0 \end{cases}$$

$$\binom{4 + (3-1)}{(3-1)} = \binom{6}{2} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{2}} = 15$$

322 Вероятност $= \dfrac{\text{\# хубави случаи}}{\text{\# всички случаи}} \in [0;1]$

При игра на бридж получавате 13 карти от общо 52. Каква е вероятността да получите:

a) точно 2 дами?

b) ~~поне 2 дами?~~

c) ~~поне~~ 1 дама?

$C_{52}^{13} = \binom{52}{13}$ } всички

a) good: $\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{2 дами от 4}} \cdot \binom{48}{11}$

$$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11}}{\binom{52}{13}}$$

b) good : $\binom{4}{2} \cdot \binom{50}{11}$ $\}$ мяй кошен !!

good : $$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{48}{11} + \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{10} + \binom{48}{9} \cdot \binom{4}{4}}{\binom{52}{13}}$$

c) bad : $\underbrace{\binom{4}{0} \cdot \binom{48}{13}}$

good : $$\frac{\binom{52}{13} - \binom{4}{0} \cdot \binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}$$

Зад. По колко начина n елемента могат да се подредят:

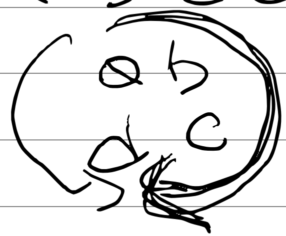
a) в редица;

b) в кръг, ако различаваме двете посоки; $\circlearrowright \neq \circlearrowleft$

c) в кръг, ако не различаваме двете посоки: $\circlearrowright = \circlearrowleft$

a) $P_n = n!$

b) a b c d



abcd

bcda

cdab

dabc

$\frac{n!}{n}$ на 1 кръг съответстват n подредби в редица

c) a b c d

$$\begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array}$$

a b c d

b c d a

c d a b

d a b c

a d c b

b): $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

$\dfrac{(n-1)!}{2}$ c)

392) По колко начина 10 души могат да се наредят в редица, така че трима приятеля да са едни до друг?

$$д_1 \dots д_7 \; \underbrace{\overset{д_8}{п_1} \; \overset{д_9}{п_2} \; \overset{д_{10}}{п_3}}$$

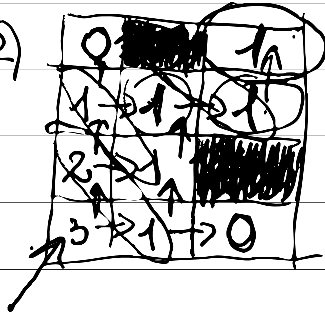
$$P_3 \cdot P_{(10-3)+1} = P_3 \cdot P_8 = 3! \cdot 8!$$

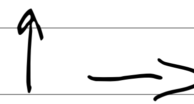
n m

$$P_m \cdot P_{(n-m)+1} = m! \cdot (n-m+1)!$$

302 Брой пътища от долния ляв до горния десен ъгъл? На всяка стъпка или ↑ или →

а)





b) някои забранени клетки

1	1	1
3	2	1
6	3	1
10	4	1

4

3

4×3

3× ↑ 2× →

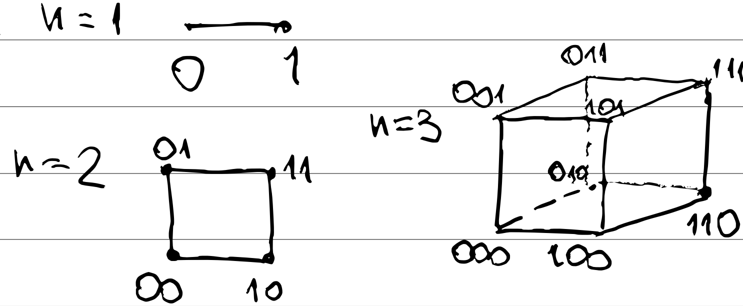
$$\tilde{P}^5(3;2) = \frac{5}{3!\,2!} = C_3^5 = C_2^5$$

c) някои забранени клетки и таблицата е m×n.

$$\binom{m-1+n-1}{n-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

Зад. Хиперкуб (n-мерен куб):
- върхове: всички наредени n-орки от 0ли и 1ци;
- ребра: има м/у върхове, които се различават само в една позиция

<u>пр.:</u>



а) Колко върха има хиперкубът?