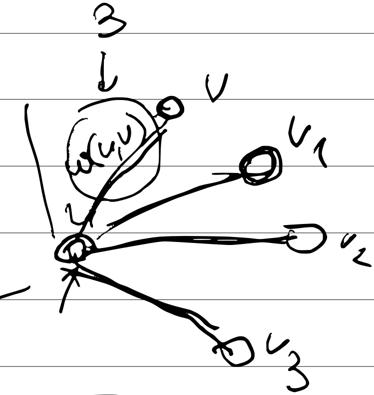
Prim-Jarnik(G, w, s)

кой - евтина цена за се стигне до върха v от кой да е негов съсед.

```
Prim-Jarnik(G, w, s)
  for all v ∈ V
    cost(v) = ∞
    parent(v) = null
  cost(s) = 0
  PQ = makePQ(V, cost)   // строи приор. опашка спрямо cost
  while PQ is not empty:
    u = popMin(PQ)   // връща върха с най-малък ключ
    foreach (u,v) ∈ E:
      if cost(v) > w(u,v)
        cost(v) = w(u,v)
        parent(v) = u
        decreaseKey(PQ, v)
```

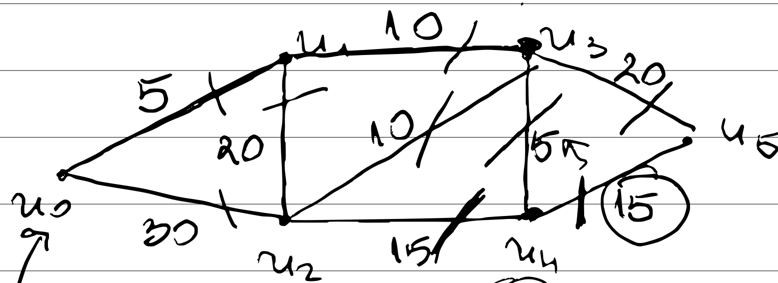
relax(u, v, w, cost, parent, PQ)

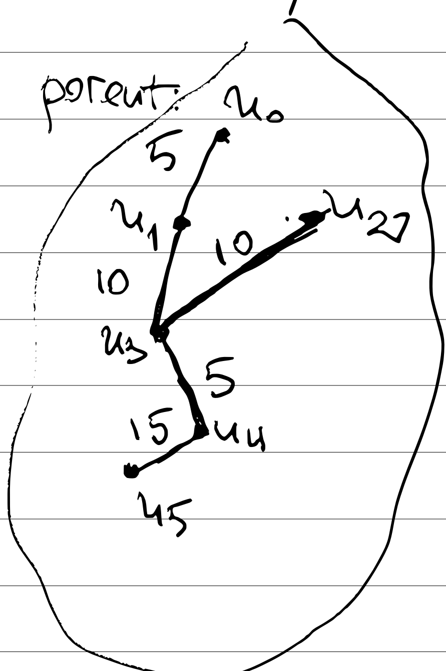


5
3

намерили сме връх, за който можем да подобрим цената му

Използваме ст-та ол казва опашката че cost ст-та на v е било намалено и предизвиква пренареждане на PQ спрямо обновения масив cost.





PQ :
cost:

u_0	0
u_1	~~∞~~ 5
u_2	~~∞~~ ~~30~~ ~~20~~ 10
u_3	~~∞~~ 10
u_4	~~∞~~ 5
u_5	~~∞~~ ~~20~~ 15

Prim-Jarnick

Shortest path spanning tree

SPST

Дървета на най-кратките пътища

* Ако няма тегла на ребрата, казахме, че bfs строй от даден връх до всички други.
* Ако има положителни тегла и
  - всички тегла са равни -> пак bfs;
  - има поне две различни -> Dijkstra.
* Ако графът е DAG (directed acyclyc graph), има по-хубави алгоритми.

* Ако средт теглата има отрицателни, има други алгоритми, които строят SPT.
* Dijkstra строи дърво на най-късите пътища от даден връх, до всички други (работи за ФОГ и КНГ).

! MST ≠ SPST !

разликите

Dijkstra(G, w, s)
for all v ∈ V:
dist(v) = ∞
parent(v) = null
dist(s) = 0

тривиален път от s до s

PQ = makePQ(V, dist)
while PQ is not empty
u = deletemin(PQ)

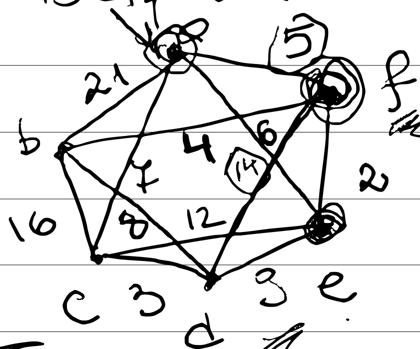
взимаме върха, до който стигаме най-бързо

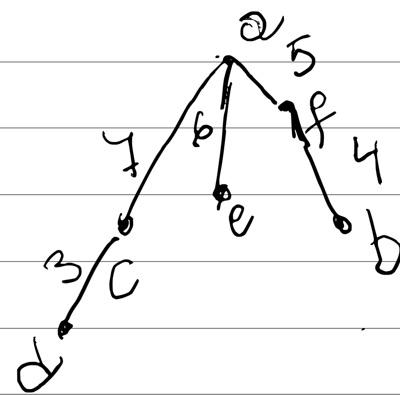
for all edges {u, v} ∈ E:
if dist(v) > dist(u) + w(u,v):
dist(v) = dist(u) + w(u,v)
parent(v) = u
decreasekey(PQ, v)

намерили сме по-лек път до v през u

Тв | Всеки начален отрез на най-къс път от s строен от Dijkstra е също най-къс път.

Зад. Постройте MST на с начало a.





d 10

Зад. КНГ $G = \langle V, R \rangle$ с м-во върхове $V = \{a, b, c, d, e\}$ е зададен с матрица M:

$$
M = \begin{array}{c|ccccc}
 & & & & & \\
a & \infty & 2 & \infty & 2 & 1 \\
b & 2 & \infty & 3 & 1 & \infty \\
c & \infty & 3 & \infty & 1 & \infty \\
d & 2 & 1 & 1 & \infty & 2 \\
e & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty
\end{array}
$$

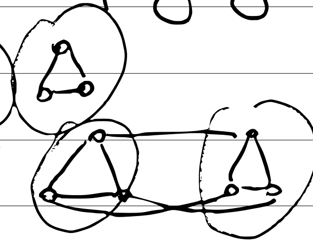
с елементи $m_{ij} = \begin{cases} \text{"} \in \mathbb{N} \text{"}, & \text{ако } \langle i,j \rangle \in R \\ \infty, & \text{ако } \langle i,j \rangle \notin R \end{cases}$

a) По Kruskal MST без корен;
b) По Prim-Jarnick MST с корен r=3.
c) SPST с Dijkstra с корен r=1
d) SPST с корен r=3, ако теглата на всички ребра е 1.

300) $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ редица от графи.

$G_0 = K_3$

$G_1 \longrightarrow$



G_{n+1} = две копия на G_n като м/у копията има ребра, които свързват съответните върхове на копията.

За даден $G_n = \langle V_n, E_n \rangle$, колко са $|V_n|$ и $|E_n|$

$|V_0| = 3$, $|V_1| = 6$

$a_n = |V_n|$

$$\left| \begin{array}{l} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{array} \right) \longrightarrow a_n = 3.2^n$$

$|E_0| = 3$, $|E_1| = 2.3 + 3$,

$$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_{n+1} = 2 \cdot b_n + \underbrace{Q_n}_{3 \cdot 2^n} \end{cases}$$

χ_c:

$\{2\}$ $\{2\}$

$\{2, 2\}_M$

$$b_n = (A_1 + \underline{n \cdot A_2}) \cdot 2^n$$

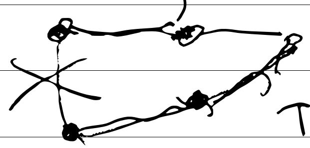
$$\begin{cases} b_0 = 3 = A_1 \\ b_1 = 9 = \underline{A_1 \cdot 2} + A_2 \cdot 2 \end{cases}$$

$A_2 = 3/2$

$$b_n = 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^{n-1} \cdot n =$$
$$= 3 \cdot 2^{n-1} \cdot (2 + n)$$

(3яз) Даден е граф $G = \langle V, E \rangle$.
Реброто е се нарича мост/срязващо/
критично за G, ако при отстраняето
му се увеличава броятна свързаните
компоненти в G. Докажете, че ако
всички върхове на графа са от
четна степен, то той не съдържа
мост.

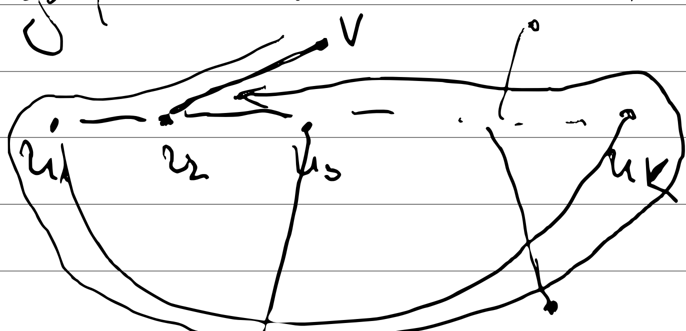
(A) $(\forall v \in V)[d(v) \% 2 = 0]$. Допуск има мост някъде.
Нека $C_1, \ldots, C_t$ са комп. на свързаност.
Нека БОО поне един от мостовете е в комп. C_1.
$G_1 = \langle C_1, E \cap (C_1 \times C_1) \rangle$ – има Ойлерова верига.



Значи и моста се ползва в
тази верига. Ако го махнем
моста, то ще отворим веригата. (Y)

392 Нека $G=\langle V, E\rangle$ е свързан НГ с $|V|=n$. Нека $u_1, \dots, u_k$ е най-дълъг прост път в G за $k<n$.
Докажете, че u_1 и u_k не са съседни.

Да ДП, че u_1 и u_k са съседни



БОО да вземем V с u_2. $V u_2 u_1 u_k \dots u_3$

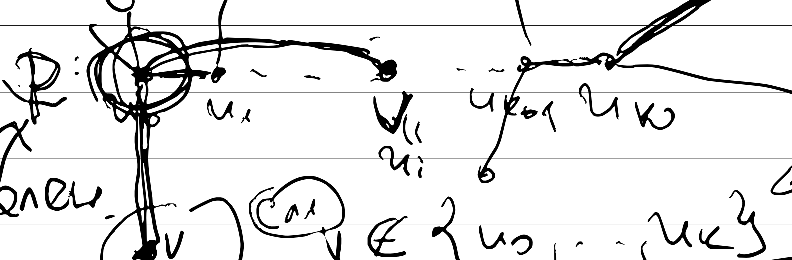
зад. $G=\langle V,E\rangle$ е КНГ, в който $(\forall v\in V)[d(v)\geq d\geq 2]$, където $d\in\mathbb{N}_{>1}$.

$(\forall v\in V)[d(v)\geq 2]$

а) Докажете, че в G има цикъл.

b) Докажете, че в G има цикъл с дължина поне $d+1$.

а) Да докажем, че има цикъл. Нека $|V|=n$.



$d(u_0)\geq 2$

сл.1 $v \in \{u_0,\dots,u_k\} \to P$ не е макс. 4

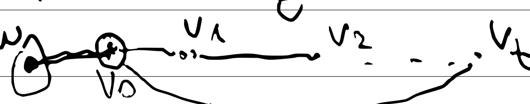
$v u_1 u_2 \dots u_k$

сл.2 $v \in \{u_0,\dots,u_k\}$

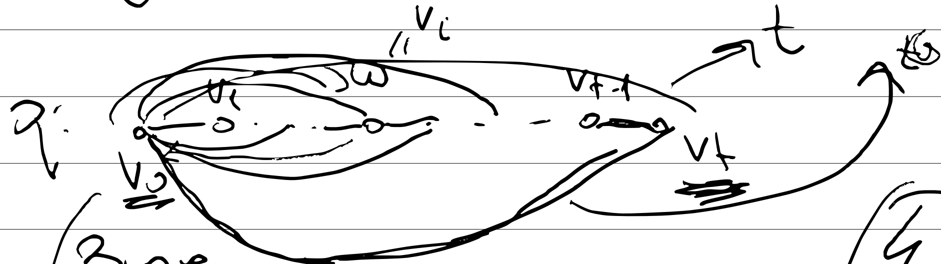
b) Знаем, че всички са с дължини най-много d.

Нека $q: v_0 v_1 \dots v_t v_0$ е най-дълъг цикъл?

$d(v_0)\geq d\geq 2$



До ди, че всички съседи на v са в цикъла?



Значи

↯

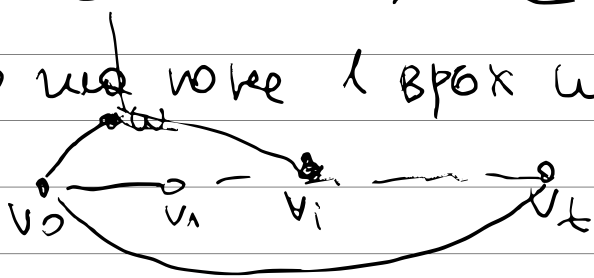
$v_0 v_1 \dots v_t v_0$

има $t+1$ ребра

$t \le d-1$

$t \ge d(v_0) \ge d$ ↯

Нека има поне 1 връх w: отвън $d(w)=d=2$



Нека вземем макс. път p:

$p: v_0 - v_1 \ldots v_i \ldots - v_t$

$d(v_0) \geq d \geq 2$

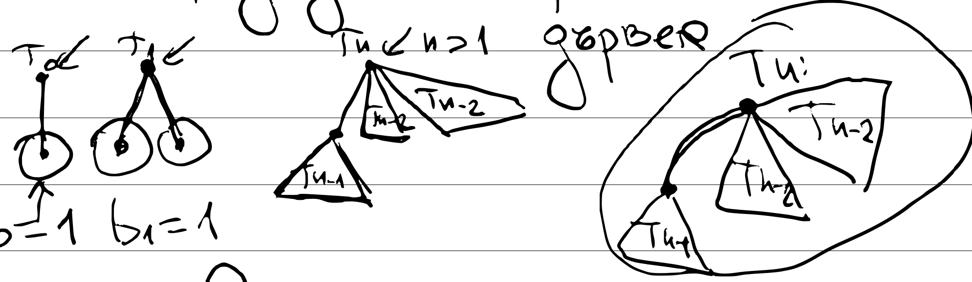
Всички съседи на v_0 са вътре в v_0

Нека i е мак. от големи индекс от v_0.

$i \geq d$ $\quad$ $i \geq d$

$$\underbrace{v_0 v_1 \ldots v_i v_0}_{d+1}$$

Зад. $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ - редица от коренови дървета



$b_0 = 1$ $b_1 = 1$

Намерете броя на вътрешните върхове за $n \in \mathbb{N}$: T_n.

def| **Листо** в дърво е връх от степен 1.
Ще се уговорим, че в кореновото дърво, ще считаме корена за вътрешен.

T_2: T_3:

...

$b_2 = 2 = 2 . b_0 - 1 + b_1$ $b_3 = 3 = 2 . b_1 - 1 + b_2$

$$\left|\begin{array}{l} b_n = 2 \cdot b_{n-2} - 1 \cdot 1^n + b_{n-1} \\ b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = 3 \end{array}\right.$$

$$\underline{x^2 - x - 2 = 0}$$

$$\{-1, 2\}_\mu \qquad \{1\}_\mu$$

$$b_n = (-1)^n \cdot A_1 + 2^n A_2 + A_3$$

$$\left|\begin{array}{l} b_0 = 1 = A_1 + A_2 + A_3 \\ b_1 = 1 = -A_1 + 2A_2 + A_3 \\ b_2 = 2 = A_1 + 4 \cdot A_2 + A_3 \end{array}\right. \rightarrow \quad \begin{array}{l} A_1 = 1/6 \\ A_2 = 1/3 \\ A_3 = 1/2 \end{array}$$

$$\boxed{b_n = \frac{(-1)^n + 3 + 2^{n+1}}{6}}$$

(302) Нека G е дърво. Покажете, че има един връх общ за всички най-дълги пътища в G

322 Док че ако в ориентиран тегловен граф има контур с отрицателно тегло, то има и прост контур с отрицателно тегло

3.27) Нека $G = \langle V, \mathcal{E} \rangle$ е ОГ, $|V| \geq 2$, т.ч.
$\forall u \forall v \, (u \neq v \rightarrow \langle u, v \rangle \in \mathcal{E} \vee \langle v, u \rangle \in \mathcal{E})$.
Док., че в G същ. хамилтонов път.

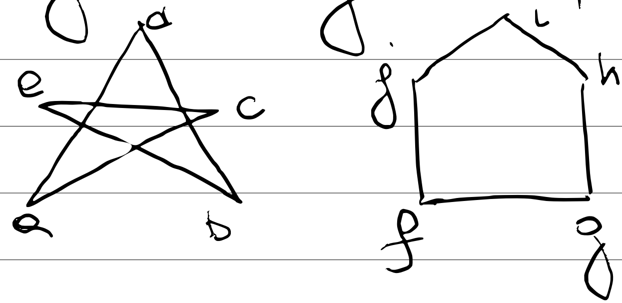
302) Квадрат със страна 1 метър е разделен на 100×100 = 10 000 квадратчета всяко със страна 1 см. Възможно ли е да се осветят 517 от малките квадратчета, т.е. всяко от осветяваните квадратчета да има едно или три осветени съседа (имат обща страна)?

Изоморфизъм м/у графи

def Нека $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ са два КНГ. $G_1 \cong G_2$, ако съществува функция $f: V_1 \to V_2$, такава че:

- f е биекция на V_1 в/у V_2;
- за всеки два върха $a, b \in V_1$, то $\{a, b\} \in E_1 \longleftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$

? Едни и същи ли са графите?



Да, нека $f: \{a, b, c, d, e\} \to \{i, j, h, f, g\}$

т.е. $f(c) = j$, $f(e) = h$, $f(d) = i$,

$f(a) = f$, $f(b) = g$.

f е биекция тривиално и запазва релацията „ребро" м/у върховете. Значи те са изоморфни.

Не може винаги толкова конкретно да го правим това доказателство за графи с много върхове.

Друго характеризиране на $\cong$ м/у графи са и следните условия:

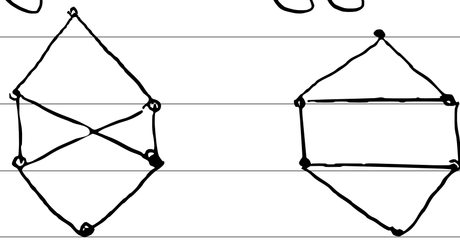
(i) Да имат равен брой върхове;

(ii) Да имат равен брой ребра;

(iii) Ако се наредят в две редици по големина степените на върховете на двата графа, то двете редици трябва да съвпадат.

(iv) Да имат един и същ брой на цикли от дадена дължина.

прим:



Изоморфни ли са?

Не - различават се в това, че един от тях съдържа цикъла C_5.

302) Пътна мрежа е м-во градове и шосета, като всяко шосе свързва два града. Пътната мрежа на някаква държава е такава, че от всеки град може да се стигне до всеки, но по единствен начин, и освен това броят шосетата е четно число. Докажете, че има поне един град, от който излизат четен брой шосета.

Нека $n \geq 2$.

302) Може ли плочките от домино с числа $\{0, \dots, n-1\} = M_n$ да се наредят (всичките) в кръгова наредба (първата и последната плочка са съседни).

Док., че такава наредба съществува т.с.т.к. n е нечетно.

М-во от плочки $\boxed{* \mid \#}$ където

- на мястото на $*$ и $\#$ седи точно едно число;
- за всяко $A \subseteq M$ и $|A| = 2$ съществува точно една плочка с тези числа
- за всяко $A \subseteq M$ и $|A| = 1$ съществува точно една плочка с това число.

(302) Докажете, че за всеки граф G (неориентиран без примки и кратни), то

$$\underbrace{\chi(G)}_{\text{върховото хроматично число}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}, \quad |E| = m$$

302) $G = \langle V, E \rangle$ е t-регулярен граф за $t > 0$, такъв, че най-малкия цикъл е с дължина 4.
Док., че $|V| = n \geq 2t$.