ДСТР

November 12, 2021

Още задачи с Принцип на Дирихле

- 7 чифта чорапи в чекмеджето. По един чифт от всеки цвят от дъгата. В тъмното колко най-малко трябва да извадите, че:

Още задачи с Принцип на Дирихле

- 7 чифта чорапи в чекмеджето. По един чифт от всеки цвят от дъгата. В тъмното колко най-малко трябва да извадите, че:
  - да изтегля един чифт

Още задачи с Принцип на Дирихле

- 7 чифта чорапи в чекмеджето. По един чифт от всеки цвят от дъгата. В тъмното колко най-малко трябва да извадите, че:
  - да изтегля един чифт
  - Ако има и същия набор ръкавици, колко предмета, да извадя, че да има комплект от 1 цвят

Задача 2

Шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа, колко най-малко да извадим, че да сме сигурни, че има:

- поне 2 едноцветни

Задача 2

Шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа, колко най-малко да извадим, че да сме сигурни, че има:

- поне 2 едноцветни
- поне 4 едноцветни

Задача 2

Шкаф с 10 сини и 20 червени чорапа, колко най-малко да извадим, че да сме сигурни, че има:

- поне 2 едноцветни
- поне 4 едноцветни
- поне 2 разноцветни

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.
Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.

Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$
- брой на познанства $1...n$

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.
Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$
- брой на познанства $1...n$
- Имам 2 случая

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.
Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, \ldots, a_n\}$
- брой на познанства $1 \ldots n$
- Имам 2 случая
  - Има човек непознаващ друг (познава само себе си) Тогава няма човек познаващ всички, отпада n като възможен изход.

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.
Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$
- брой на познанства $1...n$
- Имам 2 случая
  - Има човек непознаващ друг (познава само себе си)
    Тогава няма човек познаващ всички, отпада n като възможен изход.
  - Всеки познава поне 1 друг
    Отпада 1 като възможен изход

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.

Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$
- брой на познанства $1...n$
- Имам 2 случая
    - Има човек непознаващ друг (познава само себе си)
      Тогава няма човек познаващ всички, отпада n като възможен изход.
    - Всеки познава поне 1 друг
      Отпада 1 като възможен изход

Задача 3

В група от n души има поне 2-ма, които познават един и същи брой души.

Решение: Приемаме, че запознанството е рефлексивна и симетрична релация.

- n души $\{a_1, ..., a_n\}$
- брой на познанства $1...n$
- Имам 2 случая
  - Има човек непознаващ друг (познава само себе си)
    Тогава няма човек познаващ всички, отпада n като възможен изход.
  - Всеки познава поне 1 друг
    Отпада 1 като възможен изход

2 Остават n човека и n-1 възможен брой познанства.

Геометрична задача

Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната n. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки, то между някои 2 разстоянието ще е най-много 1.

Геометрична задача

Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната n. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки, то между някои 2 разстоянието ще е най-много 1.

Решение:

Геометрична задача

Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната n. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки, то между някои 2 разстоянието ще е най-много 1.

Решение:

Наблюдение – разстоянието между 2 точки в триъгълник не може да надхвърли най-голямата му страна.

- Режем

Геометрична задача

Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната n. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки, то между някои 2 разстоянието ще е най-много 1.

Решение:

Наблюдение – разстоянието между 2 точки в триъгълник не може да надхвърли най-голямата му страна.

- Режем
- $1 + 3 + ... + (2n - 1)$

Геометрична задача

Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната n. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки, то между някои 2 разстоянието ще е най-много 1.

Решение:

Наблюдение – разстоянието между 2 точки в триъгълник не може да надхвърли най-голямата му страна.

- Режем
- $1 + 3 + ... + (2n - 1)$
- n^2

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$ от 6 до 117
- колко триелементни множества има

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$ от 6 до 117
- колко триелементни множества има

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$ от 6 до 117
- колко триелементни множества има $\binom{10}{3}$

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, \ldots, 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$ от 6 до 117
- колко триелементни множества има $\binom{10}{3} = 120$

Игра

Вие и приятел играете следната игра:
Приятелят ви избира 10 числа между 1 и 40. Печелите, ако можете да намерите 2 различни тройки числа от избраните, чиято сума съвпада. Докажете, че винаги можете да спечелите играта, независимо от избора на другия играч.

Решение:

- Избор на играча от $\{1, ..., 40\}$
- За вашия избор $\{x, y, z\}$ със сума от $1 + 2 + 3$ до $40 + 39 + 38$ от 6 до 117
- колко триелементни множества има $\binom{10}{3} = 120$
- $120 > 117 - 6$

Делимост

Докажете, че между произволни $n + 1$ числа има 2, чиято разлика се дели на n.

Делимост

Докажете, че между произволни $n+1$ числа има 2, чиято разлика се дели на n.

Решение:

Делимост

Докажете, че между произволни $n + 1$ числа има 2, чиято разлика се дели на n.

Решение:

- Разглеждаме остатъците по модул n: $0, 1, ..., n - 1$

Делимост

Докажете, че между произволни $n + 1$ числа има 2, чиято разлика се дели на n.

Решение:

- Разглеждаме остатъците по модул n: $0, 1, ..., n - 1$
- имам $n + 1$ числа

Делимост

Докажете, че между произволни $n + 1$ числа има 2, чиято разлика се дели на n.

Решение:

- Разглеждаме остатъците по модул n: $0, 1, ..., n - 1$
- имам $n + 1$ числа
- 2 имат еднакъв остатък

Комбинаторика: Принципи

- Принцип на биекцията
  Ако между множествата A и B има биекция, то $|A| = |B|$

Комбинаторика: Принципи

- Принцип на биекцията
  Ако между множествата A и B има биекция, то $|A| = |B|$
- Принцип на събирането
  Ако $A_1, A_2, ..., A_n$ са крайни непресичащи се множества, то:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Комбинаторика: Принципи

- Принцип на биекцията
  Ако между множествата А и В има биекция, то $|A| = |B|$
- Принцип на събирането
  Ако $A_1, A_2, ..., A_n$ са крайни непресичащи се множества, то:
  $$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$
- Принцип на изваждането Ако А, В са крайни множества, то:
  $$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$$

Комбинаторика: Принципи

- Принцип на биекцията
  Ако между множествата A и B има биекция, то $|A| = |B|$
- Принцип на събирането
  Ако $A_1, A_2, ..., A_n$ са крайни непресичащи се множества, то:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

- Принцип на изваждането Ако A, B са крайни множества, то:

$$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$$

Комбинаторика: Принципи

- Принцип на биекцията
  Ако между множествата А и В има биекция, то $|A| = |B|$
- Принцип на събирането
  Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са крайни непресичащи се множества, то:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

- Принцип на изваждането Ако А, В са крайни множества, то:

$$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$$

$$|\overline{A}| = |U| - |A|$$

Още принципи

- Принцип на умножението Ако A, B са крайни множества, то:

$$|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Още принципи

- Принцип на умножението Ако A, B са крайни множества, то:

$$|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Още принципи

- Принцип на умножението Ако А, В са крайни множества, то:
$$|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$
Ако имаме да изберем n обекта от различни видове, първия по k1 начина, втория по к2 и т.н., то комплектът го избираме по $k_1.k_2....k_n$ начина

Още принципи

- Принцип на умножението Ако A, B са крайни множества, то:
$$|\bigtimes_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$
Ако имаме да изберем n обекта от различни видове, първия по k1 начина, втория по к2 и т.н., то комплектът го избираме по $k_1.k_2....k_n$ начина
- Принцип на делението
Нека R е релация на еквивалентност над A и всеки клас на еквивалентност има мощност m.
$$k = \frac{|A|}{m}$$
Където k е броят на класовете на еквивалентност.
С други думи, ако всеки обект е броен по m пъти, то истинският брой е привидният разделен на m.

Примерна задача

От град А до Б имаме три маршрута. А от Б до В имаме 2. По колко начина можем да стигнем от А до В, минавайки през Б?

- Всеки маршрут е наредена двойка

Примерна задача

От град А до Б имаме три маршрута. А от Б до В имаме 2. По колко начина можем да стигнем от А до В, минавайки през Б?

- Всеки маршрут е наредена двойка
- Ползваме принципа на умножението

Примерна задача

От град А до Б имаме три маршрута. А от Б до В имаме 2. По колко начина можем да стигнем от А до В, минавайки през Б?

- Всеки маршрут е наредена двойка
- Ползваме принципа на умножението
- Получаваме $3 * 2 = 6$

Пример 2

По колко начина може да се именува дете с първо име, състоящо се от 3 различни части, взети от списък от 30.

- Нека U е множеството от търсените имена.

Пример 2

По колко начина може да се именува дете с първо име, състоящо се от 3 различни части, взети от списък от 30.

- Нека U е множеството от търсените имена.
- $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, където A_i са имената с i части.

Пример 2

По колко начина може да се именува дете с първо име, състоящо се от 3 различни части, взети от списък от 30.

- Нека U е множеството от търсените имена.
- $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, където A_i са имената с i части.
- $A_i \cap A_j = \phi$, за $i \neq j$.

Пример 2

По колко начина може да се именува дете с първо име, състоящо се от 3 различни части, взети от списък от 30.

- Нека U е множеството от търсените имена.
- $U = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, където A_i са имената с i части.
- $A_i \cap A_j = \phi$, за $i \neq j$.
- Използваме принципа на събирането и умножението

$$|U| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 30 + 30.29 + 30.29.28$$