Нютонов бином и методи за доказателства на комбинаторни тъждества

★ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$, $\binom{n}{k} = C_n^k$

★ $\binom{n}{k}$ = # начини по които можем да изберем k скоби от n (от тях взимаме a-тата) $= C_n^k$

Th/ $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ т.е.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$$

Забл. 0^0 по принцип е неопр., но при работа с полиноми 0^0 се счита за 1.

Th| $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

перм. с повт.

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot x^k$

$\parallel$

$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \tilde{P}_n(k, n-k) \cdot x^{n-k}$

Обобщение:

$(x_1 + \dots + x_e)^n = \sum \tilde{P}_n(k_1, k_2, \dots, k_e) \cdot x_1^{k_1} \dots x_e^{k_e}$

$k_1, k_2, \dots, k_e$ – цели неотр.

$k_1 + k_2 + \dots + k_e = n$.

$e \geq 2$

Методи за доказателства на комбинаторни тъждества

В комбин. едно тъждество може да бъде доказано по формален начин (чрез заместване, еквивалентни преобразувания и т.н.), така и по чисто комбинаторен път чрез преброяване на елементите на подходяща избрана конфигурация по два различни начина. Тази техника е известна като принцип на двукратното броене.

Подходи:

* Чрез формулите за броя на съединенията
* Чрез разсъждение:

принципи за изчер. броене

  - Брои едно нещо два пъти
  - Брои елементите на две множества и построяване биекция

* Чрез Нютонов бином
* Чрез математическа индукция

зад. 10 Док., че: $C_n^k = C_n^{n-k}$

I начин:

$|A| = n$ $\qquad \binom{n}{k}$ - броя

$B \subseteq A$, $|B| = k$ $\rightsquigarrow$ $A \setminus B \subseteq A$, $|A \setminus B| = n-k$

еднозначно

прил. на биекц. $\qquad$ прил. на изв.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

II: n - човека ⟶ k комисия
⟶ n-k комисия

III начин: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

IV начин:

Зад. За $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, то

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

I начин: разписване ✓

II начин: $|A| = \binom{n}{k}$

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$A_1 \cup A_2 = A$

n - души избираме k.

Интересува ни конкретен човек.

От него гл. точка, то:

A_1: $\binom{n-1}{k-1}$ } сл.1 Той е избран и значи иеме още k-1 човека до изб. от n-1

A_2: $\binom{n-1}{k}$ сл.2 Той е пропуснат и изб. k човека от n-1

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Зад 3) Триъгълник на Паскал

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & n=0 \\ & & & & k=0\ 1 & & 1 & & & & n=1 \\ & & & k=0\ 1 & & 2 & & 1\ k=n & & & \\ & & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 & & \\ & 1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1 & \end{array}$$

n

k_n зависи от n k

k-ти елемент от n-тия ред е равен на $\binom{n}{k}$

Инд. по n.

База: $n=0$, $n=1$

$\binom{0}{0}=1$, $\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$

ИХ: $n-1$, $n>1$

Стъпка: $n-1 \mapsto n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1

$0!$

$0!\cdot 0!$

1 1

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Индукц:

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] =$$

$0: \binom{n}{0}$

$1: \binom{n}{1}$

...

$k: \binom{n}{k}$

$n: \binom{n}{n}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Зад 5) Принципа за вкл. и изкл. е равносилен на следното тъждество.

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} = 1$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

$x = -1$:

$$0 = 0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$-1 = -\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

$$1 = \binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n}$$

зад. 6 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k} 1^{k} = ?$

HW $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot(k+3)\cdot\binom{n}{k}\cdot 5^{k} = ?$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k$$

$$\left((1+x)^n\right)'_x = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\right)'_x$$

$$n\cdot(1+x)^{n-1}\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k\cdot x^{k-1}$$

за $x=1$

$$n\cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot k$$

Колко елемента средно има в едно подмн-во на n елем. мн-во?

$\binom{n}{1}$ = n мн-ва с 1 ел., = $\binom{n}{n-1}$ мн-ва с n-1 ел.

$\binom{n}{k}$ с k елем = $\binom{n}{n-k}$ мн-ва с n-k ел.

Т.е. средно елемента в мн-во имаме $\frac{n}{2}$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}}{2^n} \overset{?}{=} \frac{n}{2}$$

Зад 8 Док-те $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}.$

$2n$ деца $\underbrace{n \text{ момичета}}$ и $\underbrace{n \text{ момчета}}$

$\binom{2n}{n}$

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n (x+1)^n$$

$x^n:$ $\binom{2n}{n}$

$$\boxed{\binom{n}{k} \cdot x^k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} = \binom{n}{k}^2 \cdot x^n}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \underbrace{\binom{2n}{n}}$$

отдясно отляво

Зад. Док. комбинаторното тъждество:

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1},\ 0\le r\le n$$

a) с помощта на биномната ф-ла HW

b) чрез комбинаторни разсъждения

hint за a) използвайте сбор на геом. прогр:

$$\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$$

за $x\neq 0$

$n+1$ предмета

1 2 3 ... $n+1$

$$\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}$$

$k+1$ кой-голям номер на предмет, който ще изберем

Колко е броят на ест. числа в инт. $[0; 10^n - 1]$ записът на които в десетична бройна система не съдържа две еднакви съседни цифри?

$0 < m \leq n$

$10^n - 1$

$|A|$ – исканото

$|B|$ – има поне две съседни еднакви цифри

$|U| = 10^m$

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_{m-1}$

I-вата двойка цифри са еднакви

$B_i = 10^{m-1}$

$B_i \cap B_j = 10^{m-2}$

...

$|A| = |U| - |B|$

$B_1 \cap \ldots \cap B_{m-1} = 10^{m-(m-1)} = 10$

$$\binom{m-1}{0} 10^m - \left(10^{m-1} \cdot \binom{m-1}{1} - 10^{m-2} \cdot \binom{m-1}{2} + \ldots \right) =$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \cdot 10^{m-k} \cdot (-1)^k \cdot 9}{10}$$

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \left(\binom{m-1}{k} \cdot 10^{m-k} \cdot (-1)^k \cdot \frac{9}{10} \right) \right)$$