Зад. Нека фикс. $B \subseteq A$.
Де ф. R в/у $P(A)$:
$R = \{\langle X, Y \rangle \in P(A) \times P(A) \mid (X \Delta Y) \subseteq B\}$.
Док. че R е рел. на екв. и за всяко $X \in P(A)$ съществува точно едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

Зад. Сусе за ени $\langle A, < \rangle$:
- $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има мин. ел."$]$
- не е вярно, че същ. строго намаляв. редица $x_1 > x_2 > \dots$

$(\forall x \in A)[x < a \Rightarrow x = a]$ тогава $a \in A$ е мин. за A.

Зад. $\langle Fin(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ фундирано? добре наредено?

Зад. СУСЕ за чнм $\langle A, R \rangle$:

(1) • $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има R-мин. ел."$]$

(2) • не е вярно, че същ. строго намаляв. редица $x_{i+1} R x_i$ за $i = 0, 1, \dots$

$a \in A : (\forall x \in A)[x R a \Rightarrow x = a]$ тогава $a \in A$ е мин. ел. на A.

Д-во/ (1) → (2)

Нека (1) е в сила.

Искаме (2) за докажем.

Може $\neg(2) \to \neg(1)$.

Нека $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ е строго нам. R-редица. (безкрайно)

Значи $x_i \in A$ за $i = 0, 1, \dots$ Тогава

$B = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots\} \subseteq A$. Но B няма мин. елемент, което е точно $\neg(1)$.

Зад. СУСЕ за чнм $\langle A, R\rangle$:

(1) • $(\forall B \subseteq A)[B \neq \emptyset \Rightarrow$ "B има R-мин. ел."$]$

(2) • не е вярно, че същ. строго намаляв. редица $x_{i+1} R x_i$ за $i = 0, 1, \dots$

(2) → (1) Доп. $\neg(1)$

Нека $B \subseteq A$ произв. Нека още $\underbrace{B \neq \emptyset}_{\exists x (x \in B)}$.

Т.к.

Нека $x_0 \in B$ е свидетел.

Тъй като x_0 не е мин. $\Rightarrow$ има $x_1 : x_1 R x_0$.

Аналогично x_1 да е свидетел. Не е мин.

Значи има $x_2 : x_2 R x_1 R x_0$. Взимаме свидетел

и т.н.

(зад) Нека фикс. $B \subseteq A$.

Деф. R_B в/у $\mathcal{P}(A)$:

$R = \{ \langle X, Y \rangle \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid (X \Delta Y) \subseteq B \}$

Да се R е рел. на екв. и за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ съществува точно едно м-во $Y \in [X]_R$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

$B \subseteq A \to R_B : \langle X, Y \rangle \in R_B \iff (X \Delta Y) \subseteq B$

$X, Y \subseteq A$

(1) R_B е рел. на екв.

(2) за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ същ. точно едно м-во $Y \in [X]_{R_B}$, т.е. $Y \cap B = \emptyset$.

• $\forall x [x R_B x]$. За $X \in \mathcal{P}(A)$ произ.

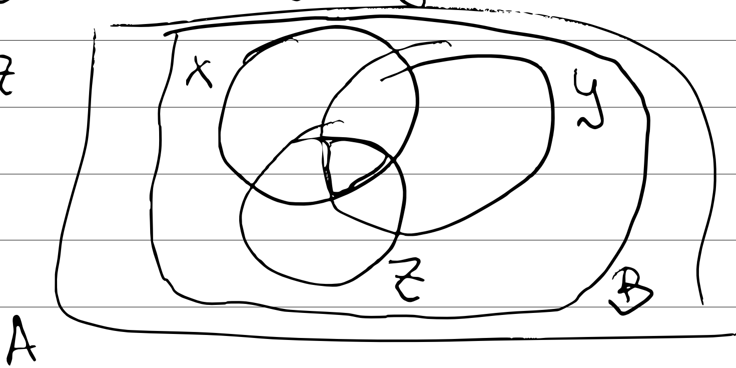
$\underbrace{X \Delta X = \emptyset \subseteq B}_{X R_B X}$.

Δ е симетрична

•• $\forall x \forall y [x R_B y \to y R_B x]$

(...) $\forall x \forall y \forall z \, [x R_B y \wedge y R_B z \to x R_B z]$

X, Y, Z



$X R_B Y$, $Y R_B Z$

$X \Delta Y \subseteq B$, $Y \Delta Z \subseteq B$ $\qquad$ $X \Delta Z \subseteq B$

Нека $t \in X \Delta Z = X \setminus Z \cup Z \setminus X$

сл.1 $t \in X \setminus Z \rightsquigarrow t \in X$ и $t \notin Z$

~~Тогава $t \in X \Delta Y = X \setminus Y \cup Y \setminus X$~~

сл.1.1 $t \notin Y \rightsquigarrow t \in X \Delta Y \subseteq B \rightsquigarrow t \in B$

сл.1.2 $t \in Y \rightsquigarrow t \in Y \setminus Z \subseteq Y \Delta Z \subseteq B \rightsquigarrow t \in B$

сл.2 $t \in Z \setminus X$ аналогичен.

(2) За всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ съществува точно едно м-во $Y \in [X]_{R_B}$ т.ч. $Y \cap B = \emptyset$.

$\langle Z, V \rangle \in R_B \iff Z \Delta V \subseteq B$.

Нека $X \subseteq A$ произв.

$[X]_{R_B} = \{ Y \mid Y \subseteq A, X \Delta Y \subseteq B \}$

$X \setminus Y \cup Y \setminus X = X \Delta Y$

$\exists$)

!)

Нека $Y \leftrightharpoons X \setminus B$.

$\emptyset = (X \setminus B) \setminus X \subseteq B$ и $\underbrace{X \setminus (X \setminus B)} \subseteq B$

$\boxed{!\ (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)}$

$B \setminus X$

$Y \in [X]_{R_B}$

$X \setminus B \cap B = Y \cap B = \emptyset$

Нека Y_1 и $Y_2 \in \mathcal{P}(A)$, т.ч. $Y_1 \Delta X \subseteq B$, $Y_2 \Delta X \subseteq B$, $Y_1 \cap B = Y_2 \cap B = \emptyset$

Цел: $Y_1 = Y_2$.

$Y_1 \Delta X \subseteq B$, $Y_2 \Delta X \subseteq B$, $Y_1 \cap B = Y_2 \cap B = \emptyset$

$Y_1 \setminus X \cup X \setminus Y_1$ $\quad$ $Y_2 \setminus X \cup X \setminus Y_2$

Нека $t \in Y_1$. Тогава

~~сл.1 $t \in X \Rightarrow t \in X \cap Y_1$~~

$Y_1 \cap B = \emptyset$ и $Y_2 \cap B = \emptyset$

$Y_1 \setminus X \cup X \setminus Y_1 \subseteq B$ $\quad$ $Y_2 \setminus X \cup X \setminus Y_2 \subseteq B$

$Y_1 \setminus X = \emptyset$ $\quad$ $Y_2 \setminus X = \emptyset$

$X \setminus Y_1 \subseteq B$ $\quad$ $X \setminus Y_2 \subseteq B$

$\Updownarrow$ $\quad$ $\Updownarrow$

$Y_1 \subseteq X$ $\quad$ $Y_2 \subseteq X$

$\hookrightarrow t \in X$.

Допускаме, че $t \notin Y_2$. Тогава $t \in X \setminus Y_2 \subseteq B$

Но $t \in Y_1$ и $Y_1 \cap B = \emptyset$

Т.к. допускането ни води до абсурд.

Това $t \in Y_2$. Аналогично за $t \in Y_2 \Rightarrow t \in Y_1$.

Това $Y_1 = Y_2$.

Функции

Специален вид релация: $f \subseteq A \times B$

изпълняваща условието $\quad f: A \to B$

$\forall x \forall y \forall y' (\langle x, y\rangle \in f \;\&\; \langle x, y'\rangle \in f \Rightarrow y = y')$

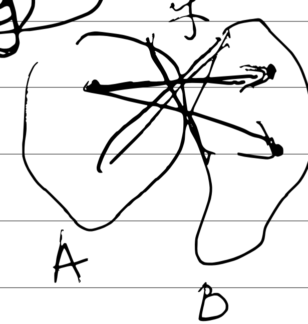
$\neg(\forall a \in A)$ $f(a)$ да е дефинир.

→ **Частични**: $Dom(f) \subseteq A$ → $f: A \rightharpoonup B$

Тотални: $Dom(f) = A$ $\quad f: A \to B$ [illegible]

$Dom(f) \subseteq \{x \mid (\exists y \in B)[f(x) = y]\}$

$Range(f) \subseteq \{y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y]\}$



$f(a) = y_1$

$f(a) = y_2$

$y_1 \neq y_2$

Инекция, сюрекция, биекция...

$Dom(f) \subseteq \{x \mid (\exists y \in B)[f(x) = y], x \in A\}$

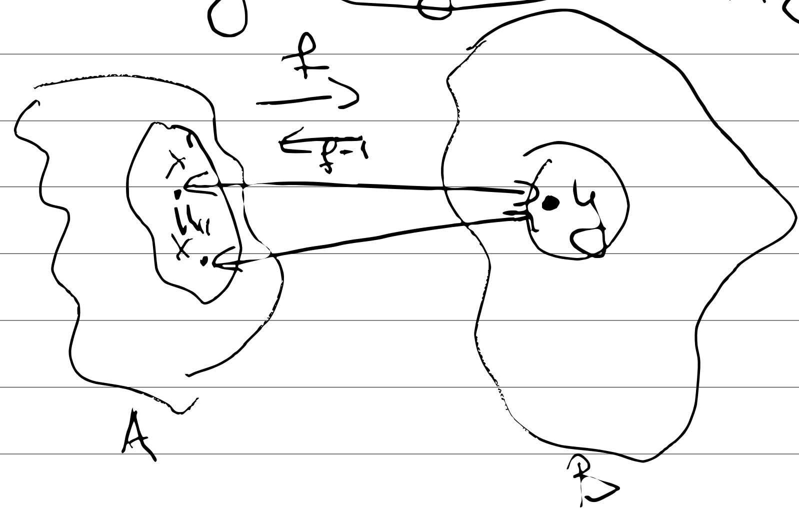
$Dom(f) \subseteq A$

$Range(f) \subseteq \{y \mid (\exists x \in A)[f(x) = y], y \in B\}$

$Range(f) \subseteq B$.

Инекция: З.о.ч $\quad f(x')=y$

$$\forall x' \forall x'' \forall y [\langle x', y\rangle \in f \wedge \langle x'', y\rangle \in f \rightarrow x'=x'']$$



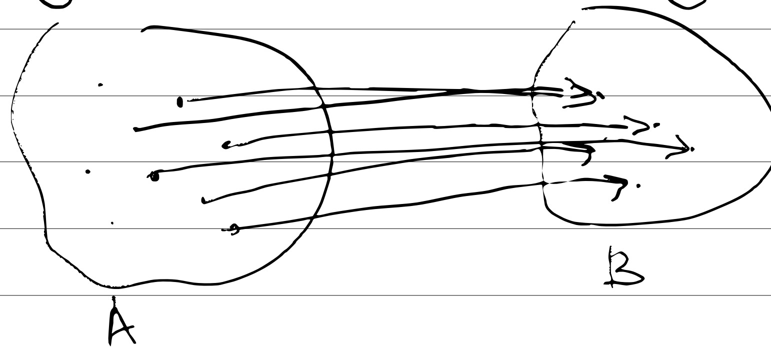
ТВ| Нека f е ф-я, $f: A \rightarrow B$.

Тогава: f е инекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е функция

! $\boxed{f \text{ е ф-я} \not\Rightarrow f^{-1} \text{ е ф-я}}$

Сюрекция: $f: A \to B$

$(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$



$Range(f) = B$

Биекция: $f: A \to B$, инекция и сюрекция.

ТВ1/ f е биекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е биекция

ТВ2/ f е биекция $\Leftrightarrow$ има $g: B \to A$ ф-я, т.ч.

$f \circ g = Id_B$ и $g \circ f = Id_A$

$Id_B : B \to B : Id_B(x) = x$ $\quad Id_A : A \to A$ $\quad Id_A(x) = x$

- f е инекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е ф-я
- f е биекция $\Leftrightarrow$ f^{-1} е биекция
- f е биекция $\Leftrightarrow$ има g $\overset{B \to A}{:}$ ф-я, т.ч. $f \circ g = Id_B$ и $g \circ f = Id_A$

Образ на м-во под ф-я: $f[X] \subseteq B$

ф-я

Прообраз: $f^{-1}[Y] \subseteq A$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$

$f^{-1}[Y]$

$x \in X$: $f(x) \in B$

$f[X] \leq \{f(x) \mid x \in X\}$

Какви са функциите?

1) $f(x) = 2x$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

2) $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3) $f: P^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ и $f(X) \leq \min_{\mathbb{N}} X$

4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$

3) $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$ и $f(X) \leq \min_{\mathbb{N}} X$, $X \subseteq \mathbb{N}$

4) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(x) = \langle x, x \rangle$ $\leq$

3) f инекция? $f(\{1, 2, 5\}) = 1$

$f(\{1, 2\}) = 1$

Значи f не е инекция.

f сюрекция?

$n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f(\underbrace{\{n\}}_{\in Dom(f)}) = n$

4) f инекция?

$n, m \in \mathbb{N}$: $f(n) \neq f(m)$?

$n \neq m$ $\quad \langle n, n \rangle \neq \langle m, m \rangle$

ТВ| $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x'$ и $y = y'$

Значи f е инекция.

$f(x) = \langle x, x \rangle \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Но $\langle 0, 1 \rangle$ $\underbrace{\text{няма прообраз}}_{\neg(\exists y \in \mathbb{N})[f(y) = \langle 0, 1 \rangle]}$.

Тогава f не сюрекция.

5) $f: \{0,1,\dots,8\} \to \{0,1,\dots,8\}$, $f(x) = 2x \bmod 8$

6) $f: (0;1)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

7) $f: \mathbb{R}^+ \to (0;1)_{\mathbb{R}}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

8) $f: (0;1)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x-1)} - 1, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ \dfrac{1}{2x+1} - 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\to$ f инекция ли е?

Нека $x, y \in (0;1)_{\mathbb{R}}$. Нека $f(x) = f(y) \overset{?}{\Rightarrow} x = y$

Сл. 1 $x = y = 1/2$

Сл. 2 $x \in (0; 1/2)_{\mathbb{R}}$, $y \in (1/2; 1)_{\mathbb{R}}$

$f(x) = \dfrac{1}{2x+1} - 1$ $\quad f(y) = \dfrac{1}{(2y-1)} - 1$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - 1 = f(y) = \frac{1}{2y-1} - 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2x + 1 = 2y - 1$$

$$2(x - y) = -2$$

$$\Updownarrow$$

$$x - y = -1$$

$y \in (1/2; 1)_{\mathbb{R}}$

$x \in (0; 1/2)_{\mathbb{R}}$

Абсурд

Значи $f(x) \neq f(y)$ за x и y в разл. инт.

сл3/ $x, y \in (0; 1/2)_{\mathbb{R}}$ / $(1/2; 1)_{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} - 1 \qquad f(y) = \frac{1}{2y+1} - 1$$

Ако $f(x) = f(y)$, то $x = y$

Значи е инекция f.

★ $r \in \mathbb{R}$ има ли $y \in (0; 1)_{\mathbb{R}}$, т.е. $f(y) = r$?

$$\forall x \forall x' \forall y \left(f(x) = y \wedge f(x') = y \rightarrow x = x' \right)$$

$$\forall x \forall x' \forall y \left(x \neq x' \rightarrow f(x) \neq f(x') \right)$$

Мощност на м-ва

Изброими и неизброими м-ва

$0 \leq \emptyset$

$n+1 \leq \{0,1,\dots,n\}$

М-вата A и B имат една и съща мощност/кардиналност, ако има биекция м/у тях.

М-вото A е крайно, ако има ест. число n т.ч. има биекция м/у A и $\{1,\dots,n\}$ или $A=\emptyset$.

Тогава $|A| = n$ за $n \geq 0$ се нарича брой на елем. на A.

М-вото A е изброимо безкр., ако има биекция м/у A и $\mathbb{N}$.

М-вото A е изброимо, ако е или крайно, или избр. безкр.

Ако A към B има инективна ф-я $f: A \to B$, значи

$|A| \leq |B|$

$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \to |A| = |B|$

Прим/ <u>изброими и неизброими м-ва</u>:

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ -> избр.

b) $\mathbb{R}, (0,1), \mathcal{P}(\mathbb{N})$ -> неизбр

c) $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ е неизбр.

d) Σ^* за Σ крайно е избр. $\Sigma = \{a, b\}, \Sigma^*$

e) $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ е неизбр. -> неизбр. много езици.

Зад. Док. че $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

Зад. Док. че м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^-$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

* Важно да се използва композиция на две биекции е биекция

!

(Зад) Докажете $|2\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}+1|$

Искаме $f : 2\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1$, т.ч.

- f е ф-я
- f е инекция
- f е сюрекция

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1, & 3, & 5, & 7, & 9, & \ldots \end{array}$$

$f(x) \leftrightharpoons x+1$

$y \in 2\mathbb{N}+1$, тогава $(\overbrace{y-1}^{x}) \in 2\mathbb{N}$ $f(\overbrace{y-1}^{x}) = y$

$y > 0$

Тв/ Ако $f : A \to B$ и $g : B \to C$ са две биекции, то $g \circ f$ е биекция.

зад. Док, че м-вата са изброими:

a) $2\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$

c) $\mathbb{Z}$

d) $2\mathbb{Z}+1$

e) $2\mathbb{Z}$

Важно да се използва композиция на две биекции е биекция !

?

$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{Z}+1$

Може от $g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ и $g_2 : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}+1$

$$g_1(x) = \begin{cases} x+1, & x \text{ четно} \\ -x, & x \text{ неч.} \end{cases} \qquad g_2(x) = 2x+1$$

Тогава $g_2 \circ g_1 : \mathbb{N} \to 2\mathbb{Z}+1$ и е биекция, ако докажете, че g_1, g_2 са биекции

$|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

Зад $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

a) $f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$

b) $f(x,y) = 2^x(2y+1) - 1$

c) $f(x,y) = 2x(2^y+1)$

Биекции ли са?

четв: 10 ÷ 14 ÷ 16

петък: 10 ÷ 13

петък: [illegible]
8 : 30 - 10
11 : 15 - 13

петък: 8 ÷ 10 - 30 1-100, зто и чта

сряда: