Пълни множества от булеви функции. Теорема на Бул

def/ Затворена обвивка на мн-во от бул. ф-ии $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е мн-вото $[F]$, което:

- $F \subseteq [F]$
- Нека f и g са произволни ф-ции от $[F]$. Нека $f \in \mathcal{F}_2^n$, $n \geq 1$. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f също се съдържа в $[F]$, за $1 \leq i \leq n$.
- $[F]$ е най-малкото мн-во по „$\subseteq$" с тези с-ва.

$$f \in \mathcal{F}_2^n \quad g(y_1, \dots, \underbrace{f(x_1, \dots, x_n)}_{i}, \dots, y_m) \in [F]$$

$$g \in \mathcal{F}_2^m$$

С-ва на затворената обвивка

За всяко $F \subseteq \mathcal{F}_2$: $\qquad [\cdot] : \smile \to \smile$

- $F \subseteq [F]$
- $F \subseteq G \to [F] \subseteq [G]$
- $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$
- $[[F]] = [F]$

def М-вото $A \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно, ако $[A] = \mathcal{F}_2$.

def Базис на $\mathcal{F}_2$ е м-во $F \subseteq \mathcal{F}_2$, т.ч. F е пълно и F е минимално вкл. с това с-во.

Th на Бул М-вото $\{\&, \vee, \neg\}$ от булеви функции е пълно.

$\{\&, \neg\}$, $\{\neg, \wedge\}$

Th Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно м-во и $G \subseteq \mathcal{F}_2$ и $F \subseteq [G]$. Тогава и G е пълно.

Зад. Покажете, че м-вото от булеви ф-ии G е пълно:

a) $G = \{\&, \neg\}$

b) $G = \{\vee, \neg\}$

c) $G = \{\mid\}$

d) $G = \{\downarrow\} \to$ Nor

e) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, \oplus\}$

f) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, x \oplus y \oplus z\}$

---

a) $B \subseteq [G]$ $\quad p \vee q \equiv \neg(\neg p \underset{\&}{\wedge} \neg q) \in [G]$

G е пълно

c) $p \mid p = \neg p$

$\mid$ ← Nand

$(p \mid q) \mid (p \mid q) = p \wedge q$

p	q	$\overset{(*)}{p \mid q}$	$(*) \mid (*)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

a) $\subseteq [G] \rightsquigarrow G$ е пълно

e) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, \oplus\}$

$$(p+q)\%2 = p \oplus q$$

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$p \oplus \tilde{1} = \neg p$$

a) $\subseteq [e)] \rightsquigarrow$ e) е пълна

f) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \wedge, p \oplus q \oplus r\}$

$$(p+q+r)\%2$$

$$p \oplus q = p \oplus q \oplus \tilde{0}$$

def | Нека $f(x_1, \dots, x_n) \neq \tilde{0}$ е булева ф-я.
Тогава дизюнктивна нормална форма на f е представяне на f като дизюнкция от елементарни конюнкции (т.е. саму от променливи свързителната връзка "v" са изградени дизюнкциите).
Аналогично конюнктивна нормална форма на f е представяне на f като конюнкция от елементарни дизюнкции

def | За променлива x и $\sigma \in \{0,1\}$ дефинираме
$$x^{\sigma} \leftrightharpoons \begin{cases} \bar{x} & \sigma = 0 \quad \neg x \\ x & \sigma = 1. \end{cases}$$

$\boxed{\bigstar\ x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma}$

def/ Нека $f(x_1, \dots, x_n) \neq \tilde{0}$ е двоична ф-я.

Дизюнктивната нормална форма

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee \left(x_1^{\sigma_1} \,\&\, \dots \,\&\, x_n^{\sigma_n} \right)$$

$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha) = 1]$$

се нарича Съвършена ДНФ за ф-ята f.

Аналогично

$$f(x_1, \dots, x_n) = \& \left(x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \right)$$

$$(\forall \alpha = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \in J_2^n)[f(\alpha) = 0]$$

се нарича Съвършена КНФ за ф-ята f.

Следствие от Th Бул.

$[\{\vee, \&, \neg\}]$ е пълно и

$(\forall f \in F_2)[f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\substack{f(\sigma)=1 \\ \sigma \in J_2^n}} (x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n})]$

$(\forall f \in F_2^n)[f(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}\limits_{\substack{f(\sigma)=0 \\ \sigma \in J_2^n}} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})]$

Т.е. всяка булева функция има СДНФ и СКНФ.

* Имаме биекция м/у F_2^n и съвършените ДНФ на тези ф-ции, освен константата 0. Тя няма СДНФ.
* Имената на всички променливи в СДНФ във всяка елементарна конюнкция се среща точно веднъж. Наричат се пълни тези елем. конюнкции. Аналогично за СКНФ и елементарните дизюнкции.

3ад. Да се напише в СДНФ и СКНФ на ф-ята f:

а) $f(\tilde{x}^3) \Leftrightarrow (x \oplus y) \to y \& z$

b) $f(\tilde{x}^3) \Leftrightarrow (01101100)$

c) $f(\tilde{x}^3) \Leftrightarrow (10001110)$

x y z	$x \oplus y$	$y \& z$	$(x \oplus y) \to y \& z$
000	0	0	1
001	0	0	1
010	1	0	0
011	1	1	1
100	1	0	0
101	1	0	0
110	0	0	1
111	0	1	1

$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$

$$f(\tilde{x}^3) = (\bar{x} \& \bar{y} \& \bar{z}) \vee (\bar{x}.\bar{y}.z) \vee (\bar{x}.y.z) \vee (x.y.\bar{z}) \vee (x.y.z)$$

$$f(x^3) = (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

b) $f(\tilde{x}^3) = (01101100)$

$$f(\tilde{x}^3) = (\bar{x} \cdot y \cdot z) \vee (\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}) \vee (x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}) \vee (x \cdot \bar{y} \cdot z)$$

$$f(\tilde{x}^3) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

302) Намерете дължината на СДНФ на f:

a) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$

b) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \,\&\, (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$

c) $f(\tilde{x}^n) \leftrightharpoons ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \,\&\, (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \dots \oplus x_n$

Дължината на СДНФ на ф-я ще представлява броя на пълните елементарни конюнкции в нея.

a) Нека $\alpha \in J_2^n$ $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$

$$f(\alpha) = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \% 2 = \begin{cases} 1, & w(\alpha) \text{ неч.} \\ 0, & w(\alpha) \text{ четно} \end{cases}$$

Т.е. дължината на СДНФ на f

$$\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

b) $f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$

e) $f(\tilde{x}^n) = ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)) \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus \dots \oplus x_n$

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in J_2^n$

$f(\alpha) = (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \wedge (\bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \dots \vee \bar{a}_n) =$

$= \begin{cases} 1, & a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n = 1 \text{ и } \bar{a}_1 \vee \bar{a}_2 \vee \dots \vee \bar{a}_n = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$f(\alpha) = 0 \iff \underbrace{\alpha = \langle 1, \dots, 1 \rangle}_{w(\alpha) = n}$ или $\underbrace{\alpha = \langle 0, \dots, 0 \rangle}_{w(\alpha) = 0}$

$2^n - 2$

$\tilde{1}, \tilde{0}$

c) $\alpha \in J_2^n$, $\alpha = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ $\langle 0,0,0 \rangle$

$= \langle 1,1,1 \rangle$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1, & \neg\left(\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \tilde{0}, \tilde{1} \text{ и } \left(w(\langle a_4, \dots, a_n \rangle) \% 2 = 0 \right) \right) \\ & \text{или} \\ & \left(\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \tilde{0} \text{ или } \tilde{1} \text{ и } w(\langle a_4, \dots, a_n \rangle) \% 2 = 1 \right) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\frac{2^{n-3}}{2} \cdot (2^3 - 2) + \frac{2^{n-3}}{2} \cdot 2$$

(392) Намерете броя на булевите функции на n променливи, чиито СДНФ удовл. условията:

а) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е равен на броя на променливите без отрицание

b) Всяка пълна конюкция в СДНФ съдържа поне две променливи с отриц.

c) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е нечетно число

d) Във всяка пълна конюкция на СДНФ броят на променливите с отрицание не е по-голям от броя на променливите без отрицание б) СДНФ не съдържа пълна конюнкция, в която броят на променливите с отриц. е равен на броя на променливите без отрицание

$$U = \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2^n, (\forall \alpha \in J_2^n)[w(\alpha) = n/2 \Rightarrow f(\alpha) = 0] \}$$

$2^{\binom{n}{n/2}}$ „балансиращи" ф-ции

$$\boxed{\underline{2^{2^n}} - 2^{\binom{n}{n/2}} - \underbrace{1}_{\tilde{0}}}$$

б) Всяка пълна конюнкция в СДНФ съдържа поне две променливи с отриц.

$A \leftrightharpoons \{ f \mid f \in F_2^n, (\forall \alpha \in J_2^n) [w(\overline{\alpha}) < 2 \Rightarrow f(\alpha) = 0] \}$

$w(\alpha) = n: \alpha = \overline{1} \rightarrow \overline{\alpha} = \overline{0}$

$w(\alpha) = n-1: \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

$n+1 \rightarrow$

$B \leftrightharpoons \neg A \rightarrow B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{n+1}$

1ви лош вектор $(w(\overline{\alpha}) < 2)$ участва с $f(\alpha) = 1$

$|B_i| = 2^{2^n - 1}$

$|B_i \cap B_j| = 2^{2^n - 2}$

$|B_1 \cap B_2 \cap \dots B_{n+1}| = 2^{2^n - (n+1)}$

$$|A| = \binom{n+1}{0} 2^{2^n} - \left(\binom{n+1}{1} \cdot 2^{2^n-1} - \binom{n+1}{2} \cdot 2^{2^n-2} + \ldots \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^i \cdot 2^{2^n - i}$$

c) СДНФ не съдържа никаква конюнкция, в която броят на променливите с отрица. е нечетно число

$$A = \{ f \mid f \in F_2^n \ \& \ (\forall \alpha \in J_2^n)[\omega(\tilde{\alpha})^0 \% 2 = 1 \Rightarrow f(\alpha) = 0]\}$$

броят на 0-лите в α е нечетно число

2^{n-1}

$$|A| = 2^{2^n} - \left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} (-1)^{i+1} \cdot \binom{2^{n-1}}{i} \cdot 2^{2^n - i} \right)$$

д) Във всяка нейна конюнкция на СДНФ броят на променливите с отрицание не е по-голям от броя на променливите без отрицание

$$A \leq \{ f \mid f \in F_2^n, (\forall \alpha \in J_2^n)[\, \underline{w(\bar{\alpha}) > w(\alpha)} \Rightarrow f(\alpha) = 0 \,] \}$$

n – четно $\binom{n}{\frac{n}{2}+i}$ $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$

нечетно $\binom{n}{\frac{n-1}{2}+i}$ $1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}+1$

брой вектори, в които има строго повече 0-ли отколкото 1-ци

$$m \leq \begin{cases} \sum_{i=1}^{n/2} \binom{n}{\frac{n}{2}+i}, & n \text{ четно} \\ \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}+1} \binom{n}{\frac{n-1}{2}+i}, & n \text{ нечетно} \end{cases}$$

брой на лъжите

000

$$\binom{3}{1+i} \quad 1 \leq i \leq 2$$

$$= \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4$$