300 Докажете, че в куба B^n има:

a) $n!$ различни строго нарастващи вериги с дължина n.

b) $k!(n-k)!$ различни нарастващи вериги с дължина n, съдържащи даден вектор $\alpha \in B^n_k$.

a) $\langle 0,0,\dots 0\rangle$ – n избора за стъпка „нагоре" на следващите вече $n-1$

$n-2$

$\vdots$

1

$\alpha \; \textcircled{\preceq} \; \beta$

$a_i \leq b_i \; (1 \leq i \leq n)$

$n.(n-1).(n-2)\dots 2.1 = n!$

b) $k!.(n-k)!$

$\langle 0,0\dots 0\rangle$ $\langle 1,1\dots 1\rangle$

Булеви (двоични) функции

Припомняне:

Двоични ф-ции на 1 променлива

x	$\tilde{0}$	x	$\bar{x}$	$\tilde{1}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

константа 0

id

отрицание на x

константа 1

C $\mathcal{F}_2 \leftrightharpoons \{ f : J_2^n \to J_2 \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \}$

м-вото от всички булеви ф-ции.

C $\mathcal{F}_2^n \leftrightharpoons \{ f : J_2^n \to J_2 \}$

м-вото от всички булеви ф-ции на n променливи.

$$|\mathcal{F}_2^n| = |\{ f(\tilde{x}^n) \mid f(\tilde{x}^n) \in \mathcal{F}_2^n \}| = 2^{2^n}$$

Двоични функции на 2 променливи

x	y	$\tilde{0}$	$x \& y$	$\neg(x \to y)$	x	$\neg(y \to x)$	y	$x \oplus y$	$x \vee y$	$x \downarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$\bar{y}$	$y \to x$	$\bar{x}$	$x \to y$	$x \mid y$	$\tilde{1}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$(x \& \bar{y})$

$(y \& \bar{x})$

XOR

$(x \& \bar{y}) \vee (\bar{x} \& y)$

стелка на Пирс

Nor

еквивал.

$(x \& y) \vee (\bar{x} \& \bar{y})$

чертата шефер

(Nand $x \& y$)

Свойства:

1. Комутативност:
   - $x \& y = y \& x$
   - $x \vee y = y \vee x$
   - $x \oplus y = y \oplus x$
2. Асоциативност
   - $(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$
   - $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
   - $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
3. Дистрибутивност
   - $x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$
   - $x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$
   - $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$
4. Идемпотентност
   - $x \& x = x$
   - $x \vee x = x$
   - $x \oplus x = \tilde{0}$
5. С-во на отрицанието
   - $x \& \bar{x} = \tilde{0}$
   - $x \vee \bar{x} = 1$
   - $x \oplus \bar{x} = \tilde{1}$

6) С-ва на константите

- $x \& \tilde{0} = \tilde{0}$
- $x \vee \tilde{0} = x$
- $x \oplus \tilde{0} = x$
- $x \& \tilde{1} = x$
- $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$
- $x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

7) Закон за двойното отр.

$\neg(\bar{x}) = x$

8) Закони на Де Морган

- $\neg(x \vee y) = \bar{x} \& \bar{y}$
- $\neg(x \& y) = \bar{x} \vee \bar{y}$

$x \oplus y = (x+y) \% 2$

392) Да се намери броят на:

а) двоичните функции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

б) —||— , които приемат стойност 1 на не малко от k вектора от стойности на променливите;

в) —||— , които са симетрични.

def | ф-я $f(x_1, .., x_n)$ е симетрична, ако $f(x_1, .., x_n) = f(x_{i_1}, .., x_{i_n})$ за всяка пермутация $i_1, .., i_n$ на индексите $1, 2, .., n$.

Т.е. функционалната ст-т зависи само от # на 1-ците.

Да се намери броят на:

а) двоичните функции на n променливи, които приемат противоположни стойности на всяка двойка противоположни вектори от стойности на променливите;

$$\alpha = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \to \bar{\alpha} = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$$

$$U \subseteq \{ f \in F_2^n \mid (\forall \alpha \in F_2^n)[f(\alpha) \neq f(\bar{\alpha})] \}$$

00

01

10

11

2^1 $\quad 2^2$

$$2^{2^n/2} = 2^{2^{n-1}} = |U|$$

b) —||— които приемат стойност 1 на най-много от k вектора от стойности на променливите ;

$$v_f \leftrightharpoons \langle f(0,0,\ldots 0), f(0,\ldots,1), \ldots, f(1,1,\ldots 1) \rangle$$

вектор стойн.

$$\mathcal{U} = \{ f \in \mathcal{F}_2^{\overline{2^n}} \mid 0 \leq \omega(v_f) < k \}$$

$$|\mathcal{U}| = \sum_{m=1}^{k-1} \binom{2^n}{m}$$

е) —||— , които са <u>симетрични</u>.

<u>**def**</u> | ф-я $f(x_1, .., x_n)$ е <u>симетрична</u>, ако
$$f(x_1, .., x_n) = f(x_{i_1}, .., x_{i_n})$$ за всяка пермутация $i_1, .., i_n$ на индексите $1, 2, .., n$.

Т.е. <u>функцията ѝ зависи само от # на 1-ците.</u>

$$0 \le w(\alpha) \le n$$

$$U = \{ f \in \mathcal{F}_2^n \mid f \text{ е симетрична} \}$$

$$|U| = 2^{n+1}$$

def | Фиктивна променлива в бул. ф-я.

Променливата x_i е фиктивна за ф-я $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ за всеки вектор α от J_2^n $\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.ч.

$f(\alpha) = f(\alpha')$.

def | Съществена променлива в бул. ф-я

Пром. x_i е съществена за ф-я $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ $\Leftrightarrow$ за някой вектор α от J_2^n

$\alpha = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$,

$\alpha' = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, т.ч.

$f(\alpha) \neq f(\alpha')$.

Т.е. съществената променлива не е фиктивна за f.

309 Да се намери броят на двоичните ф-ции на n променливи, които зависят съществено от всичките си променливи.

$\mathcal{U} \leftrightharpoons \mathcal{F}_2^n \quad |\mathcal{U}| = 2^{2^n}$

$A \leftrightharpoons \{ f \mid f \in \mathcal{F}_2^n \ \& \ (\forall i \in \{1, \dots, n\}) [\text{„}x_i \text{ е същ.“}] \}$

$B \leftrightharpoons \neg A \qquad A \cap B = \emptyset$

$B = B_1 \cup \dots \cup B_n$

„x_1 не същ.“

$|B_i| = 2^{2^{n-1}}$

$|B_i \cap B_j| = 2^{2^{n-2}}$

....

$|B_1 \cap \dots \cap B_n| = 2^{2^0} = 2$

$\tilde{0}, \tilde{1}$

$|\mathcal{U}| = |A \cup B| = |A| + |B|$

$\underbrace{|A| = |\mathcal{U}| - |B|} = \binom{n}{0} 2^{2^n} - \left(\binom{n}{1} 2^{2^{n-1}} + \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 2^{2^{n-n}} \right) =$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \cdot 2^{2^{n-i}}$

(зад) Определете фиктивните и съществените променливи на ф-ята f

a) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (x \to (x \vee y)) \to z$ $\vdash \neg(x \to (x \vee y)) \vee z$

b) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (11110000)$ $\vdash (x \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee z$

c) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00110011)$ $\vdash z$ a) x и y са фикт.

d) $f(\tilde{x}^3) \leftrightharpoons (00111100)$

x y z	f(x,y,z) (b)	d)
0 0 0	1	0
0 0 1	1	0
0 1 0	1	1
0 1 1	1	1
1 0 0	0	1
1 0 1	0	1
1 1 0	0	0
1 1 1	0	0

$\Rightarrow$ y, z - фикт.

$\Rightarrow$ z е фикт.

Композиции и формули над множество от булеви функции

Един от начините за проверка на еквивалентност на ф-ли е табличния метод.

Зад. Постройте таблицата на ф-ята f, представена чрез формулата φ над множеството от свързители връзки $F = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \rightarrow, \downarrow, \mid, \leftrightarrow\}$.

a) $\varphi \rightleftharpoons (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow x))$

b) $\varphi \rightleftharpoons \neg(\bar{x} \vee y) \vee ((x \,\&\, \bar{z}) \downarrow (x \leftrightarrow y))$

c) $\varphi \rightleftharpoons \bar{x} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow (y \oplus (x \,\&\, z)))$

d) $\varphi \rightleftharpoons (((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$

d) $\varphi \Leftrightarrow ((((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z \dashv\vdash x \wedge y \wedge \overline{z}$

Nand Nor

x	y	z	$x \mid y$	$(x \mid y) \downarrow z$	$((x \mid y) \downarrow z) \mid y$	$(((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0

302) Еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ?

a) $\varphi \leftrightharpoons ((x \vee y) \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z))$ и

$\psi \leftrightharpoons (x \leftrightarrow y) \models\!\mid (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

b) $\varphi \leftrightharpoons ((x \to y) \to z)$ и $\psi \leftrightharpoons x \to (y \to z)$

a) $(x \vee y \vee z) \to ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \models\!\mid$

$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \models\!\mid$

$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee x \vee (y \wedge z) \models\!\mid$

$((x \vee \bar{x}) \wedge (\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{z} \vee x)) \vee (y \wedge z) \models\!\mid$

$\models\!\mid ((\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{z} \vee x)) \vee (y \wedge z)) \models\!\mid$

$\models\!\mid ((\bar{y} \vee x \vee (y \wedge z)) \wedge (\bar{z} \vee x \vee (y \wedge z))) \models\!\mid$

и т.н.

$\varphi \Leftrightarrow ((x \vee y) \vee z) \rightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z))$ u

$\psi \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y)$

x	y	z	$(x \vee y \vee z)$ (*)	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ (#)	$(*) \Rightarrow (\#)$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Зад Използвайки с-вата на операциите, проверете еквивалентни ли са ф-лите φ и ψ:

a) $\varphi \leftrightharpoons (\bar{x} \,\&\, \bar{z}) \vee (x \,\&\, \bar{y}) \vee (x \,\&\, \bar{z})$ и

$\psi \leftrightharpoons x \,\&\, \neg(y \,\&\, z) \vee (\bar{x} \,\&\, \bar{z})$

b) $\varphi \leftrightharpoons (x \to y) \to ((x \,\&\, \bar{y}) \oplus (x \leftrightarrow \bar{y}))$ и

$\psi \leftrightharpoons (x \vee y) \,\&\, (\bar{x} \vee \bar{y})$

b) $(x \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) \models\!\dashv$

$\models\!\dashv \underbrace{((\underbrace{x \wedge \bar{x}}_{\tilde{0}}) \vee x \wedge \bar{y})}_{x \wedge \bar{y}} \vee \underbrace{((y \wedge \bar{x}) \vee (\underbrace{y \wedge \bar{y}}_{\tilde{0}}))}_{y \wedge \bar{x}} \models\!\dashv$

$\models\!\dashv (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \models\!\dashv x \oplus y \models\!\dashv x \leftrightarrow \bar{y}$

$$\varphi \leq (x \to y) \to \left((x \,\&\, \bar{y}) \oplus \underline{(x \Leftrightarrow \bar{y})}\right) \dashv\vdash$$

$$(x \wedge \bar{y}) \vee \left(\underline{(x \wedge \bar{y})} \oplus (x \Leftrightarrow \bar{y})\right) \dashv\vdash$$

$$\underline{(x \wedge \bar{y})} \vee \left(\underline{(x \wedge \bar{y}) \wedge (x \Leftrightarrow \bar{y})}\right) \vee \left(\underline{(x \wedge \bar{y}) \wedge (x \Leftrightarrow \bar{y})}\right)$$

$$\dashv\vdash (x \wedge \bar{y}) \vee \underline{(x \Leftrightarrow \bar{y})} \vee \left(\underline{(x \wedge \bar{y})} \wedge \underline{(x \Leftrightarrow \bar{y})}\right) \dashv\vdash$$

$$\dashv\vdash (x \wedge \bar{y}) \vee \underline{(x \Leftrightarrow \bar{y})} \vee \underline{(x \wedge \bar{y})} \dashv\vdash$$

$$(x \wedge \bar{y}) \vee \underline{(x \Leftrightarrow \bar{y})} \dashv\vdash$$

$$\dashv\vdash \underline{(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)} \vee (x \wedge \bar{y}) \dashv\vdash (x \Leftrightarrow \bar{y}) \dashv\vdash x \oplus y$$

Пълни множества от булеви функции. Теорема на Пост

def Затворена обвивка на м-во от бул. ф-ии $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е м-вото $[F]$, което:

- $F \subseteq [F]$
- Нека f и g са произволни ф-ии от $[F]$. Нека $f \in \mathcal{F}_2^n$, $n \geq 1$. Тогава композицията на g на мястото на i-тата променлива на f също се съдържа в $[F]$, за $1 \leq i \leq n$.
- $[F]$ е най-малкото м-во по „$\subseteq$" с тези св-ва.

$$f \in \mathcal{F}_2^n \quad g(y_1, \ldots, \underbrace{f(x_1, \ldots, x_n)}_{i}, \ldots, y_m) \in [F]$$

$$g \in \mathcal{F}_2^m$$

С-ва на затворената обвивка

За всяко $F \subseteq \mathcal{F}_2$:

- $F \subseteq [F]$
- $F \subseteq G \rightarrow [F] \subseteq [G]$
- $[F] \cup [G] \subseteq [F \cup G]$
- $[[F]] = [F]$

def/ М-вото $A \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно, ако $[A] = \mathcal{F}_2$.

def/ Базис на $\mathcal{F}_2$ е м-во $F \subseteq \mathcal{F}_2$, т.ч. F е пълно и F е минимално вкл. с това с-во.

Th на Бул/ М-вото $\{\&, \vee, \neg\}$ от булеви функции е пълно.

$\{\&, \neg\}$, $\{\neg, \vee\}$

Th/ Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$ е пълно м-во и $G \subseteq \mathcal{F}_2$ и $F \subseteq [G]$.

Тогава и G е пълно.

392) Покажете, че м-вото от булеви ф-ии G е пълно:

a) $G = \{\&, \neg\}$

b) $G = \{\vee, \neg\}$

c) $G = \{\mid\}$

d) $G = \{\downarrow\}$

e) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, \oplus\}$

f) $\{\tilde{0}, \tilde{1}, \&, x \oplus y \oplus z\}$