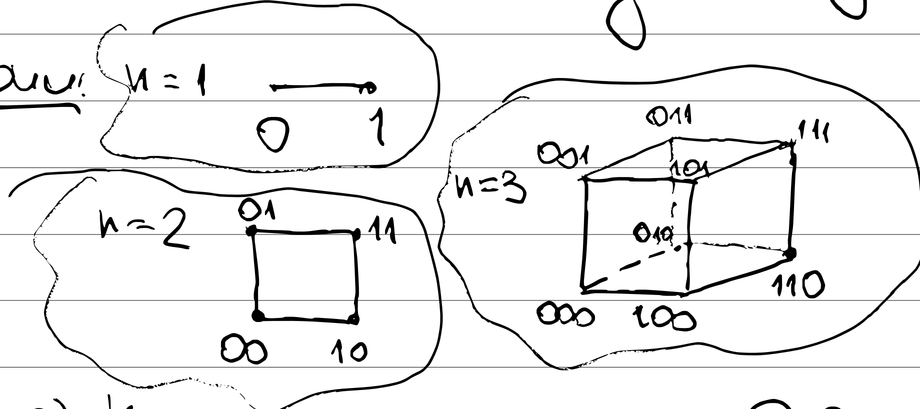
(302) Хиперкуб (n-мерен куб):

- върхове: всички наредени n-орки от 0-ли и 1-ци;
- ребра: има м/у върхове, които се различават само в една позиция

при:



а) Колко върха има хиперкуб?

n $\quad n>0 \quad\quad 2^n$

$0\,(n-1) \quad \overset{n}{\tilde{1}}(n-1) \quad\quad 2.2.2\ldots 2$

n $\quad$ ↑

= възможности

b) Колко ребра има хиперкуба?

I предл. $2^n - 1$

1 връх има n съседа

$\underbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}$

$$\frac{2^n \cdot n}{2} = 2^{n-1} \cdot n$$

c) 000 ↘ 1 цифр.
001 ↘ 2 цифри
010 ↘ 3 цифри
100

Подредете n-торките, т.ч. всеки две съседни n-торки (и също и първо и последно) да се различават само в 1 позиция.

$n=1$: $0 \to 1$

$n=2$: $00 \to 01 \to 11 \to 10$

$n=3$: $000 \to 001 \to 011 \to 010 \to 110 \to 111 \to 101 \to 100$

База: $n=1$

за $n>0$ е в сила

За $n \mapsto n+1$, взимаме една наредба за n и 2 копия. На върховете в първото заделяме „0" като префикс и „1" на тези във второто копие и ги слепваме като картинката $n=3$.

6) Принцип на включване и изключване

$$\begin{cases} |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + \\ \quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + \\ \quad + |A \cap B \cap C| \end{cases}$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{(n+1)} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Зад. В група от 20 студенти футбол играят 9, волейбол – 7 и 4-ма волейбол и футбол.
Колко студенти не играят нито футбол, нито волейбол?

U – 20 студенти, $|U| = 20$

$Ф$ – играят фут., $|Ф| = 9$

$В$ – играят вол, $|В| = 7$

$Ф \cap В$ – играят двете, $|Ф \cap В| = 4$

$|Ф \cup В| = ?$

$|U| - |Ф \cup В| = ?$ Отговор на задачата

$|Ф \cup В| = |Ф| + |В| - |Ф \cap В| = 9 + 7 - 4 = 12$

$|U| - |Ф \cup В| = 20 - 12 = \underline{8}$

зад. В група от студента всеки знае поне един чужд език, като 13 знаят английски 25-френски, 21-немски, 7-англ. и немски, 13-англ. и френски, 9-френски и немски, 3-англ, фр. и нем. Колко студента има в групата.

$|Ф| = 25$ $\quad |А \cap Н| = 7$ $\quad |А \cap Н \cap Ф| = 3$

$|Н| = 21$ $\quad |А \cap Ф| = 13$

$|А| = 13$ $\quad |Ф \cap Н| = 3$

$$|U| = |Ф \cup Н \cup А| = |Ф| + |Н| + |А| - |А \cap Н| - |А \cap Ф| - |Ф \cap Н| + |А \cap Н \cap Ф| =$$

$$= 25 + \underbrace{21 + 13}_{40} \underbrace{- 7 - 13}_{-20} \underbrace{- 3 + 3}_{-6} = 39$$

5

Зад. Да се намери броят на m-цифр. цели неотрицателни десетични числа, които съдържат всяка от цифрите $0, 1, \ldots, 9$ поне веднъж, като се допуска число да започва с нула.

U – всички възможни m циф. числа съставени с $\{0, 1, \ldots, 9\}$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = U$

A – –II– всяка цифра се среща поне веднъж

B – –II– има цифра, която не се среща.

$B = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_9$

B_i – цифрата i не среща в записа на числата

$$|U| = 10^m$$

$$|B_i| = (10-1)^m = 9^m \qquad i \quad 0,\dots,9$$

$$|B_i \cap B_j| = (10-2)^m = 8^m \qquad i \neq j$$

$$\dots\dots$$

$$|B_0 \cap \dots \cap B_9| = (10-10)^m = 0^m$$

$$|B| = |B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_9| = \sum_{i=0}^{9} |B_i| - \sum_{\underline{0 \le i < j \le 9}} |B_i \cap B_j| + \dots + (-1)^{11} |B_0 \cap B_1 \cap \dots \cap B_9| =$$

$$= \binom{10}{\underline{1}} \cdot 9^m - \binom{10}{\underline{2}} \cdot 8^m + \dots + (-1)^{11} \binom{10}{10} \cdot 0^m =$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot (10-k)^m \qquad \binom{10}{0} \cdot (-1)^0 \cdot (10-0)^m$$

$$|A| = |U| - |B| = 10^m - \sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1} \cdot \binom{10}{k} \cdot (10-k)^m =$$

$$= \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \cdot \binom{10}{k} \cdot (10-k)^m$$

зад) Да се намери броят на n-цифр. цели неотрицателни десетични числа, които съдържат всяка от цифрите 0, 1, ..., 9 поне веднъж, като се допуска число да започва с нула.

зад. Да се намери броя на разположенията на числата 1, 2, ..., n в n позиции, при които никое число $i \in \{1, ..., n\}$ не е на позиция с номер i.

$\{a_1, \dots, a_n\} = \{1, \dots, n\}$

$a_1 \; a_2 \dots a_n$

$1 \;\; 2 \;\; \dots \;\; n$

$a_i \neq$ позиция, на която е поставена

$|U| = n!$

$\hookrightarrow$ A – търсеното

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B = U$

$\hookrightarrow$ B – има поне едно число, което си е на позицията

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$

B_i – пермутациите, в които числото i си е на мястото.

$|B_i| = (n-1)!$

$|B_i \cap B_j| = (n-2)!$

$|B_i \cap B_j \cap B_k| = (n-3)!$

$\ldots$

$|B_1 \cap \ldots \cap B_n| = (n-n)!$

$|U| = n!$

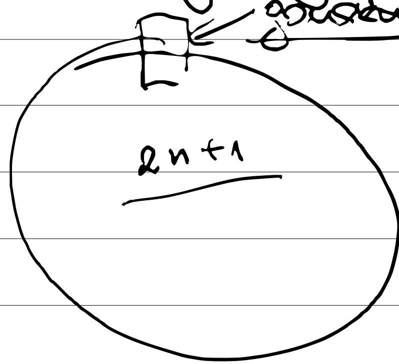
$$|A| = |U| - |B| = n! - \left(\sum_{k=1}^{n} |B_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |B_i \cap B_j| + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{n+1} |B_1 \cap \ldots \cap B_n| \right) =$$

$$= \binom{n}{0} n! - \binom{n}{1} \cdot (n-1)! + \binom{n}{2} \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^n \cdot (n-n)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot (n-k)!$$

Зад. На обед били поканени n двойки бивши съпрузи. По колко начина може да се разположат около кръглата маса с 2n места и едно място за домакиня, така че никои два бивши съпрузи да не са един до друг.



домакиня от негова гледна точка всъщност масата става една голяма пейка.

Домакинът може да седне на 2n+1.

~~Като имаме 1 пейка ул. на 2n~~

U - всички възможни разположения на 2n души на пейка

$U = A \cup B$, $\emptyset = A \cap B$

A - търсено

B - има поне една двойка души седнали един до друг.

двойка 1 един до друг

$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

$|U| = (2n)!$

$|B_i| = (2n-1)! \cdot 2$

$|B_i \cap B_j| = (2n-2)! \cdot 2^2$

...

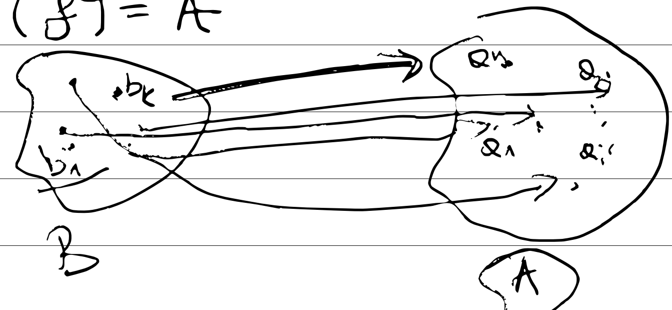
$|B_1 \cap \ldots \cap B_n| = (2n-n)! \cdot 2^n$

$$|A| = |U| - |B| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot (2n-k)! \cdot 2^k$$

$(2n+1) \cdot |A|$

320. Да разгл. ф-циите $f: B \to A$ за $|B| = k$, $|A| = n$.
Колко са сюрективните ф-ции? $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

$Range(f) = A$



U – всички ф-ции от B в A

$A \cup B$ A – всички сюрекции

$A \cap B = \emptyset$ B – всички не сюрективни ф-ции

$B = B_1 \cup \dots \cup B_n$

B_i – a_i не е покрито от някое b_j

$|U| = n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

b_1 избор, за b_2 изб., за b_k избор.

$$|B_i| = (n-1)^k$$

$$|B_i \cap B_j| = (n-2)^k$$

$$|B_1 \cap \cdots \cap B_n| = (n-n)^k$$

$$|A| = |U| - |B| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \binom{n}{i} \cdot (n-i)^k$$

1. Нека A е м-вото от всички ест. числа от 1 до 100 вкл. Колко са ненамаляващите ф-ции от вида $f: A \to A$?
$f(1) \leq f(2) \ldots$

2. Колко петцифрени числа могат да се образуват с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, ако последните три цифри на всяко число поне една е четна и поне една е нечетна?

3. Нека A и B са м-ва, за които $|A| = n > 0$, $|B| = m > 0$ и $A \cap B = \emptyset$. Колко са подмн-вата X на $A \cup B$ т.ч. $X \cap A \neq \emptyset$ и $X \cap B \neq \emptyset$? $X \subseteq A \cup B$

③ Нека A и B са м-ва за които $|A| = n > 0$, $|B| = m > 0$ и $A \cap B = \emptyset$. Колко са подмн-вата X на $A \cup B$ т.ч. $X \cap A \neq \emptyset$ и $X \cap B \neq \emptyset$? $X \subseteq A \cup B$

$X \subseteq A \cup B \quad X \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$X \cap A \neq \emptyset$,

$X \cap B \neq \emptyset$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$

$|\mathcal{P}(B)| = 2^m$

$|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{n+m}$

$A \cap B = \emptyset$

$n - 1$

C - търсените

D - $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ и $(\overbrace{X \cap A = \emptyset}^{X \subseteq B}$ или $\overbrace{X \cap B = \emptyset}^{X \subseteq A})$

$|D| = 2^n + 2^m - 1$

$D_A \cup D_B$

за реди $\emptyset \to \subseteq A$, $\emptyset \to \subseteq B$

$$|C| = |U| - |D| = 2^{n+m} - 2^n - 2^m + 1 =$$
$$= 2^n \cdot 2^m - 2^n - 2^m + 1 = 2^n(2^m - 1) - 2^m + 1 =$$
$$= (2^n - 1)(2^m - 1)$$

(2) Колко петцифрени числа могат да се образуват с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6, ако последните три цифри на всяко число поне една е четна и поне една е нечетна?

$\sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup\ \sqcup$

6

$|U| = 6 \cdot 7^4$

$A \cup B = U, \quad A \cap B = \emptyset$

A - търсено

B - посл. три цифр. на всяко да е или само с неч. или само с четни цифри

$\to B_ч \cup B_н, \quad |B_ч| = 6 \cdot 7 \cdot 4^3, \quad |B_н| = 6 \cdot 7 \cdot 3^3$

$|A| = |U| - |B| = 6 \cdot 7^4 - 6 \cdot 7 \cdot 3^3 - 6 \cdot 7 \cdot 4^3 =$

$=$