

Решения на задачи от тренировка/контролно 1 по Логическо програмиране

21 ноември 2020

1 Определелимост

Нека \mathcal{L} е език с формално равенство, един двуместен функционален символ cat и един двуместен предикатен символ p .

Структурата \mathcal{S} за езика \mathcal{L} има носител $W = \{0, 1, 2, 3, 4\}^*$ – множеството от думи от 0, 1, 2 и 3 – и интерпретации на cat и p :

$$cat^{\mathcal{S}}(u, v) = w \Leftrightarrow u \circ v = w,$$
$$p^{\mathcal{S}}(u, v) \Leftrightarrow \forall i \leq |u| \left(v_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } u_i > 1 \\ 0, & \text{ако } u_i \leq 1 \end{cases} \right),$$

където u_i (v_i) означава i -тата буква на u (v). Да се докаже, че в \mathcal{S} са определими:

- $Pref = \{(u, v) \in W^2 \mid u \text{ е префикс на } v\}$.
- ε и множеството от еднобуквени думи над W .
- $EqLen = \{(u, v) \in W^2 \mid |u| = |v|\}$.

За думи с равна дължина $u = a_1a_2 \dots a_n$ и $v = b_1b_2 \dots b_n$ с $u \sqcup v$ означаваме думата:

$$u \sqcup v = a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n.$$

Вярно ли е, че множеството

$$\{(u, v, w) \in W^3 \mid |u| = |v| \& w = u \sqcup v\}$$

е определимо в \mathcal{S} ? Защо?

Да се намери с доказателство броят на различните автоморфизми на структурата \mathcal{S} .

Примерно решение

$$Pref(u, v) \Leftrightarrow \exists w(cat(u, w) \dot{=} v).$$

$$Suff(u, v) \Leftrightarrow \exists w(cat(w, u) \dot{=} v).$$

$$Infix(u, v) \Leftrightarrow \exists w(Pref(w, v) \& Suff(u, w)).$$

$$\varphi_\epsilon(u) \Leftrightarrow \forall v(cat(u, v) \dot{=} u).$$

$$\varphi_1(u) \Leftrightarrow \forall v(Pref(u, v) \Rightarrow \varphi_\epsilon(v) \vee v \dot{=} u).$$

$$\varphi_2(u) \Leftrightarrow \forall v(Pref(u, v) \Rightarrow \varphi_\epsilon(v) \vee \varphi_1(v) \vee v \dot{=} u).$$

$$\varphi_{LLCV}(u, v) \Leftrightarrow p(u, v) \& \forall w(p(u, w) \Rightarrow Pref(v, w)).$$

Където $\varphi_{LLCV}(u, v)$ значи, че взимаме най-късият характеристичен вектор на u генерирано от предиката $p^{\mathcal{S}}$.

$$\begin{aligned} EqLen(u, v) \Leftrightarrow \exists w_1 \exists w_2 (\varphi_{LLCV}(u, w_1) \& \varphi_{LLCV}(v, w_2) \& \\ \exists w_3 \exists w_4 (\varphi_{LLCV}(w_1, w_3) \& \varphi_{LLCV}(w_2, w_4) \& w_3 \dot{=} w_4)). \end{aligned}$$

$$\varphi_{2letterWord}(u, a, b) \Leftrightarrow \varphi_2(u) \& Pref(a, u) \& \varphi_1(a) \& Suff(b, u) \& \varphi_1(b).$$

Където $\varphi_{2letterWord}(u, a, b)$ дефинира множеството:

$$\{\langle u, a, b \rangle \mid u = a \circ b \& a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$$

$$NonEmptyPref(u, v) \Leftrightarrow Pref(u, v) \& \neg \varphi_\epsilon(u).$$

$$Comb(u, v, w) \Leftrightarrow EqLen(u, v) \& EqLen(cat(u, v), w) \&$$

$$\forall u_1 \forall v_1 (NonEmptyPref(u_1, u) \& NonEmptyPref(v_1, v) \& EqLen(u_1, v_1) \Rightarrow$$

$$\exists w_1 (Pref(w_1, w) \& EqLen(cat(u_1, v_1), w_1) \& \exists w_2 (Suff(w_2, w_1) \&$$

$$\exists a \exists b (\varphi_{2letterWord}(w_2, a, b) \& Suff(a, u_1) \& Suff(b, v_1)))).$$

С индукция по $n \in \mathbb{N}$ може да се покаже, че φ_n определя множеството от всички думи с дължина n .

Сега нека с $\Sigma \Leftarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $|\Sigma| = 5$ и значи $\Sigma^* = W$.

Тогава $|Aut(\mathcal{S})| = \{h \mid h : \Sigma \rightarrow \Sigma \ \& \ (\forall x \in \{0, 1\})[h(x) = x]\} = 3!$, тъй като това е броя на всички пермутации над тази азбука, в която 0 и 1 остават на място (не са повече, т.к. изискваме да се имаме биективност и функционалност на релацията). Трябва да остават на място 0 и 1, за да можем да запазваме и p , което зависи от тях (ако го нямаше нелогическия символ p , то автоморфизмите си стават 5!).

Сега нека вземем една пермутация над Σ примерно h и да покажем, можем да я надградим тази биекция, така че да действа върху всички думи над азбуката Σ (бележим го това множество с Σ^*) и да е автоморфизъм от Σ^* в Σ^* .

Нека $w \in \Sigma^*$. Тогава w е крайна редица от букви от Σ :

$$(\exists n \in \mathbb{N})[w = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n \ \& \ a_1 \in \Sigma \ \& \ a_2 \in \Sigma \ \& \ \dots \ \& \ a_n \in \Sigma].$$

Нека дефинираме $H : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ така:

$$H(w) = H(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n) = h(a_1) \circ h(a_2) \circ \dots \circ h(a_n).$$

Искаме H да е биекция и хомоморфизъм. Това че H е биекция се вижда от $H^{HOK}(\text{дължини на всички цикли в } h)(w) = Id_{\Sigma^*}$.

Тук нелогическите символи са cat и p .

За cat ще се погрижим да проверим, че:

$$H(cat^S(u, v)) = cat^S(H(u), H(v))$$

за $u, v \in \Sigma^*$.

Т.к. $u, v \in \Sigma^*$, то значи:

$$(\exists n \in \mathbb{N})[u = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n \ \& \ a_1 \in \Sigma \ \& \ a_2 \in \Sigma \ \& \ \dots \ \& \ a_n \in \Sigma]$$

и

$$(\exists m \in \mathbb{N})[v = b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \ \& \ b_1 \in \Sigma \ \& \ b_2 \in \Sigma \ \& \ \dots \ \& \ b_m \in \Sigma].$$

Ще използваме дефинициите на H , cat^S и асоциативност на \circ :

$$\begin{aligned} H(cat^S(u, v)) &= H(cat^S(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n, b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m)) = \\ &= H(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n \circ b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m) = \\ &= h(a_1) \circ h(a_2) \circ \dots \circ h(a_n) \circ h(b_1) \circ h(b_2) \circ \dots \circ h(b_m) = \\ &= (h(a_1) \circ h(a_2) \circ \dots \circ h(a_n)) \circ (h(b_1) \circ h(b_2) \circ \dots \circ h(b_m)) = \\ &= cat^S(h(a_1) \circ h(a_2) \circ \dots \circ h(a_n), (b_1) \circ h(b_2) \circ \dots \circ h(b_m)) = \\ &= cat^S(H(u), H(v)). \end{aligned}$$

За p ще се погрижим да проверим, че:

$$\langle u, v \rangle \in p^S \longleftrightarrow \langle H(u), H(v) \rangle \in p^S$$

за $u, v \in \Sigma^*$. Отново от $u, v \in \Sigma^*$, то значи:

$$(\exists n \in \mathbb{N})[u = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n \ \& \ a_1 \in \Sigma \ \& \ a_2 \in \Sigma \ \& \ \dots \ \& \ a_n \in \Sigma]$$

и

$$(\exists m \in \mathbb{N})[v = b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m \ \& \ b_1 \in \Sigma \ \& \ b_2 \in \Sigma \ \& \ \dots \ \& \ b_m \in \Sigma].$$

Ще използваме дефинициите на H , p^S и факта, че си филтрирахме само тези пермутации, които пазят 0, 1, т.е. характеристичните вектори генерирани от p^S няма да пострадат (да го наричаме този факт $(\#)$):

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle \in p^S &\longleftrightarrow \\ \forall i \leq |u| \left(v_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } u_i > 1 \\ 0, & \text{ако } u_i \leq 1 \end{cases} \right) &\longleftrightarrow \\ \forall i \leq |H(u)| = |u| \left(h(v_i) \stackrel{(\#)}{=} v_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } h(u_i) > 1, \text{ since } u_i > 1 \\ 0, & \text{ако } h(u_i) \leq 1 \xrightarrow{(\#)} h(u_i) = u_i \end{cases} \right) &\longleftrightarrow \\ \langle H(u), H(v) \rangle &\in p^S \end{aligned}$$

2 Изпълнимост

$\mathcal{L} = \langle p, q \rangle$ е език с два двуместни предикатни символа p и q .

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

$$\varphi_1 \Leftarrow \forall x \forall y (\exists z (p(x, z) \Leftrightarrow p(z, y)) \Leftrightarrow \exists z (q(x, z) \Leftrightarrow q(z, y))).$$

$$\varphi_2 \Leftarrow \exists x \exists y p(x, y).$$

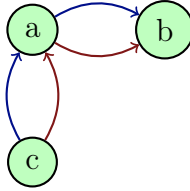
$$\varphi_3 \Leftarrow \exists x \exists y q(x, y).$$

$$\varphi_4 \Leftarrow \forall x \forall y (q(x, y) \Rightarrow \neg q(y, x)).$$

$$\varphi_5 \Leftarrow \forall x \forall y (p(x, y) \Rightarrow \neg p(y, x)).$$

$$\varphi_6 \Leftarrow \neg \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \& p(y, z) \Rightarrow p(x, z)).$$

Примерно решение



Т.е. $\mathcal{A} = \langle \{a, b\}; p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}} \rangle$ и $p^{\mathcal{A}} = q^{\mathcal{A}} = \{\langle a, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$.