

Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

23 март 2019

1 Определелимост

Нека \mathcal{A} е структура с универсиум естествените числа и е за език без символи за константи и функционални символи и единствен предикатен символ p , който е двуместен и се интерпретира така:

Вариант 1

За всеки два елемента n и m на \mathbb{N} :

$$p^{\mathcal{A}}(n, m) \iff m - n > 2$$

- (i) Определете равенство $\{\langle n, m \rangle \mid n = m\}$
- (ii) Определете множествата $\{0\}$ и $\{1\}$
- (iii) Да се докаже, че всяко множество от вида $\{n\}$ е определимо.

Вариант 2

За всеки два елемента n и m на \mathbb{N} :

$$p^{\mathcal{A}}(n, m) \iff m \leq 3 + n$$

- (i) Определете равенство $\{\langle n, m \rangle \mid n = m\}$
- (ii) Определете множествата $\{0\}$ и $\{1\}$
- (iii) Да се докаже, че всяко множество от вида $\{n\}$ е определимо.

Примерно решение на вариант 1

$$\begin{aligned}
\varphi_=(x, y) &\equiv \forall z(p(z, x) \Leftrightarrow p(z, y)). \\
\varphi_{\{0,1,2\}}(x) &\equiv \neg \exists y p(x, y). \\
\varphi_{\langle 0,3 \rangle}(x, y) &\equiv \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& p(y, x) \& \forall z(\varphi_{\{0,1,2\}}(z) \& \neg \varphi_=(x, z) \implies \neg p(y, z)). \\
\varphi_0(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 0,3 \rangle}(x, y). \\
\varphi_3(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 0,3 \rangle}(y, x). \\
\varphi_{\langle 1,4 \rangle}(x, y) &\equiv \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& \neg \varphi_0(x) \& p(y, x) \& \\
&\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2\}}(z) \& \neg \varphi_0(z) \& \neg \varphi_=(x, z) \implies \neg p(y, z)). \\
\varphi_1(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 1,4 \rangle}(x, y). \\
\varphi_4(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 1,4 \rangle}(y, x). \\
\varphi_2(x) &\equiv \neg \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \& \varphi_0(x) \& \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.

База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$.

Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m .

Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \equiv \exists y \exists z(\varphi_{n-3}(y) \& \varphi_{n-2}(z) \& p(y, x) \& \neg p(y, z))$.

Примерно решение на вариант 2

$$\begin{aligned}
\varphi_=(x, y) &\equiv \forall z(p(z, x) \Leftrightarrow p(z, y)). \\
\varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) &\equiv \neg \exists y \neg p(x, y). \\
\varphi_{\langle 0,4 \rangle}(x, y) &\equiv \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg p(y, x) \& \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg \varphi_=(x, z) \implies p(y, z)). \\
\varphi_0(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 0,4 \rangle}(x, y). \\
\varphi_4(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 0,4 \rangle}(y, x). \\
\varphi_{\langle 1,5 \rangle}(x, y) &\equiv \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg \varphi_0(x) \& \neg p(y, x) \& \\
&\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg \varphi_0(z) \& \neg \varphi_=(x, z) \implies p(y, z)). \\
\varphi_1(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 1,5 \rangle}(x, y). \\
\varphi_5(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 1,5 \rangle}(y, x). \\
\varphi_{\langle 2,6 \rangle}(x, y) &\equiv \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \neg \varphi_0(x) \& \neg \varphi_1(x) \& \neg p(y, x) \& \\
&\quad \forall z(\varphi_{\{0,1,2,3\}}(z) \& \neg \varphi_0(z) \& \neg \varphi_1(z) \& \neg \varphi_=(x, z) \implies p(y, z)). \\
\varphi_2(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 2,6 \rangle}(x, y). \\
\varphi_6(x) &\equiv \exists y \varphi_{\langle 2,6 \rangle}(y, x). \\
\varphi_3(x) &\equiv \neg \varphi_{\{0,1,2,3\}}(x) \& \varphi_0(x) \& \varphi_1(x) \& \varphi_2(x).
\end{aligned}$$

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.

База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_6(x)$.

Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m .

Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \equiv \exists y \exists z(\varphi_{n-3}(y) \& \varphi_{n-2}(z) \& \neg p(y, x) \& p(y, z))$.

Още едно примерно решение

$$\varphi_=(x, y) \Rightarrow \forall z(p(z, x) \Leftrightarrow p(z, y)).$$

$$\varphi_<(x, y) \Rightarrow \forall z(p(z, y) \Rightarrow p(z, x)).$$

$$\varphi_<(x, y) \Rightarrow \varphi_<(x, y) \& \neg \varphi_=(x, y).$$

$$\varphi_0(x) \Rightarrow \forall y \varphi_<(x, y).$$

$$\varphi_1(x) \Rightarrow \neg \varphi_0(x) \& \forall y(\varphi_<(y, x) \Rightarrow \varphi_0(y)).$$

$$\varphi_2(x) \Rightarrow \neg \varphi_0(x) \& \neg \varphi_1(x) \& \forall y(\varphi_<(y, x) \Rightarrow (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y))).$$

За да докажем, че за $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ е изпълнимо, ще използваме пълна математическа индукция.

База: $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$.

Индукционна хипотеза: Нека за $m < n$, $\{m\}$ е определима с формула φ_m .

Индукционна стъпка: $\varphi_n(x) \Rightarrow \neg \varphi_0(x) \& \neg \varphi_1(x) \& \dots \neg \varphi_{n-1}(x)$

$$\& \forall y(\varphi_<(y, x) \Rightarrow (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y) \& \dots \neg \varphi_{n-1}(y))).$$

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

Вариант 1

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) \doteq f(x, f(y, z))) \\ & \exists x \forall y ((f(x, y) \doteq y) \& (f(y, x) \doteq y)) \\ & \forall x (f(f(x, x), x) \doteq x) \\ & \exists x \neg (f(x, x) \doteq x) \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y \forall z (f(f(x, y), z) \doteq f(x, f(y, z))) \\ & \exists x \forall y ((f(x, y) \doteq y) \& (f(y, x) \doteq y)) \\ & \forall x (f(x, x) \doteq x) \\ & \exists x \exists y \neg (x \doteq y) \end{aligned}$$

Примерни решения на вариант 1

$$\begin{aligned} S &= (\{0, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x \text{ xor } y, \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\{0, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x + y \text{ mod } 2, \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\{-1, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x * y, \quad x, y \in \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Примерни решения на вариант 2

$$\begin{aligned} S &= (\mathbb{N}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow \max(x, y), \quad x, y \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\{0, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow \min(x, y), \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\mathcal{P}(\mathbb{N}), f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x \cup y, \quad x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\{0, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x \vee y, \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= (\{0, 1\}, f^S) \\ f^S(x, y) &\Rightarrow x \& y, \quad x, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$