

# Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

06 юли 2020

Ако намерите някакъв проблем с решенията, драскайте ми :)

# 1 Първа задача на пролог

Редицата  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  се дефинира рекурентно:

1. *вариант 1*:  $a_n = 5a_{n-1}^2 + 3a_{n-2}^3, a_0 = 0, a_1 = 1$

2. *вариант 2*:  $a_n = 3a_{n-1}^3 + 2a_{n-2}^2, a_0 = 0, a_1 = 1$

Да се дефинира на пролог предикат  $p(A)$ , който при дадено естествено число  $A$  успява точно тогава, когато то не е елемент на редицата  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

## 1.1 Примерно решение 1

*% Helper predicates: between.*

```
a(0, 0, 1, 1).  
a(Prev, N1, Curr, N):- N1 > 0, N2 is N1 - 1, N is N1 + 1,  
    a(PrevPrev, N2, Prev, N1),  
    Curr is 5 * Prev * Prev + 3 * PrevPrev * PrevPrev *  
    ↪ PrevPrev.
```

```
p(A):- not(( between(0, A, N), a(A, N, _, _) )).
```

## 1.2 Примерно решение 2

```
a(A, B, A).  
a(A, B, M):- A < M, Curr is 5 * B * B + 3 * A * A * A, a(B, C, M).  
  
p(A):- not( a(0,1,A) ).
```

## 2 Втора задача на пролог

Казваме, че списъкът  $X$  от естествени числа е:

1. *вариант 1: контракуляр* за списъка от списъци от естествени числа  $Y$ , ако всеки елемент на  $Y$  съдържа елемент, който се дели без остатък от всички елементи на  $X$ , а всеки елемент на  $X$  се дели без остатък от някой елемент на елемент на  $Y$ .

$$(\forall A \in Y)(\exists E_A \in A)(\forall E_X \in X)[E_A \equiv 0(\text{mod} E_X)] \models \models \\ \neg(\exists A \in Y)\neg(\exists E_A \in A)\neg(\exists E_X \in X)\neg[E_A \equiv 0(\text{mod} E_X)]$$

и

$$(\forall E_X \in X)(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_X \equiv 0(\text{mod} E_A)] \models \models \\ \neg(\forall E_X \in X)\neg(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_X \equiv 0(\text{mod} E_A)]$$

2. *вариант 2: кентракуляр* за списъка от списъци от естествени числа  $Y$ , ако всеки елемент на  $Y$  съдържа елемент, който дели без остатък някой елемент на  $X$ , а всеки елемент на  $X$  дели без остатък някой елемент на елемент на  $Y$ .

$$(\forall A \in Y)(\exists E_A \in A)(\exists E_X \in X)[E_X \equiv 0(\text{mod} E_A)] \models \models \\ \neg(\exists A \in Y)\neg(\exists E_A \in A)(\exists E_X \in X)[E_X \equiv 0(\text{mod} E_A)]$$

и

$$(\forall E_X \in X)(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_A \equiv 0(\text{mod} E_X)] \models \models \\ \neg(\forall E_X \in X)\neg(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_A \equiv 0(\text{mod} E_X)]$$

Да се дефинира предикат  $p(X, Y)$ , който по даден списък от списъци от естествени числа  $Y$  намира контракуляр  $X$  с възможно най-много различни елементи.

### 2.1 Примерно решение

*% Helper predicates: range, member, subsequence, flatten, length.*

`range(B, B, [B]).`

`range(A, B, [A|R]):- A < B, A1 is A + 1, range(A1, B, R).`

`maxTwoElements(A, B, B):- less(A, B).`

`maxTwoElements(A, B, A):- not( less(A, B) ).`

`maxElement([M], M).`

`maxElement([H|T], M):- maxElement(T, N), maxTwoElements(N, H, M).`

```

p(X, Y):- flatten(Y, FY), maxElement(FY, Max),
           range(0, Max, AllNums), subsequence(AllNums, X),
           kontracular(X, Y), length(X, LX),
           not(( subsequence(AllNums, Z), kontracular(Z, Y),
                  length(Z, LZ), LZ > LX ))).

```

```

kontracular(X, Y):- not(( member(A, Y),
                           not(( member(E_a, A),
                                   not(( member(E_x, X),
                                             not( E_a mod E_x == 0)
                                           ))
                                   ))
                           )),
                      not(( member(E_x, X),
                              not(( member(A, Y),
                                      member(E_a, A),
                                      E_x mod E_a == 0
                                    ))
                              ))).

```

```

kentracular(X, Y):- not(( member(A, Y),
                           not(( member(E_a, A),
                                   member(E_x, X),
                                   E_x mod E_a == 0
                                 ))
                           )),
                      not(( member(E_x, X),
                              not(( member(A, Y),
                                      member(E_a, A),
                                      E_a mod E_x == 0
                                    ))
                              ))).

```

### 3 Задача за определимост

$\mathcal{L} = \langle p \rangle$  е език с единствен триместен предикатен символ.  
 $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; p^{\mathcal{A}} \rangle$  е структура за  $\mathcal{L}$ , в която:

$$p^{\mathcal{A}}(k, n, m) \iff k + n = m + 2$$

1. Да се докаже, че всеки синглетон е определим.
2. Да се определят равенство и строго по-малко.

#### 3.1 Примерно решение

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &\iff p(x, x, x). \quad x + x = x + 2 \iff x = 2 \\ \varphi_=(x, y) &\iff \exists z(\varphi_2(z) \& p(x, z, y)). \quad x + 2 = y + 2 \iff x = y \\ \varphi_0(x) &\iff \neg \exists y(p(x, x, y)). \quad \forall y[x + x \neq y + 2] \iff x = 0 \\ \varphi_1(x) &\iff \exists y(\varphi_0(y) \& p(x, x, y)). \quad x + x = 0 + 2 \iff x = 1 \\ \varphi_3(x) &\iff \exists y \exists z(\varphi_0(y) \& \varphi_1(z) \& p(x, y, z)). \quad x + 0 = 1 + 2 \iff x = 3 \\ \varphi_{\leq}(x, y) &\iff \exists z(\neg \varphi_0(z) \& \neg \varphi_1(z) \& \neg \varphi_2(z) \& p(x, z, y)). \\ x + z = y + 2 \& z \geq 2 &\iff x + (z - 2) = y \& z \geq 2 \iff x \leq y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{<}(x, y) &\iff \varphi_{\leq}(x, y) \& \neg \varphi_=(x, y). \quad x \leq y \& x \neq y \\ \varphi_{+1}(x, y) &\iff \exists z(\varphi_3(z) \& p(x, z, y)). \quad x + 3 = y + 2 \iff y = x + 1 \end{aligned}$$

Оттам нататък с индукция по  $n$  доказваме, че всеки синглетон на универсиума е определим като в базата са ни:  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , индукционната хипотеза е за  $\varphi_n$  и  $\varphi_{n+1}(x) \iff \exists y(\varphi_n(y) \& \varphi_{+1}(y, x))$ .

## 4 Задача за изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

### 4.1 Вариант 1

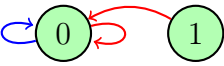
$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Leftarrow \exists x(p(x, x) \& q(x, x)). \\ \varphi_2 &\Leftarrow \forall x(p(x, x) \Rightarrow p(a, x)). \\ \varphi_3 &\Leftarrow \forall x \exists y(q(x, y) \& q(y, b)). \\ \varphi_4 &\Leftarrow \exists x(p(b, x) \& q(c, x)). \\ \varphi_5 &\Leftarrow q(b, b) \& \neg p(c, c) \& \neg q(c, c).\end{aligned}$$

### 4.2 Вариант 2

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Leftarrow \exists x(p(x, x) \Rightarrow q(x, x)). \\ \varphi_2 &\Leftarrow \forall y \exists x(q(x, b) \& q(y, x)). \\ \varphi_3 &\Leftarrow \exists x(p(b, x) \& q(c, x)). \\ \varphi_4 &\Leftarrow \forall x \forall y(p(y, x) \Leftrightarrow p(x, y)). \\ \varphi_5 &\Leftarrow p(a, a) \& q(b, b) \& \neg p(c, c) \& \neg q(c, c).\end{aligned}$$

( $a, b$  и  $c$  са индивидуни константи.)

### 4.3 Примерно решение и за двата варианта



$$\begin{aligned}S &= (\{0, 1\}; p^S, q^S; a^S, b^S, c^S) \\ p^S &\Leftarrow \{\langle 0, 0 \rangle\} \\ q^S &\Leftarrow \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\} \\ a^S &\Leftarrow 0, b^S \Leftarrow 0, c^S \Leftarrow 1\end{aligned}$$

## 5 Задача за резолюция

### 5.1 Вариант 1

Нека  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  са следните четири формули:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Leftarrow \forall x \exists y ((q(x, y) \Rightarrow p(x, y)) \& \forall z (p(z, y) \Rightarrow r(x, z))). \\ \varphi_2 &\Leftarrow \forall x (\exists y p(y, x) \Rightarrow \exists y (p(y, x) \& \neg \exists z (p(z, y) \& p(z, x)))). \\ \varphi_3 &\Leftarrow \forall z (\exists x \exists y (\neg q(x, y) \& \neg p(x, y)) \Rightarrow \forall z_1 q(z_1, z)). \\ \varphi_4 &\Leftarrow \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \& r(y, z)) \Rightarrow p(x, z)).\end{aligned}$$

С метода на резолюцията докажете, че:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \forall x \neg p(x, x)$ .

### 5.2 Вариант 2

Нека  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  са следните четири формули:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Leftarrow \forall x \exists y (q(y, x) \& \forall z (q(y, z) \Rightarrow (r(z, x) \vee p(y, z)))). \\ \varphi_2 &\Leftarrow \forall x (\exists y q(x, y) \Rightarrow \exists y (q(x, y) \& \neg \exists z (q(y, z) \& q(x, z)))). \\ \varphi_3 &\Leftarrow \forall z_1 (\exists z \exists x \exists y (p(x, y) \& q(x, z)) \Rightarrow \forall z_2 \neg p(z_1, z_2)). \\ \varphi_4 &\Leftarrow \forall x \forall y \forall z ((q(y, x) \& r(z, y)) \Rightarrow q(z, x)).\end{aligned}$$

С метода на резолюцията докажете, че:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \forall x \neg q(x, x)$ .

### 5.3 Примерно решение за вариант 1 (вариант 2 е аналогичен)

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{final} &\Leftarrow \forall x \forall z ((p(x, f(x)) \vee \neg q(x, f(x))) \& (\neg p(z, f(x)) \vee r(x, z))). \\ \varphi_2^{final} &\Leftarrow \forall x \forall t \forall z ((p(g(x), x) \vee \neg p(t, x)) \& (\neg p(z, g(x)) \vee \neg p(z, x) \vee \neg p(t, x))). \\ \varphi_3^{final} &\Leftarrow \forall z \forall x \forall y \forall z_1 (q(x, y) \vee p(a, y), \vee q(z_1, z)). \\ \varphi_4^{final} &\Leftarrow \forall x \forall y \forall z (\neg r(y, z) \vee \neg p(x, y) \vee p(x, z)). \\ \psi^{final} &\Leftarrow p(a, a).\end{aligned}$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{\neg q(x_1, f(x_1)), p(x_1, f(x_1))\}; \\
D_2 &= \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}; \\
D_3 &= \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\}; \\
D_4 &= \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\}; \\
D_5 &= \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5), q(z_1, z_5)\}; \\
D_6 &= \{\neg r(y_6, z_6), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\}; \\
D_7 &= \{p(a, a)\}.
\end{aligned}$$

Примерен резолютивен извод на  $\blacksquare$  е:

$$D_8 = \text{Collapse}(D_5\{z_1/x_5, z_5, y_5\}) = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5)\};$$

$$D_9 = \text{Res}(D_1, D_8\{x_5/x_1, y_5/f(x_1)\}) = \{p(x_1, f(x_1))\};$$

$$D_{10} = \text{Res}(D_2\{x_2, y_6, z_2/z_6\}, D_6) = \{\neg p(z_6, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\};$$

$$D_{11} = \text{Res}(D_{10}\{z_6/g(f(y_6))\}, D_3\{x_3/f(y_6)\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, g(f(y_6)))\};$$

$$D_{12} = \text{Res}(D_{11}, D_4\{x_4/f(y_6), z_4/x_6\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), \neg p(t_4, f(y_6)), \neg p(x_6, f(y_6))\};$$

$$D_{13} = \text{Collapse}(D_{12}\{t_3/a, y_6/a, t_4/a, x_6/a\}) = \{\neg p(a, f(a)), \neg p(a, a)\};$$

$$D_{14} = \text{Res}(D_{13}, D_9\{x_1/a\}) = \{\neg p(a, a)\};$$

$$\blacksquare = \text{Res}(D_{14}, D_7).$$