Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

09 септември 2020

Ако намерите някакъв проблем с решенията, драскайте ми :)

1 Определимост

Структурата $\mathcal{M}$ е с универсиум множеството на рационалните числа и е за език без функционални символи и единствен триместен предикатен символ p, който се интерпретира така:

- *Вариант 1:* $\langle x, y, z\rangle \in p^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow x = y^3 z$
- *Вариант 2:* $\langle x, y, z\rangle \in p^{\mathcal{M}} \longleftrightarrow x^5 y = z$

Да се докаже, че в структурата $\mathcal{M}$ следните множества са определими:

- $\{0\}$
- $\{1\}$
- $\{-1\}$
- $\{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{Q}\}$
- *Вариант 1:* $\{\langle x, y\rangle \mid xy = -1\}$
- *Вариант 2:* $\{\langle x, y\rangle \mid xy = 1\}$
- *Вариант 1:* $\{\langle x, y, z\rangle \mid x = yz\}$
- *Вариант 2:* $\{\langle x, y, z\rangle \mid xy = z\}$

Да се докаже, че в $\mathcal{M}$ множеството

- *Вариант 1:* $\{3\}$
- *Вариант 2:* $\{5\}$

не е определимо.

1.1 Примерно решение вариант 2

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y p(x, y, x).$$
$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y p(p(x, y, y)).$$
$$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_1(x) \,\&\, \exists y(\varphi_1(y) \,\&\, p(x, x, y)).$$
$$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, p(z, x, y)).$$
$$\psi_=(x, y) \leftrightharpoons \forall z \forall t(p(z, t, x) \iff p(z, t, y)).$$
$$\varphi_{\uparrow 5}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, p(x, z, y)).$$
$$\varphi_{=1}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, \exists t(\varphi_{\uparrow 5}(y, t) \,\&\, p(x, t, z))).$$
$$\varphi_{=z}(x, y, z) \leftrightharpoons \exists t \exists e(\varphi_{\uparrow 5}(y, t) \,\&\, \varphi_{\uparrow 5}(z, e) \,\&\, p(x, t, e)).$$

Пример за автоморфизъм: $h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \frac{1}{x},\ if\ x \neq 0 \\ 0,\ else \end{cases}$.

За биекция се вижда лесно, че $h(h(x)) = x$. За хомоморфизъм имаме един триместен предикатен символ в структурата и трябва да докажем, че:

$$\langle x, y, z \rangle \in p^{\mathcal{M}} \iff \langle h(x), h(y), h(z) \rangle \in p^{\mathcal{M}}$$

И с малко разсъждения стигаме до това:

$$\langle x, y, z \rangle \in p^{\mathcal{M}} \iff x^5 y = z \iff (x^5 y)^{-1} = z^{-1} \iff (x^{-1})^5 y^{-1} = z^{-1} \iff h(x)^5 h(y) = h(z) \iff \langle h(x), h(y), h(z) \rangle \in p^{\mathcal{M}}$$

Значи $h \in \mathcal{A}\mathrm{ut}(\mathcal{M})$ и $5 \in \{5\}$, но $h(5) = \frac{1}{5} \notin \{5\}$.
За вариант 1 са аналогични формулите, а автоморфизма h върши работа и там.

2 Изпълнимост

Нека a и b са различни индивидни константи, p и r са двуместни предикатни символи, f е едноместен функционален символ, а x, y и z са различни индивидни променливи. Да означим с Γ_1 множеството от следните три формули:

2.1 Вариант 1

$$\forall x \forall y \forall z((p(x,y) \vee p(y,x)) \& ((p(x,y) \& p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)))$$
$$(\forall x \forall y(r(x,y) \Leftrightarrow (p(x,y) \& \neg p(y,x))) \& r(a,b))$$
$$\forall x \exists y(\neg(r(x,y) \vee r(y,x)) \& r(x,f(y)))$$

Нека $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\forall x \exists y(\neg(r(x,y) \vee r(y,x)) \& \neg r(x,f(y)))\}$ и $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{\forall x p(a,x)\}$.

2.2 Вариант 2

$$\forall x \forall y \forall z((p(x,y) \vee p(y,x)) \& ((p(x,y) \& p(y,z)) \Rightarrow p(x,z)))$$
$$(\forall x \forall y(r(x,y) \Leftrightarrow (p(x,y) \& p(y,x))) \& \neg r(a,b))$$
$$\forall x \exists y(r(x,y) \& (p(x,f(y)) \& \neg r(x,f(y))))$$

Нека $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\forall x \exists y(r(x,y) \& r(x,f(y)))\}$ и $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{\forall x p(b,x)\}$.

Да се докаже кои от множествата Γ_1, Γ_2 и Γ_3 са изпълними.

2.3 Примерни решения вариант 2

За Γ_1:

$$\mathcal{S}_1 = (\mathbb{N} \cup \{0\}; p^{\mathcal{S}_1}, r^{\mathcal{S}_1}; a^{\mathcal{S}_1}, b^{\mathcal{S}_1}; f^{\mathcal{S}_1})$$
$$\langle x, y\rangle \in p^{\mathcal{S}_1} \iff x \leq y$$
$$\langle x, y\rangle \in r^{\mathcal{S}_1} \iff x = y$$
$$f^{\mathcal{S}_1}(x) \leftrightharpoons x + 1$$
$$a^{\mathcal{S}_1} \leftrightharpoons 1, b^{\mathcal{S}_1} \leftrightharpoons 0$$

За Γ_2, Γ_3:

$$\mathcal{S}_2 = (\mathbb{N} \cup \{0, 0',\} \cup \{n' \mid n \in \mathbb{N}\}; p^{\mathcal{S}_2}, r^{\mathcal{S}_2}; a^{\mathcal{S}_2}, b^{\mathcal{S}_2}; f^{\mathcal{S}_2})$$
$$p^{\mathcal{S}_2} \leftrightharpoons \{\langle n, m\rangle \mid n \leq m\} \cup \{\langle n', m'\rangle \mid n \leq m\} \cup \{\langle n', m\rangle \mid n \leq m\} \cup \{\langle n, m'\rangle \mid n \leq m\}$$
$$r^{\mathcal{S}_2} \leftrightharpoons \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n', n'\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n', n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, n'\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$f^{\mathcal{S}_2}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} n, \ if \ x = n' \\ n + 1, \ else \ if \ x = n \end{cases}$$
$$a^{\mathcal{S}_2} \leftrightharpoons 1, b^{\mathcal{S}_2} \leftrightharpoons 0$$

Помислете какво трябва да промените в структурите, за да получите модели за вариант 1.

3 Резолюция

3.1 Вариант 1

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 са следните четири формули:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y((q(x,y) \Rightarrow p(x,y)) \,\&\, \forall z(p(z,y) \Rightarrow r(x,z))). \\
\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(\exists y p(y,x) \Rightarrow \exists y(p(y,x) \,\&\, \neg \exists z(p(z,y) \,\&\, p(z,x)))). \\
\varphi_3 \leftrightharpoons \forall z \left(\exists x \exists y(\neg q(x,y) \,\&\, \neg p(x,y)) \Rightarrow \forall z_1 q\left(z_1, z\right)\right). \\
\varphi_4 \leftrightharpoons \neg \exists x \exists y \exists z((p(x,y) \,\&\, r(y,z)) \,\&\, \neg p(x,z)).
\end{gathered}
$$

С метода на резолюцията докажете, че:
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \exists y \forall x \exists z((p(x,x) \vee r(y,z)) \Rightarrow (\neg p(x,x) \,\&\, r(y,z)))$.

3.2 Вариант 2

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 са следните четири формули:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y(q(y,x) \,\&\, \forall z(q(y,z) \Rightarrow (r(z,x) \vee p(y,z)))). \\
\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(\exists y q(x,y) \Rightarrow \exists y(q(x,y) \,\&\, \neg \exists z(q(y,z) \,\&\, q(x,z)))). \\
\varphi_3 \leftrightharpoons \forall z_1 \left(\exists z \exists x \exists y(p(x,y) \,\&\, q(x,z)) \Rightarrow \forall z_2 \neg p\left(z_1, z_2\right)\right). \\
\varphi_4 \leftrightharpoons \neg \exists x \exists y \exists z((q(y,x) \,\&\, r(z,y)) \,\&\, \neg q(z,x)).
\end{gathered}
$$

С метода на резолюцията докажете, че:
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \exists z \forall x \exists y((q(x,x) \vee r(y,z)) \Rightarrow (\neg q(x,x) \,\&\, r(y,z)))$.

3.3 Обработка на някои от формулите (задачата е същата като тази на 6 юли 2020)

Нека:
$\chi' \rightleftharpoons \exists y \forall x \exists z((p(x,x) \vee r(y,z)) \Rightarrow (\neg p(x,x) \,\&\, r(y,z)))$;
$\chi'' \rightleftharpoons \exists z \forall x \exists y((q(x,x) \vee r(y,z)) \Rightarrow (\neg q(x,x) \,\&\, r(y,z)))$.
Сега:

$$
\begin{aligned}
\chi' \;\|\!\models\!\|\; & \exists y \forall x \exists z((\neg p(x,x) \,\&\, \neg r(y,z)) \vee (\neg p(x,x) \,\&\, r(y,z))) \\
\|\!\models\!\|\; & \exists y \forall x \exists z(\neg p(x,x) \,\&\, (\neg r(y,z) \vee r(y,z))) \\
\|\!\models\!\|\; & \exists y \forall x \exists z(\neg p(x,x)) \\
\|\!\models\!\|\; & \forall x \neg p(x,x).
\end{aligned}
$$

Аналогично $\chi'' \;|\!\!\models\!\!|\; \forall x \neg q(x,x)$. Остава само φ_4 да преобразуваме и получаваме задачата от 6ти юли:

$$\varphi_4 \;|\!\!\models\!\!|\; \forall x \forall y \forall z ((p(x,y) \,\&\, r(y,z)) \Rightarrow p(x,z))$$

Същото и за другия вариант.

3.4 Примерно решение за вариант 1 (вариант 2 е аналогичен)

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\varphi_1^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall z ((p(x,f(x)) \vee \neg q(x,f(x))) \,\&\, (\neg p(z,f(x)) \vee r(x,z))).$$
$$\varphi_2^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall t \forall z ((p(g(x),x) \vee \neg p(t,x)) \,\&\, (\neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(t,x)).$$
$$\varphi_3^{final} \rightleftharpoons \forall z \forall x \forall y \forall z_1 (q(x,y) \vee p(a,y), \vee q(z_1,z)).$$
$$\varphi_4^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z (\neg r(y,z) \vee \neg p(x,y) \vee p(x,z)).$$
$$\psi^{final} \rightleftharpoons p(a,a).\ \textbf{(Ползваме } \chi' \textbf{ за база.)}$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$D_1 = \{\neg q(x_1, f(x_1)), p(x_1, f(x_1))\};$$
$$D_2 = \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\};$$
$$D_3 = \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\};$$
$$D_4 = \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\};$$
$$D_5 = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5), q(z_1, z_5)\};$$
$$D_6 = \{\neg r(y_6, z_6), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\};$$
$$D_7 = \{p(a,a)\}.$$

Примерен резолютивен извод на $\blacksquare$ е:

$$D_8 = Collapse(D_5\{z_1/x_5, z_5, y_5\}) = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5)\};$$

$$D_9 = Res(D_1, D_8\{x_5/x_1, y_5/f(x_1)\}) = \{p(x_1, f(x_1))\};$$

$$D_{10} = Res(D_2\{x_2, y_6, z_2/z_6\}, D_6) = \{\neg p(z_6, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\};$$

$$D_{11} = Res(D_{10}\{z_6/g(f(y_6))\}, D3\{x_3/f(y_6)\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, g(f(y_6)))\};$$

$$D_{12} = Res(D_{11}, D_4\{x_4/f(y_6), z_4/x_6\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), \neg p(t_4, f(y_6)), \neg p(x_6, f(y_6))\};$$

$$D_{13} = Collapse(D_{12}\{t_3/a, y_6/a, t_4/a, x_6/a\}) = \{\neg p(a, f(a)), \neg p(a, a)\}.;$$

$$D_{14} = Res(D_{13}, D_9\{x_1/a\}) = \{\neg p(a, a)\};$$

$$\blacksquare = Res(D_{14}, D_7).$$

4 Пролог: задача за дървета

Представяне на кореново дърво T ще наричаме всяка двойка от (V, E), където V е списък от върховете на T, а E е списък от точно онези двойки (u, v), за които u е баща на v в T.

За кореново дърво $T = (V, E)$ ще казваме, че *балансирано/дълбоко*, ако височината му не надвишава $2\log_2|V|/\frac{\log_2|V|}{2}$.

Да се дефинира на пролог предикат $balanced(T)/deep(T)$, който по представяне на кореново дърво проверява дали то е *балансирано/дълбоко*.

4.1 Примерно решение

```
balanced(V, E):-
    length(V, LV), logarithm(LV, 2, Lim), Limit is 2 * Lim,
    checkMaxDepthBelow(V, E, Limit).

deep(V, E):-
    length(V, LV), logarithm(LV, 2, Lim), Limit is Lim / 2,
    checkMaxDepthBelow(V, E, Limit).

logarithm(1, _, 0).
logarithm(N, Base, Res):-
    N > 1, N1 is N div Base,
    logarithm(N1, Base, M),
    Res is M + 1.

acyclicPath(_, U, [U|P], [U|P]).
acyclicPath(E, U, [W|P], Result):-
    U \= W,
    takeNeighbourVertex(E, Prev, W),
    not(member(Prev, [W|P])),
    acyclicPath(E, U, [Prev, W|P], Result).

takeNeighbourVertex(E, U, W):-
    member([U, W], E); member([W, U], E).

getRoot(V, E, Root):- member(Root, V), not(member([_, V], E)).

checkMaxDepthBelow(V, E, Limit):-
    getRoot(V, E, Root),
    not(( member(U, V), acyclicPath(E, Root, [U], P),
          length(P, LP), LP > Limit )).
```

5 Пролог: задача за списъци

5.1 Вариант 1

Крали Марко бяга от ламята Спаска. Бягайки на надморска височина N единици, стига до ръба на огромна пропаст, в която стърчат дървени кулички с различни надморски височини подредени в редичка плътно една след друга стигаща до другия край на пропастта. До него има ръчка, която при всяко дърпане преподрежда куличките в нова редичка. Въздухът е силно разреден и трябва да се действа бързо!

За улеснение нека си представим редицата от куличките като списък, чиито елементи са списъци от крайни вложения на празния списък
(`[[[[]]]], [[]], [[[[[[]]]]]]` $\longrightarrow$ списък с началните разположения на кулички с надморски височини с 3, 1 и 5 единици).

Той може да скача и пропада на височина максимум 3 единици.

Да се дефинира предикат $runOrDie(Towers, N, L)$, който по дадено представяне на редица от кулички $Towers$ и първоначална надморска височина N генерира в L чрез преудовлетворяване всички последователности на куличките, така че Крали Марко да може да стигне от единия край на пропастта до другия и да се спаси от ламята Спаска.

5.2 Вариант 2

Супер Марио е подложен на поредното предизвикателство. Той се намира на надморска височина N единици и пред него е зейнала огромна пропаст, в която стърчат метални кулички с различни надморски височини, подредени в редичка плътно една след друга стигаща до другия край на пропастта. До него има ръчка, която при всяко дърпане преподрежда куличките в нова редичка.

За улеснение нека си представим редицата от куличките като списък, чиито елементи са списъци от крайни вложения на празния списък
(`[[[[]]]], [[]], [[[[[[]]]]]]` $\longrightarrow$ списък с началните разположения на кулички с надморски височини с 3, 1 и 5 единици).

Той може да скача и пропада на височина максимум 2 единици.

Да се дефинира предикат $futureBride(Towers, N, L)$, който по дадено представяне на редица от кулички $Towers$ и първоначална надморска височина N генерира в L чрез преудовлетворяване всички последователности на куличките, така че Супер Марио да може да стигне от единия край на пропастта до другия и да спаси принцесата от чудовището.

5.3 Примерно решение

```
% Helper predicates: append, permutation.
futureBride(Towers, N, L):-
    permutation(Towers, L),
    pillarsToNumbers(L, NumL),
    condition(NumL, N, 2).

runOrDie(Towers, N, L):-
    permutation(Towers, L),
    pillarsToNumbers(L, NumL),
    condition(NumL, N, 3).

pillarsToNumbers([], []).
pillarsToNumbers([H|T], [NumH|R]):-
    pillarsToNumbers(T, R), countNestedness(H, NumH).

countNestedness([], 0).
countNestedness([H|[]], N):-
    countNestedness(H, M), N is M + 1.

condition(NumL, N, Diff):-
    append([First|_], [Last], NumL),
    R1 is abs(N - First), R1 =< Diff,
    R2 is abs(N - Last), R2 =< Diff,
    not(( append(_, [A, B|_], NumL),
            R3 is abs(B - A), R3 > Diff )).
```