

Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

08 ноември 2019

1 Определелимост

Вариант 1

Структурата \mathcal{S} е с носител множеството \mathbb{E}_2 от всички точки в евклидовата равнина и е за език без равенство и с единствен нелогически символ — триместния предикатен символ \perp , който се интерпретира така:

$$\perp^{\mathcal{S}}(A, B, C) \stackrel{def}{\iff} A \neq B \text{ и } A \neq C \text{ и } \angle BAC = 90^\circ$$

Да се докаже, че в структурата \mathcal{S} са определими:

1. $\text{Eq} = \{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathbb{E}_2\}$.
2. $\text{Col} = \{\langle A, B, C \rangle \mid A, B, C \in \mathbb{E}_2 \text{ лежат на една права}\}$.
3. $\text{Circ} = \{\langle A, B, C \rangle \mid C \text{ лежи на окръжност с диаметър } AB\}$.

Вярно ли е, че в \mathcal{S} са определими множествата и защо:

$$\begin{aligned} \text{Mid} &= \{\langle A, B, C \rangle \mid C \text{ е среда на отсечката } AB\} \text{ и} \\ \text{Seg} &= \{\langle A, B, C \rangle \mid C \text{ лежи на отсечката } AB\} \end{aligned}$$

Намерете два различни автоморфизма в \mathcal{S} .

Вариант 2

Структурата \mathcal{S} е с носител множеството \mathbb{E}_2 от всички точки в евклидовата равнина и е за език без равенство и с единствен нелогически символ — триместния предикатен символ \perp , който се интерпретира така:

$$\perp^{\mathcal{S}}(A, B, C) \stackrel{def}{\iff} A \neq C \text{ и } B \neq C \text{ и } \angle ACB = 90^\circ$$

Да се докаже, че в структурата \mathcal{S} са определими:

1. $\text{Eq} = \{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathbb{E}_2\}$.
2. $\text{Col} = \{\langle A, B, C \rangle \mid A, B, C \in \mathbb{E}_2 \text{ не лежат на една права}\}$.
3. $\text{Circ} = \{\langle A, B, C \rangle \mid A \text{ лежи на окръжност с диаметър } BC\}$.

Вярно ли е, че в \mathcal{S} са определими множествата и защо:

$$\begin{aligned} \text{Mid} &= \{\langle A, B, C \rangle \mid A \text{ е среда на отсечката } BC\} \text{ и} \\ \text{Seg} &= \{\langle A, B, C \rangle \mid A \text{ лежи на отсечката } BC\} \end{aligned}$$

Намерете два различни автоморфизма в \mathcal{S} .

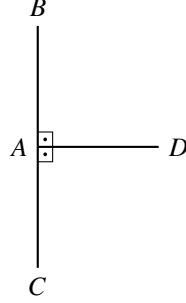
Примерно решение на вариант 1

На вариант 2 решението е аналогично.

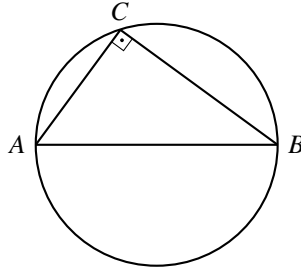
$\text{Eq}(A, B) \Rightarrow \forall C \forall D (\perp(C, A, D) \iff \perp(C, B, D))$. /* Използваме схема за обемност. */

$\text{Eq}^*(A, B) \Rightarrow \neg \exists C \perp(C, A, B)$. /* Друг вариант. */

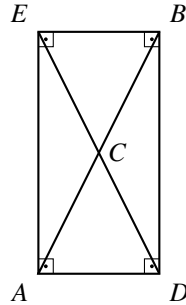
$\text{Col}(A, B, C) \Rightarrow \exists D (\perp(A, B, D) \& \perp(A, C, D))$.



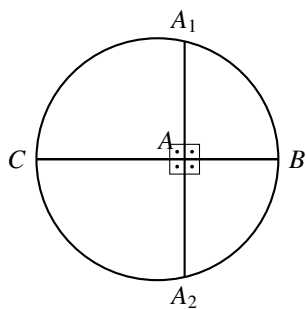
$\text{Circ}(A, B, C) \Rightarrow \perp(C, A, B) \vee \text{Eq}(C, A) \vee \text{Eq}(B, C)$.



$\text{Mid}(A, B, C) \Rightarrow (\text{Eq}(A, B) \& \text{Eq}(A, C)) \vee (\exists D \exists E (\neg \text{Eq}(D, E) \& \perp(A, E, D) \& \perp(B, D, E) \& \text{Col}(A, C, B) \& \text{Col}(E, C, D)))$.



$\text{Seg}(A, B, C) \Rightarrow (\text{Col}(A, B, C) \& \exists A_1 \exists A_2 (\neg \text{Eq}(A_1, A_2) \& \text{Circ}(A_1, B, C) \& \text{Circ}(A_2, B, C) \& \text{Col}(A, A_1, A_2) \& \perp(A, A_1, C)))$.



Един примерен автоморфизъм на \mathcal{S} е $Id_{\mathbb{E}_2}$.

Други автоморфизми са подобия (пазещи ъглите като при подобие на триъгълници) като трансляция, хомотетия, ротация и тн.

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

Вариант 1

Да се докаже, че са изпълними множествата от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, където

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Rightarrow \exists x \exists y (g(x) = y \& f(x) = y), \\ \varphi_2 &\Rightarrow \forall x \forall y \forall z (f(x) = y \& f(y) = z \implies g(z) = x), \\ \varphi_3 &\Rightarrow \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \& \neg y = z \& \neg z = x), \\ \varphi_4 &\Rightarrow \forall x \neg f(x) = x.\end{aligned}$$

Вариант 2

Да се докаже, че са изпълними множествата от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ и $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, където

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Rightarrow \exists x \exists y (h(x) = y \& g(x) = y), \\ \varphi_2 &\Rightarrow \exists x \exists y \exists z (\neg x = y \& \neg y = z \& \neg z = x), \\ \varphi_3 &\Rightarrow \forall x \forall y \forall z (g(x) = y \& g(y) = z \implies h(z) = x), \\ \varphi_4 &\Rightarrow \neg \exists x g(x) = x.\end{aligned}$$

Примерни решения на $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

*Всички модели за $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ са модели и за $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

$$\begin{aligned}S &= (\{0, 1, 2\}, f^S, g^S) \\ f^S(x) &\Rightarrow x \\ g^S(x) &\Rightarrow x \\[10pt] S &= (\mathbb{N}, f^S, g^S) \\ f^S(x) &\Rightarrow x + 1 \\ g^S(x) &\Rightarrow \begin{cases} x, & \text{if } x < 2 \\ x - 2, & \text{иначе} \end{cases}\end{aligned}$$

Примерни решения на $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$

$$\begin{aligned}S &= (\{0, 1, 2\}, f^S, g^S) \\ f^S(x) &\Rightarrow x \% 3 \\ g^S(x) &\Rightarrow x \% 3 \\[10pt] S &= (\mathbb{N}, f^S, g^S) \\ f^S(x) &\Rightarrow x + 1 \\ g^S(x) &\Rightarrow \begin{cases} x + 1, & \text{if } x < 2 \\ x - 2, & \text{иначе} \end{cases}\end{aligned}$$