Изисква време да се пише на tex и този път реших така да опиша решенията на задачите от I ватa част. Отделно ще пиша pdf с условията.

Тук ще реша задачите за вариант Е.I.1.

**Зад 1** $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\#(p) = 3$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$;

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ структура за $\mathcal{L}$ с

$$\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a - b = c^2 \Leftrightarrow$$
$$a = c^2 + b \Leftrightarrow$$
$$b = a - c^2$$

(i) Да се докаже за $n \in \mathbb{N}$, то $\{n\}$ е определимо.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x, x, x)$. // $0 - 0 = 0^2$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y (\varphi_0(y) \& \neg \varphi_0(x) \& p(x, y, x))$.

// $x - 0 = x = x^2$ и $x > 0$

$\varphi_{+1}(x, y) \leftrightharpoons \exists z (\varphi_1(z) \& p(y, x, z))$.

// $y = x + 1^2 = x + 1$.

Сега с индукция по $n \in \mathbb{N}$ ще покажем, че всеки синглетон е определим.

<u>База</u>: $\varphi_0$ и $\varphi_1$.

<u>И.Х</u>: Допускаме, че за някое $n > 0$, то $\{n\}$ е определимо и нека $\varphi_n(x)$ е свидетел, че $\{n\}$ е определимо.

<u>Стъпка</u>: $\underline{n \mapsto n+1}$

$$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \, (\underbrace{\varphi_n(y)}_{(i.h.)} \,\&\, \varphi_{+1}(y, x)).$$

(ii) $\{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ е определимо т.е. равенство м/у жителите в света.

$$\varphi_{=}(x, y) \leftrightharpoons \forall z \forall t \, (p(x, z, t) \Leftrightarrow p(y, z, t)).$$

// Хващаме най-големия точен квадрат под $x$ и под $y$ в $t$ и заключваме до играем с $z$. Без сигурност щете са различни тогава, ако са различни.

$\{\langle n, m\rangle \mid n > m\}$ е определимо.

Ако $n^2 > m^2$, то и $n > m$ и обратно, т.к. сме в $\underline{\mathbb{N}}$.

$\varphi_{\wedge 2}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \& p(y, z, x))$.

// $y = x^2 + 0 = x^2$

$\varphi_>(x, y) \leftrightharpoons \underbrace{\exists z \exists t(\neg \varphi_0(z) \& \varphi_{\wedge 2}(x, t) \& p(t, z, y))}$.

$\underline{z > 0}$, $t = x^2$, $t = \underline{x^2 = y^2 + z}$

$\underbrace{x^2 > y^2}$

$x > y$

(iii) $\{n^4 \mid n \in \mathbb{N}\}$ е определимо.

$\varphi_{n^4}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_{\wedge 2}(y, z) \& \varphi_{\wedge 2}(z, x))$.

// $z = y^2$ $\underline{\&}$ $x = z^2 = (y^2)^2 = y^4$.

зад 2

$\psi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y (\neg p(x,x) \& p(x,y))$.

$\psi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall z (\exists y (p(x,y) \& p(y,z)) \Leftrightarrow p(x,z))$.

$\psi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg p(x,y) \& \neg p(y,x) \&$
$\neg (p(x,z) \Leftrightarrow p(y,z)))$.

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow p(x, f(x,y)) \& p(f(y,x),y))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow p(x, f(x,y)) \vee p(f(y,x),y))$.

Нека $\Gamma \leftrightharpoons \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$, $\Gamma_1 \leftrightharpoons \Gamma \cup \{\varphi_1\}$,
$\Gamma_2 \leftrightharpoons \Gamma \cup \{\varphi_2\}$.

Да се докаже кои м-ва са изпълними.

$\psi_1$ говори за иррефлексивност и сериалност надясно.
$\psi_2$ говори за гъстота и транзитивност
$\psi_3$ говори за частична релация (поне два несравними). Също има поне един елемент, който ги различава.

Примерен модел за Γ

$\mathcal{A} \leftrightharpoons \langle \mathbb{Q}\times\{0\} \cup \mathbb{Q}\times\{1\}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ където

$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightharpoons b=d \ \& \ a<b$

$\varphi_1, \varphi_2$ са автоматично изпълнени.

$\varphi_3$: за $x : \langle 0,0\rangle$, $y : \langle 0,1\rangle$ и $z : \langle 1,1\rangle$, то $\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle \notin p^{\mathcal{A}}$, но $\langle\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle \in p^{\mathcal{A}}$.

Поправката е предложена от Ростислав Цачев.

Сега за $\Gamma_1$ (и $\Gamma_2$).

Нека $\mathcal{A} \leftrightharpoons \langle \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, p^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}\rangle$, където

$f^{\mathcal{A}}(x,y) \leftrightharpoons y$

$\langle\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightharpoons a<c \ \& \ b<d$.

$\varphi_1, \varphi_2$ са окей.

$\varphi_3$: за $x$ е $\langle 0,1\rangle$, за $y$ е $\langle 1,0\rangle$, за $z$ е $\langle 2, 1/3\rangle$, защото $\langle\langle 0,1\rangle,\langle 2,1/3\rangle\rangle \notin p^{\mathcal{A}}$, но $\langle\langle 1,0\rangle,\langle 2,1/3\rangle\rangle \in p^{\mathcal{A}}$

Искаме за всяка оценка $v$ в $\mathcal{A}$:

$$\| p(x,y) \|^{\mathcal{A}}[v] = \| p(x,f(x,y)) \ \& \ \vee \ p(f(y,x),y) \|^{\mathcal{A}}[v].$$

Т.к. $f^{A}(x,y) \leq y$, то

$\|p(x,y)\|^{A}[v] = \|p(x, f(x,y))\|^{A}[v]$

и/или $\|p(f(y,x), y)\|^{A}[v]$

$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^{A} \Leftrightarrow \langle v(x), f^{A}(v(x), v(y)) \rangle \in p^{A}$

и/или

$\langle f^{A}(v(y), v(x)), v(y) \rangle \in p^{A}$

$\Leftrightarrow \langle v(x), v(y) \rangle \in p^{A}$ и/или

$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^{A} \Leftrightarrow$

$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^{A}$.

Т.е. са тривиално изпълнени.

300 (3) Док., че ф-лата е неизпълнима.

$$\exists x \forall y (q(x,y) \Leftrightarrow \forall z (q(y,z) \Rightarrow (q(z,y) \Rightarrow \forall x (q(x,y) \& \neg q(x,y)))))$$

$$\models\mid \exists x \forall y (q(x,y) \Leftrightarrow \forall z (q(y,z) \& q(z,y) \Rightarrow \forall x (q(x,y) \& \neg q(x,y)))).$$

$$\models\mid \exists x \forall y (q(x,y) \Leftrightarrow \forall z (\neg q(y,z) \vee \neg q(z,y))).$$

$$\models\mid \exists x \forall y ((\neg q(x,y) \vee \forall t (\neg q(y,t) \vee \neg q(t,y))) \& (\exists z (q(y,z) \& q(z,y)) \vee q(x,y))) \models\mid$$

$$\models\mid \exists x \forall y \exists z \forall t ((\neg q(x,y) \vee \neg q(y,t) \vee \neg q(t,y)) \& ((q(y,z) \& q(z,y)) \vee q(x,y))).$$

$\varphi^{S} \leftrightharpoons$

$$\varphi^{S} \leftrightharpoons \forall y \forall t ((\neg q(a,y) \vee \neg q(y,t) \vee \neg q(t,y)) \& ((q(y,f(y)) \& q(f(y),y)) \vee q(a,y))).$$

$$\models\mid \forall y \forall t ((\neg q(a,y) \vee \neg q(y,t) \vee \neg q(t,y)) \& (q(y,f(y)) \vee q(a,y)) \& (q(f(y),y) \vee q(a,y))).$$

$D_1 = \{\neg q(a, y_1), \neg q(y_1, t_1), \neg q(t_1, y_1)\}$

$D_2 = \{q(y_2, f(y_2)), q(a, y_2)\}$

$D_3 = \{q(f(y_3), y_3), q(a, y_3)\}.$

$D_4 = \mathrm{Collapse}(D_1\{y_1/a, t_1/a\}) = \{\neg q(a,a)\}.$

$D_5 = \mathrm{Res}(D_1\{t_1/y_2, y_1/f(y_2)\}, D_2) =$

$= \{\neg q(a, f(y_2)), \neg q(f(y_2), y_2), q(a, y_2)\}.$

$D_6 = \mathrm{Res}(D_5, D_3\{y_3/y_2\}) =$

$= \{\neg q(a, f(y_2)), q(a, y_2)\}$

$D_7 = \mathrm{Res}(D_2\{y_2/a\}, D_6\{y_2/a\}) =$

$= \{q(a,a)\}.$

$\blacksquare = \mathrm{Res}(D_4, D_7).$