

Решения на задачи от писмен изпит по
Логическо програмиране

30 юни 2019

Съдържание

1 Първа задача на пролог

Нека за всяко положително число i с $\xi(i)$ и с $\eta(i)$ означим съответно броя на простите числа от вида $6k + 1$ и $6k + 5$, които са по-малки от i .

Да се дефинират на пролог еднометсни предикати $su(X)$ и $tu(X)$, които по дадено цяло число X разпознават дали за някое положително цяло число i е в сила равенството $X = i + \xi(i)$ за $su(X)$ и $X = i - \eta(i)$ за $tu(X)$.

1.1 Общи предикати

```
isPrime(P) :-  
    not(P=<1),  
    P1 is P div 2,  
    not(( between(2, P1, Try),  
          not(P mod Try=\=0)  
        )).
```

```
between(A, B, A) :-  
    A=<B.
```

```
between(A, B, C) :-  
    A<B,  
    A1 is A+1,  
    between(A1, B, C).
```

1.2 Примерно решение на I.1

```
count(K, I, 0) :-  
    PK is 6*K+1,  
    PK>=I.  
count(K, I, N) :-  
    PK is 6*K+1,  
    PK<I,  
    isPrime(PK),  
    K1 is K+1,  
    count(K1, I, M),  
    N is M+1.
```

```

count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+1,
    PK<I,
    not(isPrime(PK)),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, N).

```

```

su(X) :-
    between(0, X, I),
    count(2, I, XiI),
    X:=I+XiI.

```

1.3 Примерно решение на I.2

```

count(K, I, 0) :-
    PK is 6*K+5,
    PK>=I.
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+5,
    PK<I,
    isPrime(PK),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, M),
    N is M+1.
count(K, I, N) :-
    PK is 6*K+5,
    PK<I,
    not(isPrime(PK)),
    K1 is K+1,
    count(K1, I, N).

```

```

mu(X) :-
    XX is X*X,
    between(X, XX, I),
    count(2, I, EtaI),
    X:=I-EtaI.

```

2 Втора задача на пролог

G -списък ще наричаме списък, всички елементи, на който са двуместни списъци от естествени числа. Нека L е G -списък. За всяко естествено число k с $do(L, K)$ да означим броя на онези елементи на L , чийто първи елемент k , а с $di(L, k)$ да означим броя на онези елементи от L , чийто втори елемент е k .

Да се дефинират на пролог едноместни предикати $e1g(L)$ и $e2g(L)$, които при преудовлетворяване генерират в L всички G -списъци, такива че за всяко естествено число k е в сила неравенството:

$$|do(L, k) - di(L, k)| \leq j, j \in \{1 \rightarrow e1g, 2 \rightarrow e2g\}$$

2.1 Общи предикати

```
nat(0).
nat(N) :-
    nat(M),
    N is M+1.

do([], _, 0).
do([[K, _]|T], K, N) :-
    do(T, K, M),
    N is M+1.
do([[K1, _]|T], K, N) :-
    K1 \= K,
    do(T, K, N).

di([], _, 0).
di([_, K]|T], K, N) :-
    di(T, K, M),
    N is M+1.
di([_, K1]|T], K, N) :-
    K1 \= K,
    di(T, K, N).

pairs(A, B) :-
    nat(N),
```

```

    between(1, N, A),
    B is N-A.

genKS(1, S, [S]).
genKS(K, S, [XI|R]) :-
    K>1,
    K1 is K-1,
    between(0, S, XI),
    S1 is S-XI,
    genKS(K1, S1, R).

generateList(L, S) :-
    pairs(K, S),
    K mod 2:=0,
    genKS(K, S, L1),
    packTuples(L1, L).

packTuples([], []).
packTuples([Do, Di|T], [[Do, Di]|R]) :-
    packTuples(T, R).

```

2.2 Примерно решение на I.1

```

e1g([]).
e1g(L) :-
    generateList(L, S),
    not(( between(0, S, K),
           not(condition(L, K))
         )),
    ).

condition(L, K) :-
    do(L, K, N),
    di(L, K, M),
    abs(N-M)=<1.

```

2.3 Примерно решение на I.2

```
e2g([]).  
e2g(L) :-  
    generateList(L, S),  
    not(( between(0, S, K),  
           not(condition(L, K))  
           )).  
  
condition(L, K) :-  
    do(L, K, N),  
    di(L, K, M),  
    abs(N-M)=<2.
```

3 Задача за определимост

Сума на две множества от точки в равнината $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ наричаме:

$$A + B = \{(a_1 + b_1, a_2 + b_2) \mid (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\}.$$

Разглеждаме език $\mathcal{L} = \langle \text{sum}; \text{cat} \rangle$ с двуместен функционален и двуместен предикатен символ. $S = \langle 2^{\mathbb{R}^2}; \text{sum}^S, \text{cat}^S \rangle$ е структура за \mathcal{L} с носител множествата от точки в равнината и интерпретации:

$$\begin{aligned} \text{sum}^S(A, B) &= A + B \\ \text{cat}^S(A, B) &\iff A \cap B \neq \emptyset \\ \text{cut}^S(A, B) &\iff A \cap B = \emptyset. \end{aligned}$$

$$* \text{cut}^S(A, B) \equiv \neg \text{cat}^S(A, B)$$

Да се докаже, че в S :

1. равенството на множества от точки е определимо.
2. подмножество на множества от точки е определимо.
3. $\{(0, 0)\}$ и \mathbb{R}^2 са определими.
4. $\text{single} \equiv \{\{(a, b)\} \mid a, b \in \mathbb{R}^2\}$, множеството от всички едноточкови множества е определимо.
5. $\text{centerSymmetric} \equiv \{A \mid A \subseteq \mathbb{R}^2, A = \{(-a, -b) \mid (a, b) \in A\}\}$ множеството от централно симетрични множества е определимо.
6. Определими ли са множествата $\{(0, 1), (0, -1)\}$ или $\{(1, 0), (-1, 0)\}$?
Защо?
7. Кой са автоморфизмите на S ? Защо?

3.1 Примерно решение

$$\begin{aligned}
\varphi_{\emptyset}(A) &\Leftarrow \neg \exists C \text{cat}(A, C). \\
\psi_{\emptyset}(A) &\Leftarrow \neg \text{cat}(A, A). \\
\varphi_{=}(A, B) &\Leftarrow \forall C (\text{cat}(A, C) \iff \text{cat}(B, C)). \\
\varphi_{\subseteq}(A, B) &\Leftarrow \forall C (\text{cat}(A, C) \implies \text{cat}(B, C)). \\
\varphi_{(0,0)}(A) &\Leftarrow \forall C \varphi_{=}(C, \text{sum}(A, C)). \\
\varphi_{\mathbb{R}^2}(A) &\Leftarrow \forall C \varphi_{=}(A, \text{sum}(A, C)). \\
\varphi_{\text{single}}(A) &\Leftarrow \forall C (\varphi_{\subseteq}(C, A) \implies (\varphi_{\emptyset}(C) \vee \varphi_{=}(C, A))). \\
\varphi_{\text{centerSymmentric}}(A) &\Leftarrow \exists B \forall C \exists D (\varphi_{(0,0)}(B) \& (\varphi_{\subseteq}(C, A) \& \varphi_{\text{single}}(C) \implies \\
&\quad (\varphi_{\subseteq}(D, A) \& \varphi_{\text{single}}(D) \& \varphi_{=}(D, C, B))).
\end{aligned}$$

Нека $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $h((a, b)) = (b, a)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Лесно се показва, че е биекция и $h = h^{-1}$.

Имаме и $\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2))\} = \text{sum}^S(\{h((a_1, a_2))\}, \{h((b_1, b_2))\})$,
 $(a_1, a_2) \in A$, $(b_1, b_2) \in B$. т.е.

$h((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) = h((a_1, a_2)) + h((b_1, b_2))$, $(a_1, a_2) \in A$, $(b_1, b_2) \in B$.

Нека $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ като $H(A) = \{h((a, b)) \mid (a, b) \in A\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $H = H^{-1}$.

Сега дали е изпълнено, че $H(\text{sum}^S(A, B)) = \text{sum}^S(H(A), H(B))$ и
 $(A, B) \in \text{cat}^S \iff (H(A), H(B)) \in \text{cat}^S$?

$$\begin{aligned}
H(\text{sum}^S(A, B)) &= \\
&\{h((c_1, c_2)) \mid (c_1, c_2) \in A + B\} = \\
&\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) \mid (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\} = \\
&\{h((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) \mid (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\} = \\
&\{h((a_1, a_2)) + h((b_1, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in A, (b_1, b_2) \in B\} = \\
&\{(a'_1 + b'_1, a'_2 + b'_2) \mid (a'_1, a'_2) \in H(A), (b'_1, b'_2) \in H(B)\} = \\
&\text{sum}^S(H(A), H(B)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A, B) \in \text{cat}^S &\iff A \cap B \neq \emptyset \iff \\
&\{(a_1, a_2) \mid (a_1, a_2) \in A\} \cap \{(b_1, b_2) \mid (b_1, b_2) \in B\} \neq \emptyset \iff \\
&\{(a'_1, a'_2) \mid (a'_1, a'_2) \in H(A)\} \cap \{(b'_1, b'_2) \mid (b'_1, b'_2) \in H(B)\} \neq \emptyset \iff \\
&H(A) \cap H(B) \neq \emptyset \iff (H(A), H(B)) \in \text{cat}^S.
\end{aligned}$$

Кои са всички автоморфизми на \mathcal{S} ?

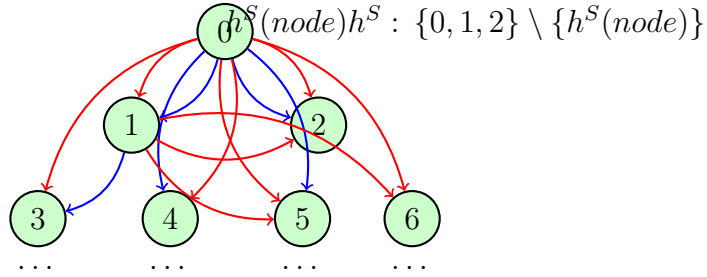
1. Ротации.
2. Осева симетрия.
3. Въртяща хомотетия с център $(0,0)$.

4 Задача за изпълнимост

Нека \mathcal{L} е език с едноместен функционален символ $h(f)$, двуместен предикатен символ p и формално равенство. Изпълнимо ли е множеството от формули над езика \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y \exists z (y \neq z \& q(x, z) \ \& \ q(x, y)) \\ & \forall x \forall z ([q(x, z) \Rightarrow p(x, z)] \ \& \ p(x, z) \Rightarrow \neg p(z, x)) \\ & \forall x \forall y \forall z (p(x, y) \& p(y, z) \Rightarrow p(x, z)) \\ & \forall x \forall y (h(x) = h(y) \Rightarrow \neg q(x, y)) \\ & \forall x \exists y (h(x) = h(y) \ \& \ p(x, y))? \end{aligned}$$

4.1 Примерно решение



$$S = (\mathbb{N}, p^S, q^S, h^S)$$

$$h^S(node) = node \pmod{3}, node \in \mathbb{N}$$

$$q^S \Rightarrow \{(node_1, node_2) \mid node_1 \in \mathbb{N} \& node_2 \in \mathbb{N} \& node_1 < node_2 \& node \pmod{3} \neq node_2 \pmod{3}\}$$

ребра от изходен връх $node$ с $h^S(node)$ до върхове на следващи нива с четности спрямо $h^S : \{0, 1, 2\} \setminus \{h^S(node)\}$

$$p^S \Rightarrow \{(node_1, node_2) \mid node_1 \in \mathbb{N} \& node_2 \in \mathbb{N} \& node_1 < node_2\}$$

5 Задача за резолюция

С метода на резолюцията да се докаже, че множеството от следните четири формули е неизпълнимо:

II.1

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (p(x, y) \& \forall z (p(z, y) \implies r(x, z))), \\ & \forall x (\exists y p(y, x) \implies \exists y (p(y, x) \& \neg \exists z (p(z, y) \& p(z, x)))), \\ & \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \& r(y, z)) \implies p(x, z)), \\ & \neg \forall x \exists y (p(x, x) \implies (q(y, x) \& \neg q(y, x))). \end{aligned}$$

* Тъй като $(q(y, x) \& \neg q(y, x))$ е винаги лъжа, то последната формула е еквивалентна на:

$$\neg \forall x \exists y (\neg p(x, x)) \equiv \exists x p(x, x).$$

II.2

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (q(y, x) \& \forall z (q(y, z) \implies r(z, x))), \\ & \forall x (\exists y q(x, y) \implies \exists y (q(x, y) \& \neg \exists z (q(y, z) \& q(x, z)))), \\ & \forall x \forall y \forall z ((q(y, x) \& r(z, y)) \implies q(z, x)), \\ & \neg \forall x \forall z (q(x, x) \implies (r(x, z) \& \neg r(x, z))). \end{aligned}$$

* Тъй като $(r(x, z) \& \neg r(x, z))$ е винаги лъжа, то последната формула е еквивалентна на:

$$\neg \forall x \forall z (\neg q(x, x)) \equiv \exists x q(x, x).$$

5.1 Примерно решение

II.1

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\begin{aligned} \varphi_1^S & \equiv \forall x \forall z (p(x, f(x)) \& (\neg p(z, f(x)) \vee r(x, z))). \\ \varphi_2^S & \equiv \forall x \forall t \forall z ((p(g(x), x) \vee \neg p(t, x)) \& (\neg p(z, g(x)) \vee \neg p(z, x) \vee \neg p(t, x))). \\ \varphi_3^S & \equiv \forall x \forall y \forall z (\neg r(y, z) \vee \neg p(x, y) \vee p(x, z)). \\ \psi^S & \equiv p(a, a). \end{aligned}$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$D_1 = \{p(x_1, f(x_1))\};$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}; \\
D_3 &= \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\}; \\
D_4 &= \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\}; \\
D_5 &= \{\neg r(y_5, z_5), \neg p(x_5, y_5), p(x_5, z_5)\}; \\
D_6 &= \{p(a, a)\}.
\end{aligned}$$

II.2

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^S &\Rightarrow \forall x \forall z (q(f(x), x) \& (\neg q(f(x), z) \vee r(z, x))). \\
\varphi_2^S &\Rightarrow \forall x \forall z \forall t ((q(x, g(x)) \vee \neg q(x, t)) \& (\neg q(g(x), z) \vee \neg q(x, z) \vee \neg q(x, t))). \\
\varphi_3^S &\Rightarrow \forall z \forall y \forall x (\neg r(z, y) \vee \neg q(y, x) \vee q(z, x)). \\
\psi^S &\Rightarrow q(a, a).
\end{aligned}$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{q(f(x_1), x_1)\}; \\
D_2 &= \{\neg q(f(x_2), z_2), r(z_2, x_2)\}; \\
D_3 &= \{q(x_3, g(x_3)), \neg q(x_3, t_3)\}; \\
D_4 &= \{\neg q(g(x_4), z_4), \neg q(x_4, z_4), \neg q(x_4, t_4)\}; \\
D_5 &= \{\neg r(z_5, y_5), \neg q(y_5, x_5), q(z_5, x_5)\}; \\
D_6 &= \{q(a, a)\}.
\end{aligned}$$

И за двата варианта един примерен резолютивен извод на ■ е:

$$\begin{aligned}
D_7 &= Res(D_2\{x_2/y_5, z_2/z_5\}, D_5) = \\
&\quad \{\neg q(f(y_5), z_5), \neg q(y_5, x_5), q(z_5, x_5)\}; \\
D_8 &= Res(D_3\{x_3/f(y_5)\}, D_7\{z_5/g(f(y_5))\}) = \\
&\quad \{\neg q(f(y_5), t_3), \neg q(y_5, x_5), q(g(f(y_5)), x_5)\}; \\
D_9 &= Res(D_4\{x_4/f(y_5), z_4/x_5\}, D_8) = \\
&\quad \{\neg q(f(y_5), t_4), \neg q(f(y_5), x_5), \neg q(g(f(y_5)), t_3), \neg q(y_5, x_5)\}; \\
D_{10} &= Collapse(D_9\{t_3/x_5, t_4/x_5\}) = \\
&\quad \{\neg q(f(y_5), x_5), \neg q(y_5, x_5)\}; \\
D_{11} &= Res(D_1, D_{10}\{y_5/x_1, x_5/x_1\}) = \\
&\quad \{\neg q(x_1, x_1)\}; \\
Res(D_{11}\{x_1/a\}, D_6) &= \blacksquare.
\end{aligned}$$