Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

06 юли 2020

Ако намерите някакъв проблем с решенията, драскайте ми :)

1 Първа задача на пролог

Редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ се дефинира рекурентно:

1. *вариант 1:* $a_n = 5a_{n-1}^2 + 3a_{n-2}^3, a_0 = 0, a_1 = 1$
2. *вариант 2:* $a_n = 3a_{n-1}^3 + 2a_{n-2}^2, a_0 = 0, a_1 = 1$

Да се дефинира на пролог предикат $p(A)$, който при дадено естествено число A успява точно тогава, когато то не е елемент на редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

1.1 Примерно решение 1

```
% Helper predicates: between.

a(0, 0, 1, 1).
a(Prev, N1, Curr, N):- N1 > 0, N2 is N1 - 1, N is N1 + 1,
            a(PrevPrev, N2, Prev, N1),
            Curr is 5 * Prev * Prev + 3 * PrevPrev * PrevPrev *
            ↪ PrevPrev.

p(A):- not(( between(0, A, N), a(A, N, _, _) )).
```

1.2 Примерно решение 2

```
a(A, B, A).
a(A, B, M):- A < M, Curr is 5 * B * B + 3 * A * A * A, a(B, C, M).

p(A):- not( a(0,1,A) ).
```

2 Втора задача на пролог

Казваме, че списъкът X от естествени числа е:

1. *вариант 1: контракуляр* за списъка от списъци от естествени числа Y, ако всеки елемент на Y съдържа елемент, който се дели без остатък от всички елементи на X, а всеки елемент на X се дели без остатък от някой елемент на елемент на Y.
$(\forall A \in Y)(\exists E_A \in A)(\forall E_X \in X)[E_A \equiv 0(modE_X)] =\!\!|\!\!\models$
$\neg(\exists A \in Y)\neg(\exists E_A \in A)\neg(\exists E_X \in X)\neg[E_A \equiv 0(modE_X)]$
и
$(\forall E_X \in X)(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_X \equiv 0(modE_A)] =\!\!|\!\!\models$
$\neg(\forall E_X \in X)\neg(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_X \equiv 0(modE_A)]$

2. *вариант 2: кентракуляр* за списъка от списъци от естествени числа Y, ако всеки елемент на Y съдържа елемент, който дели без остатък някой елемент на X, а всеки елемент на X дели без остатък някой елемент на елемент на Y.
$(\forall A \in Y)(\exists E_A \in A)(\exists E_X \in X)[E_X \equiv 0(modE_A)] =\!\!|\!\!\models$
$\neg(\exists A \in Y)\neg(\exists E_A \in A)(\exists E_X \in X)[E_X \equiv 0(modE_A)]$
и
$(\forall E_X \in X)(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_A \equiv 0(modE_X)] =\!\!|\!\!\models$
$\neg(\forall E_X \in X)\neg(\exists A \in Y)(\exists E_A \in A)[E_A \equiv 0(modE_X)]$

Да се дефинира предикат $p(X, Y)$, който по даден списък от списъци от естествени числа Y намира контракуляр X с възможно най-много различни елементи.

2.1 Примерно решение

```
% Helper predicates: range, member, subsequence, flatten, length.

range(B, B, [B]).
range(A, B, [A|R]):- A < B, A1 is A + 1, range(A1, B, R).

maxTwoElements(A, B, B):- less(A, B).
maxTwoElements(A, B, A):- not( less(A, B) ).

maxElement([M], M).
maxElement([H|T], M):- maxElement(T, N), maxTwoElements(N, H, M).
```

```
p(X, Y):- flatten(Y, FY), maxElement(FY, Max),
            range(0, Max, AllNums), subsequence(AllNums, X),
            kontracular(X, Y), length(X, LX),
            not(( subsequence(AllNums, Z), kontracular(Z, Y),
                    length(Z, LZ), LZ > LX )).

kontracular(X, Y):- not(( member(A, Y),
                        not(( member(E_a, A),
                            not(( member(E_x, X),
                                    not( E_a mod E_x =:= 0)
                            ))
                        ))
                    )),
                    not(( member(E_x, X),
                        not(( member(A, Y),
                                member(E_a, A),
                                    E_x mod E_a =:= 0
                        ))
                    )).

kentracular(X, Y):- not(( member(A, Y),
                        not(( member(E_a, A),
                                member(E_x, X),
                                    E_x mod E_a =:= 0
                        ))
                    )),
                    not(( member(E_x, X),
                        not(( member(A, Y),
                            member(E_a, A),
                                    E_a mod E_x =:= 0
                        ))
                    )).
```

3 Задача за определимост

$\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е език с единствен триместен предикатен символ.
$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; p^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$, в която:

$$p^{\mathcal{A}}(k, n, m) \iff k + n = m + 2$$

1. Да се докаже, че всеки синглетон е определим.
2. Да се определият равенство и строго по-малко.

3.1 Примерно решение

$$\varphi_2(x) \leftrightharpoons p(x, x, x). \quad x + x = x + 2 \iff x = 2$$
$$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_2(z) \,\&\, p(x, z, y)). \quad x + 2 = y + 2 \iff x = y$$
$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \neg\exists y(p(x, x, y)). \quad \forall y[x + x \neq y + 2] \iff x = 0$$
$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \,\&\, p(x, x, y)). \quad x + x = 0 + 2 \iff x = 1$$
$$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \exists y\exists z(\varphi_0(y) \,\&\, \varphi_1(z) \,\&\, p(x, y, z)). \quad x + 0 = 1 + 2 \iff x = 3$$
$$\varphi_\leq(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\neg\varphi_0(z) \,\&\, \neg\varphi_1(z) \,\&\, \neg\varphi_2(z) \,\&\, p(x, z, y)).$$
$$x + z = y + 2 \,\&\, z \geq 2 \iff x + (z - 2) = y \,\&\, z \geq 2 \iff x \leq y$$

$$\varphi_<(x, y) \leftrightharpoons \varphi_\leq(x, y) \,\&\, \neg\varphi_=(x, y). \quad x \leq y \,\&\, x \neq y$$
$$\varphi_{+1}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_3(z) \,\&\, p(x, z, y)). \quad x + 3 = y + 2 \iff y = x + 1$$

Оттам нататък с индукция по n доказваме, че всеки синглетон на универсиума е определим като в базата са ни: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, индукционната хипотеза е за φ_n и $\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_n(y) \,\&\, \varphi_{+1}(y, x))$.

4 Задача за изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството от следните формули:

4.1 Вариант 1

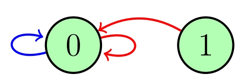
$$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists x(p(x,x) \,\&\, q(x,x)).$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(p(x,x) \Rightarrow p(a,x)).$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \exists y(q(x,y) \,\&\, q(y,b)).$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x(p(b,x) \,\&\, q(c,x)).$$
$$\varphi_5 \leftrightharpoons q(b,b) \,\&\, \neg p(c,c) \,\&\, \neg q(c,c).$$

4.2 Вариант 2

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists x(p(x,x) \Rightarrow q(x,x)).$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall y \exists x(q(x,b) \,\&\, q(y,x)).$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x(p(b,x) \,\&\, q(c,x)).$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(y,x) \Leftrightarrow p(x,y)).$$
$$\varphi_5 \leftrightharpoons p(a,a) \,\&\, q(b,b) \,\&\, \neg p(c,c) \,\&\, \neg q(c,c).$$

(a, b и c са индивидни константи.)

4.3 Примерно решение и за двата варианта



$$S = (\{0,1\}; p^S, q^S; a^S, b^S, c^S)$$
$$p^S \leftrightharpoons \{\langle 0,0\rangle\}$$
$$q^S \leftrightharpoons \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\}$$
$$a^S \leftrightharpoons 0, b^S \leftrightharpoons 0, c^S \leftrightharpoons 1$$

5 Задача за резолюция

5.1 Вариант 1

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 са следните четири формули:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y((q(x,y) \Rightarrow p(x,y)) \,\&\, \forall z(p(z,y) \Rightarrow r(x,z))).$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(\exists y p(y,x) \Rightarrow \exists y(p(y,x) \,\&\, \neg\exists z(p(z,y) \,\&\, p(z,x)))).$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall z\left(\exists x \exists y(\neg q(x,y) \,\&\, \neg p(x,y)) \Rightarrow \forall z_1 q\left(z_1, z\right)\right).$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \,\&\, r(y,z)) \Rightarrow p(x,z)).$$

С метода на резолюцията докажете, че: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \forall x \neg p(x,x)$.

5.2 Вариант 2

Нека $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 са следните четири формули:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y(q(y,x) \,\&\, \forall z(q(y,z) \Rightarrow (r(z,x) \vee p(y,z)))).$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(\exists y q(x,y) \Rightarrow \exists y(q(x,y) \,\&\, \neg\exists z(q(y,z) \,\&\, q(x,z)))).$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall z_1\left(\exists z \exists x \exists y(p(x,y) \,\&\, q(x,z)) \Rightarrow \forall z_2 \neg p\left(z_1, z_2\right)\right).$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z((q(y,x) \,\&\, r(z,y)) \Rightarrow q(z,x)).$$

С метода на резолюцията докажете, че: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models \forall x \neg q(x,x)$.

5.3 Примерно решение за вариант 1 (вариант 2 е аналогичен)

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\varphi_1^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall z((p(x,f(x)) \vee \neg q(x,f(x))) \,\&\, (\neg p(z,f(x)) \vee r(x,z))).$$
$$\varphi_2^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall t \forall z((p(g(x),x) \vee \neg p(t,x)) \,\&\, (\neg p(z,g(x)) \vee \neg p(z,x) \vee \neg p(t,x)).$$
$$\varphi_3^{final} \rightleftharpoons \forall z \forall x \forall y \forall z_1(q(x,y) \vee p(a,y), \vee q(z_1,z)).$$
$$\varphi_4^{final} \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z(\neg r(y,z) \vee \neg p(x,y) \vee p(x,z)).$$
$$\psi^{final} \rightleftharpoons p(a,a).$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$
\begin{gathered}
D_1 = \{\neg q(x_1, f(x_1)), p(x_1, f(x_1))\}; \\
D_2 = \{\neg p(z_2, f(x_2)), r(x_2, z_2)\}; \\
D_3 = \{p(g(x_3), x_3), \neg p(t_3, x_3)\}; \\
D_4 = \{\neg p(z_4, g(x_4)), \neg p(z_4, x_4), \neg p(t_4, x_4)\}; \\
D_5 = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5), q(z_1, z_5)\}; \\
D_6 = \{\neg r(y_6, z_6), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\}; \\
D_7 = \{p(a, a)\}.
\end{gathered}
$$

Примерен резолютивен извод на $\blacksquare$ е:

$$D_8 = Collapse(D_5\{z_1/x_5, z_5, y_5\}) = \{q(x_5, y_5), p(x_5, y_5)\};$$

$$D_9 = Res(D_1, D_8\{x_5/x_1, y_5/f(x_1)\}) = \{p(x_1, f(x_1))\};$$

$$D_{10} = Res(D_2\{x_2, y_6, z_2/z_6\}, D_6) = \{\neg p(z_6, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, z_6)\};$$

$$D_{11} = Res(D_{10}\{z_6/g(f(y_6))\}, D3\{x_3/f(y_6)\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), p(x_6, g(f(y_6)))\};$$

$$D_{12} = Res(D_{11}, D_4\{x_4/f(y_6), z_4/x_6\}) = \{\neg p(t_3, f(y_6)), \neg p(x_6, y_6), \neg p(t_4, f(y_6)), \neg p(x_6, f(y_6))\};$$

$$D_{13} = Collapse(D_{12}\{t_3/a, y_6/a, t_4/a, x_6/a\}) = \{\neg p(a, f(a)), \neg p(a, a)\}.;$$

$$D_{14} = Res(D_{13}, D_9\{x_1/a\}) = \{\neg p(a, a)\};$$

$$\blacksquare = Res(D_{14}, D_7).$$