Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

01 септември 2019

Съдържание

1 Първа задача на пролог **2**
1.1 Примерно решение 2

2 Втора задача на пролог **5**
2.1 Примерно решение 5

3 Задача за определимост **8**
3.1 Примерно решение 9

4 Задача за изпълнимост **11**
4.1 Примерно решение 11

5 Задача за резолюция **13**
5.1 Примерно решение 14

1 Първа задача на пролог

Домино ще наричаме двойка (H, V) от списъци, всеки елемент на които е списък от две естествени числа. *Правилно покритие на квадрата $N \times N$ с доминото* (H, V), където N е естествено число, ще неричаме такава матрица $(a_{i\,j})_{0\leq i\leq N, 0\leq j\leq N}$, че за всяко $l\,, 0 \leq l \leq N$ и за всяко m, $0 \leq m < N$, списъкът $[a_{m\,l}, a_{m+1\,l}]$ е елемент на H, а списъкът $[a_{l\,m}, a_{l\,m+1}]$ е елемент на V.
Да се дефинира на пролог 4-местен предикат $cover(H\,, V\,, N\,, K)$, който по дадени домино (H, V) и естествени числа N и K разпознава дали квадратът $N \times N$ може да се покрие правилно с домино (H, V) така, че:

- в долния му ляв ъгъл да е числото K (т.е. $a_{00} = K$).
- в горния му десен ъгъл да е числото K (т.е. $a_{NN} = K$).

1.1 Примерно решение

```
% Helpers: append, member, between, flatten, length, reverse.
elementAt(X, 0, [X|_]).
elementAt(X, N, [_|T]) :-
    elementAt(X, M, T),
    N is M+1.

last([Last], Last).
last([_|T], R) :-
    last(T, R).

selectElement(M, L, N, AML, Matrix) :-
    Search is M*N+L,
    elementAt(AML, Search, Matrix).

select(X, L, R) :-
    append(A, [X|B], L),
    append(A, B, R).

permute([], []).
permute(L, [X|R]) :-
```

```
    select(X, L, Q),
    permute(Q, R).

prefix(P, L) :-
    append(P, _, L).

permutatedSubsequence(L, PSL) :-
    permute(L, PL),
    prefix(PSL, PL).

conditionByGroup(Matrix, K, 1) :-
    Matrix=[K|_].
conditionByGroup(Matrix, K, 2) :-
    last(Matrix, K).


condition(H, V, Matrix, N) :-
    N1 is N-1,
    not(( between(0, N, L),
          between(0, N1, M),
          M1 is M+1,
          selectElement(M, L, N, AML, Matrix),
          selectElement(M1, L, N, AM1L, Matrix),
          selectElement(L, M, N, ALM, Matrix),
          selectElement(L, M1, N, ALM1, Matrix),
          not(( member([AML, AM1L], H),
                member([ALM, ALM1], V)
              ))
        )).

tryCover(H, V, N, K, Group) :-
    flatten(H, FH),
    flatten(V, FV),
    append(FH, FV, M),
    permutatedSubsequence(M, Matrix),
    N1 is N+1,
    NxN is N1*N1,
    length(Matrix, NxN),
```

```
    conditionByGroup(Matrix, K, Group),
    condition(H, V, Matrix, N),
    prettyWriteMatrix(Matrix, N, N).

cover(H, V, N, K, Group) :-
    tryCover(H, V, N, K, Group).

prettyWriteMatrix(L, N, N) :-
    reverse(L, R),
    prettyWrite(R, N, N).

prettyWrite([], _, _) :-
    nl.
prettyWrite([H|T], N, 0) :-
    write(H),
    nl,
    prettyWrite(T, N, N).
prettyWrite([H|T], N, M) :-
    M>0,
    M1 is M-1,
    write(H),
    write(" "),
    prettyWrite(T, N, M1).
```

2 Втора задача на пролог

Нека L_1 и L_2 са съответно списъците $[a_1, ..., a_n]$ и $[b_1, ..., b_k]$. С $L_1 \bullet L_2$ означаваме списъка $[a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_k]$, а за цели положителни числа k дефинираме L_1^k така: $L_1^1 = L_1$, $L_1^{k+1} = L_1^k \bullet L_1$. За един сиссък L казваме, че е *цикличен*, ако съществуват непразен списък U, положително цяло число l и сисъци V и W, за които са в сила равенствата $L = U^l \bullet V$ и $V = V \bullet W$.
Да се дефинира на пролог двуместен предикат $cycl(A, L)$, който при преудовлетворяване генерира в L всички циклични списъци с елементи от A.

2.1 Примерно решение

```
% Helper predicates: member, append, length.
insert(X, L, R) :-
    append(A, B, L),
    append(A, [X|B], R).

permute([], []).
permute([H|T], R) :-
    permute(T, Q),
    insert(H, Q, R).

isCyclic(L) :-
    append(UL, V, L),
    cyclicConcatenations(UL, U),
    U\=[],
    append(V, W, U),
    writeThem(L, UL, U, V, W).

writeThem(L, UL, U, V, W) :-
    write("L: "),
    write(L),
    write(". UL: "),
    write(UL),
    write(". V: "),
    write(V),
```

```
    write(". U: "),
    write(U),
    write(". W: "),
    write(W).

cyclicConcatenations(UL, U) :-
    length(UL, N),
    tryMultiConcat(N, N, UL, U).

removeDuplicates([], []).
removeDuplicates([H|T], [H|R]) :-
    not(member(H, R)),
    removeDuplicates(T, R).
removeDuplicates([H|T], R) :-
    member(H, R),
    removeDuplicates(T, R).

tryMultiConcat(M, N, UL, U) :-
    M>0,
    N mod M=:=0,
    divideInEqualListSizes(UL, M, M, DivUL),
    removeDuplicates(DivUL, [U]).
tryMultiConcat(M, N, UL, U) :-
    M>0,
    M1 is M-1,
    tryMultiConcat(M1, N, UL, U).

divideInEqualListSizes([], 0, _, []).
divideInEqualListSizes([H|T], Cnt, M, [Curr|R]) :-
    Cnt>0,
    Cnt1 is Cnt-1,
    getMElementList([H|T], M, Curr, Rest),
    divideInEqualListSizes(Rest, Cnt1, M, R).

getMElementList(Rest, 0, [], Rest).
getMElementList([H|T], N, [H|R], Rest) :-
    N>0,
    N1 is N-1,
```

```
    getMElementList(T, N1, R, Rest).

prefix(P, L) :-
    append(P, _, L).

cycl(A, L) :-
    permute(A, PA),
    prefix(L, PA),
    isCyclic(L).
```

3 Задача за определимост

Отъждествяваме точките в равнината с наредена двойка от реални числа. За едно множество от точки l ще казваме, че е лъч с начало (0,0), ако съществуват такива реални числа a и b, че $l = \{(\lambda a, \lambda b) \mid \lambda \in [0, +\infty)\}$.
За един лъч с начало (0,0), ако е различен от $\{(0,0)\}$, ще казваме, че е *нетривиален лъч с начало* $\{(0,0)\}$, ако е различен от $\{(0,0)\}$.
Конус наричаме непразно множество от точки C в равнината, което заедно с всяка своя точка P съдържа целия лъч $OP^{\rightarrow}$, тоест:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 ((a,b) \in C \Rightarrow \forall \lambda \geq 0((\lambda a, \lambda b) \in C)).$$

$\mathcal{L} = \langle cone, cut \rangle$ е език с един едноместен и един двуместен предикатен символ. $\mathcal{S} = \langle 2^{\mathbb{R}^2}; cone^S, cut^S \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$ с носител множества от точки в равнината, в която:

$$\begin{aligned} cone^S(X) &\iff X \text{ е конус} \\ cut^S(X,Y) &\iff (X \cap Y) \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Да се докаже, че:

1. $\{(0,0)\}$, $\emptyset$ и $\mathbb{R}^2$ са определими.

2. множеството от лъчи с начало $O = (0,0)$ е определимо.

3. равенството на конуси, тоест релацията:

$$R = \{(X,X) \mid X \text{ е конус}\}$$

   е определима.

4. никой нетривиален лъч с начало $O = (0,0)$ не е определим.

5. Определимо ли е множеството от прави през точката $O = (0,0)$?

За вариант 2 разлики:

- *Конус* наричаме множество (може и да е празно) от точки C в равнината, което заедно с всяка своя точка P...

- $cat^S(X,Y) \iff (X \cap Y) = \{(0,0)\}$.

3.1 Примерно решение

Л.1

$$\varphi_{=}(A, B) \leftrightharpoons \forall C(cut(A, C) \iff cut(B, C)).$$
$$\varphi_{\subseteq}(A, B) \leftrightharpoons \forall C(cut(A, C) \Longrightarrow cut(B, C)).$$
$$\varphi_{cone\subseteq}(A, B) \leftrightharpoons cone(A) \,\&\, cone(B) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(A, B).$$
$$\varphi_{cone=}(A, B) \leftrightharpoons \varphi_{cone\subseteq}(A, B) \,\&\, \varphi_{cone\subseteq}(B, A).$$
$$\varphi_{\emptyset}(A) \leftrightharpoons \neg cone(A) \,\&\, \forall B \varphi_{\subseteq}(A, B).$$
$$\varphi_{\{(0,0)\}}(A) \leftrightharpoons cone(A) \,\&\, \forall B \neg cut(A, B).$$
$$\varphi_{\mathbb{R}^2}(A) \leftrightharpoons \forall B \varphi_{\subseteq}(B, A).$$

Л.2

$$\varphi_{=}(A, B) \leftrightharpoons \forall C(cat(A, C) \iff cat(B, C)).$$
$$\varphi_{\subseteq}(A, B) \leftrightharpoons \forall C(cat(A, C) \Longrightarrow cat(B, C)).$$
$$\varphi_{cone\subseteq}(A, B) \leftrightharpoons cone(A) \,\&\, cone(B) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(A, B).$$
$$\varphi_{cone=}(A, B) \leftrightharpoons \varphi_{cone\subseteq}(A, B) \,\&\, \varphi_{cone\subseteq}(B, A).$$
$$\varphi_{\emptyset}(A) \leftrightharpoons \forall B \varphi_{\subseteq}(A, B).$$
$$\varphi_{\{(0,0)\}}(A) \leftrightharpoons \neg\varphi_{\emptyset}(A) \,\&\, cone(A) \,\&\, \forall B(cone(B) \,\&\, \neg\varphi_{\emptyset}(B) \Longrightarrow cat(A, B)).$$
$$\varphi_{\mathbb{R}^2}(A) \leftrightharpoons \forall B \varphi_{\subseteq}(B, A).$$

Общ и за двата варианта

$$\varphi_{vector\_with\_origin\_(0,0)}(A) \leftrightharpoons \forall B(\varphi_{cone\subseteq}(B, A) \,\&\neg\varphi_{\{(0,0)\}}(B) \Longrightarrow \varphi_{cone=}(A, B)).$$

Никой нетривиален лъч през (0,0) не е определим (за вариант 1, вариант 2 е аналогичен).
Нека $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $h((a, b)) = (-a, -b)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Лесно се показва, че е биекция и $h = h^{-1}$.
Нека $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ като $H(A) = \{h((a, b)) \,|\, (a, b) \in A\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $H = H^{-1}$.
Сега дали е изпълнено,че:
$A \in cone^S \iff H(A) \in cone^S$ и

$(A, B) \in cut^S \iff (H(A), H(B)) \in cut^S?$

$$(A, B) \in cut^S \iff (A \cap B) \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset \iff$$
$$\{(a_1, a_2) \,|\, (a_1, a_2) \in A\} \cap \{(b_1, b_2) \,|\, (b_1, b_2) \in B\} \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset \iff$$
$$\{(a_1', a_2') \,|\, (a_1', a_2') \in H(A)\} \cap \{(b_1', b_2') \,|\, (b_1', b_2') \in H(B)\} \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset \iff$$
$$H(A) \cap H(B) \setminus \{(0,0)\} \neq \emptyset \iff (H(A), H(B)) \in cut^S.$$

$$A \in cone^S \iff \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2((a, b) \in A \Rightarrow \forall \lambda \geq 0((\lambda a, \lambda b) \in A)) \iff$$
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2((a, b) \in H(A) \Rightarrow \forall \lambda \geq 0((\lambda a, \lambda b) \in H(A))) \iff H(A) \in cone^S.$$

Множеството от прави през точката $O = (0, 0)$ не е определимо (за вариант 1, вариант 2 е аналогичен).
Нека $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и $h((a, b)) = (a, b * (-1))$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,\&\, b \geq 0$ (осева симетрия спрямо оста Ox).
Лесно се показва, че е биекция и обратната е $h^{-1}((a, b)) = (a, b*(-1))$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,\&\, b \leq 0$.
Нека $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ като $H(A) = \{h((a, b)) \,|\, (a, b) \in A\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $H^{-1} = \{h^{-1}((a, b)) \,|\, (a, b) \in A\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.
Аналогично на предната подточка се доказва, че са изпълнени:
$A \in cone^S \iff H(A) \in cone^S$ и
$(A, B) \in cut^S \iff (H(A), H(B)) \in cut^S$.

4 Задача за изпълнимост

Нека:

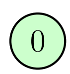
$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \vee p(y,x) \vee (x = y)),$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \neg \exists x \exists y \exists z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \,\&\, p(z,x)),$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z \exists t (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \,\&\, p(z,t) \,\&\, p(t,x)),$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)).$$

където p е двуместен предикатен символ, а $=$ е формално равенство. Нека:

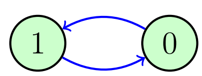
$$\Phi_1 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2\}, \Phi_2 \leftrightharpoons \Phi_1 \cup \{\varphi_3\}, \Phi_3 \leftrightharpoons \Phi_1 \cup \{\varphi_4\}, \Phi_4 \leftrightharpoons \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3.$$

Докажете кои от множествата $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ са изпълними и кои не са изпълними.

4.1 Примерно решение

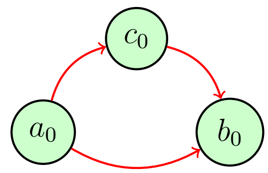


За Φ_1: $S = (\{0\}, p^S)$
$p^S \rightleftharpoons \emptyset$

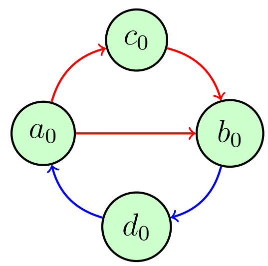


За Φ_2: $S = (\{0,1\}, p^S)$
$p^S \rightleftharpoons \{(0,1),(1,0)\}$

Φ_3 е неизпълнимо и съответно и Φ_4, т.к. $\Phi_3 \subset \Phi_4$.
Нека допуснем, че Φ_3 е изпълнимо и нека S е негов модел. Заради φ_4 няма как p^S да е $\emptyset$. Няма как в носителя на S да има само един елемент (в носителя има винаги поне един), защото тогава ще нарушим φ_2 (тя забранява като цяло рефлексивността). Тогава в S има поне два елемента. Нека си вземем два a_0 и b_0. Тогава по φ_1, то или $p^S(a_0, b_0)$ или $p^S(b_0, a_0)$ е в сила. Нека за определеност е в сила $p^S(a_0, b_0)$. Тогава по φ_4 то има трети връх, през който достигаме от a_0 b_0. Нека c_0 е свидетел. Имаме следната картинка засега:



Но ние имаме от φ_4, че и между b_0 a_0 има връх с прекачване (няма как да е c_0, защото стига до противоречие с φ_2). Нека d_0 е свидетел. И картинката става:



Стига до противоречие с φ_2 и т.к. a_0, b_0 са произволни елементи от универсиума, то стигаме до заключението, че Φ_3 е неудовлетворимо.

5 Задача за резолюция

С метода на резолюцията да се докаже, че φ_1 , φ_2 , $\varphi_3 \models \varphi_4$, където:

Л.1

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 \leftrightharpoons \forall y(\forall x \neg p(f(x), y) \vee \forall x \neg p(y, x)), \\
\varphi_2 \leftrightharpoons \exists z \forall y(\exists y \exists x \neg p(x, y) \Longrightarrow (q(y, f(f(y))) \Longrightarrow \forall x p(x, f(z)))), \\
\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(x, f(y)) \Longrightarrow p(f(y), x)), \\
\varphi_4 \leftrightharpoons \forall z \exists x \neg(\exists y \neg p(f(x), y) \Longrightarrow q(z, f(x))).
\end{gathered}
$$

Л.2

$$
\begin{gathered}
\varphi_1 \leftrightharpoons \exists z \forall x(\forall y p(f(x), y) \vee q(z, f(x))), \\
\varphi_2 \leftrightharpoons \exists z \forall y(q(y, f(f(y))) \Longrightarrow \forall x p(x, f(z))), \\
\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(x, f(y)) \Longrightarrow (p(f(y), x) \vee \neg \exists y \exists x p(x, y))), \\
\varphi_4 \leftrightharpoons \exists y(\exists x p(f(x), y) \,\&\, \exists x p(y, x)).
\end{gathered}
$$

(Тук p и q са двуметсни предикатни символи, f е едноместен функционален символ, а x, y и z са различни индивидни променливи.)

5.1 Примерно решение

Л.1

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall y \forall x \forall z(\neg p(f(x), y) \vee \neg p(y, z)).$$
$$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall y \forall v \forall x \forall t(p(x, v) \vee \neg q(y, f(f(y))) \vee p(t, f(a))).$$
$$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall x \forall y(\neg p(x, f(y)) \vee p(f(y), x)).$$
$$\psi^S \rightleftharpoons \forall x \forall y(p(f(x), y), \vee q(b, f(x))).$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):
$D_1 = \{\neg p(f(x_1), y_1), \neg p(y_1, z_1)\}$;
$D_2 = \{p(x_2, v_2), \neg q(y_2, f(f(y_2))), p(t_2, f(a))\}$;
$D_3 = \{\neg p(x_3, f(y_3)), p(f(y_3), x_3)\}$;
$D_4 = \{p(f(x_4), y_4), q(b, f(x_4))\}$;

За вариант 1 един примерен резолютивен извод на $\blacksquare$ е:
$D_5 = Res(D_2\{y_2/b\}, D_5\{x_4/f(b)\}) =$
$\{p(x_2, v_2), p(t_2, f(a)), p(f(f(b)), y_4)\}$;
$D_6 = Collapse(D_5\{x_2/f(f(b)), t_2/f(f(b)), v_2/f(a), y_4/f(a)\}) =$
$\{p(f(f(b)), f(a))\}$;
$D_7 = Res(D_1\{x_1/f(b), y_1/f(a)\}, D_6) = \{\neg p(f(a), z_1)\}$;
$D_8 = Res(D_3\{x_3/z_1, y_3/a\}, D_7) = \{\neg p(z_1, f(a))\}$;
$Res(D_8\{x_1/f(f(b))\}, D_6) = \blacksquare$.

Л.2

Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\varphi_1^S \rightleftharpoons \forall x \forall y (p(f(x), y) \vee q(a, f(x))).$$
$$\varphi_2^S \rightleftharpoons \forall y \forall x (\neg q(y, f(f(y))) \vee p(x, f(z))).$$
$$\varphi_3^S \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall v \forall t (\neg p(x, f(y)) \vee p(f(y), x) \vee \neg p(t, v)).$$
$$\psi^S \rightleftharpoons \forall y \forall x \forall z (\neg p(f(x), y), \vee \neg p(y, z).$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$D_1 = \{p(f(x_1), y_1), q(a, f(x_1))\}$;
$D_2 = \{\neg q(y_2, f(f(y_2))), p(t_2, f(b))\}$;
$D_3 = \{\neg p(x_3, f(y_3)), p(f(y_3), x_3), \neg p(t_3, v_3)\}$;
$D_4 = \{\neg p(f(x_4), y_4), \neg p(y_4, z_4)\}$;

За вариант 2 един примерен резолютивен извод на $\blacksquare$ е:

$D_5 = Res(D_1\{x_1/f(a)\}, D_2\{y_2/f(a)\}) =$
$\{p(f(f(a)), y_1), p(x_2, f(b))\}$;
$D_6 = Collapse(D_5\{x_2/f(f(a)), y_1/f(b)\}) = \{p(f(f(a)), f(b))\}$;
$D_7 = Res(D_4\{x_4/f(a), y_4/f(b)\}, D_6) = \{\neg p(f(b), z_4)\}$;
$D_8 = Res(D_3\{x_3/z_4, y_3/b\}, D_7) = \{\neg p(z_4, f(b)), \neg p(t_3, v_3)\}$;
$Res(D_8\{z_4/f(f(a)), t_3/f(f(a)), v_3/f(b)\}, D_6) = \blacksquare$.