Решения на задачите от контролно 1 по Логическо програмиране

17 ноември 2018

1 Определелимост

Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е език с за предикатно смятане с формално равенство, имащ само един нелогически символ - двуместният предикатен символ p.
$\mathcal{A} = \langle ChessBoard; p^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$, където под *ChessBoard* разбираме множеството от всички наредени полета от стандартната шахматна дъска (от `a1` до `h8`).

Вариант 1

За всеки два елемента a и b на *ChessBoard*:

$p^A(a, b) \iff$ от полето a с кон може за един ход да се отиде в полето b.

(i) Определете множеството от всички ъглови полета.

(ii) Определете множеството от всички периферни полета.

(iii) Докажете, че в тази структура множеството `{a2}` е неопределимо.

Вариант 2

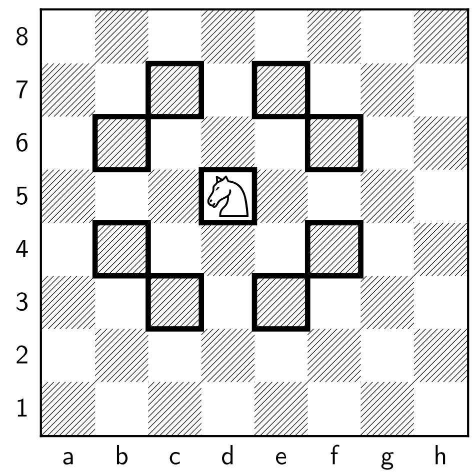
За всеки три елемента a, b и c на *ChessBoard*:

$p^A(a, b, c) \iff$ от полето a с кон може за един ход да се отиде в полето b или в полето c.

(i) Определете множеството от всички ъглови полета.

(ii) Определете множеството от всички периферни полета.

(iii) Докажете, че в тази структура множеството `{a1}` е неопределимо.



Примерно решение:

За вариант 2 лесно можем да минем към вариант 1:

$\varphi_{neighbour}(a, b) \rightleftharpoons p(a, b, b)$

$\varphi_{has\_two\_neighbours}(a) \rightleftharpoons \exists b \exists c(\neg(b \doteq c) \& p(a, b) \& p(a, c) \&$
$\forall d(p(a, d) \Longrightarrow (d \doteq b \vee d \doteq c)))$

$\varphi_{has\_three\_neighbours}(a) \rightleftharpoons \exists b \exists c \exists d(\neg(b \doteq c) \& \neg(c \doteq d) \& \neg(b \doteq d) \&$
$p(a, b) \& p(a, c) \& p(a, d) \& \forall e(p(a, e) \Longrightarrow (e \doteq b \vee e \doteq c \vee e \doteq d)))$

$\varphi_{has\_four\_neighbours}(a) \rightleftharpoons \exists b \exists c \exists d \exists e(\neg(b \doteq c) \& \neg(c \doteq d) \& \neg(b \doteq d) \&$
$\neg(e \doteq b) \& \neg(e \doteq c) \& \neg(e \doteq d) \& p(a, b) \& p(a, c) \& p(a, d) \& p(a, e) \&$
$\forall f(p(a, f) \Longrightarrow (f \doteq b \vee f \doteq c \vee f \doteq d \vee f \doteq e)))$

$\varphi_{edge\_fields}(a) \rightleftharpoons \varphi_{has\_two\_neighbours}(a)$

$\varphi_{peripheral\_fields}(a) \rightleftharpoons (\varphi_{has\_two\_neighbours}(a) \vee \varphi_{has\_three\_neighbours}(a) \vee$
$(\varphi_{has\_four\_neighbours}(a) \& \neg \exists b \exists c(\neg(b \doteq c) \& p(a, b) \& p(a, c) \&$
$\varphi_{has\_four\_neighbours}(b) \& \varphi_{has\_four\_neighbours}(c)))$

Можем да разгледаме *ChessBoard* като множество от наредени двойки $\{< letter, number > \mid letter \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \& \, number \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$.
Автоморфизмът може да бъде ротация на 180°.
Нека k е автоморфизъм от *ChessBoard* в *ChessBoard* като:

$$k(< letter, number >) = \begin{cases} \text{<h, 9-number>}, & \text{if letter == a} \\ \text{<g, 9-number>}, & \text{if letter == b} \\ \text{<f, 9-number>}, & \text{if letter == c} \\ \text{<e, 9-number>}, & \text{if letter == d} \\ \text{<d, 9-number>}, & \text{if letter == e} \\ \text{<c, 9-number>}, & \text{if letter == f} \\ \text{<b, 9-number>}, & \text{if letter == g} \\ \text{<a, 9-number>}, & \text{if letter == h} \end{cases}$$

Имаме, че $k = k^{-1}$ и не променяме дали едно поле е достижимо от друго с един ход на коня т.е. е в сила, че за всеки a и b от *ChessBoard* $p^A(a, b) \iff p^A(k(a), k(b))$. Взимаме огледалния образ на дъската. Така, ако $a1 \in$`{a1}`, то $k(a1) = h8 \notin$`{a1}` и следователно `{a1}` не е определимо. Аналогично за вариант 1.

2 Изпълнимост

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

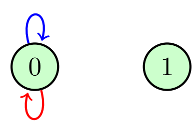
Вариант 1

$\exists x \forall y \exists z (p(x,y) \implies (p(x,x) \vee (p(y,z) \vee \neg p(x,z))))$
$\forall x \forall y (p(x,y) \implies q(x,y))$
$\exists x (\exists y q(x,y) \& \exists y \neg q(x,y))$

Вариант 2

$\exists x \forall y (\neg p(x,y) \vee p(x,x) \vee \exists z (p(y,z) \vee \neg p(x,z)))$
$\neg \exists y \exists x (p(y,x) \& \neg q(y,x))$
$\exists y \exists z \exists x (q(x,y) \& \neg q(x,z))$

Примерно решение:



$$S = (\{0,1\}, p^S, q^S)$$
$$p^S = \{(0,0)\}$$
$$q^S = \{(0,0)\}$$