

Изисква време да се пише на tex  
и този път реших така да опиша  
решенията на задачите от I-вата  
часть. Отделно ще чиня pdf с  
условията.

Тук ще реша задачите за  
версията E.I.1.  $\square$

заг ①  $L = \langle p \rangle$ ,  $\#(p) = 3$ ,  $p \in \text{Pred}_L$ ;  
 $\mathcal{A} = \langle N, r^{\mathcal{A}} \rangle$  структура за  $L$  с  
 $\langle a, b, c \rangle \in r^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a - b = c^2 \Leftrightarrow$   
 $a = c^2 + b \Leftrightarrow$   
 $b = a - c^2$

ci) Да се докаже за  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\varphi_n$  е  
определено.

$\varphi_0(x) \leq p(x, x, x)$ . //  $0 - 0 = 0^2$   
 $\varphi_1(x) \leq \exists y (\varphi_0(y) \wedge \neg \varphi_0(x) \wedge p(x, y, x))$ .  
 //  $x - 0 = \underline{x} = x^0$  и  $x > 0$   
 $\varphi_{+1}(x, y) \leq \exists z (\varphi_1(z) \wedge p(y, x, z))$ .  
 //  $y = x + 1^2 = x + 1$ .

Сегга с индукция по  $n \in \mathbb{N}$  ще покажем, че всеки синглет е определен.

База:  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ .

И.Х.: Допускаме, че за някое  $n > 0$ , то  $\{n\}$  е определено и нека  $\varphi_n(x)$  е свидетел, че  $\{n\}$  е определено.

Съвик.  $n \mapsto n+1$

$$\varphi_{n+1}(x) \equiv \exists y \left( \underbrace{\varphi_n(y)}_{(i.h.)} \wedge \varphi_{n+1}(y, x) \right).$$

(ii)  $\{ \langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N} \}$  е определено т.е. равенство  $n/y$  жителите в света.

$$\varphi_=(x, y) \equiv \forall z \forall t (p(x, z, t) \Leftrightarrow p(y, z, t)).$$

// Хващаме най-големия токен  $\varphi_{\text{вср}}$  по  $x$  и по  $y$  в  $t$  и записваме  $\varphi_{\text{вср}}$  играем с  $z$ . Сес сигурност ще си различни така, ако са различни.

$\{ \langle n, m \rangle \mid n > m \}$  е определено.

Ако  $n^2 > m^2$ , то и  $n > m$  и обратно,  
т.к. сме в  $\mathbb{N}$ .

$$e_{n^2}(x, y) \leq \exists z (e_0(z) \& p(y, z, x)).$$

$$// y = x^2 + 0 = x^2$$

$$e_{>}(x, y) \leq \exists z \exists t (\neg e_0(z) \& e_{n^2}(x, t) \& p(t, z, y)).$$

$$\underline{z > 0}, t = x^2, t = x^2 = y^2 + z$$

$$\begin{array}{l} x^2 > y^2 \\ \hline x > y \end{array}$$

(iii)  $\{ n^4 \mid n \in \mathbb{N} \}$  е определено.

$$e_{n^4}(x) \leq \exists y \exists z (e_{n^2}(y, z) \& e_{n^2}(z, x)).$$

$$// z = y^2 \text{ и } x = z^2 = (y^2)^2 = y^4.$$

392 (2)

$$\psi_1 \equiv \forall x \exists y (\neg p(x, x) \& p(x, y)).$$

$$\psi_2 \equiv \forall x \forall z (\exists y (p(x, y) \& p(y, z)) \Leftrightarrow p(x, z)).$$

$$\psi_3 \equiv \exists x \exists y \exists z (\neg p(x, y) \& \neg p(y, x) \& \neg (p(x, z) \Leftrightarrow p(y, z))).$$

$$\psi_1 \equiv \forall x \forall y (p(x, y) \Leftrightarrow p(x, f(x, y)) \& p(f(y, x), y)).$$

$$\psi_2 \equiv \forall x \forall y (p(x, y) \Leftrightarrow p(x, f(x, y)) \vee p(f(y, x), y)).$$

Нека  $\Gamma \equiv \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ ,  $\Pi_1 \equiv \Gamma \cup \{\psi_1\}$ ,  
 $\Pi_2 \equiv \Gamma \cup \{\psi_2\}$ .

До се доказва как и-ва се изпълнява.

$\psi_1$  говори за иррефлексивност и  
сериалност на  $R$ .

$\psi_2$  говори за гъстота и транзитивност.

$\psi_3$  говори за частична релация  
(поне две несравними). Свекр  $R$  е  
поне един елемент, който ги сравнява.

Примери модел за  $\Pi$ .

$$f \equiv \langle \mathbb{Q}, p^A \rangle, \text{ където}$$
$$p^A \equiv \langle \emptyset, \emptyset \rangle.$$

$\psi_1, \psi_2$  са автоматично изпълнени.

$\psi_3$ : за  $x \in 0$ , за  $y \in 1$ , а за  $z$   
 $\in 1/3$ , защото  $\langle 0, 1/3 \rangle \in p^A$ , но  
 $\langle 1, 1/3 \rangle \notin p^A$ .

Соба за  $\Pi_1(\cup \Pi_2)$ .

Нека  $f \equiv \langle \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, p^A, f^A \rangle$ , където

$$f^A(x, y) \equiv y$$
$$\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in p^A \iff a < c \ \& \ b < d.$$

$\psi_1, \psi_2$  са окей.

$\psi_3$ : за  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  за  $y \in \langle 1, 0 \rangle$  за  
 $z \in \langle 2, 1/3 \rangle$ , защото  $\langle \langle 0, 1 \rangle, \langle 2, 1/3 \rangle \rangle \in p^A$ ,  
но  $\langle \langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 1/3 \rangle \rangle \notin p^A$ .

Услова за всяка оценка  $v$  в  $A$ :

$$\|p(x, y)\|^A[v] = \|p(x, f(x, y))\| \& \|p(f(y, x), y)\|^A[v].$$

T.v.  $f^A(x, y) \leq y$ , то

$$\|P(x, y)\|^A[v] = \|P(x, f(x, y))\|^A[v] \wedge \|P(f(y, x), y)\|^A[v]$$

$$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle v(x), f^A(v(x), v(y)) \rangle \in p^A$$

и/или

$$\langle f^A(v(y), v(x)), v(y) \rangle \in p^A$$

$$\Leftrightarrow \langle v(x), v(y) \rangle \in p^A \text{ и/или}$$

$$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^A \Leftrightarrow$$

$$\langle v(x), v(y) \rangle \in p^A.$$

Т.е. сә тубындас мәнәлени.

3003) Task, es ob-1000 e hem anelunio.

$$\exists x \forall y (q(x, y) \Leftrightarrow \forall z (q(y, z) \Rightarrow (q(z, y) \Rightarrow \forall x (q(x, y) \& \neg q(x, y))))))$$

$$\vdash \exists x \forall y (q(x, y) \Leftrightarrow \forall z (q(y, z) \& q(z, y) \Rightarrow \forall x (q(x, y) \& \neg q(x, y))))$$

$$\vdash \exists x \forall y (q(x, y) \Leftrightarrow \forall z (\neg q(y, z) \vee \neg q(z, y)))$$

$$\vdash \exists x \forall y ((\neg q(x, y) \vee \forall z (\neg q(y, z) \vee \neg q(z, y))) \& (\exists z (q(y, z) \& q(z, y)) \vee q(x, y)))$$

$$\vdash \exists x \forall y \exists z \forall t ((\neg q(x, y) \vee \neg q(y, t) \vee \neg q(t, y)) \& (\neg q(y, z) \& q(z, y)) \vee q(x, y))$$

$$\vdash \forall y \forall t ((\neg q(a, y) \vee \neg q(y, t) \vee \neg q(t, y)) \& ((q(y, f(y)) \& q(f(y), y)) \vee q(a, y)))$$

$$\vdash \forall y \forall t ((\neg q(a, y) \vee \neg q(y, t) \vee \neg q(t, y)) \& (q(y, f(y)) \vee q(a, y)) \& (q(f(y), y) \vee q(a, y)))$$

$$D_1 \equiv \{\neg q(a, y_1), \neg q(y_1, t_1), \neg q(t_1, y_1)\}$$

$$D_2 \equiv \{q(y_2, f(y_2)), q(a, y_2)\}$$

$$D_3 \equiv \{q(f(y_3), y_3), q(a, y_3)\}$$

$$D_4 = \text{Collapse}(D_1, \{y_1/a, t_1/a\}) = \{\neg q(a, a)\}$$

$$D_5 = \text{Res}(D_1, \{t_1/y_2, y_1/f(y_2)\}) =$$

$$= \{\neg q(a, f(y_2)), \neg q(f(y_2), y_2), q(a, y_2)\}$$

$$D_6 = \text{Res}(D_5, D_3, \{y_3/y_2\}) =$$

$$= \{\neg q(a, f(y_2)), q(a, y_2)\}$$

$$D_7 = \text{Res}(D_2, \{y_2/a\}, D_6, \{y_2/a\}) =$$

$$= \{q(a, a)\}$$

$$\boxed{\text{Q.E.D.}} = \text{Res}(D_4, D_7)$$



