Решения на задачи от писмен изпит по Логическо програмиране

22 януари 2020

1 Първа задача на пролог

Ще казвам, че списък от естествени числа е:

1. *квадратичен*, ако както дължината му, така и сумата на елементите му са квадрати на естествени числа.

2. *кубичен*, ако както дължината му, така и сумата на елементите му са точни трети степени на естествени числа.

Да се дефинира предикат на пролог:

1. $squareList(L)$, който проверява дали списък от естествени числа L е квадратичен.

2. $cubeList(L)$, който проверява дали списък от естествени числа L е кубичен.

1.1 Примерно решение

```
% Helper predicates: length, between.
sum([], 0).
sum([H|T], N) :-
    sum(T, M),
    N is M+H.

isSquare(X) :-
    between(0, X, X1),
    X1*X1=:=X.

squareList(L) :-
    length(L, N),
    sum(L, S),
    isSquare(N),
    isSquare(S).

isCube(X) :-
    between(0, X, X1),
    X1*X1*X1=:=X.

cubeList(L) :-
    length(L, N),
    sum(L, S),
    isCube(N),
    isCube(S).
```

2 Втора задача на пролог

Представяне на точка $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ с рационални координати в равнината наричаме всяка четворка $(a_p, b_p, a_q, b_q) \in \mathbb{Z}^4$, за която $\frac{a_p}{b_p} = p$ и $\frac{a_q}{b_q} = q$. (в частност $b_p \neq 0 \neq b_q$.)

Да се дефинира на пролог предикат:

1. $max\_independent(S, M)$, който по даден краен списък S от представяния на точки с рационални координати в равнината генерира в M максимално по размер подмножество на S, така че никои две различни окръжности с центрове в точки, представени от елементи на M, и радиуси 1 нямат общи точки.

2. $min\_cover(S, M)$, който по даден краен списък S от представяния на точки с рационални координати в равнината генерира в M минимално по размер подмножество на S, така че всяка точка от S попада в поне един кръг с център в точка, представена от елемент на M, и радиус 1.

2.1 Примерно решение

```
% Helper predicates: length, member.
subsequence([], []).
subsequence([H|T], [H|R]) :-
    subsequence(T, R).
subsequence([_|T], R) :-
    subsequence(T, R).

condition1(M) :-
    not(( member([APX, BPX, AQX, BQX], M),
          member([APY, BPY, AQY, BQY], M),
          (APX/BPX-APY/BPY)^2+(AQX/BQX-AQY/BQY)^2=<2
        )).

max_independent(S, M) :-
    subsequence(M, S),
    condition1(M),
    length(M, N),
    not(( subsequence(M1, S),
          condition1(M1),
          length(M1, N1),
          N1>N
        )).
```

```
condition2(S, M) :-
    not(( member([APX, BPX, AQX, BQX], S),
          member([APY, BPY, AQY, BQY], M),
          (APX/BPX-APY/BPY)^2+(AQX/BQX-AQY/BQY)^2>1
        )).

min_cover(S, M) :-
    subsequence(M, S),
    condition2(S, M),
    length(M, N),
    not(( subsequence(M1, S),
          condition2(S, M1),
          length(M1, N1),
          N>N1
        )).
```

3 Задача за определимост

Нека $\mathcal{L}$ е предикатен език с формално равенство точно един предикатен символ p. Да означим с $\mathcal{A}$ структурата за $\mathcal{L}$ с универсиум $\{a, b\}^*$ (т.е. всички думи над двубуквената азбука $\{a, b\}$), в която:

1. $\langle w_1, w_2 \rangle \in p^A \quad \longleftrightarrow$ думите w_1 и w_2 имат равни дължини и се различават най-много в една позиция.

2. $\langle w_1, w_2 \rangle \in p^A \quad \longleftrightarrow$ думите w_1 и w_2 имат дължини различаващи се с точно 1.

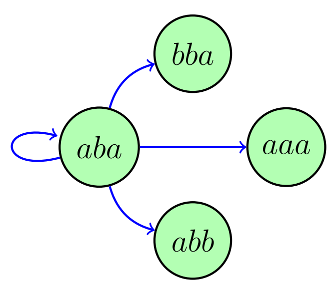
1. В $\mathcal{A}$ да се определят:

- ε (празната дума);
- $\{w \mid |w| = 2\}$ и (iii) $\{w \mid |w| = 3\}$($|w|$ е дължината на думите w).

2. Да се докаже, че еднобуквената дума bb за вариант 1 и b за вариант 2 е неопределима в $\mathcal{A}$.

3.1 Примерно решение

Вариант 1 : Идеята е примерно за думата aba тя е в релация с точно 4 думи (дължината на думата + 1) от нивото ѝ:



$$\varphi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \forall y(p(x, y) \Rightarrow x \doteq y).$$

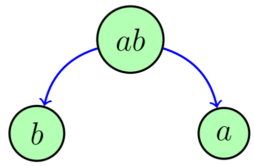
$$\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y) \leftrightharpoons \neg(x \doteq y)\,\&\,p(x, y).$$

$$\varphi_{\{w \mid |w|=1\}}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y)\,\&\,\forall z(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, z) \Rightarrow z \doteq y)).$$

$$\varphi_{\{w \mid |w|=2\}}(x) \leftrightharpoons \exists y_1 \exists y_2(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y_1)\,\&\,\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y_2)\,\&\,$$
$$\neg(y_1 \doteq y_2)\,\&\,\forall z(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, z) \Rightarrow z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2)).$$

$$\varphi_{\{w \mid |w|=3\}}(x) \leftrightharpoons \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y_1)\,\&\,\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y_2)\,\&\,\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, y_3)\,\&\,$$
$$\neg(y_1 \doteq y_2)\,\&\,\neg(y_1 \doteq y_3)\,\&\,\neg(y_2 \doteq y_3)\,\&\,$$
$$\forall z(\varphi_{\neg\doteq\,\&\,p}(x, z) \Rightarrow z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2 \vee z \doteq y_3)).$$

Вариант 2 : Идеята е примерно за думата ab тя е в релация с всички думи от нивото непосредствено под нея и не е дума от ниво 0 т.е. ε:



$$\psi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \exists y_1 \exists y_2 (\neg(y_1 \doteq y_2) \,\&\, p(x, y_1) \,\&\, p(x, y_2) \,\&$$
$$\forall z (p(x, z) \Rightarrow z \doteq y_1 \vee z \doteq y_2)).$$
$$\psi_{\{w|\,|w|=1\}}(x) \leftrightharpoons \exists t (\psi_{\varepsilon}(t) \,\&\, p(x, t)).$$
$$\psi_{\{w|\,|w|=2\}}(x) \leftrightharpoons \neg\psi_{\varepsilon}(x) \,\&\, \forall t (\psi_{\{w|\,|w|=1\}}(t) \Rightarrow p(x, t)).$$
$$\psi_{\{w|\,|w|=3\}}(x) \leftrightharpoons \neg\psi_{\{w|\,|w|=1\}}(x) \,\&\, \forall t (\psi_{\{w|\,|w|=2\}}(t) \Rightarrow p(x, t)).$$

И за двата варианта : Нека $h : \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$ е функция с дефиниция $h(a) = b$ и $h(b) = a$. Тогава $h \circ h^{-1} = Id_{\{a,b\}} = h^{-1} \circ h$, т.е. h е биекция.
Нека $H : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ е функция с дефиниция $H(w) = H(a_1 a_2 ... a_n) = h(a_1) \cdot h(a_2) \cdot ... \cdot h(a_n)$ за дума $w = a_1 a_2 ... a_n$ и $\cdot$ значещо конкатенация на думи. С аналогични разсъждения стигаме до заключенеито, че и H е биекция. Остава да проверим, че е хомоморфизъм т.е.:

$$\langle u, v \rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow \langle H(u), H(v) \rangle \in p^{\mathcal{A}}$$

И в двата варинат имаме, че функцията H нито променя дължината на думата, нито променя отношенията межу думите спрямо релацията $p^{\mathcal{A}}$. Ако $\langle u, v \rangle \in p^{\mathcal{A}}$ спрямо дефиницията на p във вариант 1, то т.к. и в двете думи все едно "инвертираме едновременно всички битове", то $\langle H(u), H(v) \rangle \in p^{\mathcal{A}}$. И обратното е в сила като приложим H върху $H(u), H(v)$, т.к. $H = H^{-1}$ ще помучим първообразите преди "инвертираното", които имат същите отношения както и образите. Съответно H е хомоморфизъм и значи H е автомнорфизъм. Съответно $\{b\}$ и съответно $\{bb\}$ са неопределими, защото $H(b) = a \notin \{b\}$ и $H(bb) = aa \notin \{bb\}$.

4 Задача за изпълнимост

Нека:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \forall y (p(x,y) \,\&\, p(y,y))$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists y \forall x (p(x,y) \,\&\, \exists z (\neg(z \doteq y) \,\&\, p(y,z)))$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \exists y \exists z (p(y,x) \,\&\, p(z,x) \,\&\, \neg(y \doteq z))$$
$$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists x \exists y (\neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x)),$$

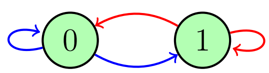
където p е двуместен предикатен символ, а $\doteq$ е формално равенство.

Кои от множествата:

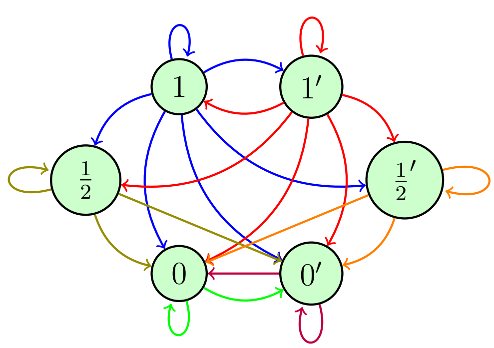
$$\Phi_1 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\},$$
$$\Phi_2 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\},$$
$$\Phi_3 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\},$$
$$\Phi_4 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \neg\varphi_5\}$$

са изпълними? На вариант 2 формулите са еквивалентни на тези.

4.1 Примерно решение



За Φ_1, Φ_2, Φ_4: $S = (\{0,1\}, p^S)$
$p^S \leftrightharpoons \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$



За Φ_3: $S = (\{0, 0', \frac{1}{2}, \frac{1}{2}', 1, 1'\}, p^S)$
$p^S \leftrightharpoons \{\langle 0,0\rangle, \langle 0',0'\rangle, \ldots\}$

5 Задача за резолюция

Нека:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall y \forall z(\exists x(r(x,y) \,\&\, r(x,z)) \Rightarrow p(y,z))$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall z \forall y(p(y,z) \Rightarrow (p(z,y) \Rightarrow \forall x(s(y,x) \Leftrightarrow s(z,x)))),$$

където p, r, s, и t са двуместни предикатни символи.

С метода на резолюцията да се докаже, че от φ_1 и φ_2 следва логически следва формулата:
$\psi \leftrightharpoons \forall y \forall x \exists z((\exists z(r(x,z) \,\&\, s(z,y)) \,\&\, \exists z(r(x,z) \,\&\, t(z,y))) \Rightarrow (r(x,z) \,\&\, s(z,y) \,\&\, t(z,y)))$.

На вариант 2 формулите са еквивалентни на тези.

5.1 Примерно решение

На φ_2 едната посока в еквиваленцията може да се изпусне, т.к. следва от другата. Съответно:
$\varphi_2' \leftrightharpoons \forall z \forall y(p(y,z) \Rightarrow (p(z,y) \Rightarrow \forall x(s(y,x) \Rightarrow s(z,x))))$.
Взимаме отрицанието на ψ и получаваме:
$\psi' \leftrightharpoons \exists y \exists x \forall z(\exists z(r(x,z) \,\&\, s(z,y)) \,\&\, \exists z(r(x,z) \,\&\, t(z,y)) \,\&$
$(\neg r(x,z) \vee \neg s(z,y) \vee \neg t(z,y)))$.
Получаваме следните формули като приведем в ПНФ, СНФ и КНФ:

$$\varphi_1^S \leftrightharpoons \forall y \forall z \forall x(\neg r(x,y) \vee \neg r(x,z) \vee p(y,z)).$$
$$\varphi_2^S \leftrightharpoons \forall z \forall y \forall x((\neg p(y,z) \vee \neg p(z,y) \vee \neg s(y,x) \vee s(z,x))).$$
$$\psi^S \leftrightharpoons \forall z(r(b,f(z)) \,\&\, s(f(z),a) \,\&\, r(b,g(z)) \,\&\, t(g(z),a) \,\&$$
$$(\neg r(b,z) \vee \neg s(z,a) \vee \neg t(z,a))).$$

Дизюнктите са (нека ги номерираме променливите по принадлежност към дизюнкт):

$$D_1 = \{\neg r(x_1,y_1), \neg r(x_1,z_1), p(y_1,z_1)\};$$
$$D_2 = \{\neg p(y_2,z_2), \neg p(z_2,y_2), \neg s(y_2,x_2), s(z_2,x_2)\};$$
$$D_3 = \{r(b,f(z_3))\};$$
$$D_4 = \{s(f(z_4),a)\};$$
$$D_5 = \{r(b,g(z_5))\};$$
$$D_6 = \{t(g(z_6),a)\};$$
$$D_7 = \{\neg r(b,z_7), \neg s(z_7,a), \neg t(z_7,a)\};$$

Примерен резолютивен извод на ■ е:

$$D_8 = Res(D_6, D_7\{z_7/g(z_6)\}) = \{\neg r(b, g(z_6)), \neg s(g(z_6), a)\}$$
$$D_9 = Res(D_5\{z_5/z_6\}, D_8) = \{\neg s(g(z_6), a)\}$$
$$D_{10} = Res(D_3, D_1\{x_1/b, y_1/f(z_3)\}) = \{\neg r(b, z_1), \neg p(f(z_3), z_1)\}$$
$$D_{11} = Res(D_5, D_{10}\{z_1/g(z_5)\}) = \{p(f(z_3), g(z_5))\}$$
$$D_{12} = Res(D_3, D_1\{x_1/b, z_1/f(z_3)\}) = \{\neg r(b, y_1), \neg p(y_1, f(z_3))\}$$
$$D_{13} = Res(D_5, D_{12}\{y_1/g(z_5)\}) = \{p(g(z_5), f(z_3))\}$$
$$D_{14} = Res(D_2\{y_2/f(z_3), z_2/g(z_5)\}, D_{11}) = \{\neg p(g(z_5), f(z_3)), \neg s(f(z_3), x_2), s(g(z_5), x_2)\}$$
$$D_{15} = Res(D_{14}, D_{13}) = \{\neg s(f(z_3), x_2), s(g(z_5), x_2)\}$$
$$D_{16} = Res(D_4, D_{15}\{z_5/z_4, x_2/a\}) = \{s(g(z_4), a)\}$$
$$D_{17} = Res(D_9, D_{16}\{z_4/z_6\}) = \blacksquare$$