Решения на задачи от тренировка/контролно 1 по Логическо програмиране

21 ноември 2020

1 Определимост

Нека $\mathcal{L}$ е език с формално равенство, един двуместен функционален символ cat и един двуместен предикатен символ p.

Структурата $\mathcal{S}$ за езика $\mathcal{L}$ има носител $W = \{0, 1, 2, 3, 4\}^*$ – множеството от думи от 0, 1, 2, 3 и 4 – и интерпретации на cat и p:

$$cat^{\mathcal{S}}(u, v) = w \Leftrightarrow u \circ v = w,$$
$$p^{\mathcal{S}}(u, v) \Leftrightarrow \forall i \leq |u| \left(v_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } u_i > 1 \\ 0, & \text{ако } u_i \leq 1 \end{cases} \right),$$

където u_i (v_i) означава i-тата буква на u (v). Да се докаже, че в $\mathcal{S}$ са определими:

- $Pref = \{(u, v) \in W^2 \mid u \text{ е префикс на } v\}$.
- ε и множеството от еднобуквени думи над W.
- $EqLen = \{(u, v) \in W^2 \mid |u| = |v|\}$.

За думи с равна дължина $u = a_1a_2 \dots a_n$ и $v = b_1b_2 \dots b_n$ с $u \sqcup v$ означаваме думата:

$$u \sqcup v = a_1b_1a_2b_2 \dots a_nb_n.$$

Вярно ли е, че множеството

$$\{(u,v,w) \in W^3 \mid |u| = |v| \,\&\, w = u \sqcup v\}$$

е определимо в $\mathcal{S}$? Защо?

Да се намери с доказателство броят на различните автоморфизми на структурата $\mathcal{S}$.

Примерно решение

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}ref(u,v) \leftrightharpoons \exists w(cat(u,w) \doteq v).\\
&\mathcal{S}uff(u,v) \leftrightharpoons \exists w(cat(w,u) \doteq v).\\
&\mathcal{I}nfix(u,v) \leftrightharpoons \exists w(\mathcal{P}ref(w,v) \,\&\, \mathcal{S}uff(u,w)).\\
&\varphi_\epsilon(u) \leftrightharpoons \forall v(cat(u,v) \doteq u).\\
&\varphi_1(u) \leftrightharpoons \forall v(\mathcal{P}ref(u,v) \Rightarrow \varphi_\epsilon(v) \vee v \doteq u).\\
&\varphi_2(u) \leftrightharpoons \forall v(\mathcal{P}ref(u,v) \Rightarrow \varphi_\epsilon(v) \vee \varphi_1(v) \vee v \doteq u).\\
&\varphi_{LLCV}(u,v) \leftrightharpoons p(u,v) \,\&\, \forall w(p(u,w) \Rightarrow \mathcal{P}ref(v,w)).
\end{aligned}$$

Където $\varphi_{LLCV}(u,v)$ значи, че взимаме най-късият характеристичен вектор на u генерирано от предиката $p^{\mathcal{S}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}qLen(u,v) \leftrightharpoons{} & \exists w_1 \exists w_2(\varphi_{LLCV}(u,w_1) \,\&\, \varphi_{LLCV}(v,w_2) \,\&\\
& \exists w_3 \exists w_4(\varphi_{LLCV}(w_1,w_3) \,\&\, \varphi_{LLCV}(w_2,w_4) \,\&\, w_3 \doteq w_4)).\\
\varphi_{2letterWord}(u,a,b) \leftrightharpoons{} & \varphi_2(u) \,\&\, \mathcal{P}ref(a,u) \,\&\, \varphi_1(a) \,\&\, \mathcal{S}uff(b,u) \,\&\, \varphi_1(b).
\end{aligned}$$

Където $\varphi_{2letterWord}(u,a,b)$ дефинира множеството:

$$\{\langle u,a,b\rangle \mid u = a \circ b \,\&\, a,b \in \{0,1,2,3,4\}\}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}onEmptyPref(u,v) \leftrightharpoons \mathcal{P}ref(u,v) \,\&\, \neg\varphi_\epsilon(u).\\
&\mathcal{C}omb(u,v,w) \leftrightharpoons \mathcal{E}qLen(u,v) \,\&\, \mathcal{E}qLen(cat(u,v),w) \,\&\\
&\quad \forall u_1 \forall v_1(\mathcal{N}onEmptyPref(u_1,u) \,\&\, \mathcal{N}onEmptyPref(v_1,v) \,\&\, \mathcal{E}qlen(u_1,v_1) \Rightarrow\\
&\quad\quad \exists w_1(\mathcal{P}ref(w_1,w) \,\&\, \mathcal{E}qLen(cat(u_1,v_1),w_1) \,\&\, \exists w_2(\mathcal{S}uff(w_2,w_1) \,\&\\
&\quad\quad\quad \exists a \exists b(\varphi_{2letterWord}(w_2,a,b) \,\&\, \mathcal{S}uff(a,u_1) \,\&\, \mathcal{S}uff(b,v_1))))).
\end{aligned}$$

С индукция по $n \in \mathbb{N}$ може да се покаже, че φ_n определя множеството от всички думи с дължина n.

Сега нека с $\Sigma \leftrightharpoons \{0,1,2,3,4\}$, $|\Sigma| = 5$ и значи $\Sigma^* = W$.

Тогава $|\mathcal{A}ut(\mathcal{S})| = \{h \mid h : \Sigma \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \Sigma \,\&\, (\forall x \in \{0,1\})[h(x) = x]\} = 3!$, тъй като това е броя на всички пермутации над тази азбука, в която 0 и 1 остават на място (не са повече, т.к изискаваме да се имаме биективност и фунционалност на релацията). Трябва да остават на място 0 и 1, за да можем да запазваме и p, което зависи от тях (ако го нямаше нелогическия символ p, то автоморфизмите си стават 5!).

Сега нека вземем една пермутация над Σ примерно h и да покажем, можем да я надградим тази биекция, така че да действа върху всички думи над азбуката Σ (бележим го това множество с Σ^*) и да е автоморфизъм от Σ^* в Σ^*.

Нека $w \in \Sigma^*$. Тогава w е крайна редичка от букви от Σ:

$$(\exists n \in \mathbb{N})[w = a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n \,\&\, a_1 \in \Sigma \,\&\, a_2 \in \Sigma \,\&\, ... \,\&\, a_n \in \Sigma].$$

Нека дефинираме $H : \Sigma^* \to \Sigma^*$ така:

$$H(w) = H(a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n) = h(a_1) \circ h(a_2) \circ ... \circ h(a_n).$$

Искаме H да е биекция и хомоморфизъм. Това че H е биекция се вижда от $H^{HOK(\text{дължини на всички цикли в } h)}(w) = Id_{\Sigma^*}$.

Тук нелогическите символи са cat и p.

За cat ще се погрижим да проверим, че:

$$H(cat^{\mathcal{S}}(u,v)) = cat^{\mathcal{S}}(H(u), H(v))$$

за $u, v \in \Sigma^*$.

Т.к. $u, v \in \Sigma^*$, то значи:

$$(\exists n \in \mathbb{N})[u = a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n \,\&\, a_1 \in \Sigma \,\&\, a_2 \in \Sigma \,\&\, ... \,\&\, a_n \in \Sigma]$$

и

$$(\exists m \in \mathbb{N})[v = b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_m \,\&\, b_1 \in \Sigma \,\&\, b_2 \in \Sigma \,\&\, ... \,\&\, b_m \in \Sigma].$$

Ще използваме дефинициите на H, $cat^{\mathcal{S}}$ и асоциативност на $\circ$:

$$\begin{gathered}
H(cat^{\mathcal{S}}(u,v)) = H(cat^{\mathcal{S}}(a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n, b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_m)) = \\
H(a_1 \circ a_2 \circ ... \circ a_n \circ b_1 \circ b_2 \circ ... \circ b_m) = \\
h(a_1) \circ h(a_2) \circ ... \circ h(a_n) \circ h(b_1) \circ h(b_2) \circ ... \circ h(b_m) = \\
(h(a_1) \circ h(a_2) \circ ... \circ h(a_n)) \circ (h(b_1) \circ h(b_2) \circ ... \circ h(b_m)) = \\
cat^{\mathcal{S}}(h(a_1) \circ h(a_2) \circ ... \circ h(a_n), (b_1) \circ h(b_2) \circ ... \circ h(b_m)) = \\
cat^{\mathcal{S}}(H(u), H(v)).
\end{gathered}$$

За p ще се погрижим да проверим, че:

$$\langle u, v\rangle \in p^{\mathcal{S}} \longleftrightarrow \langle H(u), H(v)\rangle \in p^{\mathcal{S}}$$

за $u, v \in \Sigma^*$. Отново от $u, v \in \Sigma^*$, то значи:

$$(\exists n \in \mathbb{N})[u = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n \,\&\, a_1 \in \Sigma \,\&\, a_2 \in \Sigma \,\&\, \ldots \,\&\, a_n \in \Sigma]$$

и

$$(\exists m \in \mathbb{N})[v = b_1 \circ b_2 \circ \ldots \circ b_m \,\&\, b_1 \in \Sigma \,\&\, b_2 \in \Sigma \,\&\, \ldots \,\&\, b_m \in \Sigma].$$

Ще използваме дефинициите на H, $p^{\mathcal{S}}$ и факта, че си филтрирахме само тези пермутации, които пазят $0, 1$, т.е. характеристичните вектори генерирани от $p^{\mathcal{S}}$ няма да пострадат (да го наричаме този факт $(\#)$):

$$\begin{gathered}
\langle u, v\rangle \in p^{\mathcal{S}} \longleftrightarrow \\
\forall i \leq |u| \left(v_i = \begin{cases} 1, \text{ ако } u_i > 1 \\ 0, \text{ ако } u_i \leq 1 \end{cases} \right) \longleftrightarrow \\
\forall i \leq |H(u)| = |u| \left(h(v_i) \overset{(\#)}{=} v_i = \begin{cases} 1, \text{ ако } h(u_i) > 1, \ \mathit{since}\ u_i > 1 \\ 0, \text{ ако } h(u_i) \leq 1 \xrightarrow{(\#)} h(u_i) = u_i \end{cases} \right) \longleftrightarrow \\
\langle H(u), H(v)\rangle \in p^{\mathcal{S}}
\end{gathered}$$

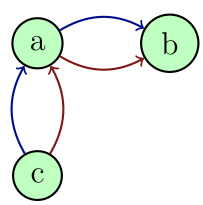
2 Изпълнимост

$\mathcal{L} = \langle p, q \rangle$ е език с два двуместни предикатни символа p и q.

Да се докаже, че е изпълнимо множеството, съставено от следните формули:

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \Leftrightarrow p(z,y)) \Leftrightarrow \exists z (q(x,z) \Leftrightarrow q(z,y))).$$
$$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y p(x,y).$$
$$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y q(x,y).$$
$$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg q(y,x)).$$
$$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x)).$$
$$\varphi_6 \leftrightharpoons \neg \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z)).$$

Примерно решение



Т.е. $\mathcal{A} = \langle \{a, b\}; p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}} \rangle$ и $p^{\mathcal{A}} = q^{\mathcal{A}} = \{\langle a, b\rangle, \langle c, a\rangle\}$.