Задачата за намиране на модел на множество от формули е аналогична на задачата дали съществува програма, отговаряща на дадена формална спецификация. Задачата да намерим конкретна и "хубава" структура, която е модел на формулите е аналогична на задачата да се намери "хубава" програма, която отговаря на формалната си спецификация.

def | Нека Γ е м-во от ф-ли от $\mathcal{L}$(FOL).
Нека $\mathcal{A}$ е стр. за Γ.

1) нека v е оценка от $\mathcal{A}$.
Казваме, че Γ е вярно м-во от ф-ли в $\mathcal{A}$ при оценката v $\Leftrightarrow$
$(\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models_v \varphi]$
Бележим: $\mathcal{A} \models_v \Gamma$

2) $\mathcal{A}$ е модел за Γ, ако $(\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models \varphi]$
Бележим: $\mathcal{A} \models \Gamma$

Задача за изпълнимост

Имаме Γ мн-во от затв. ф-ли.
Докажете, че Γ е изпълнимо т.е. трябва да построим структура, която е модел за Γ.

Зад. 1

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \neg p(x,x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y\, p(x,y)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\Gamma_1 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2\}$

$\Gamma_2 \leftrightharpoons \Gamma_1 \cup \{\varphi_3\}$

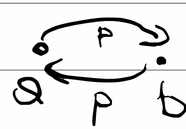
Докажете, че Γ_1 и Γ_2 имат модели.
Γ_2 има ли краен модел (т.е. с краен универсум).

φ_1 - иррефлексивност

φ_2 - всеки индивид е в релация p с някой друг (не непременно различен)

φ_3 - транзитивност

$\mathcal{A}_1 \models \Gamma_1$, където



$A_1 = \langle \{a,b\}; p^A \rangle$, за
$p^A = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$.

$A_2 \models \Gamma_2$, за $A_2 = \langle \mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Q}\setminus\mathbb{R}, p^A\rangle$

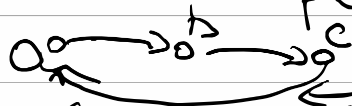
за $p^A \leftrightharpoons <_{\mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Q}/\mathbb{R}}$

т.е. $\langle a,b\rangle \in p^A \iff a<b$ в смисъла на $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ в зависимост какъв е универсума

Допускаме, че Γ_2 има краен модел примерно A_1:

$p^A(a,b) \,\&\, p^A(b,a) \Rightarrow p^A(a,a)$

но от e_3 имаме
$p^A(a,a) \to$ ⚡ с e_1

Значи  ← по e_2

И пак по e_3 имаме $p^A(b,c) \,\&\, p^A(c,a) \Rightarrow p^A(b,a)$ и

отново пак ще изведем $p^A(a,a)$ ⚡

Така по индукция можем да докажем, че

не е вярно, че съществува модел A с $|A| = n, n \in \mathbb{N}$ и $A \models \Gamma_2$

Това остава Γ_2 да има безкрайни модели и ние вече намерихме един.

Зад 2 $\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x p(x,x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \vee p(y,x))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y (p(x,y) \Rightarrow x \doteq y)$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \forall y (p(y,x) \Rightarrow x \doteq y)$

$\Gamma \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ има модел:

φ_1 - рефлексивност

φ_2 - всеки два индивида са в релация

φ_3 - максимален елемент има

φ_4 - минимален елемент има

$\mathcal{A} = \langle \{a\}, p^{\mathcal{A}} \rangle, p^{\mathcal{A}} = \{\langle a, a \rangle\}$

?

Към всяко решение дайте аргументация защо $\mathcal{A} \models \Gamma$?
Всички аргументи, които говорим в час, ги записвайте на листа с решения защо всяка ф-ла мислите, че е удовлетворена в структура