Нека A е м-во и A се определя от ф-лата $\varphi(x)$, а B м-во се определя от ф-лата $\psi(x)$

Какво определя $\underline{\varphi \& \psi}$?

$A \cap B$

Ако $A \underset{\text{се опр.}}{\longrightarrow} \varphi(x)$, то $\varphi(x) \& \psi(y)$ определя

$B \underset{\text{се опр.}}{\longrightarrow} \psi(y)$ universe $\underline{A \times B}$

$A = \{ a \mid \underline{a \in U} \ \& \ A \models \varphi[\![\tilde{a}]\!] \}$, за $A = \langle \tilde{U}, \mathbb{I} \rangle$

Примерно

$f(x) = x+1$

$f(2) \overset{?}{=} 2+1$) остойностяване в метаезика

какво трябва да знаем

сумиране на числа

$\mathcal{A} \models \varphi[\![a_1, \dots, a_n]\!] \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ има оценка v от стр. $\mathcal{A}$, т.е.

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ своб. променливи на φ са измежду $x_1, \dots, x_n$

- $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}\left[v^{x_1 x_2 \dots x_n}_{a_1 a_2 \dots a_n}\right] = \Pi$
- $\mathcal{A} \models_{v^{x_1 x_2 \dots x_n}_{a_1 a_2 \dots a_n}} \varphi$

еквивалентни начини на запис

$$v^{x_1 x_2 \dots x_n}_{\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{\in U}}(y) = \begin{cases} a_i, & y = x_i,\ i \in \{1, \dots, n\} \\ \underbrace{v(y)}_{\in U}, & y \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

$v : Var \to U$

$f(x) = x + 1$

$g(x, y) = x + 1 + y \cdot 0$

$\{0\} \to \varphi(x)$

$\{0\} \times \mathbb{N} \to \psi(x, y) \leq \varphi(x)$ има и от A, т.ч. $\|\varphi\|^{A}[v^{x}_{a}] = T$

$\varphi(x)$, $\psi(y)$ и $A = \{a \mid \underline{a \in U} \;\&\; A \models \varphi[[a]]\}$

$B = \{b \mid b \in U \;\&\; A \models \psi[[b]]\}$

$\varphi(x) \;\&\; \psi(y)$ какво м-во определя?

$A \times B$

def/ Нека Γ е м-во от произволни ф-ли от $\mathcal{L}$ (FOL)

Нека $\mathcal{A}$ е стр. за $\mathcal{L}$.

$v : Var \to A$

$\mathcal{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$

$\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = \mathbb{I}$

1) нека v е оценка в $\mathcal{A}$.

Казваме, че ф-лите в Γ са верни в стр. $\mathcal{A}$ при оценката v $\leftrightarrow (\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models_v \varphi]$

$\mathcal{A} \models_v \Gamma$

2) Казваме, че стр. $\mathcal{A}$ е модел за Γ, ако $(\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models \varphi]$

при произв. оценка от стр. $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} \models \Gamma$

Задача за изпълнимост

По дадено м-во от затворени ф-ли Γ, докажете, че Γ има модел.

def/ Едно м-во Γ от ф-ли е изпълнимо, ако $\exists \mathcal{A}$ и $\exists v$ от $\mathcal{A}$ т.ч. $\mathcal{A} \models_v \Gamma$

$\forall x (x \doteq y)$ незатворена ф-ла

$\forall x \forall y (x \doteq y)$ затворена ф-ла

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\, p(x, x)$ // рефлексивност на релацията $p^{\mathcal{A}}$

$\mathcal{L} = \langle p \rangle$

$\mathcal{A}^{?} = \langle A^{?}, \mathcal{I}(p) = p^{\mathcal{A}} \rangle^{?}$

$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}_1} \rangle$

$\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{A}_1} \leftrightarrow a = b$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

//транзитивност

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\, p(x,x)$

$\mathcal{A}^{?} = \langle A^{?}, \underline{I(p) = p^{\mathcal{A}}}^{?} \rangle$

$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}_1} \rangle \qquad p^{\mathcal{A}_1}(a,b) \Leftrightarrow a = b$

$\mathcal{A}_2 = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}_2} \rangle \qquad p^{\mathcal{A}_2}(a,b) \Leftrightarrow \underline{a \leq b}$

чупи се на φ_3

Релации на еквивалентност имат

с-ва φ_1, φ_2 и φ_3

$\varphi(y) \leftrightharpoons \forall x (x \leq y)$, $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \leq^{\mathcal{A}} \rangle$

$\leq^{\mathcal{A}}(a, b) \Leftrightarrow a \leq b$

за $y = -1$ е true

за останалите не е в сила

$\rightarrow \dfrac{v(y) = -1}{v(x) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}}$ — оценка дефиниция на v

$x \in Var \setminus \{y\}$

$\psi \leftrightharpoons \exists y \forall x (x \leq y)$

$\varphi(z) \leftrightharpoons \forall x (x \leq z)$, $z \in Var$

различна ф-ла от $\varphi(y)$!

Зад. 1

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \neg p(x,x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y\, p(x,y)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\Gamma_1 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2\}$

$\Gamma_2 \leftrightharpoons \Gamma_1 \cup \{\varphi_3\}$

$A \neq \emptyset$

x_0

Докажете, че Γ_1 и Γ_2 имат модели.

★ Γ_2 има ли краен модел (т.е. с краен универсиум)?

φ_1 – ирефлексивност (антирефлексивност)

φ_2 – от всеки връх излиза поне едно ребро (сериалност надясно)

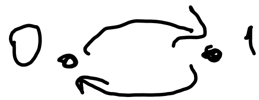
φ_3 – транзитивност

Γ_1?

$\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}_1} \rangle$ $\{0,1\}$

$p^{\mathcal{A}_1}(a,b) \leftrightarrow a < b$

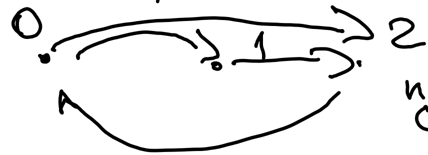
$a, b \in \mathbb{N}$



$A_2 = \langle \underbrace{\{0,1\}}_{A}, p^{A_2} \rangle$

$$\frac{p^{A_2} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}}{p^{A_2} \subseteq A \times A}$$

$\Gamma_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$



$p(0,1) \,\&\, p(1,2) \xrightarrow{\text{по } e_3} p(0,2)$

$\underline{p(0,2) \,\&\, p(2,0)} \xrightarrow{\text{по } e_3} p(0,0)$

Предположение:

$\underline{\Gamma_2 \text{ няма краен модел}}$? Допускаме противното.

Нека $|A| = \underline{n > 0}$ $(\underline{A \neq \emptyset})$.

Нека $a_0 \in A$. От e_2 имаме, че има $a_1 \in A$, т.ч. $p^{A}(a_0, a_1)$ и така още $(n-1)$ пъти има $a_2, a_3, \dots, a_n \in A$, т.ч. $p(a_i, a_{i+1})$ $i \in \{0, \dots, n\}$

$$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow a_{i_0} \leftrightarrows a_{j_0} \dots a_{n-1} \longrightarrow a_n$$

Но $|A| = n$, а имаме $n+1$ точки.

По принципа на Дирихле $(\exists\, i_0, j_0 \in \{0, \dots, n\})$

$[a_{i_0} = a_{j_0}$ и $i_0 \neq j_0]$.

По транзитивност e_3 има пряка стрелка от a_{i_0} до a_{j_0} ↯ с e_1, защото имаме $p(a_{i_0}, \underset{a_{j_0}}{\underset{\parallel}{a_{i_0}}})$.

Моделът $\mathcal{A}_1$ за Γ_1 е модел и за Γ_2.

Зад(2) $\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\, p(x,x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y\, (p(x,y) \vee p(y,x))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y\, (p(x,y) \Rightarrow x \doteq y)$

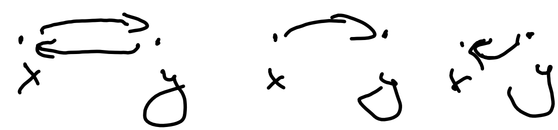
$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \forall y\, (p(y,x) \Rightarrow x \doteq y)$

$\Gamma \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ има модел:

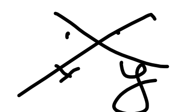
$\mathcal{L} = \langle p \rangle$, то $\mathcal{L}$ има и $\doteq$

φ_1 – рефлексивност

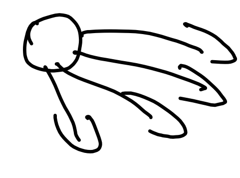
φ_2 – всеки е в контакт с всеки поне в едната посока



φ_3 – максимален елемент



φ_4 – минимален елемент



ето го свойството в смисъла на автомати

$\varphi_3 \models \exists x \forall y\, (x \neq y \Rightarrow \neg p(x,y))$

$A_1 = \langle B, p^{A_1} \rangle$, $p^{A_1}(a,b) \Longleftrightarrow a \leq b$

$B \subseteq_{\text{finite}} \mathbb{N}$ $\quad a, b \in B$

$A_2 = \langle \{0\}, p^{A_2} \rangle$

$0 \quad p^{A_2} = \{\langle 0, 0 \rangle\}$

$A_3 = \langle [0,1], p^{A_3} \rangle$, $p^{A_3}(a,b) \Longleftrightarrow a \leq b$

$\subseteq \mathbb{R}$

$A_4 = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, p^{A_4} \rangle$

$p^{A_4}(a,b) \Longleftrightarrow a \leq b$