Зад ① Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FOL, $p \in \mathrm{Pred}_{\mathcal{L}}$, $\#p = 2$.
Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ структура за $\mathcal{L}$
като:

$$\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{A}} \Longleftrightarrow a + b \geq 3$$

$a, b \in \mathbb{N}$

Кои синглетони са определими?

Примерно решение:

Ще докажем, че: $\{0\}$, $\{1\}$ и $\{2\}$ са определимите синглетони и ще конструираме схема генерираща автоморфизми-свидетели за неопределимост на съответен синглетон $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$, $\{n\}$.

$\varphi_{\{0,1\}}(x) \leftrightharpoons \neg p(x,x)$. // $x + x < 3$

Формално трябва за док, че:
За произволна оценка v от $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models_v \varphi_{\{0,1\}}(x) \Longleftrightarrow v(x) = 0 \text{ или } v(x) = 1$$

$(\Rightarrow)$ Нека $\mathcal{A} \models_v \varphi_{\{0,1\}}(x)$ т.е. при коя да е оценка v такова, че $v(x) \neq 0$ и $v(x) \neq 1$ (допускаме противното) т.е. $\mathcal{A} \models_v \neg p(x,x) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \not\models_v p(x,x)$.

Нека дефинираме оценката v_0 така: $v_0(x) \leq 2$, $v_0(X) \leq 0$, $X \in Var \setminus \{x\}$.

Тогава $A \models_v p(x,x)$, защото

$\langle v_0(x), v_0(x) \rangle = \langle 2, 2 \rangle \in p^A$ т.е. $2+2 \geq 3$.

Абсурд! Допускането ни доведе до противоречие, тогава

$A \models_v \varphi_{\{0,1\}}(x) \rightarrow v(x) = 0$ или $v(x) = 1$

($\leftarrow$) Нека v е т.ч. $v(x) = 0$ или $v(x) = 1$.

БОО нека $v(x) = 0$.

Допускаме, че $A \not\models_v \varphi_{\{0,1\}}(x) \Leftrightarrow$

$A \not\models_v \neg p(x,x) \Leftrightarrow \langle 0, 0 \rangle \in p^A$ $\cancel{\not}$.

Значи $A \models_v \varphi_{\{0,1\}}(x)$.

Това беше пример как да се аргументираме, че тази ф-ла

Определя това мн-во от елементи и, че точно него го определя (без излишък).

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{\{0,1\}}(y) \& \neg p(x,y) \&$
$\exists z(\varphi_{\{0,1\}}(z) \& p(x,z)))$

т.е. има $y=0$, т.е. $x+0<3$ и има $z=1$, т.е. $x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x=2$.

За произв. оценка v от A:

$A \models_v \varphi_2(x) \Leftrightarrow v(x)=2$.

$(\Rightarrow)$ Нека $A \models_v \varphi_2(x)$ и доп., че $v(x) \neq 2$.

$A \models_v \exists y(\varphi_{\{0,1\}}(y) \& \neg p(x,y) \& \exists z(\varphi_{\{0,1\}}(z) \& p(x,z)))$

Нека $v_0(x) \leftrightharpoons 1$, $v_0(X) \leftrightharpoons 0$, $X \in Var \setminus \{x\}$.

Тогава

$A \models_{v_0} \exists y(\varphi_{\{0,1\}}(y) \& \neg p(x,y) \& \exists z(\varphi_{\{0,1\}}(z) \& p(x,z)))$

$\Leftrightarrow A \models_{v_{0\,a\,b}^{\,y\,z}} (\varphi_{\{0,1\}}(y) \& \neg p(x,y) \& \varphi_{\{0,1\}}(z) \& p(x,z))$

$a,b \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a<3 \\ 1+b \geq 3 \end{cases}$ $a,b \in \{0,1\}$, но $b \in \{0,1\}$

$1+b \geq 3$ е винаги невярно $\textcircled{!}$

(⇐) Нека v е т.ч. $v(x)=2$. Доп., че

$\{ \not\models_v \varphi_2(x) \Leftrightarrow a,b \in \{0,1\}$ произволни $\quad 2+a \neq 3$, $\quad 2+b \neq 3$

Но за $a=0$ и $b=1$ са в сила неравенствата $\boxed{\text{⚡}}$.

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_2(y) \,\&\, \varphi_{\{0,1\}}(x) \,\&\, \neg p(x,y))$$

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_{\{0,1\}}(x) \,\&\, \neg\varphi_0(x).$$

★ Сега защо не са определими $\{n\}$ за $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$?

Можем да покажем едновременно неопределимост на всичките с автоморфизма

$$h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & x \in \{0,1,2\} \\ x+1, & x \text{ odd } \& \ x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \\ x-1, & x \text{ even } \& \ x \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\} \end{cases}$$

Но може по дадено конкретно $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ да конструираме автоморфизъм свидетел за неопределимостта на $\{n\}$ така:

Нека $m \leq n+1$ (примерно, може да изберем $m \leq n+2$ и т.н.)

Тогава нека $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$h_{n,m}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & x \neq n,m \ \& \ x \in \mathbb{N} \\ n, & x = m \\ m, & x = n \end{cases}$$

зависи от n и избраното m

$h_{n,m} = h^{-1}_{n,m}$, т.е. $h_{n,m} \circ h_{n,m} = Id_{\mathbb{N}}$ т.е. е биекция.

Остава да докажем, че е хомоморфизъм (хим). Кои са нелогическите ни символи в езика? Само p.

Значи трябва да док., че:

$a,b \in \mathbb{N}: \langle a,b \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle h_{n,m}(a), h_{n,m}(b) \rangle \in p^A$

Сл.1 $a,b \in \mathbb{N} \setminus \{n,m\} \to$ тривиално, $h_{n,m}$ действа като $Id_{\mathbb{N}}$

Сл.2 $a \in \{n,m\}$ и $b \in \mathbb{N}$ или $b \in \{n,m\}$ и $a \in \mathbb{N}$.

БОО нека $a = n$ и $b \in \mathbb{N} \setminus \{n,m\}$.

Нека $\langle n,b \rangle \in p^A \Leftrightarrow n+b \geq 3$.

Доп., че $\langle h_{n,m}(n), h_{n,m}(b) \rangle \notin p^A \Leftrightarrow$

$$\underbrace{h_{n,m}(n)}_{m=n+1} + \underbrace{h_{n,m}(b)}_{b} < 3$$

def $h_{n,m}$

т.е. $n+1+b<3$ и $n+b\geq 3$ ξ
Аналогично и обратната посока се показва. Останалите случаи, които не описахме, са аналогични.
Значи $h_{n,m}\in Aut(A)$ и $n\in\{n\}$, но $h_{n,m}(n)=m\notin\{n\}$, т.е. $\{n\}$ е неопределимо м-во!

Зад 2 | Същият език и носителят на структурата A отново е $\mathbb{N}$, но

$$\langle a,b\rangle\in p^{A}\Leftrightarrow a-b\geq 3$$

$a,b\in\mathbb{N}$.
Отново кои синглетони са определими?

Примерно решение:
Ще докажем, че $\forall n\in\mathbb{N}$, то $\{n\}$ е определимо м-во!
$\varphi_{\{0,1,2\}}(x)\leftrightharpoons\neg\exists y\, p(x,y)$
т.е. няма ест. число y, т.е. $x-y\geq 3$
$x\in\{0,1,2\}$

Нека да определим „=":

I-ви опит:

$\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall z(\underbrace{p(x,z)}_{x-z\geq 3} \Leftrightarrow \underbrace{p(y,z)}_{y-z\geq 3})$

Лошо, ако $x=0$ и $y=1$, то за кое да е z е в сила еквивалентността, но $x\neq y$.

II-ри опит: $\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall z(\underbrace{p(z,x)}_{\underbrace{z-x\geq 3}_{z\geq 3+x}} \Leftrightarrow \underbrace{p(z,y)}_{\underbrace{z-y\geq 3}_{z\geq 3+y}})$

За произв. оценка v от A:

$A \models_v \varphi_=(x,y) \longleftrightarrow v(x)=v(y)$

$(\rightarrow)$ Нека $\underbrace{A\models_v \varphi_=(x,y)}$ и доп., че $\underbrace{v(x)\neq v(y)}$.

$O_v(x)=n\neq m=v(y)$

за $n,m\in\mathbb{N}$

БОО нека $n>m$

за произволно z

$z\geq 3+n \Leftrightarrow z\geq 3+m$

Нека $z=3+m$.

Тогава дясната част е вярна, защото $z=3+m\geq 3+m$, но $z=3+m \ngeq 3+n$, защото $n>m$ ↯

(⇐) Нека v е оц. т.е. $v(x)=v(y)=n \in \mathbb{N}$

за определеност и допускаме, че

$\mathcal{A} \not\models_v \varphi_=(x,y)$. ← оценяваме спрямо v

$m_0 \in \mathbb{N}$, т.е. $(m_0 - n < 3 \;\&\; m_0 - n \geq 3) \vee$

$(m_0 - n \geq 3 \;\&\; m_0 - n < 3)$ ↯.

Сега нека да определим $\{\langle 0,3\rangle\}$:

$$\varphi_{\langle 0,3\rangle}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \;\&\; p(y,x) \;\&\; \forall z\big(\varphi_{\{0,1,2\}}(z) \;\&\; \neg\varphi_=(x,z) \Rightarrow \neg p(y,z)\big)$$

Така:

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y\, \varphi_{\langle 0,3\rangle}(x,y)$$

$$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \exists y\, \varphi_{\langle 0,3\rangle}(y,x)$$

$$\varphi_{\{1,2\}}(x) \leftrightharpoons \varphi_{\{0,1,2\}}(x) \;\&\; \neg\varphi_0(x)$$

Сега $\{1\}$:

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y\big(\varphi_{\{1,2\}}(x) \;\&\; p(y,x) \;\&\; \exists z(\varphi_{\{1,2\}}(z) \;\&\; \neg p(y,z))\big)$$

(Имплицитно $\{4\}$ определихме!)

$$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \varphi_{\{1,2\}}(x) \;\&\; \neg\varphi_1(x).$$

Сега свеждаме достатъчно определими множества, за базата на индукцията, с която ще покажем, че $(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\} \text{ е опр.}]$

(Base): $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ са определими м-ва съответно с ф-лите $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

(Ind.hyp.): Допускаме, че за $m < n$, то $\{m\}$ е определимо с ф-ла φ_m (Използваме пълна/силна математическа индукция).

(Step): $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{n-3}(y) \,\&\, p(x,y) \,\&\, \forall z(\varphi_{n-2}(z) \,\&\, \neg p(x,z)))$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x-(n-3) \geq 3 \\ x-(n-2) < 3 \end{array} \right.$$

Търсим решение на тази система

$$\left| \begin{array}{l} x-n \geq 0 \\ x-n < 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq n \\ x < n+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$n \leq x < n+1$ и т.к. $x \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{дискретна наредба}}$

$x = n$.

Зад ③ | Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ FOL, $p \in Pred$, $\#p = 3$.
Нека $\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), p^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$, като:
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – м-вото от всички подмн-ва на $\mathbb{N}$ т.е. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{B \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$
- $\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff a \cup b = c$

$a, b, c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Да се докаже, че:

a) $\{\emptyset\}$ е определимо

b) $\{\mathbb{N}\}$ е определимо

c) $\subseteq \leftrightharpoons \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \& \ x \subseteq y\}$ е определимо

d) $\cap \leftrightharpoons \{\langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \& \ x \cap y = z\}$ е определимо

e) $^{-} \leftrightharpoons \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \& \ y = \mathbb{N} \setminus x\}$

т.е. y е допълнението на x е определимо.

f) Докажете, че за $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, то $\{a\}$ е неопределимо.

Примерно решение:

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y(p(x,y,y))$ // $x \cup y = y$ $\quad x=\emptyset$

За произволна оценка v от $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A} \models_v \varphi_\emptyset(x) \Longleftrightarrow v(x) = \emptyset$

($\Rightarrow$) Нека $\mathcal{A} \models_v \varphi_\emptyset(x)$.

Тогава за произволно $b \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, то

$\mathcal{A} \models_{v_b^y} p(x,y,y)$.

Нека $y = \emptyset$. Тогава $x \cup \emptyset = \emptyset \Longleftrightarrow$

$x = \emptyset$

т.е. трябва $v_b^y(x) = \emptyset$ и т.к.

$v_b^y(z) = v(z)$ за $z \neq y$, то значи,

че $v_b^y(x) = v(x) = \emptyset$.

($\Leftarrow$) Тривиално изпълнено.

$\varphi_{\mathbb{N}}(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,x)$ // $x \cup y = x$ $\quad x=\mathbb{N}$

$\varphi_\subseteq(x,y) \leftrightharpoons p(x,y,y)$ // $x \cup y = y \Longleftrightarrow$

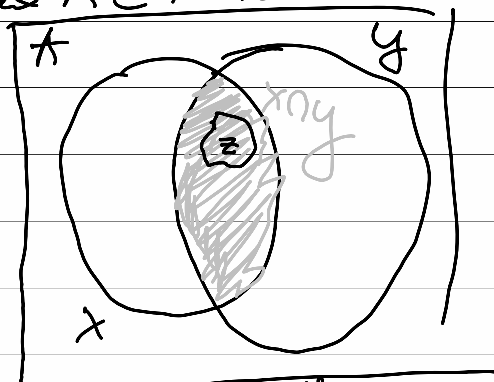
$x \subseteq y$

$\varphi_\cap(x,y,z) \leftrightharpoons$?

Да разгледаме свойства на сечението. Нека A е м-во.

(1) $x \cap y \subseteq x$

(2) $x \cap y \subseteq y$



(1) и (2) стигат ли?

Ами не, м-вото z също ги изпълнява тези свойства.

Имаме нужда да кажем, че $x \cap y$ е <u>най-голямото</u> м-во изпъл. тези свойства т.е.:

(3) $z \subseteq x \,\&\, z \subseteq y \Rightarrow z \subseteq x \cap y$.

Сега да го напишем:

$$\varphi_\cap(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_\subseteq(z,x) \,\&\, \varphi_\subseteq(z,y) \,\&\, \forall t(\varphi_\subseteq(t,x) \,\&\, \varphi_\subseteq(t,y) \Rightarrow \varphi_\subseteq(t,z))$$

$\varphi_-(x,y) \leftrightharpoons$? Свойства на допълнението?

$x \cup \bar{x} = A$ ← цялото

$x \cap \bar{x} = \emptyset$ ← празното

→ вече ги определихме

$\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \exists z \exists t(\varphi_\emptyset(z) \,\&\, \varphi_N(t) \,\&$
$p(x,y,t) \,\&\, \varphi_n(x,y,z))$

Остава да покажем, че за $a \subseteq N$, $a \neq \emptyset$, $a \neq N$, тогава a е неопределимо.

Т.к. $a \neq \emptyset \to (\exists n \in N)[n \in a]$
Т.к. $a \neq N \to (\exists m \in N)[m \notin a]$

Тогава нека дефинираме ф-я $h = h_{A,n,m}$ ← зависи от тях

$h : N \to N$ и

$$h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} n, & x = m \\ m, & x = n \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

$x \in N$

$h = h^{-1}$ – пермутация на N числа, биекция.

Сега дефинираме $H : P(N) \to P(N)$ като $H = H_{A,n,m}$ ← зависи от тях

$H(a) \leftrightharpoons \{h(k) \mid k \in a\}$

$a \in P(N)$

Отново $H \circ H = Id_{P(N)}$, $H = H^{-1}$ биекция.

H хом ли е?

Трябва да проверим, че

$a, b, c \in P(\mathbb{N})$, то

$$\underbrace{\langle a, b, c\rangle \in p^t}_{a \cup b = c} \Leftrightarrow \underbrace{\langle H(a), H(b), H(c)\rangle \in p^t}_{H(a) \cup H(b) = H(c)}$$

Невъзможно е $k \in a$ или $k \in b$ и $k \notin a \cup b$ и обратното, ако $k \in a \cup b$, то $k \notin a$ и $k \notin b$.

Случаите са:

1. $n, m \in a \cup b \Leftrightarrow$
   - 1.1 $n, m \in a$ и $n, m \in b$
   - 1.2 $n, m \in a$ и $n \in b$ и $m \notin b$
   - 1.3 $n, m \in a$ и $m \in b$ и $n \notin b$
   - 1.4 $n, m \in a$ и $n, m \notin b$
   - 1.5 $n \in a$ и $m \in b$
   - 1.6 $m \in a$ и $n \in b$
   - 1.7 $n, m \in b$ и $n \in a$ и $m \notin a$
   - 1.8 $n, m \in b$ и $m \in a$ и $n \notin a$
   - 1.9 $n, m \in b$ и $n, m \notin a$
2. $n \in a \cup b$ или $m \in a \cup b \Leftrightarrow$ ......
3. $n, m \notin a \cup b \Leftrightarrow \underline{n, m \notin a \text{ и } n, m \notin b}$

Доказателството им е тривиално, т.е. го скипваме.

Задачки, които да си помислите:

(1) $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\#p = 3$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ структура за $\mathcal{L}$, където:

$$p^{\mathcal{A}}(a, b, c) \Leftrightarrow a.b + 1 = c^2$$

Определете равенство и докажете, че всеки синглетон е определим.

(2) $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\#p = 3$

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, p^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$p^{\mathcal{A}}(a, b, c) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c$$

Определете $\{0\}, \{1\}, \{2\}$.

Определимо ли е $\{7\}$?