зад. (3)

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y(q(y,y) \lor \neg q(x,y))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \neg q(x,x)$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \forall y\, q(y,x)$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z((p(x) \Leftrightarrow r(x,y,z)) \Leftrightarrow q(y,z))$

Намерете модел за ф-лите горе.

φ_4 - има индивид свързан от всички по q

φ_3 - поне една нерефлексивна точка по q

Значи няма как да направим всички точки по q рефлексивни и така да удовлетворим φ_2

Нека имаме стр. $\mathcal{A}$ и сега ще я дефинираме постепенно.

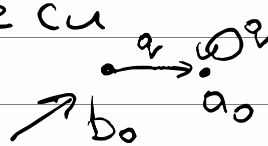
Тогава нека за $p^{\mathcal{A}} = A$ т.е. всички индивиди имат с-во $p^{\mathcal{A}}$.

Тогава по φ_5 значи $\forall x \forall y \forall z\, p(x) \Leftrightarrow r(x,y,z)$

и с рестрикцията за q, то трябва

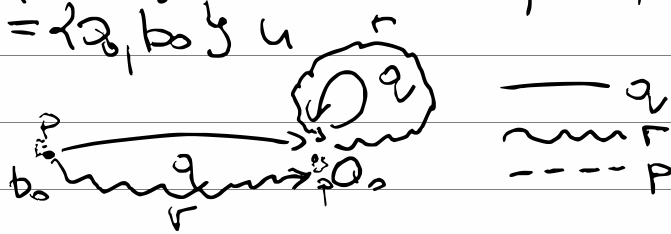
$r(x,y,z)$ за е истина, явно нека
$r^t \leftrightharpoons \{\langle a, b, c\rangle \mid a, b, c \in A$ и $\langle b, c\rangle \in q^t\}$
произволно

Последно $A = ?$ и $q^t = ?$
От φ_4 има един съседи от всички вкл. и себе си



един, който не е рефлексивен по q

и тогава, ако $q^t \leftrightharpoons \{\langle a_0, a_0\rangle, \langle b_0, a_0\rangle\}$,
то $A = \{a_0, b_0\}$ и



Зад 4

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z\,(f(x, f(y,z)) \doteq f(f(x,y),z))$
$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y\,(f(x,y) \doteq x \;\&\; f(y,x) \doteq x)$
$\varphi_3 \leftrightharpoons \neg \exists y \forall x\,(f(x,y) \doteq x \;\&\; f(y,x) \doteq x)$
$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall z\,(f(y,z) \not\doteq x)$
Намерете модел за ф-лите.
φ_1 - асоц. на f
φ_2 - всеки елемент си има неутрален

$\varphi_3 \rightleftharpoons \forall y \exists x \neg (f(x,y) \doteq x \,\&\, f(y,x) \doteq x)$

няма "универсален" неутрален.

φ_4 – "за всеки елемент съществува друг, който с който и друг елемент да го комбинираме, не можем да получим първоначалния."

$A_1 \vDash \Gamma$

$A_1 = \langle Fin / \{\emptyset\}, f^A \rangle$

$f^A(a,b) \doteq c \Leftrightarrow \underline{c = a \cup b}$

$a, b \in Fin / \{\emptyset\}$

$Fin \leftrightharpoons \{A \mid A \subseteq \mathbb{N} \,\&\, \text{"A е крайно"}\}$

$A_2 \vDash \Gamma$

$A_2 = \langle \{a_0, b_0\}, f^A \rangle$ и

$f^A(a,b) \doteq c \Leftrightarrow \underline{c = a}$

$a, b \in \{a_0, b_0\}$

т.е. $f^A(a_0, a_0/b_0) = a_0$

$f^A(b_0, a_0/b_0) = b_0$

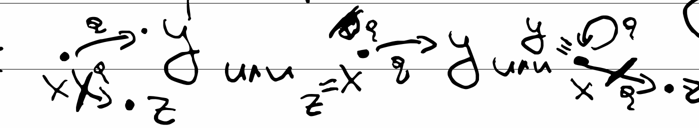
Зад 5

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y \exists z (q(x,y) \,\&\, \neg q(x,z))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow r(x,y))$

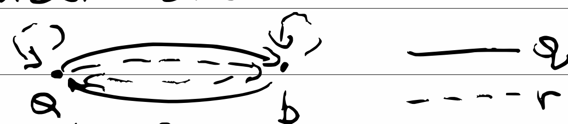
$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \,\&\, r(y,z) \Rightarrow r(x,z))$

Докажете, че ф-лите имат модел.

$\varphi_1 =$ 

$\varphi_2 - \underline{q^A \subseteq r^A}$

$\varphi_3 -$ транзитивност по r



$A = \langle \{a,b\}, q^A, r^A \rangle$ и q^A и r^A са както на рисунката

Зад 6

$\varphi_1 \leftrightharpoons \exists x \forall y (x \neq y \Rightarrow \exists z \neg p(y,z))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \forall y\, p(x,y)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \exists z (p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \exists y\, p(x,y)$

Намерете модел за ф-лите.

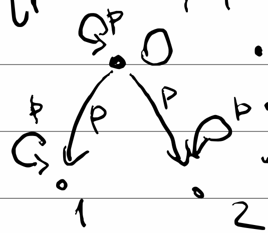
$\varphi_2 -$ един обича всеки друг

$\varphi_3 -$ гъстота

$\varphi_4 -$ всеки обича някого

$\varphi_1 -$ има един, т.ч. за всеки различен от него съществува трети, който вторият не обича

$A_1 = \langle \{0, 1, 2\}, \rho^t \rangle$



- 0-лата сочи всички
- всеки сочи някого
- гъстота (благодарение на рефлексивност)
- за $0 \neq 1 \longrightarrow 2$

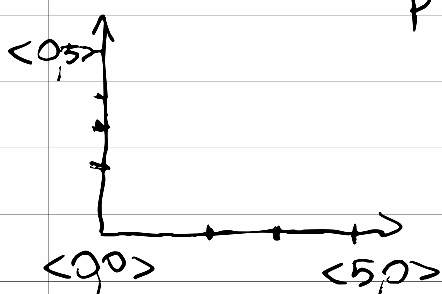
  $0 \neq 2 \longrightarrow 1$

$A_2 = \langle \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}, \rho^t \rangle$

$\rho^t(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) \Longleftrightarrow$

$(a = c = 0 \ \& \ b \leq d) \vee$

$(b = d = 0 \ \& \ a \leq c)$



т.е. или сме в едното, или сме в другото копие на $\mathbb{R}$

зад (г) $\varphi_1 \rightleftharpoons \neg\exists x\, p(x,x)$

$\varphi_2 \rightleftharpoons \forall x \exists y (p(x,y) \,\&\, \neg\exists z(p(x,z) \,\&\, p(z,y)))$

$\varphi_3 \rightleftharpoons \exists x \neg\exists y\, p(y,x)$

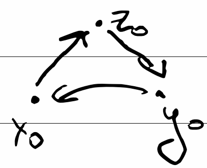
$\varphi_4 \rightleftharpoons \exists x(\exists y\, p(y,x) \Rightarrow \neg\exists y(p(y,x) \,\&\, \neg\exists z(p(x,z) \,\&\, p(z,y))))$

φ_1 - ирефлексивност

φ_2 - обратното на гъстота

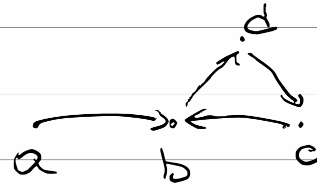
φ_3 - има връх без входящи

φ_4 - куха



Може

$\mathcal{A}_1$:



или

$\mathcal{A}_2$: $A = \mathbb{N} \cup \{3'\}$; $p^{\mathcal{A}} \rightleftharpoons \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{N} \,\&\, b = a+1\} \cup \{\langle 2,3'\rangle, \langle 3',1\rangle\}$

320(8)

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(f(x) \neq x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x(g(f(x)) \doteq x)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x(g(x) = x)$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\varphi_6 \leftrightharpoons \forall x \exists y\, p(x,y)$

φ_1 - f мърда всички

φ_2 - g е обратна на f

φ_3 - g има fixed point

φ_4 - асиметричност на p

φ_5 - транзитивност

φ_6 - от всеки връх излиза ребро

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, p^{\mathcal{A}} \rangle$

$f^{\mathcal{A}}(x) \leftrightharpoons x+1$

$x \in \mathbb{N}$

$g^{\mathcal{A}}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$p^{\mathcal{A}}(a,b) \leftrightarrow a < b$

$a, b \in \mathbb{N}$

322(3) $\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \,\&\, q(y,z) \Rightarrow q(x,z))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y\, q(x,y)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \neg q(x,x)$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(x,z) \,\&\, q(z,y)))$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(z,y) \,\&\, z \neq x \,\&\, \neg q(x,z) \,\&\, \neg q(z,x)))$

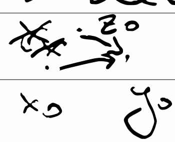
φ_1 - транзитивност

φ_2 - $q^t \neq \varnothing$

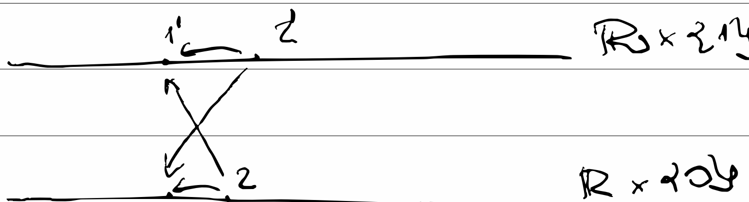
φ_3 - ирефлексивност

φ_4 - гъстота

φ_5 - за всеки две в рел., то:



t_1:



$q^t(\langle a,b \rangle, \langle c,d \rangle) \Leftrightarrow$

$(b = d \,\&\, a < c) \vee$

$(b < d \,\&\, a < c) \vee$

$(d < b \,\&\, c < a)$

$A_1 = \langle \mathbb{R} \times \{0\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}, q^t \rangle$

$\mathcal{A}_2 = \langle \mathbb{R}^2, q^{\mathcal{A}} \rangle$

$q^{\mathcal{A}}(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) \Leftrightarrow$

$\underline{a < c \;\&\; b < d}$