

3a) Here  $\theta = \langle \star \rangle$  in ecap.p.

Here  $f = \langle A \cup \{0\}, \leq^A \rangle$ ,  $\exists x \in A : f(y) = z \Leftrightarrow z = x \cdot y$

a) On p. 203 4x14

b) Opr.  $\mathcal{U}_m = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$   
 t.e.  $(\exists z \in \mathbb{N}) [ \frac{n}{m} = z ]$

c) Def. Uprime = {n ∈ N | 1/n unbounded}

d) On p. d 25, 234, -

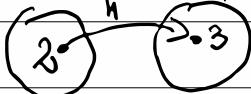
$$F_0(x) \leq \forall y (x \cdot y = x)$$

$$e_1(x) \leq \forall y (x^+y = y)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) \not\rightarrow z \quad (u \neq z < m)$$

$$\varphi_{\text{prime}}^m(x) \leq y \left( \varphi_{n/m}(x,y) \Rightarrow (\varphi_1(y) \vee x = y) \right)$$

Ho been 223, 235 he co on pegenewu.



def | Изоморфизмы

Hence he deserves a high  $\hat{F}$ - $\hat{\Phi}$  in

екомендации т.е:

$$\bullet h(c^t) = c^{\mathfrak{d}}$$

$$\cdot h(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f(h(x_1), \dots, h(x_n))$$

$$\bullet \langle q_1, \dots, q_n \rangle \in p^t \Leftrightarrow \langle h(q_1), \dots, h(q_n) \rangle \in p^t$$

Состав / основные органические со-  
единения

Нарисование и обработка изображения, синтез  
 $h: A \rightarrow A$  и его изображение.

\*  $\text{Aut}(A) \neq \emptyset$ , значит  $\text{Id}_A \in \text{Aut}(A)$ .

$\langle N \text{ pts} \rangle$   
 в табл.  
 структур

Внешний вид  $c \in N$ ,  $p^i$  это ячейка  
 всему симметрии есть определены,  
 т.е. единственное обстоятельство том  
 $\in \text{Aut}_N$ . Тые неявные есть не-рекурренты.

От  $A$  есть видимые  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$  такие

из  $N$  есть непрерывно в короткое время  
 $O_n = \underbrace{2}_{p_1}, \underbrace{3}_{p_2}, \dots, \underbrace{p_m}_{p_n}, \dots \rightarrow p_1=2, p_2=3, \dots$

Неко предп. оп.  $\Rightarrow h: M_{\text{prime}} \rightarrow M_{\text{prime}}$

$$h(x) = \begin{cases} 2, & x=3 \\ 3, & x=2 \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

т.е.  $h$  есть нелинейная би-инъективия  $\rightarrow$   
 $\rightarrow h$  есть инверсия:  $h(h(x)) = x \rightarrow h = h^{-1}$

$$\text{т.о. } h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = \text{Id}_{M_{\text{prime}}}$$

Неко воспроизводим  $H: N \rightarrow N$  т.е.

$$\forall n \in N: H(n) = H(2^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}) \leq h(2) \cdot h(3) \cdot h(p_1)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} h(p_i)^{\alpha_i}$$

$$:= 1$$

$H(H(\alpha)) = \alpha \rightarrow H \in \text{Диеконг, } \underline{H=H^{-1}}$ ,  
 т.е.  $H \circ H^{-1} = H^{-1} \circ H = Id_N$ .

Зачем это нужно?

$$H(\star^t(a, b)) \stackrel{?}{=} \star^t(H(a), H(b))$$

Неко  $a = 2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdots p_n^{d_n}$   
 $b = 2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdots p_n^{p_n}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} & \star^t(H(2^{d_1} \cdot 3^{d_2} \cdots p_n^{d_n}), H(2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdots p_n^{p_n})) = \\ & = \star^t(3^{d_1} \cdot 2^{d_2} \cdots p_n^{d_n}, 3^{p_1} \cdot 2^{p_2} \cdots p_n^{p_n}) = \\ & = 2^{d_2 + p_2} \cdot 3^{d_1 + p_1} \cdots p_n^{d_n + p_n} = \\ & = H(\star^t(a, b)) \quad v. \end{aligned}$$

т.е.  $2 \in \{2\}$ , но  $H(2) = 3 \notin \{2\} \rightarrow \{2\}$  не испр.

Решим, что значение  $\star$  для  $\star^t$ , то  $\{15\}$  не входит в  $\star^t$ .  
 Решим, что  $15 = 3 \cdot 5^1$ . Неко примерно  
 значение  $5 \in \{15\}$  и  $3 \in \{15\}$  и  
 $\star^t(a, b) = 5 \cdot 3^2$ , то ищем  $3 \in \{5\}$  и  $5 \in \{3\}$

HW |  $f = \langle +, \star \rangle$  геометрическим образом синтаксисом  $h.f.p =$   
 $f = \langle \mathbb{R}, +, \star^t \rangle$  квадратично

$$\begin{array}{l} a + b = c \\ a \star^t b = c \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} c = a + b \\ c = a \star^t b \end{array}$$

а) Определи  $\{1\}$ ,  $+1$ ,  $\{23\}$ ,  $\{3\}$ ... т.е. какое есть  $\star$  в  $(\mathbb{N}, +)$  (нужно определено)

- b)  $\exists$ -ы е опр.  $\forall n \in \mathbb{N}$
- c)  $\exists p, q \in \mathbb{Z}$   $p \neq 0$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  е опр.
- d)  $\exists u < \infty$  определено
- e)  $\left\{ -\sqrt[3]{\frac{1}{n}} \right\}$  е опр.

$$\varphi_0(x) \leq \forall y (x \cdot y = x)$$

$$\varphi_1(x) \leq \forall y (x \cdot y = y)$$

$$\varphi_n(x, y) \leq \exists z (\varphi_1(z) \wedge x + z = y)$$

Така с индукција на база  $0, 1$ ,  
допускаме,  $\forall n$   $\exists y$   $\varphi_n(y)$  е определено с др-к  
и. Тогава за  $n+1$ ?

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \exists y (\varphi_n(y) \wedge \varphi_{n+1}(y, x))$$

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \exists y (\varphi_1(y) \wedge \varphi_1(x) \wedge x \cdot x = y).$$

$$\varphi_{n+1}(x, y) \leq \exists z (\varphi_{n+1}(z) \wedge x + z = y)$$

Онова с индукција по  $n$  определено  $\{\varphi_n\}$

Базата е  $0, 1$ . Допускаме,  $\forall n$   $\exists y$   $\varphi_n(y)$  е

определено с др-к  $\varphi_{n+1}$ .

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \exists y (\varphi_n(y) \wedge \varphi_{n+1}(y, x))$$

Со  $\exists p, q \in \mathbb{Z}$   $p, q \neq 0$

$$\varphi_{n+1}(x) \leq \exists y \exists z (\varphi_p(y) \wedge \varphi_q(z) \wedge \varphi_0(z) \wedge x \cdot z = y)$$

$$\ell_{\geq 0}(x) \leq \exists y (x = y \wedge y)$$

$$\ell_{> 0}(x) \leq \neg \ell_0(x) \wedge \ell_{\geq 0}(x)$$

$$\ell_{\leq}(x, y) \leq \exists z (\ell_{\geq 0}(z) \wedge x + z = y)$$

$$\ell_{<}(x, y) \leq \ell_{\leq}(x, y) \wedge \neg(x = y)$$

$$\ell_{\text{switchSign}}(x, y) \leq \exists z (\ell_{-1}(z) \wedge x * z = y)$$

$$\ell_{\frac{x}{y}}(x) \leq \exists y \exists z (\ell_{\frac{y}{z}}(y) \wedge z * z * z = y \wedge \ell_{\text{switchSign}}(z, x))$$

Зад |  $G = \langle p \rangle$ ,  $\# p = 2$ .

$A = \langle \text{окр. } c \text{ на } p, p^A \rangle$ , везде  
помимо  $b$

a)  $p^A(a, b) \Leftrightarrow \text{окр. } b$

b)  $p^A(a, b) \Leftrightarrow a \text{ окр. } b$

c)  $p^A(a, b) \Leftrightarrow_a \text{ окр. } b$

d)  $p^A(a, b) \Leftrightarrow \text{окр. } b$

Отв.  $\text{окр. } b$  и  $a$  неокр.  $b$ .

a)  $\varphi_1(x, y) \leq \forall z (p(x, z) \Leftrightarrow p(y, z))$  b), c), d)

$\varphi_2(x, y) \leq \exists z (p(x, z) \wedge p(z, y) \wedge \neg p(x, y) \wedge \neg p(y, x) \wedge \neg \varphi_1(x, y))$

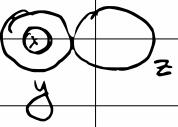
$\varphi_{\text{од}}(x, y) \leq \exists z (\varphi_2(z, x) \wedge \varphi_2(z, y) \wedge \neg p(x, y) \wedge \neg p(y, x) \wedge \neg \varphi_1(x, y) \wedge \neg \varphi_2(x, y) \wedge \neg \varphi_2(y, x))$

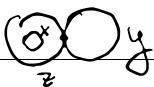
$\varphi_{\text{од}}(x, y) \leq \forall z (\varphi_2(y, z) \Rightarrow (p(x, z) \vee \varphi_2(x, z) \vee \varphi_{\text{од}}(x, z)) \wedge \neg p(x, y) \wedge \neg p(y, x) \wedge \neg \varphi_1(x, y) \wedge \neg \varphi_{\text{од}}(x, y))$

$\varphi_{\text{од}}(x, y) \leq$  отрицать здесь

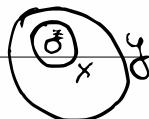
$\exists z (\varphi_2(x, z) \wedge \varphi_{\text{од}}(z, y))$

b) p  $\infty$

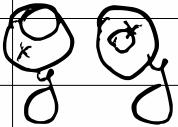
$$\ell_{\infty}(x, y) \leq \neg \ell_{\infty}(x, y) \wedge \neg p(x, y) \wedge$$

$$\forall z (p(y, z) \Rightarrow \neg p(z, x))$$

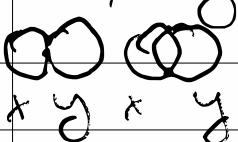
$$\ell_{\infty}(x, y) \leq \exists z (\ell_{\infty}(x, z) \wedge p(z, y))$$


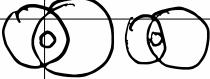
$$\ell_{\infty}(x, y) \leq \neg \ell_{\infty}(y, x) \wedge \neg \ell_{\infty}(y, x) \wedge$$
$$\forall z (\ell_{\infty}(z, x) \Rightarrow \ell_{\infty}(z, y))$$



c)  $\circ \circ p$

$$\ell_{\text{eq}_b}(x, y) \leq \neg p(x, y) \wedge \neg \ell_=(x, y) \wedge$$
$$\forall z (p(y, z) \Rightarrow p(x, z))$$


$$\ell_{\text{1 or 2 points}}(x, y) \leq \neg p(x, y) \wedge \neg \ell_=(x, y) \wedge$$
$$\neg \ell_{\text{eq}_b}(x, y)$$


$\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \text{C}_{\text{1 or 2 points}}(x, y) \wedge \exists z (\text{C}_{\text{Q} \subseteq b}(z, x) \wedge$   
 $\text{C}_{\text{act}}(z, y))$ 


$\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \text{C}_{\text{1 or 2 points}}(x, y) \wedge \neg \text{C}_{\text{OO}}(x, y)$

$\text{C}_{\text{O}}(x, y) \leq \text{C}_{\text{Q} \subseteq b}(x, y) \wedge \exists z (\text{C}_{\text{OO}}(x, z) \wedge \text{C}_{\text{OO}}(y, z))$



d) 

$\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \neg \text{C}_{\text{O}}(x, y) \wedge \exists z (p(z, x) \wedge p(z, y))$

  $\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \text{C}_{\text{OO}}(x, y) \wedge \exists z (p(x, z) \wedge \text{C}_{\text{OO}}(z, y))$

$\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \text{C}_{\text{OO}}(x, y) \wedge \neg \text{C}_{\text{OO}}(x, y)$

$\text{C}_{\text{OO}}(x, y) \leq \exists z (p(z, x) \wedge p(z, y)) \wedge \exists u \exists v (p(u, x) \wedge$   
 $p(v, y) \wedge \text{C}_{\text{OO}}(x, v) \wedge \text{C}_{\text{OO}}(y, u))$



HW  $f <$  всеми квадратом,  $p^T >$ :

стенунасы ортасын

в  $\mathbb{R}^2$  негизниң түрүн

$p^T(a, b) \Leftrightarrow a \text{ и } b \text{ иштөөнде жеңилдиктүүлүк}$

жөнүлдөктөө

a)  $\boxed{a} \leq b \quad \boxed{b} \leq a \Rightarrow a \leq b \rightarrow a \cap b = a$

b)  $a \cap b = \text{төркө} \rightarrow \mathcal{C}_0$

c)  $a \cap b = \text{оркечек} \rightarrow \mathcal{C}_1$

d)  $a \cap b = \text{көбүркөт} \rightarrow \mathcal{C}_2$

$\mathcal{C}_2(x, y) \leq \forall z (p(z, x) \Rightarrow p(z, y))$

$\mathcal{C}_0(x, y) \leq p(x, y) \wedge \forall z (p(z, x) \wedge p(z, y))$

$\wedge \neg \mathcal{C}_2(x, z) \wedge \neg \mathcal{C}_2(z, y) \Rightarrow \exists w (\mathcal{C}_2(w, z) \wedge$

$\neg p(w, x) \wedge \neg p(w, y))$

$\boxed{\mathcal{C}_2}$

$\mathcal{C}_0(x, y) \leq \exists z (\mathcal{C}_2(z, x) \wedge \mathcal{C}_2(z, y) \wedge$

$\forall t (\mathcal{C}_2(t, x) \wedge \mathcal{C}_2(t, y) \Rightarrow \mathcal{C}_2(t, z)))$

$\mathcal{C}_1(x, y) \leq p(x, y) \wedge \neg \mathcal{C}_0(x, y) \wedge$

$\neg \exists z (\mathcal{C}_2(z, x) \wedge \mathcal{C}_2(z, y))$

322 |  $L = \langle p \rangle, \ni$

$$f = \langle \{a, b\}^*, p^A \rangle$$

$$p^A(u, v) \Leftrightarrow |u| - |v| = 1$$

a)  $\exists y$

b)  $\exists w \mid |w| = 2 \rangle$

c)  $\forall x, \exists z \text{ by } e \text{ is a conjugate.}$

$$\varphi_e(x) \leq \exists y_1 \exists y_2 (\neg(y_1 = y_2) \wedge p(x, y_1) \wedge p(x, y_2)$$
$$\wedge \forall z (p(x, z) \Rightarrow z = y_1 \vee z = y_2))$$

Q i g b

E

$$\varphi_e(x) \leq \exists y (\varphi_e(y) \wedge p(x, y))$$

$$\varphi_e(x) \leq \neg \varphi_e(x) \wedge \neg \varphi_e(x) \wedge \forall y (\varphi_e(y) \Rightarrow p(x, y))$$

...

$h: \{a, b\} \rightarrow \{a, b\}$  e.g.  $h(a) = b$   $h(b) = a$ .

$h = h^{-1}$  ~~duerkyja~~.

$$\text{Hence } H(w) = H(\alpha_1 \dots \alpha_n) = h(\alpha_1) \dots h(\alpha_n)$$

$$w = \alpha_1 \dots \alpha_n$$

$H = H^{-1}$  ~~duerkyja~~. Then?

$$\langle a, b \rangle \in p^A \Leftrightarrow \langle H(a), H(b) \rangle \in p^B \checkmark$$

KW  $L = \langle f \rangle \in \overset{\text{"def."}}{=}$

$$f = \langle \lambda, f^t \rangle \cup f^t(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

a) Onp. ioyu q1y

b) Onp. nu e {ny zon  $\in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ }

$$\varphi_0(x) \leq f(x) \doteq x$$

$$(\varphi_1(x) \leq \neg \varphi_0(x) \wedge \exists y (\varphi_0(y) \wedge f(x) \doteq y))$$

Ke e onp.  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

Hera  $h: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ , t.e.  $h(0) = 1 \wedge h(1) = 0$ .

$h = h^{-1}$   $h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h = \text{id}_{\{0, 1\}}$ , h функц.

Hera  $H: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Нека  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Тогаво  $n$  има обикновен зонус

$$n = 1.a_1 \dots a_m, m \geq 1, \text{където } a_i \in \{0, 1\} \text{ за } i \in \{1, \dots, m\}$$

(Разглеждане на когато низове от 0-1-нр.)

Definirane  $H(n) \leq 1.h(a_1).h(a_2). \dots .h(a_m)$

и губ.  $H(0) = 0 \wedge H(1) = 1$ .

$H(H(n)) = n$ , т.e.  $H = H^{-1}$  функц. Коя?

$$H(f(n)) \stackrel{?}{=} f(H(n))$$

Как действа  $f$  върху обикновен зонус на  
единството  $n$ ?  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 1a_1 \dots a_{m-1}, a$

Идеята е да си:  $H(n) = 1\bar{a}_1\bar{a}_2\dots\bar{a}_m$  за  $\bar{a}_i = 1 - a_i$

$$a_i \in \{0, 1\}$$

т.е.  $H$  инвертирует скобки для операции  $\circ$   
 поскольку введение скобок не изменяет значение  
действия.

Прич:

$$\begin{aligned} f(H(n)) &= f(H(1_{Q_1} \dots Q_m)) = f(1_{\overline{Q}_1} \dots \overline{Q_m}) = \\ &= 1_{\overline{Q}_1} \dots \overline{Q_{m-1}} = H(1_{Q_1} \dots Q_{m-1}) = \\ &\stackrel{m \geq 1}{=} H(f(1_{Q_1} \dots Q_{m-1} Q_m)) = \\ &= H(f(n)). \end{aligned}$$

Задача /  $f = \langle N \models Q, f^t \rangle$  и  $L = \langle f \rangle$  с оп.  $p, k$  заданы  
 для  $a, b, c \in N \models Q$ :  
 $f^t(a, b) = c \Leftrightarrow c = a^b$

Определим  $N \models Q$ .

$$C_1(x) \leq \forall z (f(x, z) = x)$$

addition and multiplication

$$n^m \cdot n^k = n^{m+k} \quad (n^m)^k = n^{m \cdot k}$$

$$C_2(x, y, z) \leq \forall w (f(f(w, x), y) = f(w, z))$$

$$C_3(x, y, z) \leq \forall w (C_2(C_2(f(w, x), f(w, y)), f(w, z)))$$

