Зад | Отнш

$\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\#p = 3$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$.

Нека $A = \langle \mathbb{Z}, p^{A} \rangle$, където

$$p^{A}(a, b, c) \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = c$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$

Определете $\{0\}$, $\{1\}$ и $\{2\}$?

Определимо ли е $\{7\}$?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x, x, x)$ // $0^2 + 0^2 = 0$

При коя да е оценка v от A:

$$A \models_v \varphi_0(x) \Longleftrightarrow v(x) = 0.$$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y (\varphi_0(y) \& p(x, y, x))$.

// $1^2 + 0^2 = 1$

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \exists y (\varphi_1(y) \& p(y, y, x))$.

$\{7\}$ не е определимо м-во.

Имаме, че $7^2 = 49 + 0^2$, но $49 = (-7)^2 + 0^2$.

Разглеждаме $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефин. така:

$$h(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x, & x \notin \{7, -7\} \\ -x, & x \in \{7, -7\} \end{cases}$$

$x \in \mathbb{Z}$

$h = h^{-1} \to h$ биекция от $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$.

Остава да докажем, че

$\langle h(a), h(b), h(c)\rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow \langle a, b, c\rangle \in p^{\mathcal{A}}$
за $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- Ако $a, b, c \notin \{7, -7\}$ ✓ и действа като $id_{\mathbb{Z}}$.
- Ако $c \in \{7, -7\}$, тогава
  $a^2+b^2 \neq -7 \leftrightarrow p^{\mathcal{A}}(a, b, -7) \equiv \mathbb{F}$.

Използваме сега малко знания от теория на числата:

<u>Теорема на Ферма за сума на точни квадрати</u>

В теория на числата огромнеска за събиране, то всяко нечетно просто число p може да се изрази като:

$$p = x^2 + y^2, \text{ за } x, y \in \mathbb{Z} \text{ т.с.т.к. } p \equiv 1 \pmod 4)$$

Простите числа, за които е в сила теоремата се наричат Питагорови прости числа. (Т.е. тук освен 0, 1, 2, то и всички Питагорови числа са определими синглетони като 5, 13, 17, 23, ... Има и още определими синглетони освен тях).

Така използвайки тази теорема и факта, че $7 \equiv 3 \pmod 4$, то $a^2+b^2 \not\equiv 3 \pmod 4$ значи $a^2+b^2 \neq 7$ т.е. $p^A(h(a), h(b), h(-7)) \equiv F$.

Така $p^A(a, b, 7) \Leftrightarrow p^A(h(a), h(b), -7)$.

- Ако $c \notin \{7, -7\}$, то $h^2(a) = a^2$, $h^2(b) = b^2$ за всеки $a, b \in \mathbb{Z}$, то $a^2+b^2 = c \Leftrightarrow h^2(a) + h^2(b) = h(c) = c$

Така $p^A(a, b, c) \Leftrightarrow p^A(h(a), h(b), h(c))$

Доказахме, че h е хом + биекция = $h \in Aut(A)$.

Тогава $7 \in \{7\}$, но $h(7) = -7 \notin \{7\}$.

Следователно $\{7\}$ е неопределимо м-во.

Зад.1 $\mathcal{L} = \langle p \rangle, \#p = 3, p \in Pred$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$

$p^{\mathcal{A}}(a, b, c) \Leftrightarrow a.b + 1 = c^2$

Докажете, че:

$M_= \leftrightharpoons \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{N} \ \& \ a = b\}$ е определимо м-во и

$(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е определимо м-во$]$

$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \forall z \forall t (p(x, z, t) \Leftrightarrow p(y, z, t)) \vee (\varphi_0(x) \ \& \ \varphi_0(y))$

Т.е. две числа са равни, ако са неотличими спрямо предиката $p^{\mathcal{A}}$ и всеки две други числа или са едновременно 0 ($p^{\mathcal{A}}$ не хваща този случай), където

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y \forall z \, p(z, x, y)$

Т.е. което и друго число да вземем и да го умножим по x, то винаги ще получаваме едно и също фиксирано отнапред число y (имплицитно използваме $y = 1$).

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \,\&\, p(y,y,x))$

Деф. на $\{2\}$ много непосредствено е деф.

на простите числа в $\mathcal{S} = \langle \mathbb{N}, \times^S \dot{=} \rangle$.

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z (p(y,z,x) \Rightarrow \varphi_1(y) \vee \varphi_1(z))$

т.е. $y.z + 1 = x^2 \Leftrightarrow y.z = x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$y.z = (x-1).(x+1)$

$y = 1$ или $z = 1 \Leftrightarrow x = 2$,

защото за $x = 2$, то $x^2 - 1 = 3$ – просто число

и $x^2 - 1 = 3 = \underbrace{3.1}_{y\ z} = \underbrace{1.3}_{y\ z}$

Сега

$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z (\varphi_1(y) \,\&\, \varphi_2(z) \,\&\, p(y,x,z))$

използвайки горните разсъждения.

С индукция по n и идеята за деф. на $\{3\}$ ще покажем, че

$(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е опр. м-во$]$

<u>База</u>: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

<u>ИП</u>: Нека за $2 < m < n+2$, то $\{m\}$ е определимо с ф-ла φ_m

Тогава:

$$\varphi_{n+2}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \left(\varphi_n(y) \,\&\, \varphi_{n+1}(z) \,\&\, p(y, x, z) \right)$$

Т.е. $n \cdot x + 1 = (n+1)^2 \Leftrightarrow$

$$n.x + \cancel{1} - n^2 - 2n - \cancel{1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -n^2 - n.(2 - x) = 0 \; // : -n \neq 0$$

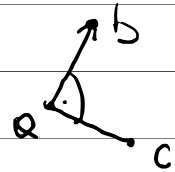
$$\Leftrightarrow \quad n + 2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x = n + 2}$$

Зад 1 Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\#p = 3$, $p \in Pred$.

Нека $S = \langle \mathbb{R}^2, p^S \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$ с носител точките в равнината и $p^S(a,b,c) \Longleftrightarrow a \neq b$ и $b \neq c$ и $\angle bac = 90^\circ$

$a,b,c \in \mathbb{R}^2$



a) Докажете, че множествата са определими:

- $Eq \leftrightharpoons \{\langle a,a\rangle \mid a \in \mathbb{R}^2\}$
- $Col \leftrightharpoons \{\langle a,b,c\rangle \mid a,b,c \in \mathbb{R}^2$ и a,b,c лежат на една и съща права $\}$
- $Circ \leftrightharpoons \{\langle a,b,c\rangle \mid c$ лежи на окръжност с диаметър $ab\}$

b) Определими ли са?

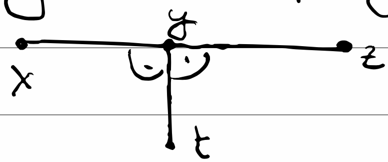
- $Mid \leftrightharpoons \{\langle a,b,c\rangle \mid c$ е среда на $ab\}$
- $Seg \leftrightharpoons \{\langle a,b,c\rangle \mid c$ лежи на $ab\}$

c) Намерете <u>поне</u> два различни автоморфизма в $Aut(S)$.

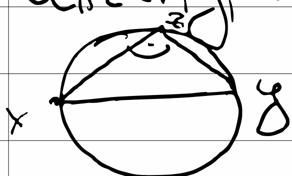
$\varphi_{eq}(x,y) \leftrightharpoons \neg\exists z\, p(z,x,y)$

т.е. не е вярно, че съществува трета точка, с която да образуват прав ъгъл

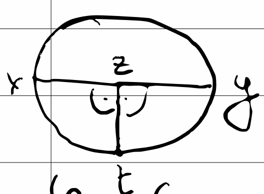
$\varphi_{col}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t\,(p(y,t,x) \,\&\, p(y,z,t))$



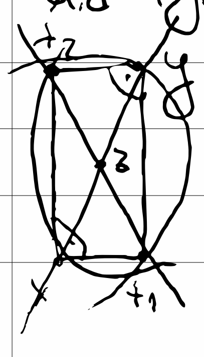
$\varphi_{circ}(x,y,z) \leftrightharpoons p(z,x,y) \vee \varphi_{eq}(x,z) \vee \varphi_{eq}(x,y)$



$\varphi_{seg}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t\,(p(z,x,t) \,\&\, p(z,y,t) \,\&\, \varphi_{circ}(x,y,t)) \vee \varphi_{eq}(z,x) \vee \varphi_{eq}(z,y).$



$\varphi_{mid}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t_1 \exists t_2\,(\varphi_{col}(x,z,y) \,\&\, \varphi_{col}(t_1,z,t_2) \,\&\, \varphi_{circ}(t_1,t_2,y) \,\&\, \varphi_{circ}(t_1,t_2,x))$



Автоморфизми?

1. $Id_{\mathbb{R}^2}$

2. Всички ф-ции запазващи подобието т.е. пазещи ъгъла.
Примерно транслация, ротация, хомотетия и техни композиции като въртяща хомотетия с ц-р $\langle 0,0 \rangle$ и т.н.

Зад | Нека $\mathcal{L} = \langle q, r \rangle$, $\#(q)=3$, $\#(r)=2$ и $q, r \in Pred_{\mathcal{L}}$.

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, q^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, за

$\langle a, b, c \rangle \in q^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow c = a.b$

$\langle a, b \rangle \in r^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow b = a+2$

Определете: $\{2\}$, $\{1/2\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{\sqrt[3]{2}\}$, $\{a \mid a>1 \,\&\, a \in \mathbb{R}\}$.

$\varphi_0(x) \rightleftharpoons \forall y\, q(x,y,x)$ // $0.y = 0$

$\varphi_1(x) \rightleftharpoons \forall y\, q(x,y,y)$ // $1.y = y$

$\varphi_2(x) \rightleftharpoons \exists y(\varphi_0(y) \,\&\, r(y,x))$ // $x = 0+2$

$\varphi_{1/2}(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z(\varphi_1(y) \,\&\, \varphi_2(z) \,\&\, q(x,z,y))$

$\varphi_{2^{1/2}}(x) \rightleftharpoons \exists y(\varphi_2(y) \,\&\, q(x,x,y))$ // $x^2 = 2$

$$\varphi_{2^{1/3}}(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z(\varphi_2(y) \,\&\, \underbrace{q(x,x,z)}_{z = x^2} \,\&\, \underbrace{q(x,z,y)}_{x^3 = 2})$$

$2.x = z$

$$\varphi_{a>1}(x) \rightleftharpoons \exists y \exists z \exists t(\varphi_2(y) \,\&\, \overline{q(y,x,z)} \,\&\, \underbrace{r(t,z)} \,\&\, \varphi_{>0}(t))$$

$2x = z = t+2 \Leftrightarrow$

$x = \frac{t}{2} + 1 \,\&\, t>0$

$\varphi_{>0}(x) \rightleftharpoons \exists y(\neg\varphi_0(y) \,\&\, q(y,y,x))$

Зад/ Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $p \in Pred$, $\#p = 3$
$A = \langle \mathbb{Z}, p^A \rangle$, където
$\langle a, b, c \rangle \in p^A \Leftrightarrow \underline{c = 3 - a \cdot b}$

Определете $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, φ_{+3}, да, че $\forall a \in \mathbb{Z}$ то $\{a\}$ е определимо.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y \forall z\, p(x, z, y)$

$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \& p(y, y, x))$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_3(y) \& \exists z(\varphi_0(z) \& p(y, x, z)))$

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \& p(y, y, x))$

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \& \neg\varphi_1(x) \& p(x, x, y))$

$\varphi_4(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_1(y) \& \varphi_{-1}(z) \& p(y, z, x))$

$\varphi_{+3}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{-1}(z) \& p(z, x, y))$

С индукция по n ще док., че $\{n\}$ е определимо.

База: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

ИП: Допускаме, че за $4 < m < n$, тогава $\{m\}$ е определимо с ф-ла φ_m.

Стъпка: $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{n-3}(y) \& \varphi_{+3}(y, x))$

По аналогичен начин и за $\{-n\}$ док., че $\{-n\}$ е опр.

$\varphi_{-n}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{-n+3}(y) \& \varphi_{+3}(x, y))$

Зад. 1 Нека $\Sigma = \{0,1\}$ и $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Сигнатура $\mathcal{L} = \langle cat, sub \rangle$, за $cat \in Func$, $sub \in Pred$, $\#cat = 2$, $\#sub = 2$.

$\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\Sigma^*), cat^{\mathcal{A}}, sub^{\mathcal{A}} \rangle$

$cat^{\mathcal{A}}(L_1, L_2) \leftrightharpoons L_1 \circ L_2$

$sub^{\mathcal{A}}(L_1, L_2) \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$

Опр: $\{\emptyset\}$, $\{\Sigma^*\}$, $\{\{\varepsilon\}\}$

$single = \{\{w\} \mid w \in \Sigma^*\}$ всички едноэлементни езици

$union = \{\langle L_1, L_2, L_3 \rangle \mid L_3 = L_1 \cup L_2\}$

$star = \{\langle L, L^* \rangle \mid L \subseteq \Sigma^*\}$

Никоя непразна дума от Σ^* не е определима т.е. $w \in \Sigma^*$, то $\{\{w\}\}$ е неопр.

Док. че $h \in Aut(\mathcal{A})$, то h запазва регулярните езици.

$\varphi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y\, sub(x, y)$

$\psi_\emptyset(x) \leftrightharpoons \forall y (cat(x, y) \doteq x)$

$\psi_{\Sigma^*}(x) \leftrightharpoons \forall y\, sub(y, x)$

$\varphi_\varepsilon(x) \leftrightharpoons \forall y\, cat(x, y) \doteq y$

$\varphi_{single}(x) \leftrightharpoons \neg \varphi_\emptyset(x) \,\&\, \forall y\, (sub(y, x) \Rightarrow y \doteq x \vee \varphi_\emptyset(y))$

$\varphi_{union}(x, y, z) \leftrightharpoons sub(y, z) \,\&\, sub(x, z) \,\&\, \forall t (sub(y, t) \,\&\, sub(x, t) \Rightarrow sub(z, t))$

$X^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ | $X^0 = \{\varepsilon\}$, $X^{n+1} = X \circ X^n$

① $\{\varepsilon\} \subseteq X^*$

② $X \circ X^* \subseteq X^*$

③ Това е най-малкото с тези с-ва

$\varphi_{cond}(x, y) \leftrightharpoons \exists z (\varphi_\varepsilon(z) \& sub(z, y) \&$
$sub(cat(x, y), y))$

$\varphi_{star}(x, x^*) \leftrightharpoons \varphi_{cond}(x, x^*) \&$
$\forall x' (\varphi_{cond}(x, x') \Rightarrow x^* \subseteq x')$

$h : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$

$h(0) = 1$ и $h(1) = 0$, $h = h^{-1}$, биекция

$\omega \in \{0, 1\}^* : \omega = a_1 \dots a_n$

$h'(\omega) \leftrightharpoons h(a_1) \dots h(a_n)$, $h' = h'^{-1}$

$H : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$

$H(L) = \{h'(\omega) \mid \omega \in L\}$, $H = H^{-1}$

Запазва sub:

$L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow H(L_1) = \{h'(\omega) \mid \omega \in L_1 \subseteq L_2\} \subseteq$
$H(L_2)$

Запазва cat:

$H(L_1 \circ L_2) = \{h'(\omega) \mid \omega \in L_1 \circ L_2\} =$

$= \{h'(uv) \mid u \in L_1 \& v \in L_2\} =$

h' запазва ∘

$= \{ h'(u).h'(v) \mid u \in L_1 \& v \in L_2 \} =$

$= \{ u'.v' \mid u' \in H(L_1) \& v' \in H(L_2) \} =$

$= H(L_1) \circ H(L_2)$

$u = a_1 \dots a_n$

$v = b_1 \dots b_m$

$h'(u \circ v) = h'(a_1 \dots a_n \circ b_1 \dots b_m) =$

$= h'(a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m) = h(a_1).h(a_2) \dots h(a_n).h(b_1) \dots$

$\dots h(b_m) = h'(u).h'(v).$

$\mathcal{L}_\emptyset$ $\mathcal{L}_\varepsilon$ $\mathcal{L}_{single}$

① $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$, $a \in \Sigma$ са опр. (рег.) ✓

② Ако L_1 и L_2 са рег., то $L_1 \circ L_2$, $L_1 \cup L_2$ и L_1^* са

да запазват се, ние определихме рег.

операциите $\cup$, $*$ и искаме $\circ$ като сет.