Математическата логика е странен звяр. Едновременно е дял от математиката чиято цел е да изучава математиката.

Използваме математиката, за да изучаваме чисто логически теми като доказателства, модели, изчислимост, множества и едновременно с това те се използват, за да се изучава самата математика.

Главно е съсредоточена в използването на формални езици и формална определимост в математиката и в самата нея. Дели се грубо на четири дяла: ТМ, ТИ, ТМод, ТД.

Сега вече ще се запознаем със специален дял на мат. логика, в който ще се развиват събитията през целия семестър: Съждително смятане и Предикатно смятане.

Съждителното смятане се занимава с изучаването на връзките м/у

логическите съюзи &, ∨, ⇒, ⇔, ¬ и т.н.
Семантиката ѝ е тази на двузначните таблици (намираме се в класическо съжд. смятане). Не е голяма изразителността ѝ сила. Затова още от сега ще дефинираме предикатно смятане от първи ред – езика, синтаксис, семантика.

Реално, ако тръгнем да решаваме някаква задача примерно тази за съществуване на Хамилтонов път, то в реалния живот няма да бъде зададено така straight forward, а ние трябва да я обобщим, да изградим някакъв математически модел на задачата, в който вече разсъждаваме за това съществуване. Но зад цялото това преобразуване на задачата стои стабилна теория.

Да се върнем по същество да дефинираме формален език за предикатно смятане от I-ви ред, термове, формули, структури, оценки, ст-т на терм и ф-ла в стр. при оценка от стр. След това ще дефин. задачата за определимост.

def | ЕЯ СI-ви ред (FOPL) $\mathcal{L}$

Това е м-во от означения, което се дели на две основни групи:

(I) Логическа част на езика (always present)

- Азбука на индивидни променливи: $Var = \{x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots\}$ изброимо
- Азбука на съждителните връзки: $\{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg\}$
- Азбука на кванторите: $\{\exists, \forall\}$
- Азбука на помощните символи: $\{(,), ,\}$
- Логически предикатен символ: формално равенство (не всеки език го има, но, ако го има, то той има фиксирана интерпретация) "$\doteq$"

(II) Нелогическа част на езика (може всички азбуки да са празни)

- Азбука на константите $Const_L$
- Азбука на функционалните символи
- Азбука на предикатните символи
- ф-я на арност $\#: Pred_L \cup Func_L \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Съответно $Func_L$ и $Pred_L$.
Функ. символ с арност 0 се наричат константи, а предикатни символи с арност 0 се наричат съждения.

* $Func_L$ - ще се интерпретират като ф-ции, съответно 0-арни ф.с - обект от света

* $Pred_L$ - ще се интерпретират като с-ва на обектите от света.

прим: L_{PA} - ЛЧ + "$\doteq$" ; $Func_L = \{\overset{\#0}{0}, \overset{\#1}{S}, \overset{\#2}{+}, \overset{\#2}{\times}\}$; $Pred_L = \{<\}$
L_{ST} - ЛЧ + "$\doteq$" ; $Func_L = \emptyset$, $Pred_L = \{\in\}$

def Термовете са изрази/думи, формирани чрез PL, които служат за обозначаване на обекти.
Индукт. деф:

- Var са термове
- Инд. конст. са термове
- $f \in Func_L$, $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, $\#f = n$ то $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е терм

Деф. м-вото от всички термове е: $T_{\mathcal{L}}$.
Терм без никакви променливи наричаме затворен терм. Използват се като указатели към обект на света.

<u>прим:</u> PA: $+SSSSOSO$, $\cdot SO+OSSO$, x, y, z, $+xSO$, ...
ST: x, y, z, ...

<u>def</u> | формулите са изрази, формирани чрез даден $\mathcal{L}$, които служат за записване на твърдения. Инд. деф.

- Атомарни ф-ли:
  - $p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ е ат.ф-ла за $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#p = n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$
  - $(\tau_1 \doteq \tau_2)$ е ат. ф-ла, ако $\tau_1, \tau_2 \in T_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}$ е с „$=$"
- Предик. ф-ли
  - Всички атом. са и предик. ф-ли
  - $\neg\varphi$ и $(\varphi \circ \psi)$ са ф-ли за φ, ψ пр. ф-ли, $\circ \in \{\vee, \&, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
  - $x \in Var$, $Qx\varphi$ е ф-ла за $Q \in \{\exists, \forall\}$

<u>прим</u> | PA: $\forall y(\exists z(x \doteq y.z) \Rightarrow \exists z(y \doteq SSO.z \vee y \doteq SO))$
ST: $\forall x(\neg(x \doteq x))$, $x \in x$, ...

<u>def</u> | <u>Структура за език</u>
Стр. за FOL $\mathcal{L}$ наричаме нар. двойка

$\mathcal{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$, където:

- $A \neq \emptyset$ м-во – универсум, свят, обектите живеят тук
- $\mathbb{I}$ – интерпретация на символите на $\mathcal{L}$ в света A. Какво значат обектите от A в $\mathcal{L}$:

$Const_{\mathcal{L}}$: $\mathbb{I}(c) = c^{\mathcal{A}} \in A$

$Pred_{\mathcal{L}}$: $\mathbb{I}(p) = p^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\#p}$, $p^{\mathcal{A}}: A^{\#p} \to \{T, F\}$

$Func_{\mathcal{L}}$: $\mathbb{I}(f) = f^{\mathcal{A}}: A^{\#f} \to A$

★ Светът може да са тривиални т.е.
$p^{\mathcal{A}} = \emptyset$ или $p^{\mathcal{A}} = A^{\#p}$

★ Ако $c_1 \neq c_2$, то може $c_1^{\mathcal{A}} = c_2^{\mathcal{A}}$

★ За $\forall f \in Func_{\mathcal{L}}$, то $f^{\mathcal{A}}$ е тотална т.е. $Dom(f^{\mathcal{A}}) = A$.

$\mathcal{A} = \langle A; c_1^{\mathcal{A}}, c_2^{\mathcal{A}}, \dots; p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}}, \dots; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

прим:
PA: $\mathcal{A}_1 = \langle \mathbb{N}, \underbrace{0^{\mathcal{A}_1}, \cdot^{\mathcal{A}_1}, +^{\mathcal{A}_1}}_{\text{на станд. значи.}}, <^{\mathcal{A}_1} \rangle$ -> модел на $\mathbb{N}$ е стандартен

$\mathcal{A}_2$: $A = \{\square, \circ\}$

$0^{\mathcal{A}_2} = \square$

$S^{\mathcal{A}_2}$	
$\square$	$\circ$
$\circ$	$\circ$

$\cdot^{\mathcal{A}_2}$	$\square$	$\circ$
$\square$	$\square$	$\circ$
$\circ$	$\circ$	$\square$

$+^{\mathcal{A}_2}$	$\square$	$\circ$
$\square$	$\circ$	$\circ$
$\circ$	$\circ$	$\circ$

$<^{\mathcal{A}_2}$	$\square$	$\circ$
$\square$	T	F
$\circ$	F	T

$\mathcal{A}_3 = \langle V, p \rangle$

V - м-во от върхове, $p^{\mathcal{A}_3}(x, y)$ има ребро от x до y

def | Оценка при дадена стр. $\mathcal{A}$ се нарича изобр. $v: Var \to A$, която на всяка индивидна пром. от Var съпоставя точно един елемент от носителя A на структурата: $v(x) \in A$, $x \in Var$

def | Ст-т на терм в стр. $\mathcal{A}$ при оценката v ще деф. така:

- ИК: $\|c\|^{\mathcal{A}}[v] = c^{\mathcal{A}} \in A$
- ИП: $\|x\|^{\mathcal{A}}[v] = v(x) \in A$
- $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\# f = n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$, то $\|f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v] = f^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v]) \in A$

прим | Ако v е оц. в $\mathcal{A}_1$: $v(x) = 14$, $v(y) = 0$, $v(z) = 2$, то $v(44) = 44$, $v((x+y)+(z*3)) = 18$.

def | Ст-т на ф-ла в стр. $\mathcal{A}$ при оценката v е или Π или F.

Т.е., ако φ е вярна в стр. $\mathcal{A}$ при оц. v. пишем $\mathcal{A} \models_v \varphi$, иначе $\mathcal{A} \not\models_v \varphi$.

- $\varphi \equiv p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

$\mathcal{A} \models_v p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ iff $\langle \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v] \rangle \in p^{\mathcal{A}}$

- $\varphi \equiv (\tau_1 \doteq \tau_2)$, ако $\mathcal{L}$ има $\doteq$

$\mathcal{A} \models_v (\tau_1 \doteq \tau_2)$ iff $\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v] = \|\tau_2\|^{\mathcal{A}}[v]$

- $\varphi \equiv \neg\psi$, (i.h) за ψ

$\mathcal{A} \models_v \neg\psi$ iff $\mathcal{A} \not\models_v \psi$

• $\varphi \equiv (\psi \sigma \chi)$, (i.h) за ψ, χ, $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$\mathcal{A} \models_v (\psi \sigma \chi)$ iff $\begin{cases} \mathcal{A} \models_v \psi \overset{\& \to \text{и}}{\underset{\vee \to \text{или}}{}} \mathcal{A} \models_v \chi \\ \mathcal{A} \not\models_v \psi \text{ или } \mathcal{A} \models_v \chi \Rightarrow \\ \mathcal{A} \models_v (\psi \Rightarrow \chi) \text{ и } \mathcal{A} \models_v (\chi \Rightarrow \psi). \end{cases}$

• def. Модиф. оценка

$v_a^x(y) \leftrightharpoons \begin{cases} a, & y = x \\ v(y), & y \neq x \end{cases}$, $a \in A$

прим $\mathcal{A}$ $v(x) = 5$, $v(y) = 6$, то $v_2^x(x+y) = 8$

$\varphi \equiv Qx\psi$, (i.h) ψ

$\mathcal{A} \models_v Qx\psi$ iff $\mathcal{A} \models_{v_a^x} \psi$ за $\begin{cases} \text{произв.} \\ \text{някое} \end{cases}$ $a \in A$ ($\to \forall$, $\to \exists$)

прим | • $\mathcal{A} \models_v \forall x(p(x) \vee \neg p(x))$ за кое да е $\mathcal{A}$ и v в $\mathcal{A}$.

• $\forall x \forall y\, p(x, y)$ -> в пълен граф е true за разни ребра

• $\mathcal{A} \not\models_v \forall x(p(x) \& \neg p(x))$ за кое да е $\mathcal{A}$ и v от $\mathcal{A}$

---

def | Своб. и свърз. участия на промен. във ф-ла

$\varphi(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z\, [p(\underset{f}{x}) \vee (p(\underset{b}{y}) \& \forall x(q(\underset{b}{x}, \underset{b}{y}) \vee \exists x(q(\underset{b}{x}, \underset{b}{z}))))]$

Затворено ф-ла е без своб. участия на промен. в нея.

Задача за определимост

Нека $\mathcal{A}$ е стр. за езика $\mathcal{L}$. Зад. за опред. на м-во $D \subseteq A^n$ за някое $n \geq 1$ (е аналог на задачата да изпрограмираме алгоритъм използвайки наличните библиотечни ф-ции), то D е опр. с ф-ла φ, ако:

- $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и $x_1, \dots, x_n$ са пром., измежду които отг. своб. на φ
- $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in D$ iff $\mathcal{A} \models \varphi\, v^{x_1 x_2 \dots x_n}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ за някоя оц. v.

$\cap, \cup, \bar{\ }$ е окей

Пишем $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

Зад $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FO$\mathcal{L}$ с единств. предик. символ p.

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ като

$p^{\mathcal{A}}(n, m, k) \iff n + m = k$ графиката на ф-ята събиране

a) Опр: $\{0\}$

b) Опр. $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$

c) Опр.: $\{1\}$

d) Док., че $(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е опр.$]$

e) Опр. Even $= \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N})[x = k + k]\}$

f) $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 3 \pmod 5\}$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x, y, y)$

$\varphi_<(x, y) \leftrightharpoons \exists z\, (p(x, z, y)\ \&\ \neg \varphi_0(z))$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \& \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y))$

base: $n = 0, 1$ ✓

i.h.: за всички $k < n$ е вярно

step: $\varphi_n(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \& \dots \& \neg\varphi_{n-1}(x) \&$

$\forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}(y))$.

$\psi_n(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_1(y) \& \varphi_{n-1}(z) \& p(y,z,x))$.

$\varphi_{even}(x) \leftrightharpoons \exists y\, p(y,y,x)$

$\varphi_{\dots}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \exists t \exists v \exists r(\varphi_3(z) \& p(y,y,t)$

$\& p(t,t,v) \& p(v,y,r) \& p(r,z,x))$

$x = 5.y + 3$

HW

$A = \langle \mathbb{N}, <, >, \doteq, pow \rangle$

$pow(x,y) = z \Leftrightarrow x^y = z$

Опр: a) $n \in \mathbb{N}$: $\{n\}$

b) $between(x,y,z) \Leftrightarrow x \leq z \& z \leq y$

c) $del(x,y) \Leftrightarrow x | y$

d) м-во четни и прости числа

e) $+$ и $*$. (използвайте е-вото на степените)

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(pow(y,x) \doteq y)$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \& pow(x,x) \doteq y)$

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons x < y \& \forall z(x < z \Rightarrow y \doteq z \vee y < z)$

Използваме φ_0 и φ_1 за база на индукцията.
Допускаме, че φ_n определя $\{n\}$.
А $\{n+1\}$ определимо ли е?

$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_n(y) \& \varphi_{+1}(y, x))$.

$\leq(x, y) \leftrightharpoons \neg(y < x)$ // ще използваме инфиксна нотация

$between(x, y, z) \leftrightharpoons x \leq z \& z \leq y$

$\varphi_{\cdot}(x, y, z) \leftrightharpoons \forall t(pow(pow(t, x), y) \doteq pow(t, z))$

$\varphi_{+}(x, y, z) \leftrightharpoons \forall t(\varphi_{\cdot}(pow(t, x), pow(t, y), pow(t, z)))$

$del(x, y) \leftrightharpoons \exists z \varphi_{\cdot}(x, z, y)$

$\varphi_{even}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_2(y) \& del(y, x))$

$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \neg \varphi_{even}(x)$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \& \neg\varphi_1(x) \& \forall y(del(y, x) \Rightarrow y \doteq x \vee y \doteq 1)$