Метод на резолюцията

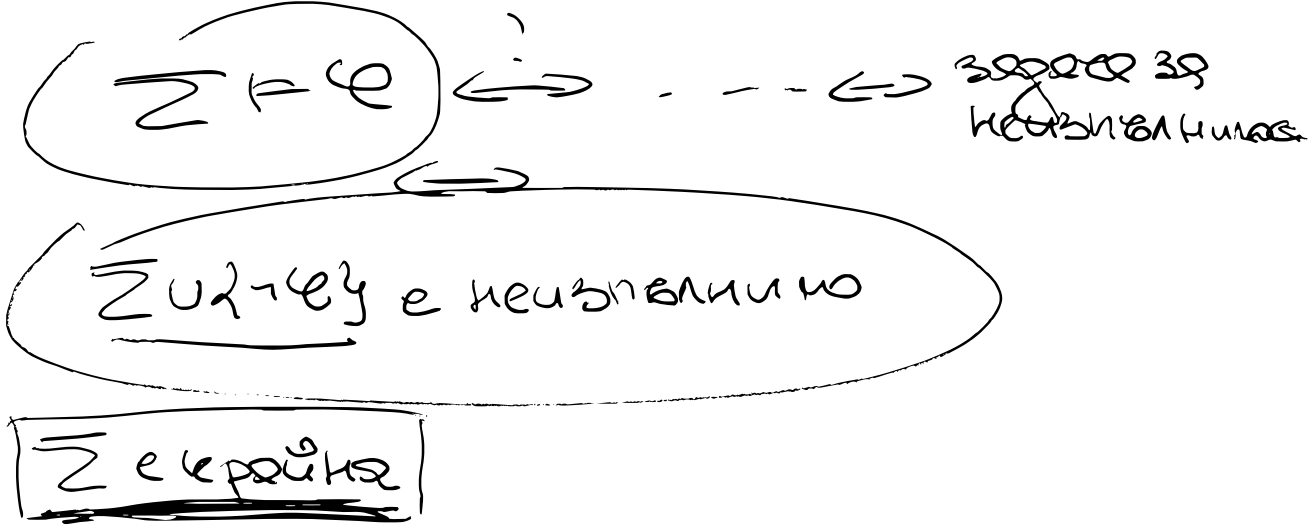
Какво знаем за него от лекции?

Какво е една програма на Пролог всъщност?

- Да проверим дали едно множество от ф-ли е неизпълнимо.
- Σ - м-во от ф-ли, φ - ф-ла

  Дали $\Sigma \models \varphi$

$\emptyset \models \psi$ при ψ тавтология


Σ ⊢ φ
Σ ∪ {¬φ} е неизпълнимо
Σ е керйня

Приложение на основна терминология

def/ Свидетелна ф-ла при положение, че FVAR е празно от свобод. прем. (FVAR ≠ ∅ изрично).

def/ Свидетелен литерал

def/ Елементарна дизюнкция

def/ Свидетелен дизюнкт

def/ Хорнови дизюнкти

def/ Резолвента

def/ Резолютивен извод

def/ Свидетелна ф-ла при положение, че
PVAR е извън от свид. прем. (PVAR ≠ ∅ изрично).

- свид. прем са свид. ф-ли
- ако φ е свид. ф-ла, то и $\neg\varphi$ е свид. ф-ла
- ако φ и ψ са свид. ф-ли, то и $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ и $\varphi \Leftrightarrow \psi$ са свид. ф-ли
- всички свид. ф-ли се генерират с краен # приложения на предните стъпки

---

def/ Свидетелен литерал
$p \in PVAR$ е литерал и $\neg p$, $p \in PVAR$ свид е литерал.

l - такъв ли двойният
$\neg l$ дали е литерал? → не, ако $l = \neg p$, то $\neg\neg p$

$L \leq \{ p, L = \neg p$
$\neg p, L = p$

$L \not\models \neg L$

def Елементарна дизюнкция

Ф-ла от вида $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$, където L_i са литерали за $1 \leq i \leq n$

$L_1 \vee \dots \vee L_n \Leftrightarrow \exists j : 1 \leq j \leq n : I(L_j) = T$

Инф. $I_0 : PVAR \to \{T, F\}$

$I : Form \to \{T, F\}$

$I_0 \subseteq I$

def/ Съждителен дизюнкт

Краен мн-во от литерали.

Ако вземем елем. дизюнкт. $C \leftrightharpoons L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$, то $D_C \leftrightharpoons \{L_1, \ldots, L_n\}$ $\rightleftarrows$

def/ Хорнов дизюнкт

Един дизюнкт е Хорнов, ако съдържа не повече от един позитивен литерал т.е. $L = P$:

- $\{P\}$ – факти
- $\{P, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_n\}_{n>0}$ – правила
- $\{\neg Q_1, \ldots, \neg Q_n\}_{n>0}$ – цели

■ $\leftrightharpoons \{\}$, при който за е дл. инт. I, то $I \not\models$ ■

Какво е една програма на Prolog?

Съвкупност от правила и факти

$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ не е изпълнимо

Σ — програмата на пролог

φ — query команда (търсената цел)

def/ Резолвента

Нека D_1, D_2 са два дизюнкта. Нека $L \in D_1$, $L^{\partial} \in D_2$, $I_0 \models \{D_1, D_2\}$.

Тогава $D_3 = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^{\partial}\})$

D_3 се нарича резолвента на D_1 и D_2 и $I_0 \models D_3$

правилото за резолвента е приложимо спрямо литерала L

! $Res_L(D_1, D_2)$, $Res_L(D_1, D_2) = D_3$

$D_1 = \{p, \neg q\}$

$D_2 = \{q, \neg p, r, \neg v\}$ $L = p$

$L \in D_1$, $L^c \in D_2$

$!Res_L(D_1, D_2) = D_3 = \{\neg q, q, r, \neg v\}$

$!Res_q(D_2, D_1) = D_4 = \{p, \neg p, r, \neg v\}$

Def/ Резолютивен извод.

Нека S е м-во от дизюнкти.

Резолютивен извод от S наричаме крайна редица от дизюнкти всеки член на която:

$D_1 - (D_4)$ $D_1, D_2 \in S$

$D_i \in S$

$3 \le i \le n$ — $\exists j,k : 1 \le j < k < i : D_i = Res_L(D_j, D_k)$

D_1, D_j, D_k, D_i (Res_L)

$S \vdash D \iff D_1 \ldots D_n$ i.e. $D_n = D$

e proof, из проо

OTS

$\varphi_1 \leq p \Rightarrow q$

$\varphi_2 \leq r \Rightarrow s$

$\varphi_3 \leq p \vee r \Rightarrow q \vee s$

? $\varphi_1, \varphi_2 \vDash \varphi_3$? $\Leftrightarrow$ $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3$ е неизпълнимо

(1) Разкриване $\Rightarrow^n$ и $\Leftrightarrow^n$ и нагоре до добиване всички $\neg^n$ за двете и пред свидетелни променливи.

- $\varphi \Rightarrow \psi \overset{\delta}{\vDash} \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi \overset{\delta}{\vDash} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \overset{\delta}{\vDash}$ $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$ $\rightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\neg\neg\varphi \overset{\delta}{\vDash} \varphi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \overset{\delta}{\vDash} \neg\varphi \wedge \neg\psi$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \overset{\delta}{\vDash} \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\varphi_1 \overset{\text{def}}{=} \neg p \vee q$ (φ_1')

$\varphi_2 \overset{\text{def}}{=} \neg r \vee s$ (φ_2')

$\psi \leq \neg \varphi_3 = \neg(p \vee r \Rightarrow q \vee s) \overset{\text{def}}{=} \sim(\neg(p \vee r) \vee (q \vee s)) \overset{\text{def}}{=}$

* Когато разкриваме „$\Rightarrow$" и „$\Leftrightarrow$" запазваме с най-вътрешната тази вертикална, а с „$\neg$" запазваме с най-външната и подчертаем навътре.

$\overset{\text{def}}{=} \neg(p \vee r) \,\&\, \neg(q \vee s) \overset{\psi \leq}{=} (p \vee r) \,\&\, \neg q \,\&\, \neg s$

(2) $(\varphi \,\&\, \psi) \vee \chi \models (\varphi \vee \chi) \,\&\, (\psi \vee \chi)$

$D_1 = \{\neg p, q\}$

$D_2 = \{\neg r, s\}$

$D_3 = \{p, r\}$

$D_4 = \{\neg q\}$

$D_5 = \{\neg s\}$

$S = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$

Правило:

① Резолвента

D_i, D_j, $h \in D_i$, $h^0 \in D_j$.

Тогава $D_k = Res_h(D_i, D_j)$.

Цел: $S \models$ ■ S е изп. $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ S^* е изп.

$I_0 \models S'$ $\Leftrightarrow$ $(\forall D \in S')[I_0 \models D]$

и-вот дизюнкти

■ $\in S^* \Leftrightarrow S^*$ е неизп. $\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ S е неизп.

$S_0 = S$

$S_{n+1} = S_n \cup \{D_i \mid D_j, D_k \in S_n, !Res(D_j, D_k) = D_i\}$

$S^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$

Ситуация: имаме $D_i \subseteq D_j$.

Кой от двата дизюнкта е по-ценен?

За пример $D_i = \{p\} \subseteq D_j$

D_i е по-ценен.

Ситуация: имаме $D_i = \{\dots, p, \neg p, \dots\}$

Трябва ли ни? Полезен ли ни е?

Тавтологичен дизюнкт. Винаги изпълним

т.е. за $(\forall I_0)[I_0 \models D_i]$

Излишен е до някаква степен.

Кои са най-готините? Ами синглетоните

При $D_i = \{p\}$ и $D_j = \{\dots, \neg p, \dots\}$, $\overline{\overline{D_j}} = n$, $n > 0$

$Res(D_i, D_j) = D_k$, $\overline{\overline{D_k}} = n - 1$

$D_1 = \{\neg p, q\}$

$D_2 = \{\neg r, s\}$

$D_3 = \{p, r\}$

$D_4 = \{\neg q\}$ } Синглетони

$D_5 = \{\neg s\}$ } ☺

① Разгл. D_1 и D_4

$q \in D_1$, $\neg q \in D_2$.

$D_6 = Res(D_1, D_2) = \{\neg p\}$

② Разгл. D_6 и D_3

$p \in D_3$, $\neg p \in D_6$

$D_7 = Res(D_3, D_6) = \{r\}$

③ Разгл. D_7 и D_2

$r \in D_7$, $\neg r \in D_2$

$D_8 = Res(D_7, D_2) = \{s\}$

④ Разгл. D_5 и D_8

$s \in D_8$, $\neg s \in D_5$

$D_9 = Res(D_8, D_5) = \{\} = \blacksquare$

ЗF $\blacksquare$

We win!

Примерна задача, с която ще илюстрираме <u>линеарен резолютивен</u> метод и ще дадем стъпките + def.

Нека имаме

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x[\forall y(S(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x[\neg S(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \& \neg q(z,x))]$

Въпрос? $\varphi_1 \& \varphi_2 \models \varphi_3$? $\overset{\text{Th}}{\Longleftrightarrow}$ $\emptyset \models \varphi_1 \Rightarrow (\varphi_2 \Rightarrow \varphi_3)$

$\overset{\text{лог. еквив. преход}}{\Longleftrightarrow}$ $\emptyset \models \varphi_1 \& \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3$ т.е. е тавтология

$\overset{\text{Тв.}}{\Longleftrightarrow}$ $\neg(\varphi_1 \& \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3) \models$ | $\varphi_1 \& \varphi_2 \& \neg\varphi_3$ е неизпълнимо

т.е. няма стр. и оценка в нея, т.е. да е вярна тази ф-ла

1. -||- кога в свърз. ЕОСТ
2. ПНФ
3. СНФ
4. Дист. закон $(\varphi \& \psi) \vee \chi$
5. Извл. на дизюнкти.

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x[\forall y(S(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x[\neg S(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\neg\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \,\&\, \neg q(z,x))]$

(1) Разкриване „⇒" и „⇔" (отвътре навън)

и вкарване „¬" за забутване до атомарни ф-ли

(отвън навътре).

- $\varphi \Rightarrow \psi \models\!\dashv \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi \models\!\dashv (\neg\varphi \vee \psi) \,\&\, (\neg\psi \vee \varphi)$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \models\!\dashv \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$
- $\neg(\varphi \,\&\, \psi) \models\!\dashv \neg\varphi \vee \neg\psi$
- $\neg\neg\varphi \models\!\dashv \varphi$
- $\neg\forall x\varphi \models\!\dashv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \models\!\dashv \forall x\neg\varphi$

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x[\forall y(S(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x[\neg S(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\psi \leftrightharpoons \neg \varphi_3 \leftrightharpoons \neg \exists x \forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \& \neg q(z,x))]$

$\varphi_1 \dashv\vdash \forall x[\forall y(\neg s(y) \vee p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)] \dashv\vdash$

$\varphi_1' \leftrightharpoons \forall x[\exists y(s(y) \& \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2' \leftrightharpoons \varphi_2$

$\neg \varphi_3 \dashv\vdash \neg \exists x \forall y[\neg r(y) \vee \exists z(\neg p(z,y) \& \neg q(z,x))] \} \dashv\vdash$

$\psi' \leftrightharpoons \forall x \exists y[r(y) \& \forall z(p(z,y) \vee q(z,x))]$

② ПНФ

def/ ф-ла φ е в ПНФ ако $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \theta$;

- $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \le i \le n$
- θ е безкванторна ф-ла
- $x_i \neq x_j$, $1 \le i < j \le n$

• $Var^{free}[\varphi] \cap Var^{bound}[\varphi] = \emptyset$

$\varphi(x) \leftrightharpoons \forall x\, p(x)\ \&\ p(x)$

Th за варианте $y \notin Var[\varphi] = Var^{free}[\varphi] \cup Var^{bound}[\varphi]$

$\Downarrow$ $\varphi'(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(y)\ \&\ p(x)$

$\forall y[p(y)\ \&\ p(x)]$

Правила за изваждане на квантор пред скоби:

Th / Ако $x \notin Var^{free}[\psi]$ тогава

$Qx\varphi\ \sigma\ \psi \models Qx(\varphi\ \sigma\ \psi)$

$Q \in \{\exists, \forall\}$, $\sigma \in \{\vee, \&\}$ } 4 правила

* Искаме да изваждаме възможно най-рано $\exists$ кванторите, за да си улесним СНФ

$$— [\forall x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \exists z \forall t\, p(t,z)] \quad \text{III}$$

$$\exists z [\forall x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \forall t\, p(t,z)] \quad \text{II}$$

$$\exists z \forall x [\exists y\, p(x,y) \;\&\; \forall t\, p(t,z)] \quad \text{I}$$

$\varphi_1' \lesssim \forall x [\exists y (s(y) \,\&\, \neg p(y, x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2' \lesssim \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x, y)]$

$\psi' \lesssim \forall x \exists y [r(y) \,\&\, \forall z (p(z, y) \vee q(z, x))]$

$\varphi_1'' \lesssim \forall x \exists y [(s(y) \,\&\, \neg p(y, x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2'' \lesssim \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x, y)]$

$\psi'' \lesssim \forall x \exists y \forall z [r(y) \,\&\, (p(z, y) \vee q(z, x))]$

③ СНФ

def/ 1 step-skolemization

$\varphi, \varphi_s, \varphi_{ss}, \varphi_{sss}, \dots \varphi_{\underbrace{ss\dots s}_{n}} = \varphi^S$ ← СНФ

ф-ла φ след 3 пъти прил. на 1ss

$\varphi \leftrightharpoons \exists x \psi$, $\varphi_s \leftrightharpoons \psi[x/c_\varphi]$, $\# c_\varphi = 0$

$\varphi \leftrightharpoons \forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \psi$, $n > 0$, $\varphi_s \leftrightharpoons \psi[x/f_\varphi(y_1, \dots, y_n)]$, $\# f_\varphi = n$

φ е изп. $\Leftrightarrow$ φ^S е изп.

не са задължително логически ст.т.

$\varphi \not\models \varphi^S$

$\varphi_1'' \lessgtr \forall x \exists y [(s(y) \& \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2'' \lessgtr \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\psi'' \lessgtr \forall x \exists y \forall z [r(y) \& (p(z,y) \vee q(z,x))]$

$\varphi_1^S \lessgtr \forall x [(s(f(x)) \& \neg p(f(x),x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2^S \lessgtr \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,a)]$

$\psi^S \lessgtr \forall x \forall z [r(g(x)) \& (p(z,g(x)) \vee q(z,x))]$

4) Прилагаме $((\varphi \& \psi) \vee \chi) \dashv\vdash (\varphi \vee \chi) \& (\psi \vee \chi)$, ако има нужда

$\varphi_1^f \lessgtr \forall x [(s(f(x)) \vee \neg r(x)) \& (\neg p(f(x),x) \vee \neg r(x))]$

$\varphi_2^f \lessgtr \varphi_2^S$

$\psi^f \lessgtr \psi^S$

Th $\underline{\varphi \text{ изп}} \longleftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ $\underline{\text{изп}}$