Зад. Нека имаме структура $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}; f^{\mathcal{A}} \rangle$ с формално равенство $\doteq$ и интерпретация на двуместния функционален символ f:

$$f^{\mathcal{A}}(n, m) \leftrightharpoons n + m \quad , n, m \in \mathbb{Z}.$$

Кои синглетони са определими?

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$

$a^{\mathcal{A}} \leftrightharpoons 0$

$\{0\}$ определим ли е?

/* $1+1$

$1+x$

$f(f(x))$

$1+1 \doteq 2$ */

$f(x, y) \doteq z$

$f(f(x, y), x) \doteq z$

$f(x, y) \doteq z$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (f(x, y) \doteq y).$

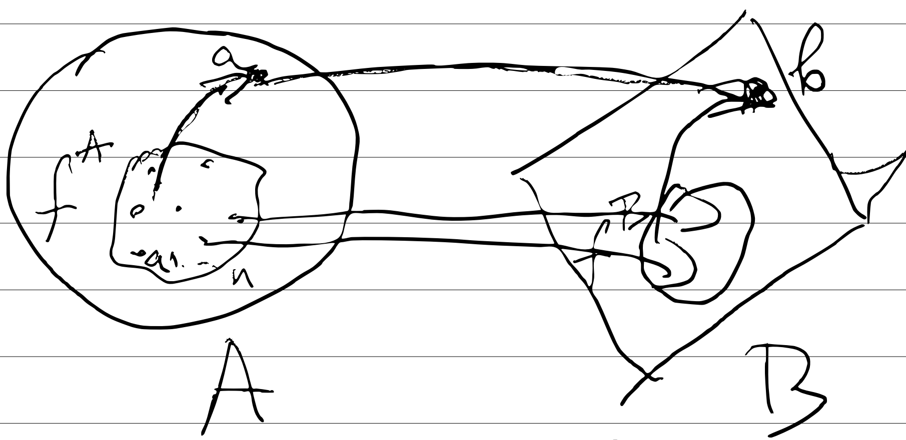
В $\mathcal{A}$ е вярно $\varphi_0(x) \longleftrightarrow x = 0$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons f(x, x) \doteq x.$

Определим ли е $\{1\}$?

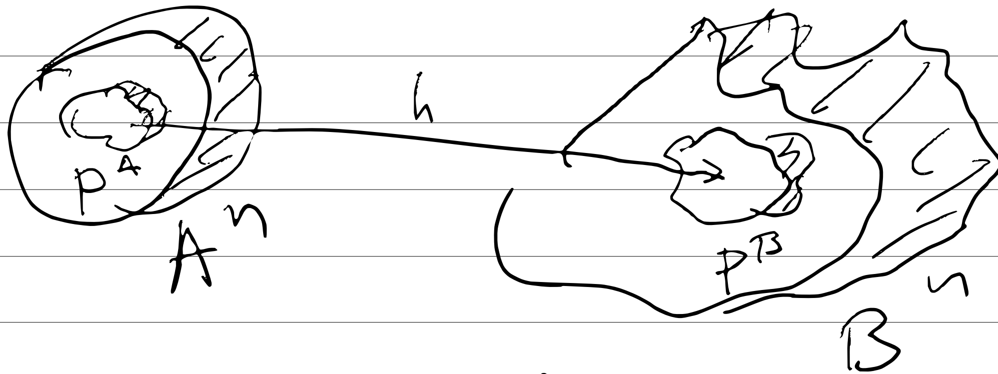
$\exists z(x + z \doteq y)$

$h : A \to B$



$$h(f^A(a_1 \ldots a_n)) = f^B(h(a_1), \ldots h(a_n))$$

$$h(c^A) = c^B$$



$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^A$ ттк $\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^B$

def / Автоморфизъм

Нека h е ф-я, т.е. $h: A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$ биекция и е хомоморфизъм спрямо операциите и свойствата в светя ни:

- За функционален символ с арност 0, примерно c, то $h(c^{A}) = c^{A} \in A$.
- За функционален символ с арност $n \in \mathbb{N}_{>0}$, прим. f, то за всеки $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$h(f^{A}_{\Sigma}(a_1, \dots, a_n)) = f^{A}_{\Sigma}(h(a_1), \dots, h(a_n)).$$

- За предикатен символ с арност $n \in \mathbb{N}_{>0}$, прим. p, то за всеки $a_1, \dots, a_n \in A$:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^{A} \Longleftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^{A}.$$

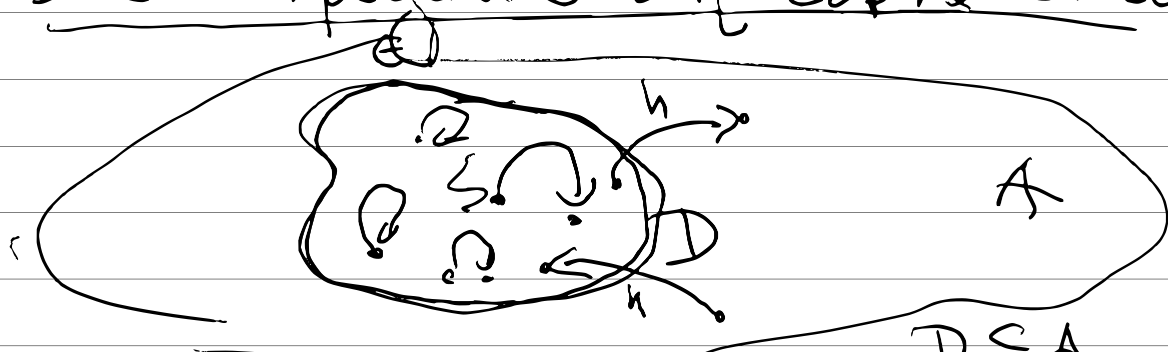
Тогава h се нарича изоморфизъм на стр. $\mathcal{A}$ в стр. $\mathcal{A}$, още се нарича автоморфизъм в стр. $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ с $\underline{Aut(\mathcal{A})} \leftrightharpoons \{h \mid$ "h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$"$\}$.

! $Aut(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, защото $Id_{\underline{A}} \in Aut(\mathcal{A})$.

Критерий за неопределимост на множество

Нека $\mathcal{A}$ е стр. и $\underline{D \subseteq A^n}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Ако има $h \in Aut(\mathcal{A})$, има $a_1, .., a_n \in A$, т.е.
не е в сила, че:
$\langle a_1, .., a_n \rangle \in D \longleftrightarrow \langle h(a_1), .., h(a_n) \rangle \in D$, то
D е неопределимо в $\mathcal{A}$ с ф-ла от езика на $\mathcal{A}$.



$\underline{D} \subseteq A$

Подзад

$\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}; S^{\mathcal{B}}, M^{\mathcal{B}} \rangle$

$\langle n,m,k \rangle \in S^{\mathcal{B}} \iff n+m=k$

$\langle n,m,k \rangle \in M^{\mathcal{B}} \iff n.m=k$

$Aut(\mathcal{B}) = ?$

Нека $h \in Aut(\mathcal{B})$. В частност всички синглетони е определими тук и нека $n \in \mathbb{N}$,

$h[\{n\}] = \{h(n)\} \underset{\{n\} \text{ е определима}}{=} \{n\} \Rightarrow h(n)=n.$

и беше произволно, т.е. излиза $h = Id_{\mathbb{N}}$.

Т.е. h е произволен $\Rightarrow Aut(\mathcal{B}) = \{Id_{\mathbb{N}}\}$.

Връщаме се към задачата.

Дали определимо ли е?

Искаме $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, т.ч.

$$h(f^{\mathcal{A}}(n,m)) = f^{\mathcal{A}}(h(n), h(m))$$

за произволни $n, m \in \mathbb{Z}$.

$$h(x+y) = h(x) + h(y)$$

$$h(x) \leftrightharpoons -1 \cdot x = -x$$

$n, m \in \mathbb{Z}$

$$h(f^{\mathcal{A}}(n,m)) = h(n+m) = -(n+m) = -n + -m$$

$$= h(n) + h(m) = f^{\mathcal{A}}(h(n), h(m)).$$

Защо е биекция?

$h = h^{-1}$ т.е. $h(h(x)) = x$.

$$h(\{n\}) = \{-n\} \qquad \{n\} \stackrel{?}{=} \{-n\}$$

$$n = 0$$

зад. Нека имаме структура $A = \langle \mathbb{R}; s^A, m^A \rangle$ с интерпретации на триместните предикатни символи:

$$\langle n, m, k \rangle \in s^A \iff n + m = k$$

$$\langle n, m, k \rangle \in m^A \iff n \cdot m = k$$

Определете:

- $\{0\}$, $\{1\}$, $\{n\}$ за $n \in \mathbb{N}$
- $\{-n\}$ за $n \in \mathbb{N}$
- $\{p/q\}$ за $q \neq 0$
- $\{\sqrt[3]{\frac{13}{7}}\}$
- $\{\langle n, m \rangle \mid n = m\}$
- $\{\langle n, m \rangle \mid n < m\}$
- Всеки синглетон ли е определим?

• $\{0\}, \{1\}, \{n\}$ за $n \in \mathbb{N}$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons S(x,x,x).$

$S^{\mathbb{R}} \leftrightharpoons \{\langle n,m,k\rangle \mid n,m,k \in \mathbb{R},\ n+m=k\}$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons M(x,x,x) \,\&\, \neg\varphi_0(x).$

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, S(x,z,y))$

$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_n(z) \,\&\, \varphi_{+1}(z,x))$

• $\{-n\}$ за $n \in \mathbb{N}$

$\varphi_{-n}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_n(y) \wedge \varphi_0(z) \wedge S(x,y,z))$

$\varphi_{-n}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_n(y) \,\&\, \underline{\varphi_{-1}(z)} \,\&\, M(y,z,x)).$

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_1(y) \,\&\, M(x,x,y) \,\&\, \neg\varphi_1(x)).$

• $\{p/q\}$ за $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$?

$m(x, q, p)$

$$\varphi_{p/q}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \left(\varphi_p(y) \,\&\, \varphi_q(z) \,\&\, \neg\varphi_0(z) \,\&\, m(x, z, y) \right).$$

• $\left\{ -\sqrt[3]{\frac{19}{7}} \right\}$

$$\varphi_{-\sqrt[3]{\frac{19}{7}}}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \left(\varphi_{\frac{19}{7}}(y) \,\&\, \varphi_{\sqrt[3]{a}}(y, z) \,\&\, \varphi_{*-1}(z, x) \right).$$

$$\varphi_{\sqrt[3]{a}}(x, y) \leftrightharpoons \exists z \left(m(x, x, z) \,\&\, m(z, x, y) \right).$$

$y = \sqrt[3]{x}$

$\underline{f(g(x))}$

$$\varphi_{*-1}(x, y) \leftrightharpoons \exists z \left(\varphi_{-1}(z) \,\&\, m(x, z, y) \right).$$

$y = -x$

- $\{\langle n, m\rangle \mid n = m\}$
- $\{\langle n, m\rangle \mid n < m\}$
- Всеки синглетон ли е определим? Не.

$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \,\&\, S(x, z, y)).$

$\varphi_\leq(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_{non\text{-}negative}(z) \,\&\, S(x, z, y)).$

$\varphi_{non\text{-}negative}(x) \leftrightharpoons \exists y(m(y, y, x)).$ // $x = y^2, y \in \mathbb{R}.$

$\varphi_<(x, y) \leftrightharpoons \neg\varphi_\leq(y, x).$

(32) Нека $\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), p^{\mathcal{A}} \rangle$, където интерпр. ~~на~~ на предикатния символ p е:

$$\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow a \cup b = c.$$

Определете:

- $\{\emptyset\}, \{\mathbb{N}\}$
- $\{\langle a, b \rangle \mid a \subseteq b\}$
- $\{\langle a, b \rangle \mid a = b\}$
- $\{\langle a, b, c \rangle \mid a \cap b = c\}$
- $\{\langle a, b \rangle \mid b = \mathbb{N} \setminus a\}$
- Дали $\{a\}$ за $a \neq \emptyset, \mathbb{N}$ е неопределимо за $a \subseteq \mathbb{N}$.

$\varphi_{\emptyset}(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x, y, y).$

$\emptyset \cup y = y$ ✓

$x \cup y = y$ Нека $y = \emptyset$

$x = x \cup \emptyset = \emptyset$

$\varphi(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(y, x, x).$

Нека $X = \mathbb{N}$, $y_0 \subseteq X$ $\quad y_0 \cup X = X$

$y \cup X = X$

Нека $y = \mathbb{N}$

$y \cup X = \mathbb{N} \cup X = \mathbb{N}$

$y \cup X = X \quad \Rightarrow X = \mathbb{N}$

$\{ \langle a, b \rangle \mid a \subseteq b \}$

$\varphi_{\subseteq}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\, p(x, z, y).$

$\psi_{\subseteq}(x, y) \leftrightharpoons p(x, y, y)$

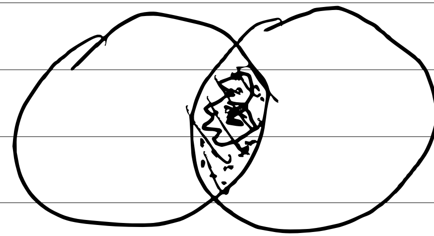
Нека $x \subseteq y \quad x \cup y = y$

$\Leftarrow$

$\Rightarrow$

Нека $x \cup y = y$

$$\varphi_{=}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{\subseteq}(x,y) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y,x)$$

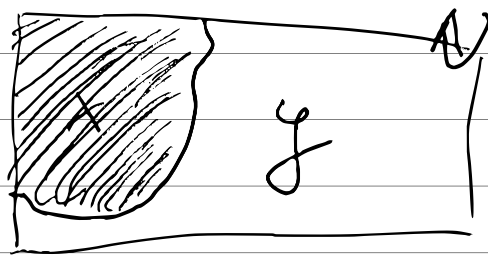


$$\varphi_{\cap}(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_{\subseteq}(z,x) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(z,y) \,\&$$
$$\forall t\,(\varphi_{\subseteq}(t,x) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(t,y) \Rightarrow \varphi_{\subseteq}(t,z)).$$

$$\varphi_{c}(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(\varphi_{A}(z) \,\&\, p(x,y,z)) \,\&$$
$$\exists z\,(\varphi_{\varnothing}(z) \,\&\, \varphi_{\cap}(x,y,z)).$$

z

$y = A \setminus x$



Нека $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$.

$\{a\}$ определимо ли е?

Т.к. $a \neq \emptyset \rightsquigarrow$ има поне един елемент и нека $b_a \in a$ е свидетел.

Т.к. $a \neq \mathbb{N} \rightsquigarrow$ има поне един елемент извън a и нека $c_a \in \mathbb{N} \setminus a$ е свидетел.

$h_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — $h_a(x) \leftrightharpoons \begin{cases} c_a, & x = b_a \\ b_a, & x = c_a \\ x, & \text{else} \end{cases}$

$h_a^{-1} = h_a$

$H_a : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ —

$H_a(x) \leftrightharpoons \{h_a(d) \mid d \in x\}$.

$x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

? $H_a \in Aut(\mathcal{A}) \rightsquigarrow H_a^{-1} = H_a$

$\langle d, b, c\rangle \in p^{A} \iff \langle H_a(d), H_a(b), H_a(c)\rangle \in p^{A}$

$d, b, c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$H_a(x) = \begin{cases} (x \setminus \{c_a\}) \cup \{b_a\}, & c_a \in x \text{ u } b_a \notin x \\ (x \setminus \{b_a\}) \cup \{c_a\}, & b_a \in x \text{ u } c_a \notin x \\ x, & \text{else} \end{cases}$$