def / Автоморфизъм

Нека h е ф-я, т.е. $h: A \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow A$ биекция и е хомоморфизъм спрямо операциите и свойствата в светя ни:

- За функционален символ с арност 0, примерно c, то $h(c^{A}) = c^{A} \in A$.
- За функционален символ с арност $n \in \mathbb{N}_{>0}$, прим. f, то за всеки $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$h(f^{A}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{A}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

- За предикатен символ с арност $n \in \mathbb{N}_{>0}$, прим. p, то за всеки $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in p^{A} \Longleftrightarrow \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in p^{A}.$$

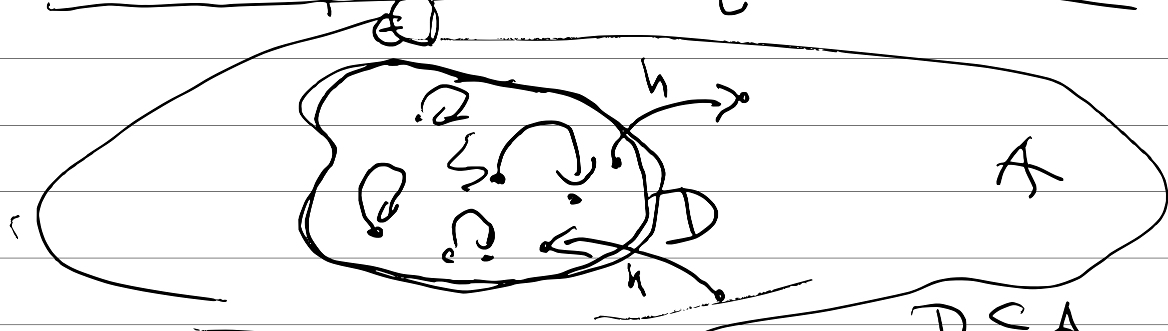
Тогава h се нарича изоморфизъм на стр. A в стр. A, още се нарича автоморфизъм в стр. A.

$\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \leftrightharpoons \{h \mid$ "h е автоморфизъм в $\mathcal{A}$"$\}$.

! $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, защото $Id_A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Критерий за неопределимост на множество

Нека $\mathcal{A}$ е стр. и $D \subseteq A^n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Ако има $h \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, има $a_1, .., a_n \in A$, т.е.
не е в сила, че:
$$\langle a_1, .., a_n \rangle \in D \longleftrightarrow \langle h(a_1), .., h(a_n) \rangle \in D,$$ то
D е неопределимо в $\mathcal{A}$ с ф-ла от езика на $\mathcal{A}$.



$D \subseteq A$

Запознаване със синтаксиса на език от I-ви ред и формализиране на различните семантики за него

План: (i) Деф. език за предик. смятане от I-ви ред. и примери

(ii) Деф. терм и примери

(iii) Деф. формула и примери

(iv) Деф. стр. за FOPL + специфики

(v) Деф. оценка в стр. Ст-т на терм в стр. при оценка, ст-т на ф-ла в стр. при оценка

(vi) Припомняме свободни и свързани променливи.

def/ FOPL $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$

I Логическа част

- индивидни променливи $Var = \{x, y, z, \ldots, x', y'', z_{1000}, \ldots\}$ изброимо голяма азбука
- азбука на съжд. връзки $\{\&, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- азбука на помощни символи $\{ (,), , \}$
- азбука на кванторите $\{\forall, \exists\}$.
- формално равенство "$\doteq$"

II Нелогическа част

- азбука на индивидни константи $Const_{\mathcal{L}}$ – символи, ще се интерпретират като жители на света
- азбука на функц. символи $Func_{\mathcal{L}}$ –
- азбука на предик. символи $Pred_{\mathcal{L}}$

* # - ф-я на арност.

$\# : \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \cup \mathbb{P}red_{\mathcal{L}} \to \mathbb{N}_{>0}$

Сигнатура на $\mathcal{L}$

$Sing_{\mathcal{L}} \leftrightharpoons \mathbb{P}red_{\mathcal{L}} \cup \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{C}onst_{\mathcal{L}} (\cup \{\doteq\})$

$\mathcal{L}_{ST}$: ико „$\doteq$", $\mathcal{C}onst_{\mathcal{L}} = \mathbb{F}unc_{\mathcal{L}} = \emptyset$

set theory, $\mathbb{P}red_{\mathcal{L}} = \{\in\}$

def/ Терм

Индуктивна дефиниция

База (• променливите и индивидните конст. са термове // $Var \subseteq T_{\mathcal{L}}$

$\mathcal{C}onst_{\mathcal{L}} \subseteq T_{\mathcal{L}}$

Стъпка • Нека $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = n$ и нека $T_1, \dots, T_n$ са термове:
$$f(T_1, \dots, T_n) \text{ е терм.}$$

Нека с $\widetilde{T}_{\mathcal{L}}$ бележим мн-вото на всички термове в $\mathcal{L}$.

$$\widetilde{T}_{\mathcal{L}_{ST}} = Var$$

$1 \quad 1+1 \quad 1+x \quad f(x) \quad f(f(x)) \quad \underline{1+x+x^2} \doteq y$

def | формула $\tilde{F}_{\mathcal{L}}$, $Form_{\mathcal{L}}$

- Атомарни ф-ли
  - Ако $\mathcal{L}$ е с ф.р "$\doteq$", то, ако $\tau_1, \tau_2 \in \tilde{T}_{\mathcal{L}}$, то: $(\tau_1 \doteq \tau_2)$ е атомарна ф-ла
  - $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = n$, $\tau_1, \dots, \tau_n \in \tilde{T}_{\mathcal{L}}$, то $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$ е атомарна ф-ла
- Предикатна ф-ла
  - Атомарните ф-ли са (предикатни) ф-ли
  - Нека φ и ψ са пред. ф-ли. Тогава:
    - ★ $\neg\varphi$ е ф-ла
    - ★ $(\varphi \& \psi)$ е ф-ла
    - ★ $(\varphi \vee \psi)$ е ф-ла
    - ★ $(\varphi \Rightarrow \psi)$ е ф-ла
    - ★ $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ е ф-ла.
  - Нека φ е ф-ла и $x \in Var$.
  Тогава $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ е ф-ла.

$1<2 \quad 1<x \quad \exists x\, 1<x \qquad 1+x$

$\exists x <(1,x) \qquad +(1,x)$

def Структура за език $\mathcal{L}$

наричаме наредена двойка $\mathcal{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$, която:

- $|\mathcal{A}|$ — $A \neq \emptyset$ мн-во – свят
- $\mathbb{I}$ е ф-я интерпретация на език $\mathcal{L}$ в света A

- $\mathbb{I}(c) = c^{\mathcal{A}} \in A$, $c \in Const_{\mathcal{L}}$
- $\mathbb{I}(f) = f^{\mathcal{A}} : A^{\#(f)} \to A$, $f \in Func_{\mathcal{L}}$
- $\mathbb{I}(p) = p^{\mathcal{A}} : A^{\#(p)} \to \{T, F\}$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$

Ако е крайна и малко по размер сигнатурата то записваме $\mathcal{A} = \langle A; c^{\mathcal{A}}, a^{\mathcal{A}}, \ldots ; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, \ldots ; p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}}, \ldots \rangle$

$p^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\#(p)}$

$\exists x \forall y ((p(x,y) \& q(x,z)) \vee \exists y\, p(x,y))$

свободна

$\exists x\, p(x,y) \vee p(x,y)$

def1 Оценка в стр. за език

$v : Var \to A$ $\quad$ v е тотална

$v(x) \in A,\ x \in Var$

def

def | Ст-т на терм в стр. при оценка

Нека $\mathcal{L}$ е FOPL и $\mathcal{A}$ е стр. за $\mathcal{L}$.

Нека v е оценка в $\mathcal{A}$.

$\tau^{\mathcal{A}}[v]$

$c \in Const_{\mathcal{L}}$, то $c^{\mathcal{A}}[v] = c^{\mathcal{A}} \in A$

$x \in Var$, то $x^{\mathcal{A}}[v] = v(x) \in A$

$f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$ и (i.h.) за тях.

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n)^{\mathcal{A}}[v] = f^{\mathcal{A}}(\tau_1^{\mathcal{A}}[v], \ldots, \tau_n^{\mathcal{A}}[v])$$

$f(x) = x^2 + x + 1$

$f(1)$

def | Ст-т на ф-ла в стр. при оценка

$$\|\varphi\|^{A}[v] \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \qquad V_{\varphi}^{A}$$

- $\varphi \equiv (\tau_1 \doteq \tau_2)$

  $$\|\varphi\|^{A}[v] = \mathbb{T} \leftrightarrows \tau_1^{A}[v] = \tau_2^{A}[v]$$

- $\varphi \equiv p(\tau_1, \dots, \tau_n)$

  $$\|\varphi\|^{A}[v] = \mathbb{T} \leftrightarrows \langle \tau_1^{A}[v], \dots, \tau_n^{A}[v] \rangle \in p^{A}$$

- $\varphi \equiv \neg\psi$ и имаме (i.h.) за ψ.

  $$\|\varphi\|^{A}[v] = \mathbb{T} \leftrightarrows H_{\neg}(\|\psi\|^{A}[v]).$$

$H_{\neg} : \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$

$H_{\&}, H_{\vee}, H_{\Rightarrow}, H_{\Leftrightarrow} : \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}^2 \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$

- $\varphi \equiv (\psi \& \chi)$

  $$\|\varphi\|^{A}[v] = \mathbb{T} \leftrightarrows H_{\&}(\|\psi\|^{A}[v], \|\chi\|^{A}[v])$$

$\to H.$

...

$H_\neg$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$
	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$

• $\varphi \equiv \forall x \psi$ и (i.h) за ψ.

$x \in Var$, $a \in A$: $v^x_a(y) \leftrightharpoons \begin{cases} a, & y = x \\ v(y), & y \neq x \end{cases}$

модифицирано оценка

$\|\forall x \psi\|^{\mathcal{A}}[v] = \mathbb{T} \leftrightharpoons$ за всяко $a \in A$, то $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v^x_a] = \mathbb{T}$

$\|\forall x (x < 0)\|^{\mathcal{A}}[v]$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, <^{\mathcal{A}} \rangle$ и v е оц. в $\mathcal{A}$, т.ч. $v(x) = 7$, но

$a \in \mathbb{N}$: $v^x_a(x) = a$

$\forall x (x \geq 0)$

$x \geq 0$

За $x = 0$, вярно

и $x = 1$ да

и $x = 2$ да

и

$\vdots$

$x = n$ да

$\vdots$

$\forall x \, \underbrace{x \geq 0}$

$\mathbb{N}, s, m$

$s(x, x, x)$ $\{0\}$

$\forall y \, m(x, y, y)$ $\{1\}$

$\varphi_n(x)$

$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z (\varphi_1(y) \wedge \varphi_n(z) \wedge s(y, z, x))$

$\|\exists x \varphi\|^{\mathcal{A}}[v] = T \leftrightharpoons$ за някое $a \in A$, $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v^{x}_{a}] = T$

(i.h) В стр. $\mathcal{A}$ за кое да е оц. v, то ние знаем $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v]$

Зад. Нека FOPL $\mathcal{L} = \langle m \rangle$, $\#(m) = 3$, $m \in Pred_{\mathcal{L}}$.
Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, m^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$,
където:

$a, b, c \in \mathbb{N}$: $\langle a, b, c \rangle \in m^{\mathcal{A}} \leftrightarrows a \cdot b = c$.

Кои са определимите синглетони в $\mathcal{A}$?

$\varphi_1(y) \leftrightarrows \forall x \, m(y, x, x)$ // $y \cdot x = x \Leftrightarrow y = 1$

$\varphi_0(y) \leftrightarrows \forall x \, m(y, x, y)$ // $y \cdot x = y \Leftrightarrow y = 0$

$m(x, x, x)$

$\varphi_{0,1}(x) \leftrightarrows m(x, x, x)$.

$\psi_1(y) \leftrightarrows m(y, y, y) \wedge \neg \varphi_0(y)$

Нека $n \in \mathbb{N}_{>1}$, от ОТА $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \ldots$

$\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$

$i \in \mathbb{N}$

$p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$

наредба на простите числа.

Нека $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Имаме $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot \ldots = \prod^{\infty} p_i^{\alpha_i}$

Нека $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$h(n) = p_1^{\alpha_2} p_2^{\alpha_1} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n} \ldots = p_1^{\alpha_2} p_2^{\alpha_1} \prod_{k=3}^{\infty} p_k^{\alpha_k}$

$p_1 = 2, p_2 = 3$

$h(15) = h(2^0 \cdot 3^1 5^1 \ldots) = 10$

$h(h(x)) = x$

$\underline{\langle n, m, k \rangle \in m^A} \iff \langle h(n), h(m), h(k) \rangle \in m^{\mathcal{L}}$

$n \cdot m = k \iff h(n) \cdot h(m) = h(k)$ ✓

Фикс. X $\boxed{\begin{array}{c} p_1 \text{ уч. в } x \\ \alpha_1 > 0 \end{array}}$, p_2 не уч. в x за която
$\alpha_2 = 0$ предварителна пр. 2-18

$h(X) \neq X$, а h е автоморфизъм, то

$\{X\}$ е неопределимо

$h(\{X\}) \neq \{X\}$

$\Downarrow$ $X \doteq C$ $\{C^*\}$

M $h(X) \notin M$ за някое $X \subseteq M$

$X \notin M$, но $h(X) \in M$

$h(M) = \{h(a) \mid a \in M\} \neq M$