Категоризация на определимите синглетони в структури с универсуми $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ и операции събиране и/или умножение

① Структури, в които всеки синглетон е определим.

$\langle \mathbb{N}; s \rangle$; $\langle \mathbb{N}; s, m \rangle$; $\langle \mathbb{Z}; s, m \rangle$; $\langle \mathbb{Q}; s, m \rangle$;

② Структури, в които само $\{0\}$ е определим.

$\underbrace{\langle \mathbb{Z}; s \rangle}_{h}$; $\underbrace{\langle \mathbb{Q}; s \rangle; \langle \mathbb{R}; s \rangle}_{h}$

автоморфизъм
д-во за неопр. на останалите:
$h(x) \leftrightharpoons -x$ → транслации

$h(x) \leftrightharpoons k.x$, $k \neq 0, 1$

↓

✓

③ Структури, в които са определими само $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1\}$.

$\underbrace{\langle \mathbb{Z}; \cdot \rangle}_{h}$; $\underbrace{\langle \mathbb{Q}; \cdot \rangle}_{h}$; $\underbrace{\langle \mathbb{R}; \cdot \rangle}_{h}$

$h(x) = \mathrm{sign}(x) \cdot \underline{|x|}^{i \leftrightarrow j}$

$h(p/q) = \mathrm{sign}(p/q) \cdot \dfrac{|p|^{i \leftrightarrow j}}{|q|}$, $p \neq 0, \pm 1$

$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1/x, & x \neq 0 \end{cases}$; $h(x) = x^{2k+1}$, $k \neq 0, -1$

④ Структура, в която не е определим всеки синглетон поради монотонности съотношение:

$\langle \mathbb{R}, s, \cdot \rangle$.

389 Нека $A = \langle$ крайни непрекъснати интервали от реални числа, $p^A \rangle$ е стр. с двуместен предикатен символ с интерпретация:

$$\langle i, j \rangle \in p^A \longleftrightarrow \underbrace{\text{десния край на интервала } i}_{R(i)} = (\text{съвпада с } \underbrace{\text{левия край на интервала } j}_{L(j)}$$

Определете:

- $\{\langle i, j \rangle \mid L(i) = L(j)\}$
- $\{\langle i, j \rangle \mid R(i) = R(j)\}$
- $\{\langle i, j \rangle \mid i = j\}$
- $\{\langle i, j \rangle \mid L(i) < L(j)\}$

- $\{\langle i, j \rangle \mid R(i) < R(j)\}$
- два интервала да имат непразно сечение
- интервал i да е подинтервал на интервал j

Зад. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}; p^{\mathcal{A}} \rangle$, където интерпретацията на триместния предикатен символ p е:

$$\langle n, m, k \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff n.m + 1 = k^2$$

Определете $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \dots$

$\emptyset \quad \{\langle n, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{\langle n, m \rangle \mid n < m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$

✓

382) Нека $A = \langle \mathbb{Q}, p^A \rangle$, където интерпретацията на триместния предикатен символ е:

$\langle n, m, k \rangle \in p^A \Leftrightarrow n^5 . m = k$

Определете: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{Q}\}$, $\{\langle x, y \rangle \mid x . y = 1\}$, $\{\langle x, y, z \rangle \mid x . y = z\}$.

Докажете, че $\{5\}$ не е определимо.

Зад. Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = 3$ и $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ е стр. за $\mathcal{L}$, която:

$$\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff a \cdot b = c^2.$$

Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{A}$:

(i) $\{a\}$, за $a \in \mathbb{N}$;

(ii) $\{\langle a, a \rangle \mid a \in \mathbb{N}\}$, $\{\langle a, b \rangle \mid a > b\}$;

(iii) $\{a^4 \mid a \in \mathbb{N}\}$

Вярно ли е, че всяко множество от ест. числа е определимо в $\mathcal{A}$?

$p(x, x, x)$ $\{0\}$

$\exists y (\varphi_0(y) \wedge p(x, y, x)) \wedge \neg \varphi_0(x)$ $\{1\}$

$\varphi_{+1}(x, y) \leftrightharpoons \exists z (\varphi_1(z) \wedge p(x, y, z))$ $\{x = y + 1\}$

$\varphi_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y (\varphi_n(y) \wedge \varphi_{+1}(x, y))$

$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \exists z (p(x, y, z) \wedge \varphi_0(z))$

$\varphi_=(x, y) \leftrightharpoons \forall z \forall t (p(z, t, x) \Leftrightarrow p(z, t, y))$.

$$\varphi_{1_2}(x, y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_0(z) \,\&\, p(y, z, x)).$$

$$y = x^2$$

$$\varphi_>(x, y) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists z(\varphi_{1_2}(x, x_1) \,\&\, \neg\varphi_0(z) \,\&\, p(x_1, z, y)).$$

$$\underbrace{x_1}_{x^2} - \underset{>0}{z} = y^2$$

$$x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y$$

Зад. Нека $\mathcal{L} = \langle f \rangle$ е „$\doteq$", където $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = 2$.

Нека Σ е крайна азбука.

Нека $S = \langle \Sigma^*, f^S \rangle$ е стр. за $\mathcal{L}$, където:

- Σ^* - всички думи над Σ.
- $f^S(u, v) = w \iff u \circ v = w$

  за $u, v, w \in \Sigma^*$

Да се докаже, в S са определими множествата:

(i) $\underline{Pref} = \{\langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid$ „u е префикс на v" $\}$

(ii) $\underline{Suff} = \{\langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid$ „u е суфикс на v" $\}$;

(iii) $W_1 = \{ u \mid u \in \Sigma^*, |u| = 1 \}$

(iv) $T_1 = \{ u \mid u \in \Sigma^*, |u| \leq 1 \}$

(v) $\underline{W_n}$, $\underline{n \in \mathbb{N}_{>1}}$

(vi) $\overline{T_n}$, $n \in \mathbb{N}_{>1}$

(vii) $\overline{O} = \{ \langle u, v, w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на u и v е суфикс на w $\}$

Да се изрази $|Aut(S)|$ чрез $|\Sigma|$.

(i) Pref = $\{\langle u, v\rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid$ „u е префикс на v" $\}$

(ii) Suff = $\{\langle u, v\rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid$ „u е суфикс на v" $\}$;

(iii) $W_1 = \{u \mid u \in \Sigma^*, |u| = 1\}$;

(iv) $T_1 = \{u \mid u \in \Sigma^*, |u| \leq 1\}$.

$\varphi_{Pref}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\,(f(x, z) \doteq y)$.

$\varphi_{Suff}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\,(f(z, x) \doteq y)$.

$\varphi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(f(x, y) \doteq y)$.

$\cancel{\varphi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(\varphi_{Pref}(y, x) \Rightarrow y \doteq x)}$.

$\varphi_{T_1}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(\varphi_{Pref}(y, x) \Rightarrow y \doteq x \vee \varphi_{\varepsilon}(y))$.

$\varphi_{W_1}(x) \leftrightharpoons \varphi_{T_1}(x) \,\&\, \neg\varphi_{\varepsilon}(x)$

$n > 1$: T_n, доп., се φ_{T_k}, за $1 < k < n$ // $\varphi_{T_{n-1}}$ $n > 1$

$\varphi_{T_n}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(\varphi_{Pref}(y, x) \Rightarrow y \doteq x \vee \varphi_{T_{n-1}}(x))$.

$$\varphi_{\omega_n}(x) \leftrightharpoons \underbrace{\varphi_{T_n}(x)}_{|x|\le n} \,\&\, \underbrace{\neg \varphi_{T_{n-1}}(x)}_{\underbrace{|x| \not\le n-1}_{|x|>n-1}}.$$

$\underline{n>1}$

$|x|=n$

$$\psi_{\omega_{n+1}}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(\varphi_{Pref}(y,x) \Rightarrow x \doteq y \vee \varphi_{\omega_{n-1}}(y) \vee \ldots \vee \varphi_{\omega_1}(y) \vee \varphi_{\varepsilon}(y))\,\&$$

$$\neg\varphi_{\omega_{n-1}}(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\varphi_{\omega_1}(x) \,\&\, \neg\varphi_{\varepsilon}(x).$$

$n>1$

$1 \le k \le n$

(i.h.) ψ_{ω_k}

$n \to n+1$

$$\chi_{\omega_{n+1}}(x) \leftrightharpoons \exists y\,\exists z\,(\varphi_{\omega_1}(y) \,\&\, \varphi_{\omega_n}(z) \,\&\, f(y,z) \doteq x).$$

(i.h.) χ_{ω_n}

(vii) $O = \{ \langle u, v, w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на $\underset{x}{u}$ и $\underset{y}{v}$ е суфикс на $\underset{z}{w} \}$

$$\varphi_{ecp}(x, y, z) \leftrightharpoons \underline{\varphi_{pref}(z, x) \,\&\, \varphi_{pref}(z, y)} \,\&$$

z е най-дълъг общ префикс на x и y

$$\forall t\,(\varphi_{pref}(t, x) \,\&\, \varphi_{pref}(t, y) \Rightarrow \varphi_{pref}(t, z)).$$

$$\varphi_O(x, y, z) \leftrightharpoons \exists t\,(\varphi_{ecp}(x, y, t) \,\&\, \varphi_{suff}(z, t)).$$

Да опишем $|Aut(S)|$ чрез $|\Sigma|$.

Нека $|\Sigma| = n \in \mathbb{N}_{>0}$. W_1

$|Aut(S)| = n!$

$h: \Sigma \to \Sigma$ $\to$ на ниво азбука

$|\{h \mid h: \Sigma \to \Sigma$ „h е пермутация"$\}| = n!$

$h^*(w) \leftrightharpoons h(a_1) \circ h(a_2) \circ \ldots \circ h(a_m)$

$w = a_1 a_2 \ldots a_m$

Зад. Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FOPL с "=", където $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = 2$ шахматна дъска

Нека $\mathcal{A} = \langle \{\langle i, j \rangle \mid i, j \in \{a1, \dots, a8, b1, \dots, h1, \dots, h8\}\}, p^{\mathcal{A}} \rangle$,

за $\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{A}} \leftrightarrow$ от полето a с кои може за един ход да се отиде в полето b.

Определете:

(i) м-вото от всички ъглови полета

(ii) м-вото от всички периферни полета

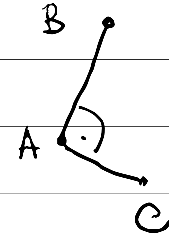
Док. че $\{a2\}$ е неопр. в $\mathcal{A}$.

(38) Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, за $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = 3$.

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^2, p^{\mathcal{A}} \rangle$, където:

$$p^{\mathcal{A}}(A, B, C) \leftrightharpoons A \neq B \text{ и } A \neq C \text{ и } \angle BAC = 90^\circ$$

$A, B, C \in \mathbb{R}^2$



// имплицитно и $B \neq C$.

Да се док., че в $\mathcal{A}$ са определими:

(i) $Eq = \{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathbb{R}^2\}$

(ii) $Col = \{\langle A, B, C \rangle \mid A, B, C \in \mathbb{R}^2$ лежат на една права$\}$

(iii) $Circ = \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на окръж. с диаметър $AB\}$

Вярно ли е, че в $\mathcal{A}$ са определими и-вата и защо?:

$Mid = \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ е среда на отсечката $AB\}$

$Seg = \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на отсечката $AB\}$

Намерете поне два различни автоморфизма в $\mathcal{A}$.

(302) Нека $\mathcal{L}$ е FOL с единствен бинарен предик. символ p. Нека $\mathcal{A} = \langle$ затворени отсечки в равнината с дължина >0 $; p^{\mathcal{A}} \rangle$ е стр. за $\mathcal{L}$,

където $p^{\mathcal{A}}(x, y) \leftrightharpoons x$ и y имат поне една обща точка

Докажете, че са определими следните м-ва:

i) x е подотсечка на y

ii) x съвпада с y

iii) точка (произволни две отсечки се пресичат в точка)

iv) точка лежи на отсечка

v) точка лежи на права

vi) точка съвпада с точка

vii) три прави x, y, z се пресичат в точка

viii) права x е успоредна на права y

ix) Определимо ли е кога две отсечки имат равни дължини?

i) x е подотсечка на y $p^A(x,y) \iff$ x и y имат поне една обща точка

ii) x свързан с y

iii) точка (произволни две отсечки се пресичат в точка)

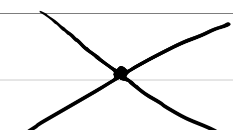
i) $\varphi_{\subseteq}(x,y) \leftrightharpoons \forall z\,(p(x,z) \Rightarrow p(y,z))$.

ii) $\varphi_{=}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{\subseteq}(x,y) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y,x)$.

$\psi_{=}(x,y) \leftrightharpoons \forall z\,(p(x,z) \Leftrightarrow p(y,z))$

iii) $\varphi_{dot}(x,y) \leftrightharpoons \neg\varphi_{\subseteq}(x,y) \,\&\, \neg\varphi_{\subseteq}(y,x) \,\&\, p(x,y)$

I опит



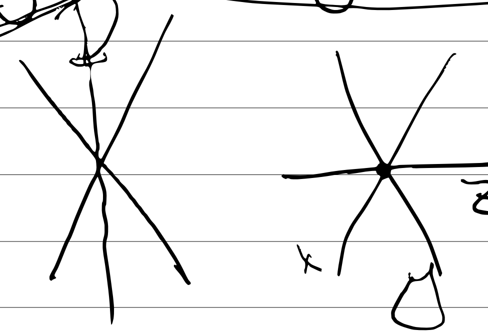
$\varphi_{dot}(x,y) \leftrightharpoons p(x,y) \,\&\, \neg\exists z\,(\varphi_{\subseteq}(z,x) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(z,y))$

iv) точка лежи на отсечка

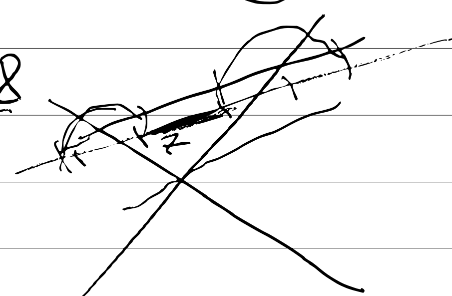
v) точка лежи на права

vi) точка съвпада с точка

$$\varphi_{\Delta}(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_{dot}(x,y) \,\&\, \varphi_{dot}(y,z) \,\&\, \varphi_{dot}(x,z) \,\&$$

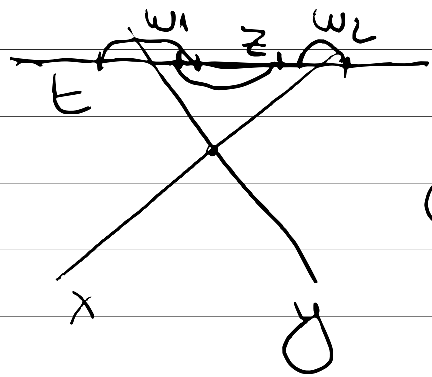


$$\exists t(\varphi_{\subseteq}(z,t) \,\&$$
$$\exists w_1 \exists w_2 (\varphi_{\subseteq}(w_1,t) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(w_2,t) \,\&$$
$$\varphi_{\cdot}(w_1,x) \,\&\, \varphi_{\cdot}(w_2,y) \,\&$$
$$\neg\varphi_{\cdot}(w_1,y) \,\&\, \neg\varphi_{\cdot}(w_2,x))).$$



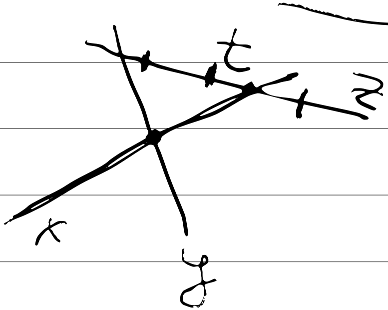
$$\varphi_{\cdot\in l}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{dot}(x,y) \,\&\, \varphi_{dot}(y,z) \,\&\, \varphi_{dot}(x,z) \,\&\, \neg\varphi_{\Delta}(x,y,z)$$

$$\varphi_\Delta(x,y,z) \rightleftharpoons \varphi_\bullet(x,y) \,\&\, \varphi_\bullet(y,z) \,\&\, \varphi_\bullet(x,z) \,\&$$
$$\exists t(\varphi_\subseteq(z,t) \,\&\, \exists w_1 \exists w_2 (\varphi_\subseteq(w_1,t) \,\&\, \varphi_\subseteq(w_2,t) \,\&\, \varphi_\bullet(w_1,y) \,\&\, \neg\varphi_\bullet(w_1,x) \,\&\, \varphi_\bullet(w_2,x) \,\&\, \neg\varphi_\bullet(w_2,y))).$$



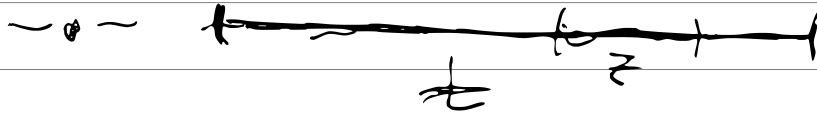
$$\varphi_{\bullet\in 1}(x,y,z) \rightleftharpoons \varphi_\bullet(x,y) \,\&\, \varphi_\bullet(y,z) \,\&\, \varphi_\bullet(x,z) \,\&\, \neg\varphi_\Delta(x,y,z).$$

$$\psi_{\bullet\in 1}(x,y,z) \rightleftharpoons \varphi_\bullet(x,y) \,\&\, \varphi_\bullet(y,z) \,\&\, \varphi_\bullet(x,z) \,\&\, \neg\exists t(\varphi_\subseteq(t,z) \,\&\, \varphi_\bullet(t,x) \,\&\, \neg\varphi_\bullet(t,y)).$$



$$\forall t(\varphi_\subseteq(t,z) \,\&\, \varphi_\bullet(t,x) \Rightarrow \varphi_\bullet(t,y)).$$

$\varphi_{\cdot\in l}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t(\varphi_{\subseteq}(z,t) \; \& \; \varphi_{\cdot\in l}(x,y,t)).$

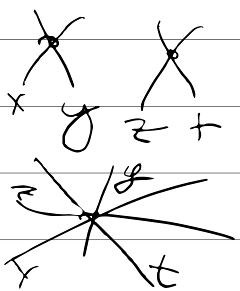


vi) точка съвпада с точка

vii) три прави x, y, z се пресичат в точка

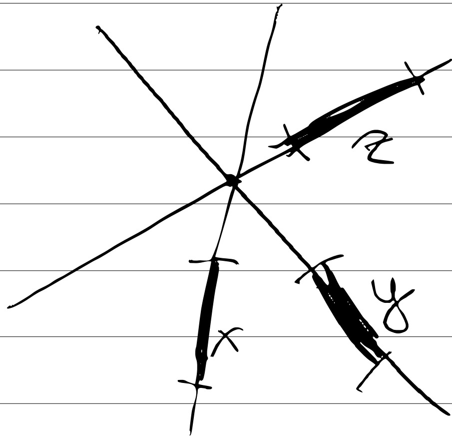
viii) права x е успоредна на права y

$\varphi_{\equiv}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \varphi_{\cdot\in l}(x,y,z) \; \& \; \varphi_{\cdot\in l}(x,y,t) \; \&$
$\varphi_{\cdot\in l}(z,t,x) \; \& \; \varphi_{\cdot\in l}(z,t,y).$



$\varphi_{\equiv}(x,y,z,t) \leftrightharpoons \forall w(\varphi_{\cdot\in l}(x,y,w) \Leftrightarrow$
$\varphi_{\cdot\in l}(z,t,w)).$

$\varphi_{\parallel}(x,y) \leftrightharpoons \forall z \forall t(\varphi_{\subseteq}(x,z) \; \& \; \varphi_{\subseteq}(y,t) \Rightarrow$
$\neg\varphi_{\circ}(z,t)).$



$\varphi_{*}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists y_1 \exists z_1$

$(\varphi_{\subseteq}(x,x_1) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y,y_1) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(z,z_1) \,\&\, \varphi_{\cdot\in e}(x_1,y_1,z_1)).$

$\psi_{*}(x,y,z) \leftrightharpoons \exists x_1 \exists y_1$

$(\varphi_{\subseteq}(x,x_1) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(y,y_1) \,\&\, \varphi_{\cdot\in e}(x_1,y_1,z)).$