Зад. $\mathcal{L}=\langle p\rangle$ е FOL с единствен предик. символ p. Нека $\mathcal{A}=\langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}}\rangle$ като:

$\#(p)=3$ $\quad p^{\mathcal{A}}(n,m,k) \iff n+m=k$ графиката на ф-ята събиране

Определете: $\{0\}$, $<$, $\{1\}$, $\{2\}$, ...

докажете, че $(\forall n\in\mathbb{N})[\{n\}$ е опр.$]$

Определете: • м-вото на четните/нечетните числа

HW (• м-вото на числата даващи остатък 3 по модул 5.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,y)$ // вс. $n\in\mathbb{N}$: $x+n=n \iff x=0$

$\mathcal{A}\models_v \varphi_0(x) \iff v(x)=0$

$(\rightarrow)$ $\mathcal{A}\models_v \varphi_0(x)$. Цел: $v(x)=0$, $v: Var\to\mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models_v \frac{\varphi_0(x)}{\forall y\, p(x,y,y)}$$

∞ bc. ecs. eucnon : $x + n = n$

$\Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow \underline{v(x) = 0}$

$(\Leftarrow)\ v(x) = 0$, $\quad \mathcal{A} \models_{v_0^x} \dfrac{\varphi_0(x)}{\forall y\, p(x,y,y)}$ $\quad v_0^x(z) = \begin{cases} 0, & z = x \\ v(z), & z \neq x \end{cases} \in \mathbb{N}$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$ // $x + x = x \Leftrightarrow x = 0$

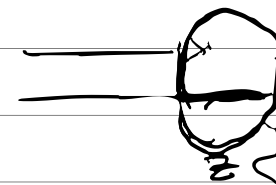
$\varphi_=(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z\, (p(y,z,x) \Rightarrow \varphi_=(y,x)\ \&\ \varphi_=(z,x))$.

$\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \exists z(p(x,z,y) \,\&\, \varphi_0(z))$.

$\psi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall z \forall t \,(p(z,t,x) \Leftrightarrow p(z,t,y))$.

A, B

$\forall z\,(z \in A \Leftrightarrow z \in B) \Rightarrow A = B$

$\mathfrak{A} = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{N},\ x<y\}$ 

$\varphi_<(x,y)$

$\varphi_\le(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y))$ // ~~$\nexists z : x+z=y$~~

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y) \,\&\, \neg \varphi_0(z))$.

$\psi_<(x,y) \leftrightharpoons \varphi_\le(x,y) \,\&\, \neg \varphi_=(x,y)$

$\chi_<(x,y) \leftrightharpoons \underbrace{\neg \underbrace{\varphi_\le(y,x)}_{y \le x}}_{y > x}$.

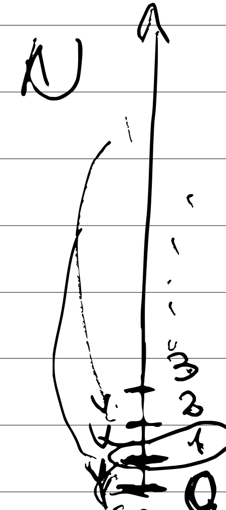
$(\&,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$

унарни

$\neg$, $\forall$, $\exists$ & $\vee$ $\oplus$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$

висок $\longrightarrow$ нисък

приоритет



21у

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \forall y(\neg\varphi_0(y) \Rightarrow \varphi_{\leq}(x,y))$$

$$\psi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \,\&\, \varphi_{<}(y,x) \,\&\, \forall z(\varphi_{<}(y,z) \Rightarrow \varphi_{\leq}(x,z))).$$

$$\chi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_1(x) \,\&\, \varphi_{=}(x,x)$$

$$\kappa_1(x) \leftrightharpoons \varphi_1(x) \,\&\, \varphi_{=}(x,x) \,\&\, \varphi_{=}(x,x) \vee \neg\varphi_{=}(x,x)$$

$\top \vee \varphi \vdash \top$, $\bot \vee \varphi \vdash \varphi$

$\Pi \,\&\, \varphi \in H\varphi$, $\Xi \,\&\, \varphi \in H\Xi$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y))$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! \varphi_n$ изр. $\quad$ 0<0

База: φ_0

Инд.хип: Нека за $0 < m \leq k$, λm е опр. с ф-ла φ_m

Инд.стъпка: $\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\varphi_k(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \ldots \vee \varphi_k(y))$

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, p(x,z,y))$

$x+1=y$

База: φ_0

Инд.хип: Нека λk е опр с ф-ла φ_k

Инд.стъпка: $\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_k(z) \,\&\, \varphi_{+1}(z,x))$.

$$\varphi_{even}(x) \Leftrightarrow \overbrace{\exists y\,(p(y,y,x))}^{\exists k:\, x=k+k}$$

$$\varphi_{odd}(x) \Leftrightarrow \neg \varphi_{even}(x)$$

$$\psi_{odd}(x) \Leftrightarrow \exists y\,(\varphi_{even}(y)\ \&\ \varphi_{+1}(y,x)).$$

Наблюдение

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

$|Var| = |\mathbb{N}|$

|Изрази на езика| $= |\mathbb{N}|$

$|T_L| = |\mathbb{N}|$

$|F_L| = |\mathbb{N}|$

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т.е. A донее опр. м-во

Критерий за неопр. м-ва

def/ хим

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ стр за FOL $\mathcal{L}$.

$h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ е хим акко:

- $c \in Const_{\mathcal{L}}$: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^{\mathcal{B}}$
- $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
  $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$

$p^{\mathcal{A}}(x)$

$f^{\mathcal{A}}(x)$

def/ Изоморфизъм на стр.

Нека A, B стр. за σ.

$h: A \to B$ h е изом. на стр A в стр B,

ако: • h е биекция

• h е хом.

* Автоморфизми:

$A = B$, $h: A \to A$, h е изоморфизъм

$\langle Aut(A), \circ, Id_A \rangle$

$Id_A \in Aut(A)$ винаги.

произволен

* Нека $D \subseteq A^n$. Нека $h \in Aut(A)$. Тогава

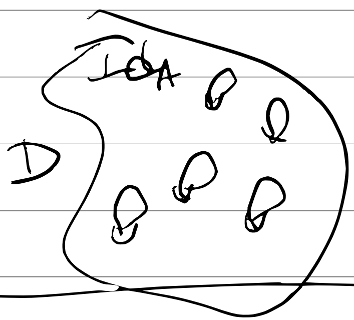
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D \iff \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in D$

Т.е. мн-вото $D \subseteq A^n$ не е опр. ако има $a_1, \dots, a_n$ и има $h \in Aut(\mathcal{A})$,

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in D$, но $\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \notin D$

или

$\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in D$, но $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin D$.



$\mathcal{A} = \langle A; \mathbb{I} \rangle$

Нека всеки синглетон е опр.

$n \in A$: $\{n\}$ е опр. с ф-ла φ_n.

Нека $h \in Aut(\mathcal{A})$.

Т.к. $\{n\}$ е опр, то $h[\{n\}] = \{n\}$ т.е. $h(n) = n$ за все $n \in A$

т.е. $h = Id_A$ т.е. $Aut(\mathcal{A}) = \{Id_A\}$.

309) Нека $\mathcal{L} = \langle \star \rangle$ и е с ф.р. $\doteq$, $\#(\star) = 2$

Нека $A = \langle \mathbb{N}, \star^A \rangle$ за

$x \star^A y = z \iff z = x \cdot y$ $\quad \exists q,\ m \star q = n$

Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$.

- Опр. $Div_m = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots$?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (x \star y \doteq x).$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y (x \star y \doteq y).$

$\varphi_{div}(x, y) \leftrightharpoons \exists q (x \star q \doteq y)$

$x \mid y$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_1(x) \;\&\; \forall y (\varphi_{div}(y, x) \Rightarrow \varphi_1(y) \vee y \doteq x).$

$\Psi_{\underline{prime}}(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z \, (\underline{y * z \doteq x} \Rightarrow y \doteq x \vee z \doteq x)$

тука се игра

$x = 0 \; 1$

$\neg \varphi_{\text{ед,иц}}(x)$.

$6 = 6.1 = 1.6 = 2.3$

$\varphi_{\text{ед,иц}}(x) \leftrightharpoons \underline{x} * \underline{x} \doteq \underline{x}$

// $x(x-1) = 0$

Зад. $\mathcal{L} = \langle +, * \rangle$ два двуместни функц. символи и ф.р. $\doteq$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$a +^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a + b$$

$$a *^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a . b$$

Опр. $\{0\}$, $\{1\}$, $+1$, $\{2\}$, $\{3\}$, ...

покажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})$ [$\{n\}$ е опр.]

Оттук $\{-n\}$ е опр. за $n \in \mathbb{N}$.

$\{p/q\}$ за $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ е опр.

$\leq$, $<$ са опр.

$\{-\sqrt[3]{\frac{13}{7}}\}$ е опр.

Дали всеки синглетон е определим?