Зад. $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FOL с единствен предик. символ p. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ като:

$p^{\mathcal{A}}(n, m, k) \iff n + m = k$ графиката на ф-ята събиране

Определете: $\{0\}$, $\leq$, $\{1\}$, $\{2\}$, ...

докажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})$ [$\{n\}$ е опр.]

Определете: • м-вото на четните/нечетните числа

НW (• м-вото на числата даващи остатък 3 по модул 5.

Търсим ф-ла $\varphi_0(x)$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_0(x) \iff x = 0$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x, x, x)$ // $x + x = x \iff x = 0$

$\psi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x, y, y)$ // за вс. y $x + y = y \iff x = 0$

$\varphi_<(x,y)$, i.e. $A \models_{v} \varphi_<(x,y) \leftrightarrow v(x) < v(y)$

$v: Var \to \mathbb{N}$ оценки

$v(x) = 0$ $v'(x) = 1$

$v(y) = 0$ $v'(y) = 0$

$v(z) = 1$ ...

...

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \exists z (\neg \varphi_0(z) \& p(x,z,y))$

// $x + z = y$ & $\underline{z > 0}$

$\underline{\varphi_\leq(x,y)} \leftrightharpoons \exists z (p(x,z,y))$. // $y = x + z$, $z \in \mathbb{N}$

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \underbrace{\neg \underbrace{\varphi_\leq(y,x)}_{y \leq x}}_{y > x}$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg \underbrace{\varphi_0(x)}_{} \;\&\; \exists y \big(p(x,x,y) \;\&$

$\neg \exists z (\varphi_2(x,z) \;\&\; \varphi_<(z,y))\big)$

$x > 0$ & същ. y : $\big(x+x=y$ & $\neg$ същ. z $(x<z<y)\big)$

$A \models_v \varphi_1(x) \iff \underline{v(x)=1}$

$(\Rightarrow)$ Нека $A \models_v \varphi_1(x)$.

$v(x) \neq 0$ и $\exists y (v(x)+v(x)=y$ и не $\exists z (v(x)<z<y))$

$\underline{v(x)>0}$ нека y_0 е свидетел, т.е. $y_0 = v(x)+v(x)$,

Сега $v(x)+1$ какво е?

$v(x)+v(x) = v(x)+1$

$(v(x)=1)$

$v(x)+1>1$

$v(x)+1 \geq 2$ $\rightarrow$ $\underbrace{v(x)+v(x)}_{y_0} \geq v(x)+1 > v(x)$

за да няма z, то

трябва $\underline{v(x)=1}$

$(\Leftarrow)$

(⇐) Нека $v(x)=1$

Искаме $\boxed{?\ \mathcal{A} \models_v \varphi_1(x)\ ?}$

$\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_0(x)$ | $\mathcal{A} \models_{v^y_2} p(x,x,y)$

оценката v модиф. с y в 2

$1+1=2$

$$v^y_2(z) = \begin{cases} 2, & z=y \\ v(z), & z\neq y \end{cases}$$

$2 \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models_{v^y_2} \neg\exists z(\varphi_<(x,z) \,\&\, \varphi_<(z,y)).$$

Т.е. $\mathcal{A} \models_v \varphi_1(x)$.

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, \varphi_{\leq}(x,y)$$

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y)) \,\&\, \neg\varphi_0(x)$$

$$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \neg\varphi_1(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y)))$$

2
1
0

$\neg \quad \& \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

$\forall \quad\quad\;\; \oplus$

$\exists$

висок ⟶ нисък

приоритет

0-лата не може да се получи като сбор на две числа, едно от които е $\neq 0$

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z (\neg \varphi_=(x,y) \vee \neg \varphi_=(x,z) \Rightarrow \neg p(y,z,x)).$$

$$\varphi'_0(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z (p(y,z,x) \Rightarrow \varphi_=(x,y) \; \& \; \varphi_=(x,z))$$

ако две ест. числа сбора им е 0, то значи и двете са 0.

База: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$

Инд. хип.: Нека за $k > 2$ доп. $\{k\}$ е опр. с ф-ла φ_k.

Инд. стъпка: Как да опр. а-вото $\{k+1\}$?

$$\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z (\varphi_1(y) \; \& \; \varphi_k(z) \; \& \; p(y,z,x))$$

$k > 0$

Инд. хип.: Нека за всички $m \leq k$ числата, че $\{m\}$ е опр. с ф-ла φ_m.

Инд. стъпка:

$$\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \;\&\; \dots \neg\varphi_k(x) \;\&$$
$$\forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \varphi_1(y) \vee \dots \vee \varphi_k(y)).$$

Четни числа

$$\varphi_{even}(x) \leftrightharpoons \exists y(p(y,y,x))$$

$$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_{even}(x)$$
$$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_{even}(y) \;\&\; \varphi_1(z) \;\&\; p(y,z,x)).$$

Критерий за неопределимост на м-во

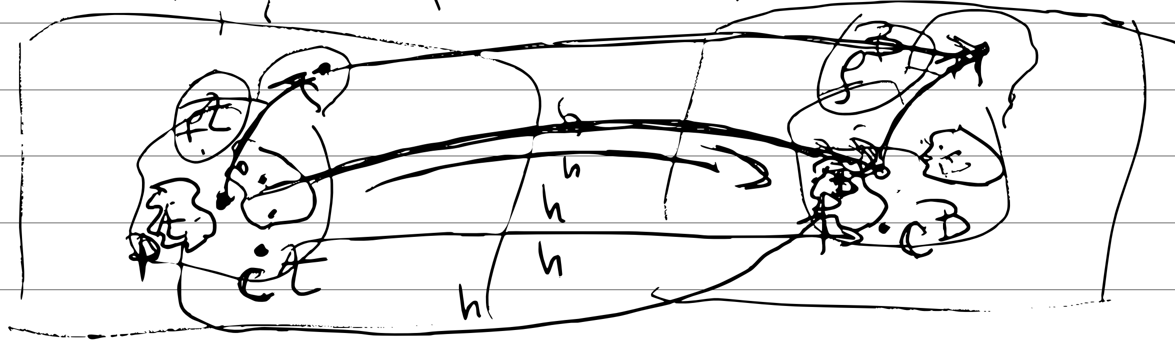
def/ хом

Нека $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ са стр. за FOL $\mathcal{L}$.

$\mathcal{A} = \langle A, \underbrace{p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}} \dots}, \underbrace{f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \dots}, c^{\mathcal{A}}_{\mathcal{L}} \rangle$ език за и родик. смятане от първи ред.

$h : A \to B$ се нарича хом, когато:

- за всяко $c \in Consts_{\mathcal{L}}$: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- за вс. $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#f = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$
- за вс. $p \in Pred_{\mathcal{L}}$ $\#(p) = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^{\mathcal{B}}$$



309) Нека $\mathcal{L} = \langle * \rangle$ и е с ф.р $\doteq$.
Нека $A = \langle \mathbb{N}, *^A \rangle$ за

$$x *^A y = z \iff z = x \cdot y$$

Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$.

- Опр. $Div_{n/m} = \{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N} \}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots$?

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y \, (x * y \doteq x)$$

$$\psi_0(x) \leftrightharpoons (x * x \doteq x \;\&\; \neg \varphi_1(x)).$$

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y \, (x * y \doteq y).$$

$$\psi_1(x) \leftrightharpoons (x * x \doteq x \;\&\; \neg \varphi_0(x)).$$

$$\varphi_{n/m}(x, y) \leftrightharpoons \exists z \, (z * y \doteq x). \quad // \; m \mid n$$

$$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg \varphi_1(x) \;\&\; \forall y \, (\varphi_{n/m}(x, y) \Rightarrow (\varphi_1(y) \lor y \doteq x))$$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z\,(y * z \doteq x \Rightarrow y \doteq x \lor z \doteq x)\ \&$
$\neg(x * x \doteq x)$.
x не 0 и 1

$\{2\}$?

def/ **Изоморфизъм**

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ са стр. $\mathcal{L}$.

$h: A \to B$ е изоморфизъм от $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, ако:
- h е биекция
- h е хом.

def/ **Автоморфизъм**

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $h: A \to A$ е изоморфизъм.

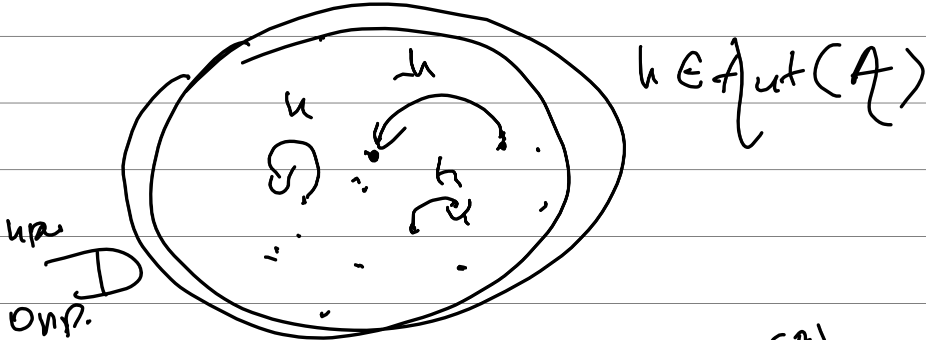
Критерий за неопр. на м-во

Нека $D \subseteq A^n$ опр. м-во и $h \in Aut(\mathcal{A})$, то

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in D \iff \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in D$

$\in \qquad \in$

$\notin \qquad \notin$



h
h ∈ Aut(A)
D

C
h₀ ∈ Aut(A)

(3a3) $\mathcal{L} = \langle +, * \rangle$ два двуместни функ. символи и ф.р. $\doteq$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$a +^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a + b$$

$$a *^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a \cdot b$$

Опр. $\{0\}$, $\{1\}$, +1, $\{2\}$, $\{3\}$, ...

покажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е опр.$]$

Отсюда $\{-n\}$ е опр. за $n \in \mathbb{N}$.

$\{p/q\}$ за $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ е опр.

$\leq$, $<$ са опр.

$\{-\sqrt[3]{\frac{13}{7}}\}$ е опр.

Дали всеки синглетон е определим?