зад. $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FOL с единствен предик. символ p. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ като:

$p^{\mathcal{A}}(n,m,k) \iff n+m=k$ графиката на ф-ята събиране

Определете: $\{0\}$, $<$, $\{1\}$, $\{2\}$, ...

докажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е опр.$]$

Определете: • м-вото на четните/нечетните числа

НШ (• м-вото на числата даващи остатък 3 по модул 5.

Търсим ф-ла $\varphi_0(x)$

$$\mathcal{A} \models \varphi_0(x) \iff x=0$$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$ // $x+x=x \iff x=0$

$\psi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,y)$ // за вс. y $x+y=y \iff x=0$

$\varphi_<(x,y)$, i.e. $A \models_{v} \varphi_<(x,y) \iff v(x) < v(y)$

$v : Var \to \mathbb{N}$ оценки

$v(x) = 0 \qquad v'(x) = 1$

$v(y) = 0 \qquad v'(y) = 0$

$v(z) = 1 \qquad \ldots$

$\ldots$

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(\neg\varphi_0(z) \,\&\, p(x,z,y))$

// $x + z = y \;\&\; \underline{z > 0}$

$\underline{\varphi_\leq(x,y)} \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y))$. // $y = x + z$, $z \in \mathbb{N}$

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \neg\,\underbrace{\neg\,\underbrace{\varphi_\leq(y,x)}_{y \leq x}}_{y > x}$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \exists y\,(p(x,x,y) \,\&\, \neg\exists z\,(\varphi_<(x,z) \,\&\, \varphi_<(z,y)))$

$x > 0$ & същ. y: $(x+x=y$ & $\neg$ същ. z $(x<z<y))$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_1(x) \iff \underline{v(x)=1}$

$(\rightarrow)$ Нека $\mathcal{A} \models_v \varphi_1(x)$.

$v(x) \neq 0$ и $\exists y\,(v(x)+v(x)=y$ и не $\exists z\,(v(x)<z<y))$

$\underline{v(x)>0}$

Нека y_0 е свидетел, т.е. $y_0 = v(x)+v(x)$,

Сега $v(x)+1$ какво е?

$v(x)+v(x) = v(x)+1$

$(v(x)=1)$

$v(x)+1>1$

$v(x)+1 \geq 2$

$\underbrace{v(x)+v(x)}_{y_0} \geq v(x)+1 > v(x)$

за да няма z, то

трябва $\underline{v(x)=1}$

$(\leftarrow)$

(⇐) Нека $v(x)=1$

Искаме $\boxed{?\ \mathcal{A} \models_v \varphi_1(x)\ ?}$

$\mathcal{A} \models_v \neg\varphi_0(x)$

$\mathcal{A} \models_{v^y_2} P(x,x,y)$

$v^y_2(z) = \begin{cases} 2, & z = y \\ v(z), & z \neq y \end{cases}$ $\quad v^y_2 \in \mathrm{Var}$, $2 \in \mathbb{N}$

$1+1=2$

оценката v модиф. с y в 2

$\mathcal{A} \models_{v^y_2} \neg\exists z(\varphi_<(x,z) \,\&\, \varphi_<(z,y))$.

Т.е. $\mathcal{A} \models_v \varphi_1(x)$.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, \varphi_{\le}(x,y)$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y)) \,\&\, \neg\varphi_0(x)$ $\quad$ 2, 1, 0

$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \neg\varphi_1(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow (\varphi_0(y) \vee \varphi_1(y)))$

$\neg \quad \forall \quad \exists \quad \& \quad \vee \quad \oplus \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

висок $\longrightarrow$ нисък

приоритет

0-лата не може да се получи като сбор на две числа, от които едното е $\neq 0$

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z \left(\neg \varphi_=(x,y) \vee \neg \varphi_=(x,z) \Rightarrow \neg p(y,z,x) \right).$$

$$\varphi'_0(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z \left(p(y,z,x) \Rightarrow \varphi_=(x,y) \ \& \ \varphi_=(x,z) \right)$$

ако две ест. числа сбора им е 0, то значи и двете са 0.

<u>База:</u> $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$

<u>Инд. хип:</u> Нека за $k > 2$ доп. $\{k\}$ е опр. с ф-ла φ_k.

<u>Инд. стъпка:</u> Как да опр. е-вото $\{k+1\}$?

$$\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \left(\varphi_1(y) \ \& \ \varphi_k(z) \ \& \ p(y,z,x) \right)$$

$k > 0$

<u>Инд. хип.:</u> Нека за всички $m \leq k$ числа, те
Зmy е опр. с ф-ла φ_m.

<u>Инд. стъпка:</u>

$$\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \ldots \neg\varphi_k(x) \,\&\,$$
$$\forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \varphi_1(y) \vee \ldots \vee \varphi_k(y)).$$

<u>Четни числа</u>

$$\varphi_{even}(x) \leftrightharpoons \exists y(p(y,y,x))$$

$$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_{even}(x)$$
$$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_{even}(y) \,\&\, \varphi_1(z) \,\&\, p(y,z,x)).$$

Критерий за неопределимост на м-во

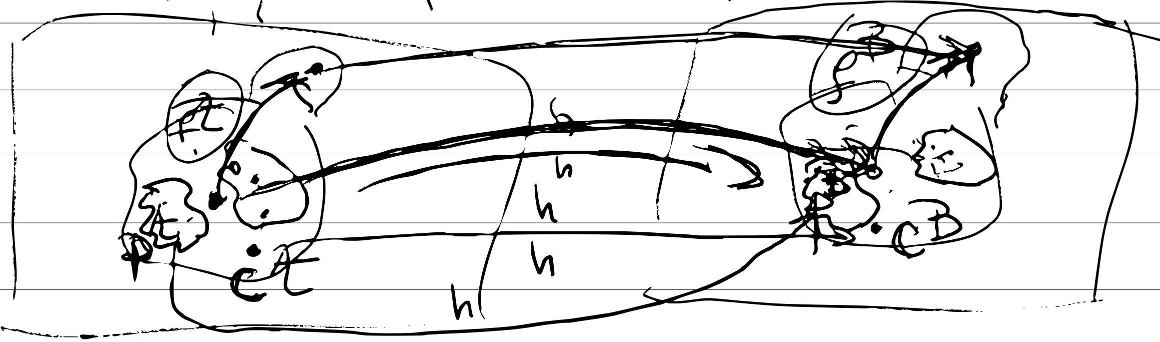
def/ хом

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ са стр. за FOL $\mathcal{L}$.

$\mathcal{A} = \langle A, p^{\mathcal{A}}, q^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, \dots, c^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$ език за предик. смятане от първи ред.

$h : A \to B$ се нарича хом, когато:

- за всяко $c \in Const_{\mathcal{L}}$: $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- за вс. $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#f = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
  $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$
- за вс. $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = n$, $a_1, \dots, a_n \in A$:
  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in p^{\mathcal{B}}$



(3зад) Нека $\mathcal{L} = \langle * \rangle$ и е с ф.р $\doteq$.

Нека $A = \langle \mathbb{N}, *^A \rangle$ за

$x *^A y = z \iff z = x \cdot y$

Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$.

- Опр. $\varphi_{n/m} = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots$?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\,(x * y \doteq x)$

$\psi_0(x) \leftrightharpoons (x * x \doteq x \;\&\; \neg\varphi_1(x))$.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y\,(x * y \doteq y)$.

$\psi_1(x) \leftrightharpoons (x * x \doteq x \;\&\; \neg\varphi_0(x))$.

$\varphi_{n/m}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\,(z * y \doteq x)$. // $m \mid n$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_1(x) \;\&\; \forall y\,(\varphi_{n/m}(x, y) \Rightarrow (\varphi_1(y) \vee y \doteq x))$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z\,(y * z \doteq x \Rightarrow y \doteq x \vee z \doteq x)\ \&$
$\neg(x * x \doteq x)$.
x не 0 и 1

{2,3} ?

def/ <u>Изоморфизъм</u>

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ са стр. $\mathcal{L}$.

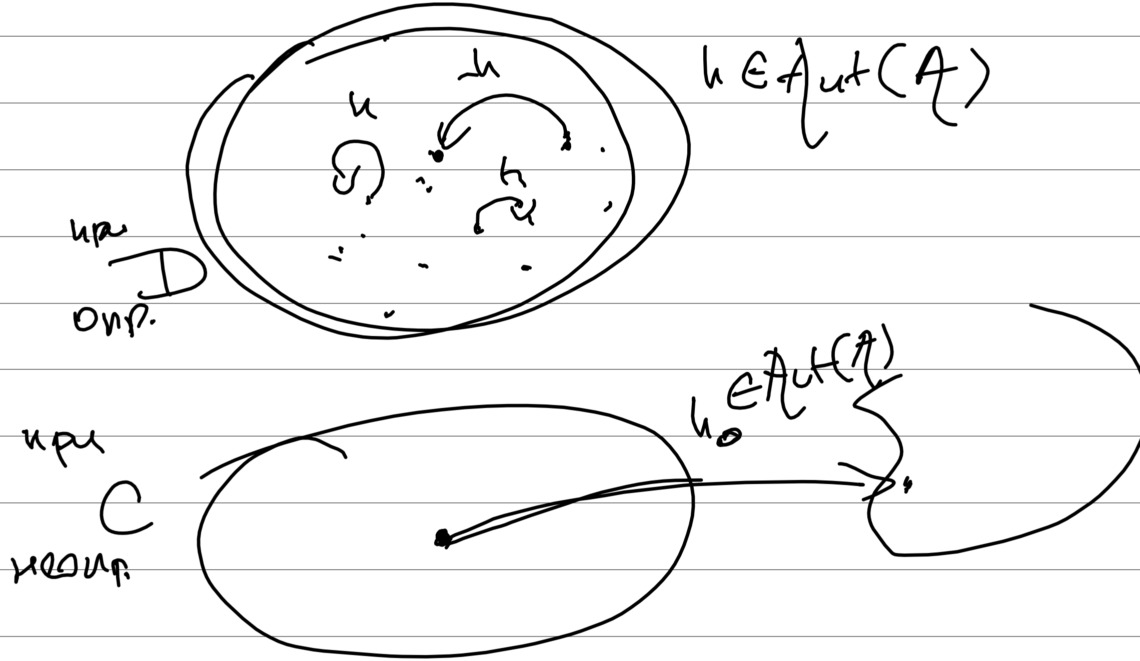
$h: A \to B$ е изоморфизъм от $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, ако:
- h е биекция
- h е хим.

def/ <u>Автоморфизъм</u>

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\underline{h: A \to A}$ <u>h е изоморфизъм.</u>

<u>Критерий за неопр. на м-во</u>

Нека $D \subseteq A^n$ <u>опр. м-во</u> и $h \in Aut(\mathcal{A})$, то
$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D \Leftrightarrow \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in D$
$\in$ $\in$
$\notin$ $\notin$



$h \in Aut(A)$
h
h
h
кат
D
опр.
$h_0 \in Aut(A)$
кат
C
неопр.

30 g $\mathcal{L} = \langle +, * \rangle$ два двуместни функц. символи и ф.р. $\doteq$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, *^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$a +^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a + b$$

$$a *^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a . b$$

Опр. $\{0\}$, $\{1\}$, $+1$, $\{2\}$, $\{3\}$, ...

покажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})$ [$\{n\}$ е опр.]

Оттук $\{-n\}$ е опр. за $n \in \mathbb{N}$.

$\{p/q\}$ за $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ е опр.

$\leq$, $<$ са опр.

$\{-\sqrt[3]{\frac{13}{7}}\}$ е опр.

Дали всеки синглетон е определим?