(зад) $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ е FOL с единствен предик. символ $p$. Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ като:

$\#(p)=3$ $p^{\mathcal{A}}(n,m,k) \Leftrightarrow n+m=k$ графиката на ф-ята събиране

Определете: $\{0\}$, $<$, $\{1\}$, $\{2\}$, ...

докажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})$ [$\{n\}$ е опр.]

Определете: • м-вото на четните/нечетните числа

(HW) • м-вото на числата даващи остатък 3 по модул 5.

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, p(x,y,y)$ // зс. $n \in \mathbb{N}$: $x+n=n \Leftrightarrow x=0$

$\mathcal{A} \models_v \varphi_0(x) \Leftrightarrow v(x)=0$

$(\Rightarrow)$ $\mathcal{A} \models_v \varphi_0(x)$. Цел: $v(x)=0$, $v: Var \to \mathbb{N}$

$$\frac{\mathcal{L} \vDash_{\underline{v}} \varphi_0(x)}{\forall y\, p(x,y,y)}$$

sbe. ecuación: $x+n=n$

$\iff x=0$

$\iff \underline{v(x)=0}$

$(\Leftarrow)\ v(x)=0$, $\dfrac{\mathcal{L} \vDash_{v_{\underline{0}}^{x}} \varphi_0(x)}{\forall y\, p(x,y,y)}$

$v_{0}^{x}(z)=0,\ z=x$

$\in\mathbb{N}$ $v(z),\ z\neq x$

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons p(x,x,x)$ // $x+x=x \iff x=0$

$\chi_0(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z\, (p(y,z,x) \Rightarrow \varphi_=(y,x)\ \&\ \varphi_=(z,x))$.

$\varphi_=(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y) \;\&\; \varphi_0(z))$.

$\psi_=(x,y) \leftrightharpoons \forall z \forall t\,(p(z,t,x) \Leftrightarrow p(z,t,y))$.

$A, B$

$\forall z\,(z \in A \Leftrightarrow z \in B) \Rightarrow A = B$

$M = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in \mathbb{N},\ x<y\}$

$\varphi_<(x,y)$

$\varphi_\le(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y))$ // $\exists z : x+z=y$

$\varphi_<(x,y) \leftrightharpoons \exists z\,(p(x,z,y) \;\&\; \neg\varphi_0(z))$.

$\psi_<(x,y) \leftrightharpoons \varphi_\le(x,y) \;\&\; \neg\varphi_=(x,y)$

$\chi_<(x,y) \leftrightharpoons \neg\underbrace{\underbrace{\varphi_\le(y,x)}_{y\le x}}_{y>x}$.

$(\&,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow$

унарни

$\neg$, $\forall$, $\exists$ $\quad \& \quad \overset{\oplus}{\vee} \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

висок $\longrightarrow$ нисък

приоритет

21 $\varphi$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \;\&\; \forall y(\neg\varphi_0(y) \Rightarrow \varphi_{\leq}(x,y))$

$\psi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_0(y) \;\&\; \varphi_{<}(y,x) \;\&\; \forall z(\varphi_{<}(y,z) \Rightarrow \varphi_{\leq}(x,z)))$.

$\psi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_1(x) \;\&\; \varphi_{=}(x,x)$

$\chi_1(x) \leftrightharpoons \varphi_1(x) \;\&\; \varphi_{=}(x,x) \;\&\; \varphi_{=}(x,x) \vee \neg\varphi_{=}(x,x)$

$T \vee \varphi \dashv\vdash T \qquad F \vee \varphi \dashv\vdash \varphi$

$\Pi \,\&\, \varphi H \varphi$, $\Xi \,\&\, \varphi H F$

$f_1(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y))$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\{n\}$ е опр. $\qquad 0<0$

База: $\varphi_0$

Инд.хип: Нека за $0<m\leq k$, $\{m\}$ е опр с ф-ла $\varphi_m$

Инд.стъпка: $\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_0(x) \,\&\, \ldots \,\&\, \neg\varphi_k(x) \,\&\, \forall y(\varphi_<(y,x) \Rightarrow \varphi_0(y) \vee \ldots \vee \varphi_k(y))$

$\varphi_{+1}(x,y) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_1(z) \,\&\, p(x,z,y))$

$x+1=y$

База: $\varphi_0$

Инд.хип: Нека $\{k\}$ е опр с ф-ла $\varphi_k$

Инд.стъпка: $\varphi_{k+1}(x) \leftrightharpoons \exists z(\varphi_k(z) \,\&\, \varphi_{+1}(z,x))$.

$\exists k: x = k+k$

$\varphi_{even}(x) \leftrightharpoons \exists y\,(p(y,y,x))$

$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \neg\varphi_{even}(x)$

$\varphi_{odd}(x) \leftrightharpoons \exists y\,(\varphi_{even}(y)\ \&\ \varphi_{+1}(y,x))$.

Наблюдение

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

$|Var| = |\mathbb{N}|$

|Изрази на езика| = $|\mathbb{N}|$

$|T_{\mathcal{L}}| = |\mathbb{N}|$

$|F_{\mathcal{L}}| = |\mathbb{N}|$

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, т.е. $A$ да не е опр. м-во

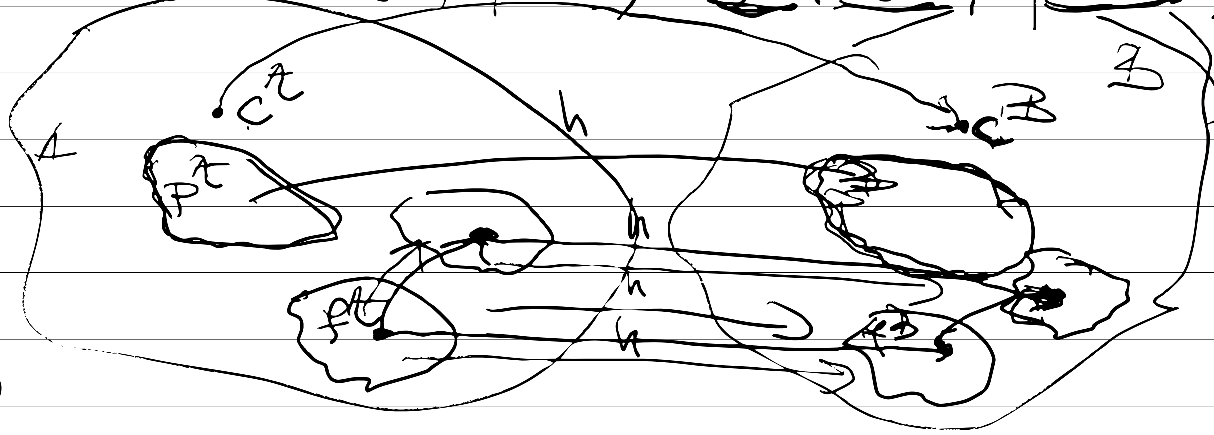
# Критерий за неопр. м-ва

**def / хом**

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ стр за FOL $\mathcal{L}$.

$h: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ е хомом.:

- $c \in Const_{\mathcal{L}}$ : $h(c^{\mathcal{A}}) = c^{\mathcal{B}}$
- $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = n$, $a_1, .., a_n \in A$ :
  $\langle a_1, .., a_n \rangle \in p^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle h(a_1), .., h(a_n) \rangle \in p^{\mathcal{B}}$
- $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = n$, $a_1, .., a_n \in A$ :
  $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, .., a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), .., h(a_n))$




$p^{\mathcal{A}}(x)$

$f^{\mathcal{A}}(x)$

**def/ Изоморфизъм на стр.**

Нека $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ стр. $\Sigma$.

$h: A \to B$ h е изом. на стр $\mathcal{A}$ в стр $\mathcal{B}$,

ако:
- h е биекция
- h е хом

* **Автоморфизъм:**

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $h: \underline{A} \to \underline{A}$, h е изоморфизъм,

$\langle Aut(\mathcal{A}), \circ, Id_A \rangle$

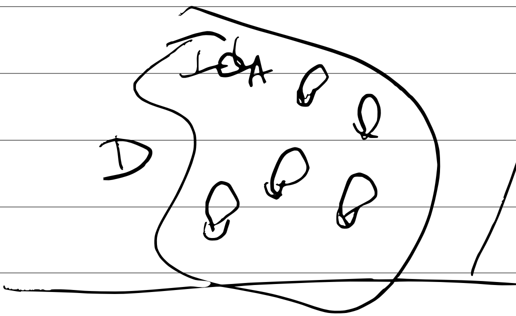

$Id_A \in Aut(\mathcal{A})$ винаги.

произволен

* Нека $D \subseteq A^n$. Нека $h \in Aut(\mathcal{A})$. Тогава

$\langle a_1, .., a_n \rangle \in D \iff \langle h(a_1), .., h(a_n) \rangle \in D$

Т.е. $n$-арно $D \subseteq A^n$ не е опр. ако има $a_1, \dots, a_n$ и има $h \in Aut(\mathcal{A})$:
$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in D$, но $\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \notin D$
или
$\langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in D$, но $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin D$.




$\mathcal{A} = \langle A; \mathbb{I} \rangle$

Нека всеки синглетон е опр.
$n \in A$: $\{n\}$ е опр. с ф-ла $\varphi_n$.

Нека $h \in Aut(\mathcal{A})$.

Т.к. $\{n\}$ е опр, то $h[\{n\}] = \{n\}$ т.е.
$h(n) = n$ за вс. $n \in A$
т.е. $h = Id_A$ т.е. $Aut(\mathcal{A}) = \{Id_A\}$.

(зад) Нека $\mathcal{L} = \langle * \rangle$ и е с ф.р. $\doteq$, $\#(*) = 2$

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, *^{\mathcal{A}} \rangle$ за

$x *^{\mathcal{A}} y = z \Leftrightarrow z = x \cdot y$ $\qquad \exists q ; m * q = n$

Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$.

- Опр. $Div_m = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots$ ?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y ( x * y \doteq x ).$

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y ( x * y \doteq y ).$

$\varphi_{n|m}(x, y) \leftrightharpoons \exists q ( x * q \doteq y )$

$x | y$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \neg \varphi_1(x) \ \& \ \forall y ( \varphi_{n|m}(y, x) \Rightarrow \varphi_1(y) \vee y \doteq x ).$

$\varphi_{prime}(x) \leftrightharpoons \forall y \forall z\, (y * z \doteq x \Rightarrow y \doteq x \lor z \doteq x)\ \&$

тука се при $x = 0, 1$ $\qquad \neg\, \varphi_{\{0,1\}}(x)$.

$6 = 6.1 = 1.6 = 2.3$

$\varphi_{\{0,1\}}(x) \leftrightharpoons \underline{x} * \underline{x} \doteq \underline{x}$

// $x(x-1) = 0$

**Зад.** $\mathcal{L} = \langle +, \cdot \rangle$ два двуместни функц. символи и ф.р. $\doteq$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$a +^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a + b$$

$$a \cdot^{\mathcal{A}} b = c \iff c = a . b$$

Опр. $\{0\}$, $\{1\}$, $+1$, $\{2\}$, $\{3\}$, ...

покажете, че $(\forall n \in \mathbb{N})[\{n\}$ е опр.$]$

Оттук $\{-n\}$ е опр. за $n \in \mathbb{N}$.

$\{p/q\}$ за $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ е опр.

$\leq$, $<$ са опр.

$\{-\sqrt[3]{\frac{13}{7}}\}$ е опр.

Дали всеки синглетон е определим?