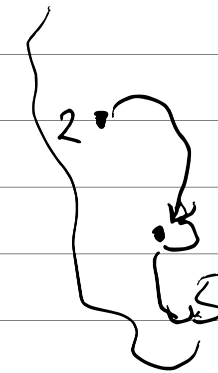
3ад) Нека $\mathcal{L} = \langle * \rangle$ и е с ф.р. $\doteq$, $\#(*)=2$

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, *^{\mathcal{A}} \rangle$ за

$x *^{\mathcal{A}} y = z \iff z = x.y$ $\quad \exists q: m * q = n$



Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$

- Опр. $Д_{n/m} = \{\langle n, m \rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{3,4\}, \dots$?

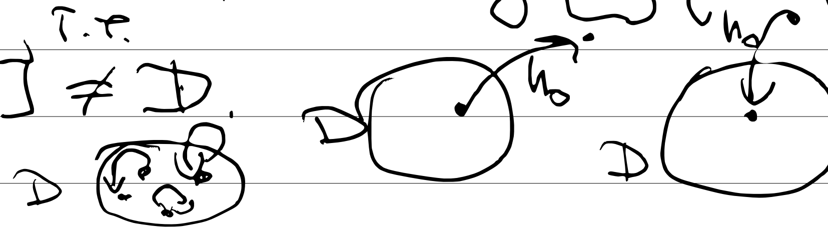
Да го довършим!

Крит. за неопр. на м-во $\quad \mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, \dots \rangle$

Нека $D \subseteq A^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогава D е неопр., ако същ. $h_0 \in Aut(\mathcal{A})$ и същ. $a_1, \dots, a_n \in A$ т.ч.

$h[D] \neq D$.



не $\left(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D \text{ т.с.т.к. } \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in D \right)$

$\{2\}$ е неопределимо, тс имаме $h \in Aut(\mathcal{Q})$, т.е. $h(2) \notin \{2\}$.

Th За вс. ест. число $n \in \mathbb{N}_{>0}$, то може да се представи като

$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots$$

$$\alpha_i \geq 0$$

M_{prime}

Основната Th на аритметиката

$h_0 : M_{prime} \to M_{prime}$

$$h_0(x) = \begin{cases} 3, & x = 2 \\ 2, & x = 3 \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

биекция: $h_0(h_0(x)) = x \to h = h^{-1}$

$h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{N}_{\geq 0} \to x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$

$$\underline{h(x)} \leq \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \underline{h_0^{\alpha_1}(2)} \cdot h_0^{\alpha_2}(3) \cdots \underline{h_0^{\alpha_i}(p_i)} \cdots = \\ = \prod_{i=1} h_0^{\alpha_i}(p_i), & x > 0 \end{cases}$$

$p_1 = 2; \cdots$

- Queeque? $\to h(h(x)) = x \to h = h^{-1}$
- Xeeu (?): $Q_1, Q_2 \in \mathbb{N}_{>0} \xrightarrow{\text{Th}} Q_1 = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$, $Q_2 = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdots p_i^{\beta_i} \cdots$

$$\underline{h(*^{t}(Q_1, Q_2))} \stackrel{?}{=} \underline{*^{t}(h(Q_1), h(Q_2))}$$

$h(*^{t}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots, 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdots p_i^{\beta_i} \cdots)) =$

$h(2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \cdots p_i^{\alpha_i+\beta_i} \cdots) = h_0^{\alpha_1+\beta_1}(2) \cdot h_0^{\alpha_2+\beta_2}(3) \cdots h_0^{\alpha_i+\beta_i}(p_i) \cdot =$

$$= 3^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i+\beta_i} \cdot \ldots) \quad (1)$$

$$*^{A}\left(h(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots), h(2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots)\right) =$$

$$= *^{A}\left(3^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots), h(3^{\beta_1} \cdot 2^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots)\right) =$$

$$= 3^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i+\beta_i} \ldots) \quad (2)$$

$$h(*^{A}(a_1, a_2)) = (1) \overset{(1)=(2)}{=} (2) = *^{A}(h(a_1), h(a_2)).$$

Оцуз: • $a_1 = 0$, $a_2 \in \mathbb{N}_{>0}$

• $a_1 \in \mathbb{N}_{>0}$, $a_2 = 0$

• $a_1 = a_2 = 0$.

Зад: $2 \in \{2\}$, но $h(2) \notin \{2\}$, т.е. и по крит. за неопр. на м-то, то $\{2\}$ не е опр.

$n \in \mathbb{N}_{>0} \rightarrow n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$

Нека $\underbrace{\alpha_k > 0}_{\text{краен брой}} \rightarrow p_k$ и $\underbrace{\alpha_t = 0}_{\text{безкраен брой}} \rightarrow p_t$

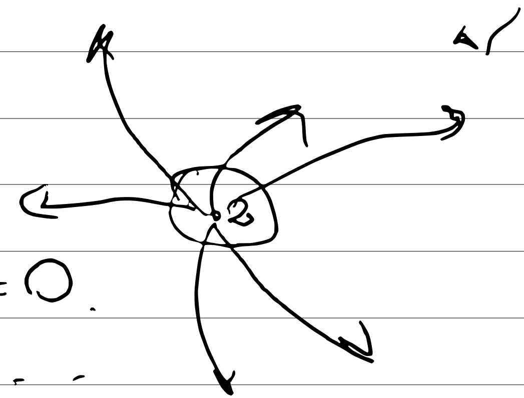
$\underline{6 = 2^1 \cdot 3^1}$, напр: 5

$h_0(2) = 5$

$h_0(5) = 2$

$h_0(x) = x, \ x \in \mathbb{P}rime \setminus \{2, 5\}$

$$h_0(x) = \begin{cases} p_t, & x = p_k \\ p_k, & x = p_t \\ x, & \text{else} \end{cases}$$



$h(x) = \prod_{i=1} h_0(p_i)^{\alpha_i}, \quad h(0) = 0$

$x > 0, \ x = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$

30.x) $\mathcal{L} = \langle * \rangle$ един двуместни функц. символи и ф.р. $\doteq$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, *^{\mathcal{A}} \rangle$

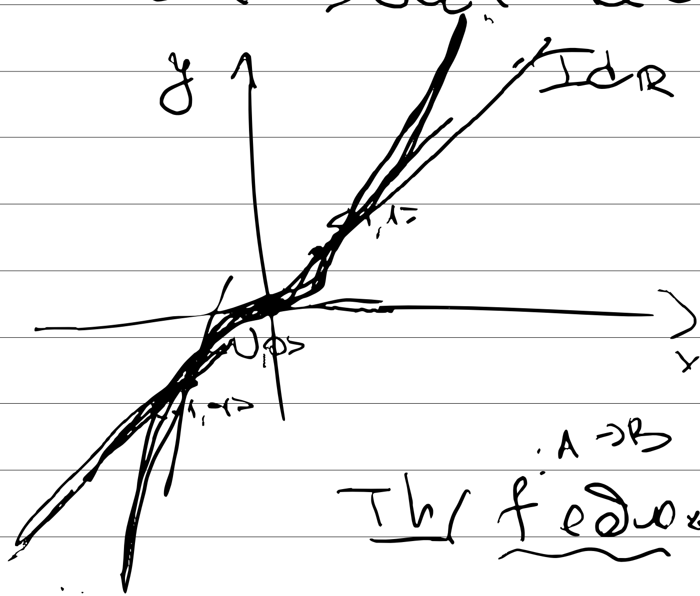
$a *^{\mathcal{A}} b = c \iff a \cdot b = c$

Кои синглетони са определими?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (x * y \doteq x)$.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y (x * y \doteq y)$.

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists z (\varphi_1(z) \ \& \ x * x \doteq z) \ \& \ \neg \varphi_1(x)$.



$h(x) = x^3$

$h(x) * h(y) = x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3 = h(x \cdot y)$

$A \to B$ $\quad h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Th/ f едно. биект. $\iff$ $\exists g : B \to A$ $\ f \circ g = Id_A$ и $g \circ f = Id_B$

зад. $B = \langle * \rangle \doteq \#(*) = 2$.

Нека $A = \langle \mathbb{Q}, *^{A} \rangle$.

$a *^{A} b \doteq c \Leftrightarrow a \cdot b = c$.

$a, b, c \in \mathbb{Q}$

Кои синглетони са определими?

$\{0\}, \{1\}, \{-1\}$ със следните ф-ли

можем ли да ги опр. както в $A = \langle \mathbb{R}, *^{A} \rangle$.

Предните автоморфизми не работят.

$h(x) = x^3$ → нечетна степен

Не работи, защото $h^{-1}(2) = ?$

Коя нечетна, която е $\neq 1$ и не чупи биекция?

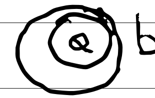
$h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

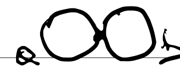
$h(0) = 0$, защото е опр., $h(1) = 1$, $h(-1) = -1$

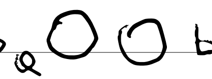
и за $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ → работи

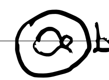
Зад. 6 | $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\# p = 2$.

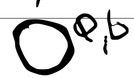
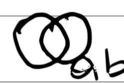
$\mathcal{A} = \langle$ окр. с ненулев радиус в $\mathbb{R}^2$, $p^{\mathcal{A}} \rangle$, където

a) $p^{\mathcal{A}}(a, b) \leftrightarrow$ 

b) $p^{\mathcal{A}}(a, b) \leftrightarrow$ 

c) $p^{\mathcal{A}}(a, b) \leftrightarrow$ 

d) $p^{\mathcal{A}}(a, b) \leftrightarrow$ 

Опр.   и останалите.

зад. | $\mathcal{L} = \langle f \rangle, \doteq;\ f \in Func_\infty,\ \#(f) = 2.$

Нека Σ е крайна азбука.

Нека $A = \langle \Sigma^*, f^A \rangle$ където

$f^A(u,v) = w \overset{def}{\Leftrightarrow} u o w = w$

за произв. $u, v, w \in \Sigma^*$.

Да се докаже, че в A са определими:

- $Pref = \{\langle u,v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е префикс на $v\}$
- $Suff = \{\langle u,v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е суфикс на $v\}$
- $W_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| = 1\}$
- $T_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| \leq 1\}$
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, W_n е опр.
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, T_n е опр.
- $O \leftrightharpoons \{\langle u,v,w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на u и v е $w\}$
- $D \leftrightharpoons \{\langle u,v,w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ суфикс на u и v е $w\}$

Да се изрази броят на автоморфизмите в $\mathcal{A}$ чрез броя на буквите от Σ.

- $Pref = \{\langle u, v\rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е префикс на $v\}$
- $Suff = \{\langle u, v\rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е суфикс на $v\}$

$\varphi_{Pref}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\,(f(x, z) \doteq y)$ // $x \circ z = y$

"x е префикс на y"

$\varphi_{Suff}(x, y) \leftrightharpoons \exists z\,(f(z, x) \doteq y)$.

- $W_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| = 1\}$
- $T_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| \leq 1\}$

$|u|$ - дължина на думата

$\varphi_\varepsilon(x) \leftrightharpoons \forall y\,(f(x, y) \doteq y)$.

$\varphi_{T_1}(x) \leftrightharpoons \forall y\,(\varphi_{Pref}(y, x) \Rightarrow \varphi_\varepsilon(y) \vee y \doteq x)$

$\varphi_{W_1}(x) \leftrightharpoons \varphi_{T_1}(x)\ \&\ \neg\varphi_\varepsilon(x)$.

- за вс. $n \in \mathbb{N}$, W_n е опр. } НИ (за T_n)
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, T_n е опр.

(base) φ_ε, φ_{T_1}

(i.h.) Нека за някое n то φ_{T_n} опр. T_n.

(i.step) $\varphi_{T_{n+1}}(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_{pref}(y,x) \Rightarrow \underbrace{\varphi_{T_n}(y)}_{\leq n})$

$y \doteq x$

- $O \leftrightharpoons \{\langle u,v,w\rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на u и v е суфикс на $w\}$
- $P \leftrightharpoons \{\langle u,v,w\rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ суфикс на u и v е префикс на $w\}$

$\varphi_{LCPref}(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_{pref}(z,x) \ \&\ \varphi_{pref}(y) \ \&$

" z е най-дългият общ префикс на x и y "

$\forall t(\varphi_{pref}(t,x) \ \&\ \varphi_{pref}(t,y) \Rightarrow \varphi_{pref}(t,z))$.

$\varphi_O(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t(\varphi_{LCPref}(x,y,t) \ \&\ \varphi_{suff}(t,z))$.

Да се изрази броят на автоморфизмите в $\mathcal{A}$ чрез броя на буквите от Σ.

$h_0 : \Sigma \to \Sigma$, Нека $|\Sigma| = n \in \mathbb{N}$.

$n!$, биекции

$h : \Sigma^* \to \Sigma^*$

h биекция и хом.

$n!$, на брой

$h(w) = h_0(a_1) \circ h_0(a_2) \circ \ldots \circ h_0(a_k)$

$w \in \Sigma^*$, $w = a_1 \circ \ldots \circ a_k$, $a_i \in \Sigma$

$h^{-1}(w) = h^{\text{НОК(цикли в } h_0)}(w) = w$

$u = a_1 \circ \ldots \circ a_k$

$v = b_1 \circ \ldots \circ b_t$

$h(f^{\mathcal{A}}(u, v)) \overset{?}{=} f^{\mathcal{A}}(h(u), h(v))$

$h(a_1 \circ \ldots \circ a_k \circ b_1 \circ \ldots \circ b_t) = h_0(a_1) \circ h_0(a_2) \circ \ldots \circ h_0(b_1) \circ \ldots h_0(b_t) =$

$= h(a_1 \circ \ldots \circ a_k) \circ h(b_1 \circ \ldots \circ b_t) = f^{\mathcal{A}}(h(u), h(v))$.

Зад/ $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = 3$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$p^{\mathcal{A}}(k, n, m) \iff k + n = m + 2$

a) Док., че всеки синглетон е определим

b) Да се определят $=$ и $<$.

зад. Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ FOL, $p \in Pred$, $\#p = 3$.

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), p^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$, като:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – м-вото от всички подмн-ва на $\mathbb{N}$ т.е. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{B \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$
- $\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \longleftrightarrow a \cup b = c$

$a, b, c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Да се докаже, че:

a) $\{\emptyset\}$ е определимо

b) $\{\mathbb{N}\}$ е определимо

c) $\subseteq\ \leftrightharpoons \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ \&\ x \subseteq y\}$ е определимо

d) $\cap \leftrightharpoons \{\langle x, y, z\rangle \mid x, y, z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $x \cap y = z\}$

е определимо

e) $- \leftrightharpoons \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $y = \mathbb{N} \setminus x\}$

т.е. y е допълнението на x

е определимо.

f) Докажете, че за $\underline{a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}}$, то

$\{a\}$ е <u>неопределимо</u>.

390/ Нека $\mathcal{L} = \langle \underline{II} \rangle$, $\underline{II} \in Preds$, $\#(\underline{II}) = 3$.

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^2, \underline{II}^{\mathcal{A}} \rangle$, където:

$$\underline{II}^{\mathcal{A}}(A, B, C) \leftrightharpoons A \neq B \text{ и } A \neq C \text{ и } \angle BAC = 30^\circ$$

Да се докаже, че в стр. $\mathcal{A}$ са определими:

- $Eq \leftrightharpoons \{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathbb{R}^2\}$
- $Col \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid$ лежат на една права$\}$
- $Circ \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на окръжност с диаметър $AB\}$

Вярно ли е, че в $\mathcal{A}$ са опр. м-вата и [illegible]?

- $Mid \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ е среда на отс. $AB\}$
- $Seg \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на отс. $AB\}$