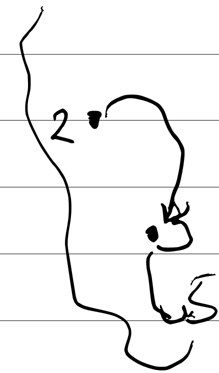
зад. Нека $\mathcal{L} = \langle \star \rangle$ и е с ф.р $\doteq$, $\#(\star)=2$

Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \star^{\mathcal{A}} \rangle$ за

$x \star^{\mathcal{A}} y = z \iff z = x . y$ зад: $m \star q = n$

Определете: $\{0\}$ и $\{1\}$

- Опр. $Д_{n/m} = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\}$
- Опр. м-вото на простите числа
- Определими ли са $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots$?



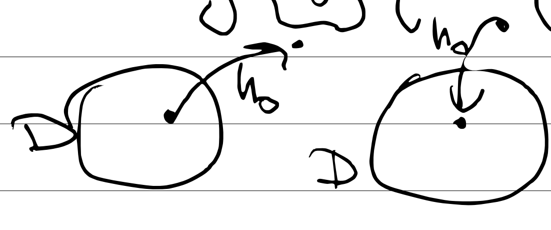
Да го довършим!

Крит. за неопр. на м-во $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, \ldots \rangle$

Нека $D \subseteq A^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогава D е неопр., ако същ. $h_0 \in Aut(\mathcal{A})$ и същ. $a_1, \ldots, a_n \in A$ т.ч.

$h[D] \neq D$.

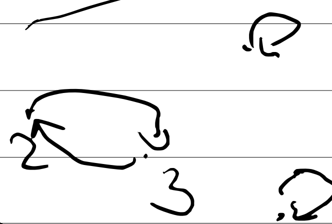


не $\left(\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in D \text{ т.с.т.к. } \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in D\right)$

$\{2\}$ е неопределимо, т.к. имаме $h \in Aut(\mathcal{A})$,
т.е. $h(2) \notin \{2\}$.

Th: За вс. ест. число $n \in \mathbb{N}_{>0}$, то може
да се представи като
$$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots$$
$$\alpha_i \geq 0$$
Основната Th на аритметиката

M_{prime}



$h_0 : M_{prime} \to M_{prime}$

$$h_0(x) = \begin{cases} 3, & x = 2 \\ 2, & x = 3 \\ x, & \text{else} \end{cases}$$

Биекция: $h_0(h_0(x)) = x \to h = h^{-1}$

$h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \in \mathbb{N}_{>0} \to x = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \ldots$

$$\underline{h(x)} \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \underline{h_0^{\alpha_1}(2)} \cdot h_0^{\alpha_2}(3) \cdot \ldots \cdot \underline{h_0^{\alpha_i}(p_i)} \cdot \ldots = \\ = \prod_{i=1} h_0^{\alpha_i}(p_i), & x > 0 \end{cases}$$

$p_1 = 2; \ldots$

- Биекция? $\to h(h(x)) = x \to h = h^{-1}$
- Хом? Th $Q_1, Q_2 \in \mathbb{N}_{>0} \to Q_1 = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots$, $Q_2 = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots$

$$\underline{h(*^{A}(Q_1, Q_2))} \stackrel{?}{=} \underline{*^{A}(h(Q_1), h(Q_2))}$$

$$h(*^{A}(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots, 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots)) =$$

$$h(2^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 3^{\alpha_2+\beta_2} \ldots p_i^{\alpha_i+\beta_i} \ldots) = h_0^{\alpha_1+\beta_1}(2) \cdot h_0^{\alpha_2+\beta_2}(3) \ldots h_0^{\alpha_i+\beta_i}(p_i) \ldots =$$

$$= 3^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i+\beta_i} \cdot \ldots \Big) \quad (1)$$

$$*^{A}\Big(h(2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots),\ h(2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots)\Big) =$$

$$= *^{A}\Big(3^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ldots),\ h(3^{\beta_1} \cdot 2^{\beta_2} \ldots p_i^{\beta_i} \ldots)\Big) =$$

$$= 3^{\alpha_1+\beta_1} \cdot 2^{\alpha_2+\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i+\beta_i} \ldots \Big) \quad (2)$$

(1) = (2)

$$h(*^{A}(a_1, a_2)) = (1) = (2) = *^{A}(h(a_1), h(a_2)).$$

Огр: • $a_1 = 0$, $a_2 \in \mathbb{N}_{>0}$
• $a_1 \in \mathbb{N}_{>0}$, $a_2 = 0$
• $a_1 = a_2 = 0$.

Забел: $2 \in \{2\}$, но $h(2) \notin \{2\}$, т.е. и от крит. за неопр. на м-во, то $\{2\}$ не е опр.

$n \in \mathbb{N}_{>0} \to n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$

Нека $\underbrace{\alpha_k > 0}_{\text{краен брой}} \to p_k$ и $\underbrace{\alpha_t = 0}_{\text{безкраен брой}} \to p_t$.

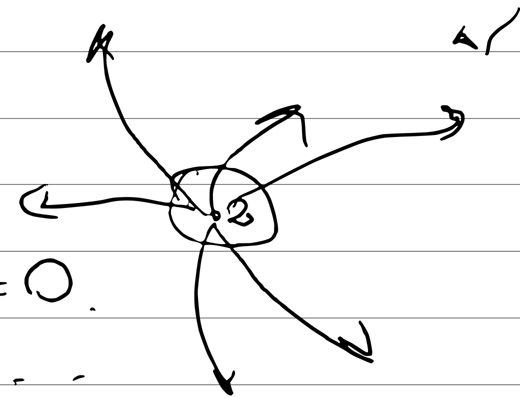
$6 = 2^1 \cdot 3^1$, прим: 5

$h_0(2) = 5$

$h_0(5) = 2$

$h_0(x) = x$, $x \in \text{Primes} \setminus \{2, 5\}$

$$h_0(x) = \begin{cases} p_t, & x = p_k \\ p_k, & x = p_t \\ x, & \text{else} \end{cases}$$



$$h(x) = \prod_{i=1} h_0(p_i)^{\alpha_i}, \quad h(0) = 0$$

$x > 0$, $x = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots$

Зад. $\mathcal{L} = \langle A \rangle$ един двуместни функц. символи и ф.р. $\doteq$.

$A = \langle \mathbb{R}, \star^A \rangle$

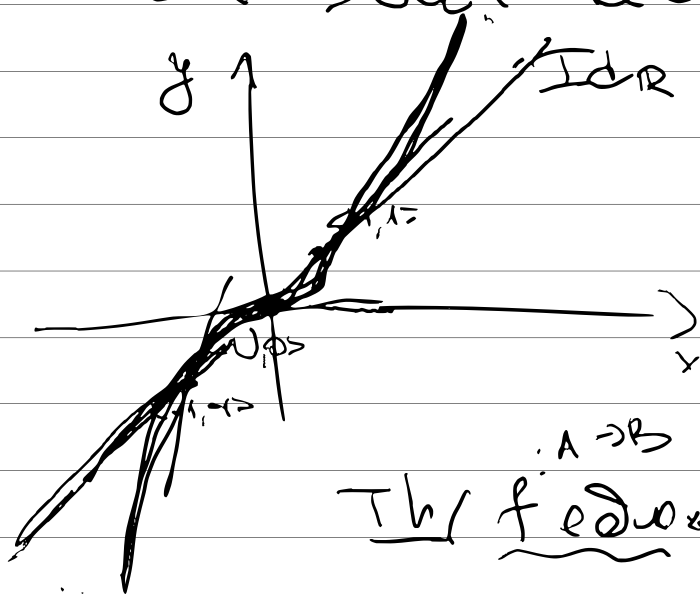
$$a \star^A b = c \iff a \cdot b = c$$

Кои синглетони са определими?

$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \forall y (x \star y \doteq x)$.

$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \forall y (x \star y \doteq y)$.

$\varphi_{-1}(x) \leftrightharpoons \exists z (\varphi_1(z) \ \& \ x \star x \doteq z) \ \& \ \neg \varphi_1(x)$.



$h(x) = x^3$

$h(x) \star h(y) = x^3 \cdot y^3 = (x \cdot y)^3 = h(x \cdot y)$

$h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\cdot A \to B$

Th/ f едно. биект. $\iff \exists g: B \to A$ $f \circ g = Id_A$ и $g \circ f = Id_B$

Зад. $\mathcal{B} = \langle * \rangle \doteq \#(*) = 2$.

Нека $A = \langle \mathbb{Q}, *^{A} \rangle$.

$a *^{A} b \doteq c \Leftrightarrow a \cdot b = c$.

$a, b, c \in \mathbb{Q}$

Кои синглетони са определими?

$\{0\}, \{1\}, \{-1\}$ със същите ф-ли можем да ги опр., както в $A = \langle \mathbb{R}, *^{A} \rangle$.

Предните автоморфизми не работят.

$h(x) = x^3 \to$ нечетна степен

Не работи, защото $h^{-1}(2) = ?$

Коя нечетна, която е $\neq 1$ и не чупи биекц.?

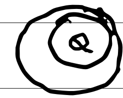
и за $\langle \mathbb{R}, * \rangle$ → работи →

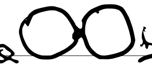
$h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

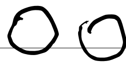
$h(0) = 0$, $\{0\}$ е опр., $h(1) = 1$, $h(-1) = -1$

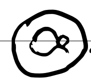
Зад 8 | $L = \langle p \rangle$, $\#p = 2$.

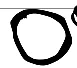
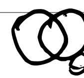
$A = \langle$ окр. с ненулев радиус в $\mathbb{R}^2$, $p^A \rangle$, където

a) $p^A(a, b) \Longleftrightarrow$  b

b) $p^A(a, b) \Longleftrightarrow$ a  b

c) $p^A(a, b) \Longleftrightarrow$ a  b

d) $p^A(a, b) \Longleftrightarrow$  b

Опр.  ^{a,b}  $_{ab}$ и останалите.

Зад. | $\mathcal{L} = \langle f \rangle, \doteq; f \in Func_\mathcal{L}, \#(f) = 2.$

Нека Σ е крайна азбука.

Нека $A = \langle \Sigma^*, f^A \rangle$ където

$f^A(u, v) = w \overset{def}{\iff} u \circ w = w$

за произв. $u, v, w \in \Sigma^*$.

Да се докаже, че в A са определими:

- $Pref = \{\langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е префикс на $v\}$
- $Suff = \{\langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е суфикс на $v\}$
- $W_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| = 1\}$
- $T_1 \leftrightharpoons \{u \in \Sigma^* \mid |u| \leq 1\}$
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, W_n е опр.
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, T_n е опр.
- $O \leftrightharpoons \{\langle u, v, w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на u и v е суфикс на $w\}$
- $D \leftrightharpoons \{\langle u, v, w \rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ суфикс на u и v е префикс на $w\}$

Да се изрази броят на автоморфизмите в A чрез броя на буквите от Σ.

- $Pref = \{ \langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е префикс на $v \}$
- $Suff = \{ \langle u, v \rangle \in (\Sigma^*)^2 \mid u$ е суфикс на $v \}$

$\varphi_{Pref}(x, y) \leftrightharpoons \exists z (f(x, z) \doteq y).$ // $x \circ z = y$

„ x е префикс на y"

$\varphi_{Suff}(x, y) \leftrightharpoons \exists z (f(z, x) \doteq y).$

- $W_1 \leftrightharpoons \{ u \in \Sigma^* \mid |u| = 1 \}$
- $T_1 \leftrightharpoons \{ u \in \Sigma^* \mid |u| \leq 1 \}$

$|u|$ - дължина на думата

$\varphi_{\varepsilon}(x) \leftrightharpoons \forall y (f(x, y) \doteq y).$

$\varphi_{T_1}(x) \leftrightharpoons \forall y (\varphi_{Pref}(y, x) \Rightarrow \varphi_{\varepsilon}(y) \vee y \doteq x)$

$\varphi_{W_1}(x) \leftrightharpoons \varphi_{T_1}(x) \& \neg \varphi_{\varepsilon}(x).$

- за вс. $n \in \mathbb{N}$, W_n е опр. } НW (T_n)
- за вс. $n \in \mathbb{N}$, T_n е опр.

(base) φ_{ε}, φ_{T_1}

(i.h) нека за някое n то φ_{T_n} опр. T_n.

(i.step) $\varphi_{T_{n+1}}(x) \leftrightharpoons \forall y(\varphi_{pref}(y,x) \Rightarrow \underbrace{\varphi_{T_n}(y)}_{\leq n} \vee y \doteq x)$

- $O \leftrightharpoons \{\langle u,v,w\rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ префикс на u и v е суфикс на $w\}$
- $P \leftrightharpoons \{\langle u,v,w\rangle \in (\Sigma^*)^3 \mid$ най-дългият общ суфикс на u и v е префикс на $w\}$

$\varphi_{LCPref}(x,y,z) \leftrightharpoons \varphi_{pref}(z,x) \ \& \ \varphi_{pref}(z,y) \ \&$

" z е най-дългият общ префикс на x и y "

$\rightarrow \forall t(\varphi_{pref}(t,x) \ \& \ \varphi_{pref}(t,y) \Rightarrow \varphi_{pref}(t,z))$.

$\varphi_O(x,y,z) \leftrightharpoons \exists t(\varphi_{LCPref}(x,y,t) \ \& \ \varphi_{suff}(t,z))$.

Да се изрази броят на автоморфизмите в A чрез броя на буквите от Σ.

$h_0 : \Sigma \to \Sigma$, нека $|\Sigma| = n \in \mathbb{N}$.

$n!$, на биекция

$h : \Sigma^* \to \Sigma^*$

h биекция и хом.

$n!$, на брой

$h(w) = h_0(a_1) \circ h_0(a_2) \circ \dots \circ h_0(a_k)$

$w \in \Sigma^*, w = a_1 a_2 \dots a_k$, $a_i \in \Sigma$

$h^{-1}(w) = h^{\text{НОК(цикли в } h_0) - 1}(w) \equiv w$

$u = a_1 \circ \dots \circ a_k$
$v = b_1 \circ \dots \circ b_t$

$h(f^A(u,v)) \stackrel{?}{=} f^A(h(u), h(v))$

$h(a_1 \circ \dots \circ a_k \circ b_1 \circ \dots \circ b_t) = h_0(a_1) \circ h_0(a_2) \circ \dots \circ h_0(b_1) \circ \dots$
$h_0(b_t) =$

$= h(a_1 \circ \dots \circ a_k) \circ h(b_1 \circ \dots \circ b_t) = f^A(h(u), h(v))$.

зад/ $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p) = 3$.

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$, където

$$p^{\mathcal{A}}(k, n, m) \iff k + n = m + 2$$

a) Док., че всеки синглетон е определим

b) Да се определят $=$ и $<$.

300. Нека $\mathcal{L} = \langle p \rangle$ FOL, $p \in Pred$, $\#p = 3$.
Нека $\mathcal{A} = \langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), p^{\mathcal{A}} \rangle$ е структура за $\mathcal{L}$, като:

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ - м-вото от всички подмн-ва на $\mathbb{N}$ т.е. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{B \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$
- $\langle a, b, c \rangle \in p^{\mathcal{A}} \iff a \cup b = c$

$a, b, c \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Да се докаже, че:

a) $\{\emptyset\}$ е определимо

b) $\{\mathbb{N}\}$ е определимо

c) $\subseteq \leftrightharpoons \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \& \ x \subseteq y\}$ е определимо

d) $\cap \leftrightharpoons \{ \langle x, y, z \rangle \mid x, y, z \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $x \cap y = z \}$

е определимо

e) $^{-} \leftrightharpoons \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ & $y = \mathbb{N} \setminus x \}$

т.е. y е допълнението на x

е определимо.

f) Докажете, че за $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, то $\{a\}$ е неопределимо.

380/ Нека $\mathcal{L} = \langle \underline{\text{ll}} \rangle$, $\underline{\text{ll}} \in Preds$, $\#(\underline{\text{ll}}) = 3$.
Нека $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}^2, \underline{\text{ll}}^{\mathcal{A}} \rangle$, където:

$$\underline{\text{ll}}^{\mathcal{A}}(A, B, C) \leftrightharpoons A \neq B \text{ и } A \neq C \text{ и } \angle BAC = 30^\circ$$

Да се докаже, че в стр. $\mathcal{A}$ са определими:

- $Eq \leftrightharpoons \{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathbb{R}^2\}$
- $Col \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid$ лежат на една права$\}$
- $Circ \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на окръжност с диаметър $AB\}$

Вярно ли е, че в $\mathcal{A}$ са опр. м-вата и звеер?

- $Mid \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ е среда на отс. $AB\}$
- $Seg \leftrightharpoons \{\langle A, B, C \rangle \mid C$ лежи на отс. $AB\}$