Метод на резолюцията

* Да провери дали едно мн-во от ф-ли е неизпълнимо.

· PVAR – изброимо мн-во

$p, r \in PVAR$

$\rightsquigarrow p$ е ф-ла

Ако φ и ψ са ф-ли (същ.).

, $\neg\varphi$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$

са ф-ли.

def| Съждителен литерал

$p \in PVAR$ е литерал и $\neg p$, $p \in PVAR$

също е литерал

Бележим литерал с L.

$\neg L$ не винаги е литерал, но същ. еквив.

на него $L^{\sigma} \leftrightharpoons \begin{cases} p, & L = \neg p \\ \neg p, & L = p. \end{cases}$

дуален литерал

$L^{\sigma} \models\!\mid \neg L$

def / Елементарна дизюнкция.

ф-ла от вида $L_1 \vee \dots \vee L_n$, където L_i са литерали.

def / Съждителни дизюнкти

Крайно м-во от литерали.

Като вземем една елем. диз. $C \leftrightharpoons L_1 \vee \dots \vee L_n \rightsquigarrow$

$D_C \leftrightharpoons \{L_1, \dots, L_k\}$ за $k \le n$

- губим кратност на литералите в C
- губим наредбата в C

$\longrightarrow$

$\longleftarrow$

def / Резолвента

Нека D_1, D_2 са две дизюнкти.

Нека $L \in D_1$, $L^{\partial} \in D_2$, $\Pi_0 \models \{D_1, D_2\}$

Тогава $D_3 \leftrightharpoons (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^{\partial}\})$,

D_3 се нарича резолвента на D_1 и D_2 и

$\Pi_0 \models D_3$

$!Res_L(D_1, D_2)$, $Res_L(D_1, D_2) = D_3$.

приложимо е правило за резол. отн. L за D_1, D_2

$D_1 = \{p, \neg q, r\}$, $L = p$

$D_2 = \{q, \neg p, r, \neg t\}$

$L \in D_1$, $L^{\partial} \in D_2$

$!Res_L(D_1, D_2) \rightsquigarrow Res_L(D_1, D_2) = \{\neg q, q, r, \neg t\}$

$L' = q$ $!Res_{L'}(D_2, D_1) \rightsquigarrow Res_{L'}(D_2, D_1) = \{p, \neg p, r, \neg t\}$

def | Резолютивен извод

Нека S е м-во от дизюнкти.

Резолютивен извод от S ще наричаме крайна редица $D_1, \dots, D_n$ от дизюнкти всеки член, на която:

$D_1, D_2 \in S$

D_i (за $2 < i \le n$): $\in S$ или $\exists j, k < i : D_i = Res_L(D_j, D_k)$ за някое L.

$\blacksquare = \{\} \to$ тривиалният свидетел за лъжа } няма модели

Озн: $S \vdash_r D \overset{def}{\Longleftrightarrow} D_1, \dots, D_n$ е резол. извод от S, т.ч. $D_n = D$.

$S \vdash_r D$ — резолютивен извод на D от м-вото S

Σ - крайно м-во от съжд. ф-ли.

$\underbrace{\Sigma \models \varphi}$ $\Longleftrightarrow$ $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо

? изводима ли е φ от Σ

зад

$\varphi_1 \leftrightharpoons p \Rightarrow q$

$\varphi_2 \leftrightharpoons r \Rightarrow s$

$\varphi_3 \leftrightharpoons p \vee r \Rightarrow q \vee s$

$\boxed{?\ \varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3\ ?}$ $\Longleftrightarrow$ $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ е неизпълнимо

$\Updownarrow$ $\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \neg\varphi_3$ е неизпълнимо.

(1) Разкриване на „$\Rightarrow$" и „$\Leftrightarrow$" и избутване всички „$\neg$" до ~~дъно~~ пред атомарни ф-ли.

- $\varphi \Rightarrow \psi \models\dashv \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi \models\dashv (\neg\varphi \vee \psi) \,\&\, (\neg\psi \vee \varphi)$

- $\neg\neg\varphi \overset{\partial}{\dashv\vDash} \varphi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \overset{\partial}{\dashv\vDash} \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$
- $\neg(\varphi \,\&\, \psi) \overset{\partial}{\dashv\vDash} \neg\varphi \vee \neg\psi$

$\varphi_1 \overset{\partial}{\dashv\vDash} \neg p \vee q \leftrightharpoons \varphi'_1$

$\varphi_2 \overset{\partial}{\dashv\vDash} \neg r \vee s \leftrightharpoons \varphi'_2$

$\neg\varphi_3 \overset{\partial}{\dashv\vDash} p \vee r \,\&\, \neg(q \vee s) \overset{\partial}{\dashv\vDash} (p \vee r) \,\&\, \neg q \,\&\, \neg s \leftrightharpoons \varphi'_3$

[illegible] • $(\varphi \,\&\, \psi) \vee \chi \dashv\vDash (\varphi \vee \chi) \,\&\, (\psi \vee \chi)$

Прилагане [illegible]

$D_1 \leftrightharpoons \{\neg p, q\}$

$D_2 \leftrightharpoons \{\neg r, s\}$

$D_3 \leftrightharpoons \{p, r\}$

$D_4 \leftrightharpoons \{\neg q\}$

$D_5 \leftrightharpoons \{\neg s\}$

$S \leftrightharpoons \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$

Правило:

Резолвента:

$D_i, D_j, L \in D_i, L^c \in D_j$

~~Готово~~ $D_k = Res_L(D_i, D_j)$

Цел: $S \vdash \blacksquare$

$D_1 \leftrightharpoons \{\neg p, q\}$

$D_2 \leftrightharpoons \{\neg r, s\}$

$D_3 \leftrightharpoons \{p, r\}$

$D_4 \leftrightharpoons \{\neg q\}$

$D_5 \leftrightharpoons \{\neg s\}$

① Розгл. D_1 и D_4

$q \in D_1$, $\neg q \in D_4$

$D_6 = Res(D_1, D_4) = \{\neg p\}$

② Розгл. D_3 и D_6.

$D_7 = Res(D_3, D_6) = \{r\}$

③ Розгл. D_7, D_2

$D_8 = Res(D_7, D_2) = \{s\}$

④ Розгл. D_5 и D_8

$\square = Res(D_8, D_5)$

Тогава $\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ е неизп. $\Leftrightarrow$

$\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\ [\forall y\,(s(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x\ [s(x) \Rightarrow \neg q(x,y)]$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y\ [\forall z\,(p(z,y) \vee q(z,x)) \Rightarrow \neg r(y)]$

$\varphi_1 \& \varphi_2 \models \varphi_3$ $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3 \Longleftrightarrow$

$\{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ е нез.

1. Махаме "$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$" и изд. "$\neg$".
2. ПНФ
3. СНФ
4. Дистр. закон. $(\varphi \& \psi) \vee \chi$
5. Извл. дизюнкти.

1. Използване правилата от свойств. резолюция

+ • $\neg \forall x \varphi \models\!\!\dashv \exists x \neg \varphi$
  • $\neg \exists x \varphi \models\!\!\dashv \forall x \neg \varphi$

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\ [\forall y(s(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x [s(x) \Rightarrow \neg q(x,y)]$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y [\forall z (p(z,y) \vee q(z,x)) \Rightarrow \neg r(y)]$

$\psi \leftrightharpoons \neg \varphi_3$

$\varphi_1 \models\!\dashv \forall x [\exists y (s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_1' \leftrightharpoons$

$\varphi_2 \models\!\dashv \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\varphi_2' \leftrightharpoons$

$\psi \models\!\dashv \forall x \exists y [\forall z (p(z,y) \vee q(z,x)) \,\&\, r(y)]$

$\psi' \leftrightharpoons$

② ПНФ.

def| φ е в ПНФ ако $\varphi \equiv Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \theta$,

където: • $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$

• θ е безкв. ф-ла

• $x_i \neq x_j$ за $1 \leq i < j \leq n$

• $Var^{free}[\varphi] \cap Var^{bd}[\varphi] = \emptyset$

Тв || Ако $x \notin Var^{free}[\psi]$ тогава

$$Qx\varphi \,\sigma\, \psi \dashv\vdash Qx(\varphi \,\sigma\, \psi)$$

$$\sigma \in \{\vee, \&\}$$

* Ще изваждаме екзистенциалните кванторите възможно най-рано.

Т.е. ако имаме

$$(\exists x \forall y\, p(x,y) \vee \forall z \exists t\, q(z,t)),$$ то

можем $\exists x$ или $\forall z$ да ги изкараме.

Ние ще избираме винаги екзист. кванторите първо т.е. $\exists x(\forall y\, p(x,y) \vee \forall z \exists t\, q(z,t)) \rightsquigarrow$

$\exists x \forall y(p(x,y) \vee \forall z \exists t\, q(z,t)) \rightsquigarrow$

$\exists x \forall y \forall z \exists t\, (p(x,y) \vee q(z,t))$

$\boxed{\text{ПНФ на ф-ла не е единствена !}}$

$\forall x\, p(x) \,\&\, p(x)$ по th за вариантите

$y \notin Var[\varphi]$ и [illegible]

$\forall y\, p(y) \,\&\, p(x) \rightsquigarrow \forall y\,(p(y) \,\&\, p(x))$ ПНФ

$\varphi_1' \leftrightharpoons \forall x\,[\exists y\,(s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2' \leftrightharpoons \exists y\, \forall x\,[\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\psi' \leftrightharpoons \forall x\, \exists y\,[\forall z\,(p(z,y) \vee q(z,x)) \,\&\, r(y)]$

$\varphi_1'' \leftrightharpoons \forall x\, \exists y\,[(s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

φ_2'

$\psi'' \leftrightharpoons \forall x\, \exists y\, \forall z\,[(p(z,y) \vee q(z,x)) \,\&\, r(y)]$

~~T-1~~ изпълнимостта се пази

③ СНФ

def1 едностъпкова Сколемизация

$\gamma \leftrightharpoons \exists x\, \psi \rightsquigarrow \gamma_S \leftrightharpoons \psi[x/c_\gamma]$, $\#c_\gamma = 0$

$$\varphi \equiv \underbrace{\cancel{\forall y_1 \ldots \forall y_n}}_{n>0} \exists x\, \psi \implies \varphi_S \equiv \forall y_1 \ldots \forall y_n\, \psi[x / f_\varphi(y_1, \ldots, y_n)]$$

$$\# f_\varphi = n.$$

СНФ на φ е $\varphi_{\underbrace{sss \ldots s}_{\text{брой на екзистенциалните квантори в } \varphi}} \overset{\text{озн.}}{\approx} \varphi^S$

$$\boxed{\varphi \text{ е изп.} \iff \varphi^S \text{ е изп.}}$$

Премахвате екз. квантори отляво надясно.

$\varphi_1'' \leftrightharpoons \forall x \exists y [(s(y) \& \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2' \leftrightharpoons \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\psi'' \leftrightharpoons \forall x \exists y \forall z [(p(z,y) \vee q(z,x)) \& r(y)]$

$\varphi_1^s \leftrightharpoons \forall x [(s(f(x)) \& \neg p(f(x),x)) \vee \neg r(x)]$

$\varphi_2^s \leftrightharpoons \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,a)]$

$\psi^s \leftrightharpoons \forall x \forall z [(p(z,g(x)) \vee q(z,x)) \& r(g(x))]$

(4) Прилагаме $((\varphi \& \chi) \vee \psi) \vDash (\varphi \vee \psi) \& (\chi \vee \psi)$.

$\varphi_1^{fin} \leftrightharpoons \forall x [(s(f(x)) \vee \neg r(x)) \& (\neg p(f(x),x) \vee \neg r(x))]$

$\varphi_2^{fin} \leftrightharpoons \varphi_2^s$

$\psi^s \leftrightharpoons \psi^s$

(5) $D_1 \leftrightharpoons \{ s(f(x_1)),\ \neg r(x_1) \}$

$D_2 \leftrightharpoons \{ \neg p(f(x_2), x_2),\ \neg r(x_2) \}$

$D_3 \leftrightharpoons \{ \neg s(x_3),\ \neg q(x_3, a) \}$

$D_4 \leftrightharpoons \{ p(z_4, g(x_4)),\ q(z_4, x_4) \}$

$D_5 \leftrightharpoons \{ r(g(x_5)) \}$.

<u>def</u> | <u>Субституция</u>

крайно м-во от вида $\{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$

$x_1, \ldots, x_n \in Var$, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$, $x_i \neq \tau_i$ $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$\xi \leftrightharpoons \{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$.

$\tau_i = \tau_j$, ако $x_i = x_j$ → т.е. не може $\{x/a, x/b\}$ $a \neq b$

• $x \in Var \rightsquigarrow x\xi = \begin{cases} x, & x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \tau_i, & x \in \{x_1, \ldots, x_n\} \rightsquigarrow x = x_i \text{ за } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$

• $c \in Const_{\mathcal{L}} \rightsquigarrow c\xi = c$

• $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#f = n$, $\tau_1, \dots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$, то

$$f(\tau_1, \dots, \tau_n)\xi = f(\tau_1\xi, \dots, \tau_n\xi)$$

$$\boxed{\tau\xi = \tau[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]}$$

$q(x, y)$, $\xi = \{x/f(y), y/x\}$

$q(x,y)\xi \mapsto q(x\xi, y\xi) \mapsto q(f(y), x)$

$\sigma, \xi \to \sigma \circ \xi = \eta$ нова субст. вноти свеждащ [?]

def/ Унификатор

Нека $\mathcal{E} \neq \emptyset$ м-во от термове и σ е субст.

Казваме, че σ е униф. за $\mathcal{E}$, ако

$$\mathcal{E}\sigma = \{\tau\sigma \mid \tau \in \mathcal{E}\} \to |\mathcal{E}\sigma| = 1.$$

Правила

① Резолвента

Нека D_i и D_j са дизюнкти, които нямат общи променливи помежду си (иначе с преименуване съответ. ги [illegible]).

$D_i = \{L\} \cup D_i'$ и $D_j = \{\neg L'\} \cup D_j'$.

Търсим унификатор σ, т.ч. $\boxed{L\sigma = L'\sigma}$

Тогава $Res_L(D_i, D_j) = \underbrace{D_i'\sigma}_{= D_i\sigma \setminus \{L\sigma\}} \cup \underbrace{D_j'\sigma}_{= D_j\sigma \setminus \{\neg L'\sigma\}}$

$\neg L'\sigma = \neg L\sigma$

② Колапс (взимане на частен случай)

$k > 1$

Нека D_i е дизюнкт, т.е. $D_i = \{L_1, \dots, L_k\} \cup D_i'$.

Търсим унификатор σ, т.ч. $L_1\sigma = L_2\sigma = \dots = L_k\sigma$.

$Collapse(D_i) = \{L_1\sigma\} \cup D_i'\sigma$.

$D_1 \leftrightharpoons \{ s(f(x_1)), \neg r(x_1) \}$

$D_2 \leftrightharpoons \{ \neg p(f(x_2), x_2), \neg r(x_2) \}$

$D_3 \leftrightharpoons \{ \neg s(x_3), \neg q(x_3, a) \}$.

$D_4 \leftrightharpoons \{ p(z_4, g(x_4)), q(z_4, x_4) \}$.

$D_5 \leftrightharpoons \{ r(g(x_5)) \}$.

① Разгл. D_1 и D_5

$\| x_1 = g(x_5) \rightsquigarrow \sigma_1 \leftrightharpoons \{ x_1 / g(x_5) \}, \quad \sigma_2 \leftrightharpoons \varnothing \quad \sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$

$Res(D_1 \sigma_1, D_5 \sigma_2) = \{ s(f(g(x_5))) \} = D_6$

② Разгл. D_5 и D_2

$Res(D_2 \{ x_2 / g(x_5) \}, D_5) = \{ \neg p(f(g(x_5)), g(x_5)) \}$ $= D_7$

③ Разгл. D_3 и D_4

$\left\| \begin{array}{l} x_3 = z_4 \\ a = x_4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{l} x_3 = z_4 \\ x_4 = a \end{array} \right.$.

$Res(D_3 \{ x_3 / z_4 \}, D_4 \{ x_4 / a \}) = \{ \neg s(z_4), p(z_4, g(a)) \} = D_8$

4) Разгл. D_8 и D_7

$$\left\| \begin{array}{l} z_4 = f(g(x_5)) \\ g(a) = g(x_5) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\| \begin{array}{l} z_4 = f(g(a)) \\ x_5 = a \end{array} \right.$$

$Res(D_7\{x_5/a\}, D_8\{z_4/f(g(a))\}) = \{\neg S(f(g(a)))\}$

D_9

5) Разгл. D_6 и D_9

$Res(D_6\{x_5/a\}, D_9) = \blacksquare$