Метод на резолюцията

Какво знаем за него от лекции?

Какво е една програма на Prolog всъщност?

- Да проверим дали едно множество от ф-ли е неизпълнимо.

- Σ - м-во от ф-ли, φ - ф-ла

дали $\Sigma \models \varphi$ следствие/заключение

предпоставки/хипотези

$\emptyset \models \psi$ при ψ тавтология

$\Sigma \models \varphi \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow$ задача за неизпълнимост

$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизпълнимо

$\boxed{\Sigma \text{ е крайно}}$

няма стр. и оценка в стр, т.ч. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ да са всички верни в нея.

(1) $\Sigma \models \varphi \rightarrow$ (2) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ е неизп.

φ е тавтология $\Longleftrightarrow \emptyset \models \varphi \Longleftrightarrow \neg\varphi$ е логическо противоречие

$\{\neg\varphi\}$ е неизп. м-во

Припомняне на основна терминология

def/ Съждителна ф-ла при положение, че PVAR е азбука от съжд. пром. (PVAR $\neq \emptyset$ изброимо).

def/ Съждителен литерал

def/ Елементарна дизюнкция

def/ Съждителен дизюнкт

def/ Хорнови дизюнкти

def/ Резолвента

def/ Резолютивен извод

def/ Съждителна ф-ла при положение, че PVAR е азбука от съжд. пром. (PVAR ≠ ∅ изброима).

- съжд. пром са съжд. ф-ли
- ако φ е съжд. ф-ла, то и ¬φ е съжд. ф-ла
- ако φ и ψ са съжд. ф-ли, то и φ&ψ, φ∨ψ, φ⇒ψ и φ⇔ψ са съжд. ф-ли
- всички съжд. ф-ли са генерирани с краен # прилагания на предишните стъпки

def/ Съждителен литерал

p ∈ PVAR е литерал и ¬p, p ∈ PVAR съжд е литерал.

h - така ги бележим

¬h дали е литерал? → не, ако h = ¬p, то ¬¬p

$$L^c \leftrightharpoons \begin{cases} P, & L = \neg P \\ \neg P, & L = P \end{cases}$$

$L^c \dashv\models \neg L$

$\neg\neg p$ не е литерал, но $p \dashv\models \neg\neg p$, където p е литерал

def/ <u>елементарна дизюнкция</u>

ф-ла от вида $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$, където L_i са литерали за $1 \le i \le n$

$$I_0 \models L_1 \vee \dots \vee L_n \iff \exists j : 1 \le j \le n : I(L_j) = T$$

!ипр $I_0 : PVAR \to \{T, F\}$

$I : Form \to \{T, F\}$

$I_0 \subseteq I$

def/ Съждителен дизюнкт

Краен м-во от литерали.

Ако вземем елем. дизюнкт $\mathcal{C} \leftrightharpoons L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$,

то $D_{\mathcal{C}} \leftrightharpoons \{L_1, \dots, L_n\}$ $\qquad \mathcal{C} \models\!\dashv D_{\mathcal{C}}$

def/ Хорнов дизюнкт

Един дизюнкт е Хорнов, ако съдържа не повече от един позитивен литерал т.е. $L = P$:

- $\{P\}$ – факти
- $\{P, \neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}_{n>0}$ – правила
- $\{\neg Q_1, \dots, \neg Q_n\}_{n>0}$ – цели

[redacted] $\leftrightharpoons \{\}$, при което за е бъл. инт. I_0, то $I_0 \not\models$ [redacted]

Какво е една програма на Prolog?

Съвкупност от правила и факти

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{програмата на пролог}} \models \underbrace{\varphi}_{\text{query команда (нашата цел)}} \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ да е неизпълнимо}$$

def/ Резолвента

Нека D_1, D_2 са два дизюнкта. Нека $L \in D_1$, $L^\circ \in D_2$, $I_0 \models \{D_1, D_2\}$.

Тогава $D_3 = (D_1 \setminus \{L\}) \cup (D_2 \setminus \{L^\circ\})$

D_3 се нарича резолвента на D_1 и D_2 и $I_0 \models D_3$

правилото за резолвента е приложими спрямо литерала L

! $Res_L(D_1, D_2)$, $Res_L(D_1, D_2) = D_3$

$D_1 = \{p, \neg q\}$

$D_2 = \{q, \neg p, r, \neg v\}$ $\quad L = p$

$L \in D_1, \quad L^c \in D_2$

$!Res_L(D_1, D_2) = D_3 = \{\neg q, q, r, \neg v\}$

$!Res_q(D_2, D_1) = D_4 = \{p, \neg p, r, \neg v\}$

def/ Резолютивен извод.

Нека S е м-во от дизюнкти.

Резолютивен извод от S ще наричаме всяка редица от дизюнкти всеки елем. на която:

$D_1, \ldots, D_n$: $D_1, D_2 \in S$

D_1, D_j, D_k, D_i with $D_j, D_k \xrightarrow{Res_L} D_i$

D_i — $\in S$

$3 \le i \le n$ — $\exists j, k : 1 \le j < k < i : D_i = Res_L(D_j, D_k)$

$S \vdash D \iff D_1, \ldots, D_n$ т.е. $D_n = D$

е рез. извод от S

Задача

$\varphi_1 \rightleftharpoons p \Rightarrow q$

$\varphi_2 \rightleftharpoons r \Rightarrow s$

$\varphi_3 \overset{}{\underset{д}{\rightleftharpoons}} p \vee r \Rightarrow q \vee s$

Док., че $\varphi_1, \varphi_2 \vDash \varphi_3 \iff \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ е неизп.

$\iff \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \neg\varphi_3$ е неизп.

(1) Развиване на „$\Rightarrow$" и „$\Leftrightarrow$" и да избутаме всички „$\neg$" най-навътре

- $\varphi \Rightarrow \psi \overset{б}{\vDash\!\dashv} \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \Leftrightarrow \psi \overset{б}{\vDash\!\dashv} (\varphi \Rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \Rightarrow \varphi) \overset{б}{\vDash\!\dashv} (\neg\varphi \vee \psi) \,\&\, (\neg\psi \vee \varphi)$
- $\neg\neg\varphi \overset{б}{\vDash\!\dashv} \varphi$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \overset{б}{\vDash\!\dashv} \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$
- $\neg(\varphi \,\&\, \psi) \overset{б}{\vDash\!\dashv} \neg\varphi \vee \neg\psi$

★ Разкр. „$\Rightarrow$" и „$\Leftrightarrow$" - отгоре надолу (основните знаци към листата)

★ А пак „$\neg$" от най-външните навътре

$$\varphi_1 \leftrightharpoons p \Rightarrow q$$

$$\varphi_2 \leftrightharpoons r \Rightarrow s$$

$$\varphi_3 \leftrightharpoons p \vee r \Rightarrow q \vee s$$

$\varphi_1' \leftrightharpoons \neg p \vee q$; $\varphi_2' \leftrightharpoons \neg r \vee s$; $\varphi_3' \leftrightharpoons \neg \varphi_3 \overset{б}{\equiv} (p \vee r) \,\&\, \neg q \,\&\, \neg s$

② $(\varphi \,\&\, \psi) \vee \chi \overset{б}{\equiv} (\varphi \vee \chi) \,\&\, (\psi \vee \chi)$

$\chi \vee (\varphi \,\&\, \psi) \overset{б}{\equiv} (\chi \vee \varphi) \,\&\, (\chi \vee \psi)$

$D_1 \leftrightharpoons \{\neg p, q\}$, $D_2 \leftrightharpoons \{\neg r, s\}$, $D_3 \leftrightharpoons \{p, r\}$; $D_4 \leftrightharpoons \{\neg q\}$, $D_5 \leftrightharpoons \{\neg s\}$.

Правило: Резолвентата

Ако D_i, D_j са диз., $L \in D_i$, $L^{\delta} \in D_j$, тогава $D_k \leftrightharpoons Res_L(D_i, D_j)$

Цел: $S \leftrightharpoons \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$ $\boxed{S \vdash \blacksquare}$

$S^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$, където

$S_0 \leftrightharpoons S$

$S_{n+1} \leftrightharpoons S_n \cup \{D_i \mid D_j, D_k \in S_n, D_i = Res(D_j, D_k)\}$

S е изп. $\Longleftrightarrow$ S^* е изп

S е неизп $\Longleftrightarrow$ S^* е неизп. $\Longleftrightarrow$ $\blacksquare \in S^* \Longleftrightarrow (\exists n \in \omega)[\blacksquare \in S_n]$

$\boxed{\underbrace{I_0 \models S'}_{\text{множество от дизюнкти}} \Longleftrightarrow (\forall D \in S')[I_0 \models D]}$

Ситуация: $D_i = \{\dots, P, \neg P, \dots\}$ тавтологичен дизюнкт.

не ни носи инфо

Ситуация: $D_i \subseteq \cancel{D_j}$ кой е по-ценен за нас

по-ценен

следствие на D_i

Искаме синглетони.

★ $D_i = \{p\}$ и $D_j = \{\ldots, \neg p, \ldots\}$, $|D_j| = n$

Тогава $\mathrm{Res}(D_i, D_j) = D_k$, $|D_k| = n-1$

$\quad\parallel$

$(D_i \setminus \{L\}) \cup (D_j \setminus \{\bar{L}\})$

за $L = p$

$D_1 = \{\neg p, q\}$, $D_2 = \{\neg r, s\}$, $D_3 = \{p, r\}$; $D_4 = \{\neg q\}$, $D_5 = \{\neg s\}$

Плои: $D_6 = \mathrm{Res}_q(D_1, D_4) = \{\neg p\}$

$D_7 = \mathrm{Res}_s(D_2, D_5) = \{\neg r\}$

$D_8 = \mathrm{Res}_p(D_3, D_6) = \{r\}$

$D_9 = \mathrm{Res}_r(D_8, D_7) = \blacksquare$

Примерна задача, с която ще илюстрираме линеарен резолютивен метод и ще дадем стъпките + def.

Нека имаме

$$\begin{cases} \varphi_1 \leftrightharpoons \forall x[\forall y(s(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)] \\ \varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \forall x[\neg s(x) \vee \neg q(x,y)] \\ \varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \,\&\, \neg q(z,x))] \end{cases}$$

Въпрос? $\boxed{\varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \models \varphi_3} \Longleftrightarrow \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ е неизп.

$\Longleftrightarrow \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \neg\varphi_3$ е неизп.

$\psi \leftrightharpoons \neg\varphi_3$

1. ~~-||- което в свърз.~~
2. ПНФ
3. СНФ
4. Дист. закон $(\varphi \,\&\, \psi) \vee \chi$
5. Извл. на дизюнкти.

① Разкриваме:

- „$\Rightarrow$" и „$\Leftrightarrow$" отвътре навън.
- бутаме „$\neg$" до атомарни ф-ли отвън навътре

$\varphi \Rightarrow \psi \mathrel{\Dashv\vDash} \neg\varphi \vee \psi$; $\varphi \Leftrightarrow \psi \mathrel{\Dashv\vDash} (\neg\varphi \vee \psi) \,\&\, (\neg\psi \vee \varphi)$;

$\neg(\varphi \vee \psi) \mathrel{\Dashv\vDash} \neg\varphi \,\&\, \neg\psi$; $\neg(\varphi \,\&\, \psi) \mathrel{\Dashv\vDash} \neg\varphi \vee \neg\psi$;

$\neg\neg\varphi \mathrel{\Dashv\vDash} \varphi$; $\neg\forall x\varphi \mathrel{\Dashv\vDash} \exists x\neg\varphi$; $\neg\exists x\varphi \mathrel{\Dashv\vDash} \forall x\neg\varphi$

$$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x[\forall y(s(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$$

$$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y\forall x[\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$$

$$\psi \leftrightharpoons \neg(\exists x\forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \,\&\, \neg q(z,x))])$$

$$\varphi_1' \leftrightharpoons \forall x[\exists y(s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$$

$$\psi' \leftrightharpoons \forall x\exists y[r(y) \,\&\, \forall z(p(z,y) \vee q(z,x))]$$

② ПНФ

квант. префикс

def/ ф-ла φ е в ПНФ, ако $\varphi \equiv Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\, \theta$

където:
- $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, $1 \le i \le n$
- $x_i \neq x_j$ за $1 \le i < j \le n$
- θ е безкванторна

матрица на ф-лата

★ $Var^{free}[\varphi] \cap Var^{bd}[\varphi] = \emptyset$

ще го искаме и това

Th за варианта

$\varphi(x) \equiv \forall x\, q(x,y) \vee q(x,y)$

$x \in Var^{free}[\varphi] \cap Var^{bd}[\varphi]$

$\varphi'(x) \equiv \forall z\, q(z,y) \vee q(x,y)$

Тв/ Ако $x \notin Var^{free}[\psi]$

$Qx\varphi \,\&\, \psi \dashv\vdash Qx(\varphi \,\&\, \psi)$

$Qx\varphi \vee \psi \dashv\vdash Qx(\varphi \vee \psi)$

за $Q \in \{\forall, \exists\}$

★ Искаме за изваждане $\forall$ и $\exists$ възможно най-рано

$$\forall x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \exists z \forall t\, p(t,z) \;\dashv\vdash$$

$$\exists z \left(\forall x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \forall t\, p(t,z) \right) \;\dashv\vdash$$

$$\exists z\, \forall x \left(\exists y\, p(x,y) \;\&\; \forall t\, p(t,z) \right) \;\dashv\vdash$$

$$\exists z \forall x \exists y \forall t \left(p(x,y) \;\&\; p(t,z) \right)$$

$\varphi_1 \equiv \forall x[\forall y(s(y) \Rightarrow p(y,x)) \Rightarrow \neg r(x)]$

$\varphi_2 \equiv \exists y \forall x[\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

$\psi \equiv \neg(\exists x \forall y[r(y) \Rightarrow \exists z(\neg p(z,y) \,\&\, \neg q(z,x))])$

$\varphi_1' \equiv \forall x[\exists y(s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x)]$

$\psi' \equiv \forall x \exists y[r(y) \,\&\, \forall z(p(z,y) \vee q(z,x))]$

$\varphi_1'' \equiv \forall x \exists y((s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x))$

$\psi'' \equiv \forall x \exists y \forall z(r(y) \,\&\, (p(z,y) \vee q(z,x)))$

$\varphi_2 \equiv \exists y \forall x[\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$

③ СНФ

def/ 1 step skolemization

отляво надясно по кв. префикс на φ за елим. $\exists$-и

φ е в ПНФ

$$\varphi \mapsto \varphi_s \mapsto \varphi_{ss} \mapsto \varphi_{sss} \mapsto \dots \mapsto \underbrace{\varphi_{ss\dots s}}_{n}$$

n — # на кв. $\exists$ срещ. в кв. префикс

φ^S

- $\varphi = \exists x \psi$, c_φ — константа (0-местен функционален символ), $\varphi_s \leftrightharpoons \psi[x/c_\varphi]$

- $\varphi = \forall y_1 \dots \forall y_k \exists x \psi$, $k > 0$, f_φ, $\#(f_\varphi) = k$,

  $\varphi_s \leftrightharpoons \forall y_1 \dots \forall y_k \psi[x/f_\varphi(y_1, \dots, y_k)]$

$$\boxed{\varphi \text{ е изп} \iff \varphi^S \text{ е изп}}$$

$$\varphi \not\models \varphi^S$$

$$\varphi_1'' \leftrightharpoons \underline{\forall x} \underline{\exists y}((s(y) \,\&\, \neg p(y,x)) \vee \neg r(x))$$

$$\psi'' \leftrightharpoons \forall x \underline{\exists y} \forall z (r(y) \,\&\, (p(z,y) \vee q(z,x)))$$

$$\underline{\varphi_2} \leftrightharpoons \exists y \forall x [\neg s(x) \vee \neg q(x,y)]$$

$$\varphi_1^S \leftrightharpoons \forall x ((\underline{s(f(x))} \,\&\, \underline{\neg p(f(x),x)}) \vee \underline{\neg r(x)})$$

$$\varphi_2^S \leftrightharpoons \forall x (\neg s(x) \vee \neg q(x,a))$$

$$\psi^S \leftrightharpoons \forall x \forall z (\underline{r(g(x))} \,\&\, \underline{(p(z,g(x)) \vee q(z,x))})$$

(4) $(\varphi \,\&\, \psi) \vee \chi \,\,\text{⫤⊨}\,\, (\varphi \vee \chi) \,\&\, (\psi \vee \chi)$

$\chi \vee (\varphi \,\&\, \psi) \,\,\text{⫤⊨}\,\, (\chi \vee \varphi) \,\&\, (\chi \vee \psi)$

$$\varphi_1^f \leftrightharpoons \forall x [(s(f(x)) \vee \neg r(x)) \,\&\, (\neg p(f(x),x) \vee \neg r(x))]$$

$$\varphi_2^S \leftrightharpoons \forall x (\neg s(x) \vee \neg q(x,a))$$

$$\psi^S \leftrightharpoons \forall x \forall z (\underline{r(g(x))} \,\&\, \underline{(p(z,g(x)) \vee q(z,x))})$$

Th φ е изп $\Longleftrightarrow \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ е изп.

$\varphi_1^f \leftrightharpoons \forall x [(s(f(x)) \vee \neg r(x)) \& (\neg p(f(x), x) \vee \neg r(x))]$

$\varphi_2^s \leftrightharpoons \forall x (\neg s(x) \vee \neg q(x, a))$

$\psi^s \leftrightharpoons \forall x \forall z (r(g(x)) \& (p(z, g(x)) \vee q(z, x)))$

$D_1 \leftrightharpoons \{s(f(x_1)), \neg r(x_1)\}$

$D_2 \leftrightharpoons \{\neg p(f(x_2), x_2), \neg r(x_2)\}$

$D_3 \leftrightharpoons \{\neg s(x_3), \neg q(x_3, a)\}$

$D_4 \leftrightharpoons \{r(g(x_4))\}$

$D_5 \leftrightharpoons \{p(z_5, g(x_5)), q(z_5, x_5)\}$

Субституция: Крайно м-во от вида $\{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$ $x_1, \dots, x_n \in Var$, $x_i \neq x_j$ за $1 \leq i < j \leq n$ и $\tau_1, \dots, \tau_n \in T_{\mathcal{L}}$ като $x_i \neq \tau_i$ за $1 \leq i \leq n$ x_i/x_i

$\xi \leftrightharpoons \{x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n\}$

- $x \in Var$, то $x\xi \leftrightharpoons \begin{cases} x, & x \notin \{x_1, \ldots, x_n\} \\ \tau_i, & x \in \{x_1, \ldots, x_n\} \end{cases}$

  $x \equiv x_i$ за някое i
  $1 \le i \le n$

- $c \in Const_{\mathcal{L}}$, то $c\xi \leftrightharpoons c$

- $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f) = m$, $\tau_1, \ldots, \tau_m \in T_{\mathcal{L}}$, то

  $f(\tau_1, \ldots, \tau_m)\xi = f(\tau_1\xi, \ldots, \tau_m\xi)$

! Променливи заменяме с термове !

Следв. $\tau\xi = \tau[x_1/\tau_1, \ldots, x_n/\tau_n] \neq \tau[x_1/\tau_1][x_2/\tau_2] \ldots [x_n/\tau_n]$

едновременна замяна на $x_1, \ldots, x_n$ с термовете $\tau_1, \ldots, \tau_n$

$$f(x,y)\{x/g(y),\ y/z\} = f(g(y), z)$$

ξ, η $\quad \eta\xi$

def/ <u>Унификатор</u>

Нека $\mathcal{E} \subseteq T_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{E} \neq \emptyset$ м-во от термове и ξ е субституция. Казваме, че ξ е унификатор за $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}\xi = \{\tau\xi \mid \tau \in \mathcal{E}\}$$

$$|\mathcal{E}\xi| = 1$$

$\mathcal{E} = \{f(x,y),\ f(g(y),z)\}$

$\xi = \{y/z,\ x/g(z)\}$ $\qquad$ $\mathcal{E}\xi = \{f(g(y),z)\}$

<u>НОУ</u>: ξ е униф за $\mathcal{E}$ и за всеки униф η за $\mathcal{E}$, то същ. субст σ, т.ч. $\sigma.\xi = \eta$

Правилата на играта.

① Резолвента

Нека D_i и D_j са дизюнкти като $D_i = \{L\} \cup D_i'$, $D_j = \{\neg L'\} \cup D_j'$. БОО D_i и D_j за нямат общи пром. (с преименуващи субст.)

Търсим униф. σ: $L\sigma = L'\sigma$ $\{L, L'\}\sigma$

$$Res_L(D_i, D_j) = (D_i\sigma \setminus \{L\sigma\}) \cup (D_j\sigma \setminus \{\neg L'\sigma\}) =$$
$$= D_i'\sigma \cup D_j'\sigma.$$

② Колапс

Нека D_i е дизюнкт, $D_i = \{L_1, \dots, L_k\} \cup D_i'$.

Търсим униф. σ за $\{L_1, \dots, L_k\}$ т.е. $|\{L_1, \dots, L_k\}\sigma| = 1$, $L_1\sigma = L_2\sigma = \dots = L_k\sigma$.

$$\text{Collapse}(D_i) = \{L_1\sigma\} \cup D_i'\sigma$$

$D_1 \lesssim \{ s(f(x_1)), \neg r(x_1) \}$

$D_2 \lesssim \{ \neg p(f(x_2), x_2), \neg r(x_2) \}$

$D_3 \lesssim \{ \neg s(x_3), \neg q(x_3, a) \}$

$D_4 \lesssim \{ r(g(x_4)) \}$

$D_5 \lesssim \{ p(z_5, g(x_5)), q(z_5, x_5) \}$

① Разгл D_4 и D_1

$$Res(D_4, D_1\{x_1/g(x_4)\}) = \{ s(f(g(x_4))) \} = D_6$$

② Разгл. D_4, D_2

$$Res(D_4, D_2\{x_2/g(x_4)\}) = \{ \neg p(f(g(x_4)), g(x_4)) \} = D_7$$

③ Разгл. D_7 и D_5

$$Res(D_5\{z_5/f(g(x_4)), x_5/x_4\}, D_7) = \{ q(f(g(x_4)), x_4) \} = D_8$$

④ Разгл. D_8 и D_3

$$Res(D_8\{x_4/a\}, D_3\{x_3/f(g(a))\}) = \{ \neg s(f(g(a))) \} = D_9$$

$$\left| \begin{array}{l} x_4 = a \\ x_3 = f(g(x_4)) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_4 = a \\ x_3 = f(g(a)) \end{array} \right.$$

⑤ Разгл. D_3 и D_6 $\quad Res(D_6\{x_4/a\}, D_3) = \blacksquare$