Нека $\mathcal{L}(p)$ е език за ПС от I-ви ред без ф.р. с двум. предик. с-л p.

Нека $\mathcal{U} = \langle U, p^{\mathcal{U}} \rangle$ е стр. за $\mathcal{L}(p)$ с универсум м-вото U от всички точки и всички затворени кръгове в една фиксирана евклидова равнина π и за произв. $a, b \in U$:

$\langle a, b \rangle \in p^{\mathcal{U}} \Leftrightarrow$ a е точка от π, b е затворен кръг в π и $a \in b$.

Да се док., че следните м-ва са определими в $\mathcal{U}$:

(i) $\{\langle b_1, b_2 \rangle \mid b_1$ и b_2 са затворени кръгове от π и $b_1 \subseteq b_2\}$

(ii) $\{\langle b_1, b_2 \rangle \mid b_1$ и b_2 са затворени кръгове от π и контурите им се допират$\}$

(iii) $\{\langle a, b \rangle \mid a$ е точка от контура на затворения кръг $b\}$

(iv) $\{\langle a, a_1, a_2 \rangle \mid a, a_1, a_2$ са точки от π, $a_1 \neq a_2$ и a лежи на правата $a_1 a_2\}$,

(v) $\{\langle a_1, a_2, b \rangle \mid$ отсечката $a_1 a_2$ е диаметър на затворения кръг $b\}$.

$\langle a, b\rangle \in p^{\mathcal{U}} \iff$ a е точка от π, b е затворен кръг в π и $a \in b$.

Да се док., че следните м-ва са определими в $\mathcal{U}$:

(i) $\{\langle b_1, b_2\rangle \mid$ b_1 и b_2 са затворени кръгове от π и $b_1 \subseteq b_2\}$

$\varphi_{\cdot}(x) \leftrightharpoons \exists y\, p(x, y)$.

$\varphi_{\circ}(x) \leftrightharpoons \exists y\, p(y, x)$.

(i) $\varphi_{\subseteq}(x, y) \leftrightharpoons \forall z(p(z, x) \Rightarrow p(z, y))$.

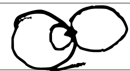
грешно

$\varphi_{\cdot}(z) \,\&\, p(z, x) \Rightarrow$

$\varphi_{\subseteq}(x, y) \leftrightharpoons \forall z(\varphi_{\cdot}(z) \Rightarrow (p(z, x) \Rightarrow p(z, y))) \,\&\, \varphi_{\circ}(x) \,\&\, \varphi_{\circ}(y)$.

(ii) $\{\langle b_1, b_2\rangle \mid b_1$ и b_2 са затворени кръгове от и контурите им се допират $\}$

(ii) $\varphi_{OO}(x,y)$



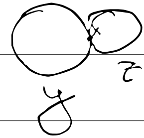
$$\varphi_{OO}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{O}(x) \,\&\, \varphi_{O}(y) \,\&\, \neg\exists z\big(\varphi_{O}(z) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(z,x) \,\&\, \varphi_{\subseteq}(z,y)\big) \,\&\, \exists z\big(\varphi_{O}(z) \,\&\, p(z,x) \,\&\, p(z,y)\big).$$

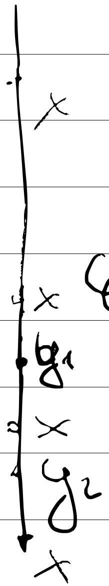
$$\varphi_{\odot}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{\subseteq}(x,y) \,\&\, \exists z\big(\varphi_{OO}(x,z) \,\&\, \varphi_{OO}(y,z)\big).$$

$$\varphi_{(ii)}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{OO}(x,y) \vee \varphi_{\odot}(x,y) \vee \varphi_{\odot}(y,x).$$

(iii) $\{\langle a, b\rangle \mid a$ е точка от контура на затворения кръг $b\}$

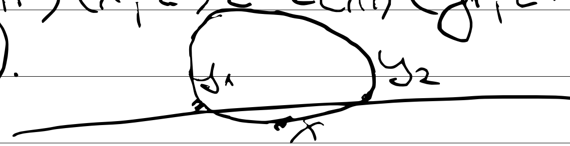
$$\varphi_{(iii)}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{.}(x) \,\&\, \varphi_{o}(y) \,\&\, \exists z(\varphi_{oo}(y,z) \,\&\, p(x,y) \,\&\, p(x,z)).$$





(iv) $\{\langle a, a_1, a_2\rangle \mid a, a_1, a_2$ са точки, $a_1 \neq a_2$ и a лежи на правата $a_1 a_2\}$

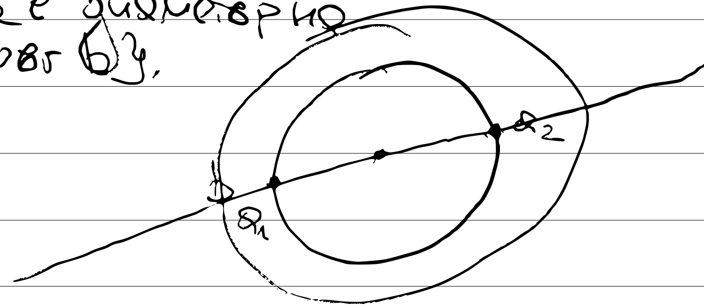
$$\varphi_{(iv)}(x,y_1,y_2) \leftrightharpoons \varphi_{.}(x) \,\&\, \varphi_{.}(y_1) \,\&\, \varphi_{.}(y_2) \,\&\, \varphi_{.\neq.}(y_1,y_2) \,\&\, (\varphi_{.=.}(x,y_1) \vee \varphi_{.=.}(x,y_2) \vee \neg\exists z(\varphi_{o}(z) \,\&\, \varphi_{(iii)}(x,z) \,\&\, \varphi_{(iii)}(y_1,z) \,\&\, \varphi_{(iii)}(y_2,z))).$$



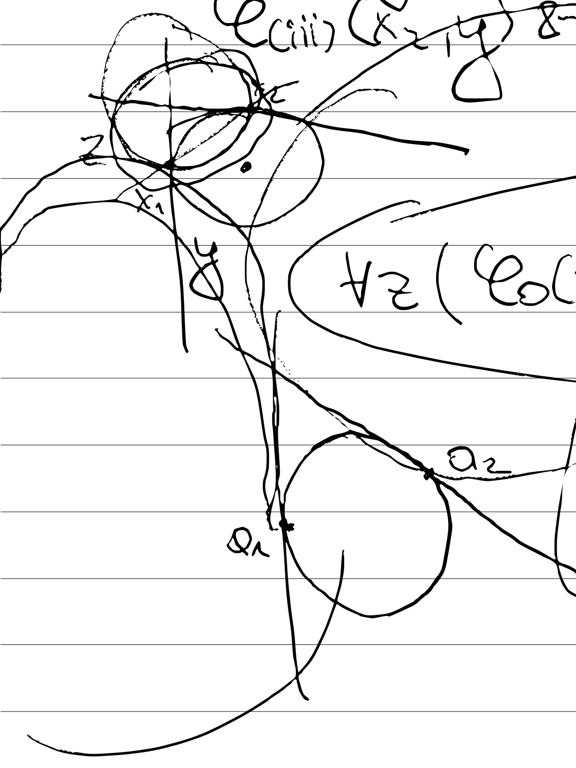
$$\varphi_{.=.}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{.}(x) \,\&\, \varphi_{.}(y) \,\&\, \neg\varphi_{.\neq.}(x,y).$$

$$\varphi_{.\neq.}(x,y) \leftrightharpoons \varphi_{.}(x) \,\&\, \varphi_{.}(y) \,\&\, \exists z(\varphi_{o}(z) \,\&\, p(x,z) \,\&\, \neg p(y,z)).$$

(v) $\{\langle a_1, a_2, b\rangle \mid$ отсечката a_1a_2 е диаметър на затворения кръг $b\}$.



$$\varphi_{(v)}(x_1, x_2, y) \leftrightharpoons \varphi_{(iii)}(x_1, y) \ \& \ \varphi_{(iii)}(x_2, y) \ \&$$



$$\forall z(\varphi_O(z) \Rightarrow p(x_1, z) \ \& \ p(x_2, z) \Rightarrow \varphi_C(y, z))$$

nice try

$$\neg\exists z_1 \exists z_2 (\varphi_{OO}(y, z_1) \ \& \ \varphi_{OO}(y, z_2) \ \& \ p(x_1, z_1) \ \& \ p(x_2, z_2) \ \& \ \exists t(p(t, z_1) \ \& \ p(t, z_2))).$$

Задача за изпълнимост на м-во от ф-ли

def | Нека Γ е м-во от ф-ли за език $\mathcal{L}$.

i) **Γ е вярно в $\mathcal{A}$ при оц. v от $\mathcal{A}$** $\leftrightarrow (\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models_v \varphi]$.

Бел: $\mathcal{A} \models_v \Gamma$

ii) **$\mathcal{A}$ е модел за Γ**, ако $(\forall \varphi \in \Gamma) \underset{(\forall v \text{ от } \mathcal{A})}{\wedge} [\mathcal{A} \models_v \varphi]$.

Бел: $\mathcal{A} \models \Gamma$

iii) **Γ е изпълнимо**, ако Γ има модел.

Задачата за намиране на модел на м-во от ф-ли е аналогична на задачата дали съществува програма отговаряща на дадена формална спецификация.

(3 зад) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \neg p(x,x)$. // иррефлексивна

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y p(x,y)$. // $\overset{\circlearrowleft}{x}$ $x \to y$ сериялност
неясно.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$.

// транзитивност. $x \to y \to z$

* $\exists y p(x,y)$ – не е затворена ф-ла.
* Затворените ф-ли говорят за с-ва на структурата.

$\mathcal{A} = \langle A, p^{\mathcal{A}} \rangle$

$A = ?$

$p^{\mathcal{A}} = ?$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ като $p^{\mathcal{A}} = <_{\mathbb{N}}$

$\mathbb{Q}$ ...

Допускаме, че $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ има краен модел.
Нека $\mathcal{A}_0 = \langle A_0, p^{\mathcal{A}_0} \rangle$ е такъв краен модел за $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $n \geq 1$ $A_0 \neq \emptyset$.
φ_1 – иррефл; φ_2 – сериалност надясно; φ_3 – транзит.

$b_1 \to b_2 \to b_3 \to b_4 \to \ldots b_n \to b_{n+1}$

Pigeonhole principle: има i, j! $1 \leq i < j \leq n+1$, т.ч. $b_i = b_j$

От φ_3 значи има директен път от b_i до b_j

$b_i \to \ldots \to b_j$

Стигаме до $\mathcal{E}$ φ_1.

Тоест всички модели на φ_1, φ_2 и φ_3 са с безкраен универсум.

(3.23) Да се докаже, че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall y \exists x\, p(y, x, y)$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \neg p(y, y, y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \neg \forall y\, p(x, y, x)$.

(зад) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (q(x,y) \,\&\, q(y,z) \Rightarrow q(x,z))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y\, q(x,y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \neg q(x,x)$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(x,z) \,\&\, q(z,y)))$.

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(z,y) \,\&\, \neg(z \doteq x) \,\&\, \neg q(x,z) \,\&\, \neg q(z,x)))$.

(322) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(\neg p(f(x),x) \,\&\, \exists y\, p(f(x),y))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(x,y) \Rightarrow \exists z(p(x,z) \,\&\, \neg p(f(z),f(z)) \,\&\, p(z,y)))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \neg\forall x \forall y \forall z(p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow \neg p(f(x),z))$

(302) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow q(y,x))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y (p(x,y) \Leftrightarrow q(x,y))$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \exists y (\neg q(x,y) \& \neg q(y,x))$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists x \exists y \neg (x \doteq y)$

(3Д3) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \& p(x,z) \& \neg(y \doteq z))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \neg p(a,b)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z \forall w (\neg(w \doteq x) \& \neg(y \doteq w) \Rightarrow w \doteq z)$

a, b - константи, p - двуместен предик. симв.

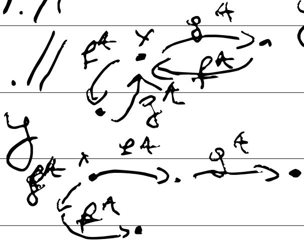
(30?) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(\neg(x \doteq f(x)) \,\&\, \neg(x \doteq g(x)))$. // за вс. т. $f^A(x) \neq Id_A(x)$, $g^A(x) \neq Id_A(x)$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x(x \doteq f(g(x)) \,\&\, x \doteq g(f(x)))$. //

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x(f(x) \doteq g(x))$. //

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \neg(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$. //



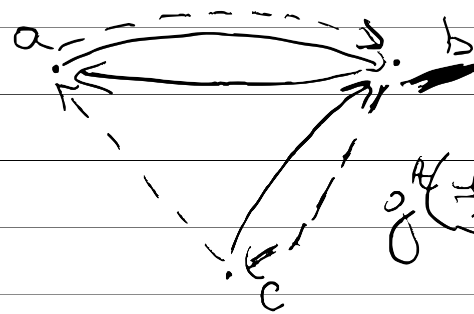
$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall y \exists x(y \doteq g(x))$. // g^A е сюрекция.

$f^A \neq g^A$

φ_1 :

Ставим за $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$

$f^A \circ g^A \neq g^A \circ f^A$



$f^A(a) = b$

$f^A(b) = a$

$f^A(c) = b$

$g^A(f^A(c)) = c$

$f^A(g^A(c)) = b$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$

$$g^{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} x-1, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

$$f^{\mathcal{A}}(x) := x+1$$

φ_5, φ_1 $\sim, \sim$, $\quad g^{\mathcal{A}}(0) = 1 = f^{\mathcal{A}}(0)$ $\quad \varphi_3$ ✓

$$f^{\mathcal{A}}(\underbrace{g^{\mathcal{A}}(2)}_{1}) = 2 = g^{\mathcal{A}}(\underbrace{f^{\mathcal{A}}(2)}_{3}) = 2 \qquad \varphi_2 ✓$$

φ_4: $g^{\mathcal{A}}(\underbrace{f^{\mathcal{A}}(0)}_{1}) = 0$

$$f^{\mathcal{A}}(\underbrace{g^{\mathcal{A}}(0)}_{1}) = 2$$

(302) Невъзможни ф-лите:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y (\neg p(x,x) \,\&\, p(x,y))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall z (\exists y (p(x,y) \,\&\, p(y,z)) \Leftrightarrow p(x,z))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x) \,\&\, \neg(p(x,z) \Leftrightarrow p(y,z)))$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow p(x, f(x,y)) \,\&\, p(f(y,x), y))$.

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow p(x, f(x,y)) \vee p(f(y,x), y))$.

(322) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \Leftrightarrow p(z,y)) \Leftrightarrow \exists z (q(x,z) \Leftrightarrow q(z,y)))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y\, p(x,y)\ \&\ \exists x \forall y\, q(x,y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg q(y,x))\ \&\ \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \neg \forall x \forall y \forall z (p(x,y)\ \&\ p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$.

303) Нека p е едноместен П.С., а r е двуместен П.С. Дадени са следните формули:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \& r(y,z) \Rightarrow r(x,z))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x (p(x) \Rightarrow \exists y (r(x,y) \& \forall z (r(x,z) \Rightarrow \neg r(z,y))))$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x (\neg p(x) \Rightarrow \exists y (r(y,x) \& \neg \exists z (r(y,z) \& r(z,x))))$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x) \& \neg p(y) \Rightarrow r(x,y))$.

$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists x p(x) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$.

$\Gamma_0 \leftrightharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $\Gamma_1 \leftrightharpoons \Gamma_0 \cup \{\varphi_4\}$, $\Gamma_2 \leftrightharpoons \Gamma_1 \cup \{\varphi_5\}$,

$\Gamma \leftrightharpoons \Gamma_1 \cup \{\neg \varphi_5\}$.

Да се докаже кои от м-вата $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са изпълними и кои не са изпълними.