Зад | $\mathcal{L} = \langle p \rangle$, $\qquad \Sigma = \{a, b\}$

$\mathcal{A} = \langle \{a,b\}^*, p^{\mathcal{A}} \rangle$

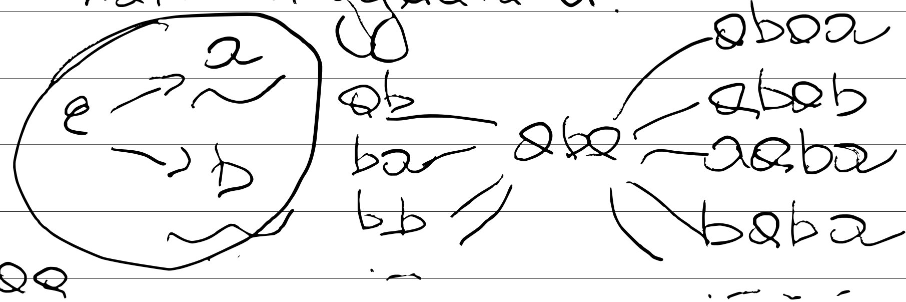
$p^{\mathcal{A}}(u,v) \Leftrightarrow \big||u| - |v|\big| = 1$

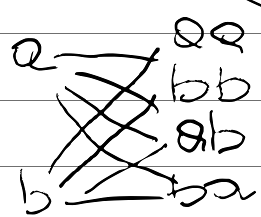
a) $\{\varepsilon\}$

b) $\{w \mid |w| = 2\}$

c) Да, че $\{b\}$ е неопределимо.

$|u|$ – дължината на думата u.





$a \mapsto b$

$b \mapsto a$

Зад 1 Нека $\Sigma=\{a,b\}$ и $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Сигнр $\mathcal{L}=\langle cat, sub\rangle$,
за $cat \in Func$, $sub \in Pred$, $\#cat=2$, $\#sub=2$.

$\mathcal{A}=\langle \mathcal{P}(\Sigma^*), cat^{\mathcal{A}}, sub^{\mathcal{A}}\rangle$

$cat^{\mathcal{A}}(L_1,L_2) \leftrightharpoons L_1 \circ L_2$

$sub^{\mathcal{A}}(L_1,L_2) \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$

Опр: $\{\emptyset\}$, $\{\Sigma^*\}$, $\{\{\varepsilon\}\}$

single $=\{\{w\} \mid w \in \Sigma^*\}$ всички едноел. езици

union $=\{\langle L_1,L_2,L_3\rangle \mid L_3=L_1\cup L_2\}$

star $=\{\langle L,L^*\rangle \mid L \subseteq \Sigma^*\}$

Никой непразен език от Σ^* не е

определим т.е. $w \in \Sigma^*$, то $\{\{w\}\}$ е неопр.

Да, че $h \in Aut(\mathcal{A})$, то h запазва

регулярните езици.

$cat^{\mathcal{A}}(L_1 L_2) \leftrightharpoons L_1 \circ L_2$ $\qquad$ $sub^{-}(L_1, L_2) \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2$

Опр: $\{\emptyset\}$, $\{\Sigma^*\}$, $\{\{\varepsilon\}\}$

$single = \{\{w\} \mid w \in \Sigma^*\}$ всички единични езици.

$$L_1 \circ L_2 \leftrightharpoons \{w \mid (\exists u \in L_1)(\exists v \in L_2)[w = uv]\}$$

$\varphi_{\emptyset}(x) \leftrightharpoons \forall y\, sub(x, y)$. $\qquad$ $\varphi_{=}(x, y) \leftrightharpoons sub(x, y) \,\&\, sub(y, x)$.

$\varphi_{\Sigma^*}(x) \leftrightharpoons \forall y\, sub(y, x)$.

$\varphi_{\{\varepsilon\}}(x) \leftrightharpoons \forall y(sub(cat(x, y), y) \,\&\, sub(y, cat(x, y)))$.

$$\{\varepsilon\} \circ L = \{w \mid (\exists u \in \{\varepsilon\})(\exists v \in L)[w = \varepsilon v = v]\} = L$$

$\varphi_{single}(x) \leftrightharpoons \neg \varphi_{\emptyset}(x) \,\&\, \forall y(sub(y, x) \Rightarrow \varphi_{=}(y, x) \vee \varphi_{\emptyset}(y))$.

$\{w\} \supseteq \emptyset$

$\{w\} \supseteq \{w\}$

$\varphi_{=}(cat(x, y), x)$.

$union = \{ \langle L_1, L_2, L_3 \rangle \mid L_3 = L_1 \cup L_2 \}$

$star = \{ \langle L, L^* \rangle \mid L \subseteq \Sigma^* \}$

$\varphi_{\cup}(x, y, z) \leftrightharpoons sub(x, z) \,\&\, sub(y, z) \,\&\, \forall t(sub(x, t) \,\&\, sub(y, t) \Rightarrow sub(z, t))$

$x \subseteq z$

$y \subseteq z$

$\forall t(x \subseteq t \,\&\, y \subseteq t \Rightarrow z \subseteq t)$.

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots$$

$$L^n = L \circ \ldots \circ L$$

n пъти го конкатенирано

$L^+ \circ L = L^+ \subseteq L^*$

$L^0 = \{\varepsilon\}$

$L^{n+1} = L^n \circ L = L \circ L^n$

$\{\varepsilon\} \subseteq X$

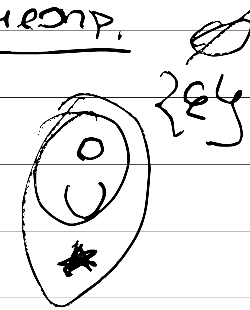
$X \circ L \subseteq X$

$\forall t(\{\varepsilon\} \subseteq t \,\&\, t \circ L \subseteq t \Rightarrow X \subseteq t)$

$L^+ \cup \{\varepsilon\} = L^*$

$\varphi_{star}(X, S) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{\{\varepsilon\}}(y) \,\&\, sub(y, S) \,\&\, sub(cat(x, S), S)$
$\,\&\, \forall t(sub(y, t) \,\&\, sub(cat(\cancel{x}, t), t) \Rightarrow sub(S, t)))$.

- Никоя непразна дума от Σ^* не е определима т.е. $w \in \Sigma^*$, то $\{\{w\}\}$ е неопр.



- Да, че $h \in Aut(A)$, то h запазва регулярните езици.

конкатенация, подезици

01 10

$h : \Sigma \to \Sigma$

$h(0) = 1,\ h(1) = 0$ биекция

$H : \Sigma^* \to \Sigma^*,\ w \in \Sigma^*$

$H(w) \leftrightharpoons h(a_1) \cdot h(a_2) \ldots h(a_n)$ биекция

$w = a_1 \ldots a_n$

$\mathcal{H} : P(\Sigma^*) \to P(\Sigma^*)$ $\qquad \mathcal{H}(\mathcal{H}(L)) = L$

$\mathcal{H}(L) \leftrightharpoons \{H(w) \mid w \in L\}$.

$\langle L_1, L_2 \rangle \in sub^A \Leftrightarrow \langle \mathcal{H}(L_1), \mathcal{H}(L_2) \rangle \in sub^A$

$\mathcal{H}(cat^A(L_1, L_2)) = cat^A(\mathcal{H}(L_1), \mathcal{H}(L_2))$.

Зад. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, P^{\mathcal{A}} \rangle : a, b, c \in \mathbb{Q}$

$\langle a, b, c \rangle \in P^{\mathcal{A}} \iff a = b^3 \cdot c$

Да се док., че в $\mathcal{A}$ са опр. м-вата:

$\{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{Q}\}, \{\langle x, y \rangle \mid x \cdot y = 1\}$,

$\{\langle x, y, z \rangle \mid x = y \cdot z\}$.

Да се док., че в $\mathcal{A}$ м-вото $\{3\}$ не е опр.

Задача за изпълнимост на м-во от ф-ли

def/ Нека Γ е м-во от ф-ли за език $\mathcal{L}$.

i) Γ е вярно в $\mathcal{A}$ при опр. v от $\mathcal{A}$ $\leftrightarrow$ $(\forall \varphi \in \Gamma)[\mathcal{A} \models_v \varphi]$.

Бел: $\mathcal{A} \models_v \Gamma$

ii) $\mathcal{A}$ е модел за Γ, ако $(\forall \varphi \in \Gamma) \land [\mathcal{A} \models_v \varphi]$.

$(\forall v$ от $\mathcal{A})$

Бел: $\mathcal{A} \models \Gamma$

iii) Γ е изпълнимо, ако Γ има модел.

Задачата за намиране на модел на м-во от ф-ли е аналогична на задачата дали съществува програма отговаряща на дадена формална спецификация.

(зад) Да се док, че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x\, \neg p(x,x)$. // иррефл.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y\, p(x,y)$. // $d_0(x) > 0$ или $x \to y$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z\, (p(x,y) \,\&\, p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$. // транзитивност

$\cancel{\exists y\, p(x,y)}$ не е затворена ф-ла

Да намерим стр. $\mathcal{A}$, т.ч. $\mathcal{A} \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ са верни в $\mathcal{A}$.

c - константа, $c^{\mathcal{A}} \in A$

// сериалност наясно

$\mathcal{A} = \langle A, p^{\mathcal{A}} \rangle$ т.ч. $A = ?$

$\mathcal{A} \models \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ $\quad p^{\mathcal{A}} = ?$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, p^{\mathcal{A}} \rangle$ за $p^{\mathcal{A}} \leftrightharpoons <_{\mathbb{N}}$

Да допуснем, че има краен модел и нека A_0 е свидетел. Тогава има n ест. ч., т.ч. $|A_0| = n$.

$A_0 \neq \emptyset$, т.ч. $n > 0$.

$$a_0 \to a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{n-1} \to a_n$$

$n+1$ точки засега

По PH principle: има $0 \le i < j \le n$, т.ч. $a_i = a_j$.

φ_1 – иррефл.; φ_2 – сериалност надясно; φ_3 – транзит.

$$a_j = a_i \to a_{i+1} \to \dots \to a_j$$

по φ_3

$\uparrow$ по φ_3 ↯ с φ_1.

Допускането ни води до против., т.е. $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ няма краен модел.

$\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \varphi_3$

$\uparrow$ форсира универсума да е безкраен.

(302) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall y \exists x\, p(y, x, y)$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists y \neg p(y, y, y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \neg \forall y\, p(x, y, x)$.

Зад Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (q(x,y) \& q(y,z) \Rightarrow q(x,z))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y\, q(x,y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \neg q(x,x)$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(x,z) \& q(z,y)))$.

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \exists z (q(z,y) \& \neg(z \doteq x) \& \neg q(x,z) \& q(z,x)))$.

(3𝟐2) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(\neg p(f(x),x) \& \exists y\, p(f(x),y))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall y(p(x,y) \Rightarrow \exists z(p(x,z) \& \neg p(f(z),f(z)) \& p(z,y)))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \neg \forall x \forall y \forall z(p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow \neg p(f(x),z))$

(322) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Leftrightarrow q(y,x))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \exists y (p(x,y) \Leftrightarrow q(x,y))$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \& p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \exists y (\neg q(x,y) \& \neg q(y,x))$

$\varphi_5 \leftrightharpoons \exists x \exists y \neg (x \doteq y)$

(302) Да се док., че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y \exists z (p(x,y) \& p(x,z) \& \neg(y \doteq z))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \neg p(a,b)$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z \forall w (\neg(w \doteq x) \& \neg(y \doteq w) \Rightarrow w \doteq z)$

a, b - константи, p - двуместен предик. символ.

(302) Да се докаже, че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(\neg(x \doteq f(x)) \,\&\, \neg(x \doteq g(x)))$. // f^A и g^A са ирефлексивни

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x(x \doteq f(g(x)) \,\&\, x \doteq g(f(x)))$. //

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x(f(x) \doteq g(x))$. // има т.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \neg(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$. // има точка, т.ч. f^A и g^A не са обратни

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall y \exists x(y \doteq g(x))$. // g^A е сюрекция една друга в нея.

$\forall x(\varphi \,\&\, \psi) \models \forall x \varphi \,\&\, \forall x \psi$

$\xrightarrow{f^A}$ $\xrightarrow{g^A}$

$\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f^A, g^A \rangle$ $\quad g^A(x) \leftrightharpoons \begin{cases} x-1, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

$f^A(x) \leftrightharpoons x+1$

$\varphi_2 : g^A(\overbrace{f^A(1)}^{2}) = 1 = f^A(\underbrace{g^A(1)}_{0})$

$\varphi_4 : f^A(\underbrace{g^A(0)}_{1}) = 2 \neq g^A(\underbrace{f^A(0)}_{1}) = 0$

$\varphi_3 : g^A(0) = f^A(0) = 1$

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x(\neg(x \doteq f(x)) \,\&\, \neg(x \doteq g(x)))$. $\qquad \mathcal{A} = \langle \{a, b, c\}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x(x \doteq f(g(x)) \,\&\, x \doteq g(f(x)))$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x(f(x) \doteq g(x))$. // няма т.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \exists x \neg(f(g(x)) \doteq g(f(x)))$.

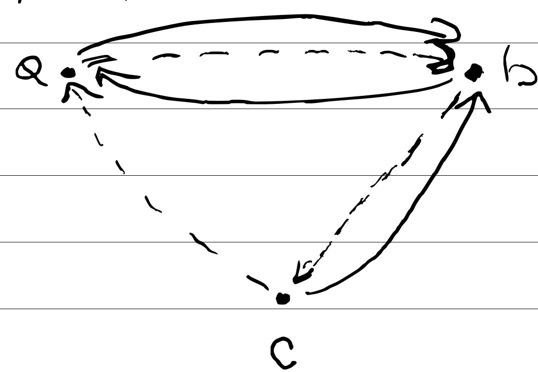
$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall y \exists x(y \doteq g(x))$. //

$f^{\mathcal{A}} \longrightarrow$

$g^{\mathcal{A}} - - - \to$

$\mathrm{Dom}(f^{\mathcal{A}}) = \mathrm{Dom}(g^{\mathcal{A}}) = A$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_5$ са верни в този стр., но не и φ_4



$f^{\mathcal{A}}(a) \leftrightharpoons b \quad g^{\mathcal{A}}(a) \leftrightharpoons b$

$f^{\mathcal{A}}(b) \leftrightharpoons a \quad g^{\mathcal{A}}(b) \leftrightharpoons c$

$f^{\mathcal{A}}(c) \leftrightharpoons b \quad g^{\mathcal{A}}(c) \leftrightharpoons a$

φ_1

φ_2

φ_3

φ_5

φ_4: $\underbrace{f^{\mathcal{A}}(\underbrace{g^{\mathcal{A}}(c)}_{a})}_{b} \neq \overbrace{g^{\mathcal{A}}(\underbrace{f^{\mathcal{A}}(c)}_{b})}$

3зад. Нека имаме ф-лите:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \exists y (\neg p(x,x) \,\&\, p(x,y))$

$\varphi_2 \leftrightharpoons \forall x \forall z (\exists y (p(x,y) \,\&\, p(y,z)) \Longleftrightarrow p(x,z))$

$\varphi_3 \leftrightharpoons \exists x \exists y \exists z (\neg p(x,y) \,\&\, \neg p(y,x) \,\&\, \neg (p(x,z) \Longleftrightarrow p(y,z)))$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Longleftrightarrow p(x, f(x,y)) \,\&\, p(f(y,x), y))$.

$\varphi_5 \leftrightharpoons \forall x \forall y (p(x,y) \Longleftrightarrow p(x, f(x,y)) \vee p(f(y,x), y))$.

(302) Да се докаже, че следния набор от затворени ф-ли е изпълним:

$\varphi_1 \leftrightharpoons \forall x \forall y (\exists z (p(x,z) \Rightarrow p(z,y)) \Leftrightarrow \exists z (q(x,z) \Rightarrow q(z,y)))$.

$\varphi_2 \leftrightharpoons \exists x \exists y\, p(x,y) \;\&\; \exists x \forall y\, q(x,y)$.

$\varphi_3 \leftrightharpoons \forall x \forall y (q(x,y) \Rightarrow \neg q(y,x)) \;\&\; \forall x \forall y (p(x,y) \Rightarrow \neg p(y,x))$.

$\varphi_4 \leftrightharpoons \neg \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \;\&\; p(y,z) \Rightarrow p(x,z))$.

Зад) Нека p е едноместен П.С., а r е двуместен П.С. Дадени са следните формули:

$\varphi_1 \rightleftharpoons \forall x \forall y \forall z (r(x,y) \,\&\, r(y,z) \Rightarrow r(x,z))$.

$\varphi_2 \rightleftharpoons \forall x (p(x) \Rightarrow \exists y (r(x,y) \,\&\, \forall z (r(x,z) \Rightarrow \neg r(z,y))))$.

$\varphi_3 \rightleftharpoons \forall x (\neg p(x) \Rightarrow \exists y (r(y,x) \,\&\, \neg \exists z (r(y,z) \,\&\, r(z,x))))$.

$\varphi_4 \rightleftharpoons \forall x \forall y (p(x) \,\&\, \neg p(y) \Rightarrow r(x,y))$.

$\varphi_5 \rightleftharpoons \exists x p(x) \Rightarrow \exists x \neg p(x)$.

$\Gamma_0 \rightleftharpoons \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, $\Gamma_1 \rightleftharpoons \Gamma_0 \cup \{\varphi_4\}$, $\Gamma_2 \rightleftharpoons \Gamma_1 \cup \{\varphi_5\}$,

$\Gamma \rightleftharpoons \Gamma_1 \cup \{\neg \varphi_5\}$.

Да се докаже кои от м-вата $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ са изпълними и кои не са изпълними.