Théorème fondamental de l'analyse

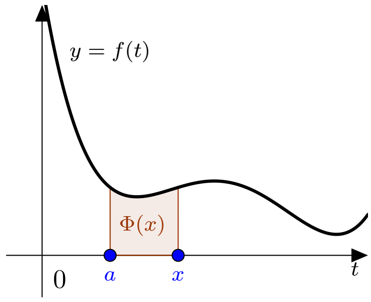
Note : Ce résumé est écrit par T. Zwissig. Il est ce qu'attend cet enseignant lors de l'oral de maturité. Ce résumé n'est pas une référence pour les autres enseignants, leurs attentes sont sans doute différentes.

Théorème fondamental de l'analyse Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.

Si f est continue sur $[a;b]$

Alors la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

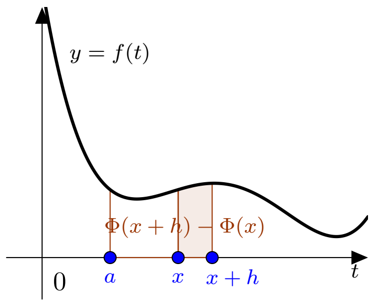
Illustration : La fonction qui calcule l'aire sous la courbe du graphe de f entre a et x pour un x donné est une primitive de f.



Démonstration : Il faut montrer que $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est dérivable et que $\Phi'(x) = f(x)$.

Pour établir que Φ est dérivable on va calculer la limite $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$.

Commençons par étudier la différence $\Phi(x+h)-\Phi(x)$:



$$\begin{aligned}
\Phi(x+h)-\Phi(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt\right) - \int_a^x f(t)dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)dt
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f est continue, d'après le théorème de la moyenne, il existe un $c \in [x; x+h]$ pour lequel

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot ((x+h) - x) = f(c) \cdot h\,.$$

Revenons à la limite, nous avons donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c)$$

Mais lorsque h tend vers 0 l'intervalle $[x; x+h]$, qui contient le point c, tend vers $[x; x] = \{x\}$:

$$\lim_{h \to 0} f(c) = \lim_{c \to x} f(c) = f(x)$$

par continuité.

On a établit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = f(x)$ qui est un nombre, donc la fonction Φ est dérivable en x et sa dérivée en x est précisément $\Phi'(x) = f(x)$. Comme ce résultat est vrai pour tout x dans l'intervalle $[a; b]$ le théorème est démontré.
$\square$

Remarques :

1. Ce théorème affirme que toute fonction continue sur un intervalle fermé possède une primitive.
2. Ce théorème est un théorème d'existence ; il nous assure que toute fonction continue possède une primitive, mais il ne nous dit rien sur la façon de trouver cette primitive.