Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences Aïn chock
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire 2020-2021
Filières : SMIA S1
Module : Algèbre 1

Correction TD: Les Applications

Exercice 1 *On considère l' application suivante.*

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin(2x) \; - b\sin(x) + c$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c *pour que* f *soit l'application nulle*

Réponse: *Montrons que* $f \equiv 0 \Longleftrightarrow a = b = c = 0$

i) *Montrons par l'absurde que* $a = b = c = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$

En effet : Si $a = b = c = 0$ *alors* $\forall x \in \mathbb{R}$ *on aura* $f(x) = 0$ *et par suite* $f \equiv 0$

ii) *Montrons la réciproque càd* $f \equiv 0 \Longrightarrow a = b = c = 0$

En effet Si $f \equiv 0$ *donc* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ *d'où* $\forall x \in \mathbb{R}$, $a\sin(2x) \; - b\sin(x) + c = 0$

1) *Pour* $x = 0$ *on a* $f(0) = 0$ *donc* $c = 0$.

2) *Pour* $x = \frac{\pi}{2}$ *on a* $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ *donc* $-b + c = 0$

3) *Pour* $x = \frac{\pi}{4}$ *on a* $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ *donc* $a - \frac{\sqrt{2}}{2}b + c = 0$

De 1), 2) *et* 3) *on a*

$$\begin{cases} c = 0 \\ -b + c = 0 \\ a - \frac{\sqrt{2}}{2}b + c = 0 \end{cases}$$

On conclut que $a = b = c = 0$.

Exercice 2 *Soit* E *un ensemble. Pour une partie* X *de* E, *on note* φ_X *la fonction caractéristique de* X

Soit A, B *des parties de* E

1) *On a* $\varphi_A(x) = 1$ *si* $x \in A$ *et* $\varphi_A(x) = 0$ *sinon*

i) *Montrons que* $A = B \Longleftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

Réponse : *Il est claire que si* $A = B$ *alors* $\varphi_A = \varphi_B$.

Réciproquement supposons que $\varphi_A = \varphi_B$ *et montrons que* $A = B$

Soit $x \in A$ *donc* $\varphi_A(x) = 1$ *comme* $\varphi_A = \varphi_B$ *d'où* $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 1$ *ainsi* $x \in B$ *et par suite* $A \subset B$.

De même on montre que $B \subset A$ *et on conclut que* $A = B$.

ii) *Montrons que* $\forall x \in E, \varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

Réponse : *On sait que* $\mathcal{C}_E^A = E \setminus A = \overline{A}$ *et* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1$ *si* $x \in \mathcal{C}_E^A$ *et* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 0$ *sinon.*

Soit $x \in E$ *deux cas se présentent*

– *Si* $x \in A$ *donc* $\varphi_A(x) = 1$ *et* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 0$ *car* $x \notin \mathcal{C}_E^A = \overline{A}$ *donc* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

– *Si* $x \notin A$ *donc* $\varphi_A(x) = 0$ *et* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1$ *car* $x \in \mathcal{C}_E^A = \overline{A}$ *donc* $\varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

On conclut que $\forall x \in E, \varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$.

iii) *Montrons que* $\forall x \in E, \varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

Réponse : *Deux cas se présentent*

1 cas) *Si* $x \in A \cap B$ *alors* $(x \in A$ *et* $x \in B)$ *de plus* $\varphi_{A\cap B}(x) = 1 = 1 \times 1 = \varphi_A(x) \times \varphi_B(x)$.

2 cas) *Si* $x \notin A \cap B$ *alors* $(x \notin A$ *ou* $x \notin B)$ *donc* $(\varphi_A(x) = 0$ *ou* $\varphi_A(x) = 0\ )$ *d'où* $\varphi_A(x) \times \varphi_B(x) = 0$ *et par suite* $\varphi_{A\cap B}(x) = 0 = \varphi_A(x) \times \varphi_B(x)$.

iv) *Montrons que* $\forall x \in E,\ \varphi_A(x)\varphi_A(x) = \varphi_A(x)$

Réponse : *Soit* $x \in E$, *en utilisant le fait que* $\varphi_{A\cap A}(x) = \varphi_A(x)\varphi_A(x)$ *et* $A \cap A = A$ *on aura* $\varphi_A(x) = \varphi_A(x)\varphi_A(x)$.

2) *En déduire que*

i) $\forall x \in E,\ \varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

Réponse : *Soit* $x \in E$, *on sait que* $\varphi_{X\cap Y}(x) = \varphi_X(x) \times \varphi_Y(x)$ *donc*

$$\begin{aligned}
\varphi_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x) &= \varphi_{\overline{A}}(x)\varphi_{\overline{B}}(x) \\
\varphi_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x) &= (1 - \varphi_A(x))\,(1 - \varphi_B(x)) \ \text{ car } \varphi_{\overline{A}}(x) = \varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x) \\
\varphi_{\overline{A\cup B}}(x) &= (1 - \varphi_A(x))\,(1 - \varphi_B(x)) \ \text{ car } \overline{A} \cap \overline{B} = \ \overline{A \cup B} \\
\varphi_{\overline{A\cup B}}(x) &= 1 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) + \varphi_A(x)\varphi_B(x) \ \ (*)
\end{aligned}$$

De plus $\varphi_{\overline{A}\cap\overline{B}}(x) = \varphi_{\overline{A\cup B}}(x) = 1 - \varphi_{A\cup B}(x)$ *donc d'après* $(*)$

On aura $1 - \varphi_{A\cup B}(x) = 1 - \varphi_A(x) - \varphi_B(x) + \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

On conclut que $\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

ii) $\forall x \in E, \varphi_{A\setminus B}(x) = \varphi_A(x)(1-\varphi_B(x))$

Réponse : *Soit $x \in E$, on sait que $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$ et $\varphi_{X\cap Y}(x) = \varphi_X(x) \times \varphi_Y(x)$. Donc on conclut que*

$\varphi_{A\setminus B}(x) = \varphi_{A\cap\overline{B}}(x) = \varphi_A(x)\varphi_{\overline{B}}(x) = \varphi_A(x)(1-\varphi_B(x))$.

iii) $\forall x \in E, \varphi_{A\triangle B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$

Réponse 1: *Soit $x \in E$, on sait que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ $\varphi_{X\cap Y}(x) = \varphi_X(x) \times \varphi_Y(x)$ donc*

$\varphi_{A\triangle B}(x) = \varphi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}(x) = \varphi_{(A\setminus B)}(x) + \varphi_{(B\setminus A)}(x) - \varphi_{(A\setminus B)}(x) \times \varphi_{(B\setminus A)}(x)$

En utilisant le fait que $\varphi_{A\setminus B}(x) = \varphi_A(x)(1-\varphi_B(x))$ et $\varphi_{B\setminus A}(x) = \varphi_B(x)(1-\varphi_A(x))$ après dévloppement et simplification on trouve que $\varphi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$. On conclut que $\varphi_{A\triangle B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

Réponse 2: *Soit $x \in E$, on sait que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $\varphi_{X\setminus Y}(x) = \varphi_X(x)(1-\varphi_Y(x))$. Donc*

$$\begin{aligned}
\varphi_{A\triangle B}(x) &= \varphi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}(x) \\
&= \varphi_{A\cup B}(x)(1-\varphi_{A\cap B}(x)) \text{ car } \varphi_{X\setminus Y}(x) = \varphi_X(x)(1-\varphi_Y(x)) \\
&= \varphi_{A\cup B}(x)(1-\varphi_A(x)\varphi_B(x)) \text{ car } \varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x) \\
&= (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x))(1-\varphi_A(x)\varphi_B(x))
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\varphi_A(x)\varphi_A(x) = \varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)\varphi_B(x) = \varphi_B(x)$, après dévloppement et simplification on trouve que $(\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x))(1-\varphi_A(x)\varphi_B(x)) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$. On conclut par la suite que $\varphi_{A\triangle B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

Exercice 3 *Soit E un ensemble et A, B et C des parties de E*

1) *Montrons que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (Indication : utiliser l'exercice précédent)*

Réponse : *En utilisant 'exercice précédent, on a $X = Y \iff \varphi_X = \varphi_Y$, donc il suffit de montrer que $\varphi_{(A\triangle B)\triangle C} = \varphi_{A\triangle(B\triangle C)}$.*

En effet : On a $\varphi_{A\triangle B} = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B$

On comence par le dévloppement de $\varphi_{(A\triangle B)\triangle C}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(A\triangle B)\triangle C} &= \varphi_{(A\triangle B)} + \varphi_c - 2\varphi_{(A\triangle B)}\varphi_C \\
&= \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B + \varphi_c - 2(\varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B)\varphi_C \\
&= \varphi_A + \varphi_B + \varphi_c - 2\varphi_A\varphi_c - 2\varphi_B\varphi_c + 4\varphi_A\varphi_B\varphi_C
\end{aligned}$$

On dévloppe maintenant $\varphi_{A\triangle(B\triangle C)}$

$$\begin{aligned}\varphi_{A\triangle(B\triangle C)} &= \varphi_A + \varphi_{(B\triangle C)} - 2\varphi_A\varphi_{(B\triangle C)}\\ &= \varphi_A + \varphi_B + \varphi_c - 2\varphi_B\varphi_C - 2\varphi_A\left[\varphi_B + \varphi_c - 2\varphi_B\varphi_C\right]\\ &= \varphi_A + \varphi_B + \varphi_c - 2\varphi_A\varphi_c - 2\varphi_B\varphi_c + 4\varphi_A\varphi_B\varphi_C\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{A\triangle(B\triangle C)} = \varphi_{(A\triangle B)\triangle C}$ *et par suite* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Remarque *: L'égalité* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ *montre que* $\triangle$ *est commutative, c'est difficile de le montrer en utilisant seulement la définition mais à l'aide de l'application* φ *c'est faisable.*

2) *Montrer que* $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

Réponse : *En utilisant 'exercice précédent, on a* $X = Y \Longleftrightarrow \varphi_X = \varphi_Y$, *donc il suffit de montrer que* $\varphi_{(A\triangle B)\cap C} = \varphi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}$.

En effet : On a $\varphi_{X\triangle Y} = \varphi_X + \varphi_Y - 2\varphi_X\varphi_Y$ *et* $\varphi_{X\cap Y} = \varphi_X\varphi_Y$

On comence par le dévloppement de $\varphi_{(A\triangle B)\cap C}$

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\triangle B)\cap C} &= \varphi_{(A\triangle B)}\varphi_c\\ &= \left(\varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B\right)\varphi_c\\ &= \varphi_A\varphi_c + \varphi_B\varphi_c - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_c\end{aligned}$$

On dévloppe maintenant $\varphi_{A\triangle(B\triangle C)}$

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)} &= \varphi_{(A\cap C)} + \varphi_{(B\cap C)} - 2\varphi_{(A\cap C)}\varphi_{(B\cap C)}\\ &= \varphi_A\varphi_c + \varphi_B\varphi_c - 2\varphi_A\varphi_c\varphi_B\varphi_c\\ &= \varphi_A\varphi_c + \varphi_B\varphi_c - 2\varphi_A\varphi_c\varphi_B\varphi_c\\ &= \varphi_A\varphi_c + \varphi_B\varphi_c - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_c\varphi_c\\ &= \varphi_A\varphi_c + \varphi_B\varphi_c - 2\varphi_A\varphi_B\varphi_c \text{ car } \varphi_c\varphi_c = \varphi_c\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{(A\triangle B)\cap C} = \varphi_{(A\cap C)\triangle(B\cap C)}$ *et par suite* $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Remarque *: L'égalité* $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ *est déjà démontré dans le chapitre des ensembles, donc à l'aide de l'application* φ *on montre autrement cette égalité.*

Exercice 4 : On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin(x)$$

Déterminer $f^{-1}\{0\}$

Réponse : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

⊛ Si A est une partie de E alors l'image directe de A par f est :

- $f(A) = \{ f(x) ; x \in A \} \subset F$

⊛ Si B est une partie de F alors l'image réciproque de B par f est :

- $f^{-1}(B) = \{ x \in E : f(x) \in B \} \subset E$, de plus $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

On a : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(x)$ donc

$$f^{-1}(\{0\}) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0 \}$$
$$= \{ x = k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$
$$= \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} = \pi . \mathbb{Z}.$$

Exercice 5 : On considère l'application

$$g :]-\tfrac{1}{2}, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

est-elle injective ? surjective ?

Réponse :

1) Soit x, y deux éléments de $]-\frac{1}{2}, 1[$ telles que $f(x) = f(y)$.

Si $f(x) = f(y)$ alors $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2y}{1+y^2}$

Cela implique $xy(y-x) - (y-x) = 0$

D'où $(xy-1)(y-x) = 0$

Ainsi $xy = 1$ ou $x = y$.

→ Supposons que $xy=1$

On a $x=\frac{1}{y}$ et $y\in]-\frac{1}{2},1[$

⊛ Si $y\in]-\frac{1}{2},0[$ donc $\frac{1}{y}\in]-\infty,-2[$ d'où $x=\frac{1}{y}\in]-\infty,-2[$

ce qui contredit le fait que $x\in]-\frac{1}{2},1[$.

⊛⊛ Si $y\in]0,1[$ donc $\frac{1}{y}>1$ (car $y<1$) d'où $x=\frac{1}{y}\in]1,+\infty[$

on obtient une contradiction avec le fait $x\in]-\frac{1}{2},1[$.

de ⊛ et ⊛⊛ on conclut que $xy\neq 1$, et par suite $x=y$

<u>Donc f est injective.</u>

2) Soit $y\in\mathbb{R}$ exist-il un $x\in]-\frac{1}{2},1[$ tel que $f(x)=y$?

Supposons qu'il existe un $x\in]-\frac{1}{2},1[$ tel que $f(x)=y$.

$$\text{donc } f(x)=y \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1}=y$$
$$\Rightarrow 2x=y(x^2+1)$$
$$\Rightarrow 2x=yx^2+y$$
$$\Rightarrow yx^2-2x+y=0$$

On a $y\in\mathbb{R}$ donc pour $y=1$ on aura $x^2-2x+1=0$

c'est à dire $(x-1)^2=0$ donc $x=1$ or $x\in]-\frac{1}{2},1[$

Ce qui est absurde. On conclut que <u>f n'est pas surjective.</u>

Autrement:

Supposons qu'il existe $x\in]-\frac{1}{2},1[$ tel que $f(x)=1$

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+1}=1 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow x=1\in]-\frac{1}{2},1[$ ce qui est absurde et par suite

f n'est pas surjective.

Exercice 6 On considère l'application

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrons que g est bijective et déterminer g^{-1}

Réponse :

① Montrons que g est bijective.

i) Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $g(x) = g(y)$ (Mq g est injective)

a) $\longrightarrow$ Si x est pair on a $g(x) = \frac{x}{2}$ comme $\frac{x}{2} \geq 0$ et $g(x) = g(y)$

donc $g(y) \geq 0$. Il en résulte que $g(y) = \frac{y}{2}$ ($g(y) \geq 0 \Rightarrow y$ pair)

ainsi $\frac{x}{2} = \frac{y}{2}$ d'où $x = y$

b) $\longrightarrow$ Si x est impair on a $g(x) = -\frac{x+1}{2}$, comme $g(x) = g(y)$

donc $g(y) = -\frac{x+1}{2}$ d'où $g(y) < 0$ (car $-\frac{x+1}{2} < 0$)

ainsi $g(y) = -\frac{y+1}{2}$ ($g(y) < 0 \Rightarrow y$ est impair)

Et par suite $\frac{-x+1}{2} = \frac{-y+1}{2}$ (du fait que $g(x) = g(y)$)

Cela implique $x = y$

Conclusion dans les deux cas a) et b) on a montré que $x = y$

Ainsi si $g(x) = g(y)$ alors $x = y$. D'où g est injective.

ii) Soit $y \in \mathbb{Z}$ existe-t-il $x \in \mathbb{N}$ tq $g(x) = y$? (Mq g est surjective).

Soit $y \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ Si $y \geq 0$ alors $g(2y) = y$

$\rightarrow$ Si $y < 0$ alors $-2y-1 \in \mathbb{N}$ et $-2y-1$ est impair

D'où $g(-2y-1) = \frac{(-2y-1)+1}{2} = -\frac{-2y}{2} = y$

Ainsi • si $y \geq 0$ $\exists x = 2y \in \mathbb{N}$ tq $g(x) = y$

• si $y < 0$ $\exists x = -2n-1 \in \mathbb{N}$ tq $g(x) = y$

Donc les deux cas y admet un antécédent x par g ce qui montre que g est surjective.

Ainsi de (i) et (ii) on a montré que g est bijective.

(2) Déterminons g^{-1}

$$g^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$y \longmapsto g^{-1}(y)$$

$$g^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Soit $y \in \mathbb{Z}$ si y

• si $y \geq 0$ on a $g(2y) = y$ d'où $g^{-1}(y) = 2y$

• si $y < 0$ on a $g(-2y-1) = y$ d'où $g^{-1}(y) = -2n-1$

Donc $g^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } y \geq 0 \\ -2y-1 & \text{si } y < 0 \end{cases}$

Exercice 7

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et A, A' deux parties de E. Montrons que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

Réponse : i) On a toujours $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ avec f une application pas forcement injective.

En effet : On sait que si $X \subset Y$ alors $f(X) \subset f(Y)$.

On a $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$ donc

donc $f(A \cap A') \subset f(A)$ et $f(A \cap A') \subset f(A')$

D'où $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

ii) Si de plus f est injective on montre que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

Ainsi comme on a $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$, il suffit de montrer que $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$

Soit $y \in f(A) \cap f(A')$ donc $\exists x \in A$ et $\exists x' \in A'$ tels que $y = f(x)$ et $y = f(x')$. donc $f(x) = y = f(x')$ ainsi $f(x) = f(x')$ or f est injective donc $x = x' \in A \cap A'$

Donc $y = f(x) \in f(A \cap A')$ et par suite $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$

Conclusion de i) et ii) on a $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 8 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective.

Montrons qu'il existe une application surjective g

$g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$

Réponse : Soit $z \in E$ un point fixe. On considère l'application

$$g : F \longrightarrow E$$
$$y \longmapsto g(y) = \begin{cases} x & f(x) = y \in f(E) \subset F \\ z & \text{si } y \notin f(E) \end{cases}$$

1) → Vérifions que g est une application. Soit $y \in F$

Cas 1 Si $y \in f(E) \subset F$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$ donc $g(y) = x$. Si $\exists x' \in E$ tq $y = f(x')$ donc $g(y) = x'$. Or $f(x) = y = f(x')$ donc $f(x) = f(x')$ et comme f est injective d'où $x = x'$. Ainsi y possède unique image par g.

Cas 2 Si $y \notin f(E)$ ie $y \in \overline{f(E)} = C_F^{f(E)}$

Dans ce cas on a $g(y) = z$ donc y possède unique image z par g.

Conclusion : $\forall y \in F \; \exists! x \in E$ tel que $g(y) = x$ donc g est une application.

2) → Montrons que g est surjective.

Soit $x \in E$ posons $y = f(x) \in F$ donc $g(y) = x$ car $y \in F$ sinon $g(y) = z$.. Donc $\forall \; \in E, \exists y \in F$ tel que $g(y) = x$

D'où g est surjective.

3) $\longrightarrow$ Montrons que $g \circ f = Id_E$

On a : $\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & E \end{tikzcd}$ et $Id_E : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$

Soit $x \in E$, on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$

(Car si $x \in E \Rightarrow f(x) \in F$).

Conclusion $g \circ f = Id_E$.

Exercice 9 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective.

Réponse :

1) Montrons que l'ensemble $\{f^{-1}(\{y\}) : y \in F\}$ est une partition de E.

i) $\forall y \in F \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

ii) $\forall y \neq y' \in F$ on a : $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$.

iii) $\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\}) = E$.

i) Montrons que $\forall y \in F \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$

Comme $f : E \longrightarrow F$ est surjective. donc $\forall y \in F \; \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$

ainsi il existe $x \in E$ tq $x \in f^{-1}(\{y\})$ et par suite $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

ii) Montrons $\forall y \in F, \forall y' \in F$ si $y \neq y'$ alors $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$.

Soit $y \neq y' \in F$ on a $f^{-1}(\{y\} \cap \{y'\}) = f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\})$

comme $y \neq y'$ donc $\{y\} \cap \{y'\} = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Cela implique $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$

Conclusion $\forall y \in F, \forall y' \in F$ si $y \neq y'$ alors $f^{-1}(\{y\}) \cap f^{-1}(\{y'\}) = \emptyset$.

iii) Montrons que $\bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) = E$

→ On a $f : E \longrightarrow F$, Soit $y \in F$ donc $f^{-1}(\{y\}) \subset E$

ainsi $\forall y \in F$ on a $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ et par suite $\bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\}) \subset E$ ⊛

→ Soit $x \in E$ et posons $y_0 = f(x) \in F$ donc $x \in f^{-1}(\{y_0\})$.

or $f^{-1}(\{y_0\}) \subset \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$ donc $x \in \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$.

Ainsi $\forall x \in E$ on a $x \in \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$

et par suite $E \subset \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$ ⊛⊛

Conclusion de ⊛ et ⊛⊛ on a : $E = \bigcup_{y\in F} f^{-1}(\{y\})$.

Enfin de i) ii) et iii) $\{f^{-1}(\{y\}) ; y \in F\}$ partition de E.

② Déduisons qu'il existe une application <u>injective</u> g

$g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

On a :

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd} \qquad Id_F : F \longrightarrow F$$

i) Montrons que $g : F \longrightarrow E$ est une application.

Soit $y \in F$ on a $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ (car f est surjective)

(ic $f : E \longrightarrow F$, $\forall y \in F$ $\exists x \in E$ tq $f(x) = y$ donc $x \in f^{-1}(\{y\})$.)

On pose $g(y)$ un représentant de $f^{-1}(\{y\})$.

C'est à dire On considère g l'application de F dans E

tel que $g(y) = x$ où x est un élément choisi de $f^{-1}(\{y\})$.

ii) Montrons que g est injective.

Soient $y_1, y_2 \in F$ tel que $g(y_1) = g(y_2)$ et Montrons que $y_1 = y_2$

On a:

- $g(y_1) \in f^{-1}(\{y_1\}) \Rightarrow f(g(y_1)) = y_1$

et

- $g(y_2) \in f^{-1}(\{y_2\}) \Rightarrow f(g(y_2)) = y_2$

or $g(y_1) = g(y_2)$ donc $f(g(y_1)) = f(g(y_2)) \Rightarrow y_1 = y_2$

(Conclusion $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ et par suite g est injective.

iii) Montrons que $f \circ g = Id_F$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd} \qquad Id_F : \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ y \longmapsto y \end{array}$$

Soit $y \in F$ on a $f \circ g(y) = f(g(y)) = y = Id_F(y)$

(car si $y \in F$ $g(y) \in f^{-1}(\{y\}) \Rightarrow f(g(y)) = y$)

ii) 2eme méthode pour montrer que g est injective

On a $f \circ g = Id_E$ (On suppose qu'on a ça)

or Id_F est injective (par définition)

donc g est injective. (voir le cours)

Exercice 10

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de A.

i) Montrons que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

($A \in \mathcal{P}(E)$ car $A \subset E$) soit $x \in E$.

Soit $x \in E$ telque $x \in A$. on a $f(x) \in f(A)$ d'où $x \in f^{-1}(f(A))$

Ainsi $\forall x \in E$; $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

c'est à dire $A \subset f^{-1}(f(A))$ d'où $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ $A \subset f^{-1}(f(A))$.

ii) Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

1) $\rightarrow$ $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \longmapsto n^2$ ou bien $\left(f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 \right)$ avec $A = \{2\}$.

Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $f(A) = \{0, 1, 4, 9\}$

donc $f^{-1}(f(A)) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Il est clair que $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$

2) $\rightarrow$ $f : E \longrightarrow F$ avec $E = \{a, b\}$ et $F = \{\lambda\}$.

et f est l'application constante

donc $f(\{a\}) = \{\lambda\}$ et $f(\{b\}) = \{\lambda\}$.

Si $A = \{a\}$ donc $f(A) = \{\lambda\}$ or $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{\lambda\}) = f^{-1}(F) = E$

donc $f^{-1}(f(A)) = \{a, b\}$ et par suite $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$.

3) $\rightarrow$ Remarque Il suffit de prendre l'application f n'est pas injective car dans le cas où f est injective on a l'égalité

c'est à dire si f est injective $\Rightarrow$ $A = f^{-1}(f(A))$.

iii) Montrons que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$

M1) On a d'après (i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ①

reste à montrer que $A \supset f^{-1}(f(A))$.

Soit $x \in E$ tel que $x \in A$ donc $x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$.

$$f(x) \in f(A) \iff ((\exists a \in A) / f(x) = f(a))$$

comme f est injective $f(x) = f(a) \Rightarrow x = a$. d'où $x \in A$.

Ainsi $\forall x \in E$ $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow x \in A$ d'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$ ②

Donc de ① et ② on a $f^{-1}(f(A)) = A$.

On conclut que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$.

M2) Soit $x \in E$.

On a: $x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A)$

$\iff (\exists a \in A)\ f(a) = f(x)$

(car f injective) $\iff (\exists a \in A)\quad a = x$

$\iff x \in A$.

D'où $A = f^{-1}(f(A))$.

Remarque: Si $A = f^{-1}(f(A))$ alors f est injective.

Soit $a, b \in E$ tel que $f(a) = f(b)$

On a $\{b\} = f^{-1}(f(\{b\}))$ comme $f^{-1}(f(\{b\})) = f^{-1}(f(b))$ et $f(a) = f(b)$

donc $f^{-1}(f(\{b\})) = f^{-1}(f(b)) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(\{a\}))$

or $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$

D'où $\{b\} = f^{-1}(f(\{b\})) = \dots = f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$ donc $\{b\} = \{a\}$

$\{b\} = \{a\} \Rightarrow a = b$. On conclut que $\forall (a,b) \in E^2$ $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

et par suite f est injective

Remarque ① 2ème méthode pour montrer

$\underbrace{f \text{ injective}}_{P} \iff \underbrace{\forall A \in \mathcal{P}(E) \ f^{-1}(f(A)) = A}_{Q}$

On sait que $(P \iff Q) \iff (\neg P \iff \neg Q)$

$(\neg \Rightarrow \neg)$: Supposons que $\exists A \in \mathcal{P}(E)$ tq $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

c'est-à-dire $\exists y \in f^{-1}(f(A))$ et $y \notin A$

On a $y \in f^{-1}(f(A)) \iff f(y) \in f(A)$
$\iff \exists x \in A$ tq $f(x) = f(y)$

Comme $x \in A$ et $y \notin A$ donc $x \neq y$.

Donc $\exists (x,y) \in E^2$ tq $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$ cela implique

que f n'est pas injective d'où

$(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

$(\neg P \Rightarrow \neg Q)$ supposons que f n'est pas injective.

donc $\exists (x,y) \in E^2$ / $x \neq y$ et $f(x) \neq f(y)$.

On pose $A = \{x\}$

Comme $A \subset f^{-1}(f(A))$ (car $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$).

donc $\{x\} \subset f^{-1}(f(\{x\})) = f^{-1}(f(A))$. ①

On a $f(A) = f(\{x\}) \in f(A)$

$\{y\} \subset f^{-1}(f(A))$ ② or $x \neq y$ ie $\{x\} \neq \{y\}$

d'où $\exists A \in \mathcal{P}(E)$ tq $A \neq f^{-1}(f(A))$.