Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences Aïn chock
Département de Mathématiques et Informatique

Année universitaire 2020-2021
Filières : SMIA S1
Module : Algèbre 1

TD: Les Applications

Exercice 1 *On considère l' application suivante.*

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin(2x) \ - b\sin(x) + c$ *avec* $a, b, c \in \mathbb{R}$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c *pour que* f *soit l'application nulle*

Exercice 2 *Soit* E *un ensemble. Pour une partie* X *de* E*, on note* φ_X *la fonction caractéristique de* X

Soit A, B *des parties de* E

1) *Montrer que*

$A = B \Longleftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$

$\forall x \in E, \varphi_{\mathcal{C}_E^A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$

$\forall x \in E, \varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

$\forall x \in E, \varphi_A(x)\varphi_A(x) = \varphi_A(x)$

2) *En déduire que*

$\forall x \in E, \varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_A(x)\varphi_B(x)$

$\forall x \in E, \varphi_{A\setminus B}(x) = \varphi_A(x)(1 - \varphi_B(x))$

$\forall x \in E, \varphi_{A\triangle B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - 2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$

Exercice 3 *Soit* E *un ensemble et* A, B *des parties de* E

Montrer que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

Montrer que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$

(Indication : utiliser l'exercice précédent)

Exercice 4 *On considère l'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}\{0\}$

Exercice 5 *L'application*

$$g: \left]-\frac{1}{2}, 1\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x}{1+x^2}$$

est-elle injective? surjective ?

Exercice 6 *On considère l'application*

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}

Exercice 7 *Soit f :$E \longrightarrow F$ une application injective et A, A' deux parties de E .*

Montrer que $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

Exercice 8 *Soit f :$E \longrightarrow F$ une application injective*

Montrer qu'il existe une application surjective g :$F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$

Exercice 9 *Soit f :$E \longrightarrow F$ une application surjective*

Montrer que l'ensemble $\{f^{-1}(\{y\}) : y \in F\}$ est une partition de E

En déduire qu 'il existe une application injective g :$F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$

Exercice 10 *Soit f :$E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E .*

i) *Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$*

ii) *Donner un exemple où l'inclusion est stricte*

iii) *Montrer que si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$*

Exercice 11 *Soit f :$E \longrightarrow F$ une application et B une partie de F .*

i) *Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$*

ii) *Trouver un exemple où $f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$*