第三章 Poission 过程（Poission 信号流）

一、　基本概念及 Poission 过程的一维分布

（1）　独立增量过程

定义：设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程，如果对于任意的 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ ，$\forall n\in N$，$t_i\in T,\ 1\le i\le n$，有随机过程$X(t)$的增量：

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

相互独立，则称随机过程$\{X(t), t\in T\}$是独立增量过程。

注意：若独立增量过程的参数集$T=[a,b),\ a>-\infty$，一般假定$X(a)=0$，则独立增量过程是一马氏过程。特别地，当$X(0)=0$时，独立增量过程$\{X(t), t\ge 0\}$是一马氏过程。证明如下：

形式上我们有：

$$\begin{aligned}
&P\{X(t_n)\le x_n \mid X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}=\\
&=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}\\
&=\frac{P\{X(t_n)\le x_n, X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-2})=x_{n-2} \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}{P\{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2,\cdots,X(t_{n-2})=x_{n-2} \mid X(t_{n-1})=x_{n-1}\}}
\end{aligned}$$

因此，我们只要能证明在已知$X(t_{n-1})=x_{n-1}$条件下，$X(t_n)$与$X(t_j)$, $j=1,2,\cdots,n-2$相互独立即可。

由独立增量过程的定义可知，当$a<t_j<t_{n-1}<t_n,\ j=1,2,\cdots,n-2$时，增量$X(t_j)-X(a)$与$X(t_n)-X(t_{n-1})$相互独立，由于在条件$X(t_{n-1})=x_{n-1}$和$X(a)=0$下，即有$X(t_j)$与$X(t_n)-x_{n-1}$相互独立。由此可知，在$X(t_{n-1})=x_{n-1}$条件下，$X(t_n)$与$X(t_j)$, $j=1,2,\cdots,n-2$相互独立，结果成立。

（2）　计数过程

定义：在$[0,t)$内出现随机事件A的总数组成的过程$\{N(t), t\geq 0\}$称为计数过程。计数过程满足：

（a）$N(t)\geq 0$；

（b）$N(t)\in N_0$；

（c）$\forall s,t>0, s<t$，则有：$N(s)\leq N(t)$；

（d）$\forall s,t>0, s<t$，$N(t)-N(s)$表示在时间间隔$[s,t)$内事件A出现的次数。

若计数过程在不相交的时间间隔内事件A出现的次数是相互独立的，则称此计数过程为独立增量计数过程。

若计数过程在时间间隔$[t,t+s)$内出现事件A的次数只与时间差s有关，而与起始时间t无关，则称此计数过程为平稳增量计数过程。

（3）　Poission 过程

Poission 过程是计数过程，而且是一类最重要、应用广泛的计数过程，它最早于 **1837** 年由法国数学家 **Poission** 引入，至今仍为应用最为广泛的随机过程之一。

定义：计数过程$\{N(t), t\geq 0\}$称为时齐（齐次）**Poission** 过程，若满足：

（a）$N(0)=0$；

（b）独立增量过程，即任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n, n\in N$，

$$N(t_1), N(t_2)-N(t_1),\cdots, N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立；

（c）增量平稳性，即：

$$\forall s,t>0, n\geq 0,\ P\{N(s+t)-N(s)=n\}=P\{N(t)=n\}$$

（**d**）对任意$t>0$，和充分小的$\Delta t>0$，有：

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda>0$（称为强度常数）。

定理：（**Poission** 过程的一维分布）若$\{N(t), t\geq 0\}$为时齐 **Poission** 过程，则$\forall s,t>0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ ,\quad k\in N$$

即$N(s+t)-N(s)$是参数为λt的 **Poission** 分布。

证明：由增量平稳性，记：

$$P_n(t)=P\{N(t)=n\}=P\{N(s+t)-N(s)=n\}$$

（**I**）$n=0$情形：因为

$$\{N(t+h)=0\}=\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}, h>0\text{，}$$

我们有：

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\{N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0\}= \\ &= P\{N(t)=0\}P\{N(t+h)-N(t)=0\}=P_0(t)P_0(h) \end{aligned}$$

另一方面

$$P_0(h)=P\{N(t+h)-N(t)=0\}=1-(\lambda h+o(h))$$

代入上式，我们有：

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\left(\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}\right)$$

令$h\to 0$，我们有：

$$\begin{cases} P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

（**II**）$n>0$情形：因为：

$$\{N(t+h)=n\}=\{N(t)=n,N(t+h)-N(t)=0\}$$
$$\bigcup\{N(t)=n-1,\,N(t+h)-N(t)=1\}$$
$$\bigcup\left[\bigcup_{l=2}^{n}\{N(t)=n-l,\,N(t+h)-N(t)=l\}\right]$$

故有：

$$P_n(t+h)=P_n(t)(1-\lambda h-o(h))+P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))+o(h)$$

化简并令$h\to 0$得：

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

两边同乘以$e^{\lambda t}$，移项后有：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]=\lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)\\ P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0\end{cases}$$

当$n=1$时，有：

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\lambda t}P_1(t)\right]=\lambda\,,\,P_1(0)=0\quad\Rightarrow\quad P_1(t)=(\lambda t)e^{-\lambda t}$$

由归纳法可得：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\,,\quad n\in N_0$$

注意：$E\{N(t)\}=\lambda t\quad\Rightarrow\quad\lambda=\dfrac{E\{N(t)\}}{t}$,因此$\lambda$代表单位时间内事件$A$出现的平均次数。

注意：**Poission** 过程的转移率矩阵（**Q** 矩阵）的表示，并用上一章讲过的方法求解 **Poission** 过程的一维分布。

二、　**Poission** 过程与指数分布的关系

设$\{N(t),t\geq 0\}$是一计数过程，记：

$S_0=0$，S_n表示第n个事件发生的时刻（$n\geq 1$），

$X_n = S_n - S_{n-1}\ (n \ge 1)$表示第$n-1$个事件与第$n$事件发生的时间间隔。

当$\forall t \ge 0, n \ge 0$时，有以下基本的关系式：

$$\{N(t) \ge n\} = \{S_n \le t\}$$

$$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\} = \{S_n \le t\} - \{S_{n+1} \le t\}$$

因此，我们有关于随机变量S_n的分布函数：

当$t<0$时，$F_{S_n}(t)=0$；当$t \ge 0$时，有：

$$F_{S_n}(t) = P\{S_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\} = 1 - P\{N(t) < n\} = 1 - e^{-\lambda t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)$$

其概率密度为：

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

即$S_n \sim \Gamma(\alpha, \beta)$，其中$\alpha = n, \beta = \lambda^{-1}$。特别地，当$n=1$时，有：

$$P\{X_1 \le t\} = P\{S_1 \le t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

即$X_1 \sim Ex(\lambda)$是参数为λ的指数分布。

问题：$X_2, X_3, \cdots, X_n$是否还是服从参数为λ的指数分布？是否独立？我们以下将给出一个重要的定理。

为了更好地理解下面的内容，我们先复习一下求随机变量概率密度的“微元法”以及顺序统计量的分布。

（1）　求随机变量概率密度的“微元法”：

- 一维情形：若随机变量X的概率密度$f(x)$在x点连续，则有：

$$f(x) = \lim_{h \to 0}\frac{P\{x < X \le x+h\}}{h} \quad \Rightarrow \quad P\{x < X \le x+h\} = f(x)h + o(h)$$

- 多维情形：若随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的概率密度$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处连续，则有：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{h_1,h_2,\cdots,h_n\to 0}\frac{P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}}{h_1h_2\cdots h_n}$$

即：

$$\begin{aligned}&P\{x_1<X_1\le x_1+h_1,\cdots,x_n<X_n\le x_n+h_n\}=\\&=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)h_1h_2\cdots h_n+o(h_1h_2\cdots h_n)\end{aligned}$$

（2）　顺序统计量的分布

定义：给定(Ω,Σ,P)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其上的随机向量，$\forall\omega\in\Omega$，将试验结果　$X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$　按从小到大顺序重新进行排列，记为$X_{(1)}(\omega)\le X_{(2)}(\omega)\le\cdots\le X_{(n)}(\omega)$，称$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量。

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布非负的随机变量，其密度函数为$f(x)$，记$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$为相应的顺序统计量，则对于$0<x_1<x_2<\cdots<x_n$，取充分小的$h>0$，使得：

$$0<x_1<x_1+h<x_2<x_2+h<x_3<\cdots<x_{n-1}+h<x_n<x_n+h$$

有

$$\begin{aligned}&\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}=\\&=\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots i_n)}\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}\end{aligned}$$

等式右边的各事件互不相容，因此有：

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}P\{x_1<X_{(1)}\le x_1+h,x_2<X_{(2)}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{(n)}\le x_n+h\}/h^n=\\&=\lim_{h\to 0}n!P\{x_1<X_{i_1}\le x_1+h,x_2<X_{i_2}\le x_2+h,\cdots,x_n<X_{i_n}\le x_n+h\}/h^n\end{aligned}$$

由此可得顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^n f(x_i), & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

特别地，若$X_1,X_2,\cdots,X_n$在$[0,t]$上独立同均匀分布，则其顺序统计量$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\le t\\ 0, & 其它\end{cases}$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_k\sim Ex(\lambda)$，则其顺序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n)}, & 0<x_1<x_2<\cdots<x_n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

定理：计数过程 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是强度为 λ 的时齐 **Poission** 过程的充分必要条件是 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

注意：此定理的结论非常重要，它反映了 **Poission** 过程的本质特性，也为 **Poission** 过程的计算机模拟提供了理论基础。思考：如何进行模拟？

证明：(只证必要性)

(**a**) 先求 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度：

令：$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，取充分小的 $h>0$，使得：

$$t_1-\frac{h}{2}<t_1<t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_{n-1}+\frac{h}{2}<t_n-\frac{h}{2}<t_n<t_n+\frac{h}{2}$$

由：

$$\begin{aligned}&\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}\\ &=\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\right.\\ &\qquad\left.N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)=0,\cdots,N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)=1\right\}\cup H_n\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}H_n=&\left\{N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=0,N\left(t_1+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_1-\frac{h}{2}\right)=1,\cdots,\right.\\ &\left.N\left(t_n+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_n-\frac{h}{2}\right)\ge 2\right\}\end{aligned}$$

我们有：

$$P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}=$$

$$=(\lambda h)^n e^{-\lambda\left(t_n+\frac{h}{2}\right)}+o(h^n)=\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)$$

因此，$(S_1,S_2,\cdots,S_n)$的联合概率密度为：

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P\left\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\le t_1+\frac{h}{2},t_2-\frac{h}{2}<S_2\le t_2+\frac{h}{2},\cdots,t_n-\frac{h}{2}<S_n\le t_n+\frac{h}{2}\right\}}{h^n}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda^n e^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n)}{h^n}=\lambda^n e^{-\lambda t_n}\ ,\quad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$$

即：

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda t_n}\ , & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（b）求$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度：

由：$X_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 1)$我们有：

$$\begin{cases}X_1=S_1\\ X_2=S_2-S_1\\ \vdots\\ X_n=S_n-S_{n-1}\end{cases}\qquad \text{令：}\begin{cases}x_1=t_1\ge 0\\ x_2=t_2-t_1\ge 0\\ \vdots\\ x_n=t_n-t_{n-1}\ge 0\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}t_1=x_1\\ t_2=x_1+x_2\\ \vdots\\ t_n=x_1+x_2+\cdots+x_n\end{cases}$$

则变换的雅可比行列式为：

$$J=\frac{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=1$$

于是$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\ , & x_i\ge 0\,,1\le i\le n\\ 0\,, & \text{其它}\end{cases}$$

由此可得 X_k 的概率密度为 $f_k(x_k)=\lambda e^{-\lambda x_k}$, $x_k\ge 0$, $1\le k\le n$，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

由此证明了 $\{X_n, n\ge 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布。

三、　剩余寿命与年龄

设 $N(t)$ 为在 $[0,t)$ 内事件 **A** 发生的个数，S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，$S_{N(t)}$ 表示在 t 时刻前最后一个事件发生的时刻，$S_{N(t)+1}$ 表示在 t 时刻后首次事件发生的时刻，令：

$$\begin{cases} W(t)=S_{N(t)+1}-t \\ V(t)=t-S_{N(t)} \end{cases}$$

称 $W(t)$ 为事件 **A** 的剩余寿命或剩余时间，$V(t)$ 为事件 **A** 的年龄。

由定义可知：$\forall t\ge 0$, $W(t)\ge 0$, $0\le V(t)\le t$ ，我们有以下重要定理。

定理：设 $\{N(t), t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的时齐 **Poission** 过程，则有：

（**a**）$W(t)$ 与 $\{X_n, n\ge 1\}$ 同分布，即

$$P\{W(t)\le x\}=1-e^{-\lambda x}\ ,\quad x\ge 0$$

（**b**）$V(t)$ 的分布为“截尾”的指数分布，即

$$P\{V(t)\le x\}=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}\ , & 0\le x<t \\ 1\ , & t\le x \end{cases}$$

证明：注意到：

$$\{W(t)>x\}=\{N(t+x)-N(t)=0\}$$

以及

$$\{V(t)>x\}=\begin{cases} \{N(t)-N(t-x)=0\}\ , & t>x \\ \varnothing\ , & t\le x \end{cases}$$

即可得所要的结果。

定理：若$\{X_n, n\ge 1\}$独立同分布，又对$\forall t\ge 0$，$W(t)$与X_n $(n\ge 1)$同分布，分布函数为$F(x)$，且$F(0)=0$，则$\{N(t), t\ge 0\}$为 **Poission** 过程。

注意：$X_n = S_n - S_{n-1}$表示的是第$n-1$个事件的寿命。

四、 到达时间的条件分布

下面讨论在条件$N(t)=n$下，$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件分布问题。

定理：设$\{N(t), t\ge 0\}$为时齐 **Poission** 过程，则对$\forall 0<s<t$，有：

$$P\{X_1 \le s \mid N(t)=1\} = \frac{s}{t}$$

证明：

$$\begin{aligned}
P\{X_1 \le s \mid N(t)=1\} &= \frac{P\{X_1 \le s, N(t)=1\}}{P\{N(t)=1\}} = \\
&= \frac{P\{N(s)=1, N(t)-N(s)=0\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&= \frac{(\lambda s)e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{(\lambda t)e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

定理：设$\{N(t), t\ge 0\}$为齐次 **Poission** 过程，则在已知条件$N(t)=n$下，事件相继发生的时间$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n\le t \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

证明：对$\forall 0<t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=t$，取$h_0 = h_{n+1} = 0$及充分小的$h_i$，使得$t_i + h_i < t_{i+1}$，$1\le i\le n$，则有：

$$P\{t_i < S_i \le t_i + h_i, 1 \le i \le n \mid N(t) = n\} =$$
$$= \frac{P\{N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \le i \le n, N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 1 \le j \le n\}}{P\{N(t) = n\}}$$
$$= \frac{(\lambda h_1)e^{-\lambda h_1} \cdots (\lambda h_n)e^{-\lambda h_n} \cdot e^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \cdots - h_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n$$

因此可得定理的结果。

本定理说明：在$N(t) = n$的条件下，事件相继发生的时间$S_1, S_2, \cdots, S_n$的条件分布与n个在$[0, t]$上相互独立同均匀分布的顺序统计量的分布函数一样。

定理：设$\{N(t), t \ge 0\}$为计数过程，X_n为第n个事件与第$n-1$个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$独立同分布且$F(x) = P\{X_n \le x\}$，若$F(0) = 0$且对$\forall 0 < s < t$，有

$$P\{X_1 \le s \mid N(t) = 1\} = \frac{s}{t}, \quad t > 0$$

则$\{N(t), t \ge 0\}$为 **Poission** 过程。

定理：设$\{N(t), t \ge 0\}$为计数过程，X_n为第n个事件与第$n-1$个事件的时间间隔，$\{X_n, n \ge 1\}$独立同分布且$F(x) = P\{X_n \le x\}$，若$E\{X_n\} < \infty, F(0) = 0$，且对$\forall 0 < s < t$，有

$$P\{S_n \le s \mid N(t) = n\} = \left(\frac{s}{t}\right)^n, \quad t > 0$$

则$\{N(t), t \ge 0\}$为 **Poission** 过程。

例：设到达火车站的顾客流遵循参数为λ的 **Poission** 流$\{N(t), t \ge 0\}$，火车t时刻离开车站，求在$[0, t]$到达车站的顾客等待时间总和的期望值。

解：设第i个顾客到达火车站的时刻为S_i，则$[0, t]$内到达车站的顾客等待时间总和为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)$$

因为：

$$E\{S(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=$$

$$=E\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\mid N(t)=n\}=nt-E\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid N(t)=n\}$$

$$=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故：

$$E\{S(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\mid N(t)=n\}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E\{N(t)\}=\frac{\lambda}{2}t^2$$

例：设一系统在$[0,t]$内受冲击的次数$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的齐次 **Poission** 过程，第k次受冲击的损失为D_k，其中$\{D_k,k\geq 1\}$是独立同分布并与$\{N(t),t\geq 0\}$独立，且损失随时间按负指数衰减。$t=0$的衰减为D，经t时刻损失为$De^{-\alpha t}$（$\alpha>0$为常数），设损失可加，t时刻的总损失为$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}$，其中$S_k$为第$k$次冲击到达的时刻，试求$E\xi(t)$。

解：由于：

$$E\{\xi(t)\mid N(t)=n\}=E\{\sum_{k=1}^{N(t)}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=E\{\sum_{k=1}^{n}D_k e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E\{D_k\mid N(t)=n\}E\{e^{-\alpha(t-S_k)}\mid N(t)=n\}$$

$$=ED\cdot e^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n}E\{e^{\alpha S_k}\mid N(t)=n\}$$

记$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$为$[0,t]$上独立同均匀分布的随机变量，则有：

$$\sum_{k=1}^{n} E\{e^{\alpha S_k} \mid N(t)=n\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_{(k)}}\} = E\{\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha Y_k}\} = n\int_0^t e^{\alpha x}\frac{dx}{t} = \frac{n}{\alpha t}[e^{\alpha t}-1]$$

所以有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)=n\} = \frac{n}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

即有：

$$E\{\xi(t) \mid N(t)\} = \frac{N(t)}{\alpha t}[1-e^{-\alpha t}]\cdot ED$$

故：

$$E\{\xi(t)\} = E[E\{\xi(t) \mid N(t)\}] = \frac{\lambda\cdot ED}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}]$$

五、 非齐次（时齐）Poission 过程

定义：一计数过程$\{N(t), t\ge 0\}$，称它为具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\ge 0\}$的非齐次 **Poission** 过程，若满足：

（**a**） $N(0)=0$

（**b**）独立增量过程，即任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$N(t_1), N(t_2)-N(t_1),\cdots,N(t_n)-N(t_{n-1})$$

相互独立；

（**c**）对任意$t>0$，和充分小的$\Delta t>0$，有：

$$\begin{cases} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{N(t+\Delta t)-N(t)\ge 2\} = o(\Delta t) \end{cases}$$

其中$\lambda(t)>0$（称为强度常数）。

记：$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$，则有：

定理：若$\{N(t), t\ge 0\}$为非时齐具有强度函数$\{\lambda(t)>0, t\ge 0\}$的 **Poission**

过程，则$\forall s,t>0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\frac{[m(s+t)-m(s)]^n}{n!}e^{-[m(s+t)-m(s)]}\ (n\ge 0)$$

定理：（变换定理）

（**a**）设$\{N(t),t\ge 0\}$为具有强度函数$\{\lambda(t)>0,t\ge 0\}$的非时齐 **Poission** 过程，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$m^{-1}(t)$是$m(t)$的反函数（由于$m(t)$单调增，反函数一定存在），记$M(u)=N(m^{-1}(u))$，则$\{M(u),u\ge 0\}$是时齐 **Poission** 过程。

（**b**）设$\{M(u),u\ge 0\}$是时齐 **Poission** 过程，参数$\lambda=1$。若强度函数$\{\lambda(s)>0,s\ge 0\}$，令$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$，$N(t)=M(m(t))$，则$\{N(t),t\ge 0\}$是非时齐的具有强度函数$\{\lambda(s)>0,s\ge 0\}$的 **Poission** 过程。

六、　复合 Poission 过程

定义：设$\{Y_i,i\ge 1\}$是独立同分布的随机变量序列，$\{N(t),t\ge 0\}$为 **Poission** 过程，且$\{N(t),t\ge 0\}$与$\{Y_i,i\ge 1\}$独立，记：

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$$

称$\{X(t),t\ge 0\}$为复合 **Poission** 过程。

物理意义：如$\{N(t),t\ge 0\}$表示粒子流，$N(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子数，Y_i表示第i个粒子的能量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的粒子的总能量。若$\{N(t),t\ge 0\}$表示顾客流，Y_i表示第i个顾客的行李重量，则$X(t)$表示$[0,t]$内到达的顾客的行李总重量。若某保险公司买了人寿保险的人在时刻$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$死亡，在时刻$S_n$死亡的人的保险金额是$Y_n$，在$[0,t]$内死亡的人数为$N(t)$，则$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$表示该公司在$[0,t]$内需要支付的赔偿金总额。

我们关心的是复合**Poission**过程的一些数字特征。

定义：随机变量X的矩母函数定义为：

$$\phi(t) \hat{=} E\{e^{tX}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF_X(x)$$

若上面的积分存在。

如果X的k阶中心矩存在，则有：

$$E\{X^k\} = \phi^{(k)}(0)$$

下面求复合**Poission**过程$\{X(t), t \geq 0\}$的数学期望和方差。

先求$X(t)$的矩母函数：

$$\begin{aligned}\phi_{X(t)}(u) = E\{e^{uX(t)}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t)=n\} E\{e^{uX(t)} \mid N(t)=n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)} \mid N(t)=n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} E\{e^{u(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)}\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n\end{aligned}$$

令$Y \sim Y_i$的矩母函数为$\phi_Y(u) = E\{e^{uY}\}$，则有：

$$\phi_{X(t)}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left(E\{e^{uY_1}\}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda t \phi_Y(u)\right]^n}{n!} e^{-\lambda t} = \exp\{\lambda t[\phi_Y(u) - 1]\}$$

对上式在$u=0$处求导数，有：

$$E\{X(t)\} = \phi'_{X(t)}(0) = \lambda t \cdot E\{Y\}$$

以及

$$D(X(t)) = \lambda t E\{Y^2\}$$

特殊情形：若$\{\rho_i, i \geq 1\}$为独立同分布，取值为正整数的随机变量序列，且与 **Poission** 过程$\{N(t), t \geq 0\}$独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \rho_i$$

则称$\{X(t),t\geq 0\}$为平稳无后效流。

七、　条件 Poission 过程

定义：设Λ是一正的随机变量，分布函数为$G(x),x\geq 0$，设$\{N(t),t\geq 0\}$是一计数过程，且在给定条件$\Lambda=\lambda$下，$\{N(t),t\geq 0\}$是一 **Poission** 过程，即$\forall s,t\geq 0,n\in N_0,\lambda\geq 0$，有：

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\big|\Lambda=\lambda\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

则称$\{N(t),t\geq 0\}$是条件 **Poission** 过程。

注意，条件 **Poission** 过程不一定是增量独立过程。由全概率公式我们有：

$$\begin{aligned}
&P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}P\{N(s+t)-N(s)=n\big|\Lambda=\lambda\}f_\Lambda(\lambda)d\lambda\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}f_\Lambda(\lambda)d\lambda\\
&\quad=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dG(\lambda)
\end{aligned}$$

八、　例子

例：设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别为强度为λ_1和λ_2，并且相互独立的 **Poission** 过程，证明在$N_1(t)$的任一到达时间间隔内，$N_2(t)$恰有k个事件发生的概率为：

$$p_k=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

证明：根据二中的定理，可以令X为$N_1(t)$的任一到达时间间隔并且$X\sim Ex(\lambda_1)$，即X的分布密度为：

$$f_X(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

由此可知：

$$\begin{aligned}p_k &= P\{N_2(t)=k, t\in[0,X)\}\\ &=\int_0^{+\infty} P\{N_2(t)=k \mid X=t\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{(\lambda_2 t)}{k!}e^{-\lambda_2 t}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}dt=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k,\quad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

例：设 $N(t)$ 是强度为 λ 的 **Poission** 过程，求在 $[0,t)$ 内发生了 n 个事件的条件下，第 $r\ (r<n)$ 个事件发生时刻的概率密度。

解：取充分小的 $h>0$，则有：

$$\begin{aligned}&P\{x<S_r\le x+h \mid N(t)=n\}=\\ &=\frac{P\{x<S_r\le x+h, N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}}=\\ &=\frac{P\{x<S_r\le x+h, N(t)-N(x+h)=n-r\}}{P\{N(t)=n\}}\\ &=\frac{P\{x<S_r\le x+h\}P\{N(t)-N(x+h)=n-r\}}{P\{N(t)=n\}}\\ &=\frac{f_{S_r}(x)h\cdot\dfrac{[\lambda(t-x-h)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{-\lambda(t-x-h)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\cdot e^{-\lambda t}}\end{aligned}$$

两边除以 h，并令 $h\to 0$，我们有：

$$\begin{aligned}f_{S_r}(x \mid N(t)=n)&=\frac{f_{S_r}(x)\cdot\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}\\ &=\lambda e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!}\cdot\frac{\dfrac{[\lambda(t-x)]^{n-r}}{(n-r)!}\cdot e^{\lambda x}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}}\end{aligned}$$

最后我们可以得到结果：

$$f_{S_r}(x\,|\,N(t)=n)=\frac{n!}{(n-r)!(r-1)!}\left(\frac{x}{t}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-r}\cdot\frac{1}{t},\quad 0<x<t$$

例：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的 **Poission** 过程，$f(t)=ke^{-kt}$是一确定性实函数，并且设

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

记S_i是$N(t)$的第i个事件到达的时刻，$A_i,i=1,2,\cdots$是一独立同分布的离散型随机变量序列，其分布率为：

$$P\{A_i=1\}=P\{A_i=-1\}=\frac{1}{2},\quad i=1,2\cdots$$

令$A_0=0$，$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立。现在构造一随机过程：

$$X(t)=A_{N(t)}f(t-S_{N(t)})u(t-S_{N(t)})$$

试画出此随机过程$\{X(t),t\geq 0\}$的一样本函数并求其均值函数和相关函数。

解：(**1**）求均值函数：

由条件数学期望的性质，我们有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)\,|\,N(t)\}\}$$

又有：

$$E\{X(t)\,|\,N(t)=n\}=E\{A_n ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}$$

$$=E\{A_n\}E\{ke^{-k(t-S_n)}u(t-S_n)\}=0$$

故有：

$$E\{X(t)\}=E\{E\{X(t)\,|\,N(t)\}\}=0$$

（**2**）求相关函数：

由相关函数的定义，有：

$$R_X(t,t+\tau)=E\{X(t)X(t+\tau)\}$$

$$=E\{A_{N(t)}ke^{-k(t-S_{N(t)})}u(t-S_{N(t)})\times$$

$$\times A_{N(t+\tau)}ke^{-k(t+\tau-S_{N(t+\tau)})}u(t+\tau-S_{N(t+\tau)})\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)=j\}\cdot E\{A_i ke^{-k(t-S_i)}u(t-S_i)\times$$

$$\times A_j ke^{-k(t+\tau-S_j)}u(t+\tau-S_j)\}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i,N(t+\tau)-N(t)=0\}\times$$

$$\times E\{A_i^2k^2e^{-2k(t-S_i)-k\tau}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由$\{A_i,i=1,2,\cdots\}$与$N(t)$相互独立性，及$E\{A_i^2\}=1$，我们可得：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}$$

由上面的例子可知，在条件$N(t)=i$下，S_i的条件分布密度为：

$$f_{S_i}(x)=\frac{ix^{i-1}}{t^i},\quad 0<x<t$$

因此我们有：

$$E\{e^{-2k(t-S_i)}u(t-S_i)u(t+\tau-S_i)\}=\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

即：

$$R_X(t,t+\tau)=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}f_{S_i}(x)dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}k^2\int_0^t e^{-2k(t-x)}\frac{ix^{i-1}}{t^i}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}P\{N(t)=i\}\frac{ix^{i-1}}{t^i}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\lambda t}\right\}dx$$

$$=e^{-\lambda\tau-k\tau}\int_0^t k^2e^{-2k(t-x)}\left\{\lambda e^{\lambda x}e^{-\lambda t}\right\}dx=e^{-\lambda\tau-k\tau}\frac{k^2\lambda}{2k+\lambda}\left[1-e^{-\lambda t-2kt}\right]$$

注：Γ 分布的定义：

称随机变量 X 服从参数为 $\alpha > 0$、$\beta > 0$ 的 Γ 分布，如果其分布密度函数为：

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

记为：$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$；其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$。

当 α 取整数时，$\Gamma(n) = (n-1)!$