

第五章 平稳过程的谱分析 习题

- 1、设有一线性系统，其输入为零均值白高斯噪声 $n(t)$ ，其功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ ，系统的冲激响应为：

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

此线性系统的输出为 $\xi(t)$ 。令： $\eta(t) = \xi(t) - \xi(t-T)$ ，其中 $T > 0$ 为一常数，试求过程 $\eta(t)$ 的一维概率密度函数。

- 2、设 $s(t)$ 为一确定性信号，在 $(0, T)$ 内具有能量 $E_s = \int_0^T s^2(t) dt$ ， $n(t)$ 为一零均值的白高斯过程，其相关函数为： $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ 。令： $\eta_1 = \int_0^T s(t)[s(t) + n(t)] dt$ ，

$$\eta_2 = \int_0^T s(t)n(t) dt。$$

试求：

(1) 给定一常数 γ ，求概率 $P\{\eta_1 > \gamma\}$ ；

(2) 给定一常数 γ ，求概率 $P\{\eta_2 > \gamma\}$ 。

- 3、设有一非线性系统，其输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为：

$$C_\xi(\tau) = P e^{-\alpha|\tau|}$$

其中 $P > 0$ 为一常数。系统的输出为：

$$\zeta = \frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt$$

试求：

(1) 输出均值： $E\{\zeta\}$ ；

(2) 输出方差： $D\{\zeta\}$ ；

(3) 设 $y = \frac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}$ ， $x = \alpha T$ ，画出 y 对 x 的关系简图。

- 4、设有一线性系统，输入输出分别为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ ，其中输入过程 $\xi(t)$ 为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为： $R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$ ($\alpha > 0$)。系统的单位冲激响应为：

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0, \beta > 0, \beta \neq \alpha \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

若 $\xi(t)$ 在 $t = -\infty$ 时接入系统，试求：

- (1) 在 $t = 0$ 时输出 $\eta(0)$ 大于 y 的概率 $P\{\eta(0) > y\}$;
- (2) 求条件概率 $P\{\eta(0) > y \mid \xi(-T) = 0\}$, 其中 $T > 0$;
- (3) 求条件概率 $P\{\eta(0) > y \mid \xi(T) = 0\}$, 其中 $T > 0$ 。
- 5、设实平稳过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 的自相关函数和功率谱密度分别为 $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$, 令随机过程 $Y(t) = X(t+a) - X(t-a)$ 的相关函数和功率谱密度分别为 $R_Y(\tau)$ 和 $S_Y(\omega)$, 其中 a 是常数。
- (1) 试证明 : $R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) - R_X(\tau+2a) - R_X(\tau-2a)$;
- (2) 试证明 : $S_Y(\omega) = 4S_X(\omega) \sin^2(a\omega)$ 。