

## 第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析 习题

- 1、设  $X_n = \sum_{k=1}^N \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)$  , 其中  $\sigma_k$  和  $\alpha_k$  为正常数,  $U_k \sim U(0, 2\pi)$  , 且相互独立,  $k = 1, 2, \dots, N$  , 试计算  $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$  的均值函数和相关函数, 并说明其是否是平稳过程。
- 2、设有随机过程  $X(t) = A \cos(\omega t + \pi \eta(t))$  , 其中  $\omega > 0$  为常数,  $\{\eta(t), t \geq 0\}$  是泊松过程,  $A$  是与  $\eta(t)$  独立的随机变量, 且  $P\{A = -1\} = P\{A = 1\} = 1/2$  。  
 (1) 试画出此过程的样本函数, 并问样本函数是否连续?  
 (2) 试求此过程的相关函数, 并问该过程是否均方连续?
- 3、设  $\{X(t), t \geq 0\}$  是一实的零初值正交增量过程, 且  $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$  。令  $Y(t) = 2X(t) - 1, t \geq 0$  。试求过程  $\{Y(t), t \geq 0\}$  的相关函数  $R_Y(s, t)$  。
- 4、设有随机过程  $X(t) = 2Z \sin(t + \Theta)$  ,  $-\infty < t < +\infty$  , 其中  $Z$ 、 $\Theta$  是相互独立的随机变量,  $Z \sim N(0, 1)$  ,  $P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = 1/2$  。问过程  $X(t)$  是否均方可积过程? 说明理由。
- 5、设随机过程  $\xi(t) = X \cos 2t + Y \sin 2t$  ,  $-\infty < t < +\infty$  , 其中随机变量  $X$  和  $Y$  独立同分布。  
 (1) 如果  $X \sim U(0, 1)$  , 问过程  $\xi(t)$  是否平稳过程? 说明理由;  
 (2) 如果  $X \sim N(0, 1)$  , 问过程  $\xi(t)$  是否均方可微? 说明理由。
- 6、设随机过程  $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$  是一实正交增量过程, 并且  $E\{X(t)\} = 0$  , 及满足:  

$$E\{[X(t) - X(s)]^2\} = |t - s|, \quad -\infty < s, t < +\infty;$$
 令:  $Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$  , 试证明  $Y(t)$  是平稳过程。
- 7、设  $\xi(t) = X \sin(Yt); t \geq 0$  , 而随机变量  $X$ 、 $Y$  是相互独立且都服从  $[0, 1]$  上的均匀分布, 试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程, 是否连续、可导?
- 8、设  $\{X(t), t \in R\}$  是连续平稳过程, 均值为  $m$  , 协方差函数为  $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$  , 其中:  $\tau \in R$  ,  $a, b > 0$  。对固定的  $T > 0$  , 令  $Y = T^{-1} \int_0^T X(s) ds$  , 证明:  $E\{Y\} = m$  ,  

$$\text{Var}(Y) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]$$
 。
- 9、设  $(X, Y) \sim N(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$  , 令  $X(t) = X + tY$  , 以及  $Y(t) = \int_0^t X(u) du$  ,  

$$Z(t) = \int_0^t X^2(u) du$$
 , 对于任意  $0 \leq s \leq t$  ,

(1) 求  $E\{X(t)\}$  ,  $E\{Y(t)\}$  ,  $E\{Z(t)\}$  ,  $Cov(X(s), X(t))$  ,  $Cov(Y(s), Y(t))$  ;

(2) 证明  $X(t)$  在  $t > 0$  上均方连续、均方可导 ;

(3) 求  $Y(t)$  及  $Z(t)$  的均方导数。

10、 设随机过程  $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$  是均值为零、自相关函数为  $R_X(\tau)$  的实平稳正态过程。设  $X(t)$  通过线性全波检波器后，其输出为  $Y(t) = |X(t)|$ ，试求：

(1) 随机过程  $Y(t)$  的相关函数  $R_Y(\tau)$ ，并说明其是否为平稳过程；

(2) 随机过程  $Y(t)$  的均值和方差；

(3) 随机过程  $Y(t)$  的一维概率分布密度函数  $f_Y(y)$ 。