第一章 随机过程及其分类

1、 设随机向量(X,Y)的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布$N(0,1)$。

(a) 分别写出随机变量$X+Y$和$X-Y$的分布密度

(b) 试问：$X+Y$与$X-Y$是否独立？说明理由。

2、 设X和Y为独立的随机变量，期望和方差分别为μ_1,σ_1^2和μ_2,σ_2^2。

(a) 试求$Z=XY$和X的相关系数；

(b) Z与X能否不相关？能否有严格线性函数关系？若能，试分别写出条件。

3、 设$\{X(t), t\ge 0\}$是一个实的均值为零，二阶矩存在的随机过程，其相关函数为$E\{X(s)X(t)\}=B(t-s), s\le t$，且是一个周期为$T$的函数，即$B(\tau+T)=B(\tau), \tau\ge 0$，试求方差函数$D[X(t)-X(t+T)]$。

4、 考察两个谐波随机信号$X(t)$和$Y(t)$，其中：

$$X(t)=A\cos(\omega_c t+\phi),\quad Y(t)=B\cos(\omega_c t)$$

式中A和ω_c为正的常数；ϕ是$[-\pi,\pi]$内均匀分布的随机变量，B是标准正态分布的随机变量。

(a) 求$X(t)$的均值、方差和相关函数；

(b) 若ϕ与B独立，求$X(t)$与$Y(t)$的互相关函数。

5、 设$\xi(t)=X\sin(Yt); t\ge 0$，而随机变量X、Y是相互独立且都服从$[0, 1]$上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。

6、 设随机向量$X=(X_1,X_2)^\tau \sim N(\mu,\Sigma)$，其中：$\mu=(\mu_1,\mu_2)^\tau=(1,2)^\tau$，$\Sigma=\begin{pmatrix}1 & 4/5\\ 4/5 & 1\end{pmatrix}$，令随机向量$Y=(Y_1,Y_2)^\tau=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}X$。

(a) 试求随机向量Y的协方差矩阵、$E\{Y_2 | Y_1\}$及$E\{Y_1+Y_2\}$；

(b) 试问$X_2-E\{X_2 | X_1\}$与X_1是否独立？证明你的结论。

7、 设$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布随机变量序列，且$P\{\xi_n=-1\}=1-p$，$P\{\xi_n=1\}=p$，令：$X_0=0$，$X_n=(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)/\sqrt{n}$，$n=1,2,\cdots$。求随机序列$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$的均值函数、协方差函数和相关函数。

8、 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，Y满足参数为p的几何分布，即$P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，其中：$0<p<1, k=1,2,\cdots$，X与Y独立。令$X(t)=X+e^{-t}Y$，试求：

(1) $X(t)$在$t>0$的一维概率密度函数；

（2） $E\{X(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$（$0 \le s \le t$）；

9、 设 $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$，$t \in R$，其中 A 和 B 是独立同分布的均值为零方差为 σ^2 的正态随机变量，试求：

（1）　$X(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　$X(t)$ 的一维概率密度函数；

（3）　$X(t)$ 的二维概率密度函数。

10、　设随机过程 $\xi(t) = X\cos 2t + Y\sin 2t$，$-\infty < t < +\infty$，其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

（1）　如果 $X \sim U(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

（2）　如果 $X \sim N(0,1)$，试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数；

11、　设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为 T_0 的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\} = P\{X(t)=+1\} = P\{X(t)=-1\} = P\{X(t)=-2\} = 1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差 u 为均匀分布在 $(0,T_0)$ 内的随机变量。试给出随机过程 $X(t)$ 的状态空间，画出样本函数及求出其均值函数和相关函数。

12、　设有一质点在 X 轴上作随机游动，即在 $t=1,2,3,\cdots$ 时质点可以在 x 轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为 p 和 $q=1-p$，且各次游动是相互独立的。经过 n 次游动，质点所处的位置为 X_n，试求 X_n 的均值函数、自相关函数及自协方差函数。

13、　设给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 及实数 x，定义随机过程

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \le x \\ 0, & X(t) > x \end{cases} \qquad t \in T$$

试将 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数用过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数来表示。