λ 矩阵与矩阵的Jordan标准形

λ 矩阵的基本概念

定义：设 $a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为数域 F 上的多项式，则称

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或λ矩阵。

定义 如果λ矩阵$A(\lambda)$中有一个r阶 $(r \geq 1)$子式不为零，而所有$r+1$阶子式(如果有的话)全为零，则称$A(\lambda)$的**秩**为r，记为

$$\mathrm{Rank}A(\lambda) = r$$

零矩阵的秩为0。

定义 一个n阶λ矩阵称为**可逆**的，如果有一个n阶λ矩阵$B(\lambda)$，满足

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$$

这里E是n阶单位矩阵。$B(\lambda)$称为$A(\lambda)$矩阵的逆矩阵，记为$A^{-1}(\lambda)$。

定理 一个n阶λ矩阵$A(\lambda)$可逆的充要必要是$\det A(\lambda)$一个非零的常数。

定义 下列各种类型的变换，叫做λ矩阵的初等变换：

(1) 矩阵的任二行(列)互换位置；

(2) 非零常数c乘矩阵的某一行(列)；

(3) 矩阵的某一行(列)的$\varphi(\lambda)$倍加到另一行(列)上去，其中$\varphi(\lambda)$是λ的一个多项式。

对单位矩阵施行上述三种类型的初等变换便得相应得三种λ矩阵称为初等矩阵

$$P(i,j), P(i(c)), P(i,j(\varphi))$$

定理　对一个 $m \times n$的λ 矩阵$A(\lambda)$的行作初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘$A(\lambda)$,对$A(\lambda)$ 的列作初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$　。

定义　如果$A(\lambda)$ 经过有限次的初等变换之后变成$B(\lambda)$，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ **等价**，记之为

$$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$$

定理　$A(\lambda)$ 与$B(\lambda)$等价的充要条件是存在两个可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ ，使得

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$$

λ 矩阵Smith标准形的存在性

定 理　任意一个非零的$m\times n$型的 λ 矩阵都等价于一个对角矩阵，即

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r \geq 1, d_i(\lambda)$ 是首项系数为1的多项式且

$$d_i(\lambda) \,\big|\, d_{i+1}(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r-1)$$

称这种形式的 λ 矩阵为 $A(\lambda)$ 的Smith标准形。

$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

例1

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

将其化成Smith标准形。

解：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\simeq\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$
\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda \end{bmatrix}
$$

$$
\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}
$$

$$
\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}
$$

例 2
$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

将其化成Smith标准形。

解：

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \lambda \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda & \lambda \\ & -\lambda(\lambda+2) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & 0 \\ & -\lambda^2-2\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & & \\ & \lambda(\lambda+1)^2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda(\lambda+1) & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

例 3

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

将其化为Smith标准形。

解：

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \\ 4\lambda^2+3\lambda-7 & 3\lambda-3 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-1 \\ 3\lambda-3 & 4\lambda^2+3\lambda-7 & \lambda^2+3\lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - \lambda & \lambda - 1 \\ 0 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & \lambda^2 + 3\lambda - 4 & 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

例4

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-a & -1 & & \\ & \lambda-a & -1 & \\ & & \lambda-a & -1 \\ & & & \lambda-a \end{bmatrix}$$

将其化为Smith标准形。

解:

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix} -1 & \lambda-a & 0 & 0 \\ \lambda-a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} -1 & \lambda-a & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-a)^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-a)^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (\lambda - a)^2 & 0 \\ 0 & \lambda - a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (\lambda - a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - a)^3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (\lambda - a)^3 \\ 0 & 0 & \lambda - a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-a)^4 \end{bmatrix}$$

λ 矩阵标准形的唯一性

定义：$A(\lambda)$ 为一个 λ 矩阵且 $Rank(A(\lambda))=r$ 对于任意的正整数 k，$1 \le k \le r$，$A(\lambda)$ 必有非零的 k 阶子式，$A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子。

显然，如果 $rank(A(\lambda))=r$ ，则行列式因子一共有 r 个。

例1 求

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

的各阶行列式因子。

解：由于 $(1-\lambda,\lambda)=1$，所以 $D_1(\lambda)=1$ 。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^2-\lambda+1) = f(\lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3(-\lambda-1) = g(\lambda)$$

显然 $(f(\lambda),g(\lambda))=\lambda$ 而且其余的7个2阶子式也都包含 λ 作为公因子，所以

$$D_2(\lambda)=\lambda$$

另外 $|A(\lambda)|=-\lambda^3-\lambda^2 \Rightarrow D_3(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2$

注意： 观察$D_1(\lambda), D_2(\lambda), D_3(\lambda)$三者之间的关系。

定理1： 等价（相抵）λ 矩阵有相同的各阶行列式因子,从而有相同的秩。

设 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算上面的标准形的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda)=d_1(\lambda) \quad D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$$

$$\cdots \qquad D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$$

显然有:

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda) \quad d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$$

$$\cdots \qquad d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

由于$A(\lambda)$ 与上面的Smith标准形具有相同的各阶行列式因子，所以$A(\lambda)$ 的各阶行列式因子为

$$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$$

而

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

又是由这些行列式因子唯一确定的，于是我们得到

定理2：$A(\lambda)$ 的Smith标准形是唯一的。

例1　求下列 λ 矩阵的Smith标准形。

$$(1)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2)\begin{bmatrix} \lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda-a & c_{n-1} \\ & & & & \lambda-a \end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解： （1）容易计算出

$$D_1(\lambda)=1, D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2, D_4(\lambda)=\lambda^4(\lambda-1)^4$$

$$\Rightarrow \quad d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1), d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2$$

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda(\lambda-1) & & \\ & & \lambda(\lambda-1) & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

（2）首先观察此矩阵的元素排列规律，显然

$$D_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$$

下面看 $n-1$ 阶行列式因子。有一个 $n-1$ 阶子式要注意，即

$$\begin{vmatrix} c_1 & & & \\ \lambda - a & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda - a & c_{n-1} \end{vmatrix} = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$$

容易计算出 $D_{n-1}(\lambda) = 1$ 从而

$$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1$$

$$\Rightarrow d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, \cdots, d_{n-1}(\lambda) = 1,$$

$$d_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\lambda - a)^n \end{bmatrix}$$

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda+2)^4 \end{bmatrix}$$

定理3 λ矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$ 等价的充要条件是对于任何的k，它们的k阶行列式因子相同。

定理4 λ矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子。

与一般的数字矩阵一样，我们有下面的推论：

推论1 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件为 $A(\lambda)$ 与单位矩阵等价。

推论2 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件为 $A(\lambda)$ 可以表示成一系列初等矩阵的乘积。

初等因子和矩阵的相似

设 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$$

在复数域内将它们分解成一次因式的幂的乘积:

$$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{11}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{12}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{1s}}$$

$$d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{21}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{22}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{2s}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{e_{r1}}(\lambda - \lambda_2)^{e_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{e_{rs}}$$

其中$\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 是互异的复数，e_{ij} 是非负整数。因为$d_i \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,\cdots,r-1)$ ，所以满足如下关系

$$0 \le e_{11} \le e_{21} \le \cdots \le e_{r1}$$

$$0 \le e_{12} \le e_{22} \le \cdots \le e_{r2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$0 \le e_{1s} \le e_{2s} \le \cdots \le e_{rs}$$

定义 在上式中，所以指数大于零的因子

$$(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}, e_{ij}>0, i=1,\cdots,r, j=1,\cdots,s$$

称为λ 矩阵$A(\lambda)$ 的初等因子

例1 如果λ矩阵$A(\lambda)$的不变因子为

$$d_1(\lambda)=1$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3(\lambda-2)$$

则 $A(\lambda)$ 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\lambda^2,\lambda-1,$

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^3,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,(\lambda-2)$$

例2 如果 5×6 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为4，其初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3, (\lambda+i)^3$ $(\lambda-i)^3$ 求 $A(\lambda)$ 的Smith标准形。

解：首先求出 $A(\lambda)$ 的不变因子

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+i)^3(\lambda-i)^3$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_1(\lambda)=1$$

从而 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为

$$A(\lambda)\cong\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理1　n 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们有相同的秩且有相同的初等因子。

定理2 设 λ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} B(\lambda) & \\ & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

为准对角形矩阵，则 $B(\lambda)$ 与 $C(\lambda)$ 的初等因子的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

此定理也可推广成如下形式：

定理3　若 λ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} A_1(\lambda) & & & \\ & A_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t(\lambda) \end{bmatrix}$$

则 $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \cdots, A_t(\lambda)$各个初等因子的全体就是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

例1　　求 λ 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

的初等因子，不变因子与标准形。

解：记 $A_1(\lambda)=\lambda^2+\lambda, A_2(\lambda)=\lambda,$

$$A_3(\lambda)=\begin{bmatrix} (\lambda+1)^2 & \lambda+1 \\ -2 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

那么

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} A_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & A_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & A_3(\lambda) \end{bmatrix}$$

对于 $A_3(\lambda)$ ，其初等因子为$\lambda,\lambda-1,\lambda+1$

由上面的定理可知 $A(\lambda)$ 的初等因子为

$$\lambda,\lambda,\lambda,\lambda-1,\lambda+1,\lambda+1$$

因为 $A(\lambda)$ 的秩为4，故 $A(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1), d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1),$$

$$d_2(\lambda)=\lambda, d_1(\lambda)=1$$

因此 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为

$$A(\lambda)\simeq\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)\end{bmatrix}$$

例2 判断下面两个 λ 矩阵是否等价？

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} 3\lambda+1 & \lambda & 4\lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+2 & \lambda & \lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & \lambda^2-2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda-3 & \lambda^2-2\lambda \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例3 求下面 λ 矩阵不变因子

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

例4 求下列 λ 矩阵的行列式 因子与不变因子

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{bmatrix}$$

数字矩阵的相似与 λ 矩阵的等价

定理1： 设 A, B 是两个n 阶的数字矩阵， 那么 A与B 相似的充分必要条件为它们的特征矩阵

$$\lambda I - A$$

与

$$\lambda I - B$$

等价。

定义： 对于数字矩阵 A， 我们称 $\lambda I - A$ 的不变因子为 A 的不变因子，称 $\lambda I - A$ 的初等因子为 A 的初等因子。

对于任何一个数字矩阵 A, $|\lambda I - A| \neq n$ 所以 $rank(\lambda I - A) = n$ ，于是可得下面两个定理

定理2：两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子。

定理3：两个同阶的方阵 A, B 相似的充分必要条件是它们有相同的行列式因子（或不变因子）。

例 设 $\varepsilon \neq 0$ ，证明：

（1） n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}$$

与

$$B=\begin{bmatrix} a & \varepsilon & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & a \end{bmatrix}$$

相似；

（2） n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{bmatrix}$$

与

$$B=\begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & a \end{bmatrix}$$

不相似。

矩阵的Jordan标准形

定义： 称 n_i 阶矩阵

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

为Jordan块。设 $J_1, J_2, \cdots, J_s$ 为Jordan块，称准对角形矩阵

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为Jordan标准形矩阵。由前面的例题和定理可知Jordan块的初等因子为

$$(\lambda-a_i)^{n_i}$$

从而Jordan标准形矩阵的初等因子为

$$(\lambda-a_1)^{n_1},(\lambda-a_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-a_s)^{n_s}$$

于是可以得到下面的定理

定理： 设 $A \in C^{n\times n}$， A的初等因子为

$$(\lambda-a_1)^{n_1},(\lambda-a_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-a_s)^{n_s}$$

则

$$A \sim J$$

，这里

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 & & & \\ & a_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & a_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, s)$$

我们称 J 是矩阵 A 的Jordan标准形。特别地，我们有

定理: A 可以对角化的充分必要条件是 A

的初等因子都是一次因式。

例1 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I-A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为

$$(\lambda-1)^2, \quad \lambda-2$$

故 A 的标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

或

$$J=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例2 求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解： 先求出 A 的初等因子。对 $\lambda I-A$ 运用初等变换可以得到

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 3 & -6 \\ -2 & 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda - 2) \end{bmatrix}$$

所以 A 的初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda - 2$$

故 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

或

$$J=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

求Jordan标准形的另一种方法：**特征矩阵秩的方法.**

具体操作步骤：

（1）先求出该矩阵的特征多项式及其特征值;

（2）其Jordan标准形的主对角线上都是A的特征值，并且特征值λ_i在主对角线上出现的次数等于λ_i作为特征根的重数。对于每个特征值 λ_i ，求出以它为主对角元的各级Jordan 块的数目 $N(\lambda_i)$ ，首先求出

$$rank(A-\lambda_i I)$$

那么以λ_i为主对角元的 Jordan 块的总数是

$$N(\lambda_i)=n-rank(A-\lambda_i I)$$

这里 n 为该矩阵的阶数，而以 λ_i 为主对角元的 t 级 Jordan 块的数目是

$$N(t;\lambda_i)=rank(A-\lambda_i I)^{t+1}$$

$$+rank(A-\lambda_i I)^{t-1}-2rank(A-\lambda_i I)^{t}$$

依次求出

$$N(1;\lambda_i),N(2;\lambda_i),\cdots,N(t;\lambda_i)$$

直至满足条件

$$N(\lambda_i) = N(1;\lambda_i) + N(2;\lambda_i) + \cdots + N(t;\lambda_i)$$

为止。

（3）根据第二步求出的各级Jordan块的数目，就可以写出 A 的一个Jordan标准形。

例1 用矩阵秩的方法求出矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解： 先求出 A 的特征多项式及其特征值。

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 2 & 14 & \lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

对于特征值 $\lambda_1=1$，它是 $f(\lambda)$ 的1重根，从而 λ_1 在 A 的 Jordan 标准形的主对角线上出现一次，因此 J 中主对角元为1 的Jordan块只有一个且它为一阶的。

对于特征值$\lambda_2 = 3$，先求 $rank(A-3I)$

$$A-3I=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & -14 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以$rank(A-3I)=2$ 从而

$$N(\lambda_2)=n-2=3-2=1$$

特征值 $\lambda_2 = 3$ 是 $f(\lambda)$ 的两重根，从而 λ_2 在 A 的Jordan标准形 J 的主对角线上出现两次，因此 J 中主对角元为 3的Jordan块只有一个且它为二阶的。故 A 的标准形为

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

或

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例2 用矩阵秩的方法求出矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形。

解：首先求出其特征值，显然其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4$$

所以$\lambda=1$为$f(\lambda)$的4重根，从而λ 在A 的Jordan 标准形 J 的主对角线上出现四次，下面计算 J 中主对角元为1 的Jordan块的数目，先计算$rank(A-I)$， 容易得到

$$rank(A-I)=3$$

那么中主对角元为$\lambda=1$的Jordan块数是

$$N(\lambda)=n-rank(A-I)=4-3=1$$

由此立即可得其Jordan标准形为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

如何求相似变换矩阵？

设 n 阶方阵 A 的Jordan标准形为 J ,则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=J$$

称 P 为相似变换矩阵。对于相似变换矩阵的一般理论我们不作过多的讨论，只通过具体的例题说明求 P 的方法。

例1 求方阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

的Jordan标准形及其相似变换矩阵 P 。

解： 首先用初等变换法求其Jordan标准形：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 8 \\ 3 & \lambda + 1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda + 5 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda+1,(\lambda+1)^2$$

从而 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为 P ，则 $P^{-1}AP=J$ ，对于P 按列分块记为 $P=\left[X_1,X_2,X_3\right]$

于是有

$$AP = A\left[X_1, X_2, X_3\right] = \left[AX_1, AX_2, AX_3\right]$$

$$= PJ = \left[X_1, X_2, X_3\right]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-X_1, -X_2, X_2 - X_3\right]$$

从而可得

$$AX_1 = -X_1, AX_2 = -X_2, AX_3 = X_2 - X_3$$

整理以后可得三个线性方程组

$$(I+A)X_1=0$$

$$(I+A)X_2=0$$

$$(I+A)X_3=X_2$$

前面的两个方程为同解方程组，可以求出它们的一个基础解系：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}0, & 1, & 0\end{bmatrix}^T,\alpha_2=\begin{bmatrix}-2, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$$

可以取 $X_1=\alpha_1$，但是不能简单地取$X_2=\alpha_2$，这是因为如果 X_2 选取不当会使得第三个非齐次线性方程组无解。由于 α_1,α_2

的任意线性组合都是前两个方程组的解，所以应该取

$$X_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

使得第三个非齐次方程有解，即其系数矩阵与增广矩阵有相同地秩，容易计算出其系数矩阵的秩为1，从而应该使得增广矩阵

$$\left[I + A, \quad X_2 \right]$$

的秩也为1。即

$$\begin{bmatrix} I+A, & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & -2k_2 \\ 3 & 0 & 6 & k_1 \\ -2 & 0 & -4 & k_2 \end{bmatrix}$$

容易看出只需令 $k_1 = 3, k_2 = -2$ 就会使得上述矩阵的秩为1，于是

$$X_2 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = \begin{bmatrix} 4, & 3, & -2 \end{bmatrix}^T$$

再由第三个方程解出一个特解为

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}^T$$

，那么所求相似变换矩阵为

$$P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

例2 求方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

的Jordan标准形及其相似变换矩阵　。

解： 首先用初等变换法求其Jordan标准形：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda-1,(\lambda-1)^2$$

从而 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵：

设所求矩阵为 P，则 $P^{-1}AP=J$，对于按列分块记为 $P=\left[X_1,X_2,X_3\right]$

于是有

$$AP = A[X_1, X_2, X_3] = [AX_1, AX_2, AX_3]$$

$$= PJ = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [X_1, X_2, X_2 + X_3]$$

从而可得

$$AX_1 = X_1, AX_2 = X_2, AX_3 = X_2 + X_3$$

整理以后可得三个线性方程组

$$(I-A)X_1=0$$

$$(I-A)X_2=0$$

$$(I-A)X_3=-X_2$$

前面的两个方程为同解方程组，可以求出它们的一个基础解系：

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}-1, & 1, & 0\end{bmatrix}^T,\alpha_2=\begin{bmatrix}3, & 0, & 1\end{bmatrix}^T$$

可以取 $X_1=\alpha_1$，但是不能简单地取 $X_2=\alpha_2$，这是因为如果 X_2选取不当会使得第三个非齐次线性方程组无解。由于 α_1,α_2

的任意线性组合都是前两个方程组的解，所以应该取

$$X_2 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$$

使得第三个非齐次方程有解，即其系数矩阵与增广矩阵有相同地秩，容易计算出其系数矩阵的秩为1，从而应该使得增广矩阵

$$\left[I - A, \quad -X_2 \right]$$

的秩也为1。即

$$[I-A, \quad -X_2] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & k_1-3k_2 \\ 1 & 1 & -3 & -k_1 \\ 1 & 1 & -3 & -k_2 \end{bmatrix}$$

容易看只要 $k_1 = k_2$ 就会使得上述增广矩阵的秩为1。令 $k_1 = k_2 = 1$，于是

$$X_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = [2, \quad 1, \quad 1]^T$$

再由第三个方程解出一个特解为

$$X_3 = [2, \quad 0, \quad 1]^T$$

那么所求相似变换矩阵为

$$P=[X_1,X_2,X_3]=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

从而有

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

一般地，设 $A \in C^{n\times n}$，则存在 n 阶可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}$$

其中 J_i 为Jordan块，记 $P = [P_1, P_2, \cdots, P_t]$
这里 $P_i \in C^{n\times n_i}$

那么有

$$\left[AP_1, AP_2, \cdots, AP_t\right] = \left[P_1J_1, P_2J_2, \cdots, P_tJ_t\right]$$

$$\Rightarrow AP_i = P_iJ_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, t$$

记 $P_i = \left[X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i}\right]$，又可得

$$AX_{i1} = \lambda_i X_{i1}$$

$$AX_{i2} = X_{i1} + \lambda_i X_{i2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$AX_{in_i} = X_{in_i-1} + \lambda_i X_{in_i}$$

注意：X_{i1} 是矩阵 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量，特征向量 X_{i1} 的选取应该保证特征向量 X_{i2} 可以求出，同样特征向量 X_{i2} 的选取应该保证特征向量 X_{i3} 可以求出，依此类推，并且使得

$$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i}$$

线性无关。

Jordan标准形的某些应用

例1 对于方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

求 A^{10} 。

解： 首先用初等变换法求其Jordan标准形：

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}$$

故 A 的初等因子为

$$\lambda-1, (\lambda-1)^2$$

从而 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

再求相似变换矩阵P 且 $P^{-1}AP=J$ ，那么

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}$$

按照前面例题的方式，容易计算出

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

从而

$$A^{10}=PJ^{10}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 10\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19 & -20 & 60\\ -10 & -9 & 30\\ -10 & -10 & 31\end{bmatrix}$$

例2 求解常系数线性微分方程组

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 \qquad\qquad + 8x_3 \\
\frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 - x_2 + 8x_3 \\
\frac{dx_3}{dt} &= -2x_1 \qquad\qquad - 5x_3
\end{aligned}$$

解： 令

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix}$$

那么此方程组可表示成

$$\frac{dX}{dt}=AX$$

由前面的例题可知存在

$$P=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

使得

$$P^{-1}AP=J=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

作线性替换

$$X = PY, \quad Y = \left[y_1, \quad y_2, \quad y_3\right]^T$$

从而可得

$$\frac{dY}{dt} = P^{-1}APY = JY$$

整理即得方程

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_3$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -y_3$$

首先得到两个很显然的解

$$y_1 = k_1 e^{-t}, \quad y_3 = k_3 e^{-t}$$

然后再解第三个方程

$$\frac{dy_2}{dt} + y_2 = k_3 e^{-t}$$

其解为

$$y_2 = e^{-t}(k_3 t + k_2)$$

这样得到

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y_2 + y_3 \\ y_1 + 3y_2 \\ -2y_2 \end{bmatrix}$$

即

$$x_1 = (4k_3t + 4k_2 + k_3)e^{-t}$$

$$x_2 = (3k_3t + 3k_2 + k_1)e^{-t}$$

$$x_3 = (-2k_3t - 2k_2)e^{-t}$$

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数。

例3 设 A 为数域 F 上的 n 阶方阵且满足 $A^2 = A$ ，证明：A 与对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

相似。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ=J$$

由于 $A^2=A$，所以有

$$J^2=(Q^{-1}AQ)^2=Q^{-1}A^2Q=Q^{-1}AQ=J$$

从而 $J_i^2 = J_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t.$ 即

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立且 $\lambda_i^2=\lambda_i$ ，所以有

$$\lambda_i=1, \quad \lambda_i=0$$

这说明 J 为一个对角矩阵且主对角线上的元素只能为1 或0，适当地调换主对角线上的元素次序可以得到方阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

此矩阵仍然与A 相似。

例4 设 A为数域 F上的 n 阶方阵且存在

正整数 n 使得 $A^n = I$，证明：A 与对角矩阵相似且主对角线上的元素均为 n 次单位根。

证明： 设 A 的Jordan标准形为

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_t \end{bmatrix}, \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

即有可逆矩阵 Q 使得

$$Q^{-1}AQ = J$$

由于 $A^n = I$ ，所以有

$$J^n = (Q^{-1}AQ)^n = Q^{-1}A^nQ = Q^{-1}IQ = I$$

从而有

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & * & \cdots & * \\ & \lambda_i^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i^n \end{bmatrix} = I_k$$

因此，只有当 J_i 为一阶矩阵时上面的矩阵等式才成立，这样有 $t=n$ ，这表明 J 为对角矩阵，所以 A 与对角矩阵相似。

例5 试写出Jordan标准形均为

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

的两个矩阵。

解：

$$\begin{bmatrix} 2 & a & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & & b \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & c & 2 \end{bmatrix}$$

这里 a,b,c 为任意的非零数。