第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

（一）　二阶矩过程

1．基本概念

注：以下讨论的随机过程都是复随机过程。

定义：设有随机过程$\{X(t), t \in T\}$，若对$\forall t \in T$，$X(t)$的均值和方差都存在，则称随机过程$\{X(t), t \in T\}$为二阶矩过程。

若$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则$\mu_X(t) = E\{X(t)\}$存在，我们令$\tilde{X}(t) = X(t) - \mu_X(t)$，则有$E\{\tilde{X}(t)\} = 0$，并且$\tilde{X}(t)$的二阶矩也是存在的，因此我们以后讨论的二阶矩过程一般都假定均值函数为零。

注：二阶矩过程的自协方差函数和自相关函数都是存在的。因为：

$$\operatorname{cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\}$$

因此有：

$$\left|\operatorname{cov}\{X(t_1), X(t_2)\}\right|^2 \le \left\{E\left|[X(t_1) - \mu_X(t_1)]\overline{[X(t_2) - \mu_X(t_2)]}\right|\right\}^2$$

$$\le E\left|X(t_1) - \mu_X(t_1)\right|^2 \cdot E\left|X(t_2) - \mu_X(t_2)\right|^2$$

$$= D\{X(t_1)\} \cdot D\{X(t_2)\} < \infty$$

2．二阶矩过程相关函数的性质

定理：（共扼对称性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，则有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{R_{XX}(t_2, t_1)} \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

当$\{X(t), t \in T\}$是实的二阶矩过程时，有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

定理：（非负定性）设$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，对于$\forall n \in N$，

$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，以及$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in C$，我们有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} R_{XX}(t_k, t_m)\lambda_k \overline{\lambda_m} \geq 0$$

（二）　平稳过程

1. 严平稳过程

定义：若随机过程$\{X(t), t \in T\}$满足：对于$\forall n \in N$，任选$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,n$，以及任意的$\tau$，$x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_n + \tau)$$

则称此随机过程为严平稳随机过程。其中$F_X(\cdot)$是n维分布函数。

注 1：严平稳随机过程的一维分布函数与时间t无关。因此，如果严平稳随机过程的均值函数存在的话，则是一常数。

注 2：严平稳随机过程的任意二维分布函数只与时间差有关。因此，如果严平稳随机过程的二阶矩存在的话，则自相关函数只与时间差有关。

注 3：若上述的定义中的条件不是对于任意的n满足，而只是对于某个k满足时，即对于任意的$t_1 < t_2 < \cdots < t_k$，$t_i \in T, i = 1,2,\cdots,k$，任意的$\tau$，有

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1, t_2, \cdots, t_k) = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \cdots, t_k + \tau)$$

而对于$n > k$时，上述等式不成立，则称它为k级平稳的随机过程。如果过程为k级平稳的，那么当$n < k$时，上面的等式成立。

2. 宽平稳随机过程

定义：设随机过程$\{X(t), t \in T\}$是二阶矩过程，如果它的均值函数是常数，自相关函数只是时间差$\tau = t_2 - t_1$的函数，则称此随机过程为宽平稳随机过程。

注 1：宽平稳随机过程是二阶矩过程，但不一定是严平稳随机过程。

注 2：对于严平稳随机过程，只有它二阶矩存在时，它才是宽平稳过程。

注 3：对于正态随机过程来说，严平稳就是宽平稳。

注 4：以下讨论平稳过程指的是宽平稳随机过程

3．宽平稳随机过程的性质

（1） 我们有：$R_{XX}(t_2-t_1)=\overline{R_{XX}(t_1-t_2)}\quad \forall t_1,t_2\in T$

或： $R_{XX}(\tau)=\overline{R_{XX}(-\tau)}\quad \tau=t_2-t_1$，

对于实的随机过程，有： $R_{XX}(\tau)=R_{XX}(-\tau)\quad \tau=t_2-t_1$ （偶函数）

（2） 我们有：$R_{XX}(0)\ge|\mu_X|^2$

（3） 我们有：$|R_{XX}(\tau)|\le R_{XX}(0)$， $|C_{XX}(\tau)|\le C_{XX}(0)$

（4） 相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 具有非负定性，即对于 $\forall n\in N\quad t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，

以及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in C$，我们有：

$$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\begin{pmatrix} R_{XX}(t_1-t_1) & R_{XX}(t_1-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_1-t_n)\\ R_{XX}(t_2-t_1) & R_{XX}(t_2-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_2-t_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ R_{XX}(t_n-t_1) & R_{XX}(t_n-t_2) & \cdots & R_{XX}(t_n-t_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1}\\ \overline{\lambda_2}\\ \vdots\\ \overline{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_{XX}(t_i-t_k)\lambda_i\overline{\lambda_k}\ge 0$$

4．例子：

（1）热（白）噪声：

设 $\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是一实随机序列，满足：（a） $\{X(n)\}$ 相互独立；（b） $X(n)\sim N(0,\sigma^2)$。求其均值和相关函数。

解：由：

$$\mu_X(n)=E\{X(n)\}=0$$

$$D_X(n)=E\{X^2(n)\}=\sigma^2$$

$$\begin{cases} E\{X(n+m)X(n)\}=0 & (m\neq 0) \\ E\{X(n+m)X(n)\}=\sigma^2 & (m=0) \end{cases}$$

因此：

$$R_X(m)=\begin{cases} \sigma^2 & m=0 \\ 0 & m\neq 0 \end{cases}$$

所以它是一平稳随机序列。

（2）滑动平均：

设$\{X(n); n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是一标准不相关序列，即满足：

$$E\{X(n)\}=0$$

$$E\{X(n)\overline{X(m)}\}=\begin{cases} 0 & m\neq n \\ 1 & m=n \end{cases}$$

令$Y(n)=a_0X(n)+a_1X(n-1)+\cdots+a_sX(n-s)$，证明$\{Y(n)\}$是一平稳序列。其中$a_0,a_1,\cdots,a_s\in C$。

证明：显然：$\mu_Y(n)=E\{Y(n)\}=0$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= E\{Y(n+m)\overline{Y(n)}\} \\ &= E\left\{\sum_{k=0}^{s}a_kX(n+m-k)\overline{\sum_{i=0}^{s}a_iX(n-i)}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{s}\sum_{k=0}^{s}a_k\overline{a_i}E\{X(n+m-k)\overline{X(n-i)}\} \\ &= \sum_{0\le k\le s, 0\le k-m\le s}a_k\overline{a_{k-m}} \end{aligned}$$

故$\{Y(n)\}$是一平稳序列。

（3）设有复随机过程$X(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中$\eta_k\ (1\le k\le N)$是相互独立的随机变量，且$\eta_k\sim N(0,\sigma_k^2)$，$\omega_k$为常数。求$X(t)$的均值函数和相关函数，并说明是否是平稳过程？

解：由$\eta_k\ (1\le k\le N)$的独立性及均值为 0，显然有：

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{j\omega_k t}\right\}$$
$$= E\left\{\sum_{k=1}^{N} \eta_k \cos\omega_k t + j \cdot \sum_{k=1}^{N} \eta_k \sin\omega_k t\right\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\}$$
$$= E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} \eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N} \eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$
$$= E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \eta_k \overline{\eta_i} e^{j\omega_k t_1 - j\omega_i t_2}\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{j\omega_k (t_1 - t_2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau} \quad (\tau = t_1 - t_2)$$

由此可知 $X(t)$ 是一平稳的随机过程。

（4）设随机过程

$$\xi(t) = \begin{cases} Xt + a & T > t \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 T 为一固定常数，随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，a 为一常数。求 $E\{\xi(t)\xi(s)\}$，其中 $t > s$。

解：由于随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，即其分布密度为：

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (x > 0)$$

我们有：

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \lambda$$
$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2\lambda^2$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\xi(s)\} = E\{[Xt + a][Xs + a]\} =$$
$$= E\{X^2 ts + X(ta + sa) + a^2\}$$
$$= tsE\{X^2\} + (ta + sa)E\{X\} + a^2$$
$$= 2ts\lambda^2 + (t + s)a\lambda + a^2 \quad (t > s)$$

（三）　正交增量过程

定义：设随机过程$\{X(t), t\in T\}$是二阶矩过程，若$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，有：

$$E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}=0$$

则称该过程为正交增量过程。

独立增量过程与正交增量过程的关系：对于独立增量过程$\{X(t), t\in T\}$，若它还满足：$E\{X(t)\}=a$，$E\{|X(t)|^2\}<\infty$，则该过程为正交增量过程。因为此时若任意取$t_1<t_2\le t_3<t_4$，且$t_1,\cdots,t_4\in T$，由独立增量性，我们有：

$$\begin{aligned}&E\left\{\left[X(t_2)-X(t_1)\right]\left[\overline{X(t_4)-X(t_3)}\right]\right\}\\&=E\{X(t_2)-X(t_1)\}E\{\overline{X(t_4)-X(t_3)}\}=0\end{aligned}$$

因此，均值为常数、存在二阶矩的独立增量过程一定是正交增量过程。反之，我们有非平稳随机过程的例子：

设$\{X(t), t\in[a,b]\}$为正交增量过程，规定$X(a)=0$，取$t_1=a$，$t_2=t_3=s$，$t_4=t\le b$，$t>s$，则由定义，有：

$$E\{X(s)[\overline{X(t)-X(s)}]\}=E\{X(s)\overline{X(t)}\}-E\{X(s)\overline{X(s)}\}=0$$

因此有：

$$E\{X(s)\overline{X(t)}\}=E\{X(s)\overline{X(s)}\}=E\{|X(s)|^2\}\triangleq F(s)$$

由此，我们有：

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(s)\quad (t>s)$$

$$R_{XX}(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F(t)\quad (t<s)$$

因此有：

$$R_{XX}(s,t)=F(\min(s,t))$$

这就意味着$\{X(t), t\in[a,b]\}$不是一平稳过程。

另外，当$t>s$时，由：

$$E\{|X(t)-X(s)|^2\}=E\{X(t)\overline{X(t)}\}-E\{X(t)\overline{X(s)}\}$$
$$-E\{X(s)\overline{X(t)}\}+E\{X(s)\overline{X(s)}\}$$
$$=F(t)-F(s)-F(s)+F(s)=F(t)-F(s)\geq 0$$

可知，$F(t)$是一不减的函数。

注：设$\{X(t); t\geq 0\}$是一独立增量过程，且$X(0)=0$及它的二阶矩存在，我们令：

$$Y(t)=X(t)-\mu_X(t)$$

则由$\{X(t); t\geq 0\}$是独立增量性，可知$\{Y(t); t\geq 0\}$也具有独立增量性，且有：

$$Y(0)=0,\quad E\{Y(t)\}=0,\quad D_Y(t)=E\{Y^2(t)\}=D_X(t)$$

下面我们求$\{X(t); t\geq 0\}$的协方差函数：若$0\leq s<t$

$$C_X(s,t)=E\{Y(s)\overline{Y(t)}\}$$
$$=E\left\{[Y(s)-Y(0)][\overline{Y(t)-Y(s)+Y(s)}]\right\}$$
$$=E\left\{Y(s)-Y(0)\right\}E\left\{\overline{Y(t)-Y(s)}\right\}+E\{Y^2(s)\}$$
$$=D_X(s)$$

由此可得：对于任意的$s,t\geq 0$，有

$$C_X(s,t)=D_X(\min(s,t))$$

因此，对于强度为λ的齐次 **Poission** 过程，我们可以得到：

$$C_N(s,t)=\lambda\min(s,t),\quad s,t\geq 0$$

$$R_N(s,t)=\lambda^2 st+\lambda\min(s,t),\quad s,t\geq 0$$

同样地，对于非其次 **Poission** 过程，有：

$$R_N(s,t)=\int_0^{\min(s,t)}\lambda(\tau)d\tau\left[1+\int_0^{\min(s,t)}\lambda(\tau)d\tau\right],\quad s,t\geq 0$$

例：设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一正交增量过程，并且有 $X(0)=0$，$E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\left\{\left|X(t)-X(s)\right|^2\right\}=\left|t-s\right|$$

试求：

（1） 证明：$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=\frac{1}{2}\left(\left|t\right|+\left|s\right|-\left|t-s\right|\right)$；

（2） 令：$\xi_n(t)=n\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]$，$n=1,2,\cdots$，则对每一个 n，证明 $\{\xi_n(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是一平稳过程。

解：(1) 任取 $s,t\in R$，由 $X(t)$ 是一正交增量过程，令：$F(t)=E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}$，我们有：

(a) 当 $s>0, t<0$ 或 $s<0, t>0$ 时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=0$$

(b) 当 $s>0, t>0$ 时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F\left(\min\{s,t\}\right)$$

(c) 当 $s<0, t<0$ 时，

$$R_X(s,t)=E\{X(s)\overline{X(t)}\}=F\left(\max\{s,t\}\right)$$

因此，我们有：$R_X(s,t)=R_X(t,s)$。

由题目所给的条件，我们有：

$$\begin{aligned}\left|t-s\right| &= E\left\{\left|X(t)-X(s)\right|^2\right\}\\ &= E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}-E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}-E\left\{X(s)\overline{X(t)}\right\}+E\left\{\left|X(s)\right|^2\right\}\\ &= F(t)-R_X(t,s)-R_X(s,t)+F(s)=F(t)-2R_X(s,t)+F(s)\end{aligned}$$

$$\left|t\right|=E\left\{\left|X(t)-X(0)\right|^2\right\}=E\left\{\left|X(t)\right|^2\right\}=F(t)$$

$$\left|s\right|=E\left\{\left|X(s)-X(0)\right|^2\right\}=E\left\{\left|X(s)\right|^2\right\}=F(s)$$

由此可得：

$$E\left\{X(t)\overline{X(s)}\right\}=R_X(t,s)=R_X(s,t)=\frac{1}{2}\left(\left|t\right|+\left|s\right|-\left|t-s\right|\right)$$

（2）由题意及（1）的结果，我们有：

$$R_{\xi_n}(t,s)=E\{\xi_{nt}\overline{\xi_{ns}}\}=n^2E\left\{\left[X\left(t+\frac{1}{n}\right)-X(t)\right]\left[\overline{X\left(s+\frac{1}{n}\right)-X(s)}\right]\right\}$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t+\frac{1}{n}\right|+\left|s+\frac{1}{n}\right|-|t-s|+|t|+|s|-|t-s|-|t|-\left|s+\frac{1}{n}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|t-s-\frac{1}{n}\right|-\left|t+\frac{1}{n}\right|-|s|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|\ \right]$$

$$=\frac{n^2}{2}\left[\left|t-s-\frac{1}{n}\right|+\left|t+\frac{1}{n}-s\right|-2|t-s|\right]$$

$$=\begin{cases} n[1-n|t-s|], & 0\le|t-s|\le 1/n \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\{\xi_n(t)\}=0$$

由此可知，随机过程$\{\xi_n(t),-\infty<t<+\infty\}$是一平稳过程。

（四）　随机分析

1．均方极限

定义：设随机序列$\{X_n;n=1,2,\cdots\}$及随机变量X均存在二阶矩，即$E\{|X_n|^2\}<\infty, E\{|X|^2\}<\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty}E\{|X_n-X|^2\}=0$$

则称随机序列$\{X_n\}$均方收敛于X，或序列$\{X_n\}$的均方极限为X，记作

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$$

关于均方极限，具有以下性质

（1）　如果$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n=X$，则有：

(a)　$\lim_{n\to\infty}E\{X_n\}=E\{X\}=E\left\{\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,X_n\right\}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\left\{\left|\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n\right|^2\right\}$

(2) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(aX_n + bY_n) = aX + bY$$

其中 a, b 为任意的复数。

(3) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, Y_n = Y$ 则有：

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X\overline{Y}\}$$

(4) 均方极限是唯一的。即，若 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$ 及 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = Y$，则有

$$X = Y$$

(5) （柯西准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 X）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{|X_n - X_m|^2\} = 0$$

(6) （列维 **Loeve** 准则）随机序列 $\{X_n; n = 1,2,\cdots\}$ 均方收敛（于 X）的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty,\, m\to\infty} E\{X_n \overline{X_m}\} = c$$

其中 c 为复常数

(7) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，$f(u)$ 是一确定性函数，并且满足 **Lipschitz** 条件，即

$$|f(u) - f(v)| \le M|u - v|$$

其中 M 是正常数。又假设 $f(X_n)$，$f(X)$ 的二阶矩都存在，则有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, f(X_n) = f(X)$$

(8) 如果 $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$，则对于任意有限的 t，有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \exp\{jtX_n\} = \exp\{jtX\}$$

2．二阶矩过程的均方连续

定义：设二阶矩过程$\{X(t); t\in T\}$，$t_0 \in T$，若有：

$$\lim_{h\to 0} E\{|X(t_0+h)-X(t_0)|^2\}=0$$

即

$$X(t_0)=\underset{h\to 0}{l.i.m}\, X(t_0+h)$$

则称$X(t)$在$t=t_0$点均方意义下连续。若对于$\forall t\in T$，$X(t)$均在均方意义下连续，则称过程$\{X(t); t\in T\}$在均方意义下连续，或称过程具有均方连续性。

定理：设有二阶矩过程$\{X(t); t\in T\}$，$R(s,t)$为其自相关函数，则$\{X(t); t\in T\}$在$t=t_0\in T$上均方连续的充分必要条件是：自相关函数$R(s,t)$在点$(t_0,t_0)\in T\times T$处连续。

定理：若二阶矩过程$\{X(t); t\in T\}$在均方意义下连续，则对于$\forall t\in T$，有：

$$\lim_{h\to 0} E\{X(t+h)\}=E\{X(t)\}$$

定理：设$\{X(t); t\in(-\infty,+\infty)\}$是宽平稳过程，则以下各条件是等价的：

（a）$\{X(t)\}$均方连续；

（b）$\{X(t)\}$在点$t=0$处均方连续；

（c）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在$-\infty<\tau<+\infty$上连续；

（d）自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau=0$处连续。

即：宽平稳过程$\{X(t); t\in(-\infty,+\infty)\}$均方连续的充分必要条件为：自相关函数$R_{XX}(\tau)$在点$\tau=0$处连续。

3．均方导数

（1）定义

定义：设有随机过程$\{X(t);t\in T\}$，$\{Y(t);t\in T\}$，如果

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t_0+h)-X(t_0)}{h}=Y(t_0)$$

其中$t_0,t_0+h\in T$，则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$在$t=t_0\in T$处均方可导，并称$Y(t_0)$为过程$\{X(t);t\in T\}$在$t=t_0$处的均方导数，记作$X'(t_0)\hat{=}Y(t_0)$。若对于$\forall t\in T$，$X(t)$均在均方意义下可导，即有：

$$\lim_{h\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-Y(t)\right|^2\right\}=0$$

则称$Y(t)=X'(t)=\dfrac{dX(t)}{dt}$为随机过程$X(t)$在均方意义下的导数。

利用柯西准则，我们有：

定义：设有随机过程$\{X(t);t\in T\}$，$\{Y(t);t\in T\}$，如果对于$\forall t\in T$，有：

$$\lim_{h\to 0,\,k\to 0}E\left\{\left|\frac{X(t+h)-X(t)}{h}-\frac{X(t+k)-X(t)}{k}\right|^2\right\}=0$$

则称$X(t)$在均方意义下导数存在（可以求导）。记

$$\underset{h\to 0}{l.i.m}\frac{X(t+h)-X(t)}{h}=X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}=\dot{X}(t)$$

称此为$X(t)$在t处的均方导数或均方微商。

（2）均方可导的判定准则

定理：设二阶矩过程$X(t)$，它的自相关函数为$R(s,t)$，则$X(t)$在点$t=t_0\in T$处具有均方导数的充分必要条件为：

$$\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

在点(t_0,t_0)附近存在且在点(t_0,t_0)处连续。若二阶矩过程$X(t)$在T内均方可导，则其均方导数的相关函数为：

$$R_{X'}(s,t)=E\{X'(s)X'(t)\}=\frac{\partial^2 R(s,t)}{\partial t\partial s}$$

（3）均方导数的性质

（a）设 $X(t),Y(t)$ 为两个均方可导的随机过程，$a,b\in C$ 为复常数，则 $aX(t)+bY(t)$ 也均方可导，并且有：

$$\frac{d}{dt}\left[aX(t)+bY(t)\right]=a\frac{dX(t)}{dt}+b\frac{dY(t)}{dt}$$

（b）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，$f(t)$ 为一确定性函数，则 $f(t)X(t)$ 也是均方可导的随机过程，且有：

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)X(t)\right]=\frac{df(t)}{dt}X(t)+f(t)\frac{dX(t)}{dt}$$

（c）设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，则 $X'(t)$ 的均值函数为：

$$E\{X'(t)\}=\frac{dE\{X(t)\}}{dt}$$

（4）平稳随机过程的均方导数

若 $\{X(t);t\in T\}$ 为平稳随机过程，则有

$$R_{XX}(t,s)=R_{XX}(t-s)=R_{XX}(\tau),\quad \tau=t-s$$

若 $R''_{XX}(\tau)$ 存在，$\tau\in T$，而且在 $\tau=0$ 处 $R''_{XX}(\tau)$ 连续，则 $\{X(t);t\in T\}$ 均方可导，且

$$E\{X'(t)\overline{X'(s)}\}=-R''_{XX}(\tau)$$

这是因为：

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}=-\frac{d^2}{d\tau^2}R_{XX}(\tau)=-R''_{XX}(\tau)$$

当 $t=s$ 时，$\tau=0$，此时

$$\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t \partial s}\bigg|_{t=s} = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{XX}(\tau)\bigg|_{\tau=0} = -R''_{XX}(0)$$

因为平稳过程为实的随机过程时，有 $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$。若平稳随机过程 $X(t)$ 存在均方导数，则要求 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续，$R'(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 连续，因此 $R'(0) = 0$。

对于平稳随机过程，因为均值函数为常数，因此：

$$E\{X'(t)\} = \frac{d}{dt} E\{X(t)\} = 0$$

（5）高阶导数

若二阶矩过程 $X(t)$ 的自相关函数有 $2n$ 阶导数，且在对角线 $t = s$ 上连续，则 $X(t)$ 有均方意义下的 n 阶导数 $X^{(n)}(t) = \dfrac{d^n X(t)}{dt^n}$ 存在。且有：

$$\begin{aligned} R_{X^{(n)}}(t,s) &= E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(n)}(s)}\} \\ &= \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial s^n} R_X(t,s) \end{aligned}$$

$$E\left\{\frac{d^n}{dt^n} X(t)\right\} = \frac{d^n}{dt^n} E\{X(t)\}$$

$$\begin{aligned} R_{X^{(n)}X^{(m)}}(t,s) &= E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(m)}(s)}\} \\ &= \frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m} R_X(t,s) \end{aligned}$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程，则有：

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(\tau) = E\{X^{(n)}(t+\tau)\overline{X^{(m)}(t)}\} = (-1)^m \frac{d^{(n+m)}}{d\tau^{(n+m)}} R_X(\tau)$$

如果 $X(t), Y(t)$ 为两个二阶矩过程，则它们的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(t,s) = E\{X(t)\overline{Y(s)}\}$$

我们有：

$$R_{X'Y}(t,s)=E\{X'(t)\overline{Y(s)}\}=\frac{\partial}{\partial t}R_{XY}(t,s)$$

$$R_{X^{(n)}Y^{(m)}}(t,s)=E\{X^{(n)}(t)\overline{Y^{(m)}(s)}\}=\frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n\partial s^m}R_{XY}(t,s)$$

（6）泰勒级数展开

若$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$为平稳随机过程，其自相关函数为$R_X(\tau)$，如果$R_X(\tau)$是解析的，即$R_X(\tau)$存在各阶导数，且

$$R_X(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}R_X^{(n)}(0)\frac{\tau^n}{n!}$$

则$X(t)$可以进行泰勒展开，即有：

$$X(t+\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}X^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}$$

其中$X^{(n)}(t)$为随机过程$X(t)$的n阶均方导数。

4．随机积分

（1）随机积分的定义

定义：设$\{X(t);t\in[a,b]\}$为二阶矩过程，$h(t,\tau)$是定义在$[a,b]$上的以τ为参数的确定性函数，对$[a,b]$进行任意n划分：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$$

记：

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1},i=1,2,\cdots,n,\quad \hat{t}_i\in[t_{i-1},t_i],\quad \lambda=\max_i\{\Delta t_i\}$$

作和式：

$$S_n(\tau)=\sum_{i=1}^{n}h(\hat{t}_i,\tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

如果存在随机变量$Y(\tau)$，对于任意的划分，任意的$\hat{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$，都有：

$$\lim_{\lambda\to 0,\, n\to\infty} E\left\{\left|Y(\tau) - S_n(\tau)\right|^2\right\} = 0$$

或

$$\lim_{\lambda\to 0,\, n\to\infty} E\left\{\left|Y(\tau) - \sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i)\Delta t_i\right|^2\right\} = 0$$

则称$S_n(\tau)$均方收敛于$Y(\tau)$，并称$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积，记$S_n(\tau)$的均方极限为$\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$，即有：

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t,\tau)X(t)dt = \underset{\lambda\to 0,\, n\to\infty}{l.i.m} \sum_{i=1}^{n} h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

并称

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t,\tau)X(t)dt$$

为$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上的均方积分。

（2）均方可积的准则

定理：$h(t,\tau)X(t)$在$[a,b]$上均方可积的充分必要条件为：

$$\int_a^b\int_a^b h(t,\tau)\overline{h(u,\tau)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

存在。

由均方可积的定义可知，$Y(\tau)$是以τ为参数的随机过程，因此可以求其均值函数和相关函数，我们有：

$$\mu_Y(\tau) = E\{Y(\tau)\} = E\left\{\int_a^b h(t,\tau)X(t)dt\right\} = \int_a^b h(t,\tau)E\{X(t)\}dt$$

$$= \int_a^b h(t,\tau)\mu_X(t)dt$$

$$R_{YY}(\tau_1,\tau_2) = E\{Y(\tau_1)\overline{Y(\tau_2)}\}$$

$$= E\left\{\int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}X(t)\overline{X(u)}dtdu\right\}$$

$$= \int_a^b\int_a^b h(t,\tau_1)\overline{h(u,\tau_2)}R_{XX}(t,u)dtdu$$

（3）均方积分的性质

（a）若$\{X(t); t \in T \subset [a,b]\}$为均方连续随机过程，则对于$\forall t \in T$，有：

$$E\left\{\int_a^t X(u)du \overline{\int_a^t X(v)dv}\right\} = E\left\{\left|\int_a^t X(u)du\right|^2\right\}$$

$$\leq (t-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

$$\leq (b-a)\int_a^t E\{X(u)\overline{X(u)}\}du$$

（b）设随机过程$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，则有：

$$\left\{E\left|\int_a^b X(u)du\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \int_a^b \{E|X(u)|^2\}^{\frac{1}{2}} du$$

（c）设$X(t), Y(t)$在$[a,c]$上均方可积，α, β为复常数，则有：

$$\int_a^c [\alpha X(t) + \beta Y(t)]dt = \alpha\int_a^c X(t)dt + \beta\int_a^c Y(t)dt$$

若$a \leq b \leq c$，则有：

$$\int_a^c X(t)dt = \int_a^b X(t)dt + \int_b^c X(t)dt$$

（d）若随机过程$X(t)$在$[a,b]$上均方连续，记

$$Y(t) \hat{=} \int_a^t X(u)du \quad (a \leq t \leq b)$$

则$Y(t)$在$[a,b]$上均方连续，均方可导，且有：

$$Y'(t) = X(t)$$

（e）若随机过程$X(t)$均方可导，且$X'(t)$均方连续，则有：

$$X(b) - X(a) = \int_a^b X'(t)dt$$

例 1：设有平稳随机过程$X(t)$，它的相关函数为$R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$，其中$\alpha, \sigma$为常数，求$Y(t) = a\frac{dX(t)}{dt}$（$a$为常数）的自协方差函数和方差函数。

解：略。

例 2：设 N_t，$t \geq 0$ 是零初值、强度 $\lambda > 0$ 的泊松过程。写出过程的转移函数，并问在均方意义下，$Y_t = \int_0^t N_s ds, t \geq 0$ 是否存在，为什么？

解：泊松过程的转移函数为：

$$p(s,t,i,j) = P\{N_t = j | N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad t > s,\ j \geq i$$

其相关函数为：

$$R_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$$

由于在 $\forall t$，$R_N(t,t)$ 连续，故均方积分存在。

例 3：设 N_t，$t \geq 0$ 是零初值、强度 $\lambda = 1$ 的泊松过程。

（1）　求它的概率转移函数 $p(s,t,i,j) = P\{N_t = j | N_s = i\}$；

（2）　令 $X_t = N_t - t, t \geq 0$，说明 $Y = \int_0^1 X_t dt$ 存在，并求它的二阶矩。

解：（1）由上例，有：

$$p(s,t,i,j) = P\{N_t = j | N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} = \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-(t-s)}$$

（2）先求相关函数，由 $\lambda = 1$，得：

$$R_X(t,s) = E\{(N_t - t)(N_s - s)\} = \lambda \min\{t,s\} + \lambda^2 st + st(1-2\lambda) = \min\{t,s\}$$

对任意的 t，在 (t,t) 处 $R_X(t,t)$ 连续，故 X_t 均方连续，因此均方可积，$Y = \int_0^1 X_t dt$ 存在。

$$E\{Y^2\} = E\left\{\left[\int_0^1 X_t dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_0^1 X_t dt \int_0^1 X_s ds\right\} = E\left\{\int_0^1 \int_0^1 X_t X_s dtds\right\}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 R_X(t,s) dtds = \int_0^1 \int_0^1 \min\{t,s\} dtds = \int_0^1 dt \int_t^1 tds + \int_0^1 dt \int_0^t sds = \frac{1}{3}$$