第五章　平稳过程的谱分析

（一）　确定性函数（信号）的能谱分析

1．Fourier 变换

若函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足下列条件：(**a**)　$f(t)$ 在任意有限区间上满足 **Dirichlet** 条件（即函数连续或只有有限个第一类间断点，且只有有限个极值点）；（**b**）　$f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积；则在 $f(t)$ 的连续点处有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]e^{j\omega t}d\omega$$

令：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \qquad \text{(A)}$$

则有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \text{(B)}$$

我们称（**A**）为函数 $f(t)$ 的 **Fourier** 变换，记作：

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$$

$F(\omega)$ 称为 $f(t)$ 的象函数。

称（**B**）为 $F(\omega)$ 的 **Fourier** 逆变换，记为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$$

$f(t)$ 叫作 $F(\omega)$ 的象原函数。

在确定性信号的频谱分析中，**Fourier** 变换 $F(\omega)$ 又称为确定性信号 $f(t)$ 的频谱函数，而频谱函数的模 $|F(\omega)|$ 称为 $f(t)$ 的振幅频谱（亦简称为频谱）。由于 ω 是连续变化的，我们称之为连续频谱。对一个确定性信号作 **Fourier** 变换，

就是求这个信号的频谱。

乘积定理：若 $f_1(t), f_2(t)$ 都满足 **Fourier** 变换的条件，且 $F_1(\omega)=\mathfrak{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega)=\mathfrak{F}[f_2(t)]$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}d\omega$$

证明：由于，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{j\omega t}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_1(t)e^{-j\omega t}}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(\omega)\left[\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}dt}\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)d\omega$$

同理可以证明另一个等式。

2． 能量积分及能量谱密度

设函数 $f(t)$ 满足 **Fourier** 变换的条件，若 $F(\omega)=\mathfrak{F}[f(t)]$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$$

上面的等式称为 **Parseval** 等式。其中令：

$$S(\omega)=\left|F(\omega)\right|^2$$

称为函数（信号）$f(t)$ 的能量密度函数或能量谱密度。它可以决定函数（信号）$f(t)$ 的能量分布规律，将它对所有频率积分就得到 $f(t)$ 的总能量 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2 dt$。

能量谱密度满足：$S(\omega)=S(-\omega)$。

3． 确定性信号的卷积与相关函数

（1） 卷积

若给定函数 $f_1(t), f_2(t)$，则积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

称为函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t)*f_2(t)$。即：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

显然有：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$。

例：若 $f_1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq 0\end{cases}$，$f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t}, & t\geq 0\end{cases}$，求 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积。

卷积定理：假设 $f_1(t), f_2(t)$ 都满足 **Fourier** 变换的条件，且

$$F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]，F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$$

则有：

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

（2） 相关函数

对于两个不同的函数（信号）$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt$$

称为两个函数（信号）$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数，记作 $R_{12}(\tau)$，即

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t+\tau)dt$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) dt$$

记为 $R_{21}(\tau)$，即

$$R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t+\tau) f_2(t) dt$$

若 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ 时，则积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

称为函数（信号） $f(t)$ 的自相关函数（简称相关函数），记为 $R(\tau)$，即

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt$$

我们有：

$$R(\tau) = R(-\tau)，\ R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau)$$

相关函数和能量谱密度之间的关系：

在乘积定理中，令 $f_1(t) = f(t),\ f_2(t) = f(t+\tau)$，且 $F(\omega) = \mathscr{F}[\ f(t)\ ]$，根据 **Fourier** 变换的位移性质，我们有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F(\omega)} F(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

即有：

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

另外，由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) f(t) e^{-j\omega\tau} dt d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} f(t) e^{j\omega t} d\tau dt$$

令：$t+\tau = u, t = t$，则有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega u} f(t) e^{j\omega t} du dt = \left| F(\omega) \right|^2$$

即：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

由此可得，自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度函数 $S(\omega)$ 构成一对 **Fourier** 变换对。即：

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

利用自相关函数 $R(\tau)$ 和能量谱密度函数 $S(\omega)$ 是偶函数的性质，我们有：

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \end{cases}$$

当 $\tau = 0$ 时，则有：

$$R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

此即为 **Parseval** 等式。

若 $F_1(\omega) = \mathscr{F}[f_1(t)]$，$F_2(\omega) = \mathscr{F}[f_2(t)]$，根据乘积定理，可得：

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

我们称 $S_{12}(\omega) = \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$ 为互能量谱密度，同样可见，互相关函数和互能量谱密度之间构成一对 **Fourier** 变换对，即：

$$\begin{cases} R_{12}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ S_{12}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

另外，关于互能量谱密度，我们有：

$$S_{21}(\omega) = \overline{S_{12}(\omega)}$$

例：求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-\beta t}, & t \ge 0 \end{cases}$（$\beta > 0$）的自相关函数和能量谱

密度。

4．一些常用的结果

（1）$\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}$；

（2）设$u(t)$为单位阶跃函数，则$\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$；

（3）$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$，$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$；即有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega),\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

（4）$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$，

$\mathscr{F}[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$。

（二）　平稳随机过程（信号）的功率谱密度

现在我们考虑在一有限时间区间上取值的平稳随机过程（信号）$\{\xi(t);-T<t<T\}$，在均方意义下计算其 Fourier 变换，即：

$$X_T(f)\,\hat{=}\int_{-T}^{T}[\xi(t)-\mu_\xi]e^{-j2\pi ft}dt \qquad (\omega=2\pi f)$$

则在这一区间上的功率谱分布为：

$$\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\geq 0$$

这一功率谱函数的集平均为：

$$P_T(f)\,\hat{=}\,E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{2T}\right\}$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}E\left\{[\xi(t_1)-\mu_\xi]\overline{[\xi(t_2)-\mu_\xi]}\right\}e^{-j2\pi f(t_1-t_2)}dt_1dt_2$$

$$=\int_{-2T}^{2T}C_{\xi\xi}(\tau)\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

其中：

$$\tau = t_1 - t_2,\ C_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) - \left|\mu_\xi\right|^2$$

$P_T(f)$ 表示平稳随机过程（信号）$\xi(t)$ 在时间区间 $(-T,T)$ 上的平均功率随频率 f 的分布，当 $T \to +\infty$ 时，这一分布给出了功率谱密度，即：

$$P_{\xi\xi}(f) \hat{=} \lim_{T\to+\infty} P_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \ge 0$$

上式给出了平稳随机过程（信号）$\{\xi(t); -\infty < t < +\infty\}$ 的功率谱密度的定义，并且表明功率谱密度不可能为负。

功率谱密度的性质：

（1）　功率谱密度 $P_{\xi\xi}(f)$ 是实的；

证明：由复平稳随机过程功率谱的定义，我们有：

$$\overline{P_{\xi\xi}(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{C_{\xi\xi}(\tau)} e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\xi\xi}(-\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} C_{\xi\xi}(\tau') e^{-j2\pi f\tau'} d\tau' = P_{\xi\xi}(f)$$

（2）　$P_{\xi\xi}(f) \ge 0$；

（3）　自协方差函数是功率谱密度的 **Fourier** 逆变换，即

$$C_{\xi\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

（4）　功率谱密度对频率的积分给出随机信号 $\xi(t)$ 的方差，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{\xi\xi}(f) df = C_{\xi\xi}(0) = E\left\{\left|\xi(t) - \mu_\xi\right|^2\right\}$$

（5）　若 $\{\xi(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是零均值的随机过程（信号），则协方差与相关函数等价，即 $C_{\xi\xi}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau)$，则有：

$$S_{\xi\xi}(f) \hat{=} P_{\xi\xi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \ge 0$$

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

以上两式所描述的关系称为 **Wienner-Khinchine** 定理：任意零均值的平稳

过程的功率谱$S_{\xi\xi}(f)$（$P_{\xi\xi}(f)$）和它的自相关函数$R_{\xi\xi}(\tau)$组成一对 **Fourier** 变换对。

(6) 对于零均值的随机过程（信号）$\xi(t)$，功率谱的积分等于零滞后（$\tau=0$）处的相关函数，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\xi}(f)df = E\{|\xi(t)|^2\} = R_{\xi\xi}(0)$$

(7) 若$\xi(t)$是实的随机过程，则功率谱密度$P_{\xi\xi}(f)$是实的偶函数；

(8) 均值为零，功率谱密度为非零常数的平稳随机过程（信号）称为白噪声（信号），此时:

$$S(f)=S_0\ (-\infty < f < +\infty),\ R_{\xi\xi}(\tau)=S_0\delta(\tau)\text{。}$$

关于离散型平稳随机过程的功率谱密度：

假设$\{\xi(k);\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为平稳随机序列，其相关函数满足：

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|R_{\xi\xi}(k)|<\infty$$

则称

$$f_{\xi\xi}(\lambda) \hat{=} \sum_{-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(k)e^{-jk\lambda} \quad (-\pi \le \lambda \le \pi)$$

为该序列的功率谱密度。

我们有：

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{\xi\xi}(\lambda)e^{jk\lambda}d\lambda \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

对于实的随机序列，由于$R_{\xi\xi}(k)=R_{\xi\xi}(-k),\ k=0,1,2\cdots$，因此有：

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=2\sum_{k=1}^{\infty} R_{\xi\xi}(k)\cos k\lambda + R_{\xi\xi}(0)$$

$$R_{\xi\xi}(k)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f_{\xi\xi}(\lambda)\cos(k\lambda)d\lambda$$

$$f_{\xi\xi}(-\lambda)=f_{\xi\xi}(\lambda)$$

两个联合平稳的随机过程的互功率谱密度：设两个联合平稳的随机信号 $\xi(t),\eta(t)$，其互协方差为 $C_{\xi\eta}(\tau)$，则有：

$$C_{\xi\eta}(\tau)=R_{\xi\eta}(\tau)-\mu_{\xi}\overline{\mu_{\eta}}$$

若 $\mu_{\xi}=0,\ \mu_{\eta}=0$，则有 $C_{\xi\eta}(\tau)=R_{\xi\eta}(\tau)$。

另外互相关系数为：

$$\rho_{\xi\eta}(\tau)=\frac{C_{\xi\eta}(\tau)}{\sqrt{C_{\xi\xi}(0)C_{\eta\eta}(0)}}$$

我们定义 $C_{\xi\eta}(\tau)$ 的 **Fourier** 变换为两个联合平稳随机信号 $\xi(t),\eta(t)$ 的互功率谱密度，即：

$$P_{\xi\eta}(f)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}C_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

注意，它是关于频率 f 的复函数，其实部称为同相谱（**cospectrum**），虚部称为正交谱（**quadrature spectrum**）。

记：$P_{\xi\eta}(f)=\left|P_{\xi\eta}(f)\right|\exp\{j\phi_{\xi\eta}(f)\}$，称 $\phi_{\xi\eta}(f)$ 的关于频率 f 的导数为群延迟（**group delay**）。

注意：教材中定义互相关函数 $R_{\xi\eta}(\tau)$ 的 **Fourier** 变换为两个联合平稳随机信号 $\xi(t),\eta(t)$ 的互功率谱密度，即

$$S_{\xi\eta}(f)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

两种定义本质上是一致的。

由互相关函数的关系式 $R_{\eta\xi}(\tau)=\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}$，我们有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\xi}(f)&\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)}e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{R_{\xi\eta}(-\tau)e^{j2\pi f\tau}}d\tau\\&=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\eta}(s)e^{-j2\pi fs}ds}\quad(-\tau=s)\\&=\overline{S_{\xi\eta}(f)}\end{aligned}$$

同样，我们有：

$$R_{\xi\eta}(\tau) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\eta}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_{\eta\xi}(\tau) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

令：$\tau = 0$，则有：

$$R_{\eta\xi}(0) \hat{=} E\{\eta(t)\overline{\xi(t)}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) df$$

注意以上式子解释的物理意义。

例 1：随机电报信号的相关函数为：

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|\tau|} \qquad \lambda \text{为常数，} -\infty < \tau < +\infty$$

求其功率谱密度。

解：由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| R_{\xi\xi}(\tau) \right| d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{2\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{4\lambda} < \infty$，因此功率谱存在。

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\xi\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4} e^{2\lambda\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-2\lambda\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{\lambda}{4(\lambda^2 + \pi^2 f^2)}$$

若相关函数为 $R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|\tau|})$，则必须应用 δ －函数求解。即此时

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}(1 + e^{-2\lambda|\tau|}) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{\lambda}{4(\lambda^2 + \pi^2 f^2)}$$

例 2：随机相位正弦波信号的相关函数为：

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

求功率谱密度。

解：注意函数不是绝对可积的处理方法。

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[j(\omega_0-2\pi f)\tau)]d\tau+\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-j(\omega_0+2\pi f)\tau)]d\tau\right\}$$

$$=\frac{A^2}{4}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]\quad(\omega_0=2\pi f_0)$$

例 3：设有平稳随机信号$\xi(t)$，其功率谱密度为：

$$S(f)=\frac{(2\pi f)^2+4}{(2\pi f)^4+10(2\pi f)^2+9}$$

求该信号的相关函数和均方差。

解：略。

（三）　具有随机输入的线性系统

1．　线性系统（过程）的基本概念

- 系统的分类

线性与非线性、分布参数与集总参数等；

描述方式：连续时间系统、离散时间系统；

研究方法：输入输出模型（外特性）、状态空间模型（内部特性）；

- 任意系统的输入输出关系可以表示为

$$y(t)=L\{u(t)\}$$

其中$u(t)$代表输入，$y(t)$代表输出，L是一个算子。

- 如果算子L是线性的，则称该系统为线性系统；满足下列条件的算子称为线性算子：

（1）$L(\alpha u(t))=\alpha L(u(t))$，$\alpha$是任意常数

(2) $L(u_1(t)+u_2(t))=L(u_1(t))+L(u_2(t))$

- 如果输出 $y(t)$ 在 t 时的值只决定于在 t 时的输入 $u(t)$ 的值，则称该系统是瞬时系统；不是瞬时的系统称为动态系统。
- 一个系统在 t 时的输出完全由闭区间 $[t-T,t]$ 内的输入值所决定，其中 $T>0$，则称该系统为记忆时间为 T 的记忆系统。
- 在 t 时的输出 $y(t)$ 值仅与过去（包括现在的）输入值有关，而和将来的输入值无关的系统称为可实现的系统，或称为具有因果性的系统。
- 一个动态系统如果它的输入、输出是连续时间函数，而且可以用一组常微分方程来描述，则称该系统为集总参数、连续时间动态系统。如果输入、输出是离散时间函数，而且可以用一组差分方程来描述该系统，则称该系统为集总参数、离散时间的动态系统。
- 任何线性、集总参数的动态系统均可以表示成卷积形式：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

其中 $h(t,\tau)=L(\delta(t-\tau))$。

对于具有因果性的动态系统，有 $h(t,\tau)=0 \quad (\tau>t)$，因此输入输出关系可以写成为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

- 一个系统它的输入在时间轴上有一个平移，输出也有同样的平移，即：$y(t-\tau)=L\{u(t-\tau)\}$，则称该系统为时不变系统，对于时不变系统有，$L\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$。因此，对于线性、时不变、具有因果性的动态系统，有：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)u(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- 本课程主要讨论的是线性、定常、时不变、具有因果性（可实现）的动态系统。

2． 卷积法

一般线性、集总参数的动态系统 L 的输入输出关系可以由卷积表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

其中：$h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$ 是系统对冲激信号的响应。

如果系统具有因果性，即满足：$h(t,\tau)=0,\quad \tau>t$，则上式为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

如果系统还具有时不变性，即满足：$L\{\delta(t-\tau)\}=h(t-\tau)$，则输入输出关系为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=L\{x(t)\}$$

给定一个线性系统，冲激响应 $h(t,\tau)=L\{\delta(t-\tau)\}$ 由此系统唯一确定，我们主要研究具有因果性的时不变线性系统。此系统的输入输出关系由上式确定。如果输入信号 $\xi(t)$ 是一随机信号，则输出 $\eta(t)$ 也为一随机信号，随机信号的输入输出关系可以表示为：

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=L\{\xi(t)\}$$

下面研究当给定一平稳随机信号时，系统输出的统计特性。研究的方法主要有卷积法和功率谱密度法。

现给定一 RC 电路（线性系统），输入信号为平稳随机信号 $\{\xi(t);t\ge 0\}$，其均值为零，相关函数为 $R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$，给定零初始条件 $\eta(0^-)=0$，求输出 $\eta(t)$ 的统计特性。

RC 电路（线性系统）的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

则输入随机信号 $\{\xi(t);t\ge 0\}$（注意：零时接入信号）经过此系统后的输出为：

$$\begin{aligned}\eta(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau\\&=\int_{0}^{t}h(t-\tau)\xi(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(u)\xi(t-u)du\end{aligned}$$

由此可知：$E\{\eta(t)\}=0$，相关函数为：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\}\\&=E\left\{\int_0^{t_1}h(t_1-u)\xi(u)du\cdot\int_0^{t_2}h(t_2-v)\xi(v)dv\right\}\\&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-u)h(t_2-v)E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv\\&=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1-u)h(t_2-v)R_{\xi\xi}(u-v)dudv\end{aligned}$$

将$R_{\xi\xi}(\tau)=\sigma^2e^{-\beta|\tau|}$和冲激响应代入，我们有：

（a）$t_1<t_2$时：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=\int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_0^{u}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2e^{-\beta(u-v)}dvdu\\&\quad+\int_0^{t_1}\alpha e^{-\alpha(t_1-u)}\int_u^{t_2}\alpha e^{-\alpha(t_2-v)}\sigma^2e^{-\beta(v-u)}dvdu\\&=\alpha^2\sigma^2\int_0^{t_1}\frac{1}{\beta+\alpha}e^{-\alpha t_1}e^{\alpha u}e^{-\alpha t_2}e^{-\beta u}\cdot(e^{\beta u}e^{\alpha u}-1)du\\&=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_2-t_1)}-\beta e^{-\alpha(t_2-t_1)}+\beta e^{-\alpha(t_2+t_1)}+\\&\qquad+\alpha e^{-\alpha(t_2+t_1)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}\end{aligned}$$

（b）$t_1>t_2$时：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta(t_1-t_2)}-\beta e^{-\alpha(t_1-t_2)}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\\&\qquad+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}\end{aligned}$$

合并以上的两式，我们有：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(t_1,t_2)&=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta|t_1-t_2|}-\beta e^{-\alpha|t_1-t_2|}+\beta e^{-\alpha(t_1+t_2)}+\\&\qquad+\alpha e^{-\alpha(t_1+t_2)}-\alpha e^{-(\beta t_1+\alpha t_2)}-\alpha e^{-(\alpha t_1+\beta t_2)}\}\end{aligned}\qquad\text{(C)}$$

现在令$t_1\to\infty,t_2\to\infty,\tau=t_1-t_2$，则有：

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=\frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2-\beta^2}\{\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\}=R_{\eta\eta}(\tau)\qquad\text{(D)}$$

以上的（C）式表明，在$t=0$时接入随机信号$\xi(t)$，此时有一瞬态过程，因此输出是非平稳的；(D）式表明，经过了瞬态达到稳态后，系统输出为平稳过程。

考虑一般的情形：一个具有因果性的时不变线性系统，其冲激响应为$h(t), t>0$，输入为平稳的（复）随机信号$\xi(t)$，则系统的输出为：

$$\eta(t)=\int_0^t h(t-u)\xi(u)du$$

因此，有：

$$E\{\eta(t)\}=\int_0^t h(t-u)\mu_\xi(u)du$$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=\int_0^{t_1} h(t_1-u)\int_0^{t_2}\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

如果只考虑进入稳态后的系统输出，只要将输入信号在$t=-\infty$时接入动态系统，那么当$t>0$时系统已趋于稳态，此时有：

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^t h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-u)\xi(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\xi(t-u)du$$

因此，对于复平稳过程，此时有：

$$E\{\eta(t)\}=\mu_\xi\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du = \text{常数}$$

$$R_{\eta\eta}(t_1,t_2)=E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u,v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\overline{h(t_2-v)}R_{\xi\xi}(u-v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(t_1-t_2-u+v)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\overline{h(v)}R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

$$=R_{\eta\eta}(\tau)$$

因此，此时的输出为一平稳随机信号。

例：给定由如下微分方程确定的线性系统：

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

求电流$i(t)$对激励$e(t)=\delta(t)$的冲激响应。

解：系统的冲激响应$h(t)$满足的方程：

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+7\frac{d}{dt}h(t)+10h(t)=\delta''(t)+6\delta'(t)+4\delta(t)$$

其齐次解为：

$$h(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t}\qquad(t\ge 0_+)$$

利用冲激函数匹配法，我们有：

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{dt^2}h(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)\\ \dfrac{d}{dt}h(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ h(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)\end{cases}\qquad(0_-<t<0_+)$$

代入方程，有：

$$\left[a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+d\Delta u(t)\right]+7\left[a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\right]+$$
$$+10\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]=\delta''(t)+6\delta'(t)+4\delta(t)$$

比较两边系数，有：

$$a=1,\quad b=-1,\quad c=1$$

$$h(0_+)=b+h(0_-)=-1;\quad \frac{d}{dt}h(0_+)=c+\frac{d}{dt}h(0_-)=1$$

代入$h(t)$，我们有：

$$\begin{cases}A_1+A_2=-1\\ -2A_1-5A_2=1\end{cases}\Rightarrow\quad A_1=-\frac{4}{3},\quad A_2=\frac{1}{3}$$

由于$a=1$，由此可得系统的冲激响应为：

$$h(t)=\delta(t)+\left(-\frac{4}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}\right)u(t)$$

3． 功率谱密度法

设输入为复平稳随机信号$\xi(t)$，相关函数为$R_{\xi\xi}(\tau)$，功率谱密度为$S_{\xi\xi}(f)$，则由上面的内容，我们有：

$$S_{\xi\xi}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_{\xi\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\xi\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

因为

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\,R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv$$

于是有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\eta\eta}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv\right]e^{-j2\pi f\tau}d\tau\end{aligned}$$

作变换：$\tau-u+v=s \quad \Rightarrow \quad \tau=s+u-v$，我们有：

$$\begin{aligned}S_{\eta\eta}(f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}h(u)R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi f(s+u-v)}dsdudv\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(v)}e^{j2\pi fv}dv\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)e^{-j2\pi fu}du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}R_{\xi\xi}(s)e^{-j2\pi fs}ds\\&=\overline{H(jf)}\cdot H(jf)\cdot S_{\xi\xi}(f)\\&=\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)\end{aligned}$$

即：

$$S_{\eta\eta}(f)=\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)$$

其中：

$$H(jf)\hat{=}\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

称为系统的转移函数。

因此我们有：

$$\begin{aligned}R_{\eta\eta}(\tau)&=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\eta\eta}(f)e^{j2\pi f\tau}df\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H(jf)\right|^2S_{\xi\xi}(f)e^{j2\pi f\tau}df\end{aligned}$$

4. 联合平稳信号的情形

上面我们已经给出了两个联合平稳随机信号的互相关函数和互功率谱密度之间的关系，即：

$$S_{\eta\xi}(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_{\eta\xi}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\xi}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

现在研究具有因果关系的线性时不变系统，输入随机信号为平稳信号$\xi(t)$，输出为$\eta(t)$，考察进入稳态后的系统输出，此时我们有：

$$\begin{aligned} R_{\eta\xi}(t_1,t_2) &= E\{\eta(t_1)\overline{\xi(t_2)}\} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)\xi(u)\overline{\xi(t_2)}du\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u,t_2)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u-t_2)du \qquad \text{（E）} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2)du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du \end{aligned}$$

此式表明，输入相关函数与系统的冲激响应的卷积为输出与输入的互相关函数。

另外，由上式，我们有：

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(t_1,t_2) &= E\{\eta(t_1)\overline{\eta(t_2)}\} = E\{\eta(t_1)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_2-v)\xi(v)dv}\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t_2-v)} R_{\eta\xi}(t_1,v)dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(t_2-v)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1-u)R_{\xi\xi}(u-v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(t_1-u-t_2+v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(v)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u+v)dudv \\ &= R_{\eta\eta}(\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2) \end{aligned}$$

我们令：$v' = -v$，由上式可以得到：

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v')} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u-v')dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v')} R_{\eta\xi}(\tau-v')dv' \end{aligned} \qquad \text{（F）}$$

即输出信号$\eta(t)$的相关函数是$R_{\eta\xi}(\tau)$与$\overline{h(-t)}$的卷积。

由式子（E）和（F），我们有：

$$\begin{aligned} S_{\eta\xi}(f) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du \cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{\xi\xi}(v)\cdot e^{-j2\pi f(u+v)}dudv = H(jf)\cdot S_{\xi\xi}(f) \end{aligned}$$

$$S_{\eta\eta}(f) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\eta}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v)} R_{\eta\xi}(\tau - v) dv \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h(-v)} R_{\xi\xi}(s) \cdot e^{-j2\pi f(v+s)} ds dv \quad (\tau - v = s)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\xi}(s) e^{-j2\pi fs} ds \cdot \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(-v) e^{j2\pi fv} dv}$$

$$= S_{\eta\xi}(f) \cdot \overline{H(jf)}$$

$$= H(jf) \cdot \overline{H(jf)} \cdot S_{\xi\xi}(f)$$

$$= \left|H(jf)\right|^2 \cdot S_{\xi\xi}(f)$$

若$\xi(t)$和$\eta(t)$是联合平稳的随机信号，令：$X(t) = \xi(t) + \eta(t)$，则有：

$$R_{XX}(\tau) = E\{X(t+\tau)\overline{X(t)}\}$$

$$= E\{[\xi(t+\tau) + \eta(t+\tau)]\overline{[\xi(t) + \eta(t)]}\}$$

$$= R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau) + R_{\xi\eta}(\tau) + R_{\eta\xi}(\tau)$$

即有：

$$S_{XX}(f) = S_{\xi\xi}(f) + S_{\eta\eta}(f) + S_{\xi\eta}(f) + S_{\eta\xi}(f)$$

由：$S_{\xi\eta}(f) = \overline{S_{\eta\xi}(f)}$，可以保证上式是实的。

若$\xi(t)$和$\eta(t)$的均值为零，且$\xi(t)$和$\eta(t)$正交，则有：

$$R_{\xi\eta}(\tau) = 0, R_{\eta\xi}(\tau) = 0, \Rightarrow S_{\xi\eta}(f) = S_{\eta\xi}(f) = 0$$

因此有：

$$S_{XX}(f) = S_{\xi\xi}(f) + S_{\eta\eta}(f)$$

$$R_{XX}(\tau) = R_{\xi\xi}(\tau) + R_{\eta\eta}(\tau)$$

（四）平稳随机信号的谱分解定理及抽样定理

1．　谱分解定理

（1）　随机振幅的简谐振动叠加

给定一随机过程：

$$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\eta_n e^{j\omega_n t}$$

其中$\{\eta_n;n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为一列复随机变量，且$E\{\eta_n\}=0$，$E\{\eta_n\overline{\eta_m}\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2<\infty$，$\{\omega_n;n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为任意一列实数，则有：

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$E\{\xi(t)\overline{\xi(s)}\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_n(t-s)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sigma_n^2 e^{j\omega_n\tau},\quad \tau=t-s$$

因此，随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散的功率谱，谱线位于ω_n处。此过程可以看作具有随机振幅的简谐振动叠加。

考察另一随机过程：

$$\xi(t)=\sum_{n=1}^{N}\{\xi_n\cos\omega_n t+\eta_n\sin\omega_n t\},\quad -\infty<t<\infty$$

其中$\{\xi_n;1\le n\le N\}$和$\{\eta_n;1\le n\le N\}$是互不相关的实的随机变量序列，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$为任意实数，且

$$E\{\xi_n\}=0,\ E\{\eta_n\}=0$$

$$E\{\xi_n\eta_m\}=0,\quad 1\le n,m\le N$$

$$E\{\xi_n\xi_m\}=E\{\eta_n\eta_m\}=\sigma_n^2\delta_{nm}$$

则有：

$$E\{\xi(t)\}=0$$

$$E\{\xi(t)\xi(s)\}=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\cos\omega_n(t-s)=\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2\cos\omega_n\tau,\quad \tau=t-s$$

因此，随机过程$\xi(t)$是平稳随机过程，且具有离散的功率谱，谱线位于ω_n处，在ω_n处的功率为σ_n^2。此过程可以看作具有随机振幅的简谐振动叠加。

对于确定性信号，我们有：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}df,\quad \omega=2\pi f$$

问题：对于任意的平稳过程是否可以分解为具有随机振幅的简谐振动的叠加？

（2）　谱分解定理

定理：（谱分解定理）设$\{\xi(t);-\infty<t<+\infty\}$是一均值为零均方连续的平稳过程，则$\xi(t)$可以表示为

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f),\quad \omega=2\pi f$$

其中：

$$Z(f)=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j\omega t}-1}{-jt}\cdot\xi(t)dt$$

且$Z(f)$具有以下性质：

（a）$E\{Z(f)\}=0$

（b）若区间$(f_1,f_1+\Delta f_1)$与$(f_2,f_2+\Delta f_2)$不相重叠，则有

$$E\{[Z(f_1+\Delta f_1)-Z(f_1)]\overline{[Z(f_2+\Delta f_2)-Z(f_2)]}\}=0$$

（c）$E\{|Z(f_2)-Z(f_1)|^2\}=F(f_2)-F(f_1)$

其中$F(f)$为随机过程$\xi(t)$的功率谱函数，即

$$F(f)=\int_{-\infty}^{f}S_{\xi}(\tau)d\tau$$

我们称$Z(f)$为随机过程$\xi(t)$的随机谱函数。它是由随机过程$\xi(t)$确定，参数为频率f的正交增量随机过程。

引理 **1**：设随机过程$\{Z(f); -\infty < f < \infty\}$为正交增量过程，则存在一非降函数$F(f)$，满足：

$$E\{|Z(f_2) - Z(f_1)|^2\} = F(f_2) - F(f_1), \quad (f_2 \geq f_1)$$

证明：任意固定一点f_0，令：

$$F(f) = \begin{cases} E\{|Z(f) - Z(f_0)|^2\}; & f \geq f_0 \\ -E\{|Z(f) - Z(f_0)|^2\}; & f < f_0 \end{cases}$$

则$F(f)$非降且满足上式。

引理 **2**：设随机过程$\{Z(f); -\infty < f < \infty\}$为正交增量过程，且由引理 **1** 中确定的$F(f)$有界，则积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ(f)$在均方意义下存在。

引理 **3**：设$\xi(t)$为均方连续的平稳过程，且其谱函数$F(f)$连续，则以下积分在均方意义下存在。

$$Z(f) = \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt} \cdot \xi(t) dt, \quad \omega = 2\pi f$$

谱分解定理的证明：

（**A**）　谱函数$F(f)$连续的情形：

此时，由引理 **3**，我们定义：

$$Z(f) = \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt} \cdot \xi(t) dt, \quad \omega = 2\pi f$$

现验证这样定义的$Z(f)$满足定理中关于它的三条性质。

（**a**）　由$E\{\xi(t)\} = 0$，可知$E\{Z(f)\} = 0$。

（**b**）　设在f轴上任意取两点s_1, s_2，且$s_1 < s_2$，则

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\right\}= \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}E\left\{\xi(t)\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}\cdot\overline{\xi(u)}du\right\} \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{j2\pi s_2 u}-e^{j2\pi s_1 u}}{j2\pi u}\cdot e^{j2\pi f(t-u)}dudF(f) \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_2-f)u}{u}du-\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\right]dF(f) \\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi(s_2-f)u}{u}du-\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\pi(s_1-f)u}{u}du\right]dF(f) \\
&\quad=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi ft}\cdot[\mathrm{sgn}(s_2-f)-\mathrm{sgn}(s_1-f)]dF(f)=\int_{s_1}^{s_2}e^{j2\pi ft}dF(f)
\end{aligned}
$$

以上式子计算利用了 **Dirichlet** 积分，即：

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \lambda>0\\ 0, & \lambda=0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \lambda<0\end{cases}
$$

因此有：

$$
\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\lambda)
$$

再设在 f 轴上另外取两点 s_3, s_4，且 $s_3<s_4$，则

$$
\begin{aligned}
&E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}= \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}E\{\xi(t)\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}dt \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-j2\pi s_3 t}-e^{-j2\pi s_4 t}}{j2\pi t}\cdot e^{j2\pi ft}dtdF(f) \\
&\quad=\lim_{T\to\infty}\int_{s_1}^{s_2}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_4-f)t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin 2\pi(s_3-f)t}{t}dt\right]dF(f) \\
&\quad=\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(s_4-f)-\mathrm{sgn}(s_3-f)]dF(f)
\end{aligned}
$$

由此可知，当 $s_1<s_2\le s_3<s_4$ 或 $s_3<s_4\le s_1<s_2$ 时，有：

$$
E\{[Z(s_4)-Z(s_3)]\overline{[Z(s_2)-Z(s_1)]}\}=0
$$

（c）　当$s_3 = s_1, s_2 = s_4$时，有：

$$E\{|Z(s_2) - Z(s_1)|^2\} = F(s_2) - F(s_1)$$

最后证明：

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dZ(f), \quad \omega = 2\pi f$$

由均方积分的定义可知，只要证明：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{\left|\xi(t) - \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right|^2\right\} = 0$$

因为：

$$E\left\{\left|\xi(t) - \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right|^2\right\} =$$

$$= E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\right\} + E\left\{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f) \overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\}$$

$$- E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} - E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right\}$$

分别计算以上式子的四项：

$$E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\right\} = R_\xi(0)$$

$$E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} E\{\xi(t)\overline{[Z(f_{k+1}) - Z(f_k)]}\}$$

上面的式子利用了均方积分的定义，其中

$$\omega_k < \omega_k' < \omega_{k+1}，\ -A < f_1 < f_2 < \cdots < f_n = A，\ \omega_k = 2\pi f_k$$

而取极限时要求$n \to \infty$，$\lambda = \max\{|f_{k+1} - f_k|\} \to 0$。

利用上面的推导结果，我们有：

$$E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} E\{\xi(t)\overline{[Z(f_{k+1}) - Z(f_k)]}\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} e^{-j\omega_k' t} \int_{f_k}^{f_{k+1}} e^{j\omega t} dF(f)$$

故：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(f) = R_\xi(0)$$

同理有：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right\} = R_\xi(0)$$

另外：

$$\lim_{A\to\infty} E\left\{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty} E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n-1} e^{j\omega_k' t}[Z(f_{k+1}) - Z(f_k)]\right]\cdot \overline{\left[\sum_{i=1}^{n-1} e^{j\omega_i'' t}[Z(f_{i+1}) - Z(f_i)]\right]}\right\}$$

$$= \lim_{A\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1}\left[F(f_{k+1}) - F(f_k)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(f) = R_\xi(0)$$

因此有：

$$E\left\{\left|\xi(t) - \int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right|^2\right\} =$$

$$= E\left\{\xi(t)\overline{\xi(t)}\right\} + E\left\{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\}$$

$$- E\left\{\xi(t)\overline{\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)}\right\} - E\left\{\overline{\xi(t)}\int_{-A}^{A} e^{j\omega t} dZ(f)\right\}$$

$$= R_\xi(0) + R_\xi(0) - R_\xi(0) - R_\xi(0) = 0$$

至此，我们证明了当 $F(f)$ 为连续时的谱分解定理。

（**B**） 谱函数 $F(f)$ 有不连续点的情形

此时，在 $F(f)$ 的连续点处，仍然以

$$Z(f) = \underset{T\to\infty}{\text{l.i.m}} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt}\cdot \xi(t)dt, \quad \omega = 2\pi f$$

定义 $Z(f)$；而在 $F(f)$ 的间断点处，定义：

$$Z(f) = \frac{1}{2}\left[Z(f-0) + Z(f+0)\right]$$

此时谱分解定理中的三条性质仍然满足。

注 **1**：$Z(f)$ 是一随机过程，称为谱过程。以后我们将证明，当 $\xi(t)$ 是一平

稳的正态过程时，谱过程$Z(f)$也是一正态过程。

注 2：谱分解定理表明：一个零均值的均方连续的平稳随机过程，可以看作许多元谐波震荡的叠加，元谐波为$e^{j\omega t}dZ(f)$，这些震荡覆盖了整个频率轴上，它的复振幅为随机的$dZ(f)$，不同频率的复振幅是不相关的，复振幅的均值为零，复振幅的方差为$dF(f)$，即该频率的功率。

注 3：当$\xi(t)$为一实的零均值均方连续的平稳随机过程时，$Z(f)$仍然是一复的随机过程，设$Z(f)=Z_1(f)+jZ_2(f)$，则有：

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\cdot[dZ_1(f)+jdZ_2(f)]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t dZ_1(f)-\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega t dZ_2(f)+$$

$$+j\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega t dZ_2(f)+\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega t dZ_1(f)\right]$$

由于$\xi(t)$为一实过程，因此上式的虚部为零，因此有：

$$Z_1(f)=Z_1(-f)$$

$$Z_2(f)=-Z_2(-f)$$

故有：

$$Z(-f)=\overline{Z(f)}$$

现在设在$+f$和$-f$处分别有两个微元频率区df和$-df$，由于两个区域不相交叠，故有：

$$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=0$$

而

$$E\{dZ(f)\overline{dZ(-f)}\}=E\{[dZ(f)]^2\}=$$

$$=E\{[dZ_1(f)]^2\}+2jE\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}-E\{[dZ_2(f)]^2\}=0$$

因此有：

$$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}$$

$$E\{dZ_1(f)dZ_2(f)\}=0$$

即 $Z_1(f)$ 和 $Z_2(f)$ 是不相关的。

另外，

$$dF(f)=E\{|dZ(f)|^2\}=E\{[dZ_1(f)]^2\}+E\{[dZ_2(f)]^2\}$$

故：

$$E\{[dZ_1(f)]^2\}=E\{[dZ_2(f)]^2\}=\frac{1}{2}dF(f)$$

2. 抽样定理

如何从抽样信号中恢复原连续信号，以及在什么条件下才可以无失真地完成这种恢复？著名的“抽样定理”对此作出了明确而精辟的回答。抽样定理在通信系统、信息传输理论、控制理论等方面占有十分重要的地位，许多近代通信方式（如数字通信系统）都以此定理作为理论基础。

对于确定性信号，时域抽样定理说明：一个频率受限的信号 $f(t)$，如果频谱只占据 $-\omega_m \sim \omega_m$ 的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值唯一地表示，而抽样间隔时间必须不大于 $1/2f_m$（奈奎斯特（**Nyquist**）间隔），其中 $\omega_m=2\pi f_m$，或者说，最低抽样频率为 $2f_m$（奈奎斯特（**Nyquist**）频率）。

下面我们将确定性信号的抽样定理推广到随机信号的情形。

设 $\{\xi(t);-\infty<t<+\infty\}$ 是一均值为零均方连续的平稳过程，它的功率谱密度限于 $(-f_c,f_c)$ 之间，即当 $|f|>f_c$ 时，$S_\xi(f)=0$。由谱分解定理，$\xi(t)$ 可以表示为：

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}dZ(f)=\int_{-f_c}^{f_c}e^{j\omega t}dZ(f),\quad \omega=2\pi f,\ -\infty<t<+\infty \qquad (*)$$

现在令一频率函数为：

$$g(f)=\begin{cases}e^{j\omega t}, & |f|<f_c\\ 0, & |f|\ge f_c\end{cases}\qquad \omega=2\pi f$$

设 $2f_c = \dfrac{1}{t_0} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \dfrac{1}{2f_c}$（常数）。

将以上定义的 $g(f)$ 展成 **Fourier** 级数，有：

$$g(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jnt_0\omega}, \quad |f| < f_c$$

其中：

$$c_n = \frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} g(f) e^{-jnt_0\omega} df = \frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c} e^{j\omega t} e^{-jnt_0\omega} df = \frac{\sin 2\pi f_c (t - nt_0)}{2\pi f_c (t - nt_0)}$$

即有：

$$g(f) = e^{j\omega t} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_c (t - nt_0)}{2\pi f_c (t - nt_0)} \cdot e^{jnt_0\omega}, \ |f| < f_c, \ \omega = 2\pi f, \ -\infty < t < \infty$$

将上式代入（*），得：

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \int_{-f_c}^{f_c} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi f_c (t - nt_0)}{2\pi f_c (t - nt_0)} \cdot e^{jnt_0\omega} dZ(f) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin 2\pi f_c (t - nt_0)}{2\pi f_c (t - nt_0)} \cdot \int_{-f_c}^{f_c} e^{jnt_0\omega} dZ(f) \right\}\end{aligned}$$

由（*）可知：

$$\xi(nt_0) = \int_{-f_c}^{f_c} e^{jnt_0\omega} dZ(f)$$

因此有：

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi(nt_0) \cdot \frac{\sin 2\pi f_c (t - nt_0)}{2\pi f_c (t - nt_0)}, \quad -\infty < t < +\infty$$

此即为随机信号的抽样公式，即抽样定理。