

## 第六章 高斯过程（维纳过程） 习题

- 1、设有随机过程  $Y(t) = t^2 X - 1, 0 < t < \infty$ ,  $X$  是正态随机变量, 期望为 0, 方差为  $\sigma_X^2$ 。
  - (1) 过程  $Y(t)$  是否正态过程? 是否平稳过程? 均需说明理由;
  - (2) 过程  $Z(t) = \int_0^t Y(s) ds, t > 0$ , 在均方可积意义下是否存在? 存在的话, 试求其相关函数。
- 2、设  $B(t), t \geq 0$  是初值为零的标准布朗运动, 令  $\xi(t) = (1-t)B[t/(1-t)], 0 \leq t < 1$ ,  $\eta(t) = e^{-at} B(e^{2at} - 1), t \geq 0, a > 0$  的常数, 试求随机过程  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  的均值函数和相关函数, 并说明  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  是否是正态过程。
- 3、设  $\{B(t), t \geq 0\}$  是标准的布朗运动, 试求  $B(t)$  与  $\int_0^1 B(u) du$  的相关系数, 其中:  $0 \leq t \leq 1$ 。
- 4、已知  $B(t), t > 0$  是初值为 0 的标准布朗运动, 求在  $B(1) = 0$  时  $B(t) (0 < t < 1)$  的条件概率分布密度函数。
- 5、已知  $B(t), t \geq 0$  是初值为零的标准布朗运动, 令  $\xi(t) = \sqrt{a}B(t) + b, \eta(t) = B(at) + b$ , 其中常数  $a > 0, b > 0, t \geq 0$ 。试分析此两随机过程的前二阶矩是否相同? 此两过程是否同分布? 说明理由。
- 6、设  $\{B(t), t \geq 0\}$  为零初值的标准布朗运动, 试求:
  - (1) 在  $B(t_1) = x_0$  的条件下,  $B(t_2)$  的条件概率密度函数, 其中  $t_2 > t_1$ ;
  - (2) 布朗运动的对称性, 即证明: 当  $t_0 > 0, t > 0$  时, 有
 
$$P\{B(t_0 + t) > x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = P\{B(t_0 + t) \leq x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = 1/2;$$
  - (3) 令  $T_a = \inf\{t : t > 0, B(t) = a\}$ ,  $T_a$  表示布朗运动首次到达  $a$  的时刻, 当  $a > 0$  时, 试求  $T_a$  的分布函数。
- 7、设  $B(t), t \geq 0$  是初值为零的标准布朗运动, 令:
 
$$X(t) = B(t) - tB(1), \quad 0 \leq t \leq 1$$
 称  $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$  为布朗桥过程。
  - (1) 试问布朗桥过程是否为正态过程, 为什么?
  - (2) 试求布朗桥过程的均值函数和相关函数;
  - (3) 试求布朗桥过程的一维分布密度函数。