

## 第六章 高斯 (Gauss) 过程

### (一) 多元正态 (Gauss) 分布

#### 1. $n$ 元正态分布的定义

定义：设  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  是  $n$  元随机向量，其均值为  $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ ，其中  $\mu_i = E\{\xi_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ，令：

$$b_{ik} = \text{cov}(\xi_i, \xi_k) = E\{(\xi_i - \mu_i)(\xi_k - \mu_k)\}, i, k = 1, 2, \dots, n$$

则可得  $\vec{\xi}$  的协方差矩阵为： $B = (b_{ik})_{n \times n}$ ，注意矩阵  $B$  为一非负定对称矩阵，我们有如下的定义：

(1) 如果  $B$  是一正定矩阵，则  $n$  元随机向量  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  服从正态分布时的概率分布密度为：

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu})\right\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\vec{\xi}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \Phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp\left\{j\vec{t}^T \cdot \vec{\mu} - \frac{1}{2}\vec{t}^T B \vec{t}\right\} \quad (\text{A})$$

$n$  元随机向量服从正态分布记为： $\vec{\xi} \sim N(\vec{\mu}, B)$ 。

(2) 如果  $B$  不是一正定矩阵，则由 (A) 可以定义一特征函数，由此特征函数对应的分布函数我们定义为  $n$  元正态分布，仍记为  $\vec{\xi} \sim N(\vec{\mu}, B)$ 。

#### 2. $n$ 元正态分布的边缘分布

定理：设  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$  为服从  $n$  元正态分布的随机向量，即  $\vec{\xi} \sim N(\vec{\mu}, B)$ ，则  $\vec{\xi}$  的任意一个子向量  $(\xi_{k_1}, \xi_{k_2}, \dots, \xi_{k_m})$ ,  $m \leq n$  仍服从正态分布。

### 3. $n$ 元正态分布的独立性

定理： $n$  元正态分布的随机变量  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  相互独立的充分必要条件是它们两两不相关。

定理：设  $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  为正态分布的随机向量，且  $\vec{\xi}^T = (\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)^T$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中： $B_{11}, B_{22}$  分别是  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$  的协方差矩阵， $B_{12}$  是由  $\vec{\xi}_1$  及  $\vec{\xi}_2$  的相应分量的协方差构成的矩阵， $B_{12} = B_{21}^T$ ，则  $\vec{\xi}_1$  与  $\vec{\xi}_2$  相互独立的充分必要条件是  $B_{12} = 0$ 。

### 4. 正态随机变量线性变换后的性质

(1) 设  $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim N(\vec{\mu}^T, B)$ ， $\vec{\mu}^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ ，

$\zeta = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k = \vec{a}^T \cdot \vec{\xi}$ ， $\vec{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，则有  $E\{\zeta\} = \vec{a}^T \cdot \vec{\mu}$ ，

$D\{\zeta\} = \vec{a}^T B \vec{a}$ 。

(2) 令  $C = (c_{jk})_{m \times n}$ ， $\vec{\eta} = C \vec{\xi}$ ，则有：

$$E\{\vec{\eta}\} = C \vec{\mu}, \quad D\{\vec{\eta}\} = C B C^T$$

(3)  $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim N(\vec{\mu}^T, B)$  的充分必要条件是：

$$\forall \zeta = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k = \vec{a}^T \cdot \vec{\xi} \sim N\left(\sum_{k=1}^n a_k \mu_k, \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_k a_i b_{ki}\right) = N(\vec{a}^T \vec{\mu}, \vec{a}^T B \vec{a})$$

(4) 若  $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim N(\vec{\mu}^T, B)$ ， $C = (c_{jk})_{m \times n}$  为任意的矩阵，则有： $\vec{\eta} = C \vec{\xi}$  为服从  $m$  元正态分布，即  $\vec{\eta} = C \vec{\xi} \sim N(C \vec{\mu}, C B C^T)$ 。

(5) 若  $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \sim N(\vec{\mu}^T, B)$ ，则存在一正交矩阵  $U$ ，使得  $\vec{\eta} = U^T \vec{\xi}$  是一独立正态分布的随机向量，它的均值为  $U^T \vec{\mu}$ ，方差为矩阵  $B$  的特征值。

(6)  $n$  维正态随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的每一个分量都是正态变量；反

之, 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  都是正态随机变量, 且相互独立, 则  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是  $n$  维正态随机变量。

## 5. 例子

- 设  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  为服从正态分布的随机向量, 且  $E\{X_i\} = 0, i = 1, 2, 3, 4$ ,

试证明:

$$\begin{aligned} E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} \\ = E\{X_1 X_2\}E\{X_3 X_4\} + E\{X_1 X_3\}E\{X_2 X_4\} + E\{X_1 X_4\}E\{X_2 X_3\} \end{aligned}$$

证明: 见教材 P466。

注意: 此结论非常重要, 经常会被应用。

- 设  $X, Y$  是服从均值为零的正态分布二维随机变量, 其联合概率密度为:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则

$$E\{XY\} = r\sigma_1\sigma_2, \quad E\{X^2Y^2\} = \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$E\{|XY|\} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi} [\varphi \sin \varphi + \cos \varphi]$$

其中:  $\sin \varphi = r, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 。

证明: 由联合分布可以求得边缘分布和条件分布为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y - \frac{r\sigma_2x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

由此可得:

$$E\{Y|X\} = \frac{r\sigma_2}{\sigma_1} X, \quad E\{Y^2|X\} = (1-r^2)\sigma_2^2 + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2} X^2$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}
 E\{XY\} &= E\{E\{XY|X\}\} = E\{XE\{Y|X\}\} \\
 &= \frac{r\sigma_2}{\sigma_1} E\{X^2\} = r\sigma_1\sigma_2 \\
 E\{X^2Y^2\} &= E\{E\{X^2Y^2|X\}\} = E\{X^2E\{Y^2|X\}\} \\
 &= (1-r^2)\sigma_2^2 E\{X^2\} + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2} E\{X^4\} = (1-r^2)\sigma_2^2\sigma_1^2 + \frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot 3\sigma_1^4 \\
 &= \sigma_2^2\sigma_1^2 + 2r^2\sigma_2^2\sigma_1^2 = E\{X^2\}E\{Y^2\} + 2[E\{XY\}]^2
 \end{aligned}$$

另外

$$\begin{aligned}
 E\{|XY|\} &= \iint |xy| f(x, y) dx dy \\
 &= \iint_{xy>0} xyf(x, y) dx dy - \iint_{xy<0} xyf(x, y) dx dy \\
 &= E\{XY\} - 2 \iint_{xy<0} xyf(x, y) dx dy \\
 &= r\sigma_1\sigma_2 - 2 \left[ \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 xyf(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty xyf(x, y) dx dy \right]
 \end{aligned}$$

令：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{\sigma_1} \\ v = \frac{y}{\sigma_2} \end{cases}$$

则有：

$$\begin{aligned}
 E\{|XY|\} &= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 uv \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[u^2 - 2ruv + v^2]\right\} dudv \\
 &= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 uv \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2 + v^2\right]\right\} dudv
 \end{aligned}$$

令：

$$\begin{cases} R \cos \theta = \frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}} \\ R \sin \theta = v \end{cases}$$

则有：

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-r^2} R \cos \theta + r R \sin \theta \\ v = R \sin \theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(R, \theta)} = R \sqrt{1-r^2} \Rightarrow dudv = R \sqrt{1-r^2} dR d\theta$$

因此有：

$$\begin{aligned} E\{|XY|\} &= r\sigma_1\sigma_2 - \\ &\quad - \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi} \int_0^\pi \int_{-\arccos r}^0 R \sin \theta [\sqrt{1-r^2} R \cos \theta + r R \sin \theta] \exp\{-\frac{R^2}{2}\} R dR d\theta \\ &= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi} \int_{-\arccos r}^0 \sin \theta [\sqrt{1-r^2} \cos \theta + r \sin \theta] d\theta \\ &= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{1-r^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} r \theta - \frac{1}{4} r \sin 2\theta \right]_{-\arccos r}^0 \\ &= \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi} [\varphi \sin \varphi + \cos \varphi] \end{aligned}$$

其中： $\sin \varphi = r, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 。

## (二) 高斯 (正态) 过程

定义：如果随机过程  $\{\xi(t); t \in T\}$  的有限维分布均为正态分布，则称此随机过程为高斯过程或正态过程。正态过程是二阶矩过程。

设  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ，则由正态过程的定义，有：

$$f_\xi(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)^T B^{-1}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)\right\}$$

其中：

$$\vec{x}_t^T = (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$$

$$\vec{\mu}_t = (\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \dots, \mu_{t_n}), \quad \mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\}$$

$$b_{ki} = E\{(\xi(t_k) - \mu_{t_k})(\xi(t_i) - \mu_{t_i})\} = R_\xi(t_k, t_i) - \mu_{t_k} \mu_{t_i}, \quad B = (b_{ki})_{n \times n}$$

如果  $\{\xi(t); t \in T\}$  为实的宽平稳过程, 则  $\mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\} = \mu$  为常数,

$R_\xi(t_k, t_i) = R_\xi(t_k - t_i)$ ,  $b_{ki} = R_\xi(t_k - t_i) - \mu^2 = b(t_k - t_i)$ , 因此可得有限维分布的特征函数为:

$$\begin{aligned} \Phi_\xi(u_1, u_2, \dots, u_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= \exp\left\{j\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)\mu - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b(t_k - t_i) u_k u_i\right\} \end{aligned}$$

由此, 实平稳正态过程也是实严平稳过程。关于正态过程我们有以下的结论。

**定理:** 设  $\{\vec{\xi}^{(n)}; n=1, 2, \dots\}$  为  $k$  维实正态随机向量序列, 其中  $\vec{\xi}^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)})^T$ , 且  $\vec{\xi}^{(n)}$  均方收敛于  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)^T$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|^2\} = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

则  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)^T$  也是正态分布的随机向量。

**定理:** 若正态过程  $\{\xi(t); t \in T\}$  在  $T$  上是均方可导的, 则  $\{\xi'(t); t \in T\}$  也是正态过程。

**定理:** 若正态过程  $\{\xi(t); t \in T\}$  在  $T$  上是均方可积的, 则

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(u) du, \quad a, t \in T \quad \text{及} \quad \eta(t) = \int_a^b \xi(u) h(t, u) du, \quad a, b \in T$$

也是正态过程。

### (三) 正态马氏过程

**定义:** 若正态过程  $\{X(t); t \in T\}$  又是马尔可夫过程, 则称  $\{X(t); t \in T\}$  为正态马尔可夫(马氏)过程。

先考虑  $n$  维均值为零的正态随机向量的条件分布, 设  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $n$  维正态分布, 其分布密度为:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |A|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{x} A^{-1} \vec{x}\right\} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |A|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right\}
 \end{aligned}$$

其中： $A^{-1} = (a_{ij})_{n \times n}$  为正定对称矩阵。

考虑  $X_n$  在条件  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  下的条件分布密度：

$$\begin{aligned}
 f(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n} \\
 &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right\} dx_n}
 \end{aligned}$$

利用式子：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j + a_{nn} x_n^2 + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i$$

我们有：

$$\begin{aligned}
 f(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j\right\} dx_n} = \\
 &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} a_{nn} x_n^2 - x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} a_{nn} x_n^2 - x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i\right\} dx_n} = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} a_{nn} \left[x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{in} / a_{nn}) x_i\right]^2\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2} a_{nn} \left[x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{in} / a_{nn}) x_i\right]^2\right\} dx_n} \\
 &= c \exp\left\{-\frac{1}{2} a_{nn} \left[x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{in} / a_{nn}) x_i\right]^2\right\}
 \end{aligned}$$

其中  $c$  是归一化常数，与  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  无关。由此可知， $X_n$  在给定条件

$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  下的条件分布密度  $f(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  是一

正态分布的概率分布密度，其均值为  $-\sum_{i=1}^{n-1} (a_{in} / a_{nn}) x_i$ ，于是有：

$$E\{X_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i \quad (\text{B})$$

$$E\{X_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}\} = -\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}} x_{n-1} \quad (\text{C})$$

若  $\{X(t); t \geq 0\}$  为一均值为零的实正态过程，记：

$$R(s, t) = E\{X(s)X(t)\}$$

$$\rho(s, t) = \frac{R(s, t)}{\sqrt{R(s, s)R(t, t)}} = \frac{\text{Cov}(s, t)}{\sqrt{\text{Cov}(s, s)\text{Cov}(t, t)}}$$

则有以下的定理。

**定理：**设  $\{X(t); t \geq 0\}$  为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要

条件为：对于任意的  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, n \geq 2$ ，有：

$$E\{X_{t_n} \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} = E\{X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

**证明：**考虑以上结论 (B) 和 (C) 即可。

**定理：**设  $\{X(t); t \geq 0\}$  为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要

条件为：对于任意的  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ ，有：

$$\rho(t_1, t_3) = \rho(t_1, t_2)\rho(t_2, t_3)$$

**证明：**充分性：设  $\{X(t); t \geq 0\}$  为马氏过程，任取  $0 < s < t$ ，则由 (B) 有：

$$E\{X(t) \mid X(s) = x\} = -\left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}\right)x \quad (\text{D})$$

考虑  $(X(s), X(t))$  的联合分布，其分布密度为：

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)|A|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \vec{x}^T A^{-1} \vec{x}\right\}$$

其中：



$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} R(s,s) & R(s,t) \\ R(t,s) & R(t,t) \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \frac{1}{R(s,s)R(t,t) - R(s,t)^2} \begin{pmatrix} R(t,t) & -R(t,s) \\ -R(s,t) & R(s,s) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由 (D) 有：

$$E\{X(t) | X(s) = x\} = \left( \frac{R(s,t)}{R(s,s)} \right) x$$

即：

$$E\{X(t) | X(s)\} = \left( \frac{R(s,t)}{R(s,s)} \right) X(s)$$

由马尔可夫性，有：

$$\begin{aligned}
R(t_1, t_3) &= E\{X(t_1)X(t_3)\} = E\{E[X(t_1)X(t_3) | X(t_2)]\} \\
&= E\{E[X(t_1) | X(t_2)]E[X(t_3) | X(t_2)]\}
\end{aligned}$$

由上式，我们有：

$$R(t_1, t_3) = E\left\{ \frac{R(t_1, t_2)}{R(t_2, t_2)} X(t_2) \frac{R(t_2, t_3)}{R(t_2, t_2)} X(t_2) \right\} = \frac{R(t_1, t_2)R(t_2, t_3)}{R(t_2, t_2)}$$

由此得到了  $\rho(t_1, t_3) = \rho(t_1, t_2)\rho(t_2, t_3)$ 。

必要性：由  $\rho(t_1, t_3) = \rho(t_1, t_2)\rho(t_2, t_3)$ ，可得，对于任意的  $1 \leq k \leq n-1$ ，

有：

$$\rho(t_k, t_n) = \rho(t_k, t_{n-1})\rho(t_{n-1}, t_n)$$

即有：

$$R(t_k, t_n) = \frac{R(t_k, t_{n-1})R(t_{n-1}, t_n)}{R(t_{n-1}, t_{n-1})}$$

因而对于任意的  $1 \leq k \leq n-1$ ，有：

$$E\left\{ \left[ X(t_n) - \frac{R(t_{n-1}, t_n)}{R(t_{n-1}, t_{n-1})} X(t_{n-1}) \right] X(t_k) \right\} = 0$$

这就意味正态随机变量  $X(t_n) - \frac{R(t_{n-1}, t_n)}{R(t_{n-1}, t_{n-1})} X(t_{n-1})$  与  $X(t_1), \dots, X(t_{n-1})$  相互独立，故有：

$$E\left\{X(t_n) - \frac{R(t_{n-1}, t_n)}{R(t_{n-1}, t_{n-1})} X(t_{n-1}) \mid X(t_1) = x_1, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\right\} = 0$$

即有：

$$\begin{aligned} E\{X_{t_n} \mid X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} &= \frac{R(t_{n-1}, t_n)}{R(t_{n-1}, t_{n-1})} x_{n-1} \\ &= E\{X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

必要性得证。

对于平稳随机正态序列及平稳正态随机过程的情形，我们有：

定理：设  $\{X(n); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  为正态分布、平稳的随机序列，且

$C(0) \neq 0$ ，则  $X(n)$  是马氏链的充分必要条件是：

$$C(n) = a^n C(0), \quad n \geq 0, |a| \leq 1$$

其中： $C(n)$  为  $X(n)$  的协方差函数。

定理：设  $\{X(t); t \geq 0\}$  为一均方连续、平稳的实正态过程， $C(\tau)$  为其协方差函数，则该过程是马氏过程的充分必要条件为：

$$C(\tau) = C(0)e^{a\tau}, \quad \tau \geq 0, a < 0$$

## （四）窄带平稳实高斯过程

### 1. 一维包络分布和一维相位分布

由前面关于窄带平稳信号的表示法，我们有：

$$\begin{cases} \xi(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \\ \hat{\xi}(t) = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t - x_s(t) \cos 2\pi f_0 t \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} x_c(t) = \xi(t) \cos 2\pi f_0 t + \hat{\xi}(t) \sin 2\pi f_0 t \\ x_s(t) = \xi(t) \sin 2\pi f_0 t - \hat{\xi}(t) \cos 2\pi f_0 t \end{cases}$$

其中： $E\{\xi(t)\} = 0$ ， $\hat{\xi}(t)$  为  $\xi(t)$  的 Hilbert 变换。

若  $\xi(t)$  为一窄带平稳的实正态过程, 则由以上两组表达式可知,  $x_c(t), x_s(t)$  均为正态过程, 且是联合正态过程 (为什么?)。

例: 设有线性系统, 它的冲激响应为  $h(t)$ , 输入为实平稳正态过程  $\xi(t)$ 。设其输出为  $\eta(t)$ , 试证明  $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$  为联合正态随机过程。

证明: 由线性系统输入、输出的关系:

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \xi(\tau) d\tau$$

可知  $\eta(t)$  为实正态随机过程。

令:

$$\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \xi(t) dt$$

其中  $g(\cdot)$  是一任意实函数。则  $\zeta$  为一正态分布随机变量。

定义实函数:

$$g(t) = g_1(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u) h(u - t) du$$

则有:

$$\begin{aligned} \zeta &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \xi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) \xi(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u) h(u - t) du \xi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(t) \xi(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u - t) \xi(t) dt g_2(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) \xi(u) du + \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u) \eta(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(u), g_2(u)) \cdot \begin{pmatrix} \xi(u) \\ \eta(u) \end{pmatrix} du \end{aligned}$$

由于  $g(t)$ 、 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$  为任意的实函数, 而  $\zeta$  为一正态分布随机变量, 因此  $\xi(t)$ 、 $\eta(t)$  为联合正态随机过程。

下面研究窄带平稳实高斯过程的一维包络分布和一维相位分布:

设  $\xi(t)$  的相关函数为  $R_\xi(\tau)$ , 方差为  $\sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$ , 则  $x_c(t), x_s(t)$  的均值为零, 方差为:

$$\sigma_{x_c}^2 = R_{x_c}(0) = \sigma_{x_s}^2 = R_{x_s}(0) = R_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2$$

由于  $R_{x_c x_s}(0) = E\{x_c(t)x_s(t)\} = 0$  , 因此  $x_c(t), x_s(t)$  相互独立。它们的联合分布密度为：

$$f(x_c, x_s) = f(x_c)f(x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi}^2} \exp\left\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}$$

由  $\xi(t)$  的表达式，我们有：

$$\xi(t) = V(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$$

其中：

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \theta(t) = \tan^{-1}\left(-\frac{x_s(t)}{x_c(t)}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(t) \cos \theta(t) = x_c(t) \\ -V(t) \sin \theta(t) = x_s(t) \end{cases}$$

此变换的雅克比行列式为：

$$J = \frac{\partial(x_c, x_s)}{\partial(V, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta_t & -\sin \theta_t \\ -V_t \sin \theta_t & -V_t \cos \theta_t \end{vmatrix} = -V_t \Rightarrow |J| = V_t$$

当  $V_t > 0, 0 \leq \theta_t \leq 2\pi$  时，有：

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma_{\xi}^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}$$

故：

$$f(V_t) = \begin{cases} \frac{V_t}{\sigma_{\xi}^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}, & V_t \geq 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases}$$

即  $V(t)$  服从瑞利分布。

$$f(\theta_t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta_t \leq 2\pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且有：

$$f(V_t, \theta_t) = f(V_t)f(\theta_t)$$

因此，在同一时刻  $t$ ，包络  $V(t)$  与相位  $\theta(t)$  是独立的随机变量，但它们不是独立的随机过程。

另外有：

$$E\{V(t)\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_{\xi}^2, \quad E\{V^2(t)\} = 2\sigma_{\xi}^2, \quad D\{V(t)\} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_{\xi}^2$$

2. 研究包络  $V(t)$  与相位  $\theta(t)$  在任意两个不同时刻  $t_1, t_2$  的联合分布

此时可以推出：

$$f(V_{t_1}, V_{t_2}, \theta_{t_1}, \theta_{t_2}) \neq f(V_{t_1}, V_{t_2})f(\theta_{t_1}, \theta_{t_2})$$

由此可知包络过程  $V(t)$  与相位过程  $\theta(t)$  不独立。详细推导课后阅读。

## (五) 正弦波和窄带平稳实高斯过程之和

令：

$$\eta(t) = P \sin(\omega_0 t + \theta) + \xi(t)$$

其中： $P, \omega_0 = 2\pi f_0$  为常数， $\xi(t)$  为窄带平稳实高斯过程， $\omega_0$  为窄带平稳实高斯过程的功率谱密度的中心角频率， $\theta \sim U(0, 2\pi)$ 。 $\theta$  与  $\xi(t)$  相互独立，并且满足：

$$E\{\xi(t)\} = 0, \quad D\{\xi(t)\} = \sigma_{\xi}^2$$

若  $\theta$  是一固定的值，则由上式定义的随机过程  $\eta(t)$  仍然是一高斯过程，且

$$E\{\eta(t)\} = P \sin(\omega_0 t + \theta)$$

它是一关于时间参数  $t$  的函数，因此  $\eta(t)$  不是一平稳过程。

若  $\theta \sim U(0, 2\pi)$ ，则由上式定义的随机过程  $\eta(t)$  的均值函数为：

$$E\{\eta(t)\} = E\{P \sin(\omega_0 t + \theta) + \xi(t)\} = E\{P \sin(\omega_0 t + \theta)\} + E\{\xi(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned}
 R_{\eta}(t_1, t_2) &= \frac{P^2}{2} \cos \omega_0(t_1 - t_2) + R_{\xi}(t_1 - t_2) \\
 &= \frac{P^2}{2} \cos \omega_0 \tau + R_{\xi}(\tau) = R_{\eta}(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2
 \end{aligned}$$

由此可知，此时  $\eta(t)$  是一平稳过程。但是此时  $\eta(t)$  不是一高斯过程。

随机相位正弦波的特征函数为：

$$\Phi_s(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{juP \sin(\omega_0 t + \theta)\} d\theta = J_0(Pu)$$

其中： $J_0$  为零级贝塞尔函数。

注：贝塞尔函数的定义：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jx \cos \theta} d\theta$$

$$I_0(x) = J_0(jx) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} d\theta$$

称  $J_0(x)$  为零级贝塞尔函数， $I_0(x)$  为修正的零级贝塞尔函数。

随机相位正弦波的概率密度为：

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{P^2 - x^2}}, & |x| < P \\ 0, & |x| \geq P \end{cases}$$

另外，窄带平稳实高斯过程的一维分布密度为：

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\xi}(u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_{\xi}^2 u^2\right\}$$

由此可得  $\eta(t)$  的一维概率密度为：

$$f_{\eta}(x) = f_s(x) * f_{\xi}(x)$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\eta}(u) = \Phi_s(u) \cdot \Phi_{\xi}(u) = J_0(Pu) \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_{\xi}^2 u^2\right\}$$

对上式作 Fourier 逆变换，可得  $\eta(t)$  的一维概率密度为：

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[-x^2/(2\sigma_{\xi}^2)]^k}{k!} {}_1F_1\left(k + \frac{1}{2}; 1; -\frac{P^2}{2\sigma_{\xi}^2}\right)$$

其中：

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

为合流型超几何级数。

注意，在  $\eta(t)$  的一维概率密度的表达式中， $P^2/(2\sigma_{\xi}^2)$  代表随机正弦信号功率与窄带噪声  $\xi(t)$  的功率之比。 $\eta(t)$  的一维分布密度显然不是一正态分布，但是当信噪比很弱时， $\eta(t)$  的一维分布密度应该很接近于正态分布。

下面研究  $\eta(t)$  的包络，也就是研究信号  $\eta(t)$  的检波器输出问题。

利用  $\xi(t)$  是窄带平稳实正态信号，我们有：

$$\begin{aligned} \eta(t) &= P \sin(\omega_0 t + \theta) + \xi(t) \\ &= P \sin(\omega_0 t + \theta) + x_c(t) \cos 2\pi f_0 t + x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= (P \sin \theta + x_c(t)) \cos 2\pi f_0 t + (P \cos \theta + x_s(t)) \sin 2\pi f_0 t \\ &= z_c(t) \cos 2\pi f_0 t + z_s(t) \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} z_c(t) = P \sin \theta + x_c(t) \\ z_s(t) = P \cos \theta + x_s(t) \end{cases}$$

由于  $x_c(t), x_s(t)$  是独立的正态分布随机变量，均值为零，方差为  $\sigma_{\xi}^2$ ，并且由条件  $x_c(t), x_s(t)$  和  $\theta$  是独立的，故当  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  时，有：

$$f(x_c, x_s, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

由变换：

$$\begin{cases} z_c = P \sin \theta + x_c \\ z_s = P \cos \theta + x_s \\ \theta = \theta \end{cases}$$

可得  $(z_c(t), z_s(t), \theta)$  的联合分布密度：

$$\begin{aligned} f(z_c, z_s, \theta) &= \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[(z_c - P \sin \theta)^2 + (z_s - P \cos \theta)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{z_c^2 + z_s^2 + P^2 - 2P(z_c \sin \theta + z_s \cos \theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

另外，

$$\begin{aligned} \eta(t) &= z_c(t) \cos 2\pi f_0 t + z_s(t) \sin 2\pi f_0 t \\ &= V(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)) \end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases} V(t) \cos \varphi(t) = z_c(t) = P \sin \theta + x_c(t) \\ -V(t) \sin \varphi(t) = z_s(t) = P \cos \theta + x_s(t) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

由此变换及  $(z_c(t), z_s(t), \theta)$  的联合分布密度, 可得  $(V(t), \varphi(t), \theta)$  的联合分布密度：

当  $V_t \geq 0, 0 \leq \varphi_t \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  时，有：

$$\begin{aligned} f(V_t, \varphi_t, \theta) &= \\ &= \frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2 - 2P(V_t \cos \varphi_t \sin \theta - V_t \sin \varphi_t \cos \theta)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \\ &= \frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2 - 2PV_t \cos(\theta - \varphi_t)}{2\sigma_\xi^2}\right\} \end{aligned}$$

当其它情况时，有：



$$f(V_t, \varphi_t, \theta) = 0$$

由此可以求得关于包络  $V(t)$  的边缘分布为：

$$\begin{aligned} f(V_t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(V_t, \varphi_t, \theta) d\varphi_t d\theta \\ &= \frac{V_t}{4\pi^2 \sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{PV_t \cos(\theta - \varphi_t)}{\sigma_\xi^2}\right\} d\theta d\varphi_t \\ &= \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{PV_t \cos(\theta - \varphi_t - \pi/2)}{\sigma_\xi^2}\right\} d\theta d\varphi_t \\ &= \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{PV_t \cos(\pi/2 + \varphi_t - \theta)}{\sigma_\xi^2}\right\} d\theta d\varphi_t \end{aligned}$$

令：

$$\pi/2 + \varphi_t - \theta = \alpha$$

有：

$$\begin{aligned} f(V_t) &= \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta} \exp\left\{\frac{PV_t \cos \alpha}{\sigma_\xi^2}\right\} d\alpha d\theta \\ &= \begin{cases} \frac{V_t}{\sigma_\xi^2} \exp\left\{-\frac{V_t^2 + P^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} \cdot I_0\left(\frac{PV_t}{\sigma_\xi^2}\right) & V_t \geq 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其中：

$$I_0(x) = J_0(jx) \quad (\text{零级修正贝塞尔函数})$$

注意，当  $P = 0$  时，此结果和前面关于  $\xi(t)$  的包络一维分布是一致的。

令：

$$\begin{cases} v = \frac{V_t}{\sigma_\xi} \\ a = \frac{P}{\sigma_\xi} \end{cases}$$

则有：

$$f(v) = v \exp\left\{-\frac{v^2 + a^2}{2}\right\} I_0(av) \quad v \geq 0$$

其中： $\frac{a^2}{2} = \frac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$  为输入（功率）信噪比； $v = \frac{V_t}{\sigma_\xi}$  为包络与噪声均方根值之比。

注意以下的结果。当  $PV_t \gg \sigma_\xi^2$  时，包络的一维分布密度可以近似地表示为：

$$f(V_t) = \frac{1}{\sigma_\xi} \left( \frac{V_t}{2\pi P} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(V_t - P)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}$$

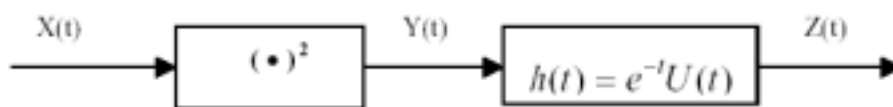
由此可知，当  $V_t$  接近于  $P$ ，且  $P \gg \sigma_\xi$  时，包络的一维分布密度近似于正态分布密度。

## （六）例子

例 1．设随机过程  $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$  是均值为零、自相关函数为  $R_X(\tau)$  的实平稳正态过程，令随机过程  $Y(t) = X^2(t)$ ，试证明  $Y(t)$  是平稳过程且其自相关函数为  $R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$ 。若下图所示系统的输入  $X(t)$  是一实平稳正态随机信号，其输出信号  $Z(t)$  的功率谱密度函数为：

$$S_Z(\omega) = \frac{\pi\delta(\omega)}{1 + \omega^2} + \frac{2\beta}{(\beta^2 + \omega^2)(1 + \omega^2)} \quad (\beta > 0)$$

试求随机信号  $X(t)$ 、 $Y(t)$  的自相关函数  $R_X(\tau)$  和  $R_Y(\tau)$ 。



解：由于  $X(t)$  是均值为零的实正态平稳过程，因此有：

$$E\{Y(t)\} = E\{X^2(t)\} = R_X(0) = \text{常数}$$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y(t-\tau)\} = E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\} \\ &= E\{X^2(t)\}E\{X^2(t-\tau)\} + 2E\{X(t)X(t-\tau)\} \\ &= 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0) \end{aligned}$$

因此  $Y(t) = X^2(t)$  是平稳过程。

由题意可知：

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{1+j\omega} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$$

由：

$$S_Z(\omega) = |H(\omega)|^2 S_Y(\omega)$$

可得：

$$S_Y(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{2\beta}{(\beta^2 + \omega^2)}$$

因此有：

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} + e^{-\beta|\tau|}$$

根据式子：

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

我们有：

$$\frac{3}{2} = R_Y(0) = 3R_X^2(0) \Rightarrow R_X^2(0) = \frac{1}{2}$$

因此有：

$$R_X(\tau) = \sqrt{\frac{R_Y(\tau) - R_X^2(0)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\beta|\tau|}{2}}$$

例 2 . 设有随机过程  $\xi(t) = Xt^2 + 2Yt - 1, 0 < t < \infty$  ,  $X$  与  $Y$  是相互独立的正态随机变量 , 期望均为 0 , 方差分别是  $\sigma_X^2$  和  $\sigma_Y^2$  。问过程  $\{\xi(t)\}$  是否正态过程 ? 是否平稳过程 ? 均需说明理由。

解：任取  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$  , 则有：

$$\begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \xi(t_2) \\ \vdots \\ \xi(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Xt_1^2 + 2Yt_1 - 1 \\ Xt_2^2 + 2Yt_2 - 1 \\ \vdots \\ Xt_n^2 + 2Yt_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^2 & 2t_1 \\ t_2^2 & 2t_2 \\ \vdots & \vdots \\ t_n^2 & 2t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

由于  $X$  与  $Y$  独立, 且都服从正态分布, 因此可得  $(X, Y)^T$  服从正态分布, 根据随机向量线性变换的性质, 由上式可知随机向量  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))^T$  服从正态(高斯)分布, 所以随机过程  $\xi(t) = X t^2 + Y t + 1, 0 < t < \infty$  是正态(高斯)过程。

由于

$$\begin{aligned} m_{\xi}(t) &= E\{X t^2 + 2Y t - 1\} = -1 \\ R_{\xi}(s, t) &= E\{\xi(s)\xi(t)\} = E\{[X s^2 + 2Y s - 1][X t^2 + 2Y t - 1]\} = \\ &= E\{X^2 s^2 t^2 + 2XY s^2 t - X s^2 + 2XY t^2 s + 4Y^2 s t - 2Y s - X t^2 - 2Y t + 1\} \\ &= \sigma_X^2 s^2 t^2 + 4\sigma_Y^2 s t + 1 \end{aligned}$$

由此可知, 此随机过程不是平稳的。

例 3. 设有随机过程  $\xi(t) = X t^2 + Y t + 1, 0 < t < \infty$ , 其中  $X$  与  $Y$  是相互独立的正态随机变量, 期望均为 0, 方差分别为  $\sigma_X^2$  和  $\sigma_Y^2$ 。证明过程  $\{\xi(t)\}$  为均方可积的正态过程, 并求过程  $\{\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds, t > 0\}$  的相关函数。

解: 正态过程的证明如上例。

由计算可得:

$$\begin{aligned} E\{\xi(t)\} &= E\{X t^2 + Y t + 1\} = t^2 E\{X\} + t E\{Y\} + 1 = 1 \\ R_{\xi}(t_1, t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = E\{[t_1^2 X + t_1 Y + 1][t_2^2 X + t_2 Y + 1]\} \\ &= t_1^2 t_2^2 E\{X^2\} + (t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2) E\{XY\} + t_1 t_2 E\{Y^2\} + \\ &\quad + (t_1^2 + t_2^2) E\{X\} + (t_1 + t_2) E\{Y\} + 1 \\ &= t_1^2 t_2^2 E\{X^2\} + t_1 t_2 E\{Y^2\} + 1 = t_1^2 t_2^2 \sigma_X^2 + t_1 t_2 \sigma_Y^2 + 1 \end{aligned}$$

由于  $R_{\xi}(t_1, t_2)$  连续, 因此过程  $\{\xi(t)\}$  为均方可积。

过程  $\{\eta(t) = \int_0^t \xi(s) ds, t > 0\}$  的相关函数为:

$$\begin{aligned} R_{\eta}(t_1, t_2) &= E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} = E\left\{\int_0^{t_1} \xi(u) du \int_0^{t_2} \xi(v) dv\right\} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E\{\xi(u)\xi(v)\} dudv = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_{\xi}(u, v) dudv \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} (u^2 v^2 \sigma_X^2 + uv \sigma_Y^2 + 1) dudv \end{aligned}$$

## (七) 维纳过程 (布朗运动)

### 1. 维纳过程的定义

设质点每经过  $\Delta t$  时间, 随机地以概率  $p = 1/2$  向右移动  $\Delta x > 0$  距离, 以概率  $q = 1/2$  向左移动  $\Delta x > 0$  距离, 且每次移动是相互独立的。记:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次质点向右移动} \\ -1, & \text{第 } i \text{ 次质点向左移动} \end{cases}$$

若  $X(t)$  表示在  $t$  时刻质点所处的位置, 则有:

$$X(t) = \Delta x (X_1 + X_2 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$$

显然有:

$$E\{X_i\} = 0, \quad D\{X_i\} = E\{X_i^2\} = 1$$

故有:

$$E\{X(t)\} = 0, \quad D\{X(t)\} = (\Delta x)^2 \left[ \frac{t}{\Delta t} \right]$$

假设  $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ , 其中  $c > 0$  为常数, 它由物理意义确定。

令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 即研究连续的游动, 则有:

$$E\{X(t)\} = 0$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} D\{X(t)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta x)^2 \left[ \frac{t}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} c^2 \Delta t \left[ \frac{t}{\Delta t} \right] = c^2 t$$

另一方面, 任取两个时刻  $0 < t_1 < t_2$ , 令:

$$n_1 = \left[ \frac{t_1}{\Delta t} \right], \quad n_2 = \left[ \frac{t_2}{\Delta t} \right]$$

则有:

$$X(t_1) = \Delta x (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n_1})$$

$$X(t_2) = \Delta x (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n_2})$$

$$X(t_2) - X(t_1) = \Delta x(X_{n_1+1} + \cdots + X_{n_2})$$

由于  $(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n_1})$  与  $(X_{n_1+1} + \cdots + X_{n_2})$  是相互独立的, 因此  $X(t_1)$  与  $X(t_2) - X(t_1)$  相互独立。即随机过程  $X(t)$  是一独立增量过程。由此  $X(t)$  可以看作由许多微小的相互独立的随机变量  $X(t_i) - X(t_{i-1})$  组成之和。由中心极限定理, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 我们有:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ \frac{\sum_{i=0}^{\left[ \frac{t}{\Delta t} \right]} \Delta x X_i - 0}{\sqrt{c^2 t}} \leq x \right\} = \Phi(x)$$

即有:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P \left\{ \frac{X(t)}{\sqrt{c^2 t}} \leq x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

故当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $X(t)$  趋向于正态分布, 即

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ 时, } X(t) \sim N(0, c^2 t)$$

由此, 我们引入维纳过程 (Wiener Process) 的定义:

定义: 若一随机过程  $\{W(t); t \geq 0\}$  满足:

- (1)  $W(t)$  是独立增量过程;
- (2)  $\forall s, t > 0, W(s+t) - W(s) \sim N(0, c^2 t)$ ;
- (3)  $W(t)$  是关于  $t$  的连续函数;

则称  $\{W(t); t \geq 0\}$  是布朗运动或维纳过程 (Wiener Process)。

若  $c=1, W(0)=0$  时, 称此时的维纳过程为标准的维纳过程, 记为  $\{W_0(t); t \geq 0\}$ 。标准维纳过程的一维概率密度为:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$$

且有： $W_0(t_i) - W_0(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ 。

**注 1：**维纳过程是正态过程（这一结论并不是显然的）：一般地，由维纳过程的定义可知，任取  $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ，则  $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  相互独立，且都服从正态分布，由于：

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

因此  $W(t_1), W(t_2), \cdots, W(t_n)$  也服从正态分布，即维纳过程也是正态过程。

**注 2：**维纳过程与 Poisson 过程的比较。

**定理：**设  $\{W_0(t); t \geq 0\}$  为标准维纳过程，令  $x_0 = 0, t_0 = 0$ ，则对任意  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ， $(W_0(t_1), W_0(t_2), \cdots, W_0(t_n))$  的联合分布密度为：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i - x_{i-1}; t_i - t_{i-1})$$

其中：

$$p(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$$

**证明：**令： $Y_1 = W_0(t_1), Y_i = W_0(t_i) - W_0(t_{i-1}), i = 2, 3, \cdots, n$ ，则有：

$$W_0(t_i) = \sum_{k=1}^i Y_k \quad (*)$$

由维纳过程的增量独立性知， $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$  是相互独立的，且  $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ ，

则  $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$  的联合分布密度为：

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left\{-\frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\}$$

由变换式子 (\*), 可得  $(W_0(t_1), W_0(t_2), \cdots, W_0(t_n))$  的联合密度函数为：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(y_1, y_2, \cdots, y_n) |J|$$

其中：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |J| = 1$$

故

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\} \\ &= \prod_{i=1}^n p(x_i - x_{i-1}; t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

注意：由于标准维纳过程是独立增量过程，因此具有马氏性。即标准维纳过程是马氏过程。

## 2. 维纳过程的性质

下面主要研究标准维纳过程的基本性质。设  $\{W_0(t); t \geq 0\}$  为标准维纳过程，则有：

$$E\{W_0(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\} &= E\{W_0(t_1)[W_0(t_2) - W_0(t_1) + W_0(t_1)]\} \\ &= E\{W_0^2(t_1)\} = t_1 \quad t_1 \leq t_2 \end{aligned}$$

同理可得：

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\} = E\{W_0^2(t_2)\} = t_2 \quad t_1 \geq t_2$$

因此有：

$$R_{W_0}(t_1, t_2) = E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\} = \min(t_1, t_2)$$

故维纳过程不是平稳过程。

由于当  $t_1 = t_2$  时，标准维纳过程的相关函数  $R_{W_0}(t_1, t_2)$  是一连续函数，因此



标准维纳过程是均方连续的随机过程。

由于：

$$\frac{\partial}{\partial t_2} R_{W_0}(t_1, t_2) = u(t_1 - t_2) = \begin{cases} 1, & t_1 > t_2 \\ 0, & t_1 < t_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_{W_0}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} u(t_1 - t_2) = \delta(t_1 - t_2)$$

因此若记标准维纳过程的均方导数为  $W_0'(t)$ ，则有：

$$E\{W_0'(t_1)W_0'(t_2)\} = \frac{\partial}{\partial t_1} u(t_1 - t_2) = \delta(t_1 - t_2) = \delta(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2$$

由此可知  $W_0'(t)$  是一正态分布的白噪声。这提供了产生正态白噪声的一种方法。

记： $W(t) = \mu t + \sigma W_0(t)$ ，其中  $\mu, \sigma$  为常数，则有：

$$E\{W(t)\} = \mu t$$

$$D\{W(t)\} = E\{[W(t) - \mu t]^2\} = \sigma^2 E\{W_0^2(t)\} = \sigma^2 t$$

我们称  $\mu$  为偏离系数， $\sigma^2$  为过程  $W(t)$  的强度。 $W(t)$  的一维分布密度为：

$$f_W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

$W(t)$  为非平稳过程。

例：设  $\{B_t; t \geq 0\}$  是初值为零标准布朗运动过程，试求它的概率转移密度函数  $p(s, t, x, y) \triangleq f_{B_t|B_s}(y|x)$ 。

解：由标准维纳过程的定理：设  $\{W_0(t); t \geq 0\}$  为标准维纳过程，则对任意  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ， $(W_0(t_1), W_0(t_2), \cdots, W_0(t_n))$  的联合分布密度为：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i - x_{i-1}; t_i - t_{i-1})$$

其中：

$$p(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\}$$

可知：当  $s < t$  时， $(B_s, B_t)$  的联合分布密度为：

$$f_{B_s B_t}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

$B_s$  的分布密度为：

$$f_{B_s}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}$$

因此

$$p(s, t, x, y) \triangleq f_{B_t|B_s}(y|x) = \frac{f_{B_s B_t}(x, y)}{f_{B_s}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

例：求随机过程  $X(t) = W^2(t)$ ,  $t > 0$ , (其中  $W(t)$  是偏离系数为零，强度为  $\sigma^2$  的 Wiener 过程) 的均值函数和相关函数，从而判定其均方连续性和均方可微性。

例：设  $W(t)$  是偏离系数为零，强度为  $\sigma^2$  的 Wiener 过程，求随机过程  $X(t) = \int_0^t s W(s) ds$  和  $X(t) = tW\left(\frac{1}{t}\right)$  的均值函数和相关函数。

### 3. 维纳过程的应用

设  $\xi(t)$  是一正态分布的白噪声，研究其均方积分  $\{\eta(t) = \int_0^t \xi(u) du; t \geq 0\}$  的统计特性。

假设：

$$E\{\xi(t)\} = 0, R_\xi(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

由于均方积分是一线性变换，由  $\xi(t)$  是一正态过程，可知  $\int_0^t \xi(u) du$  仍然为一正态过程。且有：

$$(1) E\{\eta(t)\} = E\left\{\int_0^t \xi(u) du\right\} = 0$$

$$(2) E\{\eta(0)\} = E\left\{\int_0^0 \xi(u) du\right\} = 0$$

(3) 当  $0 \leq t_1 < t_2$  时, 有:

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1, t_2) &= E\left\{\int_0^{t_1} \xi(u) du \int_0^{t_2} \xi(v) dv\right\} = E\left\{\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \xi(u) \xi(v) dudv\right\} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \sigma^2 \delta(u-v) dv du = \int_0^{t_1} \sigma^2 du = \sigma^2 t_1 \end{aligned}$$

当  $0 \leq t_2 < t_1$  时, 有:

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1, t_2) &= E\left\{\int_0^{t_1} \xi(u) du \int_0^{t_2} \xi(v) dv\right\} = E\left\{\int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \xi(u) \xi(v) dudv\right\} \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{t_1} \sigma^2 \delta(u-v) dudv = \int_0^{t_2} \sigma^2 dv = \sigma^2 t_2 \end{aligned}$$

由此有:

$$R_\eta(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$$

因此  $\eta(t)$  是一维纳过程。若  $\sigma^2 = 1$ , 则  $\eta(t)$  是一标准维纳过程, 即  $\eta(t) = W_0(t)$ 。

由上面讨论的维纳过程的性质可知, 当  $\sigma^2 = 1$  时, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_0(t) &= W'_0(t) \quad (W'_0(t) \text{ 为正态白噪声}) \\ \int_0^t W'_0(u) du &= W_0(t) \end{aligned}$$

## (八) 维纳积分

### 1. 维纳积分的定义

定义: 给定  $\{W_0(t); t \geq 0\}$  是一标准维纳过程,  $b(t) (t \geq 0)$  为一确定性函数, 且满足:

$$\int_0^t |b(u)|^2 du < \infty \quad \forall t \geq 0$$

给定  $t > 0$ , 对区间  $[0, t]$  作一任意划分  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t$ , 作和为:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1}) - W_0(t_k)]$$

称  $S_n$  的均方极限为维纳积分，记为：

$$U(t) = \int_0^t b(u) dW_0(u)$$

即：

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} E \left\{ \left| S_n - \int_0^t b(u) dW_0(u) \right|^2 \right\} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} E \left\{ \left| \sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1}) - W_0(t_k)] - \int_0^t b(u) dW_0(u) \right|^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

其中： $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1})$ 。

注：可以证明  $S_n$  的均方极限一定存在。并且有以下的结果：

$$E\{U(t)\} = E\left\{\int_0^t b(u) dW_0(u)\right\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_U(t_1, t_2) &= E\left\{\int_0^{t_1} b(u) dW_0(u) \int_0^{t_2} b(v) dW_0(v)\right\} \\ &= \int_0^{\min(t_1, t_2)} b^2(u) du \end{aligned}$$

注意以上定义中  $S_n$  的求和方式。

例：试研究维纳积分：

$$U(t) = \int_0^t \sin \omega u dW_0(u)$$

的均值，相关函数。令  $\Delta U = U(t_2) - U(t_1)$  ( $t_2 > t_1$ )，试研究  $\Delta U$  的均值和相关函数。

解：由于： $\int_0^t \sin^2 \omega u du < \infty$ ，故维纳积分是存在的。因此： $E\{U(t)\} = 0$ ，

$$\begin{aligned} R_U(t_1, t_2) &= \int_0^{\min(t_1, t_2)} \sin^2(\omega u) du = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega u) \right) du \\ &= \frac{1}{2} \min(t_1, t_2) - \frac{1}{4\omega} \sin\{2\omega[\min(t_1, t_2)]\} \quad (t_1 \geq 0, t_2 \geq 0) \end{aligned}$$

由于维纳过程是一正态过程，因此维纳积分  $U(t)$  仍然为一正态过程，所以

$\Delta U$  是正态分布的随机变量。由此我们有：

$$\begin{aligned}
 E\{\Delta U\} &= 0 \\
 \sigma_{\Delta U}^2 &= E\{[U(t_2) - U(t_1)]^2\} \\
 &= R_U(t_2, t_2) - 2R_U(t_2, t_1) + R_U(t_1, t_1) \\
 &= \frac{t_2}{2} - \frac{\sin 2\omega t_2}{4\omega} - t_1 + \frac{\sin 2\omega t_1}{2\omega} + \frac{t_1}{2} - \frac{\sin 2\omega t_1}{4\omega} \\
 &= \frac{1}{2}(t_2 - t_1) - \frac{1}{2\omega} \cos \omega(t_1 + t_2) \sin \omega(t_2 - t_1)
 \end{aligned}$$

## 2. 维纳积分的性质

(1) 关于确定性函数的线性性：

设  $a_1, a_2$  为常数,  $b_1(u), b_2(u)$  为确定性函数, 且满足：

$$\int_0^t b_1^2(u) du < \infty, \int_0^t b_2^2(u) du < \infty, \quad \forall t \geq 0$$

则有：

$$\int_0^t [a_1 b_1(u) + a_2 b_2(u)] dW_0(u) = a_1 \int_0^t b_1(u) dW_0(u) + a_2 \int_0^t b_2(u) dW_0(u)$$

(2) 可加性

$$\int_0^{t_1} b(u) dW_0(u) + \int_{t_1}^{t_2} b(u) dW_0(u) = \int_0^{t_2} b(u) dW_0(u), \quad 0 \leq t_1 < t_2$$

注意：当  $t \geq 0, b(u) > 0$  时, 并不一定有  $U(t) = \int_0^t b(u) dW_0(u) > 0$ , 例如：

取  $b(u) = 1$  时, 有  $U(t) = \int_0^t 1 dW_0(u) = W_0(t)$ , 而  $W_0(t)$  是一正态分布的随机变量, 它可能取负值。

## 3. 维纳积分的统计特性

维纳积分  $\{U(t); t \geq 0\}$  是一随机过程, 它具有以下基本性质：

(1)  $U(0) = 0$  ;

$$(2) E\{U(t)\} = 0$$

(3)  $\{U(t); t \geq 0\}$  是一正态过程；

(4)  $\{U(t); t \geq 0\}$  是一独立增量过程，因此是一马氏过程；

$$(5) U(t) \text{ 的方差为 } \sigma_U^2(t) = \int_0^t b^2(u) du ;$$

(6)  $U(t)$  的方差的导数为： $\frac{d\sigma_U^2}{dt} = b^2(t) (t \geq 0)$ ，它是一时间  $t$  的函数。

注意到维纳过程方差的导数是一常数，因此我们称  $U(t)$  为非齐次维纳过程， $b(t)$  为  $U(t)$  的强度函数。

由于  $\frac{d}{dt} W_0(t) = W_0'(t)$ ， $W_0'(t)$  为正态白噪声，因此，考虑一个线性系统，

其冲激响应为  $h(t, \tau)$ ，冲激响应满足平方可积。以正态白噪声输入此系统，则输出为：

$$\eta(t) = \int_0^t h(t, \tau) W_0'(\tau) d\tau = \int_0^t h(t, \tau) dW_0(\tau)$$

因此，输出是一维纳积分，它是一非齐次的维纳过程，并且有：

$$E\{\eta(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1, t_2) &= E\left\{\int_0^{t_1} h(t_1, u) W_0'(u) du \int_0^{t_2} h(t_2, v) W_0'(v) dv\right\} \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1, u) h(t_2, v) E\{W_0'(u) W_0'(t_2)\} dudv \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h(t_1, u) h(t_2, v) \delta(u - v) dudv \\ &= \int_0^{\min(t_1, t_2)} h(t_1, u) h(t_2, u) du \end{aligned}$$

#### 4. 广义维纳积分

设有两个独立的标准维纳过程  $\{W_{01}(t); t \geq 0\}$  和  $\{W_{02}(t); t \geq 0\}$ ，定义：

$$W_0(t) = \begin{cases} W_{01}(t); & t \geq 0 \\ W_{02}(-t); & t < 0 \end{cases}$$

并假定

$$\int_{-\infty}^t |h(t, u)|^2 du < \infty$$

记

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t, u) dW_0(u) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^t h(t, u) dW_0(u) \quad (-\infty < t < \infty)$$

则称  $\xi(t)$  为广义维纳积分。

广义维纳积分具有以下的基本性质：

$$(1) E\{\xi(t)\} = 0$$

$$(2) R_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\min(t_1, t_2)} h(t_1, u) h(t_2, u) du \quad (-\infty < t_1, t_2 < \infty)$$

例：设：

$$h(t, u) = \begin{cases} \beta \exp\{-\alpha(t - u)\}, & -\infty < u < t < \infty \\ 0, & -\infty < t < u < \infty \end{cases} \quad \alpha, \beta > 0$$

试研究广义维纳积分的统计性质。

解：由广义维纳积分的性质有  $E\{\xi(t)\} = 0$ 。其中：

$$\xi(t) = \beta \int_{-\infty}^t \exp\{-\alpha(t - u)\} dW_0(u)$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \beta^2 \int_{-\infty}^{\min(t_1, t_2)} \exp\{-\alpha(t_1 - u)\} \exp\{-\alpha(t_2 - u)\} du$$

当  $t_2 > t_1$  时，有：

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \beta^2 \int_{-\infty}^{t_1} \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\} \exp\{2\alpha u\} du = \frac{\beta^2}{2\alpha} \exp\{-\alpha(t_2 - t_1)\}$$

当  $t_2 < t_1$  时，有：

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \beta^2 \int_{-\infty}^{t_2} \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\} \exp\{2\alpha u\} du = \frac{\beta^2}{2\alpha} \exp\{-\alpha(t_1 - t_2)\}$$

故：

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{\beta^2}{2\alpha} \exp\{-\alpha|t_1 - t_2|\} = \frac{\beta^2}{2\alpha} \exp\{-\alpha|\tau|\}, \quad \tau = t_1 - t_2$$

因此  $\xi(t)$  是一平稳过程。由于：

$$\xi(t) = \beta \int_{-\infty}^t \exp\{-\alpha(t-u)\} dW_0(u) = \beta \int_{-\infty}^t \exp\{-\alpha(t-u)\} W_0'(u) du$$

而  $W_0'(t)$  为正态白噪声，因此  $\xi(t)$  是一正态过程，而且是一马氏过程，参数为  $\beta^2/(2\alpha), \alpha$ 。

注意：例中给出的过程  $\xi(t)$  称为奥斯坦 - 乌伦贝克 (Ornstein-Uhlenbeck) 过程，它是一正态马氏过程。

## (九) 伊藤 (Ito) 随机积分

### 1. 伊藤 (Ito) 随机积分的定义

考察以下随机微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(t, X(t)) + g(t, X(t)) \frac{dW(t)}{dt} \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

其中： $W(t)$  为维纳过程。此随机方程我们称为伊藤 (Ito) 随机微分方程。此方程形式上的解可以写成：

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t f(t, X(t)) dt + \int_{t_0}^t g(t, X(t)) dW(t)$$

此积分称为伊藤 (Ito) 随机积分方程。

要研究此方程的解，我们需要引入伊藤 (Ito) 随机积分的定义。

定义：设  $X(t)$  为一二阶矩过程， $W(t)$  为维纳过程，对区间  $[a, b]$  ( $b > a \geq 0$ )

进行划分： $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ ，记  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{t_k - t_{k-1}\}$ ，作和式：

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n X(t_{k-1}) [W(t_k) - W(t_{k-1})]$$

若以上和式  $\eta_n$  当  $\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  时均方收敛，则其均方极限称为  $X(t)$  关于维纳过程  $W(t)$  的伊藤 (Ito) 随机积分。记为：



$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \eta_n = \int_a^b X(t) dW(t)$$

注意：和式中求和取点的方式。

定理：设  $X(t)$  为均方连续的二阶矩过程，并且对任意的  $s'_1, s'_2 \leq t_{k-1} < t_k$  及  $s_1 < s_2 \leq t_{k-1} < t_k$ ，随机向量  $(X(s'_1), X(s'_2), W(s_2) - W(s_1))$  与  $W(t_k) - W(t_{k-1})$  相互独立，则  $X(t)$  关于维纳过程  $W(t)$  的伊藤 (Ito) 随机积分存在且唯一。

若  $W(t)$  为标准维纳过程时，则有：

$$E \left\{ \left( \int_a^b X(t) dW_0(t) \right)^2 \right\} = \int_a^b E \{ X^2(t) \} dt$$

例：研究伊藤 (Ito) 随机积分  $\int_a^b W_0(t) dW_0(t)$ 。

解：标准维纳过程  $W_0(t)$  满足以上定理的要求，因此伊藤 (Ito) 积分

$\int_a^b W_0(t) dW_0(t)$  存在且唯一。对区间  $[a, b]$  进行划分：

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \quad \lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{t_k - t_{k-1}\},$$

作和式如下：

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n W_0(t_{k-1}) [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})] &= \\ &= - \sum_{k=1}^n W_0(t_{k-1}) [W_0(t_{k-1}) - W_0(t_k)] \\ &= - \{ W_0^2(t_0) - W_0(t_0)W_0(t_1) + W_0^2(t_1) - W_0(t_1)W_0(t_2) + \\ &\quad + \cdots + W_0^2(t_{n-1}) - W_0(t_{n-1})W_0(t_n) \} \\ &= - \left\{ \frac{1}{2} W_0^2(t_0) + \frac{1}{2} [W_0(t_0) - W_0(t_1)]^2 + \frac{1}{2} [W_0(t_1) - W_0(t_2)]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{2} [W_0(t_{n-1}) - W_0(t_n)]^2 - \frac{1}{2} W_0^2(t_n) \right\} \\ &= \frac{1}{2} [W_0^2(b) - W_0^2(a)] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2 \end{aligned}$$

令：

$$\Delta W_{0k} = W_0(t_k) - W_0(t_{k-1}), \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

则由：

$$\begin{aligned} E \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n (\Delta W_{0k})^2 - (b-a) \right]^2 \right\} &= E \left\{ \sum_{k=1}^n [(\Delta W_{0k})^2 - \Delta t_k] \right\}^2 \\ &= E \left\{ \sum_{k=1}^n [\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k]^2 + 2 \sum_{k,i=1; k \neq i}^n [\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k][\Delta W_{0i}^2 - \Delta t_i] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n E[\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k]^2 + 2 \sum_{k,i=1; k \neq i}^n E\{[\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k][\Delta W_{0i}^2 - \Delta t_i]\} \\ &= \sum_{k=1}^n E[\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k]^2 + 2 \sum_{k,i=1; k \neq i}^n E\{\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k\} E\{\Delta W_{0i}^2 - \Delta t_i\} \\ &= \sum_{k=1}^n E[\Delta W_{0k}^2 - \Delta t_k]^2 \\ &= \sum_{k=1}^n E\{\Delta W_{0k}^4 - 2[\Delta W_{0k}^2](\Delta t_k) + (\Delta t_k)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{3(\Delta t_k)^2 - 2(\Delta t_k)(\Delta t_k) + (\Delta t_k)^2\} = 2 \sum_{k=1}^n (\Delta t_k)^2 \leq 2\lambda \sum_{k=1}^n \Delta t_k \\ &= 2\lambda(b-a) \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0) \end{aligned}$$

可知：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2 = b-a$$

由上面推导的和式，我们有：

$$\begin{aligned} \int_a^b W_0(t) dW_0(t) &= \frac{1}{2} [W_0^2(b) - W_0^2(a)] - \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2 \\ &= \frac{1}{2} [W_0^2(b) - W_0^2(a)] - \frac{1}{2} (b-a) \end{aligned}$$

注意：如果令：

$$I_n = \sum_{k=1}^n W_0(t_{k-1}) [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]$$

$$J_n = \sum_{k=1}^n W_0(t_k)[W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]$$

则有：

$$J_n - I_n = \sum_{k=1}^n [W_0(t_k) - W_0(t_{k-1})]^2$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} l.i.m(J_n - I_n) = b - a$$

这就是在伊藤 (Ito) 随机积分的定义中，我们为什么在作和式

$\eta_n = \sum_{k=1}^n X(t_{k-1})[W(t_k) - W(t_{k-1})]$ 时要在  $X(\cdot)$  中取划分小区间左边的点  $t_{k-1}$ ，而

不取任意的  $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$  的原因。

## 2. 伊藤 (Ito) 积分的性质

(1) 线性性：

$$\int_a^b [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dW(t) = \alpha \int_a^b X(t) dW(t) + \beta \int_a^b Y(t) dW(t)$$

(2) 如果  $a \leq b \leq c$ ，则有

$$\int_a^c X(t) dW(t) = \int_a^b X(t) dW(t) + \int_b^c X(t) dW(t)$$

(3) 设  $\int_a^b X(t) dW_0(t)$  存在，则对于  $a \leq t \leq b$ ，有：

$$Y(t) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

存在，且关于  $t$  均方连续。

(4) 设  $\{X_n(t), t \in [a, b]\}$  是均方连续的二阶矩过程序列，且满足伊藤 (Ito) 随机积分存在的条件。如果关于  $t$  一致地有：

$$X(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n(t)$$

则  $X(t)$  也是均方连续的，且满足伊藤 (Ito) 随机积分存在的条件，对于一切的  $a \leq t \leq b$ ，一致地有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m \int_a^t X_n(u) dW_0(u) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

注意：在伊藤 (Ito) 随机积分中，如果  $X(t)$  为一确定性函数，则它就是上面定义的维纳积分。

### 3. 伊藤 (Ito) 随机积分的应用

研究线性伊藤 (Ito) 随机微分方程 (Langevin 方程)：

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = -\alpha X(t) + \beta \frac{dW_0(t)}{dt} \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

其中： $\alpha > 0, \beta > 0$  为常数。

解：注意到方程

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) = \beta y(t) & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

的解可以写成：

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} y(u) du$$

因此以上的线性伊藤 (Ito) 随机微分方程可以看作以白噪声  $\beta \frac{dW_0(t)}{dt}$  激励由方

程 (\*) 确定的线性系统，因此  $X(t)$  形式上可以写成：

$$X(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} \beta W_0'(u) du = \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_0(u)$$

因此有：

$$E\{X(t)\} = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = \beta^2 \int_0^{\min(t_1, t_2)} \exp\{-\alpha(t_1 - u)\} \exp\{-\alpha(t_2 - u)\} du$$

$$= \beta^2 \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\} \int_0^{\min(t_1, t_2)} \exp\{2\alpha u\} du$$

$$= \frac{\beta^2}{2\alpha} [\exp\{-\alpha|t_1 - t_2|\} - \exp\{-\alpha(t_1 + t_2)\}] \quad t_1, t_2 \geq 0$$

注意  $X(t)$  不是一平稳的随机过程 (有瞬时效应)，如果激励时间换成  $t = -\infty$ ，

则有

$$R_X(t_1, t_2) = \frac{\beta^2}{2\alpha} \exp\{-\alpha|t_1 - t_2|\} \quad t_1, t_2 \geq 0$$

此时的输出即为一平稳的随机过程。以上的输出  $X(t) = \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_0(u)$  称为奥斯坦 - 乌伦贝克 (Ornstein - Uhlenbeck) 过程。

#### (十) 例子

例 1 . 设  $\{W(t); t \geq 0\}$  为一标准的维纳过程, 令随机过程  $Y(t) = W(t+1) - W(t)$ ,  $t \geq 0$ 。

(a) 试证明随机过程  $\{Y(t); t \geq 0\}$  是平稳过程;

(b) 试证明随机过程  $\{Y(t); t \geq 0\}$  的功率谱密度为:

$$S_Y(\omega) = (\omega/2)^{-2} \cdot \sin^2(\omega/2)$$

(c) 试求  $W(1) + W(2) + \cdots + W(n)$  的分布。

解: 解:(a) 显然有,

$$E\{Y(t)\} = E\{W(t+1) - W(t)\} = E\{W(t+1)\} - E\{W(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_Y(s, t) &= E\{Y(s)Y(t)\} = E\{[W(s+1) - W(s)][W(t+1) - W(t)]\} \\ &= \min\{s+1, t+1\} - \min\{s, t+1\} - \min\{s+1, t\} + \min\{s, t\} \end{aligned}$$

因此, 我们有:

$$\text{当 } 0 \leq s \leq t \leq s+1 \text{ 时: } R_Y(s, t) = s+1 - s - t + s = 1 + (s-t)$$

$$\text{当 } 0 \leq t \leq s \leq t+1 \text{ 时: } R_Y(s, t) = t+1 - t - s + t = 1 - (s-t)$$

$$\text{当 } t \geq s+1, \text{ 或 } s \geq t+1 \text{ 时: } R_Y(s, t) = 0$$

令  $\tau = s - t$ , 则  $Y(t)$  的自相关函数为:

$$R_Y(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & |\tau| > 1 \end{cases}$$

所以随机过程  $\{Y(t); t \geq 0\}$  是平稳过程。

(b) 由维纳 - 辛钦公式, 有:

$$\begin{aligned}
 S_Y(\omega) &= \int_{-1}^1 (1 - |\tau|) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_0^1 2(1 - \tau) \cos(\omega\tau) d\tau = (\omega/2)^{-2} \cdot \sin^2(\omega/2)
 \end{aligned}$$

(c) 由于维纳过程是正态过程，因此可知  $\xi = W(1) + W(2) + \cdots + W(n)$  是正态分布的随机变量，且  $E\{\xi\} = E\{W(1) + W(2) + \cdots + W(n)\} = 0$ ，下面求此随机变量的方差：

$$\begin{aligned}
 D\{\xi\} &= E\{\xi^2\} = E\{[W(1) + W(2) + \cdots + W(n)]^2\} \\
 &= \sum_{i=1}^n E\{W^2(i)\} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E\{W(i)W(j)\} \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

所以  $\xi = W(1) + W(2) + \cdots + W(n) \sim N\left(0, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ 。