第二章　Markov 过程习题

1、 设$\{\xi_n, n \ge 1\}$为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n = 1\} = p > 0, \quad P\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p > 0$$

定义随机序列$\{X_n, n \ge 2\}$和$\{Y_n, n \ge 2\}$如下：

$$X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1; \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1; \end{cases} \qquad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \text{其它}; \end{cases}$$

试问随机序列$\{X_n, n \ge 2\}$和$\{Y_n, n \ge 2\}$是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

2、 天气预拨模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），试将此问题归纳为马尔可夫链，并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率是 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。试求此马氏链的转移概率矩阵。

3、 设$\{X_n; n \ge 0\}$是一齐次马氏链，状态空间为$S = \{0, 1, 2\}$，它的初始状态的概率分布为：$P\{X_0 = 0\} = 1/4$，$P\{X_0 = 1\} = 1/2$，$P\{X_0 = 2\} = 1/4$，它的一步转移转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率：$P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}, p_{12}^{(3)}$。

4、 独立地连续抛掷一颗质地均匀的骰子，以ξ_n表示前n次抛掷出的最大点数，试证明$\{\xi_n; n \ge 1\}$是一马氏链，并求其n步转移概率矩阵。

5、 设有一个三个状态$S = \{0, 1, 2\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求：

（1） $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$；

（2）确定状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。

6、 试确定下列齐次马氏链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移矩阵为：

（1） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$；

（2） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$；

（3） $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

7、 设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

（a）　求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$；

（b）　写出三个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

8、 设 $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其初始分布为

$$P\{X_0=0\}=p_0, P\{X_0=1\}=p_1, P\{X_0=2\}=p_2, P\{X_0=3\}=p_3$$

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

（1）试求概率 $P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}$；

（3）试求首达概率 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,\cdots$；

（4）写出四个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

9、 考虑三个状态的齐次马氏链，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中：$p,q,r>0,\ p+q+r=1$，

（a）　假定过程从状态 1 出发，试求过程被状态 0（或 2）吸收的概率；

（b）　试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

10、　设齐次马氏链 $\{X_n, n\ge 0\}, S=\{1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵如下：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）写出切普曼－柯尔莫哥洛夫方程（C－K 方程）；

（2）求 n 步转移概率矩阵；

（3）试问此马氏链是平稳序列吗？ 为什么？

11、　某车间有两台独立工作的机器，每台机器有两种状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b，其中 $0<a,b<1$。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数，试求：

（1）证明 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，并写出其一步转移概率矩阵；

（2）此马氏链是否存在极限分布？存在的话，计算其平稳分布；

（3）若车间里有 m 台独立工作的机器，假设条件不变，问其平稳分布是什么？

12、　设 $\{X_n; n\ge 0\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $\overline{S}=S_0\cup S$，其中: $S=\{1,2,\cdots,m\}$ 为瞬时态集，$S_0=\{0\}$ 为吸收态集，且转移矩阵为 $\widetilde{P}=\begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $P_0=(I-P)\cdot\vec{e}$，$\vec{e}=(1,1,\cdots 1)^{\tau}$。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为：

$$\tau=\inf\{n: n\ge 0, X_n\in S_0\}。$$

令：$\vec{\pi}(0)=(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 为马氏链的初始分布，记：$\vec{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，且满足：

$$\alpha_k\ge 0\ (k=0,1,\cdots,m)，\ \sum_{k=0}^{m}\alpha_k=1。$$

令：$g_k = P\{\tau = k\}$（称为 **Phase-Type** 分布），$G(\lambda) = E\{\lambda^\tau\} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ 。

试证明：

（a）　对于任意$k \in N$，有：$g_0 = \alpha_0$，$g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1}(I-P)\vec{e}$ ；

（b）　对于任意$0 \le \lambda \le 1$，有：$G(\lambda) = \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha}(I-P)^{-1}(I-P)\vec{e}$ 。

13、　设有一生灭过程$\{\xi(t); t \ge 0\}$，其中参数$\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu$，$\lambda$和$\mu$均为大于零的常数，其起始状态为$\xi(0) = 0$。试求：

（a）　该过程的Q矩阵；

（b）　列出福克－普朗克微分方程；

（c）　其均值函数$M_\xi(t) = E\{\xi(t)\}$ ；

（d）　证明$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \exp\{-\lambda/\mu\}$。

14、　有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌，并不会死去。假设在长为Δt的一段时间内，一个细菌分裂为两个，即产生新细菌的概率为$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$，令$X(t)$表示时刻$t$的细菌群体的大小。

（a）　试说明$\{X(t), t \ge 0\}$是生灭过程；

（b）　试证$\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = 0$，并列出其前进方程和后退方程；

（c）　验证$p_{kj}(t) = C_{j-1}^{j-k}(e^{-\lambda t})^k(1-e^{-\lambda t})^{j-k}$，$j \ge k \ge 1$是上述方程的解，并计算

$$E\{X(s+t) - X(s) \mid X(s) = m\}。$$

15、　在一个线性生灭过程中，假定人口中每个人在间隔$(t, t+\Delta t)$内以概率$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$生一个儿女，假定这些人是统计独立的，则如果在时刻$t$人口中有$n$个人，在$(t, t+\Delta t)$中出生的概率是$n\lambda\Delta t + o(\Delta t)$。同样地，如果在$(t, t+\Delta t)$内一个人死亡的概率是$\mu\Delta t + o(\Delta t)$，则如果在$t$时刻有$n$个人活着，在$(t, t+\Delta t)$内死亡的概率是$n\mu\Delta t + o(\Delta t)$，$X(t)$表示$t$时刻人口的数目，且已知$X(0) = n_0$，则$X(t)$是一马氏过程。

（a）　试写出过程的状态空间及Q矩阵，求$p_n(t) = P\{X(t) = n\}$满足的微分方程；

（b）　试导出$m_X(t) = E\{X(t)\}$满足的微分方程；

（c）　求解$m_X(t)$。

16、　一条电路供给m个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现假设（1）若一焊工在t时刻用电，而在$(t, t+\Delta t)$内停止用电的概率为$\mu\Delta t + o(\Delta t)$；（2）若一焊工在$t$时刻没有用电，而在$(t, t+\Delta t)$内用电的概率为$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$。每一焊工的工作情况是相互

独立的。设$\xi(t)$表示在t时刻正在用电的焊工数。

（a）　试写出此过程的状态空间及Q矩阵；

（b）　设$\xi(0)=0$，写出福克－普朗克方程；

（c）　当$t \to +\infty$时，求极限分布P_n。