§3.6 三角分解法

➢ **高斯消元法的矩阵形式：**

Step 1: **第一次消元：** $\mathbf{m}_{i1} = \mathbf{a}_{i1} / \mathbf{a}_{11} \quad (\mathbf{a}_{11} \neq 0)\ \mathbf{i} = 2,3..\mathbf{n}$

$$[A^{(1)} \vdots b^{(1)}] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix} = [A^{(2)}\ b^{(2)}]$$

即相当于：

记 $\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$, 则 $L_1[A^{(1)}\ \ b^{(1)}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11}^{(1)} \ldots \boldsymbol{a}_{1n}^{(1)} & \boldsymbol{b}_1^{(1)} \\ 0 \quad A^{(2)} & \boldsymbol{b}^{(2)} \end{bmatrix}$

Step $n-1$:

$$L_{n-1}L_{n-2}\dots L_1\left[\,A\ \ b\,\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & \dots & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

其中

$$L_k=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & -m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -m_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_k^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & m_{n,k} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1}L_2^{-1}\dots L_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ m_{i,j} & \ddots & 1 \end{pmatrix}\overset{\text{记为}}{=\!=}L$$

单位下三角阵

记 $U=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & 0 & \dots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}\Rightarrow\ A=LU$

由上述讨论**可知，高斯消去法**实质**上**产**生了一个将系数矩**阵 A **分解**为**上三角**阵**与下三角**阵**相乘的因式分解。**

若 A **的所有**顺**序主子式 均不**为 0，则 A **的** LU **分解唯一（其中** L 为**单位**下三角阵）。**

设**有方程**组 $AX=b$, **并**设 $A=LU$, **于是** $AX=LUX=b$

令 $UX=Y$, 则 $LY=b$.

于是求解 $AX=b$ **的**问题**等价于求解两个方程**组 $UX=Y$ **和** $LY=b$

（1）**利用**顺**推**过**程解** $LY=b$, **其**计**算公式**为：

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

（2）**利用回代**过**程解** $UX=Y$，**其**计**算公式**为：

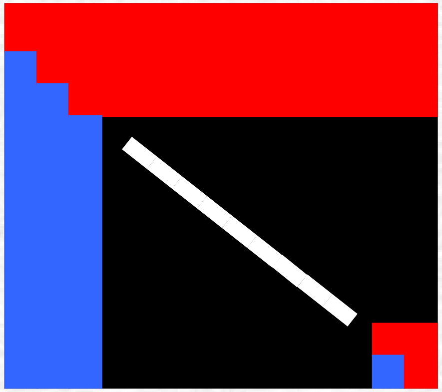
$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j) / u_{ii} \quad (i = n, n-1, \cdots, 1)$$

矩阵的三角分解

思路　通过比较法直接导出 L 和 U 的计算公式。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \cdots & \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \cdots & \vdots \\ & & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

� $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj}$$



（1）对 $i=1,2,\ldots,n$　$u_{1i} = a_{1i}$

$$l_{i1} = a_{i1} / u_{11}$$

（2）计算 U 的第 r 行，L 的第 r 列元素

对 $r=2,3\ldots,n$

$$u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki} \qquad (i = r, r+1, \cdots, n)$$

$$l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}) / u_{rr} \qquad (i = r, r+1, \cdots, n, 且 r \neq n)$$

例题分析：

用三角分解法解方程组

$$\begin{pmatrix} 9.0 & 15.0 & 3.0 & -2.0 \\ 7.0 & 2.0 & 1.0 & -2.0 \\ -2.0 & -2.0 & 11.0 & 5.0 \\ 1.0 & 3.0 & 2.0 & 13.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 7.0 \\ -1.0 \\ 11.0 \end{pmatrix}$$

解：方程组的精确解为：

$$(x_1^* \quad x_2^* \quad x_3^* \quad x_4^*)^T = (1.5907 \quad -0.8740 \quad -0.4099 \quad 0.9885)^T$$

设系数矩阵作了如下三角分解：

$$\begin{bmatrix} 9.0 & 15.0 & 3.0 & -2.0 \\ 7.0 & 2.0 & 1.0 & -2.0 \\ -2.0 & -2.0 & 11.0 & 5.0 \\ 1.0 & 3.0 & 2.0 & 13.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & & u_{44} \end{bmatrix}$$

由 Doolittle 分解得：

$$u_{11} = 9.0 \quad u_{12} = 15.0 \quad u_{13} = 3.0 \quad u_{14} = -2.0$$

$$l_{21} = a_{21} / u_{11} = 7.0 / 9.0 = 0.7778$$

$$l_{31} = a_{31} / u_{11} = -0.2222 \qquad l_{41} = a_{41} / u_{11} = 0.1111$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -9.6667 \qquad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -1.3333$$

$$u_{24} = a_{24} - l_{21}u_{14} = -0.4444$$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12}) / u_{22} = -0.1397$$

依次计算，原方程组可表为：

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7778 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.2222 & -0.1379 & 1.0000 & 0 \\ 0.1111 & -0.1379 & 0.1291 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9.0000 & 15.0000 & 3.0000 & -2.0000 \\ 0 & -9.6667 & -1.3333 & -0.4444 \\ 0 & 0 & 11.4828 & 4.4943 \\ 0 & 0 & 0 & 12.5806 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 7.0 \\ -1.0 \\ 11.0 \end{pmatrix}$$

求解：

$$\begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7778 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -0.2222 & -0.1379 & 1.0000 & 0 \\ 0.1111 & -0.1379 & 0.1291 & 1.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0 \\ 7.0 \\ -1.0 \\ 11.0 \end{pmatrix}$$

得：$y = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 8.5556 \\ -0.2644 \\ 12.4364 \end{pmatrix}$

求解：

$$\begin{pmatrix} 9.0000 & 15.0000 & 3.0000 & -2.0000 \\ 0 & -9.6667 & -1.3333 & -0.4444 \\ 0 & 0 & 11.4828 & 4.4943 \\ 0 & 0 & 0 & 12.5806 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.0000 \\ 8.5556 \\ -0.2644 \\ 12.4364 \end{pmatrix}$$

得：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5907 \\ -0.8740 \\ -0.4099 \\ 0.9885 \end{pmatrix}$