# §3.8 追赶法

## 1 三对角方程组

**定义** 具有如下形式的方程组：

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \\ d_n \end{bmatrix}$$

称为三对角方程组.

特点：其系数矩阵为一种带状的稀疏矩阵，非零元素集中分布在主对角线及相邻两条次对角线上，且系数矩阵为严格对角占优阵，即

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| \\ |b_i| > |a_i| + |c_i| \qquad a_i \neq 0\,,\, c_i \neq 0, i = 2,3,\cdots,n-1. \\ |b_n| > |a_n| \end{cases}$$

利用高斯消元法，经过 $n$-1 次消元后，可得等价的方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & & & \\ 0 & 1 & u_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}$$

其中，

$$u_1 = c_1 / b_1, q_1 = d_1 / b_1,$$
$$u_i = c_i /(b_i - u_{i-1} a_i) \quad (i = 2,3,\cdots,n-1) \qquad \Leftarrow \text{追的过程}$$
$$q_i = (d_i - x_{i-1} a_i)/(b_i - u_{i-1} a_i) \quad (i = 2,3,\cdots,n)$$

利用回代依次求出$u_i$ ,$q_i, i = 1,2,\cdots,n$，于是,

$$\begin{cases} x_n = q_n \\ x_i = q_i - u_i x_{i+1} \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1) \end{cases} \qquad \Leftarrow \text{赶的过程}$$

**HW: 3.6 3.7 3.8（希望上机实习）**

□

## §3.9 其它应用

### 1 计算|*A*|

**定理**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$:

a) $\det(\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}^T)$;

b) 数 $a$ 乘 $A$ 的一行得：$\det\tilde{A}=a\det(\boldsymbol{A})$;

c) $A$ 的两行互换得：$\det\tilde{A}=-\det(\boldsymbol{A})$;

d) $A$ 的一行乘以 $a$ 加到另一行得：$\det\tilde{A}=\det(\boldsymbol{A})$;

e) $A$ 的两行成比例：$\det(\boldsymbol{A})=0$;

f) $\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{B})$; 其中 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_n$

由以上定理可知，通过高斯消元法的计算可得到行列式的值.

例 1 用列主元素法求 $\det(A)$的值，其中

$$A=\begin{bmatrix} 11 & -3 & -2 \\ -23 & 11 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

解：由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{LU}$ 分解过程，可知$|A|=a_{11}^{(1)}a_{22}^{(2)}\cdots a_{n-1,n-1}^{(n-1)}a_{n,n}^{(n)}$，因此，若用列主元素法求行列式的值，只须将每一步的主元素相乘即可，当然要注意行列式的值的符号改变.其计算过程如下所示.

$$\begin{bmatrix} 11.0000 & -3.0000 & -2.0000 \\ -23.0000 & 11.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{行交换})$$

$$\begin{bmatrix} -23.0000 & 11.0000 & 1.0000 \\ 11.0000 & -3.0000 & -2.0000 \\ 1.0000 & -2.0000 & 2.0000 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{消元})$$

$$\begin{bmatrix} -23.0000 & 11.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 2.2609 & -1.5217 \\ 0.0000 & -1.5217 & 2.0435 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (\text{消元})$$

$$\begin{bmatrix} -23.0000 & 11.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 2.2609 & -1.5217 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0192 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 53.0000$$

## 1 计算 $A^{-1}$

在某些应用中，如在统计学中，可能还需要计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆，并且将它明显地表示为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

### 1.1 利用 $A$ 的 $LU$ 分解计算 $A^{-1}$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为满秩矩阵，则

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{I}, \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，显然 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

将方程(1)改写为

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{X}^{(n)}]=[\boldsymbol{I}^{(1)},\boldsymbol{I}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{I}^{(n)}] \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{X}^{(j)}$, $\boldsymbol{I}^{(j)}$分别表示 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 的第 $j$ 列.

于是，方程(2)又可改写为 $n$ 个线性方程组的形式:

$$\boldsymbol{AX}^{(j)}=\boldsymbol{I}^{(j)}, \quad 1 \le j \le n \tag{3}$$

由于这 $n$ 个方程组的系数矩阵相同，故可应用 $LU$ 分解法来进行计算，这样 $A^{-1}=[X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(n)}]$.并且能够极大地节省计算工作量.

### 1.2 利用高斯消元法计算 $A^{-1}$

例如：对矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 8 & -2\\ -6 & 49 & -10\\ -4 & 34 & -5\end{bmatrix}$，求 $A^{-1}$.

解:

$$[A \mid I]=\begin{bmatrix}-1 & 8 & -2 & 1 & 0 & 0\\ -6 & 49 & -10 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 34 & -5 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 95 & -28 & 18\\ 0 & 1 & 0 & 10 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

故 $A^{-1}=\begin{bmatrix}95 & -28 & 18\\ 10 & -3 & 2\\ -8 & 2 & -1\end{bmatrix}$

□