§2.3　牛顿 (Newton) 法

§ 2.3 Newton 迭代法—基本思想

1. 原理：将非线性方程

$$f(x)=0$$

逐步线性化而形成迭代公式 .

取 $x_0 \approx x^*$，将 $f(x)$ 在 x_0 做一阶 Taylor 展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$ ξ 在 x_0 和 x 之间。

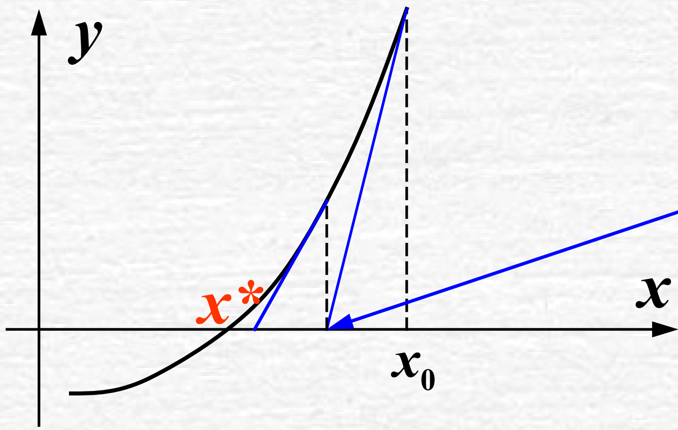
将 $(x^*-x_0)^2$ 看成高阶小量，则有：

$$0=f(x^*)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x^*-x_0)$$

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow \quad x^*\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2. 牛顿法 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 几何意义



$$x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

只要 $f \in C^1$，每一步迭代都有 $f'(x_k) \neq 0$，而且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则 x^* 就是 f 的根。

3. 牛顿法的算法构造

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

[牛顿迭代法]

1: **初始化** . $x_0, M, \delta, \varepsilon$, **置** $i:=0$

2: **如果** $|f(x_i)| \le \delta$ ，**则停止** .

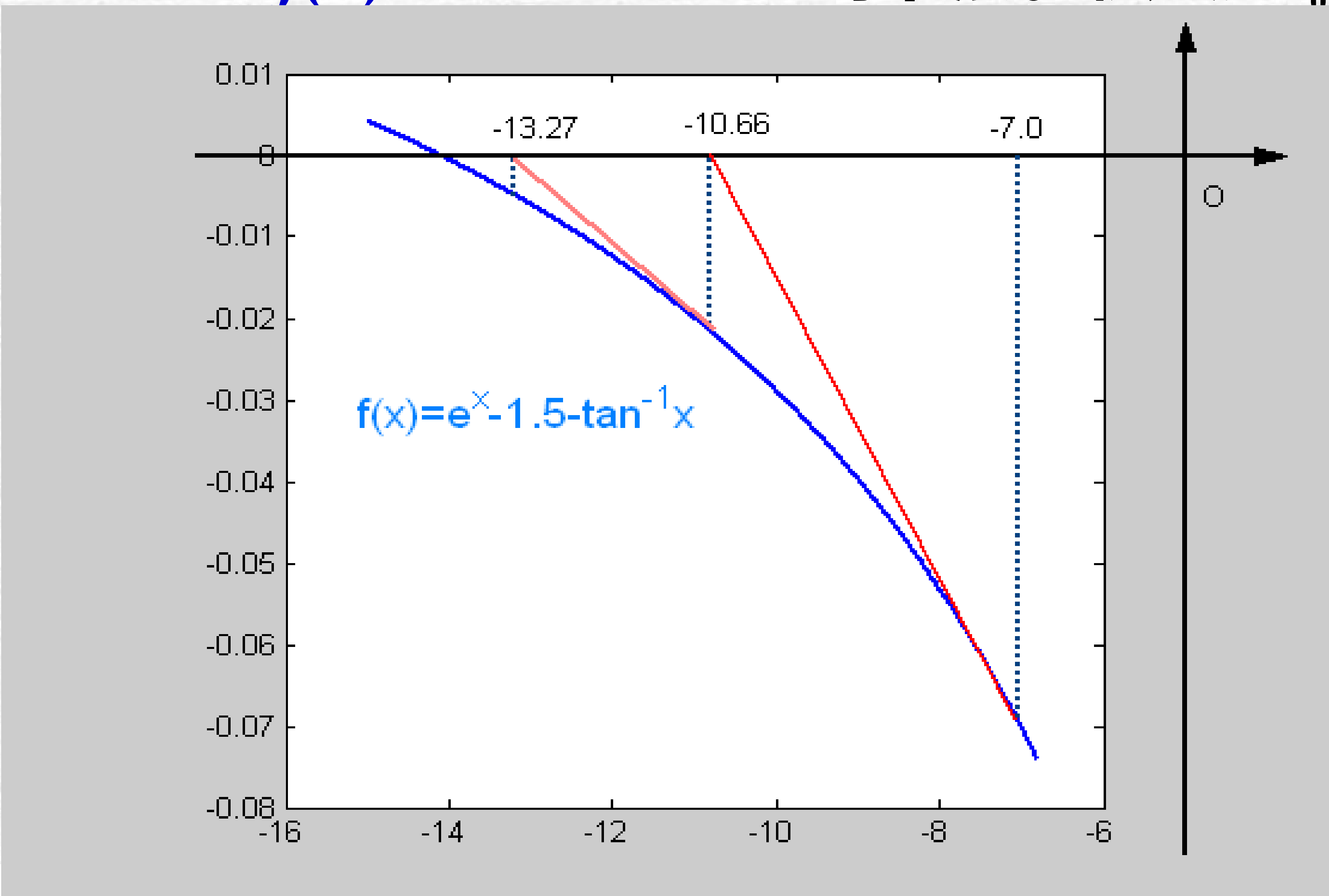
3: 计算 $x_{i+1} := x_i - f(x_i) / f'(x_i)$

4: **如果** $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ or $|f(x_i)| \le \delta$ ，**则停止** .

5: $i := i+1$，转至 3.

例 1 ： 利用牛顿迭代法求解

$f(x)=e^x-1.5-\tan^{-1}x$ 的零点。初始点 x_0=-



例 1 ： 利用牛顿迭代法求解 $f(x)=e^x-1.5-\tan^{-1}x$ 的零点。初始点 $x_0=-7.0$

解： $f(x_0)=-0.702\times10^{-1}$， $f'(x)=e^x-(1+x^2)^{-1}$

计算迭代格式：$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

计算结果如下表：（取 $|f(x)|<=10^{-10}$）

k	x	$f(x)$
0	-7.0000	-0.0701888
1	-10.6771	-0.0225666
2	-13.2792	-0.00436602
3	-14.0537	-0.00023902
4	-14.1011	-7.99585e-007
5	-14.1013	-9.00833e-012

NewtonMethod_PPT45

算法说明：

注：Newton's Method 收敛性依赖于 x_0 的选取。

Newton' Method 收敛的充分条件

设 $f \in C^2[a, b]$，若

- $f(a)f(b) < 0$；
- (2) 在整个 $[a, b]$ 上 f'' 不变号且 $f'(x) \neq 0$；

(3) 选取 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0)f''(x_0) > 0$；

则 Newton's Method 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的唯一根。

有根

根唯一

产生的序列单调有界，保证收敛。

Newton’ Method 局部收敛性

定理

设 $f\in C^2[a,b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的根，且 $f'(x^*)\neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $B_\delta(x^*)$，使得任取 $B_\delta(x^*)$ 初值，Newton’s Method 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

证明：Newton's Method 事实上是一种特殊的不动点迭代

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

其中，则

$$|g'(x^*)| = \left|\frac{f''(x^*)f(x^*)}{f'^2(x^*)}\right| = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{收敛} \quad ✓$$

由 Taylor 展开

$$0 \doteq f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}} - \frac{f''(\xi_k)}{2!\,f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

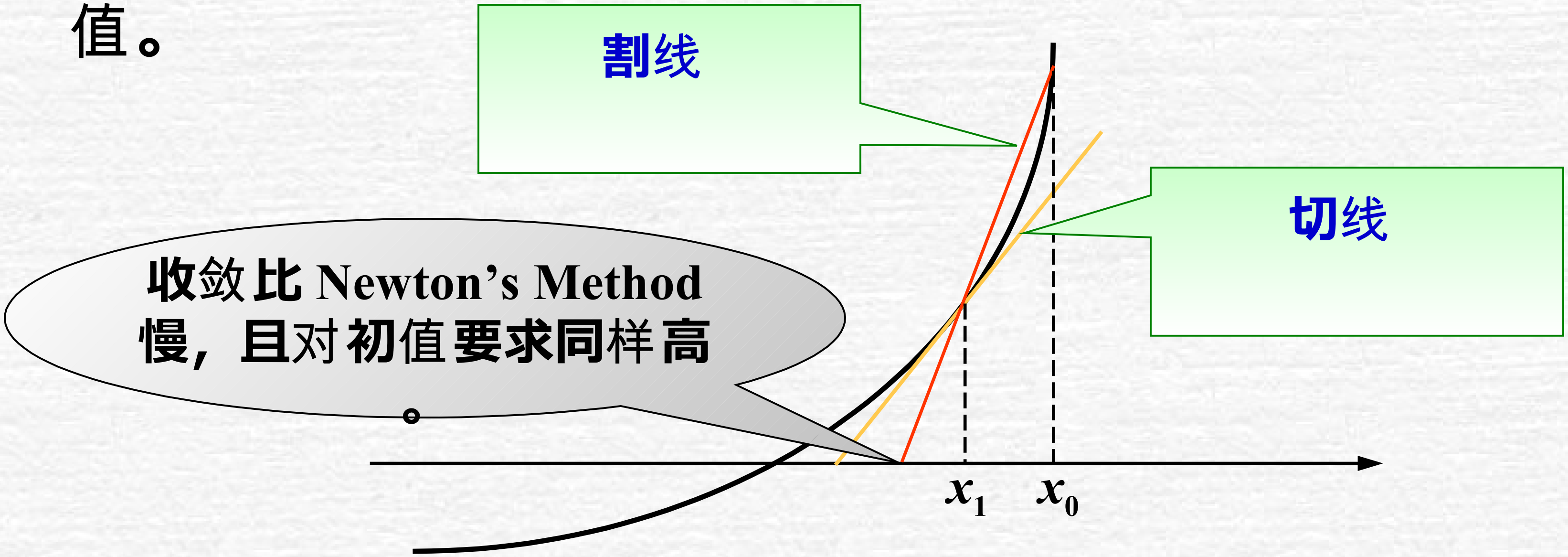
$$\Rightarrow \quad \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}$$

只要 $f'(x^*) \neq 0$，则令 $k \to \infty$

可得结论。 ∎

➢ 割线法

Newton's Method 一步要计算 f 和 f'，相当于 2 个函数值，比较费时。现用 f 的值近似 f'，可少算一个函数值。



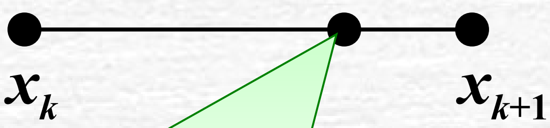
切线斜率 ≈ 割线斜率 $\Rightarrow$ $f'(x_k) \approx \dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

需要 2 个初值 x_0 和 x_1。

➢ 下山法 — Newton’s Method 局部微调

原理：若由 x_k 得到的 x_{k+1} 不能使 $|f|$ 减小，则在 x_k 和 x_{k+1} 之间找一个更好的点 $\overline{x_{k+1}}$，使得 $|f(\overline{x_{k+1}})| < |f(x_k)|$。



$\lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k$, $\lambda \in [0, 1]$

$$\overline{x_{k+1}} = \lambda\left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] + (1-\lambda)x_k$$

$$= x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

注：$\lambda = 1$ 时就是 Newton’s Method 公式。

当 $\lambda = 1$ 代入效果不好时，将 λ 减半计算。