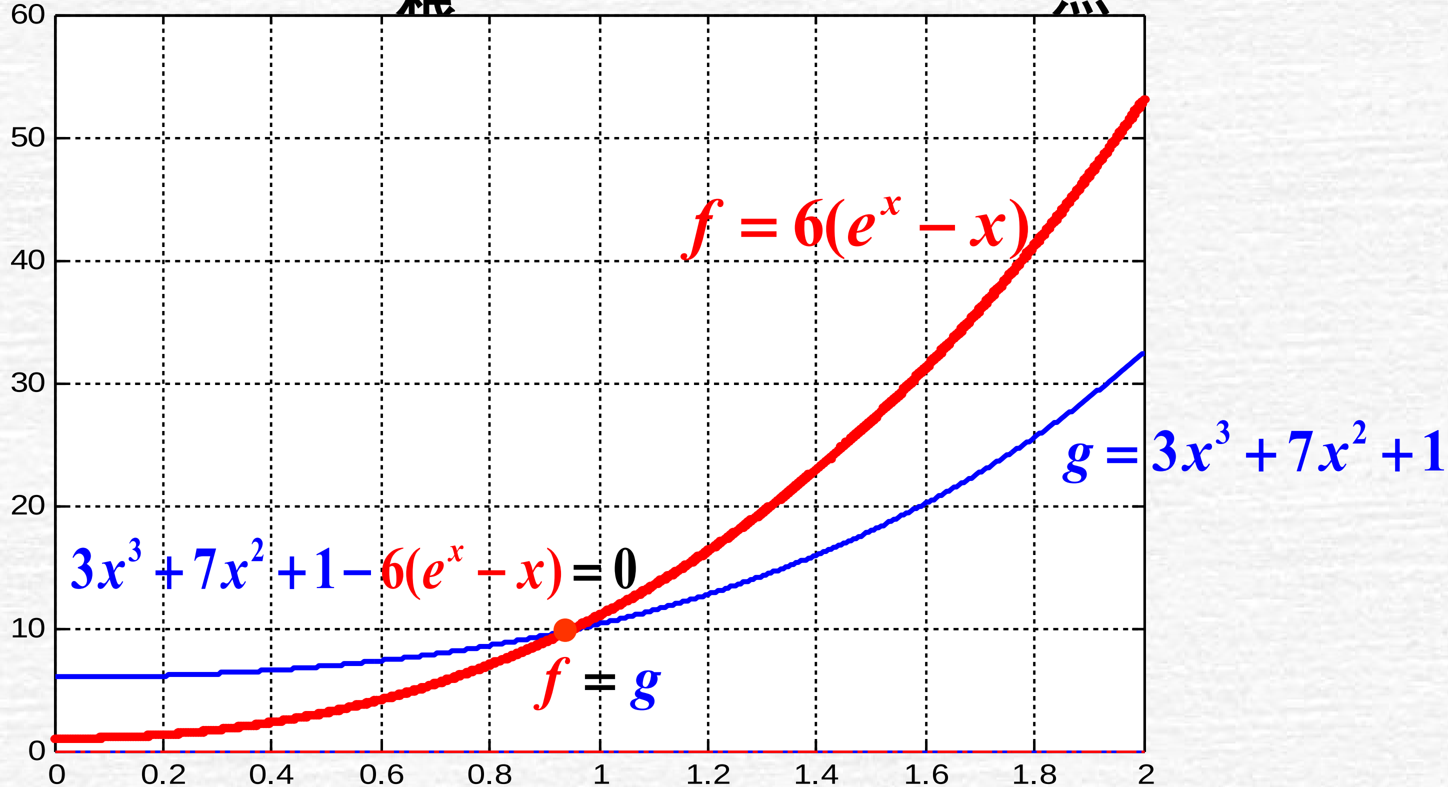
§ 2.2 方程求根—不动点迭代法

基本原理

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的根 ⟷ $\varphi(x)$ 的不动点



§ 2.2 方程求根—不动点迭代法

基本原理

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)$ 的根 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$ 的不动点

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, …, $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, … 若 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛，即存在 x^* 使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且 φ 连续，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(x_k)$ 得

可知 $x^* = \varphi(x^*)$，即 x^* 是 φ 的不动点，也就是 f 的根

将 $f(x)=0$ 转化为 $x=\varphi(x)$ 的方法有多种多样，

例：$f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 上可有以下方法：

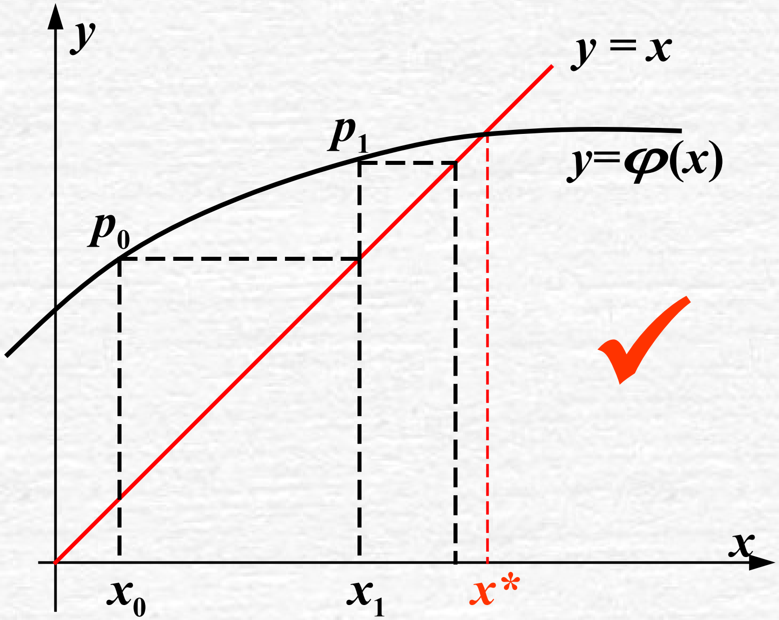
(1) $x=x-x^3-4x^2+10$

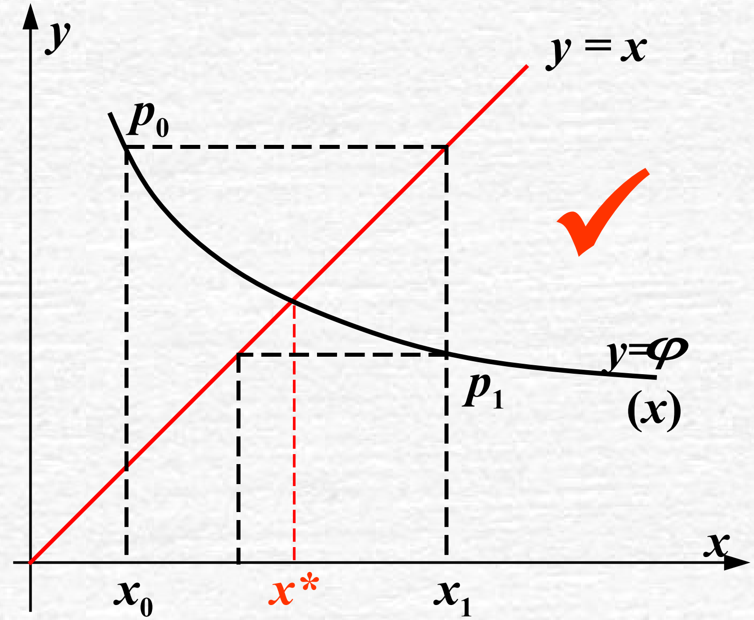
(2) $x=(1/2)(10-x^3)^{1/2}$

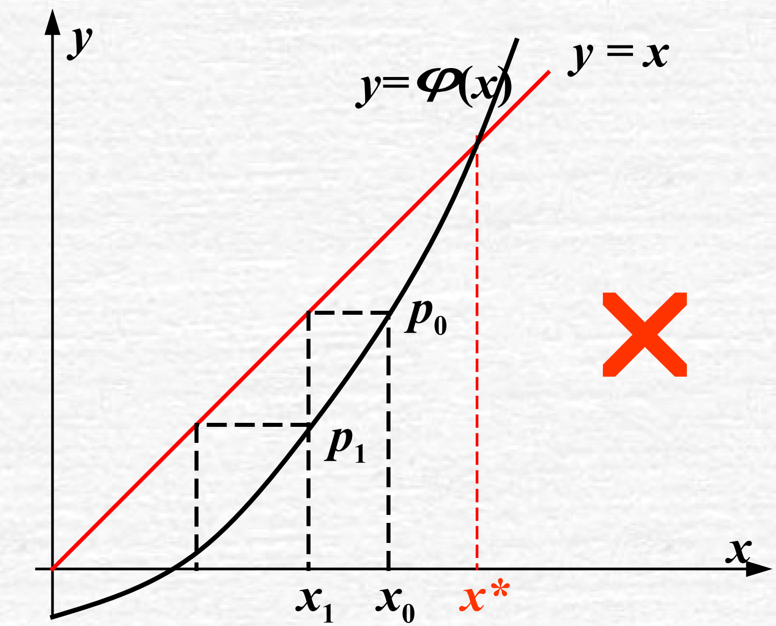
(3) $x=(10/x-4x)^{1/2}$

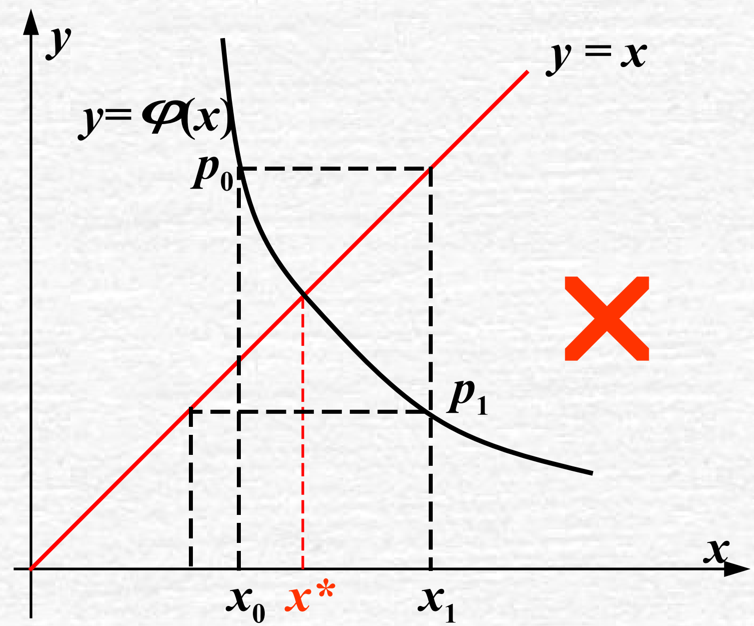
(4) $x=[10/(4+x)]^{1/2}$

取 $x_0=1.5$，有的收敛、有的发散、有的快、有的慢。


y
y = x
p1
y=φ(x)
p0
x
x0
x1
x*


y
y = x
p0
y=φ
(x)
p1
x
x0
x*
x1


y
y = x
y=φ(x)
p0
p1
x
x1
x0
x*


y
y = x
y=φ(x)
p0
p1
x
x0
x*
x1

§ 2.2 迭代法—算例分析

例如： 用迭代法求解方程 $2x^3 - x - 1 = 0$

解 1: 将原方程化为等价方程

$$x = 2x^3 - 1$$

取初值 $x_0 = 0$

$$x_1 = 2x_0^3 - 1 = -1$$

$$x_2 = 2x_1^3 - 1 = -3$$

$$x_3 = 2x_2^3 - 1 = -55$$

……….

显然迭代法发散

(2) 如果将原方程化为等价方程

$$2x^3 - x - 1 = 0 \longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$

仍取初值

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{x_0+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.7937$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{x_1+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1.7937}{2}} \approx 0.9644$$

依此类推，得

$$x_2 = 0.9644$$
$$x_3 = 0.9940$$
$$x_4 = 0.9990$$
$$x_5 = 0.9998$$
$$x_6 = 1.0000$$
$$x_7 = 1.0000$$

同样的方程
不同的迭代格式
有不同的结果

迭代函数的构造有关

已经收敛，故原方程的解为

$$x = 1.0000$$

什么形式的迭代法
能够收敛呢？

§ 2.2 迭代法—算例分析 2

例如：求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在$x_0=1.5$附近的根 x^*

§ 2.2　迭代法—算例分析 2

例如：求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*

解：将方程改写为 $x_{k+1}=x_k^3-1$

由此建立迭代公式： $x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}\quad(k=0,1,2,\cdots)$

计算结果如下表

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	1.32494	1.32476	1.32473	1.32472	1.32472

这是一个收敛的不动点迭代格式.

§ 2.2 迭代法—算例分析 2

例如：求方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*

解：将方程改写为 $x_{k+1}=x_k^3-1$

由此建立迭代公式： $x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}\quad (k=0,1,2,\cdots)$

计算结果如下表

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	1.5	1.35721	1.33086	1.32588	1.32494	1.32476	1.32473	1.32472	1.32472

这是一个收敛的例子，也有不收敛的迭代公式，如对于同样的问题，如果将方程改写为令一种迭代公式 $x=\sqrt[3]{x+1}$ **仍取初值，** $x_0=1.5$ **则迭代发散。**

为此，研究 $\varphi(x)$ **存在性及迭代法的收敛性。**

§2.2 方程求根—迭代法的收敛性

定理（存在性）

设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

(1) 对任意的 $x \in [a,b]$，有 $a \le \varphi(x) \le b$

(2) 存在 $0 < L < 1$，使对任意 $x, y \in C[a,b]$ 都有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x - y|$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*。

§2.2　方程求根—迭代法的收敛性

证明： 先证不动点的存在性。若 $\varphi(a)=a$ 或 $\varphi(b)=b$，则 a 或 b 就是不动点。

因此由 $a \le \varphi(x) \le b$ 可设 $\varphi(a)>a$，及 $\varphi(b)<b$

定义函数 $f(x)=\varphi(x)-x$，显然 $f(x)\in C[a,b]$

且满足 $f(a)=\varphi(a)-a>0,\ f(b)=\varphi(b)-b<0$

由函数的连续性可知，存在 x^* 使 $f(x^*)=0$，

即 $x^*\in(a,b)$，即 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点。

再证唯一性。设 x_1^* 及 $x_2^* \in [a,b]$ 都是 $\varphi(x)$ 的不动点，

则由定理的条件 (2)，得到

$$\left|x_1^* - x_2^*\right| = \left|\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)\right| \le L\left|x_1^* - x_2^*\right| < \left|x_1^* - x_2^*\right|$$

矛盾，故 $\varphi(x)$ 的不动点是唯一的。

证毕

定理 2 ：（收敛的充分条件）

设 $\varphi(x) \in C[a,b]$ 满足定理 1 的两个条件，则对任意 $x_0 \in [a,b]$，由 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计

$$\left|x_k - x^*\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right|$$

证明：设 $x^* \in [a,b]$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点，由条件 1 可知 $\{x_k\} \subset [a,b]$，再由条件 2 得

$$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \le L|x_{k-1} - x^*| \le \cdots \le L^k|x_0 - x^*|$$

因 $0 < L < 1$，故当 $k \to \infty$ 时，序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*。

由迭代公式可得

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \le L|x_k - x_{k-1}|$$

据此反复递推，得到

$$|x_{k+1} - x_k| \le L^k|x_1 - x_0|$$

于是对任意正整数，有

$$|x_{k+p} - x_k| \le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|$$

$$\le (L^{k+p-1} + L^{k+p-2} + \cdots + L^k)|x_1 - x_0|$$

$$\le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

在上式令 $p \to \infty$，注意到 $\lim_{p \to \infty} x_{k+p} = x^*$ 即得到结果。证毕

根据定理 2 的结论，对于给定的计算精度，迭代次数是可以预先确定的，但由于公式中含有常数 L，使得计算迭代次数较为复杂，根据估计式

$$\left|x_{k+1}-x_k\right|=\left|\varphi(x_k)-\varphi(x_{k-1})\right| \square L\left|x_k-x_{k-1}\right|$$

我们得到：

$$\left|x_{k+p}-x_k\right| \square \left|x_{k+p}-x_{k+p-1}\right|+\left|x_{k+p-1}-x_{k+p-2}\right|+\cdots+\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

$$\square (L^{p-1}+L^{p-2}+\cdots+1)\left|x_{k+1}-x_k\right| \square \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

令 $p \square$, $\square$得到

$$\left|x^*-x_k\right| \square \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|$$

由此可知，只要相邻两次计算结果的偏差 $\left|x_{k+1}\ x\right|$ 足够小即可保证近似值 x 有足够的精度。

对于定理中的条件 2，在实际使用时，如果 $\varphi(x)\in C^1[a,b]$ 且对任意的 $x\in[a,b]$ 有

$$|\varphi'(x)|\le L<1$$

则由中值定理可知 $\forall x,y\in[a,b]$ 有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|=|\varphi'(\xi)(x-y)|\le L|x-y|,\ \xi\in(a,b)$$

它表明定理中条件 2 可由 $|\varphi'(x)|\le L$ 替代。

定理指出， 只要构造的迭代函数满足

$$|\varphi'(x)| \le L < 1$$

此时虽收敛
但不一定是唯一根

对于预先给定的误差ε

迭代法 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 就收敛，即要 $|x_k - x^*| < \varepsilon$

求只要

$$\frac{L}{1-L}\left| x_k - x_{k-1} \right| < \varepsilon$$

因此，当 $\left| x_k - x_{k-1} \right| < \dfrac{1-L}{L}\varepsilon \approx \varepsilon$

迭代就可以终止，x_k 可以作为方程的近似解

§ 2.2 迭代法—算例分析 3

例如：用迭代法求方程的近似解，精确到小数点后 6 位

$$e^x + 10x - 2 = 0$$

解： 由于 $e^x > 0,$ 则 $2 - 10x > 0$ $\quad x < 0.2$

$x < 0$ 时 $,0 < e^x < 1, \quad 2 - 10x > 2$

因此 $[0, 0.2]$ 为有根区间

本题迭代函数有两种构造形式

$$x = \varphi_1(x) = \frac{2 - e^x}{10} \qquad x = \varphi_2(x) = \ln(2 - 10x)$$

由于 $|\varphi_1'(x)| = \dfrac{e^x}{10} < \dfrac{e^{0.2}}{10} < 1$ $\quad |\varphi_2'(x)| = \dfrac{10}{2 - 10x} \;\square\, 5$

因此采用迭代函数 $x = \varphi_1(x) = \dfrac{2 - e^x}{10}$

$$e^x + 10x - 2 = 0 \qquad x_{k+1} = \varphi(x_k) = (2 - e^{x_k})/10$$

取初值 $x_0 = 0 \quad x_1 = \dfrac{2 - e^{x_0}}{10} = 0.1$

$x_1 = 0.1000000$	$d_1 = 0.1000000$
$x_2 = 0.0894829$	$d_2 = -0.0105171$
$x_3 = 0.0906391$	$d_3 = 0.1156e\text{-}002$
$x_4 = 0.0905126$	$d_4 = -0.1265e\text{-}003$
$x_5 = 0.0905265$	$d_5 = 0.1390e\text{-}004$
$x_6 = 0.0905250$	$d_6 = -0.1500e\text{-}005$
$x_7 = 0.0905251$	$d_7 = 0.1000e\text{-}006$

…00e-006<1e-6

因此原方程的解为 $x^* \approx x_7 = 0.090525$

§ 2.2　迭代法的收敛速度

定义

设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 x^*，如果迭代误差 $\varepsilon_k = x_k - x^*$，当 $k\to\infty$ 时成立下列渐进关系式

$$\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p}\to C\ (\ne 0)$$

则称该迭代过程是 p 阶收敛的 .

特别地，$p=1$ 时称线性收敛，

$p>1$ 时称超线性收敛，$p=2$ 时称平方收敛。

局部收敛性

定义1：设$\varphi(x)$有不动点 x^*，如果存在 x^* 的某个领域 $R:|x-x^*|$ □，对任意 x_0 □ R，迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列$\{x_k\}$ □ R 收敛到 x^*，则称该迭代法局部收敛。

定理： 设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个领域连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛。

定理： 设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个领域连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛。

证明：由连续函数的性质，存在 x^* 的某个领域 $R:|x-x^*|\le\delta$，使对任意 $x\in R$ 成立 $|\varphi'(x)|\le L<1$，

此外，对于任意 $x\in R$，总有 $\varphi(x)\in R$，

这是因为

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x^*)|\le L|x-x^*|\le|x-x^*|$$

于是可断定迭代过程对于任意的初值收敛.

全局收敛与局部收敛

- 定理的条件保证了不动点迭代的全局收敛性。即迭代的收敛性与初始点的选取无关。

定理中的条件 $|\varphi'(x)| \le L < 1$ 可以适当放宽

(2′) $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域内连续，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$

由 $\varphi'(x)$ 的连续性及 $|\varphi'(x^*)| < 1$ 即可推出：

存在 x^* 的某个 δ 邻域 $N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta]$，使得对 $\forall x \in N(x^*)$ 都有 $|\varphi'(x)| \le L < 1$，则由 $\forall x_0 \in N(x^*)$ 开始的迭代都收敛。

- 这种在 x^* 的邻域内具有的收敛性称为局部收敛性。

定理

对于迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$，如果 $\varphi^{(p)}(x)$ 在根 x^* 的邻近连续，并且

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\ \ \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0 \qquad (1)$$

则该迭代过程在点 x^* 邻近是 p 阶收敛的。

证明：

由于 $\varphi'(x^*)=0$，可以断定迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性。

再将 $\varphi(x_k)$ 在根 x^* 处做泰勒展开，得到

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,$$ ξ 在 x_k 与 x^* 之间，

注意到 $\varphi(x_k)=x_{k+1}$， $\varphi(x^*)=x^*$，

由上式得到

$$x_{k+1}-x^*=\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p$$

因此对迭代误差，当 $k\to\infty$ 时有 $\dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p}\to\dfrac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$

这表明迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 确实为 p 阶收敛。证毕