§ 3.9　误差分析

1 问题的提出

设方程组 $Ax=b$,

其中， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为非奇异阵，

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\quad b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$$

由于原始数据 a_{ij} , b_i 往往是观测数据，难免带有误差，因此，下面讨论原始数据的微小变化对线性方程组的解的影响。

§ 3.9 误差分析_算例

例：

$$\begin{pmatrix} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

的准确解为 $x^* = (1, 0, 0)^T$

3.10error.m

当向量 b 有较小的扰动时，即 $b = (\frac{1}{2}+\varepsilon, \frac{1}{3}+\varepsilon, \frac{1}{4}+\varepsilon)^T$

这时方程组的准确解为 $x^* = (1+12\varepsilon, -60\varepsilon, 60\varepsilon)^T$

如当 $\varepsilon = 0.01$ 时，$x^* = (1.1200 \quad -0.6000 \quad 0.6000)^T$

说明右端项的微小变化引起了解的很大扰动，其原因是由方程组本身的状态所决定的.

2 右端项 b_i 的误差对解的影响 **$Ax=b$**

设 A 精确，b 有误差 δb，得到的解 $x+\delta x$，即

$$A(x+\delta x)=b+\delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}\delta b$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\,\|\delta b\|$$

而 $$\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$$

于是 $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

上式说明右端项的相对误差 $\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

在解中放大了 $\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 倍。

3 系数矩阵元素 a_{ij} 的误差对解的影响

设 b 精确，A 有误差 δA，得到的解为 $x+\delta x$，即

$$(A+\delta A)(x+\delta x)=b$$

$$A(x+\delta x)+\delta A(x+\delta x)=b$$

$$\delta x=-A^{-1}\delta A(x+\delta x)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|}\quad \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\quad \|A\|\,\|A^{-1}\|\,\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

上式表明：当 $\|\delta A\|$ 充分小，矩阵 A 的相对误差 $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$

在解中可能放大了 $\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 倍。

定义 称 cond $(A)= \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 为矩阵 A 的条件数 .

当 cond(A)>>1 时，则方程组是“病态”的；

当 cond(A) 较小时，则方程组是“良态”的 .

通常的条件数有：:

(1) $Cond(A)_{\infty} = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty}$

(2) $Cond(A)_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)/\lambda_{min}(A^TA)}$

特别地，若 A 对称，则 $cond\,(A)_2 = \dfrac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|}$

例题 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}$，求 A 的条件数.

解：由 $\det(\lambda I - A)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1.980050504 \\ \lambda_2 = -0.000050504 \end{cases}$

$$cond\,(A)_2 = \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| \approx \mathbf{39206 \gg 1.}$$

说明由 A 构成的系数矩阵方程组是“病态”的 。

§ 3.10　总结

[高斯消去法] 是解线性方程组直接方法的基础。将线性方程组约化为等价的三角形方程组再求解是直接法的基本解法。在约化过程中，引进选主元素的技巧是为了保证方法的数值稳定性所采取的必要措施。如全选主元消元法；列选主元素消元法等。

[直接三角分解法] 是高斯消元法的变形。从代数上看，直接三角分解法和高斯消元法本质上是一致的。但从实际应用效果来看是有差异的。如用 **Doolittle** 分解法解具有相同系数矩阵但右端向量不同的方程组 $AX=B=(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ 是相当便利的，每解一个方程组 $AX=b_i$ 仅需增加 n^2 次乘除法运算。

迭代法　是一种逐次逼近方法，注意到在使用迭代法时，$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+f$，其迭代矩阵 B 和迭代向量 f 在计算过程中始终不变，迭代法具有循环的计算公式、方法简单。此外，应注意收敛性与收敛速度问题．收敛性是迭代法的前提，针对不同的问题，分析并采用适当的数值算法，如 Jacobi 方法、 Guass-Seidel 方法、 SOR 方法等。

对以上算法的分析，立足点是在计算机上实现。因此，我们对于方法的掌握不仅在数学推导和数学公式上，而且应当深入思考方法的计算机实现过程，以加深对数值计算的认识和理解。