附 录

yanggy1010@126.com

Table of Contents

0. 勘误表

附 录

页	行	列	错误	更正
4	5	1	$\rho_0 e^{-\beta(p-p_0)}$	$\rho_0 e^{\beta(p-p_0)}$
20	12	20	$\theta_2=90°$	$\theta_1=90°$
27	4	6	单位宽度的流量	总流量
31	9	–6	$\frac{\partial\rho}{\partial t}$	$\frac{\partial p}{\partial t}$
45	–1	–1	$q=K_1\frac{H_1-H}{m_1}$	$q=-K_1\frac{H_1-H}{m_1}$
63	4	1	2.1.1	2.2.1
101	1	–1	$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial r} rJ_0(\beta r)dr$	$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t} rJ_0(\beta r)dr$
101	3	1	$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial r} rJ_0(\beta r)dr$	$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t} rJ_0(\beta r)dr$
107	1	1	$\frac{\partial s}{\partial t}$	$\frac{\partial s}{\partial r}$
107	2	1	$r\frac{\partial s}{\partial t}$	$r\frac{\partial s}{\partial r}$
111	1	1	图4.6标注数据有误	
112	–10	1	$-\frac{2.3Q}{4\pi T}$	$-\frac{2.3Q}{2\pi T}$
127	6	1	$T=\frac{2.3Q}{2\pi i_p}e^{-\frac{r}{B}}$	$T=\frac{2.3Q}{4\pi i_p}e^{-\frac{r}{B}}$
137	1	1	$r/D=0.08$	$r/D=0.8$
137	–14	1	$r/D=0.08$	$r/D=0.8$
137	5	–7	0.144	0.114
137	6	–7	0.114	0.144

64 页第 14 行（2.37）式更正为下式，并删除 15～17 行：

$$u(x,t)=\frac{\Delta\left(h_{0,t}^2\right)}{2}\left[1-\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}\right]+\frac{\Delta\left(h_{l,t}^2\right)}{2}\left[\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2at}\right]$$

163 页倒数第 5 行（5.39）式更正为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\left\{\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{Tt}{S}}f(\lambda)+ln\left(\frac{e^{\frac{2\pi y}{l}}}{4\left[\cosh\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+a)}{l}\right]\left[\cosh\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-a)}{l}\right]}\right)\right\}\right.$$

170 页第 10 行公式更正为：

$$D=\frac{m_2}{\frac{1}{2a_2}\left(2\lg\frac{4m_2}{r_w}-A_2\right)-\lg\frac{4m_2}{R}}$$

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W(u)+\xi_b\left(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M}\right)\right]$$

A. 地下水运动方程的柱坐标形式

设 $h(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，由直角坐标与极坐标的关系：

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases} \implies \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} = \cos\theta \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} = \sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

根据复合函数的求导法则：

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial \theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

同理：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}\right] \end{aligned}$$

B. Boussinesq 方程的线性化

Boussinesq 方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial x}\right) + W = \mu\frac{\partial h}{\partial t}$$

- 第一种线性化方法：

如果 h 变化不大，用平均值 $\bar{h}$ 代替 Kh：

$$K\bar{h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + W = \mu\frac{\partial h}{\partial t} \tag{b-1}$$

- 第二种线性化方法：

令 $u = \frac{h^2}{2}$，$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial t}$，有

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + W = \frac{\mu}{h}\frac{\partial u}{\partial t}$$

h 取平均值 $\bar{h}$：

$$K\bar{h}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+W\bar{h}=\mu\frac{\partial u}{\partial t} \tag{b-2}$$

C. 分离变量法

C1. 1 维扩散方程的定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0\le x\le l,\ t>0 \\ \text{IC}:u(x,0)=\varphi(x) & 0\le x\le l \\ \text{BC}:u(0,t)=u(l,t)=0 & t>0 \end{cases} \tag{C-I}$$

设 $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程，有

$$X(x)T'(t)=aX''(x)T(t)$$

因为 x 与 t 为两个独立的自由变量，有

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{aT}=-\lambda^2$$

得到两个常微分方程：

$$T'(t)+\lambda^2 aT(t)=0 \tag{c-1}$$

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \tag{c-2}$$

方程（c–1）的解：

$$T(t)=C\mathrm{e}^{-\lambda^2 at}$$

方程（c–2）与问题（$\mathrm{C}-\mathrm{I}$）的边界条件构成常微分方程的边值问题：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \tag{c-3}$$

问题（c–3）的通解为

$$X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)$$

根据边界条件确定常系数：

$$\begin{array}{lcl} X(0)=0 & \Longrightarrow & A=0 \\ X(l)=0 & \Longrightarrow & B\sin(\lambda l)=0 \end{array}$$

为求非零解，必须 $\sin(\lambda l)=0$，有

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\cdots$$

综上，问题（C–I）的解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(\lambda_n x)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2 at} \tag{c-4}$$

式中，$\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}(n=1,2,\cdots)$。

- 几个重要积分：

$$\int_0^l \sin(m\pi x/l)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{l}{2} & m=n\end{cases}\tag{c-5}$$

$$\int_0^l \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \dfrac{l}{2} & m=n\end{cases}\tag{c-6}$$

$$\int_0^l \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & m\neq 0\\ l & m=0\end{cases}\tag{c-7}$$

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\int_0^l \cos^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{l}{2},\ \ m\geq 1\tag{c-8}$$

- 确定（c–4）的系数 b_n：

由初始条件有

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

两边同乘以 $\sin\left(\dfrac{m\pi x}{l}\right)$，并从 0 到 l 积分：

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l b_n\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

应用公式（c–5），有

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)\mathrm{d}x\tag{c-9}$$

式中，$\lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\cdots$

C2. 其他定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0\leq x\leq l,\ t>0\\ \text{IC}:u(x,0)=\varphi_1(x) & 0\leq x\leq l\\ \text{BC}:u(0,t)=u_1,\ \ u(l,t)=u_2 & t>0\end{cases}\tag{C-II}$$

设 $v(x,t)=u(x,t)-(1-\dfrac{x}{l})u_1-\dfrac{x}{l}u_2$，则 $v(x,t)$ 是如下问题的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & 0\leq x\leq l,\ t>0\\ \text{IC}:v(x,0)=\varphi(x) & 0\leq x\leq l\\ \text{BC}:v(0,t)=0,\ \ v(l,t)=0 & t>0\end{cases}$$

式中，$\varphi(x)=\varphi_1(x)-(1-\dfrac{x}{l})u_1-\dfrac{x}{l}u_2$。该问题同问题（I）一致，可用分离变量法求解。

- $\varphi_1(x)=0$：

$$\varphi(x)=-(1-\frac{x}{l})u_1-\frac{x}{l}u_2$$

此时，问题（C–II）的解为：

$$u(x,t)=(1-\frac{x}{l})u_1+\frac{x}{l}u_2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(\lambda_n x)\mathrm{e}^{-\lambda_n^2 at}$$

式中，

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin(\lambda_n x)\mathrm{d}x,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l}(n=1,2,\cdots)$$

- 计算系数 b_n：

记

$$c_n=-\frac{2u_1}{l}\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin(\lambda_n x)\mathrm{d}x,\ d_n=-\frac{2u_2}{l}\int_0^l\frac{x}{l}\sin(\lambda_n x)\mathrm{d}x$$

分两步计算

1. 先计算 c_n，d_n

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{2u_1}{l}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}\cos(\lambda_n x)\\
&=\frac{2u_1}{n\pi}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos(\lambda_n x)\right]\Big|_0^l-\frac{2u_1}{n\pi}\int_0^l\cos(\lambda_n x)(-\frac{1}{l})\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2u_1}{n\pi}\\
d_n&=\frac{2u_2}{l}\frac{1}{\lambda_n}\int_0^l\frac{x}{l}\mathrm{d}\cos(\lambda_n x)\\
&=\frac{2u_2}{n\pi}\left[\frac{x}{l}\cos(\lambda_n x)\right]\Big|_0^l-\frac{2u_2}{n\pi}\int_0^l\cos(\lambda_n x)\frac{1}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2u_2}{n\pi}(-1)^n
\end{aligned}$$

2. 再计算系数 b_n：

$$b_n=c_n+d_n=-\left[\frac{2u_1}{n\pi}+\frac{2u_2}{n\pi}(-1)^{n+1}\right]$$

无量纲变换

记 $\bar{x}=\dfrac{x}{l}$，$\bar{t}=\dfrac{at}{l^2}$，则

$$\begin{aligned}
u(x,t)=u_1&\left[1-\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\bar{x})\mathrm{e}^{-(n\pi)^2\bar{t}}\right]\\
&+u_2\left[\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi\bar{x})\mathrm{e}^{-(n\pi)^2\bar{t}}\right]
\end{aligned}$$

记

$$F(\bar{x},\bar{t}) = 1 - \bar{x} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\bar{x})\mathrm{e}^{-(n\pi)^2\bar{t}}$$

$$F'(\bar{x},\bar{t}) = \bar{x} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi\bar{x})\mathrm{e}^{-(n\pi)^2\bar{t}}$$

有 $F'(\bar{x},\bar{t}) = F(1-\bar{x},\bar{t})$。

定解问题（C–II）的解简记为：

$$u(x,t) = u_1 F(\bar{x},\bar{t}) + u_2 F'(\bar{x},\bar{t}) \tag{c-10}$$

- 求 $F(\bar{x},\bar{t})$ 的 VBA 程序：

```
Function FF(x,t,nmax)
  If t<=0 Then
    FF=0#
  Else
    Pi=3.141592654
    FF=1-x
    For n=1 To nmax
      alpha=n*Pi
      term=-2*Sin(alpha*x)*Exp(-t*alpha^2)/alpha
      FF=FF+term
    Next n
  End If
End Function
```

- 问题（C–II）中 $l \to \infty$：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 \le x \le \infty,\ t > 0 \\ \text{IC}: u(x,0) = 0 & 0 \le x \le \infty \\ \text{BC}: u(0,t) = u_1,\ \ u(\infty,t) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{C-III}$$

若 l 为有限值，则

$$u(x,t) = u_1\left[1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{l}x)\mathrm{e}^{-(\frac{n\pi}{l})^2 at}\right]$$

记 $\xi_n = \dfrac{n\pi}{l}, \Delta\xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n = \dfrac{\pi}{l}$，有

$$\frac{u}{u_1} = 1 - \frac{x}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\xi_n x)}{\xi_n}\mathrm{e}^{-\xi_n^2 at}\Delta\xi_n$$

当 $l \to \infty$ 时，$\Delta\xi_n \to 0$，上式写成积分形式：

$$\frac{u}{u_1} = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(\xi x)}{\xi}\mathrm{e}^{-\xi^2 at}\mathrm{d}\xi \tag{c-11}$$

- 几个重要积分：

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u \tag{c-12}$$

$$\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=1-\mathrm{erf}(x) \tag{c-13}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{c-14}$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}\cos(bx)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{b^2}{4a^2}},\ \ (a>0) \tag{c-15}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{b}{2a}\right) \tag{c-16}$$

- 公式（c–15）证明：

记

$$\varphi(x)=\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos(2tx)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}&=-2\int_0^{\infty}te^{-t^2}\sin(2tx)\mathrm{d}t\\&=\left[e^{-t^2}\sin(2tx)\right]_0^{\infty}-2x\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos(2tx)\mathrm{d}t\\&=-2x\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos(2tx)dt\end{aligned}$$

因此，φ 满足如下方程：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}+2x\varphi=0 \tag{c-17}$$

方程（c–17）通解为

$$\varphi(x)=Ce^{-x^2}$$

并且满足

$$\varphi(0)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

有

$$\varphi(x)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos(2tx)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$$

取 $t=au(a>0)$，$x=\frac{b}{2a}$，则有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2u^2}\cos(bu)\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}},\ \ (a>0)$$

- 公式（c–16）证明：

（c–15）两边分别对 b 从 0 到 β 积分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4a^2}}\,\mathrm{d}b\\&=\frac{\pi}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\beta}{2a}\right)\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(bx)}{x} \mathrm{e}^{-a^2x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{b}{2a}\right)$$

- 问题（C –III）的解：

由公式（c–15），公式（c–11）变为：

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_1} &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\xi x)}{\xi} \mathrm{e}^{-\xi^2 at} \mathrm{d}\xi \\ &= 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \end{aligned}$$

因此，问题（C –III）的解为

$$u(x,t) = u_1 \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \tag{c-18}$$

D. Bessel 方程与 Bessel 函数

Bessel 方程 ：

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{d-1}$$

具有如下形式的解：

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x) \tag{d-2}$$

式中，$J_n(x)$ 为第一类贝塞尔函数，$Y_n(x)$ 为第二类贝塞尔函数。

修正贝塞尔方程：

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)y = 0 \tag{d-3}$$

具有如下形式的解：

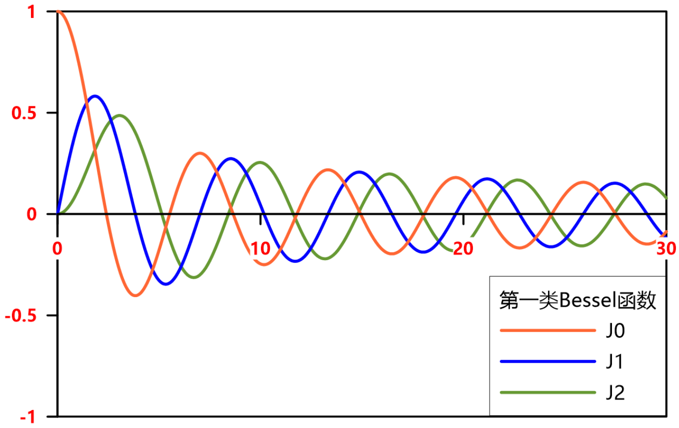
$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x) \tag{d-4}$$

式中，$I_n(x)$ 为第一类修正贝塞尔函数，$K_n(x)$ 为第二类修正贝塞尔函数。

贝塞尔函数（Bessel Functions） 是一类特殊函数的总称。

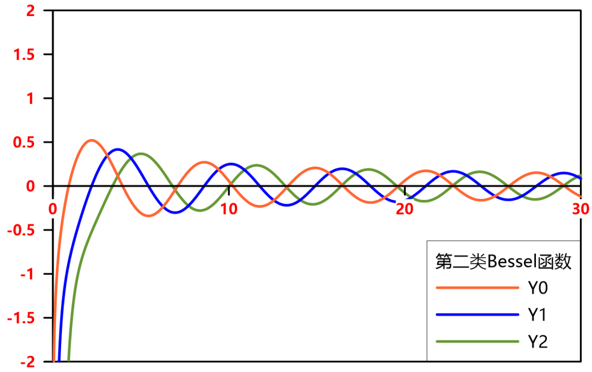
早在 18 世纪中叶，瑞士数学家丹尼尔・伯努利在研究悬链振动时提出了贝塞尔函数的几个正整数阶特例，当时引起了数学界的兴趣。丹尼尔的叔叔雅各布 ・ 伯努利，欧拉、拉格朗日等数学大师对贝塞尔函数的研究作出过重要贡献。1817 年，德国数学家贝塞尔在研究开普勒提出的三体引力系统的运动问题时，第一次系统地提出了贝塞尔函数的总体理论框架，后人以他的名字来命名了这种函数。

- 第一类贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的形状：



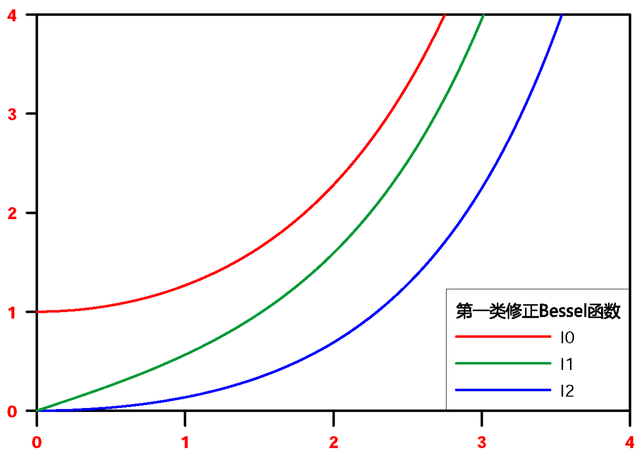
$J_n(x)$–的形状大致与按 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 速率衰减的正弦或余弦函数类似，零点不是周期性的，而是随着 x 的增加零点的间隔会越来越接近周期性。

- 第二类贝塞尔函数 $Y_n(x)$ 的形状：



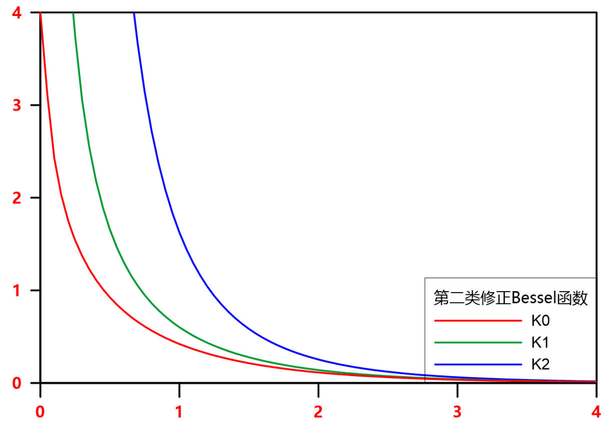
$Y_n(x)$ 又称诺伊曼函数（Neumann function），$x = 0$ 点是它的无穷奇点。

- 第一类修正贝塞尔函数 $I_n(x)$ 的形状：



$I_n(x)$ 是指数增长的。

- 第二类修正贝塞尔函数 $K_n(x)$ 的形状：



$K_n(x)$ 是指数衰减的。

- 贝塞尔函数的性质：

$J_n(x)$	$Y_n(x)$
$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$, (n为整数)	$Y_{-n}(x)=(-1)^n Y_n(x)$, (n为整数)
$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)$	$Y_{n-1}(x)+Y_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}Y_n(x)$
$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x)$	$Y_{n-1}(x)-Y_{n+1}(x)=2Y_n'(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}Y_n(x)]=-x^{-n}Y_{n+1}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n}J_n(x)]=x^{n}J_{n-1}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n}Y_n(x)]=x^{n}Y_{n-1}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[J_0(x)]=-J_1(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Y_0(x)]=-Y_1(x)$

$I_n(x)$	$K_n(x)$
$I_{-n}(x)=I_n(x)$, (n为整数)	$K_{-n}(x)=K_n(x)$, (n为整数)
$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}I_n(x)$	$K_{n-1}(x)-K_{n+1}(x)=-\frac{2n}{x}K_n(x)$
$I_{n-1}(x)+I_{n+1}(x)=2I_n'(x)$	$K_{n-1}(x)+K_{n+1}(x)=-2K_n'(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}I_n(x)]=x^{-n}I_{n+1}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-n}K_n(x)]=-x^{-n}K_{n+1}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n}I_n(x)]=x^{n}I_{n-1}(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{n}K_n(x)]=-x^{n}K_{n-1}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[I_0(x)]=I_1(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[K_0(x)]=-K_1(x)$

- 贝塞尔函数的渐进性质：

$x \to 0$	$x \to \infty$
$J_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$, $n \geq 0$	$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln(x)$	$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$
$Y_n(x) \approx -\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n$, $n > 0$	$I_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x$
$I_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$	$K_n(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$
$K_0(x) \approx -\ln x$	
$K_n(x) \approx \frac{\Gamma(n)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n$, $n > 0$	

E. Theis 模型的不同解法

记 $s = H_0 - H$ ，数学模型：

$$\begin{cases} a\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \frac{\partial s}{\partial t} & t > 0,\ 0 < r < \infty \\ \text{IC}: s(r,0) = 0 & 0 < r < \infty \\ \text{BC}: \lim\limits_{r\to\infty} s(r,t) = 0 & t > 0 \\ \text{BC}: \lim\limits_{r\to\infty} \frac{\partial s}{\partial r} = 0 & t > 0 \\ \text{BC}: \lim\limits_{r\to 0} r\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi T} & t > 0 \end{cases} \tag{E-I}$$

式中，$a = \frac{T}{S}$。

E1. Bolttzmann 变换法

引入变量 $u = \frac{r^2}{4at}$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{2at}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{t}$$

依据求导的链式法则，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial r} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{r}{2at} \\ \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} &= \frac{1}{2at}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} + \left(\frac{r}{2at}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\frac{u}{t} \end{aligned}$$

代入偏微分方程：

$$a\left[\frac{1}{2at}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} + \left(\frac{r}{2at}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{2at}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right] = -\frac{u}{t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}$$

整理得：

$$u\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} + (1+u)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = 0$$

由初始条件与边界条件：

$$
\begin{cases}
\lim\limits_{u\to\infty} s = 0 \\
\lim\limits_{u\to 0}\left(2u\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right) = -\dfrac{Q}{2\pi T}
\end{cases}
$$

原定解问题变为：

$$
\begin{cases}
u\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}u^2} + (1+u)\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = 0 \\
\lim\limits_{u\to\infty} s = 0 \\
\lim\limits_{u\to 0}\left(2u\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right) = -\dfrac{Q}{2\pi T}
\end{cases}
$$

记 $s' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}$，方程变为：

$$
u\frac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}u} + (1+u)s' = 0
$$

分离变量：

$$
\frac{1}{s'}\mathrm{d}s' = -\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u
$$

等式两边同时积分：

$$
\ln s' = -\ln u - u + C
$$

即

$$
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = s' = e^{-\ln u - u - C} = C_1\frac{e^{-u}}{u}
$$

由边界条件

$$
-\frac{Q}{2\pi T} = 2u\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right|_{u=0} = 2C_1
$$

得

$$
C_1 = -\frac{Q}{4\pi T}
$$

因此

$$
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = -\frac{Q}{4\pi T}\frac{e^{-u}}{u}
$$

两边同时积分（注意对应的积分限），有

$$
\int_s^0 \mathrm{d}s = -\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \implies s = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u
$$

式中，$u = \frac{r^2}{4at}$。

E2. Hankel 变换法

记

$$
\bar{s}(\beta, t) = \int_0^\infty s r J_0(\beta r)\mathrm{d}r
$$

为 $s(r,t)$ 的 0 阶 Hankel 变换，$J_0(\beta r)$ 为第一类零阶 Bessel 函数。

将方程两端同乘以 $rJ_0(\beta r)$，并从 0 到 ∞ 对 r 积分：

$$a\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r=\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t}rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r$$

等式右端：

$$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t}rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty srJ_0(\beta r)\mathrm{d}r=\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}t}$$

等式左端分部积分：

$$\begin{aligned}
&a\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r\\
&=a\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)J_0(\beta r)\Big|_0^\infty-a\int_0^\infty r\frac{\partial s}{\partial r}\mathrm{d}[J_0(\beta r)]\\
&=\frac{aQ}{2\pi T}+a\int_0^\infty r\frac{\partial s}{\partial r}\beta J_1(\beta r)\mathrm{d}r\\
&=\frac{aQ}{2\pi T}+a\beta rJ_1(\beta r)s\Big|_0^\infty-a\int_0^\infty s\mathrm{d}[\beta rJ_1(\beta r)]\\
&=\frac{aQ}{2\pi T}-a\int_0^\infty s\beta rJ_0(\beta r)\mathrm{d}[\beta r]\\
&=\frac{aQ}{2\pi T}-a\beta^2\bar{s}
\end{aligned}$$

式中使用了 Bessel 函数的如下性质：

$$J_0(0)=1,\quad J_0'(x)=-J_1(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-1}(x)$$

Hankel 变换将原定解问题化为常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}t}+a\beta^2\bar{s}=\dfrac{aQ}{2\pi T}\\ \bar{s}\mid_{t=0}=0\end{cases}$$

其解为：

$$\bar{s}=\frac{aQ}{2\pi T}\int_0^t e^{-a\beta^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

通过 Hankel 逆变换求 s：

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^\infty \bar{s}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta\\
&=\frac{aQ}{2\pi T}\int_0^t\left[\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta\right]\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

记

$$F(r)=\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta$$

对 $F(r)$ 求导：

$$
\begin{aligned}
F'(r) &= \int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta[-J_1(\beta r)\beta]\mathrm{d}\beta \\
&= \frac{1}{2a(t-\tau)}\int_0^\infty \beta J_1(\beta r)\mathrm{d}e^{-a\beta^2(t-\tau)} \\
&= \frac{\beta J_1(\beta r)}{2a(t-\tau)}e^{-a\beta^2(t-\tau)}\Big|_0^\infty - \frac{1}{2a(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\frac{1}{r}\mathrm{d}[\beta r J_1(\beta r)] \\
&= -\frac{1}{2a(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\frac{1}{r}\beta r J_0(\beta r)\mathrm{d}[\beta r] \\
&= -\frac{1}{2a(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta r J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta = -\frac{r}{2a(t-\tau)}F(r)
\end{aligned}
$$

式中使用了 Bessel 函数的如下性质：

$$
J_0(0)=1,\quad J_0'(x)=-J_1(x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)
$$

$F(r)$ 满足如下的常微分方程：

$$
F'(r) = -\frac{r}{2a(t-\tau)}F(r)
$$

分离变量：

$$
\frac{\mathrm{d}F(r)}{F(r)} = -\frac{r}{2a(t-\tau)}\mathrm{d}r
$$

两边积分：

$$
\ln F(r) = -\frac{r^2}{4a(t-\tau)} + C \implies F(r) = C_1 e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}
$$

$$
F(0) = \int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(0)\mathrm{d}\beta = \frac{1}{2a(t-\tau)} \implies C_1 = \frac{1}{2a(t-\tau)}
$$

因此

$$
F(r) = \frac{1}{2a(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}
$$

原问题的解

$$
s = \frac{aQ}{2\pi T}\int_0^t \frac{1}{2a(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}\mathrm{d}\tau
$$

做变量代换，令

$$
y = \frac{r^2}{4a(t-\tau)},\quad \mathrm{d}\tau = \frac{r^2}{4ay^2}\mathrm{d}y
$$

当 $\tau=0$ 时，$y=\frac{r^2}{4at}$，当 $\tau=t$ 时，$y=\infty$。因此

$$
s = \frac{aQ}{2\pi T}\int_{\frac{r^2}{4at}}^\infty \frac{2y}{r^2}e^{-y}\frac{r^2}{4ay^2}\mathrm{d}y = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y
$$

式中，$u=\frac{r^2}{4at}$。

E3. Laplace 变换法

附 录

偏微分方程：

$$a\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\frac{\partial s}{\partial t}$$

记：

$$\bar{s}(r,p)=\mathscr{L}\{s\}=\int_0^{\infty} s(r,t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

对方程两边做 Laplace 变换：

$$\text{左端}=a\left(\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}\right),\quad \text{右端}=p\bar{s}-s(r,0)$$

利用初始条件 $s(r,0)=0$，有：

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}-\frac{p}{a}r^2\bar{s}=0$$

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

$$\bar{s}=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)+C_2K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)$$

当 $r\to\infty$ 时，$s\to 0 \implies \bar{s}\to 0$。又 $r\to\infty$ 时，$I_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)\to\infty$，有 $C_1=0$。

因此

$$\bar{s}=C_2K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}=-C_2\sqrt{\frac{p}{a}}K_1\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)$$

由内边界条件（抽水井），有

$$r\left.\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_w}=-\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{p}$$

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}r^2}+r\dfrac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}-\dfrac{p}{a}r^2\bar{s}=0 \\ \lim\limits_{r\to\infty}\bar{s}=0 \\ \lim\limits_{r\to 0}r\left(\dfrac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}\right)=-\dfrac{Q}{2\pi T}\dfrac{1}{p} \end{cases}$$

得

$$C_2=\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{a}}r_wK_1\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r_w\right)}$$

取 $r_w\to 0$，根据 Bessel 函数的性质，$\lim\limits_{x\to 0}xK_1(x)=1$，有

$$\bar{s}\doteq\frac{Q}{4\pi T}\frac{2}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)=\frac{Q}{4\pi T}\frac{r^2}{4a}\frac{2}{\frac{r^2}{4a}p}K_0\left(2\sqrt{\frac{r^2}{4a}p}\right)$$

由 Laplace 逆变换

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p}K_0(2\sqrt{p})\right\}=E_1\left(\frac{1}{t}\right)$$

及 Laplace 变换性质

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\}=\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)$$

取 $b=\frac{r^2}{4a}$，有

$$s=\frac{Q}{4\pi T}E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2S}{4Tt}}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y$$

E4. 总结

Bolttzmann 变换法	Hankel 变换法	Laplace 变换法
$u(r,t)=R(r)T(t)=\frac{r^2}{4at}$	$\bar{s}(\beta,t)=\int_0^\infty srJ_0(\beta r)\mathrm{d}r$	$\bar{s}(r,p)=\int_0^\infty s(r,t)e^{-pt}\mathrm{d}t$
边值问题	初值问题	边值问题
$\begin{cases}u\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}u^2}+(1+u)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=0\\ \lim\limits_{u\to\infty}s=0\\ \lim\limits_{u\to 0}\left(2u\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)=-\frac{Q}{2\pi T}\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}t}+a\beta^2\bar{s}=\frac{aQ}{2\pi T}\\ \lim\limits_{t\to 0}\bar{s}=0\end{cases}$	$\begin{cases}r^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}-\frac{p}{a}r^2\bar{s}=0\\ \lim\limits_{r\to\infty}\bar{s}=0\\ \lim\limits_{r\to 0}r\left(\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{p}\end{cases}$
	Hankel 逆变换	Laplace 逆变换
	$s(r,t)=\int_0^\infty \bar{s}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta$	$s(r,t)=\mathscr{L}^{-1}\{\bar{s}(r,p)\}$

F. Laplace 变换及应用

F1. Laplace 变换简介

Laplace 变换定义

设函数 $f(t)$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的实值函数，如果对于复参数 $p=\beta+j\omega$，积分 $F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ 在复平面 p 的某一区域内收敛，则称 $F(p)$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记为

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(p)$ 的 Laplace 逆变换，记为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$$

简单函数的 Laplace 变换

附 录

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \mathscr{L}\{1\} && =\int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathrm{d}t=-\left.\tfrac{1}{p}e^{-pt}\right|_0^{+\infty}=\tfrac{1}{p} \\
&(2)\quad \mathscr{L}\{e^{at}\} && =\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-pt}\mathrm{d}t=\left.\tfrac{1}{a-p}e^{(a-p)t}\right|_0^{+\infty}=\tfrac{1}{p-a},\quad (p>a) \\
&(3)\quad \mathscr{L}\{\sin(at)\} && =\int_0^{\infty}\sin(at)e^{-pt}\mathrm{d}t=-\tfrac{e^{-pt}}{p^2+a^2}\left[p\sin(at)+a\cos(at)\right]_0^{\infty} \\
& && =\tfrac{a}{p^2+a^2},\quad (p>0) \\
&(4)\quad \mathscr{L}\{\cos(at)\} && =\int_0^{\infty}\cos(at)e^{-pt}\mathrm{d}t=\tfrac{e^{-pt}}{p^2+a^2}\left[-p\cos(at)+a\sin(at)\right]_0^{\infty} \\
& && =\tfrac{p}{p^2+a^2},\quad (p>0) \\
&(5)\quad \mathscr{L}\{t^n\} && =\int_0^{\infty}t^n e^{-pt}\mathrm{d}t=-n!e^{-pt}\left.\sum_{m=0}^{n}\tfrac{t^{n-m}}{(n-m)!p^{m+1}}\right|_0^{\infty} \\
& && =\tfrac{n!}{p^{n+1}},\quad (p>0)
\end{aligned}
$$

特殊函数的 Laplace 变换

- Heaviside 阶跃函数 (Heaviside step function)：

$$
H(t)=\begin{cases}0 & for \quad t<0\\ 1 & for \quad t\geq 0\end{cases}
$$

Laplace变换：

$$
\mathscr{L}\{H(t-t_0)\}=\frac{1}{p}\exp(-pt_0),\quad s>0
$$

- δ 函数 (Dirac Delta function) 或脉冲函数 (Impulse function)：

$$
\delta(t)=\begin{cases}0 & for \quad |t|>0\\ \infty & for \quad t=0\end{cases},\quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\mathrm{d}t=1
$$

也可表示为

$$
\delta(t)=\begin{cases}0 & for \quad |t|>\varepsilon\\ \frac{1}{2\varepsilon} & for \quad |t|\leq\varepsilon\end{cases},\quad \varepsilon\to 0
$$

δ 函数性质:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)
$$

Laplace 变换:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}&=\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-pt}\mathrm{d}t=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\frac{e^{-pt}}{2\varepsilon}\mathrm{d}t\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-p(t_0-\varepsilon)}-e^{-p(t_0+\varepsilon)}}{2p\varepsilon}=e^{-pt_0}
\end{aligned}
$$

即

$$
\mathscr{L}\{\delta(t-t_0)\}=\exp(-pt_0)
$$

Laplace 变换存在定理

设函数 $f(t)(t\geq 0)$ 满足：

1. 在任何有限区间上分段连续；
2. 即存在常数 c 及 $M>0$，使得 $|f(t)|\leq Me^{ct}$。

则象函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, p > c$ 上一定存在且解析。

Laplace 变换性质 设

$$F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}. \quad G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\}$$

- 线性性质

设 a，b 为常数，则有

$$\mathscr{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(p) + bG(p)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{aF(p) + bG(p)\} = af(t) + bg(t)$$

- 相似性质

设 a 为任一正实数，则

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(ap)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

- 延迟性质

设 $t < 0$ 时，$f(t) = 0$，则对任一非负实数 τ 有

$$\mathscr{L}\{H(t-\tau)f(t-\tau)\} = e^{-p\tau} F(p)$$

- 位移性质

设 a 为任一复常数，则

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(p-a)$$

$$\mathscr{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(p+a)$$

- 微分性质

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f'(t)\} &= pF(p) - f(0) \\ \mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} &= p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \\ F'(p) &= -\mathscr{L}\{tf(t)\} \\ F^{(n)}(p) &= (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\} \end{aligned}$$

- 积分性质

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{p} F(p)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_p^\infty F(p)\mathrm{d}p$$

设函数满足：$t < 0$ 时 $f_1(t) = f_2(t) = 0$，则定义卷积如下：

$$
\begin{aligned}
f_1(t) * f_2(t) &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

由上式给出的卷积满足交换律、结合律及分配律等性质。

- 卷积定理

$$\mathscr{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(p) \cdot F_2(p)$$

Laplace 变换与逆变换简表

序号	$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}$
(1)	1	$\frac{1}{p}$
(2)	$H(t-t_0)$	$\frac{1}{p}\exp(-pt_0)$
(3)	$\delta(t-t_0)$	$\exp(-pt_0)$
(4)	t	$\frac{1}{p^2}$
(5)	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
(6)	$\exp(\alpha t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
(7)	$t^n\exp(\alpha t)$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
(8)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
(9)	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$p^{-3/2}$
(10)	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\exp\left(-\frac{1}{4t}\right)$	$\exp(-\sqrt{p})$
(11)	$\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}\exp(-\sqrt{p})$
(12)	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\exp(-\sqrt{p})$
(13)	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp(-\frac{1}{4t})-\operatorname{erfc}(\frac{1}{2\sqrt{t}})$	$p^{-\frac{3}{2}}\exp(-\sqrt{p})$
(14)	$t\exp(-t)$	$\frac{1}{(p+1)^2}$
(15)	$\frac{1}{t}\exp(-\frac{1}{t})$	$2K_0(2\sqrt{p})$
(16)	$E_1(\frac{1}{t})$	$\frac{2}{p}K_0(2\sqrt{p})$
(17)	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2\sqrt{t})$	$p^{-\frac{3}{2}}\exp(\frac{1}{p})$
(18)	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2\sqrt{t})$	$p^{-\frac{1}{2}}\exp(\frac{1}{p})$
(19)	$-\gamma-\ln t$	$(\ln p)/p$

表中：$H(t)$ — 单位阶跃函数；$\delta(t)$ — 单位阶跃函数；$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$ — 误差函数；$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y$ — 余误差函数；K_0 — 第二类零阶修正 Bessel 函数；$E_1(t) = \int_t^\infty \frac{1}{y}\exp(-y)\,\mathrm{d}y$ — 指数积分；$\gamma = 0.577\,215\,6649\cdots$ — 欧拉常数.

F2. Laplace变换法求解偏微分方程

利用性质：$\mathscr{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$，消除变量对t的导数。

- 1 维问题（I − 1）：

$$\begin{cases} a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial s}{\partial t} \\ \text{IC}: s(x,0) = 0 \\ \text{BC}: s(0,t) = H \\ \text{BC}: s(\infty,t) = 0 \end{cases}$$

对方程做 Laplace 变换，记：

$$\bar{s}(x,p) = \mathscr{L}\{s(x,t)\} = \int_0^\infty s(x,t)\exp(-pt)\mathrm{d}t$$

有

$$a\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = p\bar{s}(x,p) - s(x,0) = p\bar{s}(x,p)$$

上述方程的通解为

$$\bar{s}(x,p) = C_1\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) + C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)$$

对边界条件做 Laplace 变换：

$$\begin{cases} \bar{s}(\infty,p) = 0 \\ \bar{s}(0,p) = \frac{H}{p} \end{cases}$$

根据边界条件，有 $C_1 = 0$，$C_2 = \dfrac{H}{p}$，因此

$$\bar{s}(x,p) = H\frac{1}{p}\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)$$

根据 Laplace 变换简表公式（11）：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\exp(-\alpha\sqrt{p})\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$$

取 $\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{a}}$, 得

$$s(x,t) = H\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$$

- 1 维问题（I − 2）：

附 录

$$\begin{cases} a\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial s}{\partial t} \\ \text{IC}: s(x,0) = 0 \\ \text{BC}: s(\infty,t) = 0 \\ \text{BC}: \frac{\partial s}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{q}{T} \end{cases}$$

对方程做 Laplace 变换，记

$$\bar{s}(x,p) = \mathscr{L}\{s(x,t)\} = \int_0^\infty s(x,t)\exp(-pt)\mathrm{d}t$$

有

$$a\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = p\bar{s}(x,p) - s(x,0) = p\bar{s}(x,p)$$

上述方程的通解为

$$\bar{s}(x,p) = C_1\exp\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) + C_2\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)$$

对边界条件做 Laplace 变换：

$$\begin{cases} \bar{s}(\infty,p) = 0 \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\frac{1}{p}\frac{q}{T} \end{cases}$$

根据边界条件，有 $C_1 = 0$，$C_2 = \dfrac{q}{T}\sqrt{a}p^{-\frac{3}{2}}$, 因此

$$\bar{s}(x,p) = \frac{q}{T}\sqrt{a}p^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)$$

根据 Laplace 变换简表公式（13）

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{p^{-\frac{3}{2}}\exp(-\alpha\sqrt{p})\right\} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{4t}\right) - \alpha\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$$

取 $\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{a}}$，得

$$\begin{aligned} s(x,t) &= \frac{q}{T}\sqrt{a}\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{x}{\sqrt{a}}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right] \\ &= \frac{q}{T}\sqrt{\frac{4at}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) - \frac{qx}{T}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \\ &= \frac{q}{T}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}u}\exp(-u^2) - \mathrm{erfc}(u)\right] \end{aligned}$$

式中，$u^2 = \frac{x^2}{4at}$.

- 2 维问题（$\mathrm{II}-1$）：

记 $s = H_0 - H$，数学模型：

$$\begin{cases} a\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\frac{\partial s}{\partial t} & t>0,\ 0<r<\infty \\ \text{IC}: s(r,0)=0 & 0<r<\infty \\ \text{BC}: s(\infty,t)=0, \lim\limits_{r\to\infty}\left(\frac{\partial s}{\partial r}\right)=0 & t>0 \\ \text{BC}: \lim\limits_{r\to 0}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T} \end{cases}$$

式中，$a=\frac{T}{S}$。

记

$$s(\bar{r,p})=\mathscr{L}\{s\}=\int_0^\infty s(r,t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 $s(r,0)=0$，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}r}-\frac{p}{a}\bar{s}=0$$

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

$$\bar{s}=C_1I_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)+C_2K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)$$

对边界条件做 Laplace 变换：

$$\begin{cases} \bar{s}(\infty,p)=0 \\ r\frac{\partial\bar{s}}{\partial r}\Big|_{r=r_w}=-\frac{1}{p}\frac{Q}{2\pi T} \end{cases}$$

根据边界条件，有 $C_1=0,\ C_2=\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{\frac{p}{a}}r_wK_1\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r_w\right)}$，因此

$$\bar{s}=\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{p}\frac{K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)}{\sqrt{\frac{p}{a}}r_wK_1\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r_w\right)}$$

设 $r_w\to 0$，因为 $\lim\limits_{x\to 0}xK_1(x)=1$，所以有

$$\bar{s}\doteq\frac{Q}{4\pi T}\frac{2}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)$$

根据 Laplace 变换简表公式（16）：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p}K_0(2\sqrt{p})\right\}=E_1\left(\frac{1}{t}\right)$$

及 Laplace 变换相似性：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\}=\frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)$$

有

$$\bar{s}\doteq\frac{Q}{4\pi T}\frac{2}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}}r\right)=\frac{Q}{4\pi T}\frac{r^2}{4a}\frac{2}{\frac{r^2}{4a}p}K_0\left(2\sqrt{\frac{r^2}{4a}p}\right)$$

取 $b=\frac{r^2}{4a}$：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}E_1\left(\frac{r^2}{4at}\right)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2S}{4Tt}}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y$$

- 2 维问题（$\mathrm{II}-2$）：Jacob–Lohman 公式

做无量纲变量代换，记 $\bar{r}=\frac{r}{r_w}$，$\bar{t}=\frac{at}{r_w^2}$，定解问题变为

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 s}{\partial \bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial s}{\partial \bar{r}}=\frac{\partial s}{\partial \bar{t}} & \bar{t}>0,\ 1<\bar{r}<\infty \\ s(\bar{r},0)=0, & 1<\bar{r}<\infty \\ s(\infty,\bar{t})=0, & \bar{t}>0 \\ s(1,\bar{t})=s_w, & \bar{t}>0\end{cases}$$

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 $s(r,0)=0$，得：

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{s}}{\mathrm{d}\bar{r}^2}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}\bar{r}}-p\bar{s}=0$$

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

$$\bar{s}=C_1I_0\left(\sqrt{p}\bar{r}\right)+C_2K_0\left(\sqrt{p}\bar{r}\right)$$

对边界条件做 Laplace 变换：

$$\begin{cases}\bar{s}(\infty,p)=0 \\ \bar{s}(1,\bar{t})=\frac{s_w}{p}\end{cases}$$

根据边界条件，有 $C_1=0$，$C_2=\frac{s_w}{p}\frac{1}{K_0(\sqrt{p})}$，因此

$$\bar{s}=\frac{s_w}{p}\frac{K_0(\sqrt{p}\bar{r})}{K_0(\sqrt{p})}$$

记

$$\bar{A}(\bar{r},p)=\frac{K_0(\sqrt{p}\bar{r})}{pK_0(\sqrt{p})},\qquad \bar{s}=s_w\bar{A}(\bar{r},p)$$

$$A(\bar{r},\bar{t})=\mathscr{L}^{-1}\{\bar{A}(\bar{r},p)\}$$

则有

$$s=s_wA(\bar{r},\bar{t})$$

式中，$A(\bar{r},\bar{t})$ 称为降深函数。

记 Q_w 为自流井流量，$\bar{Q}_w$ 为 Q_w 的 Laplace 变换。有

$$\bar{Q}_w=-2\pi\bar{r}T\left.\frac{\partial\bar{s}}{\partial\bar{r}}\right|_{\bar{r}=1}=2\pi T\frac{s_w}{p}\frac{\sqrt{p}K_1(\sqrt{p})}{K_0(\sqrt{p})}$$

记

$$G(\bar{t})=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K_1(\sqrt{p})}{\sqrt{p}K_0(\sqrt{p})}\right\}$$

有

$$Q_w=2\pi Ts_wG(\bar{t})$$

式中，$G(\bar{t})$ 称为流量函数，$\bar{t}=\frac{at}{r_w^2}$。

- 2 维问题（$\mathrm{II}-3$）：Hantush–Jacob 公式

数学模型：

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}-\frac{s}{B^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t} & t>0,\ r_w<r<\infty\\ s(r,0)=0, & r_w<r<\infty\\ s(\infty,t)=0, & t>0\\ \lim\limits_{r\to 0}\left(s\frac{\partial s}{\partial t}\right)=-\frac{Q}{2\pi T}, & t>0\end{cases}$$

式中，$a=\frac{T}{S}$。

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 $s(r,0)=0$，得：

$$\frac{\partial^2\bar{s}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{s}}{\partial r}-\left(\frac{p}{a}+\frac{1}{B^2}\right)\bar{s}=0$$

同 Theis 模型，其解为：

$$\bar{s}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{2}{p}K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}+\frac{1}{B^2}}r\right)=\frac{Q}{4\pi T}\frac{2}{p}K_0\left(2\sqrt{\frac{r^2}{4a}\left(p+\frac{a}{B^2}\right)}\right)$$

记 $\alpha=\frac{r^2}{4a}$，$\beta=\frac{a}{B^2}$，由 Laplace 变换简表公式（15）：

$$\mathscr{L}^{-1}\{2K_0(2\sqrt{p})\}=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{1}{t}\right)=f(t)$$

及相似性，有

$$\mathscr{L}^{-1}\{2K_0(2\sqrt{\alpha p})\}=\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{t}{\alpha}\right)=\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{\alpha}{t}\right)$$

根据位移性质，有

$$\mathscr{L}^{-1}\{2K_0(2\sqrt{\alpha(p+\beta)})\}=\exp(-\beta t)\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{\alpha}{t}\right)=\frac{1}{t}\exp\left(-\beta t-\frac{\alpha}{t}\right)$$

利用卷积计算 $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{4\pi T\bar{s}}{Q}\}$：

$$\frac{4\pi Ts}{Q}=\int_0^t 1\cdot\frac{1}{\tau}\exp\left(-\beta\tau-\frac{\alpha}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau$$

做变量代换 $y=\frac{\alpha}{\tau}$：

$$\begin{aligned}\frac{4\pi Ts}{Q}&=\int_\infty^{\frac{\alpha}{t}}\frac{y}{\alpha}\exp\left(-\frac{\alpha\beta}{y}-y\right)\left(-\frac{\alpha}{y^2}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{r^2}{4at}}^\infty\frac{1}{y}\exp\left(-y-\frac{r^2}{4B^2y}\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

F3. Laplace变换的数值反演

Stehfest 算法

设 $F(p)$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换。Stehfest 算法公式如下：

附 录

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{i=1}^{n} c_i F\left(\frac{i \ln 2}{t}\right)$$

式中，c_i 为 Stehfest 系数，按下式计算：

$$c_i = (-1)^{i+\frac{n}{2}} \sum_{k=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{min(i,\frac{n}{2})} \frac{k^{\frac{n}{2}}(2k)!}{(\frac{n}{2}-k)!k!(k-1)!(i-k)!(2k-i)!}$$

```
' n shuld not exceed about 20, and n = 10 is probably sufficient
' for most applications.
' Note that n must be an even integer and that t = time.
Function Lapinv(n,t)
  n=WorksheetFunction.Even(n)
  Lapinv=0#
  For i=1 To n
    Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)*Transform(i*Log(2)/t)
  Next i
  Lapinv=Lapinv*Log(2)/t
End Function

Function Stehcoef(i,n)
  M=WorksheetFunction.Round(n/2,0)
  upperlimit=WorksheetFunction.Min(i,M)
  lowerlimit=WorksheetFunction.RoundDown((i+1)/2,0)
  Stehcoef=0#
  For K=lowerlimit To upperlimit
    num=Fact(2*K)*K^M
    denom=Fact(M-K)*Fact(K)*Fact(K-1)*Fact(i-K)*Fact(2*K-i)
    Stehcoef=Stehcoef+num/denom
  Next K
  Stehcoef=Stehcoef*(-1)^(i+M)
End Function

Function Fact(x)
  Fact=WorksheetFunction.Fact(x)
End Function

Function Transform(p)  'Theis解
  Transform=2*WorksheetFunction.BesselK(2*Sqr(p),0)/p
End Function
```

- Theis 解的反演

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u) = \frac{Q}{4\pi T} \mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{p} K_0 \left(\sqrt{\frac{p}{a}} r \right) \right\}$$

式中，$u = \frac{r^2 S}{4Tt}$。取 $b = \frac{r^2}{4a}$，得

$$\frac{1}{b} W\left(\frac{1}{\frac{t}{b}}\right) = \mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{bp} K_0(2\sqrt{bp}) \right\}$$

由 Laplace 变换性质

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\} = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$$

有

$$W\left(\frac{1}{t^*}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*}K_0(2\sqrt{p^*})\right\} = W(u)$$

取 $u = 0.01$，即 $t^* = \frac{1}{u} = 100$，可以计算出 $W(0.01)$。

```
Function Transform(p)
  Transform=2*WorksheetFunction.BesselK(2*Sqr(p),0)/p
End Function
'
Function Lapinv(n,t)
  n=WorksheetFunction.Even(n)
  Lapinv=0#
  For i=1 To n
    Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)*Transform(i*Log(2)/t)
  Next i
  Lapinv=Lapinv*Log(2)/t
End Function
```

- 定降深井模型 (Jacob–Lohman) 反演

记

$$\bar{A}(\bar{r}, p) = \frac{K_0(\sqrt{p}\bar{r})}{pK_0(\sqrt{p})}$$

有

$$\bar{s} = s_w \bar{A}(\bar{r}, p)$$

记 $A(\bar{r}, \bar{t}) = \mathscr{L}^{-1}\{\bar{A}(\bar{r}, p)\}$，得

$$s = s_w A(\bar{r}, \bar{t})$$

式中，$A(\bar{r}, \bar{t})$ 称为降深函数。

```
Function Transform(p,r)
  Transform=WorksheetFunction.BesselK(r*Sqr(p),0)/WorksheetFunction.BesselK(Sqr(p),0)/p
End Function
'
Function Lapinv(n,t,r)
  n=WorksheetFunction.Even(n)
  Lapinv=0#
  For i=1 To n
    Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)*Transform(i*Log(2)/t,r)
  Next i
  Lapinv=Lapinv*Log(2)/t
End Function
```

记 Q_w 为自流井流量，有

$$\begin{aligned} Q_w &= 2\pi T s_w G(\bar{t}) \\ &= 2\pi T s_w \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{K_1(\sqrt{p})}{\sqrt{p}K_0(\sqrt{p})}\right\} \end{aligned}$$

式中，$G(\bar{t})$ 称为流量函数，$\bar{t} = \frac{at}{r_w^2}$。

附 录

```
Function Transform(p)
  s=Sqr(p)
  Transform=WorksheetFunction.BesselK(s,1)/WorksheetFunction.BesselK(s,0)/s
End Function
'
Function Lapinv(n,t)
  n=WorksheetFunction.Even(n)
  Lapinv=0#
  For i=1 To n
    Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)*Transform(i*Log(2)/t)
  Next i
  Lapinv=Lapinv*Log(2)/t
End Function
```

- 越流含水层完整井模型 (Hantush–Jacob) 反演

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u,\beta) = \frac{Q}{4\pi T} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p} K_0\left(\sqrt{\frac{p}{a}+\frac{1}{B^2}}r\right)\right\}$$

式中，$u=\frac{r^2S}{4Tt}$，$\beta=\frac{r}{B}$。取 $b=\frac{r^2}{4a}$，有：

$$W\left(\frac{b}{t},\beta\right) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p} K_0\left(\sqrt{4bp+\beta^2}\right)\right\}$$

由 Laplace 变换的相似性：

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(bp)\right\} = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right)$$

得

$$W\left(\frac{1}{t^*},\beta\right) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^*} K_0\left(\sqrt{4p^*+\beta^2}\right)\right\}$$

```
Function Transform(p,beta)
  Transform=2*WorksheetFunction.BesselK(Sqr(4*p+beta^2),0)/p
End Function
'
Function Lapinv(n,t,beta)
  n=WorksheetFunction.Even(n)
  Lapinv=0#
  For i=1 To n
    Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)*Transform(i*Log(2)/t,beta)
  Next i
  Lapinv=Lapinv*Log(2)/t
End Function
```