5 理想条件下的完整井非稳定流模型

yanggy1010@126.com

Table of Contents

5.1 承压水完整井的非稳定流模型

5.1.1 Theis 模型

- 含水层均质各向同性、等厚, 侧向无限延伸, 产状水平;
- 抽水前天然状态下水力坡度为零;
- 完整井定流量抽水, 井径无限小;
- 含水层中水流服从 Darcy 定律;
- 水头下降引起的地下水从贮存量中的释放是瞬时完成的.

抽水后会形成以井轴为对称轴的降落漏斗. 如图 4.1 建立坐标系，记 $s = H_0 - H$

数学模型

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{S}{T}\frac{\partial s}{\partial t} & t > 0, 0 < r < \infty \\
s(r,0) = 0 & 0 < r < \infty \\
s(\infty,t) = 0,\ \frac{\partial s}{\partial r}\Big|_{r\to\infty} = 0 & t > 0 \\
\lim\limits_{r\to 0}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) = -\frac{Q}{2\pi T}
\end{cases}
\tag{I}
$$

求解方法：可用分离变量法、Laplace 变换、Hankel 变换或 Boltzmann 变换法求解.

$$
s = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y}\mathrm{d}y = \frac{Q}{4\pi T}W(u)
$$

式中, $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$.

上式称为 Theis 公式, $W(u)$ 称为 Theis 井函数：

$$
W(u) = \int_u^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y = \mathrm{E}_1(u) = -\mathrm{E}_i(-u)
$$

式中, $\mathrm{E}_i(u) = \int_{-\infty}^u \frac{\mathrm{e}^y}{y}\mathrm{d}y$、$\mathrm{E}_i, \mathrm{E}_1$ 称为指数积分.

> 地下水向抽水井的运动, 用柱坐标表示微分方程时, 推荐使用 Laplace 变换法求解, 可用 Python 编程计算.

- 做 Laplace 变换, 相空间的解包含修正 Bessel 函数. scipy.special 模块中有相应函数;
- 做 Laplace 逆变换, mpmath 模块中有 invertlaplace 函数 (talbot, stehfest, dehoog 三种算法);
- 也可直接编程计算.

5.1.2 Theis 公式的近似形式

$W(u)$ 的级数形式

$$W(u) = -0.577216 - \ln u + u - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n \cdot n!}$$

除前三项外为交错级数; u 很小时, 用 $-0.577216 - \ln u$ 代替 $W(u)$ 的截断误差不超过 $2u$.

u	井函数相对误差
≤ 0.1	≤ 0.05
≤ 0.05	≤ 0.02
≤ 0.01	≤ 0.0025

u 很小时 $W(u) \approx -0.577216 - \ln u = \ln \frac{2.25Tt}{r^2 S}$, 有

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} = \frac{0.183Q}{T} \lg \frac{2.25Tt}{r^2 S}$$

上式称为 Jacob 公式.

$W(u)$ 的多项式逼近

- $0 < u \leq 1$ 时

$$W(u) = -\ln u + a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5$$

式中

$$\begin{aligned} a_0 &= -0.57721566 & a_3 &= 0.05519968 \\ a_1 &= 0.99999193 & a_4 &= -0.00976004 \\ a_2 &= -0.24991055 & a_5 &= 0.00107857 \end{aligned}$$

- $1 < u < \infty$ 时

$$W(u) = \frac{b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 + u^4}{c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + u^4} \cdot \frac{e^{-u}}{u}$$

式中

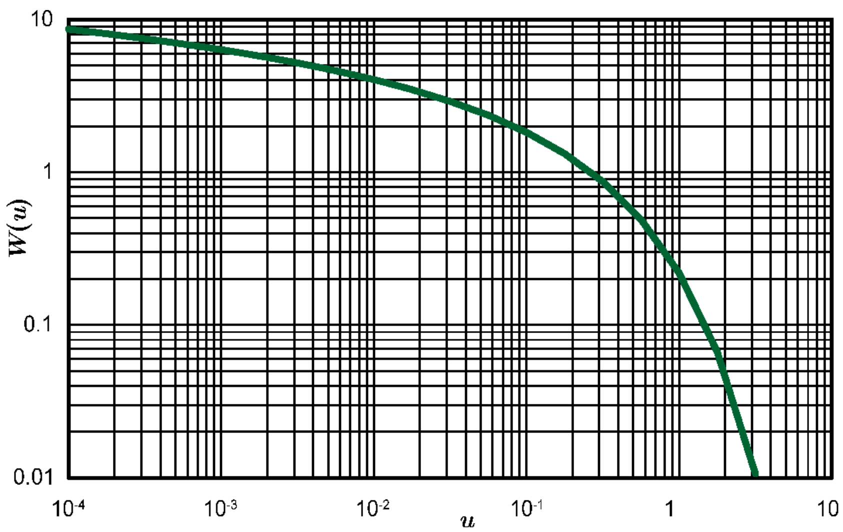
$$\begin{aligned} b_0 &= 0.2677737343 & c_0 &= 3.9584969228 \\ b_1 &= 8.6347608925 & c_1 &= 21.0996530827 \\ b_2 &= 18.0590169730 & c_2 &= 25.6329561486 \\ b_3 &= 8.5733287401 & c_3 &= 9.5733223454 \end{aligned}$$

求 $W(u)$ 的VBA程序

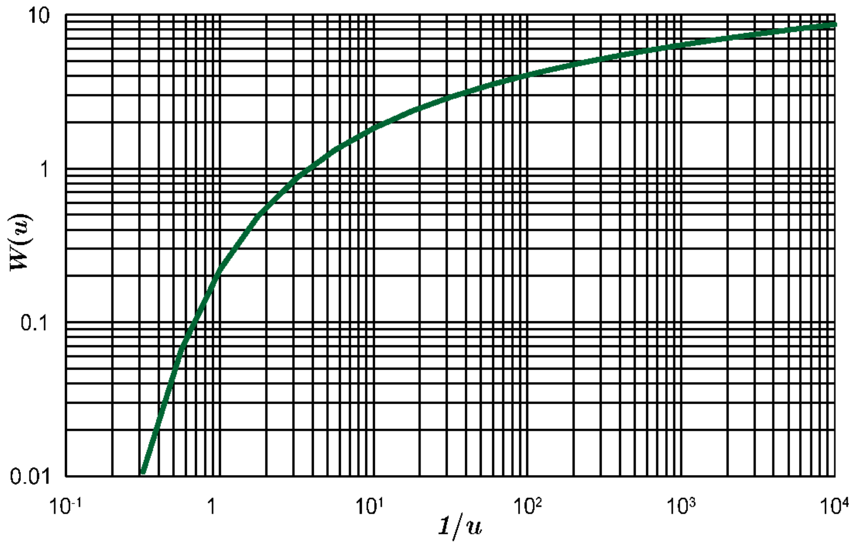
```
'To compute the exponential integral W(x) for 0<x<infinity.
Function W(x)
  A0 = -0.57721566
  A1 =  0.99999193
  A2 = -0.24991055
  A3 =  0.05519968
  A4 = -0.00976004
  A5 =  0.00107857
  B0 =  0.2677737343
  B1 =  8.6347608925
  B2 = 18.059016973
  B3 =  8.5733287401
  C0 =  3.9584969228
  C1 = 21.0996530827
  C2 = 25.6329561486
  C3 =  9.5733223454

  If x <= 1 Then
    W = -Log(x) + A0 + x * (A1 + x * (A2 + x * (A3 + x * (A4 + x * A5))))
  Else
    P1 = B0 + x * (B1 + x * (B2 + x * (B3 + x)))
    P2 = C0 + x * (C1 + x * (C2 + x * (C3 + x)))
    W = (P1 / P2) * Exp(-x) / x
  End If
End Function
```

标准曲线

$W(u) \sim u$ 曲线



$W(u) \sim \frac{1}{u}$ 曲线



> $W(u) \sim \frac{1}{u}$ 的单调性与 $s \sim t$ 一致，因此经常使用的标准曲线为 $W(u) \sim \frac{1}{u}$ 曲线。
>
> 由 $\frac{T}{S} = \frac{r^2}{4t} \cdot \frac{1}{u}$ 可以看出，对于固定的 r, t，尽管含水层参数不同，但 $\frac{1}{u}$ 有可能相同，因而在标准曲线上对应同一个点。
>
> 对于固定的 r, t，不同的含水层参数可能对应于标准曲线上的不同点。如取 $r = 100m, t = 10\,min$，$\frac{T}{S}$ 分别取 $3.6 \times 10^5\, m^2/d$、$3.6 \times 10^7\, m^2/d$，则 $\frac{1}{u}$ 分别为1、0.001，相差两个对数周期。

5.1.3 Theis 公式讨论

标准曲线 $W(u) \sim \frac{1}{u}$ 单调性与 $s \sim t$ 一致, 比较常用.

（1）降深变化规律

- 同一时间观测 (t 固定): $r \uparrow \implies s \downarrow, r \to \infty \implies s \to 0.$
- 同一柱状断面(r 固定): $t \uparrow \implies s \uparrow, t = 0 \Rightarrow s = 0.$

（2）$t \to \infty \implies s \to \infty$ 正确性

- 数学意义上是正确的!
- 从时间无限性与空间有限性考虑, 是不可能发生的!

（3）等水头线方程

当 u 很小时,

$$x^2 + y^2 = \frac{2.25Tt}{S} e^{-\frac{4\pi Ts}{Q}}$$

给定时刻 t, 等水头线是以井为圆心的同心圆.

（4）水头下降速度

$u < 0.01$ 时,

$$\frac{\partial s}{\partial t} \approx \frac{Q}{4\pi T} \cdot \frac{1}{t}$$

- 给定时刻 t: 近处水头降速大, 远处降速小.
- 抽水后期: 在一定范围内水位大致等幅下降.

令 $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=0$ 可求出拐点：$t_i=\frac{r^2 S}{4T}(u_i=1)$。

r 处的观测孔:

- $t<t_i$ 时, 水头下降速度随 t 逐渐增大;
- $t>t_i$ 时, 水头下降速度随 t 逐渐减小;
- $t=t_i$ 时 $\frac{\partial s}{\partial t}$ 最大.

拐点处降深

$$s_i=\frac{Q}{4\pi T}W(u_i)=\frac{Q}{4\pi T}\times 0.2194=0.0175\frac{Q}{T}$$

（5）柱面渗透速度

$$v=\frac{Q}{2\pi rM}e^{-\frac{r^2 S}{4Tt}}=v'e^{-\frac{r^2 S}{4Tt}}$$

式中: v' 为稳定流渗透速度. $u<0.01)$ 时距抽水井 r 处的观测孔达到似稳定状态.

距抽水井 r 处柱状过水断面流量

$$Q_r=-2\pi rMK\frac{\partial s}{\partial r}=Qe^{-\frac{r^2 S}{4Tt}}$$

- $r\to 0$ 时, $Q_r\to Q$;
- $u<0.01$ 时, $e^{-\frac{r^2 S}{4Tt}}\approx 1$.

> 离抽水井越近, 柱状过水断面流量大. 抽水时间足够长 ($u<0.01$) 各柱状断面的流量近似相等.

（6）类似Thiem公式的形式

长时间抽水 ($u<0.01$) 后 Jacob 公式成立. 对于 r_1 、r_2 处的观测孔

$$s_1=\frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r_1^2 S}$$
$$s_2=\frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r_2^2 S}$$

相减得

$$s_1-s_2=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

（7）无限小井径假设

$u_{r_w}<0.01$ 时 $Q_w\approx Q$ 的误差不超过 1%.

（8）零天然水力坡度假设

地下水水力坡度一般都比较小, 水力坡度为零的假设对计算结果影响不大; 特殊情况下还可以应用叠加原理进行处理.

（9）影响半径

无限延申的无越流补给承压含水层中的抽水井，抽水时间越长，降落漏斗范围越大。抽水影响范围可借助于 “影响半径” 进行分析。 将 Jacob 公式改写为

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1.5\sqrt{Tt/S}}{r}$$

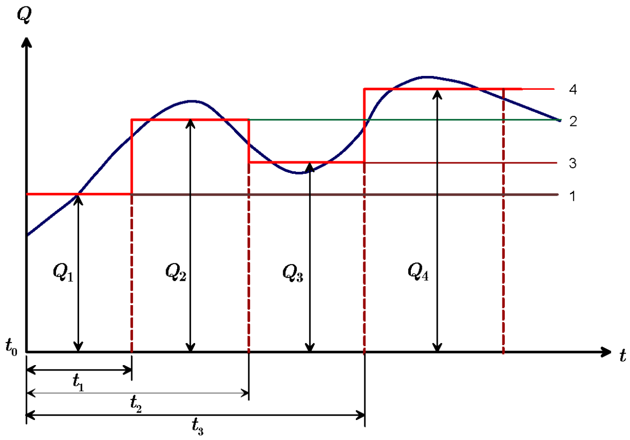
比照 Dupuit 公式，形式上影响半径为 $R = 1.5\sqrt{Tt/S}$. Cheng, A.H.-D [1] 以总抽水量 99% 来自含水层的弹性释水为标准，得出影响半径为 $R = 3.49\sqrt{Tt/S}$.

这两个公式尽管有差异，但都可用来评估长时间抽水的影响范围。

1. Cheng, A.H.-D., Multilayered Aquifer Systems-Fundamentals and Applications, Marcel Dekker, New York/Basel, 384 p., 2000.

5.1.4 变流量的计算公式

流量变化时的计算公式 将流量曲线概化为阶梯曲线; 每一个阶梯视为定流量, 用叠加原理 (时间叠加) 求出总降深。



如图, 概化为 4 个阶梯, 分解成 4 个问题:

1. $t_0 \to t$ 以 Q_1 抽水;
2. $t_1 \to t$ 以 $Q_2 - Q_1$ 抽水;
3. $t_2 \to t$ 以 $Q_3 - Q_2$ 注水;
4. $t_3 \to t$ 以 $Q_4 - Q_3$ 抽水.

各阶梯流量抽水引起的降深:

1. $s_1 = \frac{Q_1 - Q_0}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_0)}\right)$
2. $s_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_1)}\right)$
3. $s_3 = \frac{Q_3 - Q_2}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_2)}\right)$
4. $s_4 = \frac{Q_4 - Q_3}{4\pi T} W\left(\frac{r^2 S}{4T(t-t_3)}\right)$

时刻 刻 t 的 降 深:

1. $t_0 < t \le t_1$, $s = s_1$
2. $t_1 < t \le t_2, s = s_1 + s_2$
3. $t_2 < t \le t_3, s = s_1 + s_2 + s_3$
4. $t_3 < t \le t_4, s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

设共有 n 个时段, 且 $t_0 = 0, Q_0 = 0$. 当 $t_{n-1} < t < t_n$ 时

$$s = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^{n} (Q_i - Q_{i-1}) W\left[\frac{r^2 S}{4T(t - t_{i-1})}\right]$$

如果每个时段抽水延续时间足够长,

$t-t_i \ge 25\frac{r^2S}{T}(i=1,2,\cdots,n)$, Jacob 公式成立

$$s=\frac{0.183}{T}\sum_{i=1}^{n}(Q_i-Q_{i-1})\lg\frac{2.25T(t-t_{i-1})}{r^2S}$$

5.2 有越流补给的半承压水完整井非稳定流模型

越流系统

包括越流含水层、弱透水层和相邻的含水层的地下水系统.

越流系统的类型

- 第一越流系统：忽略弱透水层弹性释放、忽略补给层水位变化;
- 第二越流系统：考虑弱透水层弹性释放、忽略补给层水位变化;
- 第三越流系统：忽略弱透水层弹性释放、考虑补给层水位变化.

5.2.1 Hantush–Jacob 模型

模型假设条件: 本节主要讨论第一越流系统.

- 每一层都是均质各向同性, 产状水平、等厚, 侧向无限延伸;
- 水流服从 Darcy 定律;
- 抽水过程中相邻含水层水头不变;
- 忽略弱透水层弹性释水, 弱透水层中水流为垂向一维流;
- 抽水含水层天然水力坡度为零, 抽水后形成平面径向流;
- 完整井定流量抽水, 井径无限小.

数学模型

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}-\frac{s}{B^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial s}{\partial t} & t>0, 0<r<\infty\\ s|_{t=0}=0 & 0<r<\infty\\ s|_{r\to\infty}=0 & t>0\\ \lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T} & t>0\end{cases} \tag{II}$$

模型的解 (Hantush–Jacob,1955)

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\frac{r}{B}\right)$$

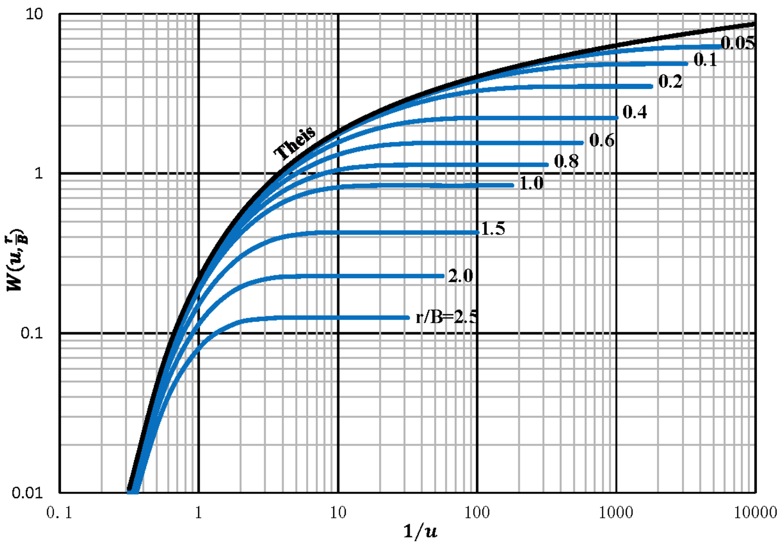
式中, $u=\frac{r^2S}{4Tt}$, $B=\sqrt{\frac{TM'}{K'}}$, $W\left(u,\frac{r}{B}\right)$ 为越流井函数。

$$W\left(u,\frac{r}{B}\right)=\int_u^{\infty}\frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}\,\mathrm{d}y$$

越流井函数的计算方法见试验材料。

标准曲线

对于不同的 $\frac{r}{B}$ 可以绘出 $W(u,\frac{1}{u})$ 标准曲线.



5.2.2 Hantush–Jacob 公式讨论

（1）$s \sim t$ 曲线的变化规律

$s \sim t$ 曲线分早、中、晚三个阶段.

- 早期: 同 Theis 曲线一致, 越流尚未进入主含水层, 抽水量来自主含水层的弹性释水; r 一定时, B 越大, 与 Theis 曲线吻合的时间越长, 越流进入含水层的时间越晚.
- 中期：偏离 Theis 曲线, 越流已经进入抽水含水层, 抽水量来自弹性释水与越流补给两部分. r 一定时, B 越大, 开始偏离的时间越晚.
- 晚期：降深趋于定值. $t \to \infty$ 时 $W\left(u, \frac{r}{B}\right) \approx 2K_0(\frac{r}{B})$，有

$$s \approx \frac{Q}{2\pi T} K_0(\frac{r}{B})$$

即有越流补给的完整井流，定流量抽水最终能达到稳定流.

（2）水头下降速度

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t} e^{-\left(\frac{r^2 S}{4Tt} + \frac{Tt}{SB^2}\right)}$$

越流含水层水位下降速度比无越流含水层慢.

（3）稳定流降深的近似公式及各种流量的关系

降深的近似公式

$x > 2$ 时 $K_0(x)$ 快速衰减；$x \ll 1$ 时，$K_0(x) \approx \ln(\frac{1.123}{x})$。

有

$$s \approx \frac{Q}{2\pi T} \ln \frac{1.123B}{r}$$

当 $\frac{r}{B} < 0.35$ 时，误差小于 5 %；当 $\frac{r}{B} < 0.18$ 时，误差小于 1 %。

抽水量与越流量、轴向侧流量的关系

径向距离 r 处的轴向侧流量

$$Q_r = -2\pi rT\frac{\partial s}{\partial r} \approx Q\frac{r}{B}K_1(\frac{r}{B})$$

由此得到抽水量与轴向侧流量关系

$$\frac{Q_r}{Q} \approx \frac{r}{B}K_1(\frac{r}{B})$$

在 $r > 4B$ 范围，$\frac{Q_r}{Q} < 0.05$，可以认为 $r < 4B$ 的区域内95%抽水量来自越流量。

5.3 有弱透水层弹性释水补给的半承压水完整井非稳定流模型

Hantush–Jacob 模型忽略弱含水层的弹性释水与补给含水层水位变化，为第一越流系统。

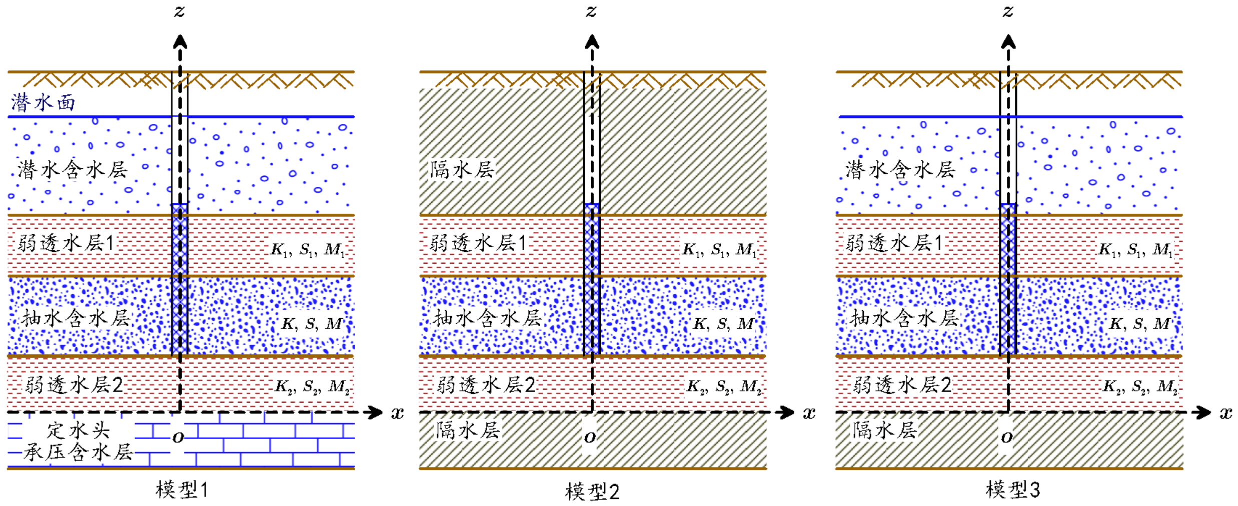
事实上，对于多层结构的含水岩组，含水层抽水时会引起弱透水层弹性释水，当弱透水层较厚时，这种补给量是可观的，不能忽略。

M. S. Hantush (1960) 提出了三层结构模型属于第二越流系统。

5.3.1 Hantush 模型

Hantush 根据弱透水层弹性释水与相邻含水层关系，给出了三种越流模型：

- 模型 1：与两弱透水层相邻的是定水头含水层；
- 模型 2：与两弱透水层相邻的是隔水层；
- 模型 3：上弱透水层与定水头含水层相邻，下弱透水层与隔水层相邻。



模型假设条件

- 含水层和弱透水层均质、各向同性，产状水平、等厚、无限分布；天然水力坡度为零；
- 单井定流量抽水；
- 弱透水层渗透系数与抽水含水层相比要小的多；
- 含水层抽水时，能得到弱透水层弹性释水补给；弱透水层中水流是垂向流， 抽水含水层中水流为水平径向流，水流服从 Darcy 定律；
- 与弱透水层相邻为定水头含水层或隔水层。

数学模型

- 模型 1

抽水含水层

$$\begin{cases} T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_1\frac{\partial s_1}{\partial z}-K_2\frac{\partial s_2}{\partial z}=S\frac{\partial s}{\partial t} \\ s(r,0)=0 \\ s(\infty,t)=0 \\ \lim\limits_{r\to 0} r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T} \end{cases} \tag{III-1}$$

下弱透水层

$$\begin{cases} K_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial z^2}=S_{s_2}\frac{\partial s_2}{\partial t} \\ s_2(r,z,0)=0 \\ s_2(r,0,t)=0 \\ s_2(r,m_2,t)=s(r,t) \end{cases} \tag{III-2}$$

上弱透水层

$$\begin{cases} K_1\frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2}=S_{s_1}\frac{\partial s_1}{\partial t} \\ s_1(r,z,0)=0 \\ s_1(r,m_2+M+m_1,t)=0 \\ s_1(r,m_2+M,t)=s(r,t) \end{cases} \tag{III-3}$$

- 模型 2

抽水含水层

$$\begin{cases} T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_1\frac{\partial s_1}{\partial z}-K_2\frac{\partial s_2}{\partial z}=S\frac{\partial s}{\partial t} \\ s(r,0)=0 \\ s(\infty,t)=0 \\ \lim\limits_{r\to 0} r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T} \end{cases} \tag{IV-1}$$

下弱透水层

$$\begin{cases} K_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial z^2}=S_{s_2}\frac{\partial s_2}{\partial t} \\ s_2(r,z,0)=0 \\ \frac{\partial}{\partial z}s_2(r,0,t)=0 \\ s_2(r,m_2,t)=s(r,t) \end{cases} \tag{IV-2}$$

上弱透水层

$$\begin{cases} K_1\frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2}=S_{s_1}\frac{\partial s_1}{\partial t} \\ s_1(r,z,0)=0 \\ \frac{\partial}{\partial z}s_1(r,m_2+M+m_1,t)=0 \\ s_1(r,m_2+M,t)=s(r,t) \end{cases} \tag{IV-3}$$

- 模型 3

抽水含水层

$$\begin{cases} T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_1\frac{\partial s_1}{\partial z}-K_2\frac{\partial s_2}{\partial z}=S\frac{\partial s}{\partial t} \\ s(r,0)=0 \\ s(\infty,t)=0 \\ \lim\limits_{r\to 0} r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T} \end{cases} \tag{V-1}$$

5 理想条件下的完整井非稳定流模型

下弱透水层

$$\begin{cases} K_2 \frac{\partial^2 s_2}{\partial z^2} = S_{s_2} \frac{\partial s_2}{\partial t} \\ s_2(r,z,0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} s_2(r,0,t) = 0 \\ s_2(r,m_2,t) = s(r,t) \end{cases} \tag{V-2}$$

上弱透水层

$$\begin{cases} K_1 \frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2} = S_{s_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \\ s_1(r,z,0) = 0 \\ s_1(r,m_2+M+m_1,t) = 0 \\ s_1(r,m_2+M,t) = s(r,t) \end{cases} \tag{V-3}$$

模型的近似解

根据 $s \sim t$ 曲线，抽水可分三个阶段。其中，抽水时间足够短及抽水时间足长时 Hantush 模型有近似解.

记 $S_1 = m_1 S_{s_1}$， $S_2 = m_2 S_{s_2}$。

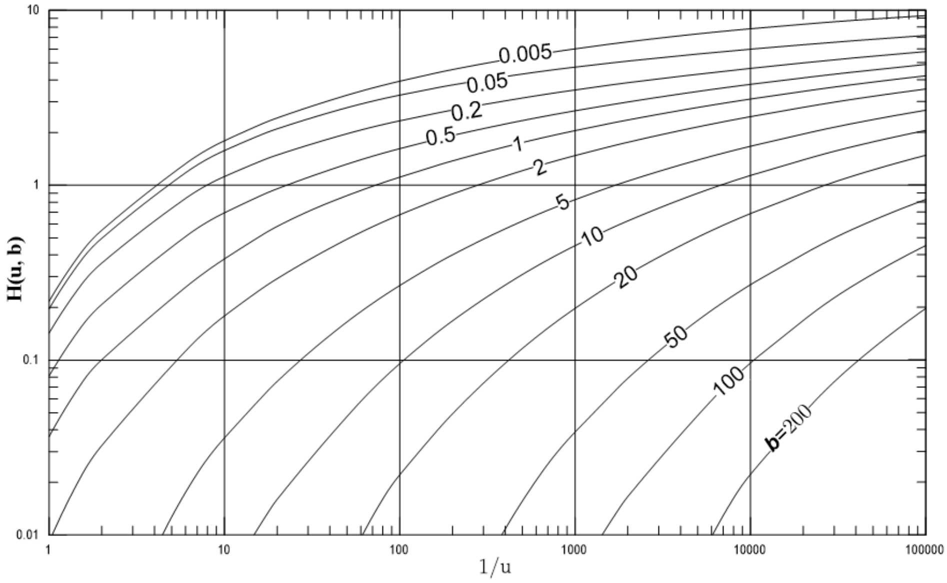
- 抽水初期的解

  $t < \frac{m_1 S_1}{10 K_1}, t < \frac{m_2 S_2}{10 K_2}$ 时，三种模型具有形式相同的近似解：

$$s = \frac{Q}{4\pi T} H(u,\beta) = \int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y} \mathrm{erfc}\left[\frac{\beta\sqrt{u}}{\sqrt{y(y-u)}}\right] dy$$

式中，$u = \frac{r^2 S}{4Tt}$, $B_1 = \sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}}$, $B_2 = \sqrt{\frac{Tm_2}{K_2}}$, $\beta = \frac{r}{4B_1}\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \frac{r}{4B_2}\sqrt{\frac{S_2}{S}}$

标准曲线



- 抽水时间较长的解

  模型 1：$t > 5\frac{m_1 S_1}{K_1}$ 且 $t > 5\frac{m_2 S_2}{K_2}$ 时

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u_1, \alpha)$$

式中

$$u_1 = \frac{r^2\left(S + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{3}\right)}{4Tt}, \quad \alpha = r\sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2}}$$

$W(u_1, a)$ 为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数 (Hantush – Jacob)。

模型 2：$t > 10\frac{m_1 S_1}{K_1}$ 且 $t > 10\frac{m_2 S_2}{K_2}$ 时

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u_2)$$

式中

$$u_2 = \frac{r^2(S + S_1 + S_2)}{4Tt}$$

$W(u_2)$ 为无越流含水层井函数 (Theis)。

模型 3：$t > 5\frac{m_1 S_1}{K_1}$ 且 $t > 10\frac{m_2 S_2}{K_2}$ 时

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u_3, \frac{r}{B_1})$$

式中

$$u_3 = \frac{r^2\left(S + \frac{S_1}{3} + S_2\right)}{4Tt}$$

$W(u_3, \frac{r}{B_1})$ 为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数 (Hantush–Jacob)。

5.3.2 公式讨论

- 当 $B_1, B_2 \to \infty$ 或 $S_1 = S_2 = 0$ 时，公式简化为 Theis 公式：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u), \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

- 对模型 1、模型 3（定水头），当 $K_2 = 0,\ S_1 = S_2 = 0$ 时，

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W\left(u, \frac{r}{B}\right), \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

此为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井流公式。

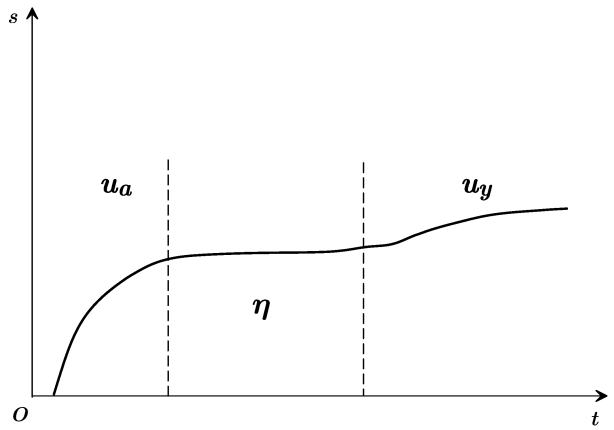
- 由 $H(u, \beta) - \frac{1}{u}$ 标准曲线知，s 随 β 增大而减小，当 $\beta = 0$ 时为 Theis 曲线:
  - S_1、S_2 增大 (β 增大)，s 减小；
  - r 增大 ($\frac{1}{u}$ 减小)，s 减小；
  - B 减小 (β 增大)，s 减小。

5.4 潜水完整井的非稳定流模型

5.4.1 潜水井流特征

- 潜水井流上界面是随时间变化的浸润曲面(自由面)，承压水井流为含水层顶板；
- 潜水井流导水系数 $T=Kh$ 随距离 r 和时间 t 而变化，而承压水井流 $T=KM$ 与r，t 无关；
- 潜水井流降深较大时，垂向分速度不可忽略，井附近为三维流；近水平含水层的承压井流垂向分速度可忽略，可近似地处理为二维流；
- 潜水井抽取的地下水主要来自含水层的重力疏干；重力疏干不能瞬时完成，而是逐渐被排放出来，具有明显地迟后于水位下降的现象，给水度长时间抽水后趋于定值；承压水井抽取的地下水来自含水层贮存量释放，接近于瞬时完成，贮水系数是常数.

潜水井抽水时，观测孔 $s-t$ 曲线有明显的分阶段变化特征。



- 早期：抽水开始后的早期阶段，水位刚刚下降，重力排水还未起作用，只有压力降低引起的弹性释水起作用，$s-t$ 曲线与 Theis 曲线一致，时间可能仅几分钟. 含水层的反应和一个贮水系数小的承压含水层相似；水流主要是水平运动.
- 中期：疏干排水开始起作用，含水层得到补给，水位下降速度明显变缓，$s-t$ 曲线偏离 Theis 曲线，曲线斜率减少，甚至短时间稳定. 含水层的反应类似于一个有越流补给的承压含水层；降落漏斗仍以缓慢速度扩展着.
- 后期：滞后排水作用达到压力平衡，影响逐渐减小，重力排水与水位下降同步，抽水量来自重力排水，$s-t$ 曲线又于 Theis 曲线一致. 给水度所起的作用相当于承压含水层的贮水系数.

潜水井流的研究思路

- 抽水附近按三维流处理；
- 远离抽水井的潜水井流可近似为二维流。

潜水井流的近似处理

远离抽水井的潜水井流可近似为二维流。

- 用 $H_m=\frac{1}{2}(H_0+H)$ 近似地代替含水层厚度：长时间抽水后，迟后排水现象已不明显; 在降深不大的情况下（$s\leq 0.1H_0$，H_0 为抽水前潜水流厚度），可近似用承压井流公式作近似计算

$$s=\frac{Q}{4\pi H_m K}W(u),\ u=\frac{r^2\mu}{4KH_m t}$$

- 采用修正降深值，直接利用 Theis 公式：

$$s'=s-\frac{s^2}{2H_0}=\frac{Q}{4\pi T}W(u),\quad u=\frac{r^2S}{4Tt}(T=KH_0)$$

式中：s' 为修正降深; s 为实测降深; H_0 为潜水流初始厚度.

潜水完整井流模型分类

1. 考虑井附近流速垂直分量的第一潜水井流 Boulton 模型；

2. 考虑迟后排水的 Boulton 第二潜水井流模型；
3. 既考虑流速垂直分量又考虑含水层弹性释水的 Neumann 模型.

本课程介绍后两种模型。

5.4.2 考虑迟后疏干的的 Boulton 模型

Boulton 假设

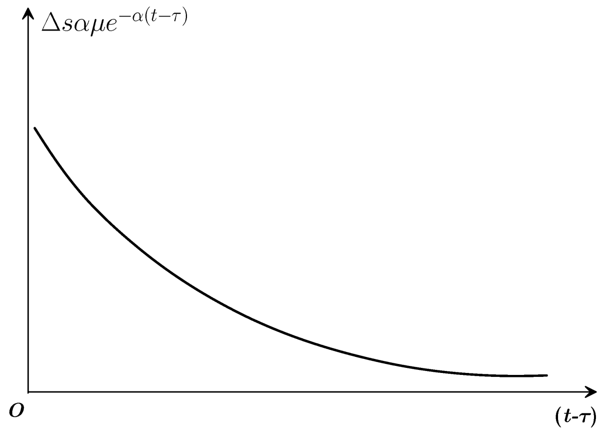
根据抽水过程中降深---时间曲线特征, Boulton 提出了考虑迟后疏干的计算方法.

假设 $\tau, \tau+\Delta\tau$ 时间段抽水，潜水面下降了 Δs. 抽出水量由两部分组成：

- 弹性释水放出水量：水位下降 Δs 时单位面积含水层弹性释水为$S \cdot \Delta s \cdot 1$；
- 迟后疏干排出水量：水位下降Δs时，迟后疏干排出水量假设为：

$$\mu \cdot \Delta s \cdot 1 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}$$

式中：α — 经验系数.



> 用负指数处理迟后现象。

Boulton 假设合理性

- 单位面积含水层排水量 $\mu \cdot \Delta s \cdot 1 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}$ 与 $t-\tau$ 关系符合一般经验，时间间隔越长，排出的水量越小.
- τ 时刻之后，若 $\Delta s=1$，则重力排水的总体积为：

$$\int_{\tau}^{\infty} \mu \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} dt=\mu$$

等于含水层的给水度，满足水量均衡条件，符合实际情况；

- τ, t 时间段的迟后排水总量为：

$$\int_{\tau}^{t} \mu \cdot \Delta s \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha(t-\tau)} dt=\mu \cdot \Delta s \cdot\left[1-e^{-\alpha(t-\tau)}\right]$$

> 当 $t>\tau$ 时，有迟后效应; 若 α 大，则排出水量大，迟后性小; $1/\alpha$ 称为延迟指数.

迟后疏干出水量的表示

5 理想条件下的完整井非稳定流模型

在抽水过程中从 0 至 t 时刻，水位下降了 s. 单位面积含水层的疏干水量 q 可表示为 n 个$\Delta\tau=\tau_i-\tau_{i-1}$ 对应降深为 $\Delta s_i=s_i-s_{i-1}$ 水量的叠加.

当 $n\to\infty$ 时

$$
\begin{aligned}
q&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu\Delta s_i\alpha e^{-\alpha(t-\tau_i)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu\frac{\Delta s_i}{\Delta\tau_i}\alpha e^{-\alpha(t-\tau_i)}\Delta\tau_i\\
&=\int\limits_0^t\mu\frac{\partial s}{\partial\tau}\alpha e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau
\end{aligned}
$$

Boulton 模型假设

- 均质各向同性，隔水底板水平侧向无限延伸的含水层；
- 初始水面水平；
- 完整井，井径无限小，定流量抽水，降深 $s\ll H_0$；
- 水流服从 Darcy 定律；
- 抽水时，含水层中的水不能瞬时排出，存在着迟后现象.

Boulton 模型的数学表示

$$
\begin{cases}
T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=S\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial s}{\partial t}e^{-\alpha(t-\tau)}\mathrm{d}\tau & \\
s(r,0)=0 & \\
s(\infty,t)=0 & t>0\\
\lim\limits_{r\to 0}\left(r\dfrac{\partial s}{\partial r}\right)=-\dfrac{Q}{2\pi T} & t>0
\end{cases}
\tag{VI}
$$

Boulton 模型的解

$$
s=\frac{Q}{4\pi T}\int\limits_0^\infty\frac{2}{x}\left\{1-e^{-u_1}\left[\cosh(u_2)+\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2}\sinh(u_2)\right]\right\}J_0\left(\frac{r}{\nu D}x\right)dx
$$

式中,

$$
\begin{aligned}
&u_1=\tfrac{\alpha t\eta(1+x^2)}{2}, && u_2=\tfrac{\alpha t\sqrt{\eta^2(1+x^2)^2-4\eta x^2}}{2}\\
&\eta=\tfrac{S+\mu}{S}, && \nu=\sqrt{\tfrac{\eta-1}{\eta}}=\sqrt{\tfrac{\mu}{S+\mu}}\\
&D=\sqrt{\tfrac{T}{\alpha\mu}}
\end{aligned}
$$

D 为疏干因素(量纲为L)，$\sinh(u)=\frac{e^u-e^{-u}}{2}$， $\cosh(u)=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$为双曲函数.

Boulton 模型的简化形式

当 $\eta\to\infty$ 时，即 $\mu\gg S$ 时，Boulton 解可简化

$$
S=\frac{Q}{4\pi T}\int\limits_0^\infty\frac{2}{x}\left\{1-\frac{1}{1+x^2}e^{-\frac{\alpha t x^2}{1+x^2}}-\frac{x^2}{1+x^2}e^{-\alpha\eta t(1+x^2)}\right\}J_0\left(\frac{r}{D}x\right)dx
$$

将Boulton 解进一步简化：

（1）当 t 相当小（抽水初期）：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\int_{u_a}^{\infty}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-y-\frac{r^2}{4D^2y}}dy=\frac{Q}{4\pi T}W(u_a,\frac{r}{D})$$

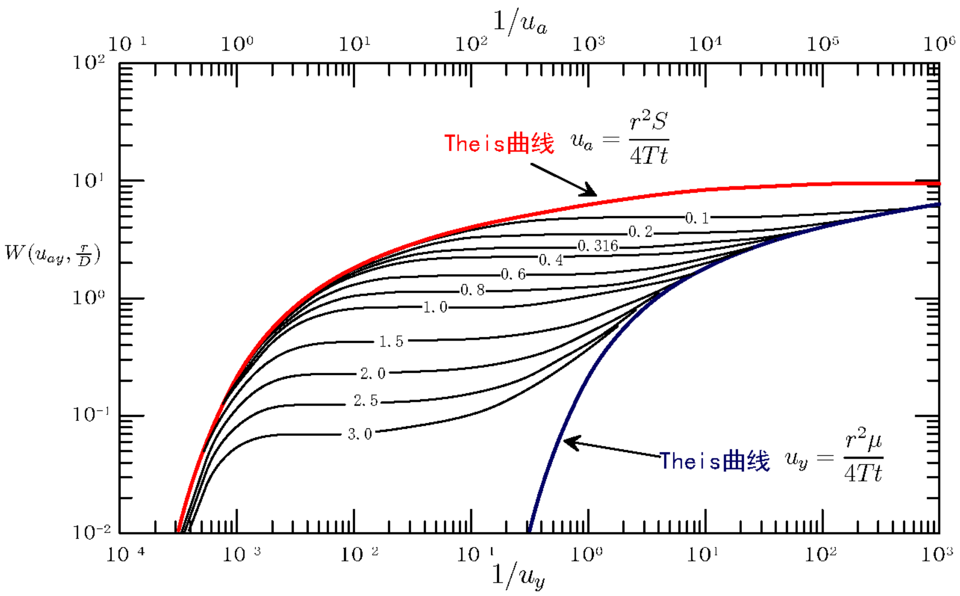
（2）当 t 很大（抽水延续时间较长）：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^{\infty}\frac{2}{x}\left\{1-\frac{1}{1+x^2}e^{-\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{u_y}\frac{r^2}{4D^2}}\right\}J_0\left(\frac{r}{D}x\right)dx=\frac{Q}{4\pi T}W(u_y,\frac{r}{D})$$

式中, $W\left(u_{ay},\frac{r}{D}\right)$ 为潜水含水层中完整井的井函数. 抽水早期，$u_{ay}=u_a=\frac{r^2S}{4Tt}$；抽水后期，$u_{ay}=u_y=\frac{r^2\mu}{4Tt}$.

Boulton 模型标准曲线

在双对数纸上绘制标准曲线，$W(u_{ay},\frac{r}{D})$ 为纵坐标，$\frac{1}{u_a}$ 为横坐标作 A 组曲线，$\frac{1}{u_y}$ 为横坐标作 B 组曲线，然后用切线联 A、B 组曲线.



- 井函数曲线组反映了迟后排水的影响. 抽水初期，以弹性释水为主，水位降深同 A 组 Theis 曲线吻合.
- 持续抽水，迟后重力排水发生影响后偏离 Theis 曲线，下降速度变小，并随的 r/D 不同，以不同方式向水平线趋近.
- 抽水后期，迟后重力排水影响减弱，下降速度由小变大，曲线斜率增加. 迟后重力排水影响基本结束时又趋向 B 组 Theis 曲线.

Boulton 模型按抽水过程的近似解

- 早期：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_a,\frac{r}{D}\right),\quad u_a=\frac{r^2S}{4Tt}$$

与忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数相同，疏干因素D的作用相当于越流因素 B 的作用. $W(u_a,\frac{r}{D})$ 为潜水含水层 A 组井函数.

- 中期：

$$s=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{D}\right)$$

为忽略弱透水层弹性释水下的越流稳定解.

- 晚期：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_y,\frac{r}{D}\right),\quad u_y=\frac{r^2\mu}{4Tt}$$

$W(u_y,\frac{r}{D})$ 为潜水含水层 B 组井函数.

Boulton 模型讨论

- 早期：当 t 很小时(相当于抽水初期)，与 Hantush–Jacob 公式相同，潜水位下降的过程与越流含水层的过程相同.
- 中期：当 t 很大时(相当于抽水延续时间很长的情况)，与 Theis 公式相同，此时 $\bar{u}=\frac{r^2(S+\mu)}{4Tt}$.
- 晚期：在长时间抽水后，降深可以用 Theis 公式计算.

5.4.3 考虑流速垂直分量和弹性释水的 Neumann 模型

Boulton 延迟疏干模型的缺陷

- 延迟指数 $\frac{1}{\alpha}$ 缺乏明确的物理含义；
- 对确定的潜水含水层，α 不能保证是常数，α 不是一个物性参数；
- 难于解释潜水含水层的释水机制；
- 二维模型，无法解释抽水井附近三维流特征.

Neumann 模型的改进

- 是三维轴对称模型，包含z坐标变化对降深的影响与含水层的各向异性特征；
- 将潜水面作为活动边界，建立了潜水面变动的连续方程；
- 避免了潜水疏干释水所涉及的非饱和带问题；无需物理意义不明的延迟指数 α，克服了 Boulton 延迟疏干模型的缺陷.

Neumann 模型的假设条件

- 含水层均质各向异性，侧向无限延伸，坐标轴和主渗透方向一致，隔水层水平；
- 初始潜水面水平；
- 水流服从 Darcy 定律；
- 完整井，定流量抽水；
- 抽水期间自由面上没有入渗补给或蒸发；潜水面降深和含水层厚度相比小得多.

Neumann 模型的数学表示

$$\begin{cases}K_r\left[\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right]+K_z\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=S_s\frac{\partial s}{\partial t} & t>0,0<r<\infty,0<z<H_0\\ s(r,z,0)=0 & 0<r<\infty\\ s(\infty,z,0)=0 & t>0\\ K_z\frac{\partial}{\partial z}s(r,H_0,t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}s(r,H_0,t) & t>0\\ & 0<r<\infty\\ \lim\limits_{r\to 0}\int_0^{H_0}r\frac{\partial s}{\partial r}\mathrm{d}z=-\frac{Q}{2\pi K_r}\end{cases}\tag{VII}$$

Neumann 模型的解

$$s(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^{\infty}4yJ_0\left(y\beta^{\frac{1}{2}}\right)\left[\omega_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(y)\right]\mathrm{d}y$$

式中

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\cosh(\gamma_0 z_d)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\cosh(\gamma_0)}$$
$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\cosh(\gamma_n z_d)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2+\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\cos(\gamma_n)}$$

γ_0，γ_n 分别为下面两方程的根：

$$\sigma\gamma_0\sinh(\gamma_0)-(y^2-\gamma_0^2)\cosh(\gamma_0)=0,\quad \gamma_0^2<y^2$$
$$\sigma\gamma_n\sin(\gamma_n)+(y^2+\gamma_n^2)\cos(\gamma_n)=0,\quad (2n-1)\frac{\pi}{2}<\gamma_n<n\pi(n\geq 1)$$

Neuman 解有 4 个参数：

$$t_s=\frac{Tt}{Sr^2}(t_y=\frac{Tt}{\mu r^2}),\quad z_d=\frac{z}{H_0},\quad \sigma=\frac{S}{\mu},\quad \beta=\frac{r^2K_z}{H_0^2K_r}$$

记 $K_d=\frac{K_z}{K_r}$， $h_d=\frac{H_0}{r}$，$\beta=K_d/h_d^2$

> z_d 为三维流的参数.

对完整观测井，降深 s 需用沿 z 的平均降深表示，计算公式不变：

$$s(r,t)=\frac{1}{H_0}\int_0^{H_0}s(r,z,t)dz=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^{\infty}4yJ_0(y\beta^{\frac{1}{2}})\left[\omega_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(y)\right]dy$$

其中 ω, ω_n 为

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\tanh(\gamma_0)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\gamma_0}$$
$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\tan(\gamma_n)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2+\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\gamma_n}$$

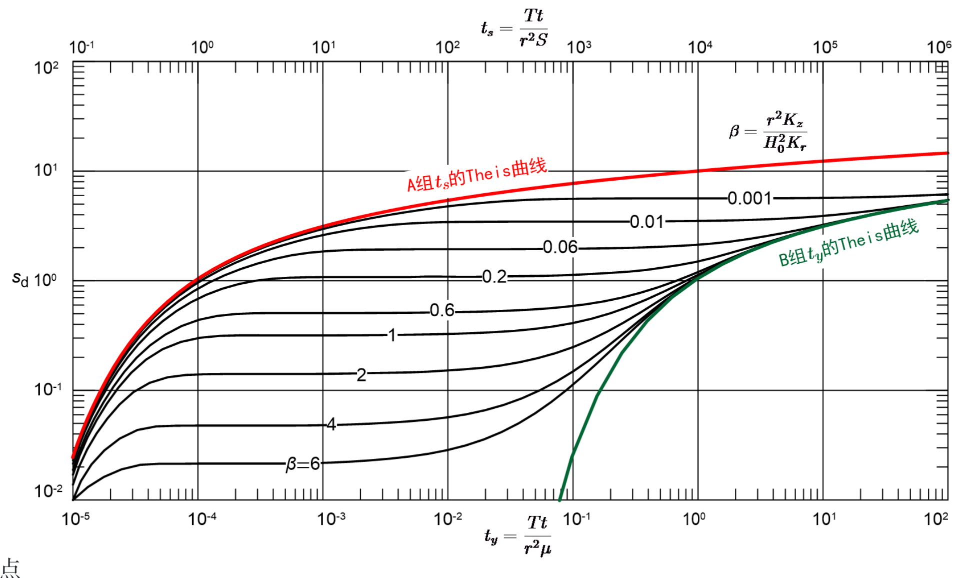
解有 3 个参数 (z 方向的降深平均化)：

$$t_s=\frac{Tt}{Sr^2}(t_y=\frac{Tt}{\mu r^2}),\quad \sigma=\frac{S}{\mu},\quad \beta=\frac{r^2K_z}{H_0^2K_r}$$

Neuman标准曲线

（1）式中包含 3 个独立的无量纲变量，为了便于作图，假设 S 远小于 μ，即 $\sigma=0$。从而可以绘出两组标准曲线：

- 以 β 为参变量，以 t_s 计算无量纲降深 s_d 作出 A 组曲线 $t_s\sim s_d$，坐标 t_s 标在图的上端；
- 以 β 为参变量，t_y 计算无量纲降深 s_d，作出 B 组曲线 $t_y\sim s_d$，坐标 t_y 标在图的下端；
- A 组曲线右边部分和 B 组曲线左边部分都趋近于一组水平的渐近线。当 $\sigma=0$ 时二组标准曲线相距无限远，因此必须采用不同的尺度才能绘在一张图纸上。
- A 组曲线用以分析早期的降深资料；B 组曲线用以分析晚期的降深资料。



Neuman 解的特点

没有重力排水 ($\mu=0$，相当于抽水初期)，可以证明 Neuman 解具有 Theis 解的形式：

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{u_s}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy=\frac{Q}{4\pi T}W(u_s)$$

式中，$u_s=\frac{r^2S}{4Tt}$.

长时间抽水 ($t\to\infty$，相当于没有了弹性释水)，Neuman 解也具有 Theis 解的形式：

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{u_y}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy=\frac{Q}{4\pi T}W(u_y)$$

式中，$u_y=\frac{r^2\mu}{4Tt}$.

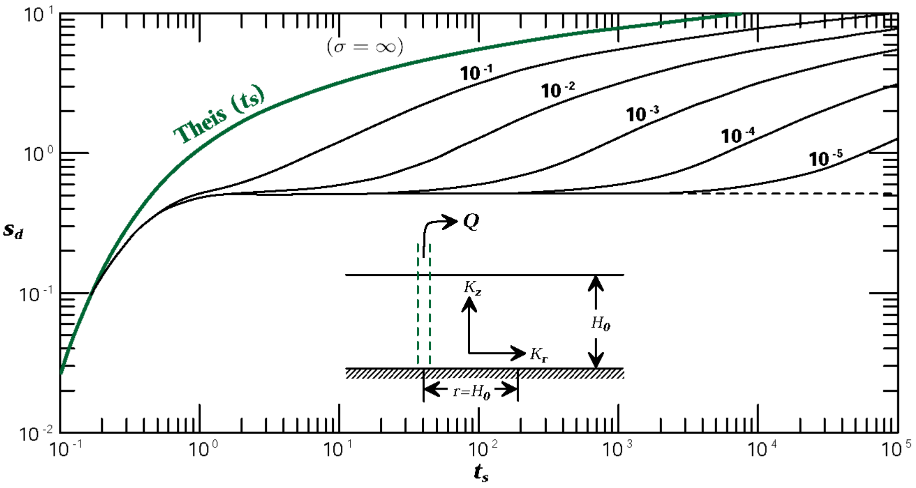
抽水初期，弹性释水起主要作用（$u_s=\frac{r^2S}{4Tt}$）；

抽水后期，重力释水起主要作用（$u_y=\frac{r^2\mu}{4Tt}$）.

井附近降深分析

记 $s_d=\frac{4\pi T}{Qs}$ 为无量纲降深.

- 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 H_0 的含水层底部 ($Z_d=0$，$h_d=1$，$K_d=1$) $s_d\sim t_s$ 曲线：



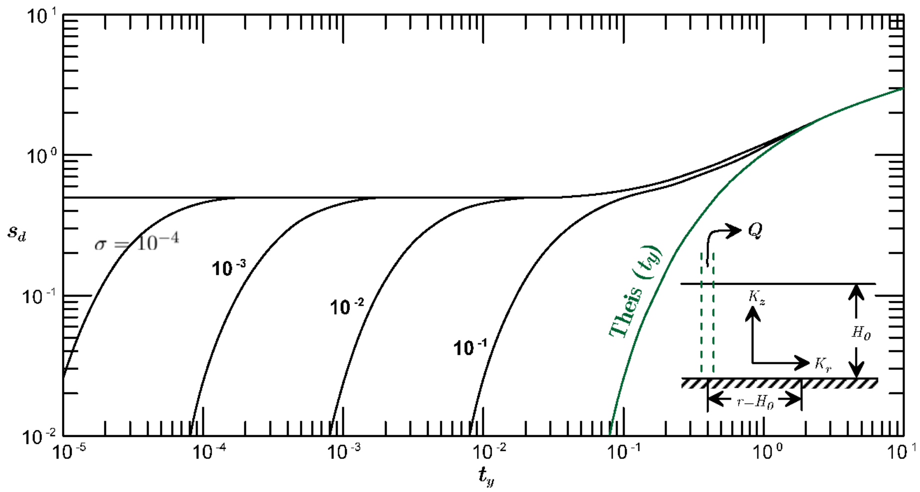
h_d=1, z_d=0, K_d=1

第一阶段（早期）：抽水量来自弹性释水；

第二阶段：重力排水起作用，σ 越小，该阶段越长；

第三阶段：弹性释水影响消失，曲线再次与Theis一致.

- 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 H_0 的含水层底部 $(Z_d = 0,\ h_d = 1,\ K_d = 1)$ $s_d \sim t_y$ 曲线：

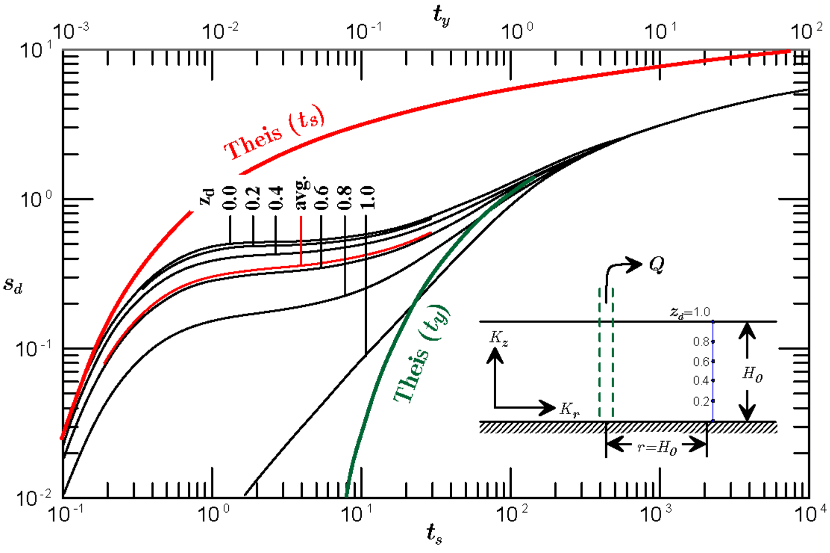


h_d=1, z_d=0, K_d=1

σ 越小，第一阶段时间越短. 尽管潜水含水层的 S_s 比 μ 小得多，弹性释水的影响还不能完全忽略.

- 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 H_0 的含水层断面上 $(h_d = 1,\ K_d = 1)$

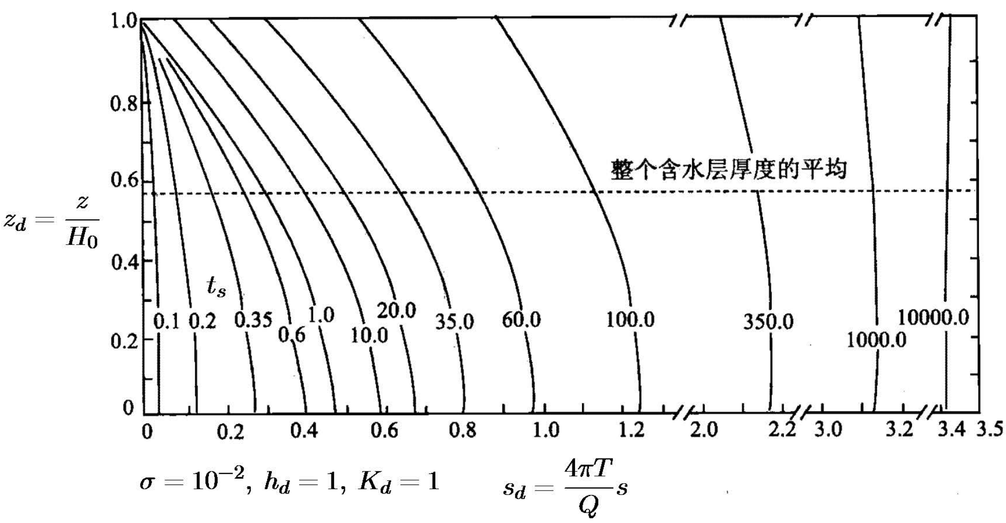
z_d 对降深 s_d 的影响：设 $\sigma = 10^{-2}$.



σ=10^{-2}，h_d=1，K_d=1

抽水的早、中期，潜水面处的降深小于垂向任意一点的降深，此即迟后排水或潜水面反应滞后的现象.

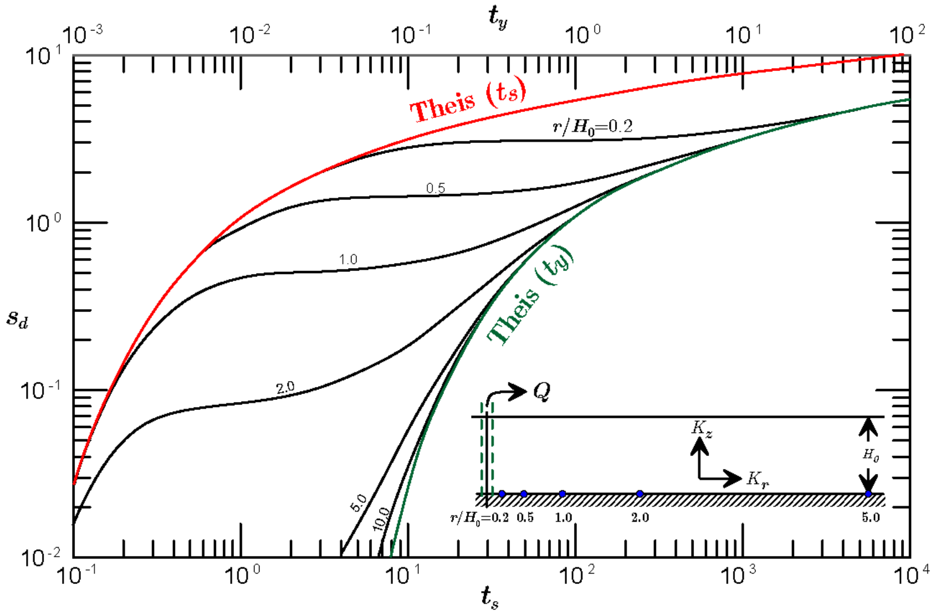
- 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 H_0 的含水层断面上 ($h_d = 1,\ K_d = 1$) 水流状态的变化：设 $\sigma = 10^{-2}$.



抽水的早、晚期，降深分布曲线基本上是垂直的，与 Dupuit 假设一致.

抽水中期，含水层上部存在明显的渗透速度垂直分量.

- 含水层各向同性，观测点位于含水层底部 ($z_d = 0,\ K_d = 1$) $s_d \sim t_{s,y}$ 曲线随 r 的变化: 设 $\sigma = 10^{-2}$.

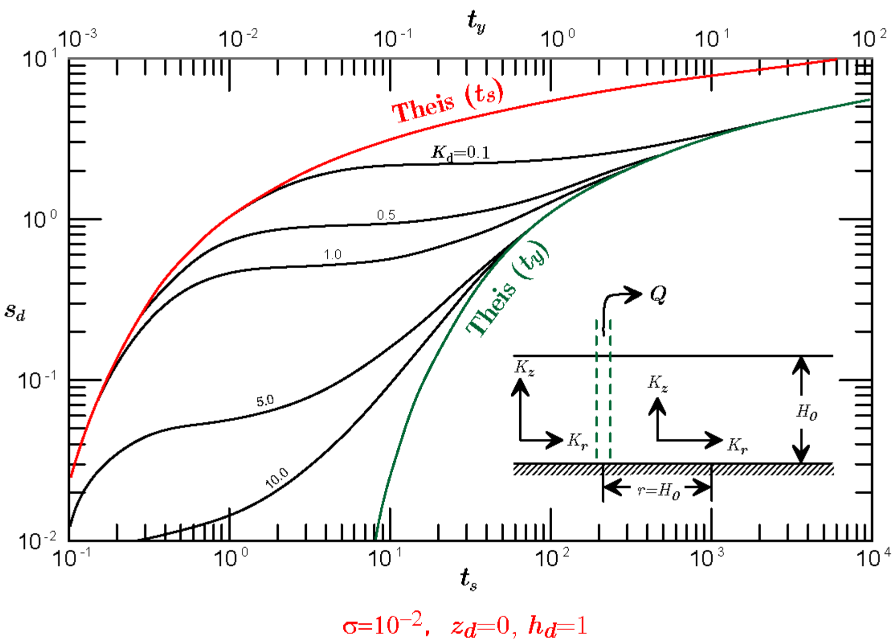


σ=10^{-2}，z_d=0，K_d=1

随着 r 增大，弹性释水作用逐渐减弱，$r > 10H_0$ 的地段可以完全忽略不计；

潜水面滞后反应随 r 增大而减弱，降深–时间曲线的三个阶段仅在 r 不大的情况下才会显现.

- 含水层各向异性，观测点位于距抽水井 H_0 的含水层底部 ($z_d = 0$，$h_d = 1$) 各向异性影响: 设 $\sigma = 10^{-2}$.



σ=10^{-2}，z_d=0，h_d=1

K_d 越小，渗透速度的水平分量越比垂向分量，弹性释水和迟后反应越明显.