附 录

[0. 勘误表 2](#_Toc144910398)

[A. 地下水运动方程的柱坐标形式 4](#_Toc144910399)

[B. Boussinesq方程的线性化 5](#_Toc144910400)

[C. 分离变量法 6](#_Toc144910401)

[C1. 一维扩散方程的定解问题 6](#_Toc144910402)

[C2. 其他定解问题 8](#_Toc144910403)

[D. Bessel 方程与 Bessel 函数 13](#_Toc144910404)

[E. Theis 模型的不同解法 17](#_Toc144910405)

[E1. Bolttzmann 变换法 17](#_Toc144910406)

[E2. Hankel 变换法 19](#_Toc144910407)

[E3. Laplace 变换法 21](#_Toc144910408)

[E4. 总结 23](#_Toc144910409)

[F. Laplace 变换及应用 24](#_Toc144910410)

[F1. Laplace 变换简介 24](#_Toc144910411)

[F2. Laplace变换法求解偏微分方程 28](#_Toc144910412)

[F3. Laplace变换的数值反演 34](#_Toc144910413)

## 0. 勘误表

| 页 | 行 | 列 | 错误 | 更正 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 5 | 1 |  |  |
| 20 | 12 | 20 |  |  |
| 27 | 4 | 6 | 单位宽度的流量 | 总流量 |
| 31 | 9 | -6 |  |  |
| 45 | -1 | -1 |  |  |
| 63 | 4 | 1 | 2.1.1 | 2.2.1 |
| 101 | 1 | -1 |  |  |
| 101 | 3 | 1 |  |  |
| 107 | 1 | 1 |  |  |
| 107 | 2 | 1 |  |  |
| 111 | 1 | 1 | 图4.6标注数据有误 |  |
| 112 | -10 | 1 |  |  |
| 127 | 6 | 1 |  |  |
| 137 | 1 | 1 |  |  |
| 137 | -14 | 1 |  |  |
| 137 | 5 | -7 | 0.144 | 0.114 |
| 137 | 6 | -7 | 0.114 | 0.144 |

64 页第 14 行 （2.37）式更正为下式，并删除 15～17 行：

163 页倒数第 5 行（5.39）式更正为 ：

170 页第 10 行公式更正为：

## 

## A. 地下水运动方程的柱坐标形式

设 的所有二阶偏导数连续，由直角坐标与极坐标的关系：

根据复合函数的求导法则：

同理：

因此

## 

## B. Boussinesq方程的线性化

Boussinesq 方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (b-1) |

* 第一种线性化方法：

如果 变化不大，用平均值 代替 ：

* 第二种线性化方法：

令 ，，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (b-2) |

取平均值 ：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (b-3) |

## 

## C. 分离变量法

### C1. 一维扩散方程的定解问题

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (C-I) |

设 ，代入方程，有

因为 与 为两个独立的自由变量，有

得到两个常微分方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-1) |
|  |  | (c-2) |

方程（c-1）的解：

方程（c-2）与问题（）的边界条件构成常微分方程的边值问题：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-3) |

问题（c-3）的通解为

根据边界条件确定常系数：

为求非零解，必须 ，有

综上，问题 的解为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-4) |

式中，。

* 几个重要积分：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-5) |
|  |  | (c-6) |
|  |  | (c-7) |
|  |  | (c-8) |

* 确定（c-4）的系数 ：

由初始条件有

两边同乘以 ，并从 0 到 积分：

应用公式（c-5），有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-9) |

式中，

### 

### C2. 其他定解问题

问题（）

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (C-II) |

设 ，则 是如下问题的解：

式中，。该问题同问题（）一致，可用分离变量法求解。

* ：

此时，问题（）的解为：

式中，

* 计算系数 ：

记

分两步计算

1. 先计算
2. 再计算系数 ：

无量纲变换

记 ，则

记

有 。

定解问题（）的解简记为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-10) |

* 求 的 VBA 程序：

|  |
| --- |
| Function FF(x,t,nmax)  If t<=0 Then  FF=0#  Else  Pi=3.141592654  FF=1-x  For n=1 To nmax  alpha=n\*Pi  term=-2\*Sin(alpha\*x)\*Exp(-t\*alpha^2)/alpha  FF=FF+term  Next n  End If End Function |

* 问题（）中 ：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (C-III) |

若 为有限值，则

记 , ，有

当 时， , 上式写成积分形式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-11) |

* 几个重要积分：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-12) |
|  |  | (c-13) |
|  |  | (c-14) |
|  |  | (c-15) |
|  |  | (c-16) |

* 公式（c-15）证明：

记

因此， 满足如下方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-17) |

方程（c-17）通解为

并且满足

有

取 ，则有

* 公式（c-16）证明：

（c-15）两边分别对 从 0 到 积分：

即

* 问题（）的解：

由公式（c-15），公式（c-11）变为：

因此，问题 的解为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (c-18) |

## 

## D. Bessel 方程与 Bessel 函数

Bessel 方程 ：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (d-1) |

具有如下形式的解：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (d-2) |

式中， 为第一类贝塞尔函数， 为第二类贝塞尔函数。

修正贝塞尔方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (d-3) |

具有如下形式的解：

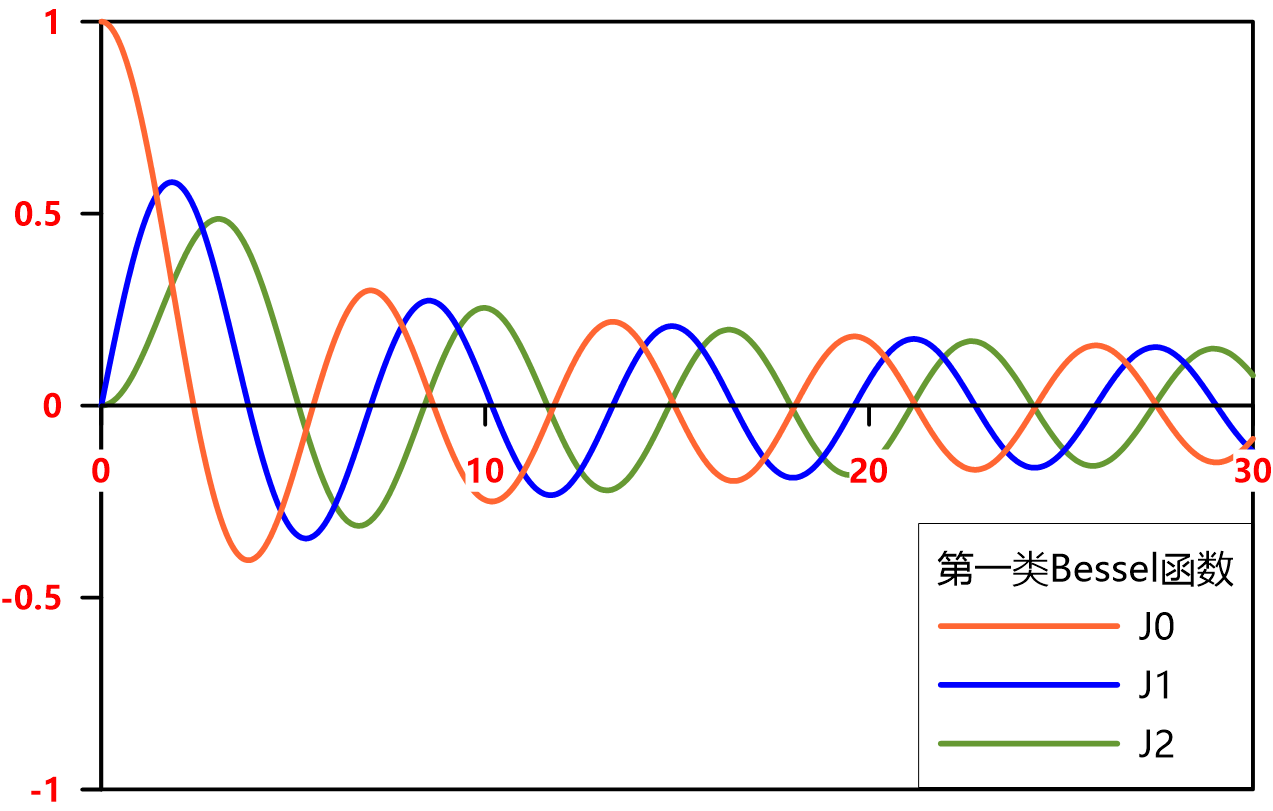
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (d-4) |

式中， 为第一类修正贝塞尔函数， 为第二类修正贝塞尔函数。

贝塞尔函数（Bessel Functions） 是一类特殊函数的总称。

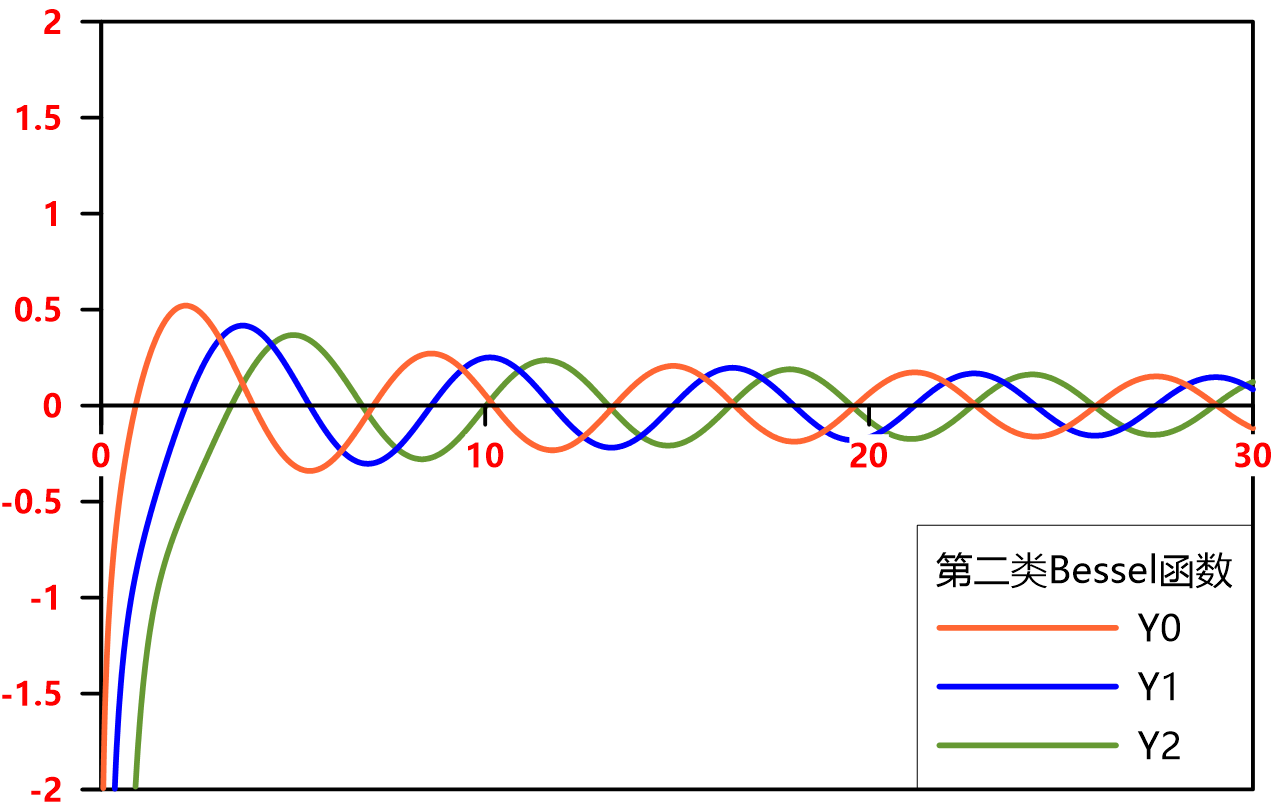
早在 18 世纪中叶，瑞士数学家丹尼尔·伯努利在研究悬链振动时提出了贝塞尔函数的几个正整数阶特例，当时引起了数学界的兴趣。丹尼尔的叔叔雅各布 · 伯努利，欧拉、拉格朗日等数学大师对贝塞尔函数的研究作出过重要贡献。1817 年，德国数学家贝塞尔在研究开普勒提出的三体引力系统的运动问题时，第一次系统地提出了贝塞尔函数的总体理论框架，后人以他的名字来命名了这种函数。

* 第一类贝塞尔函数 的形状：



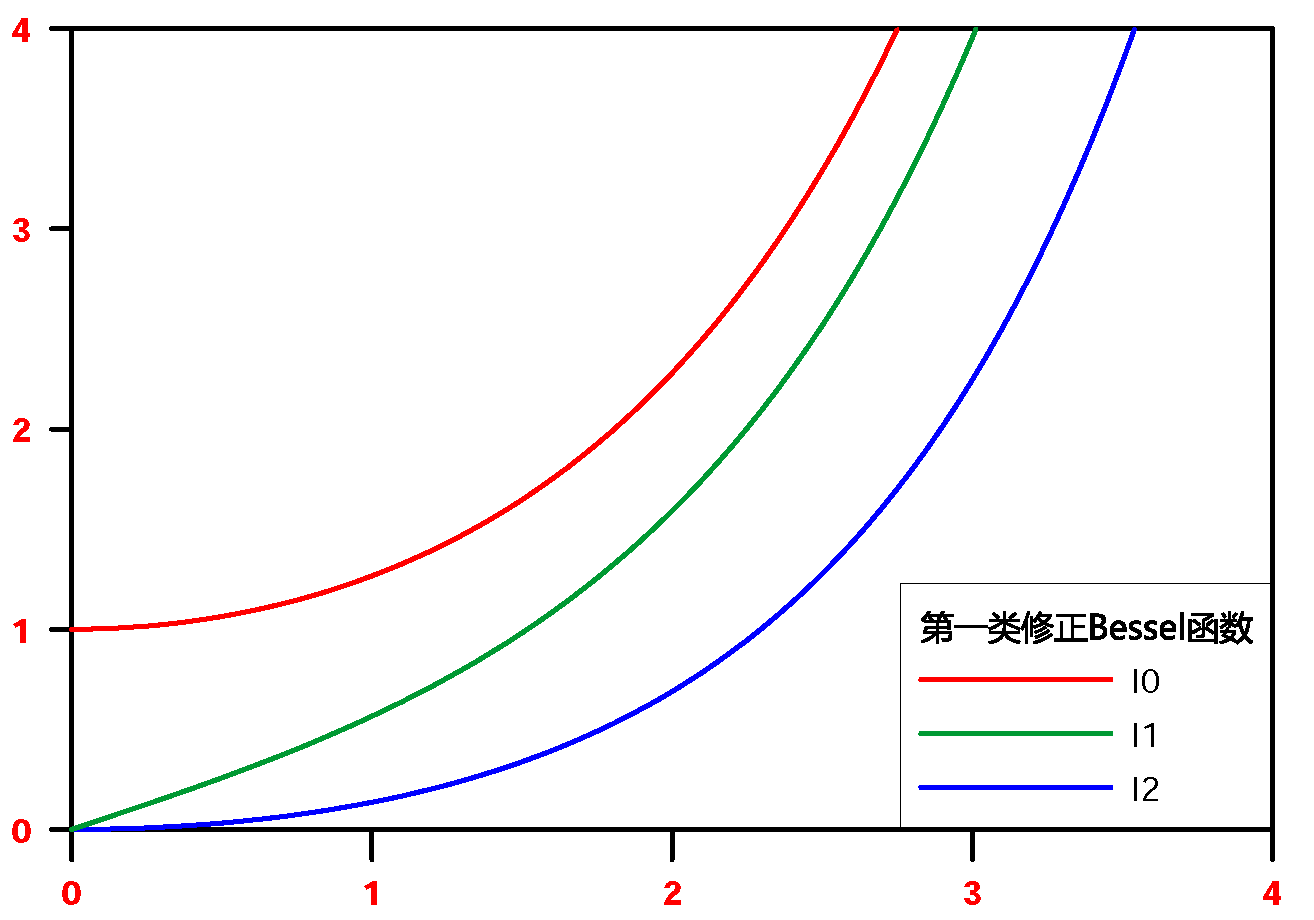
-的形状大致与按 速率衰减的正弦或余弦函数类似，零点不是周期性的，而是随着 的增加零点的间隔会越来越接近周期性。

* 第二类贝塞尔函数 的形状：



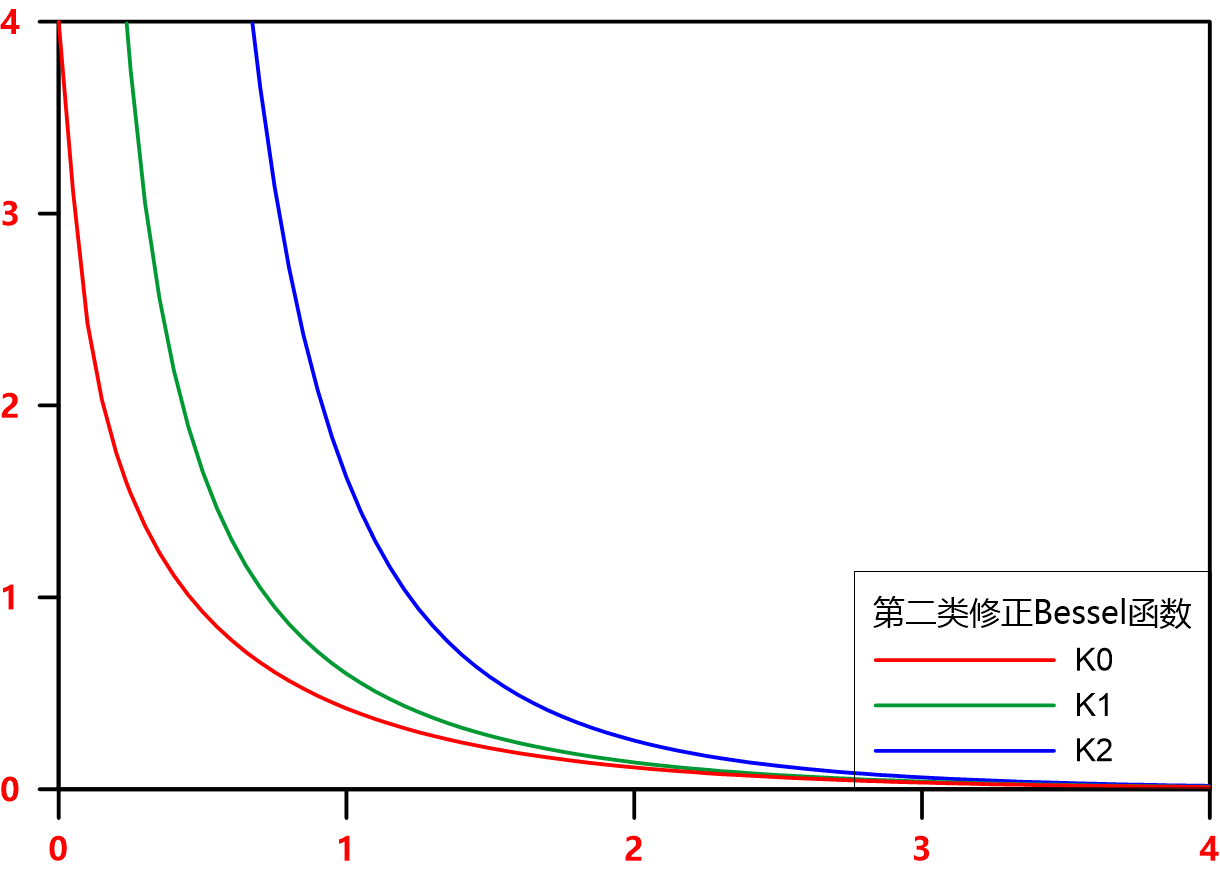
又称诺伊曼函数（Neumann function）， 点是它的无穷奇点。

* 第一类修正贝塞尔函数 的形状：



是指数增长的。

* 第二类修正贝塞尔函数 的形状：



是指数衰减的。

* 贝塞尔函数的性质：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

* 贝塞尔函数的渐进性质：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## 

## E. Theis 模型的不同解法

记 ，数学模型：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (E-I) |

式中，。

### E1. Bolttzmann 变换法

引入变量 ，则有

依据求导的链式法则，有

代入偏微分方程：

整理得：

由初始条件与边界条件：

原定解问题变为：

记，方程变为：

分离变量：

等式两边同时积分：

即

由边界条件

得

因此

两边同时积分（注意对应的积分限），有

式中，

### E2. Hankel 变换法

记

为 的 0 阶 Hankel 变换， 为第一类零阶 Bessel 函数。

将方程两端同乘以 ，并从 0 到 对 积分：

等式右端：

等式左端分部积分：

式中使用了 Bessel 函数的如下性质：

Hankel 变换将原定解问题化为常微分方程的初值问题：

其解为：

通过 Hankel 逆变换求 ：

记

对 求导：

式中使用了 Bessel 函数的如下性质：

满足如下的常微分方程：

分离变量：

两边积分：

因此

原问题的解

做变量代换，令

当 时，，当 时，。因此

式中，。

### E3. Laplace 变换法

偏微分方程：

记

对方程两边做 Laplace 变换：

利用初始条件 ，有：

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

当 时，。又 时，，有 。

因此

由内边界条件（抽水井），有

得

取 ，根据 Bessel 函数的性质，，有

由 Laplace 逆变换

及 Laplace 变换性质

取 ，有

### E4. 总结

| Bolttzmann变换法 | Hankel 变换法 | Laplace 变换法 |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 边值问题 | 初值问题 | 边值问题 |
|  |  |  |
|  | Hankel 逆变换 | Laplace 逆变换 |
|  |  |  |

## 

## F. Laplace 变换及应用

### F1. Laplace 变换简介

**Laplace 变换定义**

设函数 是定义在 上的实值函数，如果对于复参数 ，积分 在复平面 的某一区域内收敛，则称 为 的 Laplace 变换，记为

相应地，称 为 的 Laplace 逆变换，记为

**简单函数的 Laplace 变换**

**特殊函数的 Laplace 变换**

* Heaviside 阶跃函数 (Heaviside step function)：

Laplace变换：

* 函数 (Dirac Delta function) 或脉冲函数 (Impulse function)：

也可表示为

函数性质:

Laplace 变换:

即

**Laplace 变换存在定理**

设函数 满足：

1. 在任何有限区间上分段连续；
2. 即存在常数 及 ，使得 。

则象函数 在半平面上一定存在且解析。

**Laplace 变换性质**  
设

* 线性性质

设 为常数，则有

* 相似性质

设 为任一正实数，则

* 延迟性质

设 时，，则对任一非负实数 有

* 位移性质

设 为任一复常数，则

* 微分性质
* 积分性质

设函数满足： 时 ，则定义卷积如下：

由上式给出的卷积满足交换律、结合律及分配律等性质。

* 卷积定理

**Laplace 变换与逆变换简表**

| 序号 |  |  |
| --- | --- | --- |
| (1) |  |  |
| (2) |  |  |
| (3) |  |  |
| (4) |  |  |
| (5) |  |  |
| (6) |  |  |
| (7) |  |  |
| (8) |  |  |
| (9) |  |  |
| (10) |  |  |
| (11) |  |  |
| (12) |  |  |
| (13) |  |  |
| (14) |  |  |
| (15) |  |  |
| (16) |  |  |
| (17) |  |  |
| (18) |  |  |
| (19) |  |  |

表中： — 单位阶跃函数； — 单位阶跃函数； — 误差函数； — 余误差函数； — 第二类零阶修正 Bessel 函数； — 指数积分； — 欧拉常数.

### F2. Laplace变换法求解偏微分方程

利用性质：，消除变量对t的导数。



* 一维问题（）：

对方程做 Laplace 变换，记：

有

上述方程的通解为

对边界条件做 Laplace 变换：

根据边界条件，有 ， 因此

根据 Laplace 变换简表公式（11）：

取 , 得

* 一维问题（）：

对方程做 Laplace 变换，记

有

上述方程的通解为

对边界条件做 Laplace 变换：

根据边界条件，有 , 因此

根据 Laplace 变换简表公式（13）

取 ，得

式中，.

* 二维问题（）：

记 ，数学模型：

式中，。

记

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 ，得：

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

对边界条件做 Laplace 变换：

根据边界条件，有 ， 因此

设 ，因为 ，所以有

根据 Laplace 变换简表公式（16）：

及 Laplace 变换相似性：

有

取 ：

* 二维问题（）：Jacob-Lohman 公式

做无量纲变量代换，记 ，定解问题变为

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 ，得：

此为 0 阶修正 Bessel 方程，通解为：

对边界条件做 Laplace 变换：

根据边界条件，有 ，因此

记

则有

式中， 称为降深函数。

记 为自流井流量， 为 的 Laplace 变换。有

记

有

式中， 称为流量函数，。

* 二维问题（）：Hantush-Jacob 公式

数学模型：

式中，。

对方程两边做 Laplace 变换，并使用初始条件 ，得：

同 Theis 模型，其解为：

记 ，由 Laplace 变换简表公式（15）：

及相似性，有

根据位移性质，有

利用卷积计算 ：

做变量代换 ：

### F3. Laplace变换的数值反演

**Stehfest 算法**

设 为函数 的 Laplace 变换。Stehfest 算法公式如下：

式中， 为 Stehfest 系数，按下式计算：

|  |
| --- |
| ' n shuld not exceed about 20, and n = 10 is probably sufficient ' for most applications. ' Note that n must be an even integer and that t = time. Function Lapinv(n,t)  n=WorksheetFunction.Even(n)  Lapinv=0#  For i=1 To n  Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)\*Transform(i\*Log(2)/t)  Next i  Lapinv=Lapinv\*Log(2)/t End Function  Function Stehcoef(i,n)  M=WorksheetFunction.Round(n/2,0)  upperlimit=WorksheetFunction.Min(i,M)  lowerlimit=WorksheetFunction.RoundDown((i+1)/2,0)  Stehcoef=0#  For K=lowerlimit To upperlimit  num=Fact(2\*K)\*K^M  denom=Fact(M-K)\*Fact(K)\*Fact(K-1)\*Fact(i-K)\*Fact(2\*K-i)  Stehcoef=Stehcoef+num/denom  Next K  Stehcoef=Stehcoef\*(-1)^(i+M) End Function  Function Fact(x)  Fact=WorksheetFunction.Fact(x) End Function  Function Transform(p) 'Theis解  Transform=2\*WorksheetFunction.BesselK(2\*Sqr(p),0)/p End Function |

* Theis解的反演

式中，。取 ，得

由 Laplace 变换性质

有

取 ，即 ，可以计算出 。

|  |
| --- |
| Function Transform(p)  Transform=2\*WorksheetFunction.BesselK(2\*Sqr(p),0)/p End Function ' Function Lapinv(n,t)  n=WorksheetFunction.Even(n)  Lapinv=0#  For i=1 To n  Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)\*Transform(i\*Log(2)/t)  Next i  Lapinv=Lapinv\*Log(2)/t End Function |

* 定降深井模型 (Jacob-Lohman) 反演

记

有

记 ，得

式中， 称为降深函数。

|  |
| --- |
| Function Transform(p,r)  Transform=WorksheetFunction.BesselK(r\*Sqr(p),0)/WorksheetFunction.BesselK(Sqr(p),0)/p End Function ' Function Lapinv(n,t,r)  n=WorksheetFunction.Even(n)  Lapinv=0#  For i=1 To n  Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)\*Transform(i\*Log(2)/t,r)  Next i  Lapinv=Lapinv\*Log(2)/t End Function |

记 为自流井流量，有

式中， 称为流量函数，。

|  |
| --- |
| Function Transform(p)  s=Sqr(p)  Transform=WorksheetFunction.BesselK(s,1)/WorksheetFunction.BesselK(s,0)/s End Function ' Function Lapinv(n,t)  n=WorksheetFunction.Even(n)  Lapinv=0#  For i=1 To n  Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)\*Transform(i\*Log(2)/t)  Next i  Lapinv=Lapinv\*Log(2)/t End Function |

* 越流含水层完整井模型 (Hantush-Jacob) 反演

式中，。取 ，有：

由 Laplace 变换的相似性：

得

|  |
| --- |
| Function Transform(p,beta)   Transform=2\*WorksheetFunction.BesselK(Sqr(4\*p+beta^2),0)/p  End Function  '  Function Lapinv(n,t,beta)   n=WorksheetFunction.Even(n)   Lapinv=0#   For i=1 To n   Lapinv=Lapinv+Stehcoef(i,n)\*Transform(i\*Log(2)/t,beta)   Next i   Lapinv=Lapinv\*Log(2)/t  End Function |