5 理想条件下的完整井非稳定流模型

[yanggy1010@126.com](mailto:yanggy1010@126.com)

[5.1 承压水完整井的非稳定流模型 2](#_Toc144916157)

[5.1.1 Theis 模型 2](#_Toc144916158)

[5.1.2 Theis 公式的近似形式 3](#_Toc144916159)

[5.1.3 Theis 公式讨论 5](#_Toc144916160)

[5.1.4 变流量的计算公式 8](#_Toc144916161)

[5.2 有越流补给的半承压水完整井非稳定流模型 9](#_Toc144916162)

[5.2.1 Hantush-Jacob 模型 9](#_Toc144916163)

[5.2.2 Hantush-Jacob 公式讨论 10](#_Toc144916164)

[5.3 有弱透水层弹性释水补给的半承压水完整井非稳定流模型 12](#_Toc144916165)

[5.3.1 Hantush 模型 12](#_Toc144916166)

[5.3.2 公式讨论 16](#_Toc144916167)

[5.4 潜水完整井的非稳定流模型 18](#_Toc144916168)

[5.4.1 潜水井流特征 18](#_Toc144916169)

[5.4.2 考虑迟后疏干的的 Boulton 模型 19](#_Toc144916170)

[5.4.3 考虑流速垂直分量和弹性释水的 Neumann 模型 24](#_Toc144916171)

## 

## 5.1 承压水完整井的非稳定流模型

### 5.1.1 Theis 模型

* 含水层均质各向同性、等厚, 侧向无限延伸, 产状水平;
* 抽水前天然状态下水力坡度为零;
* 完整井定流量抽水, 井径无限小;
* 含水层中水流服从 Darcy 定律;
* 水头下降引起的地下水从贮存量中的释放是瞬时完成的.

抽水后会形成以井轴为对称轴的降落漏斗. 如图 4.1 建立坐标系，记

**数学模型**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (I) |

**求解方法**：可用分离变量法、Laplace 变换、Hankel 变换或 Boltzmann 变换法求解.

式中, .

上式称为 Theis 公式, 称为 Theis 井函数：

式中, 、, 称为指数积分.

地下水向抽水井的运动, 用柱坐标表示微分方程时, 推荐使用 Laplace 变换法求解, 可用 Python 编程计算.



* 做 Laplace 变换, 相空间的解包含修正 Bessel 函数. scipy.special 模块中有相应函数;
* 做 Laplace 逆变换, mpmath 模块中有 invertlaplace 函数 (talbot, stehfest, dehoog 三种算法);
* 也可直接编程计算.

### 5.1.2 Theis 公式的近似形式

**的级数形式**

除前三项外为交错级数; 很小时, 用 代替 的截断误差不超过 .

|  | 井函数相对误差 |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

很小时 , 有

上式称为 Jacob 公式.

**的多项式逼近**

* 时

式中

* 时

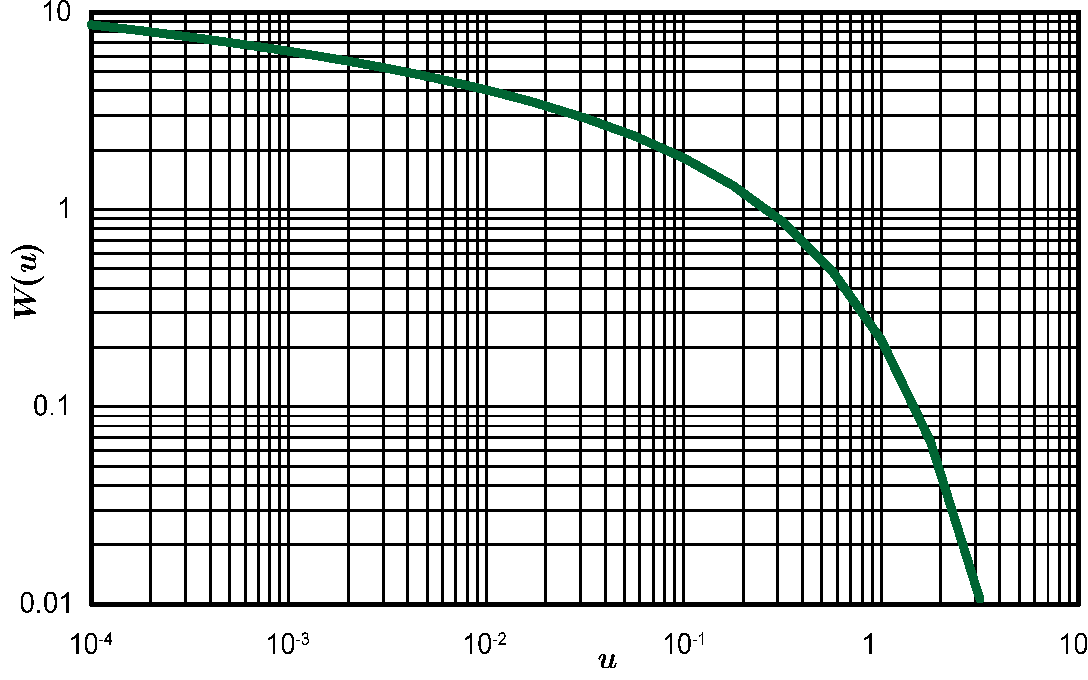
式中

**求 的VBA程序**

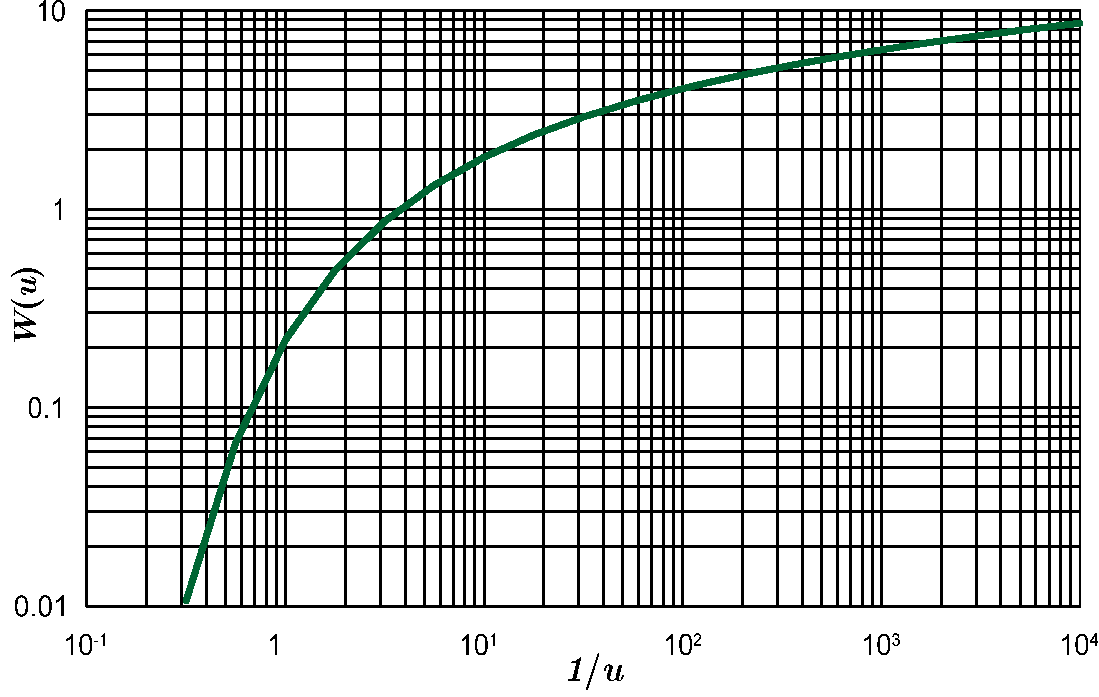
|  |
| --- |
| 'To compute the exponential integral W(x) for 0<x<infinity.  Function W(x)  A0 = -0.57721566  A1 = 0.99999193  A2 = -0.24991055  A3 = 0.05519968  A4 = -0.00976004  A5 = 0.00107857  B0 = 0.2677737343  B1 = 8.6347608925  B2 = 18.059016973  B3 = 8.5733287401  C0 = 3.9584969228  C1 = 21.0996530827  C2 = 25.6329561486  C3 = 9.5733223454   If x <= 1 Then  W = -Log(x) + A0 + x \* (A1 + x \* (A2 + x \* (A3 + x \* (A4 + x \* A5))))  Else  P1 = B0 + x \* (B1 + x \* (B2 + x \* (B3 + x)))  P2 = C0 + x \* (C1 + x \* (C2 + x \* (C3 + x)))  W = (P1 / P2) \* Exp(-x) / x  End If End Function |

**标准曲线**

曲线



曲线



的单调性与 一 致，因此经常使用的标准曲线为 曲线。

由 可以看出，对于固定的 ，尽管含水层参数不同，但 有可能相同，因而在标准曲线上对应同一个点。

对于固定的 ，不同的含水层参数可能对应于标准曲线上的不同点。如取 ， 分别取 、，则 分别为1、0.001，相差两个对数周期。

### 5.1.3 Theis 公式讨论

标准曲线 单调性与 一致, 比较常用.

**（1）降深变化规律**

* 同一时间观测 ( 固定): , .
* 同一柱状断面( 固定): , .

**（2） 正确性**

* 数学意义上是正确的！
* 从时间无限性与空间有限性考虑, 是不可能发生的！

**（3）等水头线方程**

当 很小时,

给定时刻 , 等水头线是以井为圆心的同心圆.

**（4）水头下降速度**

时,

* 给定时刻 : 近处水头降速大, 远处降速小.
* 抽水后期: 在一定范围内水位大致等幅下降.

令 可求出**拐点**：。

处的观测孔:

* 时, 水头下降速度随 逐渐增大;
* 时, 水头下降速度随 逐渐减小;
* 时 最大.

**拐点处降深**

**（5）柱面渗透速度**

式中: 为稳定流渗透速度. 时距抽水井 处的观测孔达到似稳定状态.

**距抽水井 处柱状过水断面流量**

* 时, ;
* 时, .

离抽水井越近, 柱状过水断面流量大. 抽水时间足够长 () 各柱状断面的流量近似相等.

**（6）类似Thiem公式的形式**

长时间抽水 () 后 Jacob 公式成立. 对于 、 处的观测孔

相减得

**（7）无限小井径假设**

时 的误差不超过 .

**（8）零天然水力坡度假设**

地下水水力坡度一般都比较小, 水力坡度为零的假设对计算结果影响不大; 特殊情况下还可以应用叠加原理进行处理.

**（9）影响半径**

无限延申的无越流补给承压含水层中的抽水井，抽水时间越长，降落漏斗范围越大。抽水影响范围可借助于 “影响半径” 进行分析。  
将 Jacob 公式改写为

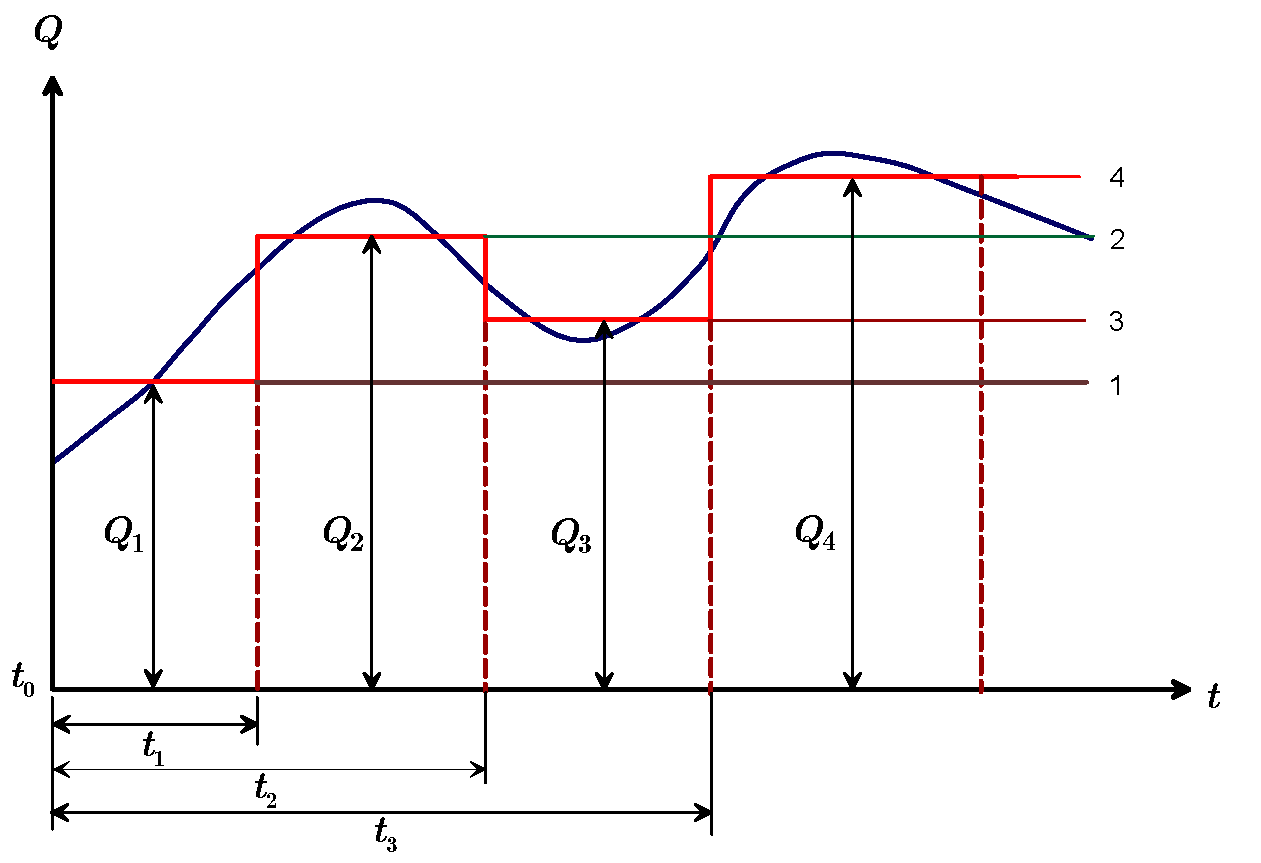
比照 Dupuit 公式，形式上影响半径为 . Cheng, A.H.-D 以总抽水量 99% 来自含水层的弹性释水为标准，得出影响半径为 .

这两个公式尽管有差异，但都可用来评估长时间抽水的影响范围。

1. Cheng, A.H.-D., Multilayered Aquifer Systems-Fundamentals and Applications, Marcel Dekker, New York/Basel, 384 p., 2000.

### 5.1.4 变流量的计算公式

流量变化时的计算公式 将流量曲线概化为阶梯曲线; 每一个阶梯视为定流量, 用叠加原理 (时间叠加) 求出总降深。



如图, 概化为 4 个阶梯, 分解成 4 个问题:

1. 以 抽水;
2. 以 抽水;
3. 以 注水;
4. 以 抽水.

各阶梯流量抽水引起的降深:

时刻 刻 t 的 降 深:

设共有 个时段, 且 , . 当 时

如果每个时段抽水延续时间足够长,

, Jacob 公式成立

## 5.2 有越流补给的半承压水完整井非稳定流模型

**越流系统**

包括越流含水层、弱透水层和相邻的含水层的地下水系统.

**越流系统的类型**

* 第一越流系统：忽略弱透水层弹性释放、忽略补给层水位变化;
* 第二越流系统：考虑弱透水层弹性释放、忽略补给层水位变化;
* 第三越流系统：忽略弱透水层弹性释放、考虑补给层水位变化.

### 5.2.1 Hantush-Jacob 模型

**模型假设条件:** 本节主要讨论第一越流系统.

* 每一层都是均质各向同性, 产状水平、等厚, 侧向无限延伸;
* 水流服从 Darcy 定律;
* 抽水过程中相邻含水层水头不变;
* 忽略弱透水层弹性释水, 弱透水层中水流为垂向一维流;
* 抽水含水层天然水力坡度为零, 抽水后形成平面径向流;
* 完整井定流量抽水, 井径无限小.

**数学模型**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (II) |

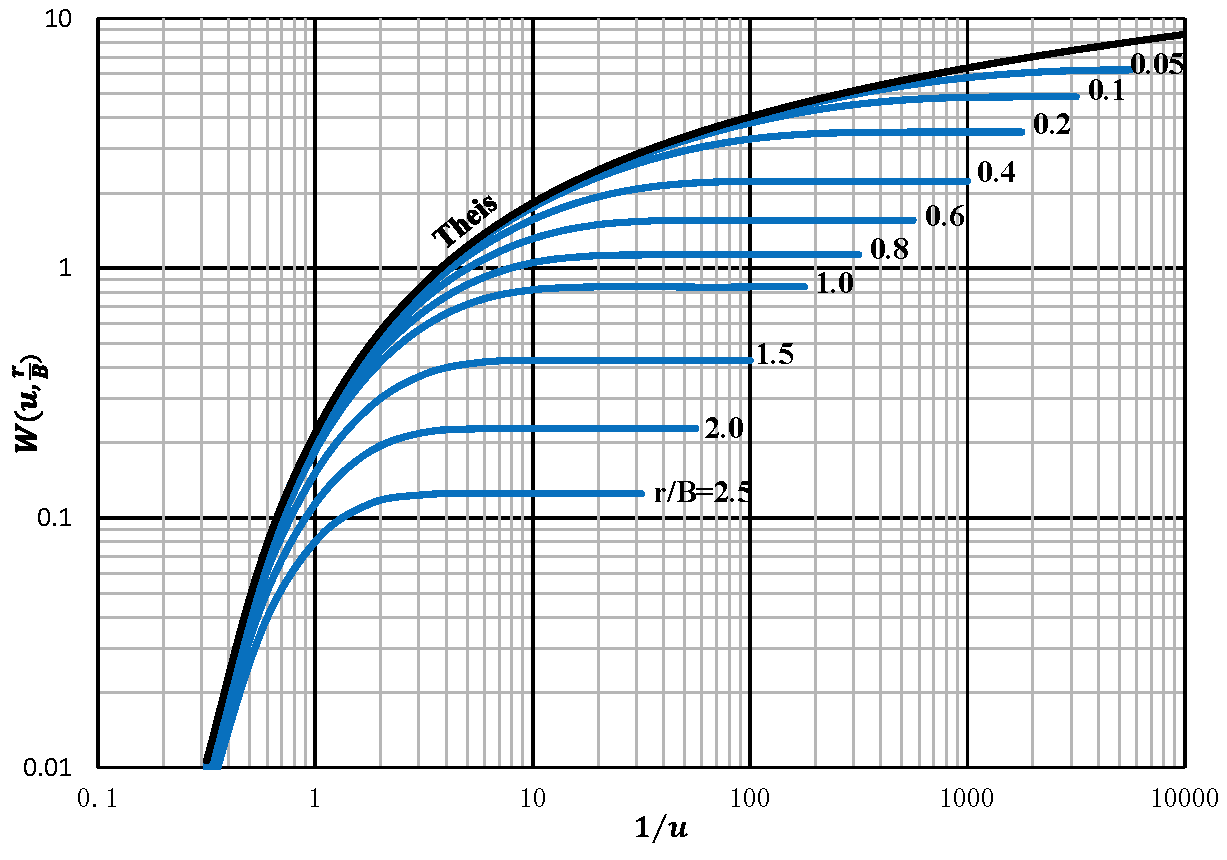
**模型的解** (Hantush-Jacob,1955)

式中, , , 为越流井函数。

越流井函数的计算方法见试验材料。

**标准曲线**

对于不同的 可以绘出 标准曲线.



### 5.2.2 Hantush-Jacob 公式讨论

**（1） 曲线的变化规律**

曲线分**早、中、晚**三个阶段.

* 早期: 同 Theis 曲线一致, 越流尚未进入主含水层, 抽水量来自主含水层的弹性释水; 一定时, 越大, 与 Theis 曲线吻合的时间越长, 越流进入含水层的时间越晚.
* 中期：偏离 Theis 曲线, 越流已经进入抽水含水层, 抽水量来自弹性释水与越流补给两部分. 一定时, 越大, 开始偏离的时间越晚.
* 晚期：降深趋于定值. 时 ，有

即有越流补给的完整井流，定流量抽水最终能达到稳定流.

**（2）水头下降速度**

越流含水层水位下降速度比无越流含水层慢.

**（3）稳定流降深的近似公式及各种流量的关系**

**降深的近似公式**

时 快速衰减； 时，。

有

当 时，误差小于 5 %；当 时，误差小于 1 %。

**抽水量与越流量、轴向侧流量的关系**

径向距离 处的轴向侧流量

由此得到抽水量与轴向侧流量关系

在 范围，，可以认为 的区域内95%抽水量来自越流量。

## 5.3 有弱透水层弹性释水补给的半承压水完整井非稳定流模型

Hantush-Jacob 模型忽略弱含水层的弹性释水与补给含水层水位变化，为第一越流系统。

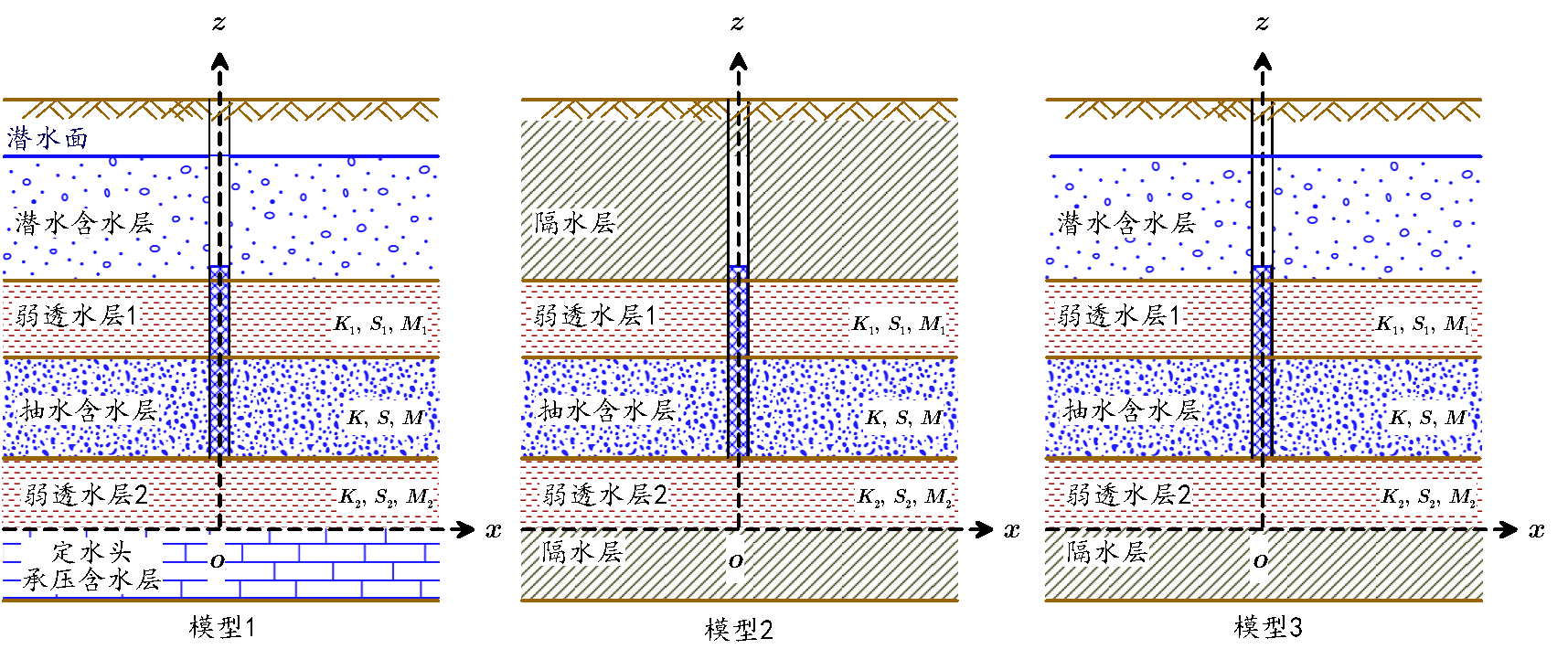
事实上，对于多层结构的含水岩组，含水层抽水时会引起弱透水层弹性释水，当弱透水层较厚时，这种补给量是可观的，不能忽略。

M. S. Hantush (1960) 提出了三层结构模型属于第二越流系统。

### 5.3.1 Hantush 模型

Hantush 根据弱透水层弹性释水与相邻含水层关系，给出了三种越流模型：

* 模型 1：与两弱透水层相邻的是定水头含水层；
* 模型 2：与两弱透水层相邻的是隔水层；
* 模型 3：上弱透水层与定水头含水层相邻，下弱透水层与隔水层相邻。



**模型假设条件**

* 含水层和弱透水层均质、各向同性，产状水平、等厚、无限分布；天然水力坡度为零；
* 单井定流量抽水；
* 弱透水层渗透系数与抽水含水层相比要小的多；
* 含水层抽水时，能得到弱透水层弹性释水补给；弱透水层中水流是垂向流， 抽水含水层中水流为水平径向流，水流服从 Darcy 定律；
* 与弱透水层相邻为定水头含水层或隔水层。

**数学模型**

* 模型 1

抽水含水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (III-1) |

下弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (III-2) |

上弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (III-3) |

* 模型 2

抽水含水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (IV-1) |

下弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (IV-2) |

上弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (IV-3) |

* 模型 3

抽水含水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (V-1) |

下弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (V-2) |

上弱透水层

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (V-3) |

**模型的近似解**

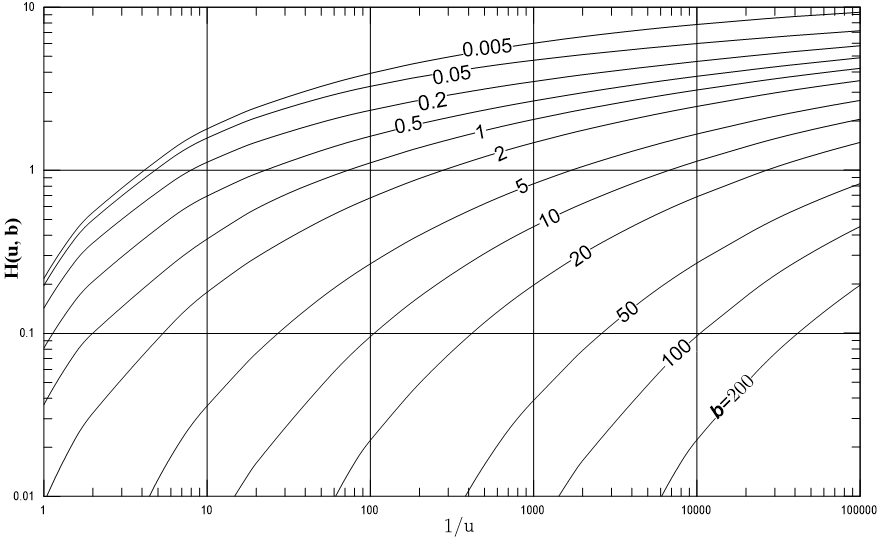
根据 曲线，抽水可分三个阶段。其中，抽水时间足够短及抽水时间足长时 Hantush 模型有近似解.

记 ， 。

* 抽水初期的解
* , 时，三种模型具有形式相同的近似解：

式中，

**标准曲线**



* 抽水时间较长的解
* 模型 1： 且 时

式中

为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数 (Hantush - Jacob)。

模型 2： 且 时

式中

为无越流含水层井函数 (Theis)。

模型 3： 且 时

式中

为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数 (Hantush-Jacob)。

### 5.3.2 公式讨论

* 当 或 时，公式简化为 Theis 公式：
* 对模型 1、模型 3（定水头），当 时，

此为忽略弱透水层弹性释水的越流系统井流公式。

* 由 标准曲线知， 随 增大而减小，当 时为 Theis 曲线:
  + 、 增大 ( 增大)， 减小；
  + 增大 ( 减小)， 减小；
  + 减小 ( 增大)， 减小。

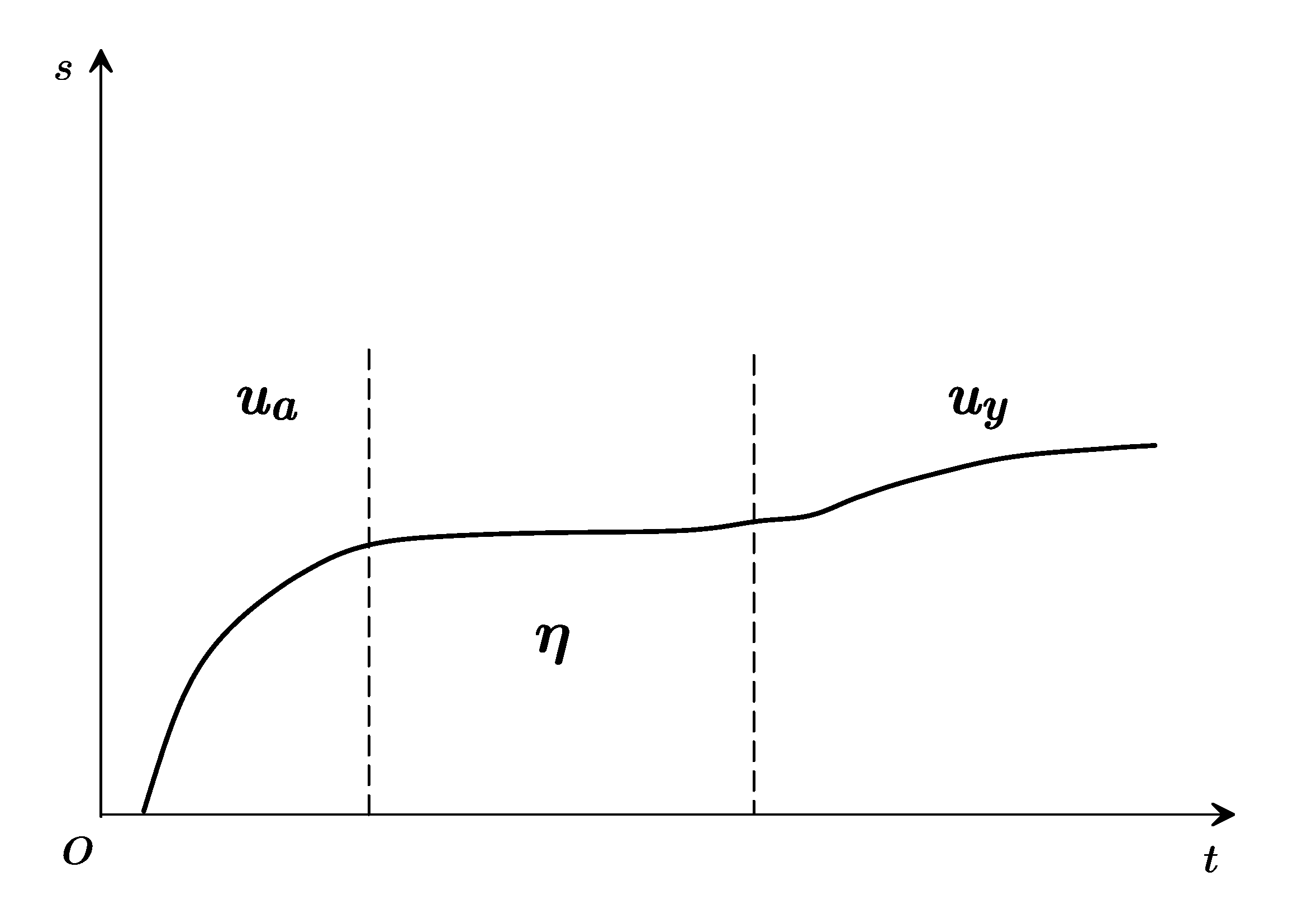
## 

## 5.4 潜水完整井的非稳定流模型

### 5.4.1 潜水井流特征

* 潜水井流上界面是随时间变化的浸润曲面(自由面)，承压水井流为含水层顶板；
* 潜水井流导水系数 随距离 和时间 而变化，而承压水井流 与 无关；
* 潜水井流降深较大时，垂向分速度不可忽略，井附近为三维流；近水平含水层的承压井流垂向分速度可忽略，可近似地处理为二维流；
* 潜水井抽取的地下水主要来自含水层的重力疏干；重力疏干不能瞬时完成，而是逐渐被排放出来，具有明显地迟后于水位下降的现象，给水度长时间抽水后趋于定值；承压水井抽取的地下水来自含水层贮存量释放，接近于瞬时完成，贮水系数是常数.

潜水井抽水时，观测孔 曲线有明显的**分阶段变化特征**。



* 早期：抽水开始后的早期阶段，水位刚刚下降，重力排水还未起作用，只有压力降低引起的弹性释水起作用， 曲线与 Theis 曲线一致，时间可能仅几分钟.  
  含水层的反应和一个贮水系数小的承压含水层相似；水流主要是水平运动.
* 中期：疏干排水开始起作用，含水层得到补给，水位下降速度明显变缓， 曲线偏离 Theis 曲线，曲线斜率减少，甚至短时间稳定.  
  含水层的反应类似于一个有越流补给的承压含水层；降落漏斗仍以缓慢速度扩展着.
* 后期：滞后排水作用达到压力平衡，影响逐渐减小，重力排水与水位下降同步，抽水量来自重力排水， 曲线又于 Theis 曲线一致.  
  给水度所起的作用相当于承压含水层的贮水系数.

**潜水井流的研究思路**

* 抽水附近按三维流处理；
* 远离抽水井的潜水井流可近似为二维流。

**潜水井流的近似处理**

远离抽水井的潜水井流可近似为二维流。

* 用 近似地代替含水层厚度：长时间抽水后，迟后排水现象已不明显; 在降深不大的情况下（， 为抽水前潜水流厚度），可近似用承压井流公式作近似计算
* 采用修正降深值，直接利用 Theis 公式：

式中： 为修正降深; 为实测降深; 为潜水流初始厚度.

**潜水完整井流模型分类**

1. 考虑井附近流速垂直分量的第一潜水井流 Boulton 模型；
2. 考虑迟后排水的 Boulton 第二潜水井流模型；
3. 既考虑流速垂直分量又考虑含水层弹性释水的 Neumann 模型.

本课程介绍后两种模型。

### 5.4.2 考虑迟后疏干的的 Boulton 模型

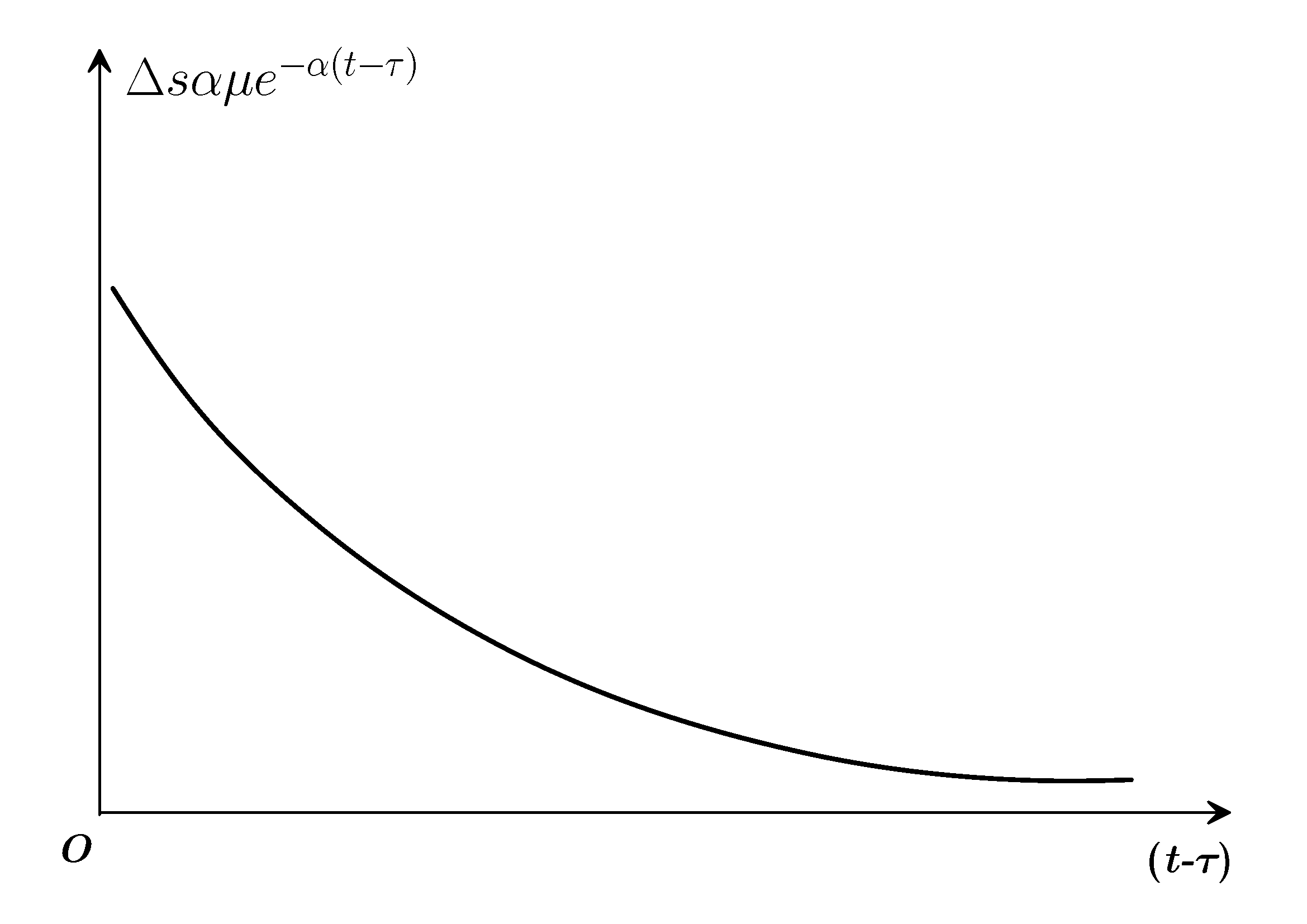
**Boulton 假设**

根据抽水过程中降深---时间曲线特征, Boulton 提出了考虑迟后疏干的计算方法.

假设 时间段抽水，潜水面下降了 . 抽出水量由两部分组成：

* 弹性释水放出水量：水位下降 时单位面积含水层弹性释水为；
* 迟后疏干排出水量：水位下降时，迟后疏干排出水量假设为：

式中： — 经验系数.



用负指数处理迟后现象。

**Boulton 假设合理性**

* 单位面积含水层排水量 与 关系符合一般经验，时间间隔越长，排出的水量越小.
* 时刻之后，若 ，则重力排水的总体积为：

等于含水层的给水度，满足水量均衡条件，符合实际情况；

* 时间段的迟后排水总量为：

当 时，有迟后效应; 若 大，则排出水量大，迟后性小; 称为延迟指数.

**迟后疏干出水量的表示**

在抽水过程中从 0 至 时刻，水位下降了 . 单位面积含水层的疏干水量 可表示为 个 对应降深为 水量的叠加.

当 时

**Boulton 模型假设**

* 均质各向同性，隔水底板水平侧向无限延伸的含水层；
* 初始水面水平；
* 完整井，井径无限小，定流量抽水，降深 ；
* 水流服从 Darcy 定律；
* 抽水时，含水层中的水不能瞬时排出，存在着迟后现象.

**Boulton 模型的数学表示**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (VI) |

**Boulton 模型的解**

式中,

为疏干因素(量纲为L)，为双曲函数.

**Boulton 模型的简化形式**

当 时，即 时，Boulton 解可简化

将Boulton 解进一步简化：

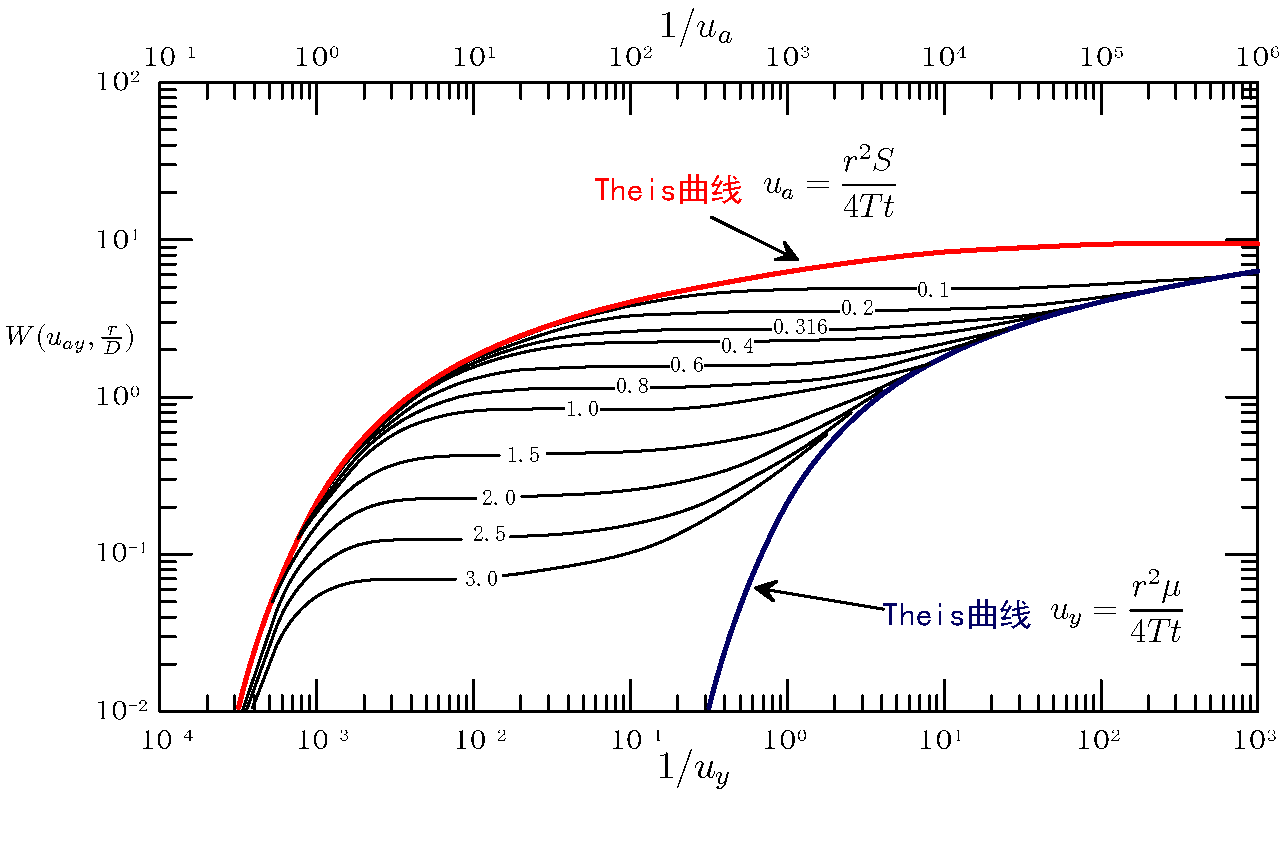
（1）当 相当小（抽水初期）：

（2）当 很大（抽水延续时间较长）：

式中, 为潜水含水层中完整井的井函数. 抽水早期，；抽水后期，.

**Boulton 模型标准曲线**

在双对数纸上绘制标准曲线， 为纵坐标， 为横坐标作 A 组曲线， 为横坐标作 B 组曲线，然后用切线联 A、B 组曲线.



* 井函数曲线组反映了迟后排水的影响. 抽水初期，以弹性释水为主，水位降深同 A 组 Theis 曲线吻合.
* 持续抽水，迟后重力排水发生影响后偏离 Theis 曲线，下降速度变小，并随的 不同，以不同方式向水平线趋近.
* 抽水后期，迟后重力排水影响减弱，下降速度由小变大，曲线斜率增加. 迟后重力排水影响基本结束时又趋向 B 组 Theis 曲线.

**Boulton 模型按抽水过程的近似解**

* 早期：

与忽略弱透水层弹性释水的越流系统井函数相同，疏干因素的作用相当于越流因素 的作用. 为潜水含水层 A 组井函数.

* 中期：

为忽略弱透水层弹性释水下的越流稳定解.

* 晚期：

为潜水含水层 B 组井函数.

**Boulton 模型讨论**

* 早期：当 很小时(相当于抽水初期)，与 Hantush-Jacob 公式相同，潜水位下降的过程与越流含水层的过程相同.
* 中期：当 很大时(相当于抽水延续时间很长的情况)，与 Theis 公式相同，此时 .
* 晚期：在长时间抽水后，降深可以用 Theis 公式计算.

### 5.4.3 考虑流速垂直分量和弹性释水的 Neumann 模型

**Boulton 延迟疏干模型的缺陷**

* 延迟指数 缺乏明确的物理含义；
* 对确定的潜水含水层， 不能保证是常数， 不是一个物性参数；
* 难于解释潜水含水层的释水机制；
* 二维模型，无法解释抽水井附近三维流特征.

**Neumann 模型的改进**

* 是三维轴对称模型，包含z坐标变化对降深的影响与含水层的各向异性特征；
* 将潜水面作为活动边界，建立了潜水面变动的连续方程；
* 避免了潜水疏干释水所涉及的非饱和带问题；无需物理意义不明的延迟指数 ，克服了 Boulton 延迟疏干模型的缺陷.

**Neumann 模型的假设条件**

* 含水层均质各向异性，侧向无限延伸，坐标轴和主渗透方向一致，隔水层水平；
* 初始潜水面水平；
* 水流服从 Darcy 定律；
* 完整井，定流量抽水；
* 抽水期间自由面上没有入渗补给或蒸发；潜水面降深和含水层厚度相比小得多.

**Neumann 模型的数学表示**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (VII) |

**Neumann 模型的解**

式中

分别为下面两方程的根：

Neuman 解有 4 个参数：

记 ，

为三维流的参数.

对完整观测井，降深 需用沿 的平均降深表示，计算公式不变：

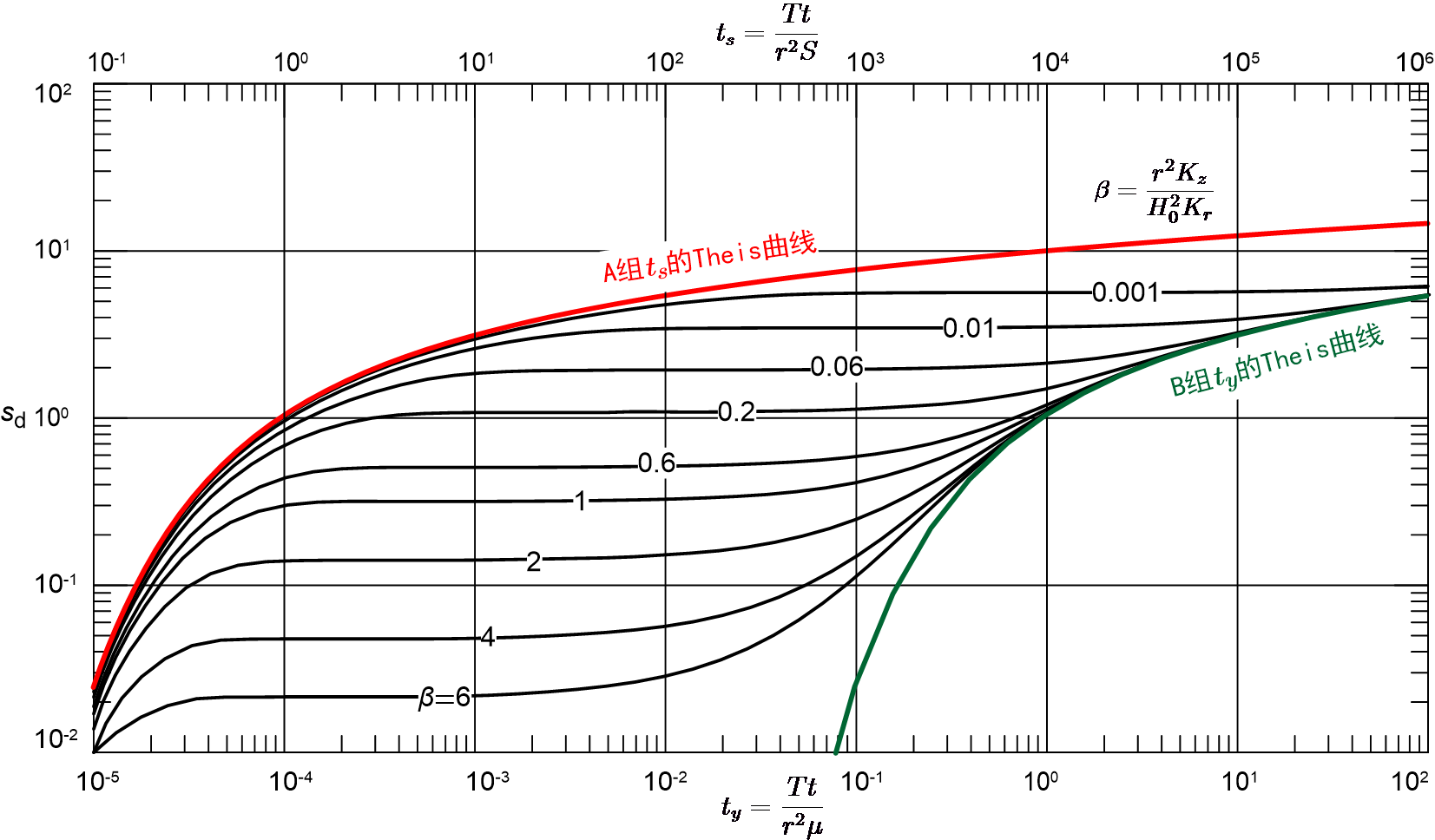
其中 为

解有 3 个参数 ( 方向的降深平均化)：

**Neuman标准曲线**

式中包含 3 个独立的无量纲变量，为了便于作图，假设 远小于 ，即 。从而可以绘出两组标准曲线：

* 以 为参变量，以 计算无量纲降深 作出 A 组曲线 ，坐标 标在图的上端；
* 以 为参变量， 计算无量纲降深 ，作出 B 组曲线 ，坐标 标在图的下端；
* A 组曲线右边部分和 B 组曲线左边部分都趋近于一组水平的渐近线。当 时二组标准曲线相距无限远，因此必须采用不同的尺度才能绘在一张图纸上。
* A 组曲线用以分析早期的降深资料；B 组曲线用以分析晚期的降深资料。



**Neuman 解的特点**

没有重力排水 (，相当于抽水初期)，可以证明 Neuman 解具有 Theis 解的形式：

式中，.

长时间抽水 (，相当于没有了弹性释水)，Neuman 解也具有 Theis 解的形式：

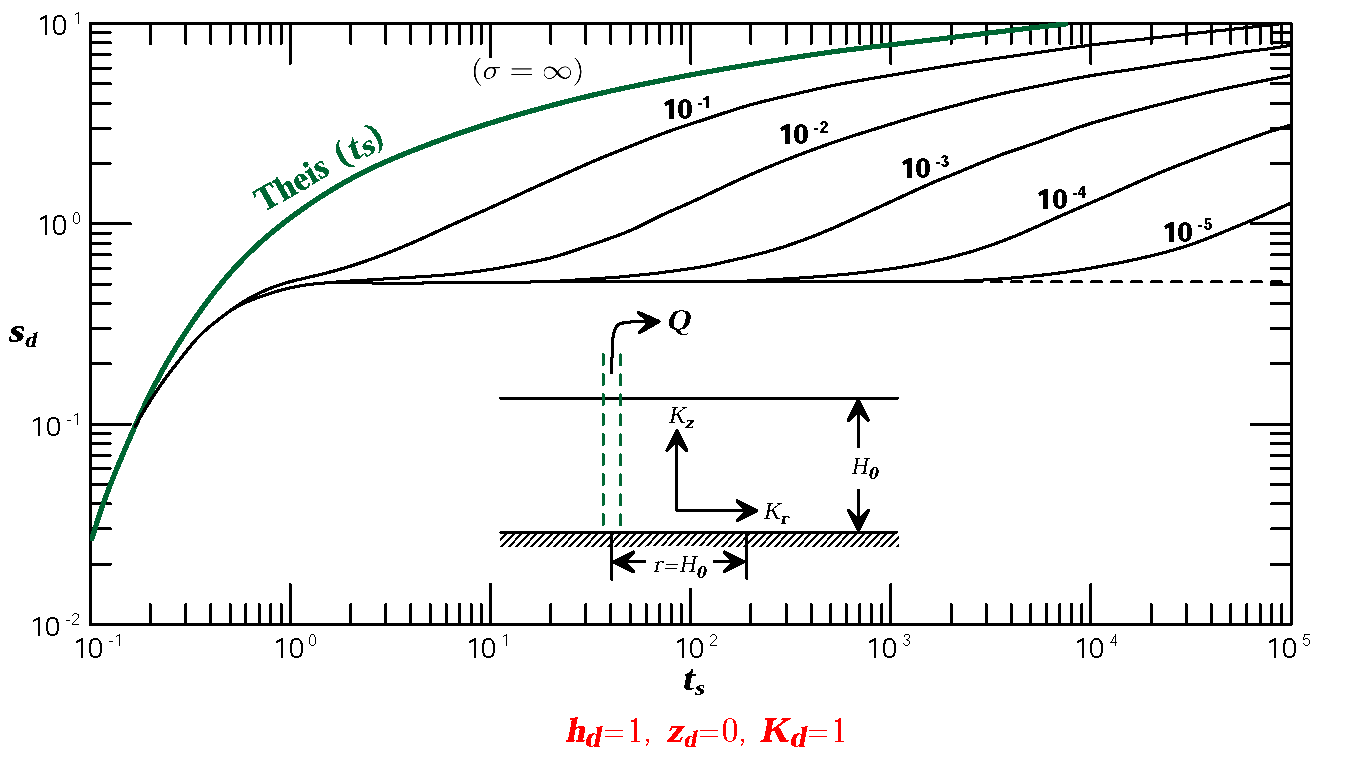
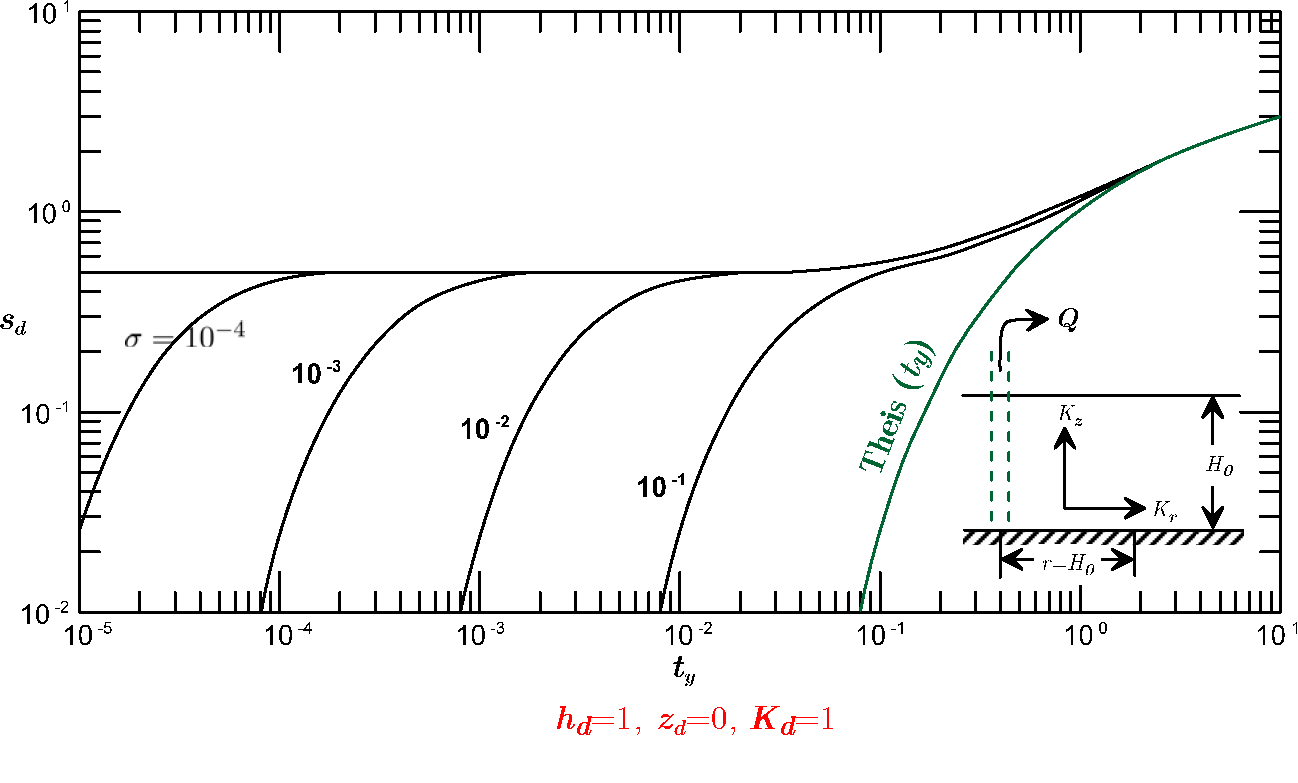
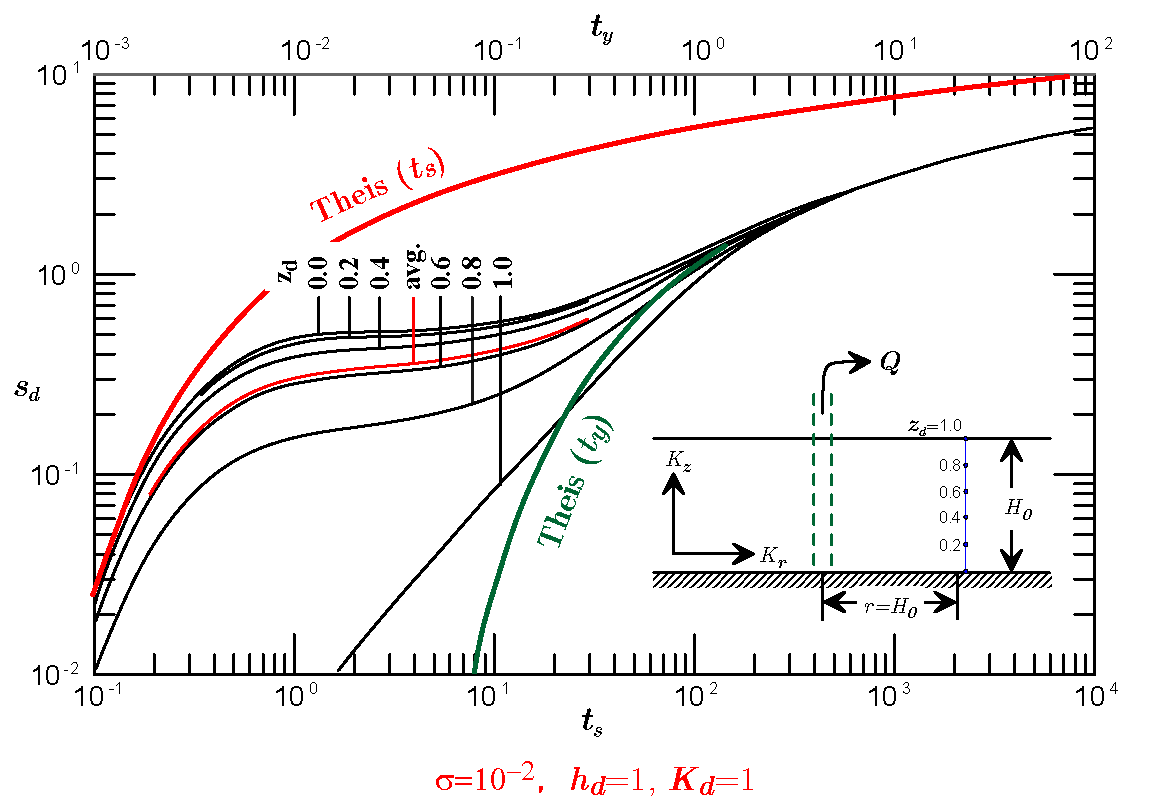
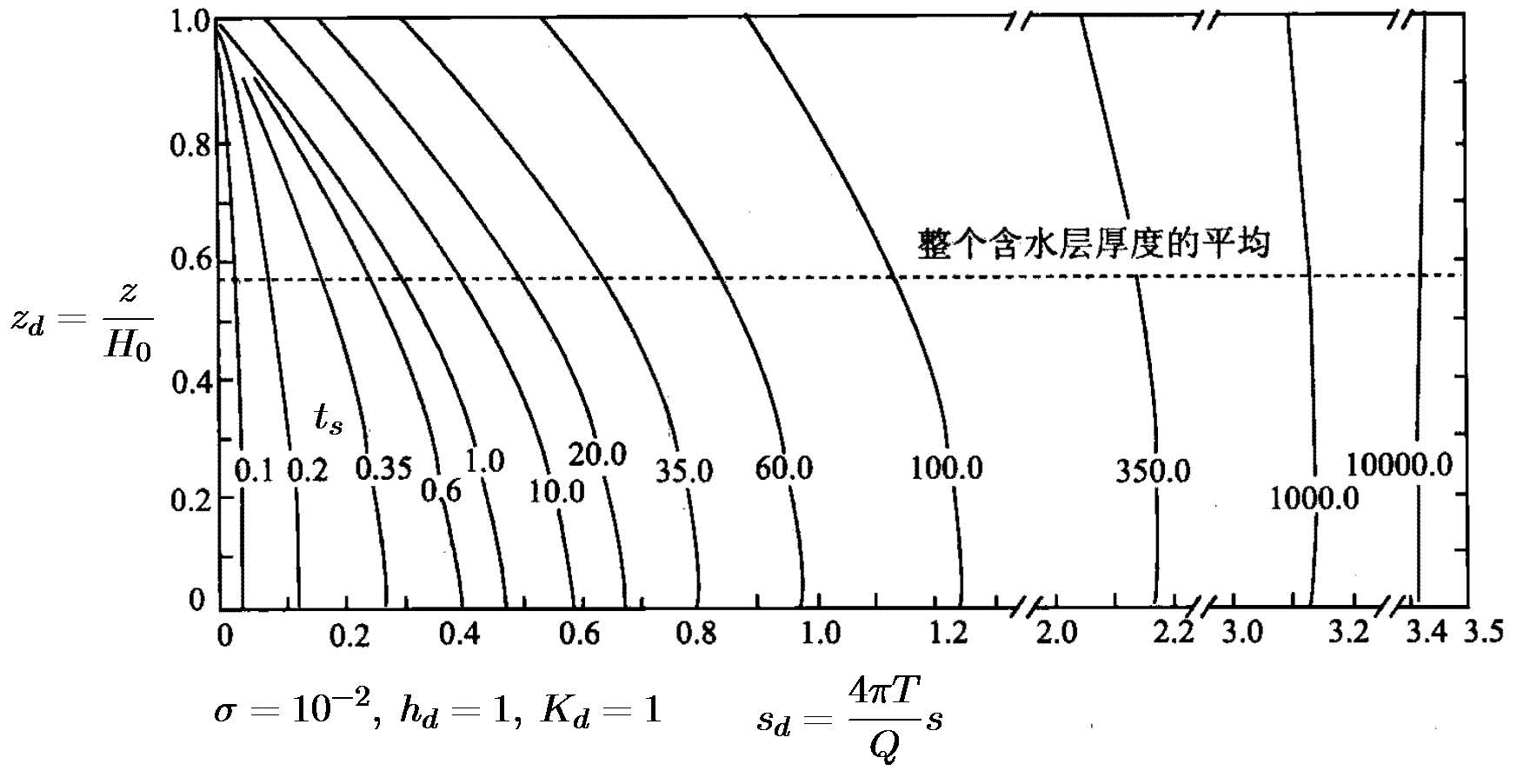
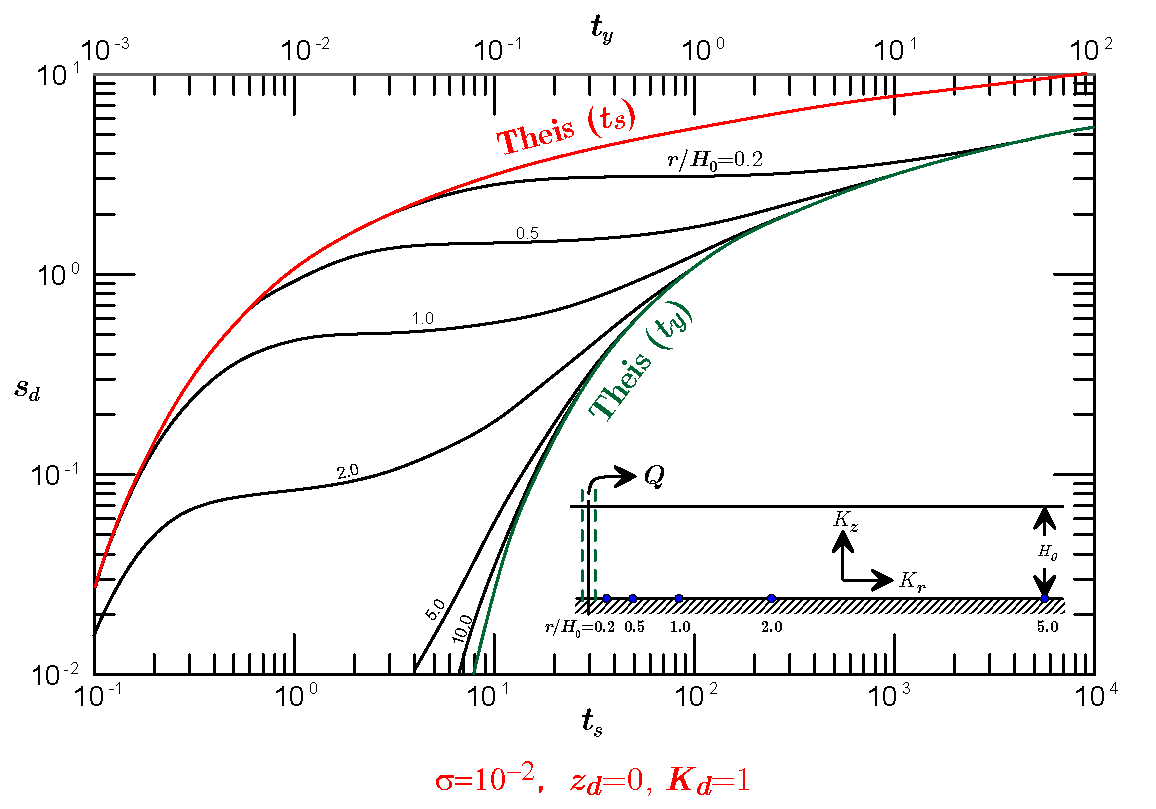
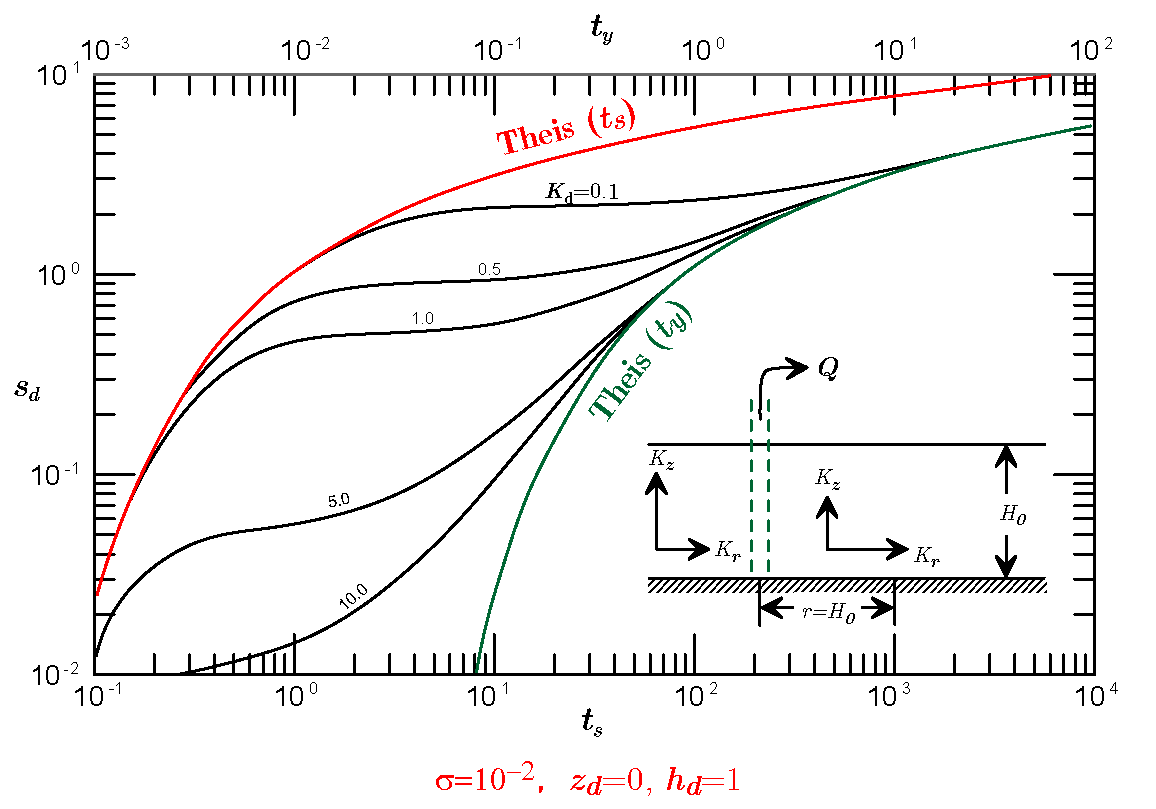
式中，.

抽水初期，弹性释水起主要作用（）;

抽水后期，重力释水起主要作用（）.

**井附近降深分析**

记 为无量纲降深.

* 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 的含水层底部 ()  
   曲线：
* 
* 第一阶段（早期）：抽水量来自弹性释水；
* 第二阶段：重力排水起作用， 越小，该阶段越长；
* 第三阶段：弹性释水影响消失，曲线再次与Theis一致.
* 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 的含水层底部 ()  
   曲线：
* 
* 越小，第一阶段时间越短. 尽管潜水含水层的 比 小得多，弹性释水的影响还不能完全忽略.
* 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 的含水层断面上 ()
* 对降深 的影响：设 .
* 
* 抽水的早、中期，潜水面处的降深小于垂向任意一点的降深，此即迟后排水或潜水面反应滞后的现象.
* 含水层各向同性，观测点位于距抽水井 的含水层断面上 ()  
  水流状态的变化：设 .
* 
* 抽水的早、晚期，降深分布曲线基本上是垂直的，与 Dupuit 假设一致.
* 抽水中期，含水层上部存在明显的渗透速度垂直分量.
* 含水层各向同性，观测点位于含水层底部 ()   
   曲线随 的变化: 设 .
* 
* 随着 增大，弹性释水作用逐渐减弱， 的地段可以完全忽略不计；
* 潜水面滞后反应随 增大而减弱，降深-时间曲线的三个阶段仅在 不大的情况下才会显现.
* 含水层各向异性，观测点位于距抽水井 的含水层底部 ()   
  各向异性影响: 设 .
* 
* 越小，渗透速度的水平分量越比垂向分量，弹性释水和迟后反应越明显.