Fiche LP1

vendredi 6 décembre 2019 11:10

base LP1

Portée de qtificateur

$\boxed{\forall X \exists Y (p(X,Y)} \Rightarrow \boxed{\exists Z(\neg q(X,Z)))}$

X libre
Y,Z liée

Portée de Z
Portée de X
Portée de Y

Par le même X

qtificateur : comment les utiliser

1/ $\forall \rightarrow \Rightarrow$

2/ $\exists \rightarrow \wedge$

3/ Toujours préférer prédicat arité max ?

- Toujours préférer des prédicats de faible arité (0,1,2)
  - Jacques a trois enfants : Pierre, Julie et Patrick
  - enfant(Jacques, Pierre) ∧ enfant(Jacques, Julie) ∧ enfant(Jacques, Patrick)
  - éviter : a_3_enfants(Jacques, Pierre, Julie, Patrick)

Rennomage

⚠ Ne pas renommer Variables libres

On peut renommer variables liées

Substitutions :

Exemple

- $\varphi_1 \equiv p(X,Y)$, $\varphi_1[Y|toto] \equiv p(X,toto)$ Possible car n'apparait pas Y dans
- $\varphi_2 \equiv \forall X \exists Y premier(X,Y)$, $\varphi_2[Y|groupe(X)] \equiv$ groupe(x) (groupe(y) interdit !)
  $\forall X \exists Y\ premier(X, groupe(X)) \equiv \forall X\ premier(X, groupe(X))$

Methode LP1

Interprétation :

Definition: Interprétation

Une interprétation I d'une formule φ est un triple (D, I_c, I_V) telle :

1. D est le domaine d'interprétation
2. I_c est une fonction qui associe :
   - à toute constante C une valeur $I_c(C)$ de D
   - à tout symbole de prédicat p d'arité n une fonction de $I_C(p) : D^n \rightarrow V, F$
3. I_V est une fonction (instanciation) qui associe à toute variable libre X un élément $I_V(X)$ de D (I_V est l'environnement)

$I_V \rightarrow$ Variable libres
$I_c \rightarrow$ Variable liée

Interprétation d'une formule φ

Comment obtient-on la valeur $I(\varphi) \in \{V, F\}$ pour une interprétation $I = (D, I_C, I_V)$ donnée ?

- $\varphi \equiv p(a)$ alors $I(\varphi) = V$ ssi $I_c(p)(I_c(a)) = V$.
- $\varphi = p(X)$ (X variable libre) alors $I(\varphi) = V$ ssi $I_c(p)(I_V(X)) = V$.
- $\varphi = \forall X\ p(X)$ alors $I(\varphi) = V$ ssi
  - pour tout élément e de $D = \{e_1, \dots, e_n\}$, $I_c(p)(e) = V$
  - autrement dit $\forall X\ p(X)$ ressemble à $p(X|e_1) \wedge p(X|e_2) \wedge \cdots \wedge p(X|e_n)$
- $\varphi \equiv \exists X\ p(X)$ alors $I(\varphi) = V$ ssi
  - il existe e dans $D = \{e_1, \dots, e_n\}$, $I_c(p)(e) = V$
  - autrement dit $\exists X\ p(X)$ ressemble à $p(X|e_1) \vee p(X|e_2) \vee \cdots \vee p(X|e_n)$
- Pour les autres types formules (avec connecteurs), c'est comme en logique propositionnel

Ça dépend donc des formules
→ Table de Vérité interdites !
→ trop long.

Validité

1/ Une formule est valide si sa fermeture universelle est valide

2/ ______ Satisfaisable ______
______ Existentielle ______

$\varphi = p(x) \vee q(y)$ formule ouverte

φ est valide si $\forall x \forall y [p(x) \vee q(y)]$ est valide (satisfaisable)

satisfaisable $\exists \exists$

Quelques formules valides importantes

$\forall X\ \varphi \wedge \forall Y\ \psi$	$\Leftrightarrow$	$\forall X\ (\varphi \wedge \psi)$
$\forall X\ \varphi \vee \forall Y\ \psi$	$\Leftrightarrow$	$\forall X\ (\varphi \vee \psi)$
$(\forall X\ \varphi \Rightarrow \psi)$	$\Rightarrow$	$(\forall X\ \varphi \Rightarrow \forall X\ \psi)$
$(\forall X\ \varphi \Leftrightarrow \psi)$	$\Rightarrow$	$(\forall X\ \varphi \Leftrightarrow \forall X\ \psi)$
$\exists X(\varphi \wedge \psi)$	$\Rightarrow$	$\exists X \varphi \wedge \exists X \psi$
$\exists X(\varphi \vee \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\exists X \varphi \vee \exists X \psi$
$\exists X(\varphi \Rightarrow \psi)$	$\Leftrightarrow$	$\forall X\ \varphi \Rightarrow \exists X \psi$
$\forall X\ \varphi$	$\Leftrightarrow$	$\neg(\exists X(\neg\varphi))$
$\forall X\ \varphi$	$\Rightarrow$	$\exists X\ \varphi$
$\forall X \forall Y\ \varphi$	$\Leftrightarrow$	$\forall Y \forall X\ \varphi$
$\exists X \exists Y\ \varphi$	$\Leftrightarrow$	$\exists Y \exists X\ \varphi$
$\exists X \forall Y\ \varphi$	$\Rightarrow$	$\forall Y \exists X\ \varphi$

Principe de résolution en LP1

Soit $\Gamma \vdash \varphi$ à démontrer

1. Transformer $\Gamma \wedge \neg\varphi$ en forme prénexe (tous les quantificateurs à gauche)
2. Skolémisation (suppression des quantificateurs existentiels)
3. Transformer en forme prénexe normale conjonctive
4. Appliquer la règle d'inférence de la résolution :
   - fonctionne par substitution de termes
   - unification de formule (recherche du plus grand unificateur)

Formes prénexe normale conjonctive

→ $\wedge$ de $\vee$ en FP

Forme prénexe

1. Se débarrasser des connecteurs $\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow$
2. Renommer toute variable liée : chaque variable liée doit être quantifiée une seule fois
   - $\forall X\ A(X) \;\equiv\; \forall Y\ A(Y)$
   - $\exists X\ A(X) \;\equiv\; \exists Y\ A(Y)$
3. Faire remonter tous les quantificateurs en tête

Règles pour faire remonter tous les quantificateurs en tête

- $\neg(\exists X\ A(X)) \equiv \forall X\ \neg A(X)$
- $\neg(\forall X\ A(X)) \equiv \exists X\ \neg A(X)$
- $\neg\neg(QX\ A(X)) \equiv QX\ A(X)$
- Si X n'est pas libre dans la formule C
  - $C \vee QX\ A(X) \equiv QX\ (C \vee A(X))$
  - $QX\ A(X) \vee C \equiv QX\ (A(X) \vee C)$
  - $C \wedge QX\ A(X) \equiv QX\ (C \wedge A(X))$
  - $QX\ A(X) \wedge C \equiv QX\ (A(X) \wedge C)$
- $QX_1\ A(X_1) \vee QX_2\ B(X_2) \equiv QX_1 QX_2\ (A(X_1) \vee B(X_2))$
- $QX_1\ A(X_1) \wedge QX_2\ B(X_2) \equiv QX_1 QX_2\ (A(X_1) \wedge B(X_2))$

Scolimisation :

1/ Si $\exists$ n'est pas precédé par $\forall$ remplacer par cste

$$\exists X\,(p(X) \wedge q(f(X,Y))) \overset{skol}{\rightsquigarrow} p(a) \wedge q(f(a,Y))$$

2/ Sinon remplacer par f(Variable)

$$\forall Z_1 \forall Z_2 \exists X\,(p(X) \wedge q(f(X,Y))) \overset{skol}{\rightsquigarrow} \forall Z_1 \forall Z_2\,(p(g(Z_1,Z_2)) \wedge q(f(g(Z_1,Z_2),Y)))$$