Eléments de correction des TD de Logique des Prédicats (LP1)

Exercice 1 : Table de vérité

$$F = p(a) \vee \forall x(p(x) \Rightarrow q)$$

En enlevant le connecteur '⇒', on peut re-écrire la formule :

$$F \quad = \; p(a)\vee\forall x(\neg p(x)\vee q) = p(a)\vee\forall x(\neg p(x))\vee q$$

On enlève ensuite le quantificateur $\forall$:

$$\mathbf{F \quad = p(a) \vee (\neg p(e_1) \wedge \neg p(e_2)) \vee q}$$

Pour établir la table de vérité, on doit former toutes les combinaisons des cas suivants :

- a ? 2 valeurs possibles (e_1 ou e_2)
- q ? 2 valeurs de vérité possibles : V ou F
- p(x) ? 4 définitions possibles :

$p^1(e_1) = V$	$p^2(e_1) = V$	$p^3(e_1) = F$	$p^4(e_1) = F$
$p^1(e_2) = V$	$p^2(e_2) = F$	$p^3(e_2) = V$	$p^4(e_2) = F$

En tout il y a donc 2×2×4 = 16 cas possibles donc 16 lignes dans la table de vérité :

p	q	a	p(a)	$\neg p(e_1) \vee \neg p(e_2)$	F
$p^1(e_1) = V$, $p^1(e_2) = V$	**V**	e_1	**V**	F	**V**
	V	e_2	**V**	F	**V**
	F	e_1	**V**	F	**V**
	F	e_2	**V**	F	**V**
$p^2(e_1) = V$, $p^2(e_2) = F$	**V**	e_1	**V**	**V**	**V**
	V	e_2	F	**V**	**V**
	F	e_1	**V**	**V**	**V**
	F	e_2	F	**V**	**V**
$p^3(e_1) = F$, $p^3(e_2) = V$	**V**	e_1	F	**V**	**V**
	V	e_2	**V**	**V**	**V**
	F	e_1	F	**V**	**V**
	F	e_2	**V**	**V**	**V**
$p^4(e_1) = F$, $p^4(e_2) = F$	**V**	e_1	F	**V**	**V**
	V	e_2	F	**V**	**V**
	F	e_1	F	**V**	**V**
	F	e_2	F	**V**	**V**

Exercice 2 : Démonstration

2.1 La formule $\exists x(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x(A) \wedge \exists x(B))$ est-elle valide ? (toujours vraie ?)

On sait que pour deux formules $\{\varphi,\psi\}$ quelconques, les 2 validités suivantes sont établies :

$\models \varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$ (a)

et

$\models \varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$ (a')

(Au besoin, pour s'en convaincre, tracer une table de vérité pour a et a' et vérifier que les deux tables ne contiennent que des V)

On sait aussi que : si $\models F \Rightarrow G$ alors $\models (\exists x\ F) \Rightarrow (\exists x\ G)$ (b)

(Pour s'en convaincre, on peut faire une analogie dans la théorie des ensembles : l'implication est remplacée par l'inclusion ensembliste et $\exists x\ P$ est remplacée par $P \neq \{\}$. On a bien d'un point de vue ensembliste : si $F \subseteq G$ alors $F \neq \{\} \Rightarrow G \neq \{\}$)

Application : on substitue $F=A \wedge B$ et $G=A$ dans (b)

si $\models A \wedge B \Rightarrow A$ alors $\models \exists x\ (A \wedge B) \Rightarrow \exists x(A)$ (c)

de même

si $\models A \wedge B \Rightarrow B$ alors $\models \exists x\ (A \wedge B) \Rightarrow \exists x(B)$ (c')

Or $\models A \wedge B \Rightarrow A$ (a)

et $\models A \wedge B \Rightarrow B$ (a') sont établies, donc

$\models \exists x\ (A \wedge B) \Rightarrow \exists x(A)$ (d)

et

$\models \exists x\ (A \wedge B) \Rightarrow \exists x(B)$ (d')

sont également établies.

Pour finir, on sait que :

si $\models C \Rightarrow D$ et si $\models C \Rightarrow E$ alors $\models C \Rightarrow (D \wedge E)$ (f)

D'où, d'après d et d' d'une part et (f) d'autre part, on peut établir que :

$\models \exists x(A \wedge B) \Rightarrow \exists x(A) \wedge \exists x(B)$ …cqfd

Une autre démonstration (plus courte).
Le théorème de la de démonstration permet d'énoncer que :

Démontrer $\vDash P \Rightarrow Q$ et démontrer $P \vDash Q$ sont équivalents

On sait déjà que :

$\exists x\, (A \wedge B) \vDash \exists x(A)$

et

$\exists x\, (A \wedge B) \vDash \exists x(B)$ (en permutant A et B et sachant que $\wedge$ est commutatif)

donc $\exists x\, (A \wedge B) \vDash \exists x(A) \wedge \exists x(B)$ d'après (f)

qu'on peut reécrire (toujours grâce au même théorème de démonsration) :

$\vDash \exists x\, (A \wedge B) \Rightarrow \exists x(A) \wedge \exists x(B)$ …cqfd

2.2 Les formules $\forall x\, (f(x) \wedge g)$ et $(\forall x\, f(x)) \wedge g$ sont-elles logiquement équivalentes ?

On se place dans le domaine sémantique et on analyse deux cas :

- a/ soit I une interprétation telle que **I(g) = F** ; on peut remplacer G par '$\perp$' (proposition toujours fausse)

$I(\forall x\, (f(x) \wedge g)) = I(\forall x\, (f(x) \wedge \perp)) = I(\forall x\, (\perp)) = I(\perp) = F$

de même :

$I(\forall x\, f(x) \wedge g) = I(\forall x\, f(x)) \wedge I(\perp) = I(\forall x\, f(x)) \wedge F = F$

Le deux formules ont la même interprétation dans le cas a. (I(g)=F).

- b/ soit I une interprétation telle que **I(g) = V** ; on peut remplacer g par 'T' (proposition toujours vraie)

$I(\forall x\, (f(x) \wedge g)) = I(\forall x\, (f(x) \wedge T)) = I(\forall x\, f(x))$

de même :

$I(\forall x\, f(x) \wedge g) = I(\forall x\, f(x) \wedge T) = I(\forall x\, f(x)) \wedge I(T) = I(\forall x\, f(x))$

Les deux formules ont donc même interprétation dans le cas b. (I(g)=V).

Les deux formules ont la même interprétation dans les cas a. et b.

Donc on a bien : $\forall x\, (f(x) \wedge g) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} (\forall x\, f(x)) \wedge g$ ..cqfd

Exercice 3 : Formule satisfiable

3.1 Soit l'ensemble de clauses $S = \{ (\neg p(X_1,g(X_1)) \vee q(X_1, Y_1)),\ q(X_2, f(X_2)), p(a, X_3) \}$

(les symboles *a*, *f* et *g* dénotent des fonctions classiques et non des fonctions de Skolem)

A quelle formule prenexe normale conjonctive de LP1 correspond S ?

a – on traduit chaque clause en une formule dans laquelle les variables sont quantifiées universellement :

$(\neg p(X_1, g(X_1)) \vee q(X_1, Y_1))$ --------> $\boldsymbol{\forall X_1 \forall Y_1}\ (\neg p(X_1,g(X_1)) \vee q(X_1, Y_1))$

= $\forall X_1 \forall Y_1\ (p(X_1,g(X_1)) \Rightarrow q(X_1, Y_1))$

$q(X_2, f(X_2))$ --------> $\forall X_2\ q(X_2, f(X_2))$

$p(a, X_3)$ --------> $\forall X_3\ p(a, X_3)$

b – on peut regrouper les quantificateurs ∀ à gauche

d'où $F = (\forall X_1 \forall Y_1\ (\neg p(X_1,g(X_1)) \vee q(X_1, Y_1))) \wedge (\forall X_2\ q(X_2, f(X_2))) \wedge (\forall X_3\ p(a, X_3))$

$$= \boldsymbol{\forall X_1 \forall Y_1 \forall X_2 \forall X_3\ (\ (\neg p(X_1,g(X_1)) \vee q(X_1,Y_1)) \wedge q(X_2,f(X_2)) \wedge p(a,X_3)\ )}$$

3.2 Pour trouver une interprétation I qui satisfait F sur un domaine de variation $D = \{e_1,e_2\}$ dans le cas où les prédicats ne sont pas des constantes,

il faut montrer que la formule est vraie pour une *certaine définition* de p, q, f, g et a :

Comme F est une conjonction (forme normale conjonctive) on doit montrer que les 3 sous-formules sont **simultanément** vraies pour une certaine interprétation de p, q, f, g et a.
On doit fixer :
- a : parmi 2 valeurs possibles
- f(X) : parmi 4 définitions possibles
- g(X) : parmi 4 définitions possibles
- p(X,Y) : parmi 16-2 =14 définitions possibles, car $p \neq Cte$
- q(X,Y) : parmi 16-2 =14 définitions possibles, car $q \neq Cte$

On doit donc avoir :

(1) $I(\forall X_1 \forall Y_1\ (\neg p(X_1,g(X_1)) \vee q(X_1, Y_1)) = V$

(2) $I(\forall X_2\ q(X_2, f(X_2))) = V$

(3) $I(\forall X_3\ p(a, X_3)) = V$

En enlevant les quantificateurs $\forall$, ces formules deviennent :

(1’) $I((\neg p(e_1,g(e_1)) \vee q(e_1, e_1)) \wedge$ $(x_1 = e_1 \quad y_1 = e_1)$
$(\neg p(e_1,g(e_1)) \vee q(e_1, e_2)) \wedge$ $(x_1 = e_1 \quad y_1 = e_2)$
$(\neg p(e_2,g(e_2)) \vee q(e_2, e_1)) \wedge$ $(x_1 = e_2 \quad y_1 = e_1)$
$(\neg p(e_2,g(e_2)) \vee q(e_2, e_2)))$ $(x_1 = e_2 \quad y_1 = e_2)$
$= V$

(1’) $I((\neg p(e_1,g(e_1)) \vee (q(e_1, e_1)) = V$
et $I((\neg p(e_1,g(e_1)) \vee (q(e_1, e_2)) = V$
et $I((\neg p(e_2,g(e_2)) \vee (q(e_2, e_1)) = V$
et $I((\neg p(e_2,g(e_2)) \vee (q(e_2, e_2)) = V$

(2’) $I(q(e_1, f(e_1))) = V$
et $I(q(e_2, f(e_2))) = V$

(3’) $I(p(a, e_1)) = V$
et $I(p(a, e_2)) = V$

On peut permuter les valeurs e_1 et e_2, sans rien changer aux formules 1',2' et 3'. Cette symétrie nous permet de diviser le problème en deux familles de solutions équivalentes pour $a=e_1$ et pour $a=e_2$. On peut se limiter à étudier le cas $\mathbf{a=e_1}$
On re-écrit donc (3') en :

(3’’) $I(p(e_1, e_1)) = V$
et $I(p(e_1, e_2)) = V$

Dans le but de faire apparaître des littéraux identiques dans 1', 2' et 3'', on fixe arbitrairement les fonctions f et g aux fonctions particulières : **f(X) = X** et **g(X) = X**

On a donc 8 contraintes à satisfaire :

(1’’) $I((\neg p(e_1,e_1) \vee (q(e_1, e_1)) = V$)
et $I((\neg p(e_1,e_1) \vee (q(e_1, e_2)) = V$ (
et $I((\neg p(e_2,e_2) \vee (q(e_2, e_1)) = V$)

et $I((\neg p(e_2,e_2) \vee (q(e_2, e_2)) = V$ ❪
(2') $I(q(e_1, e_1)) = V$ ❭
et $I(q(e_2, e_2)) = V$ ❮
(3'') $I(p(e_1, e_1)) = V$ ❯
et $I(p(e_1, e_2)) = V$ ❰

On peut voir que ❭ couvre ❫, et que ❮ couvre ❪. On peut donc enlever ❫ et ❪.

D'autre part on peut simplifier ❨ compte tenu de ❯ et simplifier ❩ compte tenu de ❰.

Il reste :

$I(q(e_1, e_2)) = V$ ❨
et $I((\neg p(e_2,e_2) \vee (q(e_2, e_1)) = V$ ❩
(2') $I(q(e_1, e_1)) = V$ ❭
et $I(q(e_2, e_2)) = V$ ❮
(3'') $I(p(e_1, e_1)) = V$ ❯
et $I(p(e_1, e_2)) = V$ ❰

Construisons la table de vérité des prédicats p et q :

X	Y	p(X,Y)	q(X,Y)
e_1	e_1	**V** ❯	**V** ❭
e_1	e_2	**V** ❰	**V** ❨
e_2	e_1	?	?
e_2	e_2	?	**V** ❮

La contrainte $q \neq Cte$ (❱) impose $I(q(e_2, e_1)) = F$
ce qui permet de simplifier ❩ qui se reécrit en :

$I(\neg p(e_2,e_2)) = V$, soit :

$I(p(e_2, e_2)) = F$ ❩

X	Y	p(X,Y)	q(X,Y)
e_1	e_1	**V** ❯	**V** ❭
e_1	e_2	**V** ❰	**V** ❨
e_2	e_1	?	**F** ❱
e_2	e_2	**F** ❩	**V** ❮

La valeur de $p(e_2, e_1)$ reste libre.

Il existe donc bien au moins une interprétation de p, q, f, g et a qui pemet de satisfaire la formule. (cqfd)

Exercice 4 : Principe de résolution et validité d'énoncé

1. Pour montrer que le raisonnement est valide, on veut montrer que :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \quad \vDash \quad Cl$$

c-à-d que :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \neg Cl \quad \vDash \quad \square \text{ (clause vide)}$$

Etapes =

- mise sous forme prénexe des formules H_1, H_2, H_3 et $\neg Cl$
- skolémisation
- traduction en sous forme de clauses
- application du P.R jusqu'à obtenir la clause vide

$H_1 = \forall X \forall Y\ (a(X,Y) \Rightarrow c(X,Y))$
$\quad = \forall X \forall Y\ (\neg a(X,Y) \vee c(X,Y))$

$H_2 = \forall X \forall Y\ (\exists Z(c(X,Z) \wedge a(Z,Y)) \Rightarrow c(X,Y))$
$\quad = \forall X \forall Y\ (\neg(\exists Z(c(X,Z) \wedge a(Z,Y))) \vee c(X,Y))$
$\quad = \forall X \forall Y\ (\forall Z\ (\neg(c(X,Z) \wedge a(Z,Y)) \vee c(X,Y))$
$\quad = \forall X \forall Y \forall Z\ (\neg c(X,Z) \vee \neg a(Z,Y) \vee c(X,Y))$

$H_3 = \neg(\exists X c(X,X))$
$\quad = \forall X\ \neg c(X,X)$

$\neg Cl = \neg(\forall X \forall Y\ (\neg a(X,Y) \vee \neg a(Y,X)))$
$\quad = \exists X \exists Y\ (a(X,Y) \wedge a(Y,X))$

$F = H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \wedge \neg Cl$

On doit renommer les variables :

$F = \forall X_1 \forall Y_1\ (\neg a(X_1,Y_1) \vee c(X_1,Y_1)) \quad \wedge$

$\quad \forall X_2 \forall Y_2 \forall Z_2\ (\neg c(X_2,Z_2) \vee \neg a(Z_2,Y_2) \vee c(X_2,Y_2)) \wedge$
$\quad \forall X_3\ \neg c(X_3,X_3) \quad \wedge$
$\quad \exists X_4 \exists Y_4\ (a(X_4,Y_4) \wedge a(Y_4,X_4))$

On fait remonter les quantificateurs à gauche. On peut placer $\exists X_4 \exists Y_4$ en tête de formule car $a(X_4,Y_4) \wedge a(Y_4,X_4)$ ne dépend pas des variables quantifiés universellement :

$F = \exists X_4 \exists Y_4\ \forall X_1 \forall Y_1\ \forall X_2 \forall Y_2 \forall Z_2 \forall X_3$
$\quad (\neg a(X_1,Y_1) \vee c(X_1,Y_1)) \quad \wedge$
$\quad (\neg c(X_2,Z_2) \vee \neg a(Z_2,Y_2) \vee c(X_2,Y_2)) \quad \wedge$

$\neg c(X_3,X_3)$ $\wedge$
$(a(X_4,Y_4) \wedge a(Y_4,X_4))$

Skolémisation :

On remplace toutes les occurrences de X_4, et Y_4 respectivement par e_1 et e_2 (constantes). D'où l'ensemble des clauses :

$$
\begin{array}{lll}
S = \{ & (\neg a(X_1,Y_1) \vee c(X_1,Y_1)), & C_1 \\
 & (\neg c(X_2,Z_2) \vee \neg a(Z_2,Y_2) \vee c(X_2,Y_2)), & C_2 \\
 & \neg c(X_3,X_3), & C_3 \\
 & a(e_1, e_2), & C_4 \\
 & a(e_2, e_1) & C_5 \\
 \} & &
\end{array}
$$

$\{C_1, C_4\}$ -------pr------> $\boxed{c(e_1, e_2)}$ C_6

$\sigma = \{ e_1|X_1, e_2|Y_1\}$

d'où $C_1^{\sigma} = (\neg a(e_1, e_2) \vee c(e_1, e_2))$ et

$C_4^{\sigma} = a(e_1, e_2)$

$\{C_2, C_3\}$ -------pr------> $\boxed{\neg c(X_3,Z_2) \vee \neg a(Z_2,X_3)}$ C_7

$\sigma = \{ X_3|X_2, X_3|Y_2 \}$

d'où $C_2^{\sigma} = \neg c(X_3,Z_2) \vee \neg a(Z_2, X_3) \vee c(X_3, X_3)$ et

$C_3^{\sigma} = \neg c(X_3, X_3)$

renommage : $\boxed{\neg c(X_7,Z_7) \vee \neg a(Z_7,X_7)}$ C_7

$\{C_6, C_7\}$ -------pr------> $\boxed{\neg a(e_2, e_1)}$ C_8

$\sigma = \{ e_1|X_7, e_2|Z_7\}$

d'où $C_6^{\sigma} = c(e_1, e_2)$ et

$C_7^{\sigma} = \neg c(e1, e_2) \vee \neg a(e_2, e_1)$

$\{C_5, C_8\}$ -------pr------> $\square$ (cqfd)

aucune substitution nécessaire

Donc le raisonnement est correct.

Exercice 5 : Validité d'énoncés

Les bébés sont illogiques.

Nul n'est méprisé lorsqu'il peut venir à bout d'un crocodile.

Les gens illogiques sont méprisés.

1. Base de 4 prédicats unaires

bebe(X) vrai si X est un bébé
illogique(X) vrai si X est illogique
meprise(X) vrai si X est meprise
vabc(X) vrai si X vient à bout d'un crocodile

2. Traduction des énoncés en formules de LP1.

$\forall X\ (bebe(X) \Rightarrow illogique(X))$
$\forall X\ (vabc(X) \Rightarrow \neg meprise(X))$
$\forall X\ (illogique(X) \Rightarrow meprise(X))$

3. Traduction en clauses.

C1 $\boxed{\neg bebe(X) \vee illogique(X)}$

C2 $\boxed{\neg vabc(Y) \vee \neg meprise(Y))}$

C3 $\boxed{\neg illogique(Z) \vee meprise(Z))}$

4. Saturation (trouver toutes les clauses possibles par résolution à partir de C1,C2, C3

{C1, C3} -------pr------> $\boxed{\neg bebe(X) \vee meprise(X)}$ C4
Les bébés sont méprisés.

{C2, C3} -------pr------> $\boxed{\neg vabc(Y) \vee \neg illogique(Y))}$ C5

Les personnes qui viennent à bout d'un crocodile ne sont pas illogiques.
(ou bien les gens illogiques ne viennent pas à bout d'un crocodile).

{C1, C5} -------pr------> $\boxed{\neg bebe(X) \vee \neg vabc(X)}$ C6
Les bébés ne viennent pas à bout d'un crocodile.
(ou bien les gens qui viennent à bout d'un crocodile ne sont pas des bébés)