南昌大学 2016-2017 学年第一学期期末考试

《高等数学（I）上》试卷 A 参考答案

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、$-5<x<2$；2、$x^x(\ln x+1)dx$；3、$\frac{1}{2}$；4、$\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}$； 5、$\frac{\pi a^2}{2}$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、B; 2、C; 3、A; 4、D; 5、B

三、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1、解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n+1})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1-\frac{2}{n+1})^{\frac{n+1}{2}}\right]^2$

$=e^{-2}$

2、解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan x-x}{x^3}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right)=\frac{1}{3}$

3、解：方程 $e^y+ye^x=2e$ 两边对 x 求导，得

$y'e^y+y'e^x+ye^x=0$

即有 $y'=-\frac{ye^x}{e^x+e^y}$ ，从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=-\frac{1}{2}$

4、解： $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-\sin t}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)}{dx/dt}=\frac{-t\cos t+\sin t}{4t^3}.$$

四、计算题（每小题 **8** 分，共 **16** 分）

1、解：由于 $y' = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

$$y'' = 2x - 2$$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	-		-	0	+
y''	-		-	0	+		+
y	增、凸	极大	减、凸	拐点	减、凹	极小	增、凹

或： 单调递增区间为：$(-\infty,-1)$ 和 $(3,+\infty)$，单调递减区间为：$(-1,3)$

极值点有：极大值点 $x=-1$，极小值点 $x=3$

凸区间为：$(-\infty,1)$ 凹区间为：$(1,+\infty)$

拐点为： $(1,-\frac{8}{3})$

2、解：由于 $y'|_{x=1} = 1$，故 $y = \frac{x^2}{2}$ 在点 $(1,\frac{1}{2})$ 处的法线方程为

$$y = -x + \frac{3}{2}$$

由 $\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases}$ 得到抛物线与法线的另一交点横坐标为 $x = -3$ ，

故所求面积为：

$$\int_{-3}^{1} \left(-x + \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-3}^{1}$$

$$= \frac{16}{3}$$

五、计算题（每小题 6 分，共 24 分）

1、解： $\int \frac{x^2}{\left(2+x^3\right)^2} dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(2+x^3\right)^2} d(x^3+2)$

$= -\frac{1}{3(2+x^3)} + c$

2、解： 令 $x = 2\sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，则

$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} 2\cos t dt = 4\int \sin^2 t dt$

$= 2\int (1-\cos 2t) dt$

$= 2t - \sin 2t + c$

$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$

3、解： $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \ln x d(\frac{1}{x})$

$= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\ln x)$

由于 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$，所以

上式 $= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$

六、计算及证明题：（每小题 **6** 分，共 **12** 分）

1、解：在积分$\int_0^x tf(x-t)dt$中令$u=x-t$，则

$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$.

方程$x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$两边对$x$求导，可得：

$$\int_0^x f(u)du=\sin x.$$

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2、解：设$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，由已知$F(0)=F(1)=0$.

由于$f(x)$在$[0,1]$上连续，故在$(0,1)$内$F'(x)=f(x)$.

$0=\int_0^1 f(x)(2-e^x)dx=\int_0^1(2-e^x)dF(x)$

$=(2-e^x)F(x)\Big|_0^1-\int_0^1 F(x)d(2-e^x)$

$=\int_0^1 F(x)e^x dx$.

由积分中值定理，$\exists\xi\in(0,1)$使得$F(\xi)e^{\xi}=\int_0^1 F(x)e^x dx=0$，即$F(\xi)=0$.

由罗尔定理，在$(0,\xi)$，$(\xi,1)$上分别存在点ξ_1，ξ_2，使得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，

即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.