2015-2016 学年第一学期高等数学 1（上）期末试卷

一、填空题

1. 已知函数 $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$，求 $dy=$__________________。

2. 极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\ln\left(1+\sin x\right)}=$__________________。

3. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-1}+\lg\left(x\right)$ 的连续区间为__________________。

4. $\int x\left(1-x\right)^{2015}dx=$__________________。

5. 定积分 $\int_{-2}^{2}x\sqrt{2-x^2}dx=$__________________。

答案：

一、1 $dy=\dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}dx$； 2 1； 3 $0<x<1\cup x>1$；

4 $\dfrac{1}{2017}\left(1-x\right)^{2017}-\dfrac{1}{2016}\left(1-x\right)^{2016}+c$； 5 0.

二、单项选择题：

1. 当 $x\to 0$ 时，下列与 $2x$ 同阶（不等价）的无穷小量是（　　）。

(A) $\sin x-x$　(B) $\sin\left(2x\right)$　(C) $x^2\sin x$　(D) e^x-1

2. 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+h\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}{2h}=$（　　）。

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) 0　(C) -1　(D) $\dfrac{1}{2}$

3. 假设函数 $f(x)$ 的图像如图 1 所示，如果 $\lim_{x\to b} f(x)$ 存在，且 $f(x)$ 在点 b 不连续，则 $b=$（　　　　）。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

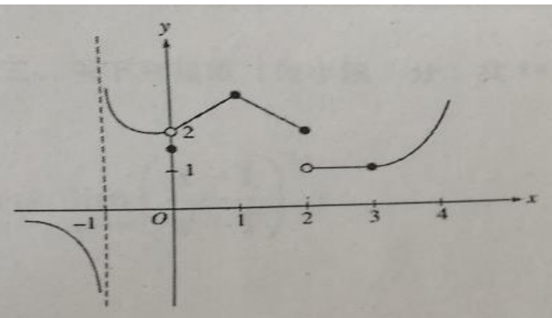

图 1

4. 曲线 $y^3x+y^2x^2=6$ 在点 $(2,1)$ 的切线斜率为（　　　　）。

(A) $-\dfrac{3}{2}$　　(B) -1

(C) $-\dfrac{5}{14}$　　(D) $-\dfrac{3}{14}$

5. 在图 2 中哪个点满足 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 同时为负（　　　　）。

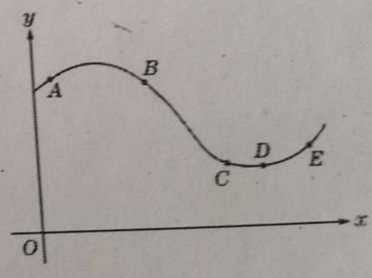

图 2

(A) A　　(B) B

(C) C　　(D) D

答案：

二、1（D）；　2（D）；　3（B）；　4（C）；　5（B）。

三、1、解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{2x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}\left(-\frac{2}{x+1}\right)2x}$$

$$=e^{-4}$$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x} te^t dt}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{2x}2}{2\cos 2x}$

$$=0$$

四、求下列函数的导数（每小题 7 分，共 14 分）

(1) 设 $\begin{cases} x=\sin\sqrt{t} \\ y=t-\tan t \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

四、1、解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

$$=\frac{\cos^2 t-1}{\cos^2 t}\frac{2\sqrt{t}}{\cos\sqrt{t}}$$

$$=\frac{-\sin^2 t}{\cos^2 t}\frac{2\sqrt{t}}{\cos\sqrt{t}}$$

$$=-\frac{2\sqrt{t}}{\cos\sqrt{t}}\tan^2 t$$

(2) 由方程 $\ln(y+1)=x^2+\ln(y-1)$ 可确定函数 $y=y(x)$，求 y'。

2、对原方程两边求导，可得

$$\frac{1}{y+1}y'=2x+\frac{1}{y-1}y'$$

化简，可得

$$y'=-x(y+1)(y-1)$$

五、1、 $\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x d\ln x$

$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ ----------------7 分

2、 $\int_0^{\pi/2}\cos^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

3、 $\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$

令 $e^x=t$ ，于是 $x=\ln t, dx=\frac{1}{t}dt$ ，

原式 $=\int\frac{1}{t\left(\sqrt{t+1}\right)}dt$

令 $u=\sqrt{t+1}, t=u^2-1, dt=2udu$ ，则

$$\int\frac{1}{t\left(\sqrt{t+1}\right)}dt=\int\frac{2}{u^2-1}du$$

$$=\int\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$$

六、应用题（每小题 7 分，共 14 分）

得 分	评阅人

（1）求函数 $f\left(x\right)=2x^{3}-6x^{2}-18x-7$ 的单调区间和凹凸区间，并请给出相应极值点和拐点。

六、

1、求 $f(x)$ 导数，得 $f'(x)=6(x-3)(x+1)$

令 $f'(x)=0$ ，可得 $x_1=3, x_2=-1$

当 $x\in(-\infty,-1), f'(x)>0$ ，函数单调递增；

当 $x\in(-1,3), f'(x)<0$ ，函数单调递减；

当 $x\in(3,+\infty), f'(x)>0$ ，函数单调递增；

因此，$x_1=3$ 为极小值点；$x_2=-1$ 为极大值点。

求 $f(x)$ 二阶导数，得 $f''(x)=12x-12$

令 $f''(x)=0$ ，可得 $x_3=1$

当 $x\in(-\infty,1), f''(x)<0$ ；当 $x\in(1,+\infty), f''(x)>0$ ；

从而 $x_3=1$ 为拐点。

（2）假设 $f\left(x\right)$ 在定义域内连续，定义 $\int_0^{x/2} f\left(t\right)dt=2x\left(\sin x+1\right)$，求 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2、由 $\int_0^{x/2} f\left(t\right)dt=2x\left(\sin x+1\right)$，两边求导，得

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}=2\left(\sin x+1\right)+2x\cos x$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=4\left(\sin x+1\right)+4x\cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4+4\pi\cos\pi=4-4\pi$$

七、证明题（本题满分 7 分）

得 分	评阅人

设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上有连续的导函数，且 $f(1)=f(3)=0$，则

$\max\limits_{1\le x\le 3}|f'(x)| \ge \left|\int_1^3 f(x)dx\right|$。

七、为了方便，令 $M=\max\limits_{1\le x\le 3}|f'(x)|$ 。

$$\left|\int_1^3 f(x)dx\right| \le \int_1^3 |f(x)|dx$$

$$= \int_1^2 |f(x)|dx + \int_2^3 |f(x)|dx$$

$$= \int_1^2 |f(x)-f(1)|dx + \int_2^3 |f(x)-f(3)|dx$$

$$= \int_1^2 |f'(\xi)(x-1)|dx + \int_2^3 |f'(\eta)(x-3)|dx$$

$$\le M\int_1^2 (x-1)dx + M\int_2^3 (3-x)dx$$

$$= M$$