矩阵论

First Assignment

Student Name: 杨澍　　Student ID: 202218019427012

---

1. **Question 1.1.4:**

   Solve:

   因为

   $$cos2t = 2cos^2t - 1$$

   即

   $$cos2t - 2cos^2t + 1 = 0$$

   故

   $$cos2t, 2cos^2t, 1$$

   线性相关

2. **Question 1.1.7:**

   Solve

   (1)因为

   $$x_1 + 2x_2 = y_3$$

   $$x_2 + 2x_3 = y_4$$

   $$y_1 + 2y_2 = x_3$$

   $$y_2 + 2y_3 = x_4$$

   所以过渡矩阵为

   $$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (2)

   $$x = 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4$$

   即在基（II）坐标为

   $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

   所以在基（I）坐标为

   $$x = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

   $$= \begin{bmatrix} 11 & 23 & 4 & -5 \end{bmatrix}^T$$

3. **Question 1.1.11:**

   Solve

$$V_1 \cap V_2$$

   的子空间应同时满足

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 0 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 = 0 \end{cases}$$

   解得其一组基为

$$(1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, -1)^T$$

4. **Question 1.1.12: Solve** (1) 对

$$x, y \in V$$

   有

$$x_1 1 + x_2 2 = 0$$

$$y_1 1 + y_2 2 = 0$$

   所以

$$(x_1 1 + y_1 1) + (x_2 2 + y_2 2) = 0$$

$$x + y \in V$$

   同时，对$k \in R$有

$$k(x_1 1 + x_2 2) = 0$$

   即

$$kx \in V$$

   且有

$$0^{2\times2} \in V$$

   所以V为$R^{2\times2}$的子空间 (2) V的一个基为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   所以V的维数为3.

5. **Question 1.2.7: Solve** 先计算基2到基1的过渡矩阵

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   由此可以计算T在基2下的矩阵为

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. **Question 1.2.14: Solve** 矩阵A的特征多项式为

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda) - (\lambda - 1) = \lambda^3 - 2\lambda + 1 = 0$$

所以

$$\begin{aligned} &A^3 - 2A + 1 = 0 \\ &2A^9 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I \\ &= 24A^2 - 37A + 10I \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 48 & -26 \\ 0 & 95 & -61 \\ 0 & -61 & 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7. **Question 1.2.16: Solve** 矩阵A的特征多项式为

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 9)(\lambda + 9)^2 = \lambda^3 + 9\lambda^2 - 81\lambda - 729$$

由H-K定理得最小多项式为

$$(\lambda - 9)(\lambda + 9)$$

8. **Question 1.2.18: Solve** 因为λ_0为T_1特征值所以

$$T_1 x = \lambda_0 x$$

$$\begin{aligned} T_1 T_2 x &= T_2 \lambda_0 x \\ &= \lambda_0 (T_2 x) \end{aligned}$$

即$T_2 x \in V_\lambda 0$ 所以$V_\lambda 0$为T_2不变子空间

9. **Question 1.2.19: Solve**

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

所以若当标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. **Question 1.3.7: Solve** 先证充分性，若$x_1 ...... x_n$线性相关,则有

$$\sum k_i x_i = 0$$

使之与x_m做内积得

$$\sum k_i (x_i, x_m) = 0$$

故detB=0 再证必要性, 由detB!=0可知,

$$\sum k_i (x_i, x_m) = 0$$

即$x_1 ...... x_n$线性无关。

11. **Question 1.3.9:**

$$\begin{aligned}(Tx,Tx)&=(x-2(y,x)y,x-2(y,x)y)\\&=(x,x)-4(y,x)(x,y)+4(y,x)(y,x)(y,y)\\&=(x,x)\end{aligned}$$

所以为正交变换。

12. **Question 1.3.11: Solve** 先求得该矩阵的特征值

$$det(\lambda I-A)=0$$

解得

$$\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$$

对应的特征向量为

$$x_1=(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^T,x_2=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2},\frac{1}{2})^T,x_3=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2},\frac{1}{2})^T$$

所以可求得

$$P=(x_1,x_2,x3)$$

13. **Question 1.3.15: Solve** (1)其中的一个标准正交基为

$$X_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},X_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},$$

且$X_1\odot X_2=0$所以这是一对正交基,将他们标准化得标准正交基为

$$a_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix},$$

(2)

$$\begin{aligned}\langle TX,Y\rangle&=\left\langle XP+X^T,Y\right\rangle\\&=\langle XP,Y\rangle+\left\langle X^T,Y\right\rangle\quad=\langle X,Y\rangle P+\left\langle X,Y^T\right\rangle=\langle X,TY\rangle\end{aligned}$$

所以为对称变换。

(3)

$$T[a_1,a_2]=[a_1,a_2]A$$

由此可以求得T在基(a_1,a_2)下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

设C为基(a_1,a_2)到目标基(b_1,b_2)的过渡矩阵则对所要求的基下T对应的矩阵B应满足

$$B=C^{-1}AC$$

即

$$A=CBC^{-1}$$

且B为对角阵,即A可进行特征值分解得到B 解得

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

由此可以得到

$$b_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$