

北京航空航天大学

2020—2021 学年 第一学期期末

《算法设计与分析》

补考试卷

班 级 _____ 学 号 _____

姓 名 _____ 成 绩 _____

2021 年 3 月 8 日

《算法设计与分析》补考试卷

注意事项：1. 关闭手机、将考试用文具以外的物品放于讲台上

2. 严格遵守学校的考场纪律，违纪者请出考场

1. 选择题(每小题 3 分，共 12 分)

从如下 5 个选项中选择与结果对应的一个选项，仅给出答案即可，无需证明。

(a) $\Theta(1)$ (b) $\Theta(\log n)$ (c) $\Theta(n)$ (d) $\Theta(n \log n)$ (e) $\Theta(n^2)$

1.1 $\sum_{i=100}^n \frac{n}{i}$ 为_____

1.2 递归式 $T(n) = T(n/2) + n, T(1) = 1$ 的解为_____

1.3 在最大公约数(gcd)问题中，对于给定的两个正整数 n, m ，目标是要找到一个可以同时整除 n 和 m 的最大的正整数。假设 $n > m$ ，这个问题的输入规模(字符数)为_____

1.4 在一个包含 n 个点的无向图中，最大可能的边数为_____

2. 判断题(每小题 3 分, 共 12 分)

对下面的每个描述, 请判断其是**正确**或**错误**, 或**无法判断正误**。对于你判为错误的描述, 请说明它为什么是错的。

2.1 $P \subseteq NP$ 。

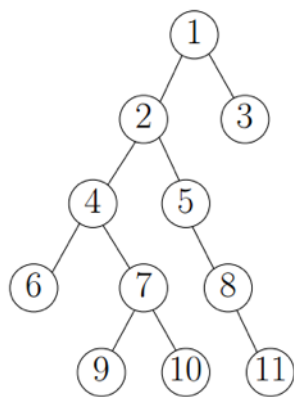
2.2 对某问题 $X \in NP$ 而言, 若可以证明归约式 $X \leq_p 3-SAT$, 则 X 无法在多项式时间内被解决。

2.3 若 TSP 问题无法在多项式时间内被解决, 则 $3-SAT$ 问题也无法在多项式时间内被解决。

2.4 给定一个包含 n 个点的图 G , 判断其中是否包含大小为10的团不能在多项式时间内被解决。

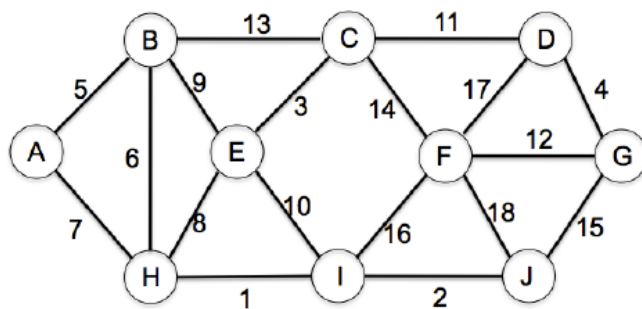
3. 广度优先搜索算法运行实例（16 分）

如图是一个无向连通图，它同时是一颗树。以节点 6 为起点，执行广度优先搜索，请给出广度优先搜索的过程，并给出搜索完毕后由源点到各点的距离(假设每条边的权值为 1)。



4. Prim 算法运行实例 (16 分)

在如下图所示的图结构上模拟 Prim 算法的执行过程：假设起始结点为A，画出每增加一条边后，形成的局部最小生成树。



5. 波浪序列的最小值问题(15 分)

给定一个包含 n 个元素的数组 A 。其中， $A[1] = A[n] = 0$ ，该序列从0开始递增到其最大值，随后开始递减直到其最小值，最后重新递增到0结束，其形状类似一条波浪线。例如 $A = [0, 2, 5, 8, 4, 3, 1, -3, -5, -2, 0]$ 。请设计算法求出该序列中的最小值并分析其时间复杂度。时间复杂度为 $O(\log n)$ 的算法可得满分，复杂度高于 $O(\log n)$ 的算法也可得分。

6. 子序列判定问题(15 分)

给定两个序列 $X = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ 和 $Y = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ 。请设计算法判断 X 是否是 Y 的子序列并分析其时间复杂度。可以假定 $m \leq n$ 。

例如，如果 $X = \langle B, C, B, A \rangle$ ， $Y = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ ，那么答案为是；然而若 $X = \langle B, D, B, A \rangle$ ，那么答案为否。时间复杂度为 $O(n)$ 的算法可得满分，复杂度高于 $O(n)$ 的算法也可得分。

7. 表达式求值问题(14 分)

给定一个包含 n 个元素的数组 A ，其中 $1 \leq A[i] \leq 9$ ($1 \leq i \leq n$)。现需要在其中插入 m 个加号，将该数组变为一个数学表达式。例如，数组 $A = [7, 9, 8, 4, 6]$ 包含了 $n = 5$ 个元素，在其中插入 $m = 2$ 个加号后，得到的表达式可能为 $7 + 98 + 46$ 或 $79 + 8 + 46$ 。请你设计算法求解加号的添加方案使得表达式的运算结果最小。在上述实例中， $79 + 8 + 46$ 的和为 133，为最小值。

1. 若提供函数 $atoi(i, j)$ 可以在 $O(1)$ 的时间内将数组 $A[i..j]$ 转化为数字，请设计一个时间复杂度为 $O(n^2m)$ 的算法求解该问题。（例如，在上述实例中， $atoi(2, 4) = 984$ 。）复杂度高于 $O(n^2m)$ 的算法也可得分。(10分)
2. 在输入规模较大时，函数 $atoi(i, j)$ 的时间复杂度并不是 $O(1)$ ，而是 $O(j - i + 1)$ 。在此前提下，请设计一个时间复杂度为 $O(n^2m)$ 的算法求解该问题。复杂度高于 $O(n^2m)$ 的算法也可得分。(4分)