

计算机学院《算法设计与分析》

(2023 年秋季学期)

第三次作业

作业提交截止时间：2023 年 11 月 30 日 23 : 55

1 分蛋糕问题 (20 分)

给定 n 块体积不同的蛋糕，其体积分别用 a_1, \dots, a_n 表示。现要从中挑选出 k ($k < n$) 块蛋糕分给同学们。不妨记选出的蛋糕的编号为 s_1, \dots, s_k ($1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq n$)，则这次分配的不公平度为

$$\max\{a_{s_1}, \dots, a_{s_k}\} - \min\{a_{s_1}, \dots, a_{s_k}\}$$

请设计一个尽可能高效的算法制定蛋糕的选取方案，使得选出蛋糕的不公平度最小，请描述算法的核心思想，必要时给出证明，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

2 分糖果问题 (20 分)

F 同学手中有 n 袋糖果，其中第 i 袋中有 a_i 颗糖。F 同学希望在不拆开糖果袋的前提下把一些糖果分给他的妹妹，但是他希望分完之后留给自己的糖果总数要大于妹妹得到的糖果总数。请设计一个算法帮 F 同学计算他最少要给自己留多少袋糖果才能满足要求，请描述算法的核心思想，必要时给出证明，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

例如，F 同学持有 3 袋糖果，分别装有 $\{2, 1, 2\}$ 颗糖果，这时他至少需要给自己留 2 袋糖果，这两袋糖果的数量可以是 $\{1, 2\}$ ，或者是 $\{2, 2\}$ 。

3 最大收益问题 (20 分)

某公司有一台机器，在每天结束时，该机器产出的收益为 X_1 元。在每天开始时，若当前剩余资金大于等于 U 元，则可以支付 U 元来升级该机器（每天最多只能升级一次）。从升级之日起，该机器每天可以多产出 X_2 元的收益。即是说，在执行 K 次升级之后，这台机器每天的产出为 $X_1 + K \times X_2$ 元。

该公司初始资金为 C 元，请你设计算法求出 n 天之后该公司拥有的总资金的最大值。请描述算法的核心思想，必要时给出证明，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

4 哈密顿路径问题 (20 分)

哈密顿路径 (Hamiltonian path) 是指图中每个节点都仅经过一次且必须经过一次的路径。对于一般的图结构来说，求解哈密顿路径的问题是 NP 难问题。然而，在有向无环图上寻找哈密顿路径的问题是存在多项式时间的解法的。

如图 1 所示，左侧图包含一条哈密顿路径 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ ，右侧图则不包含哈密顿路径。给定一个有向无环图 $G = (V, E)$ ，请设计一个高效算法来寻找图 G 的一条哈密顿路径，如不存在哈密顿路径则返回 -1 ，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

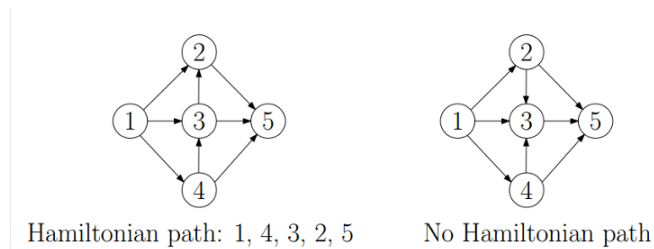


图 1: 哈密顿路径

5 马的遍历问题 (20 分)

给定一个 $n \times m$ 的中国象棋棋盘，规定其左下角的格点为坐标原点，坐标系 x 轴和 y 轴分别沿右方以及上方延伸。现在点 (x, y) 上有一个马，该棋子与中国象棋的马移动规则相同，并且不允许移动到棋盘范围外。

请设计一个高效算法，计算一个距离矩阵 $D[n][m]$ ， $D[i][j]$ 表示马从 (x, y) 移动到 (i, j) 最少需要几步，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。