

北京航空航天大学

2022-2023 学年 第一学期期末

《算法设计与分析》

A 卷

班 级 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_ 成 绩 \_\_\_\_\_

2022 年 12 月 23 日

## 《算法设计与分析》期末考试卷

注意事项:

1. 腾讯会议严禁开启美颜和虚拟背景。考试过程中需全程打开视频和音频，务必保持考场环境安静，避免杂音影响其他考生。
2. 本场考试为开卷考试，考生用到的参考资料需保持在摄像头范围内。
3. 答卷过程中不允许打开除北航云盘、PDF 阅读软件之外的其它任何软件。
4. 待监考老师发出可以离开考场的指令后，才可以退出腾讯会议，离开考场。未经允许退出考场，将按照违纪处理。

### 1. 填空题(每小题 3 分，共 12 分)

从如下 5 个选项中选择与结果对应的一个选项，仅给出答案即可，无需证明。

(a)  $\Theta(1)$       (b)  $\Theta(n)$       (c)  $\Theta(n \log n)$       (d)  $\Theta(n^{\log_2 3})$       (e)  $\Theta(n^2)$

(1)  $\sum_{i=2022}^n \frac{n}{i}$  为\_\_\_\_\_

(2) 递归式  $T(n) = 3T(n/2) + \log n, T(1) = 1$  的解为\_\_\_\_\_

(3) 在包含  $2^{10}$  个元素的数组上进行快速排序算法，其运行时间为\_\_\_\_\_

(4) 对于包含  $n$  个顶点的无向完全图，其最小生成树的边数为\_\_\_\_\_

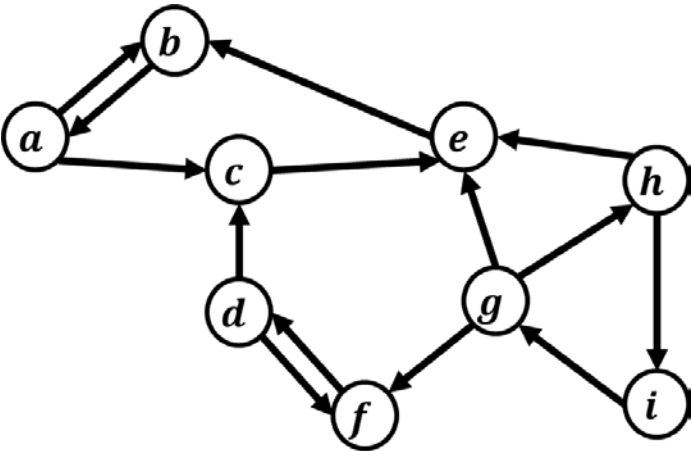
## 2. 判断题(每小题 3 分, 共 12 分)

对下面的每个描述, 请判断其是**正确**或**错误**, 或**无法判断正误**。对于你判为错误或无法判断正误的描述, 请说明它为何是错的或为何无法判断。

- (1) 任何 NPC 问题和任何 NP-Hard 问题都是 NP 问题。
- (2)  $P \text{ 问题} \cap NPC \text{ 问题} = \emptyset$ 。
- (3) 对于任意一个包含  $n$  个点的图  $G(V, E)$ , 如果能在  $O(n^9)$  时间求出其最大独立集, 那么所有的 NPC 问题都可以在多项式时间复杂度内被解决。
- (4) 给定一个包含  $n$  个点的图  $G$ , 判断图  $G$  中是否包含大小为 5 的团无法在多项式时间内被解决。

3. 强连通分量运行实例(10 分)

在如下图所示的有向图G上从点a开始模拟强连通分量算法的运行过程。



- (1) 按照强连通分量算法在反向图 $G^R$ 执行深度优先搜索(DFS)，并根据各顶点的完成时刻顺序L填写如下表格。

顶点完成 时间次序	1	2	3	4	5	6	7	8	9
对应顶点									

- (2) 在图 G 上再执行一次 DFS 得到每个强连通分量。请写出此 DFS 的执行过程中各顶点的发现时间与完成时间，以及每个强连通分量所包含的顶点集。

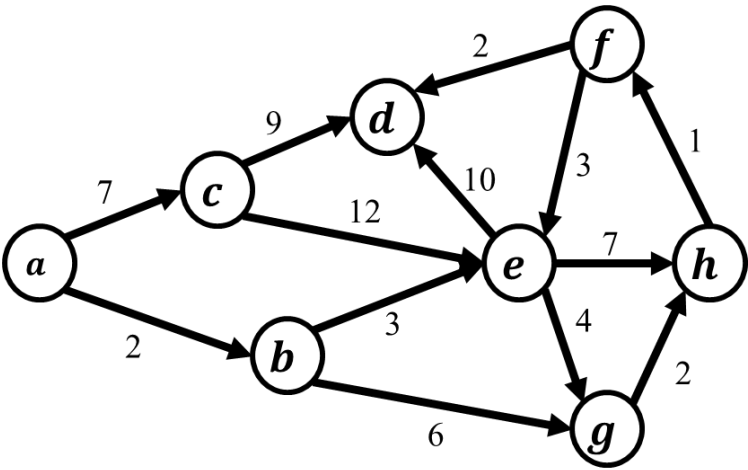
顶点标号	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>
发现时间									
完成时间									

强连通分量为：

\_\_\_\_\_

4. Dijkstra 算法运行实例(10 分)

(1) 在如下图所示的有向图上模拟 Dijkstra 算法的运行过程计算出点*a*到其他点的最短路径，完成下表。对每个点*v*，表中的*v.d*表示 Dijkstra 算法执行过程中点*v*应存储的信息，表格的前两行已给出。



	<i>a.d</i>	<i>b.d</i>	<i>c.d</i>	<i>d.d</i>	<i>e.d</i>	<i>f.d</i>	<i>g.d</i>	<i>h.d</i>
—	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
<b><i>a</i></b>	0	2	7	∞	∞	∞	∞	∞

(2) 如果将从点*c*到点*e*的边权重改为−12，能否继续使用 Dijkstra 算法计算单源最短路径？若不能，请列举出一种可行的算法（写出算法名称即可）。

## 5. 区间覆盖问题(12 分)

给定数轴 $X$ 上 $n$ 个不同点的集合 $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ , 现希望使用若干个长度为 $l$ 的闭区间来覆盖所有的点, 请设计算法找到**最少的闭区间个数**及此时**各个闭区间的范围**。写出该算法伪代码, 并分析其时间复杂度。时间复杂度为 $O(n \log n)$ 的算法可得满分, 时间复杂度高于 $O(n \log n)$ 的算法也会酌情给分。

## 6. 寻找非零位问题(14 分)

给定一个长度为 $n$ 的数组 $A[1..n]$ ，其包含的元素为若干个连续的0后面接若干个连续的1(例如0000011)。题目保证 $A$ 中至少包含一个0和一个1。

(1) 请设计一个时间复杂度为 $O(\log n)$ 的算法来找出数组 $A$ 中**第一个1的位置**并给出算法伪代码。(即找出位置 $k$ 满足 $A[k-1] = 0, A[k] = 1$ )

(2) 假定数组 $A$ 中1的个数 $m$ 远小于数组长度 $n$ ，请设计一个时间复杂度为 $O(\log m)$ 的算法来找出数组 $A$ 中第一个1的位置并给出算法伪代码。

## 7. 最大汇聚度生成树问题(14 分)

定义一棵树 $T = (V^T, E^T)$ 的汇聚度 $D$ 为该树中连边最多的点的度数，即：

$$\text{汇聚度 } D = \max_{v \in V^T} \text{Degree}(v)$$

现给定一个连通无向图 $G = (V, E)$ ，请设计算法找到 $G$ 的一个生成树 $T'$ ，并使得该树的汇聚度 $D$ 最大。写出该算法的伪代码，并分析其时间复杂度。时间复杂度为 $O(|V| + |E|)$ 的算法可得满分，时间复杂度高于 $O(|V| + |E|)$ 的算法也会酌情给分。



## 8. 分糖果问题 (16 分)

老师手中有 $n$ 袋糖果，其中第 $i$ 袋中有 $a_i$ 颗糖，且满足 $\sum a_i = m$ 。老师希望在不拆开糖果袋的前提下把这 $n$ 袋糖果分给同学。

(1) 老师希望把糖果均分给两位同学（题目保证 $m$ 是 2 的倍数），请设计算法判断能否完成这一任务。如果无法完成，即返回 NO；如果可以完成，**请输出分配糖果的方案**。写出该算法的伪代码，并分析其时间复杂度。时间复杂度为 $O(mn)$ 的算法可得满分，复杂度高于 $O(mn)$ 的算法也会酌情给分。

(2) 老师希望把糖果均分给三位同学（题目保证 $m$ 是 3 的倍数），请设计算法判断能否完成这一任务。如果无法完成，即返回 NO；如果可以完成，即返回 YES。写出该算法的伪代码，并分析其时间复杂度。时间复杂度为 $O(m^2n)$ 的算法可得满分，复杂度高于 $O(m^2n)$ 的算法也会酌情给分。