

## 一、判断题

- ( F ) Monte Carlo 算法有时不能给出问题的解，但只要给出解就是正确的。
- ( F ) 回溯法用深度优先或广度优先法搜索状态空间树。
- ( T )  $O(f(n)) + O(g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$
- ( T )  $f(n) = O(f(n))$
- ( T ) 若求解问题  $p$  的一个算法  $A$  的复杂性为  $f(n)$ ，则  $p$  的复杂性  $C(p) \leq f(n)$ 。
- ( F ) 随机化快速排序的 worst case 出现于输入数组恰好为已按非降序排列的情况（假设输出的排序结果也要求是非降序）。
- ( ? ) 基于比较的排序问题的下界是  $0.5n \log n \rightarrow 0.5n = O(n \lg n)$
- ( F ) 所有问题当中最难的一组问题被称为 NP 完备 (NP-Complete) 问题。
- ( F ) P 类和 NP 类问题的关系用  $P \subset NP$  来表示是错误的。
- ( T ) 动态规划算法通过增加空间复杂性来降低时间复杂性。

## 二、简答题：

### 1. 证明：

$$1.5n^2 + 365n \lg n = O(n^2) \quad \text{ok}$$

### 2. 推导以下递推式的解：

$$T(n) = 2 \quad \text{当 } n=3 \text{ 时}$$

$$T(n) = 2T(n/3) + 2 \quad \text{当 } n > 3 \text{ 时}$$

$$T(n) = 2^{k+1} - 2, \quad 3^k \leq n < 3^{k+1}$$

### 3. 求解 TSP 问题的最近邻居算法的性能比是多少？这一性能比是如何求得的？

若图为非欧几里德类型，则为无穷；否则， $1/2(\lceil \lg n \rceil + 1)$

### 4. 是否存在具有最小绝对差界的求解地图着色问题的近似算法？若有，请写出伪代码，并说明为什么其绝对差界已达最小。

### 5. 假设在测试字符串相等性的概率算法中，采用的指纹函数为 $I_p(x) = I(x) \bmod p$ ，其中

$I(x)$  为比特串  $x$  的十进制整数表示， $I_p(x)$  为  $I(x)$  基于素数  $p$  的指纹。已知：若  $x$  和  $y$

的长度均为  $n$ ， $p$  为随机选择的小于  $2n^2$  的素数，则当  $I_p(x) = I_p(y)$  时， $x \neq y$  的概

率  $p_f \leq 1/n$ 。又知： $\log_2 10 \approx 3.32$ 。问：测试两个十万位的比特串的相等性时，需

随机产生并传送几次指纹，可使假匹配的概率低于  $10^{-30}$ ？总共传送了多少比特位？

5

$2 \cdot \lg p$

P 选用最大的数进行估计

### 6. 请举出三种寻找问题下界的方法或策略

平凡下界求法 信息理论机制 敌对理论 问题简化

### 7. 按照增长率上升的顺序排列以下函数，即，若在你的排序结果中，函数 $f(n)$ 跟在 $g(n)$ 的后面，则说明应该满足 $g(n)$ 是 $O(f(n))$ ：

$$f_1(n) = 10^n$$

$$f_2(n) = n^{1/3} \quad \text{f5 f4 f2 f1 f3}$$

$$f_3(n) = n^n$$

$$f_4(n) = 2^{\sqrt{\log_e n}}$$

$$f_5(n) = \log_2 n$$

8. 用回溯法求解以下 SAT 问题，请画出搜索树，标明搜索树的分支策略和树中各节点代表的状态（化简的 CNF 形式）

$$(p \vee q \vee s) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee s)$$

离散数学

- 三、设计一求解以下问题的分治算法，写出伪代码，分析其时间复杂性并与该问题的蛮力算法相比较：

某投资咨询公司要长期重复做一项模拟，在这项模拟中他们从过去的某天开始对一支给定的股票连续考察  $n$  天（这些天数记为  $i = 1, 2, \dots, n$ ）；对每天  $i$ ，有当天这只股票每股的价格  $p(i)$ （为简单起见，我们假设这个价格在每一天之内是固定的）。假设在这  $n$  天内，某天买进这支股票并且在以后的某天卖出这些股票。欲求：为了挣到最多的钱，他们应该什么时候买进并且什么时候卖出？

此为求取该股的最大最小的价格，可以每次分出一次或是一半，减小问题进而求取解

- 四、分别用蛮力法、分治法、动态规划法求解以下问题，针对每一个算法，说明其主要求解思想，写出其伪代码，递推公式，并分析其时间复杂性：

某投资咨询公司要长期重复做一项模拟，在这项模拟中他们从过去的某天开始对一支给定的股票连续考察  $n$  天（这些天数记为  $i = 1, 2, \dots, n$ ）；对每天  $i$ ，有当天这只股票每股的价格  $p(i)$ （为简单起见，我们假设这个价格在每一天之内是固定的）。假设在这  $n$  天内，某天买进这支股票并且在以后的某天卖出这些股票。欲求：为了挣到最多的钱，他们应该什么时候买进并且什么时候卖出？

- 五、设计一基于动态规划思想求解以下问题的算法，写出递推关系式、伪代码，并分析你所设计的算法的时间复杂性：

一条公路由西到东长  $M$  公里，公路两旁可能设立广告牌的地点为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，而在

各地点放置一块广告牌带来的收益分别为  $p_1, p_2, \dots, p_n$ 。有关规定要求两块广告牌的距离不能小于 3 公里。要求找到一组地点来放置广告牌，使得总收益最大。

主要是考虑逆序推法

六、设计一求解以下问题的贪心算法，写出伪代码，并分析其时间复杂性：

给定  $m$  台机器  $M_1, \dots, M_m$  和  $n$  项作业，要把每一项作业分配给一台机器来完成。每一项作业  $j$  有处理时间  $t_j$ 。若  $A(i)$  表示分配给机器  $M_i$  的作业集，则机器  $M_i$  需要工作的总时间（亦称为  $M_i$  的负载）为

$$T_i = \sum_{j \in A(i)} t_j$$

完成这  $n$  项作业的工期  $T$  为所有机器的最大负载，即  $T = \max_i T_i$

要求找到一种分配方案，使得完成这  $n$  项作业的工期最小。

楼梯算法

七、设计一种策略，使在下面的游戏中，期望提问的平均次数最少（请给出你得到这一策略的过程）：

一副纸牌，由一张 A，两张 2，三张 3，直到 9 张 9 组成。有人从洗过的这副牌中抽出一张，你需要问一连串用是或否来回答的问题来确定这张牌的点数。

Huffman