

# 计算机学院《算法设计与分析》

## (2023 年秋季学期)

### 第四次作业

作业提交截止时间：2023 年 12 月 28 日 23 : 55

1 对下面的每个描述，请判断其是正确或错误，或无法判断正误。对于你判为错误的描述，请说明它为什么是错的。(每小题 5 分，共 20 分)

1. 任何  $NP$  完全问题都不存在多项式时间内的解法。
2.  $P$  类问题是  $NP$  类问题的真子集。
3. 对某问题  $X \in NP$  而言，若可以证明规约式  $3-SAT \leq_p X$ ，则  $X \in NPC$ 。
4. 对于一个  $NP$  完全问题，其所有种类的输入均需要用指数级的时间求解。

2 节点寻找问题 (20 分)

现存在一张由  $n$  个节点， $m$  条边组成的有向图  $G$ 。图  $G$  中所有顶点按照 1 到  $n$  进行编号，第  $i$  条有向边起点为  $s_i$ ，终点为  $t_i$ 。令函数  $F(i)$  表示由顶点  $i$  出发能够到达的最小的顶点编号（每一个顶点都可以到达它自己）。请设计一个算法计算图  $G$  中每一个顶点  $i$  对应的  $F(i)$  值，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

3 二分图判定问题 (20 分)

二分图是指一个无向图  $G = (V, E)$ ，它的顶点集可被分成两个互不相交子集，且同一个子集中任何两顶点间都没有边相连。（换言之， $G$  为二分图，当且仅当存在两个集合  $V_1, V_2$  满足  $V_1 \cup V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ， $E$  中每条边都连接了  $V_1$  中某个点与  $V_2$  中某个点。）请设计一个基于广度优先搜索 (BFS) 的算法来判断无向图  $G$  是否为二分图，请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

4 道路改建问题 (20 分)

在某一座城市的郊区存在  $n$  个村庄，它们通过一个由  $m$  条双向可通行的公路组成的道路网络彼此互通，第  $i$  条公路连接村庄  $s_i$  和  $t_i$ ，长度为  $w_i$  公里。为了支持各个村庄的经济发展，当地政府计划将其中的一些公路修建为高速公路。但是受限于地理因素，政府只会选择  $n - 1$  条公路进行改建，使得完工后的高速公路网络满足：

1. 这  $n - 1$  条高速公路恰好可以使得这些村庄彼此互通。
2. 最长的若干条（可以是一条或者多条）高速公路长度恰好为  $K$ 。

但是，修建高速公路的过程不能改变原公路的长度，因此，在现有的道路网络上可能无法找到合适的  $n - 1$  条待改建公路，所以当地政府计划先改变一些现有公路的长度。将现有的任意一条公路扩充 1 公里或者缩短 1 公里都需要 1 单位成本，请设计一个算法帮忙计算最少需要多少单位成本改建现有的道路网络才能使得这个高速公路修建工程顺利开工。请描述算法的核心思想，给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。

## 5 新最短路径问题 (20 分)

给定一张由  $n$  个点,  $m$  条有向边组成的有向图  $G$ , 其中第  $i$  条边起点为  $s_i$ , 终点为  $t_i$ , 边权为  $w(s_i, t_i)$ , 保证  $w(s_i, t_i) > 0$ , 假设  $G$  中存在一个由  $t$  个顶点组成的路径  $P = [v_1, v_2, \dots, v_t]$ 。我们在课上学到的有关路径长度的定义为  $dis(P) = \sum_{i=1}^{t-1} w(v_i, v_{i+1})$ , 即路径上每一条边的边权和。现给出一个新的路径长度定义, 如下公式所示:

$$dis(P) = \sum_{i=1}^{t-1} w(v_i, v_{i+1}) - \max_{i=1}^{t-1} w(v_i, v_{i+1}) + \min_{i=1}^{t-1} w(v_i, v_{i+1})$$

特别的, 如果  $t = 1$ , 那么  $dis(P) = 0$ 。在这个新路径长度定义下, 请设计一个算法计算顶点 1 到图中所有顶点, 即点  $1, 2, \dots, n$  的最短路径长度。请描述算法的核心思想, 给出算法伪代码并分析其对应的时间复杂度。