李代数上同调

杨历

Contents

1 Introduction

矩阵群是一类具体的李群，可以用矩阵直接描述，因而不需要特别多的手段就可以处理它们李代数的上同调。

另外通过 (相对) 抽象的方式可以得到，一个紧李群 G(左) 作用在任意光滑流形 M 上，G 的李代数记为 $\mathfrak{g}$，则李代数上同调群 $H_L^*(\wedge^*\mathfrak{g}, d)$ 同构于 M 的 de Rham 上同调群 $H_{deR}^*(M)$，G 可以直接作用于自身，故可以用李代数上同调来计算 (紧) 李群上同调。

2 Defnitions

对于李群、正和列、(de Rham) 上同调群等概念不再阐述，感觉翻译很别扭的英文也不加翻译。

开始我们不要求 G 是紧的。我们给定作用 $G : G \times M \to M, (g, x) \mapsto g \cdot x$，于是每个 g 对应一个光滑映射 $L_g : M \to M, x \mapsto g \cdot x$，也给定了对应的 pull-back:$L_g^*$ 和 push-forward:dL_g。

Definition 2.1. *(left-invariant)*

(1) 左不变向量场：对于一个 M 上的向量场 $\tilde{v}$，称其左不变，如果 $\forall g \in G, dL_g(\tilde{v}) = \tilde{v}, i.e. \tilde{v}(f \circ L_g) =: dL_g(\tilde{v})(f) = \tilde{v}(f), \forall f \in C^\infty(M)$。具体地说，对任意的左作用 L_g，$\tilde{v}$ 在 x 处的取值 $\tilde{v}_x$ 被映射 dL_g 作用后等于 $\tilde{v}$ 在 $g \cdot x$ 处的取值 $\tilde{v}_{g\cdot x}$。而对这种情况我们有局部坐标的表述。注意 $dL_g(\tilde{v})_x = dL_g(\tilde{v}_{g^{-1}\cdot x})$。

(2) 左不变 *1*-形式 *(*对于 k-形式的情况的定义是可以通过作用于多个向量直接推广的*)*：$\omega = f(x)dx^i$ 是 M 上的 *1*-形式，称其左不变，如果 $\forall g \in G, L_g^*(\omega) = \omega, i.e. \forall x \in M, \forall v \in T_xM(accordingly, dL_g(v) \in T_{g\cdot x}M), L_g^*(\omega)_x(v) := \omega_{g\cdot x}(dL_g(v)) = L_g^*(\omega)_{g\cdot x}(dL_g(v))$。具体地说,$L_G^*(\omega)$ 在 x 的取值 $L_G^*(\omega)_x$ 作用于 v 后的值 $L_G^*(\omega)_x(v)$, 等于 $L_G^*(\omega)$ 在 $g \cdot x$ 的取值 $L_G^*(\omega)_{g\cdot x}$ 作用于 $dL_g(v)$ 的取值 $L_G^*(\omega)_{g\cdot x}(dL_g(v))$。

Remark 1. *(*我们所需要的作用于自身的情况*)*

(1) 注意形式的 *pull-back* 一般说来需要 *globally defined*，我们可以直接考虑一个向量场在一点的值 *(*即一个向量*)* 被 *push-forward*，但一般不直接考虑一个形式在一点处的值被 *pull-back*。

(2) 如果 G 以通常的乘法作用于自身，对于左不变向量场我们有更简单的描述如下：对于 G 我们有单位元 e。如果 $\tilde{v}$ 是一个左不变向量场，

则一定有 $\tilde{v}_g = dL_g(\tilde{v}_e)$，反过来，对于 $\forall v \in T_eG$，定义 $\tilde{v}_g = dL_g(v)$，则 $\forall g, h \in G, dL_g(\tilde{v}_h) = dL_g(dL_h(v)) = d(L_g \circ L_h)(v) = dL_{gh}(v) = \tilde{v}_{gh}$，即 $\tilde{v}$ 是左不变向量场，故有中向量与左不变向量场的一一对应，事实上如果清楚向量场、向量的 Lie 括弧运算的定义，它们作为李代数完全是同构的。

3 Main Theorem

有了这些概念之后我们就可以考虑 $\mathfrak{g}$ 的上同调了。考虑到李代数的元素其实是一些左不变向量场，我们可以作它们的对偶，得到一些 1-形式，它们属于 $\mathfrak{g}^*$，同样的我们可以对这些 1-形式作 wedge product，得到 $\wedge^*\mathfrak{g}^*$，于是可以把外微分算子搬到 $\mathfrak{g}^*$ 上：$d : \wedge^k\mathfrak{g}^* \to \wedge^{k+1}\mathfrak{g}^*, \omega \mapsto d\omega$，得到一个正和列，就可以作上同调。

Remark 2. 另一方面，我们可以直接考虑 G 的所有左不变形式 $\Omega_L^*(G)$，由于 $\mathfrak{g}$ 可以理解为 T_eG，故可以有线性同构 $\tau : \Omega_L^*(G) \to \wedge^*\mathfrak{g}^*, \omega \mapsto \omega_e = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_k}$，其中 ω^i 是 e_i 的对偶基。这样我们同样能把外微分算子转移到 $\wedge^*\mathfrak{g}^*$ 里。这里过程略去，只要注意到左不变形式沿左不变向量场取值为常数以及左不变向量场与单位元处切空间的对应。于是我们有左不变形式的上同调群 $H_L^*(G)$ 与李代数上同调群 $H^*(\wedge^*\mathfrak{g}^*, d)$ 的同构。

接下来，我们给出一个说明在紧的情形下，$H_L^*(M)$ 与 $H_{deR}^*(M)$ 的定理，于是在 G 为紧以及 G 作用于自身的情况下，我们可以得到 $H_{deR}^*(G)$ 与 $H^*(\wedge^*\mathfrak{g}^*, d)$ 的同构。这使得我们可以用李代数上同调群计算对应紧李群的上同调。

此部分未完不知道续不续……

4 The Matrix Group Case

对于矩阵群 $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$,我们有很方便的计算其李代数 $\mathfrak{g}$ 的上同调的方法。

直接考虑 $\tilde{e}_{ij} = XE_{ij}, X \in G$，这张成了 G 上的左不变向量场，即其李代数 $\mathfrak{g}$。考虑这个集合的对偶，我们记为 α_{ij}。

Theorem 4.1. $\alpha_{ij} = (X^{-1}dX)_{ij}$。这里 X 为未定元，而 dX 也就代表对 X 的每个位置作外微分运算。

Proof. 即是检验 $(X^{-1}dX)_{mn}(\tilde{e}_{kl}) = \delta_{mk}\delta_{nl}$，而 $(X^{-1}dX)_{mn}, \tilde{e}_{kl}$ 均能写成求和的形式，再加上线性性，于是可以展开，之后是 trivial 的矩阵的计算，检验即可 (其实都是懒得敲……)。 □

到这里，我们就只需要算 $\alpha_{ij} = (X^{-1}dX)_{ij}$ 这些项的微分，然后得到每个 d_k 的 $\mathcal{I}m, \mathcal{K}er$，然后求出 $\mathfrak{g}$ 的上同调群 $H^*(\wedge^*\mathfrak{g}^*, d)$，再通过之前的叙述就得到同构的 G 的上同调群 $H^*_{deR}(G)$。在给出例子前有个常用到的式子，我们记 $\alpha = X^{-1}dX$。

Theorem 4.2. $dX^{-1} = -X^{-1}dXX^{-1}$。

Corollary 4.3. $d\alpha = -\alpha \wedge \alpha$。

Proof. $0 = dI = d(XX^{-1}) = (dX)X^{-1} + X(dX^{-1})$
$\Rightarrow X(dX^{-1}) = -(dX)X^{-1}$
$\Rightarrow dX^{-1} = -X^{-1}dXX^{-1}(X \in GL_n(\mathbb{R}), invertible)$

$d\alpha = d(X^{-1}dX) = dX^{-1} \wedge dX$
$= -\alpha X^{-1} \wedge dX = -\alpha \wedge X^{-1}dX = -\alpha \wedge \alpha$ □

Remark 3. *(关于 $d(XY)$)*
由于作外微分是对每个位置作，所以对比一下矩阵乘法的运算法则，这个法则也是成立的。

5 Example(s)

未完待续……